АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
II

Штампано у штампарији Просвета
у 2000 примерака
Штампање завршено 9 априла 1949 год.
Београд, — Ђуре Ђаковића 21

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Н. САЛТИКОВ
професор Универзитета

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

II

ПРОСВЕТА
ИЗДАВАЧКО ПРЕДУЗЕЋЕ СРБИЈЕ
БЕОГРАД 1949

ПРЕДГОВОР

Ова је књига наставак Аналитичке Геометрије I, која је била објављена прошле године.

Поводом објављивања ове нове књиге изражавам особиту захвалност професору Др.-у Т. Анђелићу, као универзитетском редактору, и другу Ж. Крављанцу, руководиоцу техничке редакције предузећа „Просвете“ за нарочиту пажњу коју су они уложили око техничке редакције и за време штампања ове књиге.

Много сам захвалан и својим бившим ученицима за помоћ на остварењу овог издања, а нарочито Слободану Павловићу, који је много уложио труда и пажње за коректуре.

Београд, Октобра 1948 г. *Н. С.*

САДРЖАЈ

ПРВИ ДЕО

КООРДИНАТЕ. РАВАН. ПРАВА ЛИНИЈА

ГЛАВА I

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

I. Координате у простору

Стр.

II. Пројекције

III. Примена координата на решавање геометриских проблема

IV. Примена у сферној тригонометрији

V. Примена координата у теорији вектора

VI. Геометриско тумачење једначина

VII. Проблеми аналитичке геометрије

ГЛАВА II

ТРАНСФОРМАЦИЈА ПРАВОЛИНИСКИХ КООРДИНАТА КОСОУГЛИ ПРАВОЛИНИСКИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

I. Трансформација правоуглих координата

II. Косоугли праволиниски координатни систем

III. Трансформација косоуглих праволиниских координатних система

ГЛАВА III

РАВАН

I. Различити облици једначине равни

II. Скуп неколико равни

III. Задаци о равнима

IV. Једначине равни и проблеми о равнима у косоуглом праволиниском координатном систему

ГЛАВА IV

ПРАВА ЛИНИЈА

I. Различити облици једначине праве

II. Скуп правих линија

III. Задаци о правим линијама

IV. Скуп правих и равни

V. Задаци о правим линијама и равнима

VI. Једначине правих линија и проблеми о правим линијама и равнима у косоуглом праволиниском координатном систему

ГЛАВА V

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПОЈМА О КООРДИНАТАМА

I. Хомогене координате

II. Најкраће и тетраедарске координате

III. Криволиниски координатни системи

ДРУГИ ДЕО

ПОВРШИНЕ ДРУГОГ РЕДА

ГЛАВА VI

ОБРАЗОВАЊЕ ПОВРШИНА И ЊИХОВ ОБЛИК

I. Цилиндар и конус

II. Елипсоид

III. Једнокрилни хиперболоид

IV. Двокрилни хиперболоид

V. Параболоиди

ГЛАВА VII

ПРЕСЕЦИ ПОВРШИНА ДРУГОГ РЕДА

I. Пресеци са правом и равни

II. Кружни пресеци

III. Праволиниске генератрисе

ГЛАВА VIII

ЕЛЕМЕНТИ ПОВРШИНА ДРУГОГ РЕДА, ОДРЕЂЕНИХ ЈЕДНАЧИНАМА ОПШТЕГ ОБЛИКА

I. Центар

II. Дијаметарске равни

III. Главне равни

IV. Пречник

V. Тангентна раван

VI. Асимптоте

VII. Полови и поларне равни

VIII. Жиже и фокалне криве

IX. Системи површина

ГЛАВА IX

ИСПИТИВАЊЕ ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА

I. Скуп две равни

II. Канонични облик једначина површина другог реда

III. Конструкције површина другог реда

ГЛАВА X

ТЕОРИЈА ПОВРШИНА

I. Лопта

II. Образовање површина

III. Цилиндричне површине

IV. Конусне површине

V. Коноидне површине

VI. Обртне површине

ПРВИ ДЕО

Координате. Раван. Права линија

ГЛАВА ПРВА

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

I. Координате у простору

1. Дефиниција. — Аналитичка геометрија простора претставља генерализацију Аналитичке геометрије равни.

У ту сврху појмови координата тачака у равни проширују се и на простор.

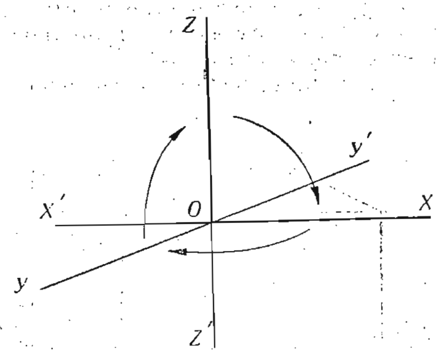
Пошто се у равни положај сваке тачке одређује према двема осама у дотичној равни, то се и у простору, на сличан начин, за одређивање положаја тачке узимају три осе које полазе из једне исте тачке.

Претпоставимо да су ове осе узајамно управне праве линије OX, OY и OZ (сл. 1).

Код сваке осе разликује се осим позитивног и негативног смера на њој, још и *позитиван* и *негативан* смер обртања око ње.

За позитиван смер обртања око дате осе узимаћемо увек смер кретања казаљке на сату за посматрача смештеног дуж осе тако да му се ноге налазе у почетку O, а глава у позитивном смеру осе.

Према томе, ако за позитиван смер осе OX узмемо смер OX, то се позитивни смерови оса OY и OZ одређују тако, да се прелаз од позитивног смера осе OY у позитиван смер осе OZ врши обртањем осе OY у позитивном смеру око осе OX.



Сл. 1

Одмах се види, да под уведеном претпоставком позитивни смерови све три осе одговарају позитивним смеровима обртања око њих. Означимо словима X, Y и Z на крају посматраних оса њихов позитиван смер OX, OY и OZ. Овим ознакама можемо се задовољити, не стављајући још и стрелице како се то понекад чини.

Њима супротни смерови OX′, OY′ и OZ′ су негативни.

Триједар оса OX, OY, OZ, које задовољавају поменуте услове, зове се *оријентисани леви триједар*, или триједар леве оријентације, јер смерови оса OX, OY, OZ одговарају респективно триједру који се може направити од палца, кажипрста и средњег прста леве руке. Насупрот томе, триједар код кога се за позитиван смер обртања око осе узима смер супротан раније уоченом, зове се *десни триједар*, или *триједар десне оријентације*, јер смерови његових оса одговарају поменутим прстима десне руке.

Два триједра исте оријентације зову се конгруентни (подударни), пошто се, при полагању једног триједра на други, односне ивице поклапају.

Обрнуто, при поклапању два пара ивица два триједра различите оријентације, треће ивице имају супротне смерове. Стога се два триједра различитих оријентација називају *симетричним триједрима*.

Праве линије X′X, Y′Y и Z′Z зову се *координатне осе*.

Равни, које пролазе кроз две координатне осе називају се *координатним равнима*, и то

$$XOY, \; ZOX, \; YOZ.$$

Пошто су координатне осе међусобно управне, и координатне равни су узајамно нормалне једна на другој.

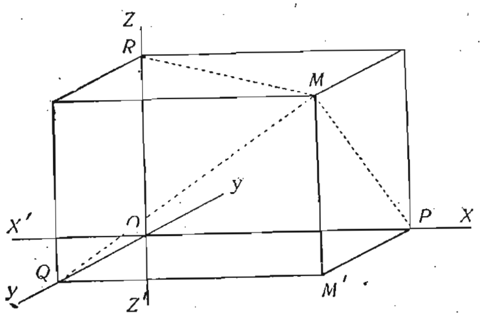
Узајамно нормалне координатне осе и равни образују *правоугли праволиниски координатни систем*, који се обележава са OXYZ.

Тачка O се назива *координатни почетак*. Уочени координатни систем леве оријентације обично се употребљава у теориској математици и теориској механици.

Међутим, координатним системом десне оријентације обично се служи у астрономији и небеској механици.

Да би се могли искористити, за другу оријентацију оса, резултати који су били изведени под супротном претпоставком, мора се и позитиван смер обртања променити.

Узмимо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ (сл. 2). Повуцимо кроз дату тачку M у простору, паралелно координатним равнима XOУ, ZOX и УOZ, три равни. Оне ће својим пресецима са координатним осама одредити три тачке, P, Q и R, које претстављају ортогоналне пројекције тачке M на координатне осе.



Сл. 2

Према томе, свакој тачки M у простору одговарају три тачке на координатним осама. Обрнуто три тачке, P, Q и R, свака на по једној од координатних оса, потпуно одређују тачку M у простору.

Положај сваке од трију тачака, P, Q и R, одређује се на односној оси координатом, која одређује положај тачке на тој оси. Према томе тачки у простору одговарају три броја x, y и z. Обрнуто, бројевима x, y, z увек одговара једна тачка у простору.

Ови бројеви називају се *правоугле праволиниске координате тачке M* у датом координатном систему OXYZ, и то: *апсциса*, *ордината* и *кота* тачке M.

Јединица дужине се узима иста за све осе.

Да су x, y и z координате неке тачке M, означаваћемо укратко симболом

$$M\,(x, \; y, \; z).$$

Посматране координате тачке M претстављају дужине отсечака.

$$OP, \; OQ, \; OR.$$

Стога се и ови отсечци зову *координате тачке M*.

Уместо ових отсечака могу се узети за координате дате тачке M и други отсечци, који су им паралелни. Заиста, три координатне равни и три равни, које су повучене паралелно с њима из тачке M, образују заједно праволугли паралелопипед. Суседне ивице дотичног паралелопипеда претстављају координате дате тачке M.

Према томе, уместо ивица OP, OQ и OR посматраног паралелопипеда могу се узети за координате и паралелне им ивице OP, PM′ и M′M, које чине *изломљену координатну линију* OPM′M.

Она се назива и *координатни многоугао* тачке M.

Најзад, очевидно је, да се координате x и y тачке M′, у равни XOУ, поклапају са координатама x и y тачке M у простору.

Осим тога, приметимо да се тачке P, Q и R могу друкчије одредити као ортогоналне пројекције тачке M на координатне осе помоћу правих линија MP, MQ и MR, које претстављају дијагонале страна посматраног паралелопипеда.

Све тачке координатне равни XOУ имају исте коте $z = o$. Слично томе, све тачке равни ZOX имају ординате $y = o$, а за све тачке равни УOZ апсцисе су $x = o$.

За тачке које се налазе на оси кота имамо $x = y = o$; за тачке осе апсциса $y = z = o$, а за тачке ординатне осе $x = z = o$.

Најзад, координате координатног почетка O су $x = y = z = o$.

Три координатне равни деле простор на осам поља, или *октаната*, који претстављају осам правоуглих рогљева, наиме:

$$\sphericalangle OXУZ, \quad \sphericalangle OXУ'Z, \quad \sphericalangle OX'У'Z, \quad \sphericalangle OX'УZ,$$
$$\sphericalangle OXУZ', \quad \sphericalangle OXУ'Z', \quad \sphericalangle OX'У'Z', \quad \sphericalangle OX'УZ'.$$

Знаци координата појединих тачака у сваком од поменутих рогљева позитивни су или негативни, према смеровима координатних оса дуж којих се координате дотичних тачака морају рачунати.

Тако су све три координате позитивне за сваку тачку, која се налази у првом октанту OXУZ.

Апсцисе и коте су позитивне за тачке у другом рогљу OXУ′Z, док су им ординате негативне итд.

Знак сваке координате тачке, у сваком поједином од координатних рогљева, јасно је обележен у овој таблици:

$1^0)$	$\sphericalangle OXУZ,$	$x > o,$	$y > o,$	$z > o;$
$2^0)$	$\sphericalangle OXУ'Z,$	$x > o,$	$y < o,$	$z > o;$
$3^0)$	$\sphericalangle OX'У'Z,$	$x < o,$	$y < o,$	$z > o;$

4⁰) $\sphericalangle$ OX′YZ, $x < o$, $y > o$, $z > o$;

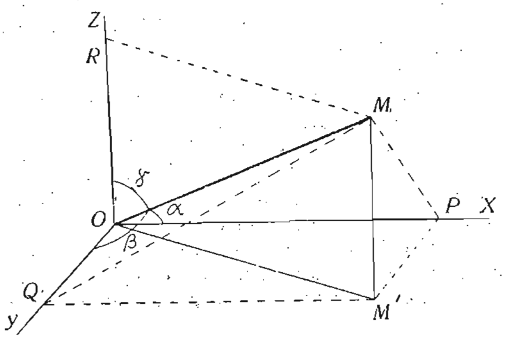
5⁰) $\sphericalangle$ OXYZ′, $x > o$, $y > o$, $z < o$;

6⁰) $\sphericalangle$ OXY′Z′, $x > o$, $y < o$, $z < o$;

7⁰) $\sphericalangle$ OX′Y′Z′, $x < o$, $y < o$, $z < o$;

8⁰) $\sphericalangle$ OX′YZ′, $x < o$, $y > o$, $z < o$.

2. Потег и његови косинуси правца. — Отсечак OM (сл. 3) који везује почетак O правоуглог праволиниског координатног система OXYZ са тачком M (x, y, z) назива се потег тачке M. Потег се увек сматра као позитивна величина, те је према томе сваки п о т е г самим тим о р и ј е н т и с а н.



Сл. 3

Заиста повуцимо координатни многоугао OPM′M и спојимо тачку M′ са координатним почетком O. Тада се из два правоугла троугла

$$\triangle\ OM'M, \qquad \triangle\ OPM'$$

добијају везе:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{M'M}^2, \quad \overline{OM'}^2 = x^2 + y^2.$$

Одатле, ако означимо потег OM са r, добијамо да је:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

На тај начин дужина потега r тачке M (x, y, z) изражава се обрасцем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

где се пред кореном узима увек позитиван знак.

Означимо са α, β и γ углове које потег r чини са координатним осама OX, OY и OZ.

Горе смо посматрали тачке P, Q и R као ортогоналне пројекције тачке M, врха потега r, на координатним осама. Према томе се из правоуглих троуглова

$$\triangle\ OPM, \qquad \triangle\ OQM, \qquad \triangle\ ORM$$

добијају обрасци:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\cos\beta, \quad z = r\cos\gamma \tag{2}$$

Добијени обрасци (2) одређују *координате тачке M, када су познати потег r и углови које он заклапа са координатним осама.*

Обрасци (2) пишу се друкчије и овако:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{r}, \tag{3}$$

Одавде сменом вредности (1) потега r добијамо:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

Обрасци (1) и (4) одређују *дужину потега и косинусе углова, које он заклапа са координатним осама, под претпоставком да су познате координате врха потега.*

Из образаца (4) изводи се овај закључак:

Ако дигнемо на квадрат обе стране сваке једнакости (4) и саберемо резултате, онда добијамо да је

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{5}$$

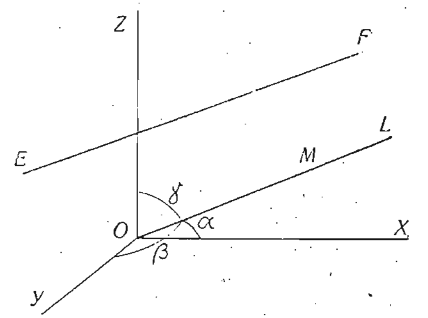
т.ј. *збир квадрата косинуса углова, које потег заклапа са три узајамно управне осе, једнак је јединици.*

3. Углови праве линије са координатним осама. — Углови ма које праве линије EF (сл. 4) са координатним осама правоуглог праволиниског система OXYZ одређују се као углови, које заклапа позитиван смер дате праве са позитивним смеровима координатних оса.

Према томе, најпре ћемо дефинисати смер дате праве у односу на дати координатни систем.

Често се каже да се позитиван смер неке праве у простору може узети произвољно. Међутим, ако је посматрана права EF дата у односу на одређени координатни систем OXYZ, то се тиме одређује и њен позитиван смер овако:

Пројицирамо дату праву EF на координатну раван XOY. Тада је, у овој равни потпуно одређен позитиван смер пројекције ове праве по правилима Аналитичке геометрије равни.



Сл. 4

Као п о з и т и в а н с м е р праве EF сматраћемо онај њен смер који чини оштар угао са позитивним смером поменуте пројекције.

Сад се из координатног почетка O повлачи полуправа OL паралелно датој прави EF. Тада као углове праве EF са координатним осама сматрамо углове, које са овима заклапа зрак OL.

Означимо поменуте углове са α, β, γ. Позитивне вредности њихових косинуса одговарају смеру праве EF који се поклапа са смером OL, а негативне вредности истих косинуса одговарају супротном смеру.

Али без обзира на то, пошто сваки потег, чији би се врх налазио ма у којој тачки M зрака OL, заклапа исте углове са координатним осама, имамо према обрасцу (5)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Одавде излази закључак, *да је збир квадрата косинуса углова које права линија заклапа са правоуглим координатним осама, једнак јединици.*

4. Растојање између две тачке. — Посматрајмо две тачке

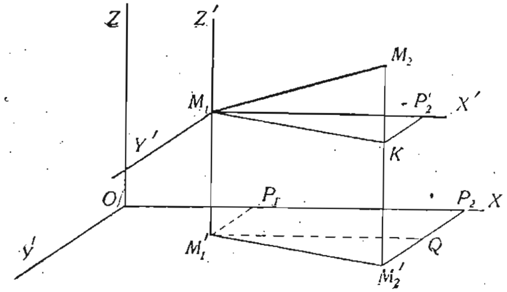
$$M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\quad M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$$

у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 5).

Повуцимо координатне многоуглове датих тачака, наиме:

$$OP_1M'_1M_1, \qquad OP_2M'_2M_2.$$

Из тачке M_1 повуцимо праву паралелну равни XOY до пресека у тачки K са котом тачке M_2, а из тачке M'_1 праву M'_1Q, паралелну оси XO у равни XOY, до пресека у тачки Q са ординатом тачке M'_2. Најзад, спојимо тачке M'_1 и M'_2 правом линијом.



Сл. 5

На овај начин добијају се два правоугла троугла:

$$\Delta\ M_1KM_2, \qquad \Delta\ M'_1QM'_2.$$

Из ова два троугла непосредно се добија тражено растојање M_1M_2, које ћемо означити са d:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ . \tag{6}$$

Скоро је очевидно, да добијени образац (6) не зависи од тога, у којим се октантима налазе обе дате тачке.

Ради одређивања углова α, β и γ које отсечак M_1M_2 заклапа са координатним осама OX, OY и OZ, повуцимо из M_1 помоћне осе M_1X', M_1Y' и M_1Z' паралелно датим координатним осама.

У овом помоћном координатном систему, са почетком у тачки M_1, отсечак M_1M_2 игра улогу потега са врхом у тачки M_2, и његове су координате у новом систему:

$$M_1P'_2 = x_2 - x_1,\ \ P'_2K = y_2 - y_1,\ \ KM_2 = z_2 - z_1.$$

Према обрасцима (4) добијамо косинусе тражених углова у облику:

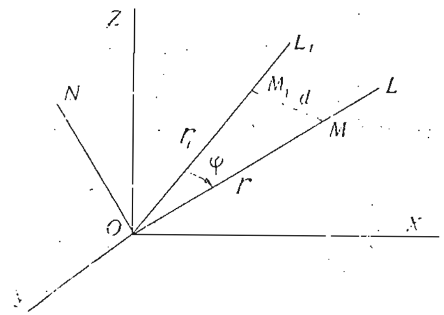
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}\ , \\ \cos\beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}\ , \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}\ . \tag{7}$$

5. Угао између две праве. — За одређивање траженог угла повуцимо из координатног почетка O правоуглог праволиниског координатног система OXYZ (сл. 6) два зрака OL и OL_1 паралелно датим правим линијама у простору. Означимо са φ угао између OL_1 и OL. Узмимо ма где на правој OL тачку $M\,(x, y, z)$, а на правој OL_1 тачку $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$. Означимо са d растојање између њих, а њихове потеге са r и r_1.

Одмах се добија cos траженог угла из косоуглог троугла OM_1M помоћу косинусне теореме:

$$\cos\varphi = \frac{r^2 + r_1{}^2 - d^2}{2rr_1}$$



(Сл. 6)

Стављајући у овај образац вредности r, r_1 и d, израчунате по обрасцима (1) и (6), наиме:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r_1{}^2 &= x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2, \\ d^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \end{aligned}$$

добијамо резултат:

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1}\ . \tag{8}$$

Обележимо сада са α, β и γ углове које зрак OL гради са координатним осама, а са α_1, β_1 и γ_1 углове OL_1 са истим осама. Тада, према обрасцима (3), имамо:

$$\frac{x}{r} = \cos\alpha,\quad \frac{y}{r} = \cos\beta,\quad \frac{z}{r} = \cos\gamma,$$

$$\frac{x_1}{r_1} = \cos\alpha_1,\quad \frac{y_1}{r_1} = \cos\beta_1,\quad \frac{z_1}{r_1} = \cos\gamma_1$$

и образац (8) постаје:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \tag{9}$$

Добијени резултат гласи: *Косинус угла између две праве једнак је збиру производа косинуса углова, које свака дата права чини са координатним осама правоуглог праволиниског система.*

6. Синус угла између две праве. — Означимо, краткоће ради:

$$\cos\alpha = a,\quad \cos\beta = b,\quad \cos\gamma = c,$$
$$\cos\alpha_1 = a_1,\ \cos\beta_1 = b_1,\ \cos\gamma_1 = c_1.$$

Тада образац (9) добија облик:

$$\cos\varphi = aa_1 + bb_1 + cc_1. \tag{10}$$

Одатле је лако наћи и образац за $\sin\varphi$, ако се послужимо тригонометриским обрасцем $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, наиме:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-(aa_1+bb_1+cc_1)^2}. \tag{11}$$

Благодарећи особини (5) посматраних углова, имамо:

$$a^2+b^2+c^2=1,\qquad a_1^2+b_1^2+c_1^2=1.$$

Због тога се израз под знаком другог корена (11) може написати и овако:

$$\begin{aligned}1-(aa_1+bb_1+cc_1)^2 &= \\ &= (a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2 = \\ &= (b_1c-bc_1)^2+(c_1a-ca_1)^2+(a_1b-a_1b_1)^2\end{aligned}$$

Добијени резултат дозвољава да се образац (11) напише у облику:

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}, \tag{12}$$

при чему су уведене ознаке:

$$L = b_1c - bc_1$$
$$M = c_1a - ca_1,$$
$$N = a_1b - ab_1,$$

које се добијају једна из друге цикличком пермутацијом слова.

Ради лакшег памћења ових образаца може се образовати наредна помоћна таблица:

$$\left.\begin{array}{ccc} L & M & N \\ \left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{array}\right.\end{array}\right|\ \Bigg\} \tag{13}$$

У првом реду налазе се уведене ознаке L, M и N. Две друге врсте претстављају тзв. матрицу — симбол, чије по две колоне сачињавају детерминанте L, M и N. При томе елементи прве врсте матрице претстављају косинусе углова праве од које се рачуна угао са другом датом правом линијом. Посматрајући чланове таблице (13) као елементе једне детерминанте, закључује се да се изрази L, M и N могу сматрати као минори са односним знаком, тј. кофактори уведене детерминанте који одговарају елементима прве врсте таблице (13).

Од два знака у обрасцу (12) узима се само један знак на основу ових података. Конструишимо на раван обеју правих OL_1 и OL нормалу ON, која одговара смеру посматраног угла φ. Узећемо у обрасцу (12) знак +, када је триједар OL_1 LN конгруентан са координатним триједром, то значи, када се при поклапању равни L_1OL са XOY, нормала ON поклапа са позитивним правцем осе коте. У супротном случају мора се у обрасцу (12) узети знак —.

7. Услови нормалности и паралелности две праве. — Обрасци (10) и (12) дају непосредно услове нормалности и паралелности правих линија.

Заиста, да би оне биле нормалне, мора бити

$$\cos\varphi = 0,$$

или

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0,$$

т.ј. *праве су нормалне, ако је збир производа косинуса углова, које оне заклапају са координатним осама правоуглог праволиниског система, једнак нули.*

Да би дате праве биле паралелне, мора бити

$$\text{in}\ \varphi = 0,$$

или

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0.$$

Међутим из добијених услова излази, да је

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}.$$

Према томе, *две праве су паралелне, ако су сразмерни конуси углова, које оне заклапају са координатним осама правоуглог праволиниског система.*

II Пројекције

8. Пројицирање на осу. — Узмимо неки отсечак EF дужине d и његову пројекцију ef на осу X′X (сл. 7), коју означавамо са d_x.

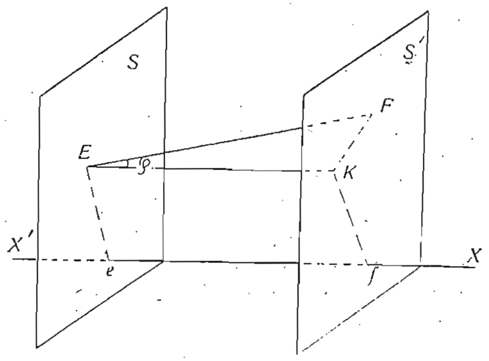
Нека су S и S′ две равни, које ортогонално пројицирају отсечак d.

Повуцимо из почетка E праву линију паралелну оси X′X до пресека, у тачки K, са равни S′. Ако спојимо у равни S′ тачке F и K, онда добијамо из правоуглог троугла EKF:

$$d_x = d\cos\varphi,$$

где је φ угао отсечка d са осом X′X.

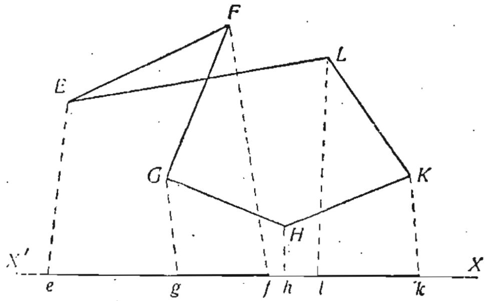
Одавде се јасно види, да је пројекција dx датог отсечка позитивна или негативна, према вредности угла φ, при чему се вредност угла φ рачуна између позитивних смерова дате осе и датог отсечка.



(Сл. 7)

Узмимо сад многоугао EFGHKL (сл. 8), образован од узастопних отсечака EF, FG, GH, HK и KL, који су распоређени тако, да на крај једног отсечка долази почетак другог. Почетак E првог отсечка сматра се као почетак многоугла, а крај L последњег отсечка је истовремено и крај читавог многоугла.

Многоугао је о т в о р е н, ако се његов почетак и крај не поклапају, док је у супротном случају многоугао з а т в о р е н.



(Сл. 8)

Најзад, у отвореном многоуглу, *дуж која спаја почетак многоугла са његовим крајем назива се резултанта многоугла.*

Лако је увидети да је *пројекција резултанте многоугла на осу једнака алгебарском збиру пројекција његових страна на исту осу.*

Заиста, обележимо са e, f, g, h, k и l пројекције темена посматраног многоугла на осу X'X. Очевидно је, да су пројекције ef, gh и hk позитивне а пројекције fg и kl негативне. Према томе збир пројекција отсечака EF и FG једнак је eg, а отсечака GH, HK и KL једнак је gl. Међутим збир $eg + gl$ претставља пројекцију резултанте EL посматраног многоугла.

Доказани резултат доводи до ова два закључка:

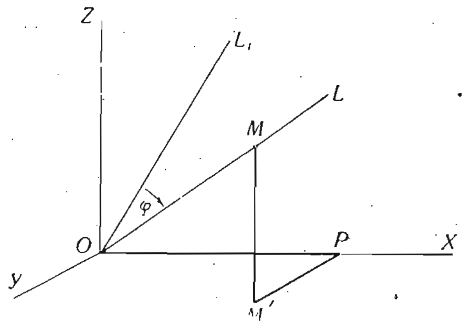
1°. *Ако је многоугао затворен, онда је алгебарски збир пројекција његових страна на неку осу једнак нули.*

2°. *Ако два различита многоугла имају исту резултанту, онда су једнаки алгебарски збирови пројекција њихових страна на исту осу.*

9. Основни обрасци. — Изложене особине пројекција дају други начин за извођење основних образаца (1), (2) и (5), на странама 4 и 5, а такође и обрасца (10), на страни 8.

Тога ради узмимо на правој OL, у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 9), неку тачку M (x, y, z).

Послужићемо се на страни 8 уведеним ознакама a, b и c за косинусе углова потега OM са осама OX, OY и OZ.



Сл. 9

Пројицирајући ортогонално координатни многоугао OPM'M тачке M на њен потег OM, означен са r, добијамо једнакост

$$r = xa + yb + zc. \qquad (1)$$

Изједначимо сада ортогоналне пројекције, на сваку од координатних оса, потега OM као резултанте координатног многоугла тачке M. Одатле се добијају још ове три једнакости:

$$ra = x, \quad rb = y, \quad rc = z, \qquad (2)$$

или

$$a = \frac{x}{r}, \qquad b = \frac{y}{r}, \qquad c = \frac{z}{r}.$$

Ако ставимо добијене вредности a, b и c у једнакост (1), добија се образац

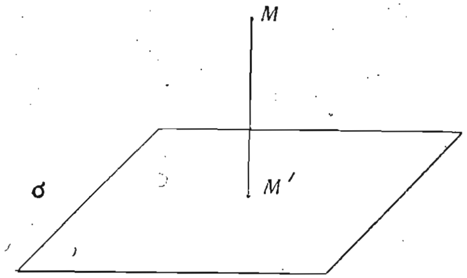
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ако, с друге стране, елиминишемо x, y, z из једнакости (1) и (2), добијамо други познати резултат:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Најзад угао φ између правих OL_1 и OL добија се ортогоналним пројицирањем координатног многоугла тачке M и његове резултанте r на праву OL_1. Одатле се добија:

$$r \cos \varphi = xa_1 + yb_1 + zc_1, \qquad (3)$$



Сл. 10

где су a_1, b_1 и c_1 косинуси углова праве линије OL_1, са координатним осама.

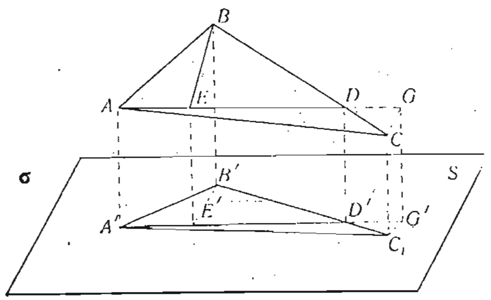
Елиминишући из добијеног обрасца вредности (2) координата x, y и z и пошто је $r \gtreqless 0$, налазимо познати образац:

$$\cos \varphi = aa_1 + bb_1 + cc_1.$$

10. Пројицирање на раван. — Ортогоналном пројекцијом тачке M (сл. 10) на раван σ назива се подножје M' нормале M'M спуштене из тачке M на раван σ.

Докажимо сада, да је *пројекција површине троугла на одређену раван једнака површини троугла помноженој са cos угла нагиба равни троугла према равни пројицирања, тј. угла између нормала на тим равнима.*

Узмимо троугао ABC (сл. 11) и означимо са $A'B'C'$ његову ортогоналну пројекцију на раван σ. Поделимо дати троугао ABC на два дела правом линијом AD паралелном равни σ. Обележимо на дотичној равни са $A'D'$ пројекцију праве AD, која јој је паралелна и једнака, тј.



Сл. 11

$$AD = A'D' \tag{4}$$

Означимо са S_1 површину троугла ABD, која се изражава обрасцем:

$$S_1 = \frac{1}{2} AD \cdot BE$$

где је BE висина спуштена из врха B троугла на његову основицу AD.

Површина S_1' пројекције $A'B'D'$ једнака је

$$S_1' = \frac{1}{2} AD' \cdot B'E'$$

где је $B'E'$ пројекција BE. Стога имамо:

$$B'E' = BE \cos\varphi,$$

где је φ угао нагиба површине датог троугла ABE према равни σ.

Одавде се, на основу једнакости (4), добија закључак:

$$S'_1 = S_1 \cos\varphi \tag{5}$$

На сличан начин доказује се, да је

$$S'_2 = S_2 \cos\varphi, \tag{6}$$

где су S_2 и S_2' површине троуглова ADC и $A'D'C_1$, при чему су њихове висине CG и C_1G'.

Сабирањем једначина (5) и (6), добијамо доказ поменутог става, тј.

$$S' = S'' \cos\varphi,$$

где је $$S' = S_1' + S'_2, \quad S'' = S_1 + S_2.$$

Сваки затворени многоугао у равни може се поделити на низ троуглова. Према томе, доказани резултат важи за сваки затворени многоугао у равни и гласи:

Пројекција површине затвореног равног многоугла на неку другу раван једнака је површини посматраног многоугла помноженој са косинусом угла између обе равни.

III. Примена координата на решавање геометриских проблема

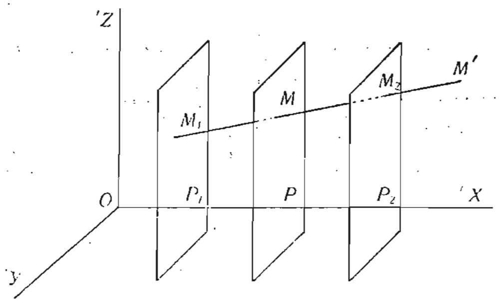
11. Дељење отсечка у датом односу. — Узмимо две тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ. (сл. 12).

Тражи се тачка $M(x, y, z)$, која се одређује из услова

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$$

где је λ дата величина.

Означимо са P_1, P и P_2 ортогоналне пројекције тачака M_1, M и M_2 на апсцисну осу. Пошто је



Сл. 12

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \tag{1}$$

а са слике 12 имамо

$$P_1P = x - x_1, \quad PP_2 = x_2 - x,$$

то први и последњи однос (1) дају:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{2}$$

На сличан начин се добијају, помоћу пројицирања тачака M_1, M и M_2 на осу OY односно OZ, два друга обрасца:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

Ако би се тражила тачка $M'(x', y', z')$, која дели спољашном поделом дати отсечак M_1M_2, онда би размера постала негативна:

$$\frac{M_1M'}{M'M_2} = -\lambda.$$

Одговарајуће координате тачке M' изражавају се тада обрасцима:

$$x' = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y' = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}, \quad z' = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda} \tag{4}$$

Ако ставимо:

$$\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

озрасци (2)—(3) и (4) постају

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 \pm \lambda_2 x_2}{\lambda_1 \pm \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 \pm \lambda_2 y_2}{\lambda_1 \pm \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda z_1 \pm \lambda_2 z_2}{\lambda_1 \pm \lambda_2},$$

где горњи знаци одговарају тачки M, а доњи — тачки M'.

Када λ варира од $-\infty$ до $+\infty$, тачка M описује целу праву линију M_1M_2. За вредност $\lambda = 0$, тачка M се поклапа са тачком M_1, а за бескрајно велико λ тачка M се поклапа са M_2. Међутим, када је $\lambda = 1$, тачка M полови отсечак M_1M_2, а њене координате постају:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

у исто време тачка M' тежи бесконачности.

Претпоставимо, да је отсечак M_1M_2 крак троугла $M_1M_2M_3$. Спојимо тачку M са трећим теменом M_3 (x_3, y_3, z_3). Поделимо сада растојање $M\,M_3$ у размери

$$\frac{MM''}{M''M_3} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Тачка M'' (x'', y'', z'') одређује се помоћу образаца (2)—(3) овако:

$$x'' = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$y'' = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3},$$

$$z'' = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

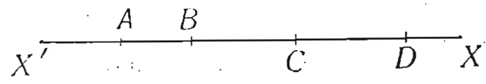
Ако величине λ_1, λ_2, λ_3 сматрамо као променљиве, оне се могу узети за координате неке тачке равни одређене помоћу три дате тачке M_1, M_2 и M_3.

12. Анхармониска и хармониска размера. — Обележимо на некој оси $X'X$ (сл. 13) четири тачке A, B, C, D и одредимо помоћу њих ове четири дужи

$$AC, \quad BC, \quad AD, \quad BD,$$

чији су почеци A и B, а крајеви C и D. Формирајмо сада количник двеју размера посматраних дужи, наиме:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$



(Сл. 13)

Овај се количник зове анхармониска размера или сложена или кратко размера четири тачке.

Уведена анхармониска размера обележава се симболом

$$(ABCD),$$

где прва слова означавају почетке посматраних дужи, а два последња слова — њихове крајеве.

Према томе, увек ћемо се користити ознаком:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}. \tag{5}$$

Ако су посматране тачке тако распоређене, да је њихова анхармониска размера једнака -1, тј.

$$(ABCD) = -1, \tag{6}$$

односна размера четири тачке назива се хармониска, а тачке C и D хармониски-конјуговане са тачкама A и B.

Ако се промене знаци посматраних дужи тако, да C и D буду њихови почеци, а тачке A и B — крајеви, онда ће, због парног броја промене знакова, нова анхармониска размера задржати пређашњу вредност -1, тј.

$$(CDAB) = -1.$$

Према томе долазимо до закључка, да, ако су тачке C и D хармониски-конјуговане са тачкама A и B, онда су обрнуто и тачке A и B хармониски-конјуговане са C и D.

Вредност -1 хармониске размере (6) показује да су обе размере

$$\frac{AC}{BC}, \qquad \frac{AD}{BD},$$

чији је количник негативан, различитих знакова. Одатле излази закључак, да у случају хармониске размере посматране тачке A, B, C и D морају бити друкчије распоређене но на слици 13. Заиста, или се тачка C мора налазити између тачака A и B, или тачка D мора бити између тачака A и B.

Вратимо се сада тачкама M_1, M, M_2 и M' (сл. 12). Јасно је, да оне испуњавају услов

$$(M_1\ M_2\ M\ M') = -1,$$

пошто постоји размера:

$$\frac{M_1 M}{M\ M_2} : \frac{M_1 M'}{M' M_2} = -1$$

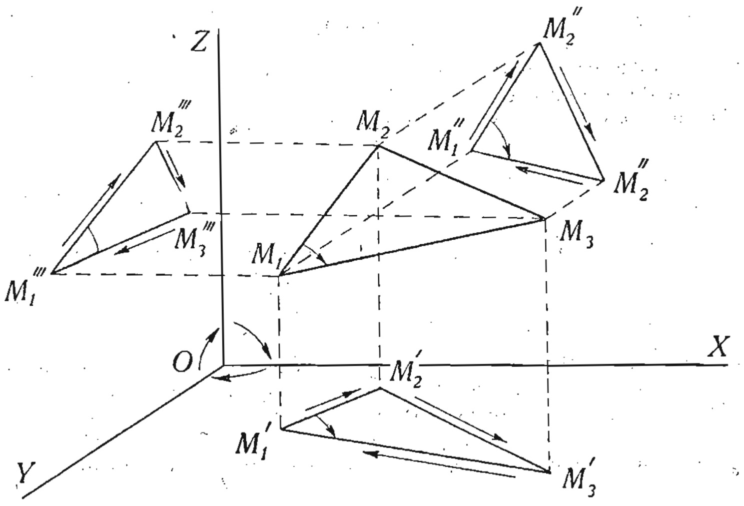
Стога следује, да су тачке M и M' хармониски-конјуговане са M_1 и M_2 и обрнуто.

Према томе, обрасци (2)—(3) и (4) одређују координате два пара хармониски-конјугованих тачака.

13. Површина троугла у простору. — Означимо са

$$M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\quad M_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2),\quad M_3\,(x_3,\ y_3,\ z_3)$$

темена датог троугла у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 14).



Сл. 14

Означимо са Δ тражену површину датог троугла $M_1 M_2 M_3$, а са

$$\Delta_z,\quad \Delta_y,\quad \Delta_x$$

његове пројекције на равнима

$$XOY,\quad ZOX,\quad YOZ$$

Углови, који гради раван троугла $M_1 M_2 M_3$ са координатним равнима, једнаки су угловима нормале на раван посматраног троугла $M_1 M_2 M_3$ са координатним осама.

Означимо ли ове углове са α, β и γ, онда ћемо, према ставу доказаном у n^0 10, добити обрасце

$$\left.\begin{aligned} \Delta_z &= \Delta\cos\gamma, \\ \Delta_y &= \Delta\cos\beta, \\ \Delta_x &= \Delta\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

при чему постоји једнакост

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Стога ако дигнемо на квадрат обе стране једнакости (7) и саберемо резултате, добијамо за тражену површину троугла $M_1M_2M_3$ израз:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2} \tag{8}$$

Полазећи од овог обрасца, лако је изразити посматрану површину или помоћу координата темена овог троугла, или помоћу пројекција његових страна на координатне осе.

Узимајући у обзир смерове углова, који су показани стрелицама, на слици 14, налазимо:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Помоћу ових образаца, тражена површина троугла (8) може се изразити са координатама темена датог троугла.

Међутим, одузимајући елементе прве врсте у свакој од детерминаната (9), добијамо:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_z &= \frac{1}{2}\Big[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\Big], \\ \Delta_y &= \frac{1}{2}\Big[(z_2-z_1)(x_3-x_1)-(z_3-z_1)(x_2-x_1)\Big], \\ \Delta_x &= \frac{1}{2}\Big[(y_2-y_1)(z_3-z_1)-(y_3-y_1)(z_2-z_1)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Обележимо пројекције страна M_1M_3 и M_1M_2 троугла $M_1M_2M_3$ на координатне осе са

$$X,\ Y,\ Z \quad \text{и} \quad X',\ Y',\ Z'.$$

Према томе имамо:

$$\begin{aligned} X &= x_3 - x_1, & Y &= y_3 - y_1, & Z &= z_3 - z_1, \\ X' &= x_2 - x_1, & Y' &= y_2 - y_1, & Z' &= z_2 - z_1. \end{aligned}$$

Због тога обрасци (10) постају:

$$\Delta_z = \frac{1}{2}(X'Y - Y'X) \; ,$$

$$\Delta_y = \frac{1}{2}(Z'X - X'Z) \; ,$$

$$\Delta_x = \frac{1}{2}(Y'Z - Z'Y) \; .$$

Помоћу добијених образаца, тражена површина (8) изражава се пројекцијама две суседне стране датог троугла на координатним осама.

14. Одређивање косинуса правца нормале на две дате праве. — Означимо са α, β, γ углове прве дате праве са координатним осама неког правоуглог, праволиниског система OXYZ, а са α_1, β_1, γ_1 углове друге дате праве са истим координатним осама.

Обележемо са α', β', γ' углове, које гради са координатним осама тражени правац, нормалан на две дате праве.

Односни услови нормалности изражавају се једнакостима

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ a_1a' + b_1b' + c_1c' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

где као и раније, краткоће ради, ознаке a, b, c, a_1 b_1, c_1, a', b', c' обележавају косинусе углова α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α', β', γ'.

Осим тога постоји услов

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1. \qquad (12)$$

Три једначине (11) и (12) довољне су за одређивање тражених вредности a', b', c'. Тако се из једначина (11) добијају обрасци

$$a' = \frac{Lc'}{N} \; , \quad b' = \frac{Mc'}{N} \; ;$$

где су L, M и N величине, које се одређују таблицом (13), на страни 8.

Стављајући нађене вредности a' и b' у једначину (12), налазимо:

$$c' = \pm \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \; .$$

Именилац добијеног обрасца преставља синус угла φ између обе дате праве, који се одређује обрасцем (12), на страни 8. Према томе се косинуси тражених углова изражавају у облику:

$$\left.\begin{aligned} a' = \frac{L}{\sin\varphi} \; , \quad b' = \frac{M}{\sin\varphi} \; , \quad c' = \frac{N}{\sin\varphi} \; , \\ \sin\varphi = \pm \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \; . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

где се од два знака мора узети само један, који одговара смеру угла φ према упутству n⁰ 6, на страни 9.

15. Запремина тетраедра. — Претпоставимо да се темена датог тетраедра налазе у тачкама:

$$M_1 (x_1, y_1, z_1), \quad M_2 (x_2, y_2, z_2),$$
$$M_3 (x_3, y_3, z_3), \quad M' (x', y', z')$$

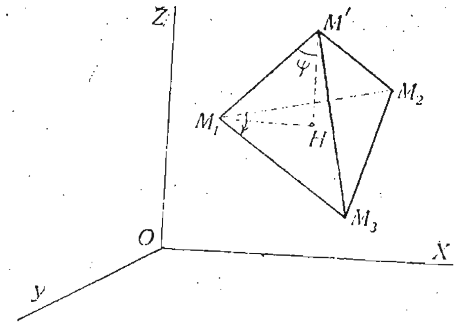
праволуглог праволиниског координатног система OXYZ (сл. 15). Тражена запремина посматраног тетраедра коју ћемо означити са V, изражава се познатим обрасцем

$$V = \frac{1}{3} \Delta h \; , \qquad (14)$$

где је Δ површина троугла $M_1M_2M_3$, а h тетраедрова висина HM' спуштена на основицу $M_1M_2M_3$.

Означимо са φ угао ивице M_1M' са висином HM'. Из правоуглог троугла M_1HM' добијамо:

$$h = d \cos\varphi, \qquad (15)$$



Сл. 15

где смо са d означили дужину ивице M_1M'. Међутим $\cos\varphi$, према n⁰n⁰ 4 и 5, изражава се обрасцем

$$\cos\varphi = \frac{(x' - x_1)\, a' + (y' - y_1)\, b' + (z' - z_1)\, c'}{d} \; , \qquad (16)$$

где a', b', c' означавају косинусе углова висине HM' са координатним осама.

Ови косинуси изражавају се помоћу образаца (13), као косинуси нормале HM' на две ивице M_1M_2 и M_1M_3. Пошто се угао између њих рачуна у позитивном смеру од ивице M_1M_2 до ивице M_1M_3, односне вредности L, M и N одређују се, према n⁰ 6, таблицом

$$\begin{array}{ccc} L & M & N \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} \dfrac{x_2 - x_1}{d_3} & \dfrac{y_2 - y_1}{d_3} & \dfrac{z_2 - z_1}{d_3} \\[2ex] \dfrac{x_3 - x_1}{d_2} & \dfrac{y_3 - y_1}{d_2} & \dfrac{z_3 - z_1}{d_2} \end{vmatrix}$$

где су d_2 и d_3 дужине ивице M_1M_3 и M_1M_2.

Одавде, према обрасцима (10), добијамо

$$L=\frac{2\Delta_x}{d_2\,d_3},\quad M=\frac{2\Delta_y}{d_2\,d_3},\quad N=\frac{2\Delta_z}{d_2\,d_3}$$

У посматраном случају знак код $\sin\varphi$ у обрасцима (13) позитиван је и због тога имамо:

$$a'=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad b'=\frac{\Delta_y}{\Delta},\quad c'=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

где Δ има вредност (8). Према томе образац (16) постаје

$$\cos\varphi=\frac{(x'-x_1)\,\Delta_x+(y'-y_1)\,\Delta_y+(z'-z_1)\,\Delta_z}{d\,\Delta}$$

Сменимо нађену вредност $\cos\varphi$ у образац (15), и добијену вредност за h ставимо у израз тражене запремине (14). Према томе налазимо

$$V=\frac{1}{3}\left[(x'-x_1)\,\Delta_x+(y'-y_1)\,\Delta_y+(z'-z_1)\,\Delta_z\right],$$

и с обзиром на обрасце (9), добијамо

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x'-x_1 & y'-y_1 & z'-z_1 & 0\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}$$

Додајући елементима прве врсте одговарајуће елементе друге врсте, добијамо дефинитивно израз:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix} \tag{17}$$

Образац (17) изведен је с нарочитим циљем, да се увек добија позитивна количина за тражену запремину. Али за то морају бити испуњени одређени захтеви, наиме:

Координате врха заузимају прву врсту у детерминанти (17); ред темена основице тетраедра, чије координате чине три наредне врсте детерминанте (17), следује у позитивном смеру кретања око нормале управљене из основице тетраедра у правцу његова врха.

При томе се и врх, и основице тетраедра могу бирати на различите начине, под наглашеним условима.

Тражи се на пример запремина тетраедра са теменима

$$(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1).$$

Узимајући три прве тачке за основицу а последњу као врх, добијамо:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}$$

Узмемо ли за темена основице редом тачке: прву, трећу и четврту, а за врх другу тачку, онда добијамо:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}.$$

Тетраедар са теменима

$$(0,0,0),\ (-1,0,0),\ (0,-1,0)\ (0,0,-1),$$

ако узмемо прво теме као врх, три последња темена за основицу, има запремину

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{6}.$$

16. Услов да четири тачке леже у истој равни. — Горе нађени израз (17) за запремину тетраедра, изражену помоћу координата темена, даје непосредно услов, који морају испуњавати координате четири тачке које леже у једној равни.

Заиста, претпоставимо да су дате четири тачке у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ:

$$M_i\,(x_i,\, y_i,\, z_i),\quad (i=1,\,2,\,3,\,4),$$

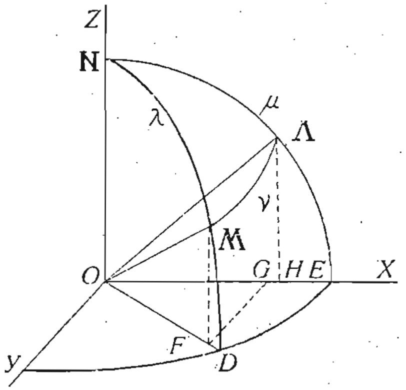
које се налазе у једној равни. Онда се запремина тетраедра, чија се темена налазе у датим тачкама, анулира и због тога се тражени услов добија у облику

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

IV Примена у сферној тригонометрији

17. Основни обрасци. — Обаразац (8), на страни 7, може се применити и у сферној тригонометрији на овај начин.

Узмимо сферни троугао Λ M N (сл. 16). Означимо са λ, μ и ν његове стране, а са Λ, M и N супротне углове. Продужимо лукове μ и λ до 90^0. Кроз њихове крајеве E и D повуцимо највећи круг, чију раван узмимо за координатну раван XOY, с почетком координатног система у средишту 0 лопте, на којој се налази посматрани сферни троугао. Највећи круг NΛE узмимо за координатну раван ZOX, а оса OY нека је на њој нормална.



Сл. 16

Конструишимо координатне многоуглове темена Λ и M, наиме: OHΛ и OGFM. Из правоуглог троугла OHΛ и правоуглих троуглова OFM и OGF, пошто је полупречник лопте једнак јединици, налазимо координате тачака Λ и M у овом облику

$$\Lambda\,(\sin\mu,\ 0,\ \cos\mu),\quad \mathbf{M}\,(\sin\lambda\cos N,\ \sin\mu\sin N,\ \cos\lambda)\,.$$

Са нађеним координатама, угао ΛOM, који је једнак ν, изражава се, на основу обрасца (8), на страни 10, овако:

$$\cos\nu = \cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu\cos N \tag{1}$$

На сличан начин налазе се и два остала обрасца

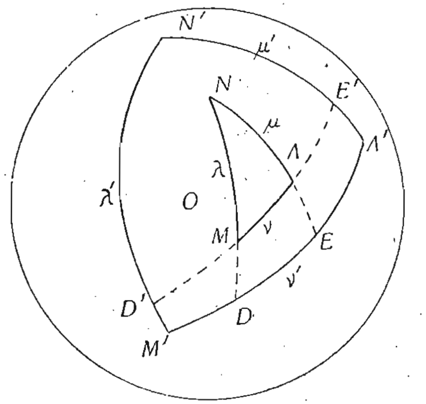
$$\left.\begin{aligned} \cos\mu &= \cos\nu\cos\lambda + \sin\nu\sin\lambda\cos M, \\ \cos\lambda &= \cos\mu\cos\upsilon + \sin\mu\sin\nu\cos\Lambda. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из добијених образаца (1) и (2) закључује се да је *косинус једне стране сферног троугла једнак збиру производа косинуса две друге стране и производа синуса истих страна помноженог косинусом угла између ових страна.*

18. Узајамно поларни сферни троуглови. — Напоменимо да се половима највећих кругова лопте називају крајеви пречника лопте, нормалног на равни посматраног највећег круга.

Посматрајмо сад у датом сферном троуглу ΛMN поларни сферни троугао Λ′M′N′, тј. троугао чија су темена полови за стране датог троугла.

То значи да се темена поларног троугла Λ′M′N′ (сл. 17) налазе у половима највећих кругова лопте са средиштем 0, на којима леже стране λ, μ и ν датог троугла, при чему су њихови полови распоређени на истој полулопти, на којој се налази и дати троугао.



Сл. 17

Оба посматрана троугла називају се узајамно поларним, јер је лако увидети да је дати троугао ΛMN поларни троугао троугла Λ′M′N′. Заиста, према изведеној конструкцији, темена датог троугла ΛMN претстављају полове оног другог троугла.

Између елемената оба узајамно поларна троугла постоје наредне везе.

Продужимо стране λ и μ датог троугла до пресека, у тачкама D и E, са страном ν поларног троугла. Према томе, имамо

$$M'E = M'D + N, \tag{3}$$

јер лук DE мери угао N.

Пошто су M′ и Λ′ полови за стране μ и λ, постоје једнакости

$$M'E = 90^0 \qquad D\Lambda' = 90^0,$$
$$M'E + D\Lambda' = 180^0$$

па, због једнакости (3), добијамо

$$M'D + N + D\Lambda' = 180^0$$

еђутим је збир

$$M'D + D\Lambda' = \nu'. \tag{4}$$

Према томе, из претходне једнакости (4) добија се образац

$$N + \nu' = 180^0. \tag{5}$$

На сличан начин за две друге стране поларног троугла Λ′M′N′ добијају се још ова два обрасца

$$\Lambda + \lambda' = 180^0,\quad M + \mu' = 180^0. \tag{6}$$

Посматрајмо сада троугао ΛMN као поларни за троугао Λ′M′N′. Продужимо страну до пресека, у тачкама D′ и E′ са странама λ' и μ'. Према томе се добијају, очевидно, једнакости

$$\mathrm{ME'} = \nu + \Lambda\mathrm{E'}$$

$$\mathrm{D'\Lambda} + \mathrm{ME'} = 180^0, \qquad \mathrm{D'\Lambda} + \Lambda\mathrm{E'} = \mathrm{N'}.$$

Одатле, а слично и за друге стране троугла ΛMN, налазимо три обрасца

$$\nu + \mathrm{N'} = 180^0, \quad \mu + \mathrm{M'} = 180^0, \quad \lambda + \Lambda' = 180^0. \tag{7}$$

Применимо основне обрасце (1)—(2) на поларни троугао Λ'M'N', наиме:

$$\cos\lambda' = \cos\mu'\cos\nu' + \sin\mu\sin\nu'\cos\mathrm{V'},$$

$$\cos\mu' = \cos\nu'\cos\lambda' + \sin\nu'\sin\lambda'\cos\mathrm{M'},$$

$$\cos\nu' = \cos\lambda'\cos\mu' + \sin\lambda'\sin\mu'\cos\mathrm{N'}.$$

Унесимо овде вредности елемената

$$\lambda',\ \mu',\ \nu',\ \Lambda',\ \mathrm{M'},\ \mathrm{N'},$$

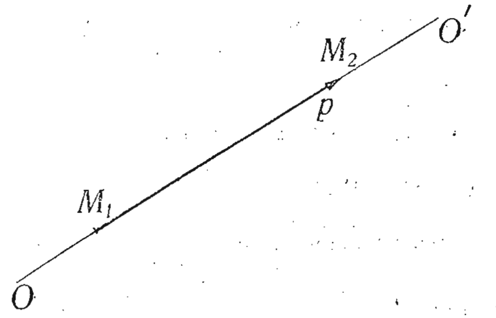
из образаца (5)—(6) и (7). Тада се добијају три нова обрасца за елементе датог сферног троугла ΛMN, и то:

$$\left.\begin{aligned} \cos\Lambda &= \sin\mathrm{M}\sin\mathrm{N}\cos\lambda - \cos\mathrm{M}\cos\mathrm{N}, \\ \cos\mathrm{M} &= \sin\mathrm{N}\sin\Lambda\cos\mu - \cos\mathrm{N}\cos\Lambda, \\ \cos\mathrm{N} &= \sin\Lambda\sin\mathrm{M}\cos\upsilon - \cos\Lambda\cos\mathrm{M}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Добијени обрасци показују, да је *косинус угла сферног троугла једнак разлици производа синуса два друга угла са косинусом супротне стране и производа косинуса истих углова.*

V Примена координата у теорији вектора

19. Вектор. — *Отсечак праве линије одређене дужине, који осим тога има одређени смер у простору, назива се вектор.*



Сл. 18

Узмимо, на пр., на датој оси 00' (сл. 18) отсечак M_1M_2, чији се смер поклапа са смером осе 00', који ћемо сматрати позитивним.

Према томе отсечак M_1M_2 претставља вектор. Његово теме M_1 се зове почетак а M_2 крај вектора. Крај вектора обележава се стрелицом, а вектор једном ознаком која се пише при крају вектора, и означава број, који мери дужину вектора одређеним јединицама дужине. Међутим и у тексту вектор се обележава истом ознаком, која се само стави у заграду или обележи цртом изнад слова, наиме:

$$(p), \qquad \overline{p}.$$

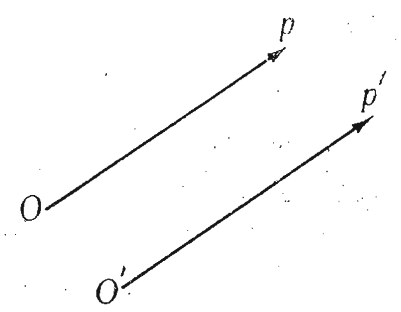
Често се, такође, уместо саме црте, ставља стрелица, $\vec{p}$.

Према томе вектор је потпуно одређен са четири елемента: 1^0) почетком; 2^0 осом на којој се налази; 3^0) смером који одговара позитивном или негативном смеру осе; 4^0) дужином у одређеним јединицама мерења.

Два вектора p и p' су идентична, ако им се почеци и крајеви поклапају, тј. ако имају исти почетак, правац, смер и дужину. Овај се услов бележи симболом геометриске идентичности:

$$\overline{p} \equiv \overline{p}.$$

Два вектора су једнака, или еквипољентна, ако су паралелни, имају исти смер и дужину (сл. 19).



Сл. 19

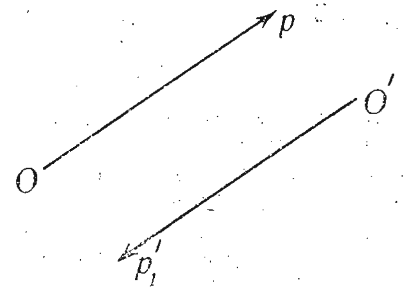
Услов једнакости вектора $\overline{p}$ и $\overline{p'}$ изражава се симболом геометриске једнакости:

$$\overline{p} = \overline{p'}.$$

Ако су два вектора једнаких дужина, паралелни, али имају различите смерове (сл. 20), називају се супротни вектори и то се означава симболом.

$$\overline{p} = -\overline{p'}$$

Најзад, два вектора се зову директно супротна, ако се задовољавајући претходне услове налазе на истој правој линији (сл. 21).



Сл. 20

Најзад, вектор $\overline{p'}$ паралелан датом вектору $\overline{p}$ и истог смера са њим m пута је већи од њега, ако је његова дужина m пута већа. То се пише овако:

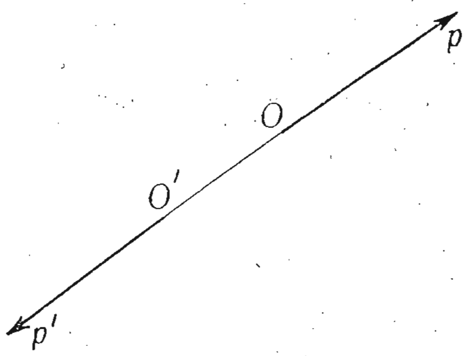
$$\overline{p'} = \overline{mp}$$

20. Геометриски збир. — Појам резултанте многоугла отсечака, наведен на страни 10, проширује се у теорији вектора на овај начин.

Посматрајмо неколико вектора који се налазе у произвољним тачкама простора. Конструишимо у ма којој тачки простора, узимајући је као почетак, вектор који би био једнак једном од датих вектора. Из краја конструисаног вектора, као из почетка, поставимо вектор једнак неком другом од датих вектора и т.д. до последњег од њих.

Добијени многоугао се зове многоугао датих вектора.

Почетак првог вектора се зове почетак дотичног многоугла, а крај последњег вектора назива се крај истог многоугла.



Сл. 21

Ако је многоугао датих вектора отворен, онда се вектор, који спаја његов почетак са крајем, зове геометриски збир датих вектора. Ако је њихов многоугао затворен, геометриски збир датих вектора једнак је нули.

Из геометриске конструкције непосредно следују особине геометриског збира, наиме:

1⁰ Геометриски збир не зависи од реда сабирања датих вектора;

2⁰ Геометриски збир се не мења, ако се смени при сабирању неколико датих вектора са њиховим геометриским збиром;

3⁰ Геометриски збир се множи одређеним бројем, ако се са истим бројем помножи сваки од датих вектора.

Ако претпоставимо да су дати n вектора

$$\overline{p_1},\ \overline{p_2},\ \ldots,\ \overline{p_n}, \qquad (1)$$

а $\overline{S}$ означава њихов геометриски збир, онда се он пише симболички овако:

$$\overline{S} = \overline{p_1} + \overline{p_2} + \ldots + \overline{p_n}, \qquad (2)$$

или кратко

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{p_i}, \qquad (S) = \sum_{i=1}^{n} (p_i).$$

Наведимо ове специјалне случајеве:

4⁰ Геометриски збир два вектора једнак је дијагонали паралелограма, чије су две суседне стране једнаке датим векторима.

5⁰ Геометриски збир трију вектора претставља дијагоналу паралелопипеда чије су три суседне ивице једнаке датим векторима.

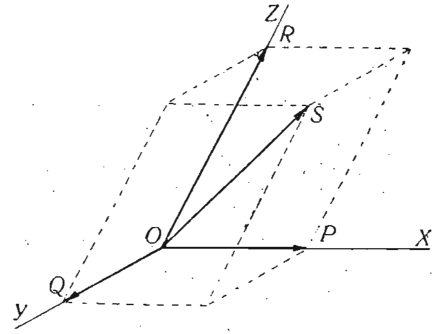
21. Растављање вектора. — Обрнут проблем геометриском сабирању вектора претставља растављање вектора у збир неколико вектора, који се зову његове компоненте. Овај проблем је неодређен слично проблему растављања неког броја у збир неколико бројева.

Међутим посматрани проблем постаје одређен, ако се уведу извесни накнадни услови.

Узмимо на пример да дати вектор треба раставити у два вектора одређеног правца, који са датим леже у истој равни. Постављени проблем

добија одређено решење, које се налази помоћу конструкције паралелограма са датом дијагоналом, а чије две суседне стране имају дати правац.

Проблем растављања датог вектора у три вектора у простору, који морају имати одређени правац такође је одређен. Он се решава помоћу конструкције паралелопипеда са датом дијагоналом, чије суседне ивице имају дате правце.



Сл, 22

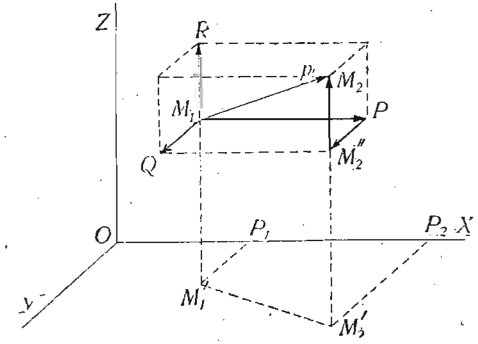
Заиста, из почетка O датог вектора повуцимо дате правце O X, OУ и OZ (сл. 22).

Најзад, кроз крај вектора $\overline{S}$ повуцимо равни паралелне равнима УOZ, ZOX и XOУ. Оне ће одвојити, на датим правцима, тражене векторе P, Q и R.

22. Аналитичка дефиниција вектора. — Вектор се одређује аналитички помоћу шест величина, и то: са три координате почетка и три координате краја.

Заиста, обрасци (6) и (7), на страни 6, дају дужину вектора M_1M_2 (сл. 5), његов правац и смер, ако је условљено, да тачка M_1 (x_1, y_1, z_1) буде почетак, а M_2 (x_2, y_2, z_2) крај вектора.

Може се вектор M_1M_2 одредити и на други начин, ако, место координата краја M_2, уведемо пројекције вектора на три осе правоуглог праволиниског координатног система OXУZ (сл. 23). Конструишимо у ту сврху координатне многоуглове тачака, M_1 и M_2, наиме



Сл. 23

$$OP_1M'_1M_1 \quad \text{и} \quad OP_2M'_2M_2.$$

Сада уведимо ознаке

$$x_2 - x_1 = X,\ y_2 - y_1 = У,\ z_2 - z_1 = Z,$$

где су X,У,Z пројекције векто- [illegible] на координатне осе.

Према томе, означујући са p вектор M_1M_2, наведени обрасци (6) и (7), на страни 6, постају:

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Добијене обрасце могуће је протумачити на овај начин.

Повуцимо из почетка вектора M_1 три вектора паралелно координатним осама, наиме:

$$\overline{M_1P}=\overline{X}, \quad \overline{M_1Q}=\overline{Y}, \quad \overline{M_1R}=\overline{Z}\,.$$

Тада се из обрасца (3) види, да је вектор $\overline{p}$ р е з у л т а н т а три уведена вектора, одн. њихов г е о м е т р и с к и збир.

Вектори $\overline{X}$, $\overline{У}$, $\overline{Z}$ називају се о р т о г о н а л н е к о м п о н е н т е вектора $\overline{p}$.

Када су дате ортогоналне компоненте $\overline{X}$, $\overline{У}$, $\overline{Z}$ вектора $\overline{p}$, онда се његова дужина и правац одређују помоћу образаца (3) и (4). Ови обрасци показују да је дужина p једнака дијагонали правоуглог паралелопипеда чије су суседне ивице дате компоненте. Осим тога види се из образаца (4), да се вектор $\overline{p}$ поклапа са том дијагоналом, не само по својој дужини, него и по положају.

Исти обрасци (3) и (4) дају

$$X=p\cos\alpha, \quad Y=p\cos\beta, \quad Z=p\cos\gamma \tag{5}$$

Према томе ако је позната дужина вектора $\overline{p}$ исто као и његов правац одређен угловима α, β, γ, то обрасци (5) дају, обрнуто, величине компонената $\overline{X}$, $\overline{У}$, и $\overline{Z}$.

Координате почетка (x_1, y_1, z_1) вектора $\overline{p}$ и његове компоненте $\overline{X}$, $\overline{У}$, $\overline{Z}$, дуж три узајамно управне осе, називају се *координатама* дотичног вектора.

23. Аналитичка дефиниција геометриског збира. — Узмимо систем раније поменутих вектора (1) и њихов геометриски збир (2).

Обележимо са

$$\overline{X}_i, \quad \overline{Y}_i, \quad \overline{Z}_i \tag{6}$$

ортогоналне компоненте вектора $\overline{p}_i$ дуж оса правоуглог праволиниског координатног система OXУZ. Ако означимо са α_i, β_i и γ_i углове, које вектор $\overline{p}_i$ заклапа са координатним осама OX, OУ и OZ, онда, према обрасцима (5), добијамо:

$$X_i=p_i\cos\alpha_i, \quad Y_i=p_i\cos\beta_i, \quad Z_i=p_i\cos\gamma_i.$$

На овај се начин сваки од датих вектора раставља у три компоненте (6) у правцу координатних оса.

Како смо навели, вредност геометриског збира је иста за сваки ред сабирања датих вектора. Према томе могу се прво сабрати алгебарски пројекције вектора (6) на свакој од координатних оса. Означимо ли њихове збирове са

$$X, \quad У, \quad Z, \tag{7}$$

добијамо обрасце

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i, \quad Z=\sum_{i=1}^{n}Z_i\,.$$

Сада се тражени геометриски збир S налази геометриским сабирањем три узајамно управна вектора (7), према обрасцима (3) и (4), наиме

$$S=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

где су α, β и γ углови, које вектор $\overline{S}$ заклапа са координатним осама.

24. Скаларни производ. — Скаларни производ R двају вектора $\overline{p}$ и $\overline{p'}$ бележи се симболом

$$\overline{p}\times\overline{p'},$$

а изражава ову алгебарску вредност

$$R=pp'\cos(p, p').$$

Овај производ израчунава се помоћу координата на овај начин. Означимо ли са X, У, Z односно X′, У′, Z′ пројекције посматраних вектора p и $\overline{p'}$, на осе правоуглог праволиниског координатног система OXУZ, имаћемо:

$$\left.\begin{aligned} &p=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\\ &\cos(p,x)=\frac{X}{p}, \quad \cos(p,y)=\frac{Y}{p}, \quad \cos(p,z)=\frac{Z}{p},\\ &p'=\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}\\ &\cos(p',x)=\frac{X'}{p'}, \quad \cos(p',y)=\frac{Y'}{p'}, \quad \cos(p',z)=\frac{Z'}{p'}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Смењујући уочене вредности косинуса углова у израз R, пошто је

$$\cos(p, p')=\cos(p,x)\cos(p',x)+\cos(p,y)\cos(p',y)+\cos(p,z)\cos(p',z),$$

налазимо тражени израз скаларног производа у облику

$$R=XX'+УУ'+ZZ'.$$

Добијени образац показује, да је скаларни производ два вектора једнак нули, или кад је један од вектора једнак нули, или кад је cos угла између датих вектора једнак нули. Стога се услов нормалности оба вектора $\overline{p}$ и $\overline{p'}$ изражава алгебарском једнакошћу

$$XX'+УУ'+ZZ'=0.$$

25. Геометриски производ. — *Геометриски* или *векторски производ* G двају вектора $\overline{p}$ и $\overline{p'}$ бележи се симболом

$$\overline{p} \wedge \overline{p'}$$

а изражава се алгебарском вредношћу

$$G = pp' \sin (p, p').$$

Овај производ се у геометриском смислу може протумачити као површина паралелограма конструисаног над датим векторима као странама повученим из једне исте потпуно произвољне тачке простора. Другим речима производ претставља двоструку површину троугла, чије су суседне стране дати вектори.

Пошто је

$$\sin(p, p') = \sqrt{1 - \cos^2 (p, p')}\,,$$

то на основу претходних образаца (8), налазимо

$$G = \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)(X'^2+Y'^2+Z'^2) - (XX'+YY'+ZZ')^2}$$

Добијени образац се пише и овако

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \qquad (9)$$

где се L, M и N одређују, слично поступку изложеном у n⁰ 6, помоћу таблице

$$\begin{array}{c} L \quad M \quad N \\ \left| \begin{array}{ccc} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{array} \right| \end{array}$$

Према томе је:

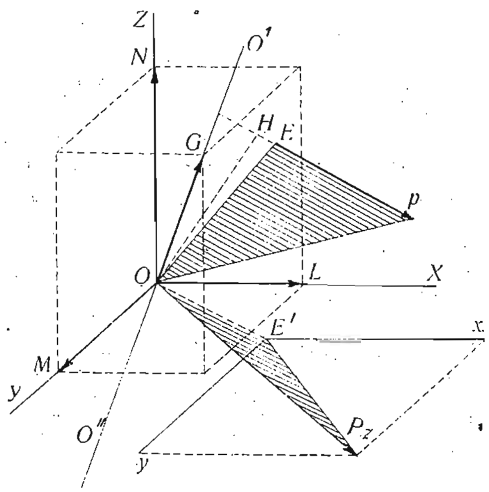
$$L = YZ' - ZY'$$
$$M = ZX' - XZ'$$
$$N = XY' - YX'$$

Геометриски производ G претставља се помоћу новог вектора, чија дужина има толико одређених јединица дужине, колико односна површина својих јединица. Овај вектор $\overline{G}$ поставља се дуж осе, која је повучена из произвољне тачке поменутог паралелограма, али нормално на његову раван. Најзад, на оси се разликују позитивни и негативни смер према позитивном и негативном смеру угла између вектора $\overline{p}$ и $\overline{p'}$; вектор $\overline{G}$ конструише се у позитивном смеру, ако је посматрани угао позитиван а у негативном у супротном случају.

