1/7 пл. иљово 210

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Н. САЛТИКОВ
професор Универзитета

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

I

ПРОСВЕТА
ДРЖАВНО ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1947.

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

I

Штампано у штампарији Просвете
издавачког предузећа Србије
у 1500 примерака
Штампање завршено 20 марта 1947 год.

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Н. САЛТИКОВ
професор Универзитета

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

I

ПРОСВЕТА
ДРЖАВНО ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД, 1947

Одбор за универзитетска издања, на својој седници од 23 септембра 1946 год., донео је одлуку да се књига *Н. Салтикова, Аналитичка геометрија I*, штампа као универзитетски уџбеник у 1500 примерака.

ПРЕДГОВОР

Ова је књига намењена слушаоцима Универзитета, ради проучавања основних појмова Аналитичке геометрије.

Поводом њена објављивања желим да изразим особиту захвалност професору Д-р В. Мишковићу, као универзитетском редактору за сву пажњу и напор који је уложио за време штампања и око техничке редакције ове књиге.

Много сам захвалан и својим бившим ученицима Славимири Илић и Зарији Булатовићу за помоћ и сарадњу на остварењу овог издања.

Београд, 7 априла 1946 год. ***Н. С.***

САДРЖАЈ

III. Систем трију кругова

ДРУГИ ДЕО
КОНИЧНИ ПРЕСЕЦИ

ГЛАВА ШЕСТА
Елипса

I. Дефиниција и једначина елипсе

II. Елементи елипсе и њихове особине

ГЛАВА СЕДМА
Хипербола

I. Дефиниција и једначина хиперболе

II. Елементи хиперболе и њихове особине

ГЛАВА ОСМА
Парабола

I. Дефиниција и једначина параболе

II. Елементи параболе и њихове особине

ГЛАВА ДЕВЕТА
Опште једначине и особине коничних пресека

I. Дефиниција и опште једначине

II. Пресеци и конуси

ГЛАВА ДЕСЕТА
Испитивање кривих линија одређених општом једначином другог степена

I. Разне врсте кривих линија

II. Канонични облик једначина кривих линија другог степена

III. Инваријанте

IV. Испитивање опште једначине кривих другог степена у косоуглом координатном систему

V. Инваријанте у косоуглом координатном систему

VI. Испитивање опште једначине другог степена помоћу теорије облика

VII. Неједнакости другог степена

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА
Елементи коничних пресека

I. Пречници. Осе. Темена

УВОД

Аналитичка геометрија бави се изучавањем геометриских проблема помоћу алгебарског испитивања неодређених једначина.

Још у старо доба појавили су се математички проблеми, но они нису могли бити обрађивани рачунским путем. Не само алгебра, него ни аритметика није била у то време разрађена као математичка дисциплина. Зато се свако математичко питање морало проучавати посебно, и то на неки изузетан начин. Стари грчки научници били су веома искусни у решавању математичких проблема на основу само геометриских посматрања. Али су њихови радови, пошто општије методе истраживања они нису познавали, ускоро исцрпли ондашње начине геометриских испитивања, а и проблеме на које су се они примењивали. Према томе, после тако званог златног доба грчке науке, коју су створили Евклид, Аполоније и Архимед, настала је епоха декаденције грчке геометрије. Тек у току многих столећа почело се са изграђивањем нових појмова аритметике и алгебре. Тако је, у XVI веку, француски научник Виет створио алгебру као засебну математичку дисциплину. Он је примењује, као и његов ученик, Дубровчанин, Геталдић, при решавању геометриских задатака. Њихов начин решавања састоји се у алгебарским израчунавањима, помоћу одређених једначина, размера посебних делова тражених геометриских слика. Ове су затим биле конструисане. Тим су Виет и Геталдић створили нову грану математике, која се зове *примена алгебре на геометрију*.

Најзад, 1637 године, даје Декарт, у свом делу „Геометрија", нову, општију методу за решавање геометриских проблема. Суштина ове састоји се у увођењу променљивих величина, њихових функција и новијих, простијих, алгебарских обележавања и симбола. Дотичне променљиве претстављају, тако зване, координате тачака посматраних геометриских слика. Међутим се функције одређују једначинама, које везују координате тачака посматраних слика. Полазећи од ових неодређених једначина, Декарт показује како се, помоћу њихова алгебарског испитивања, решавају геометриски проблеми.

Разни појмови које је Декарт искористио за стварање своје методе били су, у појединостима, и много раније познати. Но Декарт их је везао у једну целину, прожету једном општом идејом. Тиме је он створио нову математичку теорију — *Аналитичку геометрију*. Ова, нова Декартова наука разликује се од чувених грчких геометриских испитивања богатством и разноврсношћу схватања, а и закључака, али у исто време и општошћу за решавање различитих проблема.

Пошто је Декарт указао на значај координата за стварање модерних геометриских истраживања, то је праволиниски координатни систем назван, у његову почаст, *Декартов* систем.

ПРВИ ДЕО

Координате. Права линија. Прамен правих.

ГЛАВА ПРВА

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

I. Сталне и променљиве величине. Координате тачке у равни

1. Сталне и променљиве величине. — Сталном величином назива се она која за све време израчунавања задржава исту вредност. На пр. јединице за мерење дужине, површине, запремине, угла итд. Ако нека величина мења своју вредност зваћемо је променљивом.

Елементарна геометрија и физика указују на више примера таквих величина. Тако, при цртању кружног лука шестаром, дужина лука (што описује врх шестара) и средишни угао (који одговара томе луку) претстављају у току цртања променљиве величине. Као други пример, посматрајмо обим и површину круга. Познато је да се при извођењу обрасца за површину круга полази од појма полигона са безброј страна, бескрајно малих по дужини. Дакле, дужина и број страна уписаног полигона, као и површине и обими, претстављају променљиве величине. Исто тако, при кретању тачке дуж једне линије, време и растојање тачке од полазног положаја претстављају променљиве величине. Као пример променљивих величина из области физике може се навести загревање металног тела, при чему се његова температура, димензије и запремина мењају, те претстављају променљиве величине.

2. Независно променљиве величине и функције. — Посматрајмо две или више променљивих величина. Међу њима може бити независно и зависно променљивих.

Независно променљива величина је она која се потпуно произвољно мења. Зависно променљива или функција је она величина, која добија једну или више потпуно одређених вредности за сваку дату вредност независно променљиве. Функција може зависити од једне, две, три или више независно променљивих; према томе се и назива функцијом од једне, две, три или више независно променљивих.

На пр., дужина лука код круга претставља функцију средишњег угла, који одговара томе луку. Обим и површина правилног многоугла, чији се број страна мења, претстављају функције двеју независно променљивих — дужина и броја страна. Растојање од почетног положаја тачке, која се праволиниски креће, функција је времена и брзине. Запремина загреваног металног тела претставља функцију температуре и димензија, које одговарају његову обиму.

Од Декартова доба ушло је у праксу обележавање сталних величина почетним словима латинске или грчке азбуке:

$$a,\ b,\ c\ldots\ldots;\quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}\ldots\ldots;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma\ldots\ldots,$$

а промењљивих величина последњим словима:

$$x,\ y,\ z\ldots\ldots;\quad u,\ v,\ w\ldots\ldots$$

Услов да је y функција од x изражава се једначином, која везује обе промењљиве величине x и y, на пр.:

$$\left.\begin{array}{lll} y = a\,x, & y = x^2, & y = \dfrac{1}{x}, \\ y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}, & y = a \sin x, & y = m \log x. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Ови обрасци изражавају y као функцију независно промењљиве x.

Изрази:

$$z = \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{C}, \quad z = \frac{axy}{x+b}, \quad z = \pm\sqrt{m x^2 + n y^2} \qquad (2)$$

показују да је z функција двеју независно промењљивих x и y.

Зависност y-а од x, или z-а од x и y изражава се, у општем облику, овако:

$$y = f(x), \quad y = \mathrm{F}(x), \ \ldots \quad z = \Phi(x, y), \ \ldots,$$

где су f, F и Φ симболи функције.

Функције се називају алгебарске, ако се њихове вредности одређују помоћу коначног броја алгебарских операција. Све остале функције називају се трансцендентне. Тако су прве четири функције (1) и све функције (2) алгебарске, а последње две функције (1) трансцендентне.

Ако функција за свако појединачно значење независно промењљиве има једну одређену вредност, функција се назива једнозначном; ако има више вредности, назива се вишезначном. На пр. три прве и две последње функције (1) и две прве функције (2) једнозначне су, а остале функције (1) и (2) су двозначне, што показује двојни знак пред њима.

Када се дефинише нека функција, потребно је да се обележи размак у коме се мора мењати независно променљива величина.

Тако, да би четврта функција (1) претстављала реалну вредност независно промењљиве x, треба да задовољава услов:

$$a^2 - x^2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad |x| \leqslant a,$$

тј. ниједна вредност промењљиве x не сме да пређе, по својој апсолутној вредности, број a.

Да би последња функција (2) била реална, треба независно промењљиве x и y да задовољавају услов:

$$m x + n y \geqslant 0.$$

Ако узастопним повећавањем независно променљиве x *одговарајуће вредности функције* y *расту, каже се да је функција* y *узлазна. Обратно, ако се оне смањују, каже се да је функција* y *силазна.*

На пр., када се средишни угао код круга повећава, јасно је да се повећава и лук који одговара томе углу. Значи, лук је узлазна функција средишњег угла.

Ако расте притисак гаса у затвореном суду, запремина гаса опада, према Бојл-Мариот-ову закону, тј. запремина гаса претставља пример силазне функције притиска, који расте.

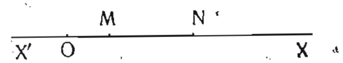
Претпоставимо да се независно промењљива x мења од $-\infty$ до $+\infty$. Тада, под условом $a > 0$, прва функција (1) претставља узлазну функцију у посматраном размаку варијације x-а. Претпоставимо ли да је $a < 0$, посматрана функција опада за све вредности x, које задовољавају услов:

$$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$$

При променама x-а од $-\infty$ до 0, друга функција (1) опада; док при варијацији од 0 до $+\infty$ ова функција стално расте.

Функција $y = +\sqrt{a^2 - x^2}$ узлазна је за све вредности x-а од $-a$ до 0, а силазна за све вредности x-а од 0 до $+a$. Обратно, функција $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ је силазна за x у интервалу $-a \leqslant x \leqslant 0$, а узлазна у интервалу $0 \leqslant x \leqslant a$.

3. Отсечак. — Декарт је исцрпно објаснио везу између аритметичких и алгебарских величина, с једне, и геометриских отсечака, с друге стране.



Сл. 1

Узмимо праволиниски отсечак MN (сл. 1). Продужимо га у оба смера и обележимо добијену праву са X′X.

Од два краја M и N отсечка MN један се може сматрати за његов почетак, а други за свршетак. Напоменимо да ћемо почетак отсечка обележавати првим редним азбучним словом од два дата слова. Због тога морамо сматрати отсечке MN и NM за два потпуно различита отсечка.

На правој X′X узмимо произвољно сталну тачку O. Према њој ћемо одређивати два супротна смера. Усвојићемо за позитиван смер OX, тј. десно од O, а њему супротни — за негативни смер OX′. На тај начин отсечак MN сматраћемо за позитиван, а отсечак NM за негативан.

Најзад, узмимо отсечак одређене дужине за дужинску јединицу, на пр, отсечак од једног милиметра. Према томе, сваком отсечку одговара по један релативан број, чија апсолутна вредност мери дужину отсечка у усвојеним јединицама, а знак означава позитивност или негативност смера.

4. Координате тачке на оси. — Права линија X′X (сл. 1) са два одређена смера зове се оса. Оса X′X са уведеном сталном тачком O зове се координатни систем на правој линији, а тачка O — координатни почетак.

Положај ма које тачке M према уведеном координатном систему одређује се бројем a на следећи начин:

$$x = a,$$

где је a релативан број, чија апсолутна вредност мери дужину отсечка у датим јединицама, а знак означава смер. Број a зове се координата тачке M у том координатном систему.

Свакој тачки на оси XX′ одговара одређена координата x и обратно, свакој координати x одговара одређена тачка на датој оси.

Ако x расте од 0 до $+\infty$, тачка М се креће непрекидно дуж осе ОХ, почев од координатног почетка О до бесконачности у позитивном смеру. Ако се x смањује од 0 до $-\infty$, тачка М се креће дуж осе OX', од почетка О до бесконачности у негативном смеру. Координата почетка О је очевидно нула.

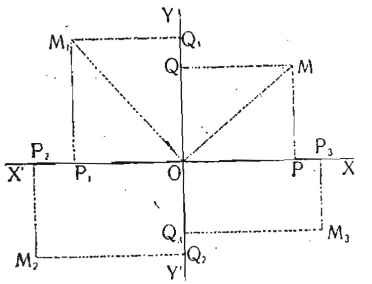
Према уведеној претпоставци, координата тачке претставља апстрактан број. Међутим, краткоће ради, обично се координатом тачке М сматра отсечак ОМ на оси X'X. Ма да овакво тумачење није тачно, ипак се обично употребљава.

5. Дужина отсечка. — Лако је сад изразити дужину сваког отсечка MN помоћу координата почетка М и краја N. У ту сврху означимо њихове координате са x_0 и x_1. Према дефиницији координата, x_0 и x_1 ће одређивати дужине отсечка ОМ, односно ON. Очевидно је, на основу тога, да је тражена дужина d једнака разлици:

$$d = x_1 - x_0,$$

тј. *дужина отсечка на оси једнака је разлици координата његова свршетка, одн. почетка.*

6. Координате тачке у равни. — Узмимо две узајамно нормалне праве ОХ и ОY (сл. 2), које се секу у тачки О. Усвојимо за позитиван смер ОХ — смер удесно од тачке О, а за негативан смер улево од тачке О. Исто тако сматрајмо смер ОY као позитиван, а OY' као негативан. Спустимо из тачке М нормале РМ и QM на одговарајуће осе ОХ и ОY. Узмимо ма какав отсечак, одређене дужине, за јединицу дужине, и обележимо са x и y бројеве који показују колико јединица дужине имају одговарајући отсечци правих, QM и РМ, или њима одговарајући потпуно истоветни отсечци ОР и OQ.



Сл. 2

На тај начин свакој тачки М у равни одговарају два броја x и y.

Лако је доказати и обратно: ако су дати бројеви x и y, њима одговара једна потпуно одређена тачка у равни. Доказа ради, претпоставимо да су бројевима x и y одређени отсечци ОР и OQ. У томе случају, за изналажење тражене тачке довољно је повући нормале РМ на осу ОХ и QM на осу ОY, које се секу у тачки М, која одговара бројевима x и y.

Растојања QM, односно ОР и РМ, односно OQ тачке М од оса ОХ и ОY, које се рачунају дуж оса ОХ и ОY, одређују се бројевима x и y, наиме:

$$QM = OP = x, \qquad PM = OQ = y.$$

Та растојања се називају праволиниским правоуглим (или Декартовим) координатама тачке М у односу на осе ОХ и ОY. Праве линије ОХ и ОY називају се координатним осама, а обе заједно праволиниским правоуглим координатним системом, или Декартовим координатним системом у равни.

Тачка О претставља почетак координатног система. Права линија X'X назива се апсцисном осом, а права Y'Y — ординатном осом. Координата x назива се апсцисом, а координата y — ординатом тачке М.

Осе X'X и Y'Y деле раван на четири права угла:

$$\sphericalangle XOY, \quad \sphericalangle X'OY, \quad \sphericalangle X'OY', \quad \sphericalangle XOY',$$

које називамо првим, другим, трећим и четвртим квадрантом. Први квадрант се назива још и нормалним углом координата.

На основу тога координате уочене тачке, тј. апсцисе и ординате имају позитивне или негативне знаке према положају у квадрантима; при томе знаци координата одговарају смеровима координатних оса.

На тај начин, у I квадранту обе координате, x и y, ма које тачке М имају позитивне знаке. У II квадранту апсциса OP_1 ма које тачке M_1 увек ја негативна, док је ордината увек позитивна. У III квадранту ма за коју тачку M_2 обе координате, OP_2 и P_2M_2, су негативне. Најзад све тачке M_3 IV-ог квадранта имају позитивну апсцису OP_3, а негативну ординату.

Све ово се шематски може овако претставити

квадранти	апсцисе	ординате
I	$x > 0$	$y > 0$
II	$x < 0$	$y > 0$
III	$x < 0$	$y < 0$
IV	$x > 0$	$y < 0$

Очигледно је да је апсциса сваке тачке на ординатној оси једнака нули, као и ордината сваке тачке на апсцисној оси. Исто тако су и обе координате почетка координатног система једнаке нули.

Даље, чињеницу да су x и y координате тачке М означаваћемо симболом $M(x, y)$.

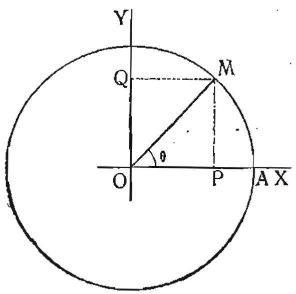
Отсечак праве линије ОМ који спаја координатни почетак са тачком М зваћемо потег и сматраћемо га увек за позитивну величину. Према томе, отсечак OM_1 претставља потег тачке M_1, OM_2 — потег тачке M_2 и најзад OM_3 — потег тачке M_3.

Отсечци ОР и OQ претстављају пројекције потега ОМ на координатне осе ОХ и ОY. Ово важи за сваку тачку, ма у коме се квадранту она налазила. При томе треба напоменути да, иако сваки потег има искључиво позитивну вредност, његове пројекције могу бити и позитивне и негативне. Знак пројекција зависи од смера оса са којим се оне поклапају.

Према томе може се рећи, да координате x и y сваке тачке у равни претстављају пројекције њеног потега на одговарајуће координатне осе, независно од квадранта у коме се уочена тачка налази.

За објашњење појма о координатама тачке узмимо тригонометриски круг са средиштем у тачки О (сл. 3). Полупречник круга $OA = 1$. За осу ОХ узмимо продужен полупречник ОА, а за осу ОY нормалу на ОА. Отсечци ОР и РМ претстављају cos, односно sin угла θ што образује потег ОМ са непомичним полупречником ОА.

На тај начин можемо дефинисати тригонометриске величине $\cos\theta$ и $\sin\theta$ као координате краја M покретног полупречника OM, независно од квадранта у коме се он налази. Поред тога, $\cos\theta$ и $\sin\theta$ претстављају позитивне или негативне величине, што зависи од положаја полупречника.

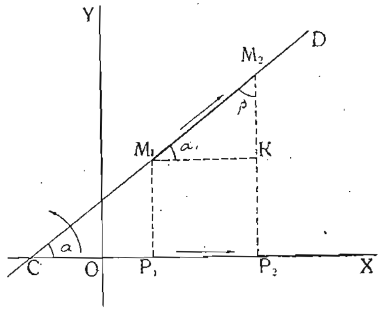


Сл. 3

Установивши појам о координатама тачке у равни, покажимо како се он искоришћује при решавању различитих геометриских задатака, као, на пр.: при израчунавању растојања између две тачке; при одређивању тачке која дели растојање између две тачке у датом односу; при израчунавању површине троугла. Затим покажимо примену координата у изучавању функција и разних кривих линија.

II Геометриске примене координата

7. Растојање између две тачке. — Нека су дате две тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ у Декартову координатном систему XOY (сл. 4). Повуцимо нормале P_1M_1 и P_2M_2 на апсцисну осу. Исто тако, повуцимо паралелно апсцисној оси праву M_1K из тачке M до пресека са другом нормалом P_2M_2 у тачки K.



Сл. 4

Ако уведемо ознаку $M_1M_2 = d$, онда из правоуглог троугла M_1KM_2 добијамо:

$$d = +\sqrt{\overline{M_1K}^2 + \overline{M_2K}^2}\,.$$

Пошто постоје једнакости

$$M_1K = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1,$$
$$M_2K = P_2M_2 - P_1M_1 = y_2 - y_1,$$

пређашњи израз за d постаје:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3}$$

Добијени израз одређује апсолутну величину растојања d.

Претпоставимо да се на правој CD, која пролази кроз тачке M_1 и M_2, налазе више отсечака. Њихове дужине су позитивне величине, према томе да ли су истих или различитих смерова, и према томе који се од два смера на правој CD узима за позитиван.

За одређивање угла који заклапа отсечак M_1M_2 са осом OX узима се, једном за свагда, онај смер на датој правој који се сматра позитивним. Позитивним смером на датој правој сматра се смер са којим се поклапа позитивни смер апсцисне осе, ако се она обрће око тачке њеног пресека са датом правом линијом у позитивном смеру, тј. од осе OX ка оси OY, до поклапања са датом правом, како је то показано на слици кружном стрелицом. Правим стрелицама означени су позитивни смер осе OX и отсечка M_1M_2. Најзад, утврдимо да угао α меримо од 0 до π према положају отсечка M_1M_2, рачунајући позитивне вредности од осе OX у смеру позитивног обртања око координатног почетка.

Према томе угао α који заклапа отсечак M_1M_2 са осом OX претставља угао код темена M_1 правоуглог троугла M_1KM_2. Из овог троугла следи:

$$\cos\alpha = \frac{M_1K}{M_1M_2} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\,.$$

Аналогно овоме, угао који заклапа отсечак M_1M са осом OY, тј. угао β код темена M_2 истог троугла може се изразити овако:

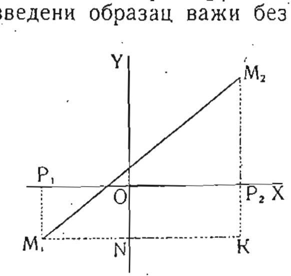
$$\cos\beta = \frac{M_2K}{M_1M_2} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\,.$$

Последњи израз претставља истовремено и $\sin\alpha$. Према томе имамо:

$$tg\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Добијени обрасци показују, да знак изведених тригонометриских израза посматраних углова зависи од знака разлике координата $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$, тј. од узајамног положаја датих тачака.

Израз (3) изведен је под претпоставком да обе тачке, M_1 и M_2, леже у I квадранту. Међутим, лако је доказати да изведени образац важи без обзира на положај обеју тачака. Претпоставимо, на пр., да је тачка $M_2(x_2, y_2)$ у I квадранту (сл. 5), а тачка $M_1(x_1, y_1)$ у III квадранту. Повуцимо праву M_1K паралелно оси OX, а праву M_2K нормално на њу. Из правоуглог троугла $\triangle\, M_1KM_2$ добијамо:



Сл. 5

$$d = +\sqrt{\overline{M_1K}^2 + \overline{M_2K}^2}\,.$$

Отсечак M_1K, по апсолутној вредности, састоји се из два отсечка, P_1O и OP_2. Узимајући у обзир њихове знаке, имамо:

$$P_1O = -OP_1, \quad \text{где је} \quad OP_1 = x_1,$$

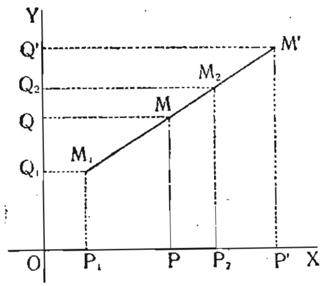
при чему је у ознаци x_1 укључен и знак те координате. Према томе можемо написати:

$$M_1K = M_1N + NK \;= -OP_1 + OP_2 = x_2 - x_1,$$
$$KM_2 = KP_2 + P_2M_2 = -P_1M_1 + P_2M_2 = y_2 - y_1.$$

Из ових образаца се јасно види, да се тражено растојање d претставља ранијим обрасцем (3).

Ради објашњења добијеног закључка, треба имати на уму, да за облик поменутог обрасца не игра толико улогу апсолутне величине координата датих тачака x_1, y_1 и x_2, y_2, колико њихови знаци. То се јасно види у изразима за израчунавање отсечака M_1N и KP_2, јер, да бисмо могли изразити ове отсечке помоћу координата тачке M_1, треба да их заменимо отсечцима OP_1 и P_1M_1, који су им по апсолутним вредностима потпуно једнаки, но по знацима супротни.

8. Дељење отсечка у датом односу. — Дате су две тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (сл. 6) у Декартову координатном систему XOY. Треба одредити координате x, y тачке M, која дели отсечак M_1M_2 у датом односу:



Сл. 6

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Повуцимо паралелно оси OY праве P_1M_1, PM и P_2M_2, које деле отсечак P_1P_2 у истом односу као и отсечак M_1M_2. Праве Q_1M_1, QM и Q_2M_2, паралелне OX оси, деле у истом односу отсечак Q_1Q_2. Стога имамо:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{Q_1Q}{QQ_2} = \frac{m}{n}.$$

Но како је

$$P_1P = x - x_1, \quad PP_2 = x_2 - x, \quad Q_1Q = y - y_1, \quad QQ_2 = y_2 - y,$$

последњи обрасци постају

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}.$$

Одавде се лако добијају тражене вредности координата у облику

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{n + m}, \qquad y = \frac{n y_1 + m y_2}{n + m}. \tag{5}$$

Претпоставимо да тачка која дели отсечак не лежи између тачака M_1 и M_2, већ да дели растојање између њих тако званом спољашњом поделом. Означимо ту тачку са M′ (сл. 6).

У томе случају дати је однос негативан, јер оба отсечка имају супротне знаке, тј.

$$\frac{M_1M'}{M'M_2} = -\frac{m}{n}.$$

Према томе је

$$\frac{P_1P'}{P'P_2} = -\frac{m}{n}, \qquad \frac{Q_1Q'}{Q'Q_2} = -\frac{m}{n},$$

тј. ако са x' и y' означимо тражене координате тачке M′, добијамо:

$$\frac{x' - x_1}{x_2 - x'} = -\frac{m}{n}, \qquad \frac{y' - y_1}{y_2 - y'} = -\frac{m}{n},$$

или

$$x' = \frac{n x_1 - m x_2}{n - m}, \qquad y' = \frac{n y_1 - m y_2}{n - m}. \tag{6}$$

Координате тражених тачака (5) и (6) можемо претставити на следећи начин:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad x' = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y' = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \tag{7}$$

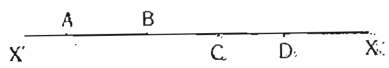
где је уведена ознака

$$\lambda = \frac{m}{n}$$

и знак + одговара унутрашњој, а знак — спољашњој деоби датог отсечка M_1M_2.

Јасно је, да су изведени обрасци у употреби независни од квадранта у коме се налазе све три тачке M_1, M_2 и M, или M′.

9. Анхармониска и хармониска размера. — Обележимо на оси X′X (сл. 7) четири тачке A, B, C, D и одредимо помоћу њих четири дужи:



Сл. 7

AC, BC, AD и BD, чији су почеци A и B, а крајеви C и D. Образујмо количник двеју размера посматраних дужи

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Овај количник се зове *анхармониска* или *сложена размера*, или кратко *размера четири тачке*. Исти количник зове се и *двојни количник* четири тачке, а обележава се симболом (ABCD).

Према томе, увек ћемо се користити ознаком

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD). \tag{8}$$

Напоменимо да је пермутацијом четири слова A, B, C и D могуће написати двојне количнике на $4! = 24$ разна начина, од којих ће само шест количника бити различити.

Заиста лако је доказати да постоје једнакости

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

На тај начин постоје свега шест различитих двојних количника, чије се вредности ипак изражавају помоћу првог количника (8), који ћемо означити са α. Ових шест количника биће изражени тада овако:

$$(ABCD) = \alpha, \qquad (ADCB) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \qquad (ACBD) = 1 - \alpha,$$

$$(ABDC) = \frac{1}{\alpha}, \quad (ACDB) = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad (ADBC) = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Ако претпоставимо да су тачке A, B, C и D распоређене тако, да је њихова анхармониска размера — 1, тј.

$$(ABCD) = -1, \tag{9}$$

одговарајући двојни количник четири тачке назива се хармониски, а тачке C и D хармониски коњуговане са тачкама A и B.

За случај да се знаци посматраних дужи промене тако, да C и D буду њихови почеци а A и B крајеви, онда ће, због парног броја промене знакова, нови двојни количник задржати првобитну вредност —1, тј.

$$(CDAB) = -1.$$

Из тога следује закључак: ако су тачке C и D хармониски коњуговане са тачкама A и B, онда су, и обрнуто, тачке A и B хармониски коњуговане са тачкама C и D.

Вредност —1 хармониског количника (9) указује на то да су обе размере,

$$\frac{AC}{BC}, \quad \frac{AD}{BD},$$

чији је количник негативан, различите по знаку. Из тога се закључује да, у случају хармониске размере, тачке A, B, C и D морају бити друкчије распоређене но на сл. 7: заиста, или се C мора налазити између A и B, или D између истих.

Вратимо се тачкама M, M_1, M_2 и M′ (сл. 6). Оне одређују дужине које задовољавају хармониску пропорцију:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{M_1M'}{M'M_2}.$$

Према томе испуњен је услов

$$(M_1M_2MM') = -1.$$

Значи тачке M и M′ хармониски су коњуговане са тачкама M_1 и M_2 и обрнуто. Обрасци (7) одређују координате два пара хармониски коњугованих тачака. На тај начин уочени обрасци решавају аналитичким путем проблем конструкције хармониски коњугованих тачака у односу на две дате тачке.

Мењајући величину λ можемо саставити бесконачан низ парова тачака хармониски коњугованих са двема датим тачкама.

Ако, на пр., узмемо за тачку M средину дужи M_1M_2, тј. ставимо $\lambda = 1$, онда је

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

а њена хармониски коњугована тачка удаљава се у бесконачност, као што то и показују изрази за x' и y'.

Узмимо тачку $M''(x'', y'')$ на правој M_1M_2 која дели растојање M_1M_2 у односу μ, а одређена је изразима

$$x'' = \frac{x_1 + \mu x_2}{1 + \mu}, \quad y'' = \frac{y_1 + \mu y_2}{1 + \mu}.$$

Величина односа $\frac{\lambda}{\mu}$ изражава се овако:

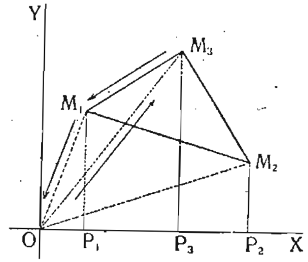
$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{M_1M}{MM_2} : \frac{M_2M''}{M''M_2}.$$

Обрасци за x, y, x'' и y'' одређују координате тачака M и M″, чији двојни количник са тачкама M_1 и M_2 има вредност $\frac{\lambda}{\mu}$.

10. Површина троугла и многоугла. — Означимо са (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) координате темена датога троугла $\triangle M_1M_2M_3$ (сл. 8) у правоуглом координатном систему XOY.

Обележимо са r_1, r_2 и r_3 одговарајуће потеге OM_1, OM_2 и OM_3, а са S_1, S_2, S_3 површине троуглова:

$$S_1 = \text{површ. } \triangle OM_2M_3,$$
$$S_2 = \text{површ. } \triangle OM_3M_1,$$
$$S_3 = \text{површ. } \triangle OM_2M_1.$$



Сл. 8

Повуцимо ординате темена датог троугла P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3. Тражена површина, S, датог троугла $\triangle M_1M_2M_3$ биће

$$S = S_1 + S_2 - S_3. \tag{10}$$

Према познатом тригонометриском обрасцу имамо

$$S_2 = \frac{1}{2} r_1 r_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3), \tag{11}$$

где $(\alpha_1 - \alpha_3)$ означава угао који заклапају стране r_1 и r_3 посматраног троугла. А α_1 и α_3 означавају углове код темена O правоуглих троуглова $\triangle OP_1M_1$, $\triangle OP_3M_3$. Из ових троуглова непосредно следи

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1}{r_1}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{x_1}{r_1}, \quad \sin\alpha_3 = \frac{y_3}{r_3}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{x_3}{r_3}.$$

Развијајући образац (11) према написаним изразима, после свођења добићемо тражени образац за површину троугла (11), са теменом у координатном почетку

$$S_2 = \frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

Да бисмо правилно применили изведени образац, на који се често наилази, потребно је да формулишемо правило, на основу кога се он и изводи.

Треба усвојити да се површина датог троугла рачуна у позитивном смеру кретања око координатног почетка, тако да се површина, која се израчунава, налази са леве стране, као што је то и на слици показано. На тај начин израз за површину S_2 има за први члан апсцису првог темена на које се наилази после координатног почетка, помножену ординатом следећег темена. Други члан садржи координате тих истих темена, само у обрнутом реду. Пошто се и углови рачунају у позитивном смеру око почетка O, то је површина S_2 изражена у облику (11) увек позитиван број. У противном случају, тј. приликом обилажења површине у негативном смеру, израчуната површина је негативна.

На основу овог правила имамо

$$S_1 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2), \qquad S_3 = \frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Према томе образац (10) коначно даје

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \tag{12}$$

Да бисмо лакше упамтили образац (12) треба да замислимо круг на коме се налазе све три тачке (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Према обрасцу треба апсцису прве тачке помножити разликом ордината друге и треће, затим апсцису друге тачке разликом ордината треће и прве тачке и, најзад, апсцису треће тачке помножити разликом ордината прве и друге. Све добијене производе треба сабрати и цео збир поделити са 2.

Површина S се може написати и на следећи начин

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

При одредби површине ма каква полигона поступа се овако: дати полигон издели се у троуглове повлачењем дијагонала из ког било темена. На тај начин површина целог многоугла одређује се као збир површина троуглова, а ове последње се израчунавају према обрасцу (12).

III. Геометриско тумачење једначине

11. Графичко претстављање функција. — Уведени појам о координатама олакшава изучавање функција јер омогућује на једноставан начин њихово очигледно, тзв. графичко или геометриско претстављање.

Почнимо са испитивањем тзв. емпиричких функција, које се добијају као резултат посматрања или опита.

Претставимо, на пр., промену температуре болесника. — По хоризонталној оси-апсциса обележаваћемо време (тј. месеце, дане и часове, које ћемо убележавати изнад цртежа) (сл. 9), а на вертикалној оси-ордината обележаваћемо температуру.

У свакој ћелијици, која одговара одређеном времену и температури, убележићемо тачку. Те тачке спојићемо правим линијама. Добијена изломљена линија претстављаће одређену температуру у сваком тренутку убележавања. Ова температура има тачне вредности у обележеним тачкама, а само приближне у свима осталим тачкама. Но ипак нацртана крива линија, која одговара посматраном временском интервалу, карактеристична је и корисна при дијагнози извесних болести.

Као други пример наведимо тзв. аутоматски-региструјуће физичке апарате, који бележе на милиметарској хартији непрекидном кривом линијом промену температуре, атмосферског притиска, влажности итд.

Ове криве линије одређују графички тачну вредност наших функција за сваки тренутак у току дана.

Пређимо сада на изучавање графичког претстављања функција које су дате једначинама. Наћи графичку претставу ма какве функције — значи

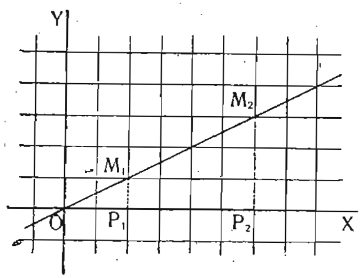
Сл. 9

нацртати криву линију, при чему су ординате њених различитих тачака једнаке вредностима y, које одговарају датој апсциси x.

Узмимо, на пр., функцију

$$y = \frac{1}{2}x. \tag{13}$$

На милиметарској хартији (сл. 10) повуцимо две узајамно управне координанте осе OX и OY. Обележимо неколико тачака, чије су апсцисе произвољне, а ординате одређене једначинама (13) у којој се смењују апсцисе својим вредностима.



Сл. 10

Геометриско место тачака које су одређене на тај начин зове се графички или геометриски претставник дате функције (13).

Приметимо, пре свега, да за $x = 0$, израз (13) постаје $y = 0$. Значи, координатни почетак припада нашем геометриском месту.

Узмимо затим ма коју произвољну апсцису $x_1 = OP_1$; ставимо, на пр., $x_1 = 2$. Ордината која њој одговара добија из једначине (13) вредност $y_1 = P_1M_1 = 1$. Стога тачка $M_1(2, 1)$ припада такође геометриском месту које одговара функцији (13).

Најзад, за коју било другу вредност апсцисе $x_2 = OP_2$, узмимо, рецимо, $x_2 = 6$, једначина (13) даје $y_2 = P_2M_2 = 3$. Према томе друга тачка M_2 (6,3) припада траженом геометриском месту.

Повуцимо потеге OM_1 и OM_2. На слици се оба вектора поклапају. То је последица тачности конструкције, јер, као што ћемо одмах доказати, све тачке $O, M_1, M_2, \ldots$, одређене једначином (13), леже на истој правој линији.

Заиста троуглови $\triangle OP_1M_1$ и $\triangle OP_2M_2$ правоугли су и задовољавају услове:

$$\frac{OP_1}{P_1M_1} = 2, \quad \frac{OP_2}{P_2M_2} = 2, \quad \text{тј.} \quad \frac{OP_1}{P_1M_1} = \frac{OP_2}{P_2M_2}.$$

Према томе, дати троуглови су слични и њихови углови $\sphericalangle P_1OM_1$ и $\sphericalangle P_2OM_2$ су једнаки. Дакле, тачке $O, M_1, M_2, \ldots$ налазе се на истој правој линији. Угао те праве линије са апсцисном осом, $\sphericalangle P_1OM_1$, одређује се из $\triangle P_1OM_1$ по обрасцу:

$$tg \sphericalangle P_1OM_1 = \frac{1}{2}. \qquad (14)$$

Ма колико тачака одредили на изложени начин, помоћу једначине (13), све ће оне очигледно лежати на малочас одређеној правој. Ово је последица тога што је сваки троугао, састављени из координата тачака и њеног потега, сличан првоме од наших троуглова $\triangle OP_1M_1$.

Према томе, графички претставник функције (13) је права која пролази кроз координатни почетак O и образује са апсцисном осом угао одређен изразом (14).

Као други пример узмимо функцију

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (15)$$

Узмимо у правоуглом координатном систему XOY (сл. 11) ма какву апсцису

$$x_1 = OP_1 < a.$$

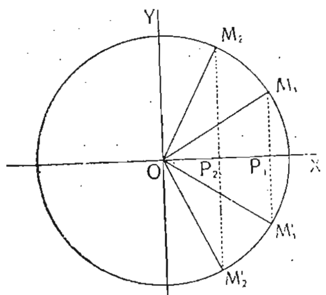
Једначина (15) одређује две ординате

$$y_1 = +\sqrt{a^2 - x_1^2} = P_1M_1 \quad y_1' = -\sqrt{a^2 - x_1^2} = P_1M_1' = -y_1 \qquad (16)$$

и добијамо две тачке: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_1'(x_1, -y_1)$. Обрасци (16) доводе до једначина

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2, \quad x_1^2 + y_1'^2 = a^2,$$

које показују да a претставља хипотенузу два једнака правоугла троугла $\triangle OP_1M_1$ и $\triangle OP_1M_1'$. Стога се обе тачке M_1 и M_1' налазе на истом растојању од координатног почетка O, тј. леже на кругу са средиштем у координатном почетку O и полупречником a.



Сл. 11

За другу произвољну величину апсцисе

$$x_2 = OP_2 < a$$

добијамо исто тако две ординате

$$y_2 = +\sqrt{a^2 - x_2^2} = P_2M_2, \quad y_2' = -\sqrt{a^2 - x_2^2} = -y_2 = P_2M_2'.$$

На тај начин налазимо још две тачке, M_2 и M_2', које исто тако леже на посматраном кругу.

Пошто су тачке P_1, P_2 потпуно произвољне, сем што морају задовољавати услов $|x| \leqslant a$, то геометриско место свих тачака одређених једначином (15) претставља посматрани круг.

12. Графичко претстављање имплицитних функција. — У горњим примерима довољно је било узети по две тачке за одређивање криве линије — графичког претставника функције. Међутим није увек тако једноставно графички претставити функцију.

Претпоставимо да y претставља функцију независно промењиве x, која је одређена једначином

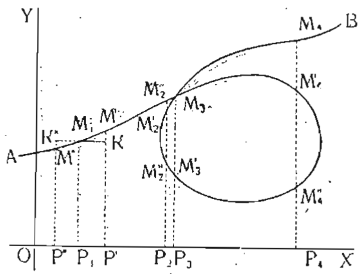
$$F(x, y) = 0, \qquad (17)$$

дакле у облику тзв. имплицитне функције, тј. претстављене помоћу једначине која није решена по зависно промењивој, и то једначине у којој је F симбол функције двеју промењивих величина x и y.

Дајући x-у различите вредности добијамо из једначине (17) једну или неколико различитих вредности за y. Нека, на пр., за $x = x_1$ једначина (17) има једно решење $y = y_1$; за $x = x_2$ нека има три вредности y_2, y_2', y_2''; за $x = x_3$ нека функција има две вредности y_3 и y_3' итд.

Узмимо правоугли координатни систем XOY (сл. 12) и посматрајмо скуп одговарајућих вредности x и y, као координате тачака. На тај начин одређујемо следећи низ тачака:

$$M_1(x_1, y_1),$$
$$M_2(x_2, y_2),\ M_2'(x_2, y_2'),\ M_2''(x_2, y_2''),$$
$$M_3(x_3, y_3),\ M_3'(x_3, y_3'),$$
$$M_4(x_4, y_4),\ M_4'(x_4, y_4'),\ M_4''(x_4, y_4'') \text{ итд.}$$



Сл. 12

Повећавајући број тачака одређених једначином (17) конструишимо на оси OX одговарајуће тачке $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$. Претпоставимо да су растојања између суседних тачака толико мала, да растојања међу суседним тачкама у равни $M_1, M_2, M_3, M_4', \ldots$ бивају мања од сваке ма како мале унапред дате величине.

Везујући све суседне тачке једном непрекидном линијом, добијамо криву линију $AM_1M_2M_3M_4'M_4''M_3'M_2''M_2'M_3M_4 \ldots B$, која је графички претставник функције y, одређене једначином (17).

Објаснимо сада шта се подразумева под непрекидном функцијом.

Претпоставимо да апсциса $OP_1 = x_1$ (сл. 12) добија прираштај $P_1P' = \Delta x$ и постаје једнака $OP' = x_1 + \Delta x$. Ордината $y_1 = P_1M_1$ мења се и постаје $P'M' = y_1 + \Delta y$. Повуцимо кроз тачку M паралелно апсцисној оси праву линију $K''M_1K$ до пресека K'' и K са ординатама у тачкама P'' и P'.

Прираштај Δy претставља тада отсечак праве KM'. А ако независно промењива x_1 добија негативни прираштај P_1P'', онда се прираштај y_1 претставља отсечком $K''M''$. На тај начин, свакој промени вредности x_1 одговара одређена вредност промењиве y.

Нека је α мала позитивна величина. Претпоставимо да свакој датој вредности Δx, која задовољава услов

$$|\Delta x| < \alpha,$$

одговара прираштај Δy, чија је апсолутна вредност мања од ког било унапред задатог малог позитивног броја ε, тј.

$$|\Delta y| < \varepsilon.$$

Ако је α довољно мала величина, да се за ε може узети ма како мали унапред дати број, онда се y назива непрекидном функцијом независно променљиве x, у близини њене вредности x_1.

Ако је вредност функције y, одређена једначином (17), непрекидна у близини сваке вредности независно променљиве x, у размаку

$$a \leqslant x \leqslant b, \tag{18}$$

онда се каже да је функција y непрекидна у датом размаку (18). У томе случају крива линија, која је графички претставник функције y, назива се такође непрекидном у истом размаку (18).

13. Прекид непрекидности функције. — Непрекидност функција није неопходан услов за могућност њихова графичког претстављања.

Узмимо, на пр., функцију

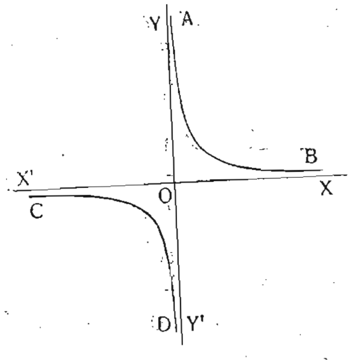
$$y = \frac{1}{x}. \tag{19}$$

Ова функција, смањујући се за све вредности независно променљиве, задовољава услове

$$-\infty \leqslant x \leqslant -\varepsilon, +\varepsilon \leqslant x \leqslant +\infty,$$

где ε претставља унапред дати бескрајно мали позитивни број.

Лако је увидети да крива која претставља графички функцију (19) у правоуглом координатном систему XOY (сл. 13) има две гране: једна од њих, AB, лежи у првоме квадранту и има позитивне ординате, а друга грана, CD, са негативним ординатама, налази се у трећем квадранту.



Сл. 13

Претпоставимо да се ε смањује до 0. Кад x расте од $-\infty$ до $-\varepsilon$, функција (19) се смањује од 0 до $-\infty$. Ако x расте од $+\varepsilon$ до $+\infty$, y се смањује од $+\infty$ до 0. Према томе, у размаку

$$-\varepsilon \leqslant x \leqslant +\varepsilon,$$

функција y имаће прекид непрекидности и када x тежи нули, функција y добија две вредности $-\infty$ или $+\infty$, те функција y добија у координатном почетку бесконачно велики прираштај.

Посматрана крива зове се једнакострана хипербола.

При графичком претстављању функција наилази се на извесне тешкоће ако нису позната геометриска својства кривих линија, по којима се оне претстављају датом функцијом. Заиста, понекад је немогуће конструисати тачке које би биле толико блиске једна другој, да би дале тачну графичку претставу посматране линије.

Диференцијални рачун даје општу методу за графичко претстављање функција. Међутим може се показати да постоје функције које, за дате вредности независно променљивих, имају неограничен број вредности. Такве функције није могуће графички претставити помоћу кривих линија.

IV Проблеми Аналитичке геометрије

14. Два основна питања. — У ранијим излагањима поставили смо везу између геометриских слика и једначина које их претстављају. Из тога произилазе два основна питања Аналитичке геометрије:

1° *За дату геометриску слику извести једначину помоћу њених геометриских особина.*

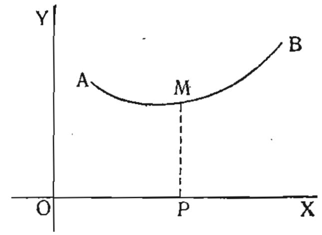
2° *Наћи геометриску претставу за сваку једначину у којој фигуришу координате и проучити особине одговарајућих геометриских слика.*

Пре него што приступимо постављању једначине дате слике треба да изаберемо координатни систем. При избору координатног система треба бити практичан, тј. изабрати систем помоћу кога се аналитичка израчунавања упрошћавају.

Навешћемо примере за састављање једначина кривих линија, полазећи од датих геометриских података. Затим ћемо посматрати праве и различите криве линије, полазећи од њихових једначина.

15. Претстављање кривих линија једначинама. — Нека је дата крива линија AB (сл. 14). Конструишимо осе OX и OY правоуглог координатног система. Помоћу дате криве AB, свакој апсциси $x = OP$ одговара одређена тачка M на кривој са ординатом $y = PM$. Према томе, дата крива AB успоставља функционалну везу између координата. На тај начин y претставља функцију x-а, тј.

$$y = f(x).$$

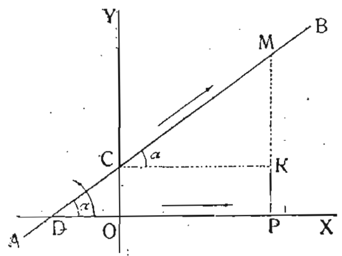


Сл. 14

Ова једначина је аналитички израз криве линије AB, тј. она је једначина криве линије AB у координатном систему XOY.

Према томе, једначином линије назива се веза између координата ма које тачке ове линије, коју морају да задовољавају координате сваке њене тачке. Ове координате се називају *текућим.*

Поставимо, на пр., једначину праве линије AB (сл. 15) у правоуглом координатном систему XOY.



Сл. 15

Означимо (према услову на стр. 22) са α угао који образује права AB са осом OX, и са n отсечак OC који дата права отсеца на OY оси.

Величине α и n потпуно одређују положај праве, тако да се само помоћу њих може конструисати та права.

Конструишимо координате $OP = x$ и $PM = y$ произвољне тачке M на правој AB.

Повлачећи праву CK паралелно оси апсциса добијамо из правоуглог троугла Δ CKM

$$KM = CK\, tg\, \alpha,$$

где је

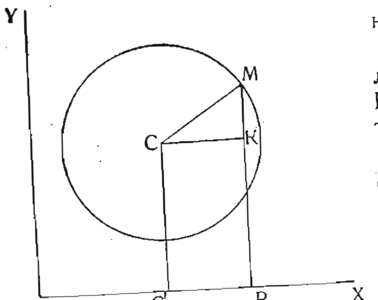
$$KM = PM - OC = y - n$$
$$CK = OP = x.$$

Према томе добијена веза постаје:

$$y = x\, tg\, \alpha + n \tag{20}$$

и претставља тражену једначину праве AB.

Поставимо сад једначину круга датог полупречника R, чије се средиште налази у датој тачки C (a, b) у односу на координатни систем XOY (сл. 16).



Сл. 16

Узмимо на кругу тачку M и обележимо њене координате, OP и PM, са x и y.

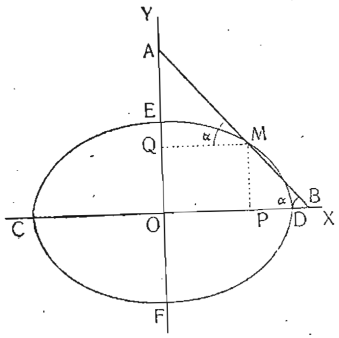
Повуцимо из средишта C (a, b) праву линију паралелну оси X до пресека, у тачки K, са ординатом PM тачке M. Координате тачке K су очевидно x и b.

Из правоуглог троугла ΔCKM добијамо следећу везу између x, y, a, b и R

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Ова једнакост претставља једначину траженог геометриског места — круга.

Као трећи пример посматрајмо кретање дужи AB (сл. 17), дате дужине, чији се крајеви крећу по двема узајамно нормалним осама OX и OY. Треба поставити једначину криве линије, коју описује ма која тачка M дате дужи.



Сл. 17

Нека су координате тачке M

$$QM = x, \quad PM = y.$$

Означимо AM $= a$, MB $= b$ и са α допуну до 180^0 угла који образује дуж AB са OX осом.

Из правоуглих троуглова ΔQMA и ΔPBM следи

$$x = a \cos \alpha\,, \quad y = b \sin \alpha\,. \tag{21}$$

Поделимо обе стране прве једначине (21) са a, а друге са b. Дигнимо сваки члан на квадрат и саберимо тако добијене једначине. Елиминисањем α из обе једначине, добијамо тражено геометриско место тачака M

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{22}$$

Ова једначина претставља криву линију DECF, која се зове е л и п с а, координатни почетак се зове ц е н т а р, а тачке D, E, C и F т е м е н а елипсе.

Ако тачка M полови дуж AB, тј. ако је $b = a$, онда једначина (22) гласи

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{23}$$

и одређује круг са средиштем у координатном почетку O и полупречником a.

16. Параметарске једначине кривих линија. — Крива линија се може претставити двема једначинама, које изражавају вредности координата у облику извесних функција произвољне промењиве величине, која се назива п а р а м е т р о м.

Тако, на пр., скуп једначина (21), из којих добијамо једначину елипсе (22), претставља параметарски облик једначине елипсе DECF (сл. 17), при чему угао α служи као параметар.

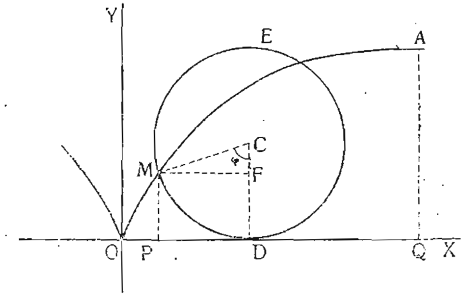
Параметарску једначину елипсе могуће је такође претставити помоћу алгебарских функција. Тога ради уведимо нов параметар t, помоћу израза $tg\, \frac{\alpha}{2} = t$. У томе случају, параметарске једначине елипсе (22) постају

$$x = a\, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = b\, \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Резултат елиминације t из последње две једначине доводи до једначине елипсе у прећашњем облику (22).

Понекад је боље користити се, у израчунавањима, двема параметарским једначинама криве него само једном њеном једначином.

На пр., крива линија-циклоида се обично даје параметарским једначинама. Циклоидом се назива крива OMA (сл. 18), што описује тачка M круга DME, који се котрља без клизања по правој основи OX.



Сл. 18

Ту праву OX узмимо за апсцисну осу, почетак O померимо у почетни положај тачке M, која описује циклоиду. Осу OY узмимо нормално на OX. Повуцимо полупречник CD у тачки D, која се налази на кругу који се котрља и који у њој додирује осу OX. Обележимо са φ угао $\measuredangle$MCD за који се круг морао обрнути, да би тачка M описала лук циклоиде OM. Означимо са a дужину полупречника посматраног круга, тако да је MC $=$ CD $= a$. Према томе дужина лука круга MD постаје једнака производу $a\varphi$. Исто тако и отсечак OD, са којим се спаја лук MD при обртању круга за угао φ, једнак је истом производу, тј.

$$OD = a\,\varphi.$$

Повуцимо из тачке M праву паралелну OX оси, до пресека са полупречником DC у тачки F. Из правоуглог троугла ΔMFC, с правим углом код темена F, добијамо

$$MF = a \sin \varphi, \quad FC = a \cos \varphi.$$

Текуће координате x и y тачке M циклоиде,

$$x = OP, \quad y = PM,$$

имају вредности

$$x = OD - PD = OD - MF, \quad y = DC - FC.$$

Стављајући у добијене обрасце вредности за OD, MF, DC и FC, изражене помоћу a и φ, налазимо тражене, параметарске једначине циклоиде

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Елиминацијом из прве једначине параметра φ који је одређен другом једначином, добијамо израз за везу између текућих координата, који претставља једначину циклоиде у правоуглом координатном систему

$$x = \arc\cos\frac{(a-y)}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\,. \tag{24}$$

Ако за основу покретног круга узмемо ма какав круг, онда тачка генераторског круга, који се котрља по основи, описује криву, звану е п и ц и к л о и д а.

Ако се генераторски круг котрља испод основе, онда његова тачка описује нову криву, звану х и п о ц и к л о и д а.

Препуштамо читаоцу извођење њихових једначина, као и доказ, да епициклоида која се добија када су полупречници основног и генераторског круга једнаки, претставља криву звану к а р д и о и д а.

Ако је полупречник основног круга четири пута већи од полупречника генераторског круга, одговарајућа крива хипоциклоида претставља криву у облику звезде, која се зове а с т р о и д а и има четири гране.

17. Подела кривих линија. — Као што је већ раније речено, функције се деле на алгебарске и трансцендентне. Према томе и криве линије у равни такође се деле на а л г е б а р с к е и т р а н с ц е н д е н т н е. Последња подела се врши с обзиром на претстављање кривих алгебарским или трансцендентним функцијама. Тако, на пр., криве линије претстављене једначинама (13), (15), (19), (20), (21), (22) су алгебарске.

Криве линије дате једначинама

$$y = a\sin x, \qquad y = m\log x$$

и циклоида (24), су трансцендентне.

Лако је међутим уверити се да једначине

$$\log x + \log y = \log a \tag{25}$$

$$\arc\sin x + \arc\sin y = \arc\sin b \tag{26}$$

одређују алгебарске криве линије. Заиста, једначину (25) можемо написати помоћу алгебарске функције у облику

$$xy = a. \tag{27}$$

На исти начин, узимајући $\sin$-се обеју страна једначине (26), можемо је трансформисати у алгебарску једначину

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = b. \tag{28}$$

У алгебри се доказује да се свака алгебарска једначина трансформише у целу једначину, чији први део претставља полином целих, позитивних степена променљивих. Степеном такве једначине назива се степен највишег члана полинома.

Према степену своје једначине, алгебарске криве линије се деле на линије првог, другог, трећег итд. n-ог степена. Под алгебарском кривом линијом n-ог степена подразумева се крива линија, чија се једначина изражава помоћу целог полинома n-ог степена по x и y. На пр., праве (13) и (20) претстављају линије првог степена.

Једначину круга (15) лако је претворити у једначину (23). Стога и круг и елипса (22) претстављају криве линије другог степена. Хипербола (19) претставља тако исто криву линију другог степена, јер се њена једначина јавља у облику

$$xy = 1.$$

Најзад, крива линија одређена једначином (28) претставља алгебарску криву четвртог степена, јер се једначина (28) лако трансформише у једначину

$$(x^2 - y^2)^2 + 2b^2(2x^2y^2 - x^2 - y^2) + b^4 = 0.$$

Геометриска својства кривих линија не мењају се услед аналитичких трансформација њихових једначина ма да понекад и претстављају различите делове тих кривих. Тако, на пр., једначина (15) одређује две гране круга, горњу позитивну и доњу негативну. Међутим обе гране садржане су у једначини (23).

Претпоставимо да је дата цела алгебарска једначина

$$F(x, y) = 0, \tag{29}$$

чији се први део раставља у два или више чинилаца, на пр.,

$$F(x, y) \equiv f(x, y)\cdot\varphi(x, y),$$

при чему функције $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ претстављају полиноме са реалним коефицијентима. Стога се једначина (29) раставља у две једначине

$$f(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) = 0. \tag{30}$$

На основу тога изводи се закључак да крива линија, чија се лева страна једначине (29) раставља у два или већи број чинитеља, претставља скуп двеју кривих линија одређених једначинама (30), или скуп већег броја кривих линија. Тако, на пр., једначина

$$x^2 - y^2 = 0$$

раставља се на две једначине

$$x - y = 0 \quad \text{и} \quad x + y = 0.$$

Најзад, треба напоменути да д в е а л г е б а р с к е ц е л е ј е д н а ч и н е о д р е ђ у ј у и с т у к р и в у л и н и ј у, а к о с е њ и х о в е л е в е с т р а н е р а з л и к у ј у м е ђ у с о б о м к о н с т а н т н и м м н о ж и т е љ е м. Очевидно је да је тај услов довољан. Заиста, ако постоји идентичност

$$F_1(x, y) = k\,F_2(x, y),$$

где k претставља стални множитељ, тада за одређивање криве линије $F_1(x, y) = 0$ треба испитати и једначину $F_2(x, y) = 0$.

Наведени услов је не само довољан већ и потребан. Заиста, претпоставимо да обе једначине

$$F_1(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad F_2(x, y) = 0 \tag{31}$$

одређују исту линију. Тада за сваку вредност x обе једначине (31) имају исту вредност y. Према томе за сваку вредност x мора постојати идентичност

$$F_1(x, y) = k_1 F_2(x, y), \tag{32}$$

где k_1 не зависи од y. Ово следи из тога што би, у обратном случају, изједначујући k_1 са нулом, могуће било добити за y нове вредности које нису одређене једначинама (31).

Исто тако и за сваку вредност y, једначине (31) морају одређивати исте вредности промењљиве x. Значи мора постојати и друга идентичност

$$F_1(x, y) = k_2 \, F_2(x, y), \tag{33}$$

где k_2 не зависи од x. Према томе, идентичности (32) и (33) показују да је

$$k_1 = k_2 ,$$

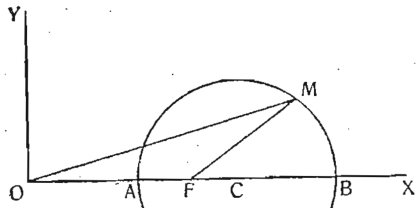
при чему k_1 и k_2 могу бити само константни бројеви, што значи да се функције F_1 и F_2 могу разликовати само константним множитељем.

18. Геометриско место тачака. — Проучени примери претстављају случајеве правих и кривих линија (круга, елипсе и циклоиде), одређених као геометриска места тачака, које задовољавају извесне услове.

Појам геометриских места служи за решавање како одређених тако и неодређених проблема. Под одређеним проблемом подразумева се истраживање извесних тачака или величина, а под неодређеним истраживање облика дате геометриске слике. У томе случају се бирају координатни системи и, ако са x и y означимо координате тражених тачака, проблем се своди на изналажење једначине — аналитичког претставника тражене слике. Та једначина добија се као веза између текућих координата тачака посматране слике и константних величина. Она се добива у облику

$$F(x, y) = 0.$$

У извесним случајевима, задатак да се образује једначина геометриског места може се и непосредно решити изражавањем геометриских особина дате слике у изабраном координатном систему.



Сл. 19

Тражи се геометриско место тачака чија је размера растојања од две дате тачке стална величина.

Претпоставимо да су дате две тачке O и F (сл. 19). Означимо са a растојање између њих.

Узмимо тачку O за почетак координатног система, X осу повуцимо у правцу тачке F, а осу Y управно на осу OX.

Означимо са x и y координате које било тачке M траженог геометриског места, а са λ дату размеру. Према томе тражено геометриско место одређује се обрасцем

$$\frac{OM}{FM} = \lambda.$$

Пре свега, очевидно је да, ако је λ једнако јединици, тражено геометриско место претставља праву линију, управну на отсечку OF, што пролази кроз његову средину.

Под претпоставком да је $\lambda \gtrless 1$, пошто имамо

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2, \qquad \overline{FM}^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

образац који дефинише тражено геометриско место даје

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 \left[(x - a)^2 + y^2\right],$$

или

$$x^2 + y^2 + \frac{2\,a\,\lambda^2}{1 - \lambda^2}\,x = \frac{a^2\,\lambda^2}{1 - \lambda^2}.$$

Према томе тражено геометриско место претставља круг (тако звани Аполонијев), чија се једначина може написати овако

$$\left(x + \frac{a\,\lambda^2}{1 - \lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2\,\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2}.$$

Одавде следи да се средиште нађеног круга налази у тачки C, на растојању $OC = \frac{a\,\lambda^2}{\lambda^2 - 1}$. Ово је, за вредности $\lambda > 1$, веће од OF; а за вредности $\lambda < 1$, тачка C мора се налазити на негативном правцу осе OX. Најзад, полупречник Аполонијева круга, $\frac{a\,\lambda}{1 - \lambda^2}$, по апсолутној вредности је λ пута мањи од OC.

Приметимо још да се тачке пресека, A и B, посматраног круга са осом x одређују апсцисом x_1, односно x_2, помоћу образаца

$$x_1 = \frac{\lambda\,a}{1 + \lambda}, \qquad x_2 = \frac{-\lambda\,a}{1 - \lambda}.$$

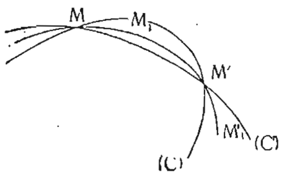
Према томе тачке A и B су хармониски коњуговане са датим тачкама O и F.

19. Увођење помоћног параметра. — У многим случајевима је од велике користи увођење промењљивих параметара за изналажење једначина геометриских места. Претпоставимо, на пр., да се везе између текућих координата дате тачке и сталних величина, које одређују геометриске особине дате криве линије, изражавају помоћу једначина

$$F(x, y, \alpha) = 0 \qquad F_1(x, y, \alpha) = 0, \tag{35}$$

где је α помоћни, промењљиви параметар. Свака од ових једначина одређује по једну криву. Претпоставимо да прва од њих дефинише криву (C), а друга — криву (C′) (сл. 20). Означимо са M и M′ тачке пресека кривих (C) и (C'). Пошто се ове тачке налазе у пресеку обеју посматраних кривих, значи да тачке M и M' припадају траженом геометриском месту.

Ако параметар α мења своју вредност, криве (C) и (C') ће заузимати нове положаје, те ће и својим пресецима одређивати и нове тачке: M_1, M_1'; M_2, M_2' и т. д. Тако добијене тачке дефинишу криву која претставља тражено геометриско место, коју ћемо означити са (D).



Сл. 20

Једначина траженог геометриског места добија се елиминацијом параметра α из једначина (35). Заиста, претпоставимо да се резултат елиминације изражава једнакошћу

$$f(x, y) = 0. \tag{36}$$

Посматрајмо тачку $M_1(x_1, y_1)$ пресека кривих линија (C_1) и (C'_1), које одговарају вредности α_1 промењивог параметра α. Тада добијамо идентичности

$$F(x_1, y_1, \alpha_1) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, \alpha_1) = 0,$$

из којих закључујемо да једначине

$$F(x_1, y_1, \alpha) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, \alpha) = 0$$

имају заједнички корен $\alpha = \alpha_1$. Према томе координате тачке (x_1, y_1) задовољавају једначину (36); а како су x_1 и y_1 координате ма које тачке, значи да координате сваке тачке криве (D) задовољавају једначину (36).

И обратно, све тачке криве линије дефинисане једначином (36) припадају кривој линији (D). Заиста, ако сменимо у једначинама (35) x и y вредностима x' и y', које задовољавају једначину (36), добијамо две једначине:

$$F(x', y', \alpha) = 0, \quad F_1(x', y', \alpha) = 0.$$

Оне имају заједнички корен $\alpha = \alpha'$. Вредности параметра α' одговарају двема кривим линијама, чије су једначине

$$F(x, y, \alpha') = 0, \quad F_1(x, y, \alpha') = 0.$$

Ове криве секу се у тачки (x', y'), што значи да ова тачка припада кривој линији (D).

20. Изузетни случајеви. — Изведени закључак из претходног параграфа допушта ове изузетке:

1⁰ за извесни лук криве одређене једначином (36) једначине (35) дају имагинарне вредности за параметар α. Тада су одговарајуће криве линије (C) и (C') имагинарне. Ма да су тачке пресека ових кривих реалне, ипак, са геометриског гледишта, оне не припадају посматраном геометриском месту;

2⁰ за поједине тачке криве (36) једначине (35) одређују имагинарне вредности за параметар α. И у овоме случају дотичне тачке не припадају посматраном геометриском месту;

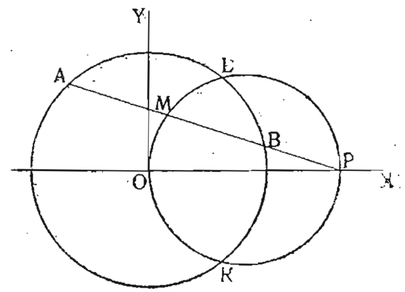
3⁰ ма да параметар α има реалне вредности, он према природи постављеног проблема не може узимати све могуће реалне вредности.

21. Пример. — Ради објашњења претходног параграфа решимо овај задатак: Дат је круг и тачка ван њега. Наћи геометриско место средина тетива што пролазе кроз дату тачку.

Узмимо за координатне осе два узајамно нормална пречника круга, с тим да оса OX иде дуж пречника који пролази кроз дату тачку P (сл. 21).

Једначина датог круга са средиштем у координатном почетку O и датим полупречником a, према обрасцу (23), гласи

$$x^2 + y^2 = a^2.$$



Сл. 21

Према обрасцу (20), једначина сечице PA је:

$$y = mx + n, \tag{37}$$

где m означава $tg\,\alpha$, а α угао $\sphericalangle XPA$. Ако са c означимо дато растојање тачке P од средишта датог круга, онда за праву линију (37), која пролази кроз тачку P, имамо услов:

$$0 = mc + n, \qquad n = -mc.$$

Сменом нађене вредности за n у једначину (37) добијамо једначину облика

$$y = m(x - c). \tag{38}$$

Тачке пресека A и B круга (23) и праве (38) добијају се заједничким решењем обеју једначина. Стављајући вредности за y из обрасца (38) у једначину (23) добијамо једначину, помоћу које се одређују апсцисе тачака A и B

$$(m^2 + 1)x^2 - 2cm^2x + m^2c^2 - a^2 = 0.$$

Одавде следи за координате X и Y тачке M

$$X = \frac{cm^2}{m^2 + 1}, \qquad Y = m(X - c), \tag{39}$$

где m игра улогу промењивог параметра.

Према томе, једначина траженог геометриског места добија се елиминацијом m из две једначине (39) у облику

$$(X - c)(X^2 + Y^2 - cX) = 0.$$

Ако се први множитељ производа леве стране једначине изједначи са нулом, онда он не одређује тражено геометриско место, јер претставља праву линију, нормалну на x осу, која пролази ван датог круга. Ако се изједначи са нулом други множитељ, добија се круг:

$$X^2 - Y^2 - cX = 0,$$

или

$$\left(X - \frac{c}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Средиште добијеног круга налази се на средини отсечка OP, а полупречник му је $\frac{c}{2}$. *Тражено геометриско место је одређено само луком круга* KOL, *који лежи у датом кругу* (23).

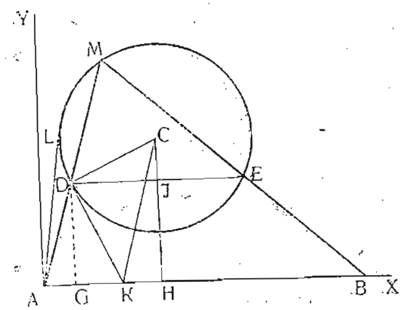
Врло често је при решавању задатака за изналажење геометриског места корисно увести више помоћних параметара. Међутим то не би било довољно за решење проблема. Ради потпуности решења треба увести и накнадне услове за везу дотичних параметара, тако да само један од њих буде независно променљива величина.

22. Примена геометриских места на решавање одређених задатака. — Геометриска места се искоришћавају не само за решавање неодређених проблема, већ и за решавање одређених проблема у којима се јављају две непознате величине. Претпоставимо, на пр., да смо, решавајући известан проблем, добили две једначине

$$F_1(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y) = 0, \tag{40}$$

где су x и y координате неке тачке у датом координатном систему. Тада заједничко решење обеју једначина (40) даје координата тражене тачке с тим да се иста још и конструише. Међутим овакав начин решавања често је неизводљив. Насупрот томе дешава се да конструкцију тражене тачке можемо једноставније извршити као пресек двају геометриских места, која претстављају добијене једначине (40).

Решимо, на пр., овај проблем: *Дат је круг и отсечак* AB *дате дужине. Наћи на кругу ону тачку* M, *за коју праве* MA *и* MB *секу круг у тачкама* D *и* E, *које леже на правој паралелној са* AB (сл. 22).



Сл. 22

Узмимо праву AB за X осу, а осу Y повуцимо из тачке A нормално на OX осу. Ако означимо са a и b координате AH и HC средишта C датог круга, а његов полупречник са r, једначина датог круга гласи

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{41}$$

Свака од три тачке M, D и E потпуно одређује положај осталих двеју. Потражимо тачку D. Означимо њене координате AG и GD, са x_1, y_1. Из сличности троуглова $\triangle$MAB и $\triangle$MDE добија се пропорција

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AB}{DE}.$$

Одавде се добија сложена пропорција

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AB}{AB - DE}.$$

Множећи чланове прве размере са AD налазимо нову пропорцију

$$\frac{AM \cdot AD}{\overline{AD}^2} = \frac{AB}{AB - DE}.$$

Ако означимо са m дужину тангенте AL на дати круг и са J средину тетиве DE, имамо

$$MA \cdot AD = m^2,$$

$$\overline{AD}^2 = x_1^2 + y_1^2, \qquad DE = 2\,DJ = 2\,GH = 2\,(a - x_1).$$

Према томе, ако са c обележимо дужину AB, посматрана пропорција постаје

$$\frac{m^2}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{c}{c - 2a + 2x_1},$$

или

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{m^2}{c}\,(c - 2a + 2x_1).$$

Ова једначина може се написати и овако:

$$\left(x_1 - \frac{m^2}{c}\right)^2 + y_1^2 = r'^2, \tag{42}$$

где је уведена ознака

$$r'^2 = \frac{m^4}{c^2} - \frac{2am^2}{c} + m^2 = \left(a - \frac{m^2}{c}\right)^2 + m^2 - a^2.$$

Добијени образац (42) показује, да се тражена тачка D налази у пресеку датог круга (41) и круга чија је једначина

$$\left(x - \frac{m^2}{c}\right)^2 + y^2 = r'^2. \tag{43}$$

Средиште овога налази се на OX оси, полупречник му је r', а средиште на растојању $\frac{m^2}{c}$ од координатног почетка A. Према томе тражена тачка D одређује се пресеком два круга (41) и (43). Место једначине једног од ових кругова може се искористити разлика њихових једначина, која је линеарна једначина.

Конструкцију тачке D извешћемо, међутим, и на овај начин. Из правоуглог троугла $\triangle$ACL, са правим углом у темену L, добијамо

$$m^2 = a^2 + b^2 - r^2,$$
$$m^2 - a^2 = b^2 - r^2.$$

Према томе полупречник r' изражава се и овако

$$r'^2 = \left(a - \frac{m^2}{c}\right)^2 + b^2 - r^2.$$

Конструишимо сад тачку K на оси OX с апсцисом

$$AK = \frac{m^2}{c}.$$

Према томе имамо

$$a - \frac{m^2}{c} = KH,$$

$$r'^2 = \overline{KH}^2 + b^2 - r^2.$$

Међутим из правоуглог троугла Δ KHC добија се образац

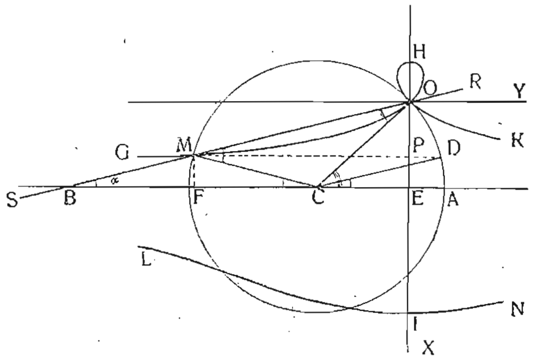
$$\overline{KH}^2 + b^2 = \overline{KC}^2.$$

Због тога је

$$r'^2 = \overline{KC}^2 - r^2.$$

Добијена веза показује, да су полупречници r' и r катете правоуглог троугла ΔDKC и због тога полупречник r' претставља дужину тангенте повучене из тачке K на дати круг. Јасно је да је тражена тачка D додирна тачка уочене тангенте. Пошто се из тачке K могу повући две тангенте на дати круг, то налазимо другу тачку D' и одговарајућу тачку E'. Стога, поред тачке M, постоји и друга тачка M', која задовољава постављени проблем.

23. Деоба угла на три једнака дела. — Из темена C (сл. 23) датог угла $\sphericalangle$ ACO опишимо круг са полупречником CO. Одмеримо дужину BM тог полупречника на лењиру, или на парчету хартије SR. Затим наместимо лењир тако да му ивица пролази кроз тачку O, тачка B лежи на продужетку стране CA датог угла, а да друга тачка M лежи на кругу.



Сл. 23

Пошто је отсечак BM једнак полупречнику CM, то је Δ BCM једнакокрак. Значи, углови код темена B и C овог троугла једнаки су. Лако је доказати да је сваки од ова два угла трећина датог угла $\sphericalangle$ ACO.

Заиста, ако означимо са α угао $\sphericalangle$ CBM, онда је $\sphericalangle$ CMO $= 2\alpha$, као спољашњи угао једнакокраког троугла Δ BCM. Троугао Δ COM исто тако је једнакокрак, пошто су његове стране CM и CO једнаке полупречнику круга. Стога је $\sphericalangle$ MOC $= 2\alpha$.

Дати угао $\sphericalangle$ ACO као спољашњи угао троугла Δ BCO једнак је збиру несуседних му углова

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle CBM + \sphericalangle MOC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha.$$

Повуцимо сад из тачке M праву линију MD, паралелно страни CA. Добијени угао $\sphericalangle$ ACD једнак је трећини датог угла $\sphericalangle$ ACO.

Да бисмо израчунали координате тачке M, узмимо тачку O за почетак правоуглог координатног система; осу OX повуцимо на ниже, нормално на страну угла CA, а осу OY повуцимо паралелно са CA. Означимо са x и y координате тачке M,

$$OP = x, \quad PM = y;$$

полупречник круга са a, а отсечак OE са b

$$CO = BM = a, \quad OE = b.$$

Из тачке M спустимо нормалу MF на основу CA.

Из сличности троуглова Δ MPO и Δ BFM следи

$$\frac{MO}{BM} = \frac{OP}{MF}, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \frac{x}{b - x}.$$

Према томе тражене координате тачке M задовољавају једначину

$$(b - x)^2 \, (x^2 + y^2) = a^2 x^2. \tag{44}$$

Решимо ли добијену једначину по y, добијамо

$$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - (b - x)^2}}{b - x}. \tag{45}$$

Крива линија одређена овом једначином зове се Никомедова *конхоида*. Тражена тачка M је одређена као тачка пресека конхоиде и датог круга, са средиштем у C. Једначина (45) показује, да је конхоида симетрична у односу на апсцисну осу OX, јер за сваку вредност x ордината y има две вредности, истих апсолутних величина а различитог знака.

Да би ордината y имала реалне вредности, треба да буде израз под кореном позитиван. Према томе, оба чинитеља на које се тај израз разлаже, тј. $a + b - x$ и $a - b + x$ морају бити истог знака. Они могу бити или позитивни или једнаки нули, тј. x треба да задовољава услов

$$a + b \geqslant x \geqslant -(a - b).$$

Стога $a + b$ претставља највећу позитивну апсцису OI, а $a - b$ апсолутну величину најмање негативне апсцисе OH. На тај начин се закључује, да се конхоида налази у области ограниченој двема правама, паралелним основи конхоиде CA, што пролазе кроз тачке I и H.

Лако је показати како се образује конхоида непрекидним кретањем. Када права RS клизи и при томе се истовремено и обрће око тачке O, а тачка B се креће дуж стране угла CA, друга тачка M описује горњу грану GMOHOK конхоиде са омчом OH око тачке O.

Ако на правој RS одвојимо, са друге стране тачке B, други отсечак, једнак полупречнику CO, онда његов други крај описује доњу грану LIN конхоиде.

У посматраном случају отсечак OE је мањи од полупречника CO круга. Тај полупречник зовемо *модуо* конхоиде. Зато, кад тачка B стигне у положај C и продужи своје кретање у правцу тачке A, M ће описати омчу OH.

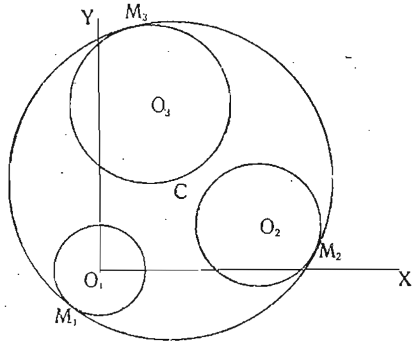
Могућно је конструисати и друге конхоиде, ако се узме да је њихов модуо или једнак или мањи од OE. У првом случају конхоида пролази кроз свој пол O, без омче око O, у другом случају она сече праву OE испод пола.

Место праволиниске основе, можемо узети за основу ма какву криву линију. Ако се за основу узме круг, добијена крива зове се *Паскалов пуж*. У специјалном случају када је њен модуо једнак полупречнику основног круга, добија се крива у облику срца, звана *кардиоида*.

24. Аполонијев проблем. — Декарт се послужио својом методом и при решавању чувеног Аполонијева проблема: *наћи круг који додирује три дата круга у равни.*

Узмимо у равни три круга са средиштима у тачкама O_1, O_2 и O_3 (сл. 24) и полупречницима r_1, r_2, r_3.

Нека се координатни почетак правоуглог праволиниског система налази у средишту O_1 првог датог круга. Означимо координате средишта O_2 и O_3 са α, β и α', β', тј. O_2 (α, β), O_3 (α', β'). Лако је увидети да постављени проблем има осам разних решења, која се јављају у четири групе од по два решења. Заиста, два прва решења дају два круга, од којих је један описан око задатих кругова тако да дате кругове обухвата; а други круг је уписан тако да се сви дати кругови налазе изван траженог круга.



Сл. 24

Сваки други пар решења од три следеће групе одређује опет два круга. Први од њих обухвата само један дати круг и додирује споља остала два дата круга. Други од кругова додирује споља први дати круг, а два остала обухвата. На овај начин, поред два прва решења, добијају се још шест других решења, што значи да је број свих различитих решења — осам.

Проучимо сада први случај, за који се тражи круг описан око три дата круга. Нацртајмо тражени круг са средиштем у тачки C (x_c, y_c). Означимо са M_1, M_2 и M_3 тачке додира траженог круга са датим круговима. Обележимо са R полупречник траженог описаног круга.

Очевидно је да је растојање траженог средишта C од средишта O_i $(i = 1, 2, 3)$ датих кругова једнако разлици $R - r_i$. Према томе постоје ове три различите једнакости

$$\left.\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 &= (R - r_1)^2, \\ (\alpha - x_c)^2 + (\beta - y_c)^2 &= (R - r_2)^2, \\ (\alpha' - x_c)^2 + (\beta' - y_c)^2 &= (R - r_3)^2. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Одузимајући од прве једначине сваку од осталих једначина, добијамо једначине

$$\left.\begin{aligned} \alpha x_c + \beta y_c &= a' + (r_2 - r_1) R \\ \alpha' x_c + \beta' y_c &= b' + (r_3 - r_1) R, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

где су уведене ознаке

$$a' \equiv \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + r_1^2 - r_2^2),$$

$$b' \equiv \frac{1}{2} (\alpha'^2 + \beta'^2 + r_1^2 - r_3^2).$$

Претпоставимо да су једначине (54) решиве по x_c и y_c, другим речима, да је детерминанта

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Под овом претпоставком једначине (54) дају за координате x_c и y_c траженог средишта C вредности

$$x_c = AR + D, \quad y_c = BR + E, \tag{55}$$

где коефицијенти A, B, D и E претстављају одређене величине. Стављајући нађене вредности (55) у прву једначину (53), добијамо за одређивање вредности полупречника R квадратну једначину

$$(A^2 + B^2 - 1) R^2 + 2 (AD + BE + r_1) R + D^2 + E^2 - r_1^2 = 0. \tag{56}$$

Решивши је по R налазимо

$$R = \frac{-(AD + BE + r_1) \pm \sqrt{S^2 - T^2}}{A^2 + B^2 - 1}, \tag{57}$$

где су уведене ознаке:

$$S^2 \equiv (A r_1 + D)^2 + (B r_1 + E)^2$$

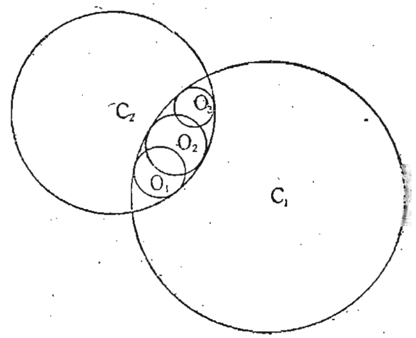
$$T^2 \equiv (AE - BD)^2.$$

Образац (57) показује да R претставља реалну величину под условом

$$S \geqslant T,$$

а имагинарну у супротном случају. Осим тога R мора бити позитивно, када тражени круг убухвата сва три задата круга. Значи, решење проблема је немогуће кад образац (57) одређује за R негативну величину. За доказ овог тврђења довољно је навести случај, кад два дата круга леже у трећем.

Најзад образац (57) може одредити и две позитивне вредности за R, што значи да би било могуће повући два различита тражена круга. Лако је замислити овакав случај у облику следеће шематске слике (сл. 25). Кругови са средиштима C_1 и C_2 означавају два тражена круга, који додирују три дата круга са средиштима O_1, O_2 и O_3, смештеним у простору обухваћеном круговима C_1 и C_2.



Сл. 25

Стављајући вредност за R из једначине (57) у обрасце (55), добијамо координате средишта траженог круга.

Испитајмо сад другу претпоставку, да је

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0,$$

а то значи

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

тј. средишта свих трију датих кругова леже на истој правој.

Тада се x_c и y_c елиминишу из једначине (54), па се добија једначина за одређивање полупречника R, наиме:

$$\alpha' a' - \alpha b' + [\alpha' (r_2 - r_1) - \alpha (r_3 - r_1)] \mathrm{R} = 0 .$$

Одавде се добија једна једина вредност за R

$$\mathrm{R} = \frac{\alpha b' - \alpha' a'}{a' (r_2 - r_1) - \alpha (r_3 - r_1)} .$$

Међутим стављајући нађену вредност R у прву једначину (53) и прву (54), налазимо, уопште, два средишта за тражени круг.

Испитајмо други случај прве групе решења, за који је тражени круг уписан у три дата круга.

Очевидно је, да се услови (53) мењају утолико, што се на десним странама одговарајућих једначина, место разлике $\mathrm{R} - r_i$, морају налазити збирови $\mathrm{R} + r_i$. То значи да у том случају R мора имати негативну вредност у једначинама (54). У закључку се може констатовати, да негативна решења једначине (56) одговарају овом другом случају прве групе решења, тј. случају уписаног траженог круга у дате кругове. Јасно је да је његов полупречник једнак апсолутној вредности негативних коренова једначине (56).

На сличан начин се проучавају и остале три групе могућих решења Аполонијева проблема у равни.

Напоменимо још да је конструкција тражених кругова изводљива помоћу шестара и лењира. Заиста, једначине за израчунавање тражених величина су првог и другог степена. Конструкција самог центра добија се у пресеку једне криве другог степена и једне праве линије. Једначина те криве другог степена добија се елиминацијом R из прве једначине (53) и једне од једначина (54). Међутим једначина праве линије добија се елиминацијом R из обе једначине (54). На основу тога Аполонијев проблем може се решити конструктивним путем, искључивом употребом шестара и лењира.

Пошто скуп двеју једначина првог и другог степена има два заједничка корена реална, једнака или имагинарна, значи да за тражено средиште добијамо две реалне тачке, или једну, или две имагинарне тачке. У последњем случају посматрани проблем нема реалног решења.

---

25. Примери и задаци.

1. Израчунати однос координата сваке тачке, која лежи на унутрашњој или спољашњој симетрали нормалног координатног угла.

2. Изразити координате тачака које леже на правим линијама, паралелним координатним осама.

3. Наћи везу између две ма какве тачке које се налазе на правој, што пролази кроз координатни почетак.

4. Испитати да ли имају прав угао троуглови са теменима у тачкама

a) (1, -2), (3, 2), (3, 11); *b)* (5, 6), (1, 6), (1, 2);

c) (4, 2), (3, 2), (1, 4); *d)* $(1, 4), \left(\frac{46}{25}, \frac{28}{25}\right), (-2, 0)$.

5. Израчунати растојање између две дате тачке:

a) (2, —3) и (—4, 5); (5, 1) и (8, 5);
b) (4, —7) и (—1, 5); (1, 14) и (25, 21);
c) (1, 0) и (0, 2); (3, 0) и (0, 4);
d) $(b + c,\ a - c)$ и $(a + c,\ -b - c)$.

6. Спојити узастопно правим линијама тачке

$$(1, 0),\ (0, 2),\ (-1, 0),\ (0, -2)$$

и одредити углове, које заклапају стране добијеног паралелограма са координатним осама.

7. Наћи на ординатној оси тачку подједнако удаљену од координатног почетка и од дате тачке.

8. Израчунати дужине страна троугла са теменима

$$(-2, 2),\quad (4, 2),\quad (1, 6)$$

и углове које заклапају стране троугла са координатним осама.

9. Израчунати *sin*, *cos* и *tg* угла између потега који спајају координатни почетак са двема датим тачкама. Добијени резултат применити на израчунавање углова троугла из претходног задатка.

10. Подели растојање између тачака (1, 3) и (2, 7) у размери $\frac{3}{4}$ и $-\frac{3}{4}$.

11. Подели растојање између тачака (5, 1) и (1, 5) у размери $\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{2}$.

12. Наћи координате тачке пресека средњих линија троугла, кад су дате координате троуглових темена.

13. Наћи тачке у којима се средње линије троугла деле на три једнака дела.

14. Израчунати координате темена троугла који образују праве што пролазе кроз темена датог троугла паралелно његовим супротним странама.

15. Дата су два темена троугла; наћи треће теме, под условом да се средина сваке стране, која пролази кроз ово теме, налази на једној од координатних оса.

16. Дате су координате (1, — 2), (0, 1) два узастопна темена правилног шестоугаоника; наћи координате његових осталих темена.

17. Спојити средине растојања четири произвољне тачке у равни узастопним правим линијама и доказати да је добијена слика паралелограм.

18. Наћи хармониски коњуговане тачке са тачкама наведеним у примеру 5. Наћи тачке коњуговане с њима у анхармониском односу $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n-1}$.

19. Доказати да унутрашња и спољашња симетрала правог угла хармониски деле сваки отсечак праве, који је садржан између страна овога угла.

20. Израчунати површине троуглова наведених у примерима 4 и 8.

21. Израчунати површину троугла са теменима

$$(1, -2),\quad (3, 2),\quad (4, -1).$$

22. Извести образац за површину троугла, чија се два темена налазе свако на по једној од координатних оса.

23. Извести из обрасца за површину троугла, изражена помоћу координата његових темена, услов под којим се три тачке налазе на правој линији.

24. Дате су координате темена троугла. Одредити тачку у троуглу тако, да праве које је спајају са теменима датог троугла деле површину овог троугла у датом односу.

25. Израчунати површину паралелограма у примеру 6.

26. Израчунати површину петоугаоника чије су координате темена:

$$(1, 2),\quad (3, 1),\quad (4, 3),\quad (3, 5),\quad (2, 4).$$

Претставити графички функције:

$$3x + 2 = 0,\qquad 5y - 4 = 0,\qquad 2x - 3y = 0,$$

$$y = x^2,\qquad y = x^2 - 1,\qquad y = 2 - \frac{1}{2}x^2,$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{x},\qquad y = \frac{1}{x + 1},\qquad y = \frac{x}{x + 1},$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \qquad y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}, \qquad y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1},$$

$$y = sin\, x, \qquad y = cos\, x, \qquad y = tg\, x,$$

$$y = 3\, sin\, x, \qquad y = 2\, cos\, x, \qquad y = \frac{1}{4}\, tg\, x,$$

$$y = log\, x, \qquad y = x + log\, x, \qquad y = x + sin\, x.$$

28. Наћи геометриско место тачака које се налазе на растојању 2 од апсцисне осе.

29. Под којим условима праве $Ax + Bx = 0$ и $Bx + Ay = 0$ претстављају исту линију.

30. Наћи геометриско место тачака подједнако удаљених од две дате тачке.

31. Наћи геометриско место тачака чије се растојање од две дате тачке налази у сталном односу.

32. Наћи једначину криве линије, коју описује ма која тачка дужи чији један крај клизи по кругу, а други по правој што пролази кроз средиште круга.

33. Поставити једначину *Паскалова пужа* (види стр. 45), *кардиоиде* (види стр. 36 и 45), *епициклоиде* (види стр. 36) и *астероиде* (види стр. 36).

34. Поставити једначину *лемнискате*, као геометриског места тачака чији је производ растојања од две дате тачке сталан број и једнак квадрату половине растојања између датих тачака.

35. У датоме кругу повући пречник и у његовим крајевима повући тангенте на круг. Из једног краја пречника повлачити сечице и на њих од тог краја наносити отсечке по дужини једнаке отсечцима истих сечица који се налазе између круга и тангенте. Геометриско место крајева нанесених отсечака претставља *цисоиду*. Поставити њену једначину.

ГЛАВА ДРУГА

ПРАВА ЛИНИЈА

I. Разни облици једначине праве линије

26. Једначина праве са угловним коефицијентом. — Нека је дата права линија AB (сл. 26) у координатном систему XOY. Положај праве се потпуно одређује помоћу угла α, који она заклапа са осом OX, и отсечком OC на оси OY. Како смо напред показали (стр. 33—34, n⁰ 15), једначина посматране праве има облик

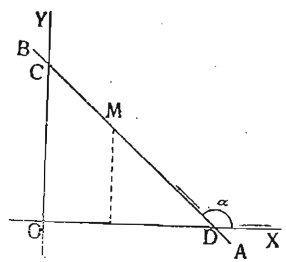
$$y = ax + n, \tag{1}$$

где је

$$a = \operatorname{tg} \alpha, \qquad n = OC.$$

Сталне величине a и n, које одређују положај дате праве AB, зову се њени параметри: a — угловни коефицијент, а n — ордината у почетку. Угао α граде позитивни правци праве AB и апсцисне осе. Ови правци означени су на слици стрелицама. Да бисмо тачно одредили вредност параметра a, треба увек искористити поменуту дефиницију угла, који гради права AB са осом OX (в. стр. 22, n⁰ 7).

Претпоставимо, на пр., да права заузима положај AB (сл. 26), онда њен угао α, који она гради са осом OX, претставља угао $\sphericalangle XDB$. Угао α (сл. 26), према горњој дефиницији, може имати вредности од 0 до π, што зависи од положаја праве AB, при чему позитивне вредности угла α рачунамо од OX осе ка оси OY.



Сл. 26

Ордината у почетку n може имати позитивне или негативне вредности, што зависи од тога да ли дата права сече осу OY изнад или испод апсцисне осе. Ако права пролази кроз координатни почетак, њена ордината у почетку, n, једнака је нули, и једначина праве (1) постаје

$$y = ax.$$

На пример, бисектрисе првог, односно другог квадранта (сл. 26) претстављене су респективно једначинама

$$y = x, \qquad y = -x,$$

јер је за прву једначину $tg\, \alpha = tg\, 45^0 = 1$, а за другу једначину $tg\, \alpha = tg\, 135^0 = -1$.

27. Сегментска једначина праве. — Угловни коефицијент и ордината у почетку, n, не претстављају једини систем параметара за одређивање положаја праве линије. Претпоставимо да права линија AB (сл. 26) отсеца на координатним осама, OX и OY, отсечке

$$OD = m \quad \text{и} \quad OC = n.$$

Оба ова отсечка потпуно одређују положај праве AB, јер су дате две њене тачке, C и D. Означимо са M (x, y) ма коју тачку на правој AB. Правоугли троуглови $\triangle PDM$ и $\triangle ODC$ слични су. Пропорционалност њихових одговарајућих страна даје једнакост

$$\frac{PD}{OD} = \frac{PM}{OC}, \quad \text{или} \quad \frac{m-x}{m} = \frac{y}{n}.$$

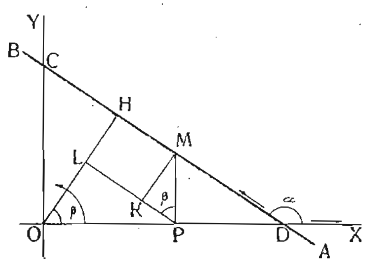
Стога се права AB изражава једначином са отсечцима

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1. \tag{2}$$

Ова једначина зове се сегментска једначина праве.

Бројеви m и n могу бити позитивни или негативни, што зависи од тога да ли се тачке D и C налазе на позитивним или негативним странама координатних оса.

28. Нормални облик једначине праве. — Узмимо за параметре праве линије AB (сл. 27) величину p — растојање OH праве AB од координатног почетка O, и угао β који гради нормала OH са осом OX. Споразумимо се да p сматрамо увек позитивно, а угао β да рачунамо у смеру супротном смеру кретања казаљке на часовнику, од осе OX, од 0 до 2π.



Сл. 27

Нека је $M(x, y)$ која било тачка на правој AB. Повуцимо две праве, PL нормално на OH и KM нормално на PL. Лако је закључити да постоји једнакост

$$OH \equiv OL + KM = p.$$

Из правоуглих троуглова $\triangle OPL$ и $\triangle KPM$ добијају се релације:

$$OL = OP\cos\beta = x\cos\beta, \qquad KM = PM\sin\beta = y\sin\beta.$$

Према томе претходна једнакост постаје

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0 \tag{3}$$

и претставља тражени нормални облик једначине праве.

Ако је положај праве линије у односу на координатни систем такав, да нормала спуштена на њу из координатног почетка заклапа са апсцисном осом угао β већи од π, а мањи од $\frac{3\pi}{2}$, онда су и $\cos\beta$ и $\sin\beta$ негативни.

Ако променимо знаке свима члановима једначине, добијамо једначину која се од (3) разликује само знаком величине p.

29. Свака линеарна једначина претставља праву линију. — Изведене једначине праве линије (1), (2) и (3) линеарне су по текућим координатама, x и y. Докажимо обратну теорему да: *свака линеарна једначина по текућим координатама* **x** *и* **y**, *са сталним коефицијентима*

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

претставља праву линију.

Претпоставимо, прво, да је коефицијент B различит од нуле, тј. $B \gtrless 0$. У том случају једначина (4) може се довести на облик

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{5}$$

Одавде, за $x = 0$, ордината y добија вредност

$$y_0 = -\frac{C}{B}. \tag{6}$$

Дајући промењљивој x ма какве вредности, x_1 и x_2, добијамо из једначине (5) за y вредности:

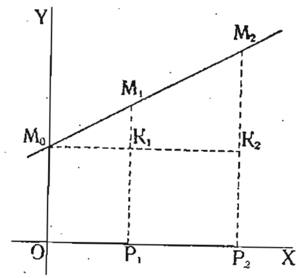
$$y_1 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}, \qquad y_2 = -\frac{A}{B}x_2 - \frac{C}{B}. \tag{7}$$

Узмимо сад ма какав правоугли координатни систем XOY (сл. 28) и три тачке $M_0(0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Спојимо тачке M_1 и M_2 са тачком M_0 отсечцима правих линија M_0M_1 и M_0M_2. Оба ова отсечка на слици се поклапају, јер, као што ћемо доказати, све три тачке M_0, M_1 и M_2 леже на једној правој.

Тога ради повуцимо праву M_0K_2 паралелно оси OX, тако да се сече са ординатама P_1M_1 и P_2M_2 у тачкама K_1 и K_2. Из правоуглих троуглова $\triangle M_0K_1M_1$ и $\triangle M_0K_2M_2$, добијају се, на основу образаца (6) и (7), ове везе:

$$\frac{K_1M_1}{M_0K_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1} = -\frac{A}{B},$$

$$\frac{K_2M_2}{M_0K_2} = \frac{y_2 - y_0}{x_2} = -\frac{A}{B}.$$



Сл. 28

Одатле следи једнакост

$$\frac{K_1M_1}{M_0K_1} = \frac{K_2M_2}{M_0K_2},$$

што доказује да су посматрани троугли слични. Из сличности троуглова следи једнакост одговарајућих углова

$$\sphericalangle M_1M_0K_1 = \sphericalangle M_2M_0K_2.$$

Из овога излази да се стварно све три тачке M_0, M_1 и M_2 налазе на једној правој M_0M_2. Пошто су тачке M_1 и M_2 потпуно произвољне, то се и свака трећа тачка одређена једначином (5) мора налазити на правој M_0M_2, која је графички претставник једначине (4).

Ако је у једначини (4) коефицијент $B = 0$, једначина гласи

$$Ax + C = 0, \quad \text{или} \quad x = -\frac{C}{A}, \tag{8}$$

где је $A \gtrless 0$. Једначина (8) одређује геометриско место тачака једнаких апсциса (8), тј. праву линију, паралелну координатној оси OY, која је удаљена од ње за растојање $-\frac{C}{A}$.

Ако је у једначини (8) $C = 0$, онда она гласи $x = 0$ и претставља једначину ординатне осе OY.

Ако је $A = 0$, а $B \gtrless 0$, онда једначина (4) постаје

$$By + C = 0, \quad \text{или} \quad y = -\frac{C}{B}.$$

Ова једначина претставља праву линију паралелну оси OX, удаљену од ње за растојање $-\frac{C}{B}$. Ако је $C = 0$, једначина добија облик $y = 0$ и претставља једначину апсцисне осе.

Најзад, ако је $A = 0$ и $B = 0$, онда се поставља питање, да ли постоји једначина (4) за $C \gtrless 0$? У том случају можемо овако протумачити једначину (4). Ова једначина може постојати само за бесконачно велике вредности координата x и y. На основу тога закључићемо да за $A = 0$, $B = 0$ и $C \gtrless 0$, једначина (4) претставља б е с к о н а ч н о у д а љ е н у праву. Значи, једначина (4) одређује увек праву линију.

30. Трансформација линеарне једначине општег облика у разне облике једначине праве. — У тачност горњег тврђења, по коме општи облик једначине (4), линеарне по текућим координатама, претставља праву линију, можемо се уверити и на други начин — помоћу трансформације једначине (4) у један од познатих облика једначине праве (1), (2) или (3).

Ако је $B \gtrless 0$, стављајући у једначину (5)

$$-\frac{A}{B} = a, \quad -\frac{C}{B} = n \tag{9}$$

доводимо је на облик једначине праве са угловним коефицијентом (1)

$$y = ax + n.$$

Ако је $C \gtrless 0$, једначина (4) може се написати

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1;$$

а уведемо ли ознаке

$$-\frac{C}{A} = m, \quad -\frac{C}{B} = n, \tag{10}$$

последња једначина добија облик сегментске једначине,

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Најзад, увек је могуће претворити једначину (4) и у нормални облик, ма какве биле вредности коефицијената A, B и C. Помножимо обе стране једначине (4) произвољним множитељем μ

$$\mu A x + \mu B y + \mu C = 0.$$

Да би ова једначина добила облик (3) потребно је увести следеће претпоставке:

$$\mu A = \cos\beta, \quad \mu B = \sin\beta, \quad \mu C = -p.$$

Дигнимо на квадрат обе стране првих двеју једнакости и саберимо их. У резултату ћемо добити једначину која одређује вредност множитеља μ,

тј. $$\mu^2 (A^2 + B^2) = 1, \quad \mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Према томе, претходни обрасци дају за угао β и параметар p ове изразе

$$\cos\beta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11}$$

Десне стране првих двеју једнакости (11) су прави разломци; збир њихових квадрата једнак је јединици. Стога ове једначине дају потпуно одређену вредност за угао β. Последњи образац (11) одређује вредност параметра p. Пошто је коефицијент p увек позитиван (види стр. 52, n⁰ 28), *од два знака у изразу за μ треба изабрати онај, за који израз p, у последњем обрасцу (11), добија позитивну вредност.*

31. Конструкција праве линије. — Нека је дата једначина ма какве праве

$$Ax + By + C = 0.$$

За конструкцију праве потребно је изабрати две ма какве узајамно нормалне праве линије за координатне осе и неки отсечак одређене дужине за јединицу дужине.

Ако коефицијенти A и B нису нуле, онда треба испитати који је од три облика праве (1), (2) или (3) најподеснији за конструкцију. Другим речима, треба видети који је од три система параметара праве погоднији за конструкцију дате праве линије.

Ако је лако конструисати угао α, који је одређен обрасцем

$$tg\,\alpha = a,$$

или првим изразом (9), онда, одмеривши на ординатној оси ординату у почетку n, повлачимо кроз дату тачку праву, која ће образовати угао α са апсцисном осом.

Узмимо, на пр., једначину праве

$$x - y + 1 = 0, \quad \text{или} \quad y = x + 1.$$

Ордината у почетку дате праве једнака је јединици. Према томе тражена права отсеца на ординатној оси отсечак једнак јединици (види сл. 26), који гради са апсцисном осом угао 45^0.

За други пример узмимо једначину

$$2x + 3y + 5 = 0.$$

Права одређена овом једначином отсеца на координатним осама отсечке

$$m = -\frac{5}{2}, \qquad n = -\frac{5}{3}.$$

Треба напоменути да за израчунавање дужина ових отсечака није неопходно користити се изразима (10). Довољно је приметити да отсечци на координатним осама претстављају одговарајуће координате тачака пресека дате праве са координатним осама. Стога, стављајући у датој једначини $y = 0$, добијамо за x вредност $-\frac{5}{2}$. А кад је $x = 0$, једначина даје вредност $-\frac{5}{3}$. На тај начин добијамо две тачке на координатним осама, које потпуно одређују положај дате праве.

Нека је дата права једначином

$$x\sqrt{3} + y - \frac{7}{2} = 0,$$

која има за једначину нормалног облика (множитељ $\mu = +\frac{1}{2}$)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - \frac{7}{4} = 0.$$

Стога се угао β (в. сл. 27) одређује обрасцима

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\beta = \frac{1}{2}, \quad \beta = 30^0.$$

Према томе нормала OH образује са x осом угао од 30^0. Пошто је $OH = \frac{7}{4}$, дата права пролази кроз тачку H нормално на отсечак OH. Но није увек могуће непосредно израчунати задати угао његовим тригонометриским вредностима, него се обично мора прибећи употреби тригонометриских таблица.

Према томе, при конструкцији праве најзгодније је одредити њене било које две тачке. Узмимо, на пр., једначину праве

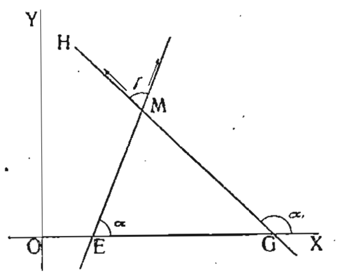
$$\frac{4}{3}x + y = 0.$$

Очевидно је да права одређена том једначином пролази кроз координатни почетак, јер њена једначина не садржи независан члан, те је,

према томе, задовољена за вредности $x = 0$, $y = 0$. Најзад, узмимо на апсцисној оси тачку чија је апсциса једнака јединици. Вредност ординате одговарајуће тачке на правој одређује се из једначине и износи $-\frac{4}{3}$. Тачка $\left(1, -\frac{3}{4}\right)$ је, дакле, друга тачка дате праве. Нађене две тачке потпуно одређују посматрану праву линију.

II. Две праве линије

32. Угао између двеју правих. — Узмимо две праве линије, EF*) и GH, у координатном систему XOY (сл. 29).



Сл. 29

Да бисмо избегли неспоразум, усвојимо да под углом између двеју датих правих подразумевамо увек угао између њихових позитивних праваца. Тако $\sphericalangle \gamma$ између датих правих EF*) и GH претставља $\sphericalangle$ HMF*). Обележимо са α и α_1 углове које граде дате праве, EF*) и GH, са осом OX. Из $\triangle$ EGM закључујемо

$$\gamma = \alpha_1 - \alpha, \quad tg\,\gamma = \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha_1\, tg\,\alpha}. \qquad (12)$$

Претпоставимо да су праве EF*) и GH дате једначинама

$$y = ax + n, \qquad y = a_1 x + n_1, \qquad (13)$$

где је

$$a = tg\,\alpha, \qquad a_1 = tg\,\alpha_1.$$

Према томе угао између правих (13) одређен је изразом (12), који добија следећи облик

$$tg\,\gamma = \frac{a_1 - a}{1 + a_1 a}. \qquad (14)$$

Претпоставимо сад да су праве EF*) и GH дате једначинама општег облика

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0. \qquad (15)$$

Ако дате праве нису паралелне са ординатном осом, тј. ако је

$$B \gtrless 0 \quad \text{и} \quad B_1 \gtrless 0, \qquad (16)$$

онда се угловни коефицијенти посматраних правих изражавају помоћу првог израза (9) на овај начин

$$a = -\frac{A}{B}, \quad a_1 = -\frac{A_1}{B_1}.$$

Према томе, образац (14) постаје

$$tg\,\gamma = \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1}. \qquad (17)$$

*) На горњем крају праве EM треба да стоји слово F.

Нађени резултат, који смо добили под претпоставком (16), примен-љив је и у случају када било један од коефицијената B или B_1, било оба постају нуле. Уствари, ако су оба коефицијента нуле, тј. обе дате праве паралелне оси OY, онда је угао између њих, $\measuredangle \gamma$, једнак нули, а такође и $tg\gamma$, као се то види из обрасца (17). Ако је само један од коефицијената једнак нули, на пр., $B=0$, тј. права EF нормална на оси OX, онда је $\gamma=\alpha_1-\frac{\pi}{2}$ и, према томе, образац (14) добија облик:

$$tg\gamma=-\frac{1}{tg\,\alpha_1}=-\frac{1}{a_1}=\frac{B_1}{A_1}.$$

Последњи израз добија се исто тако и из (17), ако ставимо $B=0$. Аналогним расуђивањима можемо се уверити, да израз (17) важи и за случај када је $B_1=0$.

33. Услов паралелности правих. — У извођењу услова паралелности за две дате праве користићемо се обрасцем за одређивање угла између двеју правих линија.

Нека су две праве дате, рецимо, једначинама (13). Ако су ове паралелне, онда је

$$tg\gamma=0,\quad \alpha_1-\alpha=0,\quad \text{или}\quad a_1=a, \tag{18}$$

тј. *праве дате једначинама (13) паралелне су ако су њихови угловни коефицијенти једнаки међу собом.* Другим речима, *услов паралелности правих изражава се једнакошћу њихових угловних коефицијената.*

Према томе једначине паралелних правих разликују се међу собом само о р д и н а т о м у п о ч е т к у.

Израз (14) показује да је

$$tg\,\gamma=0$$

и онда, кад је именитељ у изразу (14) бескрајан. Но та претпоставка не даје неки нови услов за паралелност датих правих (13). Заиста, уведена претпоставка повлачи као последицу да један од угловних коефицијената, било a_1 било a, мора бити бесконачно велик. Ако претпоставимо, на пр., да је $a=\infty$, онда је права EF паралелна оси OY. А како је и друга права, GH, паралелна првој, мора бити и $a_1=\infty$. Према томе, услов паралелности правих (13) важи како за коначно тако и за бесконачно велике вредности угловних коефицијената a и a_1.

Нека су дате две праве, EF и GH, једначинама општег облика (15), тако да угао међу њима буде одређен изразом (17). У том случају услов паралелности гласи

$$AB_1-A_1B=0,\quad \text{или}\quad \frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}, \tag{19}$$

тј. *услов паралелности правих, претстављених једначинама општег облика, изражава се пропорционалнощћу коефицијената уз текуће координате.*

34. Услов нормалности двеју правих. — Ако су две праве дате једначинама облика (13), онда, у случају њихове нормалности, $tg\,\gamma$, дефинисан обрасцем (14), мора бити бесконачан. Према томе, услов нормалности посматраних правих изражава се једнакошћу

$$1+aa_1=0,\quad \text{или}\quad a_1=-\frac{1}{a}, \tag{20}$$

тј. *угловни коефицијенти двеју узајамно нормалних правих имају реципрочне вредности и супротног су знака.*

Праве дате једначинама општег облика (15) нормалне су, ако је

$$AA_1+BB_1=0, \tag{21}$$

тј. *ако је збир производа коефицијената уз одговарајуће текуће координате, у датим једначинама, једнак нули.*

III. Задаци о правим линијама

35. Упутства за решавање задатака. — Кад кажемо да је тачка дата, то значи да су дате њене координате у ком било координатном систему; а кад кажемо да тачка није дата, онда би то значило одређивање њених координата. На исти начин, права се сматра датом, ако је дата њена једначина; а ако једначину праве треба наћи, онда се каже да права није дата, те је треба одредити.

У разним задацима о правим линијама треба одредити неке тачке, или наћи услове под којима су задате праве, или одредити праве на основу задатих услова. Као и у задацима у Математици, тако и у Аналитичкој геометрији број датих услова може бити довољан да би задатак био одређен, а може бити и недовољан, или може бити дато више услова него што је потребно. У последњем случају или је задатак немогућ или се добијају допунски услови које морају задовољавати дате величине, да би задатак постао решљив.

При решавању сваког задатка треба пре свега изабрати координатни систем, ако већ није назначен у задатку. Затим треба изабрати непознате са којима ћемо рачунати, утврдити начин њиховог мерења и, најзад, поставити све једначине које те непознате треба да задовољавају према датим условима у задатку. Даљи метод рада је истоветан са методом решавања алгебарских задатака. Ради објашњења решићемо неколико задатака.

36. Тачка пресека двеју правих линија. — Дате су две праве, EF и GH (сл. 29, стр. 57), претстављене једначинама (15). Треба одредити тачку њихова пресека.

Означимо са x_0 и y_0 тражене координате тачке M датих правих линија. Пошто се тражена тачка налази на свакој од двеју датих правих, то њене координате задовољавају једначине обеју правих. Према томе, тражене координате претстављају решења система двеју линеарних једначина (15) по x и y, и одређене су обрасцима

$$x_0=-\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y_0=-\frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{22}$$

где су Δ, Δ_1 и Δ_2 детерминанте

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ A_1 & B_1\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}C & B\\ C_1 & B_1\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}A & C\\ A_1 & C_1\end{vmatrix}.$$

Обрасци (22) дају једну потпуно одређену тачку пресека датих правих под условом $\triangle \gtreqless 0$.

Ако је детерминанта $\Delta = 0$, онда x_0 и y_0 имају бесконачно велике вредности. Добијени резултат може се геометриски протумачити на овај начин. Ако је $\Delta = 0$, онда је

$$AB_1 - A_1B = 0 \quad \text{или} \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1},$$

тј. дате праве (15) паралелне су, сагласно услову (19). Паралелне линије, према својој дефиницији, не секу се, али на основу добијених образаца може се рећи, да се паралелне линије секу у бескрајно удаљеној тачки.

Ако је, сем услова $\Delta = 0$, и једна од двеју осталих детерминаната, Δ_1 или Δ_2, једнака нули, онда је очевидно да је и друга детерминанта једнака нули, те имамо услове

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

У том случају, једначине (15) разликују се једна од друге сталним множитељем, тј. обе једначине (15) одређују исту праву. Обрасци (22) показују тада да тражене координате тачке пресека датих правих остају неодређене, тако да се обе праве поклапају.

37. Пресек трију правих у једној тачки. — Претпоставимо да су дате три праве, одређене једначинама (15) и трећом једначином облика

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \tag{23}$$

У општем случају, три праве се секу у три различите тачке. Да бисмо нашли услов да се праве (15) и (23) секу у једној тачки, напоменимо да координате x и y тачке пресека свих трију правих морају задовољавати сваку од три дате једначине (15) и (23). Према томе ове три једначине морају бити сагласне, тј. имати опште решење.

Како је број непознатих 2, x и y, а број једначина 3, то, да бисмо добили опште решење, треба да је једна од датих једначина последица других двеју.

Може се десити да је не само једна, већ да су две једначине последице треће. У том случају три праве се поклапају. Према томе, за решење питања да ли се три праве секу у једној тачки, довољно је испитати да ли су њихове једначине међусобно независне.

Ако једна од једначина (15), односно (23) претставља алгебарску последицу осталих двеју, онда се три дате праве секу у једној тачки.

Ако две једначине претстављају алгебарску последицу треће једначине, онда се све три праве поклапају.

Ако је из непосредног посматрања облика датих једначина тешко закључити да ли су једначине зависне међу собом, онда треба решити по x и y две ма које од датих једначина. Ако добијена решења задовољавају и трећу једначину, онда су све три једначине сагласне, и дате праве се секу у једној тачки. У противном, дате праве се не секу у једној тачки.

Најзад, тражени услов да се три дате праве секу у једној тачки могуће је изразити помоћу детерминанте. Заиста, *услов сагласности једначина (15) и (23) изражава се детерминантом чији су чланови коефицијенти датих правих, која мора бити једнака нули*

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Ако су и сви минори детерминанте на левој страни једначине (24) једнаки нули, све три праве се поклапају.

38. Права која пролази кроз дату тачку. — Нека је дата тачка (x_0, y_0) у правоуглом праволиниском координатном систему.

Јасно је да се може кроз дату тачку повући безброј правих линија. Лако је и поставити општи облик једначина свих тих правих. Узмимо, на пр., једначину праве са угловним коефицијентом,

$$y = ax + n. \tag{25}$$

Параметре a и n треба одредити тако, да ова једначина претставља праву што пролази кроз дату тачку (x_0, y_0). Према томе њене координате треба да задовоље једначину (25), тј. мора постојати једнакост

$$y_0 = ax_0 + n. \tag{26}$$

Ово је једначина са две непознате, a и n. Искључимо једну од њих, на пр., n из (25) помоћу (26). Тада је тражени општи облик једначине свих правих што пролазе кроз дату тачку (x_0, y_0)

$$y - y_0 = a(x - x_0), \tag{27}$$

при чему је угловни коефицијент a остао произвољан.

Ако се пође од сегментског, нормалног или општег облика једначине праве, добијају се ове једначине:

$$\frac{x - x_0}{m} + \frac{y - y_0}{n} = 0, \qquad (x - x_0)\cos\beta + (y - y_0)\sin\beta = 0,$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Свака од ових једначина садржи по једну непознату величину, која је једнака количнику оба коефицијента посматраних једначина. Да би једначина била одређена треба увести неке допунске услове.

39. Права која пролази кроз дату тачку паралелно датој правој. — Нека је у правоуглом координатном систему дата тачка (x_0, y_0) и права

$$y = a_1x + n. \tag{28}$$

Да би тражена права (25) била паралелна датој правој (28), треба да им угловни коефицијенти буду једнаки, тј. да је $a = a_1$. Према томе једначина тражене праве се добија из једначине (27) у облику

$$y - y_0 = a_1(x - x_0).$$

Ако је једначина дате праве задата у општем облику

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

на основу услова паралелности (19) једначина тражене праве гласи

$$A_1 (x - x_0) + B_1 (y - y_0) = 0.$$

40. Права која пролази кроз дату тачку нормално на дату праву. — Нека је дата тачка (x_0, y_0) и права

$$y = a_2 x + n_2.$$

На основу нормалности правих (20), једначина тражене праве се добија из једначине (27) у облику

$$y - y_0 = -\frac{1}{a_2}(x - x_0).$$

Ако је једначина праве дата у општем облику

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

на основу услова нормалности (21), једначина тражене праве гласи

$$B_2 (x - x_0) - A_2 (y - y_0) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{x - x_0}{A_2} = \frac{y - y_0}{B_2}.$$

41. Права која пролази кроз две дате тачке. — Нека су дате, у правоуглом координатном систему, две тачке, (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Тада је лако, поред услова (26), поставити и други услов који треба да задовољавају коефицијенти a и n једначине (25), да би њоме претстављена права пролазила кроз обе дате тачке.

Тражени услов пре свега треба изразити стављајући координате друге тачке (x_1, y_1) у једначину праве (27). Добија се једнакост

$$y_1 - y_0 = a (x_1 - x_0),$$

која садржи непознати коефицијент a. Дељењем обеју страна једначине (27) одговарајућим странама последње једнакости, добијамо једначину тражене праве у облику

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \text{или} \quad y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{29}$$

Нађени резултат можемо и овако написати

$$x (y_0 - y_1) + x_0 (y_1 - y) + x_1 (y - y_0) = 0. \tag{30}$$

Лева страна ове једнакости изражава двоструку површину троугла чија су темена (x, y) (x_0, y_0) (x_1, y_1) (в. стр. 28). Осим тога, једначина (30) показује да је површина последњег троугла једнака нули, што значи да све три тачке леже на правој линији.

Најзад, једначину посматране праве можемо написати и у облику детерминанте. Пошто тачка (x_1, y_1) лежи на правој (25), њене координате задовољавају услов

$$y_1 = a x_1 + n. \tag{31}$$

Према томе резултат елиминације непознатих параметара a и n из три једначине (25), (26) и (31) даје тражену једначину

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

Једначина праве која пролази кроз две дате тачке зависи само од текућих координата и координата двеју датих тачака.

42. Услов да три дате тачке леже на истој правој. — Нека су дате три тачке,

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2),$$

у ком било систему. Да би последња тачка била на правој што пролази кроз прве две тачке, треба да њене координате x_2 и y_2 задовољавају једначину дате праве. За ту једначину узмимо један од три наведена облика, (29), (30) или (32). Тражени услов изражава се у првом од ова три облика:

$$\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0},$$

или (ако променимо ред чланова ради симетрије)

$$x_0 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_0) + x_2 (y_0 - y_1) = 0,$$

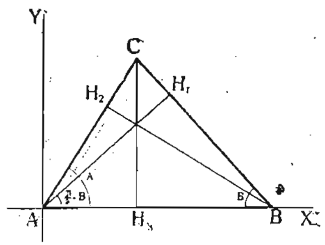
или

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Последњу једнакост лако је добити непосредно из једначине (32), или као резултат елиминације коефицијената једначине праве линије из три једнакости. Ове једнакости претстављају резултат замене координата сваке од три дате тачке у једначину праве која пролази кроз две друге од њих.

43. Висине троугла секу се у једној тачки. — Узмимо за координатни почетак теме A датог троугла $\triangle ABC$ (сл. 30). Апсцисну осу OX нацртајмо тако да се поклопи са страном AB, а ординатну осу OY нормално на AB. Означимо координате темена B са $(x_2, 0)$, а координате темена C са (x_3, y_3). Једначина висине CH_3, као праве паралелне Y-оси, изражава се

$$x = x_3.$$



Сл. 30

Означимо са A и B углове посматраног троугла код истоимених темена A и B. Једначина висине AH_1, као праве која пролази кроз координатни почетак и заклапа са AX осом угао $\frac{\pi}{2} - B$, јер је $\triangle ABH_1$ правоугли троугао, има облик

$$y = x \cot g B.$$

Најзад, трећа висина, BH_2, пролази кроз дату тачку $B(x_2, 0)$ и нормална је на страни AC, те заклапа са осом OX угао A. Према томе једначина висине BH_2 гласи

$$y = (x_2 - x)\, cotg\, A.$$

Из правоуглих троуглова, ΔAH_3C и ΔBH_3C, јасно је да је

$$cotg\, A = \frac{x_3}{y_3}, \quad cotg\, B = \frac{x_2 - x_3}{y_3}.$$

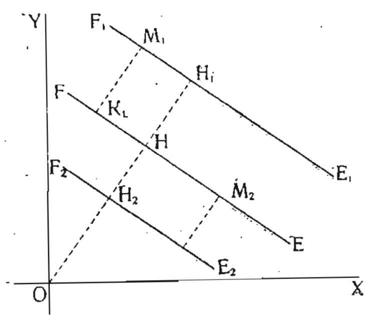
Према томе једначине двеју последњих висина добијају облик

$$y = \frac{(x_2 - x_3)\, x}{y_3}, \qquad y = \frac{x_3\,(x_2 - x_3)}{y_2}.$$

Разлика написаних једначина даје једначину висине CH_2. То значи да њена једначина претставља алгебарску последицу једначина других двеју висина. Јасно је да се све три висине секу у једној тачки.

44. Растојање тачке од праве линије. — Узмимо у правоуглом координатном систему XOY (сл. 31) једначину дате праве EF у нормалном облику

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0. \tag{33}$$



Сл. 31

Дата је тачка $M_1(x_1, y_1)$ и треба израчунати њено растојање $h_1 = K_1M_1$ од праве EF. Повуцимо кроз тачку M_1 праву E_1F_1 паралелно датој правој (33). Њена једначина разликује се од једначине (33) само сталним чланом, који ћемо означити са p_1:

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p_1 = 0, \tag{34}$$

где p_1 означава растојање OH_1 праве E_1F_1 од координатног почетка O. Права E_1F_1 пролази кроз тачку M_1. Стога њене координате задовољавају једначину (34), те тако добијамо идентичност

$$x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p_1 = 0,$$

која и одређује величину p_1 помоћу обрасца

$$p_1 = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta.$$

Очевидно је да се тражено растојање изражава на следећи начин

$$h_1 = OH_1 - OH = p_1 - p,$$

или, на основу нађене вредности p_1

$$h_1 = x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p.$$

Краткоће ради означићемо са l леву страну једначине праве (33), а са l_1, односно l_2 изразе које добијамо из l, када у тој једначини заменимо текуће

координате вредностима одговарајућих координата x_1, y_1 и x_2, y_2 датих тачака, M_1 и M_2. Тада имамо

$$h_1 = l_1.$$

Претпоставимо да тачка M_2 и координатни почетак леже с исте стране дате праве EF. Растојање $h_2 = M_2K_2$, тачке M_2 од праве EF, биће

$$h_2 = OH - OH_2 = p - p_2,$$

где је p_2 растојање OH_2 од координатног почетка до праве E_2F_2 која пролази кроз тачку M_2, паралелно правој EF. Како тачка $M_2(x_2, y_2)$ лежи на правој E_2F_2, то је, као и раније,

$$p_2 = x_2\cos\beta + y_2\sin\beta,$$

те је тражено растојање h_2, с обзиром на горе уведене ознаке,

$$h_2 = -l_2.$$

Вредности h_1 и h_2 по природи задатка су позитивне величине. Према томе оба добијена резултата можемо овако формулисати: *растојање h ма које тачке $M(x_0, y_0)$ од праве линије (33) изражава се обрасцем*

$$h = \pm l_0, \tag{35}$$

где се знак + или — узима према томе да ли се тачка M и координатни почетак налазе са разних страна или са исте стране дате праве. Израз l_0 претставља резултат замене на левој страни дате једначине текућих координата, ***x*** *и* ***y****, координатама дате тачке; растојање* ***h*** *је увек позитиван број.* Изведено правило важи без обзира на квадрант у коме се налазе дате тачке и права.

Претпоставимо да је права дата једначином у општем облику

$$Ax + By + C = 0. \tag{36}$$

Ако означимо са μ множитељ којим се горња једначина доводи на нормалан облик (в. стр. 55, n⁰ 30), растојање h тачке $M(x_0, y_0)$ од дате праве (36) претставља се изразом

$$h = \pm \mu L_0, \tag{37}$$

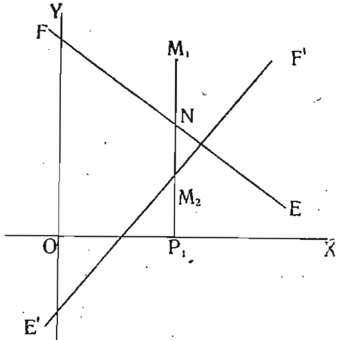
где се знак + или — одређује према горњем правилу, а L_0 означава резултат смењивања координата дате тачке M_0 на левој страни једначине праве линије (36).

45. Аналитички приказ узајамног положаја тачке и праве. — Као што је у претходном параграфу показано, растојање тачке од праве зависи од њихова узајамног положаја. Права линија EF (сл. 32), која није паралелна ординатној оси, дели раван на две области: *једну* — позитивних ордината, у којој лежи позитивни део ординатне осе, и *другу* — негативних ордината, где лежи негативни део ординатне осе.

На слици, координатни почетак O лежи у области негативних ордината у односу на праву EF, али се у односу на праву E′F′ координатни почетак O налази у области позитивних ордината.

Узмимо две тачке, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, које одговарају истој апсциси $OP_1 = x_1$ и означимо са y' ординату тачке N, на правој EF, тако да одговара апсциси x_1.

Нека се координатни почетак O налази у области негативних ордината и нека се тачке M_1 и O налазе са разних страна посматране праве EF. Тада је очигледно



Сл. 32

$$P_1M_1 > P_1N, \quad \text{или} \quad y_1 > y',$$

па ма у коме квадранту се налазила тачка M_1.

Последња неједнакост претставља очевидно не само потребан, него и довољан услов за посматрани узајамни положај тачке M_1 и почетка O, у односу на праву EF.

На сличан начин неједнакост

$$P_1M_2 < P_1N, \quad \text{или} \quad y_2 < y'$$

претставља, у нашем случају, потребан и довољан услов, да би се тачка M_2 и координатни почетак O налазили са исте стране праве EF. Али ако бисмо узели другу праву, E'F', онда написане неједнакости одговарају обрнутим условима.

Нека је права EF одређена једначином (36). Ако та права није паралелна оси OY, то је $B \gtrless 0$, те из једначине (36) добијамо

$$y' = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}.$$

Стога пређашње неједнакости гласе:

$$y_1 > -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}, \qquad y_2 < -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}.$$

Ако је $B > 0$, онда последње неједнакости постају

$$Ax_1 + By_1 + C > 0, \qquad Ax_1 + By_2 + C < 0.$$

Изведене неједначине мењале би знаке у случају када би се односиле на праву E'F'.

Добијени резултати формулишу се овако:

Ако се координатни почетак налази у области негативних ордината у односу на дату праву (36), тачка $M(x_0, y_0)$ и координатни почетак O леже са разних страна праве (36) — ако бројеви

$$B \text{ и } L_0 \tag{38}$$

имају исте знаке; а ако су бројеви (38) супротног знака, тачка M и координатни почетак леже са исте стране праве.

Ако се координатни почетак O налази у области позитивних ордината, исти знаци бројева (38) показују да се тачке M и O налазе са исте

стране дате праве; док различитим знацима бројева (38) одговара положај тачака M и O са разних страна дате праве.

Место да посматрамо области позитивних и негативних ордината у односу на дату праву, можемо исто тако посматрати поделу равни датом правом на области позитивних и негативних апсциса. Ако је посматрана права паралелна са осом Y, онда је у једначини (36) коефицијент $B = 0$. Нека читалац докаже да у томе случају бројеви (38) морају бити замењени са

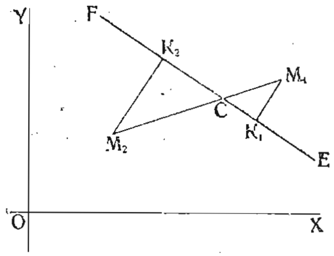
$$A \text{ и } Ax_0 + C.$$

Наведени закључци су неопходни ради тога да би се могло решити питање о узајамном положају тачака M и O у односу на дату праву, независно од њихове графичке конструкције.

46. Однос у коме права дели растојање између две тачке. — Нека је у правоуглом координатном систему XOY (сл. 33) права EF дата једначином

$$Ax + By + C = 0 \tag{39}$$

и нека су дате две тачке $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Тражи се однос у коме права EF дели растојање између датих тачака M_1 и M_2. Спојимо ове тачке правом линијом и спустимо из њих нормале M_1K_1 и M_2K_2 на дату праву EF. Из сличности троуглова $\triangle CK_1M_1$ и $\triangle CK_2M_2$ добијамо тражени однос $\frac{m}{n}$, у коме права EF дели отсечак M_1M_2, наиме



Сл. 33

$$\frac{m}{n} = \frac{M_2C}{CM_1} = \frac{h_2}{h_1},$$

где смо са h_2 и h_1 означили дужине нормала M_2K_2 и M_1K_1 које су истог знака.

Ако дата права дели растојање M_1M_2 унутрашњом поделом, као на слици, онда растојања h_1 и h_2 имају вредности

$$h_1 = +\mu L_1, \quad h_2 = -\mu L_2,$$

где смо са μ означили множитељ којим се једначина дате праве (39) доводи на нормалан облик, а L_1 и L_2, према горе уведеним ознакама (nº 44, стр. 65), претстављају резултат замене координата тачака M_1 и M_2 на левој страни једначине (39).

Према томе тражени однос се изражава помоћу обрасца

$$\frac{m}{n} = -\frac{L_2}{L_1},$$

који у нашем случају претставља позитиван број, пошто су, према горе реченом (види стр. 65), бројитељ и именитељ различитог знака.

Ако дата права дели растојање између датих тачака спољашњом поделом, онда се тражени однос изражава истим обрасцем, али претставља негативну величину. Уствари, у последњем случају бројитељ и именитељ имају исти знак, али је њихов однос негативан број, јер се оба растојања мере у супротним смеровима.

Добијени резултат овако ћемо формулисати:

Однос у коме даша йрава дели расшојање између две дашe шачке једнак је негашивном односу леве сшране дашe једначине за вредносши координаша дашиx шачака; йри унушрашњој деоби шражени однос је йозишиван, а йри сйољашњој негашиван.

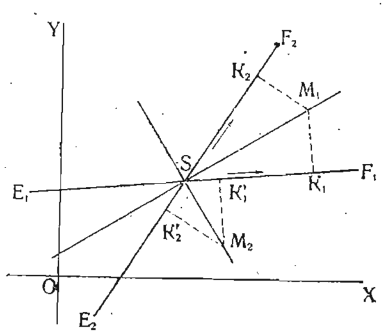
47. Једначина симетрале угла. — Узмимо у правоуглом координатном систему XOY (сл. 34) једначине двеју правих линија, E_1F_1 и E_2F_2, у нормалном облику

$$\left.\begin{aligned} x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1 - p_1 &= 0, \\ x\cos\beta_2 + y\sin\beta_2 - p_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Означићемо им леве стране скраћеним начином, симболички са по једним словом, на пр., l и m

$$l \equiv x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1 - p_1, \qquad m \equiv x\cos\beta_2 + y\sin\beta_2 - p_2.$$

Симетрала угла $\sphericalangle F_1SF_2$ који образују дате праве претставља геометриско место тачака $M_1(x, y)$ подједнако удаљених од датих правих линија, у односу на које су нормале, M_1K_1 и M_1K_2, спуштене из сваке тачке симетрале на дате праве, једнаке.



Сл. 34

Да бисмо израчунали њихове дужине, h_1 и h_2, приметимо следеће. Дате праве E_1F_1 и E_2F_2 распоређене су на слици тако, да координатни почетак O лежи у углу кроз који пролази посматрана симетрала. Стога се свака њена тачка, M_1, и координатни почетак O налазе са разних страна сваке од датих правих (40). Због тога образац (35) даје ове изразе за дужине нормала, h_1 и h_2,

$$h_1 = l, \quad h_2 = m,$$

где x и y означавају, у нашем случају, координате тачке M_1 тражене симетрале. Како је према дефиницији симетрале $h_1 = h_2$, то ће тражена једначина бити

$$l = m, \quad \text{или} \quad l - m = 0. \qquad (41)$$

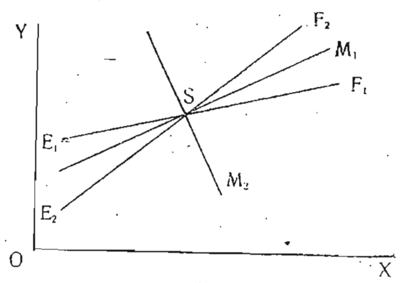
Повуцимо сада другу симетралу, допунског угла $\sphericalangle F_1SE_2$. Растојања $h'_1 = M_2K'_1$ и $h'_2 = M_2K'_2$, ма које тачке M_2 друге симетрале од кракова последњег угла такође су једнака међу собом. Али пошто координатни почетак O лежи изван угла $\sphericalangle E_2SF_1$, то се тачке M_2 и O налазе са исте стране прве праве, E_1F_1, а са разних страна друге праве, E_2F_2. Стога је

$$h'_1 = -l, \quad h'_2 = m,$$

те тражена једначина друге симетрале гласи

$$-l = m, \quad \text{или} \quad l + m = 0. \qquad (42)$$

Претпоставимо сад да су дате праве (40) распоређене тако, да координатни почетак O (в. сл. 35) не лежи у углу $\sphericalangle F_1SF_2$, који заклапају дате праве, већ у његову комплементном углу $\sphericalangle E_2SF_1$. У таквом случају, на основу претходних разматрања, симетрала унутрашњег угла између датих правих (40) претставља се једначином (42), а симетрала суплементног угла између датих правих једначином (41).



Сл. 35

Најзад узмимо једначине датих правих у општем облику

$$L \equiv A_1x + B_2y + C_1 = 0,$$

$$M \equiv A_2x + B_2y + C_1 = 0.$$

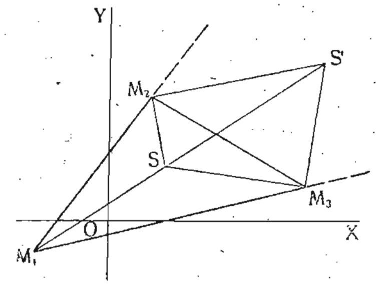
Нека су μ_1 и μ_2 одговарајући множитељи којима се последње једначине доводе на нормални облик. Тада се једначине симетрала углова које заклапају дате праве изражавају овако:

$$\mu_1 L \pm \mu_2 M = 0, \qquad (43)$$

при чему знак пред другим чланом зависи од положаја координатног почетка у односу према углу.

48. Симетрале углова троугла секу се у једној тачки. — Нека је дат ма какав троугао $\Delta\, M_1M_2M_3$ (сл. 36). За почетак правоуглог координатног система узмимо ма коју тачку O у датоме троуглу. Претставимо једначине страна датога троугла у нормалном облику помоћу скраћених ознака

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$



Сл. 36

при чему те *сшране леже ресйекшивно* насупрот троугловим теменима M_1, M_2 и M_3. Координатни почетак је у свакоме од унутрашњих углова посматраног троугла. Према томе једначине симетрала његових унутрашњих углова гласе

$$n - m = 0, \quad m - l = 0, \quad l - n = 0. \qquad (44)$$

Збир прве две једначине даје последњу једначину са супротним знаком. То значи да трећа једначина (44) претставља алгебарску последицу првих двеју једначина, а отуда следи (види стр. 60, n° 37) да се све три симетрале унутрашњих углова троугла секу у једној тачки S.

Узмимо сад симетралу M_1S унутрашњег угла са теменом M_1 датога троугла $\Delta\, M_1M_2M_3$; она је претстављена једначином

$$n - m = 0.$$

Једначине симетрала спољашњих углова троугла, код темена M_2 и M_3, имају облик

$$l + n = 0, \quad m + l = 0,$$

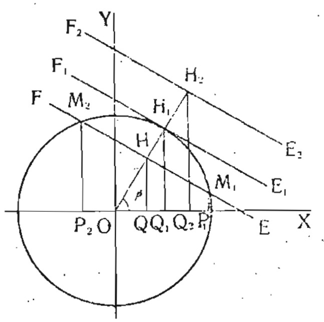
пошто координатни почетак лежи изван посматраних углова. Разлика последњих двеју једначина даје прву једначину. Према томе симетрала унутрашњег угла троугла сече се у једној тачки S' са симетралама друга два спољашња угла истога троугла.

Ако се стране троугла претставе једначинама општега облика, онда се докази теореме изводе на исти начин, непосредним посматрањем једначина симетрала у облику (43).

IV. Значење имагинарних величина у Аналитичкој геометрији

49. Имагинарне тачке. — Када се изналажење координата ма каквих тачака своди на решавање линеарних једначина са стварним коефицијентима, онда тражене координате добијају стварне вредности. Овај закључак не важи за случај када се тражене координате одређују помоћу једначина вишег степена од првог.

Одредимо, на пример, тачку пресека праве линије са кругом. Нека се координатни почетак правоуглог система XOY (сл. 37) поклапа са средиштем круга. Означимо ли његов полупречник са a, добијамо једначину круга (види стр. 34)



Сл. 37

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{45}$$

Узмимо једначину праве у нормалном облику

$$x \cos\beta + y \sin\beta - p = 0, \tag{46}$$

где β означава угао који са осом OX заклапа нормала спуштена из координатног почетка O на дату праву (46), а p растојање праве од координатног почетка. Ако из једначине (45) елиминишемо промењљиву x, одређену једначином (46),

$$x = \frac{p - y \sin\beta}{\cos\beta},$$

добијамо једначину

$$y^2 - 2py \sin\beta + p^2 - a^2 \cos^2\beta = 0.$$

Према томе, за координате тачака (x_1, y_1') и (x_2, y_2), пресека круга (45) са правом (46), налазимо:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p\cos\beta - \sqrt{a^2 - p^2}\sin\beta, & y_1 &= p\sin\beta + \sqrt{a^2 - p^2}\cos\beta, \\ x_2 &= p\cos\beta + \sqrt{a^2 - p^2}\sin\beta, & y_2 &= p\sin\beta - \sqrt{a^2 - p^2}\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Добијени изрази имају стварне вредности ако је

$$a^2 \quad p^2 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad p \leqslant a.$$

Ако је $p < a$, онда изрази (47) одређују две стварне тачке, M_1 и M_2, пресека круга (45) са правом (46). Ако је $p = a$, изрази (47) одређују једну тачку и права E_1F_1 је тада тангента круга (45), те се обе тачке њена пресека поклапају у тачки H_1, одређеној координатама

$$x_1 = p \cos\beta, \quad y_1 = p \sin\beta.$$

Најзад, ако је $p > a$, изрази (47) дају за координате тражених тачака пресека имагинарне вредности.

Добијени аналитички резултат има просто геометриско тумачење. У ствари услов $p > a$ показује, да је растојање сечице E_2F_2 (46) од средишта O круга (45) веће од његова полупречника, тј. права и круг се не могу сећи. Овај услов се аналитички изражава на тај начин што координате тачака пресека добијају имагинарне вредности.

50. Уопштавање геометриских појмова. — Полазећи од основне поставке Аналитичке геометрије, наиме да свака два реална броја одређују тачку у равни (види стр. 10) — можемо споразумно сматрати да и два комплексна броја такође одређују тачку, која се зове имагинарна тачка. Овај појам састоји се у условној, чисто формалној дефиницији, која се заснива искључиво на аналогији са дефиницијом реалне тачке. Овако уведена условна аналитичка уопштења дају могућност да се једнообразно протумаче добијени резултати. Осим тога, увођење у израчунавања комплексних израза претставља једну од метода Аналитичке геометрије и математичког уопштавања њених резултата.

Комплексни бројеви претстављају уопштење реалних бројева и сви резултати добијени аналитичким путем, а који се односе на комплексне координате, важе у потпуности и за реалне координате. Ти резултати доводе и до одговарајућих геометриских ставова, уколико извршене операције имају одговарајуће геометриско тумачење.

Лако је, на пр., показати да се на свакој реалној правој налази не само неограничен број реалних већ и имагинарних тачака. Заиста, ако узмемо реалну праву, дату једначином општег облика

$$Ax + By + C = 0, \tag{48}$$

и ако промењљивима x и y у последњој једначини дамо комплексне вредности

$$x = z + iu, \quad y = v + iw, \tag{49}$$

где су z, u, v, w реалне величине, а $i = \sqrt{-1}$, добијамо по свођењу

$$(Az + Bv + C) + i(Au + Bw) = 0.$$

Да би последња једначина била могућа, мора посебно бити једнак нули и њен реални део, и коефицијенти уз i, на левој страни једначине, тј.

$$Az + Bv + C = 0, \quad Au + Bw = 0. \tag{50}$$

Систем ових двеју једначина, линеарних у односу на четири промењљиве z, u, v, w, одређује за њих неограничен број вредности. Према томе постоји неограничен број имагинарних тачака (49) које задовољавају дату једначину праве (48), што геометриски значи да *свака реална права линија пролази кроз неограничени број како реалних, тако и имагинарних тачака.*

Пошто се уводе у Аналитичку геометрију имагинарне тачке, то је потребно проширити на њих све појмове који се односе на реалне тачке.

Тако се пре свега намеће питање: шта треба подразумевати под растојањем између две имагинарне тачке, и под углом који заклапа координатна оса са потегом који спаја те две тачке.

Означимо респективно са x_1, y_1 и x_2, y_2 координате двеју тачака M_1 и M_2, које су реалне или имагинарне. Означимо са d њихово растојање M_1M_2, а са α угао који оно заклапа са апсцисном осом. Споразумимо се да величине d и α дефинишемо обрасцима

$$x_1 - x_2 = d\cos\alpha, \qquad y_1 - y_2 = d\sin\alpha.$$

Отуда се добијају изрази

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad tg\,\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

који имају исто тумачење како за реалне, тако и за имагинарне координате које у њих улазе.

Међутим, треба истаћи разилажење у резултатима за реалне и имагинарне тачке, када је растојање између њих једнако нули, тј. када је

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0.$$

Ако су тачке реалне, онда је једини резултат који се отуда добија

$$x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2,$$

тј. *реалне тачке се поклапају, ако је растојање њихово једнако нули.* Међутим, ако су тачке имагинарне, горња једнакост даје

$$y_1 - y_2 = \pm\, i\,(x_1 - x_2), \quad \text{или} \quad tg\,\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \pm\, i,$$

тј. *коефицијент правца потега који спаја имагинарне тачке, чије је међусобно растојање једнако нули, претставља имагинарну величину, при чему се имагинарне тачке не поклапају.*

Приликом проширивања геометриских закључака на имагинарне тачке полазимо од аналитичких образаца који претстављају посматране односе, и накнадно уводимо претпоставку да су координате тачака комплексни бројеви. На тај начин проширујемо обрасце за координате тачке која дели растојање између две дате тачке у датом односу, затим изразе за хармониске и анхармониске односе (види стр. 25, n° 9) и на случај комплексних координата тачака.

Понекад се у резултатима са комплесним изразима добијају реални изрази, који имају одређени геометриски смисао. Израчунајмо, на пр., средину растојања између тачака пресека праве са кругом (сл. 37) одређених координатама (47). Уврстимо, тога ради, у (5) главе I (види стр. 24) за $m = n$ изразе за последње координате, без обзира на то да ли оне претстављају реалне или имагинарне изразе. За координате x и y тражене тачке налазимо

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = p\cos\beta, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = p\sin\beta. \tag{51}$$

Добијени обрасци показују да је тражена тачка реална, независно од тога да ли су дате тачке (47) реалне или имагинарне. Ако је $p < a$, обрасци (51) одређују на правој EF тачку H са координатама OQ и QH. Ако је $p = a$, обрасци (51) одређују тачку H_1 додира праве E_1F_1 са кругом (45), чије су координате OQ_1 и Q_1H_1. Најзад, ако је $p > a$, координате (47) су комплексне и тада изрази (51) одређују реалну тачку H_2 са координатама OQ_2 и Q_2H_2. Тачка H_2 лежи на правој E_2F_2, тачније на пресеку те праве са нормалом спуштеном на њу из координатног почетка. Реална тачка H_2 назива се средином две имагинарне тачке које су одређене, у нашем случају, изразима (47).

51. Имагинарне праве и криве линије. — Горе изложена уопштавања геометриских појмова проширују се такође и на дефиницију имагинарних линија. Ако једначина са текућим координатама не одређује геометриско место тачака са реалним координатама, каже се да та једначина одређује и м а г и н а р н у к р и в у л и н и ј у. При томе се појмови о деоби кривих на алгебарске и трансцендентне, о реду алгебарских кривих и, најзад, о самом облику једначине кривих линија, преносе у потпуности са стварних кривих на имагинарне.

Приликом посматрања имагинарних тачака, чије је међусобно растојање једнако нули (види стр. 72), извели смо закључак да дуж која их спаја има један од два угловна коефицијента $\pm\, i$. Имагинарне праве линије које имају такве угловне коефицијенте зову се и з о т р о п н е.

Према горе реченом ове линије се одликују специјалном особином, да је растојање између ма које две тачке сваке изотропне праве једнако нули. Стога се оне називају и п р а в а м а н у л т е д у ж и н е.

Следеће једначине претстављају примере имагинарних кривих линија. Међутим те једначине не садрже комплексне коефицијенте

$$x^2 + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Прва једначина одређује скуп двеју имагинарних изотропних правих линија

$$x + iy = 0, \quad x - iy = 0. \tag{52}$$

Друга једначина одређује имагинарни круг чији је полупречник једнак i.

Горе је показано (види стр. 71) да реалне праве линије пролазе кроз имагинарне тачке. Лако се можемо уверити и обратно, тј. да и имагинарна права пролази кроз реалну тачку.

Узмимо, на пр., општи облик једначине имагинарне праве линије. По аналогији са реалном правом, имагинарна права се одређује једначином која је линеарна по текућим координатама, а садржи комплексне коефицијенте

$$(A + iA_1)\,x + (B + iB_1)\,y + C + iC_1 = 0,$$

или

$$P + iQ = 0, \tag{53}$$

где је

$$P \equiv Ax + By + C, \qquad Q \equiv A_1x + B_1y + C_1.$$

Лако је увидети да једине реалне координате које задовољавају једначину (53) морају претворити у нулу P и Q, тј. за њих важе једнакости

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0. \tag{54}$$

Као што је добро познато (види стр. 59, n⁰ 36), последње две једначине одређују или једну тачку, или су им леве стране пропорционалне.

Према томе, једначина (53) претставља имагинарну праву која пролази кроз једну реалну тачку, одређену једначинама (54), коначну или бескрајно удаљену, што зависи од тога, да ли је детерминанта

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

различита од нуле или једнака нули. Ако се обе праве (54) поклапају, тј. ако је

$$Q = kP,$$

где k означава стални коефицијент пропорционалности, једначина (53) одређује реалну праву, претстављену сваком од једначина (54).

52. Коњуговани елементи. — За две имагинарне тачке каже се да су коњуговане (спрегнуте), ако су њихове координате (x_1, y_1), (x_2, y_2) коњуговано-комплексни бројеви

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= z + iu; & y_1 &= v + iw \\ x_2 &= z - iu, & y_2 &= v - iw \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Тако, на пр., обе тачке пресека круга (45) са правом (46), чије су координате изражене обрасцима (47), у случају када је $p < a$ постају коњуговано-имагинарне тачке. Као што је било показано види стр. 72), њихова средина претставља реалну тачку. Лако је увидети да, уопште, *средина ма које две коњуговано-имагинарне тачке претставља увек реалну тачку.*

Заиста, обрасци (55) дају за координате x, y, средине тих тачака, изразе који претстављају реалне величине

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = z, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = v.$$

Затим, није тешко уверити се да реална права линија која пролази ма кроз коју имагинарну тачку, пролази и кроз са њом коњуговану имагинарну тачку.

Заиста, ако ставимо

$$x = z - iu, \qquad y = v - iw \tag{56}$$

у једначину реалне праве (48), добија се

$$(Az + Bv + C) - i(Au + Bw) = 0.$$

Последња једначина је идентички задовољена на основу једначина (50). Према томе реална права (48) пролази како кроз имагинарну тачку (49), тако и кроз другу њој коњуговану имагинарну тачку (56).

Исто тако се каже и за две имагинарне криве линије да су коњуговане, ако су њихове једначине претстављене помоћу два коњуговано-комплексна израза:

$$P + iQ = 0, \quad P - iQ = 0.$$

Две имагинарне изотропне праве (52) такође су коњуговане.

Лако је доказати, да *две коњуговане имагинарне праве линије пролазе увек кроз једну реалну тачку*, или, како се то обично каже, *да се секу у реалној тачки.*

На пр., очевидно је да се имагинарне изотропне праве (52) секу у стварној тачки — у координатном почетку.

Напишимо једначине две коњуговано-имагинарне праве у општем облику (53) и њој коњуговану једначину

$$P - iQ = 0.$$

Обе ове праве секу се у стварној тачки, чије су координате одређене једначинама (54).

Сва даља излагања посвећена су израчунавању реалних геометриских слика. Међутим када та израчунавања доведу до имагинарних израза, онда их треба протумачити на основу горе изложених разматрања.

---

53. Примери и задаци.

1. Поставити једначину праве линије која отсеца на ординатној оси отсечак — 2, и образује са апсцисном осом угао од 45⁰.

2. Поставити једначину праве која отсеца на апсцисној и ординатној оси отсечке — 3, односно 2.

3. Одредити угловни коефицијент и ординату у почетку правих

$$5x - 7y + 14 = 0 \qquad 3x + 8 = 0, \qquad 2y - 7 = 0.$$

4. Наћи величину отсечака на координатним осама и угловне коефицијенте правих

$$2x + 7y + 5 = 0, \quad 5x - 8y + 9 = 0, \quad 3x + 7y = 21,$$
$$56y + 35x = 63, \quad 5x - 8y - 2 = 0, \quad -5x + 2y = 9.$$

5. Довести на нормални облик једначине правих

$$x - y = 0, \quad 2x - y = 0, \quad y - \frac{3}{4}x + 1 = 0,$$
$$5x + 12y - 1 = 0, \quad 24x - 7y - 11 = 0, \quad 3y - 2x + 1 = 0.$$

6. Наћи растојање правих од координатног почетка

$$12x - 5y + 4 = 0, \quad 63x - 16y + 5 = 0, \quad 7x + 24y = 1.$$

7. Конструисати праве

$$y = 2x, \quad y = 3x + 5, \quad 3y + 11x - 2 = 0,$$

8. Наћи тачку пресека правих

$$9x + 11y = 5, \qquad 8x + 10 = 4,$$
$$6x - 7y + 5 = 0, \quad 56y = 40 + 48x,$$
$$2x + y = 14, \qquad y = x + 1.$$

9. Поставити једначине две праве: једне што пролази кроз дату тачку $(-2,5)$ паралелно x оси, а друге што пролази кроз ту исту тачку, паралелно симетрали нормалног угла.

10. Поставити једначину праве која пролази кроз две тачке: $(1, -1)$ и $(-2,2)$.

11. Поставити једначину праве која пролази кроз тачку $(4, -1)$ и тачку пресека правих $y = 2x$, $y = x - 5$.

12. Кроз тачку пресека две праве, $\frac{x}{3} + y = 1$ и $\frac{x}{2} - y = 1$, повући праву која ће бити нормална на другој од ових.

13. Поставити једначину праве која пролази кроз средину растојања између две тачке $(1, -2)$ и $(3, -4)$ а нормална је на правој која их спаја.

14. Наћи темена и површину троугла чије су стране дате једначинама

$$y = -x - 3, \qquad y = -2x - 6, \qquad 3y = 2x - 14.$$

15. Поставити једначине страна троуглова наведених у примерима 4, 8, 15 у n° 25 (стр. 48—49).

16. Поставити једначине страна троугла, узимајући координате његових темена у општем облику, и израчунати његову површину. Исто тако поставити једначину његових симетрала, тежишних линија и висина, и показати да се по три одговарајуће праве секу у једној тачки.

17. Темена троугла леже у тачкама $(-2, -5)$ $(3, -4)$ $(-1, 2)$. Наћи угловне коефицијенте страна тога троугла и једначине правих линија које пролазе кроз темена троугла, паралелно његовим наспрамним странама.

18. Поставити једначине правих линија које пролазе кроз координатни почетак, а нормалне су на медијанама троугла из претходног задатка.

19. Ако две дате тачке леже на датој правој, треба доказати да се тачке које деле растојање међу датим тачкама у датоме односу налазе такође на датој правој. Доказати ово и геометриским и рачунским путем.

20. Наћи однос у коме дата тачка, која лежи на датој правој, дели њен отсечак који се налази између координатних оса.

21. Дата су темена четвороугла $(3,4)$ $(2,0)$ $(-2, -1)$ $(-2,2)$; наћи тачку пресека његових дијагонала.

22. Наћи растојање тачке $(2,3)$ од праве $4y = 3x + 12$. Наћи растојања тачака $(0,1)$ $(0,0)$ $(1,0)$ $(1,1)$ од праве $15y = -8x - 30$.

23. Под којим условом се тачка (a, b) налази на истом отстојању од две праве

$$Ax + By + C = 0, \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0.$$

24. Наћи геометриско место тачака које леже на отстојању 4 од дате праве $4x - 3y + 5 = 0$.

25. Испитати да ли се дате три праве секу у једној тачки

1) $2x + 3y - 48 = 0, \quad y = 3x + 5, \quad y = -2x - 4;$

2) $x - 2y = 0, \quad 3x + 5y = 0, \quad 2x + 7y + 3 = 0;$

3) $3x - 5y - 7 = 0, \quad 7x + 2y - 4 = 0, \quad 10x - 3y - 11 = 0.$

26. Поставити једначине правих које пролазе кроз дату тачку $(3, -5)$ и заклапају углове од 45°, 60°, 90° са датом правом $7x + 2y - 4 = 0$.

27. Одредити величине углова у троугловима посматраним у примеру 15.

28. Израчунати величину углова и поставити једначине симетрала углова које заклапају праве $3y + 4x = 2$ и $4y = 3x - 2$; $4x - 3y - 2 = 0$ и $3y + 12x + 3 = 0$, а тако исто и праве наведене у примеру 8.

29. Одредити узајамни положај две праве које пролазе кроз координатни почетак, а чији угловни коефицијенти задовољавају један од услова $a_1 = -a$ или $aa_1 = +1$.

30. Поставити једначине симетрала углова између две праве, чије су једначине дате у сегментском облику или са угловним коефицијентима.

31. Дате су две тачке; поставити једначину праве линије која пролази на датим отстојањима од датих тачака.

32. Поставити једначину праве линије која пролази кроз дату тачку и образује са координатним осама троугао дате површине.

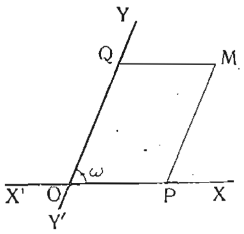
ГЛАВА ТРЕЋА

РАЗНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ. ЊИХОВА ПРИМЕНА И ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

I. Косоугли координатни систем

54. Косоугле координате. — Место правоуглог координатног система, можемо увести систем косоуглих оса, OX и OY (сл. 38), које заклапају сталан, оштар или туп, угао ω. Тај угао увек ћемо рачунати од осе OX ка оси OY, а при томе може имати ма какву сталну вредност између 0 и 2π. Осе OX и OY зову се координатне осе и образују косоугли координатни систем са почетком O, а ω координатни угао. Правце OX и OY, од координатног почетка на десно и на више, сматраћемо за позитивне, а супротне правце, OX' и OY', за негативне.

Повуцимо ма из које тачке M у равни отсечке QM и PM, паралелно координатним осама. Два броја, x и y, који показују колико јединица дужине имају отсечци PM и QM, када се за јединицу дужине узме ма који одређени отсечак, називају се косоуглим координатама тачке M, њеном апсцисом, одн. ординатом. Према томе, свакој тачки у равни, у датом косоуглом координатном систему, одговарају два броја, x и y. Обратно, лако је уверити се да два дата броја, x и y, одређују увек неку тачку M у равни. Заиста, одмеримо ради тога на координатним осама отсечке OP и OQ, који су одређени датим бројевима x и y; повуцимо затим из тачака P и Q две праве линије паралелно координатним осама. Те две праве својим пресеком одређују тачку M. Према томе да ли су бројеви x и y позитивног или негативног знака, тачка M мора лежати у једној од четири области на које деле раван координатне осе, X'X и Y'Y, тј. $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle X'OY$, $\sphericalangle X'OY'$, $\sphericalangle XOY'$.



Сл. 38

Положај тачке M у свакој од ове четири области одређује се потпуно на исти начин као и у Декартову правоуглом координатном систему (види стр. 21, n⁰ 6).

55. Решавање задатака у косоуглом координатном систему. — При решавању задатка у косоуглом координатном систему, ако решење задатка зависи од решења троугла чији је један од углова координатни угао ω, тражени резултат много је компликованији него у правоуглом

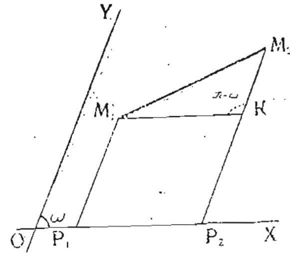
систему. Израчунајмо, на пр., растојање између две тачке $M_1 (x_1, y_1)$ и $M_2 (x_2, y_2)$ чије се координате односе на косоугли координатни систем XOY (сл. 39) са координатним углом ω.

Повуцимо апсцисе OP_1 и OP_2 и ординате P_1M_1 и P_2M_2 датих тачака, и праву линију M_1K паралелно апсцисној оси. Троугао $\triangle M_1KM_2$ даје за тражено растојање између две дате тачке M_1 и M_2 ову вредност

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2\,(x_2 - x_1)\,(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

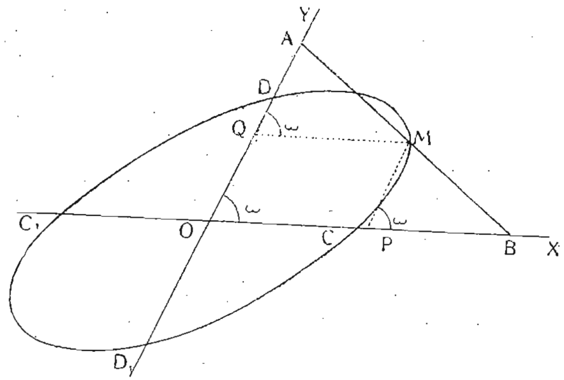
Ако је $\omega = \frac{\pi}{2}$, онда овај образац добија познати облик (в. (3) на стр. 22, n⁰ 7).

Читаоцу неће бити тешко да и сам докаже, да се површина ма каквог троугла у косоуглом координатном систему изражава обрасцем који се добија када се ранији израз (12) (види стр. 28, n⁰ 10), који се односи на правоугли координатни систем, помножи са $\sin\omega$, где је ω координатни угао.



Сл. 39

Међутим, далеко је од тога да увођење косоуглог координатног система увек компликује тражене резултате. Напротив, косоугле координате, као што ћемо ниже видети, понекад упрошћавају решење проблема, ако се један од углова посматране геометриске слике узме за координатни угао. При томе треба приметити, да сваки пут кад решење проблема зависи од сличних слика или од односа отсечака, добијени изрази су истоветни са изразима добијеним у правоуглом координатном систему. Тако, на пр., *координате тачке која дели растојање између две дате тачке у датом односу изражавају се истим обрасцима како у правоуглом тако и косоуглом систему.*



Сл. 40

56. Једначине кривих у косоуглом координатном систему. — Функционална зависност између две текуће координате одређује, очевидно, криву линију у косоуглом координатном систему. Обрнуто, свака геометриска слика претставља се једначином између координата њених тачака у датом косоуглом систему. Поставимо, на пр., једначину криве коју описује ма која тачка дужи задате дужине, чији крајеви клизе по крацима неког угла. Узмимо краке датог угла, рецимо ω, за осе косоуглог система XOY (сл. 40). Нека тачка M дели дату дуж AB на два дела: $AM = a$ и $BM = b$. Повуцимо координате тачке M:

$$QM = x, \quad PM = y.$$

Означимо са α допуну до 180^0 угла који образује дуж AB са осом OX. Из косоуглих троуглова $\triangle$ QMA и $\triangle$ PBM добијамо једнакости

$$\frac{x}{a}=\frac{\sin(\omega+\alpha)}{\sin\omega}, \qquad \frac{y}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\omega},$$

које претстављају параметарске једначине траженог геометриског места.

Кад решимо обе једначине по $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и елиминишемо из нађених једнакости угао α, добијамо једначину тражене криве

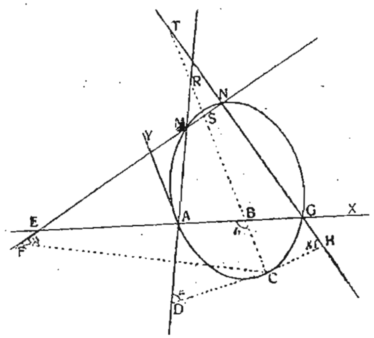
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2\,xy\cos\omega}{ab}=1,$$

која одређује елипсу у односу на њене дијаметре, C_1C и D_1D, који заклапају међу собом угао ω. Стављајући у добијену једначину прво $y=0$, затим $x=0$ добијамо да је $OC=C_1O=a$ и $OD=D_1O=b$. Ако је угао $\omega=\frac{\pi}{2}$, добијена једначина постаје једначина елипсе у односу на њене полу-осе (види једначине 21 и 22, стр. 34).

57. Папусов проблем за четири праве. — Кад је Декарт створио Аналитичку геометрију, нагласио је да више нема геометриског проблема који не би могао да реши. Да би оправдао наведено тврђење, Декарт је показао како се решава Папусов проблем којим су се чувени геометри Еуклид и Аполоније бавили још пре 2000 година, но без успеха. Декарт решава постављени проблем, прво, за случај кад су дате само четири праве. Означимо их са AB, AD, EF и GH (сл. 41). Тражи се геометриско место тачака C, које задовољавају услов да је израз

$$\frac{CB\cdot CF}{CD\cdot CH} \tag{1}$$

стална величина, при чему дужине CB, CF, CD и CH, повучене од тражене тачке до одговарајуће праве, заклапају са њом стални угао, који може да има за сваку праву различиту вредност.



Сл. 41

Претпоставимо да је C тачка траженог геометриског места и да отсечци правих CB, CD, CF и CH заклапају дате углове γ_1, γ_2, γ_3, односно γ_4 са одговарајућим датим правим линијама.

Уведимо коси координатни систем са координатним почетком у тачки A, при чему се оса X поклапа са правом AB, а оса Y чини са осом x угао γ_1. Означимо са x апсцису тачке B, тј. ставимо

$$AB=x,$$

а ординату тачке C са y, тј.

$$CB=y. \tag{2}$$

Продужимо отсечак CB до пресека са другом, трећом, односно четвртом датом правом линијом, у тачкама R, S, односно T.

Да бисмо израчунали дужину CD, узмимо троуглове $\triangle$ DCR и $\triangle$ ABR; код њих су сви углови познати, јер их заклапају дате праве или дати правци. Према томе добијамо

$$CD=\frac{\sin R}{\sin\gamma_2}CR, \quad CR=y+BR,$$

$$BR=\frac{\sin A}{\sin R}x, \quad CD=\alpha x+\beta y, \tag{3}$$

где су уведене ознаке

$$\alpha=\frac{\sin A}{\sin\gamma_2}, \quad \beta=\frac{\sin R}{\sin\gamma_2},$$

а A и R означавају углове, код темена A, односно R наведених троуглова.

На сличан начин израчунајмо дужину CF из посматрања троуглова $\triangle$ FCS и $\triangle$ EBS, чији су сви углови познати. Најзад, означимо са k растојање између тачака пресека E и A прве и треће дате праве

$$EA=k.$$

Из поменутих троуглова налазимо

$$CF=\frac{\sin S}{\sin\gamma_3}CS, \quad CS=y+BS,$$

$$BS=\frac{\sin E}{\sin S}(x+k), \quad CF=\gamma(x+k)+\delta y, \tag{4}$$

где су уведене ознаке

$$\gamma=\frac{\sin E}{\sin\gamma_3}, \quad \delta=\frac{\sin S}{\sin\gamma_3},$$

а S и E означавају углове код одговарајућих темена посматраних троуглова.

Израчунајмо, најзад, дужину CH, узимајући у обзир троуглове $\triangle$ HTC и $\triangle$GTB, чији су сви углови познати. Ако означимо са l растојање између тачака пресека A и G, прве и четврте праве, добијамо

$$CH=\frac{\sin T}{\sin\gamma_4}CT, \quad CT=y+BT,$$

$$BT=\frac{\sin G}{\sin T}(l-x), \quad CH=\eta(l-x)+\zeta, \tag{5}$$

где су уведене ознаке

$$\eta=\frac{\sin G}{\sin\gamma_4}, \quad \zeta=\frac{\sin T}{\sin\gamma_4}.$$

Уврстимо сад горе нађене вредности посматраних отсечака (2), (3), (4) и (5) у образац (1), стављајући да је његова вредност једнака јединици, што не утиче на тражени резултат. На овај начин добија се једначина траженог геометриског места

$$y\,[\gamma\,(x+k)+\delta\,y]=(\alpha\,x+\beta\,y)\,[\eta\,(l-x)+\zeta]. \qquad (6)$$

Добијена једначина је другог степена по текућим координатама, x и y, па према томе одређује криву другог реда.

Декарт, решавајући ову једначину по y, испитује различите врсте кривих другог реда, које се добијају под разним претпоставкама. Ово питање ћемо расправити доцније у најопштијем облику.

58. Примедбе на Декартово решење. — Поводом изложеног решења ставићемо две примедбе.

Прво, Декарт детаљно расправља разне могућности у погледу распореда тачака C, B и R, S, T. Према томе величине y, BR, BS, односно BT улазе у обрасце са позитивним или негативним знаком.

Друга примедба тиче се слика које се налазе код Декарта и у редовима његових коментатора, Франциса Шоотена и Клода Робиела, а такође и у другим издањима. Заиста, пошто једначина коју је Декарт извео нема независног члана, то је она задовољена кад су текуће координате једнаке нули, те претставља криву која пролази кроз координатни почетак A. Шта више морамо приметити да, пошто је избор координатних оса потпуно произвољан, наведена особина важи за тачку пресека сваког пара од четири Папусове праве линије. Према томе Декартове криве морају пролазити кроз четири тачке пресека четири дате праве, које се не налазе по две на истој правој линији. Међутим сваке четири праве дају слику — она се зове т е т р а г о н — која има шест темена. Слике код Декарта и у горе наведеним издањима не одговарају овом закључку.

С обзиром на ову примедбу може се то Декартово решење овако формулисати: *тражено геометриско место, које је Декарт пронашао, претставља криву описану око тетрагона, од четири дате праве.*

Према положају који дате праве заузимају и према њиховом реду, тетрагон може да буде *конкаван* или *конвексан*.

На нашој слици је дотични тетрагон AMNG конкаван, а описана крива претставља елипсу.

59. Папусов проблем ма за који број правих. — Дато је више од четири праве у равни; успоставимо између тих правих одређени ред почев од прве праве све до последње; означимо са α_i дужину отсечка праве, која је повучена свака под датим сталним углом, од исте тачке C до i-те праве; тражи се геометриско место тачака C које задовољавају услов да р а з м е р а

$$\frac{\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_5\,\ldots\,\alpha_{n-2}\,\alpha_n}{\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_6\,\ldots\,\alpha_{2n-2}\,\alpha_{2n}},$$

з а п а р а н б р о ј $2n$ д а т и х п р а в и х, а з а н е п а р а н њ и х о в б р о ј р а з м е р а

$$\frac{\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_5\,\ldots\,\alpha_{n-2}\,\alpha_n}{\alpha_2\,\alpha_4\,\alpha_6\,\ldots\,\alpha_{2n-2}\,A},$$

б у д е с т а л н а в е л и ч и н а, п р и ч е м у A о з н а ч а в а д а т у д у ж.

Решење овог општијег проблема добива се на исти начин као и у случају четири праве. Заиста, израчунавање сваке величине α_i лако се изводи у пређашњем координатном систему. Зато се узимају по два троугла, слично троугловима посматраним за израчунавања одговарајућих отсечака у случају четири дате праве. Пошто се свака величина α_i изражава линеарно помоћу текућих координата, то сада тражено геометриско место претставља алгебарску криву n реда. Ако узмемо две праве од посматраних правих, које ћемо упоредити одређеним редом за координатне осе x и y, то нађена крива пролази кроз координатни почетак, јер су величине α_1 и α_2 линеарне хомогене функције координата.

Међутим свака од тачака пресека две узастопне дате праве може бити узета за координатни почетак. Према томе нађено геометриско место претставља криву описану око многоугла који сачињавају дате праве.

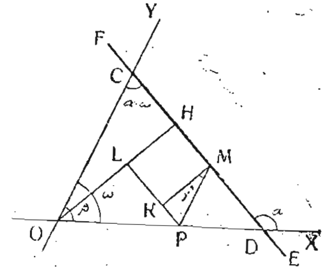
II. Различити облици једначина праве

60. Сегментска једначина праве. — Према раније реченом (види стр. 79, n° 55) сегментска једначина праве задржава свој облик и у косоуглом координатном систему. Заиста, рецимо да права EF (сл. 42) отсеца на осама к о с о у г л о г система XOY, отсечке

$$OD=m, \quad OC=n,$$

и узмимо ма коју тачку M (x, y) на датој правој EF тако да је:

$$OP=x, \quad PM=y.$$



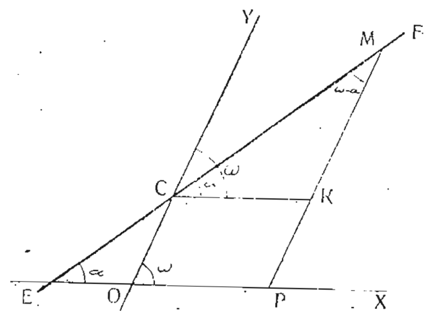
Сл. 42

Из сличности троуглова ΔODC и ΔPDM добијамо да је

$$\frac{PM}{OC}=\frac{PD}{OD}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{n}=\frac{m-x}{m}.$$

Према томе тражена једначина праве гласи

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1. \qquad (1)$$



Сл. 43

61. Једначина праве са угловним коефицијентом. — Претпоставимо да дата права EF (сл. 43) заклапа угао α са апсцисном осом косоуглог координатног система XOY и да отсеца ординату у почетку $OC=n$. Повуцимо ординату PM ма које тачке M на правој и праву CK паралелно са апсцисном осом. Из косоуглог троугла ΔCKM добијамо

$$\frac{KM}{\sin\alpha}=\frac{CK}{\sin(\omega-\alpha)}, \quad \text{или} \quad y=ax+n, \qquad (2)$$

где коефицијент a има вредност

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$$

и назива се *угловним коефицијентом* дате праве. Последњи израз може се лако трансформисати на следећи начин

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega\cos\alpha - \cos\omega\sin\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{\sin\omega - \cos\omega\,tg\,\alpha}.$$

Отуда следи

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\omega}{1 + a\cos\omega}.$$

Пошто је добијени израз незгодан за логаритамско израчунавање угла α, то се овај обично замењује изразом:

$$tg\left(a - \frac{\omega}{2}\right) = \frac{a-1}{a+1}\,tg\,\frac{\omega}{2}.$$

У његову тачност можемо се лако уверити, ако развијемо његову леву страну и ставимо у њој горњу вредност за $tg\,\alpha$, а затим заменимо $tg\,\frac{\omega}{2}$ количником $\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}$ и сведемо сличне чланове.

Очевидно, ако је угао $\omega = \frac{\pi}{2}$, угловни коефицијент a праве (2) прелази у tangens угла који та права заклапа са апсцисном осом.

62. Једначина праве у нормалном облику. — Из координатног почетка O (сл. 42) спустимо на дату праву EF нормалу $OH = p$, која са апсцисном осом OX гради угао β. Повуцимо, даље, нормале PL на праву OH и MK на праву PL. Правоугли троуглови $\triangle OPL$ и $\triangle PMK$ дају респективно ове везе

$$OL = OP\cos\beta = x\cos\beta,\quad KM = PM\cos(\omega-\beta) = y\cos(\omega-\beta).$$

Према томе једнакост

$$OL + KM = OH$$

доводи до тражене једначине праве EF у нормалном облику

$$x\cos\beta + y\cos(\omega-\beta) - p = 0. \tag{3}$$

Ако се стави $\omega = \frac{\pi}{2}$, изведена једначина добија облик једначине (3), из Главе II, на стр. 52, n⁰ 28.

63. Свака линеарна једначина одређује праву линију. — Сва три облика једначине праве линије (1), (2) и (3) линеарне су у односу на текуће координате. Лако је доказати и обрнути став да *свака једначина линеарна по x и y, са сталним коефицијентима,*

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

одређује праву линију. Сам доказ није потребно овде изводити, јер би то било понављање доказа изведена раније за правоугли координатни систем (в. n⁰ 29, стр. 53—54). Истакнимо само специјалне случајеве, када су неки од коефицијената једначине (4) једнаки нули.

Ако је $C = 0$, посматрана права (4) пролази кроз координатни почетак.
Ако је $A = 0$, права (4) је паралелна са x осом.
Ако је $B = 0$, права (4) је паралелна са y осом.
Једначина $x = 0$ одређује ординатну, а једначина $y = 0$ апсцисну осу.
Ако је и $A = 0$ и $B = 0$, но $C \gtrless 0$, једначина (4) претставља бескрајно удаљену праву.

64. Трансформација линеарне једначине општег облика у разне облике једначина праве. — Претпоставимо да је $C \gtrless 0$; једначина (4) добија облик сегментске једначине праве (1) када се стави

$$-\frac{C}{A} = m,\quad -\frac{C}{B} = n.$$

Ако је $B \gtrless 0$, једначина (4) прелази у (2), ако се уведу ознаке

$$-\frac{A}{B} = a,\quad -\frac{C}{B} = n.$$

Према томе наведени израз (види стр. 84, n⁰ 61) за tangens угла, који гради посматрана права са апсцисном осом, добија облик

$$tg\,\alpha = \frac{A\sin\omega}{A\cos\omega - B}. \tag{5}$$

Израз (5) добија се под претпоставком да је коефицијент B једначине (4) различит од нуле.

Ако је $B = 0$, једначина (4) одређује праву паралелну оси Y, која према томе заклапа са X осом угао ω. Стога tangens њеног угла са апсцисном осом претставља $tg\,\omega$, који је такође обухваћен изразом (5) за вредност $B = 0$. Због тога је веома важно уочити да *израз (5) одређује увек величину угла праве (4) са апсцисном осом, ма какве биле вредности коефицијената њене једначине.*

Најзад, независно од специјалних вредности коефицијената опште једначине праве (4), увек је могуће довести је у нормални облик. Заиста, ако помножимо обе стране једначине (4) произвољним множитељем μ добићемо

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0.$$

Да би последња једначина претстављала једначину у нормалном облику (3) потребно је да буду задовољене ове једнакости

$$\mu A = \cos\beta,\qquad \mu B = \cos(\omega-\beta),\qquad \mu C = -p.$$

Елиминацијом угла β из прве две једнакости добијамо једначину из које одређујемо множитељ μ

$$\mu^2[A^2\sin^2\omega + (B - A\cos\omega)^2] = \sin^2\omega,$$

тј.

$$\mu = \pm \frac{\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \tag{6}$$

Према томе горње једнакости дају:

$$\cos\beta = \pm \frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$\cos(\omega - \beta) = \pm \frac{B\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}},$$

$$p = \mp \frac{C\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}. \tag{7}$$

Последњи изрази показују да ниједан од образаца за $\cos\beta$ и $\cos(\omega-\beta)$ не прелази јединицу. Ово произилази из тога што поткорени израз може бити написан у једноме од ова два облика

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega = (A\sin\omega)^2 + (B - A\cos\omega)^2 = (B\sin\omega)^2 + (A - B\cos\omega)^2.$$

Према томе бројитељ ниједног од горњих разломака, који изражавају $\cos\beta$ и $\cos(\omega-\beta)$, не премашује његов именитељ. Најзад, *пошто параметар* p, *према начину на који смо га увели, претставља увек позитивну величину, то од два знака испред множитеља* μ *у изразу (6) треба увек изабрати онај, за који ће величина* p, *претстављена изразом (7), бити позитивна.*

III. Две праве линије

65. Угао између две праве. — Независно од вредности координатног угла $\sphericalangle\gamma$ што образују две праве одређује се изразом (12) из главе II (види стр. 57, n⁰ 32)

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\alpha_1 - tg\,\alpha}{1 + tg\,\alpha_1\, tg\,\alpha}, \tag{8}$$

где су α_1 и α углови које граде дате праве са апсцисном осом. Претпоставимо да су једначине правих, које међусобно граде угао γ, дате у облику

$$y = ax + n, \qquad y = a_1 x + n_1. \tag{9}$$

Тада су, према раније реченом (види стр. 84, n⁰ 61), углови α и α_1 дати обрасцима

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\omega}{1 + a\cos\omega}, \qquad tg\,\alpha_1 = \frac{a_1\sin\omega}{1 + a_1\cos\omega}.$$

Ако ставимо ове изразе у образац (8), добијамо тражени израз за одређивање угла између датих правих (9)

$$tg\,\gamma = \frac{(a_1 - a)\sin\omega}{1 + a a_1 + (a + a_1)\cos\omega}. \tag{10}$$

Претпоставимо да су дате праве изражене једначинама општег облика

$$Ax + By + C = 0, \qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0. \tag{11}$$

Углови које оне образују са апсцисном осом одређују се помоћу израза (5) на овај начин:

$$tg\,\alpha = \frac{A\sin\omega}{A\cos\omega - B}, \qquad tg\,\alpha_1 = \frac{A_1\sin\omega}{A_1\cos\omega - B_1}.$$

Према томе образац (8) постаје

$$tg\,\gamma = \frac{(AB_1 - A_1B)\sin\omega}{AA_1 + BB_1 - (AB_1 + A_1B)\cos\omega}. \tag{12}$$

66. Услов паралелности правих. — Ако су две праве дате једначинама (9), услов за њихову *паралелност* је да бројитељ у изразу (10) буде једнак нули, тј. да је

$$a_1 - a = 0, \quad \text{или} \quad a_1 = a.$$

Према томе *праве (9) паралелне су, ако су њихови угловни коефицијенти једнаки.*

На исти начин израз (12) показује, да се услов паралелности правих (11) изражава једнакошћу

$$AB_1 - A_1B = 0, \quad \text{или} \quad \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1};$$

тј. *да би праве биле паралелне коефицијенти уз текуће координате у њиховим једначинама датим у општем облику (11), морају бити пропорционални.*

67. Услов нормалности правих. — Да би праве (9) биле нормалне, именитељ израза (10) треба да буде једнак нули. Према томе, услов нормалности правих (9) изражава се једнакошћу

$$1 + a a_1 + (a + a_1)\cos\omega = 0. \tag{13}$$

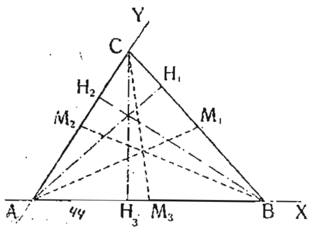
Ако су праве дате једначинама у општем облику (11), за њихову нормалност именитељ израза (12) мора бити једнак нули. Према томе, услов нормалности правих (11) изражава се једнакошћу

$$AA_1 + BB_1 - (AB_1 + A_1B)\cos\omega = 0.$$

IV. Задаци о правим линијама

68. Задаци на правој. — Као што смо већ рекли (в стр. 79, n⁰ 55), извесни задаци са правим линијама имају и у косоуглом систему иста решења као и у правоуглом, уколико та решења зависе само од сличности геометриских слика, пропорционалности отсечака или паралелности правих, изражених једначинама у сегментском или нормалном облику. Тако, на пр., ако се служимо једначинама последњег облика, добијамо једнаке резултате за координате пресека две праве, за услов да се три праве секу у једној тачки, за једначине правих што пролазе кроз једну или две тачке, за услов да три тачке леже на једној правој, или за праву која пролази кроз једну тачку паралелно датој правој линији. До решења других задатака долази се сличним изразима у правоуглом и косоуглом координатном систему, али су при томе различите вредности коефицијената и параметара у једначинама, јер у косоуглом систему оне зависе од координатног угла. Такви резултати се добијају, на пр., за једначине правих са угловним коефицијентом, или за једначине правих нормалног облика које пролазе кроз дату тачку паралелно датој правој, или за једначине симетрала, или за однос у коме права дели растојање између две тачке. Наведимо неколико примера у прилог тврђењу о подесности косоуглог система при израчунавањима.

69. Медијане троугла секу се у једној тачки. — Нека се координатни почетак косоуглог система налази у темену A датог троугла $\triangle ABC$ (сл. 44) и нека су координатне осе X и Y продужења страна AB и AC датог троугла. Означимо са a, b и c дужине страна троугла BC, AC, AB. Према томе координате темена троугла имају вредности



Сл. 44

$$(0,0) \quad (c,0) \quad (0,b),$$

а координате средина страна M_1, M_2 и M_3, троугла су

$$\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(0, \frac{b}{2}\right), \left(\frac{c}{2}, 0\right).$$

Према томе једначина медијане AM_1, која пролази кроз координатни почетак и тачку M_1, после скраћивања са 2, постаје:

$$\frac{x}{c} - \frac{y}{b} = 0.$$

Друге две медијане претстављају се, међутим, помоћу одговарајућих сегментских једначина

$$\frac{x}{c} + \frac{2y}{b} = 1, \quad \frac{2x}{c} + \frac{y}{b} = 1.$$

Разлика ове две једначине даје једначину прве медијане, AM_1. Према томе, све три медијане секу се у истој тачки.

70. Висине троугла секу се у једној тачки. — Као други пример наведимо доказ да се висине троугла секу у једној тачки. Задржимо исти косоугли систем, који смо увели у прошлом примеру, и означимо са ω угао код темена A (сл. 44). Висине BH_2 и CH_3, као правих које пролазе кроз тачке $B(c, 0)$ и $C(0, b)$, изражавају се једначинама нормалног облика

$$(x-c)\cos\omega + y = 0, \quad x + (y-b)\cos\omega = 0.$$

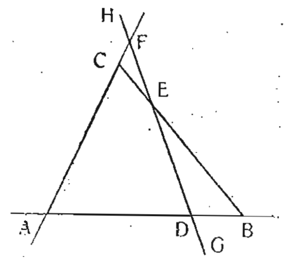
Трећа висина, AH_1, претставља праву која пролази кроз координатни почетак и стоји нормално на страни BC, која отсеца на координатним осама респективно отсечке c и b. Значи, угловни коефицијент је $-\frac{b}{c}$. Према томе, на основу услова нормалности (13), једначина треће нормале гласи

$$(b - c\cos\omega)\,y + (b\cos\omega - c)\,x = 0.$$

Није тешко увидети да добијена једначина претставља резултат одузимања једначине друге висине, помножене са c, од једначине треће висине, помножене са b. То значи да се све три висине секу у једној тачки.

71. Менелајева теорема. — Ако права GH (сл. 45) сече стране троугла $\triangle ABC$ у тачкама D, E односно F, онда постоји једнакост

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = -1.$$



Сл. 45

Узмимо стране AB, односно AC посматраног троугла за координатне осе, X и Y. Једначина сечице DE је

$$mx + ny + k = 0.$$

Темена посматраног троугла одређена су координатама

$$A(0,0), \quad B(c,0), \quad C(0,b),$$

где су c и b дужине страна AB, односно AC.

Према томе односи у којима сечица DE дели сваку страну троугла $\triangle ABC$ изражавају се бројевима (види стр. 89)

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{k}{mc+k}, \quad \frac{BE}{EC} = -\frac{mc+k}{nb+k}, \quad \frac{CF}{FA} = -\frac{nb+k}{k}.$$

Производ добијених односа једнак је очевидно -1.

72. Једначина праве која пролази кроз дату тачку и гради дати угао са датом правом. — Узмимо једначину праве у општем облику

$$Ax + By + C = 0.$$

Права што пролази кроз дату тачку, са координатама (x_0, y_0), изражава се следећом једначином општег облика

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = 0.$$

Ако са γ означимо дати угао под којим тражена права треба да сече дату праву, образац (12) даје за вредност количника $\frac{A_1}{B_1}$:

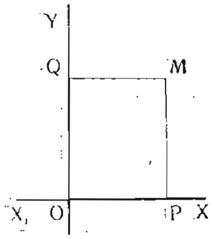
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A\sin\omega + (A\cos\omega - B)\,tg\,\gamma}{B\sin\omega + (A - B\cos\omega)\,tg\,\gamma} = \frac{A\sin(\omega+\gamma) - B\sin\gamma}{B\sin(\omega-\gamma) + A\sin\gamma}.$$

Стављајући вредност тога количника у претходну једначину, добијамо тражену једначину праве:

$$[A\sin(\omega+\gamma) - B\sin\gamma](x - x_0) + [B\sin(\omega-\gamma) - A\sin\gamma](y - y_0) = 0.$$

V. Трансформација координатних система

73. Трансформација праволиниских координатних система са паралелним правцима оса. — У Аналитичкој геометрији често се јавља потреба да се разне геометриске слике, које су одређене једначинама у односу на неки координатни систем, претставе једначинама у односу на нови координатни систем. У претходним излагањима имали смо примере различитих једначина, које претстављају исту криву — елипсу — у три разна координатна система (види стр. 34, n^0 15; стр. 79, n^0 56). Таква замена, једног координатног система другим, назива се *трансформацијом координатног система*, или краће *трансформацијом координата*. Напоменимо да ћемо отсада првобитни систем звати *стари*, новоуведени — *нови*, а координате тачака у једном и другом систему називаћемо респективно *старим* и *новим координатама*.

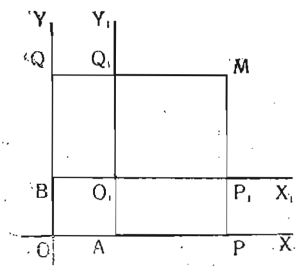


Сл. 46

Ради трансформације једног координатног система у други, неопходно је успоставити везу између старих и нових координата у оба координатна система. Нека, на пр., два разна правоугла координатна система имају заједнички координатни почетак, у тачки O (сл. 46), исту ординатну осу OY, и апсцисне осе супротног смера: стару OX, а нову OX_1. На тај начин XOY претставља стари, а X_1OY нови координатни систем. Означимо са x и y старе координате ма које тачке M у равни, а са x_1 и y_1 нове координате исте тачке. Очевидно је да један исти отсечак, OP, у старом координатном систему претставља позитивну апсцису, док за нови систем она постаје негативна. Отсечак PM је заједничка ордината за оба система. Према томе, везу између старих и нових координата дају следећи обрасци за трансформацију координата

$$x = -x_1, \quad y = y_1. \tag{1}$$

За другу трансформацију узмимо два правоугла координатна система, стари XOY (сл. 47) и нови $X_1O_1Y_1$, са различитим почецима, O и O_1, и са паралелним правцима одговарајућих координатних оса. Означимо са x и y старе координате, QM и PM, неке тачке M, а са x_1 и y_1, нове координате Q_1M и P_1M, те исте тачке. Ако са a и b означимо координате BO_1 и AO_1 новога почетка O_1 у односу на стари координатни систем, *обрасци за трансформацију координата* биће



Сл. 47

$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1. \tag{2}$$

Добијени обрасци изражавају старе координате помоћу нових. Но лако је написати и обрасце који изражавају нове координате помоћу старих, тј.

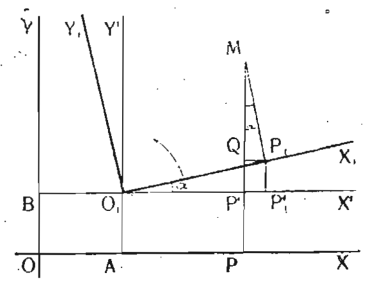
$$x_1 = x - a, \quad y_1 = y - b.$$

74. Трансформација правоуглих система са различитим правцима оса. — Испитајмо општи случај трансформација два правоугла координатна система са различитим почецима и различитим правцима оса. Означимо са a и b координате почетка O_1 (сл. 48) новог система, X_1OY_1, у

односу на стари систем, XOY. Повуцимо помоћне осе O_1X' и O_1Y' паралелно старим осама. Означимо се x и y старе координате, OP и PM, неке тачке M, а са x' и y' њене помоћне координате, O_1P' и $P'M$, у односу на помоћни $X'O_1Y'$. Претходни обрасци (2) дају:

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \tag{3}$$

Означимо са x_1 и y_1 нове координате, O_1P_1 и P_1M, исте тачке M.



Сл. 48

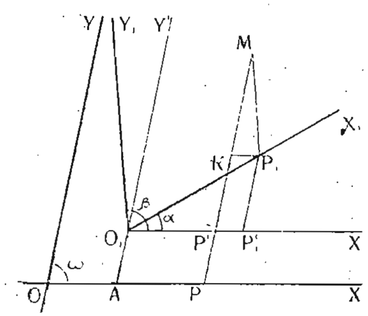
Помоћна апсциса x' једнака је разлици отсечака O_1P_1' и QP_1, који претстављају пројекције нове апсцисе O_1P_1 и нове ординате P_1M на помоћну апсцисну осу. Помоћна ордината, y', на слици $P'M$, једнака је збиру пројекција P'_1P_1 и QM нове апсцисе и ординате на помоћну ординатну осу. Према томе, ако са α обележимо угао између старе и нове апсцисе и ставимо вредности за x' и y' у израз (3), добијамо

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y &= b + x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Да бисмо изразили нове координате помоћу старих, довољно је решити једначине (4) по новим координатама. Ради тога образујмо најпре збир прве једначине (4), помножене са $\cos\alpha$, и друге, помножене са $\sin\alpha$, затим узмимо разлику друге једначине (4), помножене са $\cos\alpha$, и прве, помножене са $\sin\alpha$, и добијамо тражене обрасце трансформације

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y_1 &= (y - b)\cos\alpha - (x - a)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

75. Трансформација косоуглих координатних система. — Проучимо општи случај трансформације косоуглог координатног система XOY (сл. 49) са координатним углом ω, у нови координатни систем $X_1O_1Y_1$ чије осе респективно образују углове α и β са старом осом OX. Означимо са a и b координате новог координатног почетка O_1, у односу на стари систем. Повуцимо, затим, две помоћне координатне осе, O_1X' и O_1Y', паралелно старим осама. Означимо са x и y старе координате OP и PM неке тачке M, а са x', y' координате исте тачке, O_1P' и MP', у помоћном координатном систему $X'O_1Y'$. Лако је увидети да постоје следеће везе између старих и помоћних координата



Сл. 49

$$x = a + x', \quad y = b + y'. \tag{6}$$

Најзад, означимо са x_1 и y_1 нове координате, O_1P_1 и P_1M, исте тачке M. Да бисмо помоћу њих изразили старе координате, повуцимо из тачке

P_1 две праве паралелно старим осама OX и OY и то: прву до пресека у тачки K са старом ординатом тачке M, а другу — до пресека у тачки P_1' са помоћном осом O_1X'. Тада добијамо

$$x' = O_1P_1' - KP_1 \tag{7}$$

$$y' = P_1'P_1 + KM. \tag{8}$$

Из троуглова $\Delta\, O_1P_1'P_1$ и $\Delta\, KP_1M$, следи

$$\sphericalangle\, O_1P_1P_1' = \omega - \alpha, \quad \sphericalangle\, KP_1M = 180^0 - \beta.$$

На основу тога, из истих троуглова добијамо респективно

$$\left.\begin{aligned} O_1P_1' &= \frac{x_1 \sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, & KP_1 &= \frac{y_1 \sin(\beta-\omega)}{\sin\omega}, \\ P_1'P_1 &= \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin\omega}, & KM &= \frac{y_1 \sin\beta}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

С обзиром на добијене обрасце (9), претходне једнакости (7) и (8) постају

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x_1 \sin(\omega-\alpha) + y_1 \sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \\ y' &= \frac{x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Стављајући последње изразе за x' и y' у (6), добијамо тражене обрасце трансформације старих координата у нове

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \frac{x_1 \sin(\omega-\alpha) + y_1 \sin(\omega-\beta)}{\sin\omega}, \\ y &= b + \frac{x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Да бисмо изразили нове координате помоћу старих, решимо једначине (10) по новим координатама. Овај систем једначина линеаран је по x_1 и y_1 и детерминанта састављена од коефицијената уз непознате има вредност

$$\Delta = \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{vmatrix} \sin(\omega-\alpha) & \sin(\omega-\beta) \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\sin(\omega-\alpha)\sin\beta - \sin(\omega-\beta)\sin\alpha}{\sin^2\omega} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\omega}.$$

Разлика углова $\beta - \alpha$ претставља нови координатни угао који ћемо означити са ω_1. Према томе детерминанта Δ једнака је количнику

$$\Delta = \frac{\sin\omega_1}{\sin\omega},$$

који је различит од нуле, јер нови координатни угао, ω_1, не може бити ни једнак нули, ни умножак од 2π. Према томе, обрасци (10) изражавају нове помоћним координатама у следећем облику

$$x_1 = \frac{x' \sin\beta + y' \sin(\beta-\omega)}{\sin\omega_1}, \quad y_1 = \frac{-x' \sin\alpha + y' \sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega_1}. \tag{12}$$

И, најзад, ако заменимо у овим изразима помоћне старим координатама, користећи се при томе изразима (6), налазимо тражене обрасце за трансформацију нових координата у старе

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{(x-a)\sin\beta + (y-b)\sin(\beta-\omega)}{\sin\omega_1}, \\ y_1 &= \frac{-(x-a)\sin\alpha + (y-b)\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega_1}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Изведени обрасци (11) и (13) претстављају најопштију трансформацију координата, у којој су садржани сви раније проучени случајеви. Тако, ако су оба система координата правоугли, тј. $\omega = \omega_1 = \frac{\pi}{2}$, онда је $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, обрасци (11) добијају облик (14), а обрасци (13) постају идентични обрасцима (5). Ако су пак оба координатна система, стари и нови, правоугли и имају заједнички почетак, тј. $\omega = \frac{\pi}{2}$, $a = b = 0$, $\alpha = \pi$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, онда изрази (11) прелазе у (1). Исти изрази добијају се из једнакости (13), ако се у њима стави $\omega = -\frac{\pi}{2}$, пошто је, према уведеној ознаци,

$$\omega_1 = \beta - \alpha.$$

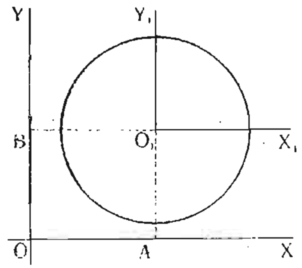
76. Трансформације једначина кривих линија. — Изведени општи обрасци за трансформације координата (11) и (13) изражавају старе координате у облику линеарних функција нових координата, са сталним коефицијентима, у облику

$$x = a + a_1 x_1 + b_1 y_1, \quad y = b + a_2 x_1 + b_2 y_1 \tag{14}$$

или, обратно, нове координате — у облику линеарних функција старих координата. Међутим треба нагласити да написани изрази општег облика (14) не могу служити као обрасци за трансформације координата ма за какве вредности коефицијената a_1, b_1, a_2, b_2.

Заиста, сва четири коефицијента, уз нове координате у (11), изражена су у облику функција само трију величина ω, α и β. То значи да се коефицијенти a_1, b_1, a_2 и b_2 у (14) изражавају функцијама трију параметара и, према томе, морају бити везани међу собом једном зависношћу.

Пошто су изрази за трансформације координата линеарни у односу на нове координате, треба нагласити да се *ред* алгебарских кривих линија не мења поменутим трансформацијама правоуглих или косоуглих координата. То следи из тога, што се ма какав цео, позитиван степен сваке од старих координата, на основу (14), изражава, по примени Њутнова обрасца за развијање бинома, у облику полинома истог степена у односу на нове координате. Према томе, сваки полином у односу на старе променљиве претставља се полиномом истог степена у односу на нове координате. Значи да трансформацијом у нове правоугле или косоугле координате алгебарска крива линија, мењајући облик своје једначине, задржава свој ред и у односу на нови координатни систем. Разумљиво је да при посматраним трансформацијама крива линија не мења свој геометриски облик.



Сл. 50

Узмимо, на пр., у правоуглом координатном систему XOY (сл. 50) једначину другог реда облика

$$A(x^2+y^2)+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (15)$$

где A, D, E и F претстављају сталне *коефицијенте*. Помоћу трансформације координата лако је протумачити геометриско значење једначине (15). Напишимо горњу једначину у облику

$$x^2+2\frac{D}{A}x+y^2+2\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0,$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \qquad (16)$$

где је

$$a=-\frac{D}{A}, \quad b=-\frac{E}{A}, \quad r=\frac{1}{A}\sqrt{D^2+E^2-AF}.$$

Узмимо тачку O_1, са координатама a и b, за почетак новог правоуглог координатног система, чије су осе, O_1X_1 и O_1Y_1, паралелне старим осама. На основу обрасца, трансформацију

$$x=a+x_1, \quad y=b+y_1,$$

где x_1 и y_1 означавају нове координате, једначина (16) у новом координатном систему постаје

$$x_1^2+y_1^2=r^2,$$

тј. претставља реални круг описан из средишта O_1 са полупречником r, ако је $D^2+E^2>AF$; ако је $D^2+E^2=AF$, онда добијена једначина одређује круг полупречника 0, или једну реалну тачку (0, 0), или две коњуговане изотропне праве; и, најзад, ако је $D^2+E^2<AF$, онда она претставља имагинаран круг. Према томе, једначина (16) одређује у наведеном случају или реални круг (сл. 40), или две изотропне праве, или имагинарни круг.

Треба приметити да се сред алгебарске криве не мења ни за тако звану х о м о г р а ф с к у трансформацију, која се зове још и х о м о л о ш к о м, или к о л и н е а р н о м, или п р о ј е к т и в н о м. Ове се трансформације дефинишу обрасцима

$$x=\frac{a x_1+b y_1+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+c_2}, \quad y=\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+c_2},$$

где су свих 9 коефицијената $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ и c_2 сталне величине.

Ове разломачке функције имају исти именитељ. Зато алгебарске једначине у односу на променљиве x и y задржавају свој ред у односу на нове променљиве x_1 и y_1.

Ако се при трансформацији координата мењају размере јединице дужине, онда трансформисана крива мења свој облик. Ако се размере обеју координата мењају у истом односу, таква трансформација зове се т р а н с ф о р м а ц и ј а с л и ч н о с т и, а за првобитну геометриску слику и слику добијену њеном трансформацијом каже се, да су с л и ч н е или х о м о т е т и ч н е.

Ако се размере апсциса и ордината мењају у различитим односима, таква трансформација се назива а ф и н о м. Код афине трасформације координата настаје стварна промена облика геометриских слика. Трансформишимо, на пр., једначину елипсе (види стр. 34, n⁰ 15)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

помоћу следећих израза

$$x=ax_1, \quad y=by_1,$$

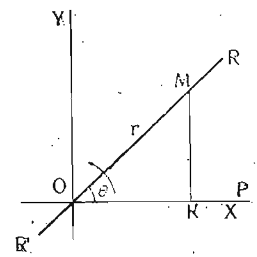
тј. сваку апсцису смањимо a-пута, а ординату b-пута. Правци нових оса се поклапају са старим. Трансформисана једначина постаје

$$x_1^2+y_1^2=1.$$

На тај начин, елипса, са полуосама a и b, трансформише се у круг описан из средишта елипсе са полупречником једнаким јединици.

VI. Систем поларних координата

77. Поларне координате. — За одређивање положаја тачке у равни узмимо у њој одређену тачку O (сл. 51) и повуцимо из ње полу-праву OP, коју ћемо звати з р а к. Тачка O се зове п о л, а права OP п о л а р н а о с а. Обе заједно чине т. зв. поларни координатни систем. Положај тачке M у равни потпуно је одређен ако је познато њено растојање OM од пола O и угао $\sphericalangle$POR, што га заклапа са поларном осом OP зрак OR, који пролази кроз дату тачку M. Два броја, r и θ, који одређују дужину потега OM и величину угла $\sphericalangle$POP, називају се п о л а р н и м к о о р д и н а т а м а тачке M, у односу на дати поларни координатни систем. Дуж OM зове се п о т е г, r, а $\sphericalangle$POR зове се п о л а р н и у г а о (или а н о м а л и ј а), θ, тачке M. Бројем r обележаваћемо увек позитивну, апсолутну величину растојања тачке M од пола O. Поларни угао θ рачунаћемо у позитивном смеру, тј. од поларне осе у лево, од 0 до 2π,



Сл. 51

увек у истом смеру. Треба приметити да свака тачка M у равни има неограничен број поларних координата. Заиста, угао који гради зрак OR са поларном осом OP изражава се бројем који је једнак збиру $\theta + 2k\pi$. На тај начин, тачки M одговарају све вредности углова $\varphi = \theta + 2k\pi$, где је k ма који цео сталан број. Међутим потребно је нагласити да два дата броја, r и φ, одређују увек само једну тачку у равни, јер свакој вредности угла φ одговара један одређени зрак, и потег r на њему одређује само једну тачку M.

78. Трансформација поларних координата у правоугле. — Да бисмо трансформисали поларне координате у правоугле, сместимо координатни почетак у пол O (сл. 51), осу OX положимо правцем поларне осе, а осу OY повуцимо нормално на њу. Означимо са x и y правоугле координате тачке M, тј. ставимо

$$\mathrm{OK} = x, \quad \mathrm{KM} = y.$$

Правоугли троугао ΔOKM даје ове везе, на основи израза за трансформацију правоуглих координата у поларне,

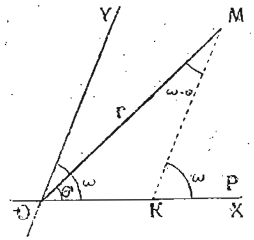
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \qquad (1)$$

Да бисмо добили изразе поларних координата у правоуглим координатима, треба обе стране једначина (1) дићи на квадрат и сабрати добијене једначине. Затим треба другу једначину (1) поделити првом. Као резултат добијају се две једнакости

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = tg\,\theta.$$

Решимо ли их по r и θ, добићемо тражене изразе за трансформацију поларних координата у правоугле

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = arc\,tg\,\frac{y}{x}.$$



Сл. 52

Исто тако лако је успоставити везу између поларних и косоуглих координата. Пол O (сл. 52) узима се за почетак косоуглог координатног система, оса OX положи се правцем поларне осе OP, а оса OY повуче под датим углом ω.

Косоугле координате тачке M означимо са x и y, тако да је

$$\mathrm{OK} = x, \quad \mathrm{KM} = y,$$

а њене поларне координате OM и $\sphericalangle$POM са r и θ.

У косоуглом троуглу ΔOKM угао код темена M једнак је $\omega - \theta$. Стога услов пропорционалности страна троугла са sinus-има наспрамних углова даје тражене изразе косоуглих координата у облику

$$x = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin\omega}\, r, \qquad y = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}\, r.$$

Искључимо ли из последња два обрасца θ, затим r добићемо једнакости

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega = r^2, \qquad \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\sin(\omega - \theta)}.$$

Прва од њих одређује потег тачке M, а друга — њен поларни угао помоћу поларних координата, обрасцима

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega}, \quad \theta = arc\,tg\,\frac{y\sin\omega}{x + y\cos\omega}.$$

Ако је координатни угао ω једнак $\frac{\pi}{2}$, онда последњи изрази прелазе у претходне, који служе за трансформацију поларних координата у правоугле.

79. Једначине кривих у поларним координатама. — Узмимо ма какву једначину у поларним координатама r и θ

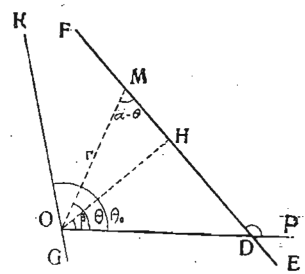
$$f(r, \theta) = 0. \qquad (2)$$

Конструишући тачке што одговарају вредностима координата које задовољавају дату једначину, одређујемо геометриско место тачака. На тај начин одређена крива линија изражава се једначином (2), у поларним координатама. Обратно, ако изразимо помоћу поларних координата везу коју задовољавају координате које било тачке криве линије, одређене њеним геометриским особинама, та веза претставља једначину дате криве у поларном координатном систему.

Уведени обрасци за трансформације праволиниских координата у поларне садрже тригонометриске функције поларнога угла. Према томе очигледно је да се једначине алгебарских кривих у праволиниском координатном систему трансформишу, уопште, у трансцендентне једначине у поларним координатама.

80. Једначина праве у поларним координатама. — Узмимо праву EF (сл. 53) у поларном координатном систему са полом O и поларном осом OP. Одредимо положај праве EF помоћу два параметра p и β. Први од њих, p, претставља дужину растојања OH дате праве EF од пола O, а други параметар, β, једнак је углу који гради нормала OH са поларном осом OP. Узмимо ма какву тачку M на правој EF и означимо са r и θ њене поларне координате. Из правоуглог троугла ΔOHM добија се веза

$$p = r\cos(\theta - \beta);$$



Сл. 53

она претставља тражену једначину праве EF. Та се једначина може и овако написати

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - \beta)}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \beta) = a\sin\theta + b\cos\theta,$$

где смо ставили

$$a = \frac{\sin\beta}{p}, \qquad b = \frac{\cos\beta}{p}.$$

Ако је права EF паралелна са поларном осом, онда је $\sphericalangle\beta = \frac{\pi}{2}$, $b = 0$, $a = \frac{1}{p}$ и једначина праве постаје

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\sin\theta, \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{\sin\theta}.$$

Ако је права EF нормална на поларној оси, онда је $\sphericalangle\beta = 0$, $a = 0$, $b = \frac{1}{p}$, и једначина праве добија облик:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos\theta, \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{\cos\theta}.$$

Све изведене једначине праве изражавају се помоћу трансцендентних функција. Но ако узмемо ма коју праву линију GK (сл. 53) што пролази кроз пол O, ма која њена тачка одређена је условом да мора константан бити поларни угао, који је једнак сталном углу θ_0 што га заклапа права са поларном осом. Према томе, једначина праве GK добија овај једноставан алгебарски облик

$$\theta = \theta_0.$$

Положај праве EF могуће је одредити и помоћу друга два параметра, отсечком $OD = m$, што га отсеца права на поларној оси, и углом α што образује права са поларном осом. У таквом случају, из троугла $\triangle$ ODM, чији је угао код темена M једнак $\alpha - \theta$, добија се пропорција

$$\frac{OM}{\sin\sphericalangle ODM} = \frac{OD}{\sin\sphericalangle OMD}, \quad \text{или} \quad r = \frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)}.$$

Изведену једначину дате праве можемо написати у пређашњем облику

$$\frac{1}{r} = a\sin\theta + b\cos\theta,$$

где сада коефицијенти a и b постају

$$a = -\frac{1}{m\,tg\,\alpha}, \qquad b = \frac{1}{m}.$$

Као што се види из посматраног троугла $\triangle$ ODH, последње вредности коефицијената a и b поклапају се са горе добивеним њиховим вредностима. А лако је уверити се да важи и обрнути став, наиме, да *свака једначина општег облика,*

$$\frac{1}{r} = A\sin\theta + B\cos\theta, \tag{3}$$

где су A и B произвољни стални коефицијенти, одређује праву линију у односу на неки поларни координатни систем.

Заиста, ако ставимо

$$A = \frac{\sin\beta}{p}, \qquad B = \frac{\cos\beta}{p},$$

квадрирамо обе стране ових једначина и саберемо их, добијамо

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{p^2}, \qquad p = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Према томе, из претходних израза следује

$$\sin\beta = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Ако за p узмемо само позитиван знак, у последњим изразима задржавамо само један знак, те је њиме угао β потпуно одређен. Према томе, једначина (3) одређује праву са одређеним параметрима p и β.

81. Једначине круга у поларним координатама. — Нека средиште круга буде у полу поларног координатног система. Ако је полупречник датог круга a, а r потег тачке у поларном систему, једначина круга има једноставан облик

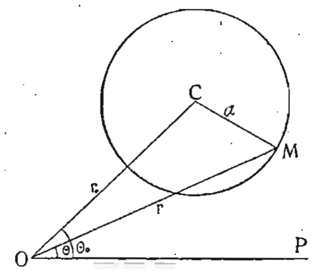
$$r = a.$$

Претпоставимо сада, да се средиште круга налази у тачки C (сл. 54) у односу на поларни координатни систем са полом O и поларном осом OP. Означимо са r_0 и θ_0 поларне координате тачке C

$$OC = r_0, \qquad \sphericalangle POC = \theta_0.$$

Означимо са r и θ поларне координате тачке M датога круга полупречника a. Из косоуглог троугла $\triangle$OMC добијамо тражену једначину круга

$$r^2 + r_0^2 - 2r_0 r\cos(\theta_0 - \theta) = a^2.$$



Сл. 54

Ако се средиште круга (C) налази на поларној оси, десно од пола, на растојању од пола O једнаком полупречнику a, тј. ако је

$$\theta_0 = 0, \quad r_0 = a,$$

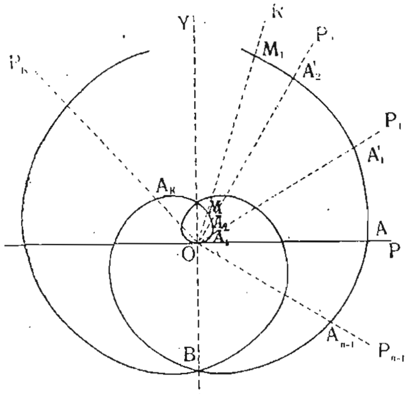
изведена једначина круга постаје

$$r = 2a\cos\theta.$$

На тај начин једначина круга има облик или алгебарске или трансцендентне једначине, што зависи од његова положаја према поларном координатном систему. Овом последњом зависношћу објашњава се преимућство које има, у поређењу са поларним, праволиниски координатни систем, који је узет као основа при деоби кривих на а л г е б а р с к е и т р а н с ц е н д е н т н е и, даље, при одређивању реда алгебарских кривих (види n⁰ 17, стр. 36).

82. Архимедова спирала — Поларне координате олакшавају изучавање многих кривих линија, а нарочито с п и р а л а. Посматрајмо једну од најједноставнијих, т.зв. А р х и м е д о в у с п и р а л у. За њено одређивање повуцимо из пола O (сл. 55) $n-1$ зракова, $OP_1, OP_2, \ldots OP_{n-1}$ који, заједно са поларном осом OP, деле раван око пола O на n једнаких сектора. Одмеримо дуж поларне осе, OP, почев од пола O, отсечак OA одређене дужине a и поделимо на n једнаких делова. На првом зраку, OP_1, одмеримо n-ти део од a, тј. $OA_1 = \frac{a}{n}$. На другоме зраку, OP_2, одмеримо отсечак $OA_2 = 2\frac{a}{n}$ итд., на k-том зраку, OP_k, узмимо отсечак $OA_k = k \cdot \frac{a}{n}$ итд. Најзад, на $(n-1)$-том зраку, OP_{n-1}, одвојмо отсечак

$$OA_{n-1} = (n-1)\cdot\frac{a}{n}.$$



Сл. 55

При бескрајном увећавању броја n, геометриско место свих тако одређених тачака претставља први завијутак $OA_1A_2MA_kAB_{n-1}A$ Архимедове спирале.

Одмеримо сада на свакоме зраку, од тачака првога завијутка, отсечке дужине a

$$A_1A_1' = A_2A_2' = \cdots = a.$$

На тај начин се добија други итд. неограничени број завијутака спирале који се, полазећи од пола, обавијају око њега безброј пута. Отсечак a се назива спиралиним г л а в н и м п о л у п р е ч н и к о м.

Архимедову спиралу могуће је дефинисати и другојачије, као криву што описује у равни тачка која се равномерно креће по зраку OR, док се овај равномерно обрће ако пола O.

Да бисмо поставили једначину Архимедове спирале, означимо са r и θ поларне координате неке њене тачке M.

Покретна тачка прелази растојање a, док зрак начини пун обрт од 2π. Према томе, одговарајуће вредности r и θ пропорционалне су последњим бројевима, те добијамо

$$\frac{r}{a} = \frac{\theta}{2\pi}, \quad \text{или} \quad r = k\theta, \quad \text{где је} \quad k = \frac{a}{2\pi}, \tag{4}$$

тј. *потег тачке на Архимедовој спирали пропорционалан је поларном углу, при чему је коефицијент пропорционалности, **к**, једнак количнику главног полупречника спирале **a** са 2π.*

Овај закључак важи независно од места на коме се завијутку налази покретна тачка. Претпоставимо да тачка M прелази са првога завијутка на други, у положај M_1, извршивши пун обрт око пола O. Означимо ли са

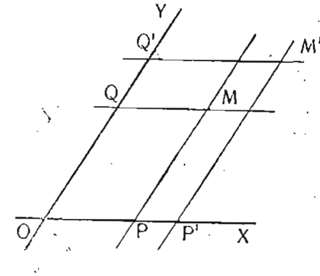
r_1 и θ_1 координате тачке M_1, при чему је $\theta_1 = \theta + 2\pi$, добијамо на основу једнакости (4)

$$r_1 = k\theta_1 = k(\theta + 2\pi) = k\theta + 2k\pi = r + a.$$

Према томе, *при повећању поларног угла за 2π потег спирале добија прираштај једнак главном полупречнику спирале, **a**.*

Када поларни угао θ добије прираштај 4π потег одговарајуће тачке на спирали постаје $r + 2a = r_1 + a$ итд., тј. сваким новим обртом око пола при прираштају угла за 2π, потег тачке Архимедове спирале увећава се за сталну величину главног полупречника. Према томе (види n⁰ 23, стр. 45), Архимедова спирала претставља сопствену к о н х о и д у, јер се сваки њен завијутак може сматрати као основа следећег завијутка, при чему као модуо конхоиде служи главни полупречник спирале. Тако, други завијутак, $AA_1'A_2'M_1, \ldots$, претставља конхоиду првога завијутка, $OA_1A_2MA_kBA_{n-1}A$, итд.

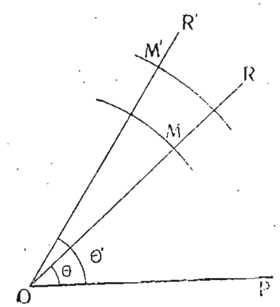
Ако се поларном углу дају негативне вредности, потег добија из једначине спирале исто тако негативне вредности и због тога се мора одмеравати у смеру супротном смеру зрака. На тај начин се добија друга, негативна грана Архимедове спирале, која је истог облика као и прва, али се завија на супротну страну. Обе гране симетричне су према оси OY, нормалној на поларној оси OP.



Сл. 56

83. Координатне линије. — Узмимо ма какав косоугли координатни систем XOY (сл. 56). Да бисмо нашли положај ма које тачке $M(x, y)$, одмеримо на оси OX апсцису $OP = x$ и, кроз тачку P, повуцимо праву линију паралелну оси OY. Затим кроз тачку Q, која се налази на оси OY, на растојању $OQ = y$ од почетка O, повуцимо другу паралелну оси OX. Тражена тачка M је одређена пресеком повучених правих.

Обратно, свакој тачки M' у координатној равни одговарају две праве, P'M' и Q'M', паралелне к о о р д и н а т н и м осама система XOY. Те праве се називају к о о р д и н а т н и м л и н и ј а м а. Пошто у посматраном координатном систему као координатне линије служе праве линије, то се правоугли и косоугли координатни системи називају п р а в о л и н и с к и м. Према томе сваки праволиниски координатни систем претставља две фамилије (два система) правих линија, које пролазе кроз сваку тачку координатне равни прекривајући ову непрекидном мрежом правих линија паралелних координатним осама. При томе се свака тачка одређује пресеком двеју линија из оба система.



Сл. 57

На исти начин може се лако протумачити и поларни координатни систем у равни (сл. 57) са полом O и поларном осом OP. Ради одређивања положаја тачке M са поларним координатама r и θ, опишимо око пола O круг полупречника r и повуцимо зрак OR, који са поларном осом OP заклапа угао θ. Тражена тачка M се налази на пресеку обеју линија. Обрнуто, кроз сваку тачку M′ у равни пролази по један круг полупречника $OM' = r'$, са средиштем у полу O, и по један зрак OR′ који заклапа угао θ' са поларном осом. Кругови и зраци што пролазе кроз сваку тачку у равни називају се координатним линијама поларног координатног система. Поларни координатни систем назива се криволиниским, пошто један систем његових координатних линија чине криве линије — кругови. Координатне линије поларног система претстављају две фамилије линија, које пролазе кроз сваку тачку у равни, прекривајући раван непрекидном мрежом концентричних кругова и зракова, који полазе из заједничког средишта. Ове линије одређују сваку тачку у равни као тачку пресека двеју линија, које кроз њу пролазе и то по једне из сваке фамилије.

Уведени појам о координатним линијама уопштава се на следећи начин. Повуцимо у равни мрежу двеју разних фамилија ма каквих кривих линија, тако да се разне линије исте фамилије разликују међу собом вредностима параметара који улазе у њихове једначине. Непрекидним мењањем ових параметара могуће је кроз сваку тачку у равни повући по једну криву линију из сваке од датих фамилија. Ове криве се зову координатне линије криволиниског координатног система, и свака тачка у равни може се одредити пресеком двеју координатних линија које припадају различитим фамилијама. Ако се те две линије секу под правим углом, тј. ако су тангенте у тачци њихова пресека нормалне једна на другој, такав криволиниски систем зове се правоугли (или ортогонални). Тако, на пр., праволиниски Декартов, а тако исто и поларни координатни систем примери су правоуглих система.

VII. Хомогене, трилиниске, троугле и најкраће координате.

84. Хомогене координате. Нека x и y означавају координате произвољне тачке у равни, ма каквог правоуглог или косоуглог координатног система, које се уопште називају праволиниским координатама.

Означимо са X, Y, Z три броја који задовољавају услов да су односи прва два са трећим једнаки координатама x и y, тј.

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}.$$

Таква три броја X, Y, Z зову се хомогене координате дате тачке и означавају се симболом (X, Y, Z). Разумљиво је да за исту тачку у равни постоји неограничен број хомогених координата, пошто свака три броја, пропорционална поменутим хомогеним координатама X, Y, Z, дају односе који су једнаки пређашњим бројевима x и y. На тај начин хомогене координате претстављају условне ознаке координата тачке помоћу бројева пропорционалних са њеним праволиниским координатама. Једначине алгебарских кривих постају хомогене по увођењу хомогених координата. На пр., једначина праве општег облика, у хомогеним координатама, претстављена је хомогеном једначином

$$AX + BY + CZ = 0, \tag{1}$$

где су X, Y, Z текуће хомогене координате тачке.

Означимо ли са X_0, Y_0, Z_0, односно X_1, Y_1, Z_1 хомогене координате две дате тачке, то се једначина праве линије што пролази кроз ове две тачке изражава овако (в. образац, глава II, стр. 63, n⁰ 41)

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Једначина круга (23) (в. n⁰ 15 стр. 34), у хомогеним координатама, постаје

$$X^2 + Y^2 = a^2 Z^2. \tag{2}$$

Уведене ознаке за хомогене координате имају велико преимућство код изучавања бесконачно удаљених елемената. Горе дефинисаним појмом хемогених координата обухваћен је и случај када је координата Z једнака нули, за који се уводи претпоставка да за $Z = 0$ координате X, Y, 0 одговарају бесконачно удаљеној тачки, која се обележава симболички са (X, Y, 0). На тај начин једначина праве линије у Декартовим координатама,

$$Ax + By + C = 0,$$

за случај бесконачно удаљене праве, када је $A = B = 0$, $C \gtrless 0$, изражава се у хомогеним координатама једначином

$$Z = 0.$$

У Декартову координатном систему тачка пресека апсцисне осе са хиперболом (19) (в. стр. 32, n⁰ 13) одређује се једначинама

$$y = 0, \quad xy = 1,$$

које се могу задовољити само вредностима $y = 0$ и $x = \infty$. У хомогеним координатама последње једначине добијају облик

$$Y = 0, \quad XY = Z^2.$$

Према томе се тражене координате тачке пресека хиперболе са апсцисном осом изражавају коначним вредностима хомогених координата

$$Y = 0, \quad Z^2 = 0.$$

Најзад, услов да права (1) пролази кроз бескрајно удаљену тачку, $(X_1, Y_1, 0)$, изражава се двема једнакостима

$$AX_1 + BY_1 = 0, \quad Z_1 = 0.$$

Пошто је коефицијент C у једначини праве (1) различит од нуле, посматрана права не пролази кроз координатни почетак; према томе, прва од написаних једнакости одређује само угловни коефицијент, тј. правац на коме лежи бескрајно удаљена тачка.

Као последњи пример примене хомогених координата узмимо једначину круга (2). Очевидно је да је она задовољена вредностима координата

$$X = 1, \quad Y = \pm i, \quad Z = 0.$$

Зато се каже да сваки круг пролази кроз две имагинарне бескрајно удаљене тачке, са хомогеним координатама $(1, +i, 0)$ и $(1, -i, 0)$. Те тачке се називају двема бесконачно удаљеним кружним тачкама.

85. Трилиниске координате. — Претпоставимо да се положај тачке у равни одређује хомогеним координатама X, Y, Z. Уведимо нов систем координата X_1, Y_1, Z_1, који је везан са претходним координатама овим линеарним везама

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= AX + BY + CZ, \\ Y_1 &= A_1X + B_1Y + C_1Z, \\ Z_1 &= A_2X + B_2Y + C_2Z, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где свих девет коефицијената, $A, B, C, A_1, \ldots C_2$, претстављају сталне величине, при чему је детерминанта

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

различита од нуле.

Према томе се и старе координате изражавају новим, такође линеарним једначинама следећег облика

$$\left.\begin{aligned} X &= A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1, \\ Y &= A_1'X_1 + B_1'Y_1 + C_1'Z_1, \\ Z &= A_2'X_1 + B_2'Y_1 + C_2'Z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уведене променљиве, X_1, Y_1, Z_1, називају се трилиниским координатама тачке у равни.

Пошто се нове и старе координате изражавају линеарно једне помоћу других, изрази (3), којима се уводе нове координате, дају тим координатама потпуно одређене вредности. Са уведеним системом трилиниских координата доводи се у везу следећи појам о три осе. Изједначимо са нулом изразе (3) нових координата у облику линеарних функција старих координата, тј. напишимо три једначине,

$$\left.\begin{aligned} AX + BY + CZ = 0\,, \quad A_1X + B_1Y + C_1Z = 0\,, \\ A_2X + B_2Y + C_2Z = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Претпоставимо да три праве линије, одређене последњим једначинама (5), нису паралелне међу собом и, према томе, образују троугао. Тај се троугао назива координатним троуглом, а његове стране координатним осама трилиниског система, одређеног изразима (3). Једнакости (5) претстављају једначине координатних оса уведеног трилиниског координатног система у првобитним хомогеним координатама које се, са своје стране, одређују помоћу праволиниског система координата. Решавајући све по две од једначина система (5) добијамо координате темена координатног троугла у старом, полазном координатном систему. У првоме систему трилиниских координата једначине његових оса претстављају се, на основу израза (3), једначинама

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0.$$

Што се тиче темена координатног троугла, то се трилиниске координате сваког од њих изражавају скупом двеју од једначина (6), које одговарају координатним осама у чијем се пресеку налази дотично теме троугла.

Да бисмо претставили у трилиниским координатама једначину криве линије, дате у хомогеним координатама, довољно је заменити ове последње њиховим изразима (4). За обрнути прелаз, од трилиниских ка хомогеним координатама, довољно је трансформисати ове последње помоћу образаца (3). Но ако ови обрасци нису дати у експлицитном облику, и ако је трилиниски систем координата дат геометриски својим осама, онда је неопходно поставити њихове једначине у хомогеним координатама, у односу на било какав произвољно изабрани праволиниски координатни систем [тј. поставити једначине облика (5)]. Затим треба њихове леве стране изједначити са симболима за уведене трилиниске координате; на тај начин се добијају обрасци за трансформацију (3).

Сви обрасци за трансформацију (3) и (4) линеарни су у односу на хомогене и трилиниске координате. Према томе, *свака алгебарска крива линија претставља се једначином истог реда како у праволиниским, тако и у хомогеним, и у трилиниским координатама.* Осим тога све алгебарске криве линије изражавају се хомогеним алгебарским једначинама у хомогеним и у трилиниским координатама.

Према томе права се изражава помоћу једне линеарне хомогене једначине у трилиниским координатама. Обрнуто, свака линеарна хомогена једначина у овим координатама одређује једну праву.

Криве другог степена у Декартовим координатама изражавају се такође помоћу једначина другог степена у трилиниским координатама.

86. Примене трилиниских координата. — Наведимо неколико примера. 1° Поставимо, у трилиниским координатама, једначину праве линије која пролази кроз две дате тачке, (X_{11}, Y_{11}, Z_{11}) и (X_{12}, Y_{12}, Z_{12}). Узмимо у ту сврху једначину праве у трилиниским координатама општег облика

$$PX_1 + QY_1 + RZ_1 = 0,$$

где су P, Q и R непознати коефицијенти.

Пошто координате обе дате тачке морају задовољавати ову једначину, добијамо две идентичности

$$PX_{11} + QY_{11} + RZ_{11} = 0,$$

$$PX_{12} + QY_{12} + RZ_{12} = 0.$$

Према томе тражена једначина добија се елиминацијом непознатих величина P, Q и R из три написане једначине, у облику

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_{11} & Y_{11} & Z_{11} \\ X_{12} & Y_{12} & Z_{12} \end{vmatrix} = 0\,.$$

2⁰ Једначина бескрајно удаљене праве, у хомогеним координатама, изражава се овако (в. стр. 103, n⁰ 84)

$$Z = 0.$$

Одатле дотична права, у трилиниским координатама, изражава се, према трећем обрасцу (4), једначином

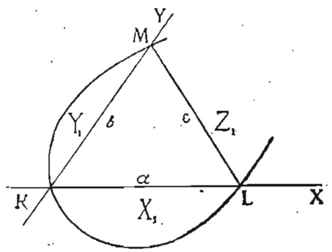
$$A_2'X_1 + B_2'Y_1 + C_2'Z_1 = 0.$$

3⁰ Из горе наведених разлога, криве другог реда изражавају се, у трилиниским координатама, једначином општег облика

$$AX_1^2 + 2BX_1Y_1 + CY_1^2 + 2DX_1Z_1 + 2EY_1Z_1 + FZ_1^2 = 0. \qquad (7)$$

Уведимо претпоставку да ова крива мора пролазити кроз три дате тачке, K, L и M, у равни (сл. 58).

Узмимо дотичне тачке за темена координатног троугла трилиниског координатног система, праву KL за осу X_1, KM за осу Y_1 и LM за осу Z_1. Пошто се темена координатног троугла налазе на кривој (7), то координате тачке K, $X_1 = 0$ и $Y_1 = 0$, морају задовољавати једначину (7). Према томе њен коефицијент F мора бити једнак нули. На сличан начин долазимо до закључка да су $A = C = 0$, тј. тражена крива, описана око троугла ΔKLM, постаје



Сл. 58

$$B_1X_1Y_1 + DX_1Z_1 + EY_1Z_1 = 0. \qquad (8)$$

Трансформишимо добијену једначину у хомогени координатни систем и, најзад, у Декартов систем. У ту сврху узмимо за почетак овог система координата теме K датог троугла Δ KLM; међутим, за осе X и Y косоуглог искористимо стране KL и KM посматраног троугла. Ако означимо дужине страна дотичног троугла са a, b и c, једначине оса старих трилиниских координата, у хомогеним координатама, добијају облик

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - Z = 0.$$

Према томе, обрасци трансформације (3) сада постају

$$\left.\begin{aligned} X_1 = X, \qquad Y_1 = Y,\\ Z_1 = \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} - Z. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Уврстимо добијене вредности (9) старих трилиниских координата X_1, Y_1, Z_1 у једначину (8). Ова тада постаје

$$Db\,X^2 + (Bab + Da + Eb)\,XY + Ea\,Y^2 - ab\,(DX + EY)\,Z = 0. \qquad (10)$$

Одговарајућа једначина у поменутом Декартову координатном систему добија се одавде ако ставимо

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = 1.$$

Једначина (10), под овом претпоставком, постаје

$$Db\,x^2 + (Bab + Da + Eb)\,xy + Eay^2 - ab\,(Dx + Ey) = 0. \qquad (11)$$

Лако се види да добијена крива линија пролази кроз дате тачке

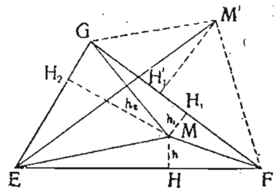
$$(0,0), \qquad (a,0) \qquad (0,b).$$

Заиста, координате дотичних тачака задовољавају идентички једначину (11).

87. Троугле координате. — Троугле координате специјалан су случај трилиниских координата, при чему посматране координате добијају просто геометриско тумачење. У обрасцима (3) и (5) ставимо да је $Z = 1$, тј. $X = x$, $Y = y$ и одговарајуће вредности координата X_1, Y_1, Z, означимо са X_1', Y_1', Z_1', тако да добијамо једнакости

$$\left.\begin{aligned} X_1' = Ax + By + C, \qquad Y_1' = A_1x + B_1y + C_1,\\ Z_1' = A_2x + B_2y + C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Најзад, означимо са μ, μ_1 и μ_2 одговарајуће множитеље за довођење на нормални облик једначина правих линија (у правоуглим координатама), које се добијају из једначина (5). Претпоставимо да се почетак Декартова координатног система налази у координатном троуглу. Нека се и посматрана тачка M (сл. 59) налази у томе троуглу. У том случају се њена растојања, h, h_1 и h_2, од одговарајућих страна координатног троугла израчунавају вредностима



Сл. 59

$$h = -\mu X_1'; \quad h_1 = -\mu_1 Y_1'; \quad h_2 = -\mu_2 Z_1'. \qquad (13)$$

Ако се дата тачка M налази изван координатног троугла, онда се при постављању израза за њено растојање од страна координатног троугла узима знак + или —, према томе какав је узајамни положај тачке и почетка праволиниског координатног система у односу на стране координатног троугла. Претпоставимо да тачка M прелази из унутрашњости координатног троугла у област ван њега, пресецајући при томе једну од страна координатног троугла. Тада се у обрасцу за растојање тачке од те стране троугла мења знак.

Изрази (13) показују да су посматране координате, у нашем специјалном случају, т.зв. т р о у г л е, пропорционалне растојањима уочене тачке од страна координатног троугла.

Ако установимо да уз координате тачака, које леже у троуглу, пишемо било који одређени знак, онда, према раније реченом, свака координата тачке која, у односу на првобитну тачку, лежи са друге стране дотичне координатне осе, има са дотичном тачком супротан знак.

Троугле координате X_1', Y_1', Z_1', одређене аналитички једначинама (12) зависне су међу собом. Заиста, пошто су једначине (12) линеарне по x и y, то елиминација тих координата из три линеарне једначине (12) доводи до једне линеарне везе између троуглих координата X_1', Y_1', Z_1'. Да бисмо одредили ту везу, спојимо правим линијама тачку $M(X_1', Y_1', Z_1')$ са теменима координатног троугла, и разделимо га на три троугла. Збир њихових површина једнак је површини координатног троугла. Према томе, ако означимо са a, b и c дужине одговарајућих страна координатног троугла, а са S његову површину, добијамо везу

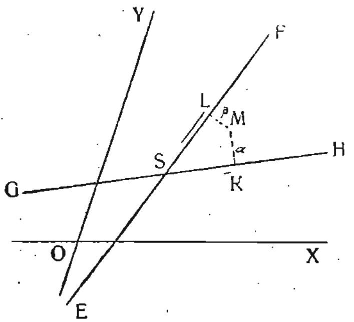
$$a\,h + b\,h_1 + c\,h_2 = 2\,S\,.$$

Узимајући у обзир обрасце (13), ова зависност постаје

$$a\mu X_1' + b\mu_1 Y_1' + c\mu_2 Z_1' = -2\,S. \tag{14}$$

Добијена линеарна веза важи за све случајеве, ма какав био положај тачке M према координатним осама. На основу (14) може се једна од троуглих координата изразити помоћу остале две, и можемо се вратити на систем двеју независних координата. Но ради симетричности згодније је при испитивањима користити се хомогеним обрасцима и, место са троуглим, оперисати са трилиниским координатама (3).

88. Најкраће координате. — Узмимо у односу ма на који праволиниски координатни систем XOY (сл. 60) у равни две праве линије, GH и EF, које нису паралелне.



Сл. 60

Из неке тачке M у равни датих правих повући ћемо на дате праве нормале, MK и ML. Означимо бројевима α и β величине њихових дужина. Дотичне вредности изражавају се помоћу координата тачке M и једначина правих GH и EF, односно координатног система XOY (в. стр. 65, n⁰ 44).

Претпоставимо да се координатни почетак O налази у унутрашњости угла, између посматраних правих GH и EF. Ако њихове једначине узмемо у облику

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{15}$$

онда добијамо

$$\alpha = \mu\,(Ax + By + C), \qquad \beta = \mu_1\,(Ax_1 + B_1y + C_1), \tag{16}$$

где су μ и μ_1 множитељи који своде дате једначине (15) на нормалан облик, а x и y означавају координате тачке M.

Свакој тачки M у равни одговарају увек два броја α и β, које ћемо сматрати за координате дотичне тачке M.

Добијени обрасци (16) претстављају изразе за трансформацију нових координата, α и β, у старе, x и y. Ове се координате α и β зову **најкраће**.

Да бисмо изразили старе координате новима, довољно је да решимо по x и y обрасце (16). Пошто су ове једначине линеарне по x и y, то се по себи разуме да се и старе координате изражавају линеарно у односу на нове координате.

Према томе свака права изражава се помоћу линеарне једначине односно најкраћих координата.

И обрнуто, свака линеарна једначина у најкраћим координатама одређује једну праву линију. Дате праве, GH и EF, зову се **осе система најкраћих координата**.

Према узетим једначинама оса у праволиниском систему (15), обрасци (16) дају за осе система најкраћих координата једначине

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Међутим обе једначине одређују заједничку тачку S.

Осе посматраног система најкраћих координата деле раван у четири дела, који се разликују знацима, + и —, који морају да се узму при израчунавању дужина растојања дате тачке од координатних оса.

Према томе, у посматраном случају, за све тачке у унутрашњости ∢HSF добијамо

$$\alpha > 0, \qquad \beta > 0.$$

Међутим, за тачке у унутрашњости угла ∢GSF имамо

$$\alpha > 0, \qquad \beta < 0.$$

Тачкама које се налазе у унутрашњости угла ∢GSE одговарају негативне вредности обеју координата

$$\alpha < 0, \qquad \beta < 0.$$

Најзад, за све тачке у области четвртог угла ∢ESH је

$$\alpha < 0, \qquad \beta > 0.$$

На овај начин, свака два броја потпуно одређују положај тачке у односу на осе система најкраћих координата. Према томе положај одређене тачке равни, у сваком од четири наведена угла, зависи од знака најкраћих координата тачке.

---

89. Примери и задаци.

1—3. Одговоримо на прва три питања у n⁰ 25 ма у ком косоуглом координатном систему.

4. Израчунати координате свих темена правилног шестоугла, чија је дужина стране дата, под условом да су за координате оса узете његове по две суседне стране.

5. Израчунати растојање између тачака датих у задацима 4 и 5 n⁰ 25, под претпоставком да се дате координате односе на косоугле координате система са нормалним координатним угловима од 30^0, 60^0 120^0, одн. 135^0.

6. Одредити углове које заклапа са косоуглим координатним осама отсечак који спаја две дате тачке. Применити добијене изразе на претходне примере.

7. Дате су координате три темена паралелограма; израчунати координате четвртог темена.

8. Дате су координате три темена троугла; израчунати координате тачака које су симетричне односно наспрамних страна.

9. Извести изразе за координате тачке која дели растојање између датих тачака у датом односу.

10. Какав је узајамни положај двеју тачака: (a, b) и $\left(\frac{a}{1+\lambda}, \frac{b}{1+\lambda}\right)$?

11. Доказати да унутрашња и спољашња симетрала ма каквог угла деле хармониски сваки отсечак праве који лежи међу странама посматраног угла.

12. Израчунати површине троуглова, паралелограма и петоугаоника, наведених у задацима 4, 8, 15, 25 и 26, n° 25, под претпоставком да се дате координате односе на косоугле координатне системе са нормалним координатним угловима од 30°, 60°, 120°, одн. 135°.

13. Претставити графички функције наведене под бројем 27, у n° 25, у косоуглим координатним системима са нормалним координатним угловима од 30°, 45°, одн. 120°.

14. Поставити једначине геометриских места наведених у бројевима 30 и 31, у n° 25, односно ма каквог косоуглог координатног система општег облика.

15. Одговорити на питања постављена у задацима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 15, n° 25, под претпоставком да се дате координате и посматране праве односе на косоугле координатне системе са нормалним координатним угловима од 30°, 45°, одн. 120°.

16. Поставити једначине унутрашње и спољашње симетрале нормалног угла косоуглог координатног система.

17. У косоуглом координатном систему дата је права једначином

$$5x - 16y + 20 = 0.$$

Израчунати њен отсечак између координатних оса, када се узме да је нормални координатни угао једнак 60°.

18. Две праве, које се секу под углом од 45°, изражавају се у косоуглом координатном систему респективно једначинама

$$ax + by = 0 \quad \text{и} \quad ax - by = 0.$$

Наћи нормални угао између координатних оса.

19. Одредити у косоуглом координатном систему површину троугла, чије је једно теме у тачки (3, 5), а друга два темена у тачкама пресека праве

$$2x - 3y + 12 = 0$$

са координатним осама.

20. Наћи услов под којим тачка пресека дијагонала трапеза лежи на дијаметру његових паралелних страна.

21. Извести образац за одређивање растојања дате тачке од праве, претстављене једначином нормалног и општег облика (види стр. 64, n° 44; стр. 78 n° 55).

22. Поставити једначине унутрашње и спољашње симетрале угла који заклапају две дате праве.

23. Наћи величину односа у коме права дели растојање између две тачке, за разне облике једначине праве (види стр. 67, n° 46; стр. 78, n° 55).

24. Применити изразе из претходног (23-ег) задатка за доказ *Менелајеве* теореме: *Ако стране троугла пресечемо ма каквом правом, онда је производ односа састављених од отсечака сваке стране троугла, узетих узастопним редом, једнак негативној вредности јединице* (види стр. 89, n° 71).

25. Поставити изразе за трансформацију координата узевши за нови почетак једно од три (редом) темена квадрата, конструисана на старим осама са теменом у старом почетку; проучити све случајеве када нове осе имају правце паралелне старим осама, или супротне њима.

26. При условима из претходног задатка узети за нови почетак тачку пресека дијагонала поменутог квадрата, а за нове осе — стране једног од четири угла које образују дијагонале.

27. Одговорити на сва питања формулисана у два претходна задатка, под условом да место квадрата посматрамо правоугаоник.

28. Место дијагонала правоугаоника, наведена у претходном задатку, узети за нове осе две суседне стране ромба, уписана у посматраном правоугаонику.

29. У једнакостраном троуглу $\triangle ABC$ узмимо за старе осе стране AB и AC, а за нове осе, прво BC и BA, а затим CA и CB. Поставити изразе за трансформацију координата у оба случаја.

30. Дата су два координатна система са истим правцем оса, али са различитим почецима. Израчунати, у односу на сваки од тих система, средину растојања између почетака, на основу услова да је једна иста тачка, у односу на дате системе, одређена координатама (8, — 3) и (— 2, — 7).

31. Дата је тачка (2, 1) у старом координатном систему. Израчунати њене координате у новом систему са старим почетком и апсцисном осом, за коју као ординатна оса служи симетрала пређашњег нормалног угла.

32. Трансформисати једначину круга $x^2 + y^2 = a^2$ у новом координатном систему, са почетком у произвољној тачци у равни и са пређашњим правцем њених оса.

33. Трансформисати претходну једначину у новом систему координата са старим почетком, а са новим осама које се поклапају са симетралама страна нормалног угла. За другу трансформацију узети нови координатни систем, који се добија ако се стари обрне око свог почетка за неки угао α.

34. Трансформисати једначину криве $x^2 - y^2 = a^2$ у нови систем са старим почетком; за нову апсцису осу узети симетралу старог четвртог квадранта, а за нову ординатну осу — симетралу старог нормалног угла.

35. Поставити изразе за трансформацију координата, када се за нове осе узму две праве одређене датим једначинама у старом координатном систему.

36. Одредити тачку пресека двеју правих у трилиниском систему координата.

37. Дата је тачка у трилиниском систему координата. Поставити једначине правих које спајају ту тачку са теменима координатног троугла.

38. Дате су две праве у трилиниским координатама. Наћи једначине правих, које спајају тачку њихова пресека са теменима координатног троугла.

39. Дата је права линија у трилиниским координатама. Наћи њену тачку пресека са странама координатног троугла и једначине правих, које спајају нађене тачке са наспрамним теменима координатнога троугла.

40. Поставити у трилиниским координатама једначину криве другог реда која додирује дате две праве.

41. Израчунати Декартове координате тачака одређених поларним координатама

$$1{,}45^0; \quad 3{,}210^0; \quad 2{,}315^0$$

под условом да се пол поклапа са почетком, а поларна оса са апсцисном осом.

42. Дата је тачка у Декартову систему (4,1). Израчунати њене координате у поларном систему са полом у тачки (1,—2) и поларном осом која гради са апсцисном осом угао од 30°.

43. Једна иста тачка одређена је поларним координатама 15,75° и 8,15° у односу на два система са паралелним осама. Израчунати растојање између полова оба система.

44. Поставити у поларном координатном систему једначине: *Паскалова пужа*, *кардиоиде* (задатак 33, n° 25), *лемнискате* (задатак 34, n° 25), *цисоиде* (задатак 35, n° 25).

45. Поставити у поларном координатном систему једначину *строфоиде* која се овако дефинише: из дате тачке, која лежи на једном краку правог угла, полазе зраци; од њихових тачака пресека са другим краком правог угла одмеримо на зрацима (са обе стране тога крака) отсечке једнаке растојању тачке пресека зрака од темена угла. Геометриско место крајева одмерених отсечака претставља тражену криву.

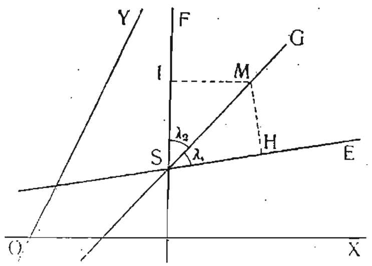
ГЛАВА ЧЕТВРТА

СКРАЋЕНИ НАЧИН. ПРАМЕН ПРАВИХ

I. Скраћени начин.

90. Појам о скраћеном начину. — Под скраћеним начином подразумева се начин решавања проблема Аналитичке геометрије, заснован на скраћеном, условном обележавању леве стране једначине праве једним словом, као симболом, у циљу упрошћавања ознака. Тим начином користили смо се горе, при постављању једначине симетрале углова и при решавању других питања (в. стр. 65, n⁰ 44; стр. 68, n⁰ 47; стр. 69, n⁰ 48).

Скраћеним начином нарочито је згодно користити се код посматрања једначине правих што пролазе кроз тачку пресека двеју датих права. Нека су дате две праве, SE и SF (сл. 61), које се секу у тачки S.



Сл. 61

Напишимо њихове једначине ма у каквом праволиниском координатном систему XOY, на следећи скраћени начин

$$l=0, \qquad m=0, \tag{1}$$

где l и m респективно означавају линеарне изразе у односу на праволиниске текуће координате. Свака трећа права линија, SG, која пролази кроз тачку пресека S двеју датих правих, претстављена је једначином следећег општег облика

$$l-k\,m=0. \tag{2}$$

Заиста, написана једначина је линеарна у односу на текуће координате које улазе линеарно у обе једначине (1). Осим тога, једначина (2) задовољена је идентички за вредности координата које истовремено задовољавају обе једначине (1), тј. за тачку S. Према томе једначина (2) одређује праву која пролази кроз тачку пресека обеју датих правих (1).

Да не би једначина (2) садржавала неодређеност, коефицијент k мора бити одређен на основу извесних допунских услова. На пр., ако права (2) мора да пролази кроз дату тачку $M(x_0, y_0)$, мора постојати идентичност

$$l_0-km_0=0, \qquad k=\frac{l_0}{m_0},$$

где смо са l_0 и k_0 означили резултат замене текућих координата, x и y, координатама x_0, y_0 дате тачке, у изразима l и m. Према томе се права GS изражава одређеном једначином

$$l-\frac{l_0}{m_0}m=0. \tag{3}$$

У супротном, може се увести услов да тражена права заклапа са правама (1) дате углове λ_1 и λ_2. При томе ћемо, као и обично, за позитиван смер обртања при рачунању углова увек узимати онај који води од осе OX ка OY. Спустимо из неке тачке M нормале MH и MJ на праве SE и SF. Из правоуглих троуглова Δ SKL и Δ SML добијамо

$$HM=SM\,sin\,\lambda_1, \quad JM=SM\,sin\,\lambda_2. \tag{4}$$

Претпоставимо да су једначине (1) дате у нормалном облику. У таквом случају претпостављамо да координатни почетак O лежи у углу $\sphericalangle$ESF, те важе једначине

$$l_0=HM, \quad m_0=JM.$$

Према томе коефицијент k у једначини (2), на основу израза (4), има вредност

$$k=\frac{l_0}{m_0}=\frac{HM}{JM}=\frac{sin\,\lambda_1}{sin\,\lambda_2}, \tag{5}$$

а једначина (2) постаје

$$l-\frac{sin\,\lambda_1}{sin\,\lambda_2}m=0.$$

Ако су праве ES и FS дате једначинама (1) у општем облику, онда је

$$\mu\,l_0=HM, \quad \mu_1\,m_0=JM,$$

где μ и μ_1 означавају одговарајуће множитеље којима се једначине (1) преводе из општег у нормални облик. У таквом случају (5) постаје

$$k=\frac{l_0}{m_0}=\frac{\mu_1\,HM}{\mu\,JM}=\frac{\mu_1\,sin\,\lambda_1}{\mu\,sin\,\lambda_2}, \tag{6}$$

а једначина (2) гласи

$$l-\frac{\mu_1\,sin\,\lambda_1}{\mu\,sin\,\lambda_2}m=0. \tag{7}$$

Најзад, могу бити дати услови који одређују положај праве SG као паралелне или као нормалне у односу на трећу дату праву итд.

91. Услов пресека три праве у једној тачки. — Претпоставимо да су дате, ма у каквом праволиниском координатном систему, три праве једначинама:

$$l=0, \quad m=0, \quad n=0. \tag{8}$$

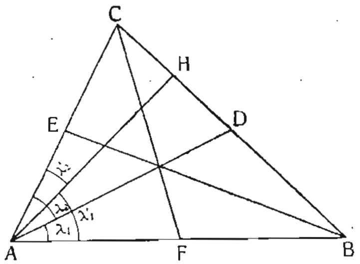
Да би последња права (8) пролазила кроз тачку пресека прве две праве, треба да се њена једначина разликује од једначине (2) само сталним множитељем, тј. мора бити

$$l - km = \mu n, \quad \text{или} \quad pl + qm + rn = 0\,, \tag{9}$$

где μ или p, q, r претстављају сталне множитеље. На тај начин долазимо до пређашњег закључка (в. стр. 60, n⁰ 37), наиме да *се праве претстављене једначинама (8) секу у једној тачки, ако су њихове леве стране линеарно зависне међу собом, тј. ако постоје три стална множитеља који задовољавају идентичност (9).*

Искористимо изложену теорију за доказ следећих теорема.

92. Медијане троугла секу се у истој тачки. — Применимо изложени скраћени начин расуђивања за доказ ове већ раније доказане теореме (в. n⁰ 69, стр. 88).



Сл. 62

Зато означимо (сл. 62) једначине страна AB, AC и BC троугла $\triangle$ ABC респективно са

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0.$$

Претпоставимо да су ове праве изражене једначинама општег облика у односу на извесни Декартов систем координата и да μ, r, односно ζ претстављају множитеље који доводе дотичне једначине на нормални облик.

Повуцимо медијане AD, BE и CF; означимо са λ_1 и λ_2 углове које прва медијана заклапа са странама троугла AB, односно AC. Према томе једначина медијане AD постаје

$$l - \frac{r}{\mu}\,\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2}\,m = 0.$$

Означимо са A, B и C углове посматраног троугла у одговарајућим теменима. Према томе добија се из троуглова $\triangle$ ABD и $\triangle$ ADC

$$\frac{\sin\lambda_1}{\mathrm{BD}} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\mathrm{AD}}, \qquad \frac{\sin\lambda_2}{\mathrm{DC}} = \frac{\sin \mathrm{C}}{\mathrm{AD}}.$$

Али пошто је

$$\mathrm{BD} = \mathrm{DC},$$

добијамо

$$\frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}}.$$

Зато једначина медијане AD добија облик

$$l - \frac{r}{\mu}\,\frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}}\,m = 0.$$

На сличан начин се израчунавају једначине медијана BE и CF овако:

$$n - \frac{\mu}{\zeta}\,\frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{A}}\,l = 0, \qquad m - \frac{\zeta}{r}\,\frac{\sin \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B}}\,n = 0.$$

Ако помножимо обе стране једначина медијана именитељима њихових других чланова и резултате саберемо, онда ћемо добити идентичност

$$\mu \sin \mathrm{C}\, l + \zeta \sin \mathrm{A}\, n + r \sin \mathrm{B}\, m \quad r \sin \mathrm{B}\, m - \mu \sin \mathrm{C}\, l - \zeta \sin \mathrm{A}\, n \equiv 0\,.$$

Према томе посматране медијане секу се у истој тачки.

93. Висине троугла секу се у једној тачки. — Повуцимо висину AH (сл. 62) из темена A троугла $\triangle$ ABC. Означимо са λ_1' и λ_2' углове које заклапа висина AH са странама AB, односно AC посматраног троугла. Према пређашњим ознакама, једначина висине AH постаје

$$l - \frac{r}{\mu}\,\frac{\sin\lambda_1'}{\sin\lambda_2'}\,m = 0.$$

Али из правоуглих троуглова $\triangle$ ABH и $\triangle$ AHC, са правим угловима код темена H, налазимо

$$\sin\lambda_1' = \cos \mathrm{B}, \qquad \sin\lambda_2' = \cos \mathrm{C}.$$

Према томе последња једначина висине AH постаје

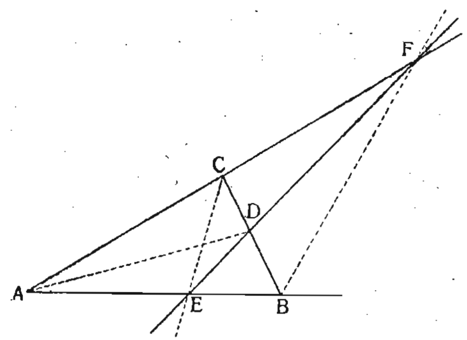
$$l - \frac{r}{\mu}\,\frac{\cos \mathrm{B}}{\cos \mathrm{C}}\,m = 0.$$

На сличан начин добијају се једначине висина троугла $\triangle$ ABC, које су спуштене из темена B и C,

$$n - \frac{\mu}{\zeta}\,\frac{\cos \mathrm{C}}{\cos \mathrm{A}}\,l = 0, \qquad m - \frac{r}{\zeta}\,\frac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{B}}\,n = 0.$$

Збир производа добијених једначина, помножених именитељима њихових других чланова, на њиховој левој страни, даје идентичност. Према томе висине троугла секу се у једној те истој тачки.

94. Пресеци унутрашњих и спољашњих симетрала троугла. — Доказаћемо следећи став: *тачке пресека двеју унутрашњих и једне спољне симетрале углова троугла са његовим супротним странама леже на једној те истој правој.*



Сл. 63

Означимо са D и E (сл. 63) тачке пресека унутрашњих ситрала углова A, односно C са странама троугла $\triangle$ ABC. Обележимо са F тачку пресека спољашње симетрале угла B троугла са продужетком супротне стране AC.

Означимо, у односу на извесни Декартов координатни систем са координатним почетком који се налази у троуглу $\triangle$ ABC, једначине у нормалом облику страна AB, AC, односно BC са

$$l=0,\qquad m=0,\qquad n=0.$$

Iрема томе једначине унутрашњих симетрала, AD и CE, постају

$$l-m=0,\qquad m-n=0.$$

Iеђутим једначина спољашње симетрале, BF, гласи

$$l+n=0.$$

:вака од трију тачака D, E, односно F лежи на пресеку две праве, наиме еспективно

$$\left.\begin{array}{ll} l-m=0, & n=0, \\ l=0, & m-n=0, \\ m=0, & l+n=0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

эдначина сваке праве која пролази кроз тачку D изражава се овако, на снову обрасца (2),

$$l-m-kn=0, \tag{11}$$

це је k произвољни коефицијент. Али да би ова права (11) пролазила кроз ачку E, која је одређена једначинама другог реда (10), једначина (11) мора е ништити на основу ових једначина. Зато мора постојати услов

$$k=-1. \tag{12}$$

Iрема томе једначина праве, која спаја тачке D и E, добија се из једнаине (11) под претпоставком (12), и изражава се овако:

$$l-m+n=0. \tag{13}$$

Iошто ову једначину задовољава идентички једначина трећег реда (10), рава (13) пролази и кроз тачку F. Одавде следи да све три тачке D, E F леже на истој правој.

Нека читаоци сами докажу формулисани став и за друге комбинаије двеју унутрашњих и једне спољашње симетрале троугла.

Тај доказ може се извршити под претпоставком да су дате једначине трана посматраног троугла у нормалном облику. Но исти став може се оказати и под претпоставком да су једначине страна троугла претстављене општем облику.

95. Менелајева теорема. — Наведена теорема (в. n° 71. стр. 89) ласи: *свака права дели стране ма ког троугла на отсечке тако да је роизвод њихових односа, узетих узастопним редом, једнак — 1.*

Вратимо се сл. 45 (стр. 89).

Права GH сече стране посматраног троугла $\triangle$ ABC у тачкама D, E (F. Прве две стране секу се на унутрашњи, а последњи на спољашњи на

чин. Напишимо једначину сечице GH у односу ма на који праволиниски координатни систем, на овај начин

$$\mathrm{L}=0.$$

Тада се (в. стр. 67, 78) односи у којима наша права дели сваку од страна троугла изражавају обрасцима:

$$\frac{AD}{DB}=-\frac{L_1}{L_2},\qquad \frac{BE}{EC}=-\frac{L_2}{L_3},\qquad \frac{CE}{FA}=-\frac{L_3}{L_2},$$

где L_1, L_2, и L_3 означавају резултате замене текућих координата координатама узастопних темена A, B, односно C, које ћемо обележити са 1, 2 и 3 троугла $\triangle$ ABC, на левој страни једначине сечице. Ако добијена три односа помножимо међу собом и скратимо, добићемо тражени резултат

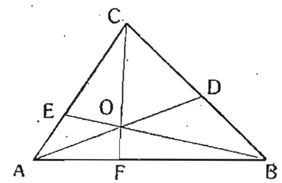
$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1.$$

Није тешко доказати да Менелајева теорема остаје у важности и у случају када сечица сече све три стране троугла спољашњим пресеком.

96. Чевиева теорема. — Ова теорема гласи: *три праве линије које спајају темена датог троугла ма са којом тачком деле сваку троуглову страну на отсечке, тако да је производ њихових односа, узетих узастопним редом, једнак + 1.*

Спојимо тачку O (сл. 64) троугла $\triangle$ ABC правим линијама са његовим теменима и обележимо тачке пресека ових правих са странама троугла респективно са D, E и F. Нека су једначине страна троугла AB, AC и BC у ком било праволиниском координатном систему претстављене респективно једнакостима

$$l=0,\quad m=0,\quad n=0.$$



Сл. 64

Ако координате тачке O означимо са x_0, y_0, једначине сечица AD, BE и CF, према (3), биће

$$l-\frac{l_0}{m_0}m=0,\qquad n-\frac{n_0}{l_0}l=0,\qquad m-\frac{m_0}{n_0}n=0.$$

Координате темена A одређују се скупом једначина $l=0$ и $m=0$; координате темена B једначинама $l=0$, $n=0$ и, најзад, координате темена C једначинама $m=0$, $n=0$. Означимо са 1, 2, 3 респективно узастопна темена A, B и C нашег троугла. Ако те координате унесемо у леве стране једначина сечица и резултат замене обележимо одговарајућим ознакама, добићемо (в. стр. 67, 78) тражене односе

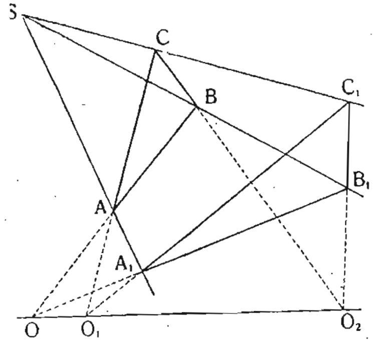
$$\frac{AF}{FB}=\frac{m_0\,n_1}{n_0\,m_2},\quad \frac{BD}{DC}=\frac{l_0\,m_2}{m_0\,l_3},\quad \frac{CE}{EA}=\frac{n_0\,l_3}{l_0\,n_1}.$$

Ако сва три односа помножимо и извршимо скраћивања на десној страни једначине, добићемо тражену везу

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

Изведени доказ важи независно од тога где се налази тачка O, у унутрашњости или ван датог троугла.

97. Особине перспективних троуглова. — За два троугла, $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ (сл. 65), каже се да су перспективни, ако им одговарајућа темена леже на три праве линије које се секу у једној тачки S.



Сл. 65

Перспективни троуглови одликују се особином да *тачке пресека одговарајућих страна леже на једној правој линији.* Означимо стране AB, AC и BC троугла $\triangle ABC$ у ком било праволиниском координатном систему одговарајућим једначинама

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0. \tag{14}$$

Ако координате тачке S означимо са x_0, y_0, онда се праве SA, SB и SC, према обрасцу (3), могу претставити једначинама

$$l - \frac{l_0}{m_0}\, m = 0, \quad n - \frac{n_0}{l_0}\, l = 0, \quad m - \frac{m_0}{n_0}\, n = 0. \tag{15}$$

Уведимо, краткоће ради, ознаке

$$\frac{l}{l_0} \equiv u, \quad \frac{m}{m_0} \equiv v, \quad \frac{n}{n_0} \equiv w.$$

Пошто се геометриско значење једначина кривих линија не мења ако их помножимо сталним множитељем, једначине (14) и (15) могу бити замењене респективно једначинама

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{16}$$

$$u - v = 0, \quad w - u = 0, \quad v - w = 0. \tag{17}$$

На сличан начин, једначине страна A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 другога троугла $\triangle A_1B_1C_1$ и једначине правих SA_1, SB_1 и SC_1 могу бити претстављене овако

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0, \tag{18}$$

$$u_1 - v_1 = 0, \quad w_1 - u_1 = 0, \quad v_1 - w_1 = 0. \tag{19}$$

Пошто једначине (17) и (19) претстављају респективно исте праве SA, SB и SC, то морају постојати идентичности

$$u - v \equiv k(u_1 - v_1), \quad w - u \equiv k_1(w_1 - u_1), \quad v - w \equiv k_2(v_1 - w_1), \tag{20}$$

где су k, k_1 и k_2 извесни стални множитељи. Међутим, пошто је збир левих страна три једнакости (20) идентички једнак нули, то њиховим сабирањем добијамо идентичност

$$(k - k_1)\, u_1 + (k_2 - k)\, v_1 + (k_1 - k_2)\, w_1 = 0.$$

Пошто једначине (18) претстављају стране троугла $\triangle A_1B_1C_1$ које се не секу у једној тачки, то између њихових левих страна не може постајати линеарна зависност. Према томе добијена идентичност може постојати само под условом да су сва три коефицијента

$$k - k_1, \quad k_2 - k, \quad k_1 - k_2$$

идентички једнаки нули, тако да је

$$k = k_1 = k_2.$$

Може се претпоставити, да се не ограничи ни најмање општост расуђивања, да је $k = 1$. Тога ради довољно је леве стране једначина (18) поделити сталним множитељем k. Тада се мењају само ознаке левих страна једначине (18) и (19) без промене њихова геометриског значења. У том случају идентичности (20) постају

$$u - v \equiv u_1 - v_1, \quad w - u \equiv w_1 - u_1, \quad v - w \equiv v_1 - w_1. \tag{21}$$

Добијене једнакости (21) могу се написати и овако

$$u - u_1 \equiv v - v_1 \equiv w - w_1. \tag{22}$$

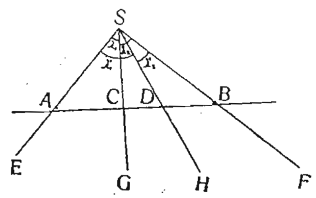
Означимо сваки од ових израза словом T. Оно претставља линеарну функцију текућих координата; стога једначина

$$T = 0 \tag{23}$$

одређује праву линију. Функција T је идентички једнака нули, због прве од једначина (16) и прве од једначина (18); то значи да права (23) пролази кроз тачку пресека O одговарајућих страна AB и A_1B_1 посматраних перспективних троуглова. На основу идентичности (22), права (23) пролази и кроз обе друге тачке O_1 и O_2, тј. *тачке пресека одговарајућих страна перспективних троуглова леже на једној правој OO_2* чија једначина има облик (23). Посматрани троуглови зову се такође х о м о л о г и, тачка S — ц е н т а р х о м о л о г и ј е, а права OO_2 — о с а х о м о л о г и ј е. Лако је доказати и обрнуту теорему, ниже формулисану у задатку 15.

II. Прамен правих.

98. Дефиниција прамена. — Једначина (2) за одређену вредност коефицијента k означава одговарајућу праву SG (сл. 66), која пролази кроз тачку пресека SE и SF. Мењајући непрекидно број k добијамо безброј правих, које се секу у тачки S. Скуп свих тих правих зове се п р а м е н п р а в и х које пролазе кроз S. Свака полу-права SG зове се з р а к п р а м е н а; дате праве SE и SF зову се о с н о в н и м з р а ц и м а, а тачка S ц е н т р о м прамена. Једначина (2) претставља општи облик једначине прамена правих, одређених једначинама основних зракова (1), а k се зове к о е ф и ц и ј е н т р а с п о д е л е з р а к о в а прамена. За вредност $k = 0$ добијамо први оснвни знак (1), а за $k = \infty$ други основни зрак. Као што је горе



Сл. 66

аведено, коефицијент k се изражава, на основу израза (5), помоћу углова оје заклапа посматрани зрак са оба основна зрака.

Нека је дат прамен од четири зрака SE, SF, SG и SH (сл. 66), од ојих су прва два основни и претстављени, у односу ма на који праволи- иски координатни систем, једначинама

$$l \equiv 0, \quad m \equiv 0. \tag{24}$$

руга два зрака претставићемо респективно једначинама

$$l - km \equiv 0, \quad l - k'm \equiv 0, \tag{25}$$

де су k и k' одговарајући коефицијенти. Ако са λ_1, λ_2, λ'_1, λ'_2 означимо глове које зраци SG и SH респективно заклапају са основним зрацима, а основу (6) добијамо

$$k = \frac{\mu_1 \sin\lambda_1}{\mu \sin\lambda_2}, \quad k' = \frac{\mu_1 \sin\lambda'_1}{\mu \sin\lambda'_2}, \tag{26}$$

де μ и μ_1 означавају одговарајуће множитеље помоћу којих се једначине 24) своде на нормални облик. Ако су те једначине већ узете у нормалном блику, онда је сваки множитељ једнак јединици. Величина односа коефи- ијената k и k', тј. $\frac{k}{k'}$ назива се *сложеним* или *анхармониским односом че- ири зрака (24) и (25)*. Изрази (26) показују да величина сложеног односа осматрана четири зрака

$$\frac{k}{k'} = \frac{\sin\lambda_1}{\sin\lambda_2} : \frac{\sin\lambda'_1}{\sin\lambda'_2}$$

е зависи од величине односа $\frac{\mu}{\mu_1}$.

99. Зависност између прамена правих и низова тачака. — ека је дат прамен од четири зрака SE, SF, SG и SH (сл. 66), који је пре- ечен правом AB. Означимо са A, B, C и D тачке њеног пресека са датим рацима. Лако је доказати, да је *сложени однос тачака пресека праве са рацима датога прамена једнак сложеном односу зракова.*

Означимо са x_1, y_1 и x_2, y_2 респективно координате тачака A и B, којима сечица пресеца основне зраке датога прамена. У томе случају се дноси у којима зраци SG и SH деле растојања међу тачкама A и B изра- авају (види стр. 67, 77) обрасцима

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{l_1 - km_1}{l_2 - km_2}, \quad \frac{AD}{DB} = -\frac{l_1 - k'm_1}{l_2 - k'm_2},$$

е l_1, l_2, m_1, m_2 означавају резултат замене текућих координата у изразима и m, са координатама тачака A и B. Али, пошто тачка A лежи на првоме аку а B на другоме, онда важе идентичности

$$l_1 \equiv 0, \quad m_2 \equiv 0.$$

рема томе претходне једнакости постају

$$\frac{AC}{CB} = \frac{km_1}{l_2}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{k'm_1}{l_2}.$$

Ако поделимо ове једнакости једну другом, добијамо тражени доказ

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{k}{k'}.$$

Добијени резултат показује да *сложени однос* тачака праве са зрацима прамена, који је једнак сложеном односу прамена, има сталну вредност *која не зависи од положаја сечице.*

100. Хармониски прамен. — Ако је сложени (анхармониски) однос прамена четири зрака једнак -1, такав прамен се назива *хармониским.* Према томе услов *хармоничности прамена* четири зрака (24) и (25) изражава се једнакошћу

$$\frac{k}{k'} = -1, \quad k = -k', \quad k + k' = 0.$$

Према томе *општи облик једначине зракова хармониског прамена претставља се једнакостима*

$$l = 0, \quad m = 0, \quad l - km = 0, \quad l + km = 0, \tag{27}$$

где прве две једнакости претстављају једначине основних зракова. За последња два зрака (27) каже се да су хармониски коњуговани са основним зрацима.

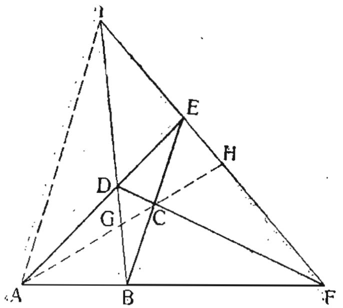
Тако, на пр., унутрашња и спољашња симетрала сваког угла образују хармониски прамен са крацима датог угла. Заиста, симетрале угла, чији су краци дати првим двема једначинама система (27), претстављају се двема последњим једначинама. При томе је или $k = 1$, ако су једначине кракова написане у нормалном облику, или је k једнако односу множитеља којима се те једначине своде на нормални облик (види стр. 113, израз 6). На основу теореме из претходног параграфа, тачке пресека зракова хармониског прамена и ма какве праве образују хармониски низ. Као што је познато, узајамни положај две тачке, које су хармониски коњуговане са две дате тачке, такав је да једна од њих дели растојање између датих тачака унутрашњом, а друга спољашњом поделом. Према томе један од два хармониски коњугована зрака са датим основним зрацима SE и SF (сл. 66) хармониског прамена S мора пролазити кроз унутрашњост угла $\sphericalangle$ EFS, а други се налазити ван тога угла.

Установљена кореспонденција (коју називамо *пројективном* или *хармографском*) између праменова правих и низова тачака омогућује конструкцију хармониских низова тачака помоћу праменова правих, и обратно. Изрази (5) и (6) (на стр. 113) показују, да трима датим тачкама на правој одговара једна (са њима) хармониски коњугована тачка. Према томе, за три дата зрака постоји само један хармониски коњугован зрак са датим зрацима.

Тако, на пример, средина између две дате тачке хармониски је коњугована са бескрајно удаљеном тачком, у односу на ове две дате тачке. Према томе је очевидно да је прамен правих хармониски, ако на свакој правој, паралелној једноме од његових зракова, три остала зрака отсецају једнаке отсечке. Заиста, три краја ових отсечака образују хармониски ред са бескрајно удаљеном тачком. Стога дата четири зрака који пролазе кроз њих образују хармониски прамен.

За конструкцију хармониског прамена можемо се користити особинама т.зв. потпуног четвоространика, или т е т р а г о н а.

101. Тетрагон. — Потпуним четвороcтраником или тетрагоном назива се слика (сл. 67) коју образују четири праве у равни AB, AD, BC, CD од којих се по три не смеју сећи у једној тачки.



Сл. 67

Ове праве називају се странама *потпуног четвороcтраника*, а шест тачака њихова узајамног пресека A, B, C, D, E и F називају се његовим теменима. За два темена која не леже на једној страни каже се да су *супротна*. Праве линије које спајају темене зову се *дијагонале*. Потпун четвороcтраник има три дијагонале: AH, BJ и FJ, које се секу у одговарајућим тачкама G, H и J.

Посматрани потпуни четвороcтраник има особину, да његове *дијагонале хармониски деле растојања између темена.*

За доказ ове теореме одредимо на правама JB и JF две тачке, G и H, хармониски коњуговане са J у односу на D, B и E у односу на F. На слици тачке G и H припадају дијагонали AC, што је лако проверити помоћу доказа. Заиста, тачке I, D, G, B и J, E, H, F образују према конструкцији два хармониска низа. Овим низовима одговарају два хармониска прамена AJ, AD, AG, AB, и AJ, AE, AH, AF. Али, пошто оба прамена имају, према конструкцији, по три зрака који се поклапају, то је очевидно (види стр. 121, n⁰ 100) да ће и четврти зрак бити заједнички, тј. да све три тачке A, G и H леже на једној правој AGH.

Доказаћемо и други део наше теореме, наиме да последња права пролази кроз теме C, тј. да претставља дијагоналу. У томе циљу посматрајмо два претходна хармониска низа тачака и два одговарајућа хармониска прамена правих, CJ, CE, CH, CF, и CJ, CD, CG, CB. Пошто се по три зрака поклапају, то се њихови четврти зраци исто тако поклапају, тј. *три тачке* G, C и H *леже на једној правој* GCH. Обе праве AGH и GCH имају две заједничке тачке, G и H. Према томе обе праве се поклапају, и тачке G и H леже на дијагонали AC. Према начину конструкције, тачке J и G, J и H, хармониски деле дијагонале JB и JF у односу на одговарајућа темена.

Најзад докажимо да су тачке G и H хармониски коњуговане у односу на темена A и C. Тога ради довољно је приметити да су зраци FJ, FD, FG и FB хармониски, јер се ови зраци ослањају на хармониски низ тачака J, D, G, B. Стога сечица AH образује хармониски низ тачака A, G, C и H.

Изложене особине потпуног четвороcтраника омогућују да се за три дата зрака конструише четврти, који са прва три образује хармониски прамен. Заиста, довољно је пресећи ма каква три дата зрака сечицом, а затим конструисати тетрагон, узимајући ма које две од ових правих за стране, а друге две за дијагонале. При томе је могућно користити се разним тетрагонима за добијање траженог четвртог зрака. Ова конструкција се одликује тиме што се изводи искључиво помоћу лењира без употребе шестара.

102. Примена скраћеног начина за доказ хармониских особина тетрагона. — Да бисмо доказали да су тачке H и F (сл. 67) хармониски коњуговане са теменима F и E тетрагона, повуцимо зрак AJ. Доказаћемо да су зраци AH и AJ хармониски коњуговани са зрацима AF и AE.

Означимо у ту сврху стране тетрагона AB и AD једначинама

$$l=0,\quad m=0; \qquad (28)$$

уведимо, осим тога, помоћну једначину дијагонале BD у облику

$$n=0. \qquad (29)$$

Пошто су све стране тетрагона дате, његова темена су такође позната. Обележимо са x_0, y_0 координате темена C.

Према томе једначина зрака AC, који пролази кроз центар A и тачку C, постаје, према обрасцу (3),

$$l-\frac{l_0}{m_0}m=0. \qquad (30)$$

Међутим, једначине страна BE и DF биће

$$l-\frac{l_0}{n_0}n=0,\qquad m-\frac{m_0}{n_0}n=0. \qquad (31)$$

Уведимо, краткоће ради, ознаке

$$\frac{l}{l_0}\equiv u,\qquad \frac{m_0}{m}\equiv v,\qquad \frac{n_0}{n}\equiv w.$$

Пошто се геометриско значење једначина не мења њиховим множењем сталним множитељем, то се једначине (28) и (29) могу написати и овако

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0. \qquad (32)$$

Тада једначине (30) и (31) претстављају праве AC, BE и DF на следећи начин

$$u-u=0,\quad u-w=0,\quad v-w=0. \qquad (33)$$

Једначина праве FJ може се написати на два различита начина, наиме:

1⁰ она претставља праву која пролази кроз тачку пресека F треће по реду праве (33) и праве (32), тако да тражена једначина постаје

$$v-w-ku=0,$$

где је k стални коефицијент;

2⁰ иста права пролази кроз тачку E која се налази у пресеку друге праве (33) и друге праве (32), па се изражава овако

$$u-w-k_1 v=0,$$

где је k_1 нов стални коефицијент.

Пошто обе наведене једначине означавају исту праву, FJ, то морамо имати

$$k=k_1=-1.$$

Према томе обе посматране једначине постају

$$u+v-w=0. \qquad (34)$$

ајзад, једначина зрака AJ, који пролази кроз тачку пресека праве (34) и оследње праве (32), изражава се овако

$$u+v-w-k'w=0\,. \tag{35}$$

Међутим, дотична права пролази такође кроз тачку A пресека две прве раве (32).

Према томе мора бити

$$k'=-1\,.$$

Због тога једначина (35) постаје

$$u+v=0\,.$$

Стога долазимо до закључка, да добијена једначина са првом једначином 33) претставља два хармониски коњугована зрака са оба основна зрака, оји су одређени двема првим једначинама (32).

---

103. Примери и задаци.

1. Дате су две праве једначинама општег облика $L_1=0$ и $L_2=0$ у односу на оји било праволиниски координатни систем. Одредити угловне коефицијенте правих инија $L_1+KL_2=0$, $L_1-KL_1=0$.

2. Поставити једначину праве која пролази кроз тачку пресека две дате праве, аралелно датој правој.

3. Поставити једначину праве која пролази кроз тачку пресека две дате праве, ормално на дату праву.

4. Поставити једначине симетрала углова које образују две праве

$$4x-3y-2=0, \quad 5y+12x+3=0.$$

5. Поставити једначине правих које пролазе кроз координатни почетак и деле и II квадрант на 2, 4, 8 итд. једнаких делова.

6. Применити при решавању питања о узајамном пресеку три праве у једној ачки, начин скраћеног означавања наведени у задатку 25, nº 53 (стр. 76).

7. Извести методом скраћеног означавања услов (24), глава II, за пресек три раве у једној тачки.

8. Поставити помоћу скраћеног начина једначине медијана троугла помоћу његових глова и једначине страна у нормалном или општем облику. Доказати да се медијане роугла секу у једној тачки.

9. Поставити помоћу скраћеног начина једначине медијана троугла, узимајући у бзир дужине његових страна и једначине тих страна у нормалном облику.

10. Поставити помоћу скраћеног начина једначине висина троугла искључиво омоћу његових углова и једначина страна у нормалном или општем облику. Доказати а се висине троугла секу у једној тачки.

11. Доказати да тачке пресека страна троугла са супротним двема унутрашњим једном спољашњом симетралом леже на једној правој.

12. Доказати да симетрале три спољашња угла троугла секу наспрамне стране тачкама које леже на једној правој.

13. Помоћу Менелајеве теореме доказати ставове формулисане у два претходна адатка, 11-ом и 12-ом.

14. Помоћу Чевиеве теореме доказати да се секу у једној тачки: 1) три унурашње симетрале троугла; 2) његове медијане; 3) његове висине; 4) симетрале два пољашња и једног унутрашњег угла троугла.

15. Доказати да су троугли *перспективни* ако тачке пресека његових одговарајућих страна леже на једној правој.

16. Четири тачке у равни одређују четвороугао. Дате тачке и шест правих које их спајају одређују тетрагон.

За сваки пар страна које не пролазе кроз исто теме каже се да су супротне, а за тачке њихових пресека каже се да су дијагоналне.

Доказати на скраћен начин, да *две супротне стране и две праве које спајају тачку његова пресека са другим двема дијагоналним тачкама потпуног четвороугла образују хармониски прамен.*

17. Доказати теорему фирмулисану у претходном задатку, узимајући две суседне стране четвороугла за осе косоуглог координатног система и уводећи координате четири дате тачке.

18. Поставити једначину праве која пролази кроз средине дијагонала четвороугла помоћу дужина његове четири стране и помоћу њихових једначина у нормалном облику.

19. Дате су две тачке (3,5), (12,5) у правоуглом координатном систему. Поставити једначине две праве које пролазе кроз координатни почетак и које деле хармониски како растојање између датих тачака тако и нормални координатни угао.

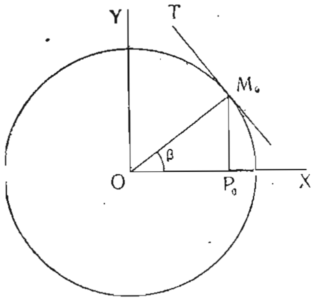
ГЛАВА ПЕТА

КРУГ

I. Тангенте, нормале и поларе.

104. Тангента круга у датој тачки. — У вези са проучавањем сновних појмова Аналитичке геометрије изведене су биле једначине круга од различитим претпоставкама [види n⁰ 11 стр. 30, једначина (15); n⁰ 15 тр. 34; n⁰ 76, стр. 93, једначина (28) и (29); n⁰ 81, стр. 99; n⁰ 84, стр. 103, једначина (2)].

Узмемо ли сада правоугли координатни систем XOY (сл. 68), једначина круга са средиштем у координатном почетку O и са полупречником R, постаје



Сл. 68

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (1)$$

Тангентом круга (1), у датој тачки $M(x_0, y_0)$, називамо у елементарној геометрији праву што пролази кроз ову тачку нормално на полупречник OM_0.

Овај заклапа са осом x угао β, чији је *tang* једнак $\frac{y_0}{x_0}$, те је тако једначина посматране тангенте:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

ли

$$x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2. \qquad (2)$$

ако се тачка M_0 налази на кругу, њене координате задовољавају идентички једначину (1), тј.

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2. \qquad (3)$$

Према томе једначина тангенте добија дефинитивни облик

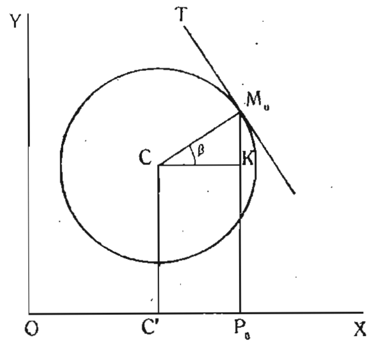
$$x_0 x + y_0 y = R^2. \qquad (4)$$

Нађени резултат показује да се *једначина тангенте круга (1), у тачки M_0, добија из једначине круга, ако један степен текућих координата сменимо одговарајућим координатама тачке додира.*

Узмимо ли једначину круга (сл. 69) у облику

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \qquad (5)$$

где су a и b координате средишта C круга, онда из правоуглог троугла ΔCKM_0, где је права CK паралелна оси OX, а β угао код темена C, налазимо



Сл. 69

$$tang\,\beta = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}.$$

Према томе једначина тангенте M_0T, у тачки $M_0(x_0, y_0)$, постаје

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0), \qquad (6)$$

или

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

Међутим, ова једначина може се написати друкчије овако

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - b) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2,$$

или, пошто се тачка M_0 налази на кругу (4),

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - b) = R^2. \qquad (7)$$

Ова се једначина добија из једначине (5), ако један од степена бинома $(x - a)$, односно $(y - b)$ сменимо њиховим вредностима у тачки додира тангенте. За $a = b = 0$ једначина (7) добија горњи облик (4).

Извели смо једначине тангенте круга полазећи од дефиниције тангенте као нормале у темену полупречника. Међутим тангента криве може се сматрати као гранични положај сечице, када се тачке пресека поклапају међу собом.

Заиста, свака сечица која пролази кроз посматрану тачку M_0 и ма коју другу тачку $M_1(x_1, y_1)$ изражава се једначином

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \qquad (8)$$

Пошто се обе тачке M_0 и M_1 налазе на кругу (5), њихове координате задовољавају идентички услове

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2, \qquad (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

Разлика обеју идентичности даје

$$(x_1 - a)^2 - (x_0 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - (y_0 - b)^2 = 0,$$

или

$$(x_1 - x_0)(x_1 + x_0 - 2a) + (y_1 - y_0)(y_1 + y_0 - 2b) = 0.$$

з ових се добија израз

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{x_1 + x_0 - 2a}{y_1 + y_0 - 2b}.$$

тављајући добијену вредност коефицијената у једначину (8) налазимо једначину посматране сечице у облику

$$y - y_0 = -\frac{x_1 + x_0 - 2a}{y_1 + y_0 - 2b}(x - x_0).$$

ад се тачка $M_1(x_1, y_1)$ поклапа са тачком $M_0(x_0, y_0)$, ова једначина добија блик (6) и, према томе, даје пређашњу једначину тангенте (7).

Горе је био изложен посматрани поступак, али са другог гледишта ° 49 страна 70), при проучавању пресека праве са кругом. Испитујући обијене обрасце за координате тачке њиховог пресека (обрасци (47) стр.)) ми смо тада нашли да, за $p = a$, дотични обрасци одређују једну тачку смо назвали одговарајући положај сечице тангентом круга, у тој тачки.

Оба наведена резултата се потпуно слажу.

Заиста, да бисмо довели једначину тангенте (4) на нормални облик, оделимо обе стране једначине са $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Онда једначина (4) добија ре наведени облик, за $p = a = R$, наиме

$$x \cos\beta + y \sin\beta = R.$$

Најзад, угловни коефицијент тангенте у датој тачки, ма за коју риву, одређује се у диференцијалном рачуну као вредност, у тој тачки, вода ординате посматране као извесне функције апсцисе. Дотични извод, круг (5), одређује се изводном једначином

$$x - a + (y - b)\,y' = 0,$$

е је y' извод y по x. Према томе угловни коефицијент тангенте круга, тачки M_0, постаје

$$y'_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b},$$

акле подудара се са оним у једначини (6).

Изложена расматрања показују да свака од трију поменутих дефиниција тангенте даје увек исти облик тражене тангенте.

105. Тангенте датог правца. — Поред изнесеног проблема тангенте круга постоје још два друга.

Узмимо да је дат један правац и да се тражи тангента која би овом ила паралелна. Да бисмо нашли тачку додира тражене тангенте, дозвољено да повучемо из средишта круга нормалу на дати правац. Тачка пресека нормале са кругом (5) је, у исто време, и тачка додира тражене тангенте круга. Овај закључак је геометриски очевидан. Али за аналитичко шење проблема, означимо са $M_0(x_0, y_0)$ тражену тачку додира. Права то пролази кроз средиште круга (a, b) и тачку M_0 изражава се једначином

$$y - b = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}(x - a). \tag{9}$$

Ако је m коефицијент датог правца за тражену тангенту, услов управности између њега и праве (9) је

$$\frac{y_0 - b}{x_0 - a}\,m = -1. \tag{10}$$

С друге стране, координате x_0, y_0 задовољавају једначину (5), те постоји услов

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2.$$

Одавде и из услова (10) излази

$$x_0 - a = \pm\frac{mR}{\sqrt{1 + m^2}}, \qquad y_0 - b = \mp\frac{R}{\sqrt{1 + m^2}},$$

дакле по две тражене вредности које одговарају горњим, односно доњим знацима у наведеним обрасцима.

Према томе једначина тражене тангенте круга (5),

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

постаје

$$y - b = m(x - a) \mp \sqrt{1 + m^2}\,R.$$

На овај начин добили смо две тангенте за круг које се могу повући паралелно датом правцу, а пролазе кроз темена пречника, нормално на датом правцу.

106. Тангента из дате тачке. — Други проблем тражи да се повуче тангента на круг (5) која би пролазила кроз дату тачку $M_1(x_1, y_1)$ у равни.

Једначина тражене тангенте има облик (7), где треба x_0 и y_0 одредити. Стављајући координате тачке M_1 у једначину (7) добијамо

$$(x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) = R^2.$$

Други услов добија се из једначине (5) у облику

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2.$$

Одавде се добијају по две тражене вредности:

$$x_0 - a = [(x_1 - a)R \mp (y_1 - b)S]\frac{R}{r_1^2},$$

$$y_0 - b = [(y_1 - b)R \pm (x_1 - a)S]\frac{R}{r_1^2},$$

при чему су уведене ознаке

$$S = \sqrt{r_1^2 - R^2}, \quad r_1^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2,$$

где је S дужина тангенте повучене из тачке M_1 на круг (тако звана потенција тачке M_1 према кругу), а r_1 — растојање дате тачке, M_1, од средишта круга. Према томе се једначина тражене тангенте добија заменом јених вредности $x_0 - a$ и $y_0 - b$ у једначини (7), у облику

$$[(x_1 - a)\,\mathrm{R} \mp (y_1 - b)\,\mathrm{S}]\,(x - a) + [(y_1 - b)\,\mathrm{R} \pm (x - a)\mathrm{S}]\,(y - b) = r_1^2\,\mathrm{R}\,. \quad (11)$$

били смо две једначине за одређивање две тангенте, које се могу по-
зи на круг из дате тачке M_1. Обе су реалне све док S претставља ре-
чу величину. Зато треба да буде

$$r_1^2 > \mathrm{R}^2,$$

тачка M_1 мора се налазити изван датог круга. У супротном случају,
јена тангента постаје имагинарна.

Најзад, ако се тачка M_1 налази на самом кругу, тј. $r_1 = \mathrm{R}$ и $\mathrm{S} = 0$,
начина (11) претставља једначину тангенте круга у његовој тачки M_1.

107. Нормала. — Нормала на круг (5), у тачки $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ (сл. 69),
клапа се са пречником CM_0. Према томе дотичну нормалу претставља
начина праве што пролази кроз две тачке, $\mathrm{C}(a, b)$ и $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$, наиме

$$\frac{y - b}{y_0 - b} = \frac{x - a}{x_0 - a}, \quad \text{одн.} \quad y - b = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}(x - a), \quad (12)$$

и

$$(x_0 - a)\,y - (y_0 - b)\,x = bx_0 - ay_0\,.$$

о се средиште круга C налази у координатном почетку, $a = b = 0$, једна-
на нормале постаје

$$x_0 y - y_0 x = 0\,.$$

Нормала на круг (5), паралелна датом правцу чији је коефицијент
изражава се једначином праве што пролази кроз средиште $\mathrm{C}(a, b)$, а
а коефицијент правца m, тј.

$$y - b = m\,(x - a)\,.$$

ема томе, подножје (x_0, y_0) нормале одређује се помоћу једначине (12)
ловом да је

$$y_0 - b = m\,(x_0 - a)$$

једнакошћу

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \mathrm{R}^2\,. \quad (13)$$

Овде се добијају два подножја тражене нормале према обрасцима

$$x_0 = a \pm \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad y_0 = b \pm \frac{m\,\mathrm{R}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

ђене по две вредности за x_0 и y_0 очевидно претстављају темена преч-
ка паралелна датом правцу.

Најзад нормала на круг (5) што пролази кроз дату тачку $\mathrm{M}_1(x_1, y_1)$
етставља пречник који пролази кроз дату тачку M_1. Према томе њена
начина постаје

$$y - b = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}(x - a), \quad (14)$$

при чему координате (x_0, y_0) подножја нормале задовољавају услове, прво, због једначине (12),

$$(x_1 - a)\,(y_0 - b) = (y_1 - b)\,(x_0 - a)\,.$$

Осим тога, постоји и услов (13). Одатле се подножја тражене нормале поклапају са теменима дотичног пречника

$$x_0 = a \pm \frac{\mathrm{R}\,(x_1 - a)}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}}, \quad y_0 = b \pm \frac{\mathrm{R}\,(y_1 - b)}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}}.$$

108. Полара. — Претпоставимо ли да су x_1 и y_1 координате ма које тачке равни, једначина

$$(x_1 - a)\,(x - a) + (y_1 - b)\,(y - b) = \mathrm{R}^2 \quad (15)$$

одређује једну праву. Дотична права зове се п о л а р а п о л а (x_1, y_1) у о д н о с у н а к р у г, чија је једначина (5).

Стога се из једначине тангенте (7) види да тангента на круг (5), у тачки (x_0, y_0), претставља полару тачке додира (x_0, y_0) у односу на посматрани круг.

Ако се тачка (x_2, y_2) налази на правој (15), имамо идентичност

$$(x_1 - a)\,(x_2 - a) + (y_1 - b)\,(y_2 - b) = \mathrm{R}^2\,. \quad (16)$$

Ова идентичност може се посматрати са два различита гледишта.

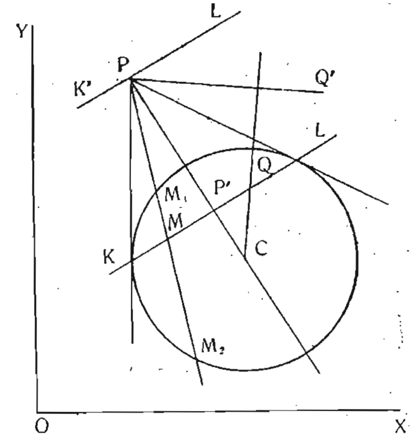
Заиста, услов (16) претставља, с једне стране, резултат смене у једначини

$$(x_1 - a)\,(x - a) + (y_1 - b)\,(y - b) = \mathrm{R}^2$$

координата x_2, y_2. Но, с друге стране, услов (16) може се тумачити и као резултат смене у једначини

$$(x - a)\,(x_2 - a) + (y - b)\,(y_2 - b) = \mathrm{R}^2$$

координата x_1, y_1. Према томе излази да полара тачке која се налази на датој правој пролази кроз пол ове праве, а, с друге стране, да се пол праве што пролази кроз дату тачку налази на полари дотичне тачке.



Сл. 70

Ако се тачка $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ налази ван круга (сл. 70), повуцимо из ње тангенте PK и PL на круг, где су K, односно L тачке додира. Пошто су K, односно L полови правих PK, односно PL, полара пола P мора пролазити кроз тачке K и L.

Према томе, *полара пола* P *претставља тетиву додиривања тангената круга повучених из пола* P.

Једначина нормале на круг, повучене из тачке $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, тј. пречника PC, одређује се једначином (14). Одатле се види да је *полара (15) нормална на пречнику круга који пролази кроз пол.*

Одредили смо горе полару једначином (15) не уводећи ограничења положај тачке (x_1, y_1) према посматраном кругу. Стога ма за коју тачку поларе KL њена полара PQ′ пролазиће кроз тачку P нормално на преч- ·у CQ. За тачку P′, средину тетиве KL, полара K′L′ исто ће тако про- ·ити кроз тачку P паралелно тетиви KL.

Лако је доказати да *полара (15) датог пола, према кругу (5), прет- авља геометриско место тачака хармониски коњугованих са теменима тиве што пролази кроз пол.*

Повуцимо кроз пол $P(x_1, y_1)$ (сл. 70) сечицу чије су тачке пресека кругом (5) $M_1(x_1', y_1')$ и $M_2(x_2', y_2')$. Означимо са $M(X, Y)$ тачку хармо- ·ки коњуговану са P, према M_1 и M_2. Онда су и тачке M_1, M_2 хармони- ·коњуговане према P и M и зато су њине координате

$$x_i' = \frac{x_1 + \lambda_i X}{1 + \lambda_i}, \qquad y_i' = \frac{y_1 + \lambda_i Y}{1 + \lambda_i}, \qquad (i = 1,\ 2) \tag{17}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \tag{18}$$

·ема томе координате (17) задовољавају идентички једначину (5). Отуд ра постојати услов

$$\left(\frac{x_1 + \lambda_i X}{1 + \lambda_i}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + \lambda_i Y}{1 + \lambda_i} - b\right)^2 = R^2,$$

и

$$N\lambda_i^2 + 2S\lambda_i^2 + T = 0, \tag{19}$$

· су уведене ознаке

$$\begin{aligned} N &\equiv (X - a)^2 + (Y - b)^2 - R^2, \\ S &\equiv (x_1 - a)(X - a) + (y_1 - b)(Y - b) - R^2, \\ T &\equiv (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - R^2. \end{aligned}$$

·начина (19) одређује две вредности λ_1 и λ_2 које морају задовољавати ·ов (18). Зато се коефицијент S, у једначини (19), мора анулирати. Одатле добија једначина геометриског места тачака M у облику

$$(x_1 - a)(X - a) + (y_1 - b)(Y - b) = R^2,$$

ја се подудара са једначином (15) поларе пола $P(x_1, y_1)$, при чему су те- ће координате означене са X, Y, место x, y како је то у једначини (15).

Према томе тачка M мора се налазити на правој KL.

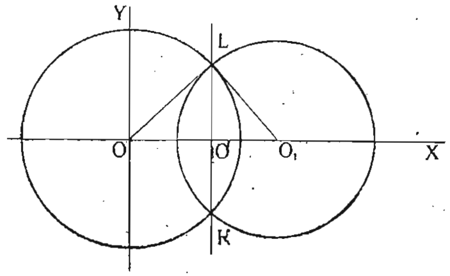
II. Систем два круга.

109. Пресек два круга. Радикална оса. — Узмимо два круга ·. 71) са средиштима O и O_1 и полупречницима R, односно R_1. За апс- сну осу изаберимо правац OO_1, а ординатну осу положимо управно из ·чке O.

Према томе, ако означимо са d растојање између O и O_1, једначине ·тих кругова постају

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (x - d)^2 + y^2 = R_1^2. \tag{1}$$

Да бисмо нашли тачке пресека посматраних кругова решимо једначине (1) по x и y. Разлика обеју једначина (1) је линеарна једначина



Сл. 71

$$2dx = d^2 + R^2 + R_1^2,$$

из које добијамо

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R_1^2}{2d}. \tag{2}$$

Ова једначина претставља праву линију KL, тако звану р а д и к а л н у о с у к р у г о в а (1), која је нормална на правој што спаја њихова средишта, а пролази од осе OY на растојању

$$OO' = \frac{d^2 + R^2 - R_1^2}{2d}.$$

Пресеком радикалне осе (2) са једним од кругова (1) одређене су тачке пресека оба круга. Ове тачке могу бити реалне или имагинарне. Апсцисе (2) ових тачака су увек реалне. Међутим из прве једначине (1) добијају се вредности ордината дотичних тачака у облику

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{1}{2d}\sqrt{(2R_1 d - d^2 - R^2 - R_1^2)(2R_1 d + d^2 + R_1^2 - R^2)} \\ &= \frac{1}{2d}\sqrt{[R_1^2 - (d - R)^2][(d + R)^2 - R_1^2]} \\ &= \frac{1}{2d}\sqrt{(d + R_1 - R)(R_1 - d + R)(d + R + R_1)(d + R - R_1)}. \end{aligned}$$

Посматрајући све могуће претпоставке налазимо да су:

1) тачке пресека реалне под условима

$$d < R + R_1,$$

и

$$d > R - R_1, \quad \text{ако је} \quad R > R_1,$$

или

$$d > R_1 - R, \quad \text{ако је} \quad R_1 > R;$$

2) тачке пресека имагинарне под условом

$$d > R + R_1;$$

3) тачке пресека се поклапају под условом

$$d = R + R_1;$$

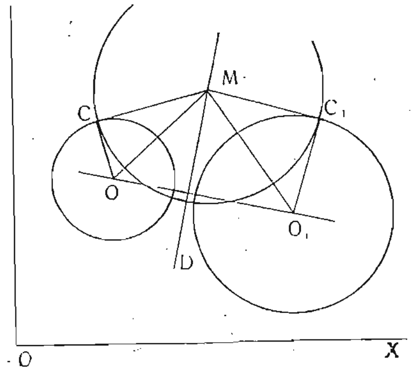
тада се кругови (1) додирују.

Узмемо ли једначине кругова општег облика (сл. 72)

$$S \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0, \qquad S_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 = 0, \tag{3}$$

е су уведене скраћене ознаке S и S_1 левих страна дотичних једначина, ıе се могу написати другојачије овако

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by) + m^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2(a_1x + b_1y) + m^2 = 0, \qquad (4)$$



Сл. 72

где су уведене ознаке

$$m^2 \equiv a^2 + b^2 - R^2,$$
$$m_1^2 \equiv a_1^2 + b_1^2 - R_1^2.$$

Једначина њихове радикалне осе, коју ћемо обележити са D, добија се као разлика једначина (4), наиме

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + \\ + m^2 - m_1^2 = 0. \qquad (5)$$

За једначину праве OO_1 што пролази кроз средишта (a, b), односно (a_1, b_1) посматраних кругова (3) имамо

$$(b_1 - b)(x - a) - \\ -(a_1 - a)(y - b) = 0. \qquad (6)$$

рема томе, види се да су праве (5) и (6) једна на другој управне, тј. *здикална оса два круга управна је на правој која спаја њихова средишта.* во је прва особина радикалне осе.

110. Аналитички израз потенције тачке према кругу. — *По- енцијом тачке према кругу зове се дужина тангенте повучене из дате ачке на дотични круг.*

Према овој дефиницији види се одмах да горе наведени обрасци m^2 m_1^2 означавају потенцију координатног почетка према кругу са средиштем , односно O_1.

Ако означимо са X, Y координате ма које тачке равни, њена потен- ıја, P, према кругу са средиштем (a, b) и полупречником R, изражава : обрасцем

$$P \equiv (X - a)^2 + (Y - b)^2 - R^2 \qquad (7)$$

. *потенција тачке равни према кругу једнака је вредности коју добија зва страна једначине круга за координате дате тачке.*

Због тога, стављајући у образац (7) координате почетка (0, 0) доби- мо пређашњу вредност m^2.

Полазећи од дате дефиниције потенције тачке према кругу, лако је ›казати и друго својство радикалне осе кругова (4): *да је ова геометриско есто тачака једне исте потенције према датим круговима.*

Заиста, узмимо ма коју тачку круга M(X, Y) на радикалној оси D л. 72). Њена потенција $\overline{MC}^2$ према првом кругу (3), на основу обрасца), изражава се обрасцем

$$P \equiv X^2 + Y^2 - 2(aX + bY) + m^2.$$

сто тако потенција исте тачке $\overline{MC_1}^2$, према другом кругу (3), добија облик

$$P_1 \equiv X^2 + Y^2 - 2(a_1X + b_1Y) + m_1^2.$$

Како се међутим тачка M налази на радикалној оси (5), координате X и Y задовољавају идентички једнакост

$$2(a_1 - a)X + 2(b_1 - b)Y + m^2 - m_1^2 = 0.$$

Одавде следи закључак

$$P - P_1 = 0, \quad \text{или} \quad P = P_1.$$

111. Услов ортогоналности кругова. — Узмимо два круга чије су једначине (3), а који се секу у тачки (x_0, y_0). Једначине тангената посматраних кругова у њиховој заједничкој тачки (x_0, y_0) су

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2,$$
$$(x_0 - a_1)(x - a_1) + (y_0 - b_1)(y - a_1) = R_1^2.$$

Према томе, услов ортогоналности ових тангената, а то је услов ортогоналности и посматраних кругова, изражава се једнакошћу

$$(x_0 - a)(x_0 - a_1) + (y - b)(y_0 - b_1) = 0,$$

или

$$x_0^2 + y_0^2 - (a + a_1)x_0 - (b + b_1)y_0 + aa_1 + bb_1 = 0.$$

Лако се добија тражени услов ортогоналности кругова (3), ако уведемо идентичности

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2, \quad (x_0 - a_1)^2 + (y_0 - b_1)^2 = R_1^2.$$

Разлика њихова збира и једнакости (8), помножене са 2, даје тражени услов

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = R^2 + R_1^2,$$

или

$$d^2 = R^2 + R_1^2,$$

где је d растојање између средишта датих кругова (3).

Геометриски значај добијеног услова је очигледан: *троуглови $\triangle OO_1K$ и $\triangle OLO_1$ (сл. 71) морају бити правоугли.*

Узмемо ли једначине двају кругова у општем облику

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2\alpha_1 x + 2\beta_1 y + \gamma_1 = 0,$$

услов за њихову ортогоналност, сходно горњем ставу, је

$$2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) = \gamma + \gamma_1.$$

Слика (72) даје примере два пара ортогоналних кругова, ако повучемо, око центра M, круг полупречника MC, односно MC_1. Заиста, MC, односно MC_1 претстављају тангенте кругова (3), а њихови полупречници OC, односно O_1C_1, као нормале на дотичним тангентама, служе као тангенте у тачки C, односно C_1, круга повучена око средишта M. Према томе је овај круг ортогоналан са сваким од датих кругова (3).

112. Прамен кругова. — Узмимо систем два круга датих једначинама

$$U \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0, \quad U' \equiv (x-a')^2+(y-b')^2-R'^2=0. \qquad (9)$$

начина

$$U - k\,U' = 0, \qquad (10)$$

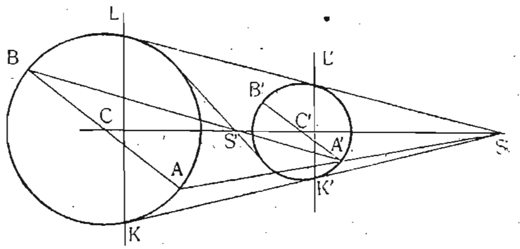
је k ма која стална величина, одређује увек један круг, јер су коефи-енти уз x^2 и y^2 једнаки, а коефицијенти уз производе $x\,y$ једнаки су нули.

За вредности координата x и y које задовољавају обе једначине (9) уњена је идентички такође и једначина (10). Према томе једначина (10) тставља круг што пролази кроз тачке пресека (реалне или имагинарне) их кругова (9). За различите вредности коефицијената k, једначина) одређује низ кругова који се зове прамен кругова. Средишта их налазе се увек на правој средишта датих кругова (9). По себи се уме да за вредност $k = 1$ једначина (10) одређује радикалну осу гова (9). Кругови (9) зову се основни кругови прамена.

Према њихову положају, постоје три врсте прамена кругова. Ако икална оса основних кругова прамена сече ове у реалним тачкама, онда кругови прамена (10) пролазе кроз исте тачке. Ниједан од ових не же да дегенерише у једну тачку. Ако радикална оса пролази изван основ- кругова, исто важи и за све кругове прамена. Нарочито треба подвући се, у овом случају, могу одредити две вредности параметра k, за које гови прамена дегенеришу у тачку на правој средишта кругова прамена. е се тачке зову граничне тачке посматраног прамена кругова.

Најзад, трећа врста прамена, где се основни кругови додирују, прет- ља низ кругова који се сви додирују у истој тачки. Овај случај може сматрати као гранични случај оба претходна прамена кругова.

113. Средишта сличности. — Узмимо два круга (сл. 73) и по- имо њихове пречнике AB и A′B′ који су паралелни. Ако спојимо одго- ајућа темена A и A′ пра- линијом, она ће одре- и у пресеку са правом тара CC′ тачку S, која зове *спољашње средиште чности* датих кругова. ђутим, тачка S′ пресека ве центара са правом спаја супротна темена алелних пречника нази- се *унутрашњим среди- ем сличности* посматра- кругова.



Сл. 73

Лако је доказати да положај дотичних средишта не зависи од правца дених паралелних пречника. Заиста, из сличности троуглова

$$\Delta ACS \quad \text{и} \quad \Delta A'C'S$$

иче услов

$$\frac{CS}{C'S} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{R}{R'},$$

су R и R′ полупречници датих кругова.

А из сличности троуглова

$$\Delta CS'B \quad \text{и} \quad \Delta A'C'S'$$

следи

$$\frac{CS'}{S'C'} = \frac{BC}{C'A'} = \frac{R}{R'}.$$

Добијене једнакости дају

$$\frac{CS'}{S'C'} = -\frac{CS}{SC'},$$

или

$$\frac{CS'}{S'C'} : \frac{CS}{SC'} = -1,$$

тј. *средишта сличности деле хармониски растојање између средишта кругова.* Када су полупречници CA и C′A′ управни на правој што спаја њихова темена, онда ова служи као заједничка тангента за оба круга.

Према томе може се рећи *средишта сличности кругова претстављају тачке пресека њихових узајамних тангената*, како је то показано на слици 73.

114. Поларе средишта сличности. — Означимо са x'', y'', односно x', y' координате средишта сличности S и S′, а са a, b, односно a', b' координате средишта кругова C, односно C′. Према претходним обрасцима налазимо

$$x'' = \frac{R'a - Ra'}{R' - R}, \quad y'' = \frac{R'b - Rb'}{R' - R}, \qquad (11)$$

$$x'' = \frac{R'a + Ra'}{R' + R}, \quad y' = \frac{R'b + Rb'}{R' + R}. \qquad (12)$$

Напишимо сад једначину поларе KL спољашњег средишта S, према првом кругу (9). Она се добија ако ставимо у једначину (15) (на стр. 131), место координата (x_1, y_1), координате средишта S (x'', y'') у облику

$$(x-a)(a-a') + (y-b)(b-b') - R(R'-R) = 0.$$

Ова једначина може се друкчије овако написати

$$2(a-a')\,x + 2(b-b')\,y - (a^2+b^2-R^2) +$$
$$+ (a'^2+b'^2-R'^2) - (a-a')^2 + (b-b')^2 + (R-R')^2 = 0;$$

или

$$U' - U - (a-a')^2 - (b-b')^2 + (R-R')^2 = 0.$$

На сличан начин добија се једначина поларе K′L′ истог пола, $S(x_1', y_1')$, према другом кругу (9), и то у облику

$$U' - U + (a-a')^2 + (b-b')^2 - (R-R')^2 = 0.$$

Што се тиче полара за пол $S(x', y')$, према посматраним круговима, оне спективно постају:

$$U' - U - (a-a')^2 - (b-b')^2 + (R+R')^2 = 0,$$
$$U' - U - (a-a')^2 + (b-b')^2 - (R+R')^2 = 0.$$

III. Систем трију кругова.

115. Радикално средиште три круга. — Уочимо три круга чије једначине

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0, \qquad (1)$$

и чему је

$$U \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2,$$
$$U' \equiv (x-a')^2 + (y-b')^2 - R'^2,$$
$$U'' \equiv (x-a'')^2 + (y-b'')^2 - R''^2 .$$

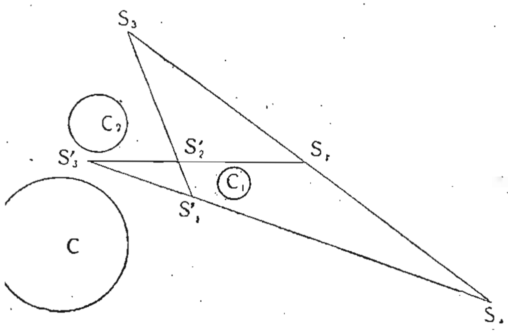
начине радикалних оса посматраних кругова гласе

$$U - U' = 0, \qquad U' - U'' = 0, \qquad U'' - U = 0.$$

што се збир левих страна дотичних једначина анулира, посматране радилне осе секу се у једној тачки. Ова тачка пресека се зове р а д и к а л н о е д и ш т е трију кругова.

Према особинама радикалних оса, тангенте повучене из радикалног едишта на сваки од посматраних кругова једнаке су.

116. Осе сличности три круга. — Према наведеној дефиницији за систем посматраних кругова постоји шест средишта сличности, по два за сваки круг. Лако је доказати да се од ових шест тачака по три налазе на једној правој, а њихов број износи четири. Означимо са C, C_1, односно C_2 средишта посматраних кругова (1) (сл. 74). Обележимо са S_1, S_2, односно S_3 спољашња средишта сличности датих кругова, а њихова унутрашња средишта сличности са S_1', S_2', односно S_3'. Означимо ординате одговарајућих спољашњих средишта са



Сл. 74

$$x_1 = \frac{R''a' - R'a''}{R'' - R'}, \qquad x_2 = \frac{Ra'' - R''a}{R - R''}, \qquad x_3 = \frac{R'a - Ra'}{R' - R},$$
$$y_1 = \frac{R''b' - R'b''}{R'' - R'}, \qquad y_2 = \frac{Rb'' - R''b}{R - R''}, \qquad y_3 = \frac{R'b - Rb'}{R' - R}.$$

Одатле налазимо

$$y_2 - y_3 = \frac{MR}{(R - R'')(R' - R)},$$
$$y_3 - y_1 = \frac{MR'}{(R' - R)(R'' - R')},$$
$$y_1 - y_2 = \frac{MR''}{(R'' - R')(R - R'')},$$

где је уведена ознака

$$M \equiv b(R'' - R') + b'(R - R'') + b''(R' - R).$$

Према томе добија се образац

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - x_1) + x_3(y_1 - y_2) \equiv$$
$$\equiv \frac{M[(R''a' - R'a'')R + (Ra'' - R''a)R' + (R'a - Ra')R'']}{(R'' - R')(R - R'')(R' - R)}.$$

Међутим се израз уз M, у угластим заградама, идентички анулира. Према томе *тачке* S_1, S_2 *и* S_3 *налазе се, заиста, на једној правој.*

Приметимо сад да се дотични израз, у угластим зградама уз M, анулира такође и под условом, ако се обрну знаци уз две од трију величина R, R′ и R″.

Међутим, ова би промена значила, према горњим обрасцима за координате спољашњих и унутрашњих средишта сличности, да се узимају место два спољашња, два унутрашња средишта.

Према томе добија се овај закључак:

Свака два унутрашња средишта сличности налазе се на истој правој са једним од спољашњих средишта сличности.

Добијене четири праве: $S_2S_1S_3$, $S_1'S_2'S_3$, $S_2'S_3'S_1$, односно $S_1'S_3'S_2$ називају се *осе сличности* трију кругова; прва се зове *спољашња*, а три остале *унутрашње осе сличности*.

Наведимо сад један партикуларан случај. Ако се два круга додирују, њихова тачка додира служи као њихово унутрашње средиште сличности. Према томе, додирују ли два круга трећи, права што спаја обе тачке додира служи као једна од унутрашњих оса сличности посматраних кругова; она пролази кроз спољашња средишта сличности два прва круга.

117. Геометриско решење Аполонијева проблема. — Алгебарско решење дотичног проблема је уведено у n⁰ 24 (стр. 45). Сад ћемо означити три дата круга једначинама општег облика (1). Напишимо једначину траженог круга, који мора да додирује дате кругове (1), у облику

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2, \qquad (2)$$

где су α, β и r три непознате величине.

Услови за додир траженог круга (2) са датим круговима (1) изра-
ıају се овако

$$(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2 = (r \pm \mathrm{R})^2,$$

$$(\alpha - a')^2 + (\beta - b')^2 = (r \pm \mathrm{R}')^2,$$

$$(\alpha - a'')^2 + (\beta - b'')^2 = (r \pm \mathrm{R}'')^2.$$

: једнакости потпуно одређују све три непознате величине α, β и r. Али и обрасци могу се друкчије написати још и овако

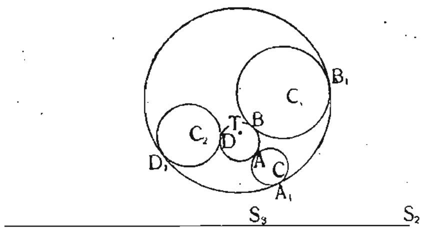
$$\mathrm{U}_1 = r(r \pm 2\,\mathrm{R}), \quad \mathrm{U}_1' = r(r \pm 2\,\mathrm{R}'), \quad \mathrm{U}_2' = r(r \pm 2\,\mathrm{R}''),$$

U_1, U_1' U_2' означавају резултат смене текућих координата координатама дишта траженог круга.

Две од ових трију једначина могу да се замене двема од следеће једначине

$$\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_1' = 2r(\mathrm{R} \pm \mathrm{R}'), \quad \mathrm{U}_2' - \mathrm{U}_2' = 2r(\mathrm{R}' \pm \mathrm{R}''), \quad \mathrm{U}'_2 - \mathrm{U}_1 = 2r(\mathrm{R}'' \pm \mathrm{R}), \quad (3)$$

: имају ту предност што садрже непознате величине α, β и r само на ом степену. Према знаку на десној страни добијених једначина, тражени г ће имати различите врсте додира са датим круговима, како смо то е навели, на страни 46.



Сл. 75

Гергон је дао просту конструкцију за решење посматраног проблема, којим налази не средиште траженог круга, но његове тачке додира A, B и D (сл. 75) са датим круговима (1), чија су средишта C, C_1 односно C_2. Очевидно је да су координате тачке A (x, y)

$$x = \frac{\mathrm{R}\,\alpha + r\,a}{\mathrm{R} + r}, \quad y = \frac{\mathrm{R}\,\beta + rb}{\mathrm{R} + r}, \quad (4)$$

кле добијамо

$$\alpha = \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R}}x - \frac{r}{\mathrm{R}}a, \quad \beta = \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R}}y - \frac{r}{\mathrm{R}}b. \quad (5)$$

:ењујући ове вредности α и β у прву једначину (3), која постаје

$$2(a' - a)\alpha + 2(b' - b)\beta + h = r(\mathrm{R} - \mathrm{R}'),$$

је уведена ознака

$$h \equiv (a^2 + b^2 - \mathrm{R}^2) - (a'^2 + b'^2 - \mathrm{R}'^2),$$

азимо

$$a' - a)\,x + (b' - b)\,y]\,\frac{(\mathrm{R} + r)}{\mathrm{R}} = 2\,[(a' - a)\,a + (b' - b)\,b]\,\frac{r}{\mathrm{R}} - h + 2r(\mathrm{R} - \mathrm{R}').$$

Помножимо ли обе стране ове једнакости са R и додамо ли им $(\mathrm{R} + r)\,h$, добијамо

$$[2(a' - a)\,x + 2(b' - b)\,y + h]\,(\mathrm{R} + r) = [(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 - (a - a')^2 - (b - b')^2]\,r.$$

Но ову једначину можемо друкчије и овако још написати

$$(\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1)(\mathrm{R} + r) = [(a - a')^2 + (b - b')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2]\,r, \quad (6)$$

где су x и y, које улазе у полином $\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1$, координате дотичне тачке додира. Ако сменимо, на исти начин, обрасце (5) у трећу једнакост (3) налазимо

$$(\mathrm{U}_1'' - \mathrm{U}')(\mathrm{R}' + r) = [(a - a'')^2 + (b - b'')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}'')^2]\,r. \quad (7)$$

Елиминишћу r из обе једначине (6) и (7) налазимо

$$\frac{\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1}{(a - a')^2 + (b - b')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2} = \frac{\mathrm{U}_1'' - \mathrm{U}_1}{(a - a'')^2 + (b - b'')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}'')^2}. \quad (8)$$

Ово је по x и y једначина првог степена, те одређује праву која пролази кроз тачку додира A. Осим тога, иста права (8) пролази кроз тачку пресека правих

$$\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1 = 0, \quad \mathrm{U}_1'' - \mathrm{U}_1 = 0,$$

тј. кроз радикално средиште T датих кругова (1).

Међутим, ако тражени круг (2) има унутрашњи додир са првим кругом, са средиштем C, у тачки A′, координате ове тачке су

$$x = \frac{\mathrm{R}\,\alpha - ra}{\mathrm{R} - r}, \quad y = \frac{\mathrm{R}\,\beta - rb}{\mathrm{R} - r}.$$

Ови изрази разликују се од (4) само знаком уз r. Према томе, елиминишемо ли α и β из прве и треће једначине (3), добијамо две једначине, које се од једначина (6) и (7) разликују само знаком уз r. Зато елиминација r из дотичних једначина претставља пређашњу једначину (8). Одатле излази да одговарајуће праве секу први круг (1) у тачкама A и A′ тражених кругова, који имају спољашњи, односно унутрашњи додир са датим круговима (1).

Одузмемо ли по јединицу од обе стране једначине (8), моћи ћемо је овако написати

$$\frac{(\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1) - (a - a')^2 - (b - b')^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{(a - a')^2 + (b - b')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{U}_1'' - \mathrm{U}_1) - (a - a'')^2 - (b - b'')^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}'')^2}{(a - a'')^2 + (b - b'')^2 - (\mathrm{R} - \mathrm{R}'')^2}.$$

Одатле се види да одговарајућа права пролази такође кроз тачку пресека правих

$$\mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1 - (a - a')^2 - (b - b')^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2 = 0,$$

$$\mathrm{U}_1'' - \mathrm{U}_1 - (a - a'')^2 - (b - b'')^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}'')^2 = 0.$$

а од њих претставља полару (в. n^0 114) спољашњег средишта сличнопрва два круга (1), према првом од њих. Али друга од добијених начина је полара спољашњег средишта сличности првог и трећег круга према првом кругу. Због тога тачка пресека обе посматране поларе гставља пол, према првом кругу (1), спољашње осе сличности S_1S_2.

Изложена расматрања показују да права (8) што пролази кроз радино средиште датих кругова (1) пролази и кроз пол њихове спољашње сличности, према првом кругу (1). Одатле следује да се конструкција жених кругова додира врши на овај начин:

1) конструишу се полови спољашње осе сличности датих кругова дносу према свакоме од њих;

2) ови полови споје се правим линијама са радикалним средиштем их кругова. Тачке пресека дотичних правих са датим круговима претзљају тачке где тражени кругови додирују дате кругове. Према томе жени круг може се лако конструисати помоћу његове три нађене тачке.

На исти начин конструише се сваки од осам Аполонијевих додирних гова.

118. Примери и задаци.

1. Повући из тачке (1, 2) тангенту на круг

$$x^2 + y^2 = 5.$$

2. Наћи заједничку тетиву кругова

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2by.$$

3. Наћи једначине заједничких тангената за кругове

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{9}, \qquad x^2 + y^2 - 6x = 0.$$

4. Наћи дужину тангенте повучене из тачке (x_1, y_1) на круг

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

се тачка (x_1, y_1) налази изван круга.

5. Наћи тачку пресека осе x са радикалном осом кругова

$$x^2 + y^2 = 4y - 3, \quad x^2 + y^2 = 2x.$$

6. Наћи једначине тангената повучених из координатног почетка на круг

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0.$$

7. Наћи полару тачке (4, 5) према кругу

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y - 8 = 0.$$

8. Наћи пол праве

$$Ax + By + C = 0,$$

ма кругу

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

9. Наћи круг који пролази кроз тачку (—1, 1) и има заједничку радикалну осу круговима

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 39 = 0, \quad x^2 + y^2 - 7x - 9y - 39 = 0.$$

10. Наћи круг чији пречник служи као заједничка тетива кругова

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0.$$

11. Наћи граничне тачке прамена кругова чија се радикална оса поклапа са радикалном осом кругова

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 7 = 0, \quad 2x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 1 = 0.$$

12. Наћи средишта сличности и заједничке тангенте кругова

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0.$$

13. Наћи поларе средишта сличности према свакоме од кругова

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1, \quad (x+2)^2 + (y-5)^2 = 4.$$

14. Наћи радикално средиште кругова

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 7, \quad (x-3)^2 + y^2 = 5, \quad (x+4)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

15. Доказати да се скуп једначина тангената круга

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

повучених из тачке (a, b), изражава једначином

$$(ay - bx)^2 = r^2[(x-a)^2 + (y-b)^2].$$

16. Доказати да кругови чији су полупречници три дијагонале тетрагона имају заједничку радикалну осу.

17. Наћи везу између коефицијената кругова

$$x^2 + y^2 + dx + cy + f = 0, \quad x^2 + y^2 + gx + by + k = 0,$$

ако се ови додирују.

18. Наћи везу између коефицијената кругова претходног задатка ако су они ортогонални.

19. Дата су три круга

$$x^2 + y^2 + m_i x + n_i y + p_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

наћи за њих ортогонални круг.

20. Наћи једначину спољашње осе сличности кругова

$$x^2 + y^2 = r_1^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = r_2^2, \quad x^2 + (y-b)^2 = r_3^2.$$

ДРУГИ ДЕО

Конични пресеци

ГЛАВА ШЕСТА

ЕЛИПСА

I. Дефиниција и једначина елипсе.

119. Дефиниција елипсе. — *Елипса је геометриско место тачака чији је збир растојања од две дате тачке — стална величина.*

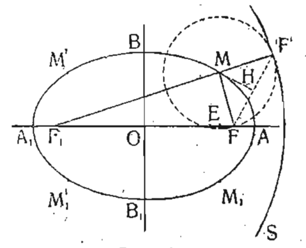
Обележимо дате тачке са F и F_1 (сл. 76). Тачка M припада елипси ако је збир њених растојања r и r_1, тј. FM и F_1M, једнак датој сталној величини $2a$, дакле

$$r + r_1 = 2a. \tag{1}$$

Означимо са $2c$ дужину растојања F_1F. Из троугла ΔF_1FM закључујемо

$$r + r_1 > 2c, \quad \text{тј.} \quad a > c \quad \text{и} \quad r_1 - r < 2c. \tag{2}$$

Према томе, лако је одредити било коју тачку елипсе. Тога ради узмимо тачку O у средини растојања F_1F и две тачке, A и A_1, сваку на растојању a од тачке O. Узмимо на правој A_1A произвољну тачку E између тачака F_1 и F. Очевидно је да отсечци A_1E и AE задовољавају услове (1) и (2), пошто је њихов збир једнак $2a$, а разлика је мања од $2c$. Према томе, ако опишемо кружне лукове са полупречником AE из F као средишта и са полупречником A_1E из F_1 као средишта, добићемо у њихову пресеку две тачке елипсе, M и M_1. Мењајући положај тачке E између тачака F_1 и F, можемо према горњој конструкцији одредити безброј тачака елипсе.



Сл. 76

Два круга се секу, уопште, у двема тачкама, које су као, на пр., M и M_1 подједнако удаљене од праве AA_1. Према томе та права служи за о с у с и м е т р и ј е елипсе. Тим истим полупречницима, A_1E и AE, опишимо кружне лукове обрнутим редом, тј. из F, односно F_1 као средишта. Добијене тачке M′ и M_1' симетричне су са тачкама M и M_1 у односу на праву која пролази кроз тачку O нормално на оси AA_1 и претставља другу о с у с и м е т р и ј е елипсе. Обе осе симетрије називају се о с а м а е л и п с е. Тачка симетрије O зове се средиште елипсе. Најзад, обележимо тачке B и B_1, које леже на одговарајућим једнаким отстојањима a од тачака F и F_1. Очевидно је да елипса пролази кроз све четири тачке A, A_1, B и B_1, које називамо њеним т е м е н и м а. Тачке F и F_1 зову се ж и ж е (ф о к у с и) елипсе, а r и r_1 п о т е з и тачке M.

Лако је нацртати елипсу непрекидним кретањем. Тога ради узмимо онац дужине $2a$, спојимо му крајеве и обухватимо њиме тачке F и F_1. атегнувши потом конац врхом оловке опишимо криву $AMBM'A_1$ — она ретставља елипсу.

Једнакост (1) која одређује елипсу може се геометриски протуачити и на овај начин. Одмеримо на продужењу потега F_1M отсечак MF', чија је дужина r. Збир r_1+r претставља, на основу једнакости (1), галну величину $2a$. Стога, геометриско место тачака F' претставља круг са средиштем F_1 и полупречником $2a$, који се зове директорни руг елипсе за жижу F_1. Жижи F одговара други директорни круг. Очеидно је да се свака тачка M елипсе налази на једнаким растојањима од иже F и директорног круга S, описана из друге жиже, F_1. Према томе *липса претставља и геометриско место тачака подједнако удаљених од ате тачке и датога круга.*

Најзад, опишимо око тачке M, као око средишта, круг са полупречиком r. Тај круг пролази кроз жижу F и додирује директорни круг у ачки F'. Према томе *елипса претставља геометриско место средишта ругова, који пролазе кроз дату тачку и додирују дати круг.*

На основу тога тачка M елипсе може бити конструисана као тачка ресека полупречника F_1F' директорног круга са нормалом, повученом из редине, H, отсечка FF'.

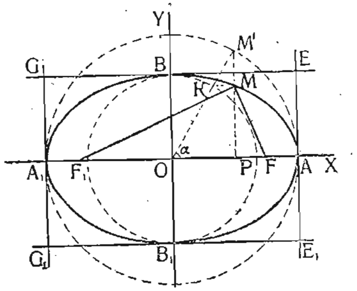
120. Једначина елипсе. — Узмимо средиште елипсе за почетак равоуглог координатног система XOY (сл. 77), чије се осе поклапају са сама елипсе. Означимо са x и y координате, OP и PM, тачке M елипсе. Из правоуглих троуглова ΔF_1PM и ΔFMP добијамо

$$r=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,,\qquad r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,. \tag{3}$$

Кад уврстимо последње вредности за r и r_1 у (1) добијамо једначину липсе

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\,.$$

Да бисмо се ослободили корена, помножимо обе стране ове једнаости разликом потега. Затим ако добијену једначину решимо по тој разлици, $r-r_1$, која се јавља на десној страни једнакости, после свођења добијамо



Сл. 77

$$r-r_1=-\frac{2c}{a}x\,.$$

Решимо ли ову и једначину (1) добијамо

$$r=a-\frac{c}{a}x\,,\quad r_1=a+\frac{c}{a}x\,. \tag{4}$$

Ма која од ових једначина са (3) даје тражени резултат. Дигнимо, на пр., обе стране прве једначине (4) на квадрат. На основу првог израза у (3) добијамо

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2,\quad \text{или}\quad \frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2}+y^2=a^2-c^2\,.$$

Ако уведемо ознаку

$$a^2-c^2=b^2\,, \tag{5}$$

последња једначина може се овако написати (упореди стр. 34)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,. \tag{6}$$

Израз (5) показује да је b катета правоуглог троугла, чија је друга катета c, а хипотенуза a. Темена елипсе B и B_1 налазе се на растојању a од жижа; стога је очевидно да b претставља величину отсечка OB. Бројеви a и b одређују величину полуоса елипсе.

Из (6) следује

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,. \tag{7}$$

Овај израз даје за сваку вредност x по две вредности за y, које су једнаке по апсолутној вредности, а супротне по знаку. Према томе оса x претставља осу симетрије елипсе. Ако једначину (6) решимо по x добићемо

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,. \tag{8}$$

Значи оса y је друга оса симетрије елипсе.

Ставимо у (7) вредност c, апсцисе жиже F. Апсолутна вредност одговарајуће ординате жиже зове се параметар елипсе и обележава се са p. Његова величина се добија из (7), на основу везе (5), у облику

$$p=\frac{b^2}{a}\,.$$

121. Геометриски облик елипсе. — Из једначине (7) следује да x, по апсолутној вредности, не сме бити веће од a, јер у противном случају добија имагинарну вредност. За $y=0$ апсциса добија две вредности, $x=\pm a$, које одговарају теменима A и A_1 елипсе, у којима елипса сече X осу. Ординате два друга темена, B и B_1: $y=\pm b$, добијају се из једначине (7) за $x=0$. Осим тога, једначина (8) показује да ордината y, по апсолутној вредности, не може бити већа од b. Према томе, елипса лежи са свима својим тачкама у правоугаонику EGG_1E_1 чије су стране паралелне осама елипсе и пролазе кроз њена темена.

Повуцимо круг полупречника a са средиштем у координатном почетку; његова је једначина

$$y'=\pm\sqrt{a^2-x^2}, \tag{9}$$

где позитивна вредност y' означава ординату круга PM', која одговара апсциси $OP=x$. Из (5) следује да је у нашем случају $a>b$, те зато однос $\frac{b}{a}$ претставља прави разломак, а из једначина (9) и (7) следи да је $|y'|\geqslant|y|$, тј. елипса (7) се налази у кругу (9), који ћемо назвати описаним око елипсе. Конструишимо други, концентрични круг, полупречника b са средиштем у O,

$$x' = \pm \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Пошто је однос $\frac{a}{b}$ неправи разломак, то из једначине (8) следи да је $|x'| \leqslant |x|$, тј. други конструисани круг се налази у елипси. Њега ћемо назвати уписаним у елипси. Према томе, елипса се налази у области између два концентрична круга: описаног и уписаног. Из горњих разматрања лако је доћи до начина за конструкцију елипсе из низа тачака. Изрази (7) и (9) дају

$$y = \frac{b}{a} y', \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{a}, \tag{10}$$

тј. *ордината елипсе* PM *је четврта пропорционала за њене полуосе и одговарајућу ординату описаног круга.* Према томе, да бисмо конструисали тачку елипсе M, која одговара апсциси OP, повуцимо ординату PM′ описаног круга. Тачку M′ спојимо полупречником OM′ са средиштем и, из тачке K у којој тај полупречник пресеца уписани круг, повуцимо праву паралелну OX оси. Тачка њена пресека са ординатом PM′ одређује на елипси тражену тачку M. Заиста, паралелне праве OP и KM деле страну угла $\sphericalangle$OM′P на пропорционалне делове,

$$\frac{PM}{OK} = \frac{PM'}{OM'}, \quad \text{или} \quad \frac{PM}{b} = \frac{y}{a}, \quad \text{одакле је} \quad PM = y.$$

Ако са k означимо величину односа $\frac{b}{a}$, из једнакости (10) добијамо

$$y = ky', \text{ где је } k < 1. \tag{11}$$

Према томе, *ординате елипсе, које одговарају датим апсцисама, добијају се пропорционалним смањивањем одговарајућих ордината описаног круга.* Лако је увидети да последња особина елипсе претставља не само потребан већ и довољан услов за њено одређивање. Заиста, полазећи од једнакости (10) није тешко добити једначину елипсе (7). Препуштамо читаоцу да докаже на основу последњег закључка, да *елипса претставља ортогоналну пројекцију круга.*

Последњи став могуће је користити при одређивању површине елипсе. Као што је познато, *ортогонална пројекција површине једнака је производу из површине која се пројицира и cos угла између равни обе површине.* Ова теорема не важи само за праволиниске површине, већ и за површине ограничене кривим линијама. У овом случају ове површине се посматрају као збирови бескрајно малих праволиниских површина, аналогно поступку при израчунавању површине круга. За случај елипсе cosinus угла између равни круга и равни његове пројекције, која претставља елипсу, једнак је броју k, тј. односу $\frac{b}{a}$. Отуда излази да је површина елипсе једнака πab.

Означимо са α угао који са осом OX заклапа полупречник OM′ (сл. 77) описаног круга, при чему тачка M′ на кругу одговара апсциси OP

тачке M на елипси. Угао α назива се ексцентричном аномалијом тачке M на елипси, тј. ексцентричном аномалијом тачке на елипси назива се аномалија (види стр. 95, n° 77) одговарајуће тачке на описаном кругу. Из правоуглог троугла ΔOPM′ и из четвороугла OPMK непосредно се добијају вредности координата тачке M на елипси, изражених помоћу ексцентричне аномалије, наиме

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha.$$

Ради упоређења последњих вредности са (21) (на стр. 34), повуцимо дуж AB (сл. 17) чија тачка M описује нашу елипсу. Правоугли троугао ΔQMA на слици 17 и троугао OPM′ на слици 77 подударни су, јер имају једнаку катету x и хипотенузу a. Стога је угао који заклапа дуж AB са апсцисном осом једнак ексцентричној аномалији.

Најзад, треба приметити да једначина елипсе (6) дели раван на две области: једну унутрашњу и другу спољашњу. Лева страна једначине (6) претставља позитивну величину, која може расти од 0 до ∞ док се тачка креће од координатног почетка и то на којој било правој. Оне тачке за које је лева страна једначине (6) једнака јединици леже на елипси — према томе за тачке које не леже на елипси мора бити

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

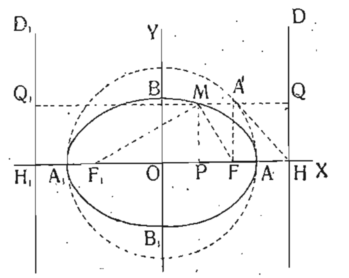
при чему доњи знак одговара тачкама које леже у унутрашњости елипсе, а горњи одговара тачкама ван елипсе.

II. Елементи елипсе и њихове особине.

122. Директрисе. Ексцентрицитет. — Напишимо изведене изразе за потеге (4) у облику:

$$r = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right), \qquad r_1 = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right).$$

Одмеримо на оси OX (сл. 78) тачку H чија је апсциса $OH = \frac{a^2}{c}$. Тога ради подигнимо нормалу на осу OX из жиже F, до пресека у тачки A′ са описаним кругом и повуцимо његову тангенту у тачки A′. Она сече OX осу у траженој тачки H. Заиста, у правоуглом троуглу ΔOHA′ катета OA′, која је једнака a, средња је пропорционала између хипотенузе OH и њеног отсечка OF, који је једнак c. Лако је увидети да је отсечак FA′ једнак b, као катета правоуглог троугла, чија је друга катета $OF = c$, а хипотенуза $OA' = a$. Према томе, тачку A′ на описаном кругу могуће је добити и као тачку његова пресека са правом повученом из темена B паралелно оси OX.



Сл. 78

Повуцимо кроз тачку H праву HD нормално на OX осу. Конструисана права HD назива се директрисом елипсе за жижу F.

Нека M означава тачку на елипси, чија је апсциса $OP = x$. За растоње d тачке M од директрисе HD имамо

$$d = MQ = OH - OP = \frac{a^2}{c} - x.$$

тога пређашњи израз за потег r постаје

$$r = \frac{c}{a}d, \quad \text{или} \quad \frac{r}{d} = \frac{c}{a}.$$

Одредимо на сличан начин на оси OX другу тачку, H_1, са апсцисом $H_1 = -\frac{a^2}{c}$. Повуцимо кроз тачку H_1, нормално на осу OX, праву H_1D_1,)ја се назива *директрисом елипсе* за жижу F_1. За растојање $= MQ_1$ пређашње тачке M од друге директрисе налазимо

$$d_1 = Q_1M = H_1O + OP = OP - OH_1 = x + \frac{a^2}{c}.$$

рема томе добијамо

$$r_1 = \frac{c}{a}d_1, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{c}{a}.$$

Пошто однос $\frac{c}{a}$ претставља сталну величину, то добијене формуле)казују да *елипса претставља геометриско место тачака чији је однос істојања од дате тачке и дате праве стална величина.*

Из обрасца (5) следи

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \text{и} \quad \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

оследњи однос је прави разломак, који се назива *ексцентрицитеом* елипсе и означава обично са e, тј. $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Круг претставља іецијалан случај елипсе, када обе њене полуосе постају једнаке, а обе :иже се поклопе са средиштем, тј. $e = 0$. Према томе, ексцентрицитет ρуга једнак је нули, а директриса се удаљава у бесконачност.

Вратимо се вредности *параметра елипсе*, датој на стр. 149,) 120; њу је лако изразити помоћу ексцентрицитета, наиме

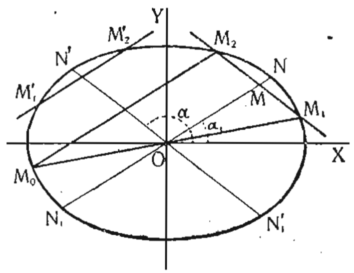
$$p = a(1 - e^2).$$

123. Пречници. — *Пречником (дијаметром) елипсе назива се линија оја полови све тетиве паралелне датоме правцу.*

Дата дефиниција дијаметра важи за сваку криву линију. Као што ≥мо видети даље, дијаметар може да и не сече своју криву линију; према оме дата дефиниција дијаметра претставља уопштење елементарне дефиниције дијаметра круга.

Тетиве елипсе кроз чије средине пролази дијаметар називају се *коњуговане* (спрегнуте) са тим дијаметром.

Лако је уверити се да дијаметар елипсе претставља праву линију која пролази кроз њено средиште. Да бисмо то показали, одредимо тачке пресека елипсе (6) (сл. 79) ма са којом сечицом M_1M_2, која је дата једначином



Сл. 79

$$y = mx + n. \tag{12}$$

Стављајући у (6) ову вредност за y, добијамо једначину која одређује апсцисе тачака пресека, M_1 и M_2,

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx - \\ - a^2(b^2 - n^2) = 0. \tag{13}$$

Означимо са x_1 и x_2 њене корене, а са y_1 и y_2 одговарајуће вредности y, одређене једначином (12). Средина M тетиве M_1M_2 одређена је координатама

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ова тачка је увек реална, јер је збир, $x_1 + x_2$, коренова једначине (13), једнак супротно означеној вредности коефицијента уз x на првом степену у једначини (13). Стога једначине (12) и (13) дају

$$X = -\frac{a^2mn}{b^2 + a^2m^2}; \qquad Y = mX + n. \tag{14}$$

Добијене координате тачке M зависе од угловног коефицијента, m, правца тетиве M_1M_2 и од ординате у почетку, n, која одговара овој сечици. Све тетиве које су са њом паралелне имају исти угловни коефицијент, m, али им се други параметар, n, мења према положају тетиве. Према томе, једначину дијаметра спрегнута са тетивама, чији је коефицијент правца m, добијамо елиминацијом параметра n из једначина (14). Стављајући вредност n одређену из прве од њих у другу једначину, добијамо једначину *траженог дијаметра* у облику

$$Y = -\frac{b^2}{a^2m}X. \tag{15}$$

Добијено геометриско место претставља праву линију која пролази кроз координатни почетак, тј. *сви дијаметри елипсе претстављају праве линије које се секу у њену средишту.*

Означимо са m_1 угловни коефицијент дијаметра (15), тј. ставимо

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2m}, \quad \text{одакле је} \quad mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{16}$$

Једнакост (16) претставља *везу између угловних коефицијената тетива датога правца и њима коњугованог дијаметра.*

Повуцимо, паралелно дијаметру N_1N, сечицу $M_1'M_2'$ чији је угловни коефицијент једнак m_1. Означимо са m' угловни коефицијент дијаметра $N_1'N'$, њугованог са тетивама, паралелним сечици $M_1'M_2'$. На основу доказа, оба ювна коефицијента тетиве m_1 и коњугованог јој дијаметра m' задовољају услов (16)

$$m_1 m' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{17}$$

Ако одузмемо једну од друге једнакости (17) и (16), долазимо до :ључка да је $m' = m$. Према томе, *дијаметар* $N_1'N'$, *који полови тетиве ралелне дијаметру* N_1N, *паралелан је тетивама које су са њим коњу-зане. Оба дијаметра* N_1N *и* $N_1'N'$ *називају се коњугованим. Дефинише особина да сваки од коњугованих дијаметара полови тетиве, паралелне коњугованим му дијаметром.*

Да би једнакост (16) постојала и за $m_1 = 0$, мора бити задовољен юв $m = \infty$. Првој вредности $m_1 = 0$ одговара велика оса елипсе, а другој ла. Према томе *осе елипсе претстављају два узајамно нормална коњу-зана дијаметра.*

Означимо, у општем случају, са α_1 и α респективно углове које за-лапају коњуговани дијаметри N_1N и $N_1'N'$ са осом OX, тј. ставимо

$$m_1 = tg\,\alpha_1, \quad m = tg\,\alpha.$$

да једнакост (16) постаје

$$tg\,\alpha\;\; tg\,\alpha_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{18}$$

Према томе, угловни коефицијенти коњугованих дијаметара имају су-)тне знаке, тј. један од углова, α_1 и α, оштар је, а други туп. То значи *коњуговани дијаметри леже у разним квадрантима.*

У случају круга, обе полуосе a и b једнаке су. Израз (16) постаје $_1 = -1$ и показује, да су *свака два коњугована дијаметра круга нор-ѣни један на другоме.*

124. Допунске тетиве. — Две тетиве елипсе које спајају ма коју ку M_2 на елипси (сл. 79) са крајевима ма ког дијаметра M_0M_1 нази-у се допунским. Лако је доказати *да су дијаметри, који су пара-ѣни двема допунским тетивама, коњуговани, и обратно.* Заиста, дијаметар ипсе N_1N, паралелан тетиви M_0M_2, пролази кроз средину стране M_0M_1)угла $\Delta M_0M_1M_2$, пошто је поменута страна дијаметар, који је преполо-ен средиштем елипсе O. Према томе, дијаметар N_1N полови тетиву M_1M_2,)ралелну са другим дијаметром $N_1'N_1'$. Исто тако последњи дијаметар по-ли тетиву M_0M_2, паралелну првоме дијаметру N_1N. Према томе оба ди-етра су коњугована.

Докажимо обрнуту теорему: да су *две тетиве, повучене из једне чке на елипси,* M_2, *паралелно са два коњугована дијаметра* N_1N *и* $N_1'N'$, *іунске, тј. ослањају се на дијаметар.* Заиста, повуцимо тетиве M_2M_0, M_1 и спојимо им крајеве правом линијом M_0M_1. Ова права пролази кроз :диште O. Тачност овог тврђења следи из тога, што сваки од датих ди-етара полови две стране троугла $\Delta M_0M_1M_2$, тј. пролази кроз средину те-ie M_0M_1, која се мора поклопити са тачком пресека оба дијаметра, тј. средиштем O. Према томе, отсечак M_0M_1 пролази кроз то средиште и тставља дијаметар, а дате тетиве су допунске.

Доказани став омогућује да се конструише дијаметар елипсе коњуговани са датим дијаметром. Тога ради довољно је конструисати допунске тетиве, од којих једна мора бити паралелна датоме дијаметру; тада ће друга тетива одредити правац траженог дијаметра елипсе, спрегнутог са датим.

125. Једначина елипсе у односу на коњуговане дијаметре. — Узмимо коњуговане дијаметре N_1N и $N_1'N'$ за осе OX_1 и OY_1 новог косоуглог координатног система. Изрази (10) (Глава III стр. 92) за трансформацију координата добијају облик

$$x = x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \cos\alpha, \quad y = x_1 \sin\alpha_1 + y_1 \sin\alpha.$$

Ако написане вредности за x и y унесемо у (6), добијамо

$$Ax_1^2 + 2Cx_1 y_1 + By_1^2 = 1,$$

где су уведене ознаке:

$$A = \frac{\cos^2\alpha_1}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha_1}{b^2} = \frac{1}{a_1^2}, \quad B = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{b_1^2},$$

$$C = \frac{\cos\alpha\,\cos\alpha_1}{a^2} + \frac{\sin\alpha\,\sin_1\alpha_1}{b^2} = \frac{\cos\alpha\,\cos\alpha_1}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} + tg\,\alpha\;\, tg\,\alpha_1\right).$$

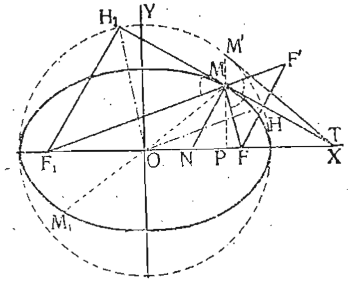
На основу везе (18) коефицијент C једнак је нули, те трансформисана једначина постаје

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1. \tag{19}$$

Лако је видети да a_1 и b_1 означавају респективно дужине коњугованих полудијаметара, ON и ON'. Ако је $\alpha = \pi - \alpha_1$, из (18) је $tg\,\alpha_1 = \frac{b}{a}$; онда је $b_1 = a_1$, и једначина (19) постаје

$$x_1^2 + y_1^2 = a_1^2.$$

126. Тангенте. — Тангентом у датој тачки на елипси назива се права паралелна тетивама коњугованим са дијаметром, који пролази кроз дату тачку елипсе. Ова дефиниција тангенте претставља генерализацију елементарне дефиниције тангенте круга за — елипсу, јер је код њега сваки дијаметар нормалан на тетивама са њим спрегнутим. Према томе тангента код круга је нормална на полупречнику додирне тачке.



Сл. 80

Да бисмо поставили једначину тангенте у тачки $M(x_0, y_0)$ на елипси (6) (сл. 80), повуцимо кроз њу дијаметар MM_1. Пошто је $OP = x_0$, $PM = y_0$, то угловни коефицијент m_1 дијаметра MM_1 добија, из правоуглог троугла ΔOPM, вредност

$$m_1 = tg \sphericalangle POM = \frac{y_0}{x_0}$$

Према томе, израз (16) даје за угловни коефицијент коњугованог
аметра

$$m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \qquad (20)$$

Према дефиницији тангенте у тачки M, последњи израз претставља овни коефицијент тражене тангенте на елипси. Израз (20) према прави- ıа диференцијалног рачуна добија се такође као вредност извода орди- е по x у тачки додира. Према томе, једначина тангенте биће

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0), \text{ или } \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{x_0 x}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

што се тачка (x_0, y_0) налази на елипси (6), то је десна страна последње ıакости једнака јединици, те једначина има облик

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \qquad (21)$$

кле, *једначина тангенте елипсе у датој тачки добија се из једначине псе, ако у сваком њеном члану заменимо један степен од текућих коор- ата одговарајућом координатом тачке додира.* Да бисмо конструисали генту (21), MT, приметимо да она отсеца од координатних оса, X и Y, от- ке $\frac{a^2}{x_0}$, одн. $\frac{b^2}{y_0}$. Сваки од њих зависи од једне полуосе и њој одговарајуће рдинате тачке додира. При томе је свака полуоса средња пропорцио- а између одговарајућег отсечка и координате тачке додира. Дате тачке сека сваке од оса са тангентом, повученом ма из које тачке на елипси, ормалом спуштеном из исте тачке на дотичну осу, образују са теменима псе, на тој оси, хармониски низ тачака.

Заиста, једнакост $\mathrm{OT} \cdot x_0 = a^2$ даје пропорције

$$\frac{\mathrm{OT}}{a} = \frac{a}{x_0}, \qquad \frac{\mathrm{OT} + a}{\mathrm{OT} - a} = \frac{a + x_0}{a - x_0}.$$

ıачимо ли са A и $\mathrm{A_1}$ темена елипсе, која леже на OX оси с десна на о, онда последња пропорција постаје

$$\frac{\mathrm{A_1T}}{\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{A_1P}}{\mathrm{PA}}, \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{A_1P}}{\mathrm{PA}} = -\frac{\mathrm{A_1T}}{\mathrm{TA}},$$

тачке P и T су хармониски коњуговане са $\mathrm{A_1}$ и A.

Осим тога, величина отсечка координатне осе задржава сталну вред- т за све елипсе са датом полуосом, ма каква била њихова друга полуоса. ıимо, на пр., отсечак OT, који отсеца тангента MT од OX осе. Он задр- за своју величину ако се узме елипса чија је друга полуоса једнака a, тј. се, место дате елипсе, посматра круг описан око ње. Ако, дакле, на опи- ом кругу конструишемо тачку M, која одговара апсциси $\mathrm{OP} = x_0$, тангента кругу у тој тачки, на основу изложеног, пресеца OX осу у траженој тачки Према томе, да бисмо повукли тангенту на елипсу у M, довољно је спојити ту

тачку са тачком T на X оси. На сличан начин може се за конструкцију тангенте на елипси искористити и отсечак који она отсеца од OY осе, и круг уписан у елипси.

Да бисмо повукли тангенту на елипсу паралелно датоме правцу, користићемо се изразом (20). У овом случају, угловни коефицијент m је познат, а x_0 и y_0 су непознате. Према томе, ради одређивања ових последњих, користићемо се једначином (20) и једначином која се добија када тражене координате x_0 и y_0 уврстимо у једначину елипсе (6). Скуп поменутих двеју једначина, од којих је једна линеарна а друга квадратна, одређује две додирне тачке. Препуштамо читаоцу да се сам увери, да решавањем обе једначине добијамо за x_0 и y_0 увек реалне вредности, ма какав био дати угловни коефицијент m. Када уврстимо нађене координате у једначину (21) добићемо две тражене паралелне тангенте. Није тешко увидети, *да обе нађене тангенте пролазе кроз крајеве дијаметра, коњугованог са тетивама које су паралелне датоме правцу тангенте.* Ово следи из саме дефиниције тангенте. Отуда добијамо веома једноставан начин за конструкцију тражених тангената. Довољно је конструисати дијаметар, коњугован са тетивама паралелним датоме правцу. Темена тог дијаметра претстављају тражене додирне тачке.

Најзад, да бисмо поставили једначину тангенте на елипси повучене из дате тачке (x_1, y_1), која не лежи на елипси, стављамо координате дате тачке у једначину (21). Добијени резултат претставља један услов, који морају задовољавати координате x_0, y_0 додирне тачке. Други услов се добија када се координате x_0, y_0 уврсте у једначину (6). Решимо ли ове једначине по x_0 и y_0 добијамо

$$\frac{x_0}{a^2} = \frac{1}{x_1}\left(1 - \frac{y_1 y_0}{b^2}\right), \quad \frac{y_0}{b^2} = \frac{a^2 y_1 \pm ab x_1 \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1}}{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}.$$

Одавде је очевидно да тражене координате добијају реалне вредности само под условом ако је поткорени израз позитивна величина, тј. ако дата тачка (x_1, y_1) (в. стр. 151, n⁰ 121) лежи ван елипсе. Када ставимо нађене вредности x_0, y_0 у једначину (21), добићемо д в е р е а л н е т а н г е н т е.

Изведени резултати се проширују на једначину елипсе у односу на два коњугована дијаметра. Према томе, веза (16), између угловних коефицијената два коњугована дијаметра, задржава свој облик и у односу на нови косоугли координатни систем. Препушта се читаоцу да докаже, *да се једначина тангенте у датој тачки елипсе добија из њене једначине (19), заменом једне од текућих координата у сваком њеном члану — координатама додирне тачке.*

127. Особине тангената. — 1) *Тангента на елипси полови спољашњи угао који заклапају потези додирне тачке.*

Повуцимо из жиже $\mathrm{F}(c, 0)$ и $\mathrm{F_1}(-c, 0)$ (сл 80) нормале, FH и $\mathrm{F_1H_1}$, на тангенту MT, у тачки $\mathrm{M}(x_0 y_0)$ елипсе. Дужине тих нормала, $d = \mathrm{FH}$ и $d_1 = \mathrm{F_1H_1}$, изражавају се помоћу једначине (21) (види стр. 65, n⁰ 44)

$$d = -\frac{b^2(c x_0 - a^2)}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}, \quad d_1 = +\frac{b^2(c x_0 + a^2)}{\sqrt{b^4 x_0 + a^4 y_0^2}}.$$

атле, на основу израза (4) за потеге r_0 и r_{10} тачке M, добијамо

$$\frac{d_1}{d} = \frac{a^2 - c\,x_0}{a^2 + c\,x_0} = \frac{r_0}{r_{10}}\,.$$

Овај однос показује да су правоули троуглови $\triangle FHM$ и $\triangle F_1M_1H_1$ ıчни, према томе су им углови код заједничког темена M једнаки. То ıчи да тангента заиста полови спољашњи угао између потега тачке M. казана особина тангенте даје други начин за конструкцију тангенте у гој тачки на елипси, помоћу симетрале спољашњег угла између потега цирне тачке.

Поменуту конструкцију могуће је извести и на овај начин. Очевидно да се продужење потега F_1M и нормале FH секу у тачки F_1' директорног S /га (в. стр. 147 слика 76). Заиста, ако спојимо тачку F_1 са H, добијени)углови $\triangle FHM$ и $\triangle HF'M$ биће подударни, јер имају једнаке по две)ане и њима захваћене углове. Стога све три тачке F, H и F_1 леже на ној правој, нормалној на тангенти MT, а тачка F′ симетрична је са тачком у односу на тангенту.

Према томе, нормала HM, повучена из средине отсечке FF′, претıвља тражену тангенту у тачки M дате елипсе.

Добијени резултат изражава се овако

2) *Тачка која је симетрична са жижом у односу на тангенту елипсе жи на њеном директорном кругу.*

Овај закључак даје могућност да се конструише (шестаром и лењиром) ıгента елипсе. Тога ради довољно је конструисати тачку симетричну са жом у односу на тражену тангенту. Повуцимо, на пр., тангенту на елипсу)алелно датоме правцу. Тражена тачка F′, симетрична са жижом (сл. 80), ки на директорном кругу елипсе и на правој која пролази кроз жижу F,)мално на датом правцу тангенте. Пошто жижа F лежи на директорном /гу, то пресек поменутих линија даје две тачке. Стога је лако конструıти тражене две тангенте.

Узмимо да треба повући тангенту на елипсу кроз дату тачку K, која лежи на елипси. Тачка F′, симетрична са жижом F у односу на тражену ıгенту, у овом случају, лежи на директорном кругу на растојању KF од ıке K, тј. на другом кругу описаном око тачке K полупречником KF. Ако ıка K лежи ван елипсе, онда се оба круга секу у двема тачкама и, према ıе, добијају се две тражене тангенте.

3) *Подножја нормала спуштених из жижа на тангенту ма у којој чки елипсе леже на кругу описаном око ње.* Спојимо тачку H са средием O (сл. 80). Тачке H и O полове респективно стране троугла F_1FF'. ога је отсечак OH парарелан страни F_1F' и једнак је њеној половини, тј. ıој полуоси елипсе, a, која претставља полупречник описаног круга.

Да бисмо доказали да и тачка H_1 лежи такође на описаном кругу, ıструишимо тачку симетричну са жижом F_1 у односу на тангенту MT. но је да ова тачка лежи на продужењу праве FM, на растојању $2a$ од ıке F. Према томе OH_1 је једнако a.

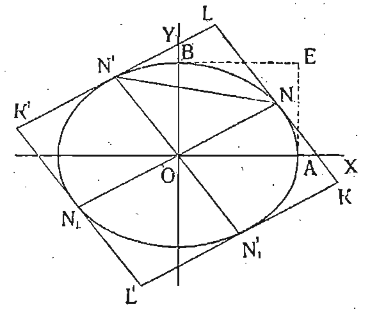
Препуштамо читаоцу доказе теореме

4) *Производ двеју нормала, повучених из жижа на било коју танıту елипсе, има сталну вредност, која је једнака квадрату мале*

полуосе. За доказ ове теореме довољно је искористити изведене изразе за d и d_1 и искључити из њихова производа вредност y_0, одређену једначином елипсе (6).

128. Аполонијева теорема. — Означимо са x и y координате темена N дијаметра N_1N елипсе (6) (сл. 81), а са x' и y' координате темена N′ коњугованог дијаметра $N_1'N'$ у односу на координатни систем XOY. Ако означимо са a_1 и b_1 дужине полудијаметара ON и ON_1', имамо

$$a_1^2 = x^2 + y^2, \qquad b_1^2 = x'^2 + y'^2. \quad (22)$$



Сл. 81

Координате тачака N и N′ задовољавају једначине одговарајућих дијаметара. Стога, ако са m_1 и m обележимо угловне коефицијенте посматраних дијаметара, добићемо идентичности

$$y = m_1 x\,, \qquad y' = m x'.$$

Измножимо ли последње једнакости добићемо, на основу везе (16),

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0\,.$$

Пошто се обе тачке N и N′ налазе на елипси, постоје идентичности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\,.$$

Решимо последње две једначине по $\frac{y^2}{b^2}$ и $\frac{y'^2}{b^2}$ и добијене једнакости измножимо међусобно, па из добијеног производа елиминишимо y и y', узимајући у обзир прву од последње три једнакости. Ако на сличан начин из исте три једначине искључимо x и x', добићемо везе

$$x^2 + x'^2 = a^2, \qquad y^2 + y'^2 = b^2. \quad (23)$$

Сабирањем једнакости (22) и узимањем у обзир једнакости (23) добијамо прву теорему у облику:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2.$$

Ако обе стране последње једнакости помножимо са 4, добијени резултат може се овако формулисати

Збир квадрата ма која два коњугована дијаметра елипсе има сталну вредност, која је једнака збиру квадрата њених оса.

Да бисмо доказали другу теорему, израчунајмо површину паралелограма KLK′L′ конструисана над два спрегнута дијаметра N_1N и $N_1'N'$. Према дефиницији тангенте елипсе очевидно је, да је посматрани паралелограм описан око ње. Очигледно је да је тражена површина једнака осмострукој површини троугла $\triangle ONN'$. Површина S овог троугла, изражена помоћу координата његових темена, има вредност (в. стр. 27, n⁰ 10)

$$S = \frac{1}{2}(x y' - y x').$$

За израчунавање овог израза послужимо се следећим, тзв. *Шал*-овим изразима. Решавањем једначина (23) по x' и y', а узимајући у обзир једначине (7) и (8), добијамо тражене вредности

$$x' = \mp \frac{a}{b} y, \quad y' = \pm \frac{b}{a} x,$$

где знаци одговарају услову да се тачке N и N' налазе у различитим квадрантима (в. стр. 154, n⁰ 153). Ако унесемо у претходни израз добијене вредности за x' и y', узете са горњим знацима, који одговарају посматраној слици, онда, узимајући у обзир и једначину елипсе (6), добијамо

$$S = \frac{1}{2} ab\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{2} ab.$$

Нађена вредност једнака је половини површине правоугаоника OAEB, конструисана над полуосама елипсе. Отуда следи друга Аполонијева теорема: *Површина паралелограма конструисана над коњугованим дијаметрима елипсе једнака је површини правоугаоника конструисана над њеним осама.*

Изведена теорема може се изразити следећом једнакошћу

$$a_1 b_1 \sin\theta = ab, \quad \text{где је} \quad \theta = \alpha - \alpha_1,$$

а α_1 и α означавају одговарајуће углове дијаметара ON и ON' са осом OX.

Обе Аполонијеве теореме успостављају везу између полуоса и коњугованих полудијаметара елипсе, и омогућавају изражавање једних помоћу других, када је угао θ познат. Очевидно је да се оба задатка решавају помоћу квадратних једначина. Према томе, ако су дате две од ових величина, друге две могу се конструисати помоћу лењира и шестара.

129. Нормале. — Нормалом у тачки M елипсе (сл. 80) назива се права линија MN, нормална на тангенти елипсе у истој тачки. Према томе је угловни коефицијент нормале једнак реципрочној и супротна знака вредности угловног коефицијента m тангенте (20). На тај начин једначина нормале елипсе (6) у тачки M постаје

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0), \quad \text{или} \quad \frac{a^2(x - x_0)}{x_0} - \frac{b^2(y - y_0)}{y_0} = 0.$$

Добијена једначина може се написати, с обзиром на везу (5),

$$\frac{a^2 x}{x_0} - \frac{b^2 y}{y_0} = c^2. \qquad (24)$$

Отсечак ON, који отсеца нормала од осе OX, једнак је $\frac{x_0 c^2}{a^2}$. Отсе-

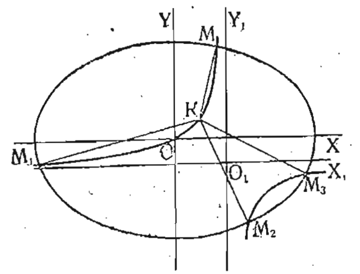
чак OT, који отсеца тангента, као што је већ раније показано (в. стр. 156), једнак је $\frac{a^2}{x_0}$. Према томе, ма за коју тачку на елипси производ оба отсечка претставља сталну величину, c^2, тј. *растојање жиже елипсе од средишта средња је пропорционала између отсечака на апсцисној оси, које отсецају нормале и тангента ма у којој тачки елипсе.* Другим речима, на сличан начин као и раније (в. стр. 156) закључујемо, да четири тачке F_1, N, F и T образују хармониски низ.

За конструкцију нормале у датој тачки елипсе можемо се користити особином нормале, према којој је она истовремено и симетрала унутрашњег угла између потега посматране тачке елипсе. Овај закључак непосредно следи из тога што оба потега елипсе, заједно са тангентом и нормалом, према раније реченом, образују хармониски прамен (в. стр. 120 n⁰ 99), а тангента је шта више и симетрала спољашњег угла између потега.

Да бисмо повукли нормалу на елипсу паралелно датоме правцу, означимо са x_0 и y_0 координате траженог подножја нормале M. Ако са m' означимо угловни коефицијент датога правца нормале, онда, с обзиром на образац (24), добијамо

$$m' = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \quad \text{или} \quad a^2 y_0 = b^2 m' x_0.$$

Осим тога, x_0 и y_0 задовољавају једначину дате елипсе (6). И тако, за одређивање тражених координата добијају се две једначине: једна линеарна, а друга квадратна. Оне дају увек реалне вредности за x_0 и y_0, о чему се можемо лако уверити непосредним израчунавањем, и одређују две тачке. Стога решење даје две тражене нормале. За њихову конструкцију довољно је повући кроз жижу F (сл. 80) праву, паралелну датоме правцу нормале. Њен пресек са директорним кругом елипсе даје две тачке, симетричне са жижом у односу на тангенте елипсе, повучене у траженим подножјима нормала. Конструкцијом ових тангената одређују се додирне тачке, које претстављају тражена подножја нормала.



Сл. 82

Много сложенији задатак је конструкција нормале на елипсу (6) из дате тачке $K(x_1, y_1)$ која не лежи на елипси (сл. 82). Очевидно је да непознате координате x_0, y_0, подножја тражене нормале, задовољавају услов који се добија из једначине (24)

$$\frac{a^2 x_1}{x_0} - \frac{b^2 y_1}{y_0} = c^2, \quad \text{или} \quad c^2 x_0 y_0 + b^2 y_1 x_0 - a^2 x_1 y_0 = 0. \qquad (25)$$

Друга једначина, коју задовољавају тражене координате x_0, y_0, добија се из једначине елипсе (6). Битна разлика између овог и претходних задатака састоји се у томе, што су обе једначине за одређивање тражених координата другог степена. Према томе, из дате тачке која не лежи на елипси могуће је, у општем случају, повући четири нормале на елипсу. Испитајмо пре свега — облик криве (25) у односу на координате x_0, y_0. Наша крива пролази кроз координатни почетак, пошто је њена једначина идентички задовољена када су x_0 и y_0 једнаки нули. Осим тога крива (25) пролази кроз тачку K, пошто једначина (25), с обзиром на образац (5), постаје идентичност за вредности x_0 и y_0 које су респективно једнаке вредностима x_1 и y_1. Најзад уведимо ознаке

$$x_0 = \alpha + X, \quad y_0 = \beta + Y,$$

где су α и β тренутно непознате координате почетка новог координатног система, а X и Y нове координате. Кад унесемо вредности за x_0 и y_0 у једначину (25), добијени резултат можемо овако написати

$$c^2 XY + \frac{a^2 b^2 x_1 y_1}{c^2} = 0, \quad \text{или} \quad XY = -k^2, \tag{26}$$

при чему се мора ставити

$$\alpha = \frac{a^2 x_1}{c^2}, \quad \beta = -\frac{b^2 y_1}{c^2}, \quad k^2 = \frac{a^2 b^2 x_1 y_1}{c^4}. \tag{27}$$

Једначина (26) одређује хиперболу, слично једначини (19) [Глава I]. У посматраном случају, када се тачка K налази у I квадранту старог координатног система, тј. $x_1 > 0$ и $y_1 > 0$, десна страна једначине (26), с обзиром на (27), претставља негативну величину, а нови почетак (α, β) лежи у IV квадранту старог координатног система. Према томе, хипербола (26) састоји се из две гране, MKM_1 и M_2M_3, које леже респективно у II и IV квадранту новог координатног система $X_1O_1Y_1$.

Хипербола (26) или (25) назива се Аполонијевом хиперболом. На нашој слици она пресеца дату елипсу у четири реалне тачке. Према томе из тачке K могуће је повући на елипсу четири реалне нормале: KM, KM_1, KM_2 и KM_3. Ако би друга грана, M_2M_3, хиперболе додиривала елипсу у једној тачки, или ако је уопште не би секла, број реалних нормала био би три, одн. два. Област тачака из којих је увек могуhно повуhи четири реалне нормале на елипсу одређује се у диференцијалном рачуну. Та је област ограничена кривом линијом која се зове еволута елипсе.

---

130. Примери и задаци.

1. Израчунати дужину полуоса елипсе, чије се осе поклапају са осама правоуглог координатног система, а која пролази кроз две тачке (1,3) и $\left(\frac{3}{4}, 4\right)$.

2. Одредити жиже елипсе са полуосама 5 и 3.

3. Показати да једначина општег облика $A\alpha^2 + By^2 = C$, где су A, B и C позитивне величине, одређује елипсу. Одредити њене полуосе и жиже.

4. Дат је парелелограм са странама a и b, чије је једно теме O непокретно. Ако се паралелограм развлачи тако, да стране које олазе из темена O заклапају се непомичном осом OX једнаке обртне углове, онда супротно теме описује елипсу са полуосама $a+b$ и $a-b$.

5. Повуhи у кругу тетиве паралелне датоме правцу. Наhи геометриско место њихових тачака, чија су отстојања од средине тетива, рачуната на обе стране, смањена у датом односу у поређењу са отстојањима крајева тетива.

6. Израчунати површину елипсе $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$.

7. Одредити дужину полуоса елипсе код које је растојање између жижа једнако 2, а између директриса 10.

8. Растојање између жижа елипсе једнако је растојању између темена веhе и мање полуосе. Одредити ексцентрицитет елипсе.

9. Израчунати дужину полуоса елипсе помоhу ексцентрицитета и параметра.

10. Израчунати дужину полуоса елипсе, ако је мала полуоса једнака растојању између жижа, а параметар једнак 19.

11. Наhи параметар, ексцентрицитет и координате жижа за елипсе:

1) $x^2 + 3y^2 = a^2$, 2) $5x^2 + 4y^2 = 1$, 3) $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$.

12. Поставити једначину елипсе са жижом у тачки $(-1, 1)$, директрисом $x - y + 3 = 0$ и ексцентрицитетом $\frac{1}{2}$.

13. Наhи угао између веhе осе и дијаметра чија је дужина аритметичка, одн. геометриска средина за дужине оса елипсе.

14. Поставити једначине дијаметра елипсе (6), коњуговане са дијаметрима

$$x - y = 0, \quad x + y = 0, \quad y = \frac{a}{b}x, \quad y = \frac{b}{a}x.$$

15. Поставити једначину тетиве елипсе са полуосама 6 и 3, која пролази кроз тачку (2,1) којом се полови.

16. Дате су полуосе елипсе; наhи угао између два коњугована дијаметра, чије дужине стоје у датом односу.

17. Одредити угловни коефицијент дијаметра, коњугована са дијаметром који заклапа угао од 45° са веhом осом елипсе. Конструисати тражени дијаметар помоhу описаног круга.

18. Доказати да се једнаки коњуговани дијаметри поклапају са дијагоналама правоугаоника конструисана над осама елипсе и заклапају најмањи угао међу собом. Поставити једначину елипсе у односу на ове дијаметре, узете за осе косоуглог координатног система.

19. Наhи ексцентрицитет елипсе ако је растојање између њених жижа једнако дијаметру, који је једнак своме коњугованом дијаметру.

20. Доказати да геометриско место средина тетива елипсе, које се секу у једној тачки, претставља елипсу.

21. Поставити једначине тангенте и нормале

1) у тачки $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ елипсе $4x^2 + 9y^2 = 20$;

2) у тачки елипсе $5x^2 + 3y^2 = 137$ са ординатом 2;

3) у крајњој тачки параметра елипсе $9x^2 + 16y^2 = 144$;

4) паралелно датој правој $y = 3x + 7$, за елипсу $4x^2 + 3y^2 = 5$.

22. Доказати да права $y = x + \sqrt{\frac{7}{12}}$ додирује елипсу $3x^2 + 4y^2 = 1$; наhи додирну тачку.

23. Поставити једначину оне тангенте елипсе, чији је отсечак између додирне тачке и веhе осе преполовљен директрисом.

24. Израчунати вредност односа отсечака нормале елипсе, који леже између тачке елипсе и њених оса.

25. Поставити једначину круга уписана у елипсу, чији се центар налази на њеној веhој оси.

26. Поставити једначину елипсе чија нормала повучена у крајњој тачки параметра, пролази кроз теме мале полуосе.

27. Доказати да се две тангенте, конструисане у теменима ма које тетиве секу на дијаметру коњугованом са том тетивом.

28. Наћи геометриско место темена паралелограма, конструисаних над коњугованим дијаметрима елипсе.

30. Доказати да дијагонале паралелограма описана око елипсе претстављају коњуговане дијаметре.

31. Доказати да производ отсечака тангенте елипсе, који леже између додирне тачке и два коњугована дијаметра, има сталну вредност која је једнака квадрату полудијаметра паралелног тангенти.

32. Доказати да две тангенте елипсе граде једнаке углове са правама које спајају њихову тачку пресека са жижама.

ГЛАВА СЕДМА

ХИПЕРБОЛА

I. Дефиниција и једначина хиперболе.

131. Дефиниција хиперболе. — *Хипербола је геометриско место тачака, чија је разлика растојања од две дате тачке — стална величина.*

Означимо са F_1 и F (сл 83) дате тачке. Тачка M припада хиперболи ако је разлика њених растојања, $r_1 = F_1M$ и $r = FM$, једнака датој сталној величини $2a$, тј. ако је

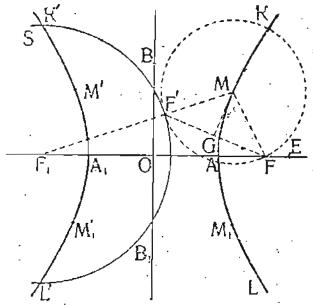
$$r_1 - r = 2a. \qquad (1)$$

Обележимо са $2c$ дужину F_1F. Из троугла ΔF_1FM закључујемо да је

$$r_1 - r < 2c, \quad \text{тј.} \quad a < c. \qquad (2)$$

Према томе лако је одредити ма колико тачака хиперболе. Тога ради ставимо тачку O у средину растојања F_1F и две тачке, A_1 и A, сваку на растојању a од тачке O. Узмимо неку тачку E на правој A_1A ван отсечка F_1F. Јасно је да дужине отсечака A_1E и AE, ако их означимо респективно са r_1 и r, задовољавају услов (1).

Опишимо око тачке F круг са полупречником AE, а око F_1 круг са полупречником E. Ти кругови се секу у двема тачкама, M и M_1, подједнако удаљеним од праве AA_1. Са истим полупречницима опишимо кругове обрнутим редом, тј. око тачке F круг са полупречником A_1E, а око F_1 круг са полупречником AE. Ти кругови се секу у тачкама M' и M'_1. И ове тачке су подједнако удаљене од праве A_1A. Међутим тачке M и M', односно M_1 и M'_1, исто тако су подједнако удаљене и од друге праве B_1B, која пролази кроз тачку O, нормално на A_1A. Мењајући положај тачке E на правој A_1A, можемо конструисати безброј тачака хиперболе, за коју су праве A_1A и B_1B **о с е с и м е т р и ј е** и зову се **о с е х и п е р б о л е**, а тачка O **ц е н т а р х и п е р б о л е**. Очевидно је да тачке A_1 и A, које се називају **т е м е н и м а** хиперболе, припадају такође хиперболи, јер за апсолутне вредности посматраних дужина имамо



Сл. 83.

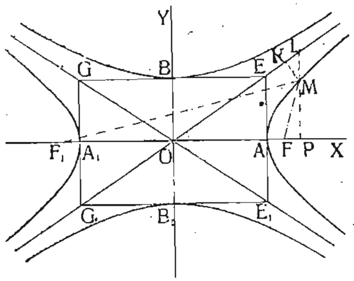
$$F_1A - FA = F_1A - F_1A_1 = A_1A = 2a, \quad FA_1 - F_1A_1 = FA_1 - FA = A_1A = 2a.$$

Тачке F и F_1 зову се **ж и ж е** хиперболе, а r и r_1 **п о т е з и** њене тачке M.

Да бисмо нацртали хиперболу непрекидним кретањем, узмимо два конца чије се дужине разликују за $2a$. Утврдимо по један њихов крај у сваку од жижа, а оба друга краја чврсто држимо међу прстима. Ако сада оба конца затегнемо врхом оловке, онда ћемо описати њиме две непрекидне гране хиперболе, $KMAM_1L$ и $K'M'A_1M_1'L'$, које се пружају у бесконачност.

Једнакост (1) која дефинише хиперболу може се геометриски овако протумачити. Одвојмо од потега F_1M отсечак MF, чија је дужина r. Из једнакости (1) следи да разлика $r_1 - r$ претставља сталну величину $2a$. Према томе отсечак F_1F' једнак је сталној величини $2a$ за сваку тачку хиперболе. То значи да геометриско место тачака F' претставља круг S са средиштем у F_1 и полупречником $2a$. Тачка M хиперболе налази се на подједнаком растојању од круга S и сталне тачке F. Према томе *хипербола претставља геометриско место тачака подједнако удаљених од датога круга и дате тачке.*

Круг S назива се **директорним кругом** хиперболе. На исти начин дефинисали смо директорни круг код елипсе. Међутим лако је у томе смислу уочити разлику између елипсе и хиперболе. Док је полупречник директорног круга хиперболе мањи од растојања између центра F_1 и дате тачке F, дотле је тај полупречник код елипсе већи од тог растојања.



Сл. 84

Најзад, опишимо око тачке M, као око средишта, круг полупречника r. Он пролази кроз тачку F и додирује у тачки F' директорни круг S. Према томе *хипербола претставља и геометриско место центара кругова који пролазе кроз дату тачку и додирују дати круг.* На основу тога, свака тачка M хиперболе може бити конструисана као тачка пресека продужетка полупречника F_1F' директорног круга са нормалом, подигнутом из средине G на дужи FF'.

132. Једначина хиперболе. — Узмимо хиперболине осе за правоугли координатни систем XOY (сл. 84). Означимо са x и y координате OP и PM тачке M. Из правоуглих троуглова $\triangle F_1PM$ и $\triangle FPM$ добијамо

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,, \qquad r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,. \tag{3}$$

Ако унесемо ове вредности за r_1 и r у (1) добијамо тражену једначину хиперболе

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Помножимо обе стране ове једнакости збиром $r_1 + r$ и добијени резултат решимо по последњем збиру, који се јавља на десној страни једнакости. По извршењу назначених операција добијамо

$$r_1 + r = \frac{2c}{a}\,x.$$

Решавајући ову једначину са једначином (1) налазимо

$$r = \frac{c}{a}x - a, \qquad r_1 = \frac{c}{a}x + a. \tag{4}$$

Када заменимо у другом обрасцу (3) r његовом вредношћу из прве од једначина (4) налазимо

$$\frac{c}{a}\,x - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подигнимо на квадрат обе стране ове једначине и добијамо

$$\frac{(a^2-c^2)\,x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2.$$

Ако, најзад, на основу неједнакости (2), уведемо ознаку

$$c^2 - a^2 = b^2, \tag{5}$$

добијамо једначину хиперболе у облику

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Веза (5) показује да b претставља дужину катете правоуглог троугла чија је друга катета a, а хипотенуза c. Према томе лако је одмерити на OY оси отсечак OB, који је једнак b. Бројеви a и b одређују величине полуоса хиперболе (6).

Ако једначину (6) решимо по промењивој y, добијамо

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{7}$$

Пошто се за сваку вредност x из (7) добијају две, по апсолутној вредности једнаке а по знаку супротне, вредности за y, то X оса претставља осу симетрије хиперболе. Решимо ли једначину (6) по x, добијамо

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}, \tag{8}$$

тј. Y оса је друга оса симетрије посматране криве. Апсолутна вредност ординате хиперболине жиже назива се **параметром** хиперболе. Означимо ли величину параметра са p, онда из једначине (7), узимајући у обзир (5), добијамо

$$p = \frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}.$$

133. Геометриски облик хиперболе. — Из једначине (7) закључујемо да x не сме бити мање од a, ако се жели да y има реалну вредност. За $y = 0$ апсциса добија две вредности: $x = \pm a$, које одговарају хиперболиним теменима, A и A_1, у којима X оса сече хиперболу. За све вредности x чије су апсолутне вредности веће од a, ординате добијају реалне вредности. Према томе, ако се кроз темена A и A_1 хиперболе повуку две праве, EE_1 и GG_1, паралелно оси OY, хипербола ће се налазити изван области ограђене уоченим правама и простираће се у бескрајност са обе стране ове области. То значи да оса OY не пресеца посматрану криву у реалним тачкама и зато је називамо **и м а г и н а р н о м о с о м.** Из истих разлога и полуосу b називамо **и м а г и н а р н о м.** Одмеримо на имагинарној оси, изнад и испод координатног почетка, отсечке OB и OB_1, дужине b, па кроз тачке B и B_1 повуцимо праве EG и E_1G_1 паралелно са реалном осом OX. Посматране праве образују правоугаоник EGG_1E_1. Његове дијагонале, EG_1 и E_1G, називају се **а с и м п т о т а м а** хиперболе. Њихове су једначине

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{9}$$

Очевидно је да се обе једначине (9) добијају када се лева страна једначине (6) изједначи са нулом.

Пошто је $|x| > \sqrt{x^2 - a^2}$ то, ако са PL обележимо ординату асимптоте G_1E, која одговара апсциси OP, из једначина (7) и (9) закључујемо да је $PL > PM$, тј. *за сваку апсцису ордината асимптоте је већа, по апсолутној вредности, од одговарајуће ординате хиперболе.*

Лако је доказати, да *растојање грана хиперболе од асимптота (9) тежи нули, када x расте у бескрајност.* Спустимо из тачке M хиперболе нормалу MK на асимптоту G_1E. Из сличности правоуглих троуглова $\triangle MKL$ и $\triangle AOE$, код којих су углови са теменима M и O једнаки, добијамо

$$MK = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} ML.$$

На основу једначина (9) и (7) имамо

$$ML = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Прелазећи на граничну вредност, добијамо за $x = \infty$

$$\lim MK = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lim ML = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lim \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Према томе асимптоте (9) се поклапају са гранама хиперболе у бесконачности. На тај начин свака грана хиперболе налази се у области ограниченој двема асимптотама и правом што пролази кроз хиперболино теме паралелно оси y.

Обе асимптоте посматране хиперболе служе истовремено као асимптоте и друге хиперболе, за коју се каже да је **к о њ у г о в а н а** са хиперболом (6). Коњугована хипербола има за реалну осу имагинарну осу дате хиперболе, а за имагинарну осу њену реалну осу. Стога је једначина коњуговане хиперболе облика

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{10}$$

што значи, да се темена ове хиперболе налазе у тачкама B и B_1. Обе гране посматране хиперболе (10) налазе се у угловима између асимптота, који су суплементни угловима између чијих кракова лежи хипербола (6).

Најзад, отстојања жижа обеју коњугованих хипербола од њихових центара једнака су.

Претпоставимо да су обе полуосе хиперболе (6), реална a и имагинарна b, једнаке, тј. $a = b$. Једначина (6) добија тада облик

$$x^2 - y^2 = a, \quad \text{или} \quad y = \pm \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{11}$$

У том случају правоугаоник EGG_1E_1, конструисан над полуосама хиперболе, прелази у квадрат. Хипербола (11) назива се **ј е д н а к о с т р а н о м**; њене асимптоте су нормалне једна на другој и поклапају се са симетралама углова између оса хиперболе.

Ако се вратимо једначини хиперболе (7), можемо је написати и овако

$$y = \frac{b}{a} y', \quad \text{где је} \quad y' = \pm \sqrt{x^2 - a^2}, \tag{12}$$

при чему y', с обзиром на једначину (10), претставља ординату једнакостране хиперболе. Према томе прва једнакост (12) показује да је *ордината сваке тачке на хиперболи четврта пропорционала за њене полуосе и ординату која одговара истој апсциси оне једнакостране хиперболе, која је конструисана над реалном осом дате хиперболе.*

Изрази (12) могу се протумачити и на други начин. Друга од једнакости (12) показује да y' претставља катету правоуглог троугла, који за другу катету има реалну хиперболину полуосу, а за хипотенузу — апсцису посматране тачке на хиперболи. Према томе, из прве једначине (12) излази *да је ордината сваке тачке хиперболе четврта пропорционала за њене полуосе и катету уоченог правоуглог троугла.*

Овај став омогућује да конструишемо тачке хиперболе помоћу два концентрична круга, чији се центри поклапају са центром хиперболе, а полупречници су им једнаки реалној и имагинарној полуоси хиперболе. Препуштамо читаоцу да изведе конструкције у случајевима: када је реална полуоса већа, одн. мања од имагинарне полуосе хиперболе.

Најзад треба приметити да хипербола претстављена једначином (6) дели раван на две области: једну између грана хиперболе, и другу изван тих грана. Ако се тачка помера паралелно X оси, мења се само први члан леве стране једначине (6) и то од 0 до ∞. То значи да се лева страна једначине (6) мења од $-\frac{y^2}{b^2}$ до 1, када тачка пресеца хиперболу, а затим бескрајно расте. Према томе за тачке које не леже на хиперболи имамо неједнакости

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \gtrless 1,$$

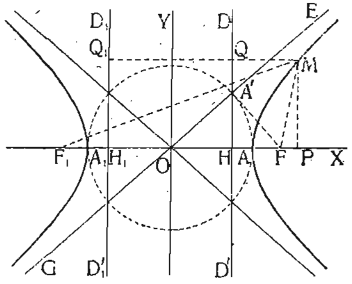
где доњи знак одговара области између грана хиперболе, а горњи — изван тих грана.

II. Елементи хиперболе и њихове особине.

134. Директрисе. Ексцентрицитет. — Напишимо раније изведене једначине (4) овако

$$r = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right), \qquad r_1 = \frac{c}{a}\left(x + \frac{a^2}{c}\right),$$

где x означава апсцису OP (сл. 85) тачке M на хиперболи, а r_1 и r њене потеге. Одредимо на оси OX тачку H, чија је апсциса $OH = \frac{a^2}{c}$. Затим опишимо око средишта O круг полупречника a. Означимо са A′ додирну тачку тангенте повучене из жиже F на уочени круг. Нормала DH спуштена из тачке A′ на осу OX пресеца ову у траженој тачки H. То следи из тога што је катета OA′ правоуглог троугла ΔOFA′ средња пропорционала између хипотенузе OF и катете суседног отсечка OH. Није тешко увидети да се тачка A′ добија као пресек круга са асимптотом хиперболе GE. Конструисана нормала HD назива се директрисом хиперболе за жижу F. Растојање d хиперболине тачке M од директрисе одређено је изразом



Сл. 85

$$d = QM = OP - OH = x - \frac{a^2}{c}.$$

Тада вредност потега r постаје

$$r = \frac{c}{a}d, \quad \text{или} \quad \frac{r}{d} = \frac{c}{a}.$$

Одредимо на сличан начин на OX оси другу тачку H_1, са апсцисом $OH_1 = -\frac{a^2}{c}$. Повуцимо нормално на осу OX праву H_1D_1, која претставља другу директрису хиперболе за другу њену жижу, F_1.

Растојање d_1 уочене тачке M од директрисе H_1D_1 дато је изразом

$$d_1 = Q_1M = H_1O + OP = OP - OH_1 = x_1 + \frac{a^2}{c}.$$

Стога добијамо

$$r_1 = \frac{c}{a}d_1, \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{c}{a}.$$

Однос $\frac{c}{a}$ претставља сталан број, који ћемо означити са e. С обзиром на једнакост (5), број e претставља увек неправи разломак,

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}},$$

који се зове ексцентрицитет хиперболе.

Обе добијене једнакости показују да је *хипербола геометриско место тачака чији однос растојања од дате тачке и праве претставља сталну величину.*

Најзад, раније изведена вредност (в. стр. 167, n⁰ 132) параметра p може се, помоћу ексцентрицитета, овако изразити $p = a(e^2 - 1)$.

135. Пречници. — Лако је доказати (в. стр. 152, n⁰ 123) да је дијаметар хиперболе права која пролази кроз центар. Одредимо тачке пресека хиперболе (6) са којом било сечицом M_1M_2 (сл. 86), чија је једначина

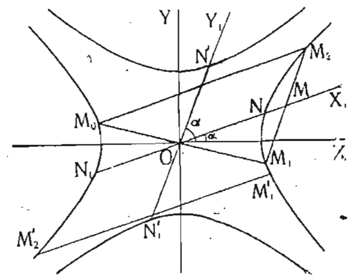
$$y = mx + n. \tag{13}$$

Ставимо ли последњу вредност за y у једначину (6), добићемо за одређивање апсциса тачака пресека, M_1 и M_2, једначину

$$(b^2 - a^2m^2)\,x^2 - 2a^2mn\,x - a^2(b^2 + n^2) = 0. \tag{14}$$

Означимо са x_1 и x_2 корене ове квадратне једначине, а са y_1 и y_2 њима одговарајуће вредности y из једначине (13). Средина M хиперболине тетиве M_1M_2 одређена је координатама

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Сл. 86

Ова тачка је увек реална, јер је збир коренова $x_1 + x_2$ једначине (14) реална величина (в. стр. 153). Према томе једначине (14) и (13) дају

$$X = \frac{a^2mn}{b^2 - a^2m^2}, \qquad Y = mX + n. \tag{15}$$

Добијене једнакости (15) зависе од угловног коефицијента m правца тетиве M_1M_2 и од ординате у почетку, n. Све тетиве паралелне овој имају исти угловни коефицијент m, но разне ординате n у почетку, што зависи од положаја сечице. Према томе, да бисмо нашли геометриско место средина M, треба елиминисати променљиви параметар n из једначина (15). Стављајући за n вредност добијену из прве од тих двеју једначина у другу, добићемо једначину траженог геометриског места у облику

$$Y = \frac{b^2}{a^2m}X. \tag{16}$$

Изведена једначина дијаметра претставља праву што пролази кроз координатни почетак O. Означимо са N и N_1 тачке пресека дијаметра (16) са посматраном хиперболом. Треба, међутим, напоменути да сваком правцу сечице не одговарају коначне тетиве хиперболе. Заиста, ако је сечица паралелна асимптоти, онда је коефицијент уз x^2, у једначини (14), једнак нули. Према томе сечица паралелна једној од асимптота пресеца хиперболу само у једној коначној тачки. Означимо са m_1 угловни коефицијент дијаметра N_1N, тј. ставимо

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2m}, \quad \text{одакле је} \quad mm_1 = \frac{b^2}{a^2}. \tag{17}$$

Последња једнакост (17) претставља везу између угловних коефицијената тетива датог правца и са њима коњугованог дијаметра.

Повуцимо паралелно дијаметру N_1N сечицу $M'_1M'_2$, чији је угловни коефицијент m_1. Означимо са m' угловни коефицијент дијаметра N'_1N' који полови тетиве паралелне са $M'_1M'_2$. Према ономе што смо већ доказали, оба угловна коефицијента, наиме коефицијенти тетива, m_1, и њима коњугованог дијаметра, m', задовољавају услов

$$m_1 m' = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (18)$$

Ако једнакости (18) и (17) одузмемо, долазимо до закључка да је $m' = m_1$. Према томе, *дијаметар* N'_1N', *који полови тетиве паралелне дијаметру* N_1N, *паралелан је са тетивама које су са њиме коњуговане*. Оба дијаметра N'_1N' и N_1N називају се коњугованим. Особина која их дефинише састоји се у томе, *да сваки од коњугованих дијаметара полови тетиве паралелне са коњугованим му дијаметром.*

Да би једнакост (17) постојала и за $m_1 = 0$, мора бити задовољен услов $m = \infty$. Првој вредности $m_1 = 0$ одговара реална оса хиперболе, другој — имагинарна оса. Према томе, *осе хиперболе претстављају узајамно нармалне дијаметре.*

Означимо, у општем случају, α_1 и α углове што заклапају коњуговани дијаметри N_1N и $N_1'N'$ са OX осом, тј. ставимо

$$m_1 = tg\,\alpha_1, \quad m = tg\,\alpha.$$

Једнакост (17) тада постаје

$$tg\,\alpha \cdot tg\,\alpha_1 = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (19)$$

Према томе, угловни коефицијенти коњугованих дијаметара имају исте знаке, тј. углови α_1 и α или су оба оштра, или су оба тупа. Ово значи да оба коњугована дијаметра леже у истом квадранту.

Најзад, једнакост (19) показује да, ако је један од два угловна коефицијента, m_1 и m, мањи од количника $\frac{b}{a}$, онда други мора бити већи од тог количника. Из тога следи: *два коњугована дијаметра леже у различитим угловима што образују асимптоте.* А ово значи да само један од коњугованих дијаметара пресеца гране дате хиперболе, други, који их не пресеца, назива се имагинарним. Он пресеца ону хиперболу која је коњугована са датом.

Приметимо да свака два коњугована дијаметра образују са асимптотама хиперболе хармониски прамен. Заиста, узмимо дијаметре са угловним коефицијентима m и $\frac{b^2}{m\,a^2}$ за основне зраке прамена (в. једначину (24) на стр. 120). Лако је претставити једначине обеју асимптота у облику једначина (25) (в. стр. 120), где k и k' имају вредности $-\frac{a}{b}m$ и $+\frac{a}{b}m$, тј. њихов количник једнак је -1.

136. Допунске тетиве. — Две тетиве хиперболе што спајају тачку M_2 на хиперболи (сл. 86) са теменима, M_1 и M_0, дијаметра M_0M_1 називају се допунским.

Лако се можемо уверити да су *дијаметри паралелни двема допунским тетивама коњуговани и обратно.* Заиста, дијаметар N_1N, паралелан

тетиви M_0M_2, пролази кроз средину стране M_0M_1 троугла $\Delta\, M_0M_1M_2$, јер је поменута страна дијаметар, преполовљен центром O. Према томе, дијаметар N_1N полови тетиву M_1M_2, паралелну другоме дијаметру $N_1'N'$. Исто тако, последњи дијаметар полови тетиву M_0M_2, паралелну првоме дијаметру N_1N. Значи оба дијаметра су коњугована.

Докажимо обрнуту теорему: *Две тетиве повучене из једне тачке* M_2 *хиперболе, паралелно коњугованим дијаметрима* N_1N *и* N'_1N', *допунске су, тј. отсечак* M_0M_1 *на који се ослањају те тетиве — дијаметар је.* Тачност овог става следи отуда, што сваки од датих дијаметара полови тетиву M_0M_1 у центру O. Према томе, отсечак M_0M_1 је дијаметар, а дате тетиве су допунске.

Доказан став омогућује једноставну конструкцију дијаметра хиперболе коњугована са датим дијаметром. Наиме, довољно је конструисати две допунске тетиве и то тако, да једна од њих буде паралелна датоме дијаметру. Тада ће друга тетива одредити правац траженог дијаметра хиперболе коњуговане са датим дијаметром.

137. Једначина хиперболе у односу на коњуговане пречнике. — Узмимо коњуговане дијаметре N_1N и N'_1N' за осе OX_1 и OY_1 (сл. 86) новог косоуглог координатног система. Изрази (11), на стр. 92, за трансформацију координата постају

$$x = x_1 \cos\alpha_1 + x_1 \cos\alpha, \qquad y = x_1 \sin\alpha_1 + y_1 \sin\alpha.$$

Унесемо ли ове вредности за x и y у једначину хиперболе (6), добићемо

$$Ax_1^2 + 2\,Cx_1 y_1 + By_1^2 = 1,$$

где су уведене ознаке:

$$A = \frac{\cos^2\alpha_1}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha_1}{b^2} = \frac{\cos^2\alpha_1}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - tg^2\alpha_1\right),$$

$$B = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - tg\alpha\right),$$

$$C = \frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{a^2} - \frac{\sin\alpha\sin\alpha_1}{b^2} = \frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - tg\,\alpha\, tg\,\alpha_1\right).$$

На основу горе проученог положаја коњугованих дијаметара (в. стр. 172, n⁰ 135) према асимптотама хиперболе, а и на основу једнакости (19) следи

$$A > 0, \quad B < 0, \quad C = 0.$$

Према томе, ако ставимо $A = \frac{1}{a^2_1}$, $B = -\frac{1}{b^2_1}$, можемо трансформисану једначину овако написати

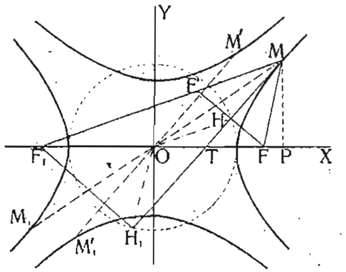
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1. \qquad (20)$$

Није тешко увидети да a_1 претставља дужину отсечка ON, који хипербола отсеца на дијаметру N_1N, а b_1 — дужину отсечка ON', који коњугована хипербола отсеца на дијаметру $N_1'N'$. Ови отсечци претстављају т.зв. коњуговане полудијаметре.

138. Тангенте. — Тангента у датој тачки хиперболе зове се права, паралелна тетивама коњугованим са дијаметром који пролази кроз дату тачку хиперболе. Да бисмо дошли до једначине тангенте на хиперболи (6) (сл. 87) у тачки $M(x_0, y_0)$, повуцимо кроз њу дијаметар M_1M. Пошто је $OP = x_0$, $PM = y_0$, то из правоуглог троугла ΔOPM добијамо за угловни коефицијент, m_1, дијаметра M_1M вредност

$$m_1 = tg \sphericalangle POM = \frac{y_0}{x_0}.$$

Према томе веза (17) даје за угловни коефицијент m коњугованог дијаметра $M_1'M'$ вредност



Сл. 87

$$m = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}, \tag{21}$$

која, према дефиницији тангенте, претставља истовремено и угловни коефицијент тангенте MT хиперболе у тачки M. Према томе, једначина тангенте постаје

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

или

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Пошто тачка (x_0, y_0) припада хиперболи (6), десна страна последње једначине једнака је јединици, те једначина постаје

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \tag{22}$$

Према томе, *једначина тангенте на хиперболи у датој тачки добија се из једначине хиперболе, ако у сваком њеном члану заменимо једну од текућих координата одговарајућом координатом додирне тачке.* Добијена једначина (22) показује да тангента MT отсеца на координатним осама OX и OY отсечке $\frac{a^2}{x_0}$ и $\frac{b^2}{y_0}$. Ове отсечке налазимо једноставном конструкцијом, пошто је свака полуоса хиперболе средња пропорционала између траженог отсечка на одговарајућој координатној оси и одговарајуће координате додирне тачке. При томе, као и код елипсе, темена реалне осе и њени пресеци са тангентом и ординатом додирне тачке образују хармониски низ.

Претпоставимо да треба повући тангенту на хиперболу, паралелно датоме правцу, тј. дат је угловни коефицијент тангенте m. Израз (21) даје једну везу између две непознате, у датом случају, координате x_0 и y_0

додирне тачке. Једначина хиперболе даје другу једначину за њихово одређивање. Скуп поменутих једначина, једне линеарне, а друге квадратне по x_0 и y_0, одређује две тачке додира. Решавајући ове једначине добијамо

$$x_0 = \pm \frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}}, \quad y_0 = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 m^2 - b^2}}.$$

Одавде следи да добијени изрази претстављају реалне вредности само под условом

$$a^2 m^2 - b^2 > 0, \qquad |m| > \frac{b}{a},$$

тј. *две реалне тангенте на хиперболи могу бити повучене само паралелно имагинарном дијаметру хиперболе.*

Стављајући нађене координате x_0 и y_0 у једначину (22) добијамо две тражене паралелне тангенте. У изузетном случају, када је $m = \pm \frac{b}{a}$, тј. кад се правац тангенте поклапа са једном од асимптота, координате додирне тачке x_0 и y_0 постају бескрајно велике и додирна тачка се удаљује у бесконачност. Према томе, у правцу асимптоте може бити повучена само једна тангента и та се поклапа са асимптотом.

Према дефиницији тангенте, *обе нађене тангенте пролазе кроз темена дијаметра коњугована са тетивама паралелним датоме правцу тангенте.* Одатле се добија једноставан начин за конструкцију тражених тангената. Доиста, повуцимо дијаметар хиперболе, коњугован са тетивама паралелним датоме правцу. Темена овог дијаметра претстављају, у том случају, тражене тачке додира. Очевидно је да је конструкција могућа само ако је поменути дијаметар реалан.

Најзад, да бисмо повукли тангенту на хиперболу из дате тачке, која не лежи на њој, ставићемо координате дате тачке, x_1, y_1, у општу једначину тангенте (22). Добијени резултат претставља један услов, који задовољавају координанте x_0 и y_0 тражене тачке додира. Други услов је дат једначином хиперболе (6). Скуп последње две једначине одређује две тачке додира. Решавањем ових једначина добијамо:

$$\frac{x_0}{a^2} = \frac{1}{x_1}\left(1 + \frac{y_1 y_0}{b^2}\right), \quad \frac{y_0}{b^2} = \frac{a^2 y_1 \pm ab x_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}}{b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2}.$$

Према томе, тражене тачке су реалне само под условом да поткорени израз има позитивну вредност, тј. ако се дата тачка (x_1, y_1) налази у *области ограниченој обема хиперболиним гранама.* Ако ставимо добијене изразе за x_0 и y_0 у једначину (22), налазимо две тражене тангенте. Изведени резултати проширују се и на једначину хиперболе у односу на њене коњуговане дијаметре, као што је то био случај и код елипсе (в. стр. 157, n⁰ 126).

139. Особине тангената. — *1) Тангента на хиперболи полови угао између потега додирне тачке.* Спустимо из жижа $F(c, 0)$, $F_1(-c, 0)$ (сл. 87) нормале, FH и F_1H_1, на тангенту MT у тачки $M(x_0, y_0)$ хиперболе. На основу једначине тангенте (22), дужине тих нормала, $d = FH$ и $d_1 = F_1H_1$, дате су изразима (в. стр. 65, n⁰ 44)

$$d = -\frac{b^2(cx_0 - a^2)}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}}\,^{*}, \quad d_1 = +\frac{b^2(cx_0 + a^2)}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}},$$

На основу образаца (4) за потеге тачке M, које ћемо означити са r_0 и r_{10}, однос растојања d према d_1, узимајући њихове апсолутне вредности, добија облик

$$\frac{|d|}{|d_1|} = \frac{r_0}{r_{10}}.$$

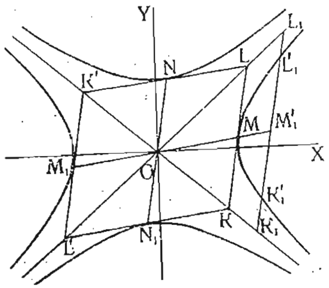
То значи да су правоугли троугли $\Delta\, FMH$ и $\Delta\, F_1H_1M$ слични, па су према томе њихови углови код заједничког темена M једнаки. На овај начин се добија једноставна метода за конструкцију тангенте у датој тачки хиперболе, помоћу конструкције симетрале унутрашњег угла између потега.

Изложене особине тангенте омогућавају њену конструкцију и у другим, раније поменутим случајевима. Заиста, ако на потегу F_1M одмеримо од тачке M отсечак $F'M$, једнак потегу FM, очевидно је да ће тачка F' лежати на директорном кругу S (види стр. 165). Ако сад спојимо тачку H са F', добијени троугли, $\Delta\, HFM$ и $\Delta\, HMF'$, биће подударни, јер имају једнаке по две стране и њима захваћене углове. Према томе све три тачке F, H и F' леже на једној правој, а тачка F' је уз то и симетрична са F у односу на тангенту. Отуда следи друга особина,

2) *тачка симетрична са жижом, у односу на тангенту хиперболе, лежи на њеном директорном кругу.*

Овај резултат омогућује конструкцију тангенте хиперболе, паралелне датоме правцу, а исто тако и тангенте која треба да пролази кроз дату тачку. Обе конструкције изводе се на сличан начин као и код елипсе.

3) *Подножја нормала, спуштених из жижа на тангенту ма у којој тачки хиперболе, леже на кругу описаном над реалном осом као пречником.* Заиста, отсечак OH (сл. 87) спаја средине двеју страна троугла $\Delta F_1FF'$ и, према томе, мора бити паралелан трећој страни F_1F' и једнак њеној половини, која претставља реалну полуосу хиперболе. На сличан начин се доказује да и тачка H_1 лежи на истом кругу.



Сл. 88

Најзад, образујмо производ нормала d и d_1 изражених горњим обрасцима. Кад из добијеног израза елиминишемо y_0 узимајући у обзир једначину хиперболе, долазимо до закључка да

4) *Производ двеју нормала, повучених из жижа ма на коју хиперболину тангенту има сталну вредност, која је једнака квадрату имагинарне полуосе са негативним знаком.*

5) *Отсечак тангенте између асимптота полови додирна тачка хиперболе.* Решимо ли једначине асимптота (9) и тангенте (22), добићемо за апсцисе њихових тачака пресека, L и K (сл. 88)

* У овом изразу узет је знак — јер d претставља дужину нормале FH, а не HF.

$$x_1 = \frac{a^2 b}{bx_0 - ay_0} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{a^2 b}{bx_0 + ay_0}.$$

Узимајући у обзир једначину (6) одавде добивамо $x_1 + x_2 = 2x_0$. С обзиром на вредности за x_1 и x_2 добијамо из једначине (9) за ординате тражених тачака

$$y_1 + y_2 = \frac{b}{a}(x_1 - x_2) = 2y_0\,.$$

Ове једнакости доказују тачност теореме, да тачка M (x_0, y_0) полови отсечак KL.

6) *Отсечци сечице који леже између хиперболе и њених асимптота — једнаки су.* Означимо са K_1', L_1' и K_1, L_1 (сл. 88) тачке пресека сечице K_1L_1 са датом хиперболом и њеним асимптотама. Обележимо са KL тангенту паралелну сечици. Повуцимо коњуговани јој дијаметар, M_1M, који полови тетиву $K_1'L_1'$ у тачки M_1'. Према доказаној особини тангенте, да додирна тачка M полови њен отсечак KL између асимптота, — и тачка M_1' полови страну K_1L_1 троугла ΔK_1L_1O, који је сличан троуглу ΔKLO. Полазећи од једнакости $K_1M_1' = M_1'L_1'$, $K_1'M_1' = M_1'L_1'$, ако одузмемо другу од прве, добијамо тражени доказ да је $K_1K_1' = L_1'L_1$.

140. Аполонијеве теореме. — Узмимо хиперболу (сл. 88) и њене осе за осе правоуглог координатног система XOY; означимо са x и y координате краја M дијаметра M_1M, а са x', y' координате краја N дијаметра N_1N коњугованог са првим. Ако означимо са a_1 и b_1 дужине полудијаметара OM и ON, имамо

$$x^2 + y^2 = a_1^2\,, \quad x'^2 + y'^2 = b_1^2\,. \tag{23}$$

Координате крајева M и N идентички задовољавају једначине дијаметара, тј. $y = m_1x$, $y' = mx'$. Ако последње две једначине измножимо међусобно, онда, с обзиром на везу (19), добијамо идентичност

$$\frac{yy'}{b^2} = \frac{xx'}{a^2}.$$

Како тачка M лежи на датој хиперболи, а N на спрегнутој, морају постојати идентичности

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1.$$

Кад из последње три једначине елиминишемо, прво, y и y', затим x и x', добијамо

$$x^2 - x'^2 = a^2\,, \quad y^2 - y'^2 = -b^2. \tag{24}$$

Одузимањем друге једначине (23) од прве, узимајући при томе у обзир идентичности (24), долазимо до прве теореме

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2\,,$$

тј. *разлика квадрата два хиперболина спрегнута дијаметра има сталну вредност, која је једнака разлици квадрата њених оса.*

Ради доказа друге теореме конструишимо над спрегнутим дијаметрима, M_1M и N_1N, паралелограм чије стране додирују дату и коњуговану јој хиперболу у крајевима датих дијаметара. Покажимо пре свега да темена конструисаног паралелограма K, L, K′ и L′ леже на асимптотама. Заиста, из једначина (24), а с обзиром на једнакости (7) и (8), добијамо т. зв. Шалове обрасце

$$x' = \pm \frac{a}{b} y, \quad y' = \pm \frac{b}{a} x, \tag{25}$$

који се оба узимају или са горњим или са доњим знацима, пошто оба коњугована дијаметра леже у истом квадранту (в. стр. 172, n° 135). Напишимо затим једначине двају суседних страна паралелограма, на пр. KL и LK′,

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1, \quad \frac{x'X}{a^2} - \frac{y'Y}{b^2} = -1, \tag{26}$$

где X и Y означавају текуће координате. Сабирањем ових двеју једначина добијамо једначину праве, која пролази кроз теме L паралелограма, у коме се секу обе стране (26)

$$\frac{(x + x')\,X}{a^2} = \frac{(y + y')\,Y}{b^2}.$$

Шалови обрасци (25), у овом случају, морају бити узети са позитивним знацима, и дају $\dfrac{x + x'}{a} = \dfrac{y + y'}{b}$. Стога претходна једначина постаје $Y = \dfrac{b}{a} X$, што значи да посматрано теме, L, заиста лежи на асимптоти. Према томе површина описаног паралелограма једнака је осмострукој површини S троугла $\triangle OMN$ (в. стр. 27, n° 10), тј.

$$S = \frac{1}{2}(xy' - x'y).$$

Узимајући у обзир обрасце (25) и једначину хиперболе (6), последњи израз постаје

$$S = \frac{1}{2} ab \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{1}{2} ab,$$

тј. претставља половину површине правоугаоника конструисана над полуосама хиперболе. Из тога следи друга Аполонијева теорема: *Површина паралелограма конструисана код хиперболе на коњуговим дијаметрима једнака је површини правоугаоника конструисана над њеним осама.*

Изведена теорема може се изразити једнакошћу

$$a_1 b_1 \sin\theta = a\,b, \quad \text{где је} \quad \theta = \alpha - \alpha_1,$$

при чему α и α_1 означавају углове дијаметара OM и ON са OX осом.

Аполонијеве теореме одређују полуосе хиперболе помоћу њених коњугованих полудијаметара и обратно. Те везе су изражене квадратним једначинама, па се према томе оба задатка могу решити конструктивно, искључиво употребом шестара и лењира.

141. Нормале. — Нормала у тачки $M(x_0, y_0)$ хиперболе (6) (сл. 85) нормална је на тангенти, а угловни коефицијент њен једнак је реципрочној и супротна знака вредности (21) угловног коефицијента тангенте. Према томе једначина нормале на хиперболи (6), у тачки M, постаје

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0), \quad \text{или} \quad \frac{a^2 (x - x_0)}{x_0} + \frac{b^2 (y - y_0)}{y_0} = 0.$$

Узимајући у обзир везу (5), добијена једначина се може написати и у облику

$$\frac{a^2 x}{x_0} + \frac{b^2 y}{y_0} = c^2.$$

Отсечци које тангента и нормала отсецају на апсцисној оси имају вредности $\dfrac{a^2}{x_0} = p$ и $\dfrac{c^2 x_0}{a^2} = q$. Према томе ма за коју тачку хиперболе постоји веза $pq = c^2$, тј. *растојање хиперболине жиже од њена центра је средња пропорционала између отсечака које на апсцисној оси отсецају тангента и нормала.* Другим речима, потези тачке M, заједно са њеном тангентом и нормалом, образују хармониски прамен (в. стр. 121, n° 100).

За конструкцију нормале у датој тачки хиперболе можемо користити особину нормале, према којој она полови спољашњи угао између потега дате тачке. Овај закључак следи из оне особине тангенте, према којој тангента у истој тачки полови унутрашњи угао између тих истих потега.

Задаци о једначинама нормала хиперболе и њиховој конструкцији решавају се на начин као и код елипсе.

Најзад, подножја нормала повучених из дате тачке, K, на хиперболу одређују се њеним пресеком са Аполонијевом хиперболом што пролази кроз дату тачку и центар дате хиперболе. У овом случају једначина Аполонијеве хиперболе разликује се знаком уз којефицијент b^2 од одговарајуће једначине елипсе. У вези са тим, ако се тачка K налази у првом квадранту, Аполонијева хипербола лежи у првом и трећем квадранту координатног система чије се осе поклапају са њеним осама. Препуштамо читаоцу да докаже да, у овом случају, тачка K, из које се повлаче нормале на дату хиперболу, и њен центар леже на двема разним гранама Аполонијеве хиперболе.

---

142. Примери и задаци.

1. Поставити једначину хиперболе са полуосама 2 и 3, и једначину коњуговане јој хиперболе, и одредити жиже обе хиперболе.
2. Поставити општи облик једначине свих хипербола са истим асимптотама.
3. Доказати да се свака тетива паралелна реалној оси равностране хиперболе види из њеног темена под правим углом.
4. Поставити једначине две коњуговане хиперболе, под условом да растојања међу њиховим директрисама буду 6 и 4 јединице.
5. Поставити једначине коњугованих хипербола, када је реална полуоса прве хиперболе једнака 2, а отстојање њене жиже од центра једнако 3.
6. Поставити једначину хиперболе са реалном полуосом a и параметром p.
7. Конструисати хиперболу када су дате асимптоте и темена.
8. Одредити жиже и асимптоте хиперболе са полуосама 3 и 4.

9. Директрисе хиперболе деле растојање између њених жижа на три једнака дела; израчунати ексцентрицитет.

10. Израчунати ексцентрицитет хиперболе, чија се реална оса види под углом од 60° из жиже коњуговане јој хиперболе.

11. Дате су две праве које се секу. Наћи геометриско место тачака које заједно са датим правама образују паралелограм сталне површине.

12. Наћи везу између ексцентрицитета две коњуговане хиперболе.

13. Изразити угао између асимптота хиперболе помоћу њеног ексцентрицитета.

14. Доказати да жиже две коњуговане хиперболе леже на кругу концентричном са хиперболом.

15. Дата је хипербола са полуосама 5 и 4. Испитати да ли су реални или имагинарни дијаметри те хиперболе, који су паралелни са правом $2x - 7y + 1 = 0$.

16. Дата је хипербола са полуосама $\sqrt{2}$ и 3. Наћи угао између коњугованих дијаметара, под условом да је реални дијаметар три пута дужи од реалне осе.

17. Наћи ексцентрицитет хиперболе чије је растојање између жижа геометриска средина њена два коњугована дијаметра, који се секу под углом од 30°.

18. Једначина $xy = k^2$ преставља хиперболу са ексцентрицитетом $\sqrt{1{,}5}$; поставити једначине два коњугована дијаметра који заклапају два пута мањи угао од угла између асимптота.

19. Наћи услове под којима једнакострана хипербола

$$xy - 1 + \mu(x + y - 5) = 0$$

претставља две праве.

20. Одредити дужину оса хиперболе $xy = 25$, ако је њен ексцентрицитет 1,25.

21. Узимајући асимптоте хиперболе за нове координатне осе доказати да се једначина хиперболе (6) трансформише у $x_1 y_1 = k^2$.

22. Доказати да је производ отсечака сечице, који леже између које било хиперболине тачке и асимптоте, једнак квадрату половине дијаметра паралелног са сечицом.

23. Показати начин конструкције оса ма какве дате хиперболе помоћу допунских тетива

24. Има ли хипербола коњуговане дијаметре једнаке дужине?

25. Показати да се асимптоте хиперболе, чије су полуосе a и b, поклапају са подједнако дугим коњугованим дијаметрима елипсе, која има исте полуосе.

26. Наћи услов који морају задовољавати коефицијенти праве $Ax + By + C = 0$, да би она била тангента на хиперболи чије су полуосе a и b.

27. Дата је хипербола са полуосама 3 и 4. Поставити једначине тангената повучених у тачкама пресека хиперболе са сечицом $2x + y - 5 = 0$.

28. Доказати да је геометриско место темена правих углова, чији краци додирују хиперболу са полуосама a и b, круг описан око центра хиперболе са полупречником $\sqrt{a^2 - b^2}$.

29. Доказати да површина троугла образована из тангенте и асимптота хиперболе има сталну вредност, која је једнака површини правоуганика конструисана над полуосама хиперболе.

30. Доказати да се тангенте повучене у крајевима ма које тетиве хиперболе секу на дијаметру који је коњугован са том тетивом.

31. Доказати да дијагонале ма каквог паралелограма описана око хиперболе претстављају коњуговане дијаметре.

32. Наћи на хиперболи такве тачке, да би нормале у њима пролазиле кроз жиже коњуговане хиперболе.

33. Доказати да круг са центром на имагинарној оси хиперболе, који додирује обе њене гране, отсеца на асимптотама отсечке једнаке реалној оси.

ГЛАВА ОСМА

ПАРАБОЛА

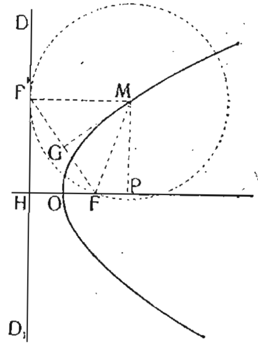
I. Дефиниција и једначина параболе.

143. Дефиниција параболе. — *Парабола претставља геометриско место тачака подједнако удаљених од дате тачке и дате праве.*

Означимо са F дату тачку, а са D_1D дату праву (сл. 89). Тачка M припада параболи ако су њена растојања $FM = r$ и $F'M = d$ једнака међу собом, тј.

$$r = d. \tag{1}$$

Означимо са p дужину растојања HF тачке F од праве D_1D. Лако је одредити произвољан број тачака параболе. Тога ради уочимо на правој HF тачку P, с десне стране тачке O која полови отсечак HF. Затим опишимо око тачке F, као центра, круг полупречника HP. Обележимо са M и M_1 тачке пресека тог круга са правом повученом кроз тачку P, паралелно правој DD_1. Очевидно је да обе тачке M и M_1 припадају параболи. На тај начин лако је конструисати произвољан број парова параболиних тачака. Обе тачке сваког пара подједнако су удаљене од праве HF; према томе, та права претставља осу симетрије параболе и зове се о с а параболе. Тачка O, на оси, и то на средини отсечка HF, припада исто тако параболи и зове се т е м е параболе.



Сл. 89.

Права DD_1 зове се д и р е к т р и с а параболе, а тачка F њена ж и ж а. Растојање r тачке M од жиже F зове се п о т е г тачке M. Растојање жиже од директрисе зове се п а р а м е т а р параболе.

Према услову, отсечак HP је већи од растојања HO. То значи да тачка M параболе лежи на већем отстојању од директрисе него теме O. Према томе све тачке параболе налазе се десно од праве што пролази кроз теме O, паралелно директриси.

Из дате дефиниције следује овај поступак за конструкцију параболе непрекидним потезом. Прислонимо уз директрису ивицу лењира, а уз лењир правоугли троугаоник једном његовом катетом. У наспрамном темену троугла утврдимо један крај конца, дужине једнаке другој катети троугла, а други крај утврдимо у жижи. Померамо ли троугао дуж лењира затежући конац при томе врхом оловке тако, да се овај стално прислања уз катету, врх оловке ће описати параболу.

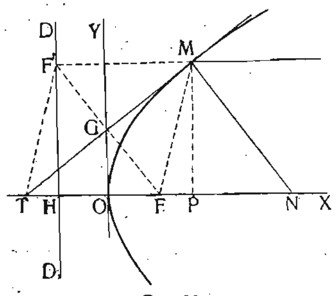
Тачка М је подједнако удаљена и од директрисе и од жиже. То значи да се тачка М поклапа са центром круга који пролази кроз жижу F и додирује директрису у тачки F′, при чему је $F'M = FM$. Према томе *парабола претставља геометриско место центара кругова који пролазе кроз дату тачку и додирују дату праву линију.* Одавде следује други поступак за конструисање параболе. Из произвољне тачке F′ на директриси повлачимо праву паралелну оси параболе. Тражена тачка М параболе добија се у пресеку, повучене праве са симетралом тетиве FF′.

Упоређивање последње дефиниције параболе са аналогним дефиницијама елипсе и хиперболе показује да се директорни кругови елипсе и хиперболе замењују директрисом код параболе. Заиста, парабола претставља гранични облик елипсе или хиперболе у случају када се њихови центри и једна од жижа удаљавају у бесконачност у правцу осе.

Стварно, узмимо, на пример, елипсу и директорни круг око жиже F (в. сл. 89). Када се тачке О и F удаљавају у бесконачност, полупречник тог круга бескрајно расте и тежи да пређе у праву линију нормалну на великој оси елипсе. Лако је доказати да се са том правом поклапа директриса елипсе. Заиста, за $a = \infty$ добијамо (в. стр. 152, n⁰ 122).

$$\lim c = \lim \frac{c}{a} = \lim \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = 1\,,$$

тј. у посматраном граничном случају тачке граничне криве подједнако су удаљене од директрисе и жиже (в. стр. 181). Добијена крива претставља параболу; растојање њене жиже од директрисе, које је једнако ординати жиже, зове се п а р а м е т а р.



Сл. 90

144. Једначина и облик параболе. — Узмимо осу симетрије параболе за апсцисну осу, ОХ, (сл. 90), а ординатну осу ОY повуцимо нормално на ову у темену О. Означимо са x и y координате, ОР и РМ, параболине тачке М, а њен параметар, HF, са p. Пошто тачка О полови растојање HF, а $\triangle FPM$ је правоугли, то добијамо

$$d = HO + OP = \frac{p}{2} + x, \qquad r = FM = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}.$$

Према томе једнакост (1) даје једначину параболе

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

која, после квадрирања и свођења, постаје

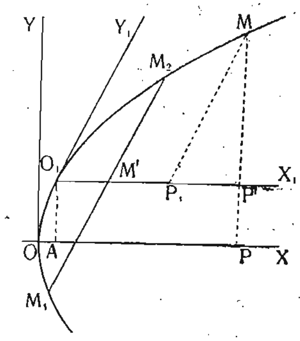
$$y^2 = 2px\,, \quad \text{или} \quad y = \pm\sqrt{2px}\,. \tag{2}$$

Друга једначина (2) показује да је апсцисна оса, како је то већ и раније било напоменуто, истовремено и оса симетрије. Из те једначине

следује, да y добија реалне вредности само за позитивне вредности x, што значи да све параболине тачке леже у I и IV квадранту, при чему обе гране њене, и позитивна и негативна, теже у бесконачност кад x бесконачно расте.

Најзад, ако у једначину (2) ставимо апсцису $\frac{p}{2}$, која одговара жижи, F, добићемо за вредност ординате величину параметра p, као што је то био случај и код елипсе и код хиперболе.

Једначина параболе даје још једну могућност за конструкцију параболе. Из прве једначине (2) следи, *да је ордината параболе средња пропорционала између апсцисе и двоструког параметра.* Према томе, ако десно од краја апсцисе Р одмеримо отсечак $2p$ и над дужи $x + 2p$, као над пречником, опишемо круг, овај ће на нормали повученој у тачки Р отсецати отсечак једнак ординати параболе, која одговара апсциси ОР. Заиста, нормала спуштена из тачке круга на пречник средња је пропорционала између његових отсечака.



Сл. 91

II. Елементи параболе и њихове особине.

145. Пречници. — Докажимо да је дијаметар (в. стр. 152, n⁰ 123) параболе права паралелна њеној оси. Тога ради одредимо тачке пресека параболе (2) (сл. 91) са било којом сечицом, M_1M_2, чија је једначина

$$y = mx + n. \tag{3}$$

Ставимо ли последњу вредност за y у једначину (2) добићемо за одређивање тачака пресека, M_1 и M_2, једначину

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0\,. \tag{4}$$

Обележимо са x_1 и x_2 корене ове квадратне једначине, а са y_1 и y_2 одговарајуће вредности y добијене из једначине (3). Средина М′ параболине тетиве M_1M_2 одређена је координатама

$$X = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y = \frac{y_1 + y_2}{2}\,.$$

Ова тачка је увек реална величина, пошто је збир корена $x_1 + x_2$ једначине (3) реална величина (в. стр. 153). Према томе једначине (4) и (3) дају

$$X = \frac{p - mn}{m^2}, \quad Y = \frac{p}{m}\,. \tag{5}$$

Друга од једначина (5) не садржи променљиви параметар n, и према томе одређује тражени дијаметар. Он претставља *праву линију* O_1X_1, *паралелну оси параболе.*

Означимо са h растојање посматраног дијаметра од осе параболе. На основу друге једначине (5) добијамо

$$mh = p, \tag{6}$$

што значи да *производ растојања дијаметра од осе параболе и угловног* *коефицијента коњугованих тетива има сталну вредност, једнаку параметру параболе.* Према томе, сви су дијаметри паралелни међу собом, те се може рећи да се сви они секу у бескрајно удаљеном центру параболе.

146. Тангенте. — Тангента у датој тачки параболе претставља праву паралелну тетивама, коњугованим са дијаметром што пролази кроз дату тачку параболе. Да бисмо дошли до једначине тангенте на параболи (2) у тачки $M(x_0, y_0)$ (види сл. 90), повуцимо кроз њу дијаметар. Пошто је $OP = x_0$ и $PM = y_0$, то y_0 претставља растојање MP повученог дијаметра од осе. Израз (6) одређује тражени угловни коефицијент тангенте, $m = \frac{p}{y}$. Једначина тангенте MT, као праве која пролази кроз тачку M гласи

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0), \quad \text{или} \quad y_0 y - px = y_0{}^2 - px_0.$$

Координате x_0 и y_0 идентички задовољавају једначину параболе (2); стога једначина тангенте добија облик

$$y_0 y = p(x + x_0) \qquad (7)$$

и *добија се из једначине параболе (2), када се у сваком њеном члану замени једна од текућих координата одговарајућом координатом тачке додира.*

Из једначине (7) следује овај једноставан начин за конструкцију тангенте у датој тачки параболе. Отсечак OT (сл. 90), који права (7) отсеца од апсцисне осе, једнак је $-x_0$, тј. теме параболе O полови отсечак TP, који се зове субтангента. Према томе, да бисмо нашли тачку T у којој тангента сече осу OX, довољно је одмерити лево од темена параболе апсцису OP тачке додира. Најзад растојање тачке T од жиже F једнако је $x_0 + \frac{p}{2}$ тј. потегу тачке додира. То значи да је тачку T могуће конструисати и на тај начин, што се од жиже одмери потег тачке M. Спајањем тачака T и M добијамо тражену тангенту.

Ако треба повући тангенту на параболу паралелно датоме правцу, онда је угловни коефицијент, m, тангенте познат. Израз (6) и једначина (2) дају за координате x_0 и y_0 тражене тачке додира вредности

$$y_0 \equiv h = \frac{p}{m}, \qquad x_0 = \frac{p}{2m^2}.$$

Ако је $m \gtrless 0$, тј. дати правац није паралелан оси параболе, нађене координате имају увек коначне вредности. Стављајући их у једначину (7) добијамо тражену тангенту

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

Да бисмо конструисали тангенту паралелну датоме правцу, довољно је повући ма коју тетиву паралелну том правцу и њој коњуговани дијаметар. Његов крај је тражена тачка додира и задатак се своди на претходни.

Расмотримо, најзад, трећи задатак — повлачења тангенте на параболу уз тачке, која не лежи на њој. Кад уврстимо координате дате тачке, x_1, y_1, и једначину тангенте (7) добијамо за непознату тачку додира (x_0, y_0)

$$y_0 y_1 = p(x_1 + x_0).$$

Друга веза дата је једначином параболе (2), $y_0{}^2 = 2px_0$. Елиминацијом x_0-а из последње две једначине добивамо

$$y_0 = y_1 \pm \sqrt{y_1{}^2 - 2px_1}.$$

Према томе, задатак је могућ под условом

$$y_1{}^2 - 2px_1 > 0,$$

тј. кад дата тачка (x_1, y_1) лежи ван области параболе. У томе случају добијају се реалне тачке додира и једначина (7) одређује две тражене тангенте.

147. Особине тангенте. — *Тангента на параболи полови угао између потега додирне тачке и дијаметра што пролази кроз њу.*

Ова теорема је очигледна, ако се парабола посматра као гранични случај елипсе код које се центар и друга жижа удаљавају у бесконачност. При томе треба сматрати да се позитиван смер на дијаметру поклапа са позитивним смером осе пароболе. Према томе, тангента на параболи дели поменути угао унутрашњом поделом, док истовремено тангента на елипси дели спољашњи угао између потега.

Горњу теорему лако је и непосредно доказати. Теме O (сл. 90) полови отсечке TP и HF, где H означава тачку пресека осе параболе са директрисом. Дакле

$$TF = HP = F'M = FM$$

Према томе повучемо ли праву TF′ добијамо ромб TFMF′. Одавде следи, пре свега, тачност наше теореме, пошто дијагонале ромба полове његове углове. А пошто се дијагонале ромба узајамно полове и нормалне су једна на другој, то је тачка F′ симетрична са жижом F у односу на тангенту MT. Одавде следи теорема

2) *Тачка симетрична са жижом у односу на параболину тангенту лежи на директриси.*

Ова теорема је последица познате особине елипсе (в. стр. 158, 2), јер директриса параболе претставља гранични положај директорног круга елипсе. Према томе, на основу последње теореме изводи се конструкција тангенте на параболу не само у датој тачки, већ и под другим условима.

Да бисмо конструисали тангенту параболе паралелну датоме правцу, повуцимо кроз жижу праву нормално на тај правац. Њен пресек са директрисом даје тачку симетричну жижи у односу на тражену тангенту. Према томе, тачка у којој она додирује параболу лежи на правој повученој из нађене тачке паралелно оси параболе. Решење је немогућно ако је дати правац паралелан оси параболе.

Да бисмо повукли тангенту на параболу из дате тачке, опишимо око те тачке круг са полупречником једнаким њеном растојању од жиже. Ако дата тачка лежи ван параболе, конструисани круг увек пресеца директрису у двема реалним тачкама. Свака од тих тачака симетрична је са жижом у односу на тражену тангенту. Према томе, могуће је повући две тангенте на исти начин, као и у претходном случају.

3) *Подножје нормале, повучене из жиже на тангенту параболе, налази се на њеној тангенти повученој у темену.*

Ова теорема претставља последицу познате особине елипсе (види стр. 158, 3), пошто тангента у темену параболе претставља гранични положај круга описаног око елипсе. Овај став следи и непосредно, јер тангента у темену O параболе полови растојање између жиже F и директрисе D_1D. Директриса је паралелна тангенти у темену O, према томе она пролази кроз средину, G, отсечка FF′, који је нормалан на тангенти TM.

148. Једначина параболе у односу на пречник и тангенту. — Узмимо тачку $O_1(x_0, y_0)$ параболе (сл. 91) за нови почетак координатног система, а пречник O_1X_1 и тангенту O_1Y_1 — за нове координатне осе. Означимо са ω нови координатни угао, са x и y старе координате тачке M, а са x_1 и y_1 њене нове координате. Тада имамо ове обрасце за трансформацију координата (в. стр. 92)

$$x = x_0 + x_1 + y_1 \cos\omega, \quad y = y_0 + y_1 \sin\omega.$$

Израз $tg\,\omega$ претставља угловни коефицијент тангенте у тачки O_1 параболе, који смо раније означили са m. Осим тога координате x_0, y_0 идентички задовољавају једначину (2). Према томе та једначина и израз (6) дају, у нашем случају ($h = y_0$), две везе

$$y_0^2 = 2px_0, \quad tg\,\omega = \frac{p}{y_0}. \tag{8}$$

На основу ових веза и замењујући у једначини (2) старе координате x, y, новима долазимо до једначине

$$y_1^2 = 2p_1x_1,$$

где је

$$p_1 = \frac{p}{\sin^2\omega} = \frac{p\,(1 + tg^2\omega)}{tg^2\omega} = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right). \tag{9}$$

Према томе к о е ф и ц и ј е н т p_1 трансформисане једначине параболе *једнак је двоструком растојању новог координатног почетка од директрисе параболе.* На основу овог става можемо непосредно написати једначину параболе у односу на дијаметар и тангенту, кад је дата апсциса новог почетка. Препуштамо читаоцу да докаже да се тангента на параболи у новом координатном систему изражава једначином потпуно аналогном једначини тангенте у старом систему.

149. Нормале. — Једначина нормале у тачки $M(x_0, y_0)$ параболе (сл. 90), као праве нормалне на тангенти TM у истој тачки, (в. стр. 184)

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0), \quad \text{или} \quad p\,(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0. \tag{10}$$

Одавде следује да нормала отсеца на апсцисној оси отсечак чија је вредност $ON = x_0 + p$, тј. *тачка* N *налази се на растојању параметра* p *од подножја ординате тачке* M. Према томе за конструкцију нормале ма у којој тачки параболе довољно је приметити, да је растојање тачке N од жиже једнако $x_0 + p - \frac{p}{2} = x_0 + \frac{p}{2}$. То значи, с обзиром на претходна излагања, да су све три тачке N, M и T подједнако удаљене од жиже, тј. леже на кругу описаном око жиже параболе, са потегом као полупречником.

Да бисмо повукли нормалу на параболу паралелно датому правцу, одређеном угловним коефицијентом m_1, користићемо услов управности тангенте и нормале, $y_0 = -pm_1$. Одговарајућа апсциса x_0 тражене тачке додира одређује се из једначине параболе (2). Стављајући нађене координате тачке у једначину (10) добијамо тражену нормалу. Да бисмо је нацртали довољно је повући кроз жижу F праву паралелну датоме правцу. Тачка пресека ове праве са директрисом параболе симетрична је са жижом, у односу на тангенту у траженој тачки — подножју нормале. Према томе, права F′M, паралелна оси параболе, одређује подножје M тражене нормале.

Најзад, претпоставимо да треба повући нормалу на параболу из дате тачке (x_1, y_1) која не лежи на параболи. Ако уврстимо дате координате у једначину нормале (10), добијамо везу између тражених координата (x_0, y_0) подножја нормале

$$x_0\,y_0 + (p - x_1)\,y_0 - py_1 = 0. \tag{11}$$

Друга веза је дата једначином параболе, $y_0^2 = 2px_0$. Једначина (11) претставља Аполонијеву хиперболу у траженим координатама x_0 и y_0. Елеминација x_0 из последње две једначине даје једначину трећег степена по y_0. Та једначина може имати сва три реална корена, или два реална корена, од којих је један двоструки, или само један реалан корен. Према томе, из тачке која не лежи на параболи могу се повући на параболу три, две или једна реална нормала.

---

150. Примери и задаци.

1. Дата је оса параболе, њено теме и једна тачка. Одредити параметар, жижу и директрису параболе и поставити њену једначину.

2. Нацртати параболе претстављене једначинама: $y^2 = 5x$; $y^2 = -8x$; $x^2 = 6y$. Одредити њихове жиже и директрисе.

3. Показати да крива $y = Ax^2 + Bx + C$ одређује параболу.

4. Доказати да је увек могуће повући параболу кроз три дате тачке које не леже на једној правој.

5. Поставити општи облик једначине парабола, код којих је дужина дате тетиве, нормалне на оси, једнака њеном отстојању од жиже.

6. Наћи тачке пресека параболе, $y^2 = 6x$, са правим линијама: $x + y - 1 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$, $5x - y - 1 = 0$ и $4x - 2y + 7 = 0$.

7. Дата је парабола $y^2 = \frac{7}{2}x$. Поставити једначину система паралелних тетива, коњугованих са дијаметром.

8. Поставити једначину тетиве која пролази кроз тачку (5, 2), а коњугована је са дијаметром $y + 3 = 0$ параболе $y^2 = 8x$.

9. Наћи праву која пролази кроз жижу параболе $y^2 = 2px$ тако да је тетива која лежи на тој правој подељена жижом у датом односу.

10. Поставити једначину дијаметра дате параболе, који је коњугован са тетивама датога правца.

11. Наћи услов под којим права $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ додирује дату параболу.

12. Ординате додирних тачака тангената дате параболе стоје у датом односу. Поставити једначину геометриског места тачака пресека посматраних тангената.

13. Наћи геометриско место средина тетива дате параболе, које пролази кроз дату тачку.

14. Наћи тачку додира параболе $y^2=11x$ и тангенте $11x-6y+9=0$. Наћи и једначину њене тангенте, паралелне правој $2x-7y+3=0$.

15. Доказати да права $y+y_0=2xx_0$ претставља тангенту на параболи $y=x^2$ у тачки (x_0, y_0).

16. Да бисмо повукли тангенту на параболи из дате тачке, која не лежи на параболи, нацртајмо круг чији је пречник дуж која спаја дату тачку са жижом параболе. Доказати да праве које спајају дату тачку са тачкама пресека нашег круга са тангентом у темену параболе, претстављају тражене параболе.

17. Доказати да се висине троугла чије стране додирују параболу секу на њеној директриси.

18. Доказати да се тангенте у теменима произвољне тетиве параболе секу на дијаметру спрегнутом са том тетивом; средина тетиве и тачке пресека тангената подједнако су удаљене од темена дијаметра.

19. Дати су дијаметар параболе, тангента у његову темену и једна тачка параболе. Конструисати тангенту у тој тачки.

20. Конструисати тангенте на параболу из дате тачке која не лежи на параболи, помоћу дијаметра који пролази кроз дату тачку.

21. Поставити једначину параболе у односу на дијаметар и тангенту у тачки $\left(\frac{9}{5}, 3\right)$ параболе, чија једначина, у односу на осу и тангенту у темену, гласи $y^2=5x$. Поставити, у односу на нови косоугли систем, једначину тангенте у тачки са старим координатама $\left(\frac{4}{5}, -2\right)$.

22. Доказати да директриса параболе претставља геометриско место тачака пресека узајамно нормалних тангената, да тетиве између њихових додирних тачака пролазе кроз жижу и да жижа претставља подножје нормале спуштене из тачке пресека тангената на тетиву.

23. Доказати да права која спаја жижу са тачком пресека двеју тангената полови угао између потега тачака додира.

24. Доказати да је угао који граде две тангенте параболе једнак половини угла између потега тачака додира.

25. Доказати да круг описан око троугла који образују три параболине тангенте пролазе кроз њену жижу.

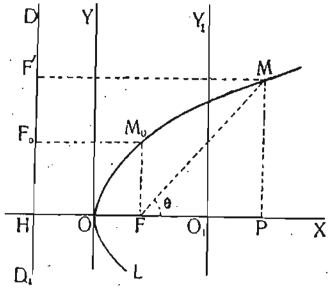
ГЛАВА ДЕВЕТА

ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ И ОСОБИНЕ КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА

I. Дефиниција и једначине.

151. Дефиниција. — Све три напред проучене криве линије, елипса, хипербола и парабола, задовољавају исти услов: све оне претстављају *геометриско место тачака чија је размера растојања од дате тачке и дате праве стална величина.*

Испитајмо сада постоје ли и друге криве линије које задовољавају исти услов. Тога ради узмимо неку сталну тачку F и праву линију DD_1. Повуцимо кроз тачку F (сл. 92) праву FH, нормално на праву DD_1. Обележимо са r и d одговарајућа растојања тачке M од F и DD_1 и одредимо тражену криву условом



Сл. 92

$$\frac{r}{d}=e, \tag{1}$$

где је e дата стална величина.

Узмимо праву HF за апсцисну осу правоуглог координатног система, XOY, а за координатни почетак изаберимо тачку O тако, да буде задовољен услов $\frac{OF}{HO}=e$. Јасно је да тражена крива M_0L пролази кроз тачку O. Обележимо растојање OF са k. Тада добијамо $HO=\frac{k}{e}$. А ако означимо $OP=x$, $PM=y$, налазимо

$$r=\sqrt{(x-k)^2+y^2}, \quad d=\frac{k}{e}+x.$$

Према томе релација (1) даје за једначину траженог геометриског места

$$\sqrt{(x-k)^2+y^2}=k+ex, \text{ или } y^2=2px+qx^2, \tag{2}$$

где су уведене ознаке

$$p=k(e+1), \qquad q=e^2-1. \tag{3}$$

Једначина (2) одређује криву линију другог степена. Ако је $e=1$, онда је $q=0$ и једначина (2) претставља параболу. Да бисмо једначину (2) упростили, под претпоставком $e \gtrless 1$, пренесимо координатни почетак у тачку O_1, која се мора налазити на растојању a од старога почетка, тј. ставимо $OO_1=a$.

Ако се у једначини (2) изврши замена

$$x = a + x_1, \quad y = y_1,$$

па у резултату изједначи са нулом коефицијент уз x_1,

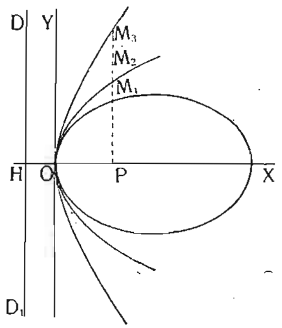
$$p + aq = 0, \tag{4}$$

добива се једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2 q} = 1.$$

Јасно је да добијена једначина и једначина (2) претстављају елипсу ако је $q < 0$, тј. $e < 1$, а хиперболу, ако је $q > 0$, тј. $e > 1$. При томе је друга полуоса, b, елипсе једнака $a\sqrt{-q}$ или, на основу другог израза (3), $a\sqrt{1-e^2}$, а полуоса, b, хиперболе једнака је $a\sqrt{q}$, или $a\sqrt{e^2-1}$. Стога, на основу релације између ексцентрицитета и полуоса елипсе (в. стр. 152, n^0 122), одн. хиперболе (в. стр. 170, n^0 134) закључујемо да број e, уведен у израз (1), претставља ексцентрицитет посматране елипсе, одн. хиперболе. Израз $p + aq = 0$ даје за p, у случају елипсе, вредност $a(1-e^2)$, у случају хиперболе вредност $a(e^2-1)$. Према томе, p претставља параметар ових кривих (в. стр. 152, 170).

Стари научници су овако тумачили особине коничних пресека, аналитички претстављених једначином (2). Лева страна једначине претставља површину квадрата конструисаног над ординатом које било тачке на кривој. Први члан десне стране једначине (2) претставља површину правоугаоника конструисаног над односном апсцисом и удвојеним параметром. Према томе, једначина (2) показује, на основу вредности ексцентрицитета e, да је површина квадрата конструисаног над ординатом произвољне елипсине тачке мања од површине правоугаоника конструисаног над њеном апсцисом и удвојеним параметром. За параболу су обе површине једнаке, а за хиперболу прва површина је већа од друге.



Сл. 93

Нацртајмо сва три конична пресека у правоуглом координатном систему XOY (сл. 93), и то тако да им ординатна оса буде заједничка тангента у темену O. Једначина (2) показује, да је за исту апсцису, $x = OP$, ордината елипсе, PM_1, најмања, ордината хиперболе, PM_3 највећа, а ордината параболе, PM_2, по величини између прве две.

Према изложеном испитивању само три криве, елипса, хипербола и парабола, поседују наведену особину (1).

152. Једначине у поларним координатама. — Узмимо жижу F (сл. 92) за пол, а осу FX за осу поларног координатног система. Означимо са r потег FM, а са θ поларни угао ∢XFM тачке M коничног пресека. Отсечак HF, који претставља растојање жиже F од директрисе, једнак је растојању F_0M_0 крајње тачке M_0 параметра p постављена из жиже. Стога једнакост (1), за тачку M_0 коничног пресека, постаје $\frac{p}{HF} = e$, одакле је $HF = \frac{p}{e}$. А за растојање d, тачке M од директрисе, имамо

$$d = HF + FP = \frac{p}{e} + r\cos\theta. \tag{5}$$

Уврстимо ли ову вредност за d у једначину (1) и скратимо са e, добијамо тражену једначину

$$\frac{r}{p + er\cos\theta} = 1, \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{1 - e\cos\theta}. \tag{6}$$

Ако за пол поларног координатног система изаберемо другу жижу, тако да се центар коничног пресека налази на левој страни, и ако поларну осу повучемо на десно, у једначини (6) мора се променити знак испред e. Стварно, ако се тачка M налази у области између жиже и одговарајуће директрисе, растојање M од ње једнако је разлици чланова на десној страни једнакости (5). Међутим, ако тачка M изађе из поменуте области, поларни угао је туп, његов косинус негативан. Према томе, посматрана једначина у том случају постаје

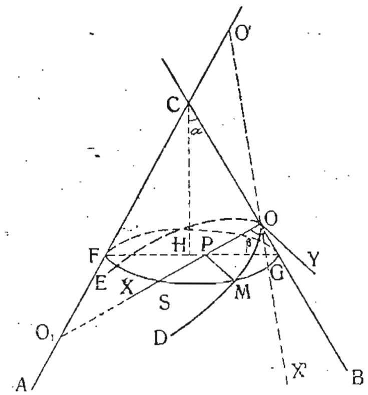
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}. \tag{7}$$

Једначине (6) и (7) претстављају елипсу за $e < 1$, хиперболу за $e > 1$ и параболу кад је $e = 1$.

II. Пресеци конуса.

153. Једначине коничних пресека. — Нека је дат прав кружни конус са теменом у тачки C (сл. 94) и углом 2α. Обележимо са AC и BC две праве које образују пресек конуса са равни цртежа кроз његову висину. Кроз произвољну тачку O генератрисе CB, где је $CO = l$, повуцимо раван S нормално на раван цртежа. Нека OX претставља праву пресека равни S и равни слике, а крива DOE линију пресека конуса и равни S. Узмимо у равни S апсцисну осу OX, а осу OY повуцимо нормално на њу.

Да бисмо поставили једначину криве DOE, узмимо на њој произвољно тачку M и провуцимо кроз њу кружни пресек FMG конуса, нормално на раван слике. Нека права FG претставља, у равни слике, пречник уоченог кружног пресека, а CH висину отсеченог конуса. Означимо са P тачку пресека са пречником FG праве PM, на којој се сече кружни пресек са равни S. Пошто су обе равни нормалне на равни слике, права PM је нормална на OX оси. Према томе координате тачке M су



Сл. 94

$$x = OP, \quad y = PM.$$

Нормала, PM, спуштена из тачке M круга GFM на његов пречник средња је пропорционала између отсечака пречника, тј.

$$\overline{PM}^2 = FP \cdot PG, \quad \text{или} \quad y^2 = (2 \cdot HG - PG) \cdot PG. \tag{8}$$

Величине отсечака GH и PG лако је изразити помоћу апсцисе x. У правоуглом троуглу Δ HGC угао код темена C једнак је α, а хипотенуза

$$CG = l + OG.$$

Према томе

$$HG = (l + OG)\, sin\, \alpha\,. \tag{9}$$

Означимо са β угао $\sphericalangle POG$ под којим раван S сече генератрису CB. Из косоуглог троугла ΔPGO добијамо

$$OG = \frac{x\, cos\,(\beta - \alpha)}{cos\, \alpha}, \quad PG = \frac{x\, sin\, \beta}{cos\, \alpha}.$$

Стављајући нађене вредности у (9) и (8), налазимо тражену једначину коничног пресека

$$y^2 = 2\,px + qx^2, \tag{10}$$

где су p и q величине дате изразима

$$p = l\, tg\, \alpha \cdot sin\, \beta, \quad q = \frac{sin\,(2\,\alpha - \beta)\cdot sin\, \beta}{cos^2\, \alpha}.$$

Угао α не прелази $\frac{\pi}{2}$, а угао β не прелази π. Према томе коефицијент p претставља увек позитиван број. Међутим коефицијент q може имати различите вредности.

Ако је $\beta > 2\alpha$, онда је $q < 0$. Тада оса OX сече другу генератрису конуса, CA, у тачки O_1, на коначном растојању од C, а конични пресек (10) претставља криву звану *елипса*.*

Обележимо дужину отсечка OO_1 са $2a$. Из косоуглог троугла ΔO_1OC имамо

$$l = 2a \cdot \frac{sin\,(\beta - 2\alpha)}{sin\, 2\alpha}, \quad q = -\frac{p}{a}$$

Стога једначина (10) добија облик

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}\, x^2. \tag{11}$$

Ако је $\beta = 2\alpha$, онда је $q = 0$ и једначина (10) има једноставнији облик

$$y^2 = 2px. \tag{12}$$

У томе случају OX оса је паралелна са другом генератрисом, CA, и добијени конични пресек претставља параболу, чије гране, OD и OE, иду у бесконачност.

* На страни 34, крива названа елипсом, претстављена једначином (22), различита је од једначине (10). Иста се крива линија претставља различитим једначинама, што зависи од избора координатног система.

Једначина (6), на стр. 140, је централна једначина елипсе, јер координатне осе пролазе кроз центар елипсе. Док је координатни почетак система, за који важи једначина (10), померен у теме елипсе.

Најзад, ако је $\beta < 2\alpha$ онда је $q > 0$, оса OX узима положај OX′ и не сече се са полуправом CA, већ се сусреће са њезиним наставком у некој тачки O′, с друге стране темена C. У том случају конични пресек зове се *хипербола* и састоји се из две гране, од којих је једна на конусу ACB, а друга на његову продужењу с друге стране темена C. Обе гране хиперболе иду у бесконачност.

Обележимо, у том случају, дужину отсечка OO′ са $2a'$. Из косоуглог троугла $\Delta OO'C$ следује

$$l = 2a'\, \frac{sin\,(2\alpha - \beta)}{sin\, 2a}, \quad q = \frac{p}{a'}.$$

Према томе једначина (10) за хиперболу је

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a'}x^2.$$

Ако раван S пролази кроз теме конуса C, онда је $l = 0$; једначина (10) постаје

$$y^2 = qx^2 \tag{13}$$

и раставља се у две линеарне једначине

$$y + x\sqrt{q} = 0, \quad y - x\sqrt{q} = 0. \tag{14}$$

Добијене једначине (14) одређују две реалне праве линије, за $q > 0$; а за $q < 0$ две т.зв. имагинарне праве. У оба случаја праве (14) задовољавају вредности $x = y = 0$, тј. секу се у реалној тачки — темену конуса.

154. Примери и задаци.

1. Поставити једначину коничних пресека у поларном координатном систему са полом у темену, односно у центру, а са поларном осом повученом дуж главне осе.

2. Користећи се једначином елипсе у поларном координатном систему, са полом у центру, доказати да је збир квадрата реципрочних вредности два узајамно нормална потега константна величина.

Доказати за хиперболу да је разлика квадрата реципрочних вредности ма која два узајамно нормална потега коњугованих хипербола — стална величина.

3. Проверити резултате претходних задатака за два потега елипсе $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$, који су паралелни правама $7x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 2y + 3 = 0$.

4. Доказати да су, за сваки конични пресек, растојања жиже од одговарајуће директрисе, односно одговарајућег темена, $\frac{p}{e}$, односно $\frac{p}{1+e}$.

5. Жижна оса коничног пресека узета је за апсцисну осу. Доказати да је угловни коефицијент тангенте једнак $\pm e$ у оним тачкама коничног пресека које леже на нормали подигнутој из жиже на жижну осу.

6. Доказати да геометриско место тачака пресека узајамно нормалних тангената ма ког коничног пресека претставља круг. Проучити специјалан случај за параболу.

ГЛАВА ДЕСЕТА

ИСПИТИВАЊЕ КРИВИХ ЛИНИЈА ОДРЕЂЕНИХ ОПШТОМ ЈЕДНАЧИНОМ ДРУГОГ СТЕПЕНА

I. Разне врсте кривих линија.

155. Скуп двеју правих линија. — Посматрајмо у односу на правоугли праволиниски координатни систем, XOY, општу једначину другог степена са текућим координатама x и y

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где су A, B, C, D, E и F стални реални коефицијенти. Претпоставимо, прво, да је

$$C \gtrless 0. \qquad (2)$$

Ако решимо једначину (1) по y добијамо

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{Gx^2+2Hx+K}, \qquad (3)$$

где су уведене ознаке

$$G\equiv B^2-AC, \quad H\equiv BE-CD, \quad K\equiv E^2-CF. \qquad (4)$$

Једначине (3) одређују две праве линије кад је поткорени израз тачан квадрат; за то треба да је испуњен услов

$$GK-H^2=0. \qquad (5)$$

Ако уврстимо изразе (4) у образац (5) и скратимо заједничким множитељем C, за који смо увели претпоставку (2), услов (5) добија дефинитиван облик

$$ACF+2BDE-CD^2-AE^2-B^2F=0.$$

Ова једнакост може се написати у облику

$$\Delta\equiv 0, \qquad (6)$$

где Δ означава детерминанту

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

која се назива дискриминантом леве стране дате једначине (1). Дискриминанта се саставља на овај начин. Ако су чланови једначине поређани као у једначини (1), онда прву врсту дискриминанте сачињавају коефицијенти чланова уз x, поређани по азбучном реду но без бројних коефицијената; другу врсту чине истим редом узети коефицијенти уз y, а у трећу врсту долазе коефицијенти последња три члана, без бројних множитеља, поређани такође по азбучном реду.

Ако је задовољен услов (5) или (6), онда обрасци (3) доиста одређују две праве линије; њихове једначине, после смене вредности $H=\sqrt{GK}$ из израза (5), постају

$$y=\frac{1}{C}[-(Bx+E)\pm(\sqrt{G}x+\sqrt{K})],$$

или

$$y=-\frac{B\mp\sqrt{G}}{C}x-\frac{E\mp\sqrt{K}}{C}. \qquad (8)$$

Ове праве су реалне, за вредност $G\geqq 0$, а имагинарне за $G<0$.

Једначине (8) могу се друкчије овако написати

$$Bx+Cy+E=\pm R,$$

где је уведена ознака

$$R\equiv\sqrt{G}x+\sqrt{K}.$$

Најзад скуп обеју правих (8) можемо претставити једном јединoм једначином, ако их помножимо међусобно

$$f_y'^2-R^2=0,$$

при чему је лева страна једначине (1) означена са $2f(x,y)$. Пошто су коефицијенти правца правих (8) $\frac{-B-\sqrt{G}}{C}$ и $\frac{-B+\sqrt{G}}{C}$, ове праве ће бити узајамно управне ако је производ горњих коефицијената једнак -1. Према томе, на основу првог обрасца (4), услов нормалности је

$$\frac{A}{C}=-1, \text{ или } A+C=0.$$

Услов паралелности правих линија (8) дат је изразом

$$G=0.$$

Под овом претпоставком, праве линије (8) реалне су за $K>0$, имагинарне за $K<0$, а поклапају се за $K=0$. Изложена посматрања изведена су под претпоставком $C\gtrless 0$, док коефицијент A може бити и једнак нули.

Уведимо нову претпоставку,

$$A\gtrless 0.$$

Једначина (1), решена по x, постаје

$$x=-\frac{By+D}{A}\pm\frac{1}{A}\sqrt{Gy^2+2H'y+K'}, \qquad (9)$$

: коефицијент G има пређашњу вредност (4), а H' и K' означавају

$$H' \equiv BD - AE, \quad K' \equiv D^2 - AF. \tag{10}$$

је тешко закључити да једначине (9) одређују две праве линије, под ıовом

$$GK' - H'^2 = 0.$$

:ђутим, овај израз се своди на пређашњи облик, (5), било да је коефиıјент C једнак нули или не.

Најзад треба још посматрати случај кад су оба коефицијента A и C .наки нули, а $B \gtrless 0$. Једначина (1) у том случају има облик

$$2\,Bxy + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0. \tag{11}$$

:а се једначина може написати у облику

$$2\,(By + D)\,x + 2Ey + F = 0 \tag{12}$$

раставља се у производ два множитеља, под условом да постоји сразрност коефицијената

$$\frac{B}{E} = \frac{2D}{F}, \quad \text{или} \quad 2DE - BF = 0. \tag{13}$$

том случају добијамо

$$By + D \equiv \frac{D}{F}\,(2Ey + F),$$

ко да се лева страна једначине (11) раставља у производ два линеарна ıожитеља

$$\frac{1}{F}\,(2Dx + F)\,(2Ey + F) = 0.$$

ıд изједначимо са нулом сваки од два множитеља леве стране написане ıначине, добијамо две праве линије, од којих је свака паралелна једној . координатних оса.

Лако је увидети да се услов (13) садржи у обрасцу (6) за вредноı: $A = C = 0$, $B \gtrless 0$. Према томе, услов (6) важи за све могуће претпоавке у вези са коефицијентима једначине (1).

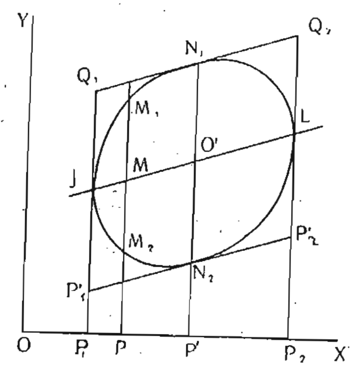
156. Три врсте кривих линија другог степена. — Претпоста:мо да дискриминанта Δ за једначину (1) није једнака нули и уведимо у ıразац (3) ознаке

$$-\frac{Bx + E}{C} = y_1, \quad \frac{1}{C}\sqrt{Gx^2 + 2Hx + K} = y_2. \tag{14}$$

дначина (3) у томе случају постаје

$$y = y_1 \pm y_2. \tag{15}$$

Одавде излази да за сваку апсцису $x = OP$ (сл. 95) одговарајућа ордината криве (1) има две вредности, PM_1 и PM_2, које се одређују обрасцем (15), и то прва одговара горњем знаку, тј. знаку +, а друга доњем знаку, тј. знаку —. Према томе вредност прве ординате је y_1 и она показује да је ордината праве линије JL,



Сл. 95

$$Bx + Cy + E = 0, \tag{16}$$

при чему су обе тачке, M_1 и M_2, подједнако удаљене од те праве. Значи да права линија (16) полови тетиве посматране криве (1), паралелне са осом OY, те, према томе, претставља пречник коњугован са поменутим тетивама. Услед тога све тачке посматране криве S симетричне су у односу на праву JL, дату једначином (16).

Ради проучавања облика криве (1) испитајмо функцију y_2, одређену обрасцем (14), а која се зове пречникова ордината. Напишимо је овако

$$y_2 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{(Gx + H)^2 + GK - H^2}{G}}.$$

Кад израчунамо леву страну једначине (5) и резултат унесемо у последњу једначину, добијамо

$$y_2 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{(Gx + H)^2 + C\Delta}{G}}, \tag{17}$$

или, друкчије,

$$y_2 = \frac{1}{C}\sqrt{G\,(x - x_1)\,(x - x_2)}, \tag{18}$$

при чему су уведене ознаке:

$$x_1 = \frac{-H - \sqrt{-C\Delta}}{G}, \quad x_2 = \frac{-H + \sqrt{-C\Delta}}{G}.$$

Према вредности коефицијента G постоје три различите врсте кривих линија, које одговарају претпоставкама:

$$G < 0, \quad G > 0, \quad G = 0.$$

Проучимо све три врсте и то сваку посебно.

а) *Криве чија је област простирања ограничена.* — Претпоставимо прво да је

$$G < 0, \quad \text{тј.} \quad B^2 < AC. \tag{19}$$

Одавде следе два закључка за коефицијенте A и B у једначини (1):

1° Оба коефицијента различита су од нуле;

2° Оба коефицијента истога су знака.

Iрема облику (17) ординате пречника, ако C и Δ имају исти знак, закључује е да y_2 претставља имагинарну величину, те је посматрана крива имагинарна.

Оставимо по страни овај случај и претпоставимо да су C и Δ разичитих знакова. Тада су обе апсцисе, x_1 и x_2, реалне и према облику рдинате пречника (18), разлике $x-x_1$ и $x-x_2$ морају имати различите наке да би посматрана крива била реална. Одавде излази да се апсцисе ачака посматране криве морају налазити између две границе: x_1 и x_2. То начи да наше криве леже у области ограниченој двема правим линијама, P_1Q_1 и P_2Q_2, које су паралелне ординатној оси, а налазе се на отстојању д ње $OP_1=x_1$, односно $OP_2=x_2$.

Ордината пречника претставља половину оне тетиве криве, која је паралелна ординатној оси, и може се, с обзиром на образац (18), написати овако,

$$\frac{1}{C}\sqrt{-G(x_1-x)(x-x_2)}\,.$$

Эдавде се одмах види да, по правилима диференцијалног рачуна, највећа вредност уочене тетиве одговара вредности

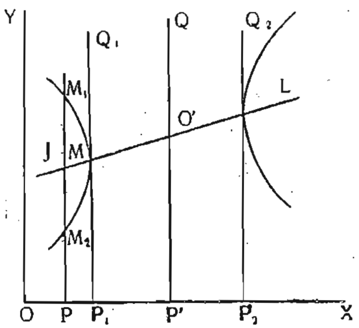
$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\,.$$

Због тога највећа тетива, N_2N_1, која је паралелна ординатној оси, пролази кроз средину P' између тачака P_1 и P_2. То значи да је посматрана крива (1), под претпоставком (19), ограничена и са горње и са доње стране правим линијама што пролазе кроз тачке N_1, односно N_2 паралелно пречнику JL, због симетрије криве. Према томе, крива лежи са свим својим тачкама у унутрашњости паралелограма $P'_1P'_2Q_2Q_1$ и додирује његове стране. Тачка O', пресека пречника JL са $P'N_1$, претставља средиште посматране криве.

b) *Крива са две бесконачне гране.* — Испитајмо други случај, који одговара услову

$$G>0, \quad \text{тј.} \quad B^2>AC\,. \tag{20}$$

Према томе коефицијенти A и C у овом случају могу имати ма које вредности, позитивне, негативне или нула, само њихов производ мора бити мањи од B^2.



Сл. 96

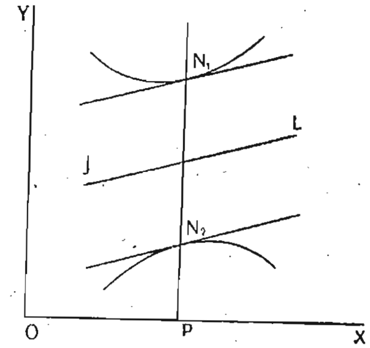
Проучићемо два случаја: кад су величине C и Δ различитих знакова и кад су истог знака.

Ако су C и Δ супротног знака, вредности апсциса x_1 и x_2 су реалне и образац (18) даје, под условом (20), за y_2 реалну величину за све вредности x које леже изван размака x_1, x_2, а имагинарну за све вредности x које се налазе између x_1 и x_2.

Према томе крива (1) нема реалних тачака између две праве P_1Q_1 и P_2Q_2 (сл. 96) и састоји се из две различите гране, од којих се свака пружа у бесконачност у позитивном, односно негативном смеру апсцисне осе. Свака од ових грана је симетрична према пречнику JL. Права $P'Q$ која полови простор између правих P_1Q_1 и P_2Q_2 сећи ће JL у средишту O' посматране криве.

Проучимо сад други случај, кад C и Δ имају исти знак. Тада образац (17) показује да ордината y_2 не може бити једнака нули и да она узима најмању вредност за

$$Gx+H=0\,, \quad \text{тј.} \quad x=-\frac{H}{G}\,.$$



Сл. 97

Означимо са OP (сл. 97) ову вредност x, а са N_2N_1 одговарајућу најмању вредност тетиве коју полови пречник JL, и повуцимо кроз тачке N_1 и N_2 праве паралелне пречнику JL. Посматрана крива лежи, дакле, изван области ограничене посматраним правим линијама и састоји се из две гране, које се простиру у бесконачност у позитивном, односно негативном смеру ординатне осе.

Проучимо најзад и случај кад је коефицијент C једнак нули. Тада једначина (1) постаје

$$Ax^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0, \tag{21}$$

при чему је услов (20) још увек задовољен. Из једначине (21) следи

$$y=-\frac{Ax^2+2Dx+F}{2(Bx+E)}\,,$$

или, ако извршимо дељење на десној страни,

$$y=Mx+N+\frac{R}{Bx+E}\,,$$

где су уведене ознаке

$$M\equiv-\frac{A}{2B}x, \quad N\equiv\frac{AE-2BD}{2B^2}\,, \quad R\equiv-\frac{\Delta}{2B^2}\,.$$

Ставимо да је

$$y=y_1+y_2\,, \tag{22}$$

где је

$$y_1=Mx+N, \quad y_2=\frac{R}{Bx+E}\,. \tag{23}$$

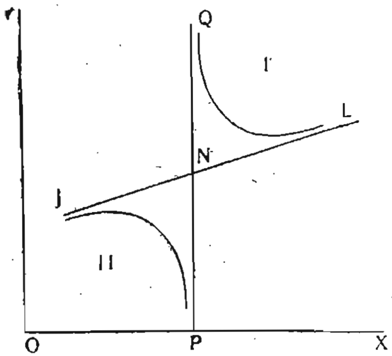
Први образац (23) одређује праву линију

$$y=Mx+N.$$

Претпоставимо да је ова права JL (сл. 98). Тада једначина (23) показује да се ордината криве (21) састоји из два дела: ординате праве JL и ординате y_2, која је одређена другим обрасцем (23).

Ако је величина R позитивна, онда за све позитивне вредности именитеља, тј. за $x>-\frac{E}{B}$, тачке криве леже изнад праве JK, а за $x<-\frac{E}{B}$

тачке криве се налазе испод ове праве. Означимо са OP апсцису тачке $x = -\frac{E}{B}$ и повуцимо праву PQ паралелно оси OY. Пошто за $x = -\frac{E}{B}$ ордината y постаје бесконачна, то права PQ има са кривом (21) заједничке тачке само у бесконачности. Према томе, посматрана крива се састоји из две гране, I и II, које се пружају у бесконачност. За негативну вредност величине R закључује се, на сличан начин, да се крива (21) састоји из две гране које се налазе у комплементарним угловима $\sphericalangle$ QNL и $\sphericalangle$ PNJ.



Сл. 98

Најзад за $R = 0$ $(\Delta = 0)$, једначина (21) гласи

$$(y - Mx - N)(Bx + E) = 0,$$

тј. претставља скуп двеју правих линија, JL и PQ.

c) *Крива са једном бесконачном граном.* Проучимо још и случај кад је

$$G = 0. \tag{24}$$

Под овом претпоставком други образац (14) постаје

$$y_2 = \frac{1}{C}\sqrt{2H\left(x + \frac{K}{2H}\right)},$$

а крива је претстављена једначином

$$y = y_1 + \frac{1}{C}\sqrt{2H\left(x + \frac{K}{2H}\right)}.$$

Значи, ако је $2H > 0$, крива је реална за

$$x > -\frac{K}{2H},$$

а ако је $2H < 0$, крива је реална за

$$x < -\frac{K}{2H}.$$

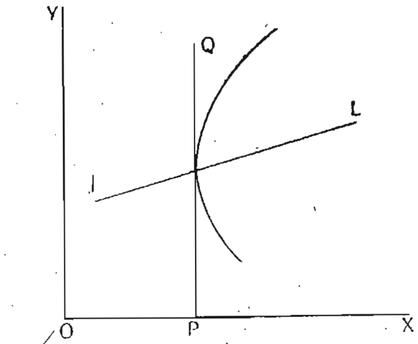
Означимо са OP (сл. 99) апсцису која је једнака

$$-\frac{K}{2H}$$

и повуцимо праву PQ паралелно оси OY. Према томе све тачке посматране криве налазе се са једне стране дотичне праве, PQ, и то са десне стране, ако је $2H > 0$, а са леве стране, ако је $2H < 0$. Пошто апсцисе x нису ограничене, оне могу имати и бескрајне вредности, због тога крива претставља

једну грану која се пружа у бесконачност. Права JL претставља пречник који полови тетиву паралелну ординатној оси.

Најзад, ако је $C = 0$, из услова (24) следи да је и $B = 0$, те једначина (1) постаје



Сл. 99

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{25}$$

при чему, очигледно, мора бити $A \gtrless 0$, јер би у противном једначина (25) била линеарна.

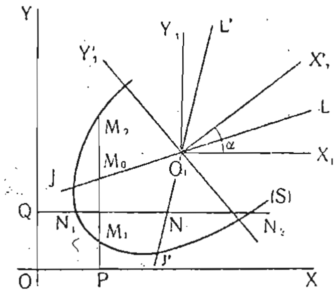
Према томе, решавањем једначине (25) по x изводимо закључке сличне онима из претходног случаја. Посматрана крива претставља једну бесконачну грану, која се са свима својим тачкама налази изнад или испод праве паралелне апсцисној оси.

157. Средиште криве линије. — Вратимо се једначини (1), обрасцима (14) и (15) и пречнику JL (сл. 100) који полови тетиве паралелне оси OY.

Полазећи од обрасца (9) испитиване криве (1) лако је закључити, на аналоган начин, да постоји и друга права, J'L', чија је једначина

$$Ax + By + D = 0, \tag{26}$$

која претставља пречник криве S коњугован са тетивама паралелним оси OX. Он полови, у тачки N, сваку тетиву N_1N_2 која одговара ординати OQ.



Сл. 100

Примећујемо да се једначине (16) и (26) могу изразити, на скраћени начин, помоћу парцијалних извода леве стране једначине (1) [коју ћемо обележити са $2f(x, y)$], наиме

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0\,. \tag{27}$$

Потражимо тачку пресека $O_1(x_0, y_0)$ пречника (27). Једначине (16) и (26) дају за њене координате

$$x_0 = -\frac{H}{G}, \quad y_0 = -\frac{H'}{G}, \tag{28}$$

где су G, H и H' претстављени изразима (4) и (10). Изрази (28) показују да тражене координате x_0 и y_0 претстављају коначне и одређене вредности само под условом

$$G \gtrless 0\,. \tag{29}$$

У противном, тачка O_1 удаљава се у бесконачност, или постаје неодређена.

Претпоставимо ли да је испуњен услов (29) можемо доказати да је та тачка с р е д и ш т е, тј. ц е н т а р с и м е т р и ј е к р и в е (1). Да бисмо то доказали претворимо, прво, координатни систем XOY у нови систем са почетком у тачки O_1 и новим осама, O_1X_1 и O_1Y_1, паралелним старим осама.

Обрасци за трансформацију координата постају, према томе,

$$x = x_0 + x_1\,, \quad y = y_0 + y_1\,. \tag{30}$$

Затим ћемо трансформисану једначину (1) написати овако

$$\left.\begin{aligned} 2f(x_0+x_1, y_0+y_1) \equiv \mathrm{A}\,(x_0+x_1)^2 + 2\mathrm{B}\,(x_0+x_1)\,(y_0+y_1) + \mathrm{C}\,(y_0+y_1)^2 + \\ + 2\mathrm{D}\,(x_0+x_1) + 2\mathrm{E}\,(y_0+y_1) + \mathrm{F} = \\ = \mathrm{A}x_1^2 + 2\mathrm{B}x_1y_1 + \mathrm{C}y_1^2 + 2f'_{x_0}\,x_1 + 2f'_{y_0}\,y_1 + 2f(x_0, y_0) = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

где су уведене ознаке

$$f'_{x_0} \equiv \mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{D},$$
$$f'_{y_0} \equiv \mathrm{B}x_0 + \mathrm{C}y_0 + \mathrm{E},$$
$$2f(x_0, y_0) \equiv \mathrm{A}x^2_0 + \mathrm{B}x_0y_0 + \mathrm{C}y^2_0 + 2\mathrm{D}x_0 + 2\mathrm{E}y_0 + \mathrm{F} =$$
$$= (\mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{D})\,x_0 + (\mathrm{B}x_0 + \mathrm{C}y_0 + \mathrm{E})\,y_0 + \mathrm{D}x_0 + \mathrm{E}y_0 + \mathrm{F}.$$

Како су x_0 и y_0 корени једначина (27), исти идентички задовољавају услове

$$f'_{x_0} \equiv 0\,, f'_{y_0} \equiv 0\,,$$
$$2f(x_0, y_0) \equiv \mathrm{D}x_0 + \mathrm{E}y_0 + \mathrm{F}.$$

Стога претворена једначина (31) постаје

$$\mathrm{A}x_1^2 + 2\mathrm{B}x_1\,y_1 + \mathrm{C}y_1^2 + \mathrm{F}_1 = 0\,, \tag{32}$$

где је уведена ознака

$$\mathrm{F}_1 \equiv \mathrm{D}x_0 + \mathrm{E}y_0 + \mathrm{F}\,.$$

Уврстимо ли у овај образац вредност (28) координата x_0 и y_0, добијамо

$$\mathrm{F}_1 \equiv -\frac{\mathrm{DH} + \mathrm{EH}' - \mathrm{FG}}{\mathrm{G}}\,.$$

С друге стране, кад развијемо детерминанту Δ по елементима последње колоне добијамо

$$\Delta = \mathrm{DH} + \mathrm{EH}' - \mathrm{FG}\,. \tag{33}$$

Због тога вредност F_1 постаје

$$\mathrm{F}_1 = -\frac{\Delta}{\mathrm{G}}\,.$$

Према томе претворена једначина (1), на основу израза (32), постаје

$$\mathrm{A}x_1^2 + 2\mathrm{B}x_1\,y_1 + \mathrm{C}y_1^2 = \frac{\Delta}{\mathrm{G}}\,. \tag{34}$$

Сад је лако доказати да нови координатни почетак претставља средиште криве (1). Ради тога узмимо ма коју сечицу, која пролази кроз координатни

почетак O_1, тј. која би имала једначину

$$y_1 = m\,x_1\,. \tag{35}$$

Апсцисе тачака пресека ове сечице са кривом (34) одређене су обрасцем

$$x_1^2 = \frac{\Delta}{(\mathrm{A} + \mathrm{B}m + \mathrm{C}m^2)\,\mathrm{G}}\,. \tag{36}$$

Изрази (36) и (35) одређују две тачке пресека, чије су координате једнаке по апсолутној вредности, а супротне по знаку. То значи да су обе тачке пресека симетричне у односу према тачки O_1, и то за сваки правац сечице (35), што ће рећи да је тачка $\mathrm{O}_1\,(x_0, y_0)$ средиште криве (1).

158. Криве са неодређеним средиштем и без средишта. — Посматрајмо случај кад је

$$\mathrm{G} = 0. \tag{37}$$

Ако је и

$$\mathrm{H} = 0. \tag{38}$$

лако је показати да мора бити и

$$\mathrm{H}' = 0. \tag{39}$$

Заиста, услови (37) и (38) дају

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}\,. \tag{40}$$

Према томе прва и последња размера (40) дају услов (39), који претставља алгебарску последицу услова (37) и (38). У том случају из образаца (28) следује да, под претпоставкама (37), (38) и (39), *средиште криве* (1) *постаје неодређено.*

Међутим јасно се види да се, у том случају, због услова (37), (38) и (39), крива (1) своди на скуп двеју правих.

Заиста, према обрасцу (33), дискриминанта Δ, за услове (37), (38) и (39), постаје једнака нули. Због тога крива (1) претставља у посматраном случају скуп двеју правих линија, паралелних под условом (37), како је то већ раније доказано. Поред тога, оба пречника (16) и (26), према условима (40), не само да су паралелна већ се и поклапају, те сачињавају једну праву. Ова је паралелна обема правама (1), које су претстављене једначинама (8) између којих се та права и налази.

Испитајмо други случај, за који важи само услов (37), тако да је

$$\Delta \gtrless 0.$$

Под овом претпоставком, обрасци (28) дају за x_0 и y_0 бескрајне величине. Према томе средиште криве (1) удаљава се у бесконачност, те се каже да крива (1) нема средишта.

II. Канонички облик једначина кривих линија другог степена.

159. Средишне криве линије. — Општа једначина криве другог степена била је дата у облику

$$2f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Под условима

$$\Delta \gtreqless 0, \quad G \gtreqless 0$$

добијена је била (в. стр. 202, образац (34)), једначина средишних кривих

$$Ax_1{}^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1{}^2 = \frac{\Delta}{G}. \tag{2}$$

Ова једначина, у односу на координатни систем са почетком у средишту криве и са осама паралелним старим осама, садржи само чланове са другим степеном текућих координата и независан члан. Коефицијенти три прва члана једнаки су одговарајућим коефицијентима полазне једначине (1). Независан члан, међутим, који се налази на десној страни једначине (2) једнак је размери дискриминанте и коефицијента G.

Да бисмо упростили једначину (2) и свели је на канонички облик, обрнимо координатни систем $X_1O_1Y_1$ око његова почетка, O_1, за произвољни угао α. Означимо са x' и y' нове координате, везане са пређашњима обрасцима

$$x_1 = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y_1 = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \tag{3}$$

Па одредимо још произвољни угао α тако, да у трансформисаној једначини (2) нестане члан са производом координата $x'y'$. Смењујући обрасце (3) у једначини (2), трансформисана једначина постаје

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 = \frac{\Delta}{G}, \tag{4}$$

где је

$$\left.\begin{aligned} A_1 &\equiv A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \\ C_1 &\equiv A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$
$$-A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Последња једначина служи за одређивање вредности угла α. Како ова једначина прелази у

$$(A - C)\sin 2\alpha - 2B\cos 2\alpha = 0,$$

за угао α добија се образац

$$tg\, 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{6}$$

Он даје за α потпуно одређену вредност, изузев случаја

$$B = 0, \quad A = C.$$

Но тада једначина (1) има облик

$$A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

и претставља, као што је познато, круг.

Остављајући овај случај по страни, као потпуно решен, узмимо за 2α ону вредност из (6) која је мања од π. Тада добијамо

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\pm R}, \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\pm R},$$

где је R

$$R \equiv \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}.$$

Пошто смо за 2α узели вредност мању од π, $\sin 2\alpha$ мора бити позитиван. Према томе од два знака уз R мора се узети само онај знак за који је $\sin 2\alpha$ позитивна величина.

На основу ових образаца, збир и разлика једнакости (5) дају

$$A_1 + C_1 = A + C, \quad A_1 - C_1 = R. \tag{7}$$

Уведемо ли ознаку

$$A + C \equiv S,$$

образац за R постаје (на основу првог израза (4) n⁰ 155, стр. 194)

$$R = \sqrt{S^2 + 4G}.$$

Према томе једначине (7) одређују вредности коефицијената A_1 и C_1 једначине (4) помоћу коефицијената једначине (1), наиме

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(S + \sqrt{S^2 + 4G}\right), \quad C_1 = \frac{1}{2}\left(S - \sqrt{S^2 + 4G}\right). \tag{8}$$

Најзад, напишимо једначину (4) у облику

$$\frac{x'^2}{\dfrac{\Delta}{A_1 G}} + \frac{y'^2}{\dfrac{\Delta}{C_1 G}} = 1; \tag{9}$$

која показује да, за $\Delta \gtreqless 0$, једначина (1) одређује елипсу, одн. хиперболу. Претпоставимо, прво, да је $G < 0$. Како је S по апсолутној вредности веће од $\sqrt{S^2 + 4G}$, из (8) излази тада да коефицијенти A_1 и C_1 имају знак величине S. Стога, када су Δ и S различитог знака, изрази

$$\frac{\Delta}{A_1 G} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta}{C_1 G} \tag{10}$$

претстављају позитивне величине, које можемо обележити са a^2 и b^2. Према томе једначина (9) одређује елипсу

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

са полуосама a и b.

Али ако су Δ и S истог знака, обрасци (10) претстављају извесне негативне величине, те једначина (9) одређује имагинарну елипсу.

Посматрајмо други случај, кад је $G > 0$. Апсолутна вредност S тада је мања од $\sqrt{S^2+4G}$, те је, према томе,

$$A_1 > 0, \quad C_1 < 0.$$

Одавде закључујемо, ако је

$$\Delta > 0, \quad \text{дакле} \quad \frac{\Delta}{A_1 G} > 0, \quad \text{и} \quad \frac{\Delta}{C_1 G} < 0,$$

да једначина (9) претставља хиперболу са реалном осом O_1X_1'. Ако је $\Delta < 0$, једначина (9) одређује хиперболу са реалном осом O_1Y_1'.

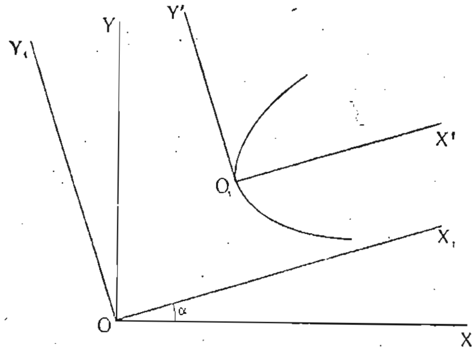
160. Криве без средишта. — Претпоставимо да је

$$\Delta \gtrless 0, \quad G = 0, \quad C \gtrless 0. \tag{11}$$

На основу другог од услова (11), сменимо у једначини (1) вредност $A = \frac{B^2}{C}$; она ће тада постати

$$\frac{1}{C}(Bx + Cy)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{12}$$

Обрнимо сад координатни систем XOY (сл. 101) за произвољни угао α, око почетка O.



Сл. 101

Обрасци за трансформацију координата гласе

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + x \cos\alpha,$$

где x_1 и y_1 означавају нове координате. Још произвољни угао α одредимо тако да коефицијент уз x_1 код члана једначина (12) што се налази у загради, буде једнак нули. Трансформисана једначина (12) прелази тада у

$$C_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y_1 + F = 0, \tag{13}$$

где су уведене ознаке

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv \frac{1}{C}(C\cos\alpha - B\sin\alpha)^2, \\ D_1 &\equiv D\cos\alpha + E\sin\alpha, \\ E_1 &\equiv E\cos\alpha - D\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Према томе имамо за одређивање угла α

$$B\cos\alpha + C\sin\alpha = 0.$$

Одавде добијамо:

$$tg\,\alpha = -\frac{B}{C}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{C}{\pm\sqrt{B^2+C^2}}.$$

Узмимо за угао α вредност мању од π. Тада је $\sin\alpha$ позитиван те се, према томе, пред кореном мора узети онај знак за који ће $\sin\alpha$ бити позитиван. Због израза за $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ обрасци (14) постају

$$C_1 = \frac{B^2+C^2}{C}, \quad D_1 = \frac{CD - BE}{\pm\sqrt{B^2+C^2}}, \quad E_1 = \frac{BD+CE}{\pm\sqrt{B^2+C^2}}, \tag{15}$$

где се уз корене узима само један знак, и то онај који одговара постављеном услову о позитивности $\sin\alpha$.

Најзад пренесимо координатни почетак у неку нову тачку, (a, b), а нове осе O_1X' и O_1Y' повуцимо паралелно осама OX_1, односно OY_1 (сл. 101). Користећи се обрасцима за трансформацију

$$x_1 = a + x', \quad y_1 = b + y',$$

и узимајући за a и b погодно изабране вредности, једначина (13) своди се на

$$y'^2 = 2px', \tag{16}$$

где је

$$p = -\frac{D_1}{C_1} = \pm\frac{(BE - CD)\,C}{(B^2+C^2)^{3/2}}, \tag{17}$$

при томе се од два знака пред разломком узима само онај који одговара раније поменутом услову, а вредности за a и b одређују се једначинама

$$C_1 b + E_1 = 0, \quad C_1 b^2 + 2(D_1 a + E_1 b) + F = 0. \tag{18}$$

Најзад образац (33) (n^0 157, стр. 202), на основу другог услова (11), даје

$$\Delta \equiv D(BE - CD) + E\left(BD - \frac{B^2E}{C}\right) = -\frac{(BE - CD)^2}{C}, \tag{19}$$

или

$$BE - CD = \pm\sqrt{-C\Delta},$$

где се од два знака пред кореном узима само један, према вредности леве стране последње једнакости. Сменом ове вредности у изразу (17), узимајући у обзир да је

$$B^2 + C^2 \equiv C(A + C) \equiv CS, \tag{20}$$

где S има значење као и раније, тј. $S \equiv A + C$, налазимо

$$p = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{S^3}}, \tag{21}$$

где се пред кореном узима само један знак, према наведеном услову.

Добијени закључци доказују да крива (1), под претпоставкама (11), претставља увек параболу. Она је реална јер, према обрасцима (19) и (20), вредности Δ и S имају увек различите знаке. Правац осе параболе одређује се углом α, а положај њеног темена координатама a и b, из једначина (18).

III. Инваријанте.

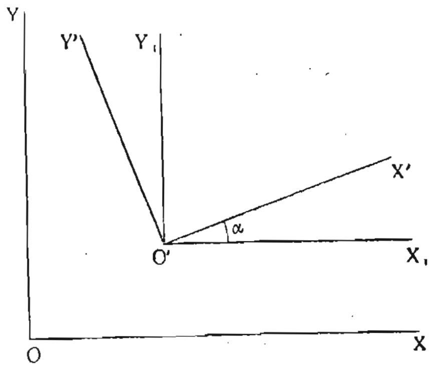
161. Дефиниције. — Изложено испитивање опште једначине

$$2f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

показало је да су три величине,

$$S,\ G \text{ и } \Delta, \qquad (2)$$

потпуно довољне за одређивање врсте и димензија кривих датих једначином (1). Заиста, коефицијенти једначина изведеног коничног облика (9) [на стр. 205] и (16) [на стр. 207] зависе само од три величине (2) на основу образаца (8) [на стр 205] и (21) [на стр. 207]. Величине (2) имају нарочите особине инваријаната према било каквим трансформацијама праволиниских координата.



Сл. 102

Најопштији прелаз из правих правоуглих координата једног система, XOY (сл. 102), ма у који други систем, X'O'Y', може се извршити помоћу две узастопне трансформације:

1° трансформација

$$x = a + x_1 \quad y = b + y_1, \qquad (3)$$

где су a и b координате тачке O', претвара дати координатни систем, XOY, у помоћни, $X_1O'Y_1$, са почетком у O' и осама $O'X_1$ и $O'Y_1$, паралелним старим осама, OX и OY;

2° трансформација помоћног система, $X_1O'Y_1$, у нови систем, X'O'Y', врши се помоћу образаца

$$x_1 = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y_1 = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \qquad (4)$$

где угао α означава $\sphericalangle X_1O'X'$.

Према томе јасно је да транслација одређена обрасцима (3) и ротација одређена обрасцима (4) претварају два произвољна координатна система један у други.

Због тога је довољно испитати, да ли се обрасци (2) мењају када се општа једначина коничних пресека трансформише било помоћу образаца (3), било помоћу образаца (4).

162. Особине инваријаната. — Лако је утврдити да се једначина (1), трансформацијом (3), доводи на облик

$$2f(x, y) \equiv A x_1^2 + 2B x_1 y_1 + C y_1^2 + 2f'_a x_1 + 2f'_b y_1 + 2f(a, b) = 0, \qquad (5)$$

где f'_a а f'_b означавају вредности парцијалних извода f'_x, одн. f'_y за вредности a и b променљивих x и y.

Означимо са

$$S_1,\ G_1,\ \Delta_1 \qquad (6)$$

вредности образаца (2) за претворену једначину (5). Пошто прва три коефицијента A, B и C имају исту вредност у обема једначинама (1) и (5), очевидно постоје једнакости

$$S_1 = S, \quad G_1 = G. \qquad (7)$$

Што се тиче треће величине у (6), она се изражава овако:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & f'_a \\ B & C & f'_b \\ f'_a & f'_b & 2f(a,b) \end{vmatrix}.$$

Ако у овој детерминанти одузмемо од елемената последње врсте елементе прве врсте помножене са a и елементе друге врсте помножене са b, вредност детерминанте се тиме неће променити. Према томе је

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & B & f'_a \\ B & C & f'_b \\ D & E & Da + Eb + F \end{vmatrix}.$$

Одузмемо ли сад од елемената треће колоне елементе прве колоне помножене са a и елементе друге колоне помножене са b, добијамо

$$\Delta_1 = \Delta. \qquad (8)$$

Једнакости (7) и (8) доказују да су изрази (2) доиста инваријанте према обрасцима трансформације (3).

Проширимо овај доказ и на трансформацију (4). Лако се види да трансформисана једначина (1) добија облик

$$A' x'^2 + 2B' x' y'^2 + C' y'^2 + 2D' x' + 2E' y' + F = 0, \qquad (9)$$

где смо, краткоће ради, ставили

$$n \equiv \cos\alpha \quad \text{и} \quad m \equiv \sin\alpha,$$

$$\left.\begin{aligned} A' &\equiv An^2 + 2Bmn + Cm^2, \\ B' &\equiv -Amn + B(n^2 - m^2) + Cmn, \\ C' &\equiv Am^2 - 2Bmn + Cn^2, \\ D' &\equiv Dn + Em, \\ E' &= En - Dm. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Означимо са

$$S',\quad G',\quad \Delta' \qquad (11)$$

вредности образаца (2) за претворену једначину (9).

Сабирањем првог и трећег обрасца (10) добија се

$$A' + C' = A + C,$$

или

$$S' = S. \qquad (12)$$

На тај начин, према обрасцима (10), добијамо за G′ израз

$$G' \equiv B'^2 - A'C' =$$
$$\equiv A^2m^2n^2 + B^2(n^2-m^2)^2 + C^2m^2n^2 - 2\,AB\,mn\,(n^2-m^2) - 2\,AC\,m^2n^2 +$$
$$+ 2\,BC\,mn\,(n^2-m^2) - An^2(Am^2 - 2\,Bmn + Cn^2) -$$
$$- 2\,Bmn\,(Am^2 - 2\,Bmn + Cn^2) - Cm^2\,(Am^2 - 2\,Bmn + Cn^2)\,.$$

Сабирањем чланова уз A^2, B^2, C^2, AB, AC и BC, налазимо

$$G' \equiv B^2 - AC.$$

Због тога имамо

$$G' = G. \tag{13}$$

Узмимо најзад образац

$$\Delta' = \begin{vmatrix} An^2 + 2\,Bmn + Cm^2 & -Amn + B\,(n^2-m^2) + Cmn & Dn + Em \\ -Anm + B\,(n^2-m^2) + Cmn & Am^2 - 2\,Bmn + Cn^2 & En - Dm \\ Dn + Em & En - Dm & F \end{vmatrix}.$$

Поделимо детерминанту са n, а елементе прве врсте помножимо са n, па од ових одузмимо елементе друге врсте помножене са m. Тада ће, имајући у виду да је $m^2 + n^2 = 1$, Δ' постати

$$\Delta' \equiv \frac{1}{n}\begin{vmatrix} An + Bm & -Am + Bn & D \\ -Amn + B\,(n^2-m^2) + Cnm & Am^2 - 2\,Bmn + Cn^2 & En - Dm \\ Dn + Em & En - Dm & F \end{vmatrix}.$$

Додајмо сад елементима друге врсте елементе прве врсте помножене са m, а множитељ n скратимо именитељем n,

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} An + Bm & -Am + Cn & D \\ Bn + Cm & -Bm + Cn & E \\ Dn + Em & En - Dm & F \end{vmatrix}.$$

Поделимо детерминанту са n, а елементе прве колоне помножимо са n, па ћемо од њих одузети елементе друге колоне претходно помножене са m. Тада добијамо

$$\Delta' = \frac{1}{n}\begin{vmatrix} A & -Am + Bn & D \\ B & -Bm + Cn & E \\ D & En - Dm & F \end{vmatrix}.$$

Најзад, додајмо елементима друге колоне елементе прве колоне, који су претходно помножени са m, па скратимо множитељ n. Према томе добијамо

$$\Delta' = \Delta, \tag{14}$$

Једнакости (12), (13) и (14) доказују да су обрасци (2) инваријанте и за трансформацију координата (4).

Из доказаних особина инваријантности образаца (2) излази да ниједна трансформација координата не може променити врсту једног коничног пресека. Заиста њихов облик и димензије не могу се променити путем трансформација координата.

IV. Испитивање опште једначине кривих другог степена у косоуглом координатном систему.

163. Скуп двеју правих. — Посматрајмо општу једначину другог степена у косом координатном систему

$$2f(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

где су коефицијенти реални. Овај случај могао би се свести на претходни помоћу трансформације косог координатног система у правоугли. Ми ћемо, међутим, задржати коси координатни систем, да бисмо непосредно потражили услове под којима једначина (1), у односу на коси координатни систем, претставља различите врсте коничних пресека.

У ту сврху уведимо познате ознаке

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

$$G \equiv B^2 - AC, \quad K \equiv E^2 - CF.$$

Као и у правоуглом координатном систему тако и сада, једначина (1) одређује скуп двеју правих под условом

$$\Delta = 0.$$

Једначине дотичних правих имају пређашњи облик

$$y = -\frac{B \mp \sqrt{G}}{C}\,x - \frac{E \mp \sqrt{K}}{C}.$$

Што се тиче услова нормалности за посматране праве, он се сада изражава овако

$$A + C = 2B\cos\omega,$$

где је ω координатни угао косог координатног система.

Међутим услов паралелности истих правих изражава се на пређашњи начин обрасцем

$$G = 0.$$

164. Средиште криве. — Средиште криве (1) одређује се на исти начин као и у правоугломм систему, једначинама

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0,$$

претпоставком да је

$$\Delta \gtrless 0, \qquad G \gtrless 0. \tag{2}$$

начина (1) своди се тада на облик

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 = \frac{\Delta}{G}, \tag{3}$$

координатном систему $X_1O_1Y_1$, чије су осе паралелне старим осама, а ординатни почетак налази се у средишту криве (1). Уведимо правоугли ординатни систем $X'O_1Y'$, са почетком у истој тачки, O_1, и са осом X', а заклапа угао α са осом O_1X_1. Изрази за трансформације координата псе

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{x' \sin(\omega-\alpha) - y' \cos(\omega-\alpha)}{\sin\omega}, \\ y_1 &= \frac{x' \sin\alpha + y' \cos\alpha}{\sin\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

је ω стари координатни угао.

Дакле, једначина (3) постаје

$$A_1x'^2 + 2B_1x'y' + C_1y'^2 = \frac{\Delta}{G}, \tag{5}$$

су уведене ознаке:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &\equiv \frac{A \sin^2(\omega-\alpha) + 2B \sin(\omega-\alpha)\sin\alpha + C \sin^2\alpha}{\sin^2\omega}, \\ 2B_1 &\equiv \frac{-A_1 \sin^2(\omega-\alpha) + 2B \sin(\omega-2\alpha) + C \sin^2\alpha}{\sin^2\omega}, \\ C_1 &\equiv \frac{A \cos^2(\omega-\alpha) - 2B \cos(\omega-\alpha) + C \cos^2\alpha}{\sin^2\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Одредимо сад угао α тако, да вредност коефицијента B_1 буде једнака ли. Ако све чланове бројитеља, у обрасцу за B_1, раздвојимо и средимо по $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, добијамо једнакост

$$P \sin 2\alpha - Q \cos 2\alpha = 0, \tag{7}$$

е су уведене ознаке

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv A \cos 2\omega - 2B \cos\omega + C, \\ Q &\equiv 2(A \cos\omega - B) \sin\omega. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ефицијент P може се другачије изразити овако

$$P \equiv A(1 - 2\sin^2\omega) - 2B \cos\omega + C,$$

ии

$$P \equiv (S - 2A) \sin^2\omega, \tag{9}$$

е је уведена ознака

$$S \equiv \frac{A + C - 2B \cos\omega}{\sin^2\omega}. \tag{10}$$

Према томе једначина (7) даје

$$tg\, 2\alpha = \frac{Q}{P}; \tag{11}$$

а због тога ћемо имати

$$\sin 2\alpha = \frac{Q}{\pm R}, \quad \cos 2\alpha = \frac{P}{\pm R}, \tag{12}$$

$$R \equiv \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{13}$$

Узмимо за тражену вредност угла 2α ону позитивну вредност, одређену једначином (11), која се налази између 0 и π, и означимо је са $2\alpha_0$. Тако се добијају за α четири различите вредности:

$$\alpha = \alpha_0 + k\frac{\pi}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

које одређују за осу x' четири смера: по два узајамно супротна. Узмимо за осу X' праву која одговара углу α_0. Тада се мора уз R изабрати један одређени знак за одговарајуће вредности $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

Претворена једначина (5) постаје, према уведеној претпоставци за α,

$$\frac{x'^2}{\dfrac{\Delta}{A_1G}} + \frac{y'^2}{\dfrac{\Delta}{C_1G}} = 1. \tag{14}$$

Вредности коефицијената A_1 и C_1 одређују се из образаца (6). Стога њихов збир и разлика дају

$$\left.\begin{aligned} A_1 + C_1 &= S, \\ A_1 - C_1 &= R_1, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где R_1, на основу образаца (10), добија вредност

$$R_1 \equiv \frac{\mp R}{\sin^2\omega}, \tag{16}$$

при чему се знак у бројитељу одређује према горњој напомени. Образац (13) доказује да је вредност другог корена из R увек реална, јер се под знаком корена налази позитивна величина.

Међутим, може јој се дати још и други израз. Заиста, по увођењу вредности (8) и (9) у израз (13) добијамо

$$\begin{aligned} R^2 &\equiv [(S - 2A)^2 \sin^2\omega + 4(A\cos\omega - B)^2] \sin^2\omega \equiv \\ &\equiv S^2 \sin^2\omega + 4[A^2 + B^2 - A(S \sin^2\omega + 2B\cos\omega)] . \sin^2\omega. \end{aligned}$$

Израз у средњим заградама постаје, према обрасцу (10),

$$A^2 + B^2 - A(A + C - 2B\cos\omega + 2B\cos\omega) = B^2 - AC \equiv G.$$

Због тога имамо

$$R \equiv \sqrt{S^2 \sin^2\omega + 4G} \sin\omega,$$

образац (16) постаје

$$R_1 \equiv \sqrt{S^2 + \frac{4G}{\sin^2 \omega}}, \qquad (17)$$

; једначине (15) налазимо

$$A_1 = \frac{1}{2}(S \mp R_1), \quad C_1 = \frac{1}{2}(S \pm R_1),$$

се, у сваком обрасцу, узима само по један знак, према наведеним поставкама.

Добијени обрасци показују да кад је $G < 0$, изрази A_1 и C_1 имају знак као и S; у противном, тј. кад је $G > 0$, један од израза A_1 и C_1 бити позитиван, а други негативан.

Из претходног изводимо ове закључке:

Ако је $\Delta \gtrless 0$, једначина (1) одређује реалну елипсу ако је $G < 0$, а условy да Δ и S имају различите знаке; полуосе те елипсе су

$$\sqrt{\frac{\Delta}{A_1 G}}, \quad \sqrt{\frac{\Delta}{C_1 G}}.$$

су Δ и S истог знака, једначина (1) одређује имагинарну елипсу.

Ако је $\Delta \gtrless 0$, а $G > 0$ једначина (1) претставља хиперболу, чије се осе, реална и имагинарна, одређују према знаку коефицијената једна- (14); за дужине тих полуоса имамо

$$\sqrt{\left|\frac{\Delta}{A_1 G}\right|}, \quad \sqrt{\left|\frac{\Delta}{C_1 G}\right|},$$

се под знаком корена узима апсолутна вредност дотичне размере.

165. Криве без средишта. — Испитајмо сад криву (1) која нема ишта. Према условима

$$\Delta \gtrless 0, \quad G = 0, \qquad (18)$$

ачина (1), под претпоставком $C \gtrless 0$, добија облик

$$\frac{1}{C}(Bx + Cy)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (19)$$

шимо трансформацију старог, косог координатног система (са коорди- им углом ω) у нови, правоугли координатни систем, X_1OY_1, са прећаш- почетком и осом OX_1, која заклапа са старом апсцисном осом угао α. ма томе обрасци за трансформацију гласе

$$x = \frac{x_1 \sin(\omega - \alpha) - y_1 \cos(\omega - \alpha)}{\sin \omega},$$

$$y = \frac{x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha}{\sin \omega}.$$

Изједначимо са нулом коефицијент уз x_1, у изразу на левој страни једначине (19), који се налази у малој загради и имаћемо

$$B \sin(\omega - \alpha) + C \sin \alpha = 0, \qquad (20)$$

а трансформисана једначина (19) постаје

$$C_1 y_1^2 + 2D_1 x_1 + 2E_1 y_1 + F = 0, \qquad (21)$$

где су уведене ознаке

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv \frac{[-B\cos(\omega-\alpha) + E\cos\alpha]^2}{C \sin^2\omega}, \\ D_1 &\equiv \frac{D\sin(\omega-\alpha) + E\sin\alpha}{\sin\omega}, \\ E_1 &\equiv \frac{-D\cos(\omega-\alpha) + E\sin\alpha}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Једначине (20) одређују тражену вредност угла α са

$$tg\,\alpha = -\frac{B\sin\omega}{C - B\cos\omega}. \qquad (23)$$

За вредности *sinus-a* и *cosinus-a* које одговарају овој вредности α имамо

$$\sin\alpha = -\frac{B\sin\omega}{\pm R}, \quad \cos\alpha = \frac{C - B\cos\omega}{\pm R}, \qquad (24)$$

где је

$$R \equiv \sqrt{B^2\sin^2\omega + (C - B\cos\omega)^2} = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC\cos\omega}.$$

Услед другог услова (18), $B^2 = AC$, и вредности (10) за S, R постаје

$$R \equiv \sin\omega\sqrt{CS}. \qquad (25)$$

За α ћемо изабрати угао мањи од π. Због тога и $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ морају имати одређене вредности те, према томе, у обрасцима (24) мора се задржати само један од два знака.

Уврстимо ли у изразе (22) вредности за $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и R, из (24) и (25) добијамо, на основу обрасца (10) и другог од услова (18),

$$C_1 \equiv S,$$

$$D_1 \equiv \frac{DC - BE}{\pm \sin\omega\sqrt{CS}},$$

$$E_1 \equiv \frac{BD + CE - (CD + BE)\cos\omega}{\pm \sin^2\omega\sqrt{CS}},$$

где важи само један знак, са раније наведених разлога.

Узмимо сад за нови координатни почетак тачку $O'(x_0, y_0)$, а нове ординатне осе, X' и Y', паралелно пређашњима. Уведимо у једначину (21) ену

$$x_1 = x_0 + x', \quad y_1 = y_0 + y'$$

одредимо вредности x_0 и y_0 тако да трансформисана једначина добије лик

$$y'^2 = 2px'.$$

Очевидно је да треба ставити

$$C_1 y_0 + E_1 = 0,$$
$$C_1 y_0^2 + 2D_1 x_0 + 2E_1 y_0 + F = 0,$$
$$p = -\frac{D_1}{C_1} = \frac{BE - DC}{\pm \sin\omega \sqrt{CS^3}}.$$

Међутим, на основу друге претпоставке (15), имамо

$$\Delta = -\frac{(BE - DC)^2}{C},$$

›датле

$$BE - DC = \pm\sqrt{-C\Delta},$$

› се од два знака мора задржати само одговарајући знак бинома $BE - DC$. ема томе вредност параметра p постаје

$$p = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3 \sin^2\omega}}, \tag{26}$$

› се, према горе наведеном, од два знака узима само један.

Резултат (26) доказује да, под условом (18), једначина (1) одређује ›к реалну параболу, јер су Δ и S различитих знакова. То се види из ›тходних образаца Δ (10) и другог услова (18).

Ова анализа јасно показује да вредности трију величина S, G и Δ, шавају питање о облику коничног пресека са општом једначином (1), у косом ›рдинатном систему, слично ономе што смо нашли у правоуглом систему.

V. Инваријанте у косоуглом координатном систему.

166. Транслација оса. — Узмимо општу једначину другог степена,

$$2f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

›еком косом координатном систему, са координатним углом ω. Величине G и Δ имају нарочите особине, по којима се закључује да су изрази

$$S, \quad \frac{G}{\sin^2\omega}, \quad \frac{\Delta}{\sin^2\omega} \tag{2}$$

›аријанте ма за коју трансформацију Декартових координата.

Први доказ инваријантности израза (2) дао је Bool, служећи се трансформацијом косог координатног система у правоугли и теоријом алгебарских облика.

Међутим, лако је дати и други, непосредни доказ, полазећи од чињеница да је свака најопштија трансформација Декартових косих координата изводљива у три узастопне етапе, наиме: транслацијом координатног система и обртањем сваке од координатних оса око координатног почетка.

Извршимо, прво, трансформацију

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1.$$

Полазна једначина (1) ће постати

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_a x_1 + 2f'_b y_1 + 2f(a, b) = 0, \tag{3}$$

где $2f$ обележава леву страну једначине (1), а f'_a и f'_b парцијалне изводе функције f по x и по y за њихове партикуларне вредности a и b. Коефицијенти добијене једначине (3) уз чланове другог степена, односно нових текућих координата, x_1 и y_1, идентични су одговарајућим коефицијентима првобитне једначине (1). Према томе, очевидно је да постоје једнакости

$$S_1 = S, \qquad G_1 = G,$$

где S_1 и G_1 означавају за претворену једначину (3) оне вредности које смо за полазну једначину (1) обележили са S и G.

Дискриминанта Δ_1, за једначину (23), дата је изразом

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A & B & f'_a \\ B & C & f'_b \\ f'_a & f'_b & 2f(a, b) \end{vmatrix}.$$

Одузмимо, прво, од елемената треће колоне вредности прве колоне помножене претходно са a, и елементе друге колоне помножене са b. Детерминанта ће при томе задржати своју вредност. Затим у претвореној детерминанти одузмимо од елемената треће врсте вредности елемената прве и друге врсте, претходно помножене са a, односно са b.

Лако је увидети да постоји једнакост

$$\Delta_1 = \Delta. \tag{4}$$

167. Обртање оса. — Другу трансформацију координата извршићемо обрћући апсцисну осу за угао α. За ту трансформацију добијамо обрасце

$$x = \frac{x_1 \sin\omega_1}{\sin\omega}, \qquad y = \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin\omega} + y_1,$$

где је ω_1 координатни угао новог координатног система, а за везу овога са старим обрасцем имамо

$$\omega_1 \equiv \omega - \alpha. \tag{5}$$

Трансформисана једначина (1) постаје

$$A_1x_1^2 + 2B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2E_1y_1 + F = 0, \tag{6}$$

де су уведене ознаке:

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &\equiv \frac{A\, sin^2\omega_1 + 2B\, sin\,\omega_1\, sin\,\alpha + C\, sin^2\alpha}{sin^2\omega}, \\
B_1 &\equiv \frac{B\, sin\,\omega_1 + C\, sin\,\alpha}{sin\,\omega}, \qquad C_1 \equiv C, \\
D_1 &\equiv \frac{D\, sin\,\omega_1 + E\, sin\,\alpha}{sin\,\omega}, \qquad E_1 = E.
\end{aligned}\right\} \qquad (7)
$$

Означимо са

$$S_2,\ G_2 \ \text{и}\ \Delta_2$$

вредности одговарајућих величина за леву страну једначине (6). На основу образаца (7) добијамо

$$S_2 \equiv \frac{A\, sin^2\omega_1 + 2B\,(sin\,\alpha - sin\,\omega\, cos\,\omega_1)\, sin\,\omega_1 + C\,(sin^2\alpha + sin^2\omega - 2\, sin\,\alpha\, sin\,\omega\, cos\,\omega_1)}{sin^2\omega_1\, sin^2\omega}.$$

Како је, према (5), $\alpha = \omega - \omega_1$, биће

$$sin\,\alpha - sin\,\omega\, cos\,\omega_1 \equiv - cos\,\omega\, sin\,\omega_1$$

$$sin^2\alpha + sin^2\omega - 2\, sin\,\alpha\, sin\,\omega\, cos\,\omega_1 =$$

$$\equiv sin^2\omega\, cos^2\omega_1 + cos^2\alpha\, sin^2\omega_1 + sin^2\omega - 2\, sin^2\omega\, cos^2\omega_1 \equiv$$

$$\equiv - sin^2\omega\,(1 - sin^2\omega_1) + cos^2\omega\, sin^2\omega_1 + sin^2\omega \equiv sin^2\omega_1.$$

На основу последња два обрасца, израз за S постаје

$$S_2 \equiv \frac{A + C - 2B\, cos\,\omega}{sin^2\omega} = S.$$

Други образац,

$$G_2 \equiv B_1^2 - A_1 C_1,$$

постаје, према (32),

$$G_2 \equiv \frac{(B^2 - AC)\, sin^2\omega_1}{sin^2\omega},$$

што значи да постоји инваријантна зависност

$$\frac{G_2}{sin^2\omega_1} = \frac{G}{sin^2\omega}.$$

Најзад, дискриминанта Δ_2 постаје

$$\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix}
\dfrac{A\, sin^2\omega_1 + 2B\, sin\,\omega_1\, sin\,\alpha + C\, sin^2\alpha}{sin^2\omega} & \dfrac{B\, sin\,\omega_1 + C\, sin\,\alpha}{sin\,\omega} & \dfrac{D\, sin\,\omega_1 + E\, sin\,\alpha}{sin\,\omega} \\
\dfrac{B\, sin\,\omega_1 + C\, sin\,\alpha}{sin\,\omega} & C & E \\
\dfrac{D\, sin\,\omega_1 + E\, sin\,\alpha}{sin\,\omega} & E & F
\end{vmatrix}$$

Одузмимо од елемената прве врсте елементе друге врсте, претходно помножене са $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\omega}$; затим од елемената прве колоне трансформисане детерминанте одузмимо елементе друге колоне, претходно помножене са $\frac{sin\,\alpha}{sin\,\omega}$, и добијамо

$$\Delta_2 = \frac{sin^2\omega_1}{sin^2\omega}\,\Delta,$$

или

$$\frac{\Delta_2}{sin^2\omega} = \frac{\Delta}{sin^2\omega}.$$

Одатле се види да је размера $\frac{\Delta}{sin^2\omega}$ инваријантна према посматраној трансформацији.

На сличан начин се доказује, да за трансформацију координата, која се састоји у обртању само ординатне осе за неки угао β, сва три израза (2) имају особине инваријаната.

Помоћу наведене три трансформације координатних система може се сваки координатни систем, путем три узастопне трансформације, претворити ма у који други систем. Јасно је, да су обрасци (2) заиста инваријанте за било коју трансформацију Декартових координата.

Раније смо показали да се облик и димензије коничних пресека потпуно одређују помоћу вредности инваријаната (2) или њихових размера. Одатле и произилази важност доказаног својства инваријаната. Заиста, облик и димензије сваког коничног пресека остају исти, независно од Декартова координатног система на који се дата крива другог реда односи.

На основу изложеног види се да у теорији инваријаната налазимо доказ да су наведени услови не само довољни већ и потребни при одређивању облика и димензија коничних пресека.

VI. Испитивање опште једначине другог степена помоћу теорије облика.

168. Полином са коефицијентима уз квадрате променљивих различитим од нуле. — Општа једначина другог степена са две независно променљиве величине проучавана је, у овој глави, по Декартовој методи. Декарт је у својој геометрији на овај начин показао да једначина која претставља решење Папусова проблема одређује конични пресек. Ми ћемо овде показати како се до истог циља долази новим путем, применом теорије алгебарских облика. Она се оснива на трансформацији полинома у збир квадрата.

Узмимо полином са сталним коефицијентима

$$2f \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

где су A и C различити од нуле. Лако је овај полином написати у облику

$$2f \equiv \frac{1}{A}(Ax + By + D)^2 - \frac{1}{A}(By + D)^2 + Cy^2 + 2Ey + F.$$

Ако уведемо ознаку
$$f'_x \equiv Ax + By + D = P$$
и групишемо остале чланове према елементима са y, добијамо
$$2f \equiv \frac{1}{A}[P^2 - (Gy^2 + 2H'y + K')]. \tag{1}$$
Проучићемо засебно два случаја:

1°
$$G \gtrless 0; \tag{2}$$
тада се може написати
$$2f \equiv \frac{1}{A}\left\{P^2 - \frac{1}{G}[(Gy + H')^2 - H'^2 + K'G]\right\}.$$
Ако овде ставимо
$$Gy + H' \equiv Q,$$
и приметимо да постоји идентичност
$$GK' - H'^2 = A\Delta, \tag{3}$$
добија се
$$2f = \frac{1}{A}\left[P^2 - \frac{1}{G}(Q^2 - A\Delta)\right].$$
Према томе, једначина криве линије
$$2f = 0,$$
под претпоставком (2), своди се на облик
$$GP^2 - Q^2 = A\Delta. \tag{4}$$
2°
$$G = 0;$$
под овом претпоставком образац (1) постаје
$$2f = \frac{1}{A}(P^2 + Q),$$
где је уведена ознака
$$Q \equiv -2H'y - K'.$$
Но из обрасца (3) имамо и
$$H'^2 = -A\Delta.$$
Према томе, за $\Delta \gtrless 0$, посматрана крива се изражава једначином
$$P^2 + Q = 0. \tag{5}$$
Међутим, за $\Delta = 0$, једначина уочене криве постаје
$$P^2 - K' = 0. \tag{6}$$

169. Полином са коефицијентима уз квадрате промењљивих једнаким нули. — У овом случају једначина криве другог степена је
$$2f \equiv 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
а полином $2f$ може се и овако написати
$$2f = \frac{2}{B}(By + D)(Bx + f) - \frac{2DE}{B} + F.$$
Тада дискриминанта полинома $2f$ постаје
$$\Delta \equiv B(2DE - BF).$$
Према томе, ако уведемо ознаке
$$By + D \equiv U, \qquad Bx + E \equiv V,$$
добијамо
$$2f = \frac{1}{B}\left(2UV - \frac{\Delta}{B}\right).$$
Једначина посматране криве постаје
$$UV = \frac{\Delta}{2B}. \tag{7}$$
Одавде је лако закључити да је добијена једначина обухваћена обрасцем (4). Јер очевидно имамо идентичност
$$UV = \left(\frac{U - V}{2}\right)^2 - \left(\frac{U - V}{2}\right)^2, \tag{8}$$
те се једначина (7) може и овако исписати.
$$\left(\frac{U + V}{2}\right)^2 - \left(\frac{U - V}{2}\right)^2 = \frac{\Delta}{2B}. \tag{8}$$
Према томе, доиста спада у општи облик једначине (4).

170. Геометриско тумачење добијених једначина. — Приметимо, пре свега, да су функције P, Q линеарне, при чему у обрасцима (4), (5) и (6) функција P садржи x и y, а Q само y. Према томе праве линије одређене једначинама
$$P = 0, \qquad Q = 0 \tag{9}$$
секу се у једној одређеној тачци, а једначине
$$P = \alpha, \qquad Q = \beta, \tag{10}$$
где су P и Q две величине које задовољавају једначине (4), (5) и (6), претстављају две праве, паралелне првој, односно другој правој (9). Праве (10) одређују својим пресеком, за различите вредности α и β, одговарајуће тачке које припадају посматраним кривим линијама. И тако, уочене криве (4), (5) и (6) претстављају геометриска места поменутих тачака.

Претпоставимо да је $G < 0$. Проучимо, прво, једначину (4). Она се може довести на један од ових облика

$$\left.\begin{aligned} P_1^2 + Q_1^2 &= 1, \\ P_1^2 + Q_1^2 &= 0, \\ P_1^2 + Q_1^2 &= -1, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

који одговарају условима:

$$A\Delta < 0, \quad \Delta = 0, \quad \text{односно} \quad A\Delta > 0,$$

где се изрази P' и Q' разликују од P и Q сталним реалним множитељима.

Први образац (11) показује да се вредности P' и Q' налазе између -1 и $+1$. Према томе одговарајућа крива линија нема бескрајно удаљених тачака, те одређује криву која лежи у ограниченој области.

Друга једначина (11) одређује само тачку

$$P' = 0, \quad Q' = 0.$$

Најзад, трећа једначина (11) нема реалних решења и претставља имагинарну криву.

Проучимо сад случај $G > 0$. Једначина (4) може се свести на један од ова три облика

$$\left.\begin{aligned} P_1^2 - Q_1^2 &= \pm 1, \\ P_1^2 - Q_1^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

под одговарајућим условима

$$\Delta \gtrless 0, \quad \text{односно} \quad \Delta = 0.$$

Проучимо прву од једначина (12). Очевидно је да P' остаје реално за све вредности Q' од $-\infty$ до $+\infty$. Но P се мења од $-\infty$ до $+\infty$ пролазећи кроз своју најмању вредност 1. Према томе, посматрана крива нема тачака у простору између две праве

$$P' = \pm 1.$$

Стога се уочена крива јавља у облику две гране, које се протежу у бесконачност. До сличног закључка долази се и за другу једначину прве врсте (12). Што се тиче треће једначине, она очигледно претставља скуп двеју правих линија

$$P' + Q' = 0, \quad P' - Q' = 0.$$

Испитајмо сад једначину (5)

$$P^2 + Q = 0.$$

Како Q може узимати само негативне вредности, од 0 до $-\infty$, за P реално, то се дотична крива састоји само из једне бесконачне гране.

Најзад, једначина (5) може се раставити у две једначине:

$$P \mp \sqrt{K'} = 0,$$

те претставља скуп двеју правих линија.

VII. Неједнакости другог степена.

171. Геометриско тумачење неједнакости. — Једна реална крива другог степена дели раван на два дела. За средишне криве, област у којој се налази средиште зове се унутрашња, у односу на криву, а друга — спољашња. За параболу, унутрашњом облашћу назива се она у којој се налази жижа параболе. За две праве које се секу, зваћемо унутрашњом област између позитивних праваца ових правих.

Ако померамо извесну тачку, $M(x, y)$, по координатној равни XOY, полином

$$2f \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \qquad (1)$$

изједначава се са нулом само кад се тачка M нађе на кривој

$$2f = 0. \qquad (2)$$

Да бисмо одредили знак полинома $2f$ за поменуте области, унутрашњу и спољашњу, доказаћемо да полином $2f$ мора имати у истој области исти знак. Јер, како полином (1) може да промени знак само ако се изједначи са нулом значи, док се тачка $M(x,y)$ креће у истој од две поменуте области у односу према кривој (2), полином (1) мора задржавати исти знак. Тај знак се лако одређује чим га израчунамо за било коју тачку. На пример, за криву (2), област у којој се налази координатни почетак функција (1) има знак свог независног члана, F, јер, у том случају, сви остали чланови су једнаки нули.

Лако је, међутим, доказати да полином $2f$ мења знак чим тачка $M(x, y)$ пређе криву (2). Заиста, претпоставимо да се тачка M креће дуж праве

$$y = ax + n \qquad (3)$$

која сече конични пресек (2) у двема реалним тачкама. За вредност (3) ординате, y, полином $2f$ постаје квадратна функција једне променљиве, x, наиме

$$2f(x, ax + n). \qquad (4)$$

Тачке пресека праве (3) са коничним пресеком (2) одређене су коренима функције (4). Она има два корена; обележићемо их са x_1 и x_2, при чему је $x_1 < x_2$. Функција (4) тада постаје

$$K(x - x_1)(x - x_2). \qquad (5)$$

Одавде се види да за вредности променљиве x мање од x_1 функција (1) има, на правој (3), знак коефицијента K. За $x = x_1$, функција (1) постаје једнака нули; док за вредности x у размаку

$$x_1 < x < x_2,$$

функција (5) узима знак супротан знаку коефицијента K. Према томе, при прелазу тачке $M(x, y)$ кроз конични пресек (2), функција (1) доиста мења знак.

Узмимо, на пр., једначину елипсе

$$2f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (6)$$

За координатни почетак функција $2f$ је негативна. Према томе неједнакост

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 < 0$$

важи за тачке у унутрашњости елипсе (6), а неједнакост

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 > 0$$

за тачке изван елипсе (6).

Приметимо, да за имагинарну елипсу

$$2f \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

полином $2f$ може бити само позитиван за све тачке равни.

За хиперболу

$$2f \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_1} - 1 = 0$$

функција $2f$ има негативне вредности у унутрашњој области којој припада средиште хиперболе, а позитивне вредности у спољашњој области у односу према хиперболи.

За параболу

$$2f \equiv y^2 - 2px = 0,$$

међутим, како је за $y = 0$ и позитивне вредности x функција $2f$ негативна, то је ова негативна у унутрашњој области параболе, а позитивна изван ње.

---

172. Примери и задаци.

1. Наћи геометриско значење једначина у правоуглом координатном систему:

$$y^2 - 2xy + 3x^2 + 2y - 4x - 3 = 0$$
$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$
$$3x^2 - 2xy + 4y^2 + x - 1 = 0$$
$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$
$$y^2 + 2xy - 2x^2 - 4y - x + 10 = 0$$
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$$
$$y^2 + 2xy + x^2 - 6y + 9 = 0$$
$$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$$
$$2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0$$
$$18y^2 - 12xy + 34x^2 + 24x - 72y - 504 = 0$$
$$9x^2 - 12xy + 4y^2 + 18x - 12y - 7 = 0$$
$$4y^2 + 12xy + 13x^2 - 50x - 28y - 11 = 0$$
$$8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$$
$$2x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$$
$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2y + 2 = 0$$

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$$
$$x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$$
$$7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$$
$$x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$
$$2xy - 4x - 2y + 3 = 0$$
$$x^2 - 2xy - y^2 + 10x + 2y + 7 = 0$$
$$144y^2 - 120xy + 25x^2 - 242x - 298y + 491 = 0$$
$$x^2 - xy + 3y^2 - 2y + 4 = 0$$
$$x^2 - xy + 3x - 2y + 2 = 0$$
$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 3x + 2y + 2 = 0$$
$$16y^2 + 24xy + 9x^2 + 110y - 230x = 0$$
$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$$
$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$$
$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$
$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 5 = 0$$
$$3y^2 - 10xy + 3x^2 + 14y - 2x + 3 = 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2 - 6y - 10x + 25 = 0$$
$$y^2 - 14xy + x^2 - 4x + 28y - 44 = 0$$
$$7x^2 - 2xy + 7y^2 + 4y - 28x - 20 = 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 10x + 16 = 0$$
$$x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$$
$$10y^2 + 18xy + 13x^2 - 38y - 44x + 33 = 0$$
$$x^2 - xy - 3x + y + 4 = 0$$
$$3y^2 + 11xy + 6x^2 - 23x - 17y + 16 = 0$$
$$4x^2 - 4xy + y^2 + 7y - 12x + 10 = 0$$
$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x + 8 = 0$$
$$xy - 1 = 0$$

2. Испитати геометриско значење једначина у претходном задатку за косоугли систем, са координатним угловима од 45^0, 60^0, одн. 120^0.

3. Трансформисати у канонички облик једначине кривих линија из задатка под бројем 1, прво, за правоугли координатни систем, затим за косоугли, са координатним угловима од 45^0, 60^0, одн. 120^0.

4. Наћи услове под којима крива

$$(Ax + By + C)^2 + (A_1x + B_1y + C_1)^2 = 1$$

претставља елипсу, односно две праве.

5. Показати да једначина

$$abx^2 + (b^2 - a^2)\,xy - aby^2 + h\,(a^2 + b^2)\,x + hab = 0$$

претставља две узајамно управне праве.

6. Наћи вредност параметра k у једначини

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 2y + k = 0$$

да ова претставља елипсу, односно реалну тачку, односно имагинарну елипсу.

7. Наћи вредности параметра k у једначини

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 9x + 6y + k = 0$$

да ова претставља две праве, односно хиперболу.

8. Наћи вредности параметра k за које једначина

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2ky - k = 0$$

ђује скуп правих, односно параболу.

9. Наћи вредности параметра k за које једначина

$$4xy + 2x + 4y + k = 0$$

ђује скуп правих, односно хиперболу.

10. Одредити облик криве

$$(k^2 - a^2)\,x^2 + (m^2 - a^2)\,y^2 - 2kmxy + 2a^2kx + 2b^2my - a^4 = 0$$

азличите вредности параметара k и m.

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

ЕЛЕМЕНТИ КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА

I. Пречници, осе, темена.

173. Дефиниције елемената. — Елементом коничног пресека назива се свака тачка, свака права, сваки скуп правих, под условом да припадају дотичном коничном пресеку. Према томе сваки елемент коничног пресека одређује се помоћу једне или више једначина, које садрже коефицијенте тог коничног пресека. Као примере можемо навести све оне елементе које смо проучавали код појединих коничних пресека, као и раније одређено средиште средишних коничних пресека, чије се координате изражавају помоћу коефицијената посматране једначине. Исто тако можемо навести и пречнике коњуговане са правцима координатних оса.

Пређимо сад на постављање аналитичких израза различитих елемената.

174. Пречник. — Узмимо општу једначину коничних пресека у Декартовом правоуглом координатном систему,

$$2f(x, y) \equiv \mathrm{A}x^2 + 2\,\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\,\mathrm{D}x + 2\,\mathrm{E}y + \mathrm{F} = 0. \qquad (1)$$

Дефинишимо *пречник (дијаметар) као геометриско место средина паралелних тетива.*

Нека права линија,

$$y = mx + n\,, \qquad (2)$$

са коефицијентом правца m, одређује правац посматраних тетива. Одредимо сад, прво, тачке пресека криве (1) са правом (2). Елиминацијом y из обеју једначина добијамо за одређивање апсциса тачака пресека квадратну једначину,

$$\mathrm{P}x^2 + 2\,\mathrm{Q}x + \mathrm{R} = 0\,, \qquad (3)$$

где је

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &\equiv \mathrm{A} + 2\,\mathrm{B}m + \mathrm{C}m^2,\\ \mathrm{Q} &\equiv (\mathrm{B} + \mathrm{C}m)\,n + \mathrm{E}m + \mathrm{D}\,,\\ \mathrm{R} &\equiv \mathrm{C}n^2 + 2\,\mathrm{E}n + \mathrm{F}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Апсциса X средине тетиве (2), чије крајње тачке имају апсцисе x_1 и x_2, одређује се обрасцем

$$\mathrm{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

) су x_1 и x_2 корени једначине (3) то је

$$x_1+x_2=-\frac{Q}{P}.$$

азимо дакле до закључка да се апсциса средине тетиве (2) изражава ћу обрасца

$$X=-\frac{(B+Cm)\,n+Em+D}{A+2\,Bm+Cm^2}. \tag{5}$$

оварајућа ордината, Y, добија се из једначине (2)

$$Y=m\,X+n. \tag{6}$$

обрасца, (5) и (6), претстављају параметарске једначине траженог геориског места тачака (X, Y), при чему је n промењљиви параметар који мења од једне тетиве до друге, а m стални коефицијент који одређује зац тетива.

Стављајући вредност n, која се добија из једначине (6), у једначину добијамо тражено геометриско место — пречник, у облику

$$(A+Bm)\,X+(B+Cm)\,Y+D+Em=0.$$

ј пречник зове се коњуговани пречник са тетивама правца m. Пошто обијена једначина линеарна по X и Y, значи да пречник претставља ву линију.

Добијена једначина пречника може се написати на два различита ина, или

$$Y=-\frac{A+Bm}{B+Cm}\,X-\frac{D+Em}{B+Cm}, \tag{7}$$

$$AX+BY+D+m\,(BX+CY+E)=0. \tag{8}$$

начина (8) може се, краће, написати

$$f'_X+m\,f'_Y=0, \tag{9}$$

f'_X и f'_Y означавају парцијалне изводе леве стране једначине (1) по x, юсно по y, где су место x и y стављене X и Y текуће координате једнае пречника.

Јасно је да се за вредности m једнаке нули, односно бесконачном бијају раније уведени пречници коњуговани са правцима координатних оса.

Из једначине (9) следи, да *сваки пречник средишног коничног преса (1) пролази кроз његово средиште*. Доиста, једначина (9) је идентички довољена координатама средишта које се одређују из једначина

$$f'_x=0,\quad f'_y=0. \tag{10}$$

Лако се можемо уверити да, и обратно, *свака права што пролази оз средиште коничног пресека претставља један пречник*. Доиста, општи лик једначина правих линија што пролазе кроз средиште, које је дефисано једначинама (10), изражава се, на скраћени начин, једначином

$$f'_x+m'f'_y=0, \tag{11}$$

где је m' ма који број, а x и y текуће координате. Добијена једначина (11) има облик једначине пречника (9).

Да бисмо доказали да пречник (11) полови тетиве правца m, решимо једначину (11) по y,

$$y=-\frac{A+Bm'}{B+Cm'}\,x-\frac{D+Em'}{B+Cm'}.$$

Смењујући у једначини тетиве,

$$y=m'x+n', \tag{12}$$

у овом вредношћу, налазимо апсцисе тачака пресека пречника (11) са тетивом (12) у облику

$$x=-\frac{(B+Cm')\,n'+D+Em'}{A+2Bm'+Cm'^2}.$$

Међутим овај образац је сличан изразу за апсцисе (5), што доказује тачност претходног става.

Вратимо се сад једначини (7). Из ње видимо да је коефицијент правца пречника (7), који ћемо означити са m_1,

$$m_1=-\frac{A+Bm}{B+Cm}. \tag{13}$$

Одавде се добија веза између правца тетива m и одговарајућег правца пречника m_1, у облику

$$Cmm_1+B\,(m+m_1)+A=0. \tag{14}$$

Међутим, за коничне пресеке без средишта, тј. за параболе имамо

$$B^2-AC=0.$$

Смењујући одавде вредност $A=\frac{B^2}{C}$ у образац (13) добијамо

$$m_1=-\frac{B\,(B+Cm)}{C\,(B+Cm)}=-\frac{B}{C}. \tag{15}$$

Према томе, пречници параболе не зависе од коефицијента правца m тетива, што значи да су сви пречници паралелни међу собом.

175. Коњуговани пречници. — Узмимо други низ тетива чији је коефицијент правца, m_1, једнак коефицијенту правца пречника (7). Према обрасцу (13), коефицијент правца m' новог пречника, коњугованог са тетивама m_1, одређен је помоћу обрасца

$$m'=-\frac{A+Bm_1}{B+Cm_1}.$$

Одавде се добија веза између оба коефицијента правца, m_1 и m', у облику сличном (14), наиме

$$Cm_1m'+B\,(m_1+m')+A=0. \tag{16}$$

ізлика једнакости (14) и (16) даје

$$(\mathrm{B}+\mathrm{C}m_1)(m-m')=0\,.$$

ɔви множитељ различит је од нуле за средишне коничне пресеке, јер, ıема обрасцу (15), он одређује правац пречника парабола. Према томе ɔра бити

$$m'=m\,.$$

ɔбијени резултат показује, да је *пречник коњуговани са правцем неког ɔугог пречника паралелан његовим коњугованим тетивама.* Таква два ɛчника зову се такође коњуговани. То значи да *коњуговани преч-ɥи узајамно полове своје коњуговане тетиве.*

Из овога изводимо да коефицијенти правца, m и m_1, двају коњугоних пречника средишних коничних пресека задовољавају услов

$$\mathrm{C}mm_1+\mathrm{B}(m+m_1)+\mathrm{A}=0\,. \tag{17}$$

Примера ради узмимо једначину елипсе, одн. хиперболе у каноничком ілику

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

којој горњи знак одговара елипси, а доњи — хиперболи. Како је у овом учају

$$\mathrm{A}=\frac{1}{a^2},\qquad \mathrm{C}=\pm\frac{1}{b^2},\qquad \mathrm{B}=0\,,$$

ı услов (17) даје везу између коефицијената праваца двају коњугованих ɛчника елипсе, одн. хиперболе у већ познатом облику

$$m\,m_1=\mp\frac{b^2}{a^2}\,,$$

е горњи знак служи за елипсу, а доњи за хиперболу.

176. Осе. — Коњуговани пречници који су још и узајамно управни, ıетстављају осе средишних коничних пресека чији коефицијенти правца, и m_1, морају задовољавати сем услова (17) још и услов управности,

$$m\,m_1=-1\,.$$

ɔема томе услов (17) постаје

$$m+m_1=-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\,.$$

ɔог тога се оба коефицијента праваца оса, m и m_1, одређују као корени адратне једначине

$$\mathrm{B}u^2+(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,u-\mathrm{B}=0\,. \tag{18}$$

ɔмоћу ње лако је наћи једначину другог степена скупа обеју оса. Тога

ради уврстићемо у (18), место u, вредност коефицијента правца, m, из једначине (9),

$$m=-\frac{f'_x}{f'_y}\,.$$

Према томе једначина скупа оса средишног коничног пресека (1) постаје

$$\mathrm{B}\,f_x'^2-(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,f_x'\,f_y'-\mathrm{B}\,f_y'^2=0\,,$$

или

$$\mathrm{B}\,(f_x'^2-f_y'^2)-(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,f_x'\,f_y'=0\,.$$

У случају параболе добијамо, према обрасцу (15), коефицијент правца m тетива, нормалних на оси, у облику

$$m=-\frac{1}{m_1}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\,.$$

И тако једначина осе посматране параболе постаје

$$f_x'+\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\,f_y'=0.$$

Лако је проширити ове резултате на коси координатни систем. У том случају мора се увести услов управности праваца m и m_1 у облику

$$1+m\,m_1+(m+m_1)\cos\omega=0\,, \tag{19}$$

где је ω координатни угао. Према томе једначине (17) и (19) дају

$$m+m_1=-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega}\,,\qquad m\,m_1=\frac{\mathrm{A}\cos\omega-\mathrm{B}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega}\,.$$

Тако да квадратна једначина која одређује вредности коефицијената m и m_1 добија сад, место облика (18), облик

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega)\,u^2+(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,u+\mathrm{A}\cos\omega-\mathrm{B}=0\,.$$

Смењујући у њој u са $-\dfrac{f'_x}{f'_y}$ долазимо до једначине скупа оса посматраног коничног пресека (1) у облику

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega)\,f_x'^2-(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,f_x'\,f_y'+(\mathrm{A}\cos\omega-\mathrm{B})\,f_y'^2=0\,.$$

Међутим за параболе, чији је коефицијент правца осе, m_1, у правоуглом систему дат обрасцем (15), добијамо у случају косоуглог система из израза (19) за коефицијент правца коњугованих тетива

$$m=\frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\omega}{\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega}\,.$$

И тако једначина осе параболе постаје

$$(\mathrm{B}-\mathrm{C}\cos\omega)\,f_x'+(\mathrm{C}-\mathrm{B}\cos\omega)\,f_y'=0\,.$$

177. Темена. — Тачке пресека кривих другог степена (1) са њиим осама зову се т е м е н а посматраних кривих. Координате темена ијају се према томе заједничким решавањем једначине (1) са једначиама њихових оса.

Растојања између темена средишњих кривих, елипсе и хиперболе, у се дужине оса.

Узмимо, као пример, једначину средишних кривих другог степена чије осе поклапају са координатним осама, итд.

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + F_1 = 0 . \qquad (20)$$

ци се одмах да се њихова темена налазе у тачкама

$$\left(\pm\sqrt{\frac{-F_1}{A_1}},\ 0\right), \qquad \left(0,\ \pm\sqrt{\frac{-F_1}{C_1}}\right). \qquad (21)$$

) у једначини (20) коефицијенти A_1 и C_1 имају исти знак, који се може трати као позитиван, појављују се три могућности:

1° Коефицијент F_1 једнак је нули. У том случају крива (20) своди а тачку — координатни почетак, те се четири тачке (21) поклапају са њим.

2° Коефицијент $F_1 > 0$. Једначина (20) претставља имагинарну елипсу, су тачке (21) имагинарне.

3° Коефицијент $F_1 < 0$. Елипса (20) реална је и сва четири темена) реална су.

Претпоставимо сад да су коефицијенти A_1 и C_1 у једначини (20) сутних знакова. За вредност $F_1 = 0$ једначина (20) одређује две праве, које секу у координатном почетку, са којим се тада поклапају све четири ке (21).

Ако је коефицијент $F_1 < 0$, а $A_1 > 0$, крива (20) је хипербола, чија се лна оса налази на X оси. На њој се налазе два реална темена, одреа двема првим тачкама (21), а друга два темена су имагинарна.

Најзад, за $F_1 > 0$, оса која се налази на Y оси реална је. На се налазе два реална темена, док су друга два, што леже на X оси, агинарна.

II. Тангенте и нормале.

178. Дефиниције. — Узмимо једначину коничног пресека

$$2f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 . \qquad (1)$$

элоније је одређивао тангенту у тачки (x_0, y_0) коничног пресека као праву ију што пролази кроз ову тачку, паралелно тетивама коњугованим са чником, који исто тако пролази кроз уочену тачку. Једначина овог пречa је

$$f'_x + m f'_y = 0, \qquad (2)$$

је m коефицијент правца коњугованих тетива, а уједно и тражене генте.

Према томе једначина ове тангенте је

$$y - y_0 = m(x - x_0), \qquad (3)$$

где се m одређује помоћу једначина (2).

Јер, пошто пречник (2) пролази кроз тачку (x_0, y_0), координате ове тачке морају задовољавати једначину (2),

$$f'_{x_0} + m f'_{y_0} = 0.$$

Смењујући одавде добијену вредност

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} \qquad (4)$$

у једначини тангенте (3) добијамо

$$f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{x_0}(x - x_0) = 0. \qquad (5)$$

Образац (4) за коефицијент правца тангенте одговара дефиницији тангенте у диференцијалном рачуну. Као што је познато, тражени коефицијент правца претставља вредност извода y' у датој тачки. Пошто се извод y' одређује диференцијалењем имплицитне функције (1) помоћу обрасца

$$f'_x + f'_y\, y' = 0,$$

имамо

$$y'_0 = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$$

што је истоветно са обрасцем (4).

Ако сад у једначину (5) унесемо вредности за f'_{x_0} и f'_{y_0}, она постаје

$$(Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) + (Bx_0 + Cy_0 + E)(y - y_0) = 0,$$

или

$$(Ax_0 + By_0 + D)\,x + (Bx_0 + Cy_0 + E)\,y = Ax_0^2 + 2Bx_0 y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0. \qquad (6)$$

Како се тачка (x_0, y_0) налази на коничном пресеку (1), постоји идентичност

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0.$$

Због тога израз на десној страни једначине (6) прелази у

$$Ax_0^2 + 2Bx_0 y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 = -Dx_0 - Ey_0 - F,$$

а за једначину тангенте (6) добива се

$$(Ax_0 + By_0 + D)\,x + (Bx_0 + Cy_0 + E)\,y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0. \qquad (7)$$

Нормала на кривој (1) у тачки (x_0, y_0) претставља праву, управну на тангенти у истој тачки. Према томе њена једначина је

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

Ставимо ли овде за m вредност из обрасца (4), добијамо једначину тражене нормале у облику

$$f'_{x_0}(y-y_0)+f'_{y_0}(x-x_0)=0\,.$$

179. Различити облици једначине тангенте. — Изведена једначина (7) може се написати и овако

$$Ax_0x+B(y_0x+x_0y)+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0. \qquad (8)$$

Ова једначина добија се дакле из једначине коничног пресека (1) на тај начин, што се један степен од текућих координата замени одговарајућим координатама тачке додира.

Према томе, да би се добила једначина тангенте у тачки (x_0, y_0) треба величине

$$x^2,\quad 2xy,\quad y^2,\quad 2x,\quad 2y$$

у једначини коничног пресека (1) заменити величинама

$$x_0x,\quad y_0x+x_0y,\quad y_0y,\quad x+x_0,\quad y+y_0.$$

И тако се за једначине тангената, у тачки (x_0, y_0), коничних пресека у каноничком облику

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1,\qquad y^2=2px.$$

добивају

$$\frac{x_0x}{a^2}\pm\frac{y_0y}{b^2}=1,\quad \text{одн.}\quad y_0y=p(x+x_0).$$

Раније изведена једначина тангенте (7) може се кратко написати

$$f'_{x_0}x+f'_{y_0}y+f_1'=0, \qquad (9)$$

где је уведена ознака

$$f_1'\equiv Dx_0+Ey_0+F.$$

Једначина тангенте у облику (9) служи за образовање једначине тангенте коничних пресека у хомогеним координатама.

Уведимо, тога ради, познате изразе

$$x=\frac{X}{Z},\qquad y=\frac{Y}{Z};\qquad x_0=\frac{X_0}{Z_0},\qquad y_0=\frac{Y_0}{Z_0}, \qquad (10)$$

где су X, Y, Z хомогене координате тачке (x, y), а X_0, Y_0, Z_0 — тачке (x_0, y_0). Сменом израза (10) у једначини коничног пресека (1) и његове тангенте (9) добијамо њихове једначине у хомогеним координатама

$$2\Phi(X,Y,Z)\equiv AX^2+2BXY+CY^2+2DXZ+2EYZ+FZ^2=0, \qquad (11)$$

односно

$$(AX_0+BY_0+DZ_0)X+(BX_0+CY_0+EZ_0)Y+(DX_0+EY_0+FZ_0)Z=0. \quad (12)$$

Служећи се ознаком 2Φ за леву страну једначине (11), лако је једначину тангенте (12) симболички написати

$$\Phi'_{X_0}X+\Phi'_{Y_0}Y+\Phi'_{Z_0}Z=0. \qquad (13)$$

Одавде се види да уведена ознака f_1' претставља вредност извода Φ'_{Z_0} при обрнутој трансформацији, хомогених координата у старе, Декартове координате. За то је довољно у обрасце са хомогеним координатама ставити

$$Z\equiv 1,\quad X\equiv x,\quad Y\equiv y.$$

Тако Φ'_{Z_0} постаје f_1', а једначина тангенте (13) добија пређашњи свој облик (9). Наведени облик једначине тангенте (13), у хомогеним координатама, важи за све алгебарске криве линије.

180. Услов додира праве и коничног пресека. — Узмимо једначину праве општег облика

$$y=mx+n. \qquad (14)$$

Дата права (14) постаје тангента коничног пресека (1) кад се обе тачке њихова пресека поклопе. Апсцисе тачака пресека обеју линија одређене су једначином до које се долази кад се замени вредност ординате y (14) у једначини (1), тј.

$$Px^2+2Qx+R=0, \qquad (15)$$

ако ставимо

$$\left.\begin{aligned} P&\equiv A+2Bm+Cm^2,\\ Q&\equiv(B+Cm)n+Em+D,\\ R&\equiv Cn^2+2En+F.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Да би једначина (14) била тангента коничног пресека (1) оба корена квадратне једначине (15) морају бити једнака. Услов се изражава познатом једнакошћу

$$Q^2-PR=0. \qquad (17)$$

Ако уврстимо овде из образаца (16) вредности за P, Q и R, тражени услов додира, после поништавања чланова трећег и четвртог степена по m и n, постаје

$$Km^2-2Hmn+Gn^2+2Lm+2H'n+K'=0, \qquad (18)$$

где коефицијенти K, H, G, H′ и K′ имају раније (n⁰ 155) уведене вредности минора дискриминанте Δ; док новоуведена ознака

$$L\equiv ED-BF$$

претставља последњи, шести минор дискриминанте Δ, јер ова, као симетрична, има свега шест различитих минора првог реда.

Услов (18) може се извести, ради лакшег памћења, још и у другом облику. Узмимо једначину праве (14) у облику

$$ux+vy+1=0, \qquad (19)$$

где је

$$\frac{u}{v} \equiv -m \qquad \frac{1}{v} \equiv -n .$$

Према томе једначина (18) постаје

$$Ku^2 - 2\,Luv + K'v^2 - 2\,Hu - 2\,H'v + G = 0. \tag{20}$$

Међутим, да би једначина (19) одређивала тангенту коничног пресека (1), у тачки (x_0, y_0), једначина (7) мора бити идентична са једначином (19). Зато морају постојати једнакости

$$\left.\begin{aligned} u &= \mu\,(Ax_0 + By_0 + D),\\ v &= \mu\,(Bx_0 + Cy_0 + E),\\ 1 &= \mu\,(Dx_0 + Ey_0 + F),\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где је μ коефицијент пропорционалности. Пошто се тачка (x_0, y_0) налази у исто време и на правој (19), мора бити

$$0 = \mu\,(ux_0 + vy_0 + 1). \tag{22}$$

Елиминација трију величина

$$\mu x_0, \quad \mu y_0, \quad \mu$$

из четири, по њима, линеарне једначине (21) и (22) даје тражени услов

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Развијемо ли детерминанту на левој страни добијамо тражени услов опет у облику (20).

III. Асимптоте.

181. Дефиниција. — *Асимптотом коничног пресека*

$$2\,f(x, y) \equiv Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0 \tag{1}$$

назива се тангента која додирује тај пресек у бескрајно удаљеној тачки.

Узмимо праву

$$y = mx + n \tag{2}$$

која треба да додирује пресек (1) у бесконачности. Видели смо у претходном одељку II-ге Главе (n^0 180) да тачке пресека линија (1) и (2) одређује једначина

$$Px^2 + 2\,Qx + R = 0, \tag{3}$$

где су уведене ознаке

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv A + 2\,Bm + Cm^2,\\ Q &\equiv (B + Cm)\,n + Em + D,\\ R &\equiv Cn^2 + 2\,En + F.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Услов додира линија (1) и (2) изражава се једнакошћу

$$Q^2 - PR = 0. \tag{5}$$

Пошто се тачка додира налази у бесконачности, то један од корена једначина (3) мора бити бесконачан. Значи мора постојати једнакост

$$P = 0, \tag{6}$$

пошто би само под овим условом једначина (3) могла бити задовољена за $x = \infty$.

Због овог накнадног услова за асимптоте, први услов, (5), даје

$$Q = 0. \tag{7}$$

182. Једначине асимптоте. — Оба коефицијента m и n асимптоте (2) задовољавају, према условима (6) и (7), једначине

$$A + 2\,Bm + Cm^2 = 0 \qquad (B + Cm)\,n + Em + D = 0. \tag{8}$$

Прва једначина у (8) даје

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{G}}{C}; \tag{9}$$

а друга, због тога, даје

$$n = \frac{H \mp E\sqrt{G}}{\pm C\sqrt{G}}. \tag{10}$$

Како обрасци (9) и (10) одређују две једначине (2), то сваки конични пресек има по две асимптоте. Код елипсе, за коју је, као што знамо, $G < 0$, обе асимптоте су имагинарне. Код хиперболе обе асимптоте су реалне. Најзад парабола, за коју је $G = 0$, има две асимптоте које се поклапају. Уједно се из обрасца (9) види, да су асимптоте параболе паралелне оси, али образац (10) показује да су асимптоте параболе и бескрајно удаљене, јер њихова ордината у почетку, n, постаје бесконачна.

Стављајући нађене вредности (9) и (10) за коефицијенте m и n у једначину (2) долазимо до једначине обеју асимптота, наиме

$$y = \frac{-B \pm \sqrt{G}}{C}\,x + \frac{H \mp E\sqrt{G}}{\pm C\sqrt{G}}. \tag{11}$$

183. Једначина скупа асимптота. — Једначине (11) могу се и овако написати

$$Bx + Cy + E = \pm\sqrt{G}\left(x + \frac{H}{G}\right),$$

могу се заменити једном једначином другог степена, ако се квадрирају бе стране ових једначина. На тај начин добија се једначина скупа обеју симптота у облику

$$(Bx+Cy+E)^2 = G\left(x+\frac{H}{G}\right)^2,$$

ли

$$Ax^2+2\,Bxy+Cy^2+2\,Dx+2\,Ey+\frac{2\,BDE-AE^2-CD^2}{G}=0\,. \qquad (11)$$

ко сталном члану додамо и одузмемо F, једначина (11) постаје

$$2f(x,y)+\frac{\Delta}{G}=0\,. \qquad (12)$$

обијени резултат можемо овако формулисати: *Једначина скупа обеју асимпота коничног пресека (1) добија се кад се његовој левој страни дода личина* $\frac{\Delta}{G}$.

И тако долазимо до закључка, да се средиште скупа обеју асимпта, тј. њихова тачка пресека, налази у средишту средишних коничних есека. То се види непосредно из тога, што се средиште криве (12) одреје помоћу истих једначина,

$$f'_x=0\,, \qquad f'_y=0\,,$$

је у исто време служе за одређивање средишта коничних пресека (1).

Према томе обе имагинарне асимптоте елипсе секу се у реалној чки — центру елипсе.

Асимптоте хиперболе исто тако секу се у њезином средишту.

Обрасци (9) и (10) показују да су асимптоте параболе паралелне ној оси и да се поклапају.

Применимо сад образац (12) на каноничку једначину елипсе и хирболе

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (13)$$

обе једначине овога облика имамо

$$G\equiv\Delta\equiv\mp\frac{1}{a^2b^2}\,, \qquad \frac{\Delta}{G}=1\,.$$

о додамо 1 левој страни једначине (13) добијамо једначину скупа асимпта у облику

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=0\,.$$

ема томе за једначине асимптота елипсе и хиперболе (13) налазимо

$$y=\pm\frac{b}{a}ix\,,$$

односно

$$y=\pm\frac{b}{a}x\,.$$

IV. Полови и поларе.

184. Хармониски коњуговане тачке. — Поменућемо (в. nº 9, стр. 25), пре свега, појам хармониски коњугованих тачака са две дате тачке. Узмимо две одређене тачке, M_0 и M, као основне. Друге две тачке, M_1 и M_2, узмимо на правој што спаја M_0 и M. За тачке M_1 и M_2 каже се да су хармониски коњуговане са датим тачкама, ако је испуњен услов

$$\frac{M_0M_1}{M_1M}:\frac{M_0M_2}{M_2M}=-1\,,$$

или

$$\frac{M_0M_1}{M_1M}=-\frac{M_0M_2}{M_2M}\,.$$

Означимо, у односу на извесни Декартов координатни систем, са x_0 и y_0, односно x, y, координате датих тачака, M_0 и M, а са x_i, y_i $(i=1,2)$ координате њиних хармониски коњугованих тачака M_i $(i=1,2)$.

Према познатим обрасцима је

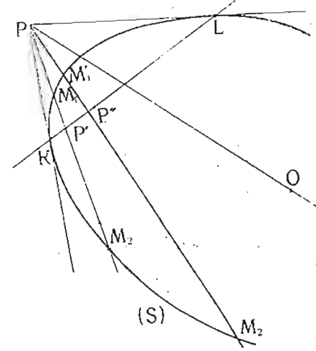
$$\left.\begin{array}{ll} x_i=\dfrac{x_0+\lambda_i x}{1+\lambda_i}\,, & y_i=\dfrac{y_0+\lambda_i y}{1+\lambda_i}\,, \\ \lambda_1+\lambda_2=0\,, & (i=1,2)\,. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Основна својства посматраних тачака ова су:

1º Све четири тачке леже на истој правој;

2º Једна од хармониски коњугованих тачака дели растојање између основних тачака унутрашњом поделом, а друга спољашњом;

3º Ако хармониски коњуговане тачке, према датим основним тачкама, узмемо за основне, првобитно основне тачке постају хармониски коњуговане према новим основним тачкама.



Сл. 103

Уведимо сад појам хармониски коњугованих тачака у односу на конични пресек. Узмимо две тачке (сл. 103)

$$M_1(x_1,y_1), \qquad M_2(x_2,y_2),$$

коничног пресека (S). Тачке његове сечице M_1M_2,

$$P(x_0,y_0)\,, \qquad P'(x,y)\,,$$

које су хармониски коњуговане са тачкама M_1 и M_2 зову се хармониски коњуговане према датом коничном пресеку (S).

185. Дефиниције поларе и пола. — Повуцимо кроз тачку P низ сечица коничног пресека (S), $PM_2, PM'_2, \ldots$

Поларом коничног пресека (S), у односу на пол P, зовемо геометриско место тачака хармониски коњугованих са полом P према коничном пресеку (S).

Лако је доказати да је полара права линија.

Претпоставимо да је конични пресек S одређен једначином

$$2f \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,. \tag{2}$$

Означимо са $P', P'', \ldots$ хармониски коњуговане тачке са тачком P, према коничном пресеку (2).

На основу треће од поменутих особина хармониски коњугованих тачака налазимо да су тачке пресека M_1 и M_2 хармониски коњуговане према тачкама P и P'.

Координате (1) тачке M_1, односно M_2 морају задовољавати идентички једначину (2), јер се обе тачке M_i налазе на коничном пресеку (2). Одатле добијамо идентичност

$$A(x_0 + \lambda_i x)^2 + 2B(x_0 + \lambda_i x)(y_0 + \lambda_i y) + C(y_0 + \lambda_i y)^2 +$$
$$+ 2D(x_0 + \lambda_i x)(1 + \lambda_i) + 2E(y_0 + \lambda_i y)(1 + \lambda_i) + F(1 + \lambda_i)^2 = 0.$$

Но иста једнакост може се и овако написати

$$K\lambda^2_i + 2L\lambda_i + N = 0, \tag{3}$$

где је стављено

$$K \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$
$$L \equiv Ax_0x + B(x_0x + y_0x) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F,$$
$$N \equiv Ax^2_0 + 2Bx_0y_0 + Cy^2_0 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Због услова друге врсте (1) које треба да задовоље оба корена, λ_1 и λ_2, једначине (3), коефицијент L мора се анулирати. Одатле следи једнакост

$$Ax_0x + B(x_0y + y_0x) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0. \tag{4}$$

Ово је линеарна једначина по координатама тачке P, и не зависи од положаја сечице PM_2. Према томе једначина (4) одређује геометриско место тачака P, тј. тражену полару, која се може краће написати овако

$$f'_{x_0}x + f'_{y_0}y + f'_1 = 0 \tag{5}$$

где су уведене из раније познате ознаке (n⁰ 157 стр. 201, n⁰ 179, стр. 234).

Добијена једначина поларе има облик једначине тангенте коничног пресека (2) у тачки (x_0, y_0). Једина разлика је у томе што се код поларе ова тачка не налази на кривој већ ван ње.

Једначина поларе (4) за пол $P(x_0, y_0)$ важи независно од тога, да ли се пол P налази у унутрашњости или ван криве S. Само у првом случају је очевидно да полара неће сећи криву S у реалним тачкама, јер хармониски коњугована тачка са тачком P, која се сада налази у оквиру тетиве M_1M_2 мора ову делити на спољашњи начин. На пр., све тетиве које пролазе кроз центар централног коничног пресека њима су преполовљене. Зато тачка хармониски коњугована са центром сваког дијаметра лежи у бескрајности. Значи, *полара центра је бескрајно удаљена права.*

За други пример узмимо једначину коничног пресека у облику

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Једначина поларе за жижу $F(k, 0)$, где је k растојање жиже од темена коничног пресека, гласи

$$p(x + k) + qkx = 0,$$

или

$$x = -\frac{pk}{p + qk}.$$

Сменимо ли у њој вредности p и q из образаца (3) (из n⁰ 151, стр. 189) у глави IX, једначина поларе постаје

$$x = -\frac{k}{e},$$

где је e ексцентрицитет посматраног коничног пресека, а једначина претставља његову директрису.

Напротив, ако пол P лежи ван коничног пресека онда га полара пресеца. На пр., *дијаметар претставља полару бесконачно удаљене тачке,* при чему овој хармониски коњугована тачка мора да полови тетиву сваке сечице. Пошто су све сечице паралелне, то је геометриско место њихових тетива пречник.

Проучимо, најзад, случај у коме је посматрани конични пресек скуп двеју правих, дакле кад се појављује у облику

$$2f \equiv LL_1 = 0,$$

при чему су, краткоће ради, уведене ознаке

$$L \equiv ax + by + c, \quad L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1.$$

Према томе добијамо

$$f'_{x_0} \equiv aL_{10} + a_1L_0,$$
$$f'_{y_0} \equiv bL_{10} + b_1L_0,$$
$$f'_1 \equiv cL_{10} + c_1L_0,$$

тако да једначина поларе (5) постаје

$$(aL_{10} + a_1L_0)x + (bL_{10} + b_1L_0)y + (cL_{10} + c_1L_0) = 0.$$

Ова се може написати, краће, овако

$$L_{10}L + L_0L_1 = 0.$$

Одавде следи да тражена полара пролази кроз тачку пресека правих $L = 0$ и $L_1 = 0$. Према томе тражена полара претставља одређену праву, сем у случају када се пол налази у тачки пресека обе наведене праве, јер тада се L_0 и L_{10} анулирају и једначина тражене поларе постаје неодређена.

186. Изналажење пола за дату праву. — Узмимо једначину праве у облику

$$mx + ny + k = 0. \tag{6}$$

Координате пола x_0, y_0 задовољавају једначину (5). Према томе, да би ове координате одређивале пол дате праве (6), њена једначина мора се поклапати са једначином (5). Зато морају постојати услови

$$\frac{f'_{x_0}}{m} = \frac{f'_{y_0}}{n} = \frac{f'_1}{k} = \lambda,$$

где је уведен помоћни параметар λ, или

$$f'_{x_0} = m\lambda, \quad f'_{y_0} = n\lambda, \quad f'_1 = k\lambda. \tag{7}$$

Скуп ове три једначине одређује координате x_0, y_0 траженог пола и вредност помоћног параметра λ, наиме

$$x_0 = -\frac{D_1}{D}, \quad y_0 = -\frac{D_2}{D}, \quad \lambda = -\frac{D_3}{D},$$

где D означава детерминанту

$$D \equiv \begin{vmatrix} A & B & m \\ B & C & n \\ D & E & k \end{vmatrix} = Hm + H'n - GK;$$

H, H′ и G имају раније уведене вредности (види n⁰ 155, стр. 194) глава X, а D_1, одн. D_2 и D_3 добијају се из D сменом елемената прве, одн. друге и треће колоне у D са познатим члановима једначина (7). Према томе приметимо да је

$$D_3 = \Delta,$$

где је Δ дискриминанта коничног пресека (2).

Из ових образаца се види да координате траженог пола имају одређене коначне вредности, ако је

$$D \gtrless 0.$$

У супротном случају имамо

$$Hm + H'n - GK = 0, \tag{8}$$

или

$$-m\frac{H}{G} - n\frac{H'}{G} + K = 0.$$

Пошто су $-\frac{H}{G}, -\frac{H'}{G}$ координате средишта средишних коничних пресека, овај услов показује да се то средиште налази на правој (6), тј. она игра улогу пречника посматраног коничног пресека. И тако долазимо до закључка,

да се пол пречника средишног коничног пресека налази у бесконачности.

Сличан закључак се добија и у друга два случаја за $G = 0$, где је $A = \frac{B^2}{C}$, смењујући вредности H и H′, услов (8) постаје

$$H\left(m - \frac{B}{C}n\right) = 0.$$

Ако је $H \gtrless 0$, $\Delta \gtrless 0$, конични пресек (2) претставља параболу, а посматрана права (6) паралелну оси параболе. Али под условима $H = 0, G = 0$, мора бити $H' = 0$ и $D = 0$. Према томе посматрани конични пресек претставља две паралелне праве.

187. Особине поларе. — Из једначине поларе (5) следи да је њен коефицијент правца

$$m = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}. \tag{9}$$

Доказаћемо да:

1⁰ полара је паралелна тетивама, коњугованим са пречником који пролази кроз пол.

Једначина пречника коњугованог са тетивама правца n је

$$f'_x + n\, f'_y = 0. \tag{10}$$

Ако пречник (7) пролази кроз пол P, његове координате x_0, y_0 морају идентички задовољавати једначину (10). Одатле се добијају идентичности

$$f'_{x_0} + n\, f'_{y_0} = 0, \quad n = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}.$$

Према томе коефицијент n је заиста једнак вредности (9).

2⁰ полара је тетива која пролази кроз тачке додира обеју тангената повучених из пола на тај конични пресек.

Означимо са a_i и b_i $(i = 1, 2)$ координате тачака N_i пресека поларе N_1N_2 са кривом, $N_2N'_1N_1N'_2$, коју ћемо кратко означити са S (сл. 104). Према томе добијају се идентичности

$$\left.\begin{array}{c} Ax_0a_i + B(y_0a_i + x_0b_i) + Cy_0b_i + D(a_i + x_0) + E(b_i + y_0) + F = 0, \\ (i = 1, 2). \end{array}\right\} \tag{11}$$

Али ове идентичности могу се протумачити и на други начин, као резултат смене координата x_0, y_0 пола P у једначини

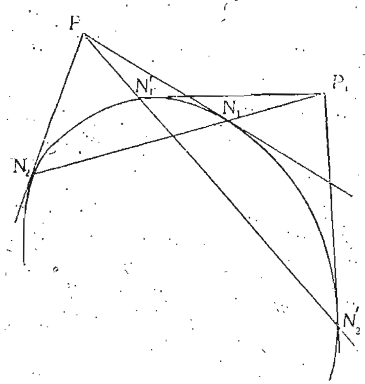
$$\left.\begin{array}{c} Aa_ix + B(a_iy + b_ix) + Cb_iy + D(x + a_i) + E(y + b_i) + F = 0, \\ (i = 1, 2). \end{array}\right\} \tag{12}$$

Међутим ове једначине одређују тангенте коничног пресека S у тачкама (a_i, b_i).

Према томе идентичности (11) показују да обе тангенте (12) пролазе кроз пол $P(x_0, y_0)$.

Наведене особине поларе могу се узети као њена дефиниција. Полазећи од овакве дефиниције поларе лако је увести ранију њену дефиницију, као и поменуте особине полара.

188. Особине коњугованих полара. — Лако је доказати следеће особине полара:



Сл. 104

1° *Ако полара, са полом* P, *пролази кроз тачку* P_1, *полара овог пола,* P_1, *пролази кроз тачку* P (сл. 104).

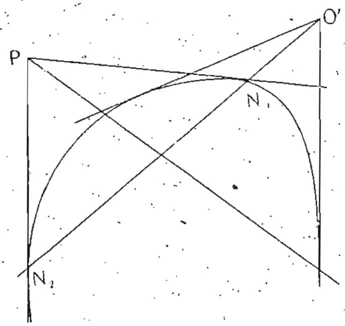
Заиста, ако полара N_1N_2 пролази кроз тачку P_1, њене координате идентички задовољају услов

$$\left.\begin{aligned} &Ax_0x_1 + B(y_0x_1 + x_0y_1) + Cy_0y_1 + \\ &+ D(x_1 + x_0) + E(y_1 + y_0) + F = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Ова идентичност доказује да се тачка $P(x_0, y_0)$ налази на правој

$$Ax_1x + B(x_1y + xy_1) + Cy_1y + $$
$$+ D(x_1 + x) + E(y_1 + y) + F = 0 .$$

Ово је међутим једначина поларе N_1N_2' пола P_1, која, према идентичности (13), пролази тачку $P(x_0, y_0)$.



Сл. 105

2° *Ако права пролази кроз дату тачку* $O'(x', y')$ *њен пол* $P(x_0, y_0)$ *налази се на полари пола* O'.

Овај став је обрнут од претходног. Доиста, претпоставимо да права N_1N_2 (сл. 105) пролази кроз тачку O'; њена ће једначина бити

$$y - y' = m(x - x'). \quad (14)$$

Међутим једначина поларе пола $P(x_0, y_0)$ је

$$Ax_0x + B(y_0x + x_0y) + Cy_0y + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0. \quad (15)$$

Пошто обе једначине (14) и (15) треба да претстављају исту праву, морају постојати размере

$$\frac{Bx_0 + Cy_0 + E}{1} = \frac{Ax_0 + Bx_0 + D}{m} = \frac{Dx_0 + Ey_0 + F}{-y' + mx'} .$$

Прве две од ових дају

$$m = -\frac{Ax_0 + By_0 + D}{Bx_0 + Cy_0 + E} = -\frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}} .$$

А прва и трећа размера, с обзиром на добијену вредност за m, дају једнакост

$$\left(y' + \frac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}x'\right)f'_{y_0} + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 ,$$

или

$$f'_{x_0}x' + f'_{y_0}y' + f'_1 = 0 .$$

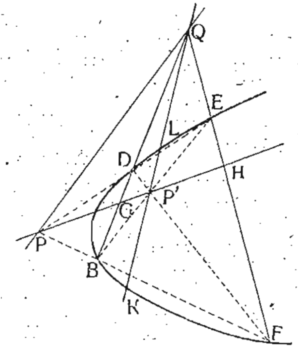
Ова једнакост може се и овако написати

$$Ax'x_0 + B(y'x_0 + x'y_0) + D(x' + x_0) + E(y' + y_0) + F = 0 ,$$

одакле се види да се тачка $P(x_0, y_0)$ заиста налази на полари тачке $O'(x', y')$.

Две праве зову се *коњугованим поларама* према датом коничном пресеку, ако пол сваке од њих лежи на другој правој. Тако, на пр., из претходних примера следи, да су сечица и пречник који полови његову тетиву *коњуговане поларе*. На исти начин и коњуговани пречници претстављају *коњуговане поларе*. Фокална оса коничног пресека и директриса такође су коњуговане поларе.

189. Конструкција поларе и тангенте само лењиром. — Лако је конструисати полару датог пола само помоћу лењира. Заиста, повуцимо из пола P (сл. 106) две произвољне сечице, PE и PF, коничног пресека EDBF. Спојимо ли унакрст тачке њихова пресека добијамо тетрагон (види стр. 122, Глава IV. n° 101) са теменима P, B, P', D, E и F. На основу особина дијагонала тетрагона, прамен зракова QP, QB, QK и QF пресеца сваку од тетива, DE и BF, у тачкама хармониски коњугованим са тачком P, односно темена посматраних тетива. Према томе, сечица KL, која пролази кроз тачке Q и P', *полара је пола* P. Њена конструкција изводи се само помоћу лењира.



Сл. 106

Раније је било доказано (в. n° 187, 2°, стр. 243) да је полара тачке P тетива додира KL тангената криве, повучених из пола. Користећи се тиме, могуће је повући тангенте на дати конични пресек из дате тачке P искључиво употребом лењира. Заиста, спајањем тачке P са тачкама K и L добијамо тражене тангенте.

190. Аутополарни троугао. — Вратимо се уоченом коничном пресеку EDBF (сл. 106). Према особини узајамности јасно је да је права PP' *полара пола* Q, односно уоченог коничног пресека. Најзад, пошто поларе тачке P и Q пролазе кроз тачку P', полара ове последње мора пролазити кроз њихове полове, тј. претставља праву PQ. Разумљиво је да ова расуђивања важе и у случају када се пол налази у унутрашњости криве.

Троугао $\Delta PP'Q$, чије стране претстављају поларе супротних темена у односу на дати конични пресек, зове се *аутополарни* или *коњуговани* са датом кривом. Обратно, ова крива зове се *коњугована* са поменутим троуглом. На пр., два коњугована дијаметра и бесконачно удаљена права образују аутополарни троугао.

191. Појам обвојнице. — Посматрајмо једначину криве линије у бл́ику

$$f(x, y, a) = 0, \tag{16}$$

;е a претставља променљив параметар. Кад се овај мења, за сваку нову егову вредност добија се одређена нова крива. Скуп ових кривих прет-тавља низ, или тзв. ф а м и л и ј у к р и в и х одређених једначином (16).

Ако ове криве додирују једну исту криву, каже се да низ кривих 6), за променљиве вредности параметра a, има о б в о ј н и ц у.

Као пример можемо навести низ кругова истог полупречника чија су)едишта распоређена дуж једне праве у равни. Обвојница дотичних кру-)ва претставља скуп двеју паралелних правих које их додирују.

Исто тако низ тангената у узастопним тачкама криве има обвојницу)ја је у овом случају претстављена дотичном кривом.

Да бисмо нашли обвојницу кривих (16), претпоставимо да она постоји означимо да она додирује, поред криве (16), још и другу криву овог низа,)ја одговара вредности $a + \Delta a$ параметра a, дакле и криву

$$f(x, y, a + \Delta a) = 0. \tag{17}$$

ретпоставимо да се криве (16) и (17) секу у заједничкој тачки M′. Тада : може, место једначине (17), увести једначина

$$\frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0.$$

ва одређује криву која такође пролази кроз тачку M′. Кад Δa тежи нули, ічка M′ тежи извесном граничном положају M(x, y), и последња једна-іна постаје

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0 \tag{18}$$

обијена једнакост (18) претставља последицу уведене претпоставке да по-оји обвојница фамилије линија (16).

Резултат елиминације параметра a из једначина (16) и (18) одређује ражену обвојницу фамилије кривих (16).

Полазећи од једначине (18) лако је, и обрнуто, доказати став да се свакој тачки, која истовремено припада датој кривој фамилије (16) и њеној војници, њихове тангенте поклапају. Заиста, пошто се параметар a, у дначини (16), при одређивању тражене обвојнице мора сматрати као функ-ија координата x и y, одређена једначином (18), то диференцирањем по и y једначине (16) добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{da}{dx} = 0, \tag{19}$$

е ознака $\frac{da}{dx}$ претставља потпуни извод a по x. Али према услову (18) етходна једначина постаје

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \tag{20}$$

тј. добија облик изводне једначине, која одређује угловни коефицијент тангенте сваке од кривих (16). А овај се очевидно поклапа са вредношћу y', која се одређује из једначине (19) за угловни коефинијент обвојнице у истој тачки.

Наведени резултат не постоји у оним изузетним случајевима за тачке, где једначина (20) не може да одреди одговарајућу вредност y', кад су изводи $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ једнаки нули. Но ове изузетне тачке ипак припадају обвојници, јер испуњавају услове (16) и (18)

192. Узајамно поларне слике. — Појам узајамних полара, према датом коничном пресеку, проширује се и на било коју геометриску слику. Узмимо неку алгебарску криву линију (C) степена m (слика 107), чија је једначина

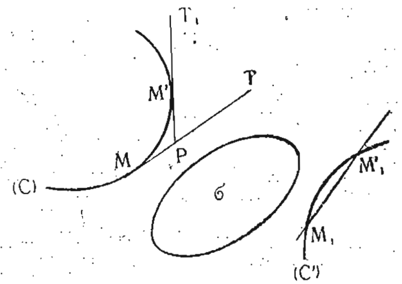
$$f(x, y) = 0,$$

а у хомогеним координатама

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{21}$$

Из тачке M(x, y, z) на њој повуцимо тангенту MT и означимо са M$_1(x_1, y_1, z_1)$ пол дотичне тангенте, према извесном коничном пресеку (σ).

Због особина узајамних полара, полара тачке M пролазиће кроз тачку M$_1$. Означимо ли са M′T$_1$ тангенту у тачки M′ дате криве (C) и са M$_1$′ пол ове тангенте, то ће полара тачке M′ пролазити кроз тачку M$_1$. Из теорије узајамних полара следи да полара тачке P, пресека обеју тангената MT и M′T$_1$, претставља праву p која пролази кроз полове M и M′ дотичних тангената.



Сл. 107

Кад M′ тежи тачки M, тачка P поклапа се са њима, а M′ тежи тачки M, тако да полара p тежи ка положају тангенте у M, геометриског места тачака M, које одређује нову криву линију (C′). Ова је обвојница полара тачака криве (C) и претставља узајамно поларну криву, према коничном пресеку (σ), са датом кривом (C). У том случају тачке M и M$_1$ одговарају услову, да је тангента у једној од њих полара друге тачке.

Одавде се добијају аналитички обрасци за трансформацију криве (C) у (C′).

Заиста, означимо са

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{22}$$

једначину датог коничног пресека (σ) који се зове д и р е к т о р н о м к р и в о м и служи за одређивање полара тачака извесне криве. Једначина тангенте криве (22) у тачки (x, y, z) има за једначину

$$\varphi'_x X + \varphi'_y Y + \varphi'_z Z = 0,$$

де X, Y, Z означавају текуће координате. С друге стране, једначина поларе ачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ према директорној кривој (22) гласи

$$\Phi'_{x_1} X + \Phi'_{y_1} Y + \Phi'_{z_1} Z = 0.$$

Іошто обе једначине претстављају исту праву, морају постојати једнакости

$$\frac{\Phi'_{x_1}}{\varphi'_x} = \frac{\Phi'_{y_1}}{\varphi'_y} = \frac{\Phi'_{z_1}}{\varphi'_z}. \tag{23}$$

ко се сад вратимо Декартовим координатама, добијамо две једначине змеђу координата x, y и x_1, y_1. Елиминишемо ли координате x и y из једнаина (21) и из ове две једначине (23), добићемо једначину

$$\varphi(x_1, y_1) = 0$$

а криву (C′), која је узајамна полара са датом кривом (C). Узмимо као ример једначину елипсе у правоуглом координатном систему,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{24}$$

једначину директорног коничног пресека у облику круга

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = 1.$$

Према реченом имаћемо у овом случају

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0,$$

$$\Phi \equiv (x - \alpha z)^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

тавимо ли у услове (23) $z = z_1 = 1$, они постају

$$\frac{a^2(x_1 - \alpha)}{x} = \frac{b^2 y_1}{y} = \frac{\alpha(x_1 - \alpha) + 1}{1}.$$

датле следи

$$x = \frac{a^2(x_1 - \alpha)}{\alpha(x_1 - \alpha) + 1}, \qquad y = \frac{b^2 y_1}{\alpha(x_1 - \alpha) + 1}.$$

мењујући добијене вредности за x и y у једначини дате елипсе (24), наазимо њену узајамно поларну криву

$$(a^2 - \alpha^2) x_1^2 + b^2 y_1^2 + 2\alpha(-a + \alpha - 1) = (\alpha^3 + 1)^2.$$

рема томе је

$$\Delta \equiv -b^2 [(a^2 - \alpha^2)(\alpha^2 + 1)^2 + \alpha^2(\alpha^2 - a - 1)^2]; \quad G \equiv b^2(\alpha^2 - a^2).$$

ко је

$$\alpha < a,$$

обијена крива претставља елипсу.

За вредност

$$\alpha = a,$$

нађена узајамна поларна крива је парабола.

Најзад, за

$$\alpha > a,$$

посматрана крива претставља хиперболу.

VI. Жиже и директрисе.

193. Основни обрасци. — Ограничимо се на праволиниски правоугли координатни систем. У књигама се обично доказује да се тражене жиже налазе у пресеку двеју такозваних фокалних хипербола*. А када се постави питање о жижама и директрисама појединих коничних пресека, обично се прелази на њихове једначине каноничког облика.

Међутим може се проблем решити и полазећи од опште једначине коничних пресека

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

Узмимо зато једначину директрисе

$$m_1 x + n_1 y + k_1 = 0, \tag{2}$$

која одговара жижи чије су координате α, β. Према томе је посматрани конични пресек (1) одређен и једначином

$$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = (mx + ny + k)^2,$$

где се коефицијенти m, n и k одређују на познати начин, помоћу m_1, n_1, k_1 и ексцентрицитета (глава IX стр. 189, nº 151).

Тако се добијају услови

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 - m^2}{A} = \frac{-mn}{B} = \frac{1 - n^2}{C} = \frac{-(\alpha + mk)}{D} = \frac{-(\beta + nk)}{E} &= \\ = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}{F} &= \frac{1}{s}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где је уведена ознака $\frac{1}{s}$ за вредности посматраних размера.

Систем (3) садржи пет различитих једначина за одређивање пет величина

$$m, \ n, \ k, \ \alpha, \ \beta, \tag{4}$$

а s означава помоћни параметар. Прве три размере (3) дају

$$m^2 = 1 - \frac{A}{s}, \qquad n^2 = 1 - \frac{C}{s}, \tag{5}$$

* в. Б. Гавриловић, Аналитична Геометрија. Београд 1896, стр. 514, nº 232.

$$mn = -\frac{B}{s} \tag{6}$$

иминацијом m и n добија се квадратна једначина, т. зв. једначина са s

$$s^2 - Ss - G = 0, \tag{7}$$

: S и G означавају поменуте инваријанте

$$S \equiv A + C, \qquad G \equiv B^2 - AC.$$

194. Средишне криве. — Испитаћемо, прво, случај средишних кри-
(за које је

$$G \gtrless 0.$$

начина (7) даје за корене s две вредности, које ћемо означити

$$s = \frac{1}{2}(S \pm R), \tag{8}$$

: је уведена ознака

$$R \equiv \sqrt{S^2 + 4G} = \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}. \tag{9}$$

аком корену s одговарају по две вредности m и n, према једначинама
, које се због услова (6) изражавају

$$m = \pm\sqrt{1 - \frac{A}{s}}, \qquad n = \mp\sqrt{1 - \frac{C}{s}}, \tag{10}$$

: су знаци супротни.

Коефицијент k одређује се из последње размере (3),

$$k^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{F}{s} = 0. \tag{11}$$

авимо у ову једначину вредности α и β из четврте и пете размере (3)

$$\alpha = -mk - \frac{D}{s}, \qquad \beta = -nk - \frac{E}{s}. \tag{12}$$

имајући у обзир да је, због образаца (5) и идентичности (7),

$$m^2 + n^2 - 1 = \frac{G}{s^2},$$

начина (11) је, пошто је $s \gtrless 0$, облика

$$Gk^2 + 2(Dm + En)sk + D^2 + E^2 - Fs = 0. \tag{13}$$

ема томе ћемо имати

$$k = \frac{-(Dm + En)s \pm R'}{G}, \tag{14}$$

где је

$$R' \equiv \sqrt{(Dm + En)^2 s^2 + FGs - (D^2 + E^2)G}.$$

Међутим из образаца (5) и (6) имамо

$$\left.\begin{aligned} m^2 s &= s - A, \\ n^2 s &= s - C, \\ mn\, s &= \;\; - B. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Због тога R' добива облик

$$R' \equiv \sqrt{(FG - 2BDE - AD^2 - CE^2)s + (D^2 + E^2)(s^2 - G)}.$$

А услед идентичности (7) овај израз постаје

$$R' \equiv \sqrt{-\Delta s}, \tag{16}$$

где је Δ дискриминанта једначине (1).

Испитајмо, даље, колико има добивених различитих вредности за коефицијенте директриса m, n и k.

Обрасци (10) одређују по четири различите вредности за m и за n. Образац (14) даје осам вредности за k. Уствари место осам различитих директриса добијамо свега четири, јер су њихове једначине хомогене по m, n и k. Заиста све вредности коефицијената могу се изразити, кратко, помоћу ове таблице

m	n	k
$+\sqrt{1-\frac{A}{s}}$	$-\sqrt{1-\frac{C}{s}}$	$\frac{-(Dm+En)s + \sqrt{-\Delta s}}{G}$
$+\sqrt{1-\frac{A}{s}}$	$-\sqrt{1-\frac{C}{s}}$	$\frac{-(Dm+En)s + \sqrt{-\Delta s}}{G}$
$-\sqrt{1-\frac{A}{s}}$	$+\sqrt{1-\frac{C}{s}}$	$\frac{-(Dm+En)s - \sqrt{-\Delta s}}{G}$
$-\sqrt{1-\frac{A}{s}}$	$+\sqrt{1-\frac{C}{s}}$	$\frac{-(Dm+En)s - \sqrt{-\Delta s}}{G}$

(17)

где су вредности m и n, у трећој колони, исте као и у двема првим исте врсте, и где s добија по две различите вредности (8). Очевидно је да се обрасци прве и четврте врсте, као и обрасци друге и треће врсте разликују само знаком.

Сменимо ли свих осам нађених вредности m, n и k у изразе за координате (12) одговарајућих жижа, добијамо свега четири различите тачке, чије су координате, према обрасцима (7) и (15),

$$\alpha = x_0 \mp \frac{m\sqrt{-\Delta s}}{G}, \qquad \beta = y_0 \mp \frac{n\sqrt{-\Delta s}}{G}, \tag{18}$$

где x_0 и y_0 означавају координате средишта посматраног коничног пресека (в. n⁰ 157 стр. 201); а двоструки знаци одговарају знацима у обрасцу (14) за вредност k.

Таблица (17) показује да су паралелне обе директрисе које одговарају истој вредности корена s. Према томе, сваки средишни конични пресек има по два скупа паралелних директриса. Свакоме скупу одговарају по две жиже, симетричне према средишту посматране криве. Предност добијених образаца састоји се у томе, што се помоћу њих може непосредно решити питање: колико и каквих жижа и директриса имају поједини конични пресеци?

У ту сврху уврстимо, прво, вредности s, дате изразима (8), у обрасце (17) и (18). Напишимо засебно елементе од којих сваки одређује скуп од по две директрисе и њихове жиже; означићемо их са I и II:

I	m	$\sqrt{\dfrac{-(A-C)+R}{S+R}}$	— „ —
	n	$-\sqrt{\dfrac{A-C+R}{S+R}}$	— „ —
	k	$\dfrac{-(Dm+En)s+\sqrt{-\dfrac{\Delta}{2}(S+R)}}{G}$	$\dfrac{-(Dm+En)s-\sqrt{-\dfrac{\Delta}{2}(S+R)}}{G}$
	α	$x_0-\dfrac{1}{G}\sqrt{(A-C-R)\dfrac{\Delta}{2}}$	$x_0+\dfrac{1}{G}\sqrt{(A-C-R)\dfrac{\Delta}{2}}$
	β	$y_0+\dfrac{1}{G}\sqrt{-(A-C+R)\dfrac{\Delta}{2}}$	$y_0-\dfrac{1}{G}\sqrt{-(A-C+R)\dfrac{\Delta}{2}}$
II	m	$\sqrt{\dfrac{-(A-C)-R}{S-R}}$	— „ —
	n	$-\sqrt{\dfrac{A-C-R}{S-R}}$	— „ —
	k	$\dfrac{-(Dm+En)s+\sqrt{-\dfrac{\Delta}{2}(S-R)}}{G}$	$\dfrac{-(Dm+En)s-\sqrt{-\dfrac{\Delta}{2}(S-R)}}{G}$
	α	$x_0-\dfrac{1}{G}\sqrt{(A-C+R)\dfrac{\Delta}{2}}$	$x_0+\dfrac{1}{G}\sqrt{(A-C+R)\dfrac{\Delta}{2}}$
	β	$y_0+\dfrac{1}{G}\sqrt{-(A-C-R)\dfrac{\Delta}{2}}$	$y_0-\dfrac{1}{G}\sqrt{-(A-C-R)\dfrac{\Delta}{2}}$

Посматрајмо сад елипсу која одговара условима

$$\Delta \gtrless 0, \qquad G < 0.$$

Она је реална када Δ и S имају супротне знаке.

Ако се још узму у обзир оба обрасца (9), који дају вредност за R, види се да је

$$|S| > R > |A-C|.$$

Због тога су бројитељи под знаком корена, у изразима m, n и k, код скупа I позитивни, а код II негативни. Међутим именитељи истих образаца бивају или позитивни или негативни, према знаку инваријанте S. Одатле се закључује да је од два скупа I и II паралелних директриса, увек један реалан, а други имагинарно коњугован. Пошто смо у закључцима пошли од претпоставке да Δ и S имају различите знаке, значи да реалним директрисама одговарају реалне жиже, а имагинарним имагинарне.

У случају имагинарне елипсе, тј. када су Δ и S истог знака, коефицијенти m и n скупова директриса I и II два су реални, а два имагинарни, док су сва четири коефицијента k увек имагинарна.

Међутим две директрисе са три имагинарна коефицијента реалне су, јер се у њима i скраћује. Што се тиче жижа, добијамо да имагинарним директрисама одговарају имагинарне жиже, а реалним реалне.

Посматрајмо случај хиперболе, где је

$$\Delta \gtrless 0, \quad G > 0.$$

Према првом обрасцу (9), вредност инваријанте S је у овом случају мања од R. Због тога су све четири вредности m и n у таблицама I и II увек реалне. Што се тиче одговарајућих вредности коефицијента k, оне зависе од знака Δ. Две вредности k у I су реалне, кад је Δ негативна величина, а у II имагинарне кад је Δ позитивна величина и обрнуто. Према томе хипербола има увек две реалне паралелне директрисе са реалним жижама и две имагинарне паралелне директрисе са имагинарним жижама.

195. Криве без средишта. — Уведимо, најзад, претпоставку

$$\Delta \gtrless 0, \quad G = 0,$$

којој одговарају параболе.

Једначине (5) и (6) дају у том случају за одређивање вредности s само линеарну једначину, тако да s добија једну једину вредност S, која не може бити једнака нули, јер би онда било

$$A^2 + B^2 = 0.$$

Међутим A и B су реалне величине и различите од нуле. Према томе добијамо непосредно

$$m = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad n = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$k = \pm\frac{(D^2+E^2-FS)\sqrt{C}}{2(CD-BE)\sqrt{S}},$$

где се горњи и доњи знаци респективно узимају.

Према томе ако изрази m, n, k одређују по две различите вредности ипак се добија само једна директриса, јер обе одговарајуће једначине одређују исту праву линију.

Што се тиче жижа, обрасци (12) одређују у овом случају само едну тачку.

Најзад, ако узмемо у обзир познату идентичност

$$\mathrm{CD} - \mathrm{BE} = \pm \sqrt{-\mathrm{C}\Delta}, \tag{19}$$

де се узима само један знак, као и горе имамо

$$k = \pm \frac{\mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 - \mathrm{FS}}{2\sqrt{-\mathrm{S}\Delta}}, \tag{20}$$

де се знак одређује према обрасцу (19).

Добијени образац (20) доказује, да су одговарајућа директриса и кижа стварне за параболу, јер S и Δ имају увек различите знаке (в. n⁰ 160 тр. 206).

VII. Тангенцијалне координате.

196. Дефиниција. — Свака права линија у односу ма на који праолиниски координатни систем може се претставити једначином, линеарном нехомогеном по текућим координатама, у облику

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{1}$$

коефицијенте u и v у њој изражавамо преко ових или оних параметара праве иније, што зависи од врсте координатног система који употребимо. Тако, а пр., за сваки праволиниски систем бројеви u и v реципрочни су по веичини и супротни по знаку бројевима који претстављају дужине које тсеца да а права линија на координатним осама. Ако је праволиниски истем правоугли, израз $-\frac{u}{v}$ претставља коефицијент правца наше праве. ошто положај њен зависи од вредности њених параметара, јасно је да се ременом коефицијената u и v мења и положај праве у равни. Према томе, ао што два броја одређују положај тачке у равни и зову се координате тачке, тако се и коефицијенти u и v једначине праве линије (1) зову *о р д и н а т е п р а в е л и н и ј е* или *т а н г е н ц и ј а л н е к о о р д и н а т е* у звни. Ако су, дакле, x и y у једначини (1) сталне, а u и v промењиве еличине, једначина одређује у тангенцијалним координатама скуп свих равих линија што пролазе кроз дату тачку (x, y), или т. зв. прамен правих оје пролазе кроз ту тачку, или, најзад, једначину тачке у *т а н г е н ц и ј а л и м к о о р д и н а т а м а*, односно у *к о о р д и н а т а м а п р а в е л и н и ј е*.

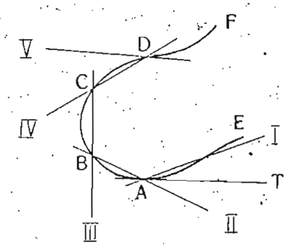
У сваком координатном систему права линија се изражава једначиом, а тачка се одређује координатама. Међутим у тангенцијалним координатама права нема једначине, већ се она одређује помоћу својих координата u и v (у односу на дати праволиниски координатни систем), а тачку (x, y) претстављамо једначином (1), линеарном у односу на тангенцијалне оординате.

197. Геометриско тумачење једначина у тангенцијалним координатама. — Посматрајмо сад функционалну зависност

$$\Phi(u, v) = 0. \tag{2}$$

Она даје за сваку вредност једне координате праве одређену вредност друге координате. Скупу ма каквих вредности обеју координата одговара одређена права у равни. Према томе једначина (2) одређује безброј правих линија у равни, које се, уопште, могу и међусобно сећи.

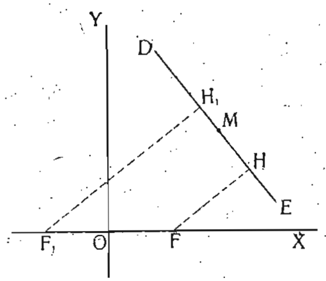
Претпоставимо, на пр. (сл. 108), да се праве I, II, . . . V, . . . , одређене једначином (2), секу у тачкама A, B, C, D, ... Ако је у одређеним границама функција $\Phi(u, v)$ непрекидна, онда постоји неограничен број правих линија одређених једначином (2). Према томе тачке пресека узастопно суседних правих линија распоређене су посве близу, скоро једна до друге. Геометриско место ових тачака одређује непрекидну криву линију, EABCDF, која је геометриски претставник дате једначине (2).



Сл. 108

Посматрајмо сад једну од правих одређену једначином (2), на пр., праву (II). Она сече криву у тачкама A и B, значи права (II) је сечица уочене криве. Кад број правих линија бескрајно расте, тачке пресека, наиме A и B, праве (II) са кривом поклапају се и тада сечица (II) прелази у тангенту T на кривој у тачки A. Стога крива линија одређена једначином (2) додирује све праве линије (1) које одговарају вредностима u и v у једначини (2), добијена крива EABCDF претставља у том случају обвојницу правих линија (1) за вредности параметара u и v, које задовољавају услов (2).

Претходна расуђивања показују на који се начин може једначина криве у тангенцијалним координатама претворити у једначину исте криве у Декартовим координатама и обратно. Доиста, свакој тачки A криве одговара одређени положај тангенте AT, те, према томе, мора постојати веза између Декартових координата, x и y, тачке A и тангенцијалних координата, u и v, тангенте криве у истој тачки. Тражена веза се добија на два начина: или помоћу услова према коме се тачке пресека сечице и криве линије поклапају, или на основу изложене теорије обвојница кривих линија.



Сл. 109

198. Примери. — Поставићемо, примера ради, једначину криве која претставља обвојницу правих линија, за које је производ растојања од две дате тачке константан. Нека F и F_1 буду ове дате тачке (сл. 109).

Узмимо праву F_1F за осу X, а средину између датих тачака за координатни почетак O. Осу OY поставимо управно на осу OX. Означимо са $2c$ растојање између тачака F_1 и F, дакле $F_1F = 2c$.

Нека M буде тачка тражене криве линије са координатама x и y, и то тачка у којој је права (1) DE додирује.

За дужине нормала, FH и F_1H_1, повучених из тачака $F(c,0)$ и $F_1(c,0)$ на праву ED дату једначином (1) имамо

$$FH = \mp \frac{uc+1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad F_1H_1 = \pm \frac{uc-1}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

За знаке у овим изразима важе ова упутства: ако се тачке F_1 и F и координатни почетак налазе са исте стране, узима се горњи, а ако се налазе на супротним странама узима се доњи знак. Према томе за обе претпоставке добијамо исти услов

$$\frac{u^2c^2-1}{u^2+v^2} = \mp b^2,$$

и

$$(c^2 \pm b^2)\,u^2 \pm b^2v^2 = 1, \tag{3}$$

где је b^2 дато.

Да бисмо изразили једначину криве у Декартовим координатама треба сагласити да се координате u и v, тачака пресека праве линије (1) са кривом (3), одређују једначинама (1) и (3), при чему је (1) првог а (3) другог степена. Значи да одређују два корена који одговарају тачкама пресека. Да би се ове тачке поклопиле, треба да су корени једнаки. Зато, ако елиминишемо, на пр., v из једначина (1) и (3) налазимо

$$(c^2 \pm b^2)\,y^2u^2 \pm b^2(1+ux)^2 = y^2,$$

и

$$[(c^2 \pm b^2)\,y^2 \pm b^2x^2]\,u^2 \pm 2b^2xu \pm b^2 - y^2 = 0.$$

Ова једначина треба да има два једнака корена. За то је услов

$$4\,\{\,b^4x^2 + (y^2 \mp b^2)\,[(c^2 \pm b^2)\,y^2 \pm b^2x^2]\,\} = 0,$$

и

$$y^2\,\{\,(c^2 \pm b^2)\,y^2 \pm b^2x^2 \mp b^2(c^2 \pm b^2)\,\} = 0.$$

Ако је $y \gtrless 0$, то постављени услов одређује посматрану криву у Декартовим координатама,

$$(c^2 \pm b^2)\,y^2 \pm b^2x^2 \mp b^2(c^2 \pm b^2) = 0,$$

и

$$\frac{x^2}{c^2 \pm b^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Горњи знак у овој једначини одговара услову да се тачке F и F_1 налазе са исте стране праве DE у односу на координатни почетак. Крива претставља тада елипсу са полуосама $\sqrt{c^2 \pm b^2}$ и b.

Ако права DE пролази између тачака F и F_1, добијамо једначину

$$\frac{x^2}{c^2-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Лако је доказати да је, у овоме случају, увек

$$b^2 < c^2,$$

јер је

$$b^2 = FH \cdot F_1H_1 < \overline{F_1K} \cdot \overline{KF},$$

где је K тачка пресека праве DE са осом x. Али како производ оба дела отсечка $2c$ има за највећу вредност c^2, то је

$$b^2 < c^2,$$

што ће рећи да добијена крива претставља хиперболу, чија је реална оса координатна оса OX.

Узмимо сад обрнути задатак: дата крива претстављена је једначином у Декартовим координатама,

$$f(x, y) = 0, \tag{4}$$

треба ову претворити у једначину са тангенцијалним координатама. Решимо једначине (1) и (4) по координатама x и y да бисмо добили тачке пресека праве (1) са кривом (4). Услов да се све тачке пресека поклапају и да је права тангента криве (4) претставља тражену једначину дате криве у тангенцијалним координатама.

Узмимо, на пр., једначину круга

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Извршимо у њој смену

$$y = -\frac{1+ux}{v},$$

и добијамо једначину

$$v^2x^2 + (1+x\,u)^2 = v^2r^2,$$

или

$$(v^2+u^2)\,x^2 + 2ux + 1 - v^2r^2 = 0.$$

Да би оба корена ове једначине по x била једнака треба да је задовољен услов

$$u^2 - (1 - v^2r^2)(v^2+u^2) = 0,$$

или

$$v^2\,[(u^2+v^2)\,r^2 - 1] = 0.$$

Ако је $v \gtrless 0$, тражена једначина постаје

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}.$$

199. Трансформација кривих. — У теорији обвојница коју смо раније изложили имамо општу методу за трансформације кривих линија.

Заиста, узмимо да је дата једначина криве (2) у тангенцијалним координатама. Доказали смо да је она обвојница правих (1), чија једначина зависи од два параметра, u и v. Према томе, да бисмо нашли једначину бвојнице у Декартовим координатама треба да елиминишемо параметре u v из једначина (1), (2) и помоћне једначине облика

$$\frac{\partial F}{\partial u} y - \frac{\partial F}{\partial v} x = 0 ,$$

дносно

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{y} . \tag{5}$$

'змимо, примера ради, општу алгебарску једначину другог степена по u и v,

$$A u^2 + 2 B u v + C v^2 + 2 D u + 2 E v + F = 0 . \tag{6}$$

)бележимо са 2λ вредност сваког од односа (5), тј. ставимо

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2\lambda x , \quad \frac{\partial F}{\partial v} = 2\lambda y ,$$

ıли

$$A u + B v + D - \lambda x = 0 , \quad B u + C v + E - \lambda y = 0 . \tag{7}$$

едначина (6)

$$(A u + B v + D) u + (B u + C v + E) v + D u + E v + F = 0$$

юстаје сад

$$\lambda (u x + v y) + D u + E v + F = 0 .$$

'зимајући у обзир једначину (1) добијамо

$$D u + E v + F - \lambda = 0 . \tag{8}$$

Путем елиминације трију непознатих u, v и $-\lambda$, из једначина (7), (8) и 1), долазимо до тражене једначине која се изражава помоћу детерминанте

$$\begin{vmatrix} A & B & D & x \\ B & C & E & y \\ D & E & F & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

која претставља криву (16) у Декартовим координатама. Детерминанта леве :тране добијене једначине позната је под називом *симетричне детерминанте*.

Да бисмо јој израчунали вредност, треба имати у виду да се у свакком њеном члану налази по један елемент сваког реда елемената, тј. колона ı врста. Према томе лако је развити ову детерминанту по елементима последње колоне и последње врсте заједно, те добијена једнакост постаје

$$A_1 x^2 + 2 B_1 x y + C_1 y^2 + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0 ,$$

тј. одређује криву другог степена, где се сви коефицијенти изражавају помоћу

минора детерминанте

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} .$$

Лако је доказати да се, и обратно, свака крива линија другог степена у Декартову координатном систему,

$$2\varphi(x, y) \equiv A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0 , \tag{9}$$

претвара, у тангенцијалним координатама, опет у једначину другог степена. Заиста, према теорији обвојница права (1) претставља тангенту криве (9), те су за сваку тачку (x, y) коефицијенти правца праве (1) и тангенте криве (9) једнаки. Обележимо са $2\varphi(x, y)$ леву страну једначине (9). Тада је коефицијент правца y' тангенте криве (9) дат обрасцем

$$y' = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} ,$$

а коефицијент правца праве (1) вредношћу

$$- \frac{u}{v} .$$

Тражени услов је, према томе,

$$\frac{u}{v} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} , \quad \text{или} \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{u} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{v} .$$

Означимо са 2μ вредности сваког од ових односа; дакле,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2 \mu u , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2 \mu v ;$$

или

$$A x + B y + D - \mu u = 0 , \quad B x + C y + E - \mu v = 0 . \tag{10}$$

Једначина (9) постаје у том случају

$$(A x + B y + D) x + (B x + C y + E) y + D x + E y + F = 0 ,$$

или

$$\mu (u x + v y) + D x + E y + F = 0 .$$

А ова, на основу једначине (1), постаје

$$D x + E y + F - \mu = 0 . \tag{11}$$

Елиминација x, y и μ из једначина (10), (11) и (1) даје

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$A'u^2 + 2\,B'uv + C'v^2 + 2\,D'u + 2\,E'v + F' = 0,$$

тј. претставља једначину другог степена у тангенцијалним координатама.

Из последњих примера може се извести закључак да је једначина коничног пресека — другог степена, како у тангенцијалним тако и у Декартовим координатама. Међутим овај закључак важи само за једначине другог степена, а не уопште за једначине ма ког степена. Заиста, видели смо напред да права линија нема једначине у тангенцијалним координатама, док се у Декартовим координатама она одређује једначином првог степена. Степен једначине криве линије у тангенцијалним координатама назива се класа линије. Према томе, може се рећи да права линија претставља криву линију првог степена, нулте класе.

Што се тиче коничних пресека, они, према горњем, претстављају криве линије другог степена, друге класе.

200. Начело дуалности. — Под начелом дуалности подразумева се особина геометриских слика, према којој је могућа узајамна замена појмова тачке и праве линије. На основу овог принципа изводе се нове теореме из теорема које се односе на тачке геометриских слика. Те нове теореме зову се узајамне (корелативне) теореме, које се односе на праве линије.

На особину дуалитета наилазимо већ код основних геометриских појмова. Тако, на пр., *права линија је одређена двема тачкама које она спаја*. Корелативна теорема каже да се *тачка одређује пресеком двеју правих линија*.

На свакој правој линији налази се безброј тачака. Обратно, *кроз сваку тачку пролази неограничен број правих линија*.

Из горе изложеног о претстављању кривих линија у тангенцијалним координатама излази да свака крива може бити одређена или као геометриско место тачака, или, како се то каже, као обвојница правих линија. При томе свака тангента дотичне криве пролази кроз њене две бескрајно блиске тачке; и обратно, две бескрајно блиске тангенте криве линије секу се у њеној тачки додира.

Најзад, може се рећи да принцип дуалитета омогућује удвајање броја ставова, замењујући у свакоме од њих тачке правим линијама или обратно.

VIII. Одређивање коничних пресека помоћу њихових елемената

201. Појам простих и многоструких елемената. — Уочимо једначину коничног пресека

$$2f \equiv Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Она садржи шест коефицијената. Значи да имамо свега пет различитих величина које претстављају односе ког било од пет коефицијената једначине (1) према преосталом, шестом. Према томе, одредити конични пресек (конструисати) значи, са гледишта Аналитичке геометрије, израчунати поменутих пет односа. Да би задатак био одређен потребно је дати елементе у довољном броју. За један елемент казаћемо да је прост, двојан или вишеструк према броју једначина којима је овај одређен. Тако, на пр., тачка или тангента претстављају, свака посебно, прост елемент коничног пресека. Стварно, стављајући координате дате тачке у једначину (1) добијамо једну везу између коефицијената. Стављајући у једначину тангенте угловни коефицијент и ординату дате тангенте у почетку добијамо исто тако једну везу између коефицијената једначине (1). Међутим центар је, очевидно, елемент другог реда. Дијаметар са коњугованим правцем тетиве — елемент је другог реда. Јер, ако изједначимо оба коефицијента једначине дијаметра са датим вредностима добићемо две везе између коефицијената једначине (1). Скуп тачке и тангенте која пролази кроз њу, асимптота, жижа или директриса претстављају по један елемент другог реда. Што се тиче жиже, или директрисе која њој одговара, две једначине (3) (n° 193, стр. 249) дају две везе између коефицијената једначине (1). Систем од два коњугована дијаметра или две осе претставља елемент трећег реда. Најзад, две асимптоте претстављају елемент четвртог реда.

Из наведеног следи да за одређеност задатка мора бити задато толико елемената, да збир њихових редова буде једнак броју непознатих коефицијената једначине (1). Према томе, централни конични пресек одређују елементи чији је збир редова једнак пет; за параболу или за једнакострану хиперболу тај збир једнак је четири, а за круг — три. При томе сви дати елементи морају бити различити и ни у ком случају не смеју се појединачно поклапати.

Ако је број задатих елемената недовољан за потпуно одређивање ма каквог коничног пресека, добија се систем или фамилија коничних пресека, који зависе од једног или неколико неодређених параметара.

---

202. Примери и задаци.

1. Наћи једначину криве другог степена која пролази кроз тачке (0,0) и (1,0), чија је једна директриса $x + y + 1 = 0$, а оса $x - y = 0$.

2. Наћи параболу која пролази кроз координатни почетак, а има директрису $x + y + 1 = 0$ и осу $x - y - 1 = 0$.

3. Поставити једначину параболе која додирује апсцисну осу у тачки (4,0), а ординатну осу у тачки (0,3).

4. Наћи конични пресек који пролази кроз четири дате тачке и додирује дату праву што пролази кроз једну од датих тачака.

5. Наћи конични пресек који пролази кроз три дате тачке и додирује две дате праве, од којих свака пролази кроз једну од датих тачака.

6. Наћи једначину коничног пресека који пролази кроз тачку (1,1), а има два пара коњугованих дијаметара: $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ и $x - y = 0$, $3x - 5y = 0$.

7. Наћи осе криве $(x - 1)\,y = 1$.

8. Наћи асимптоте криве

$$2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$$

9. Поставити једначину коничног пресека који пролази кроз координатни почетак и има асимптоте $x = a$, $y = b$.

10. Наћи на кривој $2x^2 + 5xy + 8y^2 - 7x + y = 0$ тангенту у крајевима њеног дијаметра, који пролази кроз координатни почетак.

11. Нацртати криву претстављену једначином $x^2 + y^2 = 4$, у косоуглом координатном систему са нормалним углом од 60^0.

12. Наћи геометриско место темена параболе чија је једначина

$$y^2 - 2axy + a^2x^2 - x = 0.$$

13. Наћи услове за поклапање центара кривих $y^2 + 9x^2 = 4x$ и $xy = ax + by + c$.

14. За које вредности коефицијената a, b и c све хиперболе $y^2 + axy + bx^2 + cx = 0$ мају општу асимптоту $y = x + 1$.?

15. Показати да геометриско место центара свих коничних пресека који пролазе кроз четири дате тачке претставља конични пресек. Наћи његов центар.

16. Наћи параболу која пролази кроз четири дате тачке.

17. Из тачке P ван елипсе повући сечицу која је пресеца у две тачке. Доказати а се елипсине тангенте, повучене у поменутим тачкама, секу на полари тачке P.

18. Наћи полару помоћу датог пола (x_0, y_0) и обратно — пол помоћу дате поларе $x + By + C = 0$, односно сваког од три круга $x^2 + y^2 = a^2$, $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, $(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$.

19. Наћи полару с полом $(5, -3)$ у односу на круг са центром у координатном очетку и са полупречником 4.

20. Наћи за дату елипсу пол поларе која је не пресеца.

21. Наћи геометриско место полова полара дате елипсе, које су истовремено ангенте датог концентричног круга.

22. Израчунати координате пола дате праве у односу на дату хиперболу.

23. Израчунати координате пола поларе $5x - 7y + 2 = 0$, односно параболе $^2 = 3x$.

24. На основу теорије полара наћи координате тачака додира тангената повуених из тачке $(-5{,}3)$ на параболу $y^2 = 8x$.

25. Угловни коефицијент поларе параболе зависи само од ординате пола. Докаити да су све поларе различитих тачака ма каквог пречника параболе међусобно аралелне.

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

СИСТЕМ КОНИЧНИХ ПРЕСЕКА. СКРАЋЕНИ НАЧИН

I. Пресек коничних пресека

203. Тачке пресека. — Нека су дате две криве другога реда

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0\,, \\ A_1x^2 + 2\,B_1xy + C_1y^2 + 2\,D_1x + 2\,E_1y + F_1 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Да бисмо нашли тачку њихова пресека елиминисаћемо y^2 из једначина (1). Добијени резултат садржи y на првом степену. Стављајући његову вредност у било коју од једначина (1) добијамо једначину четвртог степена по x. Према томе, криве (1) секу се у четири тачке. Ове тачке могу бити или све стварне или две стварне и две коњуговано-комплексне, или два пара коњуговано-комплексних тачака. У првом случају, спајајући четири тачке, пар по пар, са шест правих, добијамо тетрагон, уписан у оба конична пресека (1). Значи да они имају шест заједничких реалних сечица. Ако су две тачке пресека коњуговано-комплексне, кроз њих увек мора пролазити једна реална права. О томе се можемо лако уверити, ако поставимо једначину праве која пролази кроз две дате тачке (в. n⁰ 41, стр. 62). Кроз две реалне тачке пресека пролази друга реална сечица. Према томе, у нашем случају конични пресеци (1) имају свега две реалне заједничке сечице. Најзад, ако се криве (1) пресецају у два пара коњуговано-комплексних тачака, криве имају опет само две реалне заједничке сечице.

Ако се две тачке пресека кривих (1) поклапају, заједничка сечица постаје тангента обеју кривих, за које се тада каже да се додирују. Могу се поклопити у једну тачку три или све четири тачке пресека кривих (1). У три наведена случаја њихов додир зове се, према томе, *првог*, *другог* или *трећег реда*.

Проучимо, примера ради, два круга

$$\left.\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0\,, \\ A_1(x^2 + y^2) + 2\,D_1x + 2\,E_1y + F_1 = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Елиминишемо ли из њих y^2, истовремено ће се елиминисати и x^2, тако да се за резултат добија линеарна једначина,

$$2\,(A_1D - AD_1)\,x + 2\,(A_1E - AE_1)\,y + A_1F - AF_1 = 0\,, \qquad (3)$$

која одређује увек извесну реалну праву, *радикалну осу* кругова (2)

глава V, n⁰ 109, стр. 132). Обе тачке њихова пресека, реалне или ко-
говано-комплексне, леже на радикалној оси (3), и одређујемо их заједничким
шавањем једначине (3) са једном од једначина (2). Као резултат елими-
ције y из сваке од једначина (2) добија се квадратна једначина, место
начине четвртог степена. Према томе, може се рећи, два корена последње
начине постају бесконачно велики и њима одговарају две бескрајно уда-
не коњуговано-комплексне тачке. То значи да је друга заједничка сечица
угова (2) бесконачно удаљена права.

Поставимо ли једначину праве што пролази кроз средишта кругова (2)

$$\left(-\frac{D}{A},\ -\frac{E}{A}\right),\quad \left(-\frac{D_1}{A_1},\ -\frac{E_1}{A_1}\right),$$

ећемо да је радикална оса нормална на линији средишта (в. n⁰ 109,
. 132).

Као други пример узећемо да одредимо тачке пресека двају коничних
сека, датих једначинама

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda}+\frac{y^2}{a_2+\lambda}=1, \tag{4}$$

чему је

$$a_1 < a_2, \tag{5}$$

оји одговарају различним вредностима параметра λ. Кроз сваку тачку
ни (за одређене вредности x и y) пролазе две криве облика (4), јер је
једначина другог степена по λ. Обе те вредности λ, које ћемо озна-
и са

$$\lambda_1 > \lambda_2,$$

лне су, и налазе се у размацима

$$(+\infty, -a_1), \quad (-a_1, -a_2). \tag{6}$$

ишимо горње једначине овако

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_1}=1, \qquad \frac{x^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_2}=1. \tag{7}$$

ма условима (5) и (6), прва од ових претставља елипсу, а друга хипер-
у, са истим осама и жижама, и зато се зову *кофокалне*. Њихове
ке пресека лако се одређују, јер су једначине (7) линеарне по x^2 и y^2.
да

$$x^2=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}{a_1-a_2}, \qquad y^2=\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}{a_2-a_1}$$

ју позитивне вредности. Према томе координате тачака пресека кривих
имају реалне вредности

$$x=\pm\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}{a_1-a_2}}, \qquad y=\pm\sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}{a_2-a_1}},$$

и одређују четири реалне тачке, симетрично распоређене у односу на координатне осе.

204. Дарбуова метода за изналажење заједничких сечица. — Помножимо прву једначину (1) произвољним множитељем λ и начинимо збир добијене са другом једначином (1). Добићемо

$$\left.\begin{aligned}&(A\lambda+A_1)x^2+2(B\lambda+B_1)xy+(C\lambda+C_1)y^2+\\&\quad+2(D\lambda+D_1)x+2(E\lambda+E_1)x+F\lambda+F_1=0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ова једначина претставља конични пресек који пролази кроз тачке пресека обеју датих кривих (1), јер је идентички задовољена координатама тачака пресека кривих (1). Изаберимо сад између свих коничних пресека (4) оне који претстављају скуп правих линија, тј. оних правих које претстављају заједничке сечице датих кривих (1).

Зато неодређени коефицијент λ мора бити тако одређен да једначина (4) задовољи извесни услов

$$\begin{vmatrix} A\lambda+A_1 & B\lambda+B_1 & D\lambda+D_1\\ B\lambda+B_1 & C\lambda+C_1 & E\lambda+E_1\\ D\lambda+D_1 & E\lambda+E_1 & F\lambda+F_1\end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&(A\lambda+A_1)(C\lambda+C_1)(F\lambda+F_1)+2(B\lambda+B_1)(D\lambda+D_1)(E\lambda+E_1)-\\&-(D\lambda+D_1)^2(C\lambda+C_1)-(E\lambda+E_1)^2(A\lambda+A_1)-(B\lambda+B_1)^2(F\lambda+F_1)=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Добијена једначина, (5) или (6), трећег је степена по λ. Према томе има три решења. Од ових могу или сва бити реална, или само једно. Значи, једначина (4) одређује или три пара реалних правих или један пар реалних правих. Својим пресеком са датим коничним пресецима оне одређују њихове тачке пресека.

Ако развијемо леву страну једначине (6) она постаје

$$\Delta\lambda^3+\theta\lambda^2+\theta_1\lambda+\Delta_1\lambda=0,$$

где су Δ и Δ_1 дискриминанте прве, односно друге од двеју датих једначина (1). Међутим θ и θ_1 изражавају се овако

$$\theta\equiv Aa_1+2Bb_1+Cc_1+2Dd_1+2Ee_1+Ff_1,$$
$$\theta_1\equiv A_1a+2B_1b+C_1c+2D_1d+2E_1e+F_1f,$$

при чему су a, b, c, d, e и f комплементи дискриминанте Δ коњуговани са њезиним одговарајућим елементима A, B, C, D, E и F, а a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 и f_1 исти у односу на дискриминанту Δ_1.

Најзад, приметимо да су за сваки реалан корен λ једначине (6) *реалне заједничке сечице* датих кривих (1) под претпоставком (в. n⁰ 155, стр. 194)

$$(B\lambda+B_1)^2-(A\lambda+A_1)(C\lambda+C_1)>0,$$

а *имагинарне коњуговане* под супротном претпоставком.

Препуштамо читаоцу да сам примени изложену методу на испитивање броја нормала које се могу повући из дате тачке на елипсу. Зато треба проучити број њезиних реалних тачака пресека са одговарајућом Аполонијевом хиперболом (в. n⁰ 129, стр. 160).

II. Скраћене ознаке

205. Различити облици једначина. — Означимо са α, β, γ и δ ве стране једначина четири праве, дате ма у ком праволиниском коорди- тном систему. Претпоставимо да се оне секу у четири разне тачке. дначина

$$\alpha\beta - k\gamma\delta = 0, \tag{1}$$

е је k произвољан сталан коефицијент, одређује све криве другог реда је пролазе кроз четири тачке пресека датих правих. Одредимо ли k тако уочене криве пролазе кроз пету дату тачку, једначина (1) претставља у м случају једначину конично᷄г пресека, који пролази кроз ет датих тачака. Значи, ако треба повући конични пресек кроз пет тих тачака, треба поставити једначину четири праве, које се добијају спа- њем датих тачака и то две по две које било, узимајући при том у обзир ш и једначину (1). Уносећи у њу координате пете дате тачке, налазимо едност коефицијента k који одговара траженом пресеку.

Познато је да α, β, γ и δ претстављају величине пропорционалне стојањима тачке (x, y) од посматраних правих. Према томе, једначина (1) казује да *конични пресек претставља геометриско место тачака, чији оизводи растојања од двеју супротних страна у њему уписаног четво- оуграоника стоје у сталном односу.*

Ако се две посматране праве поклапају, једначина (1) постаје

$$\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$$

одређује коничне пресеке који додирују две друге праве. Права $\gamma = 0$ прет- авља у том случају њихову тетиву додира. Заиста, ако је $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, да се по две и две тачке пресека коничног пресека и правих $\gamma = 0$, $\delta = 0$ ивају у по једну тачку.

Примена скраћених ознака поједностављује решења многих задатака. аиста, ако се узму праве $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ за координатне осе, онда α и β, личине пропорционалне растојањима тачке од уочених правих, постају опорционалне и координатама те тачке. Стога узмимо, на пример, дате њуговане дијаметре елипсе за координатне осе. Замењујући координате и y, у једначини елипсе, пропорционалним величинама α и β добијамо је- ачину елипсе у облику

$$a\alpha^2 + b\beta^2 = c,$$

е су a, b и c три непозната коефицијента. Њих одређујемо из два дата оста или једног двоструког елемента елипсе.

Исто тако једначине

$$\alpha\beta = k, \quad \alpha^2 = k\beta$$

етстављају хиперболу, при чему $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ претстављају асимптоте хиперболу (види задатак 21 у n⁰ 102), односно дијаметар са тангентом темену за параболу. У оба случаја довољно је знати по један прост еле- ент датих кривих да можемо одредити коефицијент k.

206. Прамен коничних пресека. — Означимо, краткоће ради, са и S_1 леве стране опште једначине коничних пресека. Једначина

$$S - kS_1 = 0, \tag{2}$$

са неодређеним коефицијентом k, одређује прамен кривих другог реда што пролазе кроз тачке пресека датих кривих $S = 0$, $S_1 = 0$. Ако се полином S_1 може разложити у два множитеља првог степена, α и β, једначина (2) постаје $S - k\alpha\beta = 0$ и претставља прамен кривих другог реда, које пролазе кроз четири тачке пресека криве $S = 0$ са правама $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Стога, за специјалне вредности k, једначина (2) важи и за све парове заједничких сечица које пролазе кроз две различите тачке пресека.

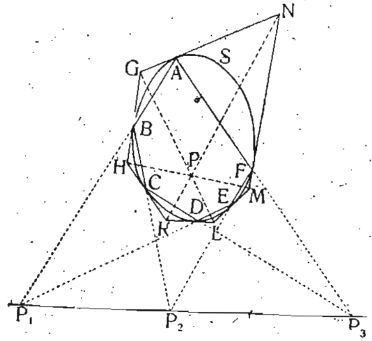
Означимо ли, на пример, са U и U_1 леве стране једначина кругова (2) (n⁰ 203, стр. 263) једначина њихове радикалне осе постаје $U - \frac{A}{A_1} U_1 = 0$.

Уведимо, поред ових, и трећу једнакост, $U_2 = 0$, чији се коефицијенти разликују од одговарајућих коефицијената претходних једначина индексом 2. Радикалне осе првог и трећег, односно другог и трећег круга дате су изразима

$$U - \frac{A}{A_2} U_2 = 0, \quad \text{одн.} \quad U_1 - \frac{A_1}{A_2} U_2 = 0.$$

Збир производа ових једначина са A_1A_2, $-A_1A_2$ одн. AA_2 једнак је нули. Према томе, *радикалне осе трију кругова секу се у једној тачки.* (Ови резултати били су већ раније изнесени за једначине кругова канониочког облика, у глави V).

207. Паскалова теорема. — Упишимо шестоугаоник ABCDEF (сл. 110) у конични пресек $S = 0$. Паскалова теорема каже да се *супротне стране шестоугаоника уписаног у конични пресек секу на једној правој.*



Сл. 110

Скупови по двеју страна, BC и DE, AB и EF, претстављају коничне пресеке. Оба ова конична пресека, заједно са датим, имају једну заједничку тетиву, BE. Нека њена једначина буде $\alpha = 0$. У том случају једначине другог и трећег коничног пресека могу се написати у облику

$$S - k\alpha\beta = 0, \quad \text{одн.} \quad S - k'\alpha\gamma = 0, \tag{3}$$

где су k и k' коефицијенти пропорционалности; β и γ означавају респективно леве стране једначина заједничких сечица, CD, првог и другог пресека, а AF првог и трећег пресека. Што се тиче друге заједничке тетиве другог и трећег коничног пресека, она претставља праву P_1P_2. Одузимајући једну од друге једначине (3) добијамо

$$\alpha(k\beta - k'\gamma) = 0,$$

или

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad k\beta - k'\gamma = 0. \tag{4}$$

Једначине (4) одређују две заједничке тетиве другог и трећег коничног пресека, при чему друга од једначина (4) одређује праву P_1P_2. Ова једначина се анулира истовремено кад и β и γ. Према томе, тачка пресека, P_3, одговарајућих страна Паскалова шестоугаоника, CD и AF, лежи на правој P_1P_2.

Доказана Паскалова теорема претставља специјални случај општије ›еме, наиме, *ако три конична пресека имају две заједничке тачке, три зе што спајају друге тачке пресека сваког пара коничних пресека секу › једној тачки.*

У Паскаловој теореми имамо геометриску методу за конструкцију ıка коничног пресека помоћу пет датих тачака. Заиста, нека A, B, C, D буду пет датих тачака коничног пресека. Помоћу њих треба прво кон-'исати тачку P_1. Кроз произвољну тачку P_2 стране BC повуцимо праве $_2$ и P_2E. Пошто положај тачке P_3 постаје познат, спајајући је са A до-мо, у пресеку са правом P_2E, тражену нову тачку, E, коничног пресека. ›ајући по страни BC положај тачке P_2, можемо конструисати произво-број тачака које припадају коничном пресеку, који пролази кроз првих датих тачака.

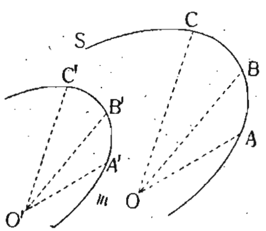
208. Бријаншонова теорема. — Бријаншонова теорема гласи: *дија-ıле које спајају супротна темена шестоугаоника описаног око коничног :ека секу се у једној тачки.* Заиста, опишимо око коничног пресека S 110) шестоугаоник GHKLMN. Очевидно је да су стране уписаног шесто-›ника са теменима A, B, C, D, E и F у тачкама додира описаног шесто-›ника поларе његових одговарајућих темена. Тако су темена G и L юлови одговарајућих полара AB и DE. Према томе, дијагонала GL служи юлару тачке P_1, а дијагонале HM и KN — за поларе тачака P_2 и P_3. утим сва три пола P_1, P_2, и P_3 леже на једној правој. Према томе, њи-: поларе секу се у једној тачки, P. Бријаншонова теорема омогућује да конструише произвољан број тангената помоћу пет датих тангената.

Доказане теореме, Паскалова и Бријаншонова, важе не само за кон-:не шестоугаонике, већ и за оне чије се стране узајамно пресецају под ›вом само да су затворени.

Али су обе теореме независне од положаја темена шестоугаоника; ıју у важности ако се и нека од темена поклапају.

III. Сличност коничних пресека

209. Дефиниција. — Из центара, O и O' (сл. 111), повуцимо одго-ıјуће паралелне потеге за различите тачке двеју кривих, S и S'. Ове криве зову се сличне или, још, хомотетичке, ако су повучени потези пропорционални, тј. ако је



Сл. 111

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \ldots = k.$$

Тачке O и O' зову се центри сличности или хомотетичности, а тачке A и A' итд. и потези OA и O'A' итд. — хомолози. Тако, на пример, сви су кругови хомотетични.

Две криве или слике зову се сличне, ако ›дна од њих подударна са сликом која је хомотетичка са другом од ıх слика.

210. Услови сличности. — Нека је крива S одређена једначином

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Узмимо координатни почетак за заједнички центар сличности, претпостављајући да је крива S' пренесена тако, да се оба центра O и O' и хомологи потези поклапају. Треба наћи једначине криве S', хомотетичне са кривом (1), са коефицијентом сличности k. Означимо са x', y' и r' координате и потег оне тачке на кривој S' која је хомолога са тачком (x, y) криве (1), чији ћемо потег обележити са r. Из сличности правоуглих троуглова, образованих од потега и координата посматраних хомологих тачака, имамо

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{r'} = k, \quad \text{тј.} \quad x = kx', \quad y = ky'.$$

Стављајући добивене вредности x и y у једначину (1) добијамо за једначину хомотетичне криве S'

$$f(kx', ky') = 0. \tag{2}$$

Ако померимо центар сличности у пређашњу тачку $O'(x_0, y_0)$, једначину криве S', у односу на старе осе, добићемо ако заменимо x' и y' у једначини (2) са $x - x_0$ и $y - y_0$,

$$f[k(x - x_0), \quad k(y - y_0)] = 0.$$

На основи изложенога очевидно је да су две параболе, са каквим било параметрима а заједничком осом и тангентом у теменима, хомотетичне. Осим тога све параболе су сличне. Елипсе и хиперболе чије су осе узете за координатне осе хомотетичне су са концентричним истоименим кривима са пропорционалним осама. Према томе, *елипсе са пропорционалним осама сличне су,* као што су и *хиперболе са пропорционалним осама сличне.*

Претпоставимо да су две криве дате једначинама општег облика (1). Ако су обе параболе, тј. ако је $B^2 - AC = 0$, $B_1^2 - A_1C_1 = 0$, према реченом, ове криве су сличне. Ако су угловни коефицијенти оса обеју парабола, $-\frac{B}{C}$ и $-\frac{B_1}{C_1}$, једнаки, дате параболе су хомотетичне. Ако су криве (1) централне, њихове средишне једначине имају облик

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F' = 0, \quad A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + F_1' = 0; \tag{3}$$

коефицијенти уз квадратне чланове остају непромењени.

Према доказаном, општи облик коничних пресека хомотетичних са првим (3) је

$$k^2[A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2] + F' = 0.$$

Да би ова једначина одређивала криву идентичну са другом (3) треба да буду

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{-2(Ax_0 + By_0)}{0} = \frac{-2(Bx_0 + Cy_0)}{0} = \frac{R}{k^2F_1'}, \tag{4}$$

$$R = k^2(Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2) + F'.$$

Из прва три односа следи да коефицијенти уз квадратне чланове једначина морају бити пропорционални. Четврти и пети однос, на основу услова $\gtreqless 0$, дају

$$Ax_0 + By_0 = 0\,, \quad Bx_0 + Cy_0 = 0 \quad \text{или} \quad x_0 = y_0 = 0\,.$$

ема томе је $R = F'$; а ако са λ обележимо заједничку вредност односа , добијамо

$$G_1 \equiv B_1{}^2 - A_1C_1 = \frac{1}{\lambda^2}(B - AC) = \frac{1}{\lambda^2}\,G\,.$$

ележимо ли још са Δ и Δ_1 дискриминанте посматраних кривих и ставимо је однос (4) једнак λ, добијамо на основу израза F' и $F_1{}'$ (в. стр. 201, 157)

$$\lambda = \frac{F'}{k^2 F_1{}'} = \frac{\Delta G_1}{k^2 \Delta_1 G} = \frac{\Delta}{\lambda^2 k^2 \Delta_1}\,, \quad \text{или} \quad k^2 = \frac{\Delta}{\lambda^3 \Delta_1}\,.$$

ограничавајући општост поступка можемо претпоставити да су оба коецијента A и A_1 позитивна, и да је $\lambda > 0$. Према томе коефицијент k има лну и коначну вредност, ако су обе дискриминанте, Δ и Δ_1, различите нуле а имају једнаке знаке. У противном случају k је имагинарна велиа. Значи, централни конични пресеци (1) су хомотетички и коефицијенти ичности су реални, ако су коефицијенти уз квадратне чланове текућих коцината пропорционални, а дискриминанте различите од нуле и истога знака.

211. Примери и задаци.

1. Одредити тачке пресека круга и параболе

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \beta^2x^2 - 2\alpha\beta\, xy + \alpha^2y^2 + 2\,\alpha x + 2\beta x = 1,$$

је $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

2. Дата је парабола и круг који пролази кроз њену жижу. Одредити области у има треба да се налази центар круга, да би тачке пресека обеју кривих биле или реалне, или све имагинарне, или две реалне и две имагинарне.

3. Наћи геометриско место тачака центара кругова датог полупречника под овом, да су две заједничке сечице ма којег од тих кругова и датог коничног преа међу собом паралелне или нормалне.

4. Наћи услов да се два круга секу ортогонално помоћу става да су им танте у заједничким тачкама једна на другој управне.

5. Одредити тачке пресека коничних пресека

$$(x - y)^2 + 3\,(x + y) = 10, \qquad x^2 + y^2 + 4xy - 6\,(x + y) = -5.$$

6. Наћи за круг који додирује елипсу или хиперболу тачку његова пресека са елипсом, односно хиперболом.

7. Повући две подударне параболе са узајамно управним осама тако да се ирују.

8. Доказати да се елипса и хипербола са заједничким жижама (тј. конфокална) у ортогонално.

9. Одредити a и b тако да се криве

$$y = x^2 + 1, \qquad xy = ax + by$$

ирују. Наћи геометриско место центара хиперболе, одређених другом једначином додирују прву криву.

10. Наћи једначину параболе која пролази кроз четири дате реалне тачке, и једначину параболе која додирује две дате праве у тачкама њихова пресека са трећом датом правом.

11. Наћи геометриско место центара кривих другог реда, које пролазе кроз четири тачке пресека два дата конична пресека.

12. Поставити једначину коничног пресека који пролази кроз пет тачака $(-1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -2)$, $(2, 3)$.

13. Довести на канонички облик једначину коничног пресека који пролази кроз тачку $(1, 1)$ и додирује апсцисну осу у тачки $(4, 0)$, а ординатну осу у тачки $(0, 3)$.

14. Довести на канонички облик једначину једнакостране хиперболе која пролази кроз тачке $(0, 3)$, $(8, 2)$, а додирује апсцисну осу у тачки $(4, 0)$.

15. Поставити једначину коничног пресека који пролази кроз координатни почетак, кроз тачке $(0, 1)$, $(1, 0)$ и има за центар тачку $(2, 3)$.

16. Доказати да су ексцентрицитети сличних хипербола једнаки, а затим доказати и обрнуту теорему.

17. Отсечци сечице између две концентричне хомотетичке криве другог реда једнаки су међу собом. Тетива спољашње криве, која додирује унутрашњу криву, преполовљена је у тачки додира.

18. Дате су у правоуглом координатном систему две криве, $x^2 - 3xy - 3y^2 = 1$ и $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 1$. Наћи трећу криву конфокалну са првом, а сличну са другом