БОЖИДАР ЂЕРАСИМОВИЋ

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

ЗА ВИШИ ТЕЧАЈНИ ИСПИТ

(СА РЕШЕЊИМА, УПУТСТВИМА И РЕЗУЛТАТИМА)

НОЛИТ
БЕОГРАД
1956

Прегледали:

Референт: *Ернест Стипанић*
доцент Грађевинског факултета у Београду

Рецензенти:
Зорија Булатовић
предавач Технолошког факултета у Београду
Олга Митриновић
професор гимназије у Београду

Овај рукопис одобрио је за употребу у школама Савет за просвету и културу Народне Републике Србије одлуком број 13439 од 12 децембра 1955 године.

Илустровао: *Петар Илић*

ПРЕДГОВОР

Ова збирка задатака намењена је пре свега понављању цел купног градива из математике у завршном разреду средње школе припреми ученика за завршни испит, али она може корисно послужит и ученицима осталих разреда.

Основни циљ понављања, а нарочито понављања у завршно разреду, је повезивање и продубљивање пређеног градива, па је збирк тако и састављена. Већина задатака односи се на више дисциплин елементарне математике. Многи проблеми посматрају се упоред алгебарски и геометриски, тригонометриски и аналитичком методо итд. Стога се већина задатака састоји из више делова, који се мог решавати један за другим или независно један од другог. Такв задаци могу, на први поглед, изгледати сувише сложени, али с неопходни, јер се јединство математике, повезаност њених разни дисциплина, може схватити и усвојити само проучавањем истог про блема помоћу разних метода.

Пошто је поновио основне рачунске поступке, методе, правил и теореме из једног одељка математике, ученик може приступит решавању задатака из одговарајућег одељка ове збирке. Притом упочетку, ученик не мора да решава све делове истог задатка, нег само поједине. Постепено, како тече понављање, ученик ће најза моћи да решава и целе задатке.

Напомиње се да су за задатке под бројевима 1, 16, 26, 41, 5 86, 100, 101, 133, 146, 151, 207, 240 и 246 дата пуна решења, те с препоручује ученику да прелазећи на нови одељак решава прво о задатке.

*

Наставницима математике препоручујем литературу која је мени, приликом састављања збирке, служила за углед:

1) Серија уџбеника математике под заједничким насловом: *Cou de mathématiques par G. Cagnac et L. Thiberge.* (Издање *Masson et C-Paris.*)

2) *Traité d'algèbre élémentaire par V. Herbiet.* (Издање *Ad. We maël-Charlier, Namur,* 1955.)

Не могу пропустити прилику а да не истакнем значајну помоћ рецензената ове збирке, друга Зарије Булатовића, предавача Технолошког факултета у Београду и другарице Олге Д. Митриновић, професора гимназије у Београду, који су својим примедбама допринели подизању квалитета ове збирке. Нарочито сам захвалан другу Булатовићу, који је све задатке у збирци и сам решио и тако извршио контролу њихових резултата, а осим тога ми својим осталим примедбама помогао да збирку побољшам и у стручном и у методском погледу.

*

На крају молим наставнике математике који се буду служили овом збирком да ми укажу на недостатке и евентуалне грешке и да помогну даљем побољшању њеног квалитета.

12 децембар 1955
у Београду

Б. Ђ.

ЗАДАЦИ

АЛГЕБРА

1. Ако је n ма који природан број, онда је број

$$A = 14n^3 + 51n^2 + 7n$$

дељив са 6. Доказати.

2. Доказати да је сваки број облика

$$A = n^2(n^2-1)(n^2-4)$$

дељив са 360, ако је n природан број већи од 2.

3. Дата су три броја

$$A = 2^n + 3^n, \quad B = 2^{n+1} + 3^{n+1}, \quad C = 2^{n+2} + 3^{n+2},$$

где је n природан број. Доказати:

a) да су A и B узајамно прости;

b) да су A и C или узајамно прости или им је заједничи чинилац број 5.

4. 1° Проверити идентичност:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2 \equiv (cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2$$

2° Написати специјалне облике ове идентичности ако је

a) $a=b=c$; b) $z=c=0$; c) $x=b, \quad y=c, \quad z=a$.

3° На основу дате идентичности показати да је једначина

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$$

задовољена само ако је

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

5. 1° Одредити реалан број m тако да полином

$$x^3+y^3+z^3-mxyz$$

буде дељив полиномом $x+y+z$.

2^0 На основу резултата под 1^0, показати да је једначина

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=0$$

задовољена ако је $x+y+z=0$.

3^0 На основу резултата под 2^0, доказати идентичност

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 \equiv 3(b-c)(c-a)(a-b).$$

6. Упростити израз

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}, \qquad a>0, \quad b>0, \quad c>0$$

ако је $c^2=a^2+b^2-2kab$, где је k реалан број. Наћи услов да P буде реално. Дати геометриско тумачење.

7. 1^0 Ако реални бројеви a, b и c $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$ задовољавају једначину $a+b+c=0$, онда је задовољена и једначина

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

Доказати.

2^0 Да ли вреди и обрнуто, тј. да ли из друге једначине следује прва?

8. Ако три различита броја α, β и γ задовољавају једначине

$$\alpha^3+p\alpha+q=0, \quad \beta^3+p\beta+q=0, \quad \gamma^3+p\gamma+q=0,$$

онда су везани релацијом $\alpha+\beta+\gamma=0$. Доказати.

9. Коефицијенте a, b, c и d одредити тако да се производ

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$$

сведе на бином састављен од четвртог степена променљиве x и независног члана.

10. Одредити p и q тако да полином x^4+px^2+q буде дељив полиномом x^2+px+q.

11. Одредити коефицијенте a и b тако да деоба полинома

$$2x^5-ax^4+bx^2-7$$

са $x-1$ даје остатак 2, а деоба истог полинома са $x-2$ остатак 61.

12. 1^0 Дискутовати и решити једначину

$$\frac{x+2}{x^2-3x}+\frac{x+\alpha}{x^2+3x}=\frac{2x+\beta}{x^2-9},$$

где су α и β реални параметри.

2^0 Дискусију претставити графички у равни $\alpha O\beta$, сматрајући да сваки пар вредности α, β претставља једну тачку $M(\alpha,\beta)$ у тој равни.

13. 1^0 Дискутовати и решити систем једначина

$$ax-3y=a, \quad (a-4)x+(a-7)y=-6,$$

где је a реалан број.

2^0 Дискусију приказати графички.

14. Наћи геометриско место тачака $M(\alpha,\beta)$ у равни $\alpha O\beta$ које систем

$$\alpha x+(\beta-2)y=5\alpha, \quad \beta x+4y=3-\beta$$

нема решења. Издвојити тачке добијене криве које немају траже особину.

15. Познат је обим разностраног троугла $2s$. Ако над најмањ страном овог троугла конструишемо равнострани троугао, његов об је за 5 мањи од обима датог троугла. Али ако равнострани троуг конструишемо над највећом страном, његов обим је за 6 већи обима датог троугла.

1^0 Изразити стране посматраног разностраног троугла у фу ції обима $2s$.

2^0 Које вредности може имати обим $2s$ да троугао постој (Проба за $2s=14$ и $2s=8$.)

16. Дате су стране a, b и c $(a<b<c)$ троугла ABC. Над њи конструисати сличне правоугаонике тако да површина правоугаони над највећом страном премашује збир површина два остала површину квадрата дате стране m. Наћи висине ових правоугаони Дискусија према величини дужи m.

17. Дат је троугао ABC, основице $AB=c$ и одговарајуће висине На растојању x од основице, где је x дата дуж, повучена је парале PQ која страну AC сече у P, а страну BC у Q, па су најзад повуче дужи BP и AQ које се секу у тачки O.

1^0 Доказати да су површине троуглова AOP и BOQ једнаке.

2^0 Изразити површину P троугла ABO у функцији од c, h и па одредити x тако да површина P има вредност kP_0, где је $k \leqslant$ позитиван број, aP_0 површина троугла ABC. У специјалном случа кад је $x=\frac{h}{2}$, наћи k и протумачити резултат.

18. Дат је разломак $\frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

1^0 За колико се повећа или смањи дати разломак кад се бројио и имениоцу дода исти позитивни број m? Дискусија.

2^0 Одредити m тако да нови разломак има унапред дату вр ност x. При томе разликовати вредности x које нови разлом постиже за позитивне и које постиже за негативне вредности m.

3^0 Доказати неједнакости:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1, \text{ уз } b>a>0,\ m>0;$$

$$1<\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}, \text{ уз } a>b>0,\ m>0.$$

19. 1° Доказати неједнакост:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2, \text{ уз } a>0,\ b>0.$$

2° Користећи доказану неједнакост, доказати и другу:

$$ab\,(a+b)+bc\,(b+c)+ac\,(a+c)\geqslant 6\,abc,\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

20. Доказати идентичности:

1° $\log_b a\cdot\log_a b=1.$

(Проверити за $a=8,\ b=\frac{1}{4}.$)

2° $\log_c a=\log_b a\cdot\log_c b.$

21. 1° Знајући да је $a^4+b^4=47a^2b^2$, где су a и b позитивни бројеви, показати да је

$$\log\,(a+b)=\frac{1}{2}\,(\log a+\log b)-\log\frac{1}{3}.$$

2° У општем случају, кад дата релација има облик $a^4+b^4=ka^2b^2$, наћи услов који мора задовољавати реални број k, да би се $\log\,(a+b)$ могао на исти начин и са реалним коефицијентима изразити помоћу $\log a$ и $\log b$.

22. Позитивни бројеви x, y и z задовољавају једначину

$$\log\,(x+y+z)=\log x+\log y+\log z.$$

1° Ако су x и y дати, наћи z.

2° Ако се зна да су x и y корени једначине $x^2-ax+b^2=0$, где су a и b позитивни бројеви, наћи z у функцији од a и b. Који услов морају задовољавати a и b да одговарајућа вредност за z буде реална и позитивна?

3° Ако три броја, x, y и z, задовољавају дату једначину, онда је производ ма која два од ових бројева већи од 1, а збир ма која два већи од 2. Доказати.

4° Како се на основу једне познате тригонометриске идентичности о угловима троугла могу изразити x, y и z?

23. Решити једначину:

$$\frac{2}{x+a}-\frac{b-1}{bx}=\frac{1}{bx-b^2}+\frac{1}{bx-x^2}.$$

Да ли је једначина која се добија множењем обеју страна дате једначине заједничким имениоцем еквивалентна датој?

24. Решити једначину:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=-1.$$

25. Решити и дискутовати једначину

$$\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{a},$$

где је a позитиван параметар.

26. 1° Решити једначину

$$\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=c,$$

где су a, b и c позитивни бројеви. Наћи услове: а) да корени да[т] једначине буду реални; b) да добијена рационална једначина бу[д] еквивалентна датој.

2° Графички дискутовати дату једначину стављајући

$$y_1=\sqrt{a^2-x^2},\ y_2=c-\sqrt{b^2-x^2}$$

и сматрајући a и b као сталне, а c као променљив број. Притом [...] графицима функција y_1 и y_2 узети у обзир само оне делове ко[ји] одговарају датим знацима пред квадратним коренима. Дискуси[ју] базирати на посматрању троугла чија су два темена (0, 0) и (0, [...] а треће теме заједничка тачка графика функција y_1 и y_2.

27. Одредити параметар a тако да једначине $x^2+ax+1=0$ [...] $x^2+x+a=0$ имају бар један заједнички корен.

28. 1° Одредити a, b и c тако да задовољавају једначину

$$(a-c)^2+(b-c)^2=(a-b)^2.$$

2° Ако је притом b аритметичка средина за a и c, колики [...] онда a и c?

29. Одредити x, y и z тако да задовољавају једначину

$$x^2-xz+z^2=y^2$$

и да y буде геометриска средина за x и z.

30. Одредити a и b тако да задовољавају једначину

$$\sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}}=\frac{1+a}{1+b}.$$

31. 1° Наћи два коњуговано-комплексна броја од којих је јед[ан] квадрат другога.

2° Наћи два броја од којих је сваки квадрат другог. На осно[ву] тога показати да су комплексни бројеви тражени под 1° коре[ни] биномне једначине $x^3-1=0$.

32. Ако четири броја, α, β, γ и δ, задовољавају релације

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\qquad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=0,$$

онда су то два пара супротних бројева. Доказати.

33. Дат је квадрат $OABC$ стране $OA=1$, па је уочена произвољна тачка M стране OA. Нормала подигнута у тачки B на дуж MB сече продужење стране OA у P, а продужење стране OC у Q. Нека је $OM=x$, $OP=y$, $OQ=z$.

1° Доказати релацију:

$$\log(y+z)=\log y+\log z.$$

2° Изразити y и z као функције од x.

3° Одредити положај тачке M тако да буде $PQ=\frac{5\sqrt{13}}{6}$.

34. Дат је правоугаоник $ABCD$ са странама $AB=a, BC=b$, $(a\geqslant b)$. На његове стране, почев од темена A и C, пренета је иста дуж x $(x\leqslant b)$, тако да је, идући у директном смеру, $AM=NC=CP=QA=x$.

1° Показати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

2° Изразити његову површину у зависности од a, b и x, па одредити дуж x тако да површина буде једнака површини квадрата чија је дијагонала једнака аритметичкој средини страна правоугаоника.

3° Најзад одредити дуж x тако да четвороугао $MNPQ$ буде ромб. Наћи услов који морају задовољавати стране правоугаоника да би тако уписани ромб постојао.

35. Полукруг пречника $AB=2R$ пресечен је правом DE, која је паралелна са пречником (тачке D и E су на полукругу). Одредити положај тачке D тако да буде $AD+DE=R\sqrt{2}$. Ставити $AD=x$.

36. Дат је правоугли троугао ABC чије су катете $CB=a$ и $CA=b$. На катети CB уочена је тачка M; нека је $CM=x$ $(0\leqslant x\leqslant a)$. Одредити положај тачке M тако да дуж AM буде геометриска средина за катету CB и њен отсечак MB. Дискусија.

37. Дате су две међу собом управне полуосе Ox и Oy, на њих је пренета иста дата дуж $OA=OB=a$. Нека је, затим, $M(x, y)$ једна произвољна тачка.

1° Изразити у функцији од a, x и y површину четвороугла $MAOB$.

2° Наћи услов који морају задовољавати x и y ако је троугао MAO правоугли, са правим углом у тачки M. Услов протумачити геометриски.

3° Одредити положај тачке M тако да површина четвороугла $MAOB$ буде једнака половини површине квадрата стране a, а да притом ΔMAO буде правоугли, са правим углом у тачки M.

38. 1° Доказати неједнакост

$$a^2+b^2+c^2\geqslant bc+ca+ab,$$

г десу a, b и c реални бројеви. Посебно посматрати гранични случај кад наступи једнакост, па у том случају одредити a, b и c.

2° Користећи неједнакост под 1°, доказати да су корени ј начине

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

увек реални, ма које реалне вредности имали параметри a, b

39. Одредити реалан параметар a тако да оба корена једнач

$$ax^2-2(a+6)x+4a=0$$

буду негативна.

40. Дата је једначина

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{x-c},$$

где су a, b и c позитивни, међу собом различити бројеви $(a>b)$.

1° Дискутовати реалност корена и решити дату једначину.

2° Који услов задовољавају a, b и c ако су оба корена позитив

41. Дискутовати реалност и знаке корена једначине

$$x^2-4(a-1)x+2a=0$$

кад се реалан параметар a мења.

42. Дискутовати реалност и знаке корена једначине

$$(a-2)x^2-2ax+3(a-3)=0$$

кад се реалан параметар a мења.

43. Дата је једначина

$$ax^2-x+\frac{\log a}{a}=0,$$

где је a позитиван број, а логаритамска основа 10. Одредити a т да једначина: a) има реалне корене; b) два позитивна кор c) једнаке корене. У последњем случају решити једначину.

44. Дат је збир катета $a+b=s$ и хипотенуза c правоу троугла.

1° Формирати квадратну једначину чији су корени катете.

2° Посматрајући реалност корена те једначине, доказати д збир катета правоуглог троугла увек мањи од дијагонале квад конструисаног над хипотенузом, а највише једнак тој дијагон

3° Користећи неједнакост под 2°, доказати и неједнакост

$$1\leqslant\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2},$$

где је $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$.

45. Одредити коефицијенат c тако да корени једначине

$$ax^2+bx+c=0$$

задовољавају релацију $ax_1+bx_2+c=0$. Дискусија.

46. Нека је $M(\alpha, \beta)$ тачка у равни $\alpha O \beta$.

1° Показати да једначина

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$$

има реалне корене, ма где се у равни $\alpha O \beta$ налазила тачка M.

2° Наћи геометриско место тачака M тако да корени дате једначине задовољавају релацију:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1.$$

47. Дата је једначина $x^2-ax+a+2=0$, где је a реалан параметар.

1° Формирати другу квадратну једначину по y, чији су корени

$$y_1=x_1+\frac{1}{x_2}, \qquad y_2=x_2+\frac{1}{x_1}.$$

2° Наћи количник дискриминаната нове и старе једначине и показати да је он увек позитиван, осим за $a=-3$. Шта се из тога може закључити?

3° Одредити параметар a тако да један корен нове једначине буде три пута већи од другог.

48. У једначинама $x^2-ax+b-4=0$, $y^2-by+a-\frac{1}{4}=0$ одредити реалне параметре a и b тако да корени једне од њих буду реципрочне вредности корена друге.

49. Дат је систем једначина:

$$x^2+y^2-x=0, \quad x+ay-a=0,$$

где је a реалан параметар.

1° Дискутовати реалност решења.

2° Ако су x_1, y_1 и x_2, y_2 два пара решења који одговарају истој вредности параметра a, одредити вредност тог параметра тако да буде $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$ и решити систем.

50. 1° Дискутовати број парова реалних решења система

$$x^2+y^2-2ax=0, \quad x^2+4y^2-4=0$$

кад се позитиван параметар a мења.

2° Исту дискусију извршити и графички.

3° Решити систем за $a=\frac{13}{8}$.

51. Дате су једначине:

$$x^2-px+q=0, \quad y^2-\sqrt{p+2\sqrt{q}}\; y+\sqrt{q}=0,$$

где су p и q позитивни бројеви.

1° Поставити услове за реалност корена датих једначина, показати да су ти услови међу собом идентични, тј. да су коре једне једначине реални кад и корени друге, и обрнуто.

2° Наћи везу која постоји између корена датих једначина.

3° Користећи ту везу и дате једначине, наћи по једну вредно $\sqrt{3+4i}$ и $\sqrt{i}$.

52. Дата је једначина

$$x^2-2(a+1)x+3a+2=0,$$

где је a реалан параметар.

1° Дискутовати реалност решења.

2° Наћи везу између корена x_1 и x_2 која је независна од па метра a.

3° На основу те везе одредити корене дате једначине тако буду једнаки.

4° Одредити вредност параметра a тако да збир корена да једначине буде једнак збиру њихових кубова.

53. Дата је једначина $x^2+(3a-1)x+a=0$, где је a реал параметар.

1° Изразити један корен дате једначине као функцију друг

2° Наћи размак у коме се мора налазити један од њих да други био позитиван.

3° Наћи корене знајући да је један по апсолутној вредно шест пута већи од другог.

54. Дата је једначина $x^2+(m-2)x-(m+3)=0$, где је m реалан бр

1° Одредити m тако да буде $x_1{}^2+x_2{}^2=k$, где је k дати по тиван број.

2° У којим се границама може налазити k да тражена вредно броја m буде реална?

3° Нека су x_1, x_2 и x_1', x_2' два пара решења дате једначине нека је $x_1{}^2+x_2{}^2=x_1'^2+x_2'^2$. Показати да је тада $x_1x_2+x'_1x_2'=8$.

55. Дата је једначина

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-2a}=1,$$

где је a реалан параметар.

1° Показати да су корени дате једначине реални ма коли било реално a.

2° Одредити a тако да буде

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=k,$$

где је k дати реалан број. Које вредности може имати k да би одг варајуће вредности параметра a биле реалне?

3° У којим границама мора лежати k да обе одговарајуће вредности a буду позитивне?

56. Дате су стране троугла a, b и c $(a>b>c)$. Наћи дуж x коју би требало одузети од сваке стране датог троугла да би троугао који чине тако смањене стране био правоугли. Дискусија.

57. Дат је равнострани троугао ABC. На његовој страни $AB=a$ уочена је произвољна тачка M; из те тачке спуштена је нормала MP на страну BC, а нормала MQ на страну AC. Нека је $AM=x$.

1° Изразити дуж PQ и површину троугла MPQ у функцији од a и x.

2° Одредити положај тачке M тако да дуж PQ има дужину kh, где је k дати позитивни број, а h висина троугла ABC. У којим границама мора лежати k да задатак буде могућ?

3° Одредити положај тачке M и тако да површина троугла MPQ има вредност λP, где је λ дати позитивни број, а P површина троугла ABC. У којим границама мора лежати λ да задатак буде могућ?

58. Дати круг полупречника r додирује дату праву у непокретној тачки P. На тој правој са разних страна тачке P уочене су тачке B и C. Нека је $PB=x$, $PC=y$ $(x>0,\ y>0)$.

1° Наћи везу која постоји између x и y ако тангенте повучене из тачака B и C на дати круг стоје нормално једна на другој.

2° Одредити тада x и y под условом: a) да је њихов збир сталан $x+y=a$; b) да висина h троугла BCA има дату дужину h. Дискусија у оба случаја.

59. Позната је ивица правоуглог паралелепипеда a, његова површина $P=6a^2$ и запремина $V=\lambda a^3$, где је λ дати позитивни број. Наћи непознате ивице. Дискусија према вредности λ. Може ли се λ тако изабрати да те две ивице буду међу собом једнаке?

60. Дат је правилан тетраедар $SABC$ ивице a. Кроз висину SO постављена је раван која сече у M и N ивице AB и AC. Нека је $AM=x$, $AN=y$.

1° Доказати да a, x и y задовољавају релацију:

$$a(x+y)=3xy.$$

2° Одредити x и y тако да збир површина троуглова AMS, ANS и AMN износи $\frac{4}{9}$ површине тетраедра.

61. Дат је квадратни трином $ax^2+2bx+c$, где су a, b и c реални бројеви.

1° Одредити m тако да полином $ax^2+2bx+c+m(x^2+1)$ буде потпун квадрат.

2° Показати да квадратна једначина, из које се у том случају одређују вредности за m, има увек реалне корене.

62. Дат је трином

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2,$$

где су a, b и c мерни бројеви страна једног троугла.

1° Показати да је дати трином позитиван за све реалне вредности променљиве x.

2° Коју релацију задовољавају позитивни бројеви a, b и c ако је дати трином потпун квадрат?

63. У којим се границама налази параметар a ако трином

$$(a-2)x^2-2ax-(a+3)$$

за све реалне вредности променљиве x има исти знак?

64. У којим се границама могу мењати реалне променљиве x и y ако задовољавају једначину

$$x^2-4xy+5y^2-2x-2y+1=0?$$

65. Дат је равнострани троугао ABC стране a. Из тачке M на страни AB повучене су дужи $MP \parallel AC$ и $MQ \parallel BC$ тако да тачка P лежи на страни BC, а тачка Q на страни AC.

1° Изразити дужи MP и MQ као функције од $AM=x$ и показати да је $MP+MQ=a$.

2° Изразити растојање $PQ=c$ као функцију од x и наћи његову најмању могућу вредност.

66. Нека је M произвољна тачка дате дужи $AB=a$. Над $AM=x$ конструисан је квадрат $AMCD$, па је над дужи BC опет конструисан квадрат $BEFC$. Одредити положај тачке M тако да површина шестоугаоника $ABEFCD$ буде што мања.

67. У троуглу ABC познате су две стране $BC=a$, $AC=b$ и висина $CD=h$.

1° На датој висини наћи тачку M тако да збир квадрата њених растојања од темена троугла има најмању могућу вредност. (Ставити $MD=x$.)

2° Ако је дати троугао равностран, изразити величину добијеног минимума помоћу стране a троугла.

68. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије су стране $AB=a$, $BC=b$ $(a\geqslant b)$. Почев од темена A, идући по правоугаонику у директном смеру, пренета је на све четири стране иста дуж:

$$AM=BN=CP=DQ=x \quad (x\leqslant b).$$

1° Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

2° Изразити површину тога четвороугла у функцији од a, b и x па одредити x тако да та површина има екстремну вредност.

3° Најзад, одредити x и тако да буде $\sphericalangle AMQ=\sphericalangle NMB$. Колика је тада површина четвороугла $MNPQ$?

69. Дат је равнострани троугао ABC стране a. Из тачке M стране AB спуштена је нормала MN на страну BC, затим нормала NP на страну CA и најзад нормала PQ на страну AB. Ставити $MB=x$.

1° Изразити површину четвороугла $MNPQ$ помоћу a и x, затим одредити положај тачке M тако да та површина буде што је могуће већа.

2° Одредити x и тако да се четвороугао $MNPQ$ сведе на троугао *поклапањем тачака Q и M.*

70. Дата је дуж $AB=a$, па је почев од њених крајева пренета произвољна дуж $x\left(x<\frac{a}{2}\right)$ тако да је $AM=NB=x$. Над дужима AM и NP конструисани су квадрати $AMCD$ и $NBEF$. Најзад је повучена дуж AE која страну MC првог квадрата сече у P, а страну NF другог у Q. Изразити површину четвороугла $MNQP$ као функцију од a и x, па нацртати график добијене функције кад се x мења. Који део графика одговара овако постављеном геометриском проблему.

71. Дата је дуж BC и тачка A на њој тако да је $BA=4$ cm, $AC=6$ cm. У тачкама A, B и C подигнуте су нормале на дуж BC, па је кроз тачку D на средњој нормали ($AD=4$ cm) повучена права која нормале подигнуте у B и C сече у тачкама M и N. Добијени трапез $BCNM$ ротира око праве BC. Одредити положај праве MDN тако да запремина добијене зарубљене купе буде што мања.

72. Које све вредности може имати разломак

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$

кад x узима све могуће реалне вредности?

73. Наћи највећу и најмању вредност разломка

$$\frac{x+a}{x^2+1}$$

кад се реална промењлива x мења. За које вредности промењливе x дати разломак постиже те вредности?

74. Дата је једначина $x^2-ax+(a-3)^2=0$, где је a реалан параметар.

1° Испитати реалност корена кад се a мења.

2° Посматрати већи корен дате једначине x_1 као функцију од a, па наћи његову највећу могућу вредност. Може ли се у исто време наћи и најмања вредност мањег корена? Наћи и одговарајуће вредности параметра a.

75. Реалне величине x и y задовољавају једначину

$$x^2+xy+y^2=9.$$

Одредити њихове вредности тако да израз $m=2x+y$ има највећу могућу вредност; наћи ту вредност.

76. Збир првих n чланова једног реда дат је обрасцем:

$$S_n=9{,}5\,n^2-89{,}5\,n.$$

1° Наћи општи члан тога реда и показати да је аритмет
ред. Колики су његов први члан и разлика?

2° Показати да у посматраном реду постоји један члан кој
два пута већи од збира свих претходних чланова, наћи тај члан.

77. Дат је низ

$$\frac{m^2-1}{m},\ m,\ \frac{m^2+1}{m},\ \frac{m^2+2}{m},\ldots,$$

где је m дати природан број.

1° Наћи n-ти члан a_n и збир S_n првих n чланова тога низа.

2° Написати изразе за a_n и S_n кад је $n=m$, па показати д
S_m цео број дељив са 25 увек кад је $m=10\,k+1$, где је k ма
природан број.

78. На полуоси Ox обележено је $n+1$ тачака $A, B, C, \ldots, M,$
тако да је $OA=AB=BC=\ldots=MN=NP=a$, где је n дати приро
број, а a дата дуж. Осим тога уочена је на истој полуоси и
извољна тачка Q $(OQ=x)$.

1° Формирати збирове:

$$S=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\cdots+\overline{MP}^2+\overline{NP}^2,$$
$$S'=\overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\cdots+\overline{MQ}^2+\overline{NQ}^2,$$

па њихову разлику $S-S'$ изразити као функцију од a и x.

2° Одредити положај тачке Q тако да разлика $S-S'$ има нај
могућу вредност.

79. Из једне тачке пође одређеним правцем неко тело, кој
креће једнако убрзано, тако да у првој секунди пређе a cm, а у св
даљој по h cm више. После p секунди, пође из исте тачке у ис
правцу друго тело које се креће једнолико, брзином c cm/sec.

1° Под којим условом и кад друго тело стиже прво? Дискус

2° Шта бива после тога? Дати целу слику кретања.

3° Специјалан случај: $a=3$, $h=2$, $c=20$.

80. 1° Ако бројеви a, b и c чине геометриски низ, они зад
љавају једначину $(a+b+c)\,(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$. Доказати.

2° Користећи дату једначину, поставити квадратну једна
чији су корени a и c, кад се зна збир s бројева a, b и c и
њихових квадрата m^2.

3° Доказати да задатак има реална решења само ако је з
вољен услов: $\frac{s^2}{3}\leqslant m^2\leqslant 3s^2$.

4° Наћи a, b и c, ако је $s=7$, $m^2=21$.

81. Стране троугла чине геометриски низ.

1° Доказати да количник тог низа задовољава неједнакост

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<q<\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

2° Одредити количник q тако да посматрани троугао буде правоугли.

82. Ако су дата три реална броја, a, b и c, одредити број x тако да бројеви $a+x$, $b+x$ и $c+x$ чине геометриски низ. Дискусија. Примена: $a=3$, $b=5$, $c=8$.

83. При спуштању у дубину земље (рудничка окна) атмосферски притисак се за сваких 8 m повећа за $0{,}1\%$ претходног.

1° Колики је притисак у окну дубоком 2400 m, рачунајући од морског нивоа, ако је притисак на њему 760 mm/Hg.

2° На којој би дубини притисак износио 3 атмосфере? ($\log 1{,}001 = 0{,}00043408$).

84. Запремина цилиндра шмрка за разређивање ваздуха износи $\frac{2}{5}$ запремине реципијента.

1° Колики је ваздушни притисак у реципијенту после једног покрета клипа (у оба правца), ако је почетни притисак био P_0? Колико процената првобитног притиска износи смањење?

2° Наћи ваздушни притисак у реципијенту после n покрета клипа.

3° Колико пута је потребно покренути клип да би се притисак у реципијенту спустио испод 12 mm/Hg, ако је првобитни притисак био 760 mm/Hg?

85. Збир бесконачног геометриског реда је $S=\frac{1}{2}$, а збир реда чији су чланови квадрати чланова првог реда је $S'=\frac{\sqrt{2}}{8}$. Доказати да је и други ред геометриски; наћи прве чланове и количнике оба реда.

86. Дат је бесконачан геометриски ред

$$(a+1)+(3-2a)+\cdots,$$

где је a реалан број.

1° Које вредности може имати a да би ред био конвергентан?

2° Наћи збир реда у том случају.

3° Одредити a тако да збир има најмању могућу вредност.

87. Ако се између свака два члана једног опадајућег бесконачног геометриског реда са позитивним члановима уметне по један нов члан, тако да сви заједно опет чине геометриски ред, онда збир реда постаје k пута већи, где је k дати позитивни број. Наћи количнике оба реда и показати да задатак има решења само ако је $0<k<2$. Применити на случај: $k=1\frac{1}{3}$.

88. Нека је ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... низ троуглова од којих сваки уписан у претходном тако да му темена леже на срединам страна претходног.

1° Наћи границу којој тежи збир површина ових троуглова, к њихов број неограничено расте, ако је позната површина P тр угла ABC.

2° Кад n бескрајно расте, онда се $\Delta A_nB_nC_n$ своди на једı тачку. Наћи положај те тачке.

89. Дат је круг полупречника r и n његових пречника ко граде међу собом једнаке углове. Из пресечне тачке A круга са је ним од пречника спуштена је нормала AB на следећи пречник (иду у директном смеру), затим из подножја B те нормале спуштена опет нормала BC на наредни пречник итд.

1° Наћи границу којој тежи дужина изломљене линије ABC.. ако се број нормала бескрајно увећава.

2° Наћи границу збира површина троуглова које захватају пол пречници и спуштене нормале.

90. Дата је права кружна купа полупречника основе R и висин h. У њој је уписана лопта, а паралелно са основом купе повучена ј тангентна раван лопте. У отсечену купу, између тангентне равни и врх уписана је опет лопта, затим на њу повучена тангентна раван ит

1° Показати да је однос сличности дужинских елемената пр отсечене купе према датој, или друге отсечене према првој, или трећ према другој итд.

$$k=\frac{s-R}{s+R},$$

где је s апотема дате купе.

2° Наћи полупречнике уписаних лопти $r_1, r_2, r_3, \ldots$ и полупре чнике $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ њихових додирних кругова са датом купом.

3° Наћи границе којима тежи збир површина и збир запремин уписаних лопти кад њихов број неограничено расте.

4° Наћи границу којој тежи збир обима и збир површина додир них кругова уписаних лопти.

91. Дат је правоугли троугао са катетама a и b, па је у њему уписан квадрат чије две стране леже на катетама. У преостала дв правоугла троугла уписани су на исти начин опет квадрати, а затим и у преостала четири троугла итд.

1° Доказати да за страну првог уписаног квадрата вреди образац

$$x_1 = \frac{ab}{a+b}.$$

2° Користећи тај образац, изразити у функцији од a и b стране x_2 и x_2' следећа два и стране x_3, x_3', x_3'' и x_3''' наредна четири квадрата.

3° Ако са p_1 означимо површину првог квадрата, са p_2 збир површина следећа два, са p_3 збир површина наредна четири итд., онда је $p_1+p_2+p_3+\ldots$ геометриски ред. Доказати то и наћи количник реда.

4° Показати да је тако формирани бесконачни геометриски ред конвергентан и наћи његов збир,

92. Један аритметички и један геометриски низ имају једнаке прве и једнаке треће чланове.

1° Наћи оба низа ако је други члан аритметичког низа a, а други члан геометриског g.

2° Које услове морају задовољавати a и g да би заједнички први и трећи чланови били реални и позитивни? Ти услови претстављају једну познату теорему. Која је то теорема?

93. Дата су три узастопна члана геометриског низа: 1, q и q^2, где је $q>0$.

1° Одредити број x тако да квадрати бројева $1-x$, $q-x$ и q^2-x чине аритметички низ. Показати да је број x позитиван ма колики био дати позитивни број q.

2° Изразити разлику новог низа као функцију датог броја q и поставити услов за q, да добијени аритметички низ буде растући. У којим границама тада лежи x? Специјалан случај: $q=\frac{1}{2}$.

94. Ако су α и β дати позитивни бројеви, одредити x, y и z тако да:

x, y, z чине геометриски низ,
$x, y+\alpha, z$ чине аритметички низ.
$x, y+\alpha, z+\beta$ чине опет геометриски низ.

Наћи прво количник првог геометриског низа. Дискусија.

95. Први, трећи и седми члан једног аритметичког низа чине геометриски низ.

1° Наћи количник геометриског низа.

2° Које место у аритметичком низу заузима четврти члан геометриског низа?

3° Наћи први члан и разлику аритметичког низа ако је збир његових првих 15 чланова $S_{15}=3$.

ПЛАНИМЕТРИЈА

96. Два круга истог полупречника секу се у тачкама A и
Кроз тачку A повучена је ма која права која један круг сече у тачки
а други у D. Доказати:

a) да је друга пресечна тачка B кругова подједнако удаљ
од тачака C и D;

b) да се дуж CD види из тачке B под сталним углом, независ
од правца праве CD.

97. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом у темену
Над катетама CA и CB, споља, конструисани су квадрати CD
и $CBFK$.

1° Повући дијагонале EC и CF ових квадрата, па доказати
тачке E, C и F леже на једној правој линији.

2° Спојити тачке D и K, па доказати да продужена хипо
нузина висина CC_1 пролази кроз средину M дужи DK.

3° Из темена E и F квадрата спустити нормале EE_1 и FF_1
продужења хипотенузе AB, па доказати да су дужине ових норм
једнаке хипотенузиним отсечцима: $EE_1=AC_1$, $FF_1=C_1B$.

98. У крајњим тачкама дужи $AB=2a$ подигнуте су у истом см
нормале Ax и By. Краци правог угла, чије се теме налази у средин
дужи AB, секу полуправу Ax у A', а полуправу By у B'. Повуч
је и дуж $A'B'$.

1° Доказати да је $\sphericalangle OA'B'=\sphericalangle AA'O$.

2° Доказати да је $A'B'=AA'+BB'$.

3° Из тачке O спустити нормалу OP на $A'B'$, наћи њену дуж
и утврдити какве је природе $\sphericalangle APB$. На основу тога наћи гео
триско место тачке P кад се прав угао $B'OA'$ окреће око свог тем
остајући у истој равни.

99. Око равностраног троугла ABC описан је круг. Доказати
свака тачка M лука BC има особину да је: $AM=BM+CM$.

100. 1° Висине сваког троугла су симетрале углова троугла
су темена подножја висина првог троугла. Доказати.

2° Конструисати троугао ако су дата подножја његових виси

3° У Декартовом правоуглом координатном систему наћи ко
динате темена троугла ако су познате координате подножја њего
висина $A_1\,(6{,}6)$, $B_1\,(2{,}3)$, $C_1\,(6{,}3)$.

101. 1° Угао између полупречника описаног круга око троу
повученог из једног темена троугла и стране која полази из ис
темена, комплементан је углу троугла који лежи наспрам те стр
ако је то оштар угао. Доказати. Како гласи правило ако насп
стране лежи туп угао?

2° Дат је круг пречника AB и његов произвољни полупречник OM. Нека су P и Q центри описаних кругова око троуглова AOM и BOM, а S нека је пресечна тачка правих AP и BQ. Служећи се теоремом датом под 1°, доказати: a) да тачка S лежи на датом кругу; b) да је $SM \parallel AB$; c) да тачке O, Q, M, S и P леже на истом кругу. Наћи центар K тога круга.

102. Око троугла ABC ($CA<CB$) описан је круг. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла у темену C секу страну AB и њено продужење у D и D_1. Тангента повучена на описани круг у темену C сече продужење стране AB у P.

1° Изразити углове CPA и PCA помоћу углова троугла ABC.

2° Доказати да симетрала угла CPA стоји нормално на симетрали угла ACB.

3° Доказати да је P средина дужи D_1D.

103. Дат је ΔABC. Нека су A_1 и B_1 подножја висина спуштених из темена A и B на стране BC и AC, а A_2 и B_2 пресеци продужења ових висина са описаним кругом око троугла ABC, чији је центар у O_0.

1° Доказати да је: $\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CAB$.

2° Доказати да је дуж A_2B_2 нормална на полупречнику OC.

3° Доказати да је дуж A_1B_1 паралелна са тангентом повученом на описани круг у темену C.

104. У троуглу ABC је: $\sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 90°$.

1° Доказати да је висина CD троугла ABC спуштена из темена C на AB тангента описаног круга око тог троугла.

2° Доказати да су дужине симетрала унутрашњег и спољашњег угла у темену C једнаке.

3° Посматрајући троуглове DAC и DBC, доказати да стране троугла ABC задовољавају релацију

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где је $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

4° Доказати да је могуће, ма какве биле дате дужи a и b ($a > b$), одредити дуж c тако да троугао ABC постоји.

5° Ако је $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, конструисати дуж c.

105. Дат је ΔABC чије су стране a, b и c. Почев од сваког темена, на продужење обеју страна које се у њему састају, пренета је дуж једнака страни троугла супротној томе темену. Шест добијених тачака темена су шестоугаоника.

1° Доказати да су по две супротне стране добијеног шестоугаоника паралелне.

2° Доказати да је центар уписаног круга у датом троуглу подједнако удаљен од свих темена шестоугаоника.

3° Полупречник описаног круга око шестоугаоника изра
у функцији полуобима s и полупречника r уписаног круга у д
троуглу, па затим у функцији страна a, b и c.

106. У теменима A и B равностраног троугла ABC подигну
на AB две нормале: Ax и By, обе у истом смеру и у истој полур
у којој је и ΔABC. Кроз теме C повучена је произвољна права, а
пресечне тачке са Ax и By нека су M и N. Најзад је конструи
симетрала дужи MN, а S нека је њен пресек са AB.

1° Доказати да је ΔMSN равностран.

2° Површину троугла MSN изразити у функцији од a и
$\varphi = \sphericalangle ACS$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 90°)$.

3° Одредити положај праве MN тако да површина тр
MSN буде: a) $\frac{4}{3} P_o$; b) $4 P_o$, где је P_o површина датог тро

107. Дат је косоугли троугао ABC. На највећој страни, A
изабрана је тачка D тако да је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC \,(= \alpha)$.

1° Доказати да је тада: a) страна $BC = a$ средња геомет
пропорционала за страну $AB = c$ и њен оближњи отсечак BD
b) дуж $CD = k$ четврта пропорционала за стране AB, BC и A

2° Како гласе ова правила и која се још нова додају а
$\sphericalangle ACB = 90°$?

108. У троуглу ABC угао у темену A два пута је већи од
у темену B.

1° Доказати да његове стране задовољавају релацију

$$a^2 = b\,(b + c),$$

где је $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

2° Ако се из темена C спусти висина CC_1, па се стран
продужи преко темена A за дужину $AD = AC_1$, повуче права
и продужи до пресека O са страном BC, онда је $OB = OC =$
Доказати.

109. Кроз теме D паралелограма $ABCD$ повучена је произв
права која дијагоналу AC сече у S, страну AB у P, а стран
у Q. Доказати: a) да је $\overline{DS}^2 = SP \,.\, SQ$; b) да производ $AP \,.\, C$
сталну вредност, исту за све могуће сечице повучене кроз те

110. Висина неког правоуглог трапеза је средња геомет
пропорционала паралелних страна.

1° Доказати: a) да су дијагонале тога трапеза нормалне
на другој; b) да је збир квадрата његових паралелних страна је
збиру квадрата непаралелних страна.

2° Ако се у посматрани трапез може уписати круг полу
ника r, изразити стране трапеза у функцији од r.

111. 1° У неком правоуглом трапезу дијагонала је нормална на краку. Доказати: a) да је та дијагонала средња геометриска пропорционала паралелних страна; b) да је квадрат једне паралелне стране једнак збиру квадрата три остале стране трапеза.

2° Изразити површину овог трапеза као функцију паралелних страна a и c.

112. У правоуглом троуглу ABC уочена је произвољна тачка M на хипотенузи AB; из ње су спуштене нормале MP и MQ на катете CB и CA. Доказати да тада вреде релације:

a) $$\frac{\overline{PB}^2}{\overline{MB}^2}+\frac{\overline{QA}^2}{\overline{MA}^2}=1;$$

b) $$MA.MB=PB\cdot PC+QA.\,QC.$$

Како би се ова друга релација могла протумачити геометриски?

113. Ако се на дијагоналу неког правоугаоника спусте нормале из крајњих тачака друге дијагонале, онда је отсечак прве дијагонале између подножја нормала једнак мањој страни правоугаоника.

1° Изразити стране посматраног правоугаоника у функцији од дијагонале.

2° Наћи углове које дијагонала захвата са странама и конструисати правоугаоник.

3° Наћи површину тела које постаје обртањем посматраног правоугаоника око дијагонале ако је позната дужина дијагонале.

114. 1° Ако се у правоуглом трапезу (паралелне стране a и c, $c<a$; крак b, висина h) може уписати круг, онда су задовољене релације:

$$b=\frac{a^2+c^2}{a+c}, \qquad h=\frac{2\,ac}{a+c}.$$

Доказати.

2° Доказати да у том случају крак и висина задовољавају неједнакости:

$$c<b<a, \quad c<h<a.$$

3° Конструисати дужи b и h ако су дате дужи: $a=7$ cm, $c=5$ cm.

115. Симетрале углова APC и BPC које чини медијана CP у троуглу ABC са страном AB секу стране AC и BC у тачкама D и E. Доказати да је дуж DE паралелна са страном AB.

116. Кроз средину M стране AB троугла ABC повучена је паралела са симетралом угла ACB. Та паралела сече страну BC у D, а страну AC у E. Доказати да је $BD=AE$.

117. Дат је ΔABC чији углови α, β и γ задовољавају релацију $\alpha-\beta=2\gamma$.

1° Доказати да је угао α туп.

2° На продужењу стране AB, преко темена A, наћи тачку тако да је $EC=AC$, па доказати да је права CA симетрала угла EC

3° Наћи пројекцију p стране CA на страну AB, па доказати стране посматраног троугла $BC=a$, $CA=b$ и $AB=c$ задовољава релацију: $c^2=a(a-b)$.

4° Конструисати дуж c кад су дате дужи a и b.

118. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом у темену (a и b су катете, c хипотенуза). Спуштена је хипотенузина висина C па су у троуглове CBH и CAH уписани кругови са центрима у и O_1. Нека су њихови полупречници ρ и ρ_1.

1° Доказати да за полупречник круга уписаног у датом п воуглом троуглу вреди образац

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

2° Помоћу овог обрасца (или сличности $\Delta HO_1O \sim \Delta CAB$) до зати обрасце

$$\rho=\frac{ar}{c}, \qquad \rho_1=\frac{br}{c}.$$

3° Растојање OO_1 упоредити са полупречником r.

4° Доказати образац

$$r+\rho+\rho_1=h,$$

где је $h=CH$.

119. У дати квадрат стране a уписати равнострани троугао: a) једним теменом у једном темену квадрата; b) са једним теменом средини једне квадратове стране. У оба случаја наћи страну b тро гла и положај његових темена (рачуном и конструкцијом).

120. Дати су мерни бројеви страна троугла: $a=m^2-3m-4$, $b=5$ $c=m^2+4$, где је m дати позитивни број.

1° Показати да троугао постоји ако је $m>4$.

2° Наћи површину датог троугла као и полупречнике уписан и описаног круга.

121. У датом троуглу ABC спуштене су висине, а око њ описан је круг. Подножја висина нека су A_1, B_1 и C_1, а центар о саног круга O.

1° Доказати да је $OA\perp B_1C_1$.

2° На основу тога изразити површину троугла ABC у фу цији од обима троугла $A_1B_1C_1$ и полупречника описаног круга R.

3° Израчунати обим троугла $A_1B_1C_1$ у функцији страна a, и c троугла ABC.

122. Два круга истог полупречника a секу се и пролазе један другом кроз центар. Нека су њихови центри A и B, а пресеци P и Q. Из тачке Q повучена су два пречника: QAC и QBD, па је из исте тачке полупречником $QC = QD = 2a$ описан лук CD.

1° Показати да тачке C, P и D леже на истој правој линији.

2° Наћи површину ограничену луцима CP, PD и CD.

123. Дат је равнострани троугао ABC стране a. У њему се, са истим центром и странама које су паралелне странама датог троугла, налази други равнострани троугао $A_1B_1C_1$, али тако да је растојање од сваког његовог темена до најближег темена датог троугла једнако страни новог троугла.

1° Рачуном наћи страну x новог троугла.

2° Ако је темену A датог троугла најближе теме A_1 новог, наћи углове A_1AB и B_1AB и на основу тога конструкцијом наћи темена новог троугла.

3° Ако се у троуглу $A_1B_1C_1$ на исти начин упише трећи, $\Delta A_2B_2C_2$, па у овом опет на исти начин $\Delta A_3B_3C_3$ итд., наћи границу којој тежи збир површина свих троуглова, рачунајући и дати.

124. У троуглу је позната једна страна (c), одговарајућа висина (h) и полупречник уписаног круга (r).

1° Показати да се помоћу датих података може конструисати дуж једнака обиму ($2s$) датог троугла.

2° На основу тога конструисати угао једнак углу (γ) који лежи према датој страни, па најзад конструисати и ΔABC.

3° Рачунским путем наћи $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

125. 1° Доказати следеће конструкције:

a) Кад је позната разлика d и геометриска средина g двеју непознатих дужи x и y, онда се са центром у средини O дужи $AB = d$ и полупречником OA опише круг, па се на тангенту у тачки A пренесе дуж $AC = g$. Тада права CO, која сече круг у тачкама P и Q $(CP < CQ)$, одређује тражене дужи, и то: $x = CQ$, $y = CP$.

b) Ако је познат збир a двеју непознатих дужи x и y, а зна се да је њихов производ једнак производу двеју датих дужи b и c, онда се на исту праву пренесу једна за другом дужи $MH = b$, $HN = c$, па се конструише круг полупречника $\dfrac{a}{2}$, у коме је MN тетива. Тада пречник AB који пролази кроз тачку H одређује тражене дужи, и то: $AH = x$, $HB = y$.

c) Кад је позната разлика d двеју непознатих дужи x и y, а зна се да је њихов производ једнак производу двеју датих дужи b и c, онда се на исту праву, у истом смеру и почев од исте тачке H, пренесу дужи $HM = b$ и $HN = c$, па се конструише круг полупречни $\dfrac{d}{2}$, у коме је MN тетива. Тада пречник AB, чије продужење прола кроз H, одређује тражене дужи, и то: $HB = x$, $HA = y$ $(HB > HA)$.

2° У сва три случаја наћи услове које морају задовољава дате дужи да конструкција буде могућа.

3° Извршити конструкције: a) $x - y = 6$, $xy = 4^2$; b) $x + y =$ $xy = 2.4$; c) $x - y = 6$, $xy = 2.5$.

126. Кружна линија полупречника R, са центром у O, подеље је на десет једнаких делова. Нека су A, B, C и D четири узастоп деоне тачке.

1° Доказати да је: a) $AD - AB = R$; b) $AD \cdot AB = R^2$. (Посматра троуглове AEO и ADO, где је E пресек правих AD и OB.)

2° На основу релација под 1°, дати геометриску конструкци дужи AD и AB и изразити те дужи у функцији од R.

3° Из претходног извести величине и конструкције стра правилног десетоугла и правилне десетокраке звезде, уписаних кругу датог полупречника.

127. 1° Дата је једначина $z^2 - dz - a^2 = 0$, где је $d > 0$, $a > 0$. Из брати јединицу дужине, па конструисати дужи x и y тако да је $z_1 =$ $z_2 = -y$, где су z_1 и z_2 корени дате једначине.

2° Конструисати дуж једнаку хипотенузи правоуглог троугл чија је једна катета $a = 4$ cm, а њој несуседан хипотенузин отсеча $q = 2$ cm. Затим конструисати и правоугли троугао.

128. 1° Дат је правоугли троугао. Конструисати круг који доди рује хипотенузу, пролази кроз теме правог угла, а центар му је н једној катети.

2° Наћи полупречник овог круга ако су дате катете a и правоуглог троугла. На колико се начина планиметриски и тригоно метриски може наћи овај полупречник?

129. 1° Дате су две тачке A и B и права кроз тачку B. На прав одредити тачке C и D, на једнаком растојању од B, тако да је $\sphericalangle CA$ једнак датом углу.

2° Решити исти задатак аналитичком методом ако су дат тачке: $A(2,1)$, $B(0,0)$, дата права ординатна оса, а дати угао $CAD = 45$

130. 1° Дате су две паралелне праве, тачка A на једној од њи и тачка B ван њих. Повући кроз тачку B праву која сече у тачки M праву која пролази кроз A, а у тачки N другу паралелну праву так да је: $AM = AN$.

2° Решити задатак и аналитичком методом ако су дате тачк $A(0,\ b)$, $B(a,\ 0)$, а дате праве $x = 0$ и $x = c$. Дискусија.

131. 1° Конструисати троугао кад је дата једна страна, налегли угао и полупречник уписаног круга у троуглу.

2° Решити троугао ако је $a=8$, $\beta=60°$, $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

132. 1° Конструисати правоугли троугао чија је катета $a=4$ cm, а разлика хипотенузе и друге катете $c-b=2$ cm.

2° Служећи се изведеном конструкцијом, доказати образац

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{c-b}{a},$$

где је α угао који лежи наспрам дате катете a. Наћи угао α са посебним подацима датим за конструкцију.

133. 1° Конструисати троугао кад је дата разлика двеју страна, разлика њима супротних углова и трећа страна $(b-c,\ \beta-\gamma,\ a)$.

2° На основу изведене конструкције доказати образац

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Решити троугао ако је: $b-c=2$, $\beta-\gamma=60°$, $a=2\sqrt{2}$.

134. 1° Наћи углове које симетрала унутрашњег угла у троуглу захвата са супротном страном.

2° Конструисати троугао кад се зна страна, дужина симетрале њој налеглог угла и разлика друга два угла $(c,\ l,\ \beta-\gamma)$.

135. Конструисати троугао ABC кад је дата страна $AC=b$, угао $BAC=\alpha$ и однос других двеју страна $BC:AB=m:n$, где су m и n дате дужи. Дискусија према величини односа $\frac{m}{n}$.

136. Конструисати тетивни четвороугао $ABCD$ кад је дато: $AB+BC$, AD, BD и $\sphericalangle BAD$.

137. Два круга истог полупречника секу се тако да тангенте у свакој пресечној тачки стоје нормално једна на другој.

1° Конструисати таква два круга датог полупречника r.

2° Наћи њихову заједничку површину.

3° Конструисати и трећи круг истог полупречника r, који се са сваким од прва два сече, тако да тангенте у свакој пресечној тачки стоје нормално једна на другој.

4° Израчунати заједничку површину сва три круга. (Видети задатак 123.)

138. 1° Наћи геометриско место средина једнаких тетива датог круга.

2° Из дате тачке ван датог круга повући сечицу на којој круг исеца тетиву дате дужине.

3° По угледу на конструкцију у задатку 125, 1°, конструиса дужи једнаке отсечцима PA и PB тражене сечице ако је дата дужи тетиве $AB=s$, полупречник круга R, а растојање дате тачке P центра круга $OP=c$.

4° Задатак под 2° решити и аналитичком методом, узимај координатни почетак за дату тачку; дати круг нека је

$$(x-3)^2+y^2=1,$$

а дата дужина тетиве $s=1$.

139. Повући праву на којој два дата круга исецају тетиве да дужина.

140. 1° Наћи геометриско место крајњих тачака тангената и дужине, повучених на дати круг.

2° Повући на дати круг тангенту на којој дата права отс отсечак дате дужине. Дискусија.

141. 1° Наћи геометриско место тачака из којих се дати к види под датим углом.

2° Одредити тачку из које се два дата круга виде под да угловима.

3° Геометриско место под 1° наћи и аналитичком методом је дати круг $x^2+y^2=r^2$, а дати угао $\varphi\ (\operatorname{tg}\varphi=k)$.

142. 1° Наћи геометриско место средина тетива датог круга к пролазе кроз дату тачку на кружној линији.

2° Кроз дату тачку на датој кружној линији повући тет тако да тетива буде подељена на два једнака дела другом датом те вом. Дискусија.

3° Геометриско место под 1° наћи и аналитичком методом је једначина датог круга

$$x^2+y^2=2rx,$$

а дата тачка координатни почетак.

143. 1° У троуглу ABC дате су страна $AB=c$ и медијана $AA_1=$ Одредити геометриско место темена C: а) ако је положај стране непроменљив; b) ако је положај медијане AA_1 непроменљив.

2° Задатак решити и аналитичком методом уз повољан из положаја координатног система.

144. 1° Дате су тачке P и Q и стална права D у истој рав а која пролази кроз P. Темена A и B троугла ABC леже на пра D тако да је P на средини између A и B. Осим тога, Q је на среди стране AC. Наћи геометриско место темена C кад се тачке A и крећу по правој D.

2° Задатак решити и аналитичком методом ако се права узме за осу Oy, P за координатни почетак, а Q има координ $Q(3,\ 2)$.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

145. Две праве у простору мимоилазе се под правим углом, њихова заједничка нормала је $BC=2a$, где је a дата дуж. На једној од њих уочена је произвољна тачка A, а на другој произвољна тачка D; нека је $BA=x$, $CD=y$.

1° Одредити везу између променљивих x и y тако да буде $AD=x+y$.

2° Показати да је у том случају запремина пирамиде $ABCD$ константна.

3° Даље, уз услов дат под 1°, одредити x и y тако да нагибни угао равни ACD према равни BCD буде једнак нагибном углу равни DAB према равни CAB. За тако изабрано x и y, наћи површину пирамиде $ABCD$.

146. Дата је коса призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ квадратне основе стране $AB=a$ чија бочна ивица $AA_1=2a$ захвата са сваком од основних ивица AB и AD исти угао од 60°.

1° Наћи висину дате призме и показати да су бочне ивице нагнуте према основи под углом $\alpha=45°$.

2° Испитати облик и величину нормалног пресека омотача дате призме.

3° Наћи површину и запремину дате призме.

147. Основа праве тростране призме је равнокраки троугао ABC ($AB=a$, $AC=BC=b$). Кроз ивицу AB постављена је раван која са основом захвата дати оштар угао φ. Нека је P пресек те равни са бочном ивицом која полази из C.

1° Одредити угао φ тако да ΔABP буде правоугли. Под којим условом је такав пресек могућ?

2° Одредити угао φ тако да ΔABP буде равностран. Под којим је условом такав пресек могућ?

3° Одредити однос $\frac{b}{a}$ тако да оба пресека постоје, а да угао између њих буде 30°.

148. Дата је тространа призма чији је нормални пресек равнострани троугао ABC стране a. На бочним ивицама које полазе из B и C уочене су две произвољне тачке P и Q; нека је $BP=x$, $CQ=y$.

1° Која релација постоји између x и y ако је ΔAPQ правоугли са правим углом у P?

2° Ако је у том случају $BP=x$ дата дуж, наћи геометриском конструкцијом дуж y.

3° Одредити x и y тако да ΔAPQ буде равнокрако-правоугли.

4° У том случају наћи угао између равни APQ и $CBPQ$.

149. У крајњим тачкама A и B хипотенузе равнокрако-правоуглог троугла ABC подигнуте су нормале AP и BQ на раван троугла ABC. Нека је $AP=x$, $BQ=y$.

Одредити дужи x и y тако да ΔCPQ буде правоугли са правим углом у Q, а да притом запремина тела $CAPQB$ износи шестину запремине коцке, ивице $AB=2a$.

150. Дат је квадрат $ABCD$ стране a. У теменима A и C подигнуте су нормале на раван квадрата са исте стране те равни: $AP=AC$ и $CQ=\frac{3}{2}AC$; AC је дијагонала датог квадрата.

1° Наћи растојање PQ.

2° Доказати да је ΔQPB правоугли са правим углом у P.

3° Доказати да је PQ нормално на равни DBP.

4° Наћи запремину тетраедра $DBPQ$.

151. Дат је правоугли триједар са теменом S и на његовим ивицама тачке A, B и C тако да је $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$.

1° Доказати да је подножје O висине SO тетраедра $SABC$ пресек висина троугла ABC.

2° Изразити површину троугла ABC као функцију ивица a, b и c.

152. Нека су $OA=OB=OC=a$ три ивице дате коцке, које полазе из истог темена O, а OD дијагонала коцке повучена из истог темена.

1° Доказати: a) да дијагонала OD пролази кроз пресек T медијана троугла ABC; b) да је $OD \perp (ABC)$; c) да је $OT=\frac{1}{3}OD$.

2° Наћи запремину тетраедра $DABC$ у функцији ивице a помоћу површине троугла ABC и дужи DT.

3° Проверити резултат, упоређујући тетраедре $OABC$ и $DABC$ као и тетраедар $OABC$ са датом коцком.

153. Дат је триједар $SABC$ чији су ивични углови по 60°: $\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSA=60°$, а на његове ивице пренете су дужи $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$.

1° Наћи у функцији од a растојање тачке A од равни BSC, у функцији од b растојање тачке B од равни CSA и у функцији од c растојање тачке C од равни ASB.

2° Коју релацију морају задовољавати a, b и c да ΔABC буде правоугли са правим углом у A?

3° Могу ли се a, b и c одредити тако да ΔABC буде равнокрак: $AB=AC$, а да притом буде $b \neq c$?

154. Дата је пирамида $SABCD$ чија је основа квадрат $ABCD$ стране a. Ивица $SD=h$ нормална је на равни основе. Кроз тачку Q на ивици SD повучена је раван паралелна са основом, која сече пирамиду по квадрату $MNPQ$. Из тачака M, N и P спуштене су нормале MM_1, NN_1 и PP_1 на раван основе.

1° Ако је $SQ=x$, изразити површину уписане призме у функцији од a, h и x.

2° Одредити x тако да површина има екстремну вредност. Дискусија.

155. Дата је правилна четворострана равноивична пирамида $SABCD$ ивице a. Почев од врха пренета је на ивице SA и SB иста дуж $SA_1=SB_1=x$, а на ивице SC и SD дуж $SC_1=SD_1=y$.

1° Доказати да је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ равнокраки трапез.

2° Изразити стране и површину тога трапеза као функције од x и y.

3° Коју релацију задовољавају x и y ако је раван $A_1B_1C_1D_1$ нормална на равни SCD? Наћи у том случају површину и запремину пирамиде $SA_1B_1C_1D_1$.

156. Дат је равнострани троугао ABC стране a. Нека је тачка O центар описаног круга око њега, а D тачка круга дијаметрално супротна тачки A. У тачки D подигнута је нормала на раван троугла, па је на њу пренета дуж $DS=a$.

1° Доказати да је $SB\perp BA$ и $SC\perp CA$.

2° Наћи површину пирамиде $SABC$.

157. Основа ABC тростране пирамиде $SABC$ је правоугли троугао са правим углом у C. Врх S налази се на нормали подигнутој на раван основе у темену A. Дато је $AC=b$, $CB=a$, $AS=x$.

1° Доказати да је $BC\perp CS$ и $BC\perp(ACS)$. (Дати геометриски и алгебарски доказ.)

2° Одредити висину x тако да угао нагиба равни BSC према основи буде једнак углу између равни CAS и BAS. У том случају наћи површину и запремину пирамиде $SABC$.

158. Два равнокрака троугла ACD и BCD не леже у истој равни а имају заједничку страну $CD=2x$ и једнаке остале стране $AC=AD=$ $=BC=BD=a$.

1° Ако је M средина дужи AB, а N средина дужи CD, доказати да је $MN\perp AB$ и $MN\perp CD$.

2° Ако раван троугла ACD остаје непокретна, а ΔBCD се окреће око праве CD, наћи геометриско место тачке M.

3° Ако је раван троугла BCD нормална на равни троугла ACD, изразити дужи AB и MN у функцији од x и a, па одредити x тако да диједар ивице AB буде прав.

159. Дат је равнострани троугао ABC стране a. Над његовим странама, као хипотенузама, конструисани су равнокрако-правоугли троуглови BMC, CNA, APB тако да су равни ових троуглова нормалне на равни датог троугла.

1° Изразити површину и запремину полиједра $ABCMNP$ у функцији стране a датог троугла.

2° Пресећи посматрани полиједар једном равни паралелном равни троугла ABC, а на растојању x од те равни. Посматрати обл добијеног пресека, па његову површину изразити у функцији од a и

160. 1° Доказати да је апотема праве кружне купе геометрис средина за висину купе и пречник описане лопте. Дати алгебарс и геометриски доказ.

2° У лопти је уписана права кружна купа са датим углом између изводница у осном пресеку. Однос $\frac{V_1}{V}$ запремина купе лопте изразити у функцији угла φ.

3° Наћи угао φ и однос $\frac{V_1}{V}$ ако висина купе износи $\frac{2}{3}$ по пречника описане лопте.

161. У лопти датог полупречника R уписана је права кру купа; центар лопте налази се у унутрашњости купе и удаљен је d од купине основе. Наћи површину купе.

162. У датој правој кружној купи (полупречник основе R, а тема s) уписана је лопта.

1° Изразити полупречник лопте и полупречник додирног кр лопте и купе у функцији од R и s.

2° Пресећи купу и лопту једном равни која садржи доди круг лопте и купе, па одредити однос $\frac{R}{s}$ тако да висина отсеч калоте износи четвртину пречника лопте. У ком односу је том ра подељена висина купе?

3° Може ли се однос $\frac{R}{s}$ подесити тако да поменутом ра која садржи додирни круг, запремина купе буде преполовљена?

163. Дате су две лопте чији су полупречници r и R ($r\leqslant$ а растојање њихових центара $a\,(a\geqslant R+r)$. Око датих лопти опи је права кружна купа тако да њена основа додирује већу лопт да се обе лопте налазе у купи. Наћи површину купе.

164. У правој кружној зарубљеној купи уписана је и окс описана лопта. Однос њихових полупречника је $\sqrt{6}$. Наћи однос лупречника купе.

165. Око лопте датог полупречника a описати праву кру зарубљену купу тако да раван додирног круга купе и лопте висину у односу 1:2. У ком односу је истом равни подељена за мина купе, а у ком површина њеног омотача?

166. У правој кружној купи уписана је коцка тако да је однос њене ивице и полупречника основе купе

$$\frac{a}{r}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\,.$$

Наћи однос запремина коцке и купе.

167. 1^0 Изводнице праве кружне купе нагнуте су према основи под датим углом α, а у купи је уписана лопта. Који део купине запремине заузима лопта?

2^0 Одредити нагибни угао α тако да однос $\frac{V_1}{V}$ запремина лопте и купе има највећу могућу вредност и наћи ту вредност.

3^0 До истог резултата доћи решавајући задатак: Одредити однос полупречника основе и апотеме праве кружне купе тако да запремина лопте уписане у купи буде $V_1=kV$, где је V запремина купе, а k позитивни параметар. Дискусија према вредности параметра k.

168. Троугао ABC, чије су стране $a=8$, $b=5$, $c=7$, ротира око симетрале спољашњег угла у темену C. Наћи запремину добијеног тела.

169. Дат је ΔABC чије су стране $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Нека су P_1, P_2, P_3 површине тела која постају кад дати троугао ротира око BC, CA и AB.

1^0 Одредити бројеве k_1, k_2 и k_3 тако да је

$$P_1=2\pi k_1 P,\quad P_2=2\pi k_2 P,\quad P_3=2\pi k_3 P,$$

где је P површина датог троугла.

2^0 Доказати да k_1, k_2 и k_3 задовољавају једначину

$$\frac{1}{1+k_1}+\frac{1}{1+k_2}+\frac{1}{1+k_3}=1.$$

3^0 Показати да се k_1, k_2 и k_3 помоћу углова α, β и γ датог троугла изражавају у облику:

$$k_1=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad k_2=\frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},\qquad k_3=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

170. Дате су паралелне стране равнокраког трапеза $a=25$, $c=7$, а зна се да дијагонале тога трапеза стоје нормално на непаралелним странама. Наћи површину и запремину тела које постаје кад тај трапез ротира око једне непаралелне стране.

171. Дат је правоугли троугао OAB својим катетама $OA=4$ c $OB=3$ cm. Из произвољне тачке M на хипотенузи спуштена је н мала на катету OA, па је подножје N те нормале спојено са темен B. Ставити: $ON=x$.

1^0 Дужине страна и површину троугла NMB изразити у фу цији од x.

2^0 Одредити x тако да површина тела које постаје кад ΔN ротира око праве OB буде $P=14\pi P_\Delta$, где је P_Δ површина троу NMB.

172. У датом полукругу пречника $AB=2a$ повучена је тетива тачке A до произвољне тачке M. Полукруг са тетивом ротира пречника AB.

1^0 Изразити у функцији полупречника a и угла $BAM=$ a) површину која постаје ротацијом тетиве AM; b) површину к постаје ротацијом лука MB.

2^0 Наћи однос тих двеју површина, па одредити угао x тако оне буду једнаке.

173. Дат је ΔABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$) у коме је разл углова у теменима A и B једнака правом углу. Око датог троу описан је круг, па кроз теме C повучен пречник CC_1.

1^0 Показати да је страна AB паралелна са пречником и да се ΔABC налази цео са једне стране тога пречника.

2^0 Наћи површину и запремину тела које постаје кад д троугао ротира око пречника CC_1.

3^0 Примена: $a=40$, $b=30$.

174. У кругу датог полупречника R повучена су два полуп ника: OA и OB који међу собом захватају дати угао 2α. У тачк A и B конструисане су тангенте на круг; нека је њихов пресек Слика ротира око пречника PP_1 који се налази ван угла A Нека је

$$\sphericalangle COP=x\quad\left(\alpha<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

1^0 Изразити у функцији од R, α и x: a) запремину V постаје ротацијом четвороугла $OACB$; b) запремину V_1 која пос ротацијом кружног исечка AOB.

2^0 Показати да је однос ових запремина независан од угла

3^0 Одредити угао α тако да буде.

$$\frac{V_1}{V}=\frac{2}{5}\,.$$

ТРИГОНОМЕТРИЈА

175. 1° Знајући да је

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \qquad \cos y = \frac{b}{c+a}, \qquad \cos z = \frac{c}{a+b},$$

где су a, b и c дате дужи, доказати да је

$$\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{y}{2} + \mathrm{tg}^2 \frac{z}{2} = 1.$$

2° Који услов морају задовољавати дате дужи a, b и c да углови x, y и z буду реални?

176. Доказати да из једначине

$$\sin x + \sin y = 2 \sin (x+y)$$

уз услов

$$x + y \neq 2k\pi$$

следује једначина

$$\mathrm{tg} \frac{x}{2} \mathrm{tg} \frac{y}{2} = \frac{1}{3},$$

и обрнуто.

177. У једном троуглу је разлика два угла једнака троструком трећем углу:

$$\alpha - \beta = 3\gamma.$$

1° Показати да је:

$$\alpha - \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

2° Ако је

$$\mathrm{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3},$$

наћи $\sin \alpha$ и $\sin \beta$.

178. 1° Доказати да из једнакости

$$(1 + a \cos x)(1 - a \cos y) = 1 - a^2,$$

где је a реалан параметар, следује једнакост

$$(1-a)\,\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2} = (1+a)\,\mathrm{tg}^2 \frac{y}{2},$$

и обрнуто.

2° У којим границама мора лежати реални број a да би углови x и y били реални.

179. На основу идентичности

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

доказати једнакост

$$4 \cos 36^0 \sin 18^0 = 1,$$

па помоћу ње и једнакост:

$$2 (\cos 36^0 - \sin 18^0) = 1.$$

Најзад наћи вредности $\cos 36^0$ и $\sin 18^0$.

180. 1° Решити систем једначина

$$x \cos \alpha - y \sin \alpha = a, \quad x \sin \alpha + y \cos \alpha = b,$$

где је α дати угао: $0 < \alpha < 2\pi$, а a и b дати реални бројеви

2° Наћи вредност израза $x^2 + y^2$, где су x и y решен датог система.

3° Какво значење у аналитичкој геометрији има дати систе

181. Ако је

$$\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{x}{a-b},$$

показати да изрази

$$y = a \cos^2 \alpha + 2x \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha, \qquad z = a \sin^2 \alpha - 2x \sin \alpha \cos \alpha + b \cos$$

не зависе од x. (Упутство: наћи $y+z$ и $y-z$.)

182. 1° Дискутовати једначину

$$\frac{2}{\sin x} - \sin x = a \cot g\, x,$$

где је a реалан параметар.

2° Решити дату једначину за $a = \frac{5}{2}$.

183. Дата је једначина

$$(4k+1) \sin^2 x - (6k+1) \sin x + 3k - 6 = 0,$$

где је k дати реални број.

1° За које вредности броја k су корени ове једначине сину два комплементна угла?

2° Наћи све углове x који задовољавају једначину у т случају.

184. Доказати да је троугао правоугли ако за два његова у α и β вреди релација:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha + \sin \beta} = \mathrm{tg}\, \alpha.$$

185. Дискутовати реалност решења једначине

$$\frac{m\, \mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, 2x - \mathrm{tg}\, x} = \cos \alpha,$$

где је m реалан број, а α дати оштар угао. Решити једначину

$$m = \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

186. Дата је једначина

$$a\cos^2 x + b\sin^2 x = c,$$

где су a, b и c реални бројеви $(b<a)$.

1° Дискутовати реалност решења.

2° Решити једначину кад између параметара a, b и c постоји релација $3a+b-4c=0$.

3° Ако је

$$a=2+\sqrt{2}, \quad b=2-\sqrt{2},$$

одредити c тако да дату једначину задовољава сваки угао x чији је тангенс $\operatorname{tg} x = 2-\sqrt{3}$. Решити једначину и у том случају.

187. Дата је једначина

$$\operatorname{tg}(3x+y)\operatorname{tg}(x-y) = -1.$$

1° Наћи алгебарску једначину коју задовољавају x и y.

2° Претставити графички функцију дату том алгебарском једначином. Показати да се график састоји из бескрајно много правих линија.

188. Ако угао φ задовољава једначину

$$a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - b = 0,$$

онда задовољава и једначину

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = a.$$

Доказати. Да ли вреди и обрнуто?

189. 1° Подесити за логаритмовање израз

$$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

2° За које вредности m једначина

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = m$$

има реална решења? Решити једначину за $m=1$.

3° Наћи највећу могућу вредност функције

$$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x.$$

Упоредити резултате под 2° и 3°.

4° Нацртати график функције y.

190. Дата је функција

$$y = \cos(x-\alpha) - \cos x,$$

где је α дати угао $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1° Наћи максимуме и минимуме дате функције.

2° За $\alpha = \frac{\pi}{2}$ нацртати график дате функције.

3° Дискутовати реалност решења једначине

$$\cos(x-\alpha) - \cos x = m,$$

где је m реалан број. Решити једначину за $m = \sin\alpha$.

191. 1° Доказати да израз $x+\frac{1}{x}$, где је $x>0$, постиже на мању могућу вредност 2 за $x=1$, тј. да је за $x>0$ задовољен неједнакост

$$x+\frac{1}{x} \geqslant 2.$$

2° На основу тога одредити оштар угао φ тако да изр $\operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi$ има најмању могућу вредност.

3° Решити једначину

$$\operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{cotg}\varphi = 2\sqrt{3}.$$

192. 1° Дате су једначине:

$$a\sin\varphi + b\cos\varphi = c, \qquad a_1\sin\varphi + b_1\cos\varphi = c_1.$$

Коју релацију морају задовољавати реални бројеви a, b, c, a_1, b_1 и да дате једначине имају једно заједничко решење за угао φ?

2° Показати да једначине

$$\sin\varphi + 8\cos\varphi = 7, \qquad 8\sin\varphi - \cos\varphi = 4$$

имају заједничких решења. Решити обе једначине.

3° Стављајући $\sin\varphi = x$, $\cos\varphi = y$, графички претставити једначи дате под 2°. Коју трећу једначину морају задовољавати x и y Упоредити закључке добијене анализом графика са првим дел задатка.

193. 1° Дат је круг, његов пречник и произвољна тетива. И крајњих тачака пречника спуштене су нормале на тетиву. Доказа да су подножја ових нормала подједнако удаљена од крајњих тача тетиве. Разликовати случајеве кад је пресек тетиве и пречника у круг на кружној линији и ван круга.

2° На краке правог угла xOy, почев од темена, пренете с дате дужи $OA=a$ и $OB=b$. Кроз тачке A, O и B конструисан круг, па је из тачке O повучена дата тетива $OC=c$. Нека је $\sphericalangle AOC=$ Показати да су a, b, c и φ везани релацијом

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c.$$

3° Ако угао између пречника AB и тетиве OA означимо са $\sphericalangle OAB=\alpha$, онда су a, b, c, α и φ везани релацијама

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a},\quad \cos(\varphi-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Доказати.

4° Доказати неједнакост

$$-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\cos\varphi+b\sin\varphi\leqslant\sqrt{a^2+b^2},$$

где је φ ма који реални угао, а a и b дати реални бројеви. На основу ове неједнакости поставити услов реалности решења једначине $a\cos\varphi+b\sin\varphi=c$. Упоредити са задатком 44.

5° На основу конструкције под 2°, решити графички једначину $7\cos x+2\sin x=6$.

6° На основу резултата под 3°, решити рачуном исту једначину.

194. 1° За које вредности реалног броја a систем

$$\cos^2x+\sin^2y=2a,\quad \sin^2x-\cos^2y=a$$

има реална решења за x и y?

2° Решити дати систем за $a=\frac{1}{2}$.

195. Дат је систем једначина:

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1,\quad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{4}{3}.$$

1° На основу датих једначина наћи вредност производа $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$, па формирати квадратну једначину чији су корени $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$.

2° Наћи вредност израза $\cos^2x+\cos^2y$, где су x и y ма које решење датог система.

3° Наћи решења датог система.

196. Познат је обим $2s=20$ троугла ABC, његова површина $P=10\sqrt{3}$ и угао $ABC=60^0$. Наћи површину кружног отсечка који страна AC отсеца на описаном кругу око троугла.

197. Решити троугао кад је дата страна $c=\sqrt{6}$, супротан угао $\gamma=60^0$ и полупречник уписаног круга $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

198. У троуглу је познат однос двеју страна $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, разлика њима супротних углова $\alpha-\beta=90^0$ и површина $P=168$. Наћи синус и косинус трећег угла и стране.

199. Мерни бројеви страна троугла су три узастопна цела броја, а разлика два већа угла једнака је двоструком најмањем. Наћи стране.

200. У троуглу ABC познате су две стране $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}$- и разлика њима супротних углова $\alpha-\beta=60^0$.

1° Наћи углове и трећу страну.

2° Кроз теме C повучена је паралела са страном AB. На површину тела које постаје кад троугао ротира око те паралеле.

201. Дате су две стране троугла $a=\sin(\varphi+x)$, $b=\sin(\varphi-x)$ збир њима супротних углова $\alpha+\beta=2\varphi$ $(0<\varphi<90^0,\ 0<x<\varphi)$. На трећу страну и полупречник описаног круга око троугла.

202. 1° Доказати идентичност:

$$\frac{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\beta\operatorname{tg}\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}-1.$$

2° Ако две стране троугла и њима супротни углови задо љавају релацију

$$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=(a+b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

троугао је равнокрак. Доказати.

(Упутство: Елиминисати стране a и b помоћу синусне теоре па обе стране добијене једнакости поделити са $\cos\alpha+\cos\beta$.)

203. 1° Знајући да је вредност броја π са седам тачних децим $\pi=3{,}1415926\ldots$, проверити неједнакост:

$$3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}<\pi<3+\frac{1}{7+\frac{1}{16}}.$$

2° У кругу полупречника r уписан је и око њега описан вилан полигон са n страна. Наћи обиме оба полигона и на осн њих извести једну неједнакост за број π. Примена $n=90$.

(Упутство: Обим круга је већи од обима сваког уписаног ис ченог полигона, а мањи од обима сваког таквог описаног полиго

204. Површина правоугаоника је $P=\sqrt{3}$. Ако се угао изм његових дијагонала удвостручи, а дужина дијагонале остане не мењена, површина постаје $P_1=3$. Наћи дужину дијагонала и између њих.

205. Дат је кружни исечак OAB чији је централни угао AOB и полупречник $OA=1$. На луку AB уочена је произвољна тачк и нека је $\sphericalangle AOM=x$. Изразити површину четвороугла $OAMB$ функцију угла x, па нацртати график добијене функције кад мења од 0 до $\frac{\pi}{3}$.

206. Дат је полукруг са центром O и пречником $AB=2a$. На њему је уочена произвољна тачка M, одређена углом $AOM=x$. Затим је повучена тетива AM и над њом, изван троугла OAM, конструисан равнострани троугао ACM.

1° Изразити површину четвороугла $OACM$ у функцији од a и x.

2° Наћи угао x за који та површина постиже највећу могућу вредност.

3° Наћи и угао x за који та површина постиже вредност

$$P=a^2\sqrt{3}.$$

207. Нека је M произвољна тачка дате дужи $AB=a$. Над дужи $AM=x$ конструисан је равнострани троугао AMC, па је над дужи BC исто тако конструисан равнострани троугао CBD.

1° Доказати да је површина четвороугла $MBDC$ независна од положаја тачке M и наћи ту површину.

2° Показати да је четвороугао $MBDC$ тетиван и наћи дужину дијагонале MD.

3° Наћи геометриско место тачке D кад се тачка M креће по дужи AB.

208. 1° Доказати образац:

$$\operatorname{tg} 3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

2° Ако висина праве кружне купе остане непромењена, а полупречник основе се повећа тако да се нагибни угао φ изводница према основи сведе на трећину првобитног, онда запремина постане k пута већа. Изразити угао φ у функцији од k и извршити дискусију добијеног резултата. Израчунати φ специјално за

$$k=7+4\sqrt{3}.$$

209. 1° Кружни исечак централног угла y савијен је у омотач праве кружне купе у чијем је осном пресеку између изводница угао $2x$. Наћи релацију коју задовољавају x и y.

2° На основу добијене релације одредити углове y и $2x$ тако да њихова разлика износи $\frac{2\pi}{3}$. Задатак решити графички.

210. 1° Углови α и β, које са основом правилне n-то ст[пирамиде захватају бочна страна и бочна ивица, везани су релаци које не зависи од дужинских елемената пирамиде, него само од б[основних ивица. Наћи ту релацију.

2° За $n=3$, поставити једначину из које се одређује угл ако је дата разлика посматраних углова $\alpha-\beta=\delta$. Дискусијом те начине, наћи највећу могућу вредност разлике $\alpha-\beta$. Најзад у граничном случају наћи углове α и β.

211. У четвороуглу $ABCD$ познате су две супротне стране AB $CD=c$, оштар угао $BAD=\alpha$ и два права угла $ABC=90°$ и $CDA=$ Наћи стране $BC=b$, $DA=d$ и површину P поменутог четвороу Дискутовати добијена решења према величини угла α и датих стр

(Упутство: Продужити стране BC и AD до њиховог пресе

212. Две праве Δ и Δ' секу се у тачки O под углом α. На пр Δ, са разних страна тачке O, пренете су дужи $OA=a$ и $OB=b$ ($a>$ На правој Δ' наћи тачку C из које се дужи OA и OB виде под једна угловима. Посебан случај $\alpha=60°$, $a=3$ cm, $b=1$ cm.

1° Тригонометриским путем израчунати дуж: $x=OC$.

2° Тачку C наћи и геометриском конструкцијом.

(Упутство: 1° Права Δ' је симетрала унутрашњег угла троу ABC. 2° Права која спаја теме периферискoг угла на кругу са с дином одговарајућег кружног лука је симетрала тога перифе ског угла.)

213. Ако је P ма која тачка у равни равностраног троугла A а O центар тога троугла, онда је

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3(\overline{OA}^2+\overline{OP}^2).$$

1° Дату једнакост доказати тригонометриски.

2° Дату једнакост доказати аналитичком методом. Прит изабрати повољан положај координатног система.

3° Наћи геометриско место тачака у равни тако да збир кв драта растојања сваке тачке од темена датог равностраног троу у истој равни има дату сталну вредност. Задатак решити: a) на осно напред дате једнакости; b) аналитичком методом.

214. 1° Доказати да стране троугла a, b и c, његова површи P и угао γ, који лежи наспрам стране c, задовољавају једначин

$$c^2=(a-b)^2+4P\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

2^0 На основу ове једначине, доказати да површина троугла задовољава неједнакост

$$P \leqslant \frac{c^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2},$$

где је c ма која страна троугла, а γ њој супротан угао.

3^0 Исту неједнакост доказати и геометриски помоћу геометриског места тачака из којих се дата дуж види под датим углом.

4^0 Написати дату неједнакост у специјалним случајевима кад је $\gamma = 90^0$ и $\gamma = 60^0$. Како се неједнакост у тим случајевима може исказати речима?

215. Дат је полукруг пречника $AB = 2R$, па је кроз тачку A повучена полуправа AD тако да је $\sphericalangle BAD = \frac{\pi}{3}$. Нека је C пресек полукруга и праве AD. Из произвољне тачке M лука BC спуштене су нормале MN и MP на AB и AD, са подножјима у N и P. Повучена је и дуж AM.

1^0 Однос

$$y = \frac{MN + MP}{R}$$ изразити као функцију угла $x = \sphericalangle BAM$.

2^0 Посматрати промене функције y кад се x мења од O до $\frac{\pi}{3}$ и нацртати њен график.

216. Дат је правоугаоник $ABCD$ чије су стране $AB = a$, $BC = b$ $(b < a)$. Изван правоугаоника, кроз његова темена, повучене су четири праве: QAM, MBN, NCP и PDQ тако да је

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle CBN = \sphericalangle DCP = \sphericalangle ADQ = \varphi,$$

где је φ дати оштар угао.

1^0 Доказати да је четвороугао $MNPQ$ правоугаоник.

2^0 Изразити његове стране и површину у функцији од a, b и φ, па показати да површина задовољава неједнакост

$$ab \leqslant P \leqslant \frac{(a+b)^2}{2}.$$

3^0 Изразити стране правоугаоника $MNPQ$ у функцији од a, φ и угла $\alpha = \sphericalangle CAB$, па доказати неједнакости:

$$b \leqslant MN \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}, \quad b \leqslant NP \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

217. Дат је прав угао xOz и на полуоси Ox две тачке, A и B, одређене датим дужима $OA = a$, $AB = b$. На полуоси Oz наћи тачку M тако да угао $\varphi = \sphericalangle AMB$ има највећу могућу вредност. Ставити: $OM = z$.

1^0 Задатак решити: a) тригонометриски; b) геометриском ко струкцијом.

2^0 Одредити однос $\frac{a}{b}$ тако да максимална вредност угла буде $\frac{\pi}{6}$.

(Упутство: Ако над једном дужи, тетивом, конструишемо ви кругова различитих полупречника, онда над том тетивом лежи ве периферискн угао у кругу мањег полупречника и обрнуто.)

218. Дат је троугао ABC $(AB = c$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\alpha >$ Над страном AB, пречником, описан је полукруг који страну AC се у D, а страну BC у E. Нека је P пресек правих DE и AB. Наћи д $PO = x$, где је O средина стране AB.

219. Вертикалан штап висине a_m постављен је испред вертикалн равног заклона на растојању b_m од њега. Штап, заклон и рав хоризонтална основа на којој стоје осветљени су сунчевим зраци те штап баца сенку на основу и заклон. Раван у којој се нал штап и његова сенка нагнута је према заклону под углом α. На висину сунца φ изнад хоризонта ако је висина сенке на заклону

220. Посматрач који стоји на стени високој h_m над нивоом језе види облак под елевационим углом α, а његов лик у језеру п депресионим углом β. Наћи висину облака над нивоом језера. П мена: $\alpha = 45^0$, $\beta = 75^0$.

221. На растојању a од подножја куле, у истој хоризонтал равни, налази се дрво. Кад се врх дрвета гледа из подножја ку види се под извесним углом, а кад се врх куле гледа из подно дрвета, види се под два пута већим углом. Ако се врх куле и врх дрв гледају из средине растојања њихових подножја, онда су елевацио углови комплементни. Наћи висину куле и висину дрвета.

222. У хоризонталној равни са подножјем планине налази тачка B из које се врх A планине види под елевационим углом 60^0. Ако се из тачке B иде право ка врху A, идући путем чији нагиб према хоризонталној равни 30^0, онда се долази у тачку C које се врх A види под елевационим углом од 75^0. Наћи вис планине, ако је $BC = 1$ km $(\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots)$.

223. Посматрач се налази на стени високој h_m изнад мор површине и види облак под елевационим углом α, а његову се на води под депресионим углом β. Сунце се налази тачно иза л посматрача и његова је висина γ. Колика је висина облака морем?

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

224. Дата је права $3x-y+3=0$ и тачка $P(2, -1)$.

1° Растојање d од тачке P до произвољне тачке M дате праве изразити као функцију апсцисе тачке M. Посматрајући ову функцију, наћи тачку M_0 дате праве која је најближа тачки P. Наћи и $d_0=M_0P$.

2° Наћи тачку M_0 и растојање d_0 и аналитичком методом.

225. 1° На правој $2x-3y+21=0$ наћи тачку која је подједнако удаљена од апсцисне осе и тачке $P(1, 2)$.

2° *Геометриска конструкција:* На датој правој (Δ) наћи тачку (M) која је подједнако удаљена од дате тачке (P) и дате праве (t).

226. Ромб је састављен од два равнострана троугла. Позната је једначина његове дуже дијагонале $x-y\sqrt{3}-2=0$ и једно теме $A(2, -1)$.

1° Наћи једначине његових страна и координате осталих темена.

2° Конструисати ромб кад је дата права на којој лежи дужа дијагонала, теме ромба ван ње и оштар угао ромба.

227. Делтоид је уписан у кругу полупречника a. Права $2x+y+2=0$ је његова оса симетрије, а тачка $B(-3, -6)$ његово теме.

1° Наћи теме D делтоида, супротно датом темену B, и показати да положај тога темена не зависи од величине датог полупречника a.

2° Наћи координате центра описаног круга око делтоида. У којим границама може лежати дуж a да задатак има решења?

3° Одредити a тако да задатак има само једно решење. У том случају наћи и координате осталих темена делтоида.

228. 1° Кроз тачку $P(1, k)$, где је k дати реални број, повући праву која је од тачке $M(-2, 0)$ удаљена за $d=5$.

2° Дискутовати постојање и број решења према величини броја k.

3° *Геометриска конструкција:* Кроз дату тачку повући праву која је на датом растојању од дате тачке. Дискусија.

229. 1° Кроз тачку $P(2, -1)$ повући праву тако да тачка P лежи на средини њеног отсечка, који се налази између правих $x-2y+2=0$ и $3x-y-15=0$.

2° *Геометриска конструкција*: Кроз дату тачку P, која лежи у датом углу, повући праву тако да њен отсечак између кракова угла буде преполовљен тачком P.

230. Дате су тачке $A(-3, 3)$ и $B(7, 2)$. На апсцисној оси наћи тачку M тако да изломљена линија AMB има што мању дужину. Задатак решити геометриском конструкцијом, на основу конструкције и аналитичком методом.

231. Светлосни зрак долази по правој $x+2y+4=0$ и одбија с од праве $2x-3y+1=0$ тако да погађа осу Ox. Наћи једначину одбијеног зрака и тачку у којој одбијени зрак погађа осу Ox.

232. 1° Показати да свака права фамилије

$$(a+2)x-(a-1)y-2a-3=0$$

пролази кроз једну сталну тачку, независну од вредности коју им реалан параметар a, и наћи ту тачку.

2° Правоугаоник $OABC$ има сталан обим $2s=16$. Показати, м како изабрали стране тога правоугаоника, да нормала BP спуштен из темена B на дијагоналу AC пролази кроз једну сталну тачку наћи ту тачку. (Осу Ox поставити дуж OA, а осу Oy дуж OC.)

3° Наћи геометриско место темена B.

233. 1° Конструисати круг датог полупречника r који додирује дату праву и дати круг. Дискусија.

2° Ако једначина датог круга гласи:

$$x^2+(y-3)^2=1$$

и ако се дата права узме за апсцисну осу, како гласи једначин траженог круга. Дискусија.

234. 1° Конструисати круг датог полупречника који додирује дату праву и пролази кроз дату тачку ван те праве. Дискусија.

2° Ако се дата тангента узме за апсцисну осу, а дата тачк има координате $M_1(0, 6)$, написати једначину тога круга. Дискусија.

235. Елипса, чије осе леже на координатним осама, пролаз кроз тачке $M_1(2, 1)$ и $M_2(-1, k)$. Како гласи њена једначина? Дискусија кад се ордината k тачке M_2 мења.

236. Дата је хипербола $4x^2-y^2=20$, а кроз тачку $P(0, -10$ повучена је произвољна права Δ.

1° У којим се границама може налазити коефицијенат правц m праве Δ да би та права и хипербола имале заједничких тачака

2° Одредити m тако да права Δ додирује хиперболу.

3° Одредити m и тако да се права Δ и хипербола секу сам у једној тачки. Под којим се углом тада секу?

237. 1° Доказати да права

$$y=mx+\frac{p}{2m}$$

додирује параболу $y^2=2px$, ма коју реалну вредност имао параметар m. Наћи и координате додирне тачке.

2° Служећи се датом једначином тангенте, наћи геометриско место подножја нормала спуштених из жиже на тангенте параболе

3° На основу овог геометриског места доказати правило Ако се нормала спуштена из жиже параболе, на ма коју њену тангенту, пројектује на осу параболе, пројекција је сталне дужине.

4° На основу резултата под 1°, показати да се коефицијенат правца потега произвољне тачке дате параболе може изразити само помоћу коефицијента правца тангенте у истој тачки. Из добијеног израза закључити да су углови које тангента параболе захвата са осом и потегом додирне тачке међу собом једнаки.

238. Дата је парабола $y^2=2px$ и круг са центром у жижи параболе произвољног полупречника r.

1° Показати да круг и парабола имају заједничких тачака само ако је $r \geqslant \frac{p}{2}$; наћи координате x_1, y_1 њихове пресечне тачке у првом квадранту.

2° Показати да је угао под којим се секу круг и парабола у тој тачки дат изразом:

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{2r}{p}-1}\,.$$

3° Одредити полупречник r тако да угао φ буде:

$$\text{a)}\ \frac{\pi}{4},\quad \text{b)}\ \frac{\pi}{3},\quad \text{c)}\ \frac{\pi}{6}.$$

239. Права $x-2y+8=0$ је заједничка тангента елипсе

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

и са њом конфокалне параболе $y^2=2px$.

1° Наћи полуосе елипсе и параметар параболе.

2° Наћи једначину круга који пролази кроз обе додирне тачке, а чији је центар на тангенти; показати да тај круг пролази кроз заједничку жижу.

3° Наћи угао под којим се секу посматране криве.

240. Дата је хипербола $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

1° Одредити параметар $2q$ параболе $y^2=2qx$ тако да буде конфокална са датом хиперболом $(q>0)$.

2° У тачки $(-c,-p)$, где је c полурастојање жижа, а p полупараметар хиперболе, повући тангенту на хиперболу и показати да иста тангента додирује и посматрану параболу.

3° Показати да потези који спајају додирне тачке са заједничком жижом стоје нормално један на другом.

241. Правоугли троугао ABC, чије су катете $CB=a$, $CA=b$ и хипотенуза $AB=c$, клизи крајњим тачкама хипотенузе A и B по позитивним правцима координатних оса система xOy. Притом се теме A креће по оси Ox, теме B по оси Oy, а теме C се налази изван троугла OAB. Наћи геометриско место темена C.

242. Кроз тачку $P(2,4)$ пролазе две међу собом управне прав Пресек једне од њих са осом Ox нека је A, а пресек друге са осо Oy нека је B. Кад се те праве, остајући једна на другој нормалн окрећу око тачке P, онда се тачка A креће по оси Ox, а тачка по оси Oy. Наћи геометриско место средине дужи AB.

243. Катете правоуглог троугла леже на позитивним правци координатних оса, а теме правог угла је у координатном почетк Збир катета је сталан $2s=10$. Наћи геометриско место центра квадра конструисаног над хипотенузом изван троугла.

244. Дате су на апсцисној оси две сталне тачке $A(a,0)$ и $B(b,$ $(a<b)$. Из њих су повучене две праве које се секу на ординатн оси. Нека је њихов пресек C. У тачкама A и B подигнуте су за нормале на AC и BC. Наћи геометриско место пресека ових норма кад се тачка C креће по оси Oy.

245. Дат је троугао $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(2,4)$.

1° Наћи геометриско место тачака M за које је:

$$\text{површ. } \Delta\, ABM=\text{површ. } \Delta\, ACM.$$

2° Наћи и геометриско место тачака M за које је:

$$\text{површ. } \Delta\, ABM=\text{површ. } \Delta\, BCM.$$

3° Помоћу добијених геометриских места, наћи тачке M које је

$$\text{површ. } \Delta\, BCM=\text{површ. } \Delta\, CAM=\text{површ. } \Delta\, ABM.$$

246. Тачка P је произвољна тачка круга $x^2+y^2=r^2$, а Q ње пројекција на осу Ox. На полупречник OP, почев од O, пренета дуж $OM=QP$. Наћи геометриско место тачке M кад се тачка P кре по кругу.

247. Из тачке $A(a,0)$ спуштена је нормала AM на праву Δ, к пролази кроз координатни почетак, па је на исту праву, у настав дужи OM, пренета дуж $MP=AM$. Ако се права Δ окреће око ко динатног почетка, наћи: a) геометриско место тачке M; b) геометрис место тачке P.

(Упутство: b) користити сличност троуглова OAM и OQP, г је Q пројекција тачке P на осу Ox.)

248. Дата су темена равнокраког троугла $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,$ Наћи геометриско место тачака тако да растојање сваке тачке основице троугла буде геометриска средина њених растојања кракова.

249. 1° У троуглу ABC стране $AB=c$ и $AC=b$ имају сталне дуж не, а угао између њих је променљив. Наћи геометриско место среди стране BC: a) ако страна AB има непроменљив положај; b) а страна AC има непроменљив положај.

2° Решити задатак и геометриском анализом.

250. Наћи геометриско место тачака које су подједнако удаљене од кругова $(x+2)^2+y^2=64$ и $(x-2)^2+y^2=4$.

251. Дата су темена троугла $A(4,2)$, $B(-4,2)$, $C(0,-2)$. Наћи геометриско место тачака тако да је збир квадрата растојања сваке тачке од страна датог троугла сталан и да има вредност 12.

252. Дат је круг $x^2+y^2=r^2$. Нека је M његова произвољна тачка, а N њена пројекција на осу Ox. Круг са центром у M и полупречником MN сече дати круг у тачкама P и Q. Наћи геометриско место пресека S дужи PQ и MN кад се тачка M креће по кругу.

[Упутство: Координате тачке M означити са (a, b).]

253. Кроз тачку $P(5,3)$ пролази права Δ која праву $y+3=0$ сече у тачки A, а праву $x+5=0$ у тачки B. Наћи геометриско место средине дужи AB кад се права Δ окреће око тачке P.

254. Две полуправе које полазе из тачака $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$ окрећу се око тих тачака тако да са истим смером праве AB захватају увек комплементне углове. Наћи геометриско место њиховог пресека M.

255. Наћи геометриско место тачака које су подједнако удаљене од круга $x^2+y^2+4x=0$ и тачке $P(2,0)$.

256. Два темена троугла су $O(0,0)$ и $A(c,0)$ $(c>0)$, а висина која одговара страни OA има сталну дужину h. Наћи геометриско место пресека висина посматраног троугла.

257. Круг $x^2+y^2=r^2$ сече позитивни правац осе Oy у тачки B. Нека је P произвољна тачка датог круга, а Q њена пројекција на осу Ox. Наћи геометриско место пресека правих OP и BQ.

258. Наћи геометриско место тачака које су подједнако удаљене од ординатне осе и круга $(x-3)^2+y^2=1$.

259. Наћи геометриско место центара кругова који додирују осу Oy и пролазе кроз тачку $P(4, 0)$.

260. 1° Наћи општу једначину кругова чији је центар на оси Ox, а који додирују параболу $y^2=2px$. Наћи координате додирне тачке круга и параболе у функцији апсцисе центра круга, па показати да та апсциса мора бити већа од полупараметра параболе, или најмање једнака њему.

2° Наћи једначину круга који додирује параболу $y^2=2px$ у двема тачкама симетричним према оси параболе, а који пролази кроз тачку $A(a, 0)$ $(a>0)$.

3° Круг са центром на оси Ox додирује параболу $y^2=2px$. Наћи геометриско место пресека тога круга и праве која пролази кроз његов центар, а паралелна је са осом Oy, кад се центар круга помера по оси Ox.

РЕШЕЊА, УПУТСТВА И РЕЗУЛТАТИ

1. Потребно је посебно доказати да је број A дељив с
а посебно да је дељив са 3. У погледу дељивости са 2, разлик
ћемо два случаја: да је n паран или непаран број, тј. да је об
$n=2k$ или $n=2k+1$, где је k природан број. У погледу дељивости
могућа су само три случаја: да деоба броја n са 3 даје остата
1 или 2, тј. да је n облика $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, где је k природан б
Растављањем на чиниоце добија се: $A=n(2n+7)(7n+1)$. *Доказ д*
вости са 2: а) ако је $n=2k$, дељив је са 2 први чинилац броја
b) ако је $n=2k+1$, дељив је са 2 трећи чинилац, $14k+8$. Значи д
у оба случаја A паран број. *Доказ дељивости са 3:* а) ако је $n=$
дељив је са 3 први чинилац броја A; b) ако је $n=3k+1$, дељи
са 3 други чинилац, $6k+9$; c) ако је $n=3k+2$, дељив је са 3 т
чинилац, $21k+15$. Значи да је у сваком од три могућа случај
дељив са 3.

2. Посебно доказати да је A дељив са 8, 9 и 5, што значи
је дељив и са 360.

3. Користити правило: Цели бројеви x и y који задовољаі
једначину $\alpha x+\beta y=\gamma$, где су α, β и γ цели бројеви, или су узаја
прости бројеви, или им је заједнички чинилац један од чинил
броја γ. Ако је $\gamma=1$, онда су x и y узајамно прости.

4. 2° а) $3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$;

b) $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$;

c) $(a^2+b^2+c^2)^2-(bc+ca+ab)^2=(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-a$

3° Ако је збир квадрата два или више реалних бројева јед
нули, онда је сваки од њих једнак нули.

5. Ако дати полином поделимо са $x+y+z$, долазимо до усл
за дељивост: $(m-3)yz(y+z)=0$. Да би тај услов био иденти
задовољен, потребно је и довољно да буде $m=3$.

6. Кад се помоћу дате релације елиминише c, израз P доб
облик $P=\frac{ab}{2}\sqrt{1-k^2}$. Услов реалности: а) у првом облику:

$$|a-b|<c<a+b,$$

тј. да су a, b и c мерни бројеви страна троугла; b) у другом облику $|k|<1$. Да су ови услови идентични, уверавамо се ако дату релацију напишемо у облицима: $(a+b)^2-c^2=2ab\,(1+k)$ и $c^2-(a-b)^2=2ab\,(1-k)$.

7. Друга једначина може се написати у облику:

$$(a+b+c)\,(a-b-c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)=0.$$

Према томе, из прве једначине обавезно следује друга, али из друге не мора следовати прва.

8. Веза између α, β и γ, која не зависи од p и q, добиће се из датих једначина кад се из њих елиминишу p и q.

9. Два решења: 1) $a=c=0$, $d=-b$, тј. $(x^2+b)\,(x^2-b)=x^4-b^2$;

2) $c=-a$, $b=d=\dfrac{a^2}{2}$, тј. $\left(x^2+ax+\dfrac{a^2}{2}\right)\left(x^2-ax+\dfrac{a^2}{2}\right)=x^4+\dfrac{a^4}{4}$.

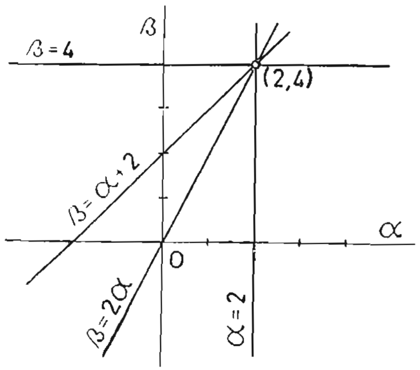
10. Остатак деобе датих полинома има облик:

$$(2pq-2p^2)\,x+(q^2-2pq+q).$$

Да би тај остатак идентички (за свако x) био једнак нули, морају бити једнаки нули посебно коефицијенат уз x и независни члан. Следују решења: 1) $p=0$, $q=0$; 2) $p=0$, $q=-1$; 3) $p=q=1$.

11. $a=2$, $b=9$.

12. 1° Да би поједини разломци у једначини имали смисла, мора бити: $x\neq 0$; -3; $+3$. Срећена једначина има облик: $(\alpha-\beta+2)\,x=3\alpha-6$. Дискусију ћемо приказати само графички.



Сл. 1

Ако се тачка $M(\alpha,\beta)$ налази на ма којој од четири праве: $\alpha=2$, $\beta=4$, $\beta=2\alpha$ и $\beta=\alpha+2$ (осим у њиховом пресеку), дата једначина нема решења; ако се тачка M налази ван ових правих, једначина има једно решење; најзад, ако је тачка M у положају (2, 4), једначина је неодређена.

13. 1° a) За $a\neq 6$ и $a\neq -2$, систем има по једно одређено решење за x и y: $x=\dfrac{a-9}{a-6}$, $y=-\dfrac{a}{a-6}$; b) за $a=6$, систем нема решења; c) за $a=-2$, систем има безбројно много решења.

2° Праве претстављене једначинама датог система паралелне су ако је $\dfrac{a}{3}=-\dfrac{a-4}{a-7}$, одакле је $a_1=6$, $a_2=-2$. У првом случају праве су само паралелне, немају пресека (систем нема решења), а у другом случају праве се поклапају (систем има безбројно много решења). Нацртати посматране праве за $a=6$, $a=-2$ и $a=1$.

14. Парабола $(\beta-1)^2=4\left(\alpha+\dfrac{1}{4}\right)$. За тачку $\left(-\dfrac{3}{16},\ \dfrac{1}{2}\right)$ систем неодређен.

15. Ако су стране посматраног троугла a, b и c $(a>b>c)$, онда

$$a=\frac{2s+6}{3},\qquad b=\frac{2s-1}{3},\qquad c=\frac{2s-5}{3}.$$

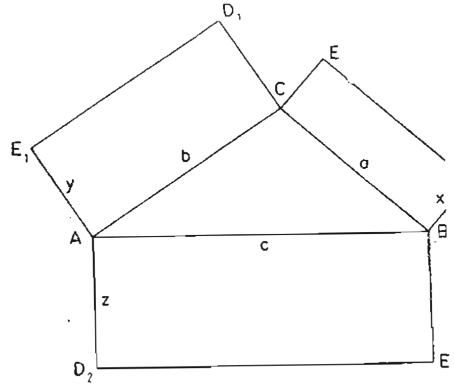
Троугао постоји ако је $s>6$.

16. Над странама троугла ABC конструисани су правоугаон $BDEC$, CD_1E_1A и AD_2E_2B, чије су висине $BD=x$, $CD_1=y$ и AD_2 Из услова задатка следује:

(1) $\qquad cz=ax+by+m^2.$

Осим тога из сличности правоугаоника $BDEC$, CD_1E_1A и AD_2E_2B следује:

(2) $\qquad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$



Сл. 2

Према томе, тражене висине x, y и z су решења система једначина (1) и (2). Ако заједничку вредност три количника (2) означимо са k, следује $x=ka$, $y=kb$, $z=kc$, па се заменом у једначини (1) добија:

$$kc^2=ka^2+kb^2+m^2,\ \text{ одакле је }\ k=\frac{m^2}{c^2-a^2-b^2},$$

тј.

$$x=\frac{am^2}{c^2-a^2-b^2},\qquad y=\frac{bm^2}{c^2-a^2-b^2},\qquad z=\frac{cm^2}{c^2-a^2-b^2}.$$

Задатак има решења само ако је $c^2>a^2+b^2$, тј. ако је дати тро тупоугли. (Тумачење овог услова следује из косинусне тео $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.)

17. 2° $P=\dfrac{chx}{2\,(2h-x)}$, $\qquad x=\dfrac{2kh}{k+1}$, $\qquad k=\dfrac{1}{3}$;

тада је тачка O тежиште троугла ABC.

18. 1° Разломак се повећава за

$$d=\frac{m\,(b-a)}{b\,(b+m)}.$$

Повећање је позитивно ако је дати разломак прави, а негативно је неправи.

2° $m=\frac{a-bx}{x-1}$. За позитивне вредности m, нови разломак x постиже вредности које леже између датог разломка и јединице, а за негативне вредности m, остале вредности.

19. 1° Неједнакост следује из очевидне неједнакости

$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

20. 1° Ставити

$$\log_b a = x, \quad \log_a b = y, \quad \text{па је} \quad b^x = a, \quad a^y = b.$$

Затим елиминисати a или b.

21. Два пута трансформисати дату релацију допуњавањем до потпуног квадрата. Услов: $k>-2$.

22. 1° $z=\frac{x+y}{xy-1}$.

2° $z=\frac{a}{b^2-1}$; услови: $b>1$, $a>2b$.

3° Следује из услова под 2°, а може се доказати и директно из израза под 1°. Да би z било позитивно, мора бити $xy>1$, а затим из очевидне неједнакости

$(x-y)^2 \geqslant 0$ следује $(x+y)^2 \geqslant 4xy>4$, тј. $x+y>2$.

4° $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$, $z=\operatorname{tg}\gamma$, где су α, β и γ углови оштроуглог троугла.

23. Корени: $x_1=a$, $x_2=b$ али корен x_2 не задовољава дату једначину, јер једначина ослобођена именилаца није еквивалентна датој.

24. Добијеу бикадратну једначину најлакше је решити растављањем на чиниоце да би се избегло кореновање комплексног броја. Решења:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \qquad x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

25. Из дате једначине следују једначине:

(1) $$2\sqrt{2ax}=x+a+1,$$

(2) $$2\sqrt{ax-a}=a-1-x,$$

(3) $$x^2-2(3a-1)x+(a+1)^2=0.$$

Да би оне биле еквивалентне, мора бити $-a-1<x<a-1$, а да би корени једначине (3) били реални и $a>1$. Према томе, дату једначину задовољава само корен

$$x_2=3a-1-2\sqrt{2a^2-2a},$$

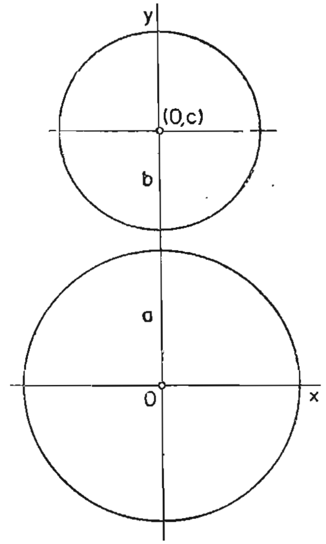
и то једино кад је $a\geqslant 2$.

26. 1° Корени:

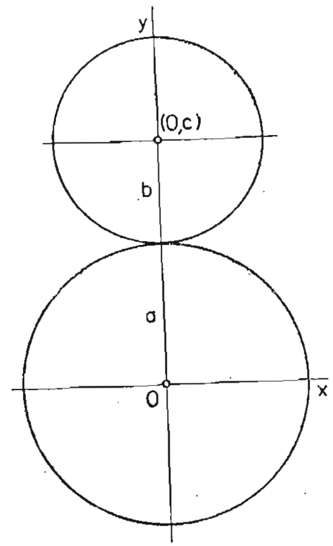
$$x=\pm\frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

a) Корени су реални ако су a, b и c мерни бројеви страна троугла. b) Добијена рационална једначина еквивалентна је датој ако је

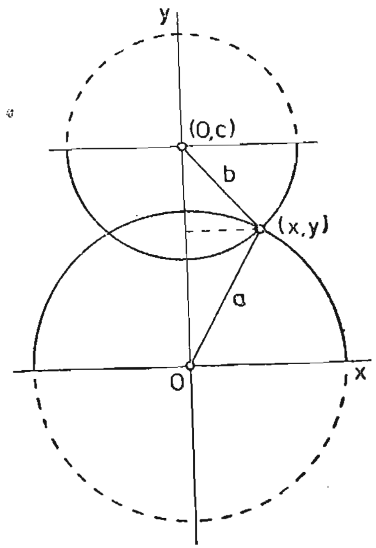
$a^2+c^2\geqslant b^2$ и $b^2+c^2\geqslant a^2$, тј. ако у троуглу, чије су стране a, b и c, према странама a и b леже оштри углови или је један од њих прав



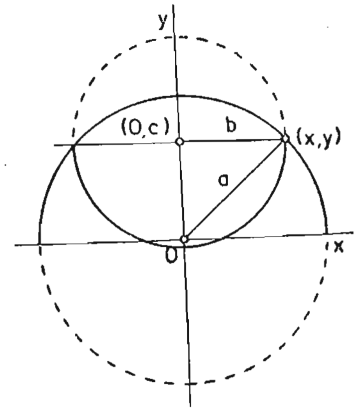
Сл. 3



Сл. 4

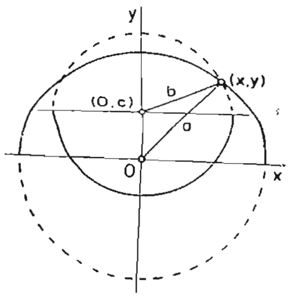


Сл. 5



Сл. 6

2^0 График функције y_1 је круг са центром $(0, 0)$ и полупречником a, али позитивном знаку пред квадратним кореном одговара само његов полукруг са позитивним ординатама тачака. График функције y_2 је круг са центром $(0, c)$ и полупречником b, али негативном знаку пред квадратним кореном одговара само полукруг чије су ординате тачака мање од c.



Сл. 7

Резултати дискусије виде се на сликама од 3 до 7. Нека читалац сам протумачи ток дискусије. Напомињемо да је рационалисана једначина еквивалентна датој само ако се кругови секу у тачкама поменутих полукругова.

27. Елиминисати x. Решења: 1) $a=1$ (два заједничка корена); 2) $a=-2$ (један заједнички корен).

28. 1^0 $a=c$, а b произвољно, или $b=c$, а a произвољно.

2^0 $a=b=c$.

29. $x=y=z$.

30. Дата једначина задовољена је ако је $a=b$ (уз услов $b \neq -1$), или ако је $ab=1$ (уз услов $b>0$). Услови у заградама су потребни да би разломак на десној страни дате једначине имао смисла и био позитиван; лева страна увек је позитивна.

31. 1^0 Задатак се своди на једначину

$$x+iy=(x-iy)^2,$$

одакле се добија систем

$$x^2-y^2=x, \quad -2xy=y.$$

Решења: $$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2^0 Тражени бројеви су 0 и корени једначине $x^3-1=0$.

32. Сматрати γ и δ као познате, па дати систем решити по α и β.

33. 2^0 $y=\dfrac{x-2}{x-1}$, $z=2-x$.

3^0 Задатак се своди на решавање система једначина

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1, \quad y^2+z^2=\frac{325}{36},$$

одакле се за производ yz добијају два решења $\dfrac{25}{6}$ и $-\dfrac{13}{6}$. Друго решење не узимамо у обзир, јер је $y>0$, $z>0$, а из првог следује само једно решење постављеног задатка:

$$y=\frac{5}{2}, \quad z=\frac{5}{3}, \quad x=\frac{1}{3}.$$

34. 2^0 $P=(a+b)x-2x^2$, $\quad x=\dfrac{a+b}{4}$ уз услов $a \leqslant 3b$.

3^0 $x=\dfrac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ уз услов $1 \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant 1+\sqrt{2}$.

35. $x=R\sqrt{2}$.

36. $x=\dfrac{-a+\sqrt{5a^2-4b^2}}{2}$ уз услов $a>b$.

37. 1^0 $P=\dfrac{a(x+y)}{2}$.

2^0 $x^2+y^2-ax=0$.

3^0 $M\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

38. 1^0 Помножити обе стране са 2 и све чланове пренети леву страну. Једнакост наступа само за $a=b=c$.

39. Задатак се своди на решавање система неједначина једном непознатом:

$$(6-a)(a+2) \geqslant 0, \quad \frac{a+6}{a}<0,$$

одакле је: $-2 \leqslant a<0$.

40. 1^0 $x_{1,2}=c \pm \sqrt{(c-a)(c-b)}$ уз услов $0<c<b$ или $c>a$.

2^0 $\dfrac{ab}{a+b}<c<b$.

41. Из дате једначине следује:

$$\Delta=2(2a-1)(a-2), \quad x_1+x_2=4(a-1), \quad x_1x_2=2a.$$

Пошто се испитају знаци и нуле ових израза, следује табела:

a	Δ	x_1+x_2	x_1x_2	Корени
$-\infty$	+	−	−	$x_1<0<x_2$, $\lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert$
0	+	−	0	$x_1=0$, $x_2=-4$
	+	−	+	$x_1<x_2<0$
$\frac{1}{2}$	0	−	+	$x_1=x_2=-1$
	−	−	+	корени конјуговано-комплексни
1	−	0	+	
	−	+	+	
2	0	+	+	$x_1=x_2=2$
$+\infty$	+	+	+	$0<x_1<x_2$

42. $\Delta = -(2a-3)(a-6), \qquad x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-2}, \qquad x_1 x_2 = \frac{3(a-3)}{a-2}.$
Остављамо читаоцу да сам изврши дискусију и састави табелу.

43. a) $a \leqslant \sqrt[4]{10}$; b) $1 < a \leqslant \sqrt[4]{10}$; c) $a = \sqrt[4]{10}$; $x_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt[4]{10}}$.

44. 1° $t^2 - st + \frac{s^2 - c^2}{2} = 0.$

2° Из $\Delta \geqslant 0$ следује $a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

3° Неједнакост следује из неједнакости $c < a + b \leqslant c\sqrt{2}$.

45. За $\frac{a}{b} < 0$ или $\frac{a}{b} > 4$ решења

$$c = \frac{a(3b-a) \pm (a-b)\sqrt{a(a-4b)}}{2a}$$

су реална.

46. 1° $\Delta = (\alpha - \beta)^2 + 4.$

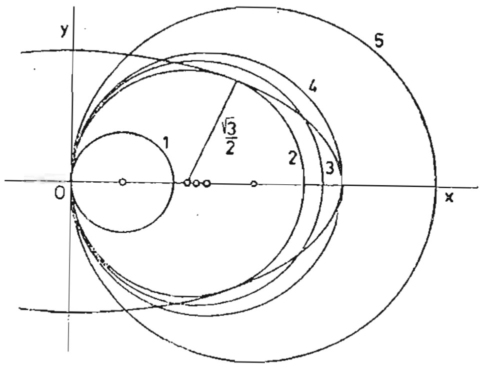
2° Равнострана хипербола $\alpha\beta = 2$.

47. 1° $(a+2)y^2 - a(a+3)y + (a+3)^2 = 0.$

2° $\frac{\Delta'}{\Delta} = (a+3)^2.$

3° $a_{1,2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{10}}{3}.$

48. Два решења: $a_1 = \frac{9}{4}, \quad b_1 = \frac{9}{2}; \quad a_2 = -\frac{7}{4}, \quad b_2 = \frac{7}{2}.$



Сл. 8

49. 1° Решења су реална за $0 \leqslant a \leqslant \frac{4}{3}$.

2° Из датог система следује

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \frac{4a - 3a^2}{a^2 + 1},$$

па је тражена вредност параметра $a = \frac{1}{2}$.

50. 1° Из датих једначина следује $x = \frac{4 - 3y^2}{2a}$, а затим биквадратна једначина:

$$9y^4 - 8(3 - 2a^2)y^2 + 16(1 - a^2) = 0,$$

па се дискусија своди на посматрање реалних позитивних корена за y^2 (зашто?).

2° Графичка дискусија види се на слици 8. Нека сам читала изведе потребне закључке.

51. 2° $y_1 = \sqrt{x_1}, \quad y_2 = \sqrt{x_2}.$

3° $\sqrt{3 + 4i} = 2 + i, \quad \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$

52. 1° Корени су реални за $a < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ или $a > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

2° Елиминацијом параметра a из једначина

$$x_1 + x_2 = 2(a+1), \quad x_1 x_2 = 3a + 2$$

добија се тражена веза:

$$2x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

3° $x_1 = x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x'_1 = x'_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$

4° $a_1 = -1, \quad a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}.$

53. 1° $x_2 = \frac{1 - x_1}{1 + 3x_1}.$

2° $x_2 > 0$ за $-\frac{1}{3} < x_1 < 1$.

3° $x_1 = \frac{1}{9}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$ и $x'_1 = -\frac{1}{2}, \quad x'_2 = -3$

54. 1° Два решења: $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{k - 9}$.

2° $k \geqslant 9$.

3° Једној вредности $k \geqslant 9$ одговарају две реалне вреднос m, за које вреди релација $m_1 + m_2 = 2$. На основу тога, а из дате ј начине, следује дата релација.

55. 1° $\Delta = a^2 + 4.$

2° Свакој вредности k, која је $k > \frac{22}{9}$ или $k < -2$, одговарају две вредности a:

$$a_{1,2} = \frac{6 - 3k \pm \sqrt{(9k - 22)(k + 2)}}{2(2k - 5)}.$$

3° $2\frac{4}{9} < k < 2\frac{1}{2}.$

56. Једно решење:

$$x = b + c - a - \sqrt{2(a-b)(a-c)}$$

уз услов $b^2 + c^2 - a^2 \geqslant 0$, тј. уз услов да је дати троугао оштроу или правоугли.

57. 1^0 $PQ=\frac{1}{2}\sqrt{3(x^2-ax+a^2)}$. Површина троугла MPQ је $\frac{3\sqrt{3}}{16}(ax-x^2)$.

2^0 Два решења:

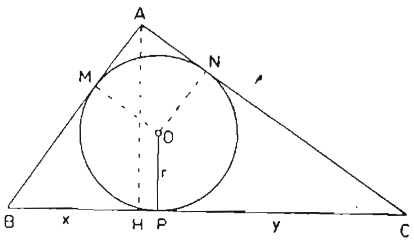
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{4k^2-3}}{2}a \text{ уз услов } \frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant k\leqslant 1.$$

3^0 Два решења:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-48\lambda}}{6}a \text{ уз услов } \lambda\leqslant\frac{3}{16}.$$ Шта бива за $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\lambda=\frac{3}{16}$? Да ли се онда добијају екстремне вредности посматраних величина?

58. Нека је A пресек тангената повучених из тачака B и C на дати круг.

1^0 Ако је $BA\perp CA$, онда је ΔBCA правоугли. Ако се из центра O датог круга спусте нормале OM и ON на тангенте BA и CA, онда је четвороугао $ONAM$ квадрат (зашто?). Осим тога је $BM=BP$, $CN=CP$ (тангенте повучене из исте тачке на круг), па је $BC=x+y$, $CA=y+r$, $AB=x+r$. Тако је према Питагорином правилу



Сл. 9

$$(x+y)^2=(y+r)^2+(x+r)^2,$$

тј.
$$xy-r(x+y)=r^2. \qquad (1)$$

То је тражена веза.

2^0 a) Ако је дато $x+y=a$, онда из једначине (1) следује $xy=ar+r^2$, па су x и y корени квадратне једначине

$$z^2-az+ar+r^2=0.$$

Решењем ове једначине добија се

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}, \qquad y=\frac{a-\sqrt{a^2-4ar-4r^2}}{2}.$$

Решења за x и y су реална ако је

$$a^2-4ar-4r^2\geqslant 0, \quad \text{тј. ако је } a\geqslant 2r(1+\sqrt{2}). \qquad (2)$$

b) Ако је дата висина $AH=h$ троугла BCA, онда се његова површина може изразити на два начина:

$$P=\frac{1}{2}BC.\ AH \text{ и } P=\frac{1}{2}AB.\ AC,$$

те следује једначина
$$h(x+y)=(x+r)(y+r),$$
тј.
$$h(x+y)=xy+r(x+y)+r^2.$$

Ако производ xy заменимо из једначине (1), добија се

$$x+y=\frac{2r^2}{h-2r}.$$

Тако је овај случај сведен на случај а). Да би било $x+y>0$, мор бити $2r<h$, а осим тога да би био задовољен услов (2), мора бит $h\leqslant r(\sqrt{2}+1)$, те је услов постојања решења:

$$2r<h\leqslant r(1+\sqrt{2}).$$

59. $b=\frac{3-\lambda+\sqrt{\lambda^2-10\lambda+9}}{2}a$, $\quad c=\frac{3-\lambda-\sqrt{\lambda^2-10\lambda+9}}{2}a$ уз усло $0<\lambda\leqslant 1$; $\quad b=c=a$ за $\lambda=1$.

60. 1^0 Збир површина пројекција троуглова AMS и ANS на рава ABC једнак је површини троугла AMN.

2^0 $x=y=\frac{2}{3}a$.

61. 1^0 $m_{1,2}=\frac{-(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$.

2^0 Дискриминанта је збир квадрата два реална броја.

62. 1^0 $\Delta<0$.

2^0 $a=b+c$, или $b=c+a$, или $c=a+b$.

63. Дати трином је негативан за све вредности променљиве ако је a у размаку $-2<a<\frac{3}{2}$.

64. $7-3\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 7+3\sqrt{5}$, $0\leqslant y\leqslant 6$.

65. Минимум $c=\frac{a}{2}$ за $x=\frac{a}{2}$.

66. Површина постиже минимум $P=\frac{31a^2}{40}$ за $x=\frac{3}{10}a$.

67. 1^0 Функција $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=3x^2-2hx+a^2+b^2-h^2$ за $x=$ постиже минимум $a^2+b^2-\frac{4}{3}h^2$.

2^0 a^2.

68. 2^0 $P=2x^2-(a+b)x+ab$. Минимум $P=\frac{6ab-a^2-b^2}{8}$ за $x=\frac{a+b}{4}$

Минимум постоји ако је $b<a<3b$.

3^0 $x=\frac{ab}{a+b}$, $\quad P=2x^2$.

69. 1^0 Површина постиже максимум

$$P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{28}\left(=\frac{3}{7}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \text{ за } x=\frac{2a}{7}.$$

$2^0 \quad x=\frac{2a}{3}.$

70. График је парабола $P=\frac{a}{2}x-x^2$; али постављеном проблему одговара само њен део у првом квадранту координатног система xOP.

71. Запремина постиже минимум $\frac{1000\,\pi}{7}\,\mathrm{cm}^3$ за

$$x=\frac{40}{7}\,\mathrm{cm}, \qquad y=\frac{10}{7}\,\mathrm{cm}.$$

72. Ако се вредност датог разломка означи са m, добија се једначина

$$(1-m)\,x^2+(1+m)\,x+(1-m)=0,$$

чија је дискриминанта

$$\Delta=(3-m)\,(3m-1).$$

Значи да ће x бити реално ако се m налази у размаку $\frac{1}{3}\leqslant m\leqslant 3$. Одатле следује обрнут закључак: ма за коју реалну вредност x, m може имати само вредности из интервала $\frac{1}{3}\leqslant m\leqslant 3$, а то је одговор на питање постављено у задатку. На овај начин су у исто време нађене и највећа могућа (3) и најмања могућа вредност $\left(\frac{1}{3}\right)$ датог разломка.

73. Тражене вредности су: највећа

$$\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2}$$

за
$$x=2\,(\sqrt{a^2+1}-a),$$
најмања

$$\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{2}$$

за
$$x=-2\,(a+\sqrt{a^2+1}).$$

74. 1^0 Корени су реални за $2\leqslant a\leqslant 6$.

2^0 Ако се дата једначина среди по a, а непозната x игра улогу параметра, онда следује да ће a бити реално за $0\leqslant x\leqslant 4$. Према томе највећа вредност већег корена је 4 (за $a=5$), а најмања могућа вредност мањег корена је 0 (за $a=3$).

75. Ако из датих једначина елиминишемо, например y, добија се једначина

$$3x^2-3mx+m^2-9=0.$$

И сад се проблем своди на дискусију реалности корена овеједн: чине. Следује: максимална вредност $m=6$ за $x=3$, $y=0$.

76. 1^0 $$a_n=S_n-S_{n-1}=19n-99.$$

Општи члан је линеарна функција од n, па је посматрани ред аритм тички: $a_1=-80$, $d=19$.

2^0 Из једначине $a_{n+1}=2S_n$ следује само једно цело поз тивно решење: $n=10$.

77. 1^0 $$a_n=m+\frac{n-2}{m}, \qquad S_n=mn+\frac{n\,(n-3)}{2m}.$$

2^0 $$a_m=\frac{(m-1)\,(m+2)}{m}, \qquad S_m=\frac{(m-1)\,(2m+3)}{2};$$

за $m=10\,k+1$, S_m постаје $S_m=25k\,(4k+1)$.

78. 1^0 $S-S'=n\,[(n+1)\,ax-x^2]$.

2^0 Максимум $\frac{n\,(n+1)^2\,a^2}{4}$ за $x=\frac{n+1}{2}$.

79. 1^0 Проблем се своди на једначину

$$hn^2-(2c-2a+h)\,n+2pc=0,$$

где је n број протеклих секунди од поласка првог тела до сустизан Друго тело стиже прво само ако ова једначина има два позитив корена (зашто?), тј. кад су задовољени услови

$$c>a-\frac{h}{2}, \qquad p\leqslant\frac{(2c-2a+h)^2}{8ch}.$$

2^0 Нека читалац сам објасни: а) значење другог позитивн корена; b) значење двоструког позитивног корена; c) значење д негативна корена; d) значење имагинарних корена. Специјални случ $n_1=8$ sec, $n_2=10$ sec.

80. 2^0 $4s^2x^2-2s\,(s^2+m^2)\,x+(s^2-m^2)^2=0$

3^0 $\Delta=s^2\,(3s^2-m^2)\,(3m^2-s^2)$.

4^0 $a=1,\ b=2,\ c=4$ или $a=4,\ b=2,\ c=1$.

81. 1^0 Наведени услов следује из неједнакости $a<b+c$ и $c<a+$ $(a>b>c$ или $a<b<c)$.

2^0 $$q=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

82. Задатак има: а) једно решење

$$x=\frac{b^2-ac}{a+c-2b}$$

ако дати бројеви не чине аритметичку прогресију; b) нема решен ако дати бројеви $a\neq b\neq c$ чине аритметичку прогресију; c) безбр решења ако је $a=b=c$. Посебан случај: $x=1$.

83. 1° На дубини од 8 m притисак је

$$p_1=p_o\left(1+\frac{0,1}{100}\right);$$

на дубини од $n\cdot 8$ m притисак је

$$p_n=p_o\left(1+\frac{0,1}{100}\right)^n.$$

Тражени притисак је:

$$p_{800}=760.1,001^{800}\approx 1025,7 \text{ mm/Hg}.$$

2° $n=1099$, тј. на дубини од 8792 m.

84. 1° $P_1=\frac{5}{7}P_o$. (Користити Бојл-Мариотов закон.) Смањење за $28\frac{4}{7}\,\%$.

2° $P_n=P_o\left(\frac{5}{7}\right)^n$.

3° $n=\dfrac{\log 190-\log 3}{\log 7-\log 5}\approx 12,3$, тј. $n=13$.

85. Први ред: $a_1=\sqrt{2}-1,\ q=(\sqrt{2}-1)^2$; други ред: $a'_1=(\sqrt{2}-1)^2$, $q'=(\sqrt{2}-1)^4$.

86. 1° Геометриски ред је конвергентан ако је његов количник $|q|<1$, тј. ако је $-1<q<1$. У датом реду је $q=\dfrac{3-2a}{a+1}$, па је ред конвергентан ако је

$$-1<\frac{3-2a}{a+1}<1.$$

Ово је систем од две неједначине са једном непознатом. Раздвојене и сређене оне имају облик:

$$\frac{4-a}{a+1}>0,\qquad \frac{2-3a}{a+1}<0.$$

Прва је задовољена за $-1<a<4$, а друга за $a<-1$ или $a>\dfrac{2}{3}$, што значи да је систем задовољен за

$$\frac{2}{3}<a<4.$$

То су вредности параметра a за које је дати геометриски ред конвергентан.

2° За $\frac{2}{3}<a<4$, збир датог реда је

$$S=\frac{a_1}{1-q},\quad \text{тј.}\quad S=\frac{(a+1)^2}{3a-2}.$$

3° За све вредности параметра a, за које је дати ред конв
гентан, његов збир је позитиван, јер је бројилац квадрат, а имени
$3\left(a-\frac{2}{3}\right)$. Да бисмо нашли његову најмању вредност, средимо јед
чину $S=\dfrac{(a+1)^2}{3a-2}$ по степенима од a. Добија се:

$$a^2-(3S-2)a+(2S+1)=0.$$

У тој једначини S сматрамо као позитиван параметар, па се траже
минимума своди на одређивање вредности параметра S, за које ј
реално. Те вредности задовољавају неједначину:

$$(3S-2)^2-4(2S+1)\geqslant 0.$$

Она је задовољена за $S\leqslant 0$ и $S\geqslant 2\frac{2}{9}$. Према томе тражена најма
вредност збира S је $S=2\frac{2}{9}$, а одговарајућа вредност параметра
је $a=2\frac{1}{3}$.

87. Задатак се своди на систем једначина и неједначина са
непознате: $\dfrac{1}{1-p}=\dfrac{k}{1-q}$, $p^2=q$, $-1<p<1$, $0<q<1$, где је q количн
првобитног реда, а p количник новог реда. Решења: $p=k-1$, $q=(k-$
Посебан случај: $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{9}$.

88. 1° $\dfrac{4P}{3}$.

2° Тражена тачка S је тежиште троугла, јер је:

$$C_1S=\lim_{n\to\infty}\left\{C_1C_2-C_2C_3+C_3C_4-\dots\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{m}{2}-\frac{m}{4}+\frac{m}{8}-\dots\right\}=\frac{m}{3}.$$

89. 1° $r\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{2n}$.

2° $\dfrac{r^2}{2}\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{n}$.

90. 2° $r_1=\dfrac{Rh}{s+R}$, $r_2=kr_1,\dots$, $r_n=k^{n-1}r_1$; $\rho_1=\dfrac{sR}{s+R}$, $\rho_2=k\rho_1,\dots$
$\rho_n=k^{n-1}\rho_1$.

3° $\dfrac{\pi Rh^2}{s}$; $\dfrac{2\pi R^2h^3}{3(3s^2+R^2)}$.

4° πs; $\dfrac{\pi Rs}{4}$.

91. 2^0 $x_2=\dfrac{ab^2}{(a+b)^2}$, $\quad x_2'=\dfrac{a^2b}{(a+b)^2}$; $\quad x_3=\dfrac{ab^3}{(a+b)^3}$, $\quad x_3'=\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^3}=x_3''$, $x_3'''=\dfrac{a^3b}{(a+b)^3}$.

3^0 $p_1=\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$, $\quad p_2=\dfrac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$, $\quad p_3=\dfrac{a^2b^2(a^2+b^2)^2}{(a+b)^6}$; количник $\dfrac{p_2}{p_1}=\dfrac{p_3}{p_2}=\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

4^0 Граница збира: $S=\dfrac{ab}{2}$.

92. 1^0 Први чланови: $x=a\pm\sqrt{a^2-g^2}$; трећи чланови: $y=a\mp\sqrt{a^2-g^2}$ (знаци одговарају један другом).

2^0 $a>0$, $a\geqslant g$. Теорема о величини аритметичке и геометриске средине два позитивна броја.

93. 1^0 $x=\dfrac{(1+q)^2}{2}$ уз услов $q\neq 1$. Ако је $q=1$, задатак је неодређен.

2^0 $d=q(1-q^2)$; аритметичка прогресија је растућа ако је $0<q<1$. Тада је: $\dfrac{1}{2}<x<2$. Посебан случај: $x=\dfrac{9}{4}$, $d=\dfrac{3}{8}$, $a_1=\dfrac{1}{64}$.

94. Ако се стави: $y=xq$, $z=xq^2$, онда је

$$q=\frac{-\alpha\pm\sqrt{2\alpha\beta}}{\alpha},\quad x=\frac{\alpha^2(2\alpha+\beta\pm2\sqrt{2\alpha\beta})}{(2\alpha-\beta)^2}.$$

95. 1^0 $q=2$.

2^0 $n=15$.

3^0 $a_1=\dfrac{2}{45}$, $d=\dfrac{1}{45}$.

96. Периферискн углови над једнаким луцима у круговима истог полупречника једнаки су.

97. 1^0 Доказати да је $\sphericalangle ECF=180^0$.

2^0 Користити особине равнокраког троугла.

98. 1^0 Подићи нормалу на AB у тачки O.

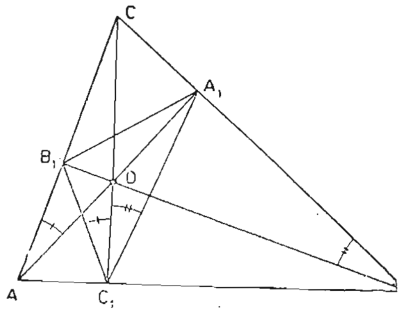
3^0 $\sphericalangle APB=\dfrac{\pi}{2}$, $OP=a$; полукруг над AB као пречником.

99. Тетиву MB продужити преко B за $BP=CM$, па доказати да је $\Delta\, APM$ равностран. Може ли се ова теорема доказати тригонометриски? Показати да се тада доказ своди на доказ идентичности $\sin\varphi+\sin(60^0-\varphi)=\sin(60^0+\varphi)$.

100. 1^0 a) $\sphericalangle B_1AO=\sphericalangle OBA_1=90^0-\sphericalangle ACB$; b) четвороугао AC_1OB_1 је тетиван, јер су му два супротна угла права, па је $\sphericalangle B_1AO=\sphericalangle B_1C_1O_1$ (као периферискн углови над истим луком); c) на исти начин се доказује да је $\sphericalangle OBA_1=\sphericalangle OC_1A_1$, те следује наведена теорема. (Сл. 10)

3^0 $A(3,0)$, $B(8,5)$, $C(0,9)$.

101. 1^0 Око троугла ABC описан је круг са центром у O, па кроз теме C повучен пречник COC_1 (сл. 11). Тада су углови BA(C_1CB периферискн над луцима $\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{BC_1}$. Како је збир ових лукова ј нак половини кружне линије, то је $\sphericalangle BAC+\sphericalangle C_1CB=90^0$. Ако наспрам стране BC лежи туп угао, онда се на исти начин добија $\sphericalangle BAC-\sphericalangle C_1CB=90^0$.



Сл. 10

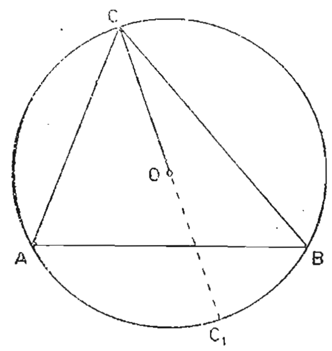
2^0 a) Из услова задатка следује сл. 12. Према теореми доказаној под 1, је

(1) $\sphericalangle SAO=90^0-\sphericalangle AMO$,

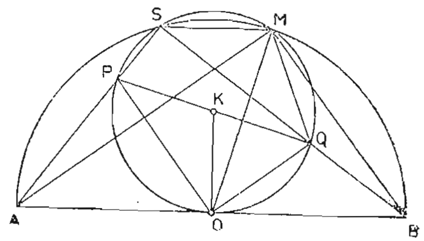
(2) $\sphericalangle SBO=90^0-\sphericalangle BMO$.

Сабирањем ових једначина добија се: $\sphericalangle SAO+\sphericalangle SBO=180^0-(\sphericalangle AMO+\sphericalangle BMO)=90^0$, што значи ı је угао ASB прав. Из тога следује да тачка S лежи на кружној линиј

b) Из једначина (1) и (2) следује да је $\sphericalangle SAO=\sphericalangle MB$($\sphericalangle SBO=\sphericalangle MAO$, што значи да је $\triangle ABM\cong\triangle ABS$, а из ов подударности следује паралелност $AB\parallel SM$ (зашто?).



Сл. 11



Сл. 12

c) Ако повучемо дуж PQ и спојимо тачке P и Q са O, тада је $\sphericalangle POQ=90^0$ (јер су OP и OQ симетрале углова AOM и BOM), па значи да је четвороугао $OQSP$ тетиван. Центар K круга описаног око тог четвороугла лежи на средини дијагонале PQ. Троугли AOM и BOM имају заједничку страну OM, па је права PQ, која пролази кроз центре P и Q описаних кругова око тих троуглова, симетрала заједничке стране OM. Из тога следује да и тачка M лежи на кругу описаном око четвороугла $OQSP$.

102. Видети задатак 101.

103. 1° Следује из сличности: $\Delta A_1B_1C \sim \Delta ABC$. (Прво доказати сличност $\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$, одакле следује пропорционалност $\frac{BC}{AC}=\frac{B_1C}{A_1C}$.)

2° Доказати да је C средина лука A_2CB_2.

3° Доказати једнакост углова $\sphericalangle A_2B_2B = \sphericalangle A_1B_1B$.

104. 3° Елиминисати h и $p = DA$ из релација: $h^2 + p^2 = b^2$, $\frac{h}{c+p} = \frac{b}{a} = \frac{p}{h}$. (Како се долази до ових релација?)

105. 1° У посматраном шестоугаонику могу се уочити шест равнокраких троуглова.

3° Користити особине додирних тачака уписаног круга у троуглу. $R = \sqrt{r^2+s^2} = \sqrt{bc+ca+ab-\frac{2\,abc}{a+b+c}}$.

106. 1° Посматрати тетивни четвороугао $ASCM$.

2° $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos^2(\varphi - 30^0)}$.

3° a) $\varphi = 60^0$ (или 0^0); b) $\varphi = 90^0$.

107. 1° Користити сличност троуглова CBD и ABC.

108. 1° Продужити страну AB преко A до P за $PA = AC$, па спојити P и C.

109. a) Посматрати два пара сличних троуглова из којих се однос $\frac{AS}{SC}$ изражава на два начина. b) Посматрати сличне троуглове APD и DQC.

110. 1° a) Доказати сличност правоуглих троуглова чије су хипотенузе дијагонале.

2° $a = b = c = h = 2r$.

111. Дијагонала која је нормална на краку дели трапез на два слична правоугла троугла.

112. Сличност троуглова и Питагорина теорема.

113. Ознаке: стране a и b, дијагонала m. 1° $a = \frac{m\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{m}{2}$.

2° 30^0 и 60^0.

3° $P = \frac{\pi m^2}{12}\left(5 + 3\sqrt{3}\right)$.

114. Користити особине тангентног четвороугла.

115. Користити теорему о отсечцима на које симетрала унутрашњег угла у троуглу дели супротну страну.

116. Посматрати троуглове APC, BPC, AME, BMD.

117. 1° $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2}$.

2° $\sphericalangle ECA = \gamma$.

3° $p = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. Добија се релација $bc = a\frac{a^2-b^2-c^2}{c}$, која с после срeђивања и скраћивања своди на дати облик.

118. 3° $OO_1 = r\sqrt{2}$.

119. a) $b = a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; b) $b = a$.

120. 1° Прво показати да је c највећа страна троугла.

2° $P = 2m\,(m+1)\,(m-4)$, $r = 2\,(m-4)$, $R = \frac{5}{8}(m^2+4)$.

121. 1° Видети задатак 103.

2° $P = Rs_1$, где је s_1 полуобим троугла $A_1B_1C_1$.

3° $s_1 = \frac{4s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc}$.

122. 2° $P = \frac{a^2}{6}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

123. 1° $a_1 = \frac{a\,(\sqrt{3}-1)}{2}$.

2° $\sphericalangle A_1AB = 30^0$, $\sphericalangle B_1AB = 15^0$.

3° Геометриски низ количника $q = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Граница збира: $\frac{a^2}{2}$.

124. 1° Обим $2s$ је четврта пропорционала за r, c и h.

2° Колики је један оштар угао правоуглог троугла чије су кате r и $s-c$?

3° $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2r^2}{c\,(h-2r)}$. Задатак има решења само ако је $h > 2r$.

125. 1° Користити особине тетива и сечица круга.

2° a) и c) конструкција увек могућа; b) конструкција могу само ако је $\frac{a}{2} \geqslant \sqrt{bc}$.

126. $AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}R$, $AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

127. 2° Хипотенуза c је позитивни корен једначине $c^2 - qc - a^2 =$

128. 1° Колико је познато тангената траженог круга?

2° Полупречник се може наћи: a) упоређивањем површин b) применом сличности троуглова; c) применом правила о симетра унутрашњег угла у троуглу; d) тригонометриски. Нека читалац пр мени све ове начине. Ако је центар круга на катети a, онда $\rho = \frac{b}{a}\left(\sqrt{a^2+b^2} - b\right)$.

129. 1° Користити особине паралелограма и геометриско место тачака из којих се дата дуж види под датим углом.

2° $C(0,1)$, $D(0,-1)$. (Решења $(0,5)$ и $(0,-5)$ одговарају углу $CAD=135°$.)

130. 1° Посматрати средину S дужи MN. Колики је угао BSA?

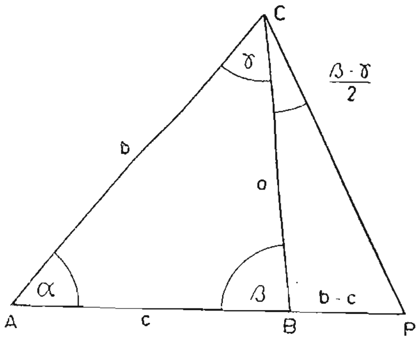
2° Коефицијенат правца тражене праве $m=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2+2ac-c^2}}{2a-c}$. Ако са d означимо растојање тачке B од праве $x=c$, онда за $|d|<AB$ задатак има два решења, за $|d|=AB$ једно решење, а за $|d|>AB$ задатак нема решења.

131. 2° $b=7$, $c=3$.

132. Продужити катету CA преко темена C правог угла до тачке D тако да је $AD=c$. Посебан случај: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=53°7'48''$.

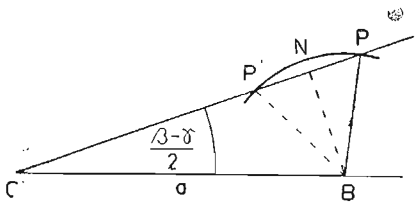
133. Ознаке: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, супротни углови α,β и γ; $b>c$ (сл. 13).

1° Продужимо страну AB преко B до P тако да је $AP=AC=b$, па спојимо тачке C и P. Тада је $\Delta\, APC$ равнокрак, па је $\sphericalangle\, BCP=$
$$=\frac{180°-\alpha}{2}-\gamma=\frac{\beta+\gamma}{2}-\gamma=\frac{\beta-\gamma}{2}.$$



Сл. 13

То значи да у троуглу BPC познајемо две стране $BC=a$ и $BP=b-c$ и угао наспрам мање од њих $\sphericalangle\, BCP=\dfrac{\beta-\gamma}{2}$. Пре него што пређемо на конструкцију нагласимо да је $\sphericalangle\, BPC=\dfrac{180°-\alpha}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$, што значи да он мора бити оштар.
Ток конструкције види се на сл. 14. Конструкција троугла CBP има два решења: CBP и CBP', али у посматраном случају одговара само $\Delta\, CBP$, јер је $\sphericalangle\, BP'C$ туп. Теме A лежи у пресеку симетрале дужи CP и продужења стране PB, јер је $\Delta\, APC$ равнокрак. Ако је $BN\perp CP$, онда задатак има решења само ако је $BN<BP$ и $b-c<a$, тј.
$$a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}<b-c<a.$$



Сл. 14

2° Применом синусне теореме на троугао BPC (сл. 13) добија се:

$$\frac{BP}{BC}=\frac{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\left(90-\dfrac{\alpha}{2}\right)},\qquad \text{тј.}\qquad \frac{b-c}{a}=\frac{\sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},$$

што је и требало доказати. У посебном случају из доказане једначине следује:
$$\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sin 30°}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},\ \text{одакле је}\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{тј.}\ \alpha=90°.$$

Даље је $\beta=75°$, $\gamma=15°$, $b=\sqrt{3}+1$, $c=\sqrt{3}-1$.

134. $90°+\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ и $90°-\dfrac{\beta-\gamma}{2}$ (α, β и γ углови троугла).

135. Конструисати прво $\Delta\, AB_1C_1$, чије су стране $B_1C_1=m$, $AB_1=$ и наспрам стране B_1C_1 угао α, а затим сличан троугао са страном $AC=b$. Показати да задатак може имати 2,1 или 0 решења.

136. Прво конструисати $\Delta\, ABD$.

137. 2° $P=\dfrac{\pi-1}{4}r^2$.

4° $P=\dfrac{\pi+2\sqrt{3}-6}{4}r^2$.

138. 1° Концентрични круг са датим, који додирује све тетиве дате дужине.

2° Тражена сечица је тангента круга нађеног под 1°.

3° $PB-PA=s$, $PB.PA=c^2-R^2$.

4° $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{11}}$.

139. Користити геометриско место тачака нађено у задатку 1[…] под 1°.

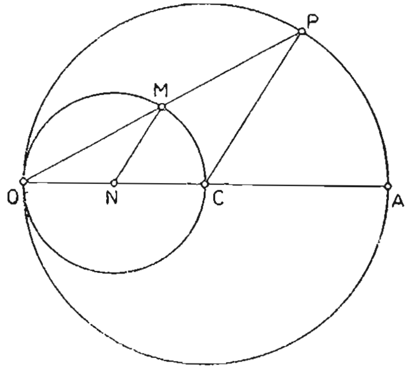
140. 1° Концентрични круг са датим кругом, полупречника $r=\sqrt{R^2+t^2}$ где је R полупречник датог круга, а t дата дужина тангенте.

2° Ако је c растојање дате праве од центра датог круга, онда су могући ови случајеви: а) за $c<\sqrt{R^2+t^2}$, задатак има 4 решења, за $c=\sqrt{R^2+t^2}$, два решења, а за $c>\sqrt{R^2+t^2}$, задатак нема решења.

141. 1°, 3° $x^2+y^2=\dfrac{r^2}{\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$.

2° Показати да задатак може имати 2,1 или 0 решења.

142. 1^0 Нека је O дата тачка на кружној линији, $OA = 2r$ пречник, OP произвољна тетива, M њена средина, а N средина полупречника OC. Тада је $MN = \frac{r}{2}$ (зашто?), што значи да су средине свих тетива повучених из тачке O подједнако удаљене од средине N полупречника OC.



Сл. 15

2^0 У дискусији показати да задатак може имати два, једно или ниједно решење.

3^0 $x^2 + y^2 = rx$ (сл. 15).

143. 1^0 a) Ако страну AB продужимо преко A за $DA = c$, онда је $DC = 2m$. b) Ако медијану AA_1 продужимо преко A_1 за $A_1D = m$, онда је $CD = c$.

2^0 a) Ако се координатни систем постави тако да је A (0,0), B $(c,0)$. онда је тражено геометриско место круг $(x+c)^2 + y^2 = 4m^2$. b) Ако се координатни систем постави тако да је A (0,0), A_1 $(m,0)$, онда је тражено геометриско место круг $(x-2m)^2 + y^2 = c^2$.

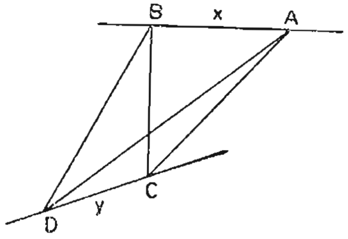
144. 1^0 Геометриско место је права паралелна са правом D.

2^0 $x = 6$.

145. 1^0 Сви троуглови ABC, BCD, ACD, и ABD су правоугли. Тражена релација је $xy = 2a^2$.

2^0 $V = \frac{2a^3}{3}$.

3^0 $x = y = a\sqrt{2}$, $P = 2a^2\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ (сл. 16).

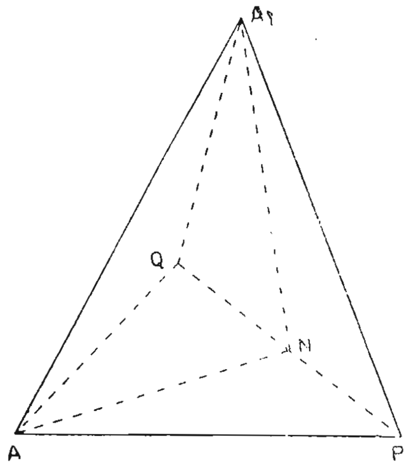


Сл. 16

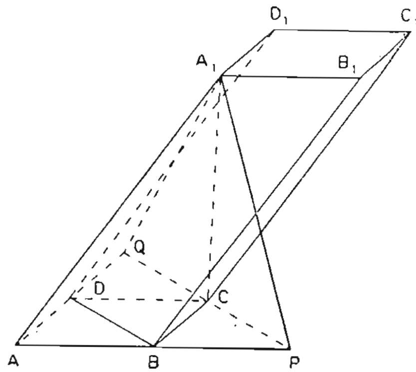
146. 1^0 Кроз тачку A_1 постављена је раван PQA_1 нормално на раван $ABCD$, тако да је $AP = AQ$, а тачке P и Q леже на правама AB и AD. Тада је $A_1N = h$ висина призме, а AN је симетрала угла PAQ. Троугао APN је равнокрако-правоугли, па је $AN = PN$. Троугли ANA_1 и PNA_1 су подударни, па следује да је $AA_1 = PA_1$; значи да је троугао APA_1 равностран. Како је $\Delta\, PNA \cong \Delta\, PNA_1$, то је $AN = A_1N$. Из троугла APN следује висина $h = A_1N = AN = a\sqrt{2}$. Значи да се тачка N поклапа са тачком C. Како је троугао ANA_1 равнокрако-правоугли, то је бочна ивица AA_1 нагнута према основи под углом од 45° (сл. 17).

2^0 Нормални пресек је ромб чији је угао $\beta = 70^0\,31'\,44''$ $(\mathrm{tg}\beta = 2\sqrt{2})$, а страна $a\frac{\sqrt{3}}{2}$. (На сл. 18 спустити из B и D нормале на ивицу AA_1, па ако њихов пресек означимо са E, тада троугао EBD претставља половину ромба.)

3^0 $P = 2a^2\left(2\sqrt{3} + 1\right)$, $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.



Сл. 17



Сл. 18

147. 1^0 $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a}$. Пресек постоји ако је $a > b\sqrt{2}$.

2^0 $\cos\varphi = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{a\sqrt{3}}$. Пресек постоји ако је $a > b$.

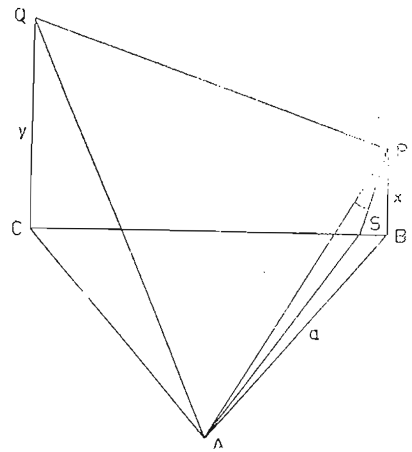
3^0 $b = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

148. 1^0 $2x^2 - 2xy + a^2 = 0$. Дуж y је трећа непрекидна пропорционала за дужи $\sqrt{2x^2 + a^2}$ и $2x$.

3^0 $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y = a\sqrt{2}$.

4^0 $\cos\varphi = \frac{SP}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45^0$ (сл. 19).

149. $x = 3a$, $y = a$. Показати да је одговарајућа запремина минимум запремине посматраног тела ако је $\Delta\, CPQ$ правоугли.



Сл. 19

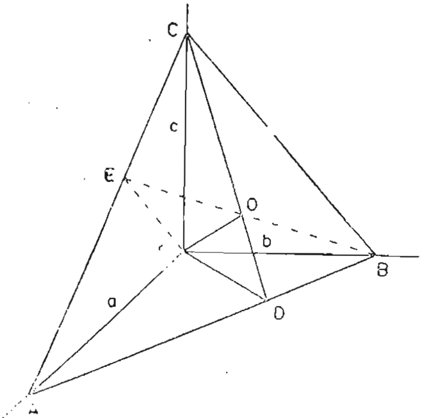
150. 1° $PQ = \frac{a\sqrt{0}}{2}$.

2° Примена Питагорине теореме.

3° Кад је права нормална на двема правама које леже у равни, нормална је и на равни.

4° $V = \frac{5a^3\sqrt{2}}{12}$.

151. 1° Нека је SO нормала спуштена из тачке S на раван ABC, где је O продор те нормале кроз ову раван; нека је D продор праве AB кроз раван SOC (сл. 20). Како је $SC \perp (ABS)$, то је раван SDC која садржи праву SC нормална на равни ABS. Затим је $(SDC) \perp (ABC)$, јер у равни SDC лежи права SO која је нормална на равни ABC. Како су равни ABC и ABS нормалне на равни SDC, њихов пресек, права AB, нормална је на тој равни, па је нормална и на свим правама у тој равни које пролазе кроз тачку продора, тј. $AB \perp CD$ и $AB \perp SD$. Значи да је CD висина троугла ABC. На исти начин се показује да је BE (E је тачка пресека правих BO и AC) друга висина троугла; исто важи и за трећу висину.



Сл. 20

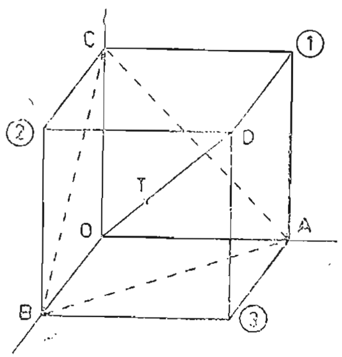
2° Површина троугла ABC може се израчунати на више начина: помоћу запремине тетраедра $SABC$, или висине CD и стране AB, или тригонометриски помоћу страна. Например: из троугла SDC је $CD = \sqrt{c^2 + SD^2}$, а како је $SD = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то је $CD = \sqrt{\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2+b^2}}$.
Осим тога је $AB = \sqrt{a^2+b^2}$, па је

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \, . \, CD = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$.

152. 1° Видети и задатак 151.

2° $V = \frac{a^3}{3}$.

3° Тетраедри $OABC$ и $DABC$ имају заједничку основу, а висине се односе као $1:2$. Коцка је састављена из тетраедара $OABC$ и $DABC$ као и још три тетраедра подударна тетраедру $OABC$ (са врховима у тачкама 1, 2 и 3, сл. 21).



Сл. 21

153. 1° Тражена растојања су $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{c\sqrt{6}}{3}$.

2° $c = \frac{a\,(2a-b)}{a-b}$

3° $b = c$ или $a = b + c$.

154. $P = \frac{2a}{h^2}\left[(a-2h)\,x^2 + 2h^2 x\right]$. Површина има максимум само ако је $a < 2h$; $P_{\text{макс.}} = \frac{2a\,h^2}{2h-a}$ за $x = \frac{h^2}{2h-a}$.

155. 2° $A_1B_1 = x$, $D_1C_1 = y$, $B_1C_1 = A_1D_1 = \sqrt{x^2+y^2-xy}$, висина трапеза $h = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, површина $P = \frac{x+y}{4}\sqrt{3x^2 - 2xy + 3y^2}$.

3° $x = 3y$, $P_{\text{пир.}} = 2y^2\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{3}$, $V = y^3\sqrt{2}$.

156. 1° Примена Питагорине теореме.

2° $P = \frac{11\sqrt{3}+\sqrt{39}}{12}a^2$.

157. 1° Теорема трију нормала и Питагорина теорема.

2° $x = b$, $P = b\,(a+c)$, $V = \frac{ab^2}{6}$, где је $c = AB$.

158. 1° Посматрати равнокраке троуглове ANB и CMD.

2° Посматрати троугао ANB. Геометриско место је круг са центром у средини дужи AN и полупречником $\frac{BN}{2}$.

3° $AB = \sqrt{2a^2 - 2x^2}$, $MN = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{2}}$. Ако је $\sphericalangle\, CMD = 90^0$, онда је $MN = x$, па је $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

159. $P = \frac{a^2}{16}\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{7} + 12\right)$. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

2° Пресек је шестоугао који постаје кад се на теменима равностраног троугла стране a отсеку три равнострана троугла стране x. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$.

160. 2° $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}\sin^2\varphi\,(1-\cos\varphi)$.

3° $r = h\sqrt{2}$, $s = h\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2}$, $\frac{V_1}{V} = \frac{8}{27}$, $\varphi = 109^0\,28'\,16''$.

161. $P = \pi\,(R+d)\left[R - d + \sqrt{2R\,(R-d)}\right]$.

162. 1° Полупречник уписане лопте $r=R\sqrt{\frac{s-R}{s+R}}$, полупречник додирног круга $\rho=\frac{R(s-R)}{s}$, отстојање центра додирног круга од центра лопте: $c=\frac{Rr}{s}$.

2° $s=2R$; висина је преполовљена.

3° $\frac{R}{s}=1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

163. Ознаке: s апотема купе, ρ полупречник основе купе. Резултати: $\rho=R\sqrt{\frac{a+R-r}{a-R+r}}$, $s=\frac{aR}{R-r}\sqrt{\frac{a+R-r}{a-R+r}}$, $P=\pi R^2\frac{(a+R-r)^2}{(R-r)(a-R+r)}$.

164. Ознаке: a полупречник описане лопте, b полупречник уписане лопте, R и r полупречници купиних основа, s апотема купе. Задатак се своди на систем једначина: $s=R+r$, $b^2=Rr$, $\sqrt{6b^2-R^2}+\sqrt{6b^2-r^2}=2b$. Ако се из ових једначина елиминишу R и r, добија се једначина $s^4+4b^2s^2-16a^2b^2=0$ из које се добија $s=2b\sqrt{2}$. Даље је $R=b(\sqrt{2}+1)$, $r=b(\sqrt{2}-1)$, те је коначно $\frac{R}{r}=3+2\sqrt{2}$.

165. Полупречници купе: $R=a\sqrt{2}$, $r=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, висина: $h=2a$; полупречник додирног круга: $\rho=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$; $\frac{M_1}{M_2}=\frac{7}{20}$, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{37}{152}$.

166. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{162\sqrt{6}-396}{\pi}$.

167. 1° $\frac{V_1}{V}=2t^2-2t^4$, где је $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2° Однос $\frac{V_1}{V}$ постиже максималну вредност $\frac{1}{2}$ за $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=70^0\,31'\,44''$.

3° Задатак се своди на једначину: $(k+4)\left(\frac{r}{s}\right)^2+2(k-2)\frac{r}{s}+k=0$. Њени су корени реални за $k\leqslant\frac{1}{2}$. За $k=\frac{1}{2}$ је $s=3r$.

168. $\sphericalangle ACB=60^0$. Тело је права кружна зарубљена купа из чијих су основа издубљене две праве купе. $V=130\pi$.

169. 1° $k_1=\frac{b+c}{a}$, $k_2=\frac{c+a}{b}$, $k_3=\frac{a+b}{c}$.

3° Примена теоcинусне реме.

170. $P=\frac{4616\pi}{5}$, $V=\frac{13584\pi}{5}$.

171. 1° $BN=\sqrt{x^2+9}$, $BM=\frac{5x}{4}$, $MN=\frac{12-3x}{4}$.

2° $x=\frac{9}{4}$.

172. 1° $P_1=4\pi a^2\sin x\cos^2 x$, $P_2=4\pi a^2\sin^2 x$.

2° $\frac{P_1}{P_2}=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$, $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $x=38^0\,10'\,22''$.

173. 1° Видети задатак 104.

2° $P=2\pi\frac{a+b+2c}{c}P_\Delta$, $V=\frac{8\pi}{3c}P^2_\Delta$, где је P_Δ површина датог троугла.

174. 1° a) $V=\frac{2\pi R^3}{3}\sin x\sin\alpha(2+\operatorname{tg}^2\alpha)$; b) $V_1=\frac{4\pi R^3}{3}\sin x\sin\alpha$.

2° $\frac{V_1}{V}=\frac{2}{2+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3° $\alpha=60^0$.

175. 1° $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

2° Дужи a, b и c морају бити стране троугла.

176. Збир синуса претворити у производ.

177. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{7}{25}$.

178. 2° $-1\leqslant a\leqslant 1$.

179. За доказ друге, од датих једнакости, користити идентичност: $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$. Резултати: $\cos 36^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

180. 1° $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha$, $y=b\cos\alpha-a\sin\alpha$.

2° $x^2+y^2=a^2+b^2$.

181. $y=a$, $z=b$.

182. Решења су реална ако је $a<-2$ или $a>2$. За $a<-2$, оба корена добијене алгебарске једначине, по $\sin x$, дају реалне углове, а за $a>2$, само мањи корен.

2° $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$.

183. 1^0 Тражени услов своди се на $\sin^2 x_1+\sin^2 x_2=1$, јер је $x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$. Одатле $k=6$ и $k=-\frac{1}{2}$. За $k=6$, добија се $\sin x_1=\frac{4}{5}$, $\sin x_2=\frac{3}{5}$, а за $k=-\frac{1}{2}$, решења су имагинарна.

2^0 $x_1=53^0\,7'\,48''+k.360^0$, $x'_1=126^0\,52'\,12''+k.360^0$, $x_2=36^0\,52'\,12''+k.360^0$, $x'_2=143^0\,7'\,48''+k.360^0$.

184. Релација се своди на облик $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha$, одакле је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

185. Решења реална за $|m|>\cos\alpha$. Посебан случај: $x=\frac{\pi}{4}-\alpha+k\pi$ и $x=\frac{3\pi}{4}+\alpha+k\pi$.

186. 1^0 Решења су реална за $b<c<a$. Нека читалац одговори шта бива за: a) $a=b\neq c$; b) $a=c\neq b$; c) $a\neq b=c$; d) $a=b=c$.

2^0 Једначина се своди на облик $\sin^2 x=\frac{1}{4}$. Нека читалац сам нађе сва решења.

3^0 $c=\frac{4+\sqrt{6}}{2}$. Решења: $x=15^0+k.360^0$ и $x=165^0+k.180^0$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

187. 1^0 $x+y=\frac{2k+1}{4}\pi$, где је $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

2^0 Добијена једначина претставља фамилију правих линија, које су једна од друге удаљене за $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

188. Обрнуто не вреди, јер се друга од датих једначина може написати у облику: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-b\right)=0$.

189. 1^0 Заменити $\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2^0 $-2\leqslant m\leqslant 2$; за $m=1$, решења су: $x=2k\pi$ и $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

3^0 Максимална вредност је $y=2$ за $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

4^0 Синусоида чије су ординате удвостручене, а која је померена за $\frac{\pi}{6}$ у негативном правцу осе Ox.

190. $y=2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)$. 1^0 Максимум је $y=2\sin\frac{\alpha}{2}$ за $x=\frac{\alpha}{2}+\frac{(4k+1)\pi}{2}$, минимум $y=-2\sin\frac{\alpha}{2}$ за $x=\frac{\alpha}{2}+\frac{(4k+3)\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

2^0 $y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

3^0 Решења су реална за $|m|\leqslant 2\sin\frac{\alpha}{2}$; решења су: $x=\frac{(4k+1)\pi}{2}$ и $x=\alpha+\frac{(4k+1)\pi}{2}$.

191. 1^0 Видети задатак 72, или поћи од очигледне неједнакости $(x-1)^2\geqslant 0$. Нека читалац докаже на оба начина.

2^0 Дати израв написати у облику $\sqrt{3}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\varphi}\right)$, па израз у загради упоредити са изразом $x+\frac{1}{x}$. Најмања вредност је $2\sqrt{3}$, а добија се за $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

3^0 $\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

192. 1^0 Из $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ следује услов:

$$(bc_1-b_1c)^2+(ac_1-a_1c)^2=(ab_1-a_1b)^2.$$

2^0 Решења: 1) $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=-\frac{1}{5}$, 2) $t'_1=5$, $t'_2=\frac{1}{3}$, где је $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Према томе дате једначине имају заједничка решења: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3}$.

3^0 Трећа једначина је $x^2+y^2=1$ (зашто?). Праве претстављене првим двема једначинама секу се на кружној линији. То казује и алгебарски услов нађен под 1^0.

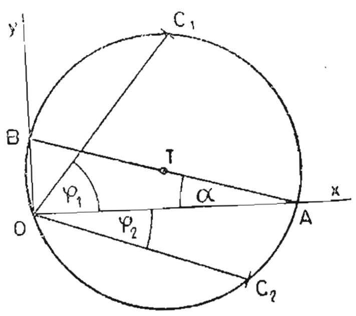
193. 1^0 Особине средње линије трапеза.

2^0 Из A и B спустити нормале AP и BQ на тетиву OC, па посматрати троуглове OPB и OAQ.

3^0 Повући пречник OS из тачке O, па посматрати троуглове OAB и OSC.

4^0 Следује из друге од релација датих под 3^0.

5^0 Конструкција је претстављена на сл. 22. Подаци: $OA=7$, $OB=2$, $OC_1=OC_2=6$. Према графику, решења



Сл. 22

дате једначине су: $\varphi_1 = \sphericalangle AOC_1$ и $\varphi_2 = \sphericalangle AOC_2$ (угао φ_2 је негативан). Сва решења су: $\varphi=\varphi_1+2k\pi$, $\varphi=\varphi_2+2k\pi$.

6° Применом изведених релација под 3° добија се: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos(\varphi-\sigma)=\frac{6}{\sqrt{53}}$, па је $\alpha=15°56'43''$, а најмањи угао који задовољава другу једначину је: $34°29'47''$. Следује: $\varphi_1=50°26'30''$, $\varphi_2=-18°33'4''$.

194. 1° $\cos 2x=a-1$, $\cos 2y=1-3a$. Решења су реална за $0\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

2° $x=\pm 60°+k.180°$, $y=\pm 60°+k_1.180°$.

195. 1° $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{1}{4}$, $z^2-z+\frac{1}{4}=0$.

2° $\cos^2 x+\cos^2 y=\frac{8}{5}$.

3° $x=26°33'54''+k.180°$, $y=26°33'54''+k_1.180°$.

196. $AC=7$ cm, полупречник описаног круга $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$, површина отсечка $P_1=\frac{49}{36}(4\pi-3\sqrt{3})$.

197. $a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}-1$, $\alpha=105°$, $\beta=15°$.

198. $a=40$, $b=30$, $c=14$.

199. Ставити: $a=x+1$, $b=x$, $c=x-1$, $\alpha-\beta=2\gamma$. Применом тангентне теореме изразити $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ у функцији од x. Стране: $a=4$, $b=3$, $c=2$.

200. 1° $\alpha=75°$, $\beta=15°$, $\gamma=90°$, $c=2\sqrt{2}$.

2° $P=\pi(4+\sqrt{6})$.

201. $c=\sin 2\varphi$, $R=\frac{1}{2}$.

202. Дата релација своди се на облик: $\cos(\alpha-\beta)=1$.

203. 1° $\frac{333}{106}<\pi<\frac{355}{113}$, тј. $\underline{3,14}15094\ldots<\pi<\underline{3,141592}9\ldots$

2° Обим описаног полигона: $O=2nr\sin\frac{180°}{n}$, обим уписаног: $O_1=2nr\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. Следује неједнакост: $O_1<2\pi r<0$, тј.

$$n\sin\frac{180°}{n}<\pi<n\operatorname{tg}\frac{180°}{n}.$$

За $n=90$: $\underline{3,1}41000<\pi<\underline{3,1}42890$. ($\sin 2°=0,034900$, $\operatorname{tg} 2°=0,034921$).

4

204. Дијагонала: $m=2\sqrt{3}$, угао између дијагонала $\varphi=30°$.

205. $y=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

206. 1° $P=a^2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(x-60°)\right]$.

2° $P_{\text{макс.}}=a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ за $x=150°$.

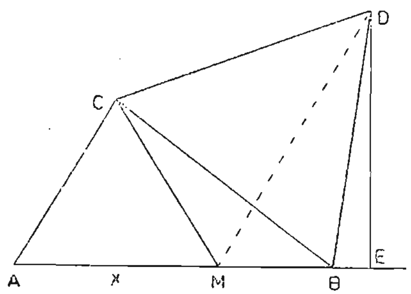
3° $x=120°$.

207. Из услова задатка следује сл. 23. Притом је $\sphericalangle BMC=120°$.

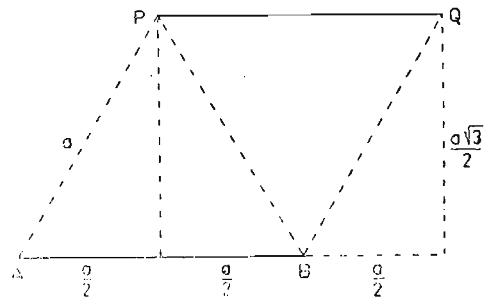
1° Из троугла MBC следује $\overline{BC}^2=(a-x)^2+x^2-2x(a-x)\cos 120°$, тј. $\overline{BC}^2=a^2-ax+x^2$. Површина четвороугла $MBDC$ је:

$P=$ површ. $MBC+$ површ. BDC,

тј. $P=\frac{1}{2}x(a-x)\sin 120°+\frac{1}{4}(a^2-ax+x^2)\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, што значи да је та површина једнака површини равностраног троугла, конструисаног над дужи AB, и да не зависи од положаја тачке M на тој дужи.



Сл. 23



Сл. 24

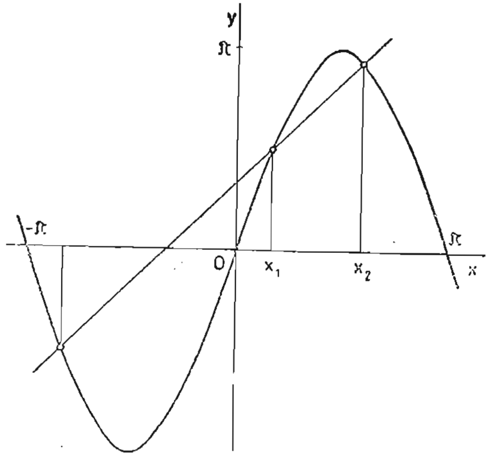
2° Четвороугао $MBDC$ је тетиван, јер је $\sphericalangle BMC+\sphericalangle BDC=180°$. Стога је $\sphericalangle CMD=\sphericalangle CBD=60°$ (периферијски углови над истом тетивом CD и са њене исте стране), па је

$$\overline{CD}^2=\overline{CM}^2+\overline{MD}^2-2\,CM.MD\cos 60°,$$

одакле је $MD=a$, јер је друго решење $(MD)_2=x-a$ негативно.

3° Спустимо из D нормалу DE на дуж AB или на њено продужење, па је из троугла MED: $DE=MD.\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, јер је $\sphericalangle DMB=60°$. Према томе је тражено геометриско место дуж паралелна са дужи AB, на растојању $DE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ од ње. То је дуж $PQ=a$ (сл. 24). За време док тачка M пређе дуж AB од A ка B, тачка D пређе дуж PQ од P ка Q.

208. 2^0 $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{3}=\sqrt{\frac{\sqrt{k}-3}{3\sqrt{k}-1}}$; услов реалности $k>9$. Посебан случај: $\varphi=45^0$.



Сл. 25

209. 1^0 $y=2\pi\sin x$.

2^0 Задатак се своди на једначину $x+\frac{\pi}{3}=\pi\sin x$. Реални корени ове једначине су апсцисе пресечних тачака праве $y_1=x+\frac{\pi}{3}$ и криве $y_2=\pi\sin x$ (сл. 25). Према графику, једначина има један негативан корен и два позитивна. Позитивни корени су: $x_1=\frac{\pi}{6}$ (проверити у једначини) и x_2 чија је приближна величина $\frac{\pi}{2}<x_2<\frac{2\pi}{3}$.

210. 1^0 $\operatorname{tg}\beta=\cos\frac{180^0}{n}\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

2^0 Угао α је корен једначине: $\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\delta=0$. Тражени максимум је $\alpha-\beta=19^0 28' 16''$, па су у том случају: $\alpha=54^0 44' 8''$, $\beta=35^0 15' 52''$.

211. $b=\frac{a\sin\alpha-c}{\cos\alpha}$, $d=\frac{a-c\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $P=\frac{a^2-c^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Задатак има решења ако је $a>c$, $\sin\alpha>\frac{c}{a}$.

212. 1^0 $x=\frac{2ab\cos\alpha}{a-b}$. Посебни случај: $x=2$ cm.

213. 1^0 Повући полупречнике описаног круга OA, OB и OC па уочити угао једног од њих са OP, например $\sphericalangle BOP=\alpha$.

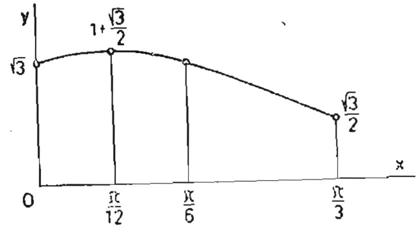
2^0 Изабрати положај координатног система тако да је, например, $A\left(-\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, $B\left(\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, где је a страна троугла ABC. Где је тада координатни почетак? Или $A(0{,}0)$, $B(a{,}0)$ и $C\left(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Које координате има тада центар троугла?

3^0 $x^2+y^2=\frac{k-a^2}{3}$ уз услов $k\geqslant a^2$.

214. 1^0 Примена косинусне теореме.

3^0 Ако два троугла имају једнаке основице, већу површину има онај чија је висина већа.

4^0 $P\leqslant\left(\frac{c}{2}\right)^2$, $P\leqslant\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$.



Сл. 26

215. $y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ (сл. 26).

216. 1^0 Наћи углове уписаног четвороугла.

2^0 $MN=a\sin\varphi+b\cos\varphi$,
$NP=a\cos\varphi+b\sin\varphi$,

$P=\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\varphi+ab$.

3^0 $MN=\frac{a\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\alpha}$, $NP=\frac{a\cos(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$. Страна MN постиже најмању вредност за $\varphi=0$, а највећу за $\varphi=90^0-\alpha$; страна NP постиже најмању вредност за $\varphi=90^0$, а највећу за $\varphi=\alpha$.

217. 1^0 a) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{bz}{z^2+a(a+b)}$. Ако ставимо $\operatorname{tg}\varphi=m$, па применимо поступак као у задатку 72, добија се $\operatorname{tg}\varphi_{\text{макс.}}=\frac{b}{2\sqrt{a^2+ab}}$ за $z=\sqrt{a^2+ab}$. b) На основу конструкције, наћи $z=OM$.

2^0 $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, $\frac{a}{b}=-\frac{3}{2}$.

218. $x=\frac{c}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$. (Колики су углови: ADB, AEB, PEB и ADE?)

219. $\operatorname{tg}\varphi=\frac{(a-c)\sin\alpha}{b}$.

220. $H=h\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$. Посебан случај: $H=h\sqrt{3}$.

221. Висина куле $x=\frac{3a}{4}$, висина дрвета $y=\frac{a}{3}$. Посебан случај: $x=13{,}5$ m, $y=6$ m.

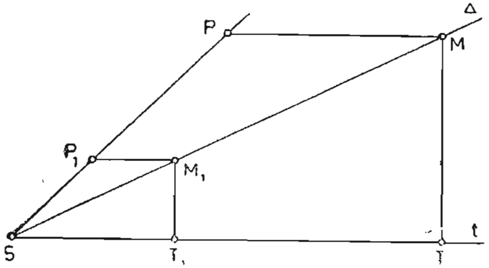
222. $AB=\frac{\sin 45^0}{\sin 15^0}=1+\sqrt{3}$, $h=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$, тј. $h=2366{,}025$ m.

223. Висина облака над морем: $x=h+\frac{h\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha+\gamma)}$.

224. 1^0 $d^2=10\,[(x+1)^2+1]$, $M_0(-1{,}0)$, $d_0=\sqrt{10}$.

225. 1° Два решења: $M_1(-3{,}5)$, $M_2\left(\frac{23}{3}, \frac{109}{9}\right)$.

2° Конструкција методом сличних слика (сл. 27). Дату тачку P спојимо са пресеком S датих правих, па на правој t узмемо произвољну тачку T_1, подигнемо нормалу до пресека M_1 са правом Δ, а дуж M_1T_1 пренесемо до пресека P_1 са правом SP. Паралела PM одређује тражену тачку M. Нека читалац сам докаже конструкцију.



Сл. 27

226. 1° Темена: $B\left(2+\frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $C\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D\ (2-\sqrt{3}, -1)$. Стране: $AB: 2x\sqrt{3}-y-4\sqrt{3}-1=0$, $AD: y+1=0$.

227. 1° $D\ (5, -2)$.

2° Центар $S\ (p, -2p-2)$; два решења: $p_{1,2}=1\pm\sqrt{\frac{a^2-20}{5}}$. Задатак има решења ако је $a \geqslant 2\sqrt{5}$.

3° $a=2\sqrt{5}$, $S(1,-4)$, $A\ (3,-8)$, $C\ (-1,0)$.

228. 1° Коефицијенат правца тражене праве је корен једначине: $16\,m^2+6\,km+25-k^2=0$.

229. 1° $x+y-1=0$.

2° Дијагонале паралелограма узајамно се полове.

230. $M\ (3{,}0)$.

231. $29x+2y+60=0$, $\left(-\frac{60}{29}, 0\right)$.

232. 1° Дата једначина може се написати у облику:

$$2x+y-3+a\,(x-y-2)=0,$$

па је задовољена за свако a, ако је $2x+y-3=0$ и $x-y-2=0$.

2° Ако се страна $OA=a$ узме за промењљив параметар, једначина нормале BP има облик: $ax+(a-8)\,y+64-16a=0$. Стална тачка $(4{,}4)$.

3° Права $x+y-8=0$.

233. 1° Разликовати случајеве кад дата права сече дати круг, а кад је ван њега. У дискусији показати да задатак може имати 4, 3, 2, 1 или 0 решења.

2° Водити рачуна да тражени круг може бити у датом кругу или изван њега. Апсциса центра круга: $p_{1,2}=\pm\sqrt{8\,(r-1)}$ $p_{3,4}=\pm\sqrt{4\,(r-2)}$. Дискусију нека изведе сам читалац.

234. 2° $p=\pm\sqrt{12\,(r-3)}$.

235. $a^2=\frac{4\,k^2-1}{k^2-1}$, $b^2=\frac{4\,k^2-1}{3}$. Задатак има решења ако је $k<-1$ или $k>1$. За $k=\pm 2$, добија се круг.

236. 1° $-2\sqrt{6} \leqslant m \leqslant 2\sqrt{6}$.

2° $m=\pm 2\sqrt{6}$.

3° $m=\pm 2$, у оба случаја $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

237. 1° Додирна тачка: $x_1=\frac{p}{2\,m^2}$, $y_1=\frac{p}{m}$.

2° $x=0$.

3° Непосредно следује из 2°; стална пројекција је $\frac{p}{2}$.

4° $m_1=\frac{2m}{1-m^2}$, што значи да је $\alpha_1=2\alpha$, где је α_1 угао потега са осом, а α угао тангенте са осом.

238. 1° $x_1=r-\frac{p}{2}$, $y_1=\sqrt{p\,(2r-p)}$.

2° Коефицијенат правца тангенте параболе $m_1=\frac{p}{\sqrt{p\,(2r-p)}}$, коефицијенат правца тангенте круга $m_2=\frac{p-r}{\sqrt{p\,(2r-p)}}$.

3° a) $r=p$; b) $r=2p$; c) $r=\frac{2p}{3}$.

239. 1° Полуосе елипсе: $a=4$, $b=2\sqrt{3}$; параметар параболе $2p_1=4c=8$, где је c полурастојање жижа елипсе.

2° $(x-3)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$.

3° $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{6}$.

240. 1° Парабола $y^2=2qx$, где је $q>0$, је конфокална са датом хиперболом, ако се њена жижа поклапа са жижом $F(c{,}0)$ хиперболе. Стога је $c=\frac{q}{2}$, тј. $q=2c$, па једначина параболе гласи $y^2=4cx$.

2° Једначина тангенте дате хиперболе има облик $b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$ где је (x_0, y_0) додирна тачка. За $x_0=-c, y_0=-p$, једначина тангенте добија облик $cx-ay+a^2=0$. Заједничке тачке ове тангенте и параболе добијају се решавањем система $y^2=4cx$, $cx-ay+a^2=0$, одакле је $y^2-4ay+4a^2=0$, тј. $(y-2a)^2=0$. То значи да посматрана тангента хиперболе додирује и параболу $y^2=4cx$ у тачки чија је ордината $y=2a$. Из једначине тангенте добија се и апсциса $x=\frac{a^2}{c}$, па су координате додирне тачке $\left(\frac{a^2}{c}, 2a\right)$.

3^0 Коефицијенти правца потега који спајају заједничку жижу $F(c,0)$ са додирним тачкама $(-c,-p)$ и $\left(\frac{a^2}{c}, 2a\right)$ су: $m_1=\frac{p}{2c}=\frac{b^2}{2ac}$, $m_2=\frac{2a}{\frac{a^2}{c}-c}=-\frac{2ac}{b^2}$, што значи да су они нормални један на другом.

241. Посматрати правоугле троугле C_1AC и C_2BC, где су C_1 и C_2 пројекције тачке C на координатне осе. Геометриско место је отсечак праве $bx-ay=0$, чије су крајње тачке $\left(\frac{ab}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$ и $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$.

242. $x+2y-5=0$.

243. Под датим условима, центар квадрата конструисаног над хипотенузом увек је у истој тачки (5,5).

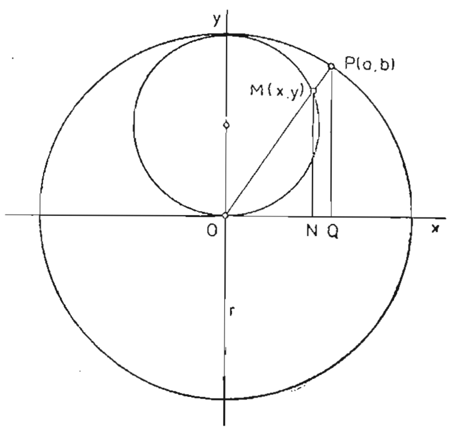
244. Права $x=a+b$.

245. 1^0 Ако ставимо $M(x,y)$, следује: $P_{\Delta ABM}=\pm\frac{5y}{2}$, $P_{\Delta ACM}=\pm(2x-y)$, па се тражено геометриско место састоји из две праве: $4x-7y=0$ и $4x+3y=0$.

2^0 Друго геометриско место састоји се исто тако из две праве: $2x-y-10=0$ и $x+2y-5=0$.

3^0 Тражене тачке су: $M_1\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $M_2(7,4)$, $M_3(-3,4)$, $M_4(3,-4)$.

246. Из услова задатка следује сл. 28. Притом је $OM=PQ$, а пројекција тачке M на осу Ox обележена је са N. Означимо координате произвољне тачке P круга са a, b, а произвољне тачке M траженог геометриског места са x, y. Тада из дате једначине круга следује $a^2+b^2=r^2$. Из сличности $\Delta\, ONM \sim \Delta\, OQP$ следује $\frac{OM}{OP}=\frac{MN}{PQ}=\frac{ON}{OQ}$, тј. $\frac{b}{r}=\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$, а одатле $y=\frac{b^2}{r}$, $x=\frac{ab}{2}$, па је $b^2=ry$, $a^2=\frac{rx^2}{y}$. Заменимо ли изразе за a^2 и b^2 у једначини круга $a^2+b^2=r^2$, добија се тражена једначина посматраног геометриског места: $x^2+y^2=ry$, што значи да је то геометриско место круг са центром $\left(0, \frac{r}{2}\right)$ и полупречником $\frac{r}{2}$.



Сл. 28

247. a) $x^2+y^2=ax$; b) $x^2+y^2-ax-ay=0$.

248. $x^2+(y+1)^2=5$ (пазити на знаке појединих растојања).

249. 1^0 a) $A(0,0)$, $B(c,0)$, $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{b^2}{4}$; b) $A(0,0)$, $C(b,0)$, $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$.

250. $8-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}-2$ или сређено $21x^2+25y^2=525$ (пазити на знаке растојања).

251. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

252. $x^2+4y^2=r^2$.

253. $xy=15$.

254. $x^2-y^2=a^2$. Користити сличност троуглова ANM и BNM, где је N пројекција тачке M на осу Ox.

255. $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}-2$, тј. $3x^2-y^2=3$.

256. Координате пресека висина означити са (x, y), а текуће координате у једначинама висина са (X, Y). Геометриско место је парабола: $x^2-cx+hy=0$.

257. Координате тачке P означити са (a, b). Геометриско место је парабола: $x^2=-2r\left(y-\frac{r}{2}\right)$.

258. $x=\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1$, тј. $y^2=8(x-1)$.

259. $x=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$, тј. $y^2=8(x-2)$.

260. 1^0 $(x-m)^2+y^2=2pm-p^2$, додирне тачке $(m-p, \pm\sqrt{2p(m-p)})$, услов $m \geqslant p$ следује из $x_1=m-p \geqslant 0$.

2^0 Два решења: $m_{1,2}=a+p\pm\sqrt{2ap}$.

3^0 $y^2=2p\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ

1. Производ четири ма која узастопна цела броја повећан за 1 даје потпун квадрат целог броја. Доказати.

2. Из произвољне тачке P кружне линије $x^2+y^2=r^2$ повучена је тетива PQ паралелна са осом Ox. Нека је C средина те тетиве, а A пресек датог круга и осе Ox. Наћи геометриско место пресека M правих OP и AC кад се тачка P креће по датом кругу.

3. Дат је квадрат $ABCD$ стране a. Остајући у својој равни, дати квадрат се окрене око темена A, за угао мањи од 90^0, тако да дође у нов положај $AB_1C_1D_1$. У том положају се стране DC и C_1B_1 секу, а њихова пресечна тачка нека је M.

1^0 Доказати да је $DM=MB_1$.

2^0 Одредити дуж $DM=x$ тако да површина полигона $ABCMC_1D_1$ има дату вредност $\dfrac{3a^2}{2}$.

4. Ако је n природан број, онда је број $P=n^5-2401n$ дељив са 30. Доказати.

5. Показати да је израз $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$ независан од α и β.

6. Троугао ABC, чије су стране непознате, ротира око сваке од својих страна. Настале запремине једнаке су запреминама трију лопти датих полупречника: r_1, r_2 и r_3. Наћи стране троугла ABC.

7. Дат је правилан шестоугао стране a. Над сваком страном, споља, конструисан је квадрат, па су спојена њихова суседна темена.

1^0 Доказати да је добијени дванаестоугаоник правилан.

2^0 Наћи његову страну, полупречник уписаног круга и површину.

8. Око лопте пречника $2r$ описана је права кружна купа чија је висина два пута већа од пречника лопте. Показати да је површина купе $P=8\pi r^2$.

9. Из два супротна темена неког правоугаоника спуштене су нормале на дијагоналу која спаја друга два темена, па је подножјима ових нормала дијагонала подељена на три једнака дела. Изразити стране правоугаоника у функцији од дијагонале; наћи њихов однос. Како ћемо конструисати такав правоугаоник?

10. Решити једначину $\operatorname{cotg} x-2\operatorname{cotg} 2x=\operatorname{cotg}\alpha$, где је α дати оштар угао.

11. Позната је једна паралелна страна равнокраког трапеза a и угао φ на њој $\left(\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Такође је познато да дијагонале полове углове који леже на датој страни.

1^0 Наћи непознате стране.

2^0 Одредити угао φ тако да дијагонала има дужину $m=a\sqrt{2}$.

3^0 За $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ наћи површину обртног тела које постаје кад посматрани трапез ротира око стране a.

12. Како треба изабрати природан број n да број

$$N=103\,n^2+121\,n+70$$

буде дељив са $n-1$?

13. Решити и дискутовати једначину $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=a\sqrt{2}$, где је a реалан позитиван број.

14. Конструисати круг који додирује два дата концентрична круга и трећи дати круг. Дискусија.

15. Наћи геометриско место тачака које су подједнако удаљене од круга $(x+1)^2+y^2=9$ и тачке $P(1,0)$.

16. Одредити m тако да полином $3x^2-5x+7+m(x-a)^2$ буде потпун квадрат. Показати да је добијена вредност m негативна ма коју вредност имао реалан број a.

17. Конструисати паралелограм ако је дат обим, већа дијагонала и један угао паралелограма.

18. Права се креће тако да сече обе координатне осе и са њима затвара троугао сталне површине $P=a^2$. Наћи геометриско место средине њеног отсечка који се налази између координатних оса.

19. Доказати да из једнакости $\sin y=k\sin(2x+y)$ следује једнакост: $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{1+k}{1-k}\operatorname{tg} x$.

20. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом у C ($BC=a$, $AC=b$). У темену C подигнута је нормала на раван троугла и на њој уочена произвољна тачка $S\,(CS=x)$.

1^0. Изразити SA и SB у функцији од x и датих података. Може ли $\Delta\, SAB$ да буде равнокрак и у ком случају?

2^0 Спустити висину SP троугла SAB и посматрати положај тачке P кад се x мења. Изразити дуж SP и површину троугла SAB у функцији од x и датих података.

3^0 Наћи растојање тачке C од равни SAB.

21. Конструисати правоугли троугао кад се зна хипотенузина висина, две тачке хипотенузе и по једна тачка сваке катете.

22. Ако су a и b природни бројеви ($a>b$), онда је број $P=a^5b-ab^5$ дељив са 30. Доказати.

23. Дат је троугао ABC ($BC=a$, $CA=b, AB=c$). Одредити тачку O у простору тако да тријеދар $OABC$ буде правоугли. Који услов мора задовољавати ΔABC да задатак буде могућ?

24. Конструисати тетивни четвороугао кад се зна страна, налегли угао и обе дијагонале.

25. Збир бесконачног опадајућег геометриског реда $a_1, a_2, a_3, \ldots$ је $S=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, где је α дати оштар угао. Збир бесконачног реда чији су чланови разлике узастопних чланова првог реда

$$b_1=a_1-a_2,\ b_2=a_2-a_3,\ \ldots,\ b_n=a_n-a_{n+1},\ \ldots$$

је $S'=\sin\alpha$. Доказати да је и други ред опадајућа геометриска прогресија и наћи оба реда.

26. Дискутовати реалност и знаке корена једначине

$$(a+1)x^2-2ax+(a+1)=0$$

кад се реални параметар a мења.

27. 1° Ако се у равнокраком трапезу (паралелне стране a и c, $c<a$, непаралелне стране b, висина h) може уписати круг, онда су задовољене релације: $b=\frac{a+c}{2}$, $h=\sqrt{ac}$. Доказати.

2° Доказати да у том случају b и h задовољавају неједнакости:

$$c<b<a,\quad c<h<a.$$

3° Конструисати равнокраки трапез и у њега уписати круг ако су дате паралелне стране: $a=8$ cm, $b=3$ cm.

28. Ако се два непозната броја x и y сматрају за први и други члан аритметичке прогресије, онда је трећи члан a, али ако се исти бројеви сматрају за први и други члан геометриске прогресије, онда је трећи члан b ($a>0$, $b>0$). Који су то бројеви? Дискусија. Посебан случај: $a=5$, $b=9$.

29. Дата је тачка A на правој D и тачка B ван те праве. На правој D одредити тачку M тако да буде $MA+MB=a$, где је a дата дуж. Задатак решити геометриском конструкцијом и аналитичком методом.

30. Наћи геометриско место тачака тако да однос отстојања сваке тачке од тачке F (2,0) и од праве $x-8=0$ буде сталан и има вредност $\frac{1}{2}$.

31. Дат је полукруг пречника $AB=2a$ и тачка C на продужењу пречника AB преко A, а на растојању d од тачке A. На датом полукругу наћи тачку M тако да дуж MC буде аритметичка средина дужи MA и MB. Дискусија (Ставити $\sphericalangle BAM=x$.)

32. Дата је тространа призма чији је нормални пресек разнострани троугао ABC ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$). Једном равни кроз теме A пресећи призму тако да пресек буде равнострани троугао. Дискусија.

33. 1° Конструисати троугао кад је дат збир двеју страна, разлика њима супротних углова и трећа страна ($a+b$, $\alpha-\beta$, c).

2° На основу изведене конструкције доказати образац

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},$$

па помоћу њега решити троугао ако је $a+b=3$, $\alpha-\beta=60^0$, $c=\sqrt{3}$.

34. Дат је круг и његова произвољна тетива AB. Кроз средину M лука AB повучене су две сечице које тетиву секу у P и Q, а круг у P_1 и Q_1.

1° Доказати да је четвороугао PP_1Q_1Q тетиван.

2° Који положај имају сечице MP_1 и MQ_1: а) ако је тај четвороугао трапез; б) ако има два права угла?

35. 1° Конструисати троугао кад је дата страна, налегли угао и разлика других двеју страна (c, β, $a-b$).

2° На основу изведене конструкције доказати образац

$$\frac{c-a+b}{c+a-b}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}},$$

па помоћу њега решити троугао ако је $c=1$, $a-b=2-\sqrt{3}$, $\beta=60^0$.

36. Дат је круг пречника $AB=2a$ са центром у O. На пречнику AB уочене су две тачке: P и Q, тако да је $PO=OQ=c$, где је c дата дуж. Произвољна тачка M кружне линије спојена је са P, па је кроз M повучена права Δ нормална на PM. Нека је N други пресек те нормале са кругом.

1° Доказати да је и дуж QN нормална на Δ.

2° Показати да је производ $PM.QN$ константан и изразити га помоћу a и c.

3° Конструисати дужи PM и QN ако је дат њихов збир $PM+QN=s$, где је s дата дуж. Дискусија.

37. Дате су две међу собом управне полуосе Ox и Oy и на њима две тачке: на полуоси Ox тачка A, а на полуоси Oy тачка B тако да је $OA=a$, $OB=b$ ($a>0$, $b>0$). Нека је, даље, x произвољна дуж, па уочимо на датим полуосама још две тачке M и N тако да је $AM=BN=x$. Спојимо M и N, A и B.

1° Изразити дуж $m=MN$ и површину P четвороугла $AMNB$ у функцији од a, b и x.

2° Показати да m и P задовољавају релацију

$$4P=m^2-a^2-b^2.$$

3° Одредити x тако да буде $P=\frac{ab}{3}$.

38. Дата је коса шестострана призма чије су бочне ивице нагнуте према основи под углом од $60°$, а дужина им је $3a$; a је дата дуж. Нормални пресек омотача је правилан шестоугаоник стране $\frac{a}{2}$.

1° Наћи висину призме и површину основе.

2° Наћи површину и запремину призме.

39. Показати да једначина

$$\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$$

има реалне корене, ма какве биле реалне константе a, b, p, и q.

40. Одредити тетиву AB датог круга, полупречника R, тако да је разлика тетиве и њене централне раздаљине једнака датој дужи a. Уочити случајеве: $a=R$, $a=2R$ и $a=R\sqrt{5}$.

41. Ако је n цео број, онда су и бројеви

$$A=\frac{n(n+1)}{2},\ B=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\ C=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

цели. Доказати.

42. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом у C (катете a, b, хипотенуза c). Уочити на хипотенузи тачку M тако да буде $CM+2AM=m$, где је m дата дуж. Узети за непознату $AM=x$, па показати да добијена квадратна једначина увек има реална решења. Испитати знак тих решења кад се m мења.

43. 1° За коју је логаритамску основу логаритам датог позитивног броја за 1 мањи од тог броја?

2° Логаритам неког броја, за основу 2, за један је мањи од самог броја. Који је то број? (Други део задатка решити графички.)

44. Дат је полукруг над пречником $AB=2R$, па је у тачки B повучена тангента BT. На полукругу је уочена тачка M и из ње је спуштена нормала MP на тангенту BT. Одредити положај тачке M тако да буде $AM+2MP=a$, где је a дата дуж. Поставити једначину и задатак решити у специјалним случајевима, кад је: a) $a=3R$; b) $a=4R$; c) $a=\frac{33R}{8}$ (за непознату узети дуж $AM=x$).

45. У тачки A датог круга повучена је тангента, па су из крајњих тачака B и C произвољног пречника спуштене на тангенту нормале BB_1 и CC_1, чија су подножја B_1 и C_1. Четвороугао B_1C_1CB ротира око тангенте B_1C_1. Одредити положај пречника BC тако да површина добијеног тела буде m пута већа од површине датог круга. Дискусија. (Ставити $\sphericalangle BOA=\varphi$, где је O центар круга, а $\varphi<\frac{\pi}{2}$.)

46. Решити и дискутовати систем једначина

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=2\sqrt{a},\qquad x-2y+3=0,$$

где је a позитиван број.

47. Позната је хипотенуза $AB=2$ правоуглог троугла ABC. Спуштена је хипотенузина висина CH. Одредити катету $CA=x$ тако да буде $CA+HB=m$, где је m дата дуж. Дискусија.

48. Три броја чине геометриску прогресију и њихов је збир s. Одредити количник прогресије тако да средњи члан има највећу или најмању могућу вредност.

49. Један осни пресек косе купе је равнострани троугао висине $h=\sqrt{3}$, а нагнут је према основи под углом од $60°$. Наћи запремину купе.

50. У равни је дата права Δ и две тачке A и B, ван ње. На правој Δ наћи тачку из које се дуж AB види под највећим могућим углом. (Задатак решити геометриском конструкцијом. Видети задатак 225.)

51. Дискутовати и решити систем једначина

$$mx-6y=5m-3,\ 2x+(m-7)y=29-7m,$$

где је m реалан број. Наћи вредност m за коју је $x+y=1$, где су x и y решења датог система.

52. Дат је $\Delta\ ABC$ чије су стране a, b и c. У центру O уписаног круга подигнута је нормала OS на раван троугла, па је тачка S спојена са теменима A, B и C. Дужина нормале OS једнака је полупречнику r уписаног круга у троуглу ABC. Доказати да је површина омотача добијене пирамиде $M=P\sqrt{2}$, где је P површина троугла ABC.

53. Дат је троугао са странама: $a=2m$, $b=3m-d$ и $c=3m+d$, где су m и d дате дужи.

1° Одредити дуж m тако да површина датог троугла буде k пута већа од површине квадрата стране m, где је k дати позитивни број.

2° Доказати да задатак има решења само ако је $m>d$ и $k<2\sqrt{2}$.

54. 1^0 Нека су $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ A_1B_1C_1$ два слична правоугла троугла са правим угловима у C и C_1, странама a, b, c и a_1, b_1, c_1 и хипотенузиним висинама h и h_1. Доказати да вреде релације:

$$c\,c_1 = a\,a_1 + b\,b_1, \quad \frac{1}{h\,h_1} = \frac{1}{a\,a_1} + \frac{1}{b\,b_1}.$$

2^0 Доказати и обрнуто, ако стране и висине два правоугла троугла задовољавају једну од ових релација, да су тада они слични.

55. Наћи геометриско место центара кругова који додирују дату праву и дати круг.

56. 1^0 Полукруг је уписан у трапезу тако да његов пречник лежи на већој паралелној страни трапеза. Доказати да је та страна једнака збиру непаралелних страна трапеза.

2^0 Дат је полукруг пречника $2R$ и његова тангента паралелна са пречником. Из тачака M и N које леже на продужењима пречника, симетрично према центру, повучене су још две тангенте на полукруг тако да са пречником захватају исти дати оштар угао φ. Нека су P и Q њихови пресеци са првом тангентом. Добијени трапез $NMPQ$ ротира око праве MN. Одредити угао φ тако да површина добијеног тела буде $P=2\pi mR^2$, где је m позитиван број. У којим се границама може налазити m?

57. Конструисати паралелограм чија су два супротна темена две дате тачке, а друга два темена налазе се на периферији датог круга.

58. У датом троуглу OAB, чија темена имају координате: $O\,(0,0)$, $A\,(6,0)$, $B\,(2,4)$, уписан је правоугаоник тако да му једна страна лежи на OA. Наћи геометриско место пресека његових дијагонала.

59. Конструисати правоугаоник кад је дат његов обим $2s$ и угао између његових дијагонала φ.

60. У кругу полупречника R уписан је делтиод чији је један угао α $(\alpha<90^0)$.

1^0 Изразити површину делтоида у функцији од R и α.

2^0 Наћи полупречник круга уписаног у делтоиду, па показати да је однос површина уписаног и описаног круга

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}\left[1 - tg^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

3^0 На основу овог обрасца показати да површина у делтоиду уписаног круга може износити највише половину површине око делтоида описаног круга. У граничном случају наћи угао α.

61. Дата је коса призма $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ квадратне основе стране $AB=a$. Бочна ивица AA_1 има дужину a, а пројекција темена A_1 на раван основе је центар квадрата $ABCD$.

1^0 Наћи висину призме.

2^0 Испитати облик и величину бочних страна.

3^0 Наћи површину и запремину дате призме.

62. Дат је угао $xOy=\frac{\pi}{6}$. Ван датог угла, са основицом на краку Oy, конструисан је равнокраки троугао OBA тако да је $OA=BA=a$, где је a дата дуж. Из средине M дужи AB спуштена је нормала на крак Ox. Нека је N подножје те нормале, а $\sphericalangle\ BOA=\varphi$.

1^0 Изразити дужину нормале $z=MN$ као функцију од a и φ.

2^0 Одредити угао φ тако да буде $z=ma$, где је m дати позитивни број. Дискусија.

63. Дате су тачке $A\,(5,0)$ и $B\,(11,0)$ и круг $x^2+y^2-4y-1=0$. На датом кругу наћи тачку из које се дуж AB види под највећим могућим углом. Може ли се овај задатак решити и геометриском конструкцијом?

САДРЖАЈ

БОЖИДАР ЂЕРАСИМОВИЋ
ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
за виши течајни испит

Редактор
МИЛЕНКО ТОЛМАЧЕВИЋ

Технички уредник
ЖИВОРАД Л. БУЈИЋ

Коректор
РАДМИЛА МУСИЋ

Обим: 6 табака

Тираж: 20.000 примерака

Штампање завршено јула 1956 год.
у Београдском графичком заводу
Булевар војводе Мишића бр. 17, Београд