Према томе имамо једнакост

$$\overline{p} \wedge \overline{p'} = -\overline{p'} \wedge \overline{p}.$$

26. Моменат вектора. — Означимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ, (сл. 24) са $\overline{E}$ (x, y, z) тачку, у којој се налази почетак вектора $\overline{p}$. *Моментом вектора* $\overline{p}$ *у односу на тачку O*, коју смо узели за координатни почетак, назива се *производ p и дужине нормале OH спуштене на вектор* $\overline{p}$ *из тачке O*. Овај је производ једнак двострукој површини троугла ΔOEp, тј. претставља геометриски производ вектора $\overline{p}$ са потегом $\overline{r}$ његовог почетка E, према дефиницији n⁰ 25.



Сл. 24

Осом момента назива се права O''O' управна на раван троугла OEp. При томе је позитиван смер осе онај, око којег вектор $\overline{p}$ тежи окренути нормалу OH у позитивном смеру обртања око осе O''O' за посматрача смештеног по оси са ногама у тачки O а главом у O'.

Према наведеном, одговарајући моменат се претставља вектором $\overline{G}$, који се поклапа у посматраном случају са позитивним правцем осе O''O'.

Пошто за дефиницију момента $\overline{G}$ долази у обзир страна OE троугла OEp, која претставља потег r, дужина траженог момента изражава се обрасцем (9), где се L, M, N одређују помоћу таблице

$$\begin{array}{c} L \quad M \quad N \\ \left| \begin{array}{ccc} x & y & z \\ X & Y & Z \end{array} \right| \end{array}$$

Одатле добијамо

$$L = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX.$$

Лако је протумачити сваки од ових образаца.

Заиста, у сагласности са датом дефиницијом момента, израз N претставља момент односно координатног почетка вектора $\overline{p_z}$, који се налази у координатној равни XOY, а претставља пројекцију вектора $\overline{p}$ на исту раван. Стога момент N претставља двоструку површину троугла OE'P$_z$, где је E' пројекција тачке E на раван XOY, а осе E'x и Ey су паралелне координатним осама OX и OY.

Одатле, према n⁰ 10, добијамо

$$N = G \cos (G, z),$$

тј. вектор $\overline{\mathrm{N}}$, који се налази дуж позитивног правца осе OZ, претставља пријекцију вектора $\overline{\mathrm{G}}$ на осу OZ.

Слично налазимо два друга обрасца

$$\mathrm{L} = \overline{\mathrm{G}} \cos(\mathrm{G}, x), \quad \mathrm{M} = \mathrm{G} \cos(\mathrm{G}, y).$$

Одговарајући вектори $\overline{\mathrm{L}}$, $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{\mathrm{N}}$ називају се моменти вектора p у правцу осе OX, OY и OZ и налазе се на њима.

Пошто су $\overline{\mathrm{L}}$, $\overline{\mathrm{M}}$, $\overline{\mathrm{N}}$ пројекције вектора G на осе и могу се сматрати као његове ортогоналне компоненте (в. n⁰n⁰ 21, 22), онда образац (9) показује да је вектор G геометриски збир вектора $\overline{\mathrm{L}}$, $\overline{\mathrm{M}}$ и $\overline{\mathrm{N}}$.

Добијени резултат може се формулисати друкчије овако:

Момент вектора, у односу на дату тачку, претставља геометриски збир момената датог вектора у правцу три узајамно управне осе, које пролазе кроз ту тачку.

Примедба. — Према дефиницији момента вектора у односу на тачку (в. n⁰ 26, стр. 32) геометриски је очевидно да момент има исту вредност за све векторе, чији се почеци налазе на правој која се поклапа са осом свих посматраних вектора (тзв. вектора везаних за исту осу, тј. који клизе дуж исте праве). Овај закључак следује и непосредно из претходних аналитичких образаца, ако се узме у обзир да се наведени моменти мере двоструком површином једнаких троуглова са једнаким основицама и истим висинама.

VI Геометриско тумачење једначина

27. Графичко претстављање једначина помоћу координата. — Проучимо једначину, која одређује једну од координата тачке у простору као функцију две друге координате, на пр.

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

Према томе, за сваки пар специјалних вредности апсцисе и ординате једначина (1), или (2) одређује једну или неколико различитих вредности коте z.

Геометриско место одговарајућих тачака, у неком правоулом праволиниском координатном систему OXYZ, за све могуће различите вредности апсциса и ордината, претставља једну површину. Добијена површина је геометриски претставник дате једначине (1), или (2) у посматраном координатном систему.

Пошто координате x, y, z при томе добијају различите вредности, називају се т е к у ћ и м к о о р д и н а т а м а.

28. Раван. — Најпростији пример даје једнакост

$$z = \mathrm{C}, \tag{3}$$

где је C нека стална величина.

Очевидно је, да је геометриски претставник једначине (3) раван, која је паралелна координатној равни XOY, а налази се на растојању C од ње. Заиста, једначина (3) одређује геометриско место тачака, чије је растојање од равни XOY стална величина C.

Узмимо сада линеарну једначину општег облика

$$z = ax + by + c \tag{4}$$

Лако је увидети да ова површина (4) сече координатну раван YOZ (сл. 25) дуж праве линије EF чија је једначина

$$z = by + c, \tag{5}$$

где је c кота тачке F.

Истовремено површина (4) сече координатну раван ZOX дуж праве линије

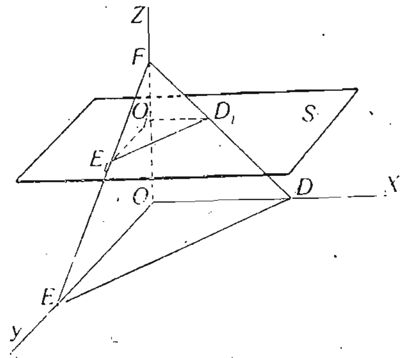
$$z = ax + c, \tag{6}$$

која пролази кроз пређашњу тачку F.

Означимо ову праву са DF.

Праве линије EF и DF одвајају од оса OY и OX отсечке OE и OD:

$$\mathrm{OE} = -\frac{c}{b}, \quad \mathrm{OD} = -\frac{c}{a}. \tag{7}$$



Сл. 25

Најзад, површина (4) сече координатну раван XOY по правој линији

$$ax + by + c = 0, \tag{8}$$

која спаја тачке E и D, пошто одваја баш поменуте отсечке OE и OD од оса OY и OX.

Према томе дата површина (4) сече координатни систем дуж троугла EDF.

Узмимо, најзад, неку раван S паралелну координатној равни XOY, на растојању $\mathrm{OO}_1 = z_1$ од ње. Она ће сећи дату површину (4) по правој линији у равни S, која се добија када се у једначини (4) z смени са z_1 тако, да одговарајућа једначина изгледа

$$ax + by - z_1 + c = 0 \tag{9}$$

Добијена права сече координатне равни ZOX и YOZ у тачкама:

$$\left(\frac{z_1 - c}{a}, \ 0, \ z_1\right), \qquad \left(0, \frac{z_1 - c}{b}, \ z_1\right). \tag{10}$$

Међутим из једначина (5) и (6) одмах се види, да координате (10) припадају тачкама D_1 и E_1.

Због тога, пресек равни S са посматраном површином (4), одређен једначином (9), геометриски претставља праву линију $\mathrm{E}_1\mathrm{D}_1$, на површини поменутог троугла EDF.

Пошто је z_1 потпуно произвољно растојање равни S од XOY, то је геометриски претставник дате површине (4) геометриско место правих линија, које клизе по троуглу EDF паралелно правој ED, тј. претставља раван уоченог троугла.

29. Лопта. — Узмимо, као трећи пример, једначину

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

где је R стални коефицијент.

Написана једначина показује, да је растојање тачке (x, y, z) од координатног почетка (0, 0, 0) стална количина R.

Очевидно је да је геометриски претставник одговарајућег геометриског места тачака лопта, описана полупречником R око координатног почетка.

Лако је утврдити, на сличан начин, да једначина

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2,$$

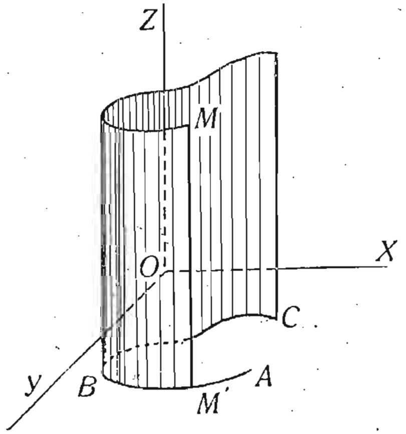
где су α, β, γ и R четири сталне количине, одређује лопту, која је описана полупречником R око тачке (α, β, γ).

30. Цилиндар. — Проучимо једначину

$$F(x, y) = 0, \tag{11}$$

у којој нема једне од координата, наиме z.

У координатној равни XOY (сл. 26) правоуглог праволиниског координатног система OXYZ дата једначина (11) одређује неку криву линију AM′BC.



Сл. 26

Пошто једначина (11) не зависи од z, то за сваки скуп датих вредности x и y, које припадају одређеној тачки M′ у равни XOY, одговара произвољан број тачака у простору са истим апсцисама и ординатама, али са различитим котама z. Другим речима, свакој тачки M′ криве AM′BC, у равни XOY, одговарају све произвољне тачке праве линије M′M, која је паралелна оси OZ. Геометриско место свих ових правих линија претставља такозвану ц и л и н д а р с к у површину, која се простире бескрајно на обе стране равни XOY и сече је по кривој линији AM′BC.

Права линија M′M је г е н е р а т р и с а ц и л и н д р а, а крива AM′BC претставља његову д и р е к т р и с у.

Према томе цилиндарска површина постаје кретањем праве генератрисе M′M по директриси AM′BC тако, да остаје увек паралелна оси OZ.

Претпоставимо да је једначина (11) линеарна, тј. да има облик

$$Ax + By + C = 0 \tag{12}$$

где су A, B и C стални коефицијенти. Тада се цилиндар претвара у раван паралелну оси OZ и сече координату раван XOY по правој линији (12).

На исти начин једначине

$$\Phi(x,z) = 0, \qquad \Psi(y,z) = 0,$$

слично једначини (11), одређују ц и л и н д а р с к е површине, чије су генератрисе паралелне оси OY односно OX, а директрисе у координатним равнима ZOX односно YOZ.

31. Конусна површина. — Узмимо сада хомогену једначину у облику

$$\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{13}$$

где је Φ ма која функција од $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$.

Ставимо ради геометриског тумачења једначине (13), да је:

$$\frac{x}{z} = a, \qquad \frac{y}{z} = b,$$

што се може друкчије написати и овако:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}. \tag{14}$$

Одавде следује, да је једначина (13) задовољена вредностима x, y, z, које се одређују једначинама (14) под условом, да коефицијенти a и b задовољавају једнакост

$$\Phi(a,b) = 0. \tag{15}$$

Једнакости (14) дају две линеарне једначине по текућим координатама. Дакле, према n^0 28, једначине (14) претстављају скуп две равни, које у пресеку одређују једну праву линију. Пошто су једначине (14) задовољене координатама почетка (0, 0, 0), та права пролази кроз координатни почетак. За различите вредности коефицијената a и b, добијају се различите праве линије, које пролазе кроз координатни почетак. Међутим, под условом (15) морају се узети само оне праве, чији га коефицијентни задовољавају. Одговарајуће геометриско место правих линија, које све пролазе кроз координатни почетак, одређује, дакле, површину конуса са теменом у координатном почетку и са тзв. к а р а к т е р и с т и ч н о м једначином (15).

Та конусна површина претстављена је датом хомогеном једначином (13).

32. Класификација површина. — Површине, према својим једначинама у правоуглим праволиниским координатним системима, деле се на алгебарске и трансцендентне. Алгебарске површине одређују се помоћу алгебарских једначина, док се трансцендентне површине не могу помоћу њих претставити.

Свака алгебарска једначина може се свести на неку рационалну једначину по текућим координатима x, y, z, т. ј. има облик

$$\sum A_{\alpha\beta\gamma} \; x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = 0\,, \tag{16}$$

где су индекси α, β и γ цели позитивни бројеви.

Степен рационалне алгебарске једначине (16) зове се ред површине.

Према томе алгебарске површине деле се на различите редове према степену својих једначина.

Тако на пример, раван претставља алгебарску површину првог реда, јер је њена једначина (4) првог степена по текућим координатама.

Лопта претставља алгебарску површину другог реда.

Општи облик једначине површина другог реда изражава се овако

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy +$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

и има десет коефицијената. Они се своде на девет различитих, ако поделимо све чланове посматране једначине са једним од коефицијената.

Узмимо сад једначину

$$\varphi_0(x^2+y^2+z^2)^2 + 2\varphi_1(x^2+y^2+z^2) + \varphi_2 = 0,$$

где ознаке φ_0, φ_1 и φ_2 обележавају целе функције текућих координата, чији степен одговара доњем индексу. Дакле, површина претстављена горњом једначином четвртог је реда под претпоставком $\varphi_0 \gtreqless 0$, или трећег реда, кад је $\varphi_0 \equiv 0$.

Све такве површине називају се циклидама, чију је теорију Дарбу детаљно проучио.

33. Растављање површине у неколико површина. — Претпоставимо да је нека површина дата једначином

$$F(x, y, z) = 0, \tag{17}$$

која се може написати у облику

$$\Phi(x, y, z) \,.\, \Psi(x, y, z) = 0, \tag{18}$$

где су Φ и Ψ два чиниоца на које се раставља функција $F(x, y, z)$.

Лако се може увидети, да се дата површина (17) раставља у две површине

$$\Phi(x, y, z) = 0, \qquad \Psi(x, y, z) = 0. \tag{19}$$

Заиста, свака тачка површине (17) припада, или првој, или другој површини (19), због облика (18) дате једначине (17).

По себи се разуме, да и обрнуто, свака тачка једне од површина (19) задовољава идентички једначину (17), тј. припада површини исте.

34. Свежањ површина. — Узмимо две различите површине:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{20}$$

Саставимо нову једначину у облику

$$F - \kappa\,\Phi = 0, \tag{21}$$

где је κ сталан произвољан коефицијент. Добијена једначина (21) одређује неограничени број различитих површина за различите вредности параметра κ.

Скуп свих таквих површина назива се свежањ површина. Дате површине (20) припадају истом свежњу, при чему прва површина (20) одговара нултој вредности параметра κ, а друга површина (20) његовој вредности ∞.

Свака површина свежња (21) пролази кроз линију пресека обе површине (20), јер координате тачака криве линије, која је одређена скупом једначина (20), задовољавају идентички једначину (21).

Лако је увидети, да *кроз сваку тачку простора, ван линије пресека површина (20), пролази само једна од површина свежња (21).*

Заиста, узмимо произвољну тачку простора (x_0, y_0, z_0). Да би нека површина свежња (21) пролазила кроз уочену тачку, њене координате морају задовољавати услов:

$$F(x_0, y_0, z_0) - \kappa\,\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Одатле се добија вредност

$$\kappa = \frac{F\,(x_0, y_0, z_0)}{\Phi\,(x_0, y_0, z_0)}\,,$$

коју ћемо кратко обележити овом ознаком

$$\kappa = \frac{F_0}{\Phi_0}\,. \tag{22}$$

Одговарајућа површина свежња (21) постаје

$$\Phi_0 F - F_0 \Phi = 0.$$

Добијени резултат одређује само једну површину, јер образац (22) даје за κ само једну једину вредност. Изведени закључак важи за тачке, које би се налазиле ван линије пресека површина (20), пошто вредност параметра κ постаје, за сваку тачку тог пресека, неодређена $\dfrac{0}{0}$.

35. Криве линије у простору. — Узмимо систем од две различите једначине

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0. \tag{23}$$

Свака од њих засебно одређује неку површину. Према томе, скуп обе једначине претставља геометриско место тачака, које припадају обема површинама, тј., како смо већ горе навели, линију пресека ових површина.

Према томе, две једначине по текућим координатама одређују криву линију у простору, реалну или имагинарну, што зависи од узајамног положаја површина, претстављених датим једначинама (23).

Тако, на пример, две линеарне једначине одређују две равни. Ако оне нису паралелне, онда њихов скуп претставља једну реалну праву линију.

Једна лопта и раван, чије је растојање од средишта лопте мање од полупречника лопте, одређују круг у простору.

Под претпоставком да су једначине (23) различите, могу се решити по двема од текућих координата. Претпоставимо да се једначине (23) могу решити по y и z. Тада се добијају обрасци у облику

$$y = f_1(x), \qquad z = f_2(x),$$

или уопште две једначине:

$$\varphi_1(x, y) = 0, \qquad \varphi_2(x, z) = 0. \tag{24}$$

Добијени резултат претставља два цилиндра, чије су генератрисе паралелне оси OZ односно OY. У исто време једначине (24) могу се тумачити као пројекције дате криве линије (23) на координатне равни XOY и ZOX.

Према томе, крива линија (23) одређена је, у правоуглом праволиниском координатном систему, пресеком два цилиндра са узајамно управним генератрисама или помоћу две пројекције посматране криве линије (23) на две координатне равни.

Узмимо, на пример, два кружна цилиндра истог полупречника R:

$$\left.\begin{aligned}(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\\ (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Свака од једначина (25) одређује само по један круг у координатним равнима XOY и YOZ.

Али је геометриски очевидно да се оба цилиндра (25) секу по двема елипсама, те једначине (25) морају одређивати криву линију у облику њиховог скупа. То се одмах види, пошто пројекција криве (25) на координатној равни ZOX, претставља скуп две праве линије, чије се једначине добијају елиминацијом y из једначина (25) у облику

$$(x - a)^2 - (z - c)^2 = 0.$$

Најзад, у извесним случајевима две једначине (23) корисно је претставити у облику три једначине увођењем помоћног промењљивог параметра-

Узмимо, на пр. три једначине:

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = \frac{1}{k}\,\theta \tag{26}$$

Елиминишући θ из прве две једначине и из прве и треће, добијамо две једначине:

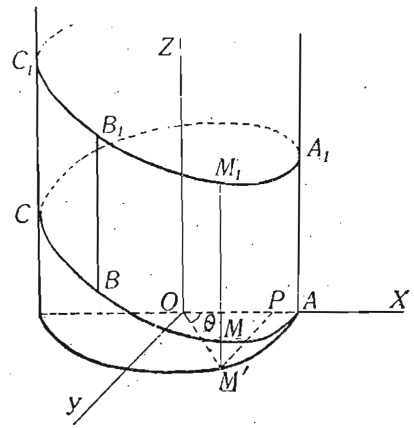
$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad x = a\cos kz, \tag{27}$$

које одређују пројекције посматране криве линије (26) на координатним равнима XOY и ZOX.

Према томе је крива (26) одређена пресеком кружног цилиндра полупречника a, чије су генератрисе паралелне оси OZ, и косинусоидног цилиндра са генератрисама паралелним оси OY.

Према томе, једначине (26) претстављају спиралну завојницу (сл. 27) нацртану на кружном цилиндру полупречника a, која полази из тачке A на оси OX. Посматрана крива линија састоји се од сличних завоја $AMBCA_1$ са сталном висином хода AA_1 завојнице, једнаком $\dfrac{2\pi}{k}$. Ова висина хода завојнице је иста за растојање сваке две тачке узастопних завоја M и M_1, које се налазе на истој генератриси $M'M$ цилиндра одређеног првом једначином (27), наиме:

$$AA_1 = MM_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots\ldots$$



Сл. 27

Међутим, полазне једначине посматране завојнице (26), где θ одређује поларни угао подножја M' генератрисе $M'M$, дозвољавају да се лако конструишу тачке завојнице. Заиста, прве две једначине (26) дају апсцису OP и ординату PM' тачке M завојнице, а последња једначина (26) одређује коту $M'M$.

36. Класификација кривих линија у простору. — Ако су једначине (23), које служе за одређивање криве линије, алгебарске, одговарајућа крива линија назива се а л г е б а р с к а к р и в а л и н и ј а.

Друге криве линије, које нису одређене алгебарским једначинама, називају се т р а н с ц е н д е н т н и м.

Претпоставимо да су једначине (23) алгебарске криве линије, једна m-ог, а друга n-ог степена. Тада је р е д к р и в е (23) п р о и з в о д с т е п е н а mn о б е ј е д н а ч и н е (23).

VIII Проблеми аналитичке геометрије

37. Два основна питања. — Проблеми аналитичке геометрије у простору своде се на ова два основна питања:

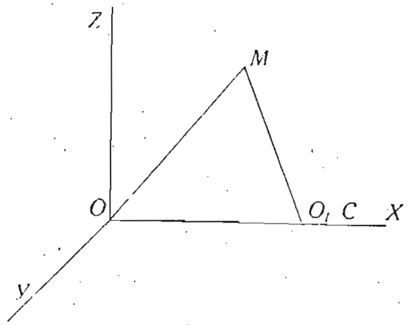
1^0 *Наћи геометриско тумачење сваке једначине по текућим координатама и проучити особине одговарајућих геометриских облика.*

2^0 *Извести једначине датих облика из њихових геометриских особина.*

Циљ ових радња је, да се геометриски проблеми решавају помоћу једначина посматраних геометриских облика. На овакав начин проучавамо равни, праве линије и различите површине. У претходним n^0n^0 26—35 показали смо најпростије случајеве геометриског тумачења једначина. Сад ћемо навести примере за образовање једначина, полазећи од датих геометриских података.

Решимо за то ово питање:

Тражи се геометриско место тачака чији је однос растојања од две дате тачке стална величина.



Сл. 28

Узмимо за апсцисну осу праву линију, која спаја обе дате тачке, а за координатни почетак O прву од датих тачака (сл. 28). Означимо са x_1 апсцису друге дате тачке O_1, са k дати однос, а текуће координате тачке M траженог геометриског места обележимо са x, y, z.

Тражено геометриско место тачака M задовољава услов

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2[(x - x_1)^2 + y^2 + z^2].$$

Добијена једначина се може написати и овако:

$$\left(x + \frac{k^2 x_1}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{k^2 x_1^2}{(1 - k^2)^2}.$$

Према томе тражено геометриско место претставља лопту, чије се средиште C налази на оси OX и дели спољашњом поделом растојање између датих тачака O и O_1, у размери $\frac{OC}{CO_1} = -k^2$.

Међутим полупречник нађене лопте једнак је апсолутној вредности односа апсцисе средишта $-\frac{k^2 x_1}{1 - k^2}$ и k.

38. Дипенов проблем. — За други пример узмимо Дипенов проблем, наиме:

Тражи се геометриско место тачака, које описује одређена тачка неке дате дужи која се креће тако, да се свака од три уочене тачке на њој увек мора кретати само у једној истој од три узајамно управне дате равни.

Узмимо дате равни за три координатне равни правоуглог праволиниског координатног система OXYZ (сл. 29). Нека је дата дуж ABC, која

се мора кретати тако да њена тачка A буде увек у равни YOZ, тачка B у равни XOY, а тачка C у равни ZOX.

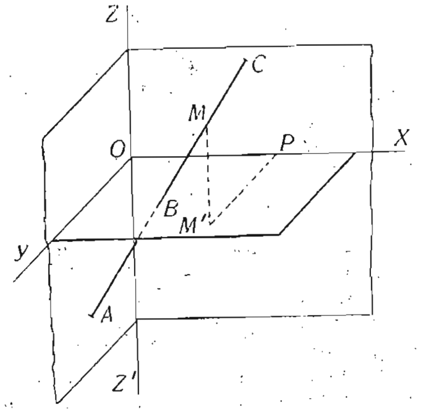
Уведимо за дужину делова дате дужи AC ове ознаке:

$$\overline{AM} = a, \qquad \overline{MC} = b, \qquad \overline{BM} = c$$

Пошто се крај A мора увек налазити у равни YOZ, а тачка M је на растојању x од исте координатне равни, онда је очевидно, да је пројекција отсечка AM на осу OX једнака апсциси x тачке M, и према томе добијамо

$$x = a \cos \alpha,$$

где је α угао, који дуж AC заклапа са осом OX.



Сл. 29

На сличан начин добијају се и две друге једнакости:

$$y = b \cos \beta, \qquad z = c \cos \gamma,$$

где су β и γ углови дате дужи са осом ордината односно кота.

Три добијени једнакости претстављају параметарски облик траженог геометриског места, јер су углови α, β и γ везани познатом једнакошћу

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

и према томе постоје само два независно променљива параметра.

Стављајући у последњу једнакост вредности:

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{y}{b}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{c},$$

добијамо једначину траженог геометриског места у облику

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Нађена једначина одређује тзв. површину елипсоида, за коју се a, b и c зову полуосе.

Може се добити појам о облику ове површине, пошто се лако види да је сваки њен раван пресек, паралелан некој од координатних равни, увек елипса.

39. Лопта описана око тетраедра. — Решимо задатак: *Наћи лопту која мора пролазити кроз четири дате тачке, које су темена датог тетраедра.* —

Узмимо једначину лопте општег облика у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \tag{1}$$

где су α, β, γ и R четири непознате константе, наиме координате средишта и полупречник тражене лопте. Оне морају бити одређене на тај начин, да лопта (1) пролази кроз четири дате тачке, темена датог тетраедра. Означимо ли ове тачке са

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \qquad (i=1,2,3,4),$$

онда уочене координате, x_i, y_i, z_i, задовољавају једначину (1). Према томе постоје ове четири једнакости:

$$\left.\begin{matrix}(x_i-\alpha)^2+(y_i-\beta)^2+(z_i-\gamma)^2=R^2\\ (i=1,2,3,4)\end{matrix}\right\} \tag{2}$$

Написане четири једначине довољне су за одређивање четири непознате величине α, β, γ и R.

Заиста, одузимањем једне од једначине (2) од три остале једначине, добијају се три линеарне једначине по α, β и γ. Стављајући њихове нађене вредности у четврту једначину (2) налазимо вредност R. Сменом тако нађених вредности α, β, γ и R у једначини (1) добија се тражена лопта.

Међутим исти резултат налази се краћим поступком на овај начин Уведемо ли ознаке

$$r_0 \equiv r, \quad x_0\equiv x, \quad y_0\equiv y, \quad z_0\equiv z,$$
$$r_i^2 \equiv x_i^2+y_i^2+z_i^2,$$
$$F\equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2,$$

једначине (1) и (2) постају:

$$\left.\begin{matrix}r_i^2-2(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)+F=0;\\ (i=0,1,2,3,4).\end{matrix}\right\} \tag{3}$$

Резултат елиминације четири величине

$$2\alpha,\ 2\beta,\ 2\gamma,\ F$$

из пет по њима линеарних једначина (3) претставља тражену једначину лопте, помоћу детерминанте, овако:

$$\begin{vmatrix} r^2 & x & y & z & 1\\ r_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ r_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ r_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ r_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

Заиста, добијена једначина је другог степена по x, y и z. Ако развијемо детерминанту, на левој страни, ове једначине по елементима прве врсте и поделимо обе стране једначине са коефицијентом код r^2, онда та једначина постаје

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0, \tag{5}$$

где се коефицијенти A, B, C и D изражавају овако:

$$2A=-\frac{\Delta'}{\Delta}, \qquad 2B=-\frac{\Delta''}{\Delta}, \qquad 2C=-\frac{\Delta'''}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4\\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4\end{vmatrix},$$

при чему Δ', Δ'' и Δ''' означавају детерминанте које се добијају из првог обрасца Δ сменом елемената прве, друге, односно треће колоне са r_1^2, r_2^2, r_3^2 и r_4^2.

$$D=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} r_1^2 & x_1 & y_1 & z_1\\ r_2^2 & x_2 & y_2 & z_2\\ r_3^2 & x_3 & y_3 & z_3\\ r_4^2 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} r_1^2-r_4^2 & x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\\ r_2^2-r_4^2 & x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4\\ r_3^2-r_4^2 & x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4\\ r_4^2 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=$$

$$=-[(x_4^2+y_4^2+z_4^2)+2Ax_4+2By_4+2Cz_4] \tag{6}$$

Коефицијенти A, B, C и D претстављају коначне величине, пошто се темена датог тетраедра не налазе у једној равни и $\Delta \gtrless 0$.

Најзад једначина (5) може се написати и овако:

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=R^2,$$

где је

$$R^2=A^2+B^2+C^2-D.$$

На основу обрасца (6) који одређује коефицијент D, добија се за R^2 израз:

$$R^2=(x_4-A)^2+(y_4-B)^2+(z_4-C)^2,$$

тј. R *претставља увек реалну величину.*

Према томе кроз темена тетраедра пролази увек реална лопта.

40. Услов да пет тачака леже на лопти. — Означимо пет датих тачака у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ са

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{7}$$

Кроз четири прве тачке, под условом

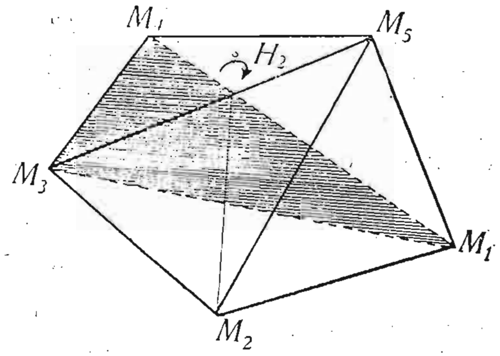
$$\Delta \gtreqless 0,$$

где се Δ изражава горњим обрасцем, пролази увек једна реална лопта, чија једначина има облик (4).

Да би се налазила на истој лопти и пета тачка M_5, њене координате x_5, y_5 и z_5 стављене место текућих координата x, y, z, морају задовољавати идентички једначину (4). Преместимо, у добијеној идентичности, елементе прве врсте у пету врсту и развијмо детерминанту леве стране идентичности по елементима прве колоне. Тада се тражени услов може написати у облику:

$$\sum_{i=1}^{5}(-1)^{i+1}\, r_i^2\, V_i = 0, \tag{8}$$

где је r_i растојање дате тачке M_i од координатног почетка O, а V_i означава запремину тетраедра, чија су темена остале четири дате тачке.



Сл. 30

Заиста, ако се пет датих тачака (7) налазе на лопти, оне се могу сматрати као темена једног *троугластог хексаедра* уписаног у лопти, тј. *полиједра са пет темена и шест троугластих страна* (сл. 30).

Лако је увидети да обрасци V_i задовољавају захтеве, који су били постављени у n^0 15 за дефиницију запремине тетраедра као позитивне величине. Узмемо ли, на пример, први образац

$$V_1 \equiv \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Сматрајући тачку M_2 као врх тетраедра са основицом $M_3M_4M_5$, добијамо, према уведеној одредби, да образац (9) претставља заиста запремину тог тетраедра, чија је висина M_2H_2, а где је позитиван смер кретања око ње показан стрелицом.

На сличан начин лако се уверити да и други изрази V_i одређују заиста односне запремине.

Ако сад посматрамо једнакост (8), онда су јој три члана — први, трећи и пети — позитивни, а два остала негативна. Позитивни чланови одговарају теменима

$$M_1,\ M_3,\ M_5 \tag{10}$$

а негативни чланови теменима

$$M_2,\ M_4 \tag{11}$$

Темена (10) чине страну $M_1M_3M_5$ посматраног хексаедра супротну ивици M_2M_5, која спаја тачке негативних чланова услова (8).

Стога се услов (8) тумачи на овај начин:

Троугласти хексаедар уписан је у лопти; помножимо квадрат растојања једног његовог темена од неке тачке O у простору са запремином тетраедра, чија се темена налазе у осталим теменима посматраног хексаедра: онда је збир производа, који одговарају трима теменима једне стране хексаедра, једнак збиру два производа који одговарају теменима његове супротне ивице.

Добијени резултат претставља, за пет тачака (7) на лопти, генерализацију Luchterhand-ове теореме за четвороугаоник уписан у кругу. При томе две супротне дијагонале четвороугаоника у равни замењују се овде једном ивицом и супротном страном троугластог хексаедра.

41. Келеов услов да пет тачака леже на лопти. — Преносимо координатни почетак O редом у сваку од пет датих тачака (7) на лопти. Тада ће се сваки пут изгубити један од чланова идентичности (8), који одговара вредности растојања r_i једнакој нули. На овај начин добијају се, из идентичности (8), ових пет специјалних једнакости:

$$\left.\begin{aligned} -d_{21}^2\, V_2 + d_{31}^2\, V_3 - d_{41}^2\, V_4 + d_{51}^2\, V_5 &= 0, \\ d_{12}^2\, V_1 + d_{32}^2\, V_3 - d_{42}^2\, V_4 + d_{52}^2\, V_5 &= 0, \\ d_{13}^2\, V_1 - d_{23}^2\, V_2 - d_{43}^2\, V_4 + d_{53}^2\, V_5 &= 0, \\ d_{14}^2\, V_1 - d_{24}^2\, V_2 + d_{34}^2\, V_3 + d_{54}^2\, V_5 &= 0, \\ d_{15}^2\, V_1 - d_{25}^2\, V_2 + d_{35}^2\, V_3 - d_{45}^2\, V_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где су уведене ознаке d_{ik} за обележавање растојања тачке M_i од тачке M_k, при чему је очевидно, да је

$$d_{ik} = -d_{ki}.$$

Резултат елиминације пет величина

$$V_1,\ \ -V_2,\ \ V_3,\ \ -V_4,\ \ V_5$$

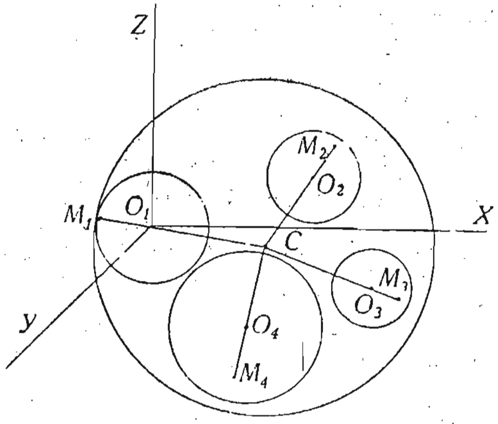
из пет по њима линеарних и хомогених једнакости (12) изражава се помоћу детерминанте петог реда овако:

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{21}^2 & d_{31}^2 & d_{41}^2 & d_{51}^2 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{32}^2 & d_{42}^2 & d_{52}^2 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{43}^2 & d_{53}^2 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & d_{54}^2 \\ d_{15}^2 & d_{25}^2 & d_{35}^2 & d_{45}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијени Келеов услов садржи само растојање између пет датих тачака (7), које се налазе на лопти.

Овај је услов изведен под претпоставком, да међу датим тачкама (7) нема четири тачке које би се налазиле у истој равни.

42. Аполонијев проблем у простору. — Аполонијев проблем за три круга у равни лако се генералише на простор на тај начин што се тражи лопта која мора додиривати четири дате лопте у простору.



Сл. 31

Узмимо четири лопте у простору са средиштима у тачкама O_1, O_2, O_3 и O_4 (сл. 31) и полупречницима r_1, r_2, r_3 односно r_4.

Узмимо координатни почетак правоуглог праволиниског координатног система у средишту O_1 прве дате лопте; означимо координате средишта O_2, O_3 и O_4 остале три дате лопте са α, β, γ; α', β', γ', и α'', β'', γ''. Лако је увидети, да постављени проблем може имати шеснаест решења, која се претстављају као осам група решења од по две у свакој групи.

Заиста, прва два решења дају две лопте, од којих је једна описана око датих лопти, обухватајући их, а друга је уписана тако да се све дате лопте налазе изван тражене лопте.

Сваки други пар решења четири наредне групе одређује две лопте. Прва од њих обухвата једну дату лопту додирујући споља три остале дате лопте. Међутим друго решење претставља лопту, која додирује споља прву дату лопту, али обухвата три остале. На овај начин, поред два прва решења добијају се још осам других решења.

Најзад, могућа су још три нова пара решења. Кад једна лопта обухвата додирујуће две дате лопте а додирује споља две друге лопте. Друго решење исте групе претставља лопту, која споља додирује прве две лопте, а додирују две друге дате лопте обухватајући их. Оваквих решења има три различите групе, те укупно са пређашњим решењима има свега шеснаест различитих решења.

Проучимо сад први случај, кад се тражи лопта описана око четири дате лопте. Нацртајмо на слици схематски тражену лопту у облику круга

са средиштем у тачки C (x_c, y_c, z_c). Претпоставимо да су M_1, M_2, M_3 и M_4 тачке додира тражене лопте са датим лоптама.

Означимо са R полупречник тражене описане лопте.

Према томе, очевидно је, да је растојање траженог средишта C од средишта O_i дате лопте једнако разлици $R-r_i$. Стога добијамо ове четири једнакости:

$$\left.\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 &= (R - r_1)^2, \\ (\alpha - x_c)^2 + (\beta - y_c)^2 + (\gamma - z_c)^2 &= (R - r_2)^2 \\ (\alpha' - x_c)^2 + (\beta' - y_c)^2 + (\gamma' - z_c)^2 &= (R - r_3)^2 \\ (\alpha'' - x_c)^2 + (\beta'' - y_c)^2 + (\gamma'' - z_c)^2 &= (R - r_4)^2 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Одузимајући од прве једначине појединачно сваку од осталих једначина, добијамо ове три једначине:

$$\begin{aligned} \alpha x_c + \beta y_c + \gamma z_c - a' &= (r_2 - r_1)R, \\ \alpha' x_c + \beta' y_c + \gamma' z_c - b' &= (r_3 - r_1)R, \\ \alpha'' x_c + \beta'' y_c + \gamma'' z_c - c' &= (r_4 - r_1)R, \end{aligned} \quad (14)$$

где су уведене ознаке:

$$a' \equiv \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + r_2^2 - r_1^2),$$

$$b' \equiv \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + r_3^2 - r_1^2),$$

$$c' \equiv \frac{1}{2}(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 + r_4^2 - r_1^2).$$

Претпоставимо да се једначине (14) могу решити по x_c, y_c, z_c, тј. да је

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Очевидно је да се написани услов може изразити друкчије и овако:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 1 \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

што значи, да се средишта дате четири лопте O_1, O_2, O_3, и O_4 не налазе у истој равни. Према томе, под овом претпоставком, једначине (14) дају за координате x_c, y_c, z_c траженог средишта C обрасце у облику

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \mathrm{AR} + \mathrm{D}, \\ y_c &= \mathrm{BR} + \mathrm{E}, \\ z_c &= \mathrm{CR} + \mathrm{F}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где коефицијенти A, B, C, D, E и F претстављају познате величине.

Стављајући нађене вредности (15) у прву од једначина (13), добијамо, за одређивање вредности полупречника R, квадратну једначину

$$(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - 1)\mathrm{R}^2 + 2(\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} + r_1)\mathrm{R} + \mathrm{D}^2 + \mathrm{E}^2 + \mathrm{F}^2 - r_1^2 = 0 \tag{16}$$

Решавајући добијену једначину по R, налазимо да је

$$\mathrm{R} = \frac{-(\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} + r_1) \pm \sqrt{\mathrm{S}^2 - \mathrm{T}^2}}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 - 1}, \tag{17}$$

где су уведене ознаке:

$$\mathrm{S}^2 \equiv (\mathrm{A}r_1 + \mathrm{D})^2 + (\mathrm{B}r_1 + \mathrm{E})^2 + (\mathrm{C}r_1 + \mathrm{F})^2,$$

$$\mathrm{T}^2 \equiv (\mathrm{AE} - \mathrm{BD})^2 + (\mathrm{AF} - \mathrm{CD})^2 + (\mathrm{BF} - \mathrm{CE})^2.$$

Добијени образац (17) показује да R претставља реалну величину под условом

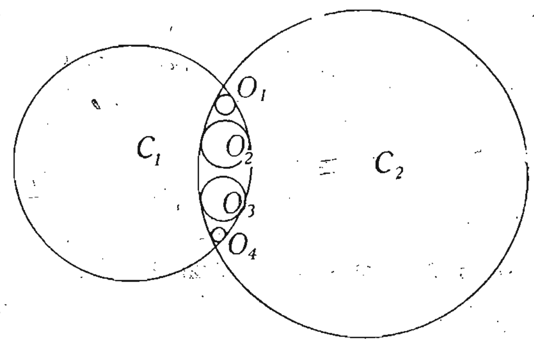
$$\mathrm{S} \geqslant \mathrm{T},$$

а имагинарну у супротном случају.

Осим тога, R мора бити позитивно, кад тражена лопта обухвата све четири дате лопте. Према томе, одговарајуће решење је немогуће, ако образац (17) одређује негативну величину за R.

Довољно је навести пример немогућности траженог решења, када се, рецимо, три дате лопте налазе у четвртој.

Најзад, образац (17), може дати и две позитивне вредности за R. То би значило да је могуће поставити две различите тражене лопте. Лако је замислити овакав случај у облику наредне схематске слике (сл. 32).



Сл. 32

Лопте са средиштима C_1 и C_2 означавају две тражене лопте, које додирују четири дате лопте са средиштима O_1 O_2, O_3 и O_4, а које су смештене у простору обухваћеном обема лоптама C_1 и C_2.

Када је одређен полупречник (17) тражене лопте, онда стављајући његову вредност у обрасце (15), добијамо координате средишта одговарајуће лопте.

Вратимо се сад другој претпоставци, коју смо пре одбацили, кад се једначине (14) не могу решити по x_c, y_c, z_c. Тада се средишта датих лопти налазе у истој равни, и за одређивање R добива се линеарна једначина, која даје

$$\mathrm{R} = \frac{a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{A}' + c\,\mathrm{A}''}{(r_1 - r_2)\,\mathrm{A} + (r_1 - r_3)\,\mathrm{A}' + (r_1 - r_4)\,\mathrm{A}''};$$

овде су A, A′ односно A″ минори, са односним знаком (кофактори) детерминанте

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

конјуговане елементима прве колоне.

Стављајући нађену вредност R у прву једначину (13) и две ма које од система (14), налазимо уопште два средишта, тј. два круга истог полупречника R.

Испитајмо и други случај прве групе решења, када је тражена лопта уписана у четири дате лопте. Тада је очевидно, да се услови (13) мењају на тај начин што се на десним странама ових једначина, уместо разлика $\mathrm{R} - r_i$ морају налазити збирови $\mathrm{R} + r_i$. То би значило да за нов посматрани случај R мора имати негативну вредност у једначинама (14). Одатле излази закључак, да негативна решења једначине (16) одговарају овоме другом случају прве групе тражених решења, када је тражена лопта уписана у дате лопте. Јасно је, да је њен полупречник једнак апсолутној вредности негативних корена једначине (16).

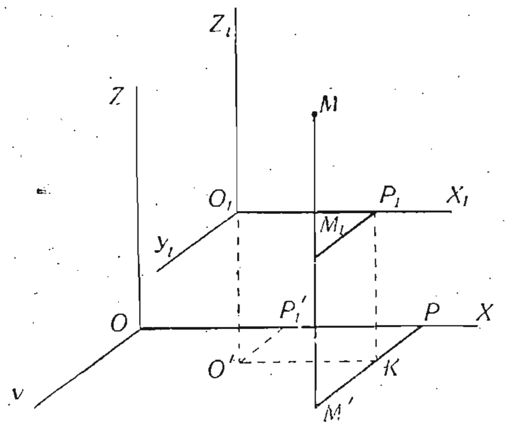
На сличан начин се проучавају седам осталих група могућих решења Аполонијевог проблема у простору.

ГЛАВА ДРУГА

ТРАНСФОРМАЦИЈА ПРАВОЛИНИЈСКИХ КООРДИНАТА. КОСОУГЛИ ПРАВОЛИНИСКИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

I. Трансформација правоуглих координата

43. Паралелно померање координатних оса. — Посматрајмо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ (сл. 33) и уведимо нови систем $O_1X_1Y_1Z_1$ са почетком у тачки O_1, чије су осе паралелне старим осама.



Сл. 33

Означимо са x, y и z координате тачке M у старом систему тако да имамо:

$$OP = x, \quad PM' = y, \quad M'M = z.$$

Обележимо са x_1, y_1, z_1 нове координате исте тачке M у новом систему $O_1X_1Y_1Z_1$, па имамо:

$$O_1P_1 = x_1, \quad P_1M_1 = y_1, \quad M_1M = z_1.$$

Најзад означимо са a, b, c координате новог почетка O_1 у старом координатном систему:

$$OP_1' = a, \qquad P_1'O' = b, \qquad O'O_1 = c.$$

Спустимо нормалу из тачке P_1 на стару координатну раван XOY, која сече ординату PM' у тачки K, тако да права O'K буде паралелна оси OX.

Очевидно је, да постоје ове везе између посматраних отсечака, наиме:

$$OP = OP_1' + O_1P_1$$
$$PM' = P_1'O' + P_1M_1,$$
$$M'M = O'O_1 + M_1M.$$

Према томе добијају се ови обрасци за трансформацију координата:

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1, \qquad z = c + z_1,$$

који тврде да је свака од старих координата једнака алгебарском збиру одговарајуће координате новог координатног почетка у старом координатном систему и нове координате.

Знак + код нових координата одговара претпоставци да су смерови старих и нових координатних система оса исти.

У противном узима се негативан знак.

44. Промена правца оса. — Узмимо два правоугла праволиниска координатна система OXYZ и OX'Y'Z' са истим координатним почетком у тачки O (сл. 34).

Одредимо правце нових оса у старом координатном систему помоћу углова, који су дати таблицом:

	x'	y	z
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

(1)

а чији су косинуси одређени таблицом:

	x'	y'	z'
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

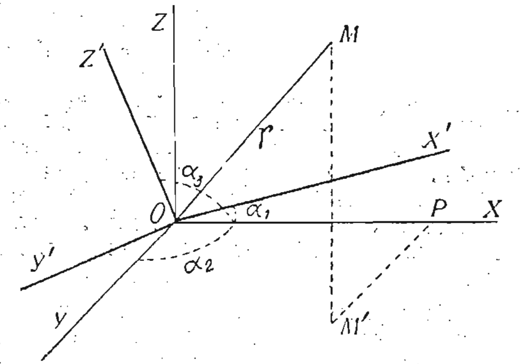
(2)

Означимо, за формирање образаца трансформације, координате ма које тачке M у старом систему са

$$x, \quad y, \quad z,$$

а координате исте тачке M у новом координатном систему са:

$$x', \quad y', \quad z'.$$



Сл. 34

Означимо са r потег посматране тачке M, који је исти у старом и у новом координатном систему. Тада се косинус угла између потега r и старе осе OX изражава, у новом координатном систему OX Y Z', помоћу познатог обрасца

$$\cos(r,x) = a_1 \cos(r,x') + a_2 \cos(r,y') + a_3 \cos(r,z')$$

Помножимо са r обе стране ове једнакости. Онда, према обрасцима:

$$r \cos(r,x) = x,$$
$$r \cos(r,x') = x', \quad r \cos(r,y') = y', \quad r \cos(r,z') = z',$$

добијени резултат даје први образац за посматрану трансформацију координата; на сличан начин добијају се и два друга обрасца трансформације, наиме:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z', \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z', \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ови обрасци могу се наћи и на други начин, непосредно, помоћу теорије пројекција.

Заиста, потег r претставља резултанту координатног многоугла тачк M. Онда је, према ставу n^0 8, пројекција потега на сваку осу једнака алгебарском збиру пројекција координата краја потега на исту осу.

Примени ли се овај став на старе координатне осе, добијају се обрасци (3), на страни 11.

Међутим, ако се исти став примени на сваку од нових оса, добијају се претходни обрасци (3).

Најзад напоменимо да међу угловима (1) морају постојати везе, јер су оба координатна система правоугла, а сем тога збир квадрата косинуса углова, које свака оса једног система заклапа са осама другог координатног система, једнак је јединици.

Према томе, за косинусе у таблици (2) добијамо наредних шест једнакости

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0, \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0, \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0, \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Једначине (4) показују да од 9 углова (1) само 3 могу бити произвољна, а осталих шест су њихове функције. Овај закључак је очевидан и геометриски. Заиста, положај новог координатног система постаје потпуно одређен, ако се узму три одређена угла. На пример, положај нове осе OX′ одређује се помоћу два угла α_1 и β_1, јер се тада вредност $\cos\gamma_1$ добија из четврте једначине (4). После тога, довољно је за одређивање друге осе, рецимо осе OY′, само један угао, на пример β_2. Тада оса OZ′ заузима потпуно одређен положај као нормала у тачки O на утврђену раван X′OY′.

Лако је наћи из једначине (3) вредности нових координата у старим координатама. Тога ради довољно је помножити једначине (3) — прву са a_1, другу са b_1, а трећу са c_1 и сабрати резултате. Сличним поступком сабирамо резултате множења једначина (3) са елементима друге колоне таблице (2), односно са елементима њене треће колоне.

На изложени начин добијају се помоћу једнакости (4), тражени обрасци

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Уместо услова (4) могло би се узети шест других, који изражавају сличне везе, за старе осе у новом координатном систему, наиме:

$$\left.\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 &= 0, \\ a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

45. Везе између углова координатних оса два система. — Полазећи од једначина (4) или (5) могу се извести изрази за косинусе углова једне од колона таблице (2) помоћу косинуса углова две друге колоне.

Заиста, напишимо четврту, прву и другу једначину (4) овако:

$$\left.\begin{aligned} a_1a_1 + b_1b_1 + c_1c_1 &= 1, \\ a_2a_1 + b_2b_1 + c_2c_1 &= 0, \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и посматрајмо детерминанту

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Дигнемо ли δ на квадрат, због једнакости (4), добија се да је:

$$\delta^2 = 1, \quad \delta = \pm 1.$$

Према томе једначине (6) посматране као линеарне једначине по a_1, b_1 и c_1 дају

$$a_1 = \pm L', \qquad b_1 = \pm M', \qquad c_1 = \pm N' \tag{7}$$

Вредности L′, M′, и N′ одређују се, као у n^0 6, помоћу таблице

$$\begin{array}{ccc} L' & M' & N' \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Према томе имамо

$$L' \equiv b_2c_3 - b_3c_2,$$
$$M' \equiv c_2a_3 - a_2c_3,$$
$$N' \equiv a_2b_3 - a_3b_2.$$

Од два знака код δ, мора се изабрати само један знак и то према распореду старих и нових координатних оса. Раније, у n^0 1, уведен је појам о левим и десним координатним системима. Стога је лако увидети, да се *мора узети вредност* $\delta = +1$, *ако су оба координатна система, нови и стари, конгруентни; ако су ови системи симетрични, онда је* $\delta = -1$.

Пошто је δ једнако $+1$ или -1, то задржава сталну вредност, која не зависи од појединих вредности углова (1) и њихових косинуса (2). Према томе права вредност δ може се одредити, полазећи од неких специјалних вредности углова (1). У ту сврху окренимо нови координатни систем $OX'Y'Z'$ тако, да се оса OX' поклопи са осом OX старог система, а нова оса OY' са старом OY. Тада се могу десити ова два случаја: Ако су нови и стари координатни системи исте оријентације, онда се оса OZ' поклапа са старом осом OZ. Међутим, ако су оба координатна система различитих оријентација, онда осе OZ и OZ' имају супротне смерове.

Под првом претпоставком имамо:

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1,$$
$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$$

Према томе добијамо да је

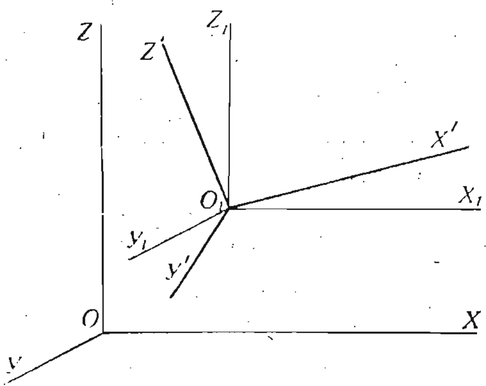
$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

У другом случају постоје услови

$$a_1 = b_2 = -c_3 = 1,$$
$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0.$$

Због тога сад детерминанта δ постаје једнака -1.

46. Најопштија трансформација координата. — Најопштија трансформација координатних система врши се померањем координатног почетка и променом правца координатних оса. Узмимо за нови координатни почетак тачку O_1 (x_0, y_0, z_0) у старом координатном систему $OXYZ$ (сл. 35) и за нове осе O_1X', O_1Y', O_1Z', које заклапају са старим осама углове одређене таблицама (1) и (2).



Сл. 35

Уведимо помоћни координатни систем $O_1X_1Y_1Z_1$ чије су осе паралелне старим осама.

Трансформација старог координатног система у помоћни систем врши се обрасцима

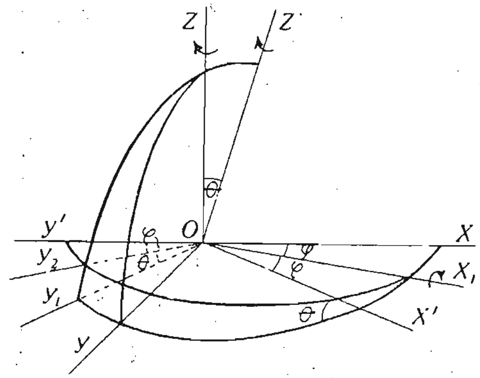
$$x = x_0 + x_1, \qquad y = y_0 + y_1, \qquad z = z_0 + z_1. \tag{8}$$

Међутим прелаз од помоћног система на нови систем остварује се на основу образаца облика (3), где се место x, y и z налазе помоћне координате x_1, y_1, z_1. Ако уврстимо њихове вредности у обрасце (8), добијамо тражени резултат

$$x = x_0 + a_1x' + a_2y' + a_3z',$$
$$y = y_0 + b_1x' + b_2y' + b_3z',$$
$$z = z_0 + c_1x' + c_2y' + c_3z'.$$

47. Ајлерови углови. — Често је од користи увести три нова тзв. Ајлерова угла, као независно променљиве величине место одређена три угла од девет углова (1).

У ту сврху опишимо лопту око координатног почетка O (сл. 36), као средишта, са полупречником, који је једнак јединици дужине. Ова лопта сече координатне равни по великим круговима, који су показани на слици. Означимо са OX_1 линију пресека координатних равни XOY и $X'OY'$ са ψ — угао, који права линија OX_1 гради са осом OX у равни XOY, а са θ угао, између обе поменуте координатне равни. Према томе, исти угао θ заклапају и обе осе OZ и OZ', које су управне на поменутим равнима.



Сл. 36

Најзад, означимо са φ угао у новој координатној равни $X'OY'$, који образује права OX_1 са новом осом OX'.

Претпоставимо, да су оба координатна система $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$ исте оријентације.

Тада се стари координатни систем доводи у положај новог система помоћу три наредна узастопна окретања.

Прво, обрнемо стари систем око његове осе OZ за угао ψ, тако да стара оса OY заузме положај OY_1.

Затим обрћемо стари систем за угао θ око осе OX_1, тако да права линија OY_1 заузме нови положај OY_2 у новој равни $X'OY'$.

Сада обрнимо стари систем око осе OZ' за угао φ.

Првој ротацији одговарају познати обрасци трансформације координата у равни XOY

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi \\ y &= x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi \,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Друга ротација трансформише координате y_1 и z у равни Y_1OZ по обрасцима

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_2 \cos\theta - z' \sin\theta, \\ z &= y_2 \sin\theta + z' \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Најзад, трећа ротација врши трансформацију координата x_1 и y_2 у равни X_1OY_2 по обрасцима.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y_2 &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Елиминишимо сада помоћне координате x_1, y_1 и y_2 из шест образаца (9), (10) и (11). На тај начин добијају се ова три обрасца за трансформацију старих координата x, y, z у нове координате x', y', z', наиме

$$\left.\begin{aligned} x &= x'(\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta) - \\ &\quad - y'(\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) + z'\sin\psi\sin\theta \\ y &= x'(\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta) - \\ &\quad - y'(\sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\cos\theta) - z'\cos\psi\sin\theta, \\ z &= x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Ако упоредимо сада добијене обрасце (12) са обрасцима (3), налазимо вредности косинуса углова (1) између старих и нових оса као функције Ајлерових углова, и то:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ a_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ a_3 &= \sin\psi\sin\theta, \\ b_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta, \\ b_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta, \\ b_3 &= -\cos\psi\sin\theta, \\ c_1 &= \sin\varphi\sin\theta, \\ c_2 &= \cos\varphi\sin\theta, \\ c_3 &= \cos\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Одавде се добијају обрасци за одређивање Ајлерових углова помоћу косинуса углова (2).

Трећи и шести образац (13) дају

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{a_3}{b_3}.$$

Девети образац (13) одређује вредност угла θ:

$$\cos\theta = c_3.$$

Најзад, седми и осми образац (13) дају:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1}{c_2}.$$

Може се такође нагласити да се прелаз од израза (13) за a_1, b_1, c_1, на изразе a_2, b_2, c_2 (13) врши помоћу замене вредности φ са $\varphi + \frac{\pi}{2}$.

Осим тога прелазимо од образаца (13) за a_2, b_2, c_2 на a_3, b_3 и c_3, ако ставимо $\varphi = 0$, а θ сменимо са $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Најзад, из a_1 добија се израз b_1 ако сменимо ψ са $\frac{\pi}{2} - \psi$, а φ са φ; из a_2 добија се c_1, ако ставимо $\varphi = 0$, а $\psi = -\varphi$ и θ сменимо са $\frac{\pi}{2} - \theta$.

48. Пресек површине и равни. — Пресек дате површине са одређеном равни може се лако наћи, ако се посматрана раван узме за једну од координатних равни новог координатног система. Тада се потребна трансформација координатних система изводи помоћу Ајлерових углова. У ту сврху, под претпоставком да посматрана раван пролази кроз стари координатни почетак, узмимо ту исту раван за раван X'OY' новог правоуглог праволиниског координатног система OX'Y'Z', место старог правоуглог праволиниског система OXYZ (сл. 37).

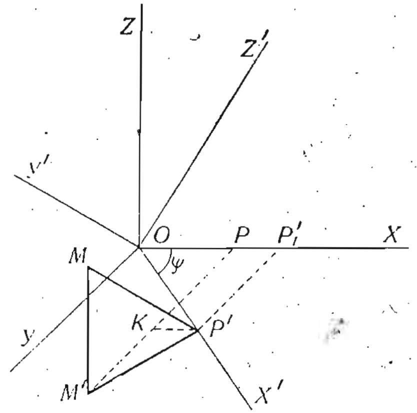
При томе се за нову осу OX' узима линија пресека равни XOY са новом равни X'OY'.

Означимо са ψ Ајлеров угао између старе и нове апсцисне осе.

Конструишимо ма за коју тачку M равни X'OY' координатни многоугао OPM'M у старом координатном систему, а у новој координатној равни X'OY' координатни полигон OP'M исте тачке.

Повуцимо у равни XOY из тачке P' две праве, наиме: праву $P'P_1'$ управно на осу OX и праву P'K управно на ординату PM'. Стога је и

$$\sphericalangle OP'K = \psi.$$



Сл. 37.

Угао између координатних равни XOY и X'OY' претставља други Ајлеров угао θ, који је у исто време угао у темену P' правоуглог троугла M'P'M.

Сада је лако изразити старе координате тачке M (x, y, z) помоћу њених нових координата x' и y'.

Заиста, старе координате изражавају се овако:

$$\left.\begin{aligned} x &= OP_1' - KP', \\ y &= P_1'P' + KM', \\ z &= PM\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Служићемо се правоуглим троугловима $OP_1'P'$ и P'M'K, чија хипотенуза P'M' заклапа угао $90^0 - \psi$ са катетом KP'. Одатле добијамо:

$$OP_1' = x'\cos\psi, \qquad P_1'P' = x'\sin\psi,$$
$$KP' = P'M'\sin\psi, \qquad KM' = P'M'\cos\psi.$$

Најзад, из правоуглог троугла P'M'M налазимо:

$$P'M = y', \qquad P'M' = y'\cos\theta.$$

Стављајући у обрасце (14) нађене вредности отсечака

$$OP_1', \quad KP', \quad P'P_1', \quad KM', \quad P'M, \quad P'M',$$

добијамо тражени резултат у облику

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\theta, \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\theta, \\ z &= y'\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Напоменимо да до истих образаца можемо и непосредно доћи из образаца (12), чим ставимо у њима:

$$\varphi = 0, \qquad z' = 0.$$

Узмимо ма какву површину претстављену једначином

$$F(x, y, z) = 0. \tag{16}$$

Ако у овој једначини сменимо вредности (15) старих координата, онда се добија једначина линије пресека површине (16) са датом равни $X'OY'$ у облику:

$$F(x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\theta,\ x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\theta,\ \ y'\sin\theta) = 0.$$

Одавде закључак:

Ако је дата површина (16) алгебарска m-ог реда, онда је и добијена једначина њеног равног пресека m-ог степена у новим координатама.

Заиста, једначина пресека се добија из једначине површине сменом старих координата са линеарним обрасцима у новим координатама.

Према томе, *равни пресек површине другог реда претставља конични пресек.*

Претпоставимо сада, да раван посматраног пресека не пролази кроз почетак O првобитног координатног система. У томе случају, према поступку изложеном у n^0 45, обрасци трансформације координата постају:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\theta, \\ y &= y_0 + x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\theta, \\ z &= z_0 + y'\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где x_0, y_0, z_0 означавају координате новог почетка, који се налази у одређеној изабраној тачки посматране равни пресека.

49. Примери. — Узмимо површину елипсоида поменуту у n^0 38, на страни 41,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{18}$$

и потражимо његов пресек са равни, која пролази кроз осу OY под нагибним углом θ према равни XOY. У том случају ће оса OX' заузети положај OY, што значи, да је Ајлеров угао $\psi = 90^0$, и обрасци (15) постају:

$$x = -y'\cos\theta, \qquad y = x', \qquad z = y'\sin\theta$$

Сменом тих вредности x, y и z, у једначини (18), добијамо тражену линију пресека у датој равни:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right) y'^2 = 1,$$

која претставља елипсу. У специјалном случају та елипса постаје круг под условом да је

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2} = \frac{1}{b^2}.$$

тј. за вредност угла θ одређену обрасцем

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

Одатле је угао θ реалан, када се количина b налази између вредности a и c.

Према томе елипсоид (18) има два реална кружна пресека, чије равни пролазе кроз његову средњу полуосу под нагибним угловима према равни XOY, који одговарају горњем и доњем знаку у нађеном обрасцу за $\operatorname{tg}\theta$.

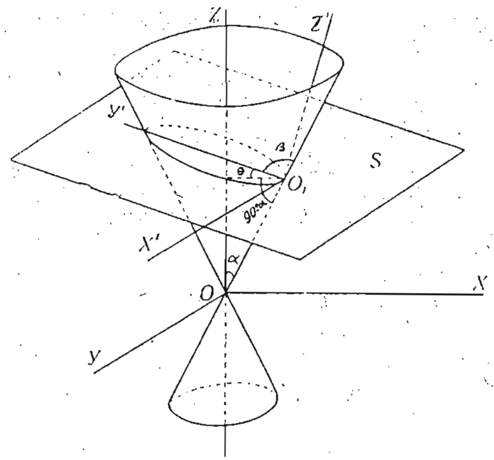
Одредимо, за други пример, пресечну линију кружног конуса са равни S (сл. 38).

Једначина кружног конуса, чија генератриса заклапа угао α са осом OZ, гласи (в. n^0 31)

$$x^2 + y^2 = z^2\operatorname{tg}^2\alpha \tag{19}$$

Узмимо за нови координатни почетак тачку $O_1(x_0, y_0, z_0)$, која се налази у пресеку равни S са генератрисом у координатној равни ZOX. Претпоставимо, да је раван S паралелна старој оси OY.

Нове осе узмимо у равни S, и то: осу O_1X' паралелно старој оси OY, а O_1Y' управно на њу у позитивном смеру кретања од осе O_1X'.



Сл. 38.

Сада је Ајлеров угао $\psi = 90^0$, и обрасци (17) постају:

$$x = x_0 - y'\cos\theta, \qquad y = x', \qquad z = z_0 + y'\sin\theta.$$

Пошто се тачка O_1 налази на површини (19), имамо

$$x_0^2 - z_0^2\operatorname{tg}^2\alpha = 0,$$

и претворена једначина (19) постаје

$$x'^2 + qy'^2 = 2py', \tag{20}$$

где су уведене ознаке

$$q = \cos^2\theta - \mathrm{tg}^2\alpha \sin^2\theta = \frac{\cos(\theta+\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\cos^2\alpha},$$

$$p = x_0\cos\theta + z_0\,\mathrm{tg}^2\alpha\sin\theta = l\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos(\theta-\alpha),$$

при чему l означава дужину отсечка OO_1.

Лако је увидети, да се нагибни угао β генератрисе OO_1 према равни S изражава обрасцем

$$\beta = 90^0 + \alpha - \theta.$$

Према томе налазимо:

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos(90^0 + 2\alpha - \beta) = \sin(\beta - 2\alpha),$$
$$\cos(\theta-\alpha) = \sin\beta,$$
$$q = \frac{\sin\beta\sin(\beta-2\alpha)}{\cos^2\alpha},$$
$$p = l\,\mathrm{tg}\alpha\sin\beta.$$

Вредност угла α не прелази 90^0, а угао β не може бити већи од 180^0. Стога коефицијент p може бити или позитивна величина или нула. Претпоставимо да је $p>0$. Ако је $\beta>2\alpha$, или $\theta<90^0-\alpha$, онда је $q>0$, а конични пресек (20) одређује елипсу.

Ако је $\beta=2\alpha$, или $\theta=90^0-\alpha$, онда је $q=0$, и пресек (20) претставља параболу.

Најзад под претпоставком $\beta<2\alpha$, или $\theta>90^0-\alpha$, добијамо $q<0$, и пресек (20) одређује хиперболу.

Међутим под претпоставком $p=0$, пресечна линија (20) се своди на две реалне или имагинарне праве. Ако је при томе $l=0$, онда обе пресечне праве пролазе кроз врх, O, конуса а оне су реалне под условом да је $q<0$, тј. $\beta<2\alpha$, или $\theta>90^0-\alpha$, а имагинарне под претпоставком $\beta>2\alpha$, или $\theta<90^0-\alpha$.

Најзад, може бити $p=0$ под претпоставком да је $l \gtreqless 0$, али је $q=0$, тј. $\beta=0$, или $\theta=90^0+\alpha$. Тада једначина (20) постаје

$$x'^2 = 0,$$

тј. претставља генератрису, дуж које раван S додирује конус.

II Косоугли праволиниски координатни систем

50. Дефиниција. — Узмимо три праве OX, OY и OZ, које полазе из једне исте тачке O у простору и одређују три различите равни XOY, YOZ и ZOX (сл. 39). На свакој од тих правих линија одаберимо позитиван смер, који истовремено одређује и смер позитивног обртања око исте осе; означимо их са OX, OY и OZ. Супротне смерове OX′, OY′ и OZ′ сматрамо за негативне. Најзад узмимо отсечак одређене дужине за јединицу дужине за све три осе X′X, Y′Y и Z′Z.

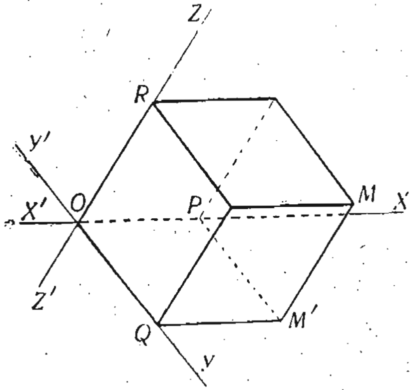
Скуп уочених правих линија зове се косоугли праволиниски координатни систем, или косоугли Декартов систем у простору. Тачка O је

његов почетак, праве OX, OY и OZ су координатне осе посматраног система, док су равни XOY, YOZ и ZOX координатне равни.

Узмимо неку тачку M у простору. Повуцимо кроз њу три равни паралелне свакој од координатних равни. Оне одређују на координатним осама три тачке P, Q и R, које су косе пројекције тачке M на координатне осе.

Обрнуто, три ма које тачке P, Q и R на координатним осама потпуно одређују тачку M у простору.

Положај сваке тачке P, Q и R одређује се на одговарајућој координатној оси њеном координатом.

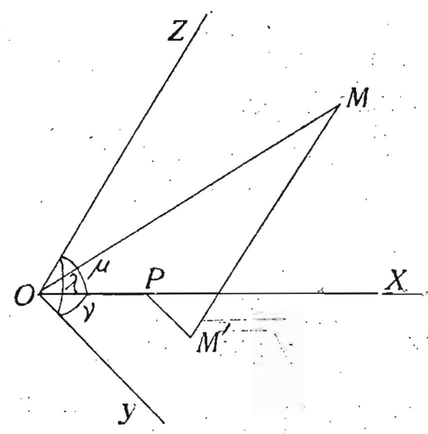


Сл. 39.

Према томе, свакој тачки простора одговарају три броја x, y и z, који су координате тачака P, Q и R и називају се координате тачке M, и то: апсциса, ордината и кота тачке M.

Ове координате претстављају отсечци OP, OQ и OR. Место њих могу се узети њима паралелне ивице паралелопипеда, које образују координатне равни и њима паралелне равни, које су повучене кроз посматрану тачку.

Три узастопне ивице OP, PM′ и M′M претстављају координатни многоугао тачке M.



Сл. 40.

51. Потег и његови косинуси правца. — Узмимо косоугли праволиниски координатни систем OXYZ (сл. 40), где су

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,$$

углови између координатних оса, наиме:

$$\measuredangle YOZ, \quad \measuredangle ZOX, \quad \measuredangle XOY.$$

Конструишимо координатни многоугао OPM′M тачке M, коју спајамо са координатним почетком O. На тај начин добијамо потег OM, који ћемо означити са r. Обележимо са

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

углове потега r са координатним осама OX, OY, OZ а косинусе тих углова означимо са

$$a, \quad b, \quad c.$$

Ако пројицирамо ортогонално координатни многоугао OPM'M тачке M на њен потег r, онда се добија једнакост

$$r = xa + yb + zc. \qquad (1)$$

Изједначимо сада ортогоналне пројекције потега OM као резултанте координатног многоугла OPM'M тачке M на сваку од координатних оса. На тај начин добијају се још три једнакости:

$$\left.\begin{aligned} ra &= x + y\cos\nu + z\cos\mu, \\ rb &= x\cos\nu + y + z\cos\lambda, \\ rc &= x\cos\mu + y\cos\lambda + z. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Обрасци (1) и (2) одређују дужину потега r тачке M и косинусе углова α, β и γ, које он заклапа са координатним осама изражене помоћу координата врха потега и координатних углова λ, μ и ν.

Дужина потега r добија се елиминацијом косинуса углова a, b, c из образаца (1) и (2). У ту сврху множимо прву од једначина (2) са x, другу са y, трећу са z и сабирамо резултате; узимајући у обзир једнакост (1), налазимо:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,yz\cos\lambda + 2\,xz\cos\mu + 2\,xy\cos\nu, \qquad (3)$$

што се кратко пише овако:

$$r^2 = \mathrm{S}x^2 + 2\mathrm{S}yz\cos\lambda,$$

где се збирови односе на све три координате и њихове производе умножене косинусом угла између односних оса.

Најзад, ради упрошћавања образаца, обележимо десну страну израза (3) са ознаком $2\Psi(x, y, z)$. Тада се обрасци (2) пишу и овако:

$$ra = \Psi_1, \quad rb = \Psi_2, \quad rc = \Psi_3,$$

где Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 означавају парцијалне изводе функције Ψ по x, y и z.

Одатле се добијају, пошто је r увек позитивна величина, тражене вредности:

$$\left.\begin{aligned} & r = \sqrt{2\Psi}, \\ & a = \frac{\Psi_1}{\sqrt{2\Psi}}, \quad b = \frac{\Psi_2}{\sqrt{2\Psi}}, \quad c = \frac{\Psi_3}{\sqrt{2\Psi}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Што се тиче везе између углова α, β и γ, које потег заклапа са координатним осама, то се она сад добија у компликованијем облику од оног у ортогоналним координатама.

Заиста, елиминацијом четири количине r, x, y, z из линеарних по њима хомогених једнакости (1) и (2), добијамо тражену везу у облику

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Развијмо детерминанту леве стране нађеног услова по елементима прве врсте и пребацимо први члан на десну страну, па уведимо за њега ознаку Ω. Тада се добијени услов пише овако

$$a\begin{vmatrix} a & \cos\nu & \cos\mu \\ b & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & 1 & \cos\mu \\ b & \cos\nu & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & 1 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & 1 & \cos\nu \\ b & \cos\nu & 1 \\ c & \cos\mu & \cos\lambda \end{vmatrix} = \Omega$$

где Ω означава детерминанту

$$\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

Написаћемо добијени услов кратко у облику

$$2\mathrm{F}(a, b, c) = \Omega. \qquad (5)$$

Међутим, вредност симбола 2F, развијајући детерминанте његове леве стране по елементима првих колона, постаје

$$2\,\mathrm{F}(a, b, c) \equiv a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu + c^2\sin^2\nu - 2\,ab(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu) - $$
$$- 2\,ac(\cos\mu - \cos\nu\cos\lambda) - 2\,bc(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu).$$

Служећи се обрасцима (1) и (2) сферне тригонометрије, из n^0 17, можемо добијени образац друкчије овако написати

$$\left.\begin{aligned} 2\,\mathrm{F}(a,b,c) \equiv\, & a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu + c^2\sin^2\nu - 2\,ab\sin\lambda\sin\mu\cos\mathrm{N} - \\ & - 2\,ac\sin\nu\sin\lambda\cos\mathrm{M} - 2\,bc\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где су N, M и Λ углови сферног троугла, чије су стране ν, μ и λ.

У специјалном случају, када је

$$\lambda = \mu = \nu = 90^0, \quad \Lambda = \mathrm{M} = \mathrm{N} = 90^0,$$

једнакост (1) се поклапа са обрасцем (1) из n^0 9, а обрасци (2), (3) и (4) са односним обрасцима (2), (1) и (4) из n^0 2. Најзад, под наведеном претпоставком, једнакост (5) постаје позната веза (5), из n^0 2.

Траже ли се углови неке праве линије у простору са координатним осама једног датог косоуглог система, онда се поступа слично као и у правоуглом координатном систему. Заиста, повуче се из координатног почетка зрак паралелно датој правој линији. Углови зрака са координатним осама претстављају тражене углове дате праве са координатним осама. При томе су знаци углова исти, када се смер посматране праве линије поклапа са смером уоченог помоћног зрака, а у противном случају они су супротни.

52. Синус триједра. — На страни 63 посматрана вредност Ω може се написати овако

$$\Omega = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

или друкчије

$$\Omega = 1 - \cos^2\nu - \cos^2\lambda - (\cos\mu - \cos\lambda\cos\nu)^2 + \cos^2\lambda\cos^2\nu =$$
$$= 1 - \cos^2\nu - \cos^2\lambda(1 - \cos^2\nu) - \sin^2\lambda\sin^2\nu\cos^2\mathrm{M},$$

или

$$\Omega = \sin^2\lambda \sin^2\nu - \sin^2\lambda \sin^2\nu \cos^2 M =$$
$$= \sin^2\lambda \sin^2\nu \sin^2 M.$$

Групишући на друге начине чланове израза Ω, лако се добијају још два друга израза исте величине Ω, наиме,:

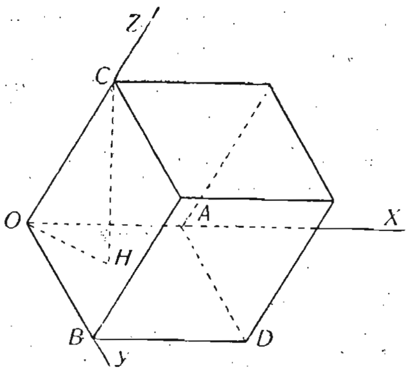
$$\Omega = \sin^2\mu \sin^2\lambda \sin^2 N,$$
$$\Omega = \sin^2\mu \sin^2\nu \sin^2 \Lambda.$$

Одатле се одмах види да вредност Ω не може бити једнака нули и претставља увек позитивну величину, која се налази у границама између 0 и 1. Величина Ω добија највећу вредност 1 само за правоугли триједар координатних оса.

Изложена расуђивања указују да се вредност величине $\sqrt{\Omega}$ налази у границама између -1 и $+1$. Стога се израз $\sqrt{\Omega}$ зове синус триједра углова λ, μ и ν..

Лако је приказати и геометриско тумачење овог синуса. Конструишимо у ту сврху над координатним осама косоуглог система OXYZ (сл. 41) паралелопипед са три суседне ивице

$$OA = a, \qquad OB = b, \qquad OC = c.$$



Сл. 41

Спустимо ли из темена C паралелопипеда висину CH, она ће заклапати праве углове са координатним осама OX и OY и одређен угао γ са осом кота.

Површина основе паралелопипеда OADB једнака је $ab \sin\nu$, а висина

$$CH = c \cos\gamma.$$

Према томе запремина V посматраног паралелопипеда изражава се обрасцем

$$V = abc \sin\nu \cos\gamma \tag{7}$$

У исто време сада услов (5) за праву HC, написан у свом пређашњем облику детерминанте, постаје

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cos\gamma \\ 0 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\gamma & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако развијемо детерминанту леве стране ове једнакости по елементима прве врсте, онда служећи се за Ω обрасцем у облику детерминанте, добијамо једнакост:

$$\Omega - \cos^2\gamma \sin^2\nu = 0.$$

Стављајући одавде добијену вредност производа $\cos\gamma \sin\nu$ у образац (7), налазимо

$$\sqrt{\Omega} = \frac{V}{abc}$$

Према томе, под претпоставком да је

$$a = b = c = 1,$$

може се рећи, да је *синус триједра координатних оса, са координатним угловима* λ, μ *и* ν, *једнак запремини паралелопипеда конструисана над позитивним правцима координатних оса са једним теменом у координатном почетку и свима ивицама дужине једнаке јединици.*

53. Трансформација квадратних облика. — Узмимо горе уведени квадратни облик

$$2\Psi \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2xz \cos\mu + 2xy \cos\nu.$$

Сматрајући први и два последња члана као квадрат и двоструке производе тринома

$$P \equiv x + y\cos\nu + z\cos\mu,$$

напишимо облик 2Ψ на овај начин

$$2\Psi \equiv P^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda - y^2\cos^2\nu - z^2\cos^2\mu - 2yz\cos\mu\cos\nu,$$

што се може изразити и друкчије помоћу обрасца сферне тригонометрије, n^0 17 (обрасца (2) на страни 22), у облику

$$2\Psi \equiv P^2 + y^2\sin^2\nu + z^2\sin^2\mu + 2yz\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda.$$

Ако уведемо, на сличан начин, ознаку:

$$Q \equiv y\sin\nu + z\sin\mu\cos\Lambda,$$

за 2Ψ доби... образац:

$$2\Psi \equiv P^2 + Q^2 + R^2,$$

где је

$$R \equiv z\sin\mu\sin\Lambda.$$

Поред добијеног израза облика 2Ψ као збира три квадрата, лако се формирају два друга слична обрасца, наиме:

$$2\Psi \equiv P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2,$$

где су уведене ознаке:

$$P_1 \equiv y + x\cos\nu + z\cos\lambda,$$
$$Q_1 \equiv z\sin\lambda + x\sin\nu\cos M,$$
$$R_1 \equiv x\sin\nu\sin M;$$
$$2\Psi \equiv P_2^2 + Q_2^2 + R_2^2,$$
$$P_2 \equiv z + x\cos\mu + y\cos\lambda,$$
$$Q_2 \equiv x\sin\mu + y\sin\lambda\cos N,$$
$$R_2 \equiv y\sin\lambda\sin N.$$

Проучимо сад трансформацију горе наведеног квадратног облика

$$\left.\begin{aligned} 2\,F(a,b,c) \equiv a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu + c^2\sin^2\nu - 2\,ab\sin\lambda\sin\mu\cos N - \\ -2\,ac\sin\nu\sin\lambda\cos M - 2\,bc\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Посматрајмо трећи, пети и шести члан квадратне форме (6) као квадрат и двоструке производе тринома

$$U \equiv c\sin\nu - a\sin\lambda\cos M - b\sin\mu\cos\Lambda$$

Тада облик 2F постаје

$$\begin{aligned} 2\,F = U^2 + a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu - 2\,ab\sin\lambda\sin\mu\cos N - \\ - a^2\sin^2\lambda\cos^2 M - b^2\sin^2\mu\cos^2\Lambda - 2\,ab\sin\lambda\sin\mu\cos M\cos\Lambda \end{aligned}$$

или, с обзиром на трећи образац (8) из n^0 18,

$$\begin{aligned} 2\,F = U^2 + a^2\sin^2\lambda\sin^2 M + b^2\sin^2\mu\sin^2\Lambda - \\ - 2ab\sin\lambda\sin\mu\sin\Lambda\sin M\cos\nu, \end{aligned}$$

Уместо два последња члана уведимо бином

$$V \equiv b\sin\mu\sin\Lambda - a\sin\lambda\sin M\cos\nu$$

Према томе претходни израз 2F добија облик:

$$2F = U^2 + V^2 + W^2,$$

где је

$$W \equiv a\sin\lambda\sin\nu\sin M.$$

Посматрани квадратни облик 2F може се претворити у збир три квадрата још на два друга различита начина упоређивањем његових чланова, наиме:

$$2F = U_1^2 + V_1^2 + W_1^2,$$

где је

$$\begin{aligned} U_1 &= a\sin\lambda - b\sin\mu\cos N - c\sin\nu\cos M \\ V_1 &= c\sin\nu\sin M - b\sin\mu\sin N\cos\lambda \\ W_1 &= b\sin\mu\sin\lambda\sin N. \end{aligned}$$

Најзад, имамо и трећи облик растављања:

$$\begin{aligned} 2F &= U_2^2 + V_2^2 + W_2^2, \\ U_2 &= b\sin\mu - a\sin\lambda\cos N - c\sin\nu\cos\Lambda, \\ V_2 &= a\sin\lambda\sin N - c\sin\nu\sin\Lambda\cos\mu, \\ W_2 &= c\sin\nu\sin\mu\sin\Lambda. \end{aligned}$$

54. Растојање између две тачке. — Узмимо у косоуглом праволиниском координатном систему OXYZ две тачке:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Повуцимо кроз тачку M_1 помоћне координатне осе паралелне датим осама. Тада је тражено растојање M_1M_2, које обележавамо са d, једнако потегу

тачке M_2 у помоћном координатном систему са почетком у тачки M_1, а осама паралелним старим осама. У овом помоћном систему координате тачке M_2 одређене су разликама:

$$x_2 - x_1, \qquad y_2 - y_1, \qquad z_2 - z_1.$$

Тада, служећи се обрасцима облика (3) и (4), добијамо њима сличне обрасце:

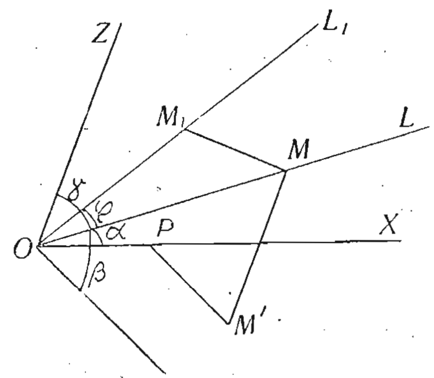
$$d^2 = S(x_2 - x_1)^2 + 2S(z_2 - z_1)(y_2 - y_1)\cos\lambda, \qquad (8)$$

$$\cos(d, x) = \frac{x_2 - x_1 + (y_2 - y_1)\cos\nu + (z_2 - z_1)\cos\mu}{d},$$

$$\cos(d, y) = \frac{(x_2 - x_1)\cos\nu + y_2 - y_1 + (z_2 - z_1)\cos\lambda}{d},$$

$$\cos(d, z) = \frac{(x_2 - x_1)\cos\mu + (y_2 - y_1)\cos\lambda + z_2 - z_1}{d},$$

55. Угао између две праве. — Тражени угао може се израчунати на исти начин као и у правоуглом праволиниском координатном систему. Међутим то израчунавање се може упростити на овај начин. Узмимо две праве линије L и L_1 у координатном систему OXYZ са координатним угловима λ, μ и ν (сл. 42).



Сл. 42

Обележимо са x, y, z координате неке тачке M на правој L, а потег OM тачке M са r. Узмимо сада на правој L_1 тачку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и означимо њен потег са r_1. Тада се тражени угао φ добија, из троугла OM_1M, помоћу обрасца

$$\cos\varphi = \frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2\,r\,r_1} \qquad (9)$$

где је d растојање између обе тачке M и M_1. Слично обрасцима (3) и (8) имамо:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2y_1z_1\cos\lambda + 2x_1z_1\cos\mu + 2x_1y_1\cos\nu$$

$$d^2 = \Sigma(x_1 - x)^2 + 2\,\Sigma(y_1 - y)(z_1 - z)\cos\lambda.$$

Стављајући ове вредности r, r_1 и d у образац (9), после свођења налазимо образац

$$\cos\varphi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + (yz_1 + y_1z)\cos\lambda + (xz_1 + x_1z)\cos\mu + (xy_1 + x_1y)\cos\nu}{r\,r_1} \qquad (10)$$

или

$$\cos\varphi = \frac{x_1\Psi_1 + y_1\Psi_2 + z_1\Psi_3}{\sqrt{2\Psi}\cdot\sqrt{2\Psi'}}, \qquad (11)$$

где је уведена ознака Ψ' слично са Ψ за израз потега r_1, наиме:

$$2\Psi' = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2y_1 z_1 \cos\lambda + 2x_1 z_1 \cos\mu + 2x_1 y_1 \cos\nu$$

Добијени образац (10) изражава тражени угао φ помоћу координата и потега две тачке M и M_1, од којих је свака на једној од две посматране праве L и L_1.

Образац (11) може се такође изразити у симетричком облику помоћу полинома P, Q и R уведених у n^0 53. Заиста, имамо обрасце

$$\Psi_1 \equiv P,$$

$$\Psi_2 \equiv P\cos\nu + Q\sin\nu,$$

$$\Psi_3 \equiv P\cos\mu + Q\sin\mu\cos\Lambda + R\sin\mu\sin\Lambda.$$

Уведимо сем тога ознаке

$$2\Psi' \equiv P'^2 + Q'^2 + R'^2,$$

$$P' \equiv x_1 + y_1\cos\nu + z_1\cos\mu,$$

$$Q' \equiv y_1\sin\nu + z_1\sin\mu\cos\Lambda,$$

$$R' \equiv z_1\sin\mu\sin\Lambda.$$

Према томе лако је увидети да се образац (11) своди на облик:

$$\cos\varphi = \frac{PP' + QQ' + RR'}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\cdot\sqrt{P'^2+Q'^2+R'^2}}. \qquad (12)$$

Међутим, образац (11) послужиће и за изражавање вредности траженог угла φ помоћу углова, које дате праве линије граде са координатним осама. Заиста, образац (11) благодарећи једнакостима (4) постаје

$$\cos\varphi = \frac{x_1 a + y_1 b + z_1 c}{r_1}. \qquad (13)$$

Означимо ли са a_1, b_1 и c_1 косинусе углова, које права заклапа са координатним осама, онда, слично обрасцима (2), постоје за тачку M_1 ове три једнакости

$$\left.\begin{aligned} r_1 a_1 &= x_1 + y_1\cos\nu + z_1\cos\mu \\ r_1 b_1 &= x_1\cos\nu + y_1 + z_1\cos\lambda, \\ r_1 c_1 &= x_1\cos\mu + y_1\cos\lambda + z_1. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Уведимо ознаку $2F'$ за функцију косинуса углова праве L_1 са координатним осама која је слична са 2F, наиме,:

$$2F'(a_1, b_1, c_1) \equiv a_1^2\sin^2\lambda + b_1^2\sin^2\mu + c_1^2\sin^2\nu -$$
$$-2a_1b_1\sin\lambda\sin\mu\cos N - 2a_1c_1\sin\nu\sin\lambda\cos M -$$
$$-2b_1c_1\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda.$$

Означимо ли са F_1', F_2', F_3' парцијалне изводе првог реда функције F' по a_1, b_1 и c_1, онда решавањем једначина (14) по x_1, y_1 и z_1 добијамо обрасце:

$$x_1 = \frac{r_1}{\Omega}F_1', \qquad y_1 = \frac{r_1}{\Omega}F_2', \qquad z_1 = \frac{r_1}{\Omega}F_3'.$$

Смењујући нађене вредности x_1, y_1 и z_1 у обрасцу (13), налазимо други тражени израз $\cos\varphi$ у облику

$$\cos\varphi = \frac{aF_1' + bF_2' + cF_3'}{\Omega}. \qquad (15)$$

Обрасци (11) и (15) могу се још написати и овако.

Групишући на други начин чланове у обрасцу (10) место обрасца (11), добијамо:

$$\cos\varphi = \frac{x\Psi_1' + y\Psi_2' + z\Psi_3'}{\sqrt{2\Psi}\,.\,\sqrt{2\Psi'}}, \qquad (16)$$

где Ψ_1', Ψ_2', Ψ_3' обележавају парцијалне изводе првог реда функције Ψ' по x_1, y_1 и z_1.

Полазећи сада од обрасца (16) налазимо место (15) израз

$$\cos\varphi = \frac{a_1F_1 + b_1F_2 + c_1F_3}{\Omega}, \qquad (17)$$

где F_1, F_2 и F_3 означавају парцијалне изводе првог реда по a, b и c функције F, која је одређена обрасцем (6).

Ако уведемо, слично n^0 53, образац

$$2F' \equiv U'^2 + V'^2 + W'^2,$$

где се U', V' и W' разликују од U, V и W тиме што место a, b и c садрже a_1, b_1 и c_1, имамо

$$F_3' \equiv U'\sin\nu,$$
$$F_2 \equiv -U'\sin\mu\cos\Lambda + V'\sin\mu\sin\Lambda,$$
$$F_1' \equiv -U'\sin\lambda\cos M - V'\sin\lambda\sin M\cos\nu + W'\sin\nu\sin\lambda\sin M.$$

Стога бројилац обрасца (15) постаје

$$aF_1' + bF_2' + cF_3' \equiv UU' + VV' + WW'.$$

Пошто углови праве линије L са координатним осама испуњавају услов (5), а углови, које права L_1 заклапа са координатним осама, — сличан услов

$$2F'(a_1, b_1, c_1) = \Omega, \qquad (18)$$

то имамо ову једнакост

$$\Omega \equiv \sqrt{\Omega}\cdot\sqrt{\Omega} \equiv \sqrt{2F}\cdot\sqrt{2F'} \equiv$$
$$\equiv \sqrt{U^2+V^2+W^2}\,.\sqrt{U'^2+V'^2+W'^2}.$$

Дакле, обрасци (15) и (17) могу се још друкчије написати овако

$$\cos\varphi = \frac{UU' + VV' + WW'}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}\,.\sqrt{U'^2+V'^2+W'^2}} \qquad (19)$$

Добијени резултат (15) или (17) може се извести и на овај начин.

Пројицирамо ли ортогонално на праву L_1 координатни многоугао $OPM'M$ и његову резултанту OM, то се добија једнакост

$$r\cos\varphi = xa_1 + yb_1 + zc_1, \tag{20}$$

која је слична оној, коју смо горе навели под бројем (13).

Елиминишући r, x, y и z из система четири по њима линеарне хомогене једначине (20) и (2), добијамо тражени резултат у облику

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминанта леве стране постављене једнакости може се раставити у збир две детерминанте:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ 0 & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ 0 & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Према томе, тражени угао се одређује обрасцем

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\Omega}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Развијемо ли детерминанту десне стране добијеног обрасца по елементима прве колоне, непосредно се добија образац (15). Међутим развијајући исту детерминанту по елементима прве врсте, налазимо образац (17).

56. Синус угла између две праве. — Према обрасцу (11) добија се израз

$$\sin^2\varphi = 1 - \frac{(x_1\Psi_1 + y_1\Psi_2 + z_1\Psi_3)^2}{2\Psi\cdot 2\Psi'}. \tag{22}$$

Пошто су функције 2Ψ и $2\Psi'$ хомогене другог степена, то су задовољени услови

$$2\Psi \equiv x\Psi_1 + y\Psi_2 + z\Psi_3,$$
$$2\Psi' \equiv x_1\Psi_1' + y_1\Psi_2' + z_1\Psi_3'.$$

Осим тога очевидно имамо идентичност

$$x_1\Psi_1 + y_1\Psi_2 + z_1\Psi_3 \equiv x\Psi_1' + y\Psi_2' + z\Psi_3',$$

Стога образац (22) даје

$$2\Psi\, 2\Psi' \sin^2\varphi = (x\Psi_1 + y\Psi_2 + z\Psi_3)(x_1\Psi_1' + y_1\Psi_2' + z_1\Psi_3') -$$
$$- (x_1\Psi_1 + y_1\Psi_2 + z_1\Psi_3)(x\Psi_1' + y\Psi_2' + z\Psi_3'),$$

или

$$\sin^2\varphi = \frac{\Sigma(xy_1 - x_1y)(\Psi_1\Psi_2' - \Psi_2\Psi_1')}{2\Psi\cdot 2\Psi'}, \tag{23}$$

где се збир у бројиоцу проширује на три симетрична члана, који одговарају цикличним пермутацијама координата тачака M и M_1. Лако је увидети да постоје идентичности

$$\Psi_1\Psi_2' - \Psi_2\Psi_1' \equiv (xy_1 - yx_1)\sin^2\nu - (yz_1 - zy_1)\sin\lambda\sin\nu\cos M -$$
$$- (zx_1 - xz_1)\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda$$

а исто тако сличне идентичности за два друга члана бројиоца у обрасцу (23). Према томе добија се образац

$$\sin^2\varphi = \frac{F(yz_1 - zy_1,\ zx_1 - xz_1,\ xy_1 - yx_1)}{2\Psi\cdot 2\Psi'}. \tag{24}$$

Ако се служимо обрасцем (15), онда добијамо

$$\sin^2\varphi = 1 - \frac{(a\,F_1' + b\,F_2' + c\,F_3')^2}{\Omega^2} \tag{25}$$

Међутим из услова (5) и сличног му услова (18) а због хомогености функција $2F$ и $2F'$, добијамо резултат

$$\Omega^2 = 2F\,.\,2F' \equiv (aF_1 + bF_2 + cF_3)(a_1F_1' + b_1F_2' + c_1F_3').$$

Осим тога очевидно је, да постоји идентичност:

$$a\,.\,F_1' + bF_2' + cF_3' = a_1F_1 + b_1F_2 + c_1F_3.$$

Одатле једнакост (25) постаје:

$$\Omega^2\sin^2\varphi = (aF_1 + bF_2 + cF_3)(a_1F_1' + b_1F_2' + c_1F_3') -$$
$$- (aF_1' + bF_2' + cF_3')(a_1F_1' + b_1F_2 + c_1F_3),$$

или

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{\Omega^2}\sum (ab_1 - a_1b)(F_1F_2' - F_2F_1'), \tag{26}$$

где се збир проширује на три симетрична члана, који одговарају цикличким пермутацијама косинуса углова између правих L и L_1 и координатних оса.

Лако је увидети да се од обрасца (26) непосредно прелази на обрасце (23) и (24).

Најзад, полазећи од образаца (12) и (19) одмах се добијају одређеним поступком ови обрасци

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\varphi &= \frac{(QR' - RQ')^2 + (RP' - PR')^2 + (PQ' - QP')^2}{(P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2)}, \\ \sin^2\varphi &= \frac{(VW' - WV')^2 + (WU' - UW')^2 + (UV' - VU')^2}{(U^2 + V^2 + W^2)(U'^2 + V'^2 + W'^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

57. Паралелност правих. — Из самог појма о паралелности две праве произлази, да су једнаки углови, које оне заклапају са сваком од три координатне осе. Стога и косинуси тих углова морају бити једнаки за паралелност посматраних правих наиме:

$$a = a_1, \qquad b = b_1, \qquad c = c_1. \tag{28}$$

Према томе израз (26) за sin φ се поништава. Вредност (24) за sin φ се такође поништава под претпоставком да је

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} \tag{29}$$

Међутим, добијени услови (29) су не само довољни, но и неопходни. Заиста, према обрасцима (4) и њима сличним обрасцима за углове праве L_1 једнакости (28) дају

$$\frac{\Psi_1}{\Psi_1'} = \frac{\Psi_2}{\Psi_2'} = \frac{\Psi_3}{\Psi_3'} = \xi,$$

где ξ означава заједничку вредност $\sqrt{\dfrac{\Psi}{\Psi'}}$ тих односа.

Одатле следују једнакости

$$x - \xi x_1 + (y - \xi y_1)\cos\nu + (z - \xi z_1)\cos\mu = 0,$$
$$(x - \xi x_1)\cos\nu + y - \xi y_1 + (z - \xi z_1)\cos\lambda = 0,$$
$$(x - \xi x_1)\cos\mu + (y - \xi y_1)\cos\lambda + z - \xi z_1 = 0.$$

Детерминанта коефицијената написаних трију једначина уз величине

$$x - \xi x_1, \qquad y - \xi y_1, \qquad z - \xi z_1,$$

различита је од нуле, као вредност синуса триједра координатних оса. Према томе, одатле се добијају једнакости (29).

Најзад, из образаца (27) налазимо услове паралелности правих L и L_1 у једном од два наредна облика

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}$$

или

$$\frac{U}{U'} = \frac{V}{V'} = \frac{W}{W'}.$$

58. Управност правих. — За услов управности правих L и L_1 мора се поништити косинус угла φ (сл. 42). Према томе, услов управности датих правих може се изразити на различите начине.

Узмимо на пример образац (11) или (16), или (12) и (19). Тада се тражени услов управности изражава помоћу једне од четири једнакости

$$x_1\Psi_1 + y_1\Psi_2 + z_1\Psi_3 = 0,$$
$$x\Psi_1' + y\Psi_2' + z\Psi_3' = 0,$$
$$PP' + QQ' + RR' = 0,$$
$$UU' + VV' + WW' = 0,$$

где наведене ознаке имају раније уведене вредности

Пођемо ли од обрасца (15), онда се тражени услов управности изражава једнакошћу

$$aF_1' + bF_2' + cF_3' = 0.$$

Исти услов може се такође, према горе наведеном, написати и овако:

$$a_1F_1 + b_1F_2 + c_1F_3 = 0.$$

Ако за израз cos φ узмемо образац (21), онда се услов управности изражава у облику:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ b & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ c & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

59. Главни параметри. — Изложени резултати могу се упростити увођењем тзв. *главних параметара* место косинуса праваца правих линија. Под *главним параметрима* подразумевају се координате тачке, која се налази на јединичном растојању од координатног почетка и лежи на правој повученој кроз координатни почетак паралелно датој правој.

Ако претпоставимо да су зраци OL и OL_1, на слици 42, паралелни двема датим правим линијама, и да су потези OM и OM_1 једнаки јединичној дужини, онда главни параметри посматраних правих линија претстављају координате тачака M и M_1. Обележимо их са

$$u, \ v, \ w; \qquad u_1, \ v_1, \ w_1.$$

Место услова облика (5), увешћемо сад везу између наведених главних параметара из обрасца (3). У ту сврху ставимо, уместо координата x, y, z тачке M, главне параметре u, v, w. На тај начин добија се тражена веза у облику

$$1 = u^2 + v^2 + w^2 + 2vw\cos\lambda + 2uw\cos\mu + 2uv\cos\nu \tag{30}$$

На сличан начин имамо за тачку M_1 услов

$$1 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 2v_1w_1\cos\lambda + 2u_1w_1\cos\mu + 2u_1v_1\cos\nu. \tag{31}$$

Означимо ли са 2ρ и 2ρ′ десне стране једнакости (30) и (31), онда се наведени услови изражавају овако

$$2\rho = 1, \qquad 2\rho' = 1 \tag{32}$$

Једнакост (20) постаје за главне параметре тачке M

$$\cos\varphi = ua_1 + vb_1 + wc_1 \tag{33}$$

Међутим за главне параметре тачке M_1 добијамо, слично обрасцима (4)

$$a_1 = \rho_1', \qquad b_1 = \rho_2', \qquad c_1 = \rho_3'.$$

Стављајући наведене вредности a_1, b_1, c_1 у претходни образац (33), налазимо израз траженог угла, између посматраних правих линија, у облику

$$\cos\varphi = u\rho_1' + v\rho_2' + w\rho_3'. \tag{34}$$

Јасно је да се услови паралелности посматраних правих линија изражавају помоћу главних параметара једнакостима

$$u = u_1, \qquad v = v_1, \qquad w = w_1.$$

Међутим услов управности правих линија добија се из обрасца (34) за вредност $\cos\varphi = 0$, у облику

$$u\rho_1' + v\rho_2' + w\rho_3' = 0,$$

или

$$uu_1 + vv_1 + ww_1 + (vw_1 + wv_1)\cos\lambda + (uw_1 + wu_1)\cos\mu + $$
$$+ (uv_1 + vu_1)\cos\nu = 0,$$

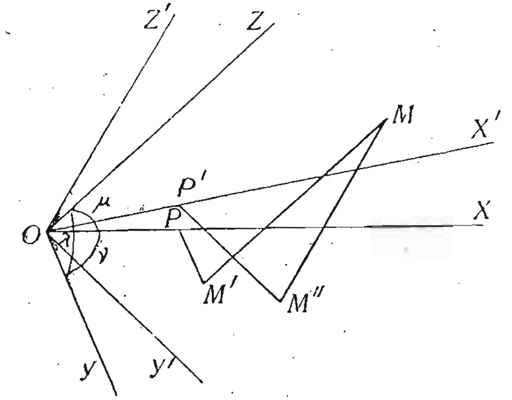
при чему постоје услови (32).

III. Трансформација косоуглих праволиниских координатних система

60. Померање координатног почетка. — Кад се координатне осе померају паралелно своме правцу, онда је очевидно, да обрасци трансформације координата изражавају сваку од старих координата као алгебарски збир односних координата новог почетка и нове координате. Према томе су обрасци трансформације косоуглих праволиниских координатних система слични обрасцима трансформације правоуглих праволиниских система, изложених у n^0 43.

61. Промена правца координатних оса. — Претпоставимо да је OXYZ стари координатни систем (сл. 43) са координатним угловима λ, μ и ν, а да је нови претстављен системом OX′Y′Z′ са координатним угловима λ', μ' и ν'.

Означимо са x, y, z старе координате тачке M, а са x', y', z' нове координате исте тачке. Одредимо углове између старих и нових координатних оса помоћу таблице



Сл. 43

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

Косинусе наведених углова означимо према таблици

	x'	y'	z'
x	a_1	a_2	a_3
y	b_1	b_2	b_3
z	c_1	c_2	c_3

(1)

При томе косинуси углова, које свака од оса једног система заклапа са осама другог координатног система, испуњавају по један услов облика (5) из n^0 51 (стр. 63).

Оба координатна многоугла тачке M, стари OPM′M и нови OP′M″M имају исти почетак и крај. Стога су њихове ортогоналне пројекције на сваку од старих координатних оса једнаке, наиме:

$$\left.\begin{aligned} x + y\cos\nu + z\cos\mu &= x'a_1 + y'a_2 + z'a_3, \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= x'b_1 + y'b_2 + z'b_3, \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= x'c_1 + y'c_2 + z'c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Лако је увидети да се решавањем ових једначина добијају старе координате у облику линеарних хомогених функција нових координата. Коефицијенти уз њих изражавају се само помоћу углова између координатних оса.

Према томе и обрнуто, нове координате изражавају се у облику линеарних хомогених функција старих координата.

Уведимо ознаке

$$2F', \qquad 2F'', \qquad 2F'''$$

за функције, које се добијају из F, чим ставимо место a, b, и c елементе прве, друге и треће колоне таблице (1) у образац (6) из n^0 51. Тада се решавањем једначина (2) добијају обрасци

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\Omega}\,(x'F_1' + y'F_1'' + z'F_1'''), \\ y &= \frac{1}{\Omega}\,(x'F_2' + y'F_2'' + z'F_2'''), \\ z &= \frac{1}{\Omega}\,(x'F_3' + y'F_3'' + z'F_3'''), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где доњи индекси код F′, F″ и F‴ означавају њихове парцијалне изводе по елементима прве, друге и треће колоне таблице (1).

62. Случај старог правоуглог система. — Истакнимо нарочити случај, када је полазни, с т а р и координатни систем правоугли, а н о в и — косоугли. Онда, под уведеном претпоставком, имамо:

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = 0,$$

и обрасци трансформације координата (2) постају

$$\left.\begin{aligned} x &= x'a_1 + y'a_2 + z'a_3, \\ y &= x'b_1 + y'b_2 + z'b_3, \\ z &= x'c_1 + y'c_2 + z'c_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Добијени обрасци су слични обрасцима трансформације правоуглог праволиниског координатног система у нови правоугли праволиниски систем. Само сад имамо место услова (4), из n^0 44, према раније уведеним ознакама, услове:

$$\left.\begin{aligned} a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= \cos\nu', \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= \cos\lambda', \\ a_3a_1 + b_3b_1 + c_3c_1 &= \cos\mu', \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1,\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2&=1,\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2&=1.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

при чему су

$$\lambda',\quad \mu',\quad \nu'$$

углови између нових оса Y' и Z', Z' и X', X' и Y'.

Ако дигнемо на квадрат обе стране сваке од једнакости (4) и саберемо резултате, онда се квадрат потега r тачке M, у старим правоуглим праволиниским координатама, изражава у новим косоуглим праволиниским координатама, слично обрасцу (3), из n^0 51, овако:

$$r^2=x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda'+2x'z'\cos\mu'+2x'y'\cos\nu'.$$

63. Везе између углова координатних оса двају система. — Генералисања ради образаца (7) изведених у n^0 45, узмимо прву, трећу и четврту једнакост (5) и напишимо их овако

$$\left.\begin{aligned} a_1a_1+b_1b_1+c_1c_1&=1,\\ a_2a_1+b_2b_1+c_2c_1&=\cos\nu',\\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1&=\cos\mu'.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Сматрајући написане једначине за линеарне по a_1, b_1 и c_1, израчунајмо детерминанту њихових коефицијената, наиме:

$$\delta\equiv\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Ако је дигнемо на квадрат, онда према правилу множења детерминаната и на основу образаца (5), добијамо

$$\delta^2\equiv\Omega',\qquad \delta\equiv\pm\sqrt{\Omega'},$$

где се Ω' разликује од Ω индексима $'$ код координатних углова. Од два знака мора се изабрати само један из истих разлога из којих се тако поступало и у случају правоуглих координатних система.

Сматрајући, да су оба координатна система исте оријентације, узмимо да је

$$\delta=+\sqrt{\Omega'}.$$

Према томе, решавајући једначине (6) по a_1, b_1, и c_1, добијамо обрасце

$$a_1=\frac{L'-L''\cos\nu'+L'''\cos\mu'}{\sqrt{\Omega'}},$$

$$b_1=\frac{M'-M''\cos\nu'+M'''\cos\mu'}{\sqrt{\Omega'}},$$

$$c_1=\frac{N'-N''\cos\nu'+N'''\cos\mu'}{\sqrt{\Omega'}}.$$

где ознаке L', M',......, N''' обележавају одговарајуће кофакторе три наредне матрице, састављене према упутствима n^0 6,

$$\begin{array}{ccc} L' & M' & N' \end{array}\qquad\begin{array}{ccc} L'' & M'' & N'' \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},$$

$$\begin{array}{ccc} L''' & M''' & N''' \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

Добијени резултат претставља очевидну генерализацију образаца за правоугле координатне системе у n^0 45.

64. Случај новог правоуглог система. — У овом случају имамо

$$\lambda'=\mu'=\nu'=90^0$$

па обрасци (3) постају

$$x=\frac{1}{\Omega}(x'a_1+y'a_2+z'a_3),$$

$$y=\frac{1}{\Omega}(x'b_1+y'b_2+z'b_3),$$

$$z=\frac{1}{\Omega}(x'c_1+y'c_2+z'c_3).$$

Међутим за углове, које свака од старих оса заклапа са новим узајамно управним осама, добијамо обрасце

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1,\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1,\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1,\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=\cos\nu,\\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3&=\cos\mu,\\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=\cos\lambda.\end{aligned}$$

Поступком сличним ономе изложеном у претходном n^0 63 добијају се одавде везе између косинуса посматраних углова (1).

ГЛАВА ТРЕЋА

РАВАН

I. Различити облици једначине равни

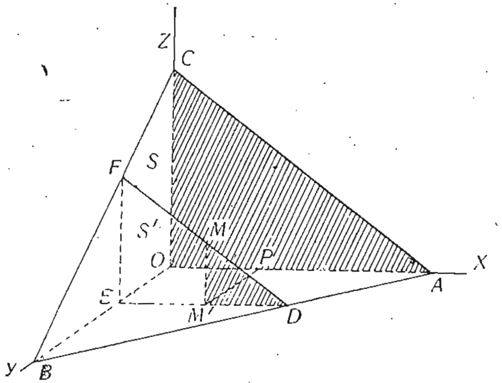
65. Сегментска једначина равни. — Видели смо у n^0 28, да линеарна једначина у текућим координатама одређује раван.

Проучимо сада питање образовања једначине равни, која је одређена помоћу геометриских параметара.

Узмимо, на пр., за параметре равни отсечке, које раван одваја на координатним осама. Ови отсечци потпуно одређују положај равни у простору, јер је она одређена помоћу три дате тачке.

Узмимо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ (сл. 44). Претпоставимо, да дата раван S одваја отсечке OA, OB и OC на координатним осама OX, OY и OZ. Према томе су праве линије AB, BC, CA линије пресека равни S са координатним равнима. Означимо са a, b, и c дужине тих отсечака:

$$\mathrm{OA} = a, \quad \mathrm{OB} = b, \quad \mathrm{OC} = c.$$



Сл. 44

Посматрајмо у датој равни S ма коју тачку M, чији је координатни многоугао OPM′M, и означимо њене координате са x, y, z:

$$\mathrm{OP} = x, \quad \mathrm{PM'} = y, \quad \mathrm{M'M} = z.$$

Повуцимо затим кроз тачку M раван S′ паралелно координатној равни ZOX. Обележимо са DF праву линију пресека равни S′ и дате равни S. Пошто је раван S′ паралелна координатној равни ZOX, то те две равни секу дату раван S дуж паралелних правих линија DF и AC.

И друга права линија DE, по којој раван S′ сече координатну раван XOY, паралелна је оси OX.

Према томе су правоугли троуглови

$$\mathrm{DEF}, \qquad \mathrm{AOC}$$

слични. Одатле, пошто је

$$\mathrm{M'D} = \mathrm{ED} - x,$$

добијамо размеру

$$\frac{z}{c} = \frac{\mathrm{ED} - x}{a} \tag{1}$$

Због сличности троуглова

$$\Delta\,\mathrm{DEB}, \qquad \Delta\,\mathrm{AOB},$$

који се налазе у равни XOY, добија се друга размера

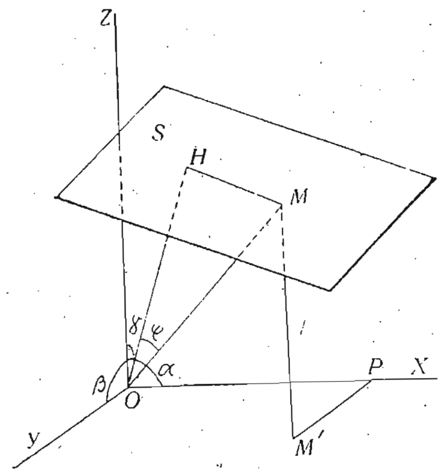
$$\frac{\mathrm{ED}}{a} = \frac{b-y}{b}. \tag{2}$$

Елиминишући ED из обе једнакости (1) и (2), налазимо везу између текућих координата x, y, z тачке M и њених параметара a, b, c у овом облику

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Добијена једначина претставља сегментски облик једначине равни, која отсеца отсечке a, b, c на координатним осама OX, OY и OZ.

66. Нормални облик једначине равни. — Положај дате равни S у координатном систему OXYZ (сл. 45) одређује се и помоћу других параметара, наиме помоћу растојања равни од координатног почетка и углова, које нормала на раван чини са координатним осама. Означимо са p дужину нормале OH спуштене из координатног почетка на дату раван S, чији се позитиван смер рачуна од координатног почетка. Нека су α, β и γ углови, које нормала OH заклапа са координатним осама OX, OY и OZ.



Сл. 45

Узмимо у равни S ма коју тачку M са координатама x, y, z, чији је координатни многоугао OPM′M. Потег r тачке M дат је обрасцем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

а његови углови са кординатним осама одређују се обрасцима

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r}, \qquad \cos(r, y) = \frac{y}{r}, \qquad \cos(r, z) = \frac{z}{r}. \tag{3}$$

Спојимо тачке H и M у датој равни S правом HM. Пошто је OH нормала на раван S, то је троугао OHM правоугли, и према томе добијамо:

$$p = r \cos\varphi, \tag{4}$$

где је φ угао између потега r и нормале p. Међутим образац за косинус угла између два правца гласи

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos(r, x) + \cos\beta\cos(r, y) + \cos\gamma\cos(r, z).$$

Због тога, узимајући у обзир обрасце (3), једнакост (4) постаје

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

и претставља једначину равни у облику који се назива нормални облик једначине равни.

67. Трансформација опште линеарне једначине. — Узмимо општу једначину линеарну по текућим координатама

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5)$$

где су A, B, C и D ма који стални коефицијенти.

Ако претпоставимо да је

$$C \gtrless 0,$$

онда се једначина (5) може решити по z:

$$z = A_1x + B_1y + D_1, \qquad (6)$$

где је

$$A_1 = -\frac{A}{C}, \quad B_1 = -\frac{B}{C}, \quad D_1 = -\frac{D}{C}.$$

Међутим, доказали смо већ у n^0 28 (стр. 33), да једначина облика (6) одређује раван. Лако је сада протумачити геометриско значење коефицијената једначине (6). Заиста, ставимо ли у једначини (6)

$$x = y = 0,$$

онда се види, да је

$$D_1 = z_0, \quad \text{или} \quad -\frac{D}{C} = z_0,$$

т.ј. коефицијент D_1 означава коту пресечне тачке равни S из (6) са осом OZ.

Ако сада одредимо пресек равни (6) са координатном равни YOZ, чија је једначина

$$x = 0,$$

онда једначина (6) даје пресечну праву у облику једначине

$$z = B_1y + D_1$$

Према томе коефицијент B_1 претставља tang угла α, који посматрана пресечна права заклапа са осом OY, у координатној равни YOZ, т.ј.

$$B_1 = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{или} \quad -\frac{B}{C} = \operatorname{tg}\alpha.$$

На сличан начин лако је увидети, да је

$$A_1 = \operatorname{tg}\beta, \quad \text{или} \quad -\frac{A}{C} = \operatorname{tg}\beta,$$

где је β угао, који пресечна права равни (6) са координатном равни ZOX заклапа, у овој равни, са осом OX.

Уведимо сада другу претпоставку да је

$$D \gtrless 0,$$

Ако поделимо све чланове дате једначине (5) са D, добићемо сегментски облик једначине

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где се a, b и c изражавају помоћу коефицијената дате једначине (5) на овај начин

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C}.$$

Према томе извршена трансформација је могућа, кад раван не пролази кроз координатни почетак.

Најзад, свака линеарна једначина облика (5) може се увек претворити у нормални облик, и то без икаквих претпоставки о коефицијентима. Заиста, поделимо обе стране једначине (5) са изразом

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (7)$$

и уведимо ознаке:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\beta, \quad \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos\gamma \qquad (8)$$

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p. \qquad (9)$$

Од два знака пред кореном у изразу (7) изаберимо само један, према једнакости (9), где p мора бити увек позитивна величина. Тада обрасци (8) дају потпуно одређене вредности за углове α, β и γ, јер је свака величина на левој страни образаца (8) прави разломак, а збир њихових квадрата једнак је јединици.

Узимајући у обзир наведену примедбу о знаку израза (7), претворимо општу једначину (5) на изложени начин у нормални облик:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

На основу добијене једначине, види се да свака једначина општег облика (5) заиста одређује увек неку раван.

Једначина у облику (5) има четири коефицијента. Али морамо сматрати да су само три независна. Заиста, ако поделимо обе стране једначине (5) са једним од њених коефицијената, добија се једначина само са три независна коефицијента.

Сегментска једначина равни показује, да је за три параметра раван потпуно одређена.

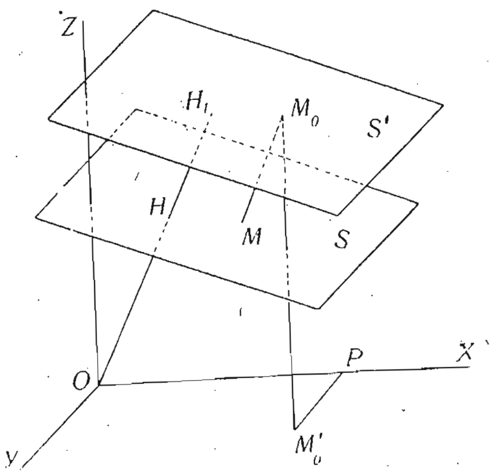
Једначина равни нормалног облика садржи четири коефицијента: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p. Али очевидно је, да се они своде на свега три различите количине, јер су косинуси углова везани познатом једнакошћу,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Најзад, на основу образаца (8) долазимо до закључка:

Коефицијенти A, B, C једначине равни општег облика (5) сразмерни су косинусима углова, које нормала из координатног почетка на дату раван чини са координатним осама.

68. Растојање тачке од равни. — Посматрајмо раван S у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 46) и неку тачку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, чије се растојање од равни тражи.



Сл. 46

Узмимо једначину равни у нормалном облику

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где α, β, γ означавају углове, које нормала OH на раван S заклапа са координатним осама OX, OY и OZ. Означимо са h тражено растојање MM_0 тачке M_0 од равни S, при чему је M подножје ове нормале.

Повуцимо кроз тачку M_0 раван S′ паралелну са равни S и обележимо јој тачку пресека са нормалом OH са H_1. Према томе очевидно је, да једначина равни S′ има облик:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p - h = 0, \qquad (10)$$

јер је HH_1 једнако траженом растојању h. Пошто раван (10) пролази кроз тачку M_0, онда њене координате x_0, y_0, z_0 задовољавају идентички једначину (10), наиме:

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p - h = 0.$$

Према томе добија се израз за h у облику

$$h = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Ако се дата тачка M_0 налази са исте стране од дате равни S са које се налази и координатни почетак 0, онда је, место $p+h$, растојање равни S′ од координатног почетка једнако $p-h$. Одавде долазимо до закључка да се тражено растојање изражава обрасцем

$$h = \pm(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p), \qquad (11)$$

где знак + одговара услову, да се дата тачка и координатни почетак налазе на разним странама од дате равни, док се у супротном случају мора узети доњи знак. — Добијени образац (11) гласи: *Тражено растојање дате тачке од дате равни изражава се обрасцем, који претставља резултат смене координата дате тачке у левој страни нормалне једначине дате равни, при чему се знак одређује по горњем упутству.*

Одавде се види, да ако је дата једначина равни у општем облику (5), онда је прво треба довести на нормални облик, а затим уврстити у њену леву страну координате дате тачке.

На овај начин се добија образац

$$h = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (12)$$

где се знак + или — бира на основу ова два податка.

Прво, одређује се знак другог корена према вредности коефицијента D, како је наведено у претходном n^0 67. Затим се бира знак + или — код добијеног обрасца у вези са релативним положајем дате тачке и координатног почетка према датој равни.

Навешћемо још и други начин извођења добијеног обрасца (11).

Заиста, повуцимо координатни многоугао дате тачке M_0, наиме OPM'_0M_0. Пошто је помоћна раван S′ управна на нормали OH_1, то се отсечак OH_1 може претставити и збиром ортогоналних пројекција компонената координатног многоугла тачке M_0 на тај отсечак.

Међутим очевидно је да се посматране пројекције отсечака OP, PM'_0 и M'_0M_0 изражавају респективно обрасцима:

$$x\cos\alpha, \qquad y\cos\beta, \qquad z\cos\gamma.$$

Према томе, одмах се може написати тражени образац (11), односно (12).

Уведимо, краткоће ради, ознаке скраћеног обележавања једначине равни нормалног облика са

$$l = 0,$$

а општег облика са

$$L = 0.$$

Онда се добијени обрасци (11) и (12) пишу кратко овако:

$$h = \pm l_0, \qquad h = \pm\mu L_0,$$

где μ означава вредност множиоца

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

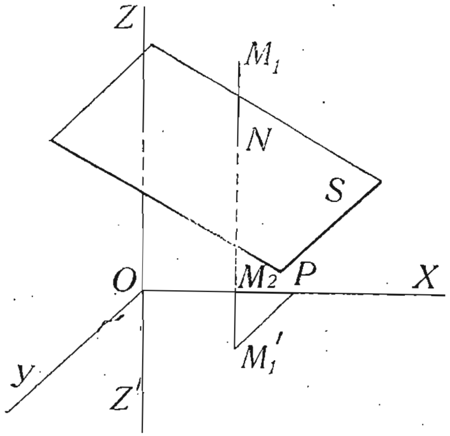
који своди једначину општег облика (5) на нормални облик.

69. Аналитички приказ узајамног положаја тачке и равни. — Горе је доказано, да растојање тачке од равни зависи од њиховог узајамног положаја. Сада се поставља питање изналажења њиховог распореда на аналитички начин, т.ј. независно од претходне геометриске конструкције дате равни и дате тачке.

У ту сврху повуцимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 47) неку раван S, непаралелну оси кота. Ова раван дели простор на два дела. Први, горњи део простора над равни S, садржи позитиван правац OZ осе кота, и зове се *простор позитивних кота* према равни S.

Други део простора, који се налази испод равни S, садржи негативан правац OZ′ осе кота и зове се стога *простор негативних кота према* равни S.

Узмимо две тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ на истој правој паралелној оси OZ, тако да се, према равни S, тачка M_1 налази у простору позитивних кота, а M_2 у простору негативних кота.



Сл. 47

Означимо са z_0 коту тачке N, која се налази у пресеку праве M'_1M_1 са равни S.

Према томе постоје неједнакости

$$z_1 > z_0, \qquad z_2 < z_0, \tag{13}$$

па ма у којим рогљевима се налазиле тачке M_1 и M_2.

Узмимо једначину равни S општег облика

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{14}$$

Под уведеном претпоставком, када је $C \gtrless 0$, имамо за тачку N

$$z_0 = -\frac{A}{C}\,x_1 - \frac{B}{C}\,y_1 - \frac{D}{C}.$$

Стога се неједнакости (13) пишу друкчије на овај начин

$$\left.\begin{aligned} z_1 &> -\frac{A}{C}\,x_1 - \frac{B}{C}\,y_1 - \frac{D}{C}, \\ z_2 &< -\frac{A}{C}\,x_1 - \frac{B}{C}\,y_1 - \frac{D}{C}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Под условом

$$C > 0, \tag{16}$$

неједнакости (15) постају

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &> 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_2 + D &< 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Напротив, под претпоставком

$$C < 0, \tag{18}$$

добијају се из неједнакости (15) ове

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &< 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_2 + D &> 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Наведени услови (13) су не само потребни него су и довољни, да би се тачка M_1 налазила у простору позитивних кота, а тачка M_2 у простору негативних кота, према равни S. Услови (16) и (17), а с друге стране услови (18) и (19), доводе до овог закључка:

Посматрајмо неку произвољну тачку $M'(x', y', z')$ и означимо са L' вредност леве стране једначине (14), која се добија, кад у њој уврстимо место текућих координата вредности x', y', z'.

Ако се координатни почетак налази у области негативних кота, у односу на дату раван (14), онда се тачка M' и координатни почетак налазе на различитим странама равни (14), под претпоставком да величине

$$C \quad \text{и} \quad L' \tag{20}$$

имају исти знак; у случају да су ове величине различитих знакова, тачка M' и координатни почетак налазе се на истој страни дате равни (14).

Посматрајмо сад други случај, када се, према датој равни (14), координатни почетак налази у области позитивних кота. На сличан начин, као и у претходном случају, долазимо до закључка:

Ако се координатни почетак налази у области позитивних кота, онда исти знаци величина (20) *показују, да се дата тачка и координатни почетак налазе са исте стране дате равни* (14). *Међутим у случају различитих знакова величина* (20), *дата тачка и координатни почетак налазе се на разним странама дате равни* (14).

За примену изведених ставова потребно је, прво, решити питање области, у којој се налази координатни почетак. Али лако је увидети, да се постављено питање може одмах решити, ако се испита, какав отсечак, п о з и т и в а н или н е г а т и в а н, отсеца дата раван од осе кота. Кад је тај отсечак позитиван, координатни почетак се налази у области негативних кота, у противном случају он се налази у области позитивних кота.

Узмимо на пример раван

$$2x + 3y - z + 1 = 0 \tag{21}$$

Очевидно је да дата раван одваја отсечак $+1$ од осе кота, те се због тога координатни почетак налази у области негативних кота према равни (21).

Напротив, за раван

$$3x + 4y - 6z - 12 = 0, \tag{22}$$

координатни почетак је смештен у области позитивних кота.

Ако је коефицијент C опште једначине (14) једнак нули, т.ј. ако је раван паралелна оси кота, онда је довољно применити изложена расуђивања за посматрање области позитивних и негативних апсциса или ордината, место кота.

Ради примене изложене теорије потражимо растојање тачке $(-1, 2, -3)$ од дате равни (21). Приметимо најпре, да је у посматраном случају

$$C < 0, \qquad L' = 8,$$

т. . обе величине (20) су различитог знака. То значи, да се координатни почетак и дата тачка налазе са исте стране равни (21). Пошто је множилац, који своди једначину (21) на нормални облик, $-\frac{1}{\sqrt{14}}$, вредност траженог растојања износи

$$h = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Потражимо, даље, растојање тачке (1, 2, 3) од равни (22). Сад су величине (20):

$$C < 0, \qquad L' = -19,$$

т. . имају исти знак. Због тога су дата тачка и координатни почетак смештени са исте стране дате равни (22). Множилац, који своди једначину (22) на нормални облик, позитиван је $\frac{1}{\sqrt{61}}$. Према томе је тражено растојање

$$h = \frac{19}{\sqrt{61}} .$$

II. Скуп неколико равни

70. Услов паралелности двеју равни. — Узмимо две равни у правоуглом праволиниском систему координата:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \tag{2}$$

Њихове нормале из координатног почетка заклапају са координатним осама углове α, β, γ, односно α_1, β_1, γ_1, који се одређују обрасцима:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{A}{R}, \quad \cos\beta = \frac{B}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{R}, \\ R = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}; \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_1 = \frac{A_1}{R_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{R_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{R_1}, \\ R_1 = \pm\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

где се пред квадратним коренима узима само један знак према смеру посматраних нормала.

Ако су дате равни (1) и (2) паралелне, онда се нормале, повучене на њих из координатног почетка, поклапају, те овај услов није само потребан него и довољан за паралелност равни (1) и (2). Посматрани услов изражава се дакле једнакостима

$$\frac{A}{R} = \frac{A_1}{R_1}, \quad \frac{B}{R} = \frac{B_1}{R_1}, \quad \frac{C}{R} = \frac{C_1}{R_1},$$

или

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{R}{R_1} \tag{5}$$

Према томе *услов паралелности две равни* (1) *и* (2) *је у пропорционалности коефицијената код чланова са текућим координатама.*

Одавде се лако изводи општи облик равни, које су паралелне датој равни. Означимо у ту сврху, краткоће ради, раван (1) помоћу скраћеног начина обележавања:

$$L = 0.$$

Тада се свака раван, која је паралелна датој равни, може претставити једначином

$$L + \lambda = 0 ,$$

где је λ произвољна константа. Претпоставимо да, у специјалном случају, коефицијенти D и D_1 у једначинама (1) и (2) испуњавају исти услов сразмерности (5) тако, да постоје једнакости:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1} = \frac{R}{R_1} . \tag{6}$$

Ако означимо са κ вредност размера (6), а са L_1 леву страну једначине (2), онда добијамо

$$L = \kappa L_1.$$

Према томе, *ако су сразмерни односни коефицијенти једначина* (1) *и* (2), *онда су те равни не само паралелне, но се и поклапају.*

70. Услов управности двеју равни. — Ако су дате равни (1) и (2) управне, онда су узајамно управне и њихове нормале спуштене из координатног почетка.

Наведени услов управности датих равни није само неопходан него и довољан.

Пошто се услов управности нормала изражава једнакошћу

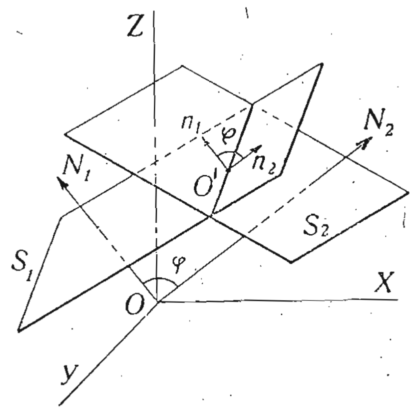
$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = 0,$$

тражени услов управности равни (1) и (2), према једначинама (3) и (4), у правоуглом праволиниском координатном систему, постаје:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \tag{7}$$

72. Угао између две равни. — Углом између две равни назива се угао између нормала, које су спуштене на посматране равни из координатног почетка. Према томе угао φ између нормала N_1 и N_2 на равни (1) и (2), које ћемо обележити са S_1 и S_2 (сл. 48), узимајући у обзир обрасце (3) и (4) одређује се познатим обрасцем

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \\ + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = \\ = \pm\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{RR_1}, \tag{8}$$



Сл. 48

где се од два знака мора узети један који одговара оштром углу између нормала n_1 и n_2 на дате равни у тачки O' њиховог пресека, или други који одговара суплементу угла између тих нормала.

Добијени образац (8) даје услов (7) у специјалном случају, кад је $\varphi = 90°$.

Што се тиче услова паралелности (5) посматраних равни, то се овај добија изједначујући израз $\sin\varphi$ са нулом слично пређашњем поступку у n^0 7.

73, Свежањ равни. — Једначина која је састављена помоћу датих једначина (1) и (2) на овај начин

$$Ax + By + Cz + D - k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (9)$$

где је k стална величина, претставља такође неку раван, пошто је дата линеарном једначином.

Добијена раван (9) пролази кроз праву линију пресека обеју равни (1) и (2), јер се анулира истовремено са једначинама ових последњих.

Ако је k произвољна стална количина, онда једначина (9) одређује, за различите вредности k, читав низ различитих равни, које све пролазе кроз пресек равни (1) и (2) и образују т.зв. с в е ж а њ р а в н и.

Равни (1) и (2) се зову о с н о в н е р а в н и свежња (9).

Лако је увидети, да кроз сваку тачку простора, ван пресека основних равни свежња, пролази само једна раван свежња (види n^0 34). Коефицијент k постаје за такву раван:

$$k = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1},$$

где су x_0, y_0, z_0 координате посматране тачке.

Очевидно је да дате равни (1) и (2) одговарају специјалним вредностима параметра k свежња (9), и то: 0 односно ∞.

Најзад, једначина свежња се може написати и овако:

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

Сад ћемо показати да се за основне равни неког свежња могу узети ма које две равни тог свежња.

Узмимо на пример две ма које равни свежња у облику:

$$Ax + By + Cz + D - k_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$
$$Ax + By + Cz + D - k_2(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

Помножимо обе стране прве једначине са m, а друге једначине са n. Сабирајући добијене резултате, налазимо:

$$(Ax + By + Cz + D)(m + n) - (m k_1 + n k_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

Ако сад уведемо ознаку

$$\frac{mk_1 + nk_2}{m + n} = k,$$

онда добијамо познату једначину свежња (9).

Паралелне равни такође образују свежањ.

Горе смо навели, у n^0 70, једначину низа паралелних равни

$$L + \lambda = 0, \qquad (10)$$

где је L скраћена ознака леве стране једначине (1), а λ означава произвољни стални параметар.

Лако је протумачити једначину (10), као једначину свежња паралелних равни: једна од његових основних равни је дата раван (1), а друга бескрајно удаљена раван, чија је једначина: јединица је једнака нули.

74. Пресек трију равни. — Узмимо у неком правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ три равни

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Пошто су дате једначине линеарне по текућим координатама x, y, z, то решавајући по њима добијамо вредност координата пресечне тачке у облику:

$$x = -\frac{\Delta'}{\Delta}, \quad y = -\frac{\Delta''}{\Delta}, \quad z = -\frac{\Delta'''}{\Delta}, \qquad (12)$$

где Δ означава детерминанту коефицијената датих једначина (12), наиме:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

док остале ознаке Δ', Δ'', Δ''' претстављају детерминанте, које се добијају из детерминанте Δ сменом коефицијената одређене координате (12) са познатим члановима једначина (11).

У вези са различитим вредностима детерминаната Δ, Δ', Δ'' и Δ''' долазимо до више појединачних случајева, који се јављају при проучавању пресека трију равни. Тога ради посматраћемо вредности четири детерминанте трећег реда од елемената наредне матрице, т.ј. таблице са три врсте и четири колоне:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

Ако је бар једна од детерминаната трећег реда посматране матрице различита од нуле, онда се за ову матрицу каже да има р а н г т р и.

Међутим, ако су све детерминанте трећег реда једнаке нули, при чему је бар једна од детерминаната другог реда различита од нуле, онда матрица (14) има р а н г д в а.

Најзад, ако се поништавају и све детерминанте другог реда, онда је матрица (14) р а н г а ј е д а н под условом, да је бар једна од детерминаната првог реда различита од нуле.

Нагласимо и четврти случај, када је матрица (14) н у л т о г р а н г а, а то је у случају, када су сви елементи матрице једнаки нули.

Пошто детерминанта (13) улази у матрицу (14), онда сматрајући детерминанту као специјалан случај матрице, види се, да се ранг матрица (13) и (14) не може разликовати више него за јединицу.

Посматрајмо сада све могуће случајеве:

1º *Нека су обе матрице* (13) *и* (14) *ранга три.* Тада обрасци (12) дају једну потпуно одређену тачку пресека три дате равни (11).

2° *Претпоставимо други случај, да је матрица* (14) *ранга три, а* (13) *ранга два.* То значи, да је именилац у обрасцима (12) једнак нули, а и неке се од детерминаната у бројиоцима анулирају, али не све три у исто време.

Ако уведемо претпоставку, да је

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \gtrless 0, \tag{15}$$

онда развијајући детерминанту Δ по елементима треће колоне, добијамо

$$C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} - C_1\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Према услову (15), овај резултат може се изразити на овај начин

$$C_2 = mC + nC_1, \tag{16}$$

где је

$$m = -\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \qquad n = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} A & B \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Очевидно је, да се идентички поништавају и обе детерминанте, које се добијају из детерминанте Δ, када се у њој смене елементи треће колоне са елементима било прве, било друге колоне. Примењујући на сваку од ових детерминаната исти поступак као и на детерминанту Δ, добијамо још две једнакости сличне са (16), наиме:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= mA + nA_1, \\ B_2 &= mB + nB_1, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где су m и n пређашњи коефицијенти.

Услед образаца (16) и (17), једначина треће дате равни (11) изражава се у облику

$$(mA + nA_1)x + (mB + nB_1)y + (mC + nC_1)z + D_2 = 0.$$

Ако додамо левој страни ове једначине величину $mD + nD_1$, и одузмемо је, онда се једначина може написати и овако:

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda = 0, \tag{18}$$

где λ означава количину

$$\lambda \equiv D_2 - mD - nD_1.$$

Добијени облик (18) показује, с обзиром на образац (10), да је трећа дата раван (11) паралелна равнима свежња, чије су основне равни две прве равни (11). Дакле трећа раван (11) паралелна је пресечној правој две прве равни (11).

Изведени закључак дозвољава да се протумачи узајамни положај датих равни (11), у посматраном случају као три стране једне тростране призме. Одавде се види, да се равни (11) секу у бескрајно удаљеној тачки.

Узмимо за пример три равни.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - 1 &= 0, \\ 4x + 5y + 6z - 3 &= 0, \\ 7x + 8y + 9z - 4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

За дате равни имамо да је

$$\Delta = 0, \quad \Delta' = -3, \quad \Delta'' = 6, \quad \Delta''' = -3.$$

Најзад, према горњим обрасцима, трећа од датих једначина (19) може се написати у облику

$$-1(x + 2y + 3z - 1) + 2(4x + 5y + 6z - 3) + 1 = 0$$

те се одавде види, да је трећа раван (19) паралелна пресечној правој две прве равни (19) и да се дате равни секу у бескрајно удаљеној тачки.

3° *Проучимо случај, када обе матрице* (14) *и* (13) *имају ранг два.* Под уведеном претпоставком постоје пређашњи услови (16) и (17). Осим тога поништава се и детерминанта која се добија из Δ, кад се у њој смене елементи треће колоне вредностима D, D_1 и D_2. Стога се добија и четврта једнакост

$$D_2 \equiv mD + nD_1, \tag{20}$$

тако, да се одговарајућа вредност величине λ у једначини (18) поништава

$$\lambda \equiv 0.$$

Стога се, под уведеним претпоставкама, трећа раван (11) може написати у облику:

$$m(Ax + By + Cz + D) + n(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

Дакле, трећа раван (11) пролази кроз линију пресека две прве равни (11) и стога постоји неограничен број тачака пресека датих равни.

Наведимо као пример три равни

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - 1 &= 0, \\ 4x + 5y + 6z - 2 &= 0, \\ 7x + 8y + 9z - 3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

За посматране равни (20) имамо да је

$$\Delta = 0, \qquad \Delta' = 0, \qquad \Delta'' = 0, \qquad \Delta''' = 0.$$

Одмах се види, да се трећа једначина (21) може написати и овако:

$$-(x + 2y + 3z - 1) + 2(4x + 5y + 6z - 2) = 0,$$

т.ј. пролази кроз праву пресека две прве дате равни. Онда се дате равни (21) секу дуж исте праве, те имају безброј тачака пресека.

Узмимо за други пример ове три равни

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z - 1 &= 0, \\ 4x + 5y + 6z - 2 &= 0, \\ 2x + 4y + 6z - 2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Две прве равни су исте као и у претходном примеру (21), а трећа је раван (22) паралелна првој. Одмах се добијају једнакости

$$\Delta = 0, \qquad \Delta' = 0, \qquad \Delta'' = 0, \qquad \Delta''' = 0.$$

Међутим посматране равни претстављају само један специјалан случај изнесених услова. Заиста, једначина треће равни разликује се сталним множиоцем 2 од једначине прве равни. Стога се обе ове равни поклапају. Тачке пресека равни (22) налазе се дакле на линији пресека две прве равни.

4⁰ *Претпоставимо, да матрица* (14) *има ранг два, а матрица* (13) *ранг један.*

Пошто детерминанта (13) претставља матрицу са рангом један, то не само да је детерминанта Δ једнака нули, већ су и сви њени други минори једнаки нули.

Претпоставимо да нису једнаки нули елементи прве врсте Δ.

Изједначујући нули миноре од елемената прве две врсте Δ, а затим миноре од елемената прве и треће врсте Δ, добијамо, слично пређашњем поступку, ове једнакости

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= mA, & B_1 &= mB, & C_1 &= mC, \\ A_2 &= m'A, & B_2 &= m'B, & C_2 &= m'C, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где су m и m' два стална коефицијента.

На основу добијених једнакости друга и трећа раван (11) постају:

$$m(Ax + By + Cz) + D_1 = 0,$$
$$m'(Ax + By + Cz) + D_2 = 0,$$

т.ј. дате три равни (11) паралелне су међу собом и њихове тачке пресека у неодређеном броју налазе се у бесконачности.

5⁰ *Нека су обе матрице* (14) *и* (13) *ранга један.*

Због тога што је прва матрица (14) ранга један, то се, осим услова (23), уводе још два накнадна услова

$$D_1 = mD, \qquad D_2 = m'D.$$

Према томе, све три дате равни (11) поклапају се са првом равни. Безброј заједничких тачака испуњавају, дакле, читаву дату раван.

6⁰ *Матрица* (14) *има ранг један, а матрица* (13) *нулти ранг.*

Према томе, сви су елементи детерминанте (13) нуле. Дакле једначине (11) имају облик

$$D = 0, \qquad D_1 = 0, \qquad D_2 = 0,$$

т.ј. претстављају три бескрајно удаљене равни.

7⁰ *Обе матрице* (14) *и* (13) *су нултог ранга.*

Тада се све три једначине (11) поништавају идентички. То значи, да нема одређених равни.

75. Пресек четири равни. — Узмимо четири равни

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Четири равни се не морају уопште сећи у једној тачки.

Међутим, ако се оне секу у истој тачки, то значи да су једначине (24) сагласне. Овај услов сагласности изражава се тиме што решења трију једначина система (24) задовољавају четврту. Према томе добија се, да је једнака нули детерминанта коефицијената датих једначина

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Услов сагласности четири једначине (24) може се изразити и на тај начин, да свака од датих једначина претставља алгебарску последицу трију осталих једначина.

Ова чињеница се изражава тако да су дате једначине везане једнакошћу

$$aL + bL_1 + cL_2 + dL_3 = 0,$$

која мора бити испуњена идентички за четири дате сталне количине a, b, c и d, где L, L_1, L_2 и L_3 означавају леве стране датих једначина (24).

76. Мрежа равни. — Претпоставимо да су три равни претстављене једначинама:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ L_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ L_3 &\equiv A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

које међусобно нису везане линеарном једнакошћу.

Тада једначина

$$L \equiv \kappa_1 L_1 + \kappa_2 L_2 + \kappa_3 L_3 = 0, \tag{26}$$

где су κ_1, κ_2, κ_3 произвољне сталне количине, одређује такозвану м р е ж у д а т и х р а в н и (25).

Једначина (26) посматране мреже претставља очевидно, за различите вредности коефицијената κ_1, κ_2 и κ_3, равни, које пролазе кроз тачку пресека датих равни (25).

Обрнуто, свака раван, која пролази кроз тачку пресека три равни (25), може се претставити у облику (26). Заиста, пошто посматрана раван пролази кроз тачку пресека равни (25), то је она потпуно одређена још двема својим тачкама. Стављајући координате сваке од ових тачака у општу једначину (26), добијамо две једнакости. Оне су довољне за одређивање двеју размера коефицијената κ_1, κ_2, κ_3, које одговарају датој равни.

III. Задаци о равнима

77. Једначина равни која пролази кроз дату тачку. — Пошто кроз дату тачку може пролазити неограничен број равни, то је постављено питање неодређено. Сличан резултат се добија и израчунавањем. Заиста, узмимо општу једначину ма какве равни у неком правоуглом праволиниском координатном систему

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Означимо са (x_0, y_0, z_0) дату тачку кроз коју мора пролазити раван (1). Тада мора постојати идентичност

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \tag{2}$$

која везује само једном једнакошћу три размере непознатих коефицијената једначине (1).

Одатле разлика једнакости (1) и (2) даје општи облик тражених једначина, наиме:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + 0, \tag{3}$$

где су две размере коефицијената A, B и C потпуно произвољне.

78. Једначина равни која пролази кроз дату тачку паралелно датој равни. — Нека је дата раван претстављена једначином

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4}$$

где су A_1, B_1, C_1 и D_1 познате величине, а (x_0, y_0, z_0) дата тачка.

Постављени задатак је потпуно одређен, јер неодређени коефицијенти у претходној једначини (3) сада морају испуњавати услов паралелности обеју равни (3) и (4), и то:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}.$$

Према томе једначина (3) постаје:

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0.$$

и претставља тражену раван у потпуно одређеном облику.

79. Једначина равни која пролази кроз дату тачку управно на дату раван. — Постављени задатак није одређен, јер се може повући безброј равни кроз дату тачку тако, да буду управне на датој равни. Лако је извести општи облик свих тих равни.

Претпоставимо да једначина дате равни има облик (4) и да је дата тачка (x_0, y_0, z_0). Тада коефицијенти опште једначине (3), да би она стајала управно на датој равни (4), морају испуњавати познати услов управности равни:

$$A_1A + B_1B + C_1C = 0, \tag{5}$$

који није довољан за одређивање две непознате размере коефицијената једначине (3).

80. Једначина равни која пролази кроз две дате тачке управно на дату раван. — Задатак постаје одређен само под условом, да се обе тачке не налазе на истој нормали на дату раван; јер, ако је то случај, кроз ту нормалу пролази неограничен број тражених равни.

Претпоставимо дакле, да обе дате тачке

$$(x_0, y_0, z_0), \qquad (x_1, y_1, z_1)$$

нису на истој нормали на дату раван која је одређена једначином (4).

Општи облик једначине равни, које пролазе кроз прву дату тачку, изражава се једначином (3). Пошто ова раван мора пролазити и кроз другу дату тачку, добија се једначина

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0. \tag{6}$$

Резултат елиминације непознатих коефицијената A, B и C из три по њима хомогене једначине (3), (6) и (5) претставља једначину тражене равни у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$A'(x - x_0) + B'(y - y_0) + C'(z - z_0) = 0,$$

где је

$$A \equiv \begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad B' \equiv -\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix},$$

$$C \equiv \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

81. Једначина равни која пролази кроз три дате тачке. — Означимо дате тачке са

$$(x_1, y_1, z_1), \qquad (x_2, y_2, z_2), \qquad (x_3, y_3, z_3).$$

Онда, полазећи од општег облика (1) тражене равни, добијамо три услова за одређивање вредности непознатих коефицијената A, B, C и D једначине (1), наиме:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Тражена једначина добија се елиминацијом A, B, C и D из по њима линеарних хомогених једначина (1) и (7) у облику

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Добијена једначина може се написати и овако

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{9}$$

где коефицијенти имају вредности

$$\left.\begin{aligned} A \equiv \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B \equiv -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ C \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D \equiv -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

82. Запремина тетраедра. — Претпоставимо да се темена датог тетраедра (сл. 15) налазе у тачкама

$$M_1(x_1, y_1\, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2)\ ,$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3), \qquad M'(x', y', z').$$

Узмимо, исто као у n^0 15, три прве тачке за темена троугла који ће послужити као основа датог тетраедра.

Површина Δ овог троугла, према обрасцима (8) и (9) у n^0 13, и претходним обрасцима (10), изражава се овако:

$$\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ ,$$

при чему је раван, која пролази кроз темена M_1, M_2 и M_3, претстављена једначином (9).

Пошто се израз коефицијента D пише овако

$$D \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

то се он може протумачити као вредност запремине тетраедра са основом $M_1M_2M_3$ и теменом у координатном почетку O. Ако означимо са V_0 апсолутну вредност запремине тога тетраедра, имамо

$$V_0 = -D;$$

негативан знак одговара смеру правца висине, која је управљена од основице тетраедра ка координатном почетку, т.ј. супротно позитивном правцу нормале из координатног почетка на раван $M_1M_2M_3$.

Захваљујући овој примедби, коефицијент D претставља негативну величину. Стога је множилац, који доводи једначину (9) на нормални облик, позитиван, наиме:

$$\frac{1}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ако претпоставимо, као што је случај на слици (15), да се врх тетраедра M' и координатни почетак O налазе на разним странама равни $M_1M_2M_3$, онда се висина тетраедра изражава у облику:

$$h = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Стављајући нађене вредности Δ и h у образац за запремину датог тетраедра

$$V = \frac{1}{3}\Delta h\ ,$$

добијамо тражени израз у облику:

$$V = \frac{1}{6}(Ax' + By' + Cz' + D).$$

Узимајући у обзир обрасце (10) налазимо пређашњи резултат из n^0 15:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

83. Однос у коме раван дели растојање између две тачке. — Претпоставимо да су у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 49) дате две тачке,

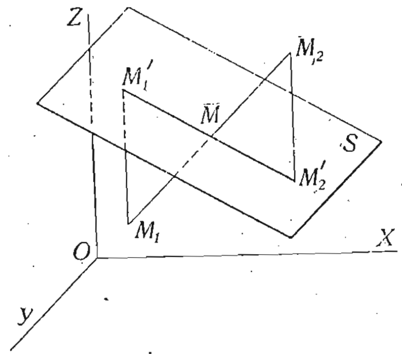
$$M_1(x_1, y_1, z_1), \qquad M_2(x_2, y_2, z_2),$$

и раван S, чија је једначина

$$L \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (11)$$

Уведимо претпоставку, да се дате тачке налазе на разним странама дате равни (11), а да тачка M претставља пресек праве M_1M_2 са равни S.

Означимо са $M_1'M_2'$ ортогоналну пројекцију отсечка M_1M_2 на раван S. Тада се тражени однос одређује из правоуглих троуглова



Сл. 49

$$M_1M_1'M \qquad \text{и} \qquad M_2M_2'M$$

на овај начин

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{h_1}{h_2}\ , \qquad (12)$$

где је

$$M_1M_1' = h_1, \qquad M_2'M_2 = h_2.$$

Међутим растојања h_1 и h_2 датих тачака од дате равни S изражавају се обрасцима:

$$h_1 = \pm\mu L_1, \qquad h_2 = \pm\mu L_2,$$

где је μ множилац, који своди једначину (11) на нормални облик; а L_1 и L_2 означавају резултат смене координата датих тачака M_1 и M_2 у левој страни једначине (11), при чему се од два знака узима само један према раније датом упутству.

У посматраном случају очевидно је, да знаци h_1 и h_2 морају бити различити услед тога тражени однос (12) постаје

$$\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = -\frac{L_1}{L_2}\ ,$$

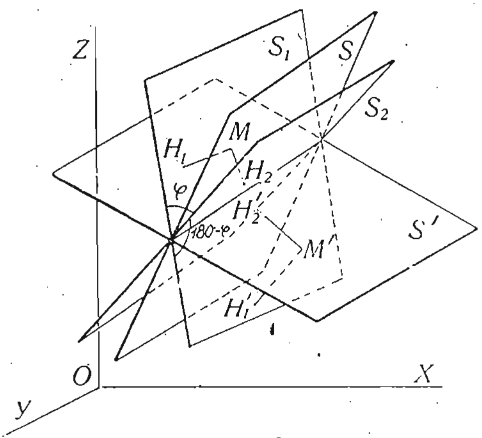
или

$$-\lambda = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}\ . \qquad (13)$$

Претпоставимо сад да се обе дате тачке M_1 и M_2 налазе на истој страни равни S тако да тачка M дели спољашњом поделом отсечак M_1M_2. Тада су величине h_1 и h_2 истог знака. Према томе, за овај случај, мора се променити знак на једној страни једнакости (13).

Најзад, узмимо у обзир и гранични случај, за који, под овом другом претпоставком, тачка M тежи бесконачности. То значи, да оба растојања h_1 и h_2 датих тачака M_1 и M_2 од равни S теже да постану једнака. Тада је очевидно, да тражени однос тежи јединици.

84. Раван која полови угао између две равни. — Посматрајмо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 50) две равни S_1 и S_2, чије су једначине дате у облику



Сл. 50

$$L_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (14)$$

$$L_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (15)$$

Означимо са φ угао између датих равни који обухвата координатни почетак.

Раван симетрије S овог угла је геометриско место тачака $M(x,\ y,\ z)$, подједнако удаљених од обе равни, за које важи услов:

$$\overline{H_1M} = \overline{H_2M}, \quad (16)$$

где су $\overline{H_1M}$ и $\overline{H_2M}$ нормале спуштене из тачке M на раван S_1 односно S_2.

Под уведеном претпоставком о положају датих равни, тачка M и координатни почетак O налазе се на разним странама S_1 и S_2. Због тога имамо:

$$\overline{H_1M} = \mu_1 L_1, \qquad \overline{H_2M} = \mu_2 L_2,$$

где су μ_1 и μ_2 множиоци, који своде једначине (14) односно (15) на нормални облик, а L_1 и L_2 означавају леве стране посматраних једначина (14) и (15). Стављајући нађене вредности $\overline{H_1M}$ и $\overline{H_2M}$ у једнакост (16), добијамо једначину тражене бисекторне равни S у облику

$$\mu_1 L_1 - \mu_2 L_2 = 0. \quad (17)$$

Потражимо сада бисекторну раван S' допунског угла $180^0 - \varphi$. Тада се види да се свака тачка M' одговарајуће бисекторне равни и координатни почетак O налазе на разним странама равни S_1, а са исте стране друге равни S_2.

Према томе у једнакости

$$\overline{H_1'M'} = \overline{H_2'M'}$$

имамо сад

$$\overline{H_1'M'} = \mu_1 L_1, \qquad \overline{H_2'M'} = \mu_2 L_2 .$$

Због тога једначина тражене бисекторне равни S' постаје

$$\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 = 0 \quad (18)$$

Горе, у n^0 69, је објашњен начин решавања питања о узајамном положају дате тачке и дате равни. Аналитичко израчунавање показује непосредно знак отсечка, кога одваја свака од датих равни. Према томе лако је испитати, који од два угла између датих равни садржи координатни почетак. Бисекторна раван овог угла изражава се једначином (17), а она суплементног угла једначином (18).

85. Раван која пролази кроз пресек две равни и дату тачку. — Претпоставимо да су две равни дате једначинама (14) и (15). Тражи се раван која пролази кроз праву линију њиховог пресека и кроз дату тачку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Тражена раван очевидно припада свежњу равни, који је одређен помоћу датих равни, наиме:

$$L_1 - \kappa L_2 = 0, \quad (19)$$

где је κ произвољни параметар. Тражена раван посматраног свежња мора испуњавати услов

$$L_{10} - \kappa L_{20} = 0$$

где су ознаке L_{10} и L_{20} резултат смене координата дате тачке M_0 у левим странама датих једначина (14) и (15). Стављајући одговарајућу вредност параметра κ

$$\kappa = \frac{L_{10}}{L_{20}}$$

у једнакост (19), налазимо тражену једначину у облику

$$L_1 - \frac{L_{10}}{L_{20}} L_2 = 0 .$$

Ова једначина у развијеном облику гласи

$$(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

86. Раван која пролази кроз пресек две равни управно на дату раван. — Нека су дате равни (14) и (15), кроз чији пресек мора пролазити тражена раван управно на дату раван

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (20)$$

Тражена раван има облик (19), или

$$(A_1 - \kappa A_2)x + (B_1 - \kappa B_2)y + (C_1 - \kappa C_2)z + D_1 - \kappa D_2 = 0.$$

Пошто она мора бити управна на раван (20), то имамо услов

$$A_3(A_1 - \kappa A_2) + B_3(B_1 - \kappa B_2) + C_3(C_1 - \kappa C_2) = 0.$$

Одатле κ добија вредност

$$\kappa = \frac{A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3}{A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3},$$

и тражена равани зражава се једначином:

$$(A_2A_3 + B_2B_3 + C_2C_3)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) -$$
$$-(A_1A_3 + B_1B_3 + C_1C_3)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

87. Раван која пролази кроз две дате тачке. — Пошто кроз две тачке пролази неограничен број равни, саставимо општи облик једначина свих тих равни. Оне сачињавају свежањ равни, које се секу дуж праве линије одређене двема датим тачкама. Ова права линија изражава се друкчије помоћу две равни, које пролазе кроз дате тачке.

Означимо њихове координате, у неком правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ са

$$(x_0, y_0, z_0), \qquad (x_1, y_1, z_1).$$

Под претпоставком да је

$$z_0 \gtrless z_1,$$

пустимо да кроз две тачке пролазе две равни, управно на координатне равни YOZ и ZOX, наиме:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

или

$$L \equiv (z_1 - z_0)(y - y_0) - (y_1 - y_0)(z - z_0) = 0,$$
$$L_1 \equiv (z_1 - z_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(z - z_0) = 0.$$

Према томе општи облик једначина тражених равни постаје

$$L - \kappa L_1 = 0,$$

где је κ произвољни параметар, или

$$(z_1 - z_0)[y - y_0 - \kappa(x - x_0)] - [y_1 - y_0 - \kappa(x_1 - x_0)](z - z_0) = 0.$$

Ако се обе дате тачке налазе у истој равни, која је управна на осу кота, при чему је

$$z_0 = z_1, \tag{21}$$

онда за једну од равни узмимо раван:

$$z - z_0 = 0;$$

за другу раван узмимо ону, која је управна на координатној равни XOY, наиме:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Тада је, под уведеном претпоставком (21), општи облик тражених равни одређен једначином

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) - \kappa(z - z_0) = 0,$$

где је κ произвољан параметар.

IV. Једначине равни и проблеми о равнима у косоуглом праволиниском координатном систему

88. Сегментска и нормална једначина равни. — Узмимо косоугли праволиниски координатни систем OXYZ (сл. 51). Претпоставимо, да раван, чију једначину тражимо, одваја отсечке OA, OB и OC на координатним осама OX, OY и OZ. Означимо дужине дотичних отсечака са a, b и c. Узмимо у посматраној равни ABC произвољну тачку M и повуцимо кроз њу раван DEF паралелну координатној равни ZOX.

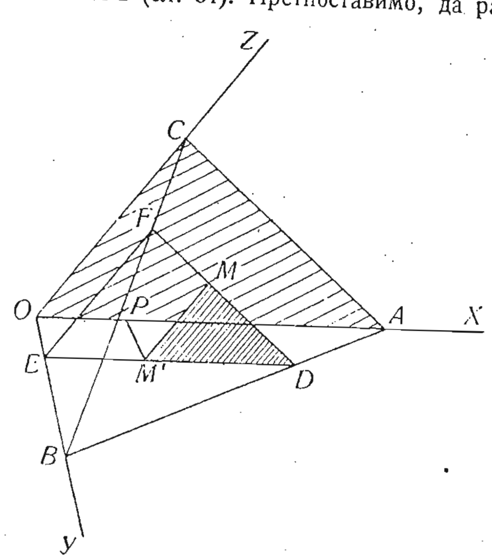
Нека је OPM'M координатни многоугао тачке M.

Као и у случају правоуглог координатног система (n^0 65) добијамо, из два пара сличних троуглова,

$$\triangle DM'M \sim \triangle AOC,$$
$$\triangle DBE \sim \triangle ABO,$$

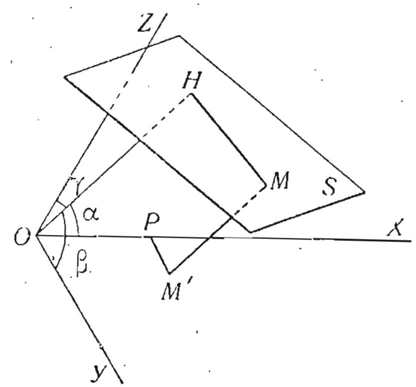
тражену **сегментску** једначину равни ABC у облику

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1\,. \tag{1}$$



Сл. 51

Посматрајмо сада у косоуглом координатном систему OXYZ (сл. 52) раван S, која се налази на растојању OH = p од координатног почетка O. Означимо са α, β, γ углове које заклапа нормала OH на раван S са координатним осама OX, OY и OZ.



Сл. 52

Повуцимо за произвољну тачку M дате равни координатни многоугао OPM'M. Пошто многоугао OPM'MH има резултанту OH, то ортогонална пројекција дотичног многоугла на вектор OH даје тражену једначину равни.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{2}$$

Добијена једначина (2) има исти облик као и једначина равни у правоуглом праволиниском координатном систему. Разлика се састоји само у облику везе, која постоји између косинуса углова α, β и γ. Заиста, они испуњавају у косоуглом координатном систему одређени услов

$$2F(a, b, c) = \Omega, \tag{3}$$

где су уведене ознаке из n^0 51.

89. Трансформација опште линеарне једначине. — Посматрајмо у косоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 51, 52) по текућим координатама општу линеарну једначину

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Претпоставимо ли да је коефицијент

$$D \gtreqless 0,$$

онда се деобом чланова једначине (4) са D непосредно добија сегментска једначина равни у облику (1). Овај поступак је сличан поступку у правоуглом праволиниском координатном систему.

Међутим, независно од ма какве претпоставке односно коефицијената, једначина (4) се може увек претворити у нормални облик. У ту сврху множимо обе стране једначине (4) са неким неодређеним множиоцем M. Потражимо за њега вредност, која би задовољавала услове:

$$AM = \cos\alpha, \qquad BM = \cos\beta, \qquad CM = \cos\gamma, \tag{5}$$

$$DM = -p. \tag{6}$$

Основни услов (3) гласи у развијеном облику, према n^0 51,

$$\left.\begin{aligned} &a^2\sin^2\lambda + b^2\sin^2\mu + c^2\sin^2\nu - 2ab\sin\lambda\sin\mu\cos N - \\ &-2ac\sin\nu\sin\lambda\cos M - 2bc\sin\mu\sin\nu\cos\Lambda = \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где је

$$a \equiv \cos\alpha, \qquad b \equiv \cos\beta, \qquad c \equiv \cos\gamma.$$

Стављајући вредност (5) $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ у једначину (7), добијамо једначину за одређивање вредности множиоца M у облику

$$M = \pm\frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2F(A, B, C)}} \tag{8}$$

Обрнута вредност $\dfrac{1}{M}$ често се зове параметар линеарне функције леве стране једначине равни (4). Од два знака узимамо само онај, који чини негативним производ леве стране једнакости (6). Осим тога лако је доказати, да леве стране једнакости (5) претстављају увек, за нађену вредност (8), множиоца M, праве разломке.

Заиста, искористимо, најпре, први израз синуса триједра координатних оса, из n^0 52:

$$\sqrt{\Omega} = \sin\lambda\sin\nu\sin M,$$

а за вредност функције 2F узмимо њен израз у облику збира три квадрата из n^0 53, који такође одговара првом растављању, наиме:

$$2F(A, B, C) = U'^2 + V'^2 + W'^2,$$

где је

$$U' \equiv C\sin\nu - A\sin\lambda\cos M - B\sin\mu\cos\Lambda,$$

$$V' \equiv B\sin\mu\sin\Lambda - A\sin\lambda\sin M\cos\nu,$$

$$W' \equiv A\sin\lambda\sin\nu\sin M.$$

Одатле се одмах види да је други корен $\sqrt{2F(A, B, C)}$ увек већи од $A\sqrt{\Omega}$. Према томе је израз

$$AM = \pm\frac{A\sin\lambda\sin\nu\sin M}{\sqrt{2F(A, B, C)}}$$

прави разломак.

Благодарећи другом изразу синуса триједра координатних оса и другом изразу 2F у облику збира три квадрата, лако је увидети, да је производ BM леве стране друге једнакости (5) такође прави разломак.

Најзад, и трећи производ CM је прави разломак, на основу трећег израза синуса триједра координатних оса и трећег разлагања функције 2F у збир трију квадрата.

На овакав начин утврђује се да је увек свака линеарна једначина општег облика (4) сводљива на једначину равни нормалног облика.

90. Растојање тачке од равни. — Ако повучемо кроз дату тачку раван паралелну датој равни, онда је очевидно, да је тражено растојање једнако растојању између обе паралелне равни. Претпоставимо, да је дата раван претстављена једначином нормалног облика. Тада се тражено растојање изражава у косоуглом праволиниском координатном систему, исто онако као и у правоуглом праволиниском систему, т.ј. резултатом, који се добија сменом координата дате тачке у једначини дате равни.

Ако је дата једначина равни општег облика (4), онда је множимо прво множиоцем M, који је своди на нормални облик. Затим се налази, на основу ранијег поступка, тражено растојање дате тачке од равни.

91. Угао између две равни. Паралелност и нормалност двеју равни. — Узмимо у косоуглом праволиниском координатном систему OXYZ једначине две равни

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Коефицијенти сваке од посматраних једначина (9) сразмерни су, према обрасцима (5) косинусима углова, које заклапа нормала на одговарајућу раван са координатним осама. Стога имамо изразе тих косинуса за прву односно другу раван (9) у облику:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha = \pm\frac{A\sqrt{\Omega}}{R}, \qquad \cos\beta = \pm\frac{B\sqrt{\Omega}}{R}, \qquad \cos\gamma = \pm\frac{C\sqrt{\Omega}}{R}, \\ &\cos\alpha_1 = \pm\frac{A_1\sqrt{\Omega}}{R_1}, \qquad \cos\beta_1 = \pm\frac{B_1\sqrt{\Omega}}{R_1}, \qquad \cos\gamma_1 = \pm\frac{C_1\sqrt{\Omega}}{R_1}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где је

$$R \equiv \sqrt{2F(A,B,C)}, \qquad R_1 \equiv \sqrt{2F(A_1, B_1, C_1)}.$$

Угао између две равни (n^0 72) одређује се углом између нормала на дате равни. Стога се може искористити сваки од образаца n^0 55 за одређивање траженог угла.

Узмемо ли образац (15) из n^0 55, и ставимо ли место a, b, c обрасце прве врсте (10), то с обзиром на то, да се ознака F′ односи на обрасце друге врсте (10), добијамо овај образац:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A\dfrac{\partial F}{\partial A_1} + B\dfrac{\partial F}{\partial B_1} + C\dfrac{\partial F}{\partial C_1}}{R \cdot R_1} \tag{11}$$

Слични се резултат добија из обрасца (17), n^0 55.

Ако се узме израз (21), n^0 55, онда имамо:

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{R\cdot R_1}\begin{vmatrix} 0 & A_1 & B_1 & C_1 \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Што се тиче услова паралелности равни, њима одговарају услови паралелности нормала на тим равнима. Одатле се добија резултат:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

т.ј. *услови паралелности равни* (9) *изражавају се сразмерношћу коефицијената једначине уз одговарајуће текуће координате.*

Најзад, услов н о р м а л н о с т и равни (9) добија се, кад се изједначи са нулом бројилац било обрасца (11), било обрасца (12), наиме:

$$A\frac{\partial F}{\partial A_1} + B\frac{\partial F}{\partial B_1} + C\frac{\partial F}{\partial C_1} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} 0 & A_1 & B_1 & C_1 \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

92. Задаци о равнима у косоуглом координатном систему. — Сви задаци проучени у претходном одељку III у правоуглом праволиниском координатном систему, решавају се на сличан начин и у косоуглом систему. Али при томе треба узимати у обзир нове обрасце и услове, који мењају свој облик у зависности од координатних углова λ, μ и ν између косоуглих координатних оса.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

ПРАВА ЛИНИЈА

I. Различити облици једначине праве

93. Пресек двеју равни. — Свака права линија може се замислити као пресек двеју равни. Због тога се општи облик једначине праве у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ изражава скупом две линеарне једначине:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Пошто кроз сваку праву пролази неограничен број равни, то се свака права може изразити помоћу двеју различитих једначина.

Проучимо специјални случај, када се права линија налази у равни управној на оси кота. Тада се посматрана права линија може одредити скупом две једначине:

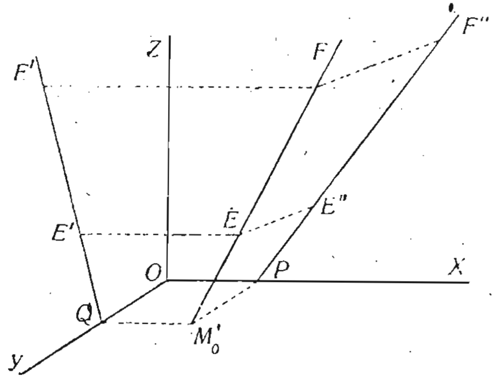
$$\left.\begin{aligned} z &= c; \\ y &= ax + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где прва једначина (2) претставља раван, управну на оси кота, а друга, раван паралелну оси кота.

94. Први нормални облик. — Претпоставимо да се посматрана права EF не налази у равни управној на оси кота правоуглог праволиниског координатног система OXYZ (сл. 53).

Обележимо са E′F′ и E″F″ ортогоналне пројекције праве EF на координатним равнима YOZ и ZOX. Једначине обе равни FEE′F′ и EFF″E″, које су управне на координатним равнима YOZ и ZOX, и чијим је пресеком одређена дата права EF, гласе

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + x_0', \\ y &= nz + y_0', \end{aligned}\right\} \tag{3}$$



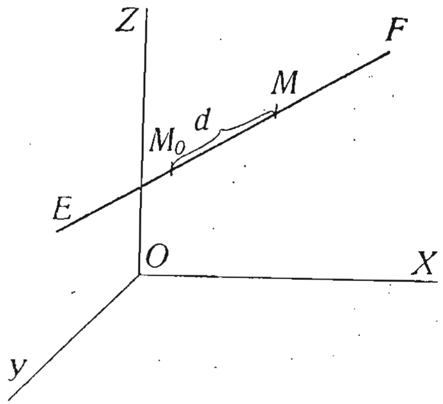
Сл. 53

где су m, n, x_0', y_0' четири стална коефицијента.

Лако је видети, да су x_0' и y_0' координате тачке M_0' пресека посматране праве EF са координатном равни XOY, док се m и n изражавају помоћу угловних коефицијената одговарајућих пројекција E″F″ и E′F′ дате праве линије EF. Заиста, m је tg угла, који прва права заклапа са осом OZ у равни ZOX, а n претставља tg угла друге пројекције са истом осом OZ, али у равни YOZ.

Једини недостатак једначина (3) састоји се у томе, што се њима не може изразити права линија која је управна на оси OZ. Заиста, у том случају поклапале би се обе равни, које пројицирају дату праву EF на координатне равни ZOX и YOZ.

95. Други нормални облик. — Положај дате праве EF у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 54) одређује се на други начин овако. Нека је дата произвољна тачка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, кроз коју пролази дата права.



Сл. 54

Нека су даље дати и углови α, β и γ, које посматрана права заклапа са координатним осама.

Уведено је шест величина

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \tag{4}$$

од којих три последње задовољавају услов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Осим тога међу њима постоји још и друга веза. Заиста, саставимо таблицу

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

где a, b и c означавају косинусе углова α, β и γ и напишимо:

$$l \equiv cy_0 - bz_0,$$
$$m \equiv az_0 - cx_0,$$
$$n \equiv bx_0 - ay_0.$$

Одатле се одмах види, да су посматрани коефицијенти везани још овом једнакошћу:

$$al + bm + cn = 0.$$

Према томе од шест параметара (4) свега су четири независни.

Помоћу тих параметара положај посматране праве EF потпуно је одређен. Узмимо на правој неку тачку M са текућим координатама x, y, z и уведимо као помоћни параметар растојање d између тачака M_0 и M.

Према ранијим обрасцима (7), n^0 4, имамо:

$$\cos\alpha = \frac{x - x_0}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y - y_0}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z - z_0}{d}$$

Елиминацијом параметра d добијамо тражене једначине праве у другом нормалном облику, наиме:

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\cos\beta} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma}$$

Уведемо ли скраћене ознаке a, b и c уместо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, добијене једначине постају:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{5}$$

при чему је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \tag{6}$$

Предност једначина (5) другог нормалног облика састоји се у томе, што се помоћу њих изражава свака права линија. Тако на пример у горе наведеном изузетном случају, док једначине првог нормалног облика (3) не важе, дотле једначине (5) ипак претстављају одговарајућу праву линију. Заиста пошто је тада

$$\cos\gamma \equiv c = 0,$$

то се бројилац треће размере (5) такође поништава и једначине (5) постају

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \quad z = z_0,$$

и

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Подвуцимо, најзад, разлику која се јавља у броју коефицијената у посматраним једначинама оба нормална облика (3) и (5). Наиме, док се у једначинама (3) појављују свега четири различита коефицијента, дотле број коефицијената у једначинама (5) износи шест али су они везани са две горе наведене једнакости.

96. Параметарски облик једначине праве. — Служећи се горе наведеним параметром d који изражава вредност сваке од размера (5), добијамо тражене једначине праве EF у параметарском облику, наиме:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ad, \\ y &= y_0 + bd, \\ z &= z_0 + cd. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

у посебном случају, када се посматрана права налази у равни управној на оси кота, њене једначине параметарског облика (7) добијају, због услова $c = 0$, овај специјални облик:

$$x = x_0 + ad,$$
$$y = y_0 + bd,$$
$$z = z_0.$$

97. Трансформација једначине праве. — Једначине праве линије општег облика (1) једноставно се претварају у једначине нормалног облика. Пошто су једначине (1) различите, то се увек могу решити по неким двема од трију текућих координата. Претпоставимо, да је детерминанта:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \gtrless 0. \tag{8}$$

Тада се једначине (1) своде на једначине праве линије првог нормалног облика, наиме:

$$x = Uz + U_1, \qquad y = Vz + V_1, \tag{9}$$

где је

$$U = -\frac{\delta'}{\delta}, \quad U_1 = -\frac{\delta_1}{\delta},$$

$$V = -\frac{\delta''}{\delta}, \quad V_1 = -\frac{\delta_2}{\delta},$$

при чему се δ' и δ'' добијају из детерминанте δ сменом елемената прве и друге колоне са коефицијентима C и C_1, а δ_1 и δ_2 сменом истих елемената са D и D_1.

Једначине другог нормалног облика праве линије добијају се слично претходном поступку, када се прво уведу у једначине (1) координате неке тачке x_0, y_0, z_0, кроз коју мора пролазити права линија, а према томе и обе равни (7). Дотична тачка може да буде дата, или изабрана произвољно, али под условом да се налази у обе равни. Зато стављајући за z у једначине (9) одређену вредност z_0, добијамо одговарајуће вредности x_0 и y_0. Под овом претпоставком једначине (1) постају

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$
$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0.$$

Решавајући добијене једначине, налазимо под претпоставком (8)

$$x - x_0 = U(z - z_0),$$
$$y - y_0 = V(z - z_0),$$

где U и V имају горе уведене вредности. Одатле се ове једначине могу написати друкчије овако

$$\frac{x - x_0}{\delta'} = \frac{y - y_0}{\delta''} = \frac{z - z_0}{-\delta}. \tag{10}$$

Ако сада поделимо имениоце размера са величином

$$\Delta = \sqrt{\delta'^2 + \delta''^2 + \delta^2}$$

и ставимо да је

$$\frac{\delta'}{\Delta} = a, \quad \frac{\delta''}{\Delta} = b, \quad -\frac{\delta}{\Delta} = c,$$

онда једначине (10) добијају други нормални облик једначина праве линије, и то:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{11}$$

при чему се a, b и c, узимајући у обзир њихове уведене вредности, претстављају као косинуси одређених углова које посматрана права линија заклапа са координатним осама.

На сличан начин се доказује да сваки систем једначина

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \tag{12}$$

претставља праву линију, без обзира на то, какве су вредности коефицијената p, q и r.

Заиста, ако поделимо имениоце једначина (12) са величином

$$R = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

онда се посматране једначине (12) своде на једначине праве другог нормалног облика (11), јер величине

$$\frac{p}{R}, \quad \frac{q}{R}, \quad \frac{r}{R}$$

испуњавају услове потребне за косинусе углова, које гради дата права са координатним осама.

Лако је сад доказати да једначине праве првог нормалног облика претстављају посебан случај једначина општег облика (12). Заиста, узедемо ли ознаке

$$x_0 - \frac{pz_0}{r} = x_0', \quad y_0 - \frac{qz_0}{r} = y_0',$$

долазимо до једначина облика (3) под претпоставком

$$\frac{p}{r} = m, \quad \frac{q}{r} = n.$$

98. Једначине праве која пролази кроз две дате тачке. — Означимо са x_0, y_0, z_0 и x_1, y_1, z_1 координате две дате тачке у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ. Узмимо опште једначине праве линије у другом нормалном облику (5), где су сада α, β и γ и њихови косинуси a, b и c непознате величине.

Оне се морају одредити из услова, да тражена права пролази кроз другу дату тачку (x_1, y_1, z_1). Према томе постоји услов

$$\frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_1 - y_0}{b} = \frac{z_1 - z_0}{c} \tag{13}$$

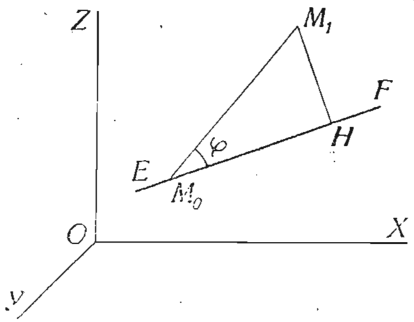
Добијене две једнакости (13) потпуно одређују непознате коефицијенте везане релацијом

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Међутим тражена једначина се добија и непосредно, ако сменимо у једначинама (11) непознате коефицијенте a, b, c са њима пропорционалним вредностима (13). Стога тражене једначине постају

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

99. Растојање дате тачке од дате праве. — Узмимо једначине дате праве EF општег облика (12) у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 55). Обележимо са M_0 дату тачку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ посматране праве линије и другу дату тачку у простору са $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, чије се растојање h тражи од праве EF. Спустимо нормалу M_1H на праву линију EF и спојимо тачку M_1 са M_0.



Сл. 55

Из правоуглог троугла M_0HM_1 налазимо да се тражено растојање изражава обрасцем

$$h = d \sin \varphi \tag{14}$$

где је d дужина M_0M_1, а φ угао те исте дужине са датом правом.

У посматраном случају имамо ове обрасце за косинусе углова праве EF и отсечака d са координатним осама, при чему $a,\ b,\ c$ и $a_1,\ b_1,\ c_1$ означавају те косинусе, наиме:

$$a = \frac{p}{R}, \qquad b = \frac{q}{R}, \qquad c = \frac{r}{R},$$

$$a_1 = \frac{x'}{d}, \qquad b_1 = \frac{y'}{d}, \qquad c_1 = \frac{z'}{d},$$

где је

$$R \equiv \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$
$$x' \equiv x_1 - x_0, \quad y' \equiv y_1 - y_0, \quad z' \equiv z_1 - z_0,$$
$$d \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Према томе образац (12), из n^0 6, гласи сада:

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{R \cdot d},$$

где су L, M и N познате детерминанте таблице

$$\begin{array}{ccc} L & M & N \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ p & q & r \end{vmatrix},$$

т.ј.

$$L \equiv y'r - z'q, \qquad M \equiv z'p - x'r, \qquad N \equiv x'q - y'p.$$

Према томе образац (14) одређује тражено растојање озако

$$h = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{R} \tag{15}$$

Ако је права линија EF претстављена једначинама другог нормалног облика (11), онда је

$$R \equiv 1$$

и тражено растојање

$$h = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

где имамо

$$L \equiv y'c - z'b, \qquad M \equiv z'a - x'c, \qquad N \equiv x'b - y'a,$$

при чему су a, b и c косинуси углова, које дата права EF заклапа са координатним осама.

II. Скуп правих линија

100. Угао између две праве. — Узмимо две праве претстављене једначинама општег облика

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_0}{p} &= \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \\ \frac{x - x_1}{p_1} &= \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Углови α, β, γ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, које ове праве заклапају са координатним осама, изражавају се обрасцима

$$\cos \alpha = \frac{p}{R}, \quad \cos \beta = \frac{q}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{r}{R},$$
$$R \equiv \sqrt{r^2 + q^2 + r^2}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{p_1}{R_1}, \quad \cos \beta_1 = \frac{q_1}{R_1}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{r_1}{R_1},$$
$$R_1 \equiv \sqrt{p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2}.$$

Према напред изведеном обрасцу (9), n^0 5, угао φ између датих правих линија (1) одређује се овако:

$$\cos \varphi = \frac{pp_1 + qq_1 + rr_1}{RR_1}.$$

Ако су дате праве линије претстављене једначинама првог нормалног облика

$$\left.\begin{aligned} x &= mz + x_0', & y &= nz + y_0', \\ x &= m_1 z + x_1', & y &= n_1 z + y_1', \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

оне се могу свести на други нормални облик:

$$\frac{x - x_0'}{m} = \frac{y - y_0'}{n} = z,$$

$$\frac{x - x_1'}{m_1} = \frac{y - y_1'}{n_1} = z.$$

Стога горе изведени образац за угао φ између посматраних правих линија (2) постаје

$$\cos\varphi = \frac{mm_1 + nn_1 + 1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+1}}.$$

101. Услови паралелности и нормалности двеју правих. — Пошто паралелне праве заклапају једнаке углове са координатним осама, то услов паралелности правих (1) захтева пропорционалност њихових коефицијената, наиме:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1}$$

Слично претходноме и услов паралелности правих линија, које су претстављене једначинама (2), изражаза се једнакостима:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = 1, \text{ т.ј. } \quad m = m_1, \quad n = n_1.$$

Услов нормалности правих (1) добија се из обрасца за $\cos\varphi$ у облику

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0,$$

Услов нормалности правих (2) изражава се обрасцем:

$$mm_1 + nn_1 + 1 = 0.$$

102. Пресек двеју правих. — Две праве линије у простору секу се само, ако се налазе у истој равни. Прво питање, које се појављује поводом пресека, састоји се у проучавању услова, под којима обе праве морају бити у истој равни.

Узмимо једначине двеју правих линија у параметарском облику, наиме:

$$\left.\begin{aligned} x &= pd + x_0, & y &= qd + y_0, & z &= rd + z_0, \\ x &= p_1d_1 + x_1, & y &= q_1d_1 + y_1, & z &= r_1d_1 + z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где су d и d_1 параметри датих правих линија. Ако се праве (3) секу у једној тачки, онда за њихову заједничку тачку морају бити испуњени услови:

$$\left.\begin{aligned} pd - p_1d_1 + x_0 - x_1 &= 0, \\ qd - q_1d_1 + y_0 - y_1 &= 0, \\ rd - r_1d_1 + z_0 - z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Елиминишући из трију добијених једначина линеарних по параметрима d и d_1, вредности ових параметара, налазимо тражени услов могућности пресека правих (3) у облику:

$$\begin{vmatrix} p & p_1 & x_0 - x_1 \\ q & q_1 & y_0 - y_1 \\ r & r_1 & z_0 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Добијени услов показује, да је једна од три једначине (4) алгебарска последица две друге једначине.

Изаберимо две од једначина (4) и то оне, које се могу решити по d и d_1.

Претпоставимо, на пример, да је

$$\delta = \begin{vmatrix} p & p_1 \\ q & q_1 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Тада се прве две једначине (4) могу решити по d и d_1:

$$d = -\frac{\delta'}{\delta}, \quad d_1 = -\frac{\delta''}{\delta}, \qquad (6)$$

где δ' и δ'' означавају вредности, које се добијају из детерминанте δ сменом коефицијената код d, односно $-d_1$, познатим члановима једначина (4).

Стављајући нађену вредност d у једначине прве праве (3) или, што је исто, вредност d_1 у једначине друге праве (3), добијамо за координате x, y, z тачке пресека датих правих обрасце који се могу написати и на овај начин:

$$x = \frac{x_0\delta - p\delta'}{\delta}, \quad y = \frac{y_0\delta - q\delta'}{\delta},$$

$$z = \frac{z_0\delta - r\delta'}{\delta}.$$

Узмимо, на пример, две праве линије

$$x - 8 = \frac{y-6}{4} = \frac{z-11}{7},$$

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{8}.$$

Услов (5) је испуњен, а координате пресечне тачке су:

$$x = 9, \quad y = 10, \quad z = 18.$$

Исто тако две праве линије

$$\frac{x-4}{2} = y - 5 = z - 2,$$

$$\frac{x-2}{2} = y - 4 = \frac{z-7}{3},$$

испуњавају услов (5), те се секу у једној тачци. Међутим сад је $\delta = 0$, и стога се вредност параметара одговарајућих тачака пресека одређује решавајући другу и трећу једначину (4). Координате пресечне тачке добијају вредности:

$$x = -4, \quad y = 1, \quad z = -2.$$

Нарочито једноставан резултат добија се када су једначине правих линија дате у првом нормалном облику, наиме:

$$x = m'z + x'_0, \qquad y = n'z + y_0',$$
$$x = m''z + x_0'', \qquad y = n''z + y_0''.$$

Решавајући по x, и z једначине прве колоне, а по y и z једначине друге колоне, добијамо координате пресечне тачке обе дате праве, при чему се налазе две вредности за коту z. Изједначујући обе ове вредности добијамо тражени услов пресека датих правих у облику:

$$\frac{x_0' - x_0''}{m'' - m'} = \frac{y_0' - y_0''}{n'' - n'} \tag{7}$$

Под овим условом, координате тражене пресечне тачке постају

$$\left. \begin{array}{c} x = \dfrac{m''x_0' - m'x_0'}{m'' - m'}, \qquad y = \dfrac{n''y_0' - n'y_0''}{n'' - n'} \\ z = \dfrac{x'_0 - x_0''}{m'' - m'} \end{array} \right\} \tag{8}$$

Ставимо, на пр., једначине другог горе наведеног система две дате праве линије у први нормални облик:

$$x = 2z, \qquad y = z + 3,$$
$$x = \frac{2}{3}z - \frac{8}{3}, \qquad y = \frac{1}{3}z + \frac{5}{3}.$$

Тада је јасно, да је услов (7) испуњен за дате једначине, а обрасци (8) одређују пређашње вредности за координате тражене пресечне тачке.

Претпоставимо, најзад, да су праве одређене једначинама општег облика:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{9}$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad A'_1x + B_1'y + C_1'z + D_1' = 0, \tag{10}$$

при чему једначине (9) одређују прву праву, а једначине (10) другу праву. Ако се обе праве линије налазе у једној истој равни, оне имају заједничку пресечну тачку, те су стога четири дате једначине (9) и (10) сагласне. Услов сагласности једначина (9) и (10), које су линеарне по текућим координатама, изражава се у облику:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A' & B' & C' & D' \\ A_1' & B_1' & C_1' & D_1' \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Ако је овај услов испуњен, онда једна од четири једначина (9) и (10) претставља последицу три друге, чије решење даје координате тражене пресечне тачке.

Применимо ли добијени услов (11) на горе наведене једначине две праве линије у првом нормалном облику, онда одмах услов (11) даје једнакост (7).

III. Задаци о правим линијама

103. Једначина праве која пролази кроз дату тачку паралелно датој правој. — Претпоставимо, да су дате у правоуглом праволиниском координатном систему једначине праве линије у облику

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \tag{1}$$

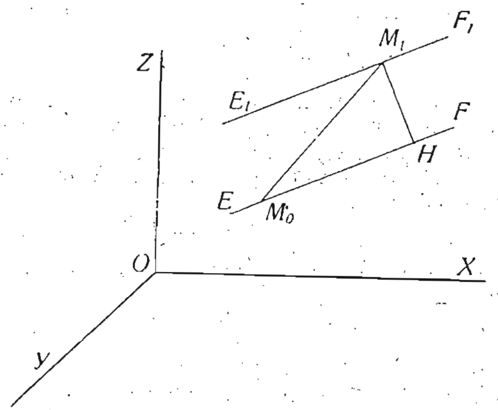
Ако обележимо дату тачку са (x_1, y_1, z_1), онда се права, која пролази кроз ову тачку паралелно правој (1), изражава једначинама са истим коефицијентима p, q и r као и дата једначина (1), наиме:

$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}. \tag{2}$$

104. Растојање између две паралелне праве у простору. — Претпоставимо да су паралелне праве (1) и (2) претстављене у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 56) са EF и E_1F_1, при чему су $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ дате тачке, које се налазе на правој EF, односно E_1F_1.

Тачку M_1 спојимо са M_0 и из M_1 спустимо нормалу M_1H на праву EF. Тада се тражено растојање HM_1, које означимо са h, одређује раније уведеним обрасцем (15), из n^0 99, за растојање дате тачке M_1 од дате праве (1), наиме:

$$h = \frac{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}{R},$$



Сл. 56

где L, M и N имају исте вредности као и у n^0 99.

105. Једначине праве која пролази кроз дату тачку управно на дату праву. — Узмимо дату праву линију у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ у облику (1) и дату тачку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тражене једначине имају облик

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \tag{3}$$

при чему непознати коефицијенти p_1, q_1, r_1, испуњавају услов управности обе праве (1) и (3), наиме:

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0. \tag{4}$$

Очевидно је, да неограничен број правих линија задовољава постављени услов. Све оне пролазе кроз дату тачку M_1 и налазе се у равни управној на дату праву линију (1).

Одговарајућа раван пролази кроз тачку M_1, а њена нормала заклапа са координатним осама углове, чији су косинуси сразмерни коефицијентима једначина (1), т.ј. изражава се једнакошћу

$$p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)=0. \tag{5}$$

106. Једначине праве која пролази кроз дату тачку управно на дату праву линију и сече је. — Допунимо питање претходног задатка условом, да тражена права (3) сече дату праву (1). Тада, поред услова (4), тражени коефицијенти p_1, q_1, r_1 морају задовољавати и услов (5), из n^0 102. Оба услова су довољна да се одреде количине сразмерне са p_1, q_1 и r_1.

Заиста, поменути услов (5), из n^0 102, развијен по елементима друге колоне, даје

$$(qz'-ry')p_1+(rx'-pz')q_1+(py'-qx')r_1=0. \tag{6}$$

где је

$$x'\equiv x_0-x_1, \qquad y'\equiv y_0-y_1, \qquad z'\equiv z_0-z_1.$$

Сменимо ли у добијеном услову (6) непознате коефицијенте p_1, q_1, r_1 њима сразмерним количинама $x-x_1$, $y-y_1$, и $z-z_1$ из једначина (3), добијамо једначину равни

$$(qz'-ry')(x-x_1)+(rx'-pz')(y-y_1)+(py'-qx')(z-z_1)=0 \tag{7}$$

Према томе текуће координате x, y, z, тражене праве задовољавају обе линеарне једначине (5) и (7), те се тражена права одређује скупом једначина ових двеју равни (5) и (7).

Претпоставимо, најзад, да су једначине праве дате у првом нормалном облику, и то:

$$x=m'z+x_0', \qquad y=n'z+y'_0 \tag{8}$$

Пошто тражена права линија пролази кроз дату тачку M_1, то су њене једначине:

$$x-x_1=m''(z-z_1), \qquad y-y_1=n''(z-z_1), \tag{9}$$

где су m'' и n'' две тражене количине. Услов нормалности правих линија (8) и (9) изражава се једнакошћу:

$$m'm''+n'n''+1=0 \tag{10}$$

Друга једнакост за одређивање коефицијената m'' и n'' добија се из услова за пресек правих линија (8) и (9) у облику (7), из n^0 102. Пошто је у овоме случају:

$$x_0''\equiv x_1-m''z_1, \qquad y_0''\equiv y_1-n''z_1,$$

то тај услов пресека, кад га уредимо по члановима са m'' и n'', постаје:

$$(y_0'-y_1+n'z_1)m''-(x_0'-x_1+m'z_1)n''-m'(y_0'-y_1)+\\+n'(x_0'-x_1)=0 \tag{11}$$

Добијене једнакости (10) и (11) служе за одређивање вредности непознатих коефицијената m'' и n'' у једначинама (9).

Међутим лако је написати једначине тражене праве на други начин. Сменимо у ту сврху у једначинама (10) и (11) вредности коефицијената m'' и n'' одређених из једначина (9). Стога је тражена права линија претстављена скупом од ове две једначине

$$\left.\begin{aligned} &m'(x-x_1)+n'(y-y_1)+z-z_1=0,\\ &(y_0'-y_1+n'z_1)(x-x_1)-(x_0'-x_1+m'z_1)(y-y_1)-\\ &\qquad -[m'(y_0'-y_1)-n'(x_0'-x_1)](z-z_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Свака од нађених једначина (12) одређује једну раван која пролази кроз тачку M_1. Прва је раван (12) управна на датој правој (8), а друга раван пролази такође и кроз ту праву (8). Заиста, лако је увидети да координате x и y, које су дате једначинама (8) задовољавају идентички другу једначину (12).

107. Једначине праве линије нормалне на две дате праве. — Узмимо две праве линије у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ, наиме:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r},\\ &\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Број тражених правих линија неограничен је. Проблем се састоји у томе, да се одреди општи правац тражених правих, чије су једначине

$$\frac{x-x'}{p'}=\frac{y-y'}{q'}=\frac{z-z'}{r'}, \tag{14}$$

где су x', y', z', p', q' и r' непознате величине.

Пошто права (14) мора бити нормална на свакој од датих правих (13), то постоје услови:

$$pp'+qq'+r'r=0,$$
$$p_1p'+q_1q'+r_1r'=0.$$

Одатле се закључује да су тражени коефицијенти p', q', r' сразмерни обрасцима:

$$\frac{p'}{qr_1-q_1r}=\frac{q'}{rp_1-r_1p}=\frac{r'}{pq_1-p_1q}. \tag{15}$$

Смењујући у једначинама (14) њихове коефицијенте p', q', r' нађеним, њима сразмерним величинама (15), добијамо општи облик тражених правих линија, које одговарају произвољним тачкама (x', y', z').

108. Права паралелна датом правцу која сече две дате праве. — Претпоставимо да су дате две праве једначинама у облику (13), а да је тражена права облика (14). При томе су p', q', r' дате величине, а вредности x', y', z' се траже.

Пошто тражена права (14) сече сваку од датих правих (13), то морају бити испуњени услови (5), из n^0 102. Ти се услови могу написати слично претходном овако:

$$\left.\begin{aligned} &(qr'-rq')(x'-x_0)+(rp'-pr')(y'-y_0)+(pq'-qp')(z'-z_0)=0,\\ &(q_1r'-r_1q')(x'-x_1)+(r_1p'-p_1r')(y'-y_0)+(p_1q'-q_1p')(z'-z_1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Добијене две једначине одређују тражене вредности координата x', y',

z' које, како се види, одређују геометриско место тачака, које се налазе на једној правој, одређеној једначинама (16).

Ако у нађеним једначинама сменимо коефицијенте датог правца p', q', r' са њима сразмерним величинама (15), онда ће одговарајућа права линија (16) сећи нормално обе дате праве линије (13).

109. Права која пролази кроз дату тачку и сече две дате праве. — Претпоставимо да су дате праве (13) и да једначине (14) претстављају тражену праву која пролази кроз дату тачку x', y', z', при чему су p', q' и r' тражени коефицијенти.

Узмимо услове пресека тражене праве (14) са датим правама (13) у облику (5), из n^0 102. Стављајући у те услове уместо p', q', r' њихове сразмерне величине из једначина (14), добијамо једначине тражене праве линије у облику једначина две равни, наиме:

$$\begin{vmatrix} p & x-x' & x_0-x' \\ q & y-y' & y_0-y' \\ r & z-z' & z_0-z' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} p_1 & x-x' & x_1-x' \\ q_1 & y-y' & y_1-y' \\ r_1 & z-z' & z_1-z' \end{vmatrix} = 0,$$

где су x, y и z текуће координате.

110. Једначине симетрале угла између две дате праве. — Претпоставимо да обе дате праве пролазе кроз исту тачку (x_0, y_0, z_0) и да су изражене једначинама другог нормалног облика:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_0}{a} &= \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \\ \frac{x-x_0}{a_1} &= \frac{y-y_0}{b_1} = \frac{z-z_0}{c_1}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где су a, b, c и a_1, b_1, c_1 косинуси углова посматраних правих линија (17) и координатних оса.

Конструишимо у координатном почетку главне параметре (в. $n^0$59) за обе праве линије и две тачке

$$(a \pm a_1, \quad b \pm b_1, \quad c \pm c_1),$$

које одговарају горњим и доњим знацима.

Потези обеју тачака паралелни су симетралама углова, унутрашњој и спољашњој, датих правих линија (17). Према томе тражене једначине симетрале постају:

$$\frac{x-x_0}{a \pm a_1} = \frac{y-y_0}{b \pm b_1} = \frac{z-z_0}{c \pm c_1}.$$

IV. Скуп правих и равни

111. Продор праве линије у равни. — Узмимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ (сл. 57) раван S одређену једначином општег облика

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

и праву линију EF претстављену једначинама

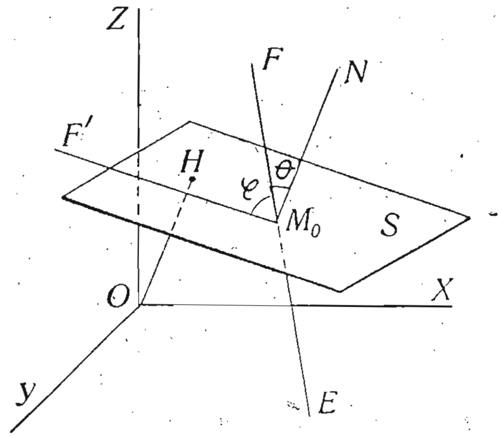
$$\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}. \tag{2}$$

Тражи се продорна тачка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ равни (1) са правом (2).

Напишимо једначине праве (2) у параметарском облику

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + pd, \\ y &= y_1 + qd, \\ z &= z_1 + rd, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где је d параметар. Решавајући систем четири једначине (1) и (3), ставимо вредности (3) координата x, y и z у једначину равни (1). Одатле се добија једнакост за изналажење вредности параметра d, која одговара траженој продорној тачки, и то:



Сл. 57

$$(Ap + Bq + Cr)d + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

$$d = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ap + Bq + Cr}. \tag{4}$$

Заменимо ли нађену вредност (4) параметра d у једначинама (3), координате тражене продорне тачке праве EF у равни S постају:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{Bn - Cm - Dp}{Ap + Bq + Cr}, \\ y_0 &= \frac{An + Cl - Dq}{Ap + Bq + Cr}, \\ z_0 &= \frac{Am - Bl - Dr}{Ap + Bq + Cr}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где су уведене ознаке l, m и n кофактори матрице

$$\begin{array}{ccc} l & m & n \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix}.$$

Ако се именилац у изразу (4), за вредност параметра d, поништава, т.ј.

$$Ap + Bq + Cr = 0, \tag{6}$$

онда обрасци (5) одређују бесконачне вредности за координате продора праве (2) и равни (1). То значи, да под претпоставком (6) продор тежи бесконачности, те се из тога закључује, да је права EF паралелна равни S.

Према томе *једнакост* (6) *која показује да је права* (2) *управна на нормали равни* (1)*претставља услов паралелности равни* (1) *и праве линије* (2).

У случају, када се сем услова (6) и бројилац обрасца (4) поништава, т.ј.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \tag{7}$$

онда параметар d нема одређену вредност. Стога и координате тражене продорне тачке постају такође неодређене. Добијени резултат показује да се раван (1) и права линија (2) секу у неодређеном броју тачака, другим речима, поклапају се. Овај закључак очевидан је са геометриског гледишта. Заиста, услов (7), показује да се тачка (x_1, y_1, z_1) праве линије (2) налази у равни (1). Пошто су, под условом (6), посматрана права и раван паралелне, то се морају поклапати.

Према томе, *услови* (6) *и* (7) *показују, да се права* (2) *поклапа са равни* (1).

112. Угао праве и равни. — Посматрајмо једначину дате равни S и једначину праве EF (сл. 57) у облику (1) односно (2). Угао између њих претставља угао φ између дате праве и њене ортогоналне пројекције M_0F' на раван S. А како је овај угао комплемент угла θ, између дате праве и нормале M_0N на раван S, то је

$$\sin\varphi = \cos\theta.$$

Пошто су коефицијенти A, B, C једначине равни (1) сразмерни косинусима углова које њена нормала заклапа са координатним осама, имамо

$$\sin\varphi = \pm\frac{Ap + Bq + Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}}.$$

113. Услови паралелности и нормалности равни и праве. — Ако су дата раван (1) и дата права (2) паралелне, онда је угао φ једнак нули, па се добија услов паралелности (6).

Међутим услов нормалности праве (2) на раван (1) одговара услову паралелности дате праве са нормалом M_0N. Одатле се непосредно добија услов нормалности праве (2) на раван (1) у облику

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}. \tag{8}$$

114. Најкраће растојање између две укрштене праве. — Узмимо две праве EF и E_1F_1 (сл. 58), које се не секу међусобно у простору, а чије су једначине респективно претстављене у другом нормалном облику

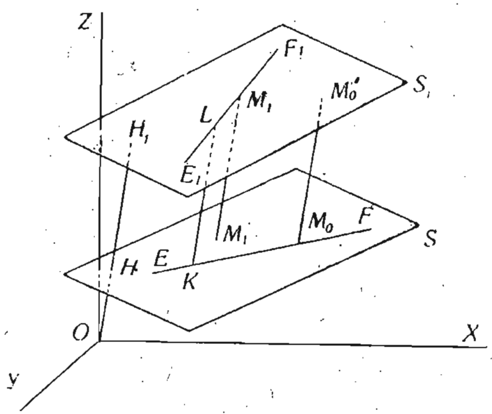
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}, \tag{9}$$

$$\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1} \tag{10}$$

Повуцимо кроз прву праву линију EF раван S тако, да буде паралелна другој правој линији E_1F_1.

Пошто раван S пролази кроз праву (9), онда је њена једначина задовољена координатама тачке (x_0, y_0, z_0) и због тога има облик

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{11}$$



Сл. 58

Због паралелности равни (11) са правом (10), имамо

$$Ap_1 + Bq_1 + Cr_1 = 0. \tag{12}$$

Сад кроз другу праву E_1F_1 повуцимо раван S_1, паралелну равни S. Она ће пролазити кроз тачку $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ праве E_1F_1, тако да јој једначина гласи

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \tag{13}$$

при чему су јој коефицијенти исти као у једначини (11).

Очевидно је, да је раван (13) паралелна и правој EF, која лежи у равни S. Због тога мора постојати услов паралелности праве (9) и равни (13) у облику

$$Ap + Bq + Cr = 0. \tag{14}$$

Резултат елиминације непознатих коефицијената A, B и C из једначина (11), (12) и (14) претставља једначину равни S у облику

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

тако да су коефицијенти A, B, C сразмерни кофакторима матрице

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p & q & r \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Означимо са ρ тражено најкраће растојање између правих (9) и (10), на слици обележено са KL. Оно је очевидно једнако растојању M_0M_0' тачке M_0 од равни S_1, или растојању $M_1'M_1$ тачке M_1 од равни S. Према томе се ρ може израчунати као растојање тачке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ од равни S помоћу обрасца:

$$\rho = \pm\frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{16}$$

где се знаци бирају према наведеном упутству (в. n^0 n^0 68 и 69).

Узмимо, на пример, две праве

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{5},$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4},$$

које се не секу у простору, јер је детерминанта леве стране једнакости (5), из n^0 102, једнака 8. Из матрице (15) налазимо вредност коефицијената:

$$A = -1, \qquad B = 2, \qquad C = -1.$$

Према томе једначина равни S, у посматраном случају, гласи

$$x - 2y + z - 5 = 0,$$

Стога је тражено растојање ρ, према обрасцу (16),

$$\rho = \frac{8}{\sqrt{6}}.$$

V. Задаци о правим линијама и равнима

115. Једначина равни која пролази кроз дату тачку управно на дату праву. — Означимо са (x_1, y_1, z_1) дату тачку у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ, а једначине праве узмимо у облику

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}. \tag{1}$$

Према томе једначина тражене равни пише се овако

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0,$$

где су A, B и C непознати коефицијенти. Пошто ова раван мора бити управна на дату праву, то морају постојати услови (8), из n^0 113:

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r} \tag{2}$$

Стога тражена једначина равни добија облик:

$$p(x-x_1) + q(y-y_1) + r(z-z_1) = 0.$$

116. Једначине праве која пролази кроз дату тачку управно на дату раван. — Узмимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ дату тачку (x_0, y_0, z_0) и дату раван

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

Напишимо једначине тражене праве у облику (1), где су x_0, y_0, z_0 дате величине, а коефицијенти p, q и r су непознати.

Услов управности дате равни (3) и тражене праве (1) изражава се једнакостима (2).

Стога замењујући у једначинама (1) непознате коефицијенте p, q и r њима сразмерним познатим величинама A, B и C, налазимо једначине тражене праве у облику:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

117. Једначина равни која пролази кроз дату тачку и дату праву. — Обележимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ дату тачку са (x_1, y_1, z_1) а дату праву узмимо у општем облику (1).

Тражену раван напишимо у облику (3).

Пошто ова мора пролазити кроз обе тачке (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1), то постоје услови

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Осим тога имамо услов паралелности праве (1) са равни (3) у облику:

$$Ap + Bq + Cr = 0. \tag{5}$$

Добијене три једнакости (4) и (5) довољне су за одређивање три односа непознатих коефицијената тражене једначине (3).

Међутим елиминишући A, B, C и D из четири по њима линеарне хомогене једначине (3), (4) и (5), налазимо једначину тражене равни у облику

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако одузмемо елементе треће врсте детерминанте леве стране добијене једначине од елемената прве и друге врсте, онда се једначина може написати и на овај начин:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} [r(y_0-y_1) - q(z_0-z_1)]\,(x-x_1) - [r(x_0-x_1) - p(z_0-z_1)]\,(y-y_1) + \\ + [q(x_0-x_1) - p(y_0-y_1)]\,(z-z_1) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Лако је увидети да се раније наведена друга једначина (12), у n^0 106, добија из претходне једначине (6), под специјалном претпоставком

$$x_0 \equiv x_0', \qquad y_0 \equiv y_0', \qquad z_0 \equiv 0,$$
$$p \equiv m', \qquad q \equiv n', \qquad r \equiv 1.$$

118. Једначине праве која пролази кроз дату тачку паралелно двема датим равнима. — Претпоставимо да је дата тачка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ и да су дате две равни:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

Узмимо тражену праву у облику (1). Њени непознати коефицијенти p, q и r морају испуњавати услове паралелности тражене праве (1) са датим равнима, наиме:

$$\mathrm{A}p+\mathrm{B}q+\mathrm{C}r=0,$$
$$\mathrm{A}_1p+\mathrm{B}_1q+\mathrm{C}_1r=0.$$

Према томе тражени коефицијенти p, q и r задовољавају сразмеру

$$\frac{p}{\mathrm{BC}_1-\mathrm{CB}_1}=\frac{q}{\mathrm{CA}_1-\mathrm{AC}_1}=\frac{r}{\mathrm{AB}_1-\mathrm{BA}_1}.$$

Стога тражене једначине (1) добијају облик:

$$\frac{x-x_0}{\mathrm{BC}_1-\mathrm{CB}_1}=\frac{y-y_0}{\mathrm{CA}_1-\mathrm{AC}_1}=\frac{z-z_0}{\mathrm{AB}_1-\mathrm{BA}_1}.$$

119. Једначина равни која пролази кроз дату тачку паралелно двема датим правим линијама. — Означимо у правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ дату тачку са $M'(x', y', z')$. Нека су једначине датих правих

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r},$$
$$\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}.$$

Узмимо једначину тражене равни у облику

$$\mathrm{A}(x-x')+\mathrm{B}(y-y')+\mathrm{C}(z-z')=0, \tag{7}$$

где су A, B и C непознати коефицијенти. Међутим ови коефицијенти морају задовољавати услове

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A}p+\mathrm{B}q+\mathrm{C}r&=0,\\ \mathrm{A}p_1+\mathrm{B}q_1+\mathrm{C}r_1&=0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Елиминацијом непознатих коефицијената из три последње по њима линеарне, хомогене једначине (7) и (8) добија се једначина тражене равни у облику:

$$\begin{vmatrix} x-x' & y-y' & z-z' \\ p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix}=0.$$

120. Услов да се три праве, које полазе из исте тачке, налазе у истој равни.— Означимо *главне* параметре (в. n^0 59) три дате праве

$$(a, b, c), \qquad (a_1, b_1, c_1), \qquad (a', b', c'). \tag{9}$$

Да би дате праве биле у истој равни, треба да се четири тачке, и то: координатни почетак и тачке (9), налазе у истој равни. А да то буде, мора

према услову (18), у n^0 16, бити задовољена, у посматраном случају, једнакост

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}=0.$$

VI. Једначина правих линија и проблеми о правим линијама и равнима у косоуглом праволиниском координатном систему

121. Једначине праве линије. — Пошто је права линија одређена пресеком две равни, то се једначине праве претстављају, и у косоуглом праволиниском координатном систему, скупом две, по текућим координатама, линеарне једначине. Међутим ове се једначине разликују од оних у правоуглом систему вредношћу коефицијената, који зависе од координатних углова косоуглог система.

Претпоставимо да су, у неком косоуглом праволиниском координатном систему OXYZ, обе једначине равни сведене, слично са изложеним поступком у n^0 97, на овај облик:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r} \tag{1}$$

Уведимо множилац M, чију ћемо вредност потражити тако да бисмо имали обрасце:

$$p\mathrm{M}=\cos\alpha, \qquad q\mathrm{M}=\cos\beta, \qquad r\mathrm{M}=\cos\gamma \tag{2}$$

Пошто уведени косинуси углова праве (1) са координатним осама морају задовољавати познати услов из n^0 51:

$$2\mathrm{F}(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)=\Omega,$$

онда, према n^0 89, добијамо, да је

$$\mathrm{M}=\pm\frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2\mathrm{F}(p,q,r)}},$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha=\pm\frac{p\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2\mathrm{F}(p,q,r)}},\quad \cos\beta=\pm\frac{q\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2\mathrm{F}(p,q,r)}},\\ \cos\gamma=\pm\frac{r\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2\mathrm{F}(p,q,r)}}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Различити знаци пред квадратним коренима одговарају супротним смеровима на правој линији (1).

Доказали смо горе, да обрасци (3) претстављају праве разломке. Тиме су оправдане уведене ознаке (2). На изложени начин једначине (1) доводе се на други нормални облик.

Вратимо се сада једначинама (1). Извршимо трансформацију координатног система паралелним померањем координатне равни XOY на растојање z_0, стављајући

$$z=z_0+z',$$

Претворене једначине (1) тада постају

$$x = mz' + x_0, \qquad y = nz' + y_0, \tag{4}$$

где је

$$m \equiv \frac{p}{r}, \quad n \equiv \frac{q}{r}.$$

Добијене једначине (4) су пр зог нормалног облика, при чему се m и n изражавају помоћу коефицијената празца пројекције посматране праве на координатним разнима Z'OX и YOZ.

Најзад, уведемо ли зредност размера (1) као помоћни параметар, онда се добијају једначине праве у параметарском облику.

122. Угао између две праве. — Узмимо једначине дзе праве линије општег облика у неком косоуглом празолиниском координатном систему OXYZ, наиме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-x_0}{p} &= \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \\ \frac{x-x_1}{p_1} &= \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Помоћу обрасца (3) одређују се косинуси углоза, које прва права (5) заклапа са координатним осама. Слично налазимо косинусе углова друге праве (5), са истим координатним осама, у облику:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 = \pm \frac{p_1\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2F(p_1,q_1,r_1)}}, \quad \cos\beta_1 = \pm \frac{q_1\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2F(p_1,q_1,r_1)}}, \\ \cos\gamma_1 = \pm \frac{r_1\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2F(p_1,q_1,r_1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Обрасци n^0 55 примењују се за израчунавање траженог угла између правих линија (5). Тако добијамо из обрасца (15), у n^0 55, а на основу формула (3) и (6), да се тражени угао φ израчунава овако:

$$\cos\varphi = \pm \frac{p\,F_1' + q\,F_2' + r\,F_3}{\sqrt{2F}\cdot\sqrt{2F'}},$$

где F' означава израз функције F за вредност коефицијената p_1, q_1, r_1 друге дате праве линије (5).

Према томе нађени образац може се написати и друкчије, да је

$$\cos\varphi = \pm \frac{p\dfrac{\partial F}{\partial p_1} + q\dfrac{\partial F}{\partial q_1} + r\dfrac{\partial F}{\partial r_1}}{\sqrt{2F}\cdot\sqrt{2F'}}$$

Ако пођемо од обрасца (21), n^0 55, онда имамо

$$\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2F}\cdot\sqrt{2F'}} \begin{vmatrix} 0 & p_1 & q_1 & r_1 \\ p & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ q & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ r & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

123. Услови паралелности и нормалности правих. — Услови паралелности правих (5) изражавају се сразмерношћу коефицијената дотичних једначина:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Што се тиче нормалности правих (5), то се тражени услов одмах добија из горе наведених образаца за $\cos\varphi$ било у облику:

$$p\frac{\partial F}{\partial p_1} + q\frac{\partial F}{\partial q_1} + r\frac{\partial F}{\partial r_1} = 0,$$

било у облику

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & q_1 & r_1 \\ p & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ q & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ r & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

124. Угао између праве и равни. — Узмимо у косоуглом праволиниском координатном систему OXYZ једначине праве

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \tag{7}$$

и равни

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8}$$

Пошто се тражени угао φ (сл. 57) одређује као допунски углу θ између дате праве EF и нормале M_0N на равни S, имамо према обрасцима (3), из n^0 121, и обрасцима (5) и (8), из n^0 89, да је

$$\sin\varphi = \cos\theta$$

Стога обрасци (15) и (21), из n^0 55, респективно дају

$$\sin\varphi = \frac{p\dfrac{\partial F}{\partial A} + q\dfrac{\partial F}{\partial B} + r\dfrac{\partial F}{\partial C}}{\sqrt{2F(p,q,r)}\cdot\sqrt{2F(A,B,C)}}, \tag{9}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2F}(p,q,r)\,\sqrt{2F}(A,B,C)} \begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

125. Услови паралелности и нормалности праве и равни. — За паралелност праве (7) и равни (8) угао φ мора се поништити. Одатле обрасци (9) и (10) дају респективно услов паралелности у једном од два облика:

$$p\frac{\partial F}{\partial A} + q\frac{\partial F}{\partial B} + r\frac{\partial F}{\partial C} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Што се тиче услова управности праве (7) и равни (8), он се изражава сразмерношћу коефицијената, наиме:

$$\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{r}{C} .$$

126. Задаци о правим линијама и равнима. — Сви се задаци у косоуглом праволиниском координатном систему решавају слично као у правоуглом координатном систему. Само при томе треба водити рачуна о обрасцима и условима, који мењају свој облик због увођења косоуглих координатних углова λ, μ и ν.

ГЛАВА ПЕТА

ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА ПОЈМА О КООРДИНАТАМА

I. Хомогене координате

127. Дефиниција. — Означимо са x, y, z координате неке тачке M у Декартовом координатном систему OXYZ.

Уведимо сада четири броја:

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad T; \tag{1}$$

при чему нека односи прва три броја са четвртим буду једнаки координатама x, y, z, наиме:

$$x = \frac{X}{T}, \qquad y = \frac{Y}{T}, \qquad z = \frac{Z}{T} \tag{2}$$

Под уведеним претпоставкама бројеви (1) зову се х о м о г е н е к о о р д и н а т е посматране тачке M, која се тада обележава симболички

$$M(X, Y, Z, T)$$

Према томе очевидно је, да *једна иста тачка у простору има неограничен број хомогених координата.* Заиста, све количине сразмерне са појединим вредностима X, Y, Z и T дају размере, које су једнаке првобитним координатама x, y, и z. Стога су хомогене координате условне ознаке координата тачака пропорционалних њеним Декартовим координатама. Одатле излази, да се све четири хомогене координате тачке не смеју анулирати истовремено.

Обрасци (2) претварају праволиниске координате у хомогене.

Међутим за обрнуту трансформацију, т.ј. за трансформацију хомогених координата у Декартове, довољно је ставити

$$T = 1$$

а ознаке X, Y, Z сменити са x, y, z.

Хомогене координате имају особину, да претварају све једначине у хомогени облик.

128. Једначина равни. — Једначина равни у Декартовим координатама

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

своди се сменом координата, помоћу образаца (2) на једначину облика:

$$AX + BY + CZ + DT = 0 \tag{3}$$

Хомогене координате имају предност при геометриским тумачењима бескрајно великих величина, које се могу појавити при алгебарским израчунавањима.

Претпоставимо, на пр., да смо добили резултат

$$\mathrm{T}=0, \qquad \frac{\mathrm{X}}{a}=\frac{\mathrm{Y}}{b}=\frac{\mathrm{Z}}{c}, \tag{4}$$

где су a, b и c сталне величине. Онда нађени обрасци показују, да се бескрајно удаљена тачка налази у правцу праве линије, одређене скупом две последње једнакости (4) које претстављају две равни.

Све бескрајно удаљене тачке задовољавају услов

$$\mathrm{T}=0. \tag{5}$$

Пошто је ова једначина (5) линеарна, специјалног облика (3), то се може рећи, да све бескрајно удаљене тачке леже у бескрајно удаљеној равни.

Узмемо ли у обзир други партикуларни случај, када су коефицијенти A, B и C једначине (3) једнаки нули, при чему је $\mathrm{D} \gtrless 0$, онда се једначина (3) своди на облик (5), и стога претставља бескрајно удаљену раван.

Најзад, бескрајно удаљене тачке дате равни (3) одређују се скупом две линеарне једначине:

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{T}=0,\\ &\mathrm{AX}+\mathrm{BY}+\mathrm{CZ}=0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

те се према томе налазе на једној правој линији, која је претстављена скупом једначина (6).

Ако једначине праве нису претстављене у облику (6), онда посматрана права линија не може бити у бесконачности, те неће имати више од једне бескрајно удаљене тачке.

Изнети резултати добијају нарочито једноставно тумачење на овај начин.

Извршимо линеарну трансформацију хомогених координата помоћу образаца

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{X} &= \kappa \mathrm{X}_1 + l\mathrm{Y}_1 + m\mathrm{Z}_1 + n\mathrm{T}_1\\ \mathrm{Y} &= \kappa'\mathrm{X}_1 + l'\mathrm{Y}_1 + m'\mathrm{Z}_1 + n'\mathrm{T}_1,\\ \mathrm{Z} &= \kappa''\mathrm{X}_1 + l''\mathrm{Y}_1 + m''\mathrm{Z}_1 + n''\mathrm{T}_1,\\ \mathrm{T} &= \kappa'''\mathrm{X}_1 + l'''\mathrm{Y}_1 + m'''\mathrm{Z}_1 + n'''\mathrm{T}_1, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

који садрже шеснаест констаната κ, l,......, n'''. Очевидно је, да се једначина равни претвара исто тако у једначину равни у новим координатама. Претпоставимо сад, да су коефицијенти последњег обрасца (7)

$$\kappa''', \quad l''', \quad m''', \quad n'''$$

различити од нуле. Тада се бескрајно удаљена раван (5) трансформише, помоћу образаца (7), у једначину:

$$\kappa'''\mathrm{X}_1 + l'''\mathrm{Y}_1 + m'''\mathrm{Z}_1 + n'''\mathrm{T}_1 = 0,$$

која претставља коначну раван у систему нових уведених хомогених координата.

Одатле, узимајући у обзир уведене претпоставке, долази се до разлога, због кога се равни, праве линије и тачке у бесконачности могу посматрати као коначни геометриски облици.

Примера ради протумачимо горе наведену једначину низа паралелних равни (10), из n^0 73, наиме:

$$\mathrm{L} + \lambda = 0, \tag{8}$$

где је L скраћена ознака леве стране једначине равни (3), а λ означава произвољни стални параметар. Једначина (8) постаје у хомогеним координатама (2):

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} + (\mathrm{D} + \lambda)\mathrm{T} = 0,$$

или, стављајући уместо λ нови параметар κ:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D} + \lambda = \kappa,\\ &\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} + \kappa\mathrm{T} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Сад је очевидно, према општој дефиницији свежња равни у n^0 74, да су основне равни свежња (9):

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} + \mathrm{CZ} = 0, \qquad \mathrm{T} = 0,$$

т.ј. раван паралелна датој равни (3) и бескрајно удаљена, њој паралелна раван $\mathrm{T} = 0$.

За други пример узмимо горе проучени случај 6^0, у n^0 74, пресека три равни, када је матрица (14), из n^0 74, ранга један, а матрица (13) је нултог ранга. Тада се све три једначине (11), из n^0 74, своде на једну једину

$$\mathrm{T} = 0,$$

т.ј. све равни се поклапају са једном равни, која је бескрајно удаљена.

129. Једначина равни која пролази кроз три дате тачке. — Посматрана једначина (8), у n^0 81, сменом текућих координата према обрасцима (2), при чему ставимо за координате датих тачака:

$$x_i = \frac{\mathrm{X}_i}{\mathrm{T}_i}, \quad y_i = \frac{\mathrm{Y}_i}{\mathrm{T}_i}, \quad z_i = \frac{\mathrm{Z}_i}{\mathrm{T}_i},$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

постаје:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} & \mathrm{T}\\ \mathrm{X}_1 & \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Z}_1 & \mathrm{T}_1\\ \mathrm{X}_2 & \mathrm{Y}_2 & \mathrm{Z}_2 & \mathrm{T}_2\\ \mathrm{X}_3 & \mathrm{Y}_3 & \mathrm{Z}_3 & \mathrm{T}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

130. Растојање тачке од равни. — Претпоставимо да су хомогене координате дате тачке M

$$x_0 = \frac{\mathrm{X}_0}{\mathrm{T}_0}, \quad y_0 = \frac{\mathrm{Y}_0}{\mathrm{T}_0}, \quad z_0 = \frac{\mathrm{Z}_0}{\mathrm{T}_0}.$$

Према томе образац (12), у n^0 68, за тражено растојање тачке M_0 од равни чија је једначина (3), постаје

$$h=\pm\frac{AX_0+BY_0+CZ_0+DT_0}{T_0\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{10}$$

при чему се знак изабира на основу датих података.

131. Параметарски облик једначина праве која пролази кроз две дате тачке. — Узмимо једначине праве линије у облику

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0+d(x_1-x_0),\\ y &= y_0+d(y_1-y_0),\\ z &= z_0+d(z_1-z_0), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где је d параметар. Одмах се види, да је:

$$x_0+d\,(x_1-x_0)=(1-d)\,x_0+dx_1=\frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},$$

где је

$$\frac{d}{1-d}\equiv\lambda.$$

Стога дате једначине (11) постају

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda},\\ y &= \frac{y_0+\lambda y_1}{1+\lambda},\\ z &= \frac{z_0+\lambda z_1}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Уведемо ли ознаке (2) и

$$x_k=\frac{X_k}{T_k},\quad y_k=\frac{Y_k}{T_k},\quad z_k=\frac{Z_k}{T_k},$$
$$(k=0,1),$$

онда једначине (12) добијају облик

$$\frac{X}{T}=\frac{X_0+\mu X_1}{T_0+\mu T_1},$$
$$\frac{Y}{T}=\frac{Y_0+\mu Y_1}{T_0+\mu T_1},$$
$$\frac{Z}{T}=\frac{Z_0+\mu Z_1}{T_0+\mu T_1},$$

при чему је

$$\mu\equiv\frac{\lambda T_0}{T_1}.$$

Пошто свака тачка има неограничен број сразмерних хомогених координата, то подразумевајући, да се коефицијенти сразмерности координата тачака

$$(X, Y, Z, T),\quad (X_0\,Y_0\,Z_0\,T_0),\quad (X_1\,Y_1\,Z_1\,T_1)$$

изражавају бројевима:

$$T,\quad T_0+\mu T_1,\qquad T_0+\mu T_1,$$

написаћемо тражене једначине овако

$$X=X_0+\mu X,\qquad Y=Y_0+\mu Y_1,\qquad Z=Z_0+\mu Z_1$$

132. Једначине површина другог реда. — Бескрајно удаљени круг лопте. — Једначина једне површине другог реда општег облика у хомогеним координатама постаје

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+FT^2+2BYZ+2B'XZ+2B''XY+2CXT+$$
$$+2C'YT+2C''ZT=0$$

и пише се кратко симболички на овај начин:

$$(A, A', A'', F, B, B', B'', C, C', C'')\,(X\,Y\,Z\,T)^2=0$$

Слично томе, и једначина површине другог реда општег облика у Декартовим координатама обележава се симболом

$$(A, A', A'', F, B, B', B'', C, C', C'')\,(x, y, z, 1)^2=0.$$

Уочимо нарочито једначину лопте полупречника R са средиштем у координатном почетку правоуглог праволиниског координатног система. Одговарајућа једначина лопте у хомогеним координатама постаје

$$X^2+Y^2+Z^2=R^2T^2 \tag{13}$$

Претпоставимо ли, да је

$$T=0, \tag{14}$$

т. ј.

$$X^2+Y^2+Z^2=0, \tag{15}$$

онда тачке, које су одређене скупом једначина (14) и (15) припадају лопти (13). Међутим једначина (14), како је горе објашњено, претставља бескрајно удаљену раван. Што се тиче једначине (15), то она сем вредности

$$X=Y=Z=0$$

нема других реалних решења и претставља такозвану имагинарну површину.

Једначине (14) и (15) заједно претстављају *бескрајно удаљени имагинарни круг дате лопте* (13).

Другим речима, једначина (15) претставља лопту чији је полупречник једнак нули.

III. Најкраће и тетраедарске координате

133. Дефиниција најкраћих координата. — Узмимо три равни које се секу у једној тачки

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

тако да је различита од нуле детерминанта

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \gtreqless 0. \tag{2}$$

Обележимо са δ, δ_1 и δ_2 најкраћа растојања неке тачке (x, y, z) од посматраних равни (1). Према томе имамо обрасце

$$\begin{aligned} \delta &= M(Ax + By + Cz + D), \\ \delta_1 &= M_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1), \\ \delta_2 &= M_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2), \end{aligned} \tag{3}$$

где су M, M_1 и M_2 обрнуте вредности параметара линеарних функција, које се налазе на левој страни датих једначина равни (1) (образац 8 на стр. 102).

Свакој тачки у простору одговарају увек три броја δ, δ_1 и δ_2, које ћемо сматрати за координате тачке (x, y, z). Према томе обрасци претстављају изразе за трансформацију нових координата, δ, δ_1 и δ_2, у старе x, y и z. Ове се нове координате δ, δ_1 и δ_2 зову н а ј к р а ћ е.

Да бисмо изразили старе координате новим довољно је да решимо по x, y и z обрасце (3). Пошто су ове једначине линеарне по x, y и z, то се и старе координате изражавају линеарно у односу на нове координате.

Према томе свака раван изражава се помоћу линеарне једначине, односно најкраћих координата. Обрнуто, свака линеарна једначина у најкраћим координатама одређује раван. Равни које се одређују датим једначинама (1) зову се координатне равни система најкраћих координата.

Према узетим једначинама координатних равни у праволиниском систему (1) обрасци (3) дају за координатне равни система најкраћих координата једначине

$$\delta = 0, \qquad \delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0.$$

Међутим ове једначине одређују једну заједничку тачку.

Координатне равни система најкраћих координата деле простор у осам области које се разликују знацима + и —, који морају да се узму при израчунавању дужина растојања дате тачке од координатних равни.

На овај начин, сва три броја потпуно одређују положај тачке у односу на координатне равни система најкраћих координата. Према томе положај одређене тачке простора, у свакој од осам наведених области, зависи од знака најкраћих координата тачке.

134. Тетраедарске координате. — Уведимо четири линеарне хомогене функције X_1, Y_1, Z_1 и T_1 хомогених координата X, Y, Z, T у облику

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= AX + BY + CZ + DT \\ Y_1 &= A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T \\ Z_1 &= A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2T \\ T_1 &= A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3T \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при чему је детерминанта коефицијената различита од нуле

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \gtreqless 0. \tag{5}$$

Према томе се једначине (4) могу решити по променљивим величинама X, Y, Z, T па ове добијају, за дате вредности,

$$X_1, \quad Y_1, \quad Z_1, \quad T_1, \tag{6}$$

потпуно одређене вредности. Стога се величине (6) сматрају као с и с т е м н о в и х к о о р д и н а т а.

Ове координате зову се т е т р а е д а р с к е са овог разлога. Ако изједначимо са нулом координате (6)

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad T_1 = 0,$$

онда се на овај начин одређују четири равни, чије се једначине изражавају у полазним хомогеним координатама, због образаца (1), овако

$$\left.\begin{aligned} AX + BY + CZ + DT &= 0, \\ A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1T &= 0, \\ A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2T &= 0, \\ A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3T &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Због уведене претпоставке (5), добијене једначине претстављају четири различите равни, које не пролазе кроз једну исту тачку. Према томе, равни (7) одређују четири стране једног тетраедра. Четири темена овог тетраедра добијају се решавањем четири различита скупа од по три једначине (7). При томе се може догодити, да се једна страна тетраедра или једно, два или три од његових темена удаље у бесконачност.

Међутим неопходни су још накнадни услови, који би успостављали тачно одређивање координата сваке тачке у посматраном тетраедарском координатном систему. Заиста, горе уведени обрасци (4) за одређивање тетраедарских координата тачке

$$(X_1, \quad Y_1, \quad Z_1, \quad T_1),$$

показују да су њихове десне стране сразмерне растојањима посматране тачке у хомогеним координатама

$$(X, \quad Y, \quad Z, \quad T)$$

од стране координатног тетраедра.

Означимо једначине (7) страна координатног тетраедра укратко овако

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0.$$

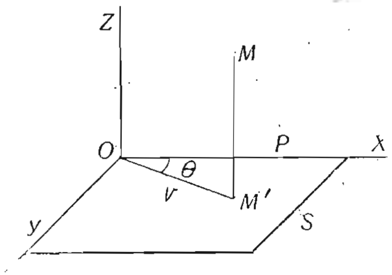
Тада се, према обрасцу (10), на страни 132 (в. n^0 130), тетраедарске координате (1) пишу на овај начин

$$X_1 = a\,TP, \qquad Y_1 = b\,TQ,$$
$$Z_1 = c\,TR, \qquad T_1 = d\,TS,$$

где P, Q, R и S означавају односна растојања, док су a, b, c и d коефицијенти сразмерности.

III. Криволиниски координатни систем

135. Цилиндричне координате. — Узмимо у равни S поларни систем координата са полом у тачки O и поларном осом OP (сл. 59). Подигнимо нормалу из пола O на раван S и сматрајмо је за осу кота OZ.



Сл. 59

Поларни координатни систем у датој равни S и поменута оса кота сачињавају цилиндрични координатни систем у простору.

Свакој тачки M у простору одговарају три координате: поларни угао θ; полупречник r и кота z. Обрнуто трима вредностима θ, r и z одговара једна тачка у простору. Заиста, тачка M се налази у равни, која заклапа угао θ са равни POZ. Осим тога, тачка M се налази такође на позршини кружног цилиндра полупречника r и осе OZ. Најзад, тачка M мора бити и у равни на растојању z од дате равни S. Према томе, тачка M се налази у пресеку три дате површине, наиме: две равни и цилиндра.

Ове се површине називају координатним површинама а њихове пресечне линије, т.ј. две праве и круг, називају се координатним линијама посматраног цилиндричног координатног система, који се због тога убраја у криволиниске координатне системе, док је у исто време посматрани систем и правоугли.

Овај назив се образложава на основу појма о координатним осама криволиниског координатног система.

Координатним осама криволиниског система називају се тангенте координатних линија, које пролазе кроз посматрану тачку M.

У посматраном цилиндричном координатном систему те тангенте су две праве, и то: 1° пресек равни која пролази кроз осу кота и ону која је на њој нормална; 2° права паралелна оси кота; 3° тангента круга нормална на раван OMZ.

Најзад, позитиван смер координатних оса узима се у правцу, у коме расту координате. У посматраном цилиндричном координатном систему позитиван смер координатних оса је обележен са θ, r и z.

Лако је успоставити везу између уведених цилиндричних координата и правоуглих праволиниских координата на овај начин.

Узмимо осу OX дуж поларне осе OP, осу OY у равни S управно на поларну осу и непромењену осу кота OZ.

Према томе је:

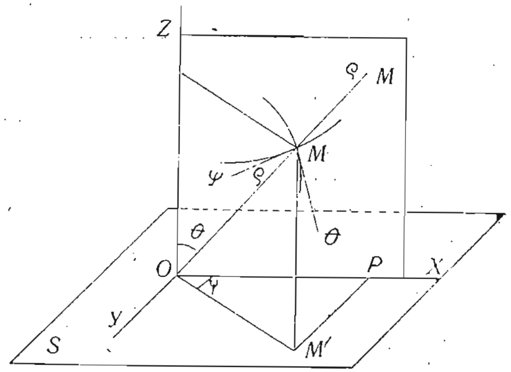
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Обрнуто добијамо:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\ , \quad \theta = arc\ tang\ \frac{y}{x}. \tag{1}$$

136. Сферне координате. — У групу правоуглих криволиниских координата убрајавају се и сферне координате.

Овај систем се одређује помоћу две дате узајамно управне равни S и M, и једне дате тачке O њиховог пресека (сл. 60).



Сл. 60

Раван S се зове екваторијална раван, раван M меридијанска раван, а тачка O — пол система.

Кроз сваку тачку простора M пролази раван, која заклапа угао ψ са меридијаном M а исто пролази и зрак OM, чији се положај у дотичној равни одређује нагибним углом θ праве OM према нормали на екватор S; најзад растојање тачке M од пола мери се потегом ρ.

Угао ψ се зове дужина (географска) тачке M, и мери се од меридијана, почев од 0 до 2π у позитивном смеру обртања у екваторијалној равни.

Угао θ је допунска ширина (географска) тачке M и мери се од 0 до π у позитивном смеру око осе у екваторијалној равни.

Најзад потег ρ се сматра за позитивну величину.

Стога свакој тачки простора одговарају три броја ψ, θ и ρ. Обрнуто, датим бројевима ψ, θ и ρ одговара одређена тачка простора M.

Према уведеним дефиницијама, три координатне површине сферног координатног система су: 1° раван; 2° конус; 3° лопта. Њихови узајамни пресеци претстављају координатне линије: праву OM и два круга, који су пресеци равни и конуса са лоптом.

Најзад права OM и тангенте у тачки M оба поменута круга претстављају координатне осе сферног координатног система, при чему су позитивни правци ових оса обележени са ψ, θ и ρ и оријентисани на страну растења ових координата.

Лако је успоставити везу између датих сферних координата и правоуглих праволиниских Декартових координата. Уведимо у ту сврху правоугли Декартов систем са почетком у тачки O; у равни S сместимо координатну раван XOY, тако да се координатна раван ZOX поклапа са меридијаном M, а осу OY поведимо на њега управно.

Ако конструишемо за тачку M координатни многоугао OPM′M, онда се из правоуглих троуглова

$$OM'M, \quad OM'P$$

добија непосредно:

$$OM' = \rho\sin\theta$$

Према томе правоугле координате изражавају се помоћу сферних координата на овај начин:

$$x = \rho\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

Одавде налазимо обрнуто и изразе сферних координата, као функције Декартових, наиме:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= arc\,tang\,\frac{y}{x}, \\ \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta &= arc\,cos\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

137. Општи појам криволиниских координата. — Узмимо у датом правоуглом праволиниском координатном систему OXYZ три једначине облика:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= U, \\ f_1(x,y,z) &= V, \\ f_2(x,y,z) &= W, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где су U, V, W три произвољна параметра, тако да једначине (3) одређују три породице површина у простору.

За сваку дату тачку простора $M(x, y, z)$ параметри U, V и W добијају потпуно одређене вредности из једначина (3).

Претпоставимо да су функције f, f_1 и f_2 такве природе, да за дате вредности параметра U, V, W дају потпуно одређене вредности за x, y и z, тако да датим вредностима параметара U, V, W одговара једна једина одређена тачка простора.

Под уведеном претпоставком једначине (3) могу послужити за одређивање једног система криволиниских координата. Стварно, једначине (3) могу се у том случају сматрати у геометриском смислу као координатне површине неког криволиниског координатног система.

Сваки пар од две једначине (3) одређује неку криву линију у простору, која служи као координатна линија. Према томе, кроз сваку тачку простора M пролазе три координатне линије. Тангенте ових линија у тачки M претстављају три координатне осе посматраног криволиниског координатног система, при чему се за позитиван правац оса узима правац, у коме расту вредности односних параметара.

Три уведена параметра U, V и W претстављају криволиниске координате, а три једначине (3) служе за трансформацију полазних Декартових координата x, y, z у криволиниске координате U, V, W.

На пример, ако једначинама (1) додамо једнакост $z = z$ (кота је истовремено и трећа криволиниска координата), онда три добијене једнакости одређују цилиндричне криволиниске координате. Исто тако и једначине (2) играју улогу система (3) за одређивање сферних криволиниских координата, при чему су уведене специјалне ознаке параметара, помоћу којих се може лако протумачити њихов геометриски смисао.

Гаус је 1828 године узео криволиниске координате у сврху испитивања површина. Доцније је Јакоби указао на корисност њихове примене за решавање низа чувених проблема Динамике и Небеске механике. Најзад је Дарбу потанко проучио теорију криволиниских координата у своме раду: *G. Darboux — Leçons sur la théorie générale des surfaces t. I* и у специјалном делу: *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2-e édition.*

ГЛАВА ШЕСТА

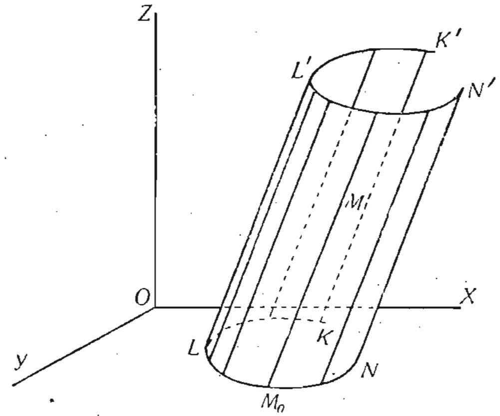
ОБРАЗОВАЊЕ ПОВРШИНА 2-ОГ РЕДА И ЊИХОВ ОБЛИК

I. Цилиндар и конус

138. Цилиндар — Цилиндар се одређује кретањем праве линије паралелно датом правцу. Узмимо, на пр., неки конични пресек KLN (сл. 61) у координатној равни XOY правоуглог праволиниског координатног система OXYZ у простору. Претпоставимо да је крива KLN узета за директрису цилиндра KLN K'L'N' т.ј. криву кроз чије тачке пролазе генератрисе KK', LL', NN',...... које су паралелне датој правој. Означимо са

$$m, \quad n, \quad 1$$

величине сразмерне косинусима углова, које ова права заклапа са координатним осама.



Сл. 61

Узмимо ма коју тачку $M(x, y, z)$ на површини посматраног цилиндра, при чему означимо са x_0, y_0 координате оне тачке M_0 на директриси у којој је сече генератриса која пролази кроз тачку M. Једначине те генератрисе изражавају се овако

$$x - x_0 = mz, \qquad y - y_0 = nz \tag{1}$$

Претпоставимо сад да једначина директрисе KLN гласи

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

тако да постоји идентичност

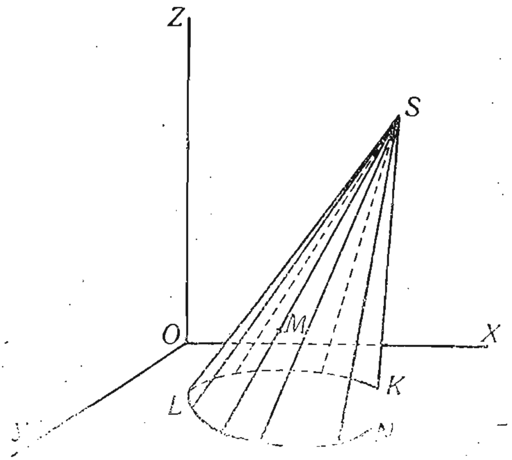
$$f(x_0, y_0) = 0, \tag{3}$$

која се зове *карактеристична једначина* посматраног цилиндра. Елиминишући променљиве параметре x_0 и y_0 из три једнакости (1) и (3) добијамо релацију између координата x, y, z ма које тачке M посматране површине. На тај начин долазимо до тражене једначине површине посматраног цилиндра у облику

$$f(x-mz,\ y-nz)=0$$

Ово је једначина другог степена, пошто дата једначина (2) одређује конични пресек.

139. Конус. — Површина конуса се одређује такође кретањем праве линије, која сада мора пролазити кроз једну исту непокретну тачку, тако ззано т е м е к о н у с а. Означимо га са S(x_0, y_0, z_0) (сл. 62) у односу на правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору. Узмимо у координатној равни XOY неки конични пресек KLN. Нека је његова једначина у разни XOY



Сл. 62

$$f(x,y)=0. \tag{4}$$

Сматрајући ову криву као директрису конуса са теменом S, одредимо ма коју његову праволиниску генератрису MS једначинама облика:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=m(z-z_0),\\ y-y_0&=n(z-z_0). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где су m и n промењиви параметри, а $M(x, y, z)$ тачка на површини конуса. По себи се разуме да тачке директрисе KLN, поред једначине (4), задовољавају и једначину

$$z=0 \tag{6}$$

која претставља координатну раван XOY.

Ако елиминишемо текуће координате x, y, z из четири једначине, (4), (5) и (6), добићемо везу облика

$$f(x_0-mz_0,\quad y_0-nz_0)=0 \tag{7}$$

између параметра m и n, потребну да би једначине (5) одређивале конус SKLN, а која се зове његова *карактеристична једначина.* Према томе, стављајући вредности m и n одређене обрасцима (5),

$$m=\frac{x-x_0}{z-z_0},\qquad n=\frac{y-y_0}{z-z_0},$$

у једначину (7), добијамо тражену једначину посматраног конуса у облику

$$f\left(\frac{x_0z-z_0x}{z-z_0},\ \frac{y_0z-z_0y}{z-z_0}\right)=0 \tag{8}$$

Ова једначина је очигледно другог степена по текућим координатама, јер је, под уведеном претпоставком, функција f другог степена по хомогеним аргументима

$$\frac{x_0z-z_0x}{z-z_0},\qquad \frac{y_0z-z_0y}{z-z_0}.$$

Претпоставимо, на пр., да је директриса правог конуса круг у равни са средиштем у координатном почетку и са полупречником R т.ј.

$$x^2+y^2=R^2.$$

Нека се теме конуса налази на оси кота у тачки $(0, 0, h)$.

Према обрасцу (8), једначина траженог конуса добија облик

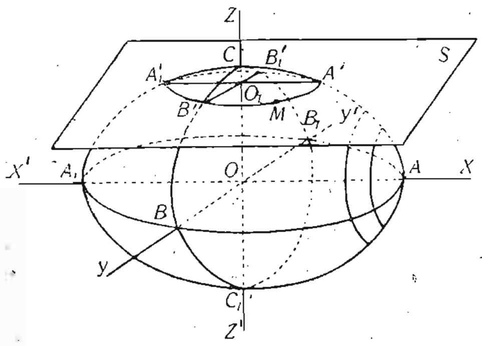
$$h^2(x^2+y^2)=R^2(z-h)^2.$$

II. Елипсоид

140. Дефиниција. — Поред површина добијених кретањем непромењивих генератриса и то непромењивих у смислу промене облика (на пример, праве за образовање цилиндра и конуса, круг за лопту) могу се испитивати и површине, које се одређују кретањем генератриса, чији облици, за време кретања, подлежу променама условљеним прецизним законима.

Проучимо на пр., површину која постаје кретањем променљиве елипсе. При томе ова остаје увек паралелна једној датој равни, а полуосе јој се мењају као растојања тачака на оси кота од одговарајућих тачака непокретних елипси; ове служе као директрисе.

Узмимо за то правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору (сл. 63), и нека координатна раван XOY буде поменута дата раван.



Сл. 63

У равни S, паралелној равни XOY, нека се налази елипса са теменима $A'A_1'$, $B'B_1'$ и са средиштем у тачки O_1 на оси кота, тако да је

$$OO_1=z_0$$

Означимо са α и β полуосе те елипсе. Оне су паралелне оси X, односно оси Y. Претпостављамо да се полуосе α и β мењају кад се раван S креће тако да темена A' и A_1', клизе дуж директрисе елипсе AC_1A_1C са полуосама a и c, у координатној равни XOZ,. При томе је

$$OA=A_1O=a,\qquad OC=C_1O=c.$$

У исто време темена B_1 и B_1' покретне елипсе морају клизити дуж друге елипсе BCB_1C_1 са полуосама b и c, а која је у координатној равни YOZ при чему је

$$OB=B_1O=b,\qquad OC=C_1O=c.$$

Према томе, ако са x, y, z означимо текуће координате ма које тачке М посматране елипсе у равни S, ове координате задовољавају једначине

$$z = z_0; \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \tag{7}$$

Међутим, променљиви параметри z_0, α и β морају, према уведеним условима, задовољавати једнакости

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{z_0{}^2}{c^2} = 1, \quad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{z_0{}^2}{c^2} = 1. \tag{8}$$

Да бисмо нашли тражено геометриско место тачака $M(x, y, z)$, морамо елиминисати три променљива параметра, z_0, α и β, из система од четири једначине (7) и (8). У ту сврху ставимо у другу једначину (7) вредности које се добијају из обе једначине (8) и прве једначине (7) т.ј. вредности

$$z_0 = z, \quad \alpha^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \beta^2 = b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

Резултат ове смене изражава се једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{9}$$

Површина одређена добијеном једначином, зове се е л и п с о и д и претставља неку врсту спљоштене лопте.

141. Пресеци елипсоида. — До стварне геометриске претставе посматране површине долазимо тек проучавањем њених пресека. Заиста, из начина формирања елипсоида очевидно је да су сви његови пресеци паралелни са равни XOY елипсе. Све те елипсе су сличне међу собом јер су хомотетичне са елипсом AB_1A_1B која претставља пресек посматраног елипсоида са координатном равни XOY, чије су полуосе a и b а средиште јој се налази у координатном почетку. Исто тако лако је увидети, да пресеци елипсоида (9) са координатним равнима ZOX, односно YOZ претстављају директорне елипсе AC_1A_1C односно BCB_1C_1. Стога је довољно ставити у једначини (9), у првом случају $y = 0$, а у другом $x = 0$.

Међутим, пресеци елипсоида са равнима паралелним координатној равни ZOX односно YOZ, претстављају међусобно сличне елипсе. За доказ тога одредимо пресек елипсоида (9) са извесном равни

$$y = y_0 \tag{10}$$

која је паралелна координатној равни ZOX, а на растојању y_0 од ње. Тражени пресек одређује се скупом једначине (10) и једначине

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2_0}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2_0}{b^2}\right)} = 1 \tag{11}$$

које се добијају кад се y (9) уврсти (10).

Добијена једначина (11) претставља посматрани пресек као елипсу, у равни (10). За вредност $y_0 = 0$ ова елипса се поклапа са директорном елипсом AC_1A_1C. Због тога су елипсе (11), за различите вредности y_0, сличне међу собом.

Узмимо сада пресек елипсоида (9) са неком равни

$$x = x_0, \tag{12}$$

паралелној координатној равни YOZ на растојању x_0 од ње. Тај пресек се одређује скупом који сачињавају једначина равни (12) и једначина елипсе, која се у њој налази, наиме

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2_0}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2_0}{a^2}\right)} = 1. \tag{13}$$

За вредност $x_0 = 0$, ова елипса се поклапа са директорном елипсом BC_1B_1C Према томе су све елипсе (13), за различите вредности x_0, сличне међу собом.

Пресеци елипсоида (9) који претстављају елипсе,

$$AB_1A_1B, \qquad BC_1B_1C, \qquad AC_1A_1C,$$

зову се г л а в н и п р е с е ц и, а њихове осе — о с е е л и п с о и д а. У исто време темена главних пресека, којих има шест, и то: A, A_1, B, B_1, C и C_1 зову се темена елипсоида (9).

Тачка O назива се с р е д и ш т е или ц е н т а р елипсоида.

Најзад, равни главних пресека, које се за елипсоид (9) поклапају са координатним равнима, називају се г л а в н и м р а в н и м а елипсоида и управне су на његове осе.

Очевидно је, да је свака елипса, која претставља пресек елипсоида (9) са равни паралелној некој од координатних равни, мања од односног главног пресека. То се јасно види за пресеке елипсоида (9) са генераторном равни S. Заиста полуосе α и β елипсе-генератрисе мењају се од најмањих вредности 0 до највећих граничних вредности a односно b, које су односне полуосе елипсоида (9).

Да би елипсе (11) и (13) биле реалне, потребно је да буду испуњени услови

$$y_0 < b$$

односно

$$x_0 < a$$

Јасно је да ако су ови услови испуњени полуосе елипсе (11) су мање од a и c, а елипсе (13) мање су од b и c.

Нарочито треба напоменути случај, кад су једнаке обе полуосе покретне генератрисе исто као и полуосе a и b директрисе у равни XOY. Тада су сви пресеци елипсоида паралелни координатној равни XOY кругови. У исто време обе директрисе, које се налазе у координатним равнима ZOX односно YOZ, постају подударне елипсе. У том случају једначина одговарајуће површине елипсоида добија облик

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Посматрана површина може се одредити још и на други начин као о б р т н а п о в р ш и н а, која се добија обртањем једне од ових подударних елипса око осе кота. Тада се ова површина зове елипсоид обртања око осе кота.

142. Равни симетрије елипсоида. — Ако се једначина елипсоида (9) реши по z, добија се

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \tag{14}$$

Овај образац показује, да је површина елипсоида (9) симетрично распоређена односно главне равни XOY. Заиста једначина (14) одређује за све вредности координата x и y, т.ј. за сваку тачку главне равни XOY, по две тачке елипсоида које су подједнако удаљене на разним странама од посматране главне равни; дакле, ове тачке су симетричне у односу на ту раван. Но како вредност z мора бити реална, онда израз под кореном (14) не може бити већи од јединице. Тај израз претставља, дакле, или прави разломак, или достиже своју највећу границу јединицу. Одатле следују два закључка.

Прво, увек

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,$$

то се све тачке елипсоида налазе у правом цилиндру са осом OZ, чија је директриса главни пресек у равни XOY.

Друго, увек

$$|z| \leq c.$$

Према томе елипсоид нема тачака чије би растојање од главне равни XOY било веће од c. То важи за обе стране те равни. Пошто је једначина елипсоида (9) симетрична по свакој од координата, то два закључка слична наведеним горњим закључцима важе за сваку од главних равни. Према томе, главне равни претстављају равни симетрије посматране површине. У исто време главне осе су осе симетрије, а његово средиште је центар симетрија елипсоида.

Осим тога све тачке површине елипсоида (9) су распоређене у сваком правом цилиндру, чије осе чине њене главне осе, а директрисе су главни пресеци елипсоида.

Најзад, исто тако се може закључити, да се тачке елипсоида (9) не могу налазити на растојању већем од a и b од осталих главних равни YOZ односно ZOX.

Према томе, површина елипсоида (9) се налази у правоуглом паралелопипеду чије су ивице $2a$, $2b$ и $2c$.

Најзад што се тиче елипсоида обртања око осе кота, за њега свака раван, која пролази кроз ову осу одређује исту елипсу-покретну генератрису обртања. Сваки њен положај служиће као раван симетрије површине обртног елипсоида; а сваки пречник главног пресека, у равни XOY, јесте оса симетрије посматране површине.

III. Једнокрилни хиперболоид

143. Дефиниција. — Испитајмо сад другу површину, која се такође добија кретањем промењиве елипсе паралелно датој равни. Полуосе ове елипсе се мењају као растојања тачака осе кота од датих непокретних

директриса у облику хипербола. Узмимо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору (сл. 64).

Претпоставимо да се покретна елипса $A'B_1'A_1'B'$ мора увек налазити у равни S, која се креће паралелно координатној равни XOY, при чему средиште O_1 посматране елипсе клизи дуж осе кота, а њене полуосе α и β су паралелне оси OX односно оси OY.

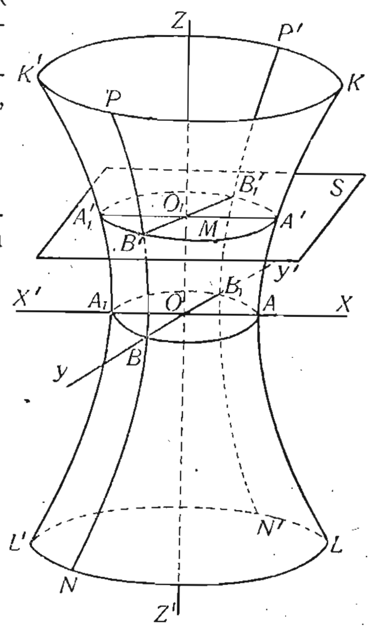
Уведимо сад, као директрисе: у координатној равни ZOX, хиперболу AKL, $A_1K'L'$ са реалном полуосом

$$OA = A_1O = a$$

и имагинарном полуосом c, а у координатној равни YOZ, хиперболу BNP, $B_1N'P'$ са реалном полуосом

$$OB = B_1O = b$$

и имагинарном полуосом c.



Сл. 64

Ако са x, y, z означимо текуће координате ма које тачке M покретне промењиве елипсе, у равни S, онда једначине

$$z = z_0, \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{15}$$

претстављају аналитички ту елипсу, при чему α и β означавају њене полуосе, а z_0 је растојање равни S од координатног почетка O. Ови промењиви параметри, z_0, α и β, морају задовољавати услове

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \tag{16}$$

Тражено геометриско место тачака $M(x, y, z)$ добија се елиминацијом вредности параметара z_0, α и β из система четири једначине (15) и (16). Из прве једначине (15) и две једначине (16) добијају се вредности

$$z_0 = z, \qquad \alpha^2 = a^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right), \qquad \beta^2 = b^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Сменом добијених вредности α^2 и β^2 у другој једначини (15) тражени резултат елиминације је

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{17}$$

Површина коју одређује добијена једначина (17) назива се једнокрилни хиперболоид и изгледа као неки деформисани елиптички цилиндар, који је стегнут по средини а подједнако се проширује бескрајно на обе стране.

144. Пресеци једнокрилног хиперболоида. — Прави геометриски облик посматране површине (17) добија се проучавањем њених пресека.

Разумљиво је да пресеци хиперболоида (17) који су паралелни координатној равни XOY, претстављају елипсе; то следује из начина образовања ове површине.

У грлу површине, т.ј. у пресеку са равни XOY, налази се елипса AB_1A_1B са средиштем у координатном почетку и полуосама a и b.

Све ове паралелне елипсе су сличне међу собом, јер су хомотетичне са елипсом у грлу.

Пресеци хиперболоида (17) са координатним равнима ZOX и YOZ претстављају директрисе AKL и $A_1K'L'$, односно BNP и $B_1N'P'$. Заиста кад у једначину (17) ставимо $y = 0$, добијамо једначину прве директрисе хиперболоида,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{18}$$

са реалном полуосом a и имагинарном c. Међутим, ако у исту једначину (17) уврстимо $x = 0$, добија се једначина друге директрисе, која претставља хиперболу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{19}$$

са реалном полуосом b и имагинарном c.

Пресеци хиперболоида (17) са равнима паралелним координатним равнима ZOX и YOZ су такође хиперболе, које се одређују на овај начин. Пресек хиперболоида (17) са неком равни

$$y = y_0 \tag{20}$$

паралелном равни XOZ, на растојању y_0 од ње, одређен је скупом две једначине, (20) и ове једначине

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \dfrac{y^2_0}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{y^2_0}{b^2}\right)} = 1 \tag{21}$$

Добијена једначина (21) претставља тражени пресек у облику хиперболе.

За

$$|\, y_0 \,| < b, \tag{22}$$

средишта тих хипербола (21) налазе се на оси OY, а реалне осе су им паралелне оси OX, док су имагинарне осе паралелне оси OZ.

Под претпоставком (22), хиперболе (21) су сличне међу собом, јер су хомотетичне са хиперболом (18).

Али, кад је испуњен услов

$$|\, y_0 \,| > b, \tag{23}$$

одговарајуће једначине (21) одређују нови низ сличних хипербола, које су хомотетичне са хиперболом конјугованом хиперболи (18). Средишта тих хипербола су такође распоређена на оси OY, али су им сада реалне осе паралелне оси OZ, а имагинарне осе су паралелне оси OX.

Најзад, пресеци хиперболоида (17) са равнима паралелним координатној равни YOZ одређују се озако.

Узмимо разан

$$x = x_0 \tag{24}$$

која је паралелна равни YOZ на растојању x_0. Њен пресек са површином (17) одређује се скупом који сачињавају једначина (24) и једначина

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}\right)} = 1. \tag{25}$$

Ова једначина (25) одређује хиперболу у равни (24).

Све док је

$$|\, x_0 \,| < a, \tag{26}$$

одговарајуће хиперболе (25) имају своја средишта на оси OX, њихове реалне осе су паралелне оси OY, а имагинарне оси OZ. Хиперболе (25) су сличне међу собом, под претпоставком (26), јер су хомотетичне са хиперболом (19).

Међутим кад је

$$|\, x_0 \,| > a, \tag{27}$$

одговарајуће хиперболе (25), чија су средишта на оси OX, имају такав положај да су им реалне осе паралелне оси OZ, а имагинарне оси OY. Под претпоставком (27), све су хиперболе сличне међу собом, јер су хомотетичне са хиперболом, која је конјугована хиперболи (19).

Елиптички пресек хиперболоида у грлу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и хиперболички пресеци (18) и (19) зову се г л а в н и п р е с е ц и, а њихове осе г л а в н е о с е хиперболоида (17); равни главних пресека су г л а в н е р а в н и хиперболоида и оне стоје управно на осама. Темена главних пресека хиперболоида, којих има четири A, B, A_1 и B_1 зову се т е м е н а хиперболоида (17).

Најзад тачка O је с р е д и ш т е или ц е н т а р посматраног хиперболоида. Полуосе посматраних пресека, паралелне главним пресецима, мењају се по одређеном закону. Заиста, полуосе елиптичких пресека, повећавају се са удаљавањем од грла површине (17).

Полуосе елипсе, у грлу, имају најмању дужину од свих осталих паралелних пресека. Напротив, полуосе два друга главна пресека веће су од полуоса њима паралелних пресека, све док су у важности услови (22) и (26). Кад, међутим, наступе случајеви (23) и (27) полуосе пресека (21) и (25), веће су од полуоса хипербола, које су конјуговане са главним пресецима (18) односно (19).

Напомињимо сада случај, кад су једнаке обе полуосе α и β, исто као и полуосе a и b елипсе у грлу. Тада су пресеци једнокрилног хиперболоида паралелни координатној равни XOY кругови.

Под наведеном претпоставком подударају се обе директрисе у координатним равнима XOZ и YOZ. Према томе једначина посматране површине постаје

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

а може се одредити као једначина обртне површине, која се добива обртањем једне од ових двеју подударних директриса око осе кота.

Таква површина се зове *једнокрилни хиперболоид обртања* око осе кота.

145. **Равни симетрије једнокрилног хиперболоида.** — Решење једначине (17) по z даје

$$z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1} \qquad (28)$$

Добијени образац показује, да је површина хиперболоида (17) симетрична према главној равни XOY. Заиста, једначина (28) одређује за све различите вредности координата x и y, две тачке, које су подједнако удаљене на једној и другој страни од главне равни XOY.

Вредност z мора бити реална. Стога израз под кореном, у обрасцу (28), мора бити позитиван или једнак нули.

Одавде се добија закључак, да је

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \geqslant 1.$$

То значи да се све тачке хиперболоида (17) морају налазити изван правог цилиндра, чија је директриса елипса у грлу, а оса му је главна оса OZ. Пошто је једначина (17) другог степена односно сваке од координата, то су и две друге координатне равни XOZ и YOZ, равни симетрије посматраног хиперболоида (17).

Решавајући његову једначину по x добијамо

$$x = \pm a\sqrt{\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}+1}.$$

Пошто израз, под кореном, мора бити позитиван или једнак нули, то значи да се све тачке хиперболоида (17) морају налазити на површини правог хиперболичког цилиндра са директрисом (19) и управном му осом или у њој унутра.

На сличан начин, решавајући једначину (17) по y, долазимо до закључка, да се све тачке хиперболоида (17) морају такође налазити на површини другог правог хиперболичког цилиндра са директрисом (18) и управном на њу осом или у њој.

Према томе, површина хиперболоида (17) налази се у простору ограниченом трима поменутим цилиндричним површинама.

IV. Двокрилни хиперболоид

146. **Дефиниција.** — Нова површина се добија кретањем пређашње променљиве елипсе паралелно датој равни по директрисама које су такође хиперболе, само другчије распоређене но у случају једнокрилног хиперболоида.

Узмимо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору (сл. 65).

Покретна елипса $A'B'A_1'B_1'$ се мора увек налазити у равни S, која се креће паралелно координатној равни XOY. У исто време средиште O_1 генераторне елипсе клизи дуж осе кота, док су полуосе

$$O_1A' = A_1'O_1 \equiv \alpha, \qquad O_1B' = B_1'O_1 \equiv \beta.$$

паралелне оси OX, односно OY.

Уведимо сада у координатним равнима ZOX и YOZ директрисе у облику хиперболе AKL, $A_1K'L'$, са реалном полуосом

$$OA = A_1O = c$$

и имагинарном полуосом a, односно хиперболе ANP, $A_1N'P'$ са истом реалном полуосом

$$OA = A_1O = c$$

и имагинарном полуосом b.

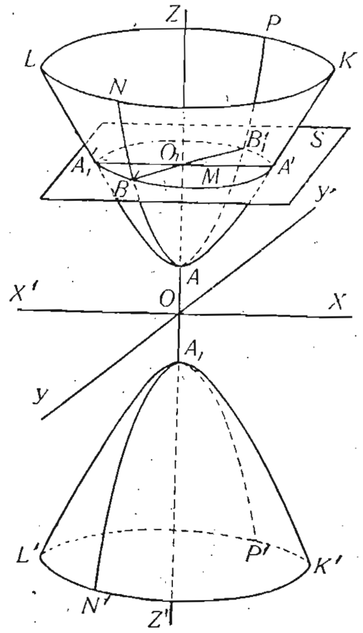
Ако са x, y, z означимо текуће координате ма које тачке покретне променљиве елипсе у равни S, рецимо тачке M, добијамо једначину те елипсе у облику

$$z = z_0, \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \qquad (29)$$

где је z_0 растојање равни S од O.

Према уведеним ознакама променљиви параметри z_0, α и β морају задовољавати услове

$$\frac{z_0^2}{c^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}=1, \quad \frac{z_0^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=1. \qquad (30)$$



Сл. 65

Прва једначина (29) и једначине (30) дају

$$z_0=z,\quad \alpha^2=a^2\left(\frac{z^2}{c^2}-1\right),\quad \beta^2=b^2\left(\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

Резултат елиминације добијених вредности z_0, α и β из друге једначине (29) претставља једначину траженог геометриског места у облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (31)$$

Добијена површина назива се *двокрилни хиперболоид*, јер се састоји из два крила. Геометриски ова површина има облик две шоље чија се дна налазе једно према другом.

147. **Пресеци двокрилног хиперболоида.** — Због начина образовања хиперболоида (31) очевидно је да његови пресеци, паралелни координатној равни XOY претстављају елипсе. Њихове се једначине изражавају овако

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)}=1 \qquad (32)$$

где је z_0 растојање посматране елипсе од координатног почетка O. Добијене елипсе (32) су реалне све док је

$$|z_0| > c. \tag{33}$$

То значи да посматрана површина нема тачака између две разни које су паралелне координатној равни XOY и које пролазе кроз тачке A и A_1.

У делу простора у коме је испуњен услов (33), сви пресеци (32) претстављају, за различите вредности z_0, међусобно хомотетичне елипсе, јер су њихове полуосе паралелне и сразмерне. Осим тога уколико је елипса (32) више удаљена од координатног почетка, утолико су веће њене полуосе. Пресеци хиперболоида (31) са координатним равнима XOZ и YOZ претстављају директрисе AKL и $A_1K'L'$ односно ANP и $A_1N'P'$. Њихове се једначине добијају ако се у једначину (31) ставе вредности $y = 0$, односно $x = 0$, наиме:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{34}$$

односно

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{35}$$

Међутим пресек хиперболоида (31) са сваком равни облика

$$y = y_0 \tag{36}$$

која је паралелна координатној равни ZOX одређен је скупом који образује једначина (36) и једначина

$$\frac{z^2}{c^2\left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)} - \frac{x^2}{a^2\left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)} = 1, \tag{37}$$

која претставља хиперболу у равни (36), хомотетичну са хиперболом (34). Уколико се пресек (37) удаљава од координатног почетка (т.ј. уколико је y_0 веће), утолико се повећавају полуосе посматраних хиперболичких пресека (37).

Слично се понашају и пресеци површине хиперболоида (35) паралелни координатној равни YOZ. Заиста, једначине

$$x = x_0, \qquad \frac{z^2}{c^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+1\right)} = 1 \tag{38}$$

одређују, за различите вредности x_0, хиперболе хомотетичне са хиперболом (35). Уколико је пресек (38) удаљенији од координатног почетка (када се x_0 повећава), утолико се више повећавају дужине полуоса посматране хиперболе (38).

Пресеци (34) и (35) хиперболоида (31) називају се г л а в н и м п р е с е ц и м а, а њихове осе о с а м а хиперболоида (31), а равни главних пресека су г л а в н е р а в н и. Главне равни су управне на осама.

Најзад темена пресека, којих има свега два, A и A_1, зову се т е м е н а хиперболоида (31).

Тачка O у којој се поклапају средишта оба главна пресека (34) и (35), назива се с р е д и ш т е м или ц е н т р о м двокрилног хиперболоида (31).

148. Равни симетрије двокрилног хиперболоида. — Ако се једначина (31) реши по z, добија се

$$z = \pm c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \tag{39}$$

Према томе, површина хиперболоида (31) је симетрична односно главне равни XOY. Сем тога се види из обрасца (39) да су коте посматраног хиперболоида реалне за све позитивне и негативне вредности координата x и y.

Пошто је једначина (31) другог степена по свакој од координата то и две друге главне равни ZOX и YOZ претстављају равни симетрије двокрилног хиперболоида (31).

Кад се једначина (31) реши по x, добија се

$$x = \pm a\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1}.$$

Да не би образац под кореном био негативан мора постојати услов

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1.$$

То значи, да се све тачке посматраног хиперболоида (31) морају налазити или на површини хиперболичког цилиндра (чија је директриса главни пресек (35), а оса му је управна) или унутра те површине.

На сличан начин се види да се све тачке хиперболоида (31) налазе или на површини другог једног хиперболичког цилиндра (са директрисом (34) и управном на њу осом), или унутра ње. Према томе површина посматраног хиперболоида (31) мора се налазити у простору ограниченом са два поменута цилиндра.

V. Параболоиди

149. Елиптички параболоид. — Четврта површина се одређује кретањем пређашње променљиве елипсе, под условом да се за директрисе узму две параболе.

Узмимо у ту сврху правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору (сл. 66).

Покретна елипса $A'B'A_1'B_1'$ мора се увек налазити у равни S која се креће паралелно координатној равни XOY.

У исто време средиште O_1, покретне елипсе мора клизити дуж осе кота, а полуосе

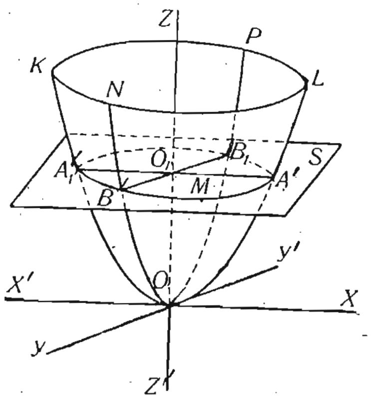
$$O_1A' = A_1'O_1 \equiv \alpha; \quad O_1B' = B_1'O_1 \equiv \beta$$

морају остати паралелне оси OX, односно OY.

Означимо са x, y, z, координате ма које тачке покретне елипсе, $A'B'A_1'B_1'$ а са z_0 растојање равни S од координатног почетка O. Тада једначина посматране елипсе гласи

$$z=z_0, \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1. \tag{40}$$

Уведимо сада у координатној равни XOZ директрису у облику параболе OKL са параметром p, а у координатној равни YOZ параболу ONP са параметром q.



Сл. 66

Према томе параметри z_0, α и β морају задовољавати услове

$$\alpha^2=2pz_0, \quad \beta^2=2qz_0 \tag{41}$$

Резултат елиминације променљивих параметара z_0, α и β из четири једначине (40) и (41) претставља једначину тражене површине

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \tag{42}$$

која се зове е л и п т и ч к и п а р а б о л о и д.

Геометриски ова површина има облик једне шоље са дном у тачки O.

150. Пресеци елиптичког параболоида. — Очевидно је да пресеци параболоида (42) са равнима паралелним координатној равни XOY, претстављају, према начину образовања те површине, хомотетичне елипсе.

Њихове полуосе се повећавају са удаљењем пресека од тачке O.

Пресеци елиптичког параболоида са координатним равнима ZOX и YOZ претстављају директорне параболе OLK и ONP. Њихове се једначине изражавају овако

$$x^2=2pz, \tag{43}$$

$$y^2=2qz. \tag{44}$$

Међутим, пресеци параболоида (42) са равнима, које су паралелне координатним равнима ZOX односно YOZ одређени су скупом једначина

$$y=y_0, \quad x^2=2p\left(z-\frac{y_0^2}{2q}\right),$$

односно

$$x=x_0, \quad y^2=2q\left(z-\frac{x_0^2}{2p}\right).$$

Добијени паралелни пресеци претстављају два низа парабола које су подударне са одговарајућим параболама (43) и (44) јер имају идентичне параметре, само им се темена налазе у различитим тачкама директриса (43) односно (41).

Пресеци (43) и (44) посматраног параболоида (42) зову се г л а в н и п р е с е ц и, а њихове равни г л а в н е р а в н и. Заједничка оса главних пресека назива се *оса* параболоида (42), а заједничко теме O т е м е н о м посматраног параболоида.

Наведене особине паралелних пресека, у облику две породице подударних парабола, дају два нова начина формирања површине елиптичког параболоида транслацијом сваког од главних пресека. Одговарајуће површине називају се т р а н с л а т о р н е.

151. Равни симетрије елиптичког параболоида. — Једначина (42) је линеарна по z, па z има по једну вредност за дате вредности координата x и y. Због тога је z једнозначна функција од x—a и y—a.

Међутим једначина (42) је квадратна по x и y.

Због тога имамо

$$y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\sqrt{2pz-x^2},$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\sqrt{2qz-y^2}. \tag{45}$$

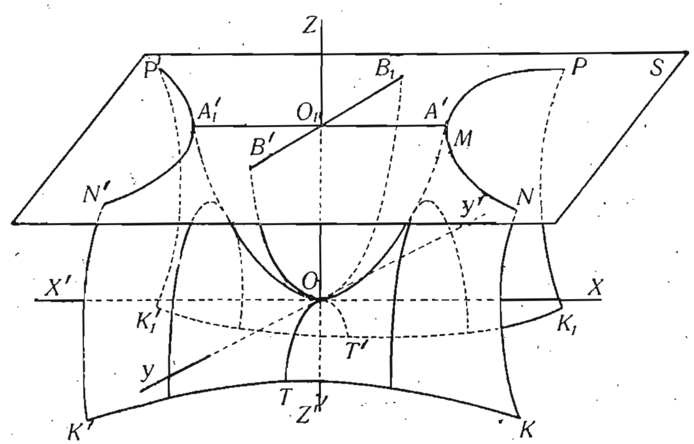
Одавде следује први закључак: главне равни параболоида (42) истовремено су и р а в н и с и м е т р и ј е, а њихов пресек даје о с у с и м е т р и ј е параболоида (42).

Други закључак из једначина (45) је: вредности координата посматраног параболоида задовољавају услове

$$x^2-2pz \leqq 0, \quad y^2-2qz \leqq 0.$$

Добијени обрасци показују, да се све тачке површине параболоида (42) морају налазити у простору ограниченом површинама правих цилиндара, чије су директрисе главни пресеци (43) односно (44), а осе су им управне.

152. Хиперболички параболоид. — Нова површина се одређује кретањем променљиве хиперболе, чија темена а исто и темена њој конјугозане хиперболе клизе дуж две параболичне директрисе које стоје у узајамно



Сл. 67

управним равнима управним на генератрису. При томе ова остаје увек паралелна једној датој равни, а полуосе јој се мењају као растојање тачака на оси кота од одговарајућих тачака непокретних параболичних директриса. За образовање једначине тражене површине узмимо правоугли праволиниски координатни систем OXYZ у простору (сл. 67), и нека координатна раван XOY буде поменута дата раван. У равни S, паралелној равни XOY нека се налази хипербола са теменима A′ и A_1'. Са B′ и B_1' означимо темена њој конјуговане хиперболе, при чему је O_1, средиште тих хипербола, које леже на оси кота OZ на растојању од координатног почетка

$$OO_1 = z_0 .$$

Означимо даље са α и β реалну и имагинарну полуосу посматране хиперболе са теменима A′ и A_1'. Претпоставимо да се ове полуосе α и β мењају, кад се раван S креће, тако да темена A′ и A_1' клизе дуж директрисе која је претстављена параболом $A'OA_1'$ са параметром p и теменом O у координатној равни XOZ. У исто време темена B′ и B_1' покретне хиперболе морају клизити дуж друге параболе $B'OB_1'$, са параметром q, и теменом O а која се налази у координатној равни YOZ.

Према томе, ако означимо са x, y, z текуће координате ма које тачке M посматране покретне хиперболе у равни S, ове координате задовољавају једначине

$$z = z_0 , \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 . \tag{46}$$

Међутим, промењљиви параметри z_0, α и β морају, према уведеним условима, задовољавати једнакости

$$\alpha^2 = 2pz_0, \qquad \beta^2 = 2qz_0. \tag{47}$$

Тражено геометриско место тачака M одређено је једначином, која се добија елиминисањем три параметра α, β и z_0 из четири једначине (46) и (47), у облику

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{48}$$

Површина одређена добијеном једначином (48) зове се х и п е р б о л и ч к и п а р а б о л о и д.

153. Пресеци хиперболичког параболоида. — Појмљиво је да сви пресеци параболоида (48) са равнима паралелним координатној равни YOZ претстављају параболе подударне међу собом.

Њихове једначине, према горе наведеним обрасцима, гласе

$$x = x_0,$$
$$y^2 = -2q\left(z - \frac{x_0^2}{2p}\right).$$

У пресеку са координатном равни YOZ т.ј. за $x_0 = 0$, ова једначина добија облик

$$y^2 = -2qz \tag{49}$$

и претставља параболу TOT′. Ова је парабола подударна са параболом $B'OB_1'$, само је њена оса окренута у супротном смеру.

Пресеци параболоида (48) са равнима паралелним координатним равнима ZOX и XOY изражавају се једначинама

$$y = y_0 , \quad x^2 = 2p\left(z + \frac{y_0}{2q}\right) , \tag{50}$$

односно

$$z = z_0 , \quad \frac{x^2}{2p z_0} - \frac{y^2}{2q z_0} = 1 . \tag{51}$$

Пресеци (50) претстављају други низ подударних парабола, које су паралелне са директорном параболом $A_1'OA'$ чија се једначина добија из једначина (50) за вредност $y_0=0$, у облику

$$x^2 = 2pz. \tag{52}$$

Међутим, пресеци (51) претстављају, према знаку параметра z_0, две различите врсте хипербола.

Заиста за позитивне вредности z_0 (изнад координатне равни XOY) пресеци претстављају низ хомотетичних хипербола са хиперболом NA′P; $N'A_1'P'$ чије су реалне осе паралелне оси OX ,а имагинарне паралелне OY. Њихове полуосе расту са повећавањем растојања пресека од координатног почетка.

Пресеци испод координатне равни XOY, т.ј. добијени за негативне вредности z_0, претстављају други низ хомотетичних хипербола KTK′ и $K_1T'K_1'$.

Њихове су реалне осе супротно пређашњем, паралелне координатној оси OY, а имагинарне оси OX. Дужине полуоса повећавају се са растојањем пресека од координатног почетка O.

Нарочито треба подвући пресек површине (48) са равни XOY. Заиста стављајући у једначину (48)

$$z = 0,$$

добијамо једначину

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 ,$$

чија се лева страна може раставити у два линеарна множиоца

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0 .$$

Према томе посматрани пресек претставља скуп две праве, које сачињавају гранични облик наведених хиперболичких пресека.

Пресеци параболоида (48), који су одређени једначинама (49) и (52) т.ј. TOT′ односно $A'OA_1'$, зову се г л а в н и п р е с е ц и, а њихове равни г л а в н е р а в н и параболоида (48). Заједничка оса ZZ′ главних пресека назива се оса, а њихово заједничко теме O т е м е н о м посматраног параболоида.

Према томе и хиперболички параболоид претставља т р а н с л а т о р н у површину, која се одређује на два различита начина транслацијом сваког од главних пресека.

154. Равни симетрије хиперболичког параболоида. — Једначина (48) је једнозначна по z, јер z има по једну вредност за дате вредности координата x и y, т.ј. z претставља једнозначну функцију. Међутим, решавајући једначину (48) по x или по y, која је другог степена по овим промењљивим, добијамо

$$x=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}\cdot\sqrt{y^2+2qz}\,,$$

односно

$$y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\sqrt{x^2-2pz}\,.$$

Одавде излази закључак: Главне равни параболоида (48) у исто време су равни симетрије, а њихов пресек је оса симетрије хиперболичког параболоида.

Осим тога горе написане једначине показују да тачке посматраног параболоида задовољавају услове

$$y^2+2qz\geq 0,\quad x^2-2pz\geq 0.$$

То значи, да се све тачке површине (48) морају налазити изван простора који је ограничен површинама двају правих параболичких цилиндара чије су директрисе главни пресеци (49) односно (52), а осе су им управне.

Наведена разматрања дозвољавају да се геометриски облик хиперболичког параболоида претстави као нека врста седла, које се бескрајно протеже.

ГЛАВА СЕДМА

ПРЕСЕЦИ ПОВРШИНА ДРУГОГ РЕДА

I. Пресеци са правом и равни

155. Општи облик једначине. — Све напред проучене површине претстављају се помоћу једначина, које су другог степена по текућим координатама. Најопштија једначина другог степена, са три променљиве у односу на систем правоуглих праволиниских координата у простору, изражава се у облику

$$\left.\begin{aligned}2f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+\\+2C'y+2C''z+F=0\end{aligned}\right\}\qquad(1),$$

где $2f$ означава кратко леву страну једначине (1). Написана једначина има десет сталних коефицијената A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, F. Пошто је по њима једначина (1) хомогена то је довољно у суштини само девет односа између њих за одређивање једначине (1).

156. Пресек са правом линијом. — Узмимо једначине праве линије у параметарском облику

$$x=x_0+l\rho,\quad y=y_0+m\rho,\quad z=z_0+n\rho,\qquad(2)$$

где ρ означава променљиви параметар. За одређивање вредности параметра које одговарају траженим тачкама пресека праве (2) с датом површином (1) uврстимо изразе (2) у једначину (1). Резултат ове смене се изражава једначином

$$P\rho^2+2Q\rho+R=0,\qquad(3)$$

где су уведене ознаке

$$P\equiv Al^2+A'm^2+A''n^2+2Bmn+2B'nl+2B''lm,$$
$$Q\equiv f'_{x_0}l+f'_{y_0}m+f'_{z_0}n,$$
$$R\equiv 2f_0,$$

при чему f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0} означавају вредности парцијалних извода функције f по x, y односно z, под условом да су текуће координате x, y, z смењене својим посебним вредностима x_0, y_0 односно z_0, тако да имамо

$$2f_0\equiv 2f(x_0,y_0,z_0).$$

Ако вредности параметра ρ, које се одређују једначином (3) uврстимо у обрасце (2) добијамо вредности координата одговарајућих тачака пресека праве (2) с површином (1).

Пошто је једначина (3) другог степена онда постоје д в е т р а ж е н е т а ч к е п р е с е к а које могу бити или реалне, или имагинарне или се поклапају у једној тачки. У овом последњем случају права (2) додирује површину (1) и претставља њену т а н г е н т у у тачки додира.

Да бисмо је дефинисали претпоставимо да се тачка (x, y_0, z_0) налази на површини (1). Тада имамо

$$f_0 = 0 \quad \text{т.ј.} \quad R = 0;$$

и један од корена једначине (3) постаје једнак нули, баш онај који одговара тачки (x_0, y_0, z_0). Претпоставимо ли да праза (2) додирује у овој тачки површину (1), онда и други корен једначине (3) мора да се анулира. Међутим, ово се може догодити само под условом

$$Q = 0 ,$$

или

$$f'_{x_0}\, l + f'_{y_0}\, m + f'_{z_0}\, n = 0 \tag{4}$$

Према томе углозни коефицијенти праве (2) морају задовољазати услов (4) да би ова права додиривала површину у тачки (x_0, y_0, z_0). Према облику овог услова (4) види се да постоји неограничен број различитих вредности m, n и p које овај задовољавају, те кроз дату тачку (x_0, y_0, z_0) површине пролази безброј тангентних правих линија. Сменимо ли l, m, n са њима сразмерним разликама $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ из једначина (2), добијени услов постаје

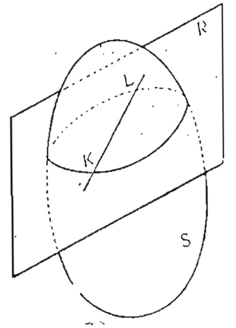
$$f'_{x_0}(x - x_0) + f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{z_0}(z - z_0) = 0, \tag{5}$$

па одређује једначину разни која претставља геометриско место посматраних тангената и зове се т а н г е н т н а р а в а н површине (1) у тачки (x_0, y_0, z_0).

Најзад тачка пресека праве (2) са површином (1) може да се удаљи у бесконачност, када параметар ρ постаје бесконачан. За то коефицијент P у једначини (3) мора да се анулира тако да буде

$$A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2B mn + 2B' ln + 2B'' lm = 0 . \tag{6}$$

Под овим претпоставкама права (2) сече површину (1) у бесконачности па одређује тзв. а с и м п т о т с к и п р а в а ц.



Сл. 68

157. Пресек са равни. — Пошто смо у претходном параграфу доказали да праза линија сече површину другог реда у двема тачкама, то је сад лако доказати да пресек површине другог реда са разни претставља конични пресек. Заиста, претпоставимо (сл. 68) да раван R сече површину другог реда S.

Повуцимо кроз њихову кризу пресека која се налази у равни R, праву линију KL. Како она не може имати више од две заједничке тачке са површином S, то права KL мора сећи пресек површине S, са равни R само у двема тачкама. Овај закључак, који је скоро очезидан, претставља у исто време непосредну последицу аналитичког испитивања пресека површине и равни (в, n⁰ 48, стр. 57).

До сада су били проучазани искључиво пресеци површина другог реда са равнима паралелним координатним равнима.

Али сад се види, да пресек сваке површине другог реда са неком равни претставља увек конични пресек.

Показаћемо како се аналитички одређује његова једначина.

158. Пример. — Треба наћи пресек правог кружног цилиндра са датом равни. Узмимо осу цилиндра за осу кота, а раван управну на њој за координатну раван XOY. Ако дата пресечна раван није паралелна оси цилиндра, онда се увек може претпоставити, да та раван пролази кроз координатни почетак а сем тога и кроз осу OX. Према томе, узмимо једначину датог цилиндра у облику

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{7}$$

а у обрасцима (15) из главе II (стр. 58), ставимо

$$\psi = 0 .$$

Тада ови обрасци постају

$$x = x', \quad y = y' \cos\theta, \quad z = y' \sin\theta. \tag{8}$$

Смењујући вредности (8) старих координата x, y и z у једначину датог цилиндра (7) налазимо једначину траженог пресека

$$\frac{x'^2}{R^2} + \frac{y'^2}{\dfrac{R^2}{\cos^2\theta}} = 1 .$$

Према томе тражени пресек претставља елипсу са полуосама R и $R' \equiv \dfrac{R}{\cos\theta}$.

II. Кружни пресеци

159. Једначина пресека средишних површина. — Средишне површине, елипсоид и оба хиперболоида могу су претставити помоћу опште једначине облика

$$Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + N = 0. \tag{1}$$

Заиста у случају елипсоида коефицијенти K, L и M имају позитивне вредности а $N=-1$, за једнокрилни хиперболоид K и L су позитивне, M негативна вредност, а $N=-1$. Најзад за двокрилни хиперболоид K и L имају позитивне вредности, M негативну, а $N=1$.

Уврстимо сада обрасце (17) из n^0 48 (глава II, стр. 58) у једначину (1). Резултат извршене смене претстављен је једначином

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0 , \tag{2}$$

где су уведене ознаке

$$\begin{aligned}
A &\equiv K\cos^2\psi + L\sin^2\psi,\\
B &\equiv (L - K)\cos\theta\sin\psi\cos\psi,\\
C &\equiv (K\sin^2\psi + L\cos^2\psi)\cos^2\theta + M\sin^2\theta,\\
D &\equiv x_0 K\cos\psi + y_0 L\sin\psi,\\
E &\equiv (y_0 L\cos\psi - x_0 K\sin\psi)\cos\theta + z_0 M\sin\theta,\\
F &\equiv x_0^2 K + y_0^2 L + z_0^2 M + N.
\end{aligned} \tag{3}$$

160. Кружни пресеци средишних површина. — Услови, који морају бити испуњени да би крива линија (2) била круг изражавају се једнакостима

$$A = C, \qquad B = 0.$$

Зато и према обрасцима (3), мора бити

$$K\cos^2\psi + L\sin^2\psi = (K\sin^2\psi + L\cos^2\psi)\cos^2\theta + M\sin^2\theta \tag{4}$$

$$(L - K)\cos\theta\sin\psi\cos\psi = 0 \tag{5}$$

Сматрајући да је $L \gtrless K$, проучимо три случаја која се добијају, ако се сваки од три чиниоца са леве стране једначине (5) изједначи са нулом. Узмимо да је

$$\cos\theta = 0 \tag{6}$$

Тада је

$$\sin\theta = 1,$$

па се из услова (4) за одређивање одговарајуће вредности угла ψ добија овај образац

$$\sin^2\psi = \frac{M-K}{L-K}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \pm\sqrt{\frac{M-K}{L-M}} \tag{7}$$

Други случај наступа кад је

$$\sin\psi = 0. \tag{8}$$

Тада је

$$\cos\psi = 1,$$

па једначина (4) даје образац за одређивање одговарајуће вредности угла

$$\sin^2\theta = -\frac{K-L}{M-L}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{K-L}{M-K}}. \tag{9}$$

Најзад трећи случај се јавља кад је

$$\cos\psi = 0 \tag{10}$$

У том случају имамо

$$\sin\psi = 1,$$

и добијамо образац за одређивање одговарајуће вредности угла θ

$$\sin^2\theta = \frac{L-K}{M-K}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{\frac{L-K}{M-L}}. \tag{11}$$

Добијени обрасци (7) и (9) и (11) одређују положај кружних пресека средишне површине (1). Из облика ових израза види се одмах, да бар једна од три добијене вредности мора бити реална. Заиста, производ три израза, који се налазе под знаком корена (7), (9) и (11) претставља увек позитивну величину, јер имамо

$$\frac{M-K}{L-M}\cdot\frac{K-L}{M-K}\cdot\frac{L-K}{M-L} = \left(\frac{K-L}{L-M}\right)^2.$$

Због тога је или само један или су сва три чиниоца леве стране написане једнакости позитивни.

Одговарајућа вредност тангенса угла (7), (9) или (11) претстављаће тада стварну величину.

Зато површина (1) мора имати бар један пар реалних кружних пресека јер сваки од посматраних образаца има две вредности: једну позитивну, а другу негативну.

Шта више, пошто обрасци (17) на стр. 58 садрже три величине x_0, y_0 и z_0, које су потпуно произвољне свака од тих површина има бар по два неограничена низа реалних паралелних кружних пресека, чије равни пролазе кроз различите тачке (x_0, y_0, z_0).

Проучимо сада геометриско место средишта кружних паралелних пресека. Пошто је у претходним расуђивањима координатни почетак (x_0, y_0, z_0) био потпуно произвољно изабран, то сад можемо претпоставити да се он налази у средишту посматраног кружног пресека (2). Према томе, оба коефицијента D и E у обрасцима (3) морају се анулирати, па се зато добијају две једначине:

$$\left.\begin{aligned} & x_0 K\cos\psi + y_0 L\sin\psi = 0 \\ & (y_0 L\cos\psi - x_0 K\sin\psi)\cos\theta + z_0 M\sin\theta = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Добијене једначине су линеарне, хомогене и одређују праву линију, која пролази кроз координатни почетак и назива се пречник или дијаметар површине. Решавајући једначине (12) са једначином дате површине (1) добијамо координате крајњих тачака темена пречника (12).

Пошто има два низа кружних пресека, средишне површине имају четири крајње тачке наведених пречника. Те тачке имају специјални назив *тачака заокругљивања површине*.

Сад ћемо посебно проучити сваку од три поменуте средишне површине. У случају елипсоида имамо

$$K = \frac{1}{a^2}, \qquad L = \frac{1}{b^2}, \qquad M = \frac{1}{c^2}, \qquad N = -1,$$

па ако претпоставимо да је

$$a > b > c, \tag{13}$$

Одмах се види да у случајевима (6) и (8), обрасци (7) и (9) одређују имагинарне вредности за углове ψ и θ. Међутим у случају (10), т.ј. за вредност угла

$$\psi = 90^\circ \tag{14}$$

образац (11) даје две реалне вредности за угао θ, наиме:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}.$$

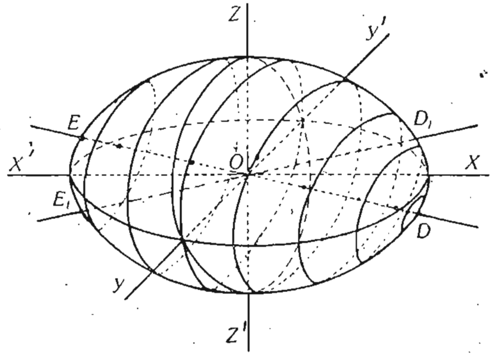
Према томе једначине (12) постају

$$\left.y_0 = 0, \qquad z_0 = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,x_0 \right\} \tag{15}$$

и одређују, заједно са једначином елипсоида координате тачака заокругљивања елипсоида, чије ћемо координате означити овако

$$
\begin{aligned}
x_0' &= \pm\, a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\,, \\
y_0' &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (16)\\
z_0 &= \pm\, c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,,
\end{aligned}
$$

при чему сваком знаку вредности x_0' одговарају по два знака z_0.



Сл- 69

Услов (14) показује да су *кружни пресеци елипсоида паралелни средњој по величини оси* OY (сл. 69) *а њихова средишта леже на једном од два дијаметра* (15) DE *односно* D_1E_1 *који се налазе у координатној равни* XOZ. Очевидно је да највећи кругови пролазе кроз осу OY, а што се од ње више удаљавају, све више се смањују док се не стекну у тачке заокругљавања (16), D и E односно D_1 и E_1 посматраног елипсоида.

У случају једнокрилног хиперболоида имамо

$$K=\frac{1}{a^2}\,,\qquad L=\frac{1}{b^2}\,,\qquad M=-\frac{1}{c^2}\,,\quad N=-1.$$

Према томе, под претпоставкама (6), (10) и (13), одговарајући обрасци (7) и (11) одређују имагинарне вредности за углове ψ и θ.

Међутим, под условом (8) где је

$$\psi = 0^\circ, \tag{17}$$

образац (9) даје за угао θ две реалне вредности наиме

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}\,.$$

Одговарајуће једначине (12) постају

$$\left.\begin{aligned} x_0&=0,\\ z_0&=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}}\;y_0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

и одређују заједно са датом једначином једнокрилног хиперболоида координате тачака заокругљивања (x_0', y_0', z_0') које су у овом случају имагинарне, и то:

$$
\begin{aligned}
x_0' &= 0,\\
y_0' &= \pm\, bi\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}\,, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$z_0'=\pm\, ci\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\,, \tag{19}$$

Услов (17) показује да су *кружни пресеци паралелни већој оси једнокрилног хиперболоида* (сл. 70) *и да се њихова средишта налазе на дијаметрима* DE *и* D_1E_1 (18) *који леже у главној равни управној на већој оси.*

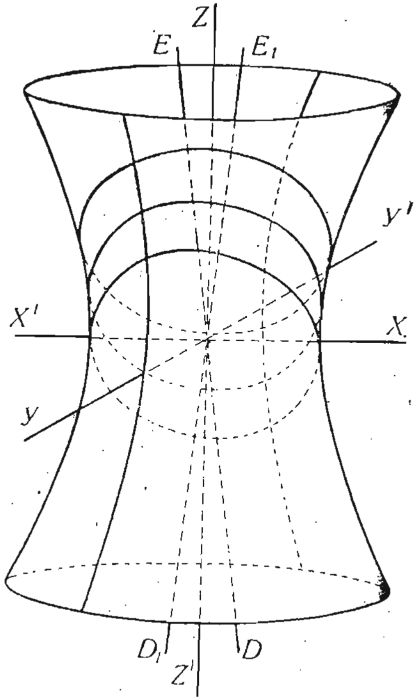
Кружни пресеци, који пролазе кроз већу осу чији су пресеци једнаки већој оси једнокрилног хиперболоида, најмањи су. Сви други кружни пресеци се увећавају према растојању од дотичних пресека све до бесконачности. Најзад тачке заокругљивања (19) једнокрилног хиперболоида су имагинарне, јер пречник (18) пролази унутар површине, те је не сече у реалним тачкама.

Посматрајмо сад двокрилни хиперболоид, чији су коефицијенти у једначини (1)

$$K=\frac{1}{a^2}\,,\ L=\frac{1}{b^2}\,,\ M=-\frac{1}{c^2}\,,\quad N=1.$$

Као и у претходном случају, под претпоставкама (6), (10) и (13), обрасци (7) и (11) одређују имагинарне вредности за углове ψ и θ. Само под претпоставком (8) где је испуњен прешашњи услов (17), образац (9) одређује две реалне вредности угла θ, наиме:

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}\,.$$



Сл. 70

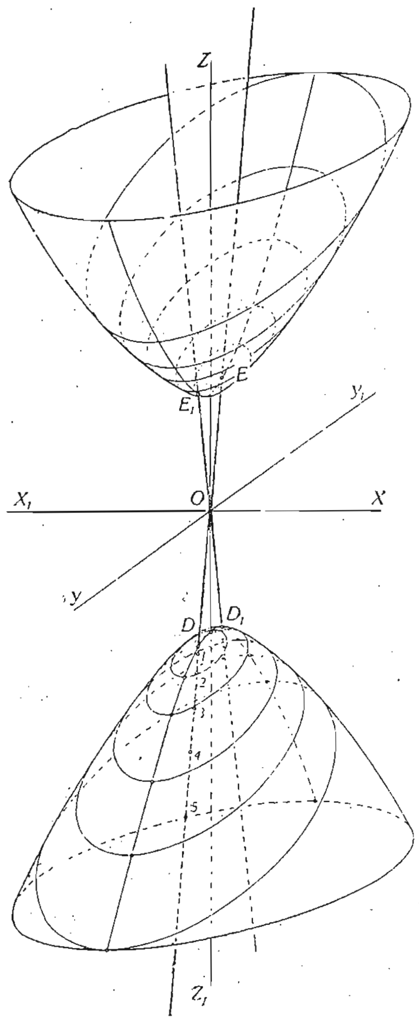
Одговарајуће једначине (12) задржавају горњи облик (18).

Али у овом случају једначине (18) заједно са једначином двокрилног хиперболоида (сл. 71) одређује реалне вредности за координате тачака заокругљивања (x_0', y_0', z_0') наиме:

$$\left.\begin{aligned} x_0' &= 0\\ y_0 &= \pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}\,,\\ z_0 &= \pm c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Према томе *кружни пресеци двокрилног хиперболоида паралелни су већој оси, а средиште се налази на пречницима* (18) *који леже у главној равни управној на већу осу.*

Треба приметити да су кружни пресеци, који пролазе кроз највећу осу имагинарни, јер не секу површину посматраног хиперболоида дуж реалне криве линије. Исто тако су имагинарни и кружни пресеци, који одговарају тачкама пречника (18) између средишта површине и њених тачака заокругљивања (20). Тек почев од ових тачака, кружни пресеци двокрилног хиперболоида постају реални, а њихови пречници расту од нуле све до бесконачности.



Сл. 71

161. Кружни пресеци конуса. — Једначина (1) одређује конус другог реда са теменом у координатном почетку под претпоставком

$$N = 0, \tag{21}$$

јер смо раније показали (види прва глава, n^0 31) да свака хомогена једначина претставља конус. При томе бар један од три коефицијента мора бити негативан, јер се у супротном случају посматрана површина своди на једну реалну тачку.

Претпоставимо на пр., да једначина конуса другог реда има облик

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{22}$$

где је

$$a > b > c,$$

тако да је негативан коефицијент, коефицијент уз коту.

Пошто се једначина конуса разликује од једначине одговарајућег једнокрилног хиперболоида само сталним чланом, то је очевидно, да су кружни пресеци посматраног конуса (22) паралелни већој оси. Они претстављају два низа паралелних кружних пресека. Њихова средишта се налазе на пречницима одређеним једначинама (18) који пролазе кроз теме конуса те леже у главној равни управној на већу осу конуса.

Разлика између једнокрилног хиперболоида и конуса састоји се у томе што су тачке заокругљивања површине конуса реалне и што се све четири поклапају с теменом конуса.

162. Обртне површине. — Претпоставимо да је оса кота оса обртања површина (1) (в. глава VI, n^0 141, 144) Према томе, имамо једнакост.

$$K = L$$

Стога је услов (5) испуњен идентички, а услов (4) постаје

$$(K - M)\sin^2\theta = 0.$$

Одавде излази једини закључак да је

$$\theta = 0^0.$$

То значи да су сви кружни пресеци паралелни, координатној равни XOY, тј. да су управни на осу обртања.

163. Површине без средишта. — Узмимо једначину површина без средишта у облику

$$Kx^2 + Ly^2 + Pz = 0, \tag{23}$$

где су коефицијенти K и L позитивни за елиптички параболоид, а различитих знакова за хиперболички параболоид, док је P негативно у оба случаја.

Пошто за изналажење кружних пресека играју улогу само коефицијенти чланова уз текуће координате, на другом степену то и за параболоид вреде пређашњи услови (4) и (5) с тим да је

$$M = 0. \tag{24}$$

Под овим условом претпоставка (6) није на месту јер би се тада према обрасцима (3) коефицијент C у једначинама (2) морао поништити и ова једначина не би могла одредити круг.

Међутим под претпоставкама (8) и (10) једначина (4) даје респективно

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{K}{L}}, \tag{25}$$

односно

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{L}{K}}. \tag{26}$$

Коефицијенти K и L су истог знака код елиптичког параболоида. Претпоставимо да је

$$K < L, \tag{27}$$

онда образац (25) који одговара услову (8) где је

$$\psi = 0^0, \tag{28}$$

одређује два низа кружних пресека елиптичког параболоида, јер је $\frac{K}{L}$ прави разломак.

Међутим за одређивање геометриског места средишта кружних пресека исти образац (3) мора да се промени.

То произилази из услова (24). Осим тога у једначини (23) појављује се члан Pz, где треба да се уврсти вредност z из трећег обрасца (17), n^0 48, стр. 58. Према томе, добија се, место коефицијента E у обрасцима (3) нови израз

$$E' \equiv (y_0 L\cos\psi - x_0 K\sin\psi)\cos\theta + \frac{1}{2} P\sin\theta,$$

Одавде, а под условима (27) и (28) једначине за одређивање средишта кружних пресека елиптичког параболоида постају

$$x_0=0$$

$$y_0\pm\frac{P}{2L}\sqrt{\frac{L}{K}-1}=0. \tag{29}$$

Тада образац (26) према услову (27) не може одредити вредност угла θ. То значи да су *кружни пресеци елиптичког параболоида паралелни највећој оси овог параболоида и да се средишта кружних пресека налазе на правим линијама* (29) *које леже у главној равни управној на највећу осу*. Најзад су координате тачака заокругљивања одређене обрасцима

$$x'_0=0,\quad y'_0=\mp\frac{P}{2L}\sqrt{\frac{L}{K}-1},\quad z'_0=\frac{P}{4L}\left(1-\frac{L}{K}\right).$$

У случају кад је површина елиптичког параболоида обртна, оба обрасца (25) и (26) поклапају се, те оба низа кружних пресека постају управни на осу обртања површине.

Коефицијенти K и L хиперболичког параболоида су различитог знака. Према томе, обрасци (25) и (26) одређују имагинарне вредности угла θ и *хиперболички параболоид нема реалних кружних пресека.*

III. Праволиниске генератрисе

164. Средишне површине имагинарних праволиниских генератриса. — Површина има праволиниске генератрисе, ако допушта низ правих линија које се распоређују по датој површини.

Проучимо прво праволиниске генератрисе елипсоида и двокрилног хиперболоида, чије једначине можемо написати у овом заједничком облику

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=\pm 1, \tag{1}$$

где горњи знаци одговарају елипсоиду, а доњи двокрилном хиперболоиду.

Напишимо једначине праве у општем облику овако

$$x=\frac{a}{c}(lz+\alpha),$$

$$y=\frac{b}{c}(mz+\beta), \tag{2}$$

где су l, α, m и β произвољне константе. Да би површине (1) имале генератрисе (2) потребно је да резултат смене x и y, вредностима одређеним једначинама (2) у једначини (1), мора бити идентички задовољен.

А то значи да једнакост

$$\frac{1}{c^2}[(lz+\alpha)^2+(mz+\beta)^2\pm z^2]=\pm 1,$$

или

$$(l^2+m^2\pm 1)z^2+2(l\alpha+m\beta)z+\alpha^2+\beta^2\mp c^2=0$$

мора бити задовољена за све вредности променљиве z. Према томе, морају постојати идентичности

$$l^2+m^2\pm 1=0, \tag{3}$$

$$l\alpha+m\beta=0, \tag{4}$$

$$\alpha^2+\beta^2\mp c^2=0, \tag{5}$$

Једначине (3) и (5) задовољене су за горње знаке, вредностима

$$\left.\begin{aligned} l&=i\cos\varphi, & m&=i\sin\varphi,\\ \alpha&=c\cos\psi, & \beta&=c\sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а за доње знаке вредностима

$$\left.\begin{aligned} l&=\cos\varphi, & m&=\sin\varphi,\\ \alpha&=ic\cos\psi, & \beta&=ic\sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где су φ и ψ нове променљиве величине, а $i=\sqrt{-1}$.

Најзад једначина (4) даје за оба решења (6) и (7) ову везу између φ и ψ

$$ic\cos(\varphi-\psi)=0,$$

или

$$\psi=\varphi\pm\frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Према томе праволиниске генератрисе (2) за површину елипсоида гласе

$$x=\frac{a}{c}(iz\cos\varphi\mp c\sin\varphi)$$

$$y=\frac{b}{c}(iz\sin\varphi\pm c\cos\varphi).$$

Међутим, једначине (2) за површине двокрилног хиперболоида изгледају

$$x=\frac{a}{c}(z\cos\varphi\mp ic\sin\varphi),$$

$$y=\frac{b}{c}(z\sin\varphi\pm ic\cos\varphi).$$

Пошто је φ произвољан параметар, то постоје *по два низа имагинарних праволиниских генератриса за површине елипсоида и двокрилног хиперболоида.*

165. Једнокрилни хиперболоид. — Узмимо једначину

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{9}$$

Резултат смене вредности x и y, одређених обрасцима (2), у једначини (9) је

$$(lz+\alpha)^2+(mz+\beta)^2-z^2=c^2$$

Одавде се добијају једнакости

$$l^2 + m^2 = 1,$$
$$l\alpha + m\beta = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = c^2.$$

Према томе добијамо слично претходном

$$l = \cos\varphi, \qquad m = \sin\varphi$$
$$\alpha = c\cos\psi, \qquad \beta = c\sin\psi$$
$$\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Због тога се праволиниске генератрисе једнокрилног хиперболоида (9) изражавају помоћу два низа реалних правих линија, наиме:

$$x = \frac{a}{c}(z\cos\varphi \mp c\sin\varphi),$$
$$y = \frac{b}{c}(z\sin\varphi \pm c\cos\varphi),$$

где једна породица правих линија одговара горњим знацима обе једначине, а друга доњим знацима.

Проучене генератрисе имају ове особине

1° *Кроз сваку тачку површине једнокрилног хиперболоида пролази по једна генератриса сваке породице.*

Заиста, узмимо једну генератрису прве породице у облику

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\cos\varphi &= -\sin\varphi, \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\sin\varphi &= \cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и једну генератрису друге породице

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\cos\varphi &= \sin\varphi, \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\sin\varphi &= -\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ако дигнемо на квадрат обе једначине (10) па саберемо резултат, добијамо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2z}{c}\left(\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi\right) = 1.$$

Збир пак, прве једначине (10) помножене са $\cos\varphi$ и друге помножене са $\sin\varphi$ даје

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = \frac{z}{c}.$$

Према томе, резултат елиминације $\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi$ из обе добијене једнакости даје једначину (9).

На сличан начин елиминација параметра φ из једначина (11) даје такође једначину једнокрилног хиперболоида (9).

2° *Кроз сваку тачку површине* (9) *пролазе две генератрисе различитих породица.* Уведимо, краткоће ради, ознаке

$$\sin\varphi = \alpha, \qquad \cos\varphi = \beta,$$
$$\sin\varphi' = \alpha', \qquad \cos\varphi' = \beta';$$

и узмимо једну генератрису прве породице

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c}\beta + \alpha &= 0, \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\alpha - \beta &= 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

и генератрису друге породице

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\beta' - \alpha' = 0, \qquad \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\alpha' + \beta' = 0. \tag{13}$$

Општи облик равни, која пролази кроз праву (12) гласи

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\beta + \alpha + \lambda\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\alpha - \beta\right) = 0. \tag{14}$$

где је λ произвољни параметар. Ако генератриса (13) пролази кроз тачку (x, y, z) површине (9) кроз коју пролази и генератриса (12) то се онда мора једначина (14) анулирати за једначине (13). Стављајући вредност x и y, одређене једначинама (13), у једначину (14) добијамо једнакост

$$\frac{z}{c}(\beta' - \beta) + \alpha + \alpha' + \lambda\left[\frac{z}{c}(\alpha' - \alpha) - \beta' - \beta\right] = 0. \tag{15}$$

Да би овај услов био идентички испуњен морамо имати

$$\beta' - \beta = -\lambda(\alpha' - \alpha),$$
$$\alpha' + \alpha = \lambda(\beta' + \beta),$$

или

$$\beta'^2 - \beta^2 = -\lambda(\alpha' - \alpha)(\beta' + \beta).$$
$$\alpha'^2 - \alpha^2 = \lambda(\beta' + \beta)(\alpha' - \alpha).$$

Међутим према уведеним ознакама, имамо

$$\beta'^2 - \beta^2 \equiv \cos^2\varphi' - \cos^2\varphi \equiv \sin^2\varphi - \sin^2\varphi' \equiv -(\alpha'^2 - \alpha^2).$$

Ако упоредимо овај резултат са сваком од претходних једнакости добијамо тражене релације.

Због тога је очевидно да је добијени услов (15) идентички испуњен.

3°. *Кроз тачку површине* (9) *не могу пролазити две различите генератрисе исте породице.*

Узмимо генератрису (12) која пролази кроз тачку (x, y, z) наше површине (9) и општи облик равни (14) које пролазе кроз праву (12).

Узмимо осим тога другу генератрису прве породице наиме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{z}{c}\beta'+\alpha'&=0,\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}\alpha'-\beta'&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Ако би ова права пролазила кроз исту тачку (x, y, z) површине (9) онда би једначине (14) на основу обрасца (16) морале бити задовољене. Стога би морала постојати идентичност

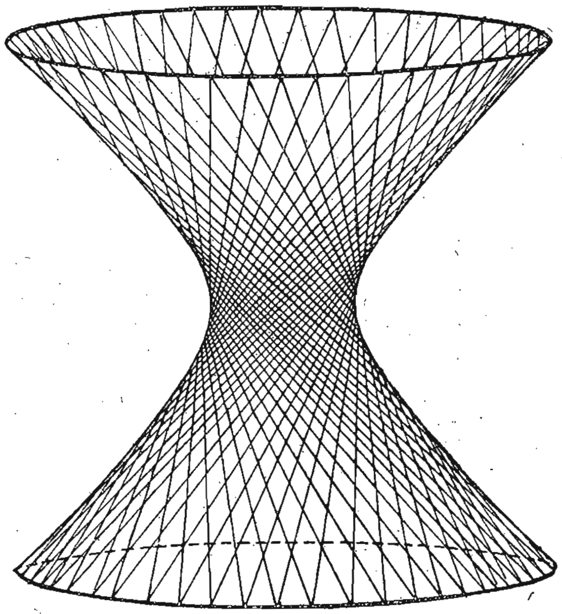
$$\frac{z}{c}(\beta'-\beta)-\alpha'+\alpha+\lambda\left[\frac{z}{c}(\alpha'-\alpha)+\beta'-\beta\right]=0$$

или две идентичности

$$\beta'-\beta=-\lambda(\alpha'-\alpha),$$
$$\alpha-\alpha'=\lambda(\beta'-\beta).$$

Али оне не постоје, те је став доказан.

На овој слици (в. сл. 72), коју овде приказујемо, читава је површина једнокрилног хиперболоида покривена са две породице посматраних праволиниских генератриса, које имају наведене особине.



Сл. 72

166. Параболоиди. — Узмимо једначине елиптичког и хиперболичког параболоида у облику

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z, \qquad (17)$$

где горњи знак одговара елиптичком параболоиду а доњи хиперболичком.

Посматрајмо једначине праве наредног општег облика

$$\frac{x}{\sqrt{p}}=lz+\alpha, \qquad \frac{y}{\sqrt{q}}=mz+\beta, \qquad (18)$$

где су l, m, α и β произвољне константе.

Резултат смене вредности x и y из једначина (18) у једначини (17) мора бити идентички задовољен.

Према томе мора постојати идентичност

$$(lz+\alpha)^2\pm(mz+\beta)^2=2z.$$

Пошто ова мора бити задовољена за сваку вредност z, то се добијају идентичности

$$\left.\begin{aligned} l^2\pm m^2&=0\\ l\alpha\pm m\beta&=1\\ \alpha^2\pm\beta^2&=0\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где горњи знаци одговарају површини елиптичког параболоида, а доњи површини хиперболичког параболоида. Одавде се види, да вредности l, m, α и β могу бити само имагинарне за елиптички параболоид. Према томе елиптички параболоид нема реалних праволиниских генератриса већ само имагинарне.

За хиперболички параболоид морају се узети из прве и треће једначине (19) вредности

$$l=\pm m, \qquad \alpha=\mp\beta, \qquad (20)$$

јер иначе друга једначина (19)

$$l\alpha-m\beta=1, \qquad (21)$$

не би могла постојати.

Према обрасцима (20) једначина (21) даје једину вредност и то:

$$m=-\frac{1}{2\beta}, \qquad (22)$$

а из прве једнакости (20) добијамо

$$l=\mp\frac{1}{2\beta},$$

где горњи и доњи знак одговарају горњем и доњем знаку другог обрасца (20).

Нађене вредности коефицијента α, l и m функције су четвртог параметра β, који задржава потпуно произвољну вредност.

Стављајући ове вредности у једначине (18) добијамо два низа праволиниских генератриса хиперболичког параболоида, наиме

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = -\frac{1}{2\beta} z - \beta, \qquad \frac{y}{\sqrt{q}} = -\frac{1}{2\beta} z + \beta, \tag{23}$$

и

$$\frac{x}{\sqrt{p}} = \frac{1}{2\beta} z + \beta, \qquad \frac{y}{\sqrt{q}} = -\frac{1}{2\beta} z + \beta, \tag{24}$$

које се међусобно разликују само првом једначином.

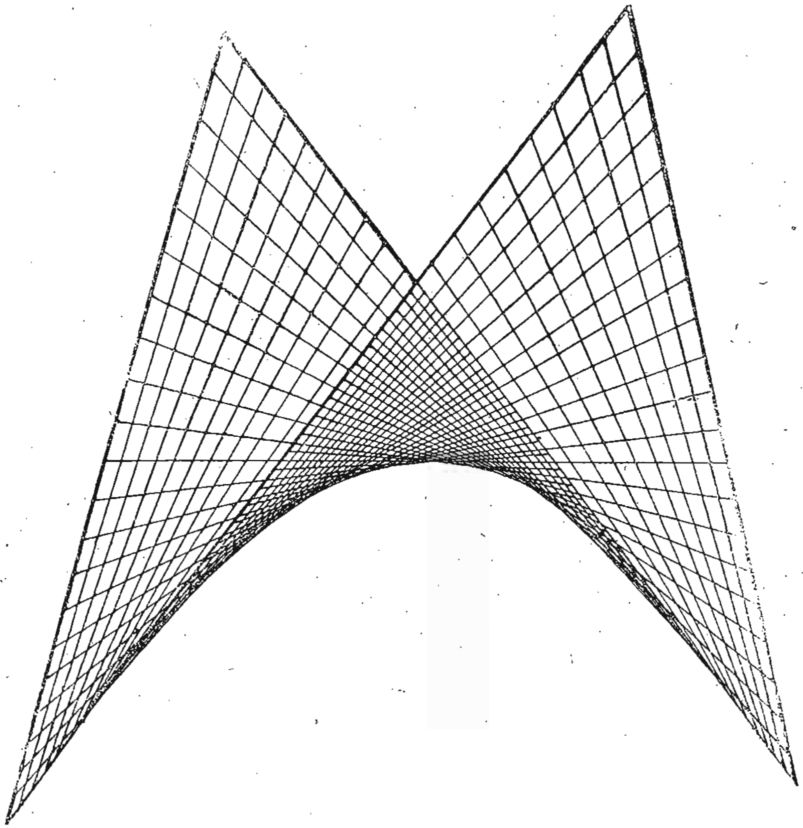
Сваки од система (23) односно (24) може се заменити другим, где се узимају збир или разлика једначина сваког система.

Према томе имамо, место система (23) овај систем једначина

$$\beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = -z, \qquad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = -2\beta, \tag{25}$$

Међутим се систем једначина (24) замењује овим

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2\beta, \qquad \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = z. \tag{26}$$



Сл. 72

Друга једначина (25) одређује ортогоналну пројекцију на раван XOY праве (25) а прва једначина (26) претставља ортогоналну пројекцију на исту координатну раван друге праве (26).

Пошто су наведене пројекције сваке од посматраних породица правих паралелне међу собом, онда су и равни која их пројицирају међусобно паралелне а паралелне су респективно двема сталним равнима, које пролазе кроз осу кота.

Ове равни зову се *директорне равни* хиперболичког параболоида.

На слици 73 коју овде приказујемо види се да је површина тог параболоида покривена непрекидном мрежом двају система посматраних праволиниских генератриса.

ГЛАВА ОСМА

ЕЛЕМЕНТИ ПОВРШИНА ДРУГОГ РЕДА, ОДРЕЂЕНИХ ЈЕДНАЧИНАМА ОПШТЕГ ОБЛИКА

I. Центар

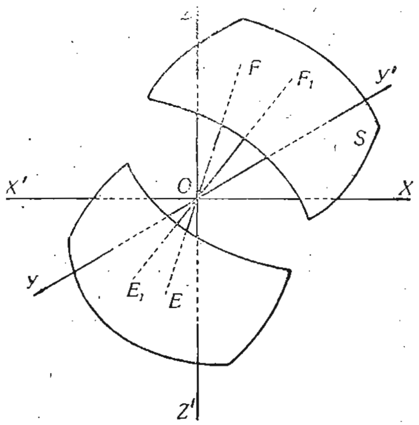
167. Дефиниције елемената. — Елементом површине другог реда назваћемо сваки геометриски облик (тачку, праву, раван, извесну криву или неки одређени скуп кривих) који је везан са датом површином. Ова се веза испољава на тај начин што се једначине посматраног елемента изражавају помоћу коефицијената једначине дате површине.

Имали смо већ прилику за посматрање елемената површина другог реда, кад смо у претходним главама проучавали различите линије пресека и генератрисе појединих површина другог реда. Сада ћемо испитивати више других елемената површина другог реда одређених једначинама општег облика.

168. Дефиниција центра. — Узмимо општу једначину површине другог реда

$$2f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \qquad (1)$$

Тачка O је центар или средиште (сл. 74) површине S, (1), ако њене тачке две по две, E и F, E_1 и F_1,..., леже на подједнаком растојању од тачке O. Како смо видели права линија сече (з. n^0 156, стр. 157) површину другог степена у двема тачкама. Према томе свака сечица, која пролази кроз тачку O мора том тачком бити преполовљена. Претпоставимо да површина (1) има средиште и да је координатни почетак O смештен у средишту дате површине. Тада су једначине сваке сечице, у параметарском облику



Сл. 74

$$x = m\rho, \quad y = n\rho, \quad z = p\rho. \qquad (2)$$

Пресечне тачке сечице (2) са површином (1) одговарају коренима параметра ρ једначине, која се добија сменом координата (2) у једначину (1) у облику

$$P\rho^2 + 2Q\rho + F = 0, \qquad (3)$$

где су уведене ознаке

$$P \equiv Am^2 + A'n^2 + A''p^2 + 2Bnp + 2B'mp + 2B''mn,$$
$$Q \equiv Cm + C'n + C''p.$$

Према дефиницији центра, једначина (3) мора одређивати два једнака корена по апсолутној вредности. Зато коефицијент Q мора бити једнак нули, па добијамо услов

$$Cm + C'n + C''p = 0$$

Пошто добијена једнакост мора бити испуњена за ма коју праву (2) т.ј. за све могуће различите вредности коефицијената m, n и p, мора бити

$$C = C' = C''$$

Овај услов је неопходан и довољан да тачка O буде центар површине (1).

169. Одређивање центра. — Искористимо нађени услов за одређивање средишта сваке површине чија је једначина (1), на овај начин. Потражимо такву тачку (x_0, y_0, z_0) да се у претвореној једначини анулирају линеарни чланови по текућим координатама кад се изврши транслација координатног система у ту тачку као почетак.

У ту сврху означимо нове координате са x_1, y_1, z_1; па обрасци трансформације координата постају

$$x = x_c + x_1, \quad y = y_c + y_1, \quad z = z_c + z_1. \qquad (4)$$

Према томе претворена једначина (1) добија облик

$$A(x_c + x_1)^2 + A'(y_c + y_1)^2 + A''(z_c + z_1)^2 + 2B(y_c + y_1)(y_c + z_1) \\ + 2B'(x_c + x_1)(z_c + z_1) + 2B''(x_c + x_1)(y_c + y_1) + 2C(x_c + x_1) \\ + 2C'(y_c + y_1) + 2C''(z_c + z_1) + F = 0$$

или

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 + \\ + 2(f'_{x_c}x_1 + f'_{y_c}y_1 + f'_{z_c}z_1) + 2f(x_c, y_c, z_c) = 0$$

где су уведене пређашње ознаке (в. n^0 156, стр. 157)

$$f'_{x_c} \equiv Ax_c + B''y_c + B'z_c + C,$$
$$f'_{y_c} \equiv B\ x_c + A'y_c + Bz_c + C',$$
$$f'_{z_c} \equiv B\ x_0 + By_c + A\ z_c + C'',$$

само су $x_0\ y_0\ z_0$ замењене са $x_c\ y_c\ z_c$.

Према доказаном ставу, тражене координате $x_c\ y_c\ z_c$ задовољавају услове

$$f'_{x_c} = 0, \quad f'_{y_c} = 0, \quad f'_{z_c} = 0. \qquad (6)$$

Добијене једначине су линеарне по x_c, y_c, z_c па одређују њихове вредности помоћу образаца

$$x_c = -\frac{\Delta}{\Delta}, \quad y_c = -\frac{\Delta''}{\Delta}, \quad z_c = -\frac{\Delta''}{\Delta}, \qquad (7)$$

где Δ означава детерминанту коефицијената датих једначина (5), наиме

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \tag{8}$$

док остале ознаке Δ', Δ'' и Δ''' претстављају детерминанте које се добијају из детерминанте Δ сменом коефицијента одређене координате (7) са познатим члановима једначине (6) и то:

$$\left.\begin{aligned} \Delta' \equiv \begin{vmatrix} C & B'' & B' \\ C' & A & B \\ C'' & B & A'' \end{vmatrix}, \quad \Delta'' \equiv \begin{vmatrix} A & C & B' \\ B'' & C' & B \\ B' & C'' & A'' \end{vmatrix}, \\ \Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Обрасци (7) одређују тражено средиште површине (1) као тачку пресека три равни. Према томе (в. n^0 74, стр. 89) могу се појавити више случајева. 1^0) Ако се наведене равни секу у једној тачки, кад је детерминанта (8) различита од нуле, површина (1) поседује центар;

2^0. Ако се равни (6) секу, две и две, дуж паралелних правих, тада површина (1) нема средишта, или се каже да је оно бескрајно удаљено;

3^0. Ако се све три равни (6) секу дуж једне праве или се поклапају, све тачке те праве или равни претстављају средишта посматраних површина. Према томе може се извршити ова класификација површина другог реда у пет различитих врста, или класа.

П р в у к л а с у сачињавају средишне површине са једним одређеним средиштем на коначном растојању, тј. елипсоиди и оба хиперболоида — једнокрилни и двокрилни и конус.

Д р у г у к л а с у претстављају површине са бескрајно удаљеним средиштем, тј. оба параболоида — елиптички и хиперболички.

У т р е ћ у к л а с у долазе површине са правом линијом на коначном растојању, чије све тачке играју улогу средишта. Овде спадају цилиндри елиптички и хиперболички, чије осе претстављају геометриска места њихових средишта.

Ч е т в р т а к л а с а се састоји из површина, чија се средишта налазе на једној бескрајно удаљеној правој, или параболичких цилиндара.

Најзад у п е т о ј к л а с и налазе се површине које поседују једну раван средишта. Овој класи припадају површине у облику двеју паралелних равни које су различите или се поклапају.

170. Трансформација једначине средишних површина. — Претпоставимо да површина одређена једначином (1) има одређено средиште, чије координате задовољавају идентички једнакости (6).

Извршимо трансформацију дате једначине (1), у односу на нови координатни систем, одређен обрасцима (4) где је за нови координатни почетак (x_c, y_c, z_c) узето средиште (7) посматране површине, под претпоставком

$$\Delta \gtrless 0.$$

Тада трансформисана једначина (5), према идентичностима (6), постаје

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 + \\ + 2f(x_c, y_c, z_c) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Међутим имамо

$$\begin{aligned} 2f(x_c, y_c z_c) \equiv (Ax_c + B''y_1 + B'z_c + C)\,x_c + (B''x_c + A'y_c + Bz_c + C')y_c + \\ + (B'x_c + By_c + A''z_c + C'')\,z_c + Cx_c + C'y_c + C''z_c + F. \end{aligned}$$

Овај образац, према идентичностима (6), добија вредност

$$2f(x_c,\ y_c,\ z_c) = Cx_c + C'y_c + C''z_c + F.$$

Испитајмо сад ова два различита случаја.
Прво смењујући овде обрасце (7) координата x_c, y_c, z_c налазимо

$$2f(x_c,\ y_c,\ z_c) = \frac{1}{\Delta}\,(-C\Delta' - C'\Delta'' - C''\Delta''' + \Delta F) \tag{11}$$

Узимајући у обзир изразе (8) и (9) добијене за детерминанте Δ, Δ', Δ'' и Δ''', израз (11) постаје

$$\left.\begin{aligned} 2f(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{\Delta}\Bigg(-C \begin{vmatrix} C & B'' & B' \\ C' & A' & B \\ C'' & B & A'' \end{vmatrix} - C' \begin{vmatrix} A & C & B' \\ B'' & C' & B \\ B' & C'' & A' \end{vmatrix} - \\ - C'' \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} A & B'' & B \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$= \frac{D}{\Delta},$$

где је

$$D \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Заиста, развијмо ову детерминанту по елементима последње врсте. Имајући у виду особине детерминаната у вези са разменом колона и одговарајућом променом знака, налазимо да је израз у заградама десне стране једнакости (12) идентичан са D.

Детерминанта D зове се д и с к р и м и н а н т а функције $2f(x, y, z)$.

Да би се могао лакше запамтити начин за формирање ове дискриминанте напишимо једначину површине (1) у четири реда тако да у свакој врсти долазе само чланови без бројног коефицијента 2 и то они који садрже редом променљиве x, y, z, а у последњем реду четири крајња члана, наиме:

$$\begin{aligned} &Ax^2 + B''xy + B'xz + Cx + \\ &+ B''xy + A'y^2 + Byz + C'y + \\ &+ B'xz + Byz + A''z^2 + C''z + \\ &+ Cx + C'y + C''z + F = 0. \end{aligned}$$

Коефицијенти написаних врста сачињавају редом елементе посматране дискриминанте D.

Према обрасцу (12) претворена једначина (10) постаје

$$Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2B\,y_1\,z_1+2B'x_1\,z_1+2B''x_1\,y_1+\frac{D}{\Delta}=0. \qquad (14)$$

Овај резултат генералише онај из теорије средишних коничних пресека.

171. Конус. — Проучимо сад други случај кад се горњи образац $2f(x_c,\ y_c,\ z_c)$ идентички анулира тако да постоји једнакост

$$2f(x_c\ y_c\ z_c)\equiv Cx_c+C'y_c+C''z_c+F=0. \qquad (15)$$

Тада је претворена једначина (10) хомогена и према томе одређује к о н у с.

Пошто координате x_c, y_c, z_c задовољавају поред три једначине (6) и последњу четврту једначину и пошто оне морају бити сагласне, овај се услов изражава једнакошћу

$$D\equiv\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix}=0$$

Под претпоставком (15) једначина (10) постаје хомогена

$$Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2By_1z_1+\ 2B'z_1x_1+2B''x_1y_1=0$$

Међутим доказали смо у n^0 31 (в. стр. 35) да свака хомогена једначина по текућим координатама претставља конус, чије се теме налази у координатном почетку.

Према томе *једнакост* $D=0$ *претставља услов да посматрана једначина* (1) *одређује површину конуса.* Теме овог конуса налази се у тачки чије се координате одређују обрасцима (7) као средиште дотичне површине. У посебном случају, где је

$$\Delta=0$$

центар конуса удаљава се у бесконачност. Тада конус дегенерише у цилиндар. Према томе *једначина* (1) *дефинише цилиндар, кад су испуњена оба услова*

$$D=0,\qquad \Delta=0.$$

Детерминанта Δ зове се д р у г а д и с к р и м и н а н т а функције $2f(x,\ y,\ z)$ а D њена п р в а д и с к р и м и н а н т а.

II. Дијаметарске равни

172. Дефиниција. — Посматрајмо општу једначину површине другог реда

$$\left.\begin{aligned}2f(x,y,z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy+\\+2Cx+2C'y+2C''z+F=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Означимо са

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma \qquad (2)$$

косинусе углова које извесна права образује са координатним осама.

Геометриско место средина тетива посматране површине (1) које су паралелне датом правцу, зове се њему к о н ј у г о в а н а д и ј а м е т а р с к а п о в р ш и н а.

Лако је доказати да *свака дијаметарска површина претставља раван.*

Да бисмо то доказали преместимо координатни почетак у неку нову тачку $(a,\ b,\ c)$, и задржавајући правац нових оса паралелан старим осама, трансформишимо једначину (1) помоћу обрасца

$$x=a+x_1,\qquad y=b+y_1,\qquad z=c+z_1$$

где су x_1, y_1, z_1 нове текуће координате.

Слично са трансформацијом претходног одељка I (в. n^0 169, стр. 175) претворена једначина (1) постаје

$$\begin{aligned}Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2By_1z_1+2B'x_1z_1+2B''x_1y_1+\\+2(f'_ax_1+f_b'y_1+f_c'z_1)+2f(a,b,c)=0\end{aligned} \qquad (3)$$

где ознаке f'_a, f'_b, f'_c у сагласности са пређашњим ознакама, изражавају вредност парцијалних извода по x, y односно z функције f, где су текуће координате x, y, z замењене са величинама a, b односно c.

У новом координатном систему једначине праве која пролази кроз нови координатни почетак паралелно датом правцу (2) изражавају се овако у параметарском облику

$$x_1=\alpha\rho,\quad y_1=\beta\rho,\quad z_1=\gamma\rho. \qquad (4)$$

Једначина за одређивање вредности параметра ρ који одговара тачкама пресека праве (4) са површином (3) добија облик

$$\left.\begin{aligned}(A\alpha^2+A'\beta'+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta)\,\rho^2+\\+2(f'_a\alpha+f'_b\beta+f'_c\gamma)\rho+2f(a,b,c)=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ако захтевамо да тачка $(a,\ b,\ c)$ буде средина тетиве (4), онда једначина (5) не сме задржати члан са ρ на првом степену. Према томе мора постојати услов

$$f'_a\alpha+f'_b\beta+f'_c\gamma=0,$$

који морају задовољавати координате средина $(a,\ b,\ c)$ посматраних тетива (4).

Ако поново обележимо координате уочених тачака са x, y, z добијени услов постаје

$$f'_x\alpha+f'_y\beta+f'_z\gamma=0 \qquad (6)$$

Ова је једначина линеарна по текућим координатама, па према томе претставља раван. Одавде се закључује да свака дијаметарска површина за површину другог реда, претставља раван .

Посматрамо ли на пример, тетиве које су паралелне оси OX, тада коефицијенти (2) добијају вредност

$$\alpha=1,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=0.$$

Одговарајућа једначина дијаметарске равни (6) површине (1) конјугована, дакле, тетивама паралелним координатној оси OX гласи

Слично, једначине

$$f'_x = 0$$
$$f'_y = 0, \qquad f'_z = 0$$

претстављају дијаметарске равни површина (1) које су конјуговане тетивама паралелним координатној оси OY, односно OZ.

Најзад, у општем случају, добијена једначина (6) сменом израза f'_x, f'_y односно f'_z постаје

$$\left.\begin{aligned}&(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y + \\ &\quad + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

173. Конјуговане дијаметарске равни. — Означимо сад са

$$\alpha', \qquad \beta', \qquad \gamma' \qquad (8)$$

косинусе правца неке друге праве линије у простору. Ако је ова права паралелна дијаметарској равни (7) мора постојати услов

$$(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)\alpha' + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)\beta' + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)\gamma' = 0 \qquad (9)$$

Овај се услов може написати друкчије овако

$$(A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma')\alpha + (B''\alpha' + A'\beta' + B\gamma')\beta + (B'\alpha' + B\beta' + A''\gamma')\gamma = 0 \qquad (10)$$

Упоређујући оба обрасца (9) и (10) одмах долазимо до закључка да је дијаметарска раван површина (1) конјугована правцу (8), паралелна првом правцу (2).

Обе дијаметарске равни, које су узајамно паралелне правцима њима конјугованих тетива, зову се к о н ј у г о в а н е д и ј а м е т а р с к е р а в н и.

Проучимо сад посебне случајеве где се дати правац (2) посматраних тетива поклапа са једном од координатних оса. Тада се добијају једначине дијаметарских равни конјугованих са правцем сваке од координатних оса, како смо тек доказали крајем претходног n^0 172 наиме

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0, \qquad (11)$$

а које су већ пре биле изведене (в. n^0 169, стр. 175) за одређивање средишта површине (1).

Очевидно је да *свака дијаметарска раван средишне површине* (1) *пролази кроз њено средиште.* Заиста једначина (6) задовољена је идентички вредностима координата, које се одређују из једначина (11).

Међутим, *ако површина* (1) *нема средишта, све њене дијаметарске равни су или паралелне једној правој линији или су међусобно паралелне.*

Пошто су једначине (11) задовољене у посматраном случају бесконачним вредностима координата може се десити само један од два случаја, или се две од три равни (11) секу по правој линији, која је паралелна трећој равни, или, у другом случају, све три равни су међусобно паралелне.

1°. Претпоставимо, најпре да је права линија одређена двема првим једначинама (11) паралелна равни која је претстављена трећом једначином (11). Тада се свака раван, која пролази кроз дотичну праву линију, изражава једначином

$$f'_x + f'_y\lambda = 0, \qquad (12)$$

где је λ стални параметар.

Да би ова раван била паралелна трећој од равни (11), зато мора постојати услов овог облика

$$f'_z \equiv \mu(f'_x + \lambda f'_y) + \nu,$$

где су μ и ν две сталне величине.

Према томе једначина дијаметарске равни (6), чим ставимо у њу последњу вредност f'_z постаје

$$f'_x + \lambda' f'_y + \nu' = 0, \qquad (13)$$

где су уведене ознаке:

$$\lambda' \equiv \frac{\beta + \gamma\lambda\mu}{\alpha + \gamma\mu}, \qquad \nu' \equiv \frac{\gamma\nu}{\alpha + \gamma\mu}.$$

Добијена једначина (13) заиста одређује раван паралелну правој линији, која је дата скупом две прве једначине (11).

2°. Уведимо сада другу претпоставку да су све три равни међусобно паралелне. Тада се функције f'_x и f'_y изражавају линеарно у функцији f'_z. Због тога прва страна једначине дијаметарске равни (6) постаје линеарна функција од f'_z, па зато одређује раван, која је паралелна равни датој трећом једначином (11); то значи да је дијаметарска раван паралелна трима паралелним равнима (11).

3°. Испитујмо сад случајеве неодређеног средишта. За то уведимо трећу претпоставку, *где површина има средиште, које се налази на некој правој Тада све дијаметарске равни пролазе кроз ову праву.*

Заиста у посматраном случају једна од једначина (11) мора бити последица две друге једначине. Зато на пример, нека f'_z буде линеарна функција од f'_x и f'_y.

Према томе једначина дијаметарске равни (6) може се написати у облику

$$f'_x + \lambda f'_y = 0$$

Али по себи се разуме да све равни које су претстављене овом једначином, пролазе кроз праву одређену помоћу две прве једначине (11).

4°. Посматрајмо, најзад, четврту могућу претпоставку, где се средишта површине налазе у једној истој равни.

Лако је доказати да се *тада све дијаметарске равни поклапају са том равни.*

Заиста, једначине (11) се своде само на једну једначину, за коју ћемо узети на пр. прву једначину (11). Тада је очевидно да се и дијаметарска једначина (6) своди на исту, јер су функције f'_y и f'_z линеарне и хомогене функције од f'_x.

III. Главне равни

174. Дефиниција. — Нарочиту улогу за проучавање различитих површина другог реда

$$\begin{aligned}2f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

играју дијаметарске равни које су управне на тетивама посматране површине (1) које су им конјуговане. Такве се дијаметарске равни зову г л а в н е р а в н и површине.

Ради тога треба коефицијенти дијаметарских равни (7), из претходног одељка II (стр. 180) да задовољавају услове

$$\frac{Am+B''n+B'p}{m}=\frac{B''m+A'n+Bp}{n}=\frac{B'm+Bn+A''p}{p}=S \qquad (2)$$

где је уведен помоћни параметар S, а са m, n и p означене сразмерне величине, које одговарају вредностима α, β и γ.

Према томе празци m, n, p нормала на тражене главне разни одређују се хомогеним једначинама, које се добијају из једнакости (2).

$$\left.\begin{aligned}(A-S)m+B''n+B'p=0,\\ B''m+(A'-S)n+Bp=0,\\ B'm+Bn+(A''-S)p=0.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Елиминацијом m, n и p из ових линеарних хомогених једначина (3) добија се једначина за одређивање вредности помоћног параметра S у облику

$$\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Ова се једначина зове секуларна или карактеристична једначина дате површине или Бинеова једначина.

175. Особине карактеристичне једначине. — Једначине облика (4) имају ту особину да су њихови корени увек реални.

Један од најпростијих доказа наведеног става, који ћемо овде навести припада Коши-у.

Претпоставимо да коефицијенти A, A' и A'' задовољавају услове

$$A>A'>A''. \qquad (5)$$

Уведена претпоставка не може да смањи општост наших расуђивања, јер увек можемо означити координатне осе према своме нахођењу. Али ипак, ради извођења доказа, можемо водити рачуна о томе, да распоредимо овако осе према вредностима коефицијената уз квадрате координата једначине (1).

Развијмо детерминанту на левој страни једначине (4), по елементима прве врсте, и добијену једначину напишимо овако

$$f(S)\equiv(A-S)\,\varphi(S)-B'^2(A'-S)-B''^2(A''-S)+2BB'B''=0 \qquad (6)$$

где је

$$\varphi(S)\equiv(A'-S)(A''-S)-B^2, \qquad (7)$$

а са $f(S)$ је означена кратко лева страна једначине (4).

Претпоставимо прво да полином $\varphi(S)$ има два различита корена S_1 и S_2 и означимо већи са α, а мањи са β. Пошто су они одређени једначином

$$S^2-(A'+A'')S+A'A''-B^2=0,$$

имамо

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\left[A'+A''\pm\sqrt{(A'-A'')^2+4B^2}\right] \qquad (8)$$

Према томе, због услова (5), α је веће и од A' и од A'', а β има вредност која је мања и од A' и од A'', тј.

$$\alpha>A'>A''>\beta.$$

Напоменимо да, због обрасца (7), имамо за корене полинома $\varphi(S)$ израз

$$B\equiv\pm\sqrt{(A'-S_{1,2})(A''-S_{1,2})},$$

где је под кореном увек позитивна величина.

Ако сменимо у обрасцу (6) корене $S_{1,2}$ и тек напред добијену вредност B онда налазимо:

$$f(S_{1,2})\equiv-B'^2(A'-S_{1,2})-B''(A''-S_{1,2})\pm2B'B''\sqrt{(A'-S_{1,2})(A''-S_{1,2})}=$$
$$=\left[B'\sqrt{S_{1,2}-A'}\pm B''\sqrt{S_{1,2}-A''}\right]^2.$$

Уведени образац се користи приликом састављања табеле промена знака полинома $f(S)$ у случају кад се S мења између $+\infty$ и $-\infty$:

Вредност S	$+\infty$	α	β	$-\infty$
Вредност $f(S)$	$-\infty$	$[B'\sqrt{\alpha-A'}\pm B''\sqrt{\alpha-A''}]^2$	$-[B'\sqrt{A'-\beta}\mp B''\sqrt{A''-\beta}]^2$	$+\infty$
Знак $f(S)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Пошто функција $f(S)$ мења три пута свој знак у посматраном размаку, то је јасно да има три реална корена.

Треба сад употпунити поменути доказ под претпоставком да су оба корена (8) једнака. То се догађа само при условима

$$A'=A'', \qquad B=0 \qquad (9)$$

и тада функција $f(S)$ има облик:

$$f(S)\equiv(A'-S)\,\Psi(S),$$

где је

$$\Psi(S)\equiv(A-S)(A'-S)-(B'^2+B''^2) \qquad (10)$$

према томе функција $f(S)$ има један корен A', а друга два су корени полинома (10) другог степена и изражавају се у облику

$$S_{1,2}=\frac{1}{2}\left[A+A'\pm\sqrt{(A-A')^2+4(B'^2+B''^2)}\right].$$

Пошто се под кореном налази увек позитивна количина, то су сва три корена полинома $f(S)$ увек реална.

Означићемо са S_1, S_2 и S_3 наведене корене.

176. Испитивање једнаких корена секуларне једначине. — По себи се разуме да се може десити да су два корена S_i међу собом једнака. Тада се две главне равни поклапају. Овај случај мора бити потанко расветљен.

Као што је познато, ако алгебарска једначина има двоструки корен, онда се његовом вредношћу ништи не само дата једначина већ и њена изводна једначина. Према правилу диференцијаљења детерминаната*) изводна једначина (4) гласи

$$[(A'-S)(A''-S)-B^2]+[(A-S)(A''-S)-B'^2]+ \\ +[(A-S)(A'-S)-B''^2]=0 \tag{11}$$

Међутим лако је доказати да су сви изрази у средњим заградама на левој страни једначине (11) једнаки нули.

Заиста, једначина (4) може се написати, по правилу Саруса, овако:

$$f(S)\equiv(A-S)(A'-S)(A''-S)-B^2(A-S)-B'^2(A'-S)- \\ -B''^2(A''-S)+2BB'B''=0. \tag{12}$$

Ако помножимо обе стране ове једначине са $A''-S$ добијамо

$$(A-S)(A''-S)(A'-S)(A''-S)-B^2(A-S)(A''-S)- \\ -B'^2(A'-S)(A''-S)-B''^2(A''-S)^2+2BB'B''(A''-S)=0$$

или додајући и одузимајући израз $B^2B'^2$.

$$(A-S)(A''-S)[(A'-S)(A''-S)-B^2]-B'^2[(A'-S)(A''-S)-B^2]- \\ -B^2B'^2-B''^2(A''-S)^2+2BB'B''(A''-S)=0.$$

Чланови прве врсте претстављају производ два чиниоца, а чланови друге врсте чине тачан квадрат, тако да посматрани услов постаје

$$[(A-S)(A''-S)-B'^2][(A'-S)(A''-S)-B^2]= \\ =[B''(A''-S)-BB']^2 \tag{13}$$

Одавде излази да два прва чиниоца морају имати исти знак, јер је њихов производ тачан квадрат.

На сличан начин може се закључити, полазећи поново од једначине (12) да и израз

$$(A-S).(A'-S)-B''^2$$

мора имати исти знак као и два чиниоца леве стране једнакости (13). Али пошто је њихов алгебарски збир, према једнакости (11), једнак нули, то и сваки од посматраних чиниоца мора бити једнак нули, т.ј.

$$\left.\begin{aligned}(A-S)(A''-S)-B'^2=0,\\ (A-S)(A'-S)-B''^2=0,\\ (A'-S)(A''-S)-B^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Одавде добијамо три једнакости

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B'}{A''-S}, \tag{15}$$

*) Извод детерминанте једнак ру детерминаната које се добијају из дате детерминанте, кад се у место елемената реда ставе њихови изводи.

$$\left.\begin{aligned}\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S},\\ \frac{A'-S}{B}=\frac{B}{A''-S}.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Поред тога једнакост (13) даје

$$B''(A''-S)-BB'=0. \tag{16}$$

Због тога се прва од једначина (15) и једначина (16) могу написати заједно овако:

$$\frac{A-S}{B'}=\frac{B'}{A''-S}=\frac{B''}{B}. \tag{17}$$

Помножимо сад прву једнакост (14) са B. Према једнакости (16), пошто је $B'\gtrless 0$, добијамо везу

$$B(A-S)-B'B''=0$$

Одавде и из друге једнакости (15) изводимо размере

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B}. \tag{18}$$

Напред наведене једначине (15), због услова (16), своде се на само две различите.

Међутим у случају кад секуларна једначина (4) има два једнака корена, према условима (17) и (18), систем од три једначине (3) своди се само на једну једину једначину.

177. Три једнака корена секуларне једначине. — Ако средимо чланове секуларне једначине облика (12) по степенима од S она се може написати

$$S^3-sS^2+GS-\Delta=0, \tag{19}$$

где је

$$s=A+A'+A''$$
$$G=AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & B'' & B'\\ B'' & A' & B\\ B' & B & A''\end{vmatrix} \tag{20}$$

Како је коефицијент секуларне једначине уз S^2 једнак збиру корена са супротним знаком, а коефицијенат уз S једнак збиру производа од по два корена то за троструки корен S имамо

$$A+A'+A''=3S$$
$$AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2=3S^2.$$

Елиминишући из ове две једначине вредност корена S добијамо везу коју морају задовољавати коефицијенти једначине (1) у посматраном случају.

$$(A+A'+A'')^2=3(AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2).$$

или

$$\frac{1}{2}[(A-A')^2+(A-A'')^2+(A'-A'')^2]+3(B^2+B'^2+B''^2)=0.$$

Пошто су вредности свих коефицијената једначине (1) реални, то морамо имати

$$A=A'=A'', \qquad B=B'=B''=0$$

Према томе полазна површина (1) претставља лопту

$$A(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+F=0$$

Секуларна једначина (4) или (12) постаје

$$(A-S)^3=0$$

Према томе је A заједничка вредност троструког корена.

178. Јакобијеве границе корена секуларне једначине. — Вратићемо се сад општој једначини (12). Да бисмо раздвојили корене ове једначине у најопштијој претпоставци, узимамо два низа израза:

$$A, \quad A', \quad A'',$$
$$\frac{B'B''}{B}, \quad \frac{BB''}{B'}, \quad \frac{BB'}{B''},$$

чији је начин формирања скоро очевидан.

Уведимо ознаке

$$A-\frac{B'B''}{B}=\lambda, \quad A'-\frac{BB''}{B'}=\mu, \quad A''-\frac{BB'}{B''}=\nu. \tag{21}$$

Ново добивене одавде изразе за A, A′, и A″ сменимо у једначину (12).

$$\left(\lambda-S+\frac{B'B''}{B}\right)\left(\mu-S+\frac{BB''}{B'}\right)\left(\nu-S+\frac{BB'}{B''}\right)-$$
$$-B^2\left(\lambda-S+\frac{B'B''}{B}\right)-B'^2\left(\mu-S+\frac{BB''}{B'}\right)-$$
$$-B''^2\left(\nu-S+\frac{BB'}{B''}\right)+2BB'B''=0.$$

Пет чланова леве стране добијене једначине, који не зависе од $\lambda\ \mu$, ν и S узајамно се потиру. Исто тако узајамно се потиру и шест чланова који су линеарни по биномима $\lambda-S$, $\mu-S$, $\nu-S$.

Према томе добијена једначина постаје

$$\left.\begin{aligned}&\frac{B'B''}{B}(\mu-S)(\nu-S)+\frac{BB''}{B'}(\lambda-S)(\nu-S)+\\&+\frac{BB'}{B''}(\lambda-S)(\mu-S)+\\&+(\lambda-S)(\mu-S)(\nu-S)=0.\end{aligned}\right| \tag{22}$$

Ако се поделе сви чланови ове једначине са производом

$$BB'B''(\lambda-S)(\mu-S)(\nu-S)$$

она се може написати у симетричном облику

$$Q(S)\equiv\frac{1}{B^2(\lambda-S)}+\frac{1}{B'^2(\mu-S)}+\frac{1}{B''^2(\nu-S)}+\frac{1}{BB'B''}=0 \tag{23}$$

Уведимо претпоставку да је

$$\lambda>\mu>\nu.$$

Тада је лако раздвојити корене секуларне једначине (23) помоћу табеле:

S	$+\infty$	$\lambda-\varepsilon$	$\mu+\varepsilon$	$\mu-\varepsilon$	$\nu+\varepsilon$	$-\infty$
Знак Q(S)	$BB'B''$	+	—	+	—	$BB'B''$

Пошто је функција Q(S) непрекидна између граница $\lambda-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$ и $\mu-\varepsilon$, $\nu+\varepsilon$ то *има два реална корена од којих се један налази између* λ *и* μ *а други између* μ *и* ν. *Сем тога функција* Q(S) *има и трећи корен, који је већи од* λ *у случају када је знак производа* $BB'B''$ *негативан; а за случај позитивног знака тог производа, тај корен је мањи од* ν.

Горњи закључци су изведени под претпоставком да су границе λ, μ и ν различите. Ради употпуњавања изложеног расматрања треба проучити случај за који су једнаке две од посматраних граница.

У ту сврху помножимо једначину (22) производом

$$BB'B''$$

и напишимо добијену једначину овако

$$B'^2B''^2(\mu-S)(\nu-S)+B^2B''^2(\lambda-S)(\nu-S)+B^2B'^2(\lambda-S)(\mu-S)+$$
$$+BB'B''(\lambda-S)(\mu-S)(\nu-S)=0. \tag{24}$$

Ако се претпостави да су једнаке две границе,

$$\lambda=\mu, \tag{25}$$

потпуно је очигледно да њихова *заједничка вредност* λ *претставља један од корена једначине* (24).

Друга два корена су одређена квадратном једначином која се добија из (24), у претпоставци (25), наиме:

$$Q_1(S)\equiv BB'B''(\mu-S)(\nu-S)+B''^2[(B^2+B'^2)(\nu-S)]+$$
$$+B^2B'^2(\mu-S)=0 \tag{26}$$

Један од корена добијене једначине налази се између граница $\mu>\nu$ јер лева страна наше једначине мења знак у овом размаку.

S	$+\infty$	$\mu+\varepsilon$	$\nu+\varepsilon$	$-\infty$
Знак Q_1 (S)	зн. $BB'B''$	—	+	зн. $BB'B''$

Други корен посматране једначине већи је од μ у случају када је производ В В′ В′′ позитиван, а у супротном случају мањи је од ν.

Ако су све три границе једнаке,

$$\lambda = \mu = \nu\,,$$

закључује се да једначина (26) има корен $\boldsymbol{\mu}$, који је према наведеном двоструки корен полазне једначине (24). Тада се трећи корен одређује из линеарне једначине, која се добија из једначине (26), наиме:

$$BB'B''(\nu - S) + B''^2(B^2 + B'^2) + B^2B'^2 = 0.$$

Добијени закључак о двоструком корену секуларне једначине поклапа се са горњим обрасцима (17) или (18).

179. Посебни случајеви секуларне једначине. — Претпоставимо најпре да је једнак нули један од коефицијената В, В′ или В′′.

Нека је рецимо

$$B'' = 0,$$

тада секуларна једначина, коју ћемо узети у развијеном облику (12), постаје

$$f(S) \equiv (A - S)(A' - S)(A'' - S) - B^2(A - S) - B'^2(A' - S) = 0. \qquad (27)$$

У уведеној претпоставци (5) имамо таблицу за вредности променљиве S и за знаке функције $f(S)$.

S	$+\infty$	A	A′	$-\infty$
зн. $f(S)$	—	+	—	+

Према томе једначина (27) има три реална корена: први већи од А, други између граница А и А′, а трећи мањи од А′′.

Ако су два коефицијента В′ и В′′ једнака нули:

$$B' = B'' = 0$$

једначина (12) постаје

$$f(S) \equiv (A - S)\,[(A' - S)(A'' - S) - B^2] = 0.$$

Одавде излази да секуларна једначина има један корен једнак са А и да се два друга одређују једначином

$$(A' - S)(A'' - S) - B^2 = 0.$$

Један од корена ове једначине је већи од А′ а други је мањи од те границе, и они се одређују обрасцима:

$$S_{1,2} = \frac{1}{2}\left[A' + A'' \pm \sqrt{(A' - A'')^2 + 4B^2}\right]$$

Најзад, ако су сва три коефицијента уз производ координата једнака нули:

$$B = B' = B'' = 0$$

једначина (12) постаје

$$(A - S)(A' - S)(A'' - S) = 0$$

Према томе су А, А′ и А′′ три корена секуларне једначине. Другим речима очевидно да корене секуларне једначине у посматраном случају претстављају коефицијенти једначине површине уз чланове са квадратима координата.

Најзад, посматрајмо случај површина (1), које немају средишта. За ове површине постоји услов

$$\Delta = 0\,.$$

Према томе одговарајућа секуларна једначина (19) постаје

$$S^3 - sS^2 + GS = 0$$

Један од корена добијене једначине једнак је нули, а друга два одређена су квадратном једначином

$$S^2 - sS + G = 0$$

и дата обрасцем

$$S_{1,2} = \frac{1}{2}\,(S \pm \sqrt{S^2 - 4G}).$$

Због тога постоји веза

$$S_1 S_2 = G$$

Сем тога оба су корена S_1 и S_2 реална, јер секуларна једначина има само реалне корене.

180. Одређивање правца оса. — Посматрајмо најпре случај кад секуларна једначина има три различита корена $S_1\ S_2, S_3$. За сваки од ових корена S_i добијају се односне вредности m_i, n_i и p_i из хомогених једначина (3)

$$\left.\begin{aligned} (A - S_i)m_i + B''n_i + B'p_i &= 0,\\ B''m_i + (A' - S_i)n_i + Bp_i &= 0,\\ B'm_i + Bn_i + (A'' - S_i)p_i &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

од којих једна од ове три једначине, услед услова (4), мора бити последица две друге.

Претпоставимо, на пр., да је трећа једначина (28) последица две прве. Ако сем тога уведемо претпоставку да је

$$p_i \gtreqless 0\,,$$

из две прве једначине (28) добијају се обрасци

$$\frac{m_i}{p_i} = -\frac{\begin{vmatrix} B' & B'' \\ B & A' - S_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A - S_i & B'' \\ B'' & A' - S_i \end{vmatrix}}\,, \qquad \frac{n_i}{p_i} = -\frac{\begin{vmatrix} A - S_i & B' \\ B'' & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A - S_i & B'' \\ B'' & A' - S_i \end{vmatrix}} \qquad (29)$$

$$(i = 1,\ 2.\ 3)$$

Величине m_i, n_i, p_i су сразмерне косинусима углова које заклапа са координатним осама нормала на главну раван, а које ћемо означити са

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Њихове се вредности помоћу обрасца (29) изражавају овако

$$\alpha_i = \frac{\frac{m_i}{p_i}}{R_i}, \quad \beta_i = \frac{\frac{n_i}{p_i}}{R_i}, \quad \gamma_i = \frac{1}{R_i}, \tag{30}$$

где је

$$R_i = \sqrt{\left(\frac{m_i}{p_i}\right)^2 + \left(\frac{n_i}{p_i}\right)^2 + 1}\,.$$

Пошто се вредност R_i узима са позитивним знаком, то знаци косинуса углова зависе од вредности бројиоца у обрасцима (30). Нађени углови одређују правце главних дијаметара или оса посматраних површина.

Најзад, једначине главних равни, које одговарају појединим коренима S_i, изражавају се према обрасцима (7) претходног одељка II (стр. 180).

$$\left.\begin{array}{c} S_i(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z) + C\alpha_i + C'\beta_i + C''\gamma_i = 0 \\ (i = 1, 2, 3) \end{array}\right\} \tag{31}$$

Из изложених расуђивања види се, кад постоје три различита корена секуларне једначине, постоје и три главне равни површине (1)).

Њихови пресеци одређују три осе површине (1) које су, како се то лако доказује, узајамно управне а чији је положај одређен косинусима углова (30). Заиста, за два прва корена S_1 и S_2 обрасци (28) дају

$$\begin{aligned} S_1 m_1 &= A m_1 + B'' n_1 + B' p_1, \\ S_1 n_1 &= B'' m_1 + A' n_1 + B p_1, \\ S_1 p_1 &= B' m_1 + B n_1 + A'' p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 m_2 &= A m_2 + B'' n_2 + B' p_2, \\ S_2 n_2 &= B'' m_2 + A' n_2 + B p_2, \\ S_2 p_2 &= B' m_2 + B n_2 + A'' p_2, \end{aligned}$$

Множимо једнакост прве групе са m_2, n_2 односно p_2 а једнакости друге групе са m_1, n_1 односно са p_1. Ако сад од збира добијених једнакости из прве групе образаца одузмемо збир једнакости добијених из образца друге групе, добијамо овај резултат

$$(S_1 - S_2)(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2) = 0.$$

На сличан начин добијају се још две једнакости

$$\begin{aligned} (S_1 - S_3)(m_1 m_3 + n_1 n_3 + p_1 p_3) &= 0, \\ (S_2 - S_3)(m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3) &= 0. \end{aligned}$$

Према томе, ако су сва три корена карактеристичне једначине различита добијамо услов

$$\begin{aligned} m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 &= 0, \\ m_1 m_3 + n_1 n_3 + p_1 p_3 &= 0, \\ m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Одавде следује да су главне равни површине (1) узајамно управне исто као и осе ове површине.

Посматрајмо сад посебан случај, кад је један од корена карактеристичне једначине (12) једнак нули. Пошто је тада

$$\Delta = 0\,.$$

површина (1) нема средишта. Међутим одговарајућа једначина (31) главне равни своди се на левој страни, на сталну величину па одређује бескрајно удаљену раван.

Према томе *површине без средишта имају само две главне дијаметарске равни на коначном растојању*, а њихова трећа главна дијаметарска раван удаљава се у бесконачност.

Проучимо сада случај кад секуларна једначина има један двоструки корен. Претпоставимо на пр., да је

$$S_1 = S_2$$

Тада се два одговарајућа система (3) поклапају и одређују свега две главне равни. Сем тога систем једначина (3), за двоструки корен S, своди се на једну једначину, како је то доказано у n^0 176. Према томе положај осе одређује се помоћу једне једначине за коју ћемо узети, на пр., прву једначину (3) за $S = S_1$, и допунску једначину, наиме:

$$\left.\begin{array}{l} (A - S_1)\alpha_1 + B''\beta_1 + B'\gamma_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \end{array}\right\} \tag{32}$$

То значи да можемо добити колико год хоћемо праваца за прву осу који одговарају једном двоструком корену. Може се дакле произвољно изабрати ма која од вредности α_1, β_1, γ_1. Ако се на пр., изабере нека вредност за γ_1 онда су вредности α_1 и β_1 одређене условима (32).

Добијене вредности одређују правац прве осе. После тога добијамо потпуно одређену другу осу, чији правац мора задовољити прво, услове (28) који се своде на једну једначину, а друго, услов нормалности са првом нађеном осом и трећи познати услов

$$\begin{aligned} (A - S_1)\alpha_2 + B''\beta_2 + B'\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Најзад за трећи корен S_3 и за одговарајући му правац добијамо потпуно одређене вредности из једначине (3), које одговарају том корену.

Што се тиче троструког корена секуларне једначине, кад површина (1) постаје лопта, једначине (3) се анулирају идентички. Према томе положај главних оса постаје неодређен. Заиста очевидно је да се могу узети за главне осе свака три узајамно управна пречника лопте.

IV. Пречник

181. Дефиниција. — Узмемо ли површину другог реда

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + \\ + 2C''z + F = 0, \tag{1}$$

пречником (дијаметром) те површине зове се пресек две њене дијаметарске равни. Пошто се њихова заједничка тачка налази у случају средишних површина у њиховом средишту, сви дијаметри средишних површина пролазе кроз средиште.

Узмимо две дијаметарске разни средишне површине (1).

$$\left.\begin{aligned} \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z &= 0,\\ \alpha_1 f'_x + \beta_1 f'_y + \gamma_1 f'_z &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

конјуговане правцима, који су одређени величинама α, β, γ односно α_1, β_1 и γ_1, сразмерним косинусима углова које одговарајуће тетиве заклапају са координатним осама.

Једначине пречника (2) могуће је написати и у облику

$$\frac{f'_x}{m} = \frac{f'_y}{n} = \frac{f'_z}{p} \tag{3}$$

где су m, n и p детерминанте матрице

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

са односним знаком.

Лако је доказати обрнути став, да *свака права линија која пролази кроз средиште површине другог реда* (1) *претставља њен дијаметар.*

И заиста, узмимо једначине праве која пролази кроз средиште површине (1) у општем облику

$$\left.\begin{aligned} a(x - x_c) + b(y - y_c) + c(z - z_c) &= 0,\\ a_1(x - x_c) + b_1(y - y_c) + c_1(z - z_c) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где су x_c, y_c, z_c координате средишта површине, а коефицијенти a, b, c, a_1, b_1, c_1 имају одређене вредности. Покажимо да је увек могуће дати коефицијентима једначина (4) такве вредности да ове једначине претстављају дијаметарске равни. У ту сврху довољно је да идентификујемо једначине (4) са једначинама (2). Према томе добијају се из прве једначине (2) и прве једначине (4) везе

$$\left.\begin{aligned} A\alpha + B''\beta + B'\gamma &= a,\\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma &= b,\\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma &= c,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Написане једнакости претстављају систем три линеарне једначине γ.

Пошто је површина (1) средишна, имамо

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Према томе једначине (5) дају потпуно одређене вредности за α, β, γ и прва једначина (4) претставља дијаметарску раван. На сличан начин одређују се и три коефицијента α_1, β_1, γ_1, тако да друга једначина (4) претставља неку дијаметарску раван.

182. Особине пречника средишних површина. — Докажимо сад особину пречника средишних површина, која се састоји у томе што *они претстављају геометриско место средишта паралелних пресека дате површине.* За то претпоставимо да је једначина једне од посматраних равни дата у облику

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6}$$

Ако сада уведемо претпоставку да је

$$c \gtrless 0,$$

тако да је

$$z = -\frac{ax + by + d}{c}, \tag{7}$$

добићемо, сменом добијене вредности z у једначину (1), овај резултат

$$F(x, y) \equiv 2f\left(x, y, -\frac{ax + by + d}{c}\right) = 0. \tag{8}$$

Ова једначина одређује пројекцију линије пресека равни (6) са површином другог реда (1) на координатну раван XOY.

Познато је да је пројекција (8) конични пресек; његово је средиште одређено једначинама

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Ове се једначине могу написати друкчије и овако

$$(f'_x) - (f'_z)\frac{a}{c} = 0, \qquad (f'_y) - (f'_z)\frac{b}{c} = 0, \tag{9}$$

где заграде означавају резултат извршене замене z из (7) у $f(x, y, z)$.

Добијене једнакости (9) везују промењљиве координате x, y, z, које одговарају пресеку дате равни (6) са површином (1). Ако посматрамо низ паралелних равни (7) за све могуће вредности параметра d, њима ће одговарати једначине које се добијају када из образаца (9) елиминишемо вредност параметра d одређену једначином (6). За то ставимо ову вредност d у једначине (9). Ова ће замена успоставити вредност промењљиве z, тако да ће се у обрасцима (9) заграде изгубити и они ће постати

$$f'_x - f'_z\frac{a}{c} = 0, \qquad f'_y - f'_z\frac{b}{c} = 0.$$

Добијене једначине се друкчије пишу овако

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c} \tag{10}$$

па према томе имају облик (3) једначина пречника.

Лако је доказати да је овај пречник конјугован паралелним равнима (6) које одговарају различитим вредностима коефицијента d.

Узмимо за то неку праву линију чији је правац одређен косинусима углова сразмерним величинама

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \tag{11}$$

која се осим тога налази у једној од паралелних равни са (6). За то мора постојати услов

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \tag{12}$$

Ако се бројилац и именилац прве размере (10) помножи са α, друге са β, а треће са γ, и састави сложена пропорција сабирањем добијених бројилаца и именилаца тада према услову (12) имамо

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0 \tag{13}$$

Узмимо сада неку другу праву линију чији је правац одређен слично пређашњем, са

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1 \tag{14}$$

а која се налази у истој равни (6) као и прва права (11). Тада ћемо добити једначину

$$\alpha_1 f'_x + \beta_1 f'_y + \gamma_1 f'_z = 0 \tag{15}$$

Добијене једначине (13) и (15) одређују две дијаметарске равни, чији пресек претставља дијаметар површине (1).

Пошто свака раван (6) сече површину (1) по коничном пресеку то линије праваца (11) и (14) претстављају његове тетиве а у исто време и тетиве посматране површине (1).

Дијаметарске равни (13) и (15) полове их јер су са њима конјуговане. Међутим обе посматране тетиве су према услову у истој равни.

V. Тангентна раван

183. Дефиниција. — За одређивање тангентне равни проширимо најпре, Аполонијеву дефиницију тангенте на конични пресек. Према томе т а н г е н т н а р а в а н у одређеној тачки површине другог реда претставља *раван паралелну равнима пресека те површине конјугованим са пречником који пролази кроз ту тачку додира.*

Узмимо једначину површине другог реда општег облика

$$2f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + + 2C'y + 2C''z + F = 0. \tag{1}$$

Напишимо једначине пречника који пролази кроз тачку (x_0, y_0, z_0) површине (1) (в. n^0 182).

$$\frac{f'_{x_0}}{l} = \frac{f'_{y_0}}{m} = \frac{f'_{z_0}}{n}, \tag{2}$$

који је очевидно конјугован са равни

$$lx + my + nz + h = 0. \tag{3}$$

Тражена тангентна раван мора тада бити паралелна овој равни. Осим тога она мора пролазити кроз дату тачку (x_0, y_0, z_0). Према томе њена једначина добија облик

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

Ако сменимо коефицијенте m, n и l са њима сразмерним вредностима, према услову, (2) добија се једначина посматране тангентне равни најпре у облику

$$f'_{x_0}(x - x_0) + f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{z_0}(z - z_0) = 0 \tag{4}$$

који се поклапа са једначином изведеном на крају n^0 156, на стр. 158, под бр. (5).

184. Различити облици једначине тангентне равни. — Лако је извести из једначине (4) други облик једначине тражене равни, стављајући вредност извода f'_{x_0}, f'_{y_0} и f'_{z_0}. Према томе добијамо

$$(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C)(x - x_0) + (B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C')(y - y_0) + + (B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'')(z - z_0) = 0. \tag{5}$$

Пошто тачке додира (x_0, y_0, z_0) леже на датој површини (1) постоји идентичност

$$2f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Додајући ову идентичност једначини (5) она се може написати у облику

$$f'_{x_0}\, x + f'_{y_0}\, y + f'_{z_0}\, z + f'_0 = 0, \tag{6}$$

где је

$$f'_0 = Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + F.$$

Једначина (6) може се написати, груписањем чланова, и на овај начин

$$\left.\begin{aligned} &Ax_0x + A'y_0\,y + A''z_0z + B(z_0y + y_0z) + B'(z_0x + x_0z) + \\ &+ B''(y_0x + x_0y) + C(x + x_0) + C'(y + y_0) + C''(z + z_0) + F = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ова се једначина, слично са поступком у теорији коничних пресека, добија кад величине

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad 2yz, \quad 2xz, \quad 2xy, \quad 2x, \quad 2y, \quad 2z$$

у једначини површине (1) заменимо величинама

$$x_0x, \quad y_0y, \quad z_0z, \quad z_0y + y_0z, \quad z_0x + x_0z, \quad y_0x + x_0y, \quad x + x_0, \quad y + y_0, \quad z + z_0.$$

Једначина (7) добија се дакле из једначине површине другог реда (1) на тај начин што се један степен од текућих координата замени одговарајућим координатама тачке додира. Узмимо на пр. једначину елипсоида, односно једнокрилног хиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где горњи знак одговара елипсоиду а доњи једнокрилном хиперболоиду. Једначине њима одговарајућих тангентних равни, у тачки (x_0, y_0, z_0), гласе

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} \pm \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

За двокрилни хиперболоид,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,.$$

тангентна раван, у тачки (x_0, y_0, z_0) дата је једначином

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=-1\,.$$

Најзад посматрајмо једначине оба параболоида

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z\,,$$

где горњи знак одговара елиптичком параболоиду а доњи хиперболичком.

Њихове тангентне равни, у тачки (x_0, y_0, z_0), одређене су једначинама

$$\frac{x_0x}{p}\pm\frac{y_0y}{q}=z+z_0$$

Према томе ако потражимо једначине тангентних равни за ове две површине у њиховим теменима, која се поклапају са координатним почетком, одмах из написаних једначина налазимо њихове једначине у облику

$$z=0,$$

Према томе, посматране тангентне равни поклапају се са координатном равни XOY.

185. Једначина тангентне равни у хомогеним координатама. — Ако уведемо хомогене координате $\mathbf{X}$, Y, Z и T помоћу образаца

$$x=\frac{\mathbf{X}}{\mathrm{T}}\,,\qquad y=\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{T}}\,,\qquad z=\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{T}}$$

једначина (1) постаје

$$\left.\begin{aligned}2\mathrm{F}(\mathbf{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{T})\equiv\mathrm{A}\mathbf{X}^2+\mathrm{A}'\mathrm{Y}^2+\mathrm{A}''\mathrm{Z}^2+\mathrm{F}\mathrm{T}^2+2\mathrm{BYZ}+2\mathrm{B}'\mathbf{X}\mathrm{Z}+\\+2\mathrm{B}''\mathbf{X}\mathrm{Y}+2\mathrm{C}\mathbf{X}\mathrm{T}+2\mathrm{C}'\mathrm{YT}+2\mathrm{C}''\mathrm{ZT}=0\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Стављајући у овој једначини $\mathrm{T}=1$, добијамо пређашњу једначину (1) у праволиниским координатама. Једначина (8) може се написати још и овако

$$2\mathrm{F}\equiv\mathrm{F}_x'\mathrm{X}+\mathrm{F}'_y\mathrm{Y}+\mathrm{F}'_z\mathrm{Z}+\mathrm{F}'_T\mathrm{T}=0,\qquad(9)$$

где је

$$\begin{aligned}\mathrm{F}'_x&\equiv\mathrm{AX}+\mathrm{B}''\mathrm{Y}+\mathrm{B}'\mathrm{Z}+\mathrm{CT},\\ \mathrm{F}'_y&\equiv\mathrm{B}''\mathrm{X}+\mathrm{A}'\mathrm{Y}+\mathrm{BZ}+\mathrm{C}'\mathrm{T},\\ \mathrm{F}'_z&\equiv\mathrm{BX}+\mathrm{B}'\mathrm{Y}+\mathrm{A}''\mathrm{Z}+\mathrm{C}''\mathrm{T},\\ \mathrm{F}'_T&\equiv\mathrm{CX}+\mathrm{C}'\mathrm{Y}+\mathrm{C}''\mathrm{Z}+\mathrm{FT}.\end{aligned}$$

Одмах се види да обрасци F'_x, F'_y, F'_z и F'_T означавају парцијалне изводе полинома F по X, Y, Z одн. T.

Ако се сада вратимо праволиниским координатама, стављајући $\mathrm{T}=1$ у једначини (9) добијамо

$$2f\equiv f'_x x+f'_y y+f'_z z+f'=0\,,$$

где је

$$\begin{aligned}f'_x&\equiv\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z+\mathrm{C},\\ f'_y&\equiv\mathrm{B}''x+\mathrm{A}'y+\mathrm{B}z+\mathrm{C}',\\ f'_z&\equiv\mathrm{B}'x+\mathrm{B}y+\mathrm{A}''z+\mathrm{C}'',\\ f'&\equiv\mathrm{C}x+\mathrm{C}'y+\mathrm{C}''z+\mathrm{F}\end{aligned}$$

Ако изразе координата тачке додира равни са површином (1) уведемо у облику хомогених координата

$$x_0=\frac{\mathbf{X}_0}{\mathrm{T}_0}\,,\qquad y_0=\frac{\mathrm{Y}_0}{\mathrm{C}_0}\,,\qquad z_0=\frac{\mathrm{Z}_0}{\mathrm{T}_0}\,,$$

тада једначина тангентне равни (6) постаје

$$\mathrm{F}'_{X_0}\mathbf{X}+\mathrm{F}'_{Y_0}\mathrm{Y}+\mathrm{F}'_{Z_0}\mathrm{Z}+\mathrm{F}'_{T_0}\mathrm{T}=0\qquad(10)$$

Одавде се види да је напред уведена ознака f'_0 вредност извода F'_{T_0} при обрнутој трансформацији хомогених координата у старе праволиниске координате. За то је довољно у обрасце са хомогеним координатама ставити

$$\mathrm{T}\equiv1,\qquad\mathrm{X}\equiv x,\qquad\mathrm{Y}\equiv y,\qquad\mathrm{Z}\equiv z,$$

а исто и за вредности координата тачке додира. Тако F'_{T_0} постаје f'_0, а једначина тангентне равни (10) добија пређашњи свој облик.

186. Тангентна раван паралелна датој равни. — Узмимо раван

$$lx+my+nz+h=0\qquad(11)$$

Тражи се једначина њој паралелне тангентне равни површине (1). Очезидно је, да се одговарајућа тачка додира (x_0, y_0, z_0) која се тражи налази на пречнику конјугозаном равнима пресека, површине, паралелним датој равни (11). Једначине тог пречника гласе

$$\frac{f'_x}{l}=\frac{f'_y}{m}=\frac{f'_z}{n}\,.$$

Означимо ли са ρ заједничку вредност ових размера, добијамо једначине

$$f'_x=l\rho,\quad f'_y=m\rho,\quad f'_z=n\rho,\qquad(12)$$

које чине систем линеарних једначина по x, y, z.

Детерминанта коефицијената уз ове променљиве величине претставља другу дискриминанту Δ једначине посматраних површина (1).

За средишне од ових површина детерминанта Δ је различита од нуле. Према томе, за средишне површине једначине (12) се могу решити по x, y, z па дају њихове вредности за тачке додира тражене тангентне равни као линеарне функције уведеног помоћног параметра ρ. Смењујући те вредности координата у једначини (1) добија се квадратна једначина за одређивање оних вредности параметра ρ, које одговарају тачкама додира тражене тангентне равни. Према томе, за средишне површине, уопште, могу се поставити по две тангентне равни паралелне датој равни (11) у простору.

Узмимо као пример општу једначину средишних површина у облику

$$2f(x, y, z) \equiv Kx^2 + Ly^2 + Mz^2 + N = 0, \tag{13}$$

Према томе добијамо

$$f'_x \equiv Kx; \qquad f'_y \equiv Ly, \qquad f'_z \equiv Mz,$$

па једначине (12) у посматраном случају постају

$$Kx = l\rho, \qquad Ly = m\rho, \qquad Mz = n\rho,$$

Смењујући ове вредности x, y и z у датој једначини посматраних површина (13) налазимо за одређивање параметра ρ једначину

$$S\rho^2 + N = 0,$$

где је

$$S \equiv \frac{l^2}{K} + \frac{m^2}{L} + \frac{n^2}{M}.$$

Одатле следује

$$\rho = \pm\sqrt{-\frac{N}{S}},$$

и координате тачака додира тангентне равни на површини (13) паралелне датој равни (11) постају

$$x_0 = \pm\frac{l}{K}\sqrt{-\frac{N}{S}},$$

$$y_0 = \pm\frac{m}{L}\sqrt{-\frac{N}{S}},$$

$$z_0 = \pm\frac{n}{M}\sqrt{-\frac{N}{S}}.$$

Пошто су координате тачака додира тражене равни познате, добијамо помоћу општег обрасца (7) за обе тражене тангентне равни једначине

$$lx + my + nz \pm \sqrt{-\frac{S}{N}} = 0,$$

које одговарају горњем и доњем знаку у последњем члану једначине.

Међутим, за површине (1) без средишта, пошто је тада детерминанта Δ једнака нули, једначине (12) не могу се решити по x, y и z. Заиста испитајмо редом у одељку II ове главе (в. n^0 173, стр. 180) наведене различите претпоставке.

Претпоставимо, најпре да се средиште површине (1) удаљи у бесконачност и проучимо први случај, кад је права одређена првим двема једначинама система

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0, \tag{14}$$

паралелна равни која је претстављена трећом једначином (14). Тада смо показали (в. n^0 173, стр. 180) да постоји релација

$$f'_z \equiv \mu(f'_x + \lambda f'_y) + \nu,$$

где су λ, μ и ν сталне величине. Према томе стављајући у трећу једначину (12) наведени израз за f'_z добијамо резултат елиминације f'_x и f'_y из трију једначина (12) у облику једнакости, где не улазе текуће координате, наиме:

$$[\mu\ (l+\lambda m) - n]\rho + \nu = 0.$$

Одавде се добија сад вредност параметра ρ у облику

$$\rho = \frac{\nu}{n - \mu(l+\lambda m)}.$$

Две прве једначине (12) где ћемо увести нађену вредност ρ, послужиће заједно са датом једначином (1) за одређивање координата тачке додира тражене тангентне равни.

Посматрајмо на пр., површине параболоида

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{15}$$

где горњи знак одговара елиптичком параболоиду, а доњи хиперболичком. Сад једначине (12) постају

$$\frac{x}{p} = l\rho, \qquad \pm\frac{y}{q} = m\rho, \qquad -1 = n\rho,$$

па се не могу решити по x, y и z. Али елиминишући из њих помоћни параметар ρ, под претпоставком $n \gtrless 0$, добијамо апсцису и ординату тачака додира тражене тангентне равни.

$$x_0 = -\frac{pl}{n}, \qquad y_0 = \pm\frac{qm}{n}$$

Једначина (15) даје тада

$$z_0 = \frac{1}{2n^2}(pl^2 \pm qm^2).$$

Према томе, помоћу обрасца (7) налазимо за сваку од површина (15) по једну тангентну разан која је паралелна датој равни (11); при чему је $n \gtrless 0$,

$$lx \mp my + nz + \frac{1}{2n}(pl^2 \pm qm^2) = 0,$$

где се горњи знак односи на елиптички параболоид, а доњи знак на хиперболички. Овај закључак важи дакле под условом да дата разан (11) није паралелна оси кота.

Проучимо сад површине са неодређеним средиштем.

Према напред изложеним закључцима (в. n^0 173 стр. 180) морају тада постојати једна односно две везе међу изводима f'_x, f'_y, f'_z. Због тога једначине (12) нису решљиве по текућим координатама. Али ове једначине могу, поред једначине за одређивање вредности промењљивог параметра ρ, давати и накнадне услове под којима је решење постављеног проблема изводљиво. Узмимо на пр., једначину параболичког правог цилиндра, чије су генератрисе паралелне оси кота,

$$y^2 = 2px. \tag{16}$$

За посматрану површину једначине (12) постају

$$-p = l\rho, \quad y = m\rho, \quad 0 = n\rho. \tag{17}$$

Пошто је $\rho \gtrless 0$, то из последње једначине следује да за одређивање тангентне равни посматраног цилиндра која би била паралелна равни (11) мора бити $n = 0$. Према томе за постојање тражене тангентне равна паралелне равни (11), ова мора бити паралелна оси кота. Прва једначини (17), под накнадном претпоставком $l \gtrless 0$, даје

$$\rho = -\frac{p}{l},$$

а друга једначина (17) и једначина (16) дате површине одређују координате тачака додира тражене тангентне равни

$$x_0 = \frac{pm^2}{2l^2}, \quad y_0 = -\frac{pm}{l}.$$

Према томе тражена тангентна разан је одређена једначином

$$lx + my + \frac{pm^2}{2l} = 0,$$

под услозом да дата разан (11), при $n = 0$, не буде паралелна координатној равни XOZ.

187. Тангентна раван из дате тачке. — Узмимо одређену тачку (x_1, y_1, z_1) ван дате површине (1).

Тражи се постављање тангентне равни из дате тачке на ову површину. Проблем се своди, дакле на одређивање координата тачке додира тангентне равни. Пошто њену једначину задовољавају координате дате тачке $P(x_1, y_1, z_1)$, то тражене координате које ћемо означити са x, y, z задовољавају услов

$$f'_x(x_1 - x) + f'_y(y_1 - y) + f'_z(z_1 - z) = 0 \tag{18}$$

Осим тога координате тражене тачке задовољавају и једначину дате површине (1). Али ове две једначине нису довољне за одређивање тражене тачке, већ одређују читаво геометриско место тачака, које се налазе у пресеку дате површине (1) и равни (18). У овој равни, дакле, леже све тачке, где равни које пролазе кроз дату тачку (x_1, y_1, z_1) додирују дату површину (1).

Посматрајмо сад површину конуса са теменом у тачки P чија је директриса равна крива, пресек површине (1) и равни (18). Очевидно је да овај конус додирује површину (1) дуж наведене директрисе. Заиста, кроз сваку тачку ове директрисе пролази једна генератриса, која очевидно лежи у тангентној равни површине у тој тачки. У истој равни налази се такође и тангента генератрисе, јер свака крива на површини која пролази кроз неку одређену тачку површине додирује у њој тангентну раван, те њена тангента лежи у тангентној равни површине. Према томе посматрани конус додирује површину у свакој тачки директрисе и како се каже описан је око те површине.

Лако је саставити једначину наведеног конуса. Једначине праве која спаја дату тачку (x_1, y_1, z_1) са тачком (x, y, z) директрисе изражавају се овако

$$\frac{X - x_1}{x - x_1} = \frac{Y - y_1}{y - y_1} = \frac{Z - z_1}{z - z_1} \tag{19}$$

где су X, Y, Z, текуће координате тачака посматране праве.

Уведимо ознаке

$$\frac{X - x_1}{Z - z_1} = \alpha, \quad \frac{Y - y_1}{Z - z_1} = \beta \tag{20}$$

Тада из једначине (19) налазимо

$$\frac{x - x_1}{z - z_1} = \alpha, \quad \frac{y - y_1}{z - z_1} = \beta$$

или

$$x = x_1 + \alpha(z - z_1), \quad y = y_1 + \beta(z - z_1). \tag{21}$$

Резултат елиминације величина x, y и z из четири једначине (1) (18) и (21) претставља карактеристичну једначину конуса

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0$$

Одавде се добија једначина посматраног конуса сменом величина α и β из образаца (20).

Узмемо ли на пр., једначину лопте са средиштем у координатном почетку и полупречником R (сл. 75)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{22}$$

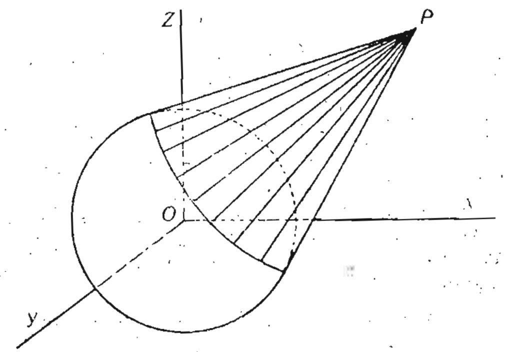
и тачку $P(x_1, y_1, z_1)$ ван ове лопте.

Једначина (18) у посматраном случају постаје

$$x(x_1 - x) + y(y_1 - y) + z(z_1 - z) = 0$$

и доводи се, због релације (22) на облик

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = R^2. \tag{23}$$



Сл. 75

Сменом образаца (21) у једначини (23) налазимо једначину за одређивање вредности z_1 и то

$$z - z_1 = S, \quad S \equiv \frac{R^2 - R_1^2}{\alpha x_1 + \beta y_1 + z_1}, \quad R_1^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Према томе обрасци (21) постају

$$x - x_1 = \alpha S, \quad y - y_1 = \beta S.$$

Стављајући одавде добијене вредности x, y и z у једначину (22) налазимо карактеристичну једначину траженог конуса у облику

$$(\alpha x_1 + \beta y_1 + z_1)^2 = (R_1^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta^2 + 1)$$

Најзад заменом вредности α и β из образаца (20) добија се тражена једначина описаног конуса

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2) = (x_1 X + y_1 Y + z_1 Z - R^2)^2.$$

Добијена једначина конуса може се написати и овако

$$\frac{(y_1 X - x_1 Y)^2 + (z_1 Y - y_1 Z)^2 + (x_1 Z - z_1 X)^2}{(X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 + (Z - z_1)^2} = R^2,$$

где су X, Y, Z текуће координате посматране површине.

188. Описани цилиндар. — Тражени цилиндар претставља геометриско место датом правцу паралелних тангената површине (1). Овај цилиндар може се посматрати као посебан случај описаног конуса чије се теме удаљи у бесконачност. Узмемо ли једначине праве у параметарском облику

$$x = x_0 + l\rho \qquad y = y_0 + m\rho \qquad z = z_0 + n\rho, \tag{24}$$

тачке њеног пресека са површином (1) одређене су једначином (в. n^0 156 стр. 157)

$$P\rho^2 + 2Q\rho + R = 0 \tag{25}$$

Права (24) додирује површину (1) кад су корени једначине (25) једнаки тј.

$$Q^2 - PR = 0.$$

Стављајући овде раније (в. n^0 156 стр. 157) наведене вредности **P, Q** и **R** налазимо тражени услов у облику

$$(f'_{x_0} l + f'_{y_0} m + f'_{z_0} n)^2 - 2f_0(A l^2 + A' m^2 + A'' n^2 + 2Bmn + 2B' ln + 2B'' lm) = 0. \tag{26}$$

Пошто су вредности l, m и n сталне величине, а x_0 y_0, z_0 претстављају координате одређене тачке праве линије (24) то добијени услов (26) одређује геометриско место тих тачака тј. површину описаног цилиндра око дате површине (1).

Уочимо, на пр., површину елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{27}$$

и означимо са x, y, z место x_0, y_0, z_0 текуће координате површине цилиндра описаног око овог елипсоида правац чијих је генератриса одређен вредностима

$$n = l = m = 1.$$

Према обрасцу (26) под овом претпоставком једначина цилиндра описаног око елипсоида (27), гласиће

$$[c(x-y)]^2 + [b(x-z)]^2 + [a(y-z)]^2 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2$$

Лако је увидети да за оба параболоида

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \tag{28}$$

описани цилиндри (26) чије су генератрисе паралелне координатним осама OX односно OY претстављају одређене параболичке цилиндре (в. 153, стр.). Међутим за обе површине параболоида (28) описани цилиндри чије су генератрисе паралелне оси кота дегенеришу у бескрајно удаљене равни.

189. Услов додира равни и површине. — Узмимо једначину равни у облику

$$lx + my + nz + h = 0 \tag{29}$$

где су l, m и n односно h стални коефицијенти. Посматрајмо једначину тангентне равни површине (1) у облику (6) где x_0, y_0, z_0 означавају координате тачке додира. Да би једначина (29) претстављала тангентну раван мора се поклапати са једначином (6). Одатле долазимо до једнакости

$$\frac{f'_{x_0}}{l} = \frac{f'_{y_0}}{m} = \frac{f'_{z_0}}{n} = \frac{f'_0}{h}.$$

Означимо ли са λ величину ових размера, онда стављајући експлицитне вредности f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0} и f'_0 добијамо једнакости

$$\begin{aligned} Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C - l\lambda &= 0, \\ B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C' - m\lambda &= 0, \\ B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'' - n\lambda &= 0, \\ Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + F - h\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Најзад, пошто раван (29) мора додиривати површину (1) у тачки (x_0, y_0, z_0) имамо идентичност

$$lx_0 + my_0 + nz_0 + h = 0 \tag{31}$$

Из пет једнакости (30) и (31) добија се тражени услов у облику детерминанте која претставља резултат елиминације x_0, y_0, z_0 и λ из тих једначина, тј.

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & l \\ B'' & A' & B & C' & m \\ B' & B & A'' & C'' & n \\ C & C' & C'' & F & h \\ l & m & n & h & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

Према томе, ако је услов (32) испуњен раван (29) додирује површину (1). Што се тиче тачке додира, њене се координате одређују из три одређене од једначина (30) и (31) пошто се из њих елиминишу вредности помоћног параметра λ. Узмимо, на пример површину једнокрилног хиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Тада се услов (32) његова додира са равни (29) изражава у облику

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & -1 & h \\ l & m & n & h & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Кад израчунамо детерминанту на левој страни ове једнакости тај услов постаје

$$l^2a^2 + m^2b^2 - n^2c^2 - h^2 = 0$$

На пр., свака од две равни

$$2x + \frac{3}{2}y + z \pm 2 = 0 \tag{33}$$

додирује једнокрилни хиперболоид

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1\,, \tag{34}$$

где је за њих претходни услов идентички задовољен. Да бисмо нашли координате њихове тачке додира, искористимо све четири једначине (30) које, за посматрану раван (33) и једнокрилни хиперболоид (34), постају

$$x_0 - 2\lambda = 0\,, \quad \frac{y_0}{4} - \frac{3}{2}\lambda = 0\,, \quad \frac{z_0}{9} + \lambda = 0\,, \quad 1 \pm 2\lambda = 0\,.$$

Према томе тражене координате добијају вредности

$$x_0 = \mp 1\,, \quad y_0 = \mp 3\,, \quad z_0 = \pm \frac{9}{2}\,,$$

где горњи знаци одговарају горњем знаку у једначини (33) а доњи знаци доњем знаку те једначине.

190. Услов додира праве и површине. — Уочимо праву која је одређена скупом две равни чије су једначине

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv lx + my + nz + h = 0, \\ L_1 &\equiv l_1x + m_1y + n_1z + h_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где L и L_1 означавају на скраћени начин израз левих страна наведених једначина. Узмимо једначину тангентне равни површине (1) у облику (6) тј.

$$T \equiv f'_{x_0}x + f'_{y_0}y + f'_{z_0}z + f'_0 = 0 \tag{36}$$

Да би се права (35) налазила у равни (36) мора постојати нека раван

$$L + \lambda L_1 = 0$$

која пролази кроз праву (35) а која се поклапа са равни (36). Према томе постоји једнакост

$$T = \mu L + \mu_1 L_1,$$

где су μ и μ_1 стални неодређени коефицијенти. Одавде изједначујући коефицијенте уз чланове са текућим координатама долазимо до једначина

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_0} &= \mu l + \mu_1 l_1\,, \quad f'_{y_0} = \mu m + \mu_1 m_1\,, \\ f'_{z_0} &= \mu n + \mu_1 n_1, \quad f'_0 = \mu h + \mu_1 h_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Осим тога права (35) мора пролазити кроз тачку додира (x_0, y_0, z_0). Према томе морају постојати услови

$$L_0 = 0, \qquad L_{10} = 0, \tag{38}$$

где L_0 и L_{10} означавају резултат смене координата тачке додира у левим странама једначина (35). Шест по

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad \mu_1, \quad \mu_2,$$

линеарних једначина (37) и (38) морају бити сагласне. Услов њихове сагласности изражава се једнакошћу

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & l & l_1 \\ B'' & A' & B & C' & m & m_1 \\ B' & B & A'' & C'' & n & n_1 \\ C & C' & C'' & F & h & h_1 \\ l & m & n & h & 0 & 0 \\ l_1 & m_1 & n_1 & h_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако узмемо као пример двокрилни хиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

одговарајући услов његовог додира са правом општег облика (35) изражава се овако

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & l & l_1 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & m & m_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 & n & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h & h_1 \\ l & m & n & h & 0 & 0 \\ l_1 & m_1 & n_1 & h_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијени услов може се написати и у облику

$$a^2(lh_1 - l_1h)^2 + b^2(mh_1 - m_1h)^2 - c^2(nh_1 - n_1h)^2 +$$
$$+ a^2b^2(lm_1 - l_1m)^2 - a^2c^2(ln_1 - l_1n)^2 - b^2c^2(mn_1 - m_1n)^2 = 0$$

191. Нормала површине. — Нормалом површине у датој тачки (x_0, y_0, z_0) зове се права која је управна на тангентној равни у тој тачки површине. Према облику (6) за тангентну раван површине (1), једначине нормале у тачки (x_0, y_0, z_0) постају

$$\frac{x - x_0}{f'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{f'_{y_0}} = \frac{z - z_0}{f'_{z_0}},$$

где $f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$ имају пређашњу вредност.

VI. Асимптоте

192. Дефиниција. — Средишне површине. — Уочимо општу једначину површине другог степена

$$\left.\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + \\ &\qquad + 2C''z + F = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

При проучавању пресека ове површине са правом линијом, чије су једначине дате у параметарском облику

$$x = x_0 + l\rho, \qquad y = y_0 + m\rho, \qquad z = z_0 + n\rho \tag{2}$$

увели смо (в. n^0 156, стр. 158) појам асимптотског правца који пролази кроз бескрајно удаљену тачку посматране површине (1) и задовољава услов

$$P \equiv Al^2 + A'm^2 + A''n^2 + 2Bmn + 2B'ln + 2B''lm = 0 \tag{3}$$

Пошто су величине l, m и n везане само једном релацијом (3) то постоји неограничен број асимптотских праваца. Међутим вратићемо се опет једначини

$$P\rho^2 + 2Q\rho + R = 0,$$

која одређује обе тачке пресека праве (2) са површином (1) при чему коефицијенти P, Q и R имају раније вредности.

Услов да се обе тачке пресека поклапају изражава се једнакошћу

$$Q^2 - PR = 0. \tag{4}$$

Уведемо ли сад услов (3) за одређивање асимптотских праваца добија се из услова (4) накнадна једнакост.

$$Q \equiv f'_{x_0} l + f'_{y_0} m + f'_{z_0} n = 0. \tag{5}$$

Пошто су l, m и n величине сразмерне са косинусима углова, које права (2) заклапа са координатним осама, то оба услова (3) и (5) заједно одређују само један асимптотски правац, који додирује површину (1) у бескрајно удаљеној тачки. Али ако уведемо накнадно услов да једначина (5) мора постојати за ма које вредности коефицијената l, m и n, то добијамо нове услове

$$f'_{x_0} = 0 \quad f'_{y_0} = 0 \quad f'_{z_0} = 0. \tag{6}$$

Изведене једначине траже да све праве (2) морају пролазити кроз једну исту тачку која је одређена једначинама (6) тј. за средишне површине (1) кроз њихово средиште.

Према томе сви асимптотски правци који су одређени једнакошћу (3) морају пролазити кроз средиште површине, те образују површину конуса, који се зове асимптотски конус. Да бисмо састазили једначину тог конуса сменимо вредности l, m и n у једначини (3) са сразмерним величинама, које се добијају из једначина (2). На тај начин тражена једначина постаје

$$\begin{aligned} &A(x - x_0)^2 + A'(y - y_0)^2 + A''(z - z_0)^2 + 2B(y - y_0)(z - z_0) + \\ &\qquad 2B'(x - x_0)(z - z_0) + 2B''(x - x_0)(y - y_0) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где су према претходном x_0, y_0, z_0 координате средишта површине (1), које се одређују једначинама (6). Пренесимо координатни почетак у средиште површине транслацијом оса. Тада се једначина посматраних површина (1) изражава у облику (з. n^0 170, стр. 178)

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 + \frac{D}{\Delta} = 0 \tag{8}$$

где су x_1, y_1, z_1 ознаке текућих координата у односу на уведени нови координатни систем. У односу на исти координатни систем једначина асимптотског конуса (7) изражава се озако

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 = 0, \tag{9}$$

и одређује конус чије се теме налази у координатном почетку.

Добијена једначина (9) поклапа се са једначинама коничних пресека у равни у хомогеним координатама. Ако је дискриминанта

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A'' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \tag{10}$$

различита од нуле, једначина (1) одређује једну од средишних површина. Према теорији коничних пресека једначина (9) своди се ротацијом координатних оса, на једначину облика

$$A_1 x'^2 + A_1' y'^2 + A_1'' z'^2 = 0.$$

Одавде се види да је за елипсоид асимптотски конус имагинаран, за оба хиперболоида је реалан и да се у случају конуса одговарајући му асимптотски конус поклапа са датим конусом.

Заиста коефицијенти елипсоида A_1, A_1', A_1'', су позитивни па према томе написана једначина одређује само једну реалну тачку која се поклапа са координатним почетком.

За оба хиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

њихови асимтотски конуси одређују се са истом једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

Означимо ли са x_1, y_1, z_1 координате тачке M_1 посматраних површина хиперболоида а са x_2, y_2, z_2 координате тачке M_2 асимптотских конуса, добијамо једнакости

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=\pm 1\,, \qquad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}=0\,,$$

чија је разлика

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2-z_1^2}{c^2}=\pm 1\,, \tag{11}$$

Одавде излазе ови закључци.

Прво, ако претпоставимо да је

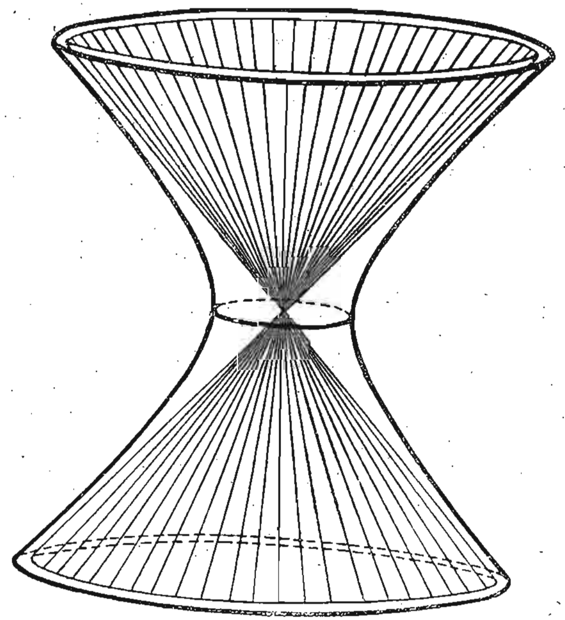
$$y_1=y_2, \qquad z_1=z_2$$

добијамо за једнокрилни хиперболоид $x_1 > x_2$ односно за двокрилни хиперболоид $x_2 > x_1$. Уведемо ли претпоставку

$$x_1=x_2, \qquad z_1=z_2.$$

долазимо до закључка за једнокрилни хиперболоид $y_1 > y_2$, односно за двокрилни хиперболоид $y_2 > y_1$.

Према томе види се да је асимптотски конус уписан у површину једно-



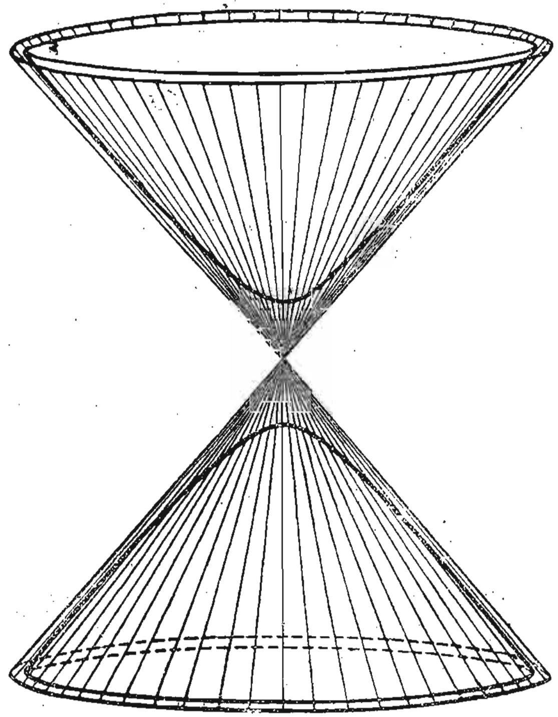
Сл. 76

крилног хиперболоида (в. сл. 76), а описан око двокрилног хиперболоида (в. сл. 77).

Други закључак, који се изводи из једнакости (11) гласи да за $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$ добијамо

$$z_2-z_1=\pm\frac{c^2}{z_2+z_1}\,,$$

тј. разлика $z_2 - z_1$ тежи нули, кад z_1 и z_2 бескрајно расту. То показује



Сл. 77

да тачке оба посматрана конуса теже у бесконачности тачкама својих хиперболичких површина.

193. Површине без средишта. — Ако једначина (1) одређује површине без средишта тада постоји услов

$$\Delta = 0 \tag{12}$$

Под овом претпоставком се услов (3) у односу на промењиве параметре l, m и n, раставља у два по њима линеарна услова. Одавде се добијају помоћу образаца (2), две равни асимптотских праваца. Да би оне образовале асимптотски конус морају сви асимптотски правци пролазити кроз тачку одређену једначинама (6).

Међутим, под условом (12) једначине (6) одређују или бескрајно удаљену тачку, или низ тачака дуж једне праве или у једној равни.

Под први услов подпадају површине оба параболоида, чије једначине гласе

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{13}$$

где горњи знак одговара елиптичком а доњи хиперболичком параболоиду.
За обе површине (13) прве две једначине (6) постају

$$x = 0, \qquad y = 0, \tag{14}$$

а трећа једначина (6) одређује бескрајно удаљену раван.

Међутим, сад услов (3), који задовољавају у посматраном случају асимптотски правци површина (13), постаје

$$\frac{l^2}{p} \pm \frac{m^2}{q} = 0; \tag{15}$$

где горњи знак одговара елиптичком параболоиду а доњи хиперболичком параболоиду.

Пошто вредности (14) одговарају x_0 односно y_0 у прва два од образаца (2) имамо

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m}$$

Према томе услов (15) одређује геометриско место асимптота у облику једначина, које одређују скуп две равни, наиме:

$$\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 0.$$

Због тога асимптотски конус елиптичког параболоида дегенерише у две имагинарне равни, које се секу дуж реалне осе. Ова се поклапа са координатном осом кота. Другим речима посматрани асимптотски конус претставља реалну праву, која се поклапа са осом кота.

Асимптотски конус пак, хиперболичког параболоида дегенерише у скуп две равни

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \tag{16}$$

које се секу дуж осе кота, а симетрично су постављене у односу на координатну раван XOZ.

Ове се поклапају са равнима које смо раније назвали (в. стр, 172) директорним равнима посматраног параболоида. Те равни пролазе кроз линије пресека хиперболичког параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \tag{17}$$

са координатном равни XOY (в. стр. 172).

Шта више лако је уверити се да директорне равни (16) претстављају геометриско место асимптота хиперболичких пресека хиперболоида (17) са сваком равни, која је паралелна равни XOY,

$$z = z_0$$

Заиста у овој равни та хипербола изражава се једначином

$$\frac{x^2}{2z_0 p} - \frac{y^2}{2z_0 q} = 1.$$

Према томе обе асимптоте посматране хиперболе изражавају се једначинама (16).

Прелазимо сада на посматрање површина елиптичког и хиперболичког цилиндра, чије су једначине

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Њихове се геометриске осе поклапају са осом кота која је геометриско место њихових центара.

Анализа слична пређашњем посматрању доказује да асимптотски конус елиптичког цилиндра дегенерише у две имагинарне равни, које се секу дуж осе цилиндра, или у реалну праву, која се поклапа са истом осом.

Међутим, асимптотски конус хиперболичког цилиндра своди се на скуп две реалне равни, које се секу дуж осе тог цилиндра и додирују га у бесконачности.

Површина параболичког цилиндра

$$y^2 = 2px$$

има бескрајно удаљену праву као геометриско место својих центара и асимптотски конус у облику две равни, које се поклапају.

Исти је случај и за две паралелне равни.

VII. Полови и поларне равни

194. Дефиниција. — Једначина поларне равни. — Уочимо једначину површине другог степена општег облика

$$2f(x, y, z) \equiv SAx^2 + 2SByz + 2SCx + F = 0 \tag{1}$$

и једначину његове тангентне равни у тачки (x_0, y_0, z_0) тј.

$$f'_{x_0}x + f'_{y_0}y + f'_{z_0}z + f'_0 = 0 \tag{2}$$

Ова једначина ће претстављати увек раван и у случају ма којих вредности x_0, y_0, z_0 ма које тачке у простору. Једначина (2) одређује п о л а р н у р а в а н површине (1) у односу на тачку (x_0, y_0, z_0), која се тада зове п о л р а в н и (2).

Према томе може се казати да је поларна раван у односу на тачку њеног додира са површином (1) тангентна раван у полу поларне равни и обрнуто је пол тангентне равни тачка њеног додира са површином.

Узмимо одређену раван

$$lx + my + nz + h = 0 \tag{3}$$

и потражимо њен пол. Ако означимо његове координате са x_1, y_1, z_1 одговарајућа му поларна раван гласи према дефиницији

$$f'_{x_1}x + f'_{y_1}y + f'_{z_1}z + f'_1 = 0.$$

Пошто се ова једначина поклапа са једначином равни (3) то се добијају услови

$$\frac{f'_{x_1}}{l}=\frac{f'_{y_1}}{m}=\frac{f'_{z_1}}{n}=\frac{f_1'}{h}.$$

Ако означимо са λ заједничку вредност ових размера, налазимо за одређивање тражених координата x_1, y_1, z_1 пола и помоћног параметра λ систем четири једначине

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + B''y_1 + B'z_1 + C &= l\lambda,\\ B''x_1 + A'y_1 + Bz_1 + C' &= m\lambda,\\ B'x_1 + By_1 + A''z_1 + C'' &= n\lambda\\ Cx_1 + C'y_1 + C''z_1 + F &= h\lambda. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ако су обе дискриминанте D и Δ, различите од нуле, линеарне једначине (4) су различите по

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad \text{и} \quad \lambda \tag{5}$$

Узмимо детерминанту коефицијената уз x_1, y_1, z_1 и $-\lambda$ у једначинама (4)

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & l\\ B'' & A' & B & m\\ B' & B & A'' & n\\ C & C' & C'' & h \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Ако је она различита од нуле, промењљиве (5) добијају потпуно одређене вредности и тачка (x_1, y_1, z_1) претставља тражени пол равни (3). Међутим ако се детерминанта (6) анулира, постоји једнакост, која се добија развијањем те детерминанте по елементима последње колоне, наиме:

$$-l\begin{vmatrix} B'' & A' & B\\ B' & B & A''\\ C & C' & C'' \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} A & B'' & B'\\ B' & B & A''\\ C & C' & C'' \end{vmatrix} - n$$

$$-n\begin{vmatrix} A & B'' & B'\\ B'' & A' & B\\ C & C' & C'' \end{vmatrix} + h\Delta = 0. \tag{7}$$

Вратимо се сад обрасцима (7), (8) и (9), из n^0 169 на стр. 175. У тим ознакама детерминанте које фигуришу на левој страни једнакости (7), благодарећи размени врста и колона, изражавају се редом овако

$$\Delta', \; -\Delta'', \; \Delta'''$$

Поделимо ли сад све чланове идентичности (7) са Δ, она постаје

$$lx_c + my_c + nz_c + h = 0. \tag{8}$$

Према томе ако се детерминанта (6) анулира и величине (5) постају бесконачне, тражени пол (x_1, y_1, z_1) удаљава се у бесконачност. Тада идентичност (8) показује да посматрана раван (3) пролази, кроз центар површине (1) тј. претставља дијаметарску раван.

Одавде следује закључак:

Ако је површина (1) средишна, онда се пол дијаметарске равни налази бесконачности.

Лако је доказати и обрнути став. Заиста, координате средишта површине (1) задовољавају услове,

$$f'_{x_c}=0, \qquad f'_{y_c}=0, \qquad f'_{z_c}=0.$$

Ако ставимо x_c, y_c, z_c у једначину поларне равни (2) место x_0, y_0, z_0 ова постаје

$$f'_c \equiv Cx_c + C'y_c + C''z_c + F = 0$$

где је лева страна написане једнакости стална величина. Под уведеном претпоставком, једначина (2) одређује бескрајно удаљену раван.

Према томе *поларна раван пола који се налази у центру средишне површине (1) претставља бескрајно удаљену раван.*

195. Особине поларне равни. — Означимо са x_2, y_2, z_2, координате одређене тачке која се налази у поларној равни (2) тачке (x_0, y_0, z_0). Према томе имамо идентичност

$$(Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C)x_2 + (B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C')y_2 +$$
$$+ (B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'')z_2 + Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + F = 0.$$

Ова једнакост може се написати друкчије, груписањем својих чланова, овако

$$(Ax_2 + B''y_2 + B'z_2 + C)x_0 + (B''x_2 + A'y_2 + Bz_2 + C')y_0 +$$
$$+ (B'x_2 + By_2 + A''z_2 + C'')z_0 + Cx_2 + C'y_2 + C''z_2 + F = 0.$$

Добијена идентичност показује да се тачка (x_0, y_0, z_0) налази у равни

$$f'_{x_2}x + f'_{y_2}y + f'_{z_2}z + f'_2 = 0, \tag{9}$$

где је

$$f'_2 \equiv Cx_2 + C'y_2 + C''z_2 + F.$$

Пошто једначина (9) одређује према дефиницији поларну раван пола (x_2, y_2, z_2) то долазимо до овог закључка.

Ако одређена тачка лежи на поларној равни неке друге тачке мора се ова налазити на поларној равни прве тачке.

Две тачке од којих се свака налази у поларној равни друге тачке, зову се к о н ј у г о в а н е т а ч к е. Слично се и две равни од којих свака пролази кроз пол друге равни зову к о н ј у г о в а н е. Према томе, а на основу појмова о конјугованим тачкама и конјугованим равнима следују два закључка:

1° *Полови низа равни које пролазе кроз исту тачку, налазе се на њеној поларној равни;*

2° *Поларне равни тачака које леже у истој равни, пролазе кроз пол те равни.*

Уведимо сад појам у з а ј а м н о п о л а р н и х п р а в и х. За то посматрајмо праву L, која пролази кроз две дате тачке M_1 и M_2 и другу праву L' пресека њихових поларних равни. Поларне равни свих тачака, које леже на једној од ових правих, пролазе кроз другу праву; међутим полови свих равни које пролазе кроз једну од наведених правих леже на другој правој. Посматране праве су такве да су тачке једне од њих конјуговане са свима тачкама друге праве и стога се зову узајамно поларне.

Одавде следује да тачка пресека две узајамно поларне праве претставља пол равни која кроз њих пролази. Према томе ова раван је тангентна. У исто време права која спаја две ма које тачке површине и друга права по којој се секу тангентне равни, у тим тачкама површине, су узајамно поларне.

Ма која тачка тангентне равни површине конјугована је са њеном тачком додира. Одавде следује да се тачке додира свих тангентних равни, а у исто време и тангентних правих, које пролазе кроз дату тачку, налазе у поларној равни ове тачке. Међутим, доказали смо (в. n^0 187, стр. 201) да све тангентне праве које пролазе кроз дату тачку образују коничну површину описану око дате површине. Према томе, крива, дуж које овај конус додирује површину претставља, дакле, криву пресека те површине са поларном равни темена конуса.

Четири равни, од којих је свака конјугована са три друге образују поларни тетраедар. Његова темена су полови супротних страна тетраедра. Међутим сваке две супротне ивице посматраног тетраедра претстављају две узајамно поларне праве. Постоји неограничени број поларних тетраедара за сваку површину другог степена. Заиста, прво теме оваквог тетраедра може се узети потпуно произвољно. Друго теме, може се узети произвољно у поларној равни првог темена.

Тада се за треће и четврто теме бирају две ма какве конјуговане тачке праве која је узајамно поларна са правом која пролази кроз два прва темена.

Претпоставимо да се тачка (x_0, y_0, z_0) налази у координатном почетку. Тада се једначина (2) одговарајуће поларне равни изражава овако

$$Cx + C'y + C''z + F = 0$$

За вредност $z = 0$ ова једначина постаје

$$Cx + C'y + F = 0. \tag{15}$$

и претставља праву пресека те поларне равни са координатном равни XOY. Што се тиче линије пресека посматране површине (1) са равни $z = 0$, њена једначина гласи

$$Ax^2 + 2B''xy + A'y^2 + 2Cx + 2C'y + F = 0. \tag{16}$$

Очевидно је да једначина (15) претставља полару координатног почетка у односу на конични пресек (16). Одавде се види да права пресека произвољне равни, која пролази кроз дату тачку, са поларном равни ове тачке претставља полару исте тачке у односу на конични пресек површине са датом произвољном равни. Према томе *поларна раван дате тачке у односу на површину* (1) може се дефинисати као *геометриско место тачака које, са датом тачком, деле хармониски тетиве које кроз њих пролазе.*

VIII. Жиже и фокалне криве

196. Дефиниција. — Проширимо на површине другог реда појмове жижа и директриса коничних пресека.

Узмимо за то, у односу на одређен правоугли праволиниски координатни систем тачку $F(\alpha, \beta, \gamma)$ и две равни, чије су једначине дате у облику

$$\left.\begin{aligned} lx + my + nz + h &= 0,\\ l_1x + m_1y + n_1z + h_1 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Потражимо сад геометриско место тачака $M(x, y, z)$, чије је растојање од дате тачке $F(\alpha, \beta, \gamma)$ у сталном односу са средњом геометриском величином растојања истих тачака од датих равни (1). Означимо са d растојање између тачака M и F, односно са ν и ν_1 растојања тачке M од сваке равни (1). Према дефиницији координате тачака траженог геометриског места задовољавају услов

$$\frac{d}{\sqrt{\nu\nu_1}} = e, \qquad \text{или } d^2 = e^2\nu\nu_1, \tag{2}$$

где је e дата стална величина, а

$$d^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

$$\nu = \frac{lx + m + nz + h}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\nu_1 = \frac{l_1x + m_1y + n_1z + h_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}$$

Сменом наведених вредности у једнакости (2) добијамо једначину траженог геометриског места у облику

$$\begin{aligned}(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 &= \\ = (l'x + m'y + n'z + h')\,(l_1'x + m_1'y + n_1'z + h_1')\end{aligned} \tag{3}$$

где горњи индекс коефицијената означава производ одговарајућих коефицијената са сталним множитељем,

$$\frac{e}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \text{односно} \quad \frac{e}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}$$

197. Средишне површине. — Проучимо, најпре, средишне површине чије једначине (изузев површине конуса) напишимо у општем облику овако

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1, \tag{4}$$

при чему су за елипсоид сва три коефицијента A, B и C позитивна, за једнокрилни хиперболоид је један од ових коефицијената негативан а за двокрилни хиперболоид два од три коефицијената су негативна.

Да бисмо проучили жиже средишних површина упоредимо њихову једначину (4) са једначином (3). Стога се њени чланови са производима и првим степенима текућих координата морају анулирати.

На тај начин добијају се услови

$$l'm_1' + l_1'm' = 0, \quad l'n_1' + l_1'n' = 0, \quad m'n_1' + m_1'n' = 0 \tag{5}$$

$$2\alpha + l'h_1' + l_1'h' = 0, \quad 2\beta + m'h_1' + m_1'h' = 0, \quad 2\gamma + n'h_1' + n_1'h' = 0. \tag{6}$$

Међутим, остали чланови једначина (3) и (4) морају бити сразмерни. Према томе налазимо једнакости

$$A(1 - l'l_1') = B(1 - m'm_1') = C(1 - n'n_1') = h'h_1' - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \tag{7}$$

Напишимо једнакости (5) овако

$$l'm_1' = -l_1'm', \quad l_1'n' = -l'n_1', \quad m'n_1' = -m_1'n'$$

и измножимо их; тада се добија једнакост

$$2l'l_1'm'm_1'n'n_1' = 0. \tag{8}$$

Одавде се закључује да бар један од коефицијената

$$l', \quad l_1', \quad m', \quad m_1', \quad n', \quad n_1'$$

мора бити једнак нули.

Ако ставимо да је

$$l' = 0, \tag{9}$$

из прве и друге једнакости (5) добијамо

$$l_1'm' = 0, \quad l_1'n' = 0,$$

одакле следује

$$l_1' = 0 \tag{10}$$

или

$$m' = 0 \quad n' = 0. \tag{11}$$

Проучимо само прву претпоставку (9) и (10). При другој претпоставци (9) и (11) прва од равни (1) постаје бескрајно удаљена.

Под условима (9) и (10), задовољене су две прве једначине (5) а прва једначина (6) даје

$$\alpha = 0. \tag{12}$$

Уведимо сад нове ознаке u, v, β' и γ'.

$$m'm_1' = u, \quad n'n_1' = v,$$
$$m'h_1' + m_1'h' = -2u\beta', \quad n'h_1' + n_1'h' = -2v\gamma' \tag{13}$$

Два последња обрасца дају, на основу два прва,

$$-2\beta' = \frac{m'h_1' + m_1'h'}{m'm_1'}, \quad -2\gamma' = \frac{n'h_1' + n_1'h'}{n'n_1'}.$$

Ако дигнемо на квадрат обе стране ових образаца и саберемо резултате, добијамо овакву једнакост

$$4(u\beta'^2 + v\gamma'^2) = \frac{(m'h_1' + m_1'h')^2}{m'm_1'} + \frac{(n'h_1' + n_1'h')^2}{n'n_1'} = \frac{m'^2h_1'^2 + m_1'^2h'^2}{m'm_1'} + \frac{n'^2h_1'^2 + n_1'^2h'^2}{n'n_1'} + 4h'h_1'.$$

Овај резултат може се написати и овако

$$u\beta'^2 + v\gamma'^2 = \frac{(m'n'h_1'^2 + m_1'n_1'h'^2)(m'n_1' + m_1'n')}{4m'm_1'n'n_1'} + h'h_1'$$

Због последње једнакости (5), међутим, добијамо

$$u\beta'^2 + v\gamma'^2 = h'h_1'. \tag{14}$$

Најзад служећи се ознакама (13) и једначинама (12) и (14), једначине (6) и (7) постају

$$\beta = u\beta' \qquad \gamma = v\gamma'$$
$$A = B(1 - u) = C(1 - v),$$
$$u\beta'^2 + v\gamma'^2 - \beta^2 - \gamma^2 = A.$$

Елиминишући из добијених пет релација четири величине u, v, β' и γ', добијамо једнакост

$$\left(\frac{1}{u} - 1\right)\beta^2 + \left(\frac{1}{v} - 1\right)\gamma^2 = A,$$

или

$$\frac{\beta^2}{B - A} + \frac{\gamma^2}{C - A} = 1.$$

Добијена једначина показује да постоји неограничени број тачака у координатној равни YOZ, које играју улогу жижа. Њихово геометриско место зове се ф о к а л н а к р и в а посматраних површина (4). Њена једначина гласи

$$\frac{y^2}{B - A} + \frac{z^2}{C - A} = 1. \tag{15}$$

Овим жижама одговарајуће праве (1) чије једначине, према условима (9) и (10), постају

$$m'y + n'z + h' = 0$$
$$m_1'y + n_1'z + h_1' = 0,$$

одређују д и р е к т р и с е. Ове одговарају свакој жижи која се налази на фокалној кривој (15) и паралелне су оси OX те образују цилиндричну површину чије су генератрисе паралелне оси OX.

Вратимо се сад услову (8). На сличан начин са претходном претпоставком (9) и (10) морају се проучити још два друга случаја који одговарају претпоставкама

$$m' = m_1' = 0$$
$$n' = n_1' = 0.$$

Према томе добијају се још две нове фокалне криве и то у координатним равнима XOZ и XOY, које су одређене једначинама

$$\beta = 0, \quad \frac{x^2}{A - B} + \frac{z^2}{C - B} = 1, \tag{16}$$

односно

$$\gamma=0\,,\quad \frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1\,. \tag{17}$$

Проучимо сад засебно сваку од средишних површина (4).

1° Претпоставимо да је у случају елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,, \tag{18}$$

$$a>b>c \tag{18}$$

Под овом претпоставком, једначина фокалне линије (15), у координатној равни $x=0$, претставља и м а г и н а р н у   е л и п с у. Међутим једначине (16) и (17), у координатним равнима $y=0$, односно $z=0$, одређују х и п е р б о л у односно р е а л н у   е л и п с у.

Једначина хиперболе гласи

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1\,.$$

Лако је доказати да се ова фокална крива сече са главним пресеком у равни $y=0$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

посматраног елипсоида у реалним тачкама, наиме

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad z=\pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

а који су са $y=0$, координате тачака заокругљивања нашега елипсоида (в. обрасце (16) на стр. 162).

Међутим, једначина фокалне елипсе у равни $z=0$ истог елипсоида претставља елипсу која лежи унутра главног пресека

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

па га не може сећи у реалним тачкама.

2° Претпоставимо сад да једначина (4) одговара једнокрилном хиперболоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

чије полуосе испуњавају услов (18). И за ову површину фокалне линије, исто као у случају елипсоида, претстављају и м а г и н а р н у   е л и п с у у равни $x=0$, х и п е р б о л у у равни $y=0$, односно р е а л н у   е л и п с у у равни $z=0$.

Једначине ове две реалне криве су редом

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2+c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2+c^2}+\frac{y^2}{b^2+c^2}=1\,,$$

Ове криве не секу се са површином нашег једнокрилног хиперболоида у реалним тачкама.

3° Ако површина (4) претставља двокрилни хиперболоид то је

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

под условом (18). Према томе коефицијенти A, B, и C сада задовољавају услов

$$A<B<C.$$

Зато фокална крива (15) претставља р е а л н у   е л и п с у у координатној равни $x=0$, а једначина (16) одређује х и п е р б о л у у равни $y=0$ са реалном осом OZ. Једначине ових фокалних кривих су

$$\frac{y^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{a^2+c^2}=1\,,$$

$$\frac{x^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{b^2+c^2}=1$$

Прва од њих сече се са главним пресеком посматраног двокрилног хиперболоида у равни $y=0$, баш у његовим тачкама заокругљивања. Међутим друга фокална крива неће сећи нашу површину у реалним тачкама.

Најзад, фокална крива (17) у координатној равни $z=0$, претставља и м а г и н а р н у   е л и п с у.

Изложена испитивања доказују да *свака средишна површина другог степена, има по три фокалне криве другог степена, које леже у равнима главних пресека и претстављају са њима конфокалне коничне пресеке.*

198. Цилиндричне површине директриса. — Осврнимо се на основу једнакости (3), која і од претпоставкама (9), (10) и (12) постаје

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=(m'y+n'z+h)\,(m_1\,y+n_1'z+h_1)$$

Међутим због трећег услова (5) и уведених ознака (13) и њихове последице (14) ова се основна једнакост може изразити овако

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=u(y-\beta')^2+v(z-\gamma')^2.$$

Добијена једначина показује да су β и γ координате ма какве тачке директрисе. Према предходним обрасцима (в. стр. 217) имамо

$$\beta=u\beta'=\frac{B-A}{B}\,\beta'\qquad \gamma=v\gamma'=\frac{C-A}{C}\,\gamma'$$

Стављајући ове вредности β и γ у једначину одговарајуће фокалне криве, добијамо

$$\frac{(B-A)\,\beta'^2}{B^2}+\frac{(C-A)\,\gamma'^2}{C^2}=1\,.$$

Нађена релација престаје услов који морају задовољавати координате тачака директрисе. Уведемо ли ознаке x, y, z за текуће координате дотичних тачака, добијена једначина постаје

$$\frac{(B-A)\,y^2}{B^2}+\frac{(C-A)\,z^2}{C^2}=1\,.$$

Ова одређује површину цилиндра чије су генератрисе паралелне оси OX, па свака од њих одговара жижи, чије је геометриско место фокална крива, у равни $x=0$, изражена једначином (15).

На аналоган начин добијају се још две цилиндричне директрисе, које одговарају фокалним кривим у координатним равнима XOZ, односно XOY, а чије су једначине

$$\frac{(A-B)\,x^2}{A^2}+\frac{(C-B)\,z^2}{C^2}=1\,,$$

$$\frac{(A-C)\,x^2}{A^2}+\frac{(B-C)\,y^2}{B^2}=1\,.$$

Ове три нађене једначине одређују површине цилиндара и то елиптичних или хиперболичких, чије су генератрисе паралелне одговарајућим координатним осама. Да бисмо утврдили њихову врсту, треба подвући да коефицијенти ових једначина имају баш исти знак, позитиван или негативан као и једначине фокалних кривих (15), (16) и (17) којима дотични цилиндри одговарају, ма да су вредности коефицијената посматраних једначина различите по својој величини. Према томе су површине ових директорних цилиндара реалне или имагинарне истовремено са одговарајућим фокалним кривима. Шта више ти цилиндри су елиптички кад су одговарајуће фокалне криве елипсе, а цилиндри су хиперболички за фокалне криве у облику хипербола.

Препуштамо читаоцу да сам докаже да су фокалне криве и директрисе, у њиховој равни, директорних цилиндара узајамно поларне криве према одговарајућем главном пресеку посматране површине. Друго питање које ћемо препоручити иницијативи читалаца јесте да испитују особине фокалних кривих конусних површина другог реда.

199. Конфокалне површине. — Површине, које имају исте фокалне криве зову се конфокалне. Уочимо две средишне површине другог степена, чије се главне равни поклапају, а једначине гласе

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1\,,\\ &\frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}=1\,.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Према претходном, њихове фокалне криве изражавају се једначинама

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1\,,\quad \frac{x^2}{A-B}+\frac{z^2}{C-B}=1\,,\quad \frac{y^2}{B-A}+\frac{z^2}{C-A}=1\,,$$

односно

$$\frac{x^2}{A'-C'}+\frac{y^2}{B'-C'}=1\,,\quad \frac{x^2}{A'-B'}+\frac{z^2}{C'-B'}=1\,,\quad \frac{y^2}{B'-A'}+\frac{z^2}{C'-A'}=1\,.$$

Одавде се добијају услови, кад се ове фокалне криве поклапају, у облику

$$A-C=A'-C',\qquad B-C=B'-C'$$

или

$$A-A'=B-B'=C-C'.$$

Означимо ли са λ заједничку вредност ових размера, написаћемо једначину друге посматране површине на овај начин

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1\,.\qquad(20)$$

Добијена једначина, за различите вредности λ претставља породицу површина, које су конфокалне са датом површином, првом у (19).

Уведимо претпоставку

$$A>B>C.\qquad(21)$$

Тада ће једначина (20) претстављати елипсоид за све вредности параметра λ, које су мање од сваке три величине (21). Једначина (20) одређиваће једнокрилни хиперболоид за оне вредности λ, које се налазе у размаку између B и C, односно двокрилни хиперболоид за вредности λ између граница A и B. Најзад, за вредности λ веће од A, B и C једначина (20) неће одређивати реалну површину.

Једначина (20) претставља за извесну сталну вредност параметра λ једну потпуно одређену површину. Тако потражимо на пр. површину која би пролазила кроз дату тачку простора (x_1, y_1, z_1). Стављајући координате ове тачке у једначину (20) налазимо једнакост за одређивање одговарајуће вредности параметра λ и то

$$\frac{x_1^2}{A-\lambda}+\frac{y_1^2}{B-\lambda}+\frac{z_1^2}{C-\lambda}=1\,.$$

Ова се једначина може и овако написати

$$(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)+x_1^2(\lambda-B)(\lambda-C)+y_1^2(\lambda-A)(\lambda-C)+$$
$$+z_1^2(\lambda-A)(\lambda-B)=0.$$

Добијена једначина је трећег степена по λ. Лако је доказати да, под претпоставком (21), ова једначина има увек три реална корена. Да бисмо то доказали саставимо таблицу

вредност λ	$-\infty$	C	B	A
знак леве стране једначине	$-$	$+$	$-$	$+$

Према томе, овим вредностима параметра λ одговарају три различите средишне површине различите врсте. Дакле, *кроз сваку тачку простора пролазе три реалне површине конфокалне са датом средишном површином,* *при чему једна претставља елипсоид, а две друге хиперболоиде једнокрилни односно двокрилни.*

Ставимо ли у сагласности са досадашњим излагањима

$$A-\lambda=a^2$$
$$A-B=\mu^2,\qquad A-C=\nu^2,$$

добијамо

$$B-\lambda=a^2-\mu^2,\qquad C-\lambda=a^2-\nu^2.$$

Једначина (20) постаје са овим ознакама

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-\mu^2}+\frac{z^2}{a^2-\nu^2}=1\,. \tag{22}$$

Ако се полуоса a мења, једначина (22) одређује различите конфокалне површине. Њихове фокалне криве одређене су у одговарајућим координатним равнима једначинама

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-\mu^2}=1\,,\qquad \frac{x^2}{\mu^2}-\frac{z^2}{\nu^2-\mu^2}=1\,,\qquad \frac{y^2}{\mu^2}+\frac{z^2}{\nu^2}=-1\,.$$

Пролази ли површина (22) кроз тачку $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ аналогно претходном, добијамо за одговарајуће вредности a^2 једначину

$$a^2(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)-x_1^2(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)-y_1^2a^2(a^2-\nu^2)-z_1^2a^2(a^2-\mu^2)=0$$

или

$$a^6-(\mu^2+\nu^2+x_1^2+y_1^2+z_1^2)a^4+(\mu^2\nu^2+\mu^2x_1^2+\nu^2x_1^2+\nu^2y_1^2+\mu^2z_1^2)\,a^2-\mu^2\nu^2x_1^2=0. \tag{23}$$

Ова је једначина трећег степена по a^2, која као и пре, одређује три површине које пролазе кроз дату тачку. Означимо корене посматране једначине са a^2_1, a^2_2, a^2_3 па уведимо претпоставку

$$a_1>\nu>a_2>\mu>a_3. \tag{24}$$

Према томе је могуће увести још и ове ознаке

$$\begin{aligned} &a^2_1-\mu^2=b^2_1, && a^2_2-\mu^2=b^2_2, && \mu^2-a^2_3=b^2_3\\ &a^2_1-\nu^2=c^2_1, && \nu^2-a^2_2=c^2_2, && \nu^2-a^2_3=c^2_3. \end{aligned} \tag{25}$$

Зато се једначине трију површина система (22) које пролазе кроз тачку $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ изражавају овако

$$\frac{x^2}{a^2_1}+\frac{y^2}{b^2_1}+\frac{z^2}{c^2_1}=1\,,$$
$$\frac{x^2}{a^2_2}+\frac{y^2}{b^2_2}-\frac{z^2}{c^2_2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2_3}-\frac{y^2}{b^2_3}-\frac{z^2}{c^2_3}=1\,. \tag{26}$$

Осе ових површина одређују се, дакле, помоћу корена једначине (23) и образаца (25).

200. Особине конфокалних површина. — 1⁰ Реалне тачке пресека. Из једначина (26) следује одмах да се обрнуто помоћу њих одређују координате пресечне тачке тих површина. Заиста, једначине (26) линеарне су у односу на x^2, y^2 и z^2. Означимо ли са Δ детерминанту коефицијената уз њих добићемо

$$x^2=\frac{\Delta_1}{\Delta}\,,\qquad y^2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\,,\qquad z^2=\frac{\Delta_3}{\Delta}\,, \tag{27}$$

где Δ_1, Δ_2 односно Δ_3 означавају вредности које добија детерминанта Δ ако се у њој смене коефицијенти чланова уз x^2, y^2 одн. z^2 са 1.

Пошто је

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2_1} & \frac{1}{b^2_1} & \frac{1}{c^2_1}\\ \frac{1}{a^2_2} & \frac{1}{b^2_2} & -\frac{1}{c^2_2}\\ \frac{1}{a^2_3} & -\frac{1}{b^2_3} & -\frac{1}{c^2_3} \end{vmatrix}.$$

то одузимајући елементе прве колоне од оних друге и треће колоне, одмах, према релацијама (25) налазимо

$$\Delta=\frac{\mu^2\nu^2}{a^2_1\,a^2_2\,a^2_3}\,\Delta_1$$

Слично добијамо два друга обрасца за исту вредност Δ ако одузмемо елементе њене друге колоне од елемената осталих колона, односно елементе треће колоне од елемената других колона тј.

$$\Delta=\frac{\mu^2(\nu^2-\mu^2)}{b^2_1\,b^2_2\,b^2_3}\,\Delta_2\,,$$
$$\Delta=\frac{\nu^2(\nu^2-\mu^2)}{c^2_1\,c^2_2\,c^2_3}\,\Delta_3\,.$$

Одатле непосредно обрасци (27) добијају облик

$$x^2=\frac{\mu^2\nu^2}{a^2_1\,a^2_2\,a^2_3}\,,\qquad z^2=\frac{\nu^2(\nu^2-\mu^2)}{c^2_1\,c^2_2\,c^2_3}\,.$$
$$y^2=\frac{\mu^2(\nu^2-\mu^2)}{b^2_1\,b^2_2\,b^2_3}\,,$$

Према уведеној претпоставци (24) нађене су вредности x^2, y^2, z^2 позитивне па координате тачака пресека посматраних површина (26) имају реалне вредности.

2⁰ *Ортогоналност конфокалних површина.* — Образујмо једначине тангентних равни, у тачки $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ двеју првих површина (26)

$$\frac{x_1x}{a^2_1}+\frac{y_1y}{b^2_1}+\frac{z_1z}{c^2_1}=1\,, \tag{28}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2_2}+\frac{y_1 y}{b^2_2}-\frac{z_1 z}{c^2_2}=1. \tag{28}$$

Међутим ако у две прве једначине (26) сменимо координате њихове заједничке тачке (x_1, y_1, z_1) па саставимо разлику добијених једнакости добијамо према условима (25) идентичност

$$\frac{x_1^2}{a^2_1 a^2_2}+\frac{y_1^2}{b^2_1 b^2_2}-\frac{z_1^2}{c^2_1 c^2_2}=0.$$

Ова једнакост претставља услов упразности обе равни (28). Аналоган закључак важи за сваки пар површина (26). Одавде излази да ове површине образују систем трију узајамно ортогоналних површина. Изнесене особине конфокалних средишних површина другог реда дозвољавају да се систем од три такве површине може узети за криволиниски координатни систем у простору. При томе се као координате тачака могу сматрати параметри конфокалних површина, на пр. дужине њихових полуоса, које имају исте смерове.

201. Параболоиди. — Проучимо сад фокалне особине површина параболоида

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}-2z=0, \tag{29}$$

где горњи знак одговара елиптичном, а доњи хиперболичком параболоиду.

Упоредимо ли чланове једначине (29) са члановима једначине (3) налазимо овај низ једнакости

$$\left.\begin{array}{l} 1-n'n_1'=0. \\ l'm_1'+l_1'm'=0, \quad l'n_1'+l_1'n'=0, \quad m'n_1'+m_1'n'=0, \end{array}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha+l'h_1'+l_1'h'=0, \quad 2\beta+m'h_1'+m_1'h'=0 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-h'h_1'=0; \end{array}\right\} \tag{31}$$

$$p(1-l'l_1')=\pm q(1-m'm_1')=\frac{1}{2}(n'h_1'+n_1'h'+2\gamma). \tag{32}$$

Из три једнакости друге врсте (30) следује

$$l'm'n'l_1'm_1'n_1'=0. \tag{33}$$

Види се одмах према првој од једнакости (30) да се ниједан од коефицијената n' и n_1' не сме изједначити са нулом. Према томе услов (33) показује да је

$$l'=l_1'=0. \tag{34}$$

или

$$m'=m_1'=0. \tag{35}$$

Испитајмо најпре, прву претпоставку (34). Одмах се из првог услова (31) добија закључак

$$\alpha=0, \tag{36}$$

који показује да се тражена жижа налази у координатној равни YOZ.

Уведимо сад ознаке

$$\left.\begin{array}{l} m'm_1'=u \qquad n'n_1'=v \\ m'h_1'+m_1'h'=-2u\beta', \quad n'h_1'+n_1'h'=-2v\gamma'. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Према горе изложеном поступку у n^0 197 (стр. 217) налазимо

$$u\beta'^2+v\gamma'^2=h'h_1' \tag{38}$$

Упоређивањем једнакости (37) и (38) са онима из (30), (31) и (32) добијамо

$$\left.\begin{array}{l} v=1, \qquad \beta=u\beta', \\ \beta^2+\gamma^2=u\beta'^2+v\gamma'^2, \\ p=\pm q(1-u)=\gamma-v\gamma', \end{array}\right\} \tag{39}$$

где горњи знак одговара елиптичком, а доњи хиперболичком параболоиду.

Одавде следују ове вредности за u, β' и γ':

$$u=\frac{q\mp p}{q}, \quad \beta'=\frac{\beta q}{q\mp p}, \quad \gamma'=\gamma-p.$$

Према томе други образац (39) постаје

$$\beta^2+\gamma^2=(\gamma-p)^2+\frac{\beta^2 q}{q\mp p},$$

или

$$\beta^2=(p\mp q)(p-2\gamma). \tag{40}$$

Из добијених образаца долазимо до ових закључака:

1° Прво, основна једнакост (3), због четвртог услова (30), услова (34) и уведених ознака (37), постаје

$$x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=u(y-\beta')^2+v(z-\gamma')^2.$$

Ова једначина показује да су β' и γ' координате ма које тачке директрисе.

2° Друго, координате β и γ жиже налазе се на фокалној кривој која лежи у координатној равни YOZ, а чија се једначина, према обрасцу (40) пише овако

$$y^2=(p\mp q)(p-2z). \tag{41}$$

Ова фокална крива претставља параболу. Ако претпоставимо да је

$$q>p, \tag{42}$$

и сматрамо p и q као позитивне величине, то крива (41) одређује параболу чија се оса поклапа са осом за елиптички параболоид, а супротног смера за хиперболички параболоид. За обе површине фокалне криве их неће сећи. Заиста, главни пресек посматраних површина (29),

$$y^2=\pm 2qz,$$

заједно са једначином (41) даје

$$z=\frac{p\mp q}{2}, \quad y^2=\pm q(p\mp q)$$

Пошто y^2 за обе површине према услову (42) претставља негативну вредност, фокалне криве (41) обеју површина параболоида (29) неће се са њима сећи у реалним тачкама.

Међутим, ако уочимо услове (35), онда из друге једнакости (31) непосредно добијамо

$$\beta = 0$$

и аналогно претходном закључујемо да постоје, у координатној равни XOZ, фокалне криве

$$x^2 = (p \mp q)(2z - q). \tag{43}$$

Ове једначине претстављају параболе, где се горњи знаци односе на елиптички, а доњи на хиперболички параболоид. Под претпоставком (42) оса фокалне параболе (43) окренута је у супротном смеру у односу на осу главног пресека

$$x^2 = 2pz \tag{44}$$

елиптичког параболоида, али у истом смеру са осом истог пресека хиперболичког параболоида. За елиптички параболоид фокална крива

$$x^2 = (p - q)(2z - q)$$

сече главни пресек (44) у реалним тачкама

$$z = \frac{1}{2}(q-p), \qquad x = \pm\sqrt{p(q-p)}\ .$$

Ове се тачке поклапају са горе наведеним тачкама заокругљивања елиптичког параболоида. Међутим, и ова друга фокална парабола за хиперболички параболоид, који одговара доњем знаку у једначини (43) не сече ту површину у реалним тачкама.

202. Конфокални параболоиди. — Претходна испитивања показала су да се само код параболоида фокалне криве појављују у облику парабола. Према томе свака са параболоидом конфокална површина другог степена претставља такође параболоид. Пошто конфокални параболоиди морају имати заједничку осу општи облик параболоида који су конфокални са елиптичким параболоидом

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \tag{45}$$

одређени су једначином

$$\frac{x^2}{p'} + \frac{y^2}{q'} = 2z - \lambda \tag{46}$$

где су p', q' и λ три неодређене величине. Ако извршимо транслацију координатних оса према обрасцима

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 + \frac{\lambda}{2},$$

трансформисана једначина (46) постаје

$$\frac{x_1^2}{p'} + \frac{y_1^2}{q'} = 2z_1,$$

Према томе одговарајуће једначине обе фокалне криве могу се овако написати

$$y_1^2 = (q' - p')(2z_1 - p'),$$

односно

$$x_1^2 = (p' - q')(2z_1 - q')$$

У односу на полазни координатни систем, наведене једначине постају

$$y^2 = (q' - p')(2z - p' - \lambda)$$

$$x^2 = (p' - q')(2z - q' - \lambda). \tag{47}$$

Међутим параболоиди (45) и (46) су конфокални, те једначине (47) морају бити идентичне оним једначинама (41) односно (43) које одговарају њиховим горњим знацима. Према томе, морају постојати једнакости

$$p' + \lambda = p, \qquad q' + \lambda = q.$$

Због тога једначина (46) постаје

$$\frac{x^2}{p-\lambda} + \frac{y^2}{q-\lambda} = 2z - \lambda. \tag{48}$$

За различите вредности произвољног параметра λ једначине (48), одређује читаву породицу конфокалних параболоида. Али за извесну партикуларну вредност λ једначина (48) претставља једну потпуно одређену површину наведене породице. Лако се види да за све вредности параметра λ, које су мање односно веће од сваке од вредности p и q, једначина (48) претставља елиптички параболоид. Али за вредности λ које леже између граница p и q, једначина (48) одређује хиперболичке параболоиде.

Вредност параметра λ може се одредити из услова да посматрана површина (48) мора пролазити кроз дату тачку простора (x_1, y_1, z_1). Одговарајуће вредности λ одређују се једначином

$$\frac{x_1^2}{p-\lambda} + \frac{y_1^2}{q-\lambda} = 2z_1 - \lambda$$

Ова се једначина може написати и овако

$$(\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - 2z_1) - x_1^2(\lambda - q) - y_1^2(\lambda - p) = 0 \tag{49}$$

па претставља по λ једначину трећег степена.

Лако је доказати да ова једначина има увек три реална корена. Заиста, задржавајући претпоставку (42), направимо ову таблицу

Вредност	$-\infty$	p	q	$+\infty$
знак леве стране једначине	$-$	$+$	$-$	$+$

Према томе у наведеним границама параметра λ налази се по један реални корен једначине (49). Одавде следује закључак да *кроз сваку тачку простора пролазе три конфокална параболоида, а два су од њих елиптичка, међутим трећи је хиперболички.*

Означимо ли са λ_1, λ_2, λ_3 корене једначине (49) одговарајући параболоиди дати су једначинама

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{p-\lambda_1}+\frac{y^2}{q-\lambda_1}&=2z-\lambda_1\,,\\ \frac{x^2}{p-\lambda_2}+\frac{y^2}{q-\lambda_2}&=2z-\lambda_2\,,\\ \frac{x^2}{p-\lambda_3}+\frac{y^2}{q-\lambda_3}&=2z-\lambda_3 \end{aligned} \tag{50}$$

Добијени конфокални параболоиди су ортогонални. Да бисмо то доказали поставимо једначине тангентних равни тих површина у њиховој заједничкој тачки пресека (x_1, y_1, z_1) и то

$$\begin{aligned} \frac{x_1 x}{p-\lambda}+\frac{y_1 y}{q-\lambda}&=z+z_1-\lambda_1\,,\\ \frac{x_1 x}{p-\lambda_2}+\frac{y_1 y}{q-\lambda_2}&=z+z_1-\lambda_2\,.\\ \frac{x_1 x}{p-\lambda_3}+\frac{y_1 y}{q-\lambda_3}&=z+z_1-\lambda_3\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Стављајући координате тачке $(x_1, y_1. z_1)$ у прве две једначине (50) и одузимајући једну од ових идентичности од друге добијамо нову идентичност очевидног облика (пошто је $\lambda_1 - \lambda_2 \gtreqless 0$)

$$\frac{x_1^2}{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}+\frac{y_1^2}{(q-\lambda_1)(q-\lambda_2)}+1=0\,.$$

Добијена идентичност показује да су прве две равни (51) узајамно нормалне једна на другој. Аналоган закључак важи за сваки пар тангентних равни (51). Према томе су *три конфокална параболоида* (50) *ортогонална*.

IX. Системи површина другог реда

203. Пресек две површине. — Уочимо једначине две површине другог реда

$$2f_1 \equiv S_1 = 0, \qquad 2f_2 \equiv S_2 = 0, \tag{1}$$

где је

$$2f_i(x, y, z) \equiv SA_i x^2 + 2SB_i yz + 2SC_i x + F_i = 0 \quad (i = 1,\ 2)$$

Скуп обе једначине (1) одређује неку криву линију у простору, која претставља криву пресека посматраних површина. Међутим, ред криве у простору одређује се бројем тачака пресека те криве са равни. Пошто раван сече сваку од површина (1) дуж неког коничног пресека то ова раван даје у пресеку обе површине (1) два конична пресека; ови имају, уопште четири заједничке тачке пресека, реалне или конјуговано имагинарне. Ове тачке, дакле, припадају обема површинама (1) па њихово геометриско место образује криву пресека тих површина. Одавде закључујемо да је *пресек две површине другог реда крива линија четвртог степена.* Ова крива пресека може се у извесним посебним случајевима раставити у неколико различитих кривих.

Посматрајмо, на пр. две површине другог реда, које имају исту праволиниску генератрису. Пошто је раван сече у једној тачки, три остале тачке пресека посматране равни са кривом пресека датих површина морају се налазити на једној кривој трећег реда; ова се крива зове к о с а к у б и к а.

204. Свежањ површина. — Општи облик свију површина 2-ог реда, које пролазе кроз пресек двеју датих површина (1) изражава се једначином

$$S_1 - kS_2 = 0, \tag{2}$$

где је к произвољни параметар.

Заиста, једначина (2) је другог степена и према томе одређује једну површину другог реда S′. Означимо сад са C_1 и C_2 коничне пресеке који се добијају у пресеку површине S_1, односно S_2 са равни $R = 0$. Тада су заједничке тачке коничних пресека C_1 и C_2 са овом равни одређене једначинама

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad R = 0. \tag{3}$$

Са друге стране, конични пресек C′ површине S′ са претходном равни дефинисан је једначинама

$$S_1 - kS_2 = 0, \qquad R = 0. \tag{4}$$

Очевидно је, одавде, да свако решење система (3) задовољава и систем (4). Зато се заједничке тачке коничних пресека C_1 и C_2 налазе на коничном пресеку C′ те према томе површина S′ пролази кроз пресек датих површина (1). Осим тога лако је доказати да се једначином (2) може одредити свака површина S″ која пролази кроз пресек датих површина (1). За то уочимо на површини S″ произвољну тачку $M(x_1, y_1, z_1)$ која се не би налазила на кривој пресека посматраних површина (1). Али због произвољности коефицијента k, у једначини (2), може му се дати таква вредност да површина S″ пролази кроз дату тачку M, тј.

$$k = \frac{S_{11}(x_1, y_1, z_1)}{S_{21}(x_1, y_1, z_1)}\,.$$

Према томе једначина (2) постаје

$$S_{21}\,S_1 - S_{11}S_2 = 0 \tag{5}$$

Добијени облик тражене површине показује да она пролази кроз криву пресека датих површина и кроз дату тачку M, јер њене координате задовољавају идентички једначину (5).

Једначина (2) претставља с в е ж а њ или п р а м е н површина, које пролазе кроз заједничке тачке двеју датих површина (1).

Испитајмо сад различите посебне случајеве.

1⁰ Претпоставимо да се друга од датих површина (1) раставља у две равни. Тада једначина (2) прамена посматраних површина добија облик

$$S_1 - kUV = 0, \tag{6}$$

где су U и V линеарни полиноми текућих координата. Под наведеном претпоставком крива пресека свију површина прамена (6) састоји се очевидно од две криве другог реда дуж којих прву површину (1) секу равни

$$U=0, \quad V=0. \tag{7}$$

Означимо са M и N тачке пресека праве, коју ове равни одређују, са првом датом површином (1). Из сваке од ових тачака повуцимо по две тангенте, на сваку од кривих горе наведеног пресека. Ове тангенте су тангенте и за сваку од површина прамена (6); а раван која пролази кроз те обе тангенте је тангентна раван за све површине (6) у посматраним тачкама. Две површине, које имају у заједничкој тачки заједничку тангентну раван, зову се д о д и р н е. Према томе су површине прамена (6) д о д и р н е у двема тачкама и имају тако звани д в о с т р у к и д о д и р. Ако су тачке M и N имагинарне онда обе тангентне равни постају имагинарне а посматране површине имају имагинарни двоструки додир. Лако је доказати и обрнути став, да се сваке две површине другог реда, са двоструким додиром, узајамно секу дуж два конична пресека. Заиста, уочимо поред тачака M и N где обе површине имају двоструки додир, још неку тачку K криве пресека посматраних површина. Раван, која пролази кроз тачке M, N и K, сече оба конична пресека. Пошто ови имају по три заједничке тангенте, уочени конични пресеци се поклапају. Наведимо као пример, површину лопте S_1. Тада у односу на одређени праволиниски правоугли координатни систем, једначина (6) постаје

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2-kUV=0, \tag{8}$$

где су α, β и γ координате средишта дате лопте, а R њен полупречник. Узмимо сад претпоставку да је

$$R=0.$$

Тада једначина (8) постаје позната једначина, којом се одређују жиже (α, β, γ) и директриса $U=0$, $V=0$ површина другог реда општег облика. Према томе постоји и друга дефиниција жижа површина другог реда, као *средишта бескрајно малих лопти, које имају двоструки додир са посматраном површином другог реда*. По себи се разуме да тачке додира постају реалне само у тачкама заокругљивања дотичних површина.

2⁰ Ако се равни (7) поклапају, једначина (6) постаје

$$S_1-kU^2=0. \tag{9}$$

Површине овог прамена, за различите вредности k имају заједничку криву пресека површине $S_1=0$ са равни $U=0$.

За две одређене површине прамена (9) нема осим тачака ове криве, других заједничких тачака. Према томе ће свака раван, која пролази кроз ма које две тачке те криве сећи обе површине дуж двеју одређених кривих другог реда; ове криве ће се додиривати у наведеним тачкама. Због тога се и посматране површине додирују у истим тачкама.

3⁰ Претпоставимо сад да се једначина прамена (2) јавља у овом облику

$$S-U=0, \tag{10}$$

где је U линеарни полином по текућим координатама, са произвољним коефицијентима. Према томе наведена једначина може се тумачити на тај начин што је друга раван (7) чија једначина фигурише у једначини (6), бескрајно удаљена. Према томе једначина (10) претставља општи облик површина другог реда, које имају са површином

$$S=0$$

заједничку бескрајно удаљену криву другог реда (реалну или имагинарну).

Овакве површине се зову с л и ч н е и с л и ч н о п о с т а в љ е н е. Одавде следује због произвољности коефицијената полинома, да су *две површине другог реда сличне и слично постављене, ако су сразмерни њихови коефицијенти уз чланове другог степена.*

Тако су на пр. лопте сличне и слично постављене. Лако је закључити да две сличне и слично постављене површине другог реда имају; поред бескрајно удаљене криве, још и другу заједничку криву другог реда која се налази у одређеној равни. Заиста, означимо са U_1 и U_2 ма која два линеарна полинома, једначине две сличне и слично постављене површине изражавају се овако

$$S-U_1=0, \quad S-U_2=0. \tag{11}$$

Разлика једначина тих површина гласи

$$U_2-U_1=0.$$

Добијена једначина одређује неку раван, где се очевидно налази крива пресека посматраних површина (11). Уочимо сад три сличне и слично постављене површине другог реда

$$S-U_1=0, \quad S-U_2=0, \quad S-U_3=0.$$

Разлике њихових једначина две по две дају једначине равни, где се налазе криве пресека те две површине, наиме

$$U_2-U_1=0, \quad U_1-U_3=0, \quad U_3-U_2=0.$$

Збир левих страна ових једначина анулира се идентички. Према томе се посматране равни секу дуж једне праве.

Одавде следује закључак да *равни у којима леже криве пресека трију сличних и слично постављених површина другог реда, пролазе кроз исту праву.*

4⁰ Претпоставимо сад да се сваки од полонома другог степена (1) раставља у производ два линеарна множиоца. Према томе једначина свежња посматраних површина (2) претставља се у облику

$$U_1V_1-kU_2V_2=0 \tag{12}$$

Одавде се види да криве пресека површина овог свежња претстављају четири праве, дуж којих равни

$$U_1=0, \quad V_1=0 \tag{13}$$

секу равни

$$U_2=0, \quad V_2=0. \tag{14}$$

Према томе су површине свежња (12) праволиниске, које имају четири заједничке праволиниске генератрисе; две од њих припадају једном скупу равни, а две друге другоме скупу посматраних равни.

Претпоставимо да су једначине (13) и (14) претстављене у нормалном облику. Тада полиноми на левим странама једначина (13) (14) изражавају дужине растојања тачке (x, y, z) од датих равни. Зато се једначина прамена (12) може тумачити геометриски на овај начин:

Свака праволиниска површина другог реда претставља геометриско место тачака, чији се производ растојања од две дате равни налази у сталном односу са производом растојања тачке од две друге равни.

5° Вратимо се једначини свежња (2). Коефицијенти те једначине уз текуће координате су линеарне по параметру k. Услов да површина (2) претставља површину конуса изражава се овако

$$\begin{vmatrix} A_1 - kA_2 & B'' - kB''_2 & B'_1 - kB'_2 & C_1 - kC_2 \\ B''_1 - kB''_2 & A'_1 - kA'_2 & B_1 - kB_2 & C'_1 - kC'_2 \\ B'_1 - kB'_2 & B_1 - kB_2 & A''_1 - kA''_2 & C''_1 - kC''_2 \\ C_1 - kC_2 & C'_1 - kC'_2 & C''_1 - kC''_2 & F_1 - kF_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Добијена једначина је четвртог степена по параметру k, па према томе одређује за њега четири корена. Свакоме корену одговара потпуно одређена површина (2), која одређује конусну површину.

Према томе изводи се закључак да сваки *свежањ површина другог реда садржи, уопште, четири конусне површине.*

ГЛАВА ДЕВЕТА

ИСПИТИВАЊЕ ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА

I. Скуп две равни

205. Растављање површине у две равни. — У глави VI проучили смо ових седам различитих површина:

Цилиндар, конус, елипсоид, хиперболоиде, једнокрилни и двокрилни и параболоиде елиптички и хиперболички. Њихове једначине су другог степена по текућим координатама x, y, и z. Сада узмимо најопштију једначину другог степена у облику:

$$\left.\begin{aligned} 2f(x,y,z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где ознака $2f$ кратко означава леву страну једначине (1). Прва три члана, где фигуришу x^2, y^2 и z^2 звађемо, краткоће ради, квадратни чланови, а три наредна члана са производима координата yz, xz и xy називаћемо правоугаоним члановима. Најзад звађемо главни квадратни члан онај по чијој променљивој ћемо решавати једначину (1). Тада ћемо два остала квадратна члана звати споредним члановима.

Осим тога уведимо појам линеарних чланова за оне који су првог степена по текућим координатама. При томе ћемо коефицијенте са истим индексима звати коњуговани коефицијенти. Тако су коњуговани, међу собом, A, B, и C, исто A′, B′, C′ односно A″, B″, и C″.

Ајлер је први поставио проблем испитивања ових врста површина обухваћених једначином (1).

Прво ћемо проучити питање, кад једначина (1) претставља скуп две равни. Претпоставимо да је главни коефицијенат A″ различит од нуле тј.

$$A'' \gtrless 0 \qquad (2)$$

Тада је једначина (1) другог степена по z, те даје решење по z.

$$z = \frac{1}{A''}[-(B'x + By + C'') \pm R], \qquad (3)$$

где је

$$\begin{aligned} R^2 \equiv (B'^2 - AA'')x^2 + 2(BB' - A''B'')xy + (B^2 - A'A'')y^2 + \\ + 2(B'C'' - A''C)x + 2(BC'' - A''C')y + (C''^2 - A''F) \end{aligned}$$

Једначина (1) одређује производ два линеарна множиоца по x, y и z кад израз за R^2 претставља тачан квадрат. Ради тога морају бити задовољени услови:

$$
\begin{aligned}
&(B'^2 - AA'')(B^2 - A'A'') = (BB' - A''B'')^2,\\
&(B'^2 - AA'')(C''^2 - A''F) = (B'C'' - A''C)^2,\\
&(B^2 - A'A'')(C''^2 - A''F) = (BC'' - A''C')^2.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ако измножимо биноме на левој страни сваке од једнакости (4) и дигнемо на квадрат биноме на десној страни, тада услед потирања једнаких чланова и уведене претпоставке (2), добијамо услове:

$$
\begin{aligned}
&AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 = 0\\
&AA''F + 2B'CC'' - AC''^2 - A''C^2 - FB'^2 = 0\\
&A'A''F + 2BC'C'' - A'C''^2 - A''C'^2 - FB^2 = 0,
\end{aligned}
$$

који се могу изразити у облику детерминаната овако:

$$
\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & F \end{vmatrix} = 0, \quad
\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & F \end{vmatrix} = 0. \tag{5}
$$

Да би се добијени резултат лакше запамтио, уведимо ознаку D (в. n^0 170, стр. 177) за дискриминанту функције $2f$, наиме:

$$
D \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix} \tag{6}
$$

Детерминанте на левим странама услова (5) претстављају миноре дискриминанте D, конјуговане елементима главне дијагонале, F, A' и A изузев главног коефицијента A''.

Означимо са

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Delta$$

миноре конјуговане елементима

$$A, \quad A', \quad A'', \quad F$$

наиме:

$$
\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & F \end{vmatrix}, \quad
\Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & F \end{vmatrix},
$$

$$
\Delta_3 \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & F \end{vmatrix}, \quad
\Delta \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.
$$

Према томе услови (5) изражавају се друкчије и овако

$$\Delta = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_1 = 0.$$

Под уведеном претпоставком (2) а при условима (5) израз R^2 је тачан квадрат.

Ако се израчуна квадратни корен добија се

$$R \equiv \pm Kx \pm Ly \pm M.$$

где је

$$
\left.
\begin{aligned}
K &\equiv \sqrt{B'^2 - AA''},\\
L &\equiv \sqrt{B^2 - A'A''},\\
M &\equiv \sqrt{C''^2 - A''F},
\end{aligned}
\right\} \tag{7}
$$

а горњи и доњи знаци уз коефицијенте K, L и M, у изразу R, морају бити изабрани тако да се одговарајући израз

$$R^2 = K^2x^2 \pm 2KLxy + L^2y^2 \pm 2KMx \pm 2LMy + M^2,$$

поклапа са својом претходном вредношћу. Према томе за одређивање распореда знакова морају постојати идентичности

$$
\begin{aligned}
&\pm KL \equiv BB' - A''B'',\\
&\pm KM \equiv B'C'' - A''C,\\
&\pm LM \equiv BC'' - A''C',
\end{aligned}
$$

јер десне стране ових једнакости имају потпуно одређене вредности по величини и знаку, а према томе морају се изабрати знаци код K, L и M.

Стога се једначина (3) под уведеним условима своди на облик

$$(B' \mp K)x + (B \mp L)y + A''z + C'' \mp M = 0, \tag{8}$$

где се горњи и доњи знаци бирају према већ наведеним примедбама.

Добијене једначине (8) могу се написати и овако:

$$B'x + By + A''z + C'' \mp R = 0,$$

па, ако приметимо да је

$$B'x + By + A''z + C'' \equiv \frac{\partial f}{\partial z},$$

једначине посматраних равни могу се кратко написати

$$\frac{\partial f}{\partial z} \mp R = 0.$$

Према томе, под претпоставкама (2) и (5) дата једначина (1) се изражава помоћу производа два линеарна чиниоца

$$\frac{1}{A''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z} - R\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + R\right)\right] = 0,$$

или, у сажетијем облику, овако:

$$\frac{\;}{A''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - R^2\right] = 0.$$

206. Паралелне равни. — Да би обе равни (8) биле међу собом паралелне треба да постоје услови

$$\frac{B'\mp K}{B'\pm K}=\frac{B\mp L}{B\pm L}=1\,. \tag{9}$$

где се очевидно знаци у бројиоцима разликују од знакова у имениоцима, а одговарају горе наведеним условима.

Ако изједначимо сваку од две размере са трећим чланом, онда се услови паралелности равни (8) изражавају једнакостима

$$K=L=0.$$

т.ј. с обзиром на (7),

$$\left.\begin{aligned} B'^2-AA''&=0,\\ B^2-A'A''&=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Леве стране добијених услова (10) претстављају миноре другог реда дискриминанте D, конјуговане са по два елемента главне дијагонале A' и F, односно A и F, који претстављају коефицијенте једног споредног квадратног члана и познатог члана једначине (1).

Према томе, обе равни (8) изражавају се, у случају међусобне паралелности, једначинама

$$\frac{\partial f}{\partial z}\mp M=0,$$

а дата једначина (1) своди се на облик

$$\frac{1}{A''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}-M\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}+M\right)\right]=0\,,$$

или

$$\frac{1}{A''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-M^2\right]=0\,.$$

207. Равни која се поклапају. — Ако су обе равни (8) не само паралелне већ се и поклапају, онда поред услова (9) мора постојати и услов сразмерности сталних чланова једначина (8), тј.

$$1=\frac{C''\mp M}{C''\pm M}\,,\quad \text{или}\quad M=0\,.$$

Одатле следује да поред обе једнакости (10) постоји и трећи услов, наиме:

$$C''^2-A''F=0, \tag{11}$$

Добијени услов се изражава помоћу трећег минора другог реда дискриминанте D, који је конјугован елементима A и A' главне дијагонале.

Кад су дакле испуњени услови (2), (5), (10) и (11), једначина (1) се своди на облик тачног квадрата који се може кратко написати

$$\frac{1}{A''}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]=0\,.$$

Примери: Узмимо једначину другог степена

$$x^2+4xy+6xz+4y^2+12yz+9z^2+4x+8y+12z+1=0 \tag{12}$$

Услови (5) су озде задовољени, тј.

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}=0\,,\quad \Delta_2\equiv\begin{vmatrix}1&3&2\\3&9&6\\2&6&1\end{vmatrix}=0\,,\quad \Delta_1\equiv\begin{vmatrix}4&6&4\\6&9&6\\4&6&1\end{vmatrix}=0\,.$$

А како су задовољени и услови (10), то се лева страна дате једначине (12) раставља на два линеарна фактора

$$\frac{1}{9}(3x+6y+9z+6-3\sqrt{3})\,(3x+6y+9z+6+3\sqrt{3})$$

те она претставља две паралелне равни.

За други пример узмимо једначину

$$x^2+4y^2+z^2-4yz-2xz+4xy+2x+4y-2z+1=0 \tag{13}$$

Услови (5) су озде такође задовољени, јер је

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{vmatrix}=0\,,\quad \Delta_1\equiv\begin{vmatrix}4&-2&2\\-2&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=0\,,\quad \Delta_2\equiv\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0.$$

Осим тога задовољени су и услови (10 и (11) зато се једначина (13) своди на облик

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=(-x-2y+z-1)^2=0$$

и претставља две равни које се поклапају.

208. Други услови. — Уведимо сада, место услова (2) претпоставку

$$A'\gtrless 0\,. \tag{14}$$

Решавајући једначину (1) по y добијамо образац

$$y=\frac{1}{A'}\left[-(B''x+Bz+C')\pm R'\right], \tag{15}$$

где је

$$\begin{aligned}R'^2=(B''^2-AA')x^2+2(BB''-A'B')xz+(B^2-A'A'')z^2+\\+2(B''C'-A'C)x+2(BC'-A'C'')z+C'^2-A'F.\end{aligned}$$

Да би овај образац био потпун квадрат, морају бити задовољени услови

$$\begin{aligned}(B''^2-AA')(B^2-A'A'')&=(BB''-A'B')^2\\(B''^2-AA')(C'^2-A'F)&=(B''C'-A'C)^2\\(B^2-A'A'')(C'^2-A'F)&=(BC'-A'C'')^2\end{aligned}$$

Одавде се добијају, слично претходном, једнакости

$$\Delta=0, \quad \Delta_3=0, \quad \Delta_1=0. \tag{16}$$

Добијени услови потврђују да су минори дискриминанте D, конјуговани елементима главне дијагонале, изузев оног који фигурише на левој страни неједнакости (14), једнаки нули.

Под уведеном претпоставком израз за R′ постаје

$$R' \equiv \pm K'x \pm Lz \pm P,$$

где је

$$K' \equiv \sqrt{B''^2 - AA'}$$

$$P \equiv \sqrt{C'^2 - A'F},$$

а L има пређашњу вредност из (7) док су знаци изабрани према вредностима коефицијената у обрасцу R'^2.

Према томе, скуп две равни, које се одређују једначином (1) у посматраном случају изражава се једначинама

$$(B'' \mp K')x + A'y + (B \mp L)z + C' \mp P = 0 \tag{17}$$

које одговарају изабраним горњим и доњим задацима.

Једначине (17) се могу написати и овако

$$\frac{\partial f}{\partial y} \mp R' = 0,$$

а дата једначина (1) своди се на облик

$$\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - R'\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + R'\right)\right] = 0, \tag{18}$$

или

$$\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - R'^2\right] = 0.$$

Равни (17) су паралелне међу собом кад је

$$B''^2 - AA' = 0$$

$$B^2 - A'A'' = 0. \tag{19}$$

Једначине ових паралелних равни постају

$$\frac{\partial f}{\partial y} \mp P = 0,$$

а полазна једначина (1) своди се на облик

$$\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - P\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + P\right)\right] = 0$$

или

$$\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - P^2\right] = 0.$$

Најзад, ако се обе равни поклапају, онда сем услова (19) постоји још и трећи услов

$$C'^2 - A'F = 0, \tag{20}$$

и једначина (1) се своди на облик

$$\frac{1}{A'}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

Као пример узмимо једначину

$$3x^2 - 5y^2 - yz + xz + 2xy + 19x + 37y + 7z - 14 = 0 \tag{21}$$

Овде услов (2) не важи, али је услов (14) задовољен.

Сем тога су испуњени услови (16), па једначина (21) одређује скуп две равни, при чему је

$$K' = 4, \quad L = \frac{1}{2}, \quad P = \frac{33}{2},$$

$$R' = 4x + \frac{1}{2}z + \frac{33}{2}.$$

Пошто за једначину (21) имамо

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv x - 5y - \frac{1}{2}z + \frac{37}{2}$$

она се према обрасцу (18) раставља у два линеарна чиниоца на овај начин

$$-\frac{1}{5}(2-3x-5y-z)(5x-5y+35) = 0.$$

209. Трећи услови. — Претпоставимо сад да је:

$$A \gtrless 0. \tag{22}$$

Решавајући једначину (1) по x, добијамо

$$x = \frac{1}{A}\left[-(B''y + B'z + C) \pm R''\right],$$

где је

$$R''^2 \equiv (B''^2 - AA')y^2 + 2(B'B'' - AB)yz + (B'^2 - AA'')z^2 + \\ + 2(B''C - AC')y + 2(B'C - AC'')z + C^2 - AF.$$

Услови да израз за R''^2 претставља потпун квадрат изводе се аналого пређашњим условима, а изражавају се помоћу раније уведених ознака, овако

$$\Delta = 0, \quad \Delta_3 = 0, \quad \Delta_2 = 0. \tag{23}$$

Када су ти услови (23) задовољени, образац за R″ гласи

$$R'' \equiv \pm K'y \pm Kz \pm P'.$$

где коефицијенти K′ и K имају ранија значења и

$$P' \equiv \sqrt{C^2-AF}.$$

При томе се знаци бирају по напред наведеном правилу.

Под претпоставкама (22) и (23) лева страна једначине (1) се раставља у производ два линеарна чиниоца

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}-R''\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+R''\right)\right]=0,$$

или

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-R''^2\right]=0$$

и једначина (1) одређује две равни.

Ако су те равни паралелне, морају постојати услови:

$$K'=0, \qquad K=0$$

или

$$\left.\begin{aligned} B''^2-AA' &= 0\\ B'^2-AA'' &= 0\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Тада се једначина (1) своди на облик

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}-P'\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+P'\right)\right]=0$$

или

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-P'^2\right]=0.$$

Најзад, кад се ове равни поклапају, онда мора постојати и овај накнадни услов

$$C^2-AF=0. \tag{25}$$

У исто време једначина (1) се своди на облик

$$\frac{1}{A}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]=0.$$

Наведимо као пример једначину

$$3x^2+7xz+5xy+x+5y+7z-2=0 \tag{26}$$

Пошто ова једначина испуњава услове (23), то се раставља у два линеарна чиниоца.

Израз R''^2 у овом случају гласи

$$R''^2 \equiv \frac{25}{4}y^2+\frac{35}{2}yz+\frac{49}{4}z^2-\frac{25}{2}y-\frac{35}{2}z+\frac{25}{4}\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{5}{2}y+\frac{7}{2}z-\frac{5}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 3x+\frac{5}{2}y+\frac{7}{2}z+\frac{1}{2}.$$

Дакле, лева страна једначине (26) раставља се у два линеарна чиниоца овако

$$(x+1)(3x+5y+7z-2).$$

Према томе, резултате претходних испитивања можемо формулисати у ова три става:

1° Једначина (1) претставља скуп две равни, тј. њена се лева страна може раставити у производ два линеарна фактора, ако се анулирају три од минора првог реда дискриминанте D, који су конјуговани елементима главне дијагонале у које се не убраја коефицијент главног члана једначине (1).

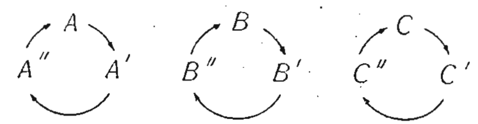
2° Равни које претставља једначина (1) паралелне су међу собом ако се анулирају она два минора другог реда дискриминанте D, који се добијају кад се у минору првог реда

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

бришу редом врсте и колоне у којима се налазе коефицијенти споредних чланова.

3° Обе се равни поклапају кад се уз услове наведене под 2°, анулира и онај минор другог реда који се добија кад се у дискриминанти D избришу одједном врсте и колоне у којима се налазе коефицијенти споредних чланова.

Наведимо да се сваки од услова (5), (16) и (23), које смо засебно извели могу извести један из другог цикличном заменом коефицијената. Заиста ако у (5) извршимо цикличну замену свих коефицијената према схеми



Сл. 78

детерминанте Δ, Δ_2 и Δ_1 постају

$$\begin{vmatrix} A' & B & B'' \\ B & A'' & B' \\ B'' & B' & A \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A' & B'' & C' \\ B'' & A & C \\ C' & C & F \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & B' & C'' \\ B' & A & C \\ C'' & C & F \end{vmatrix}.$$

Добијене детерминанте се своде очигледном узастопном разменом врста и колона на детерминанте

$$\Delta, \quad \Delta_3, \quad \Delta_2,$$

које се налазе на левој страни услова (23).

Примењујући пређашњу кружну замену коефицијената на три последње детерминанте добијамо респективно детерминанте

$$\Delta, \quad \Delta_1, \quad \Delta_3,$$

које фигуришу на левој страни услова. (16).

Постављени услови довољни су.

Међутим у теорији алгебарских облика доказује се да би се полином на левој страни једначине (1) растављао у производ два линеарна фактора неопходно је да се анулирају не само три наведена минора прве дискриминанте, него сви њени минори првог реда.

210. Партикуларни случајеви. — Проучимо сада једначину, која нема квадратних чланова наиме

$$2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \tag{27}$$

Ако се лева страна ове једначине може раставити у два линеарна чиниоца, она се своди на један од ова три облика

$$\begin{aligned} &(z+a)(\alpha x + \beta y + \gamma) = 0, \\ &(y+b)(\alpha' x + \beta' z + \gamma') = 0, \\ &(x+c)(\alpha'' y + \beta'' z + \gamma'') = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

где први садржи само једну и то ону промењљиву величину, које нема у другом чиниоцу. То је јасно јер би у супротном случају, производ оба линеарна чиниоца морао садржати и чланове са квадратима координата.

Посматрајмо сада, према обрасцима (28) ова три случаја:

1⁰ Упоређујући прву једначину (28) са (27), добијамо низ услова

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha = 2B', & \beta = 2B, & B'' = 0, & \\ a\alpha = 2C, & a\beta = 2C', & \gamma = 2C'', & a\gamma = F. \end{array}\right\} \tag{29}$$

Претпоставимо да су сви коефицијенти једначине (27), осим B″, различити од нуле.

Тада елиминацијом a, α, β и γ добијамо услове

$$B'' = 0, \quad 2CC'' - B'F = 0, \quad 2C'C'' - BF = 0. \tag{30}$$

Проучимо најпре партикуларне услове, где је

$$F = 0 \tag{31}$$

Тада су могуће две претпоставке или је $a = 0$, а ова претпоставка је могућа само под условом да је

$$C = C' = 0, \tag{32}$$

или $\gamma = 0$, а то је опет могуће под условом

$$C'' = 0. \tag{33}$$

У првом случају, услови (30) су испуњени и довољни, а једначина (27) има облик

$$z(B'x + By + C'') = 0$$

Ако је $\gamma = 0$, услови (30) су задовољени, али из једначина прве две колоне (29) излази да коефицијенти једначине (27) поред услова (30) морају испуњавати допунски услов

$$BC - B'C' = 0. \tag{34}$$

Тада се дата једначина (27) претставља у облику

$$(B'z + C)(Cx + C'y) = 0.$$

2⁰ Под условом да се једначина (27) може довести на облик друге једначине (28) морају постојати једнакости

$$\begin{array}{llll} \beta' = 2B, & B' = 0, & \alpha' = 2B'' & \\ b\beta' = 2C'', & b\alpha' = 2C, & \gamma' = 2C', & b\gamma' = F. \end{array} \tag{35}$$

Одавде се помоћу елиминације b, α', β' и γ' добијају под претпоставком да су коефицијенти, осим B′ различити од нуле, ова три услова

$$B' = 0, \quad 2C'C'' - BF = 0, \quad 2CC' - B''F = 0 \tag{36}$$

за одређивање скупа две равни у облику друге једначине (28).

Слично претходном под претпоставком (31), добијамо услове, или

$$C = C'' = 0, \tag{37}$$

или да је

$$C' = 0. \tag{38}$$

У првом случају, услови (36) су испуњени. Међутим у другом случају мора постојати накнадни услов

$$BC - B''C'' = 0. \tag{39}$$

3⁰ Најзад, једначина (27) се своди на облик треће једначине (28) под условима:

$$\left.\begin{array}{llll} B = 0, & \beta'' = 2B', & \alpha'' = 2B'', & \\ \gamma'' = 2C, & c\alpha'' = 2C', & c\beta'' = 2C'', & c\gamma'' = F. \end{array}\right\} \tag{40}$$

Одавде се на исти начин добијају под претпоставком, да су B′ и B″ различити од нуле, три тражена услова

$$B = 0, \quad 2CC'' - B'F = 0, \quad 2CC' - B''F = 0. \tag{41}$$

Ако претпоставимо да постоји услов (31) онда морају бити испуњени услови, да је

$$C' = C'' = 0, \tag{42}$$

или да је

$$C = 0. \tag{43}$$

У првом случају услови (41) су задовољени, а у другој претпоставци појављује се накнадни услов

$$B'C' - B''C'' = 0. \tag{44}$$

Лако је приметити да се услови (30), (36) и (41) садрже респективно у условима (5), (16) и (23) ако су:

а) коефицијенти свих квадратних чланова једначине (1) једнаки нули;

б) коефицијенти свих линеарних чланова исте једначине различити од нуле;

в) ако је један од коефицијената правоугаоних чланова једнак нули и то респективно B″, B′, B.

У случају, пак, да су стални члан F и један од коефицијената линеарних чланова једнаки нули, једначина (27) ће претстављати скуп две равни ако је

а) за $B'' = C'' = 0$ испуњен услов $BC = B'C'$,

б) за $B' = C' = 0$ испуњен услов $BC = B''C''$,

в) за $B = C = 0$ испуњен услов $B'C' = B''C''$.

Допунимо нашу анализу посматрањем случаја кад су два од коефицијената правоуглоних чланова једнака нули тако, да у једначини (27) постоји само један од правоуглоних чланова. У ту сврху вратимо се условима (29), (35) односно (40). Из њих се одмах види да једначине (28) садрже само по две текуће координате, па једначина (27) одређује, један цилиндар, који се распада у две равни.

Заиста узмимо на пр. услове (29). Ако је коефицијент B' једнак нули, онда је $\alpha = 0$ и $C = 0$. Под другом претпоставком, ако је $B = 0$, онда $\beta = 0$ и $C' = 0$. Према томе, у првом случају, једначина (27) постаје

$$2By z + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

а из осталих једнакости (29) налазимо да је

$$2C'C'' - BF = 0,$$

Међутим овај последњи услов показује да је дискриминанта коничног пресека у равни YOZ једнака нули, што значи да сам конични пресек дегенерише у две праве линије. Како је пак, тај конични пресек директриса нашег цилиндра, то се овај последњи распада у две равни, чиме је тврђење доказано.

Под претпоставком да је

$$B = 0,$$

имамо једначину

$$2B'xz + 2Cx + 2C''z + F = 0,$$

чији коефицијенти морају задовољавати услов

$$2CC'' - B'F = 0.$$

Дата једначина одређује цилиндар са директрисом, која претставља конични пресек у координатној равни XOZ. Према добијеном услову овај се конични пресек раставља у две праве а посматрани цилиндар у две равни. Слични закључци се добијају и из услова (35) односно (40).

На тај начин види се да једначина (27), са једним правоуглоним чланом, која претставља скуп две равни, претставља у ствари цилиндар, чија је директриса скуп две праве линије у одговарајућој координатној равни.

Онако исто као напред и у партикуларним случајевима, који су овде проучени, услови растављања површина у скуп две равни добијају се један из другог кружном заменом коефицијената.

Као пример узмимо једначину површине другог реда

$$yz + x = 0$$

Ова површина не може се раставити у две равни, јер има само један правоугаони члан, а не претставља цилиндар.

Узмимо за други пример једначину површине

$$yz + xz + 2x = 0.$$

Ова се такође не може раставити у две равни, јер одговарајући услови нису испуњени.

Посматрајмо као трећи пример једначину

$$xy + yz + x + y + z + 1 = 0.$$

Њени коефицијенти задовољавају услове (36) и зато се она своди на облик

$$(y + 1)(x + z + 1) = 0.$$

Што се тиче једначине

$$2xz + xy + mx = 0$$

где је m макакав број њени коефицијенти задовољавају услове (31) и (42) па се добија очигледан закључак

$$x(2z + y + m) = 0.$$

Ако узмемо, најзад, једначину

$$2xz + xy + my + 2mz = 0$$

онда се према условима (41), (43) и (44), она своди на облик

$$(x + m)(y + 2z) = 0.$$

II. Канонички облик једначина средишних површина

211. Трасформација једначине средишних површина. — Претпоставимо да једначина

$$2f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0 \qquad (1)$$

одређује средишну површину другог реда тако да је друга дискриминанта ове једначине различита од нуле

$$\Delta \gtrless 0.$$

Показали смо горе (з. n^0 170, стр. 176), ако трансформишемо једначину тако да нови координатни почетак O_1 лежи у средишту површине а нове осе O_1X_1, O_1Y_1, и O_1Z_1 буду паралелне старим осама OX, OY и OZ, претворена ће једначина гласити

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 + \frac{D}{\Delta} = 0. \qquad (2)$$

Уведимо сад нови координатни систем $O_1X'Y'Z'$ са пређашњим координатним почетком чије се осе поклапају са осама дате површине (1) и нека су косинуси углова између старих и нових оса одређени овом таблицом

	x'	y'	z'
x_1	α_1	α_2	α_3
y_1	β_1	β_2	β_3
z_1	γ_1	γ_2	γ_3

Тада обрасци за трансформацију координата постају (в. n^0 44, стр. 51)*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y_1 &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z_1 &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Смењујући обрасце (3) у једначину (2), добијамо једначину у облику

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Pz'^2 + 2Qy'z' + 2Rx'z' + 2Tx'y' + \frac{D}{\Delta} = 0, \tag{4}$$

где су вредности коефицијената

$$\begin{aligned} M &\equiv A\alpha_1^2 + A'\beta_1^2 + A''\gamma_1^2 + 2B\beta_1\gamma_1 + 2B'\alpha_1\gamma_1 + 2B''\alpha_1\beta_1, \\ N &\equiv A\alpha_2^2 + A'\beta_2^2 + A''\gamma_2^2 + 2B\beta_2\gamma_2 + 2B'\alpha_2\gamma_2 + 2B''\alpha_2\beta_2, \\ P &\equiv A\alpha_3^2 + A'\beta_3^2 + A''\gamma_3^2 + 2B\beta_3\gamma_3 + 2B'\alpha_3\gamma_3 + 2B''\alpha_3\beta_3, \\ Q &\equiv A\alpha_2\alpha_3 + A'\beta_2\beta_3 + A''\gamma_2\gamma_3 + B(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + B'(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) \\ &\quad + B''(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) \\ R &\equiv A\alpha_1\alpha_3 + A'\beta_1\beta_3 + A''\gamma_1\gamma_3 + B(\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) + \\ &\quad + B'(\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) + B''(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) \\ T &\equiv A\alpha_1\alpha_2 + A'\beta_1\beta_2 + A''\gamma_1\gamma_2 + B(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + \\ &\quad + B'(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + B''(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \end{aligned}$$

Да бисмо израчунали вредности наведених израза, користимо се обрасцима из n^0 180 (в. стр. 189). Према одређеним коренима секуларне једначине и одговарајућим вредностима (28) (из истог n^0 180) косинуса углова α_1, β_1, γ_1 добијамо из наведених општих једнакости идентичности

$$\left.\begin{aligned} A\alpha_i + B''\beta_i + B'\gamma_i &= S_i\alpha_i, \\ B''\alpha_i + A'\beta_i + B\gamma_i &= S_i\beta_i, \\ B'\alpha_i + B\beta_i + A''\gamma_i &= S_i\gamma_i \\ (i = 1, 2, 3)& \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ако помножимо прву једнакост (5) са α_i, другу са β_i, а трећу са γ_i онда ће њихов збир дати идентичност

$$A\alpha_i^2 + A'\beta_i^2 + A''\gamma_i^2 + 2B\beta_i\gamma_i + 2B'\alpha_i\gamma_i + 2B''\alpha_i\beta_i = S_i.$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

*) Овде смо само променили ознаке косинуса посматраних углова.

Према томе, види се да имамо идентички

$$M = S_1, \qquad N = S_2, \qquad P = S_3.$$

С друге стране, збир производа прве једначине (5) са α_k друге са β_k и треће са γ_k, због узајамне управности оса даје идентичности

$$\begin{aligned} A\alpha_i\alpha_k + A'\beta_i\beta_k + A''\gamma_i\gamma_k + B(\beta_k\gamma_i + \beta_i\gamma_k) + B'(\alpha_k\gamma_i + \alpha_i\gamma_k) + \\ + B''(\beta_i\alpha_k + \alpha_i\beta_k) = 0 \end{aligned}$$

за све различите вредности индекса i и k од 1 до 3. Због тога имамо идентички

$$Q = 0, \qquad R = 0, \qquad T = 0.$$

Узимајући у обзир добијене резултате, претворену једначину (4) можемо написати овако

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + S_3z'^2 + \frac{D}{\Delta} = 0.$$

Ако је дискриминанта D различита од нуле, тј. ако површина (1) није конус, онда добијамо канонички облик једначине површине (1)

$$\frac{x'^2}{-\dfrac{D}{S_1\Delta}} + \frac{y'^2}{-\dfrac{D}{S_2\Delta}} + \frac{z'^2}{-\dfrac{D}{S_3\Delta}} = 1. \tag{6}$$

Према знацима детерминаната Δ и D и према броју позитивних и негативних вредности корена секуларне једначине, једначина (6) одређује реални или имагинарни елипсоид, једнокрилни или двокрилни хиперболоид.

Заиста ако је $D = 0$, онда једначина (1) претставља р е а л н и к о н у с при различитим знацима корена S_1, S_2, S_3 и реалну тачку када су сви корени истог знака.

Претпоставимо сада да је $D \gtrless 0$. Једначина (6) одређује р е а л н и е л и п с о и д, кад су Δ и D различитих знакова, а уз то сви корени S_i позитивни или Δ и D имају исти знак, а сви корени S_i су негативни; у супротним случајевима сви су коефицијенти једначине (56) негативни и она претставља и м а г и н а р н и е л и п с о и д.

Најзад, ако је један од коефицијената једначине (6) негативан а два друга позитивна, онда једначина (1) претставља ј е д н о к р и л н и х и п е р б о л о и д.

Међутим, када је један од коефицијената једначине (6) позитиван а два друга негативна, онда једначина (1) претставља д в о к р и л н и х и п е р б о л о и д.

212. Примери. — Узмимо једначину

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6 = 0 \tag{7}$$

Пошто је детерминанта

$$\Delta = 162$$

различита од нуле, површина (7) је средишна а њено се средиште налази у координатном почетку. Секуларна једначина постаје

$$S^3 - 18S^2 + 99S - 162 = 0. \tag{8}$$

Према ранијим излагањима n^0 175 један од корена ове једначине већи је од 7, други се налази између 7 и 5 а трећи је мањи од 5. Пошто једначина (8) има три промене знака, то су сва три корена позитивна. Сем тога, ако су корени једначине (8) цели, они се морају налазити међу бројевима

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9.$$

Одмах се види да су тражени корени

$$S_1 = 9, \quad S_2 = 6, \quad S_3 = 3.$$

Према томе канонички облик једначине (7) гласи

$$\frac{x'^2}{\frac{2}{3}} + y'^2 + \frac{z'^2}{2} = 1$$

и одређује реални елипсоид.

Положај његових оса према старим координатним осама одређује се помоћу једначина (28) на стр. 189. Главна оса која одговара корену S_1 одређена је једначинама

$$m_1 + n_1 = 0, \qquad 2m_1 + 3n_1 + 2p_1 = 0.$$

Корену S_2 одговарају једначине

$$m_2 - 2n_2 = 0, \qquad m_2 + p_2 = 0.$$

Трећем корену одговарају једначине

$$2m_3 - n_3 = 0, \qquad 2m_3 - 3n_3 + 2p_3 = 0.$$

Због тога помоћу образаца (36) лако се добија таблица косинуса углова, који одређују положај сваке осе елипсоида (7)

	x'	y'	z'
x	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

За други пример узмимо једначину

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4y + 8z + 9 = 0 \tag{9}$$

Пошто имамо

$$\Delta = 24, \qquad D = -120,$$

једначина (9) одређује средишну површину. Њено је средиште одређено једначинама

$$2x + y + 2z = 0,$$
$$2x + 3y + 2 = 0,$$
$$4x + 9z + 4 = 0$$

и налази се у тачки $\left(\frac{7}{2},\ -3,\ -2\right)$. Према томе једначина површине (9) у новом координатном систему, чији координатни почетак лежи у средишту а чије су осе паралелне старим осама, постаје

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy = 5. \tag{10}$$

Одговарајућа секуларна једначина

$$S^3 - 16S^2 + 55S - 24 = 0$$

има три корена од којих је један већи од 9, други се налази између 9 и 3 а трећи је мањи од 3. Али ниједан од корена није цео број. Сем тога су сва три корена позитивна, јер лева страна секуларне једначине има три промене знака. Пошто је десна страна једначине (10) позитивна, то посматрана једначина (9) претставља стварни елипсоид. Положај његових оса израчунава се на сличан начин као и у претходном примеру.

Узмимо за трећи пример једначину

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4yz - 4y - 2z - 3 = 0 \tag{11}$$

Пошто је

$$\Delta = -3, \qquad D = 12,$$

то је површина (11) средишна. Ако пренесемо координатни почетак у средиште (0, 0, 1), једначина (11) постаје

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4y_1z_1 = 4$$

Одговарајућа секуларна једначина је облика

$$(1 - S)\,[(1 - S)^2 - 4] = 0$$

Одавде имамо

$$S_1 = 3, \qquad S_2 = 1, \qquad S_3 = -1.$$

Због тога канонички облик једначине дате површине постаје

$$\frac{x'^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1$$

и претставља једнокрилни хиперболоид.

Положај његових оса O_1X', O_1Y' и O_1Z' одређује се једначинама (28) на стр. 189 које добијају облик

$$m_1 = 0, \qquad n_1 - p_1 = 0,$$
$$p_2 = 0, \qquad n_2 = 0,$$
$$m_3 = 0, \qquad n_3 + p_3 = 0$$

Према томе косинуси тражених углова одређују се таблицом

	x'	y'	z'
x	0	1	0
y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
z	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Узмимо још и четврти пример

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2axz = 0. \qquad (12)$$

Пошто је једначина (12) хомогена, то она одређује конус чије се теме налази у координатном почетку.

Заиста имамо

$$\Delta = 1 - a^2, \qquad D = 0.$$

Према томе једначина претставља конус под условом да је $a \gtrless 1$.

Да бисмо нашли канонички облик једначине (12) и положај оса конуса саставимо секуларну једначину

$$(1 - S)\,[(1 - S)^2 - a^2] = 0$$

Одавде добијамо

$$S_1 = 1 + a, \qquad S_2 = 1, \qquad S_3 = 1 - a.$$

и једначина (12) трансформише се у канонички облик:

$$(1 + a)x'^2 + y'^2 + (1 - a)z'^2 = 0.$$

Према томе једначина (12) претставља реални конус под условом да је $a > 1$, а у супротној претпоставци одређује само једну реалну тачку, која се налази у координатном почетку. Најзад положај оса конуса одређује се једначинама (28) на стр. 189 које сада постају

$$n_1 = 0, \qquad m_1 + p_1 = 0,$$
$$p_2 = 0, \qquad m_2 = 0,$$
$$n_3 = 0, \qquad m_3 - p_3 = 0$$

Према томе добијамо таблицу косинуса углова тражених оса

	x	y	z
x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	0	1	0
z	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Међутим за вредност $a = \pm 1$ једначина (12) одређује површину цилиндра.

213. Инваријанте једначине површине другог реда. — Узмимо секуларну једначину посматране површине (1) у облику (в. n^0 177, стр. 185)

$$S^3 - sS^2 + GS - \Delta = 0, \qquad (13)$$

где је

$$s \equiv A + A' + A''$$
$$G \equiv AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2,$$

а Δ означава другу дискриминанту једначине површине (1).

Докажимо да коефицијенти секуларне једначине (13)

$$s, \qquad G, \qquad \Delta, \qquad (14)$$

а такође и прва дискриминанта

$$D = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix} \qquad (15)$$

претстављају четири инваријанте једначине другог степена (1).

Извршимо прво транслацију координатног система. Ради тога сменимо у једначини (1) старе координате обрасцима

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1, \qquad z = c + z_1 \qquad (16)$$

Претворена једначина (1) постаје

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2By_1z_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''x_1y_1 + 2f'_a\,x_1 +$$
$$+ 2f'_b\,y_1 + 2f'_c\,z_1 + 2f(a, b, c) = 0. \qquad (17)$$

Пошто су коефицијенти уз чланове другог степена ове једначине исти као и у полазној једначини (1), то је очигледно да су три обрасца (14) инваријанте према транслацији (16).

Означимо са D вредност прве дискриминанте за претворену једначину (17).

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & f'_a \\ B'' & A' & B & f'_b \\ B' & B & A'' & f'_c \\ f'_a, & f'_b & f'_c, & 2f_{(a,\,b,\,c)} \end{vmatrix}$$

Ако одузмемо од елемената последње врсте елементе прве врсте помножене са a друге врсте помножене са b и треће помножене са c, онда ће детерминанта D_1 задржати своју вредност и гласиће

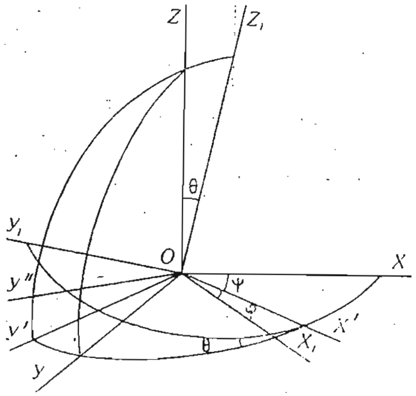
$$D_1 = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & f'_a \\ B'' & A' & B & f'_b \\ B' & B & A'' & f'_c \\ C & C' & C'' & Ca+C'b+C''c+F \end{vmatrix}$$

Одузимајући сад од елемената последње колоне елементе прве три колоне помножене са a, b односно c добијамо, да је

$$D_1 = D.$$

Према томе дискриминанта D је такође инваријанта у односу на обрасце транслације (16).

Трансформација координата која се врши обртањем координатног система око координатног почетка, може се извршити узастопце у три маха обртањем око три различите осе. Она се изражава аналитички помоћу Ајлерових углова. Ради тога опишимо лопту око координатног почетка као средишта са полупречником који је једнак јединици (сл. 79).



Сл. 79

Нека је праза OX′ линија пресека координатних равни XOY и X_1OY_1. Означимо са ψ угао који праза OX′ гради са осом OX у равни XOY и са θ угао између обе поменуте координатне равни. Према томе исти угао заклапају и обе осе OZ и OZ_1, које су управне на те равни. Најзад означимо са φ угао у новој координатној равни X_1OY_1, који гради праза OX′ са

осом OX_1. Тада да бисмо довели стари систем координата у положај новог система, треба да га обрнемо за угао ψ око осе OZ тако, да стара оса OY заузме положај OY′. Затим ћемо окренути стари систем за угао θ око осе OX′ тако да оса OY′ заузме нови положај OY″ у новој равни X_1OY_1.

Најзад ротирамо стари систем око осе OZ_1 за угао φ.

Наведеној првој ротацији одговарају обрасци трансформације координата:

$$x = \beta x' - \alpha y', \qquad y = \alpha x' + \beta y', \tag{18}$$

где су, краткоће ради, уведене ознаке:

$$\alpha \equiv \sin\psi, \qquad \beta \equiv \cos\psi$$

тако да постоји идентичност:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{19}$$

Смењујући обрасце (18) у једначини (1) добијамо претворену једначину:

$$A_1x'^2 + A_1'y'^2 + A''z^2 + 2B_1y'z + 2B_1'x'z + 2B_1''x'y' + 2C_1x' + \\ + 2C_1'y' + 2C''z + F = 0, \tag{20}$$

где је

$$\begin{aligned} &A_1 \equiv A\beta^2 + 2B''\alpha\beta + A'\alpha^2 \\ &A_1' \equiv A\alpha^2 - 2B''\alpha\beta + A'\beta^2, \\ &B_1 \equiv B\beta - B'\alpha, && B_1' \equiv B\alpha + B'\beta, \\ &B_1'' \equiv (A'-A)\alpha\beta + B''(\beta^2-\alpha^2), && C_1' \equiv -C\alpha + C'\beta \\ &C_1 \equiv C\beta + C'\alpha. \end{aligned}$$

Ако означимо са S_1, G_1, Δ_1 и D_2 обрасце (14) и (15) који одговарају претвореној једначини (20) добијамо на основу идентитета (19)

$$s_1 = s$$

$$G = AA'(\alpha^2+\beta^2)^2 + AA''(\alpha^2+\beta^2) + A'A''(\alpha^2+\beta^2) - B^2(\alpha^2+\beta^2) - \\ - B'^2(\alpha^2+\beta^2) - B''^2(\alpha^2+\beta^2) = G$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A\beta^2 + 2B''\alpha\beta + A'\alpha^2 & (A'-A)\alpha\beta + B''(\beta^2-\alpha^2) & B\alpha + B'\beta \\ (A'-A)\alpha\beta + B''(\beta^2-\alpha^2) & A\alpha^2 - 2B''\alpha\beta + A'\beta^2 & B\beta - B'\alpha \\ B\alpha + B'\beta & B\beta - B'\alpha & A'' \end{vmatrix}$$

Поделимо прво ову детерминанту са β, а њене елементе прве колоне помножимо са β и одузмемо од њих елементе друге колоне, који се претходно множе са α. Елементи друге колоне добијене детерминанте имају општи множитељ β, који се скраћује са горе уведеним делиоцем β.

Да бисмо извели нову трансформацију уочене детерминанте, треба да је поделимо са β, а њене елементе прве врсте да помножимо са β и да одузмемо од њих елементе друге врсте, које смо претходно помножили са α.

Најзад додајмо елементима друге врсте дате детерминанте елементе прве врсте претходно помножене са α. Како елементи друге врсте имају општи множилац β, који се скраћује са одговарајућим делиоцем детерминанте, то се добија тражена једнакост

$$\Delta_1 = \Delta.$$

Према томе, заиста, је Δ инваријанта једначине (1) према трансформацији (18).

Да бисмо доказали да и детерминанта D претставља инваријанту, применимо расуђивања слична претходним и на детерминанту

$$D_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1'' & B_1' & C_1 \\ B_1'' & A_1' & B_1 & C_1' \\ B_1' & B_1 & A'' & C'' \\ C_1 & C_1' & C'' & F \end{vmatrix}$$

која се добија из детерминанте Δ_1 допуном четврте врсте и четврте колоне Стога су обрасци (14) и (15) инваријанте и према извршеној трансформацији (18).

Лако је доказати, слично претходном, да су обрасци (14) и (15) инваријанте и према двема другим трансформацијама координата, које одговарају ротацијама око оса OX′ односно OZ_1.

Заиста обрасци за трансформацију координатног система OY′ZX′ у систем $OY''Z_1X'$ гласе

$$y' = y''\beta_1 - z_1\alpha_1, \quad z = y''\alpha_1 + z_1\beta_1, \tag{21}$$

где су уведене ознаке

$$\alpha_1 = \sin\theta, \quad \beta_1 = \cos\theta, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1.$$

Обрасци (21) разликују се од претходних само кружном заменом координата и то: x' са y'', односно y' са z_1, и новим ознакама α_1 и β_1 уведеним уместо α и β. Према томе, слично горњем доказу, обрасци (14) и (15) претстављају инваријанте према трансформацијама (21).

Најзад, трећа трансформација се одређује обрасцима

$$x' = x_1\beta_2 - y_1\alpha_2, \quad y'' = x_1\alpha_2 + y_1\beta_2, \tag{22}$$

где су уведене ознаке

$$\alpha_2 = \sin\varphi, \quad \beta_2 = \cos\varphi, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Обрасци (22) се разликују од образаца (18) само ознакама. Према томе обрасци (14) и (15) такође претстављају инваријанте и за трансформацију (22).

Досада смо посматрали трансформације конгруентних координатних система. Употпунићемо ова расматрања трансформацијом симетричних координатних система.

Зато ћемо посматрати прво трансформацију само једне координате, наиме:

$$x = -x_1.$$

Претворена једначина (1) тада постаје

$$2f_1(x_1, y, z) \equiv Ax_1^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B_1'x_1z + 2B_1''x_1y +$$
$$+ 2C_1x_1 + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

где је

$$B_1' \equiv -B', \quad B_1'' \equiv -B'', \quad C_1 \equiv -C.$$

Ако означимо обрасце (14) за ову тек претворену једначину, са

$$s_1, \quad G_1, \quad \Delta_1,$$

одмах се види да постоје једнакости

$$s = s_1, \quad G_1 = G,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A & -B'' & -B' \\ -B'' & A' & B \\ -B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

Међутим промена знакова у овој детерминанти истовремено код елемената прве врсте и прве колоне, не мења знак ни код елемента A нити детерминанте. Према томе добијамо тражену једнакост

$$\Delta_1 = \Delta.$$

Ако означимо са D_1 дискриминанту претворене једначине, онда се на сличан начин добија једнакост

$$D_1 = D.$$

Извршимо сада симетричну трансформацију ма које две координате или чак и све три. Ставимо, на пример,

$$x = -x_1, \quad y = -y_1,$$

или, за други случај,

$$x = -x_1, \quad y = -y_1, \quad z = -z_1$$

Слично претходном поступку увек бисмо дошли до закључка да обрасци (14) и (15) задржавају своје инваријантне особине и у случају ма каквих симетричних трансформација координата.

Пошто се корени секуларне једначине

$$S_1, \quad S_2 \quad \text{и} \quad S_3$$

изражавају Кардановим обрасцима помоћу коефицијената једначине то су и ти корени инваријанте према посматраним трансформацијама.

Доказани став о инваријантности образаца (14), (15) и корена секуларне једначине, врло је важан. Наиме одатле ћемо извести закључак да једначина сваке површине другог степена има само један једини канонички облик, независно од полазног координатног система и облика једначине посматране површине у овом систему.

214. Трансформација једначина површина без средишта у канонички облик. — Претпоставимо сад, да дата једначина (1) претставља површину без средишта,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Тада, према горе наведеном (n^0 177), одговарајућа секуларна једначина за површину (1) има један корен једнак нули. Претпоставимо да је S_3 баш тај корен

$$S_3 = 0. \tag{23}$$

Ако узмемо у старом координатном почетку нове координатне осе OX_1, OY_1 и OZ_1, које претстављају правце главних оса површине, добићемо обрасце за трансформацију координата (слично обрасцима трансформације једначина средишних површина) наиме:

$$\begin{aligned} x &= x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2 + z_1\alpha_3, \\ y &= x_1\beta_1 + y_1\beta_2 + z_1\beta_3, \\ z &= x_1\gamma_1 + y_1\gamma_2 + z_1\gamma_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Смењујући сада ове обрасце у једначини (1) добијамо према услову (23) а слично пређашњој трансформацији, претворену једначину у облику

$$S_1x_1^2 + S_2y_1^2 + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 + 2C_1''z_1 + F = 0, \tag{25}$$

где је

$$\left.\begin{aligned} C_1 &\equiv C\alpha_1 + C'\beta_1 + C''\gamma_1 \\ C_1' &\equiv C\alpha_2 + C'\beta_2 + C''\gamma_2 \\ C_1'' &\equiv C\alpha_3 + C'\beta_3 + C''\gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Пре свега, доведимо једначину (25) на канонички облик на тај начин што ћемо уклонити чланове са x_1 и y_1 на првом степену исто као и стални члан. Ради тога извршимо трансформацију координатног система у неки нови координатни систем са почетком (x_0, y_0, z_0) према обрасцима

$$x_1 = x_0 + x', \quad y_1 = y_0 + y', \quad z = z_0 + z'.$$

Претворена једначина (25) лако се доводи на нови облик

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + 2C_1''z' = 0, \tag{27}$$

ако уведемо услове за одређивање x_0, y_0, z_0 дате везама

$$S_1x_0 + C_1 = 0 \qquad S_2y_0 + C_1' = 0,$$
$$S_1x_0^2 + S_2y_0^2 + 2C_1x_0 + 2C_1'y_0 + 2C_1''z_0 + F = 0.$$

Одавде добијамо

$$x_0 = -\frac{C_1}{S_1}, \quad y_0 = -\frac{C_1'}{S_2}, \quad z_0 = -\frac{F'}{2C_1''},$$

где је

$$F' \equiv F - \frac{C_1^2}{S_1} - \frac{C_1'^2}{S_2}.$$

Добијена једначина (27) претставља тражени канонички облик, јер се коефицијенат C_1'' лако изражава помоћу инваријаната. Заиста дискриминанта D која као инваријанта задржава сталну вредност, изражава се за једначину (27) овако

$$D = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1'' \\ 0 & 0 & C_1'' & 0 \end{vmatrix} = -S_1S_2C_1''^2 = -GC_1''^2 \tag{28}$$

Према горе наведеном обрасцу добијена једнакост одређује тражену вредност коефицијента C_1'' у облику

$$C_1'' = \pm\sqrt{-\frac{D}{G}},$$

где се од два знака пред кореном мора узети онај, који одговара израчунатој вредности (26) за коефицијент C_1''.

Према томе једначина (27) постаје

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{D}{G}}\, z' = 0.$$

Извршена трансформација изведена је под претпоставком да су коефицијенат C_1'' и дискриминанта D различити од нуле. Стога се добијена једначина може овако написати

$$z' = \frac{x'^2}{\mp\frac{2}{S_1}\sqrt{-\frac{D}{G}}} + \frac{y'^2}{\mp\frac{2}{S_2}\sqrt{-\frac{D}{G}}},$$

где се од два знака пред кореном мора узети само један и то према горњем упуству.

Ова једначина претставља елиптички или хиперболички, параболоид што зависи од једнакости или различитости знакова корена S_1 и S_2. Ако су они истог знака, параболоид је елиптички, иначе је хиперболички. Сем тога свака од ових површина је реална, јер инваријанте D и G имају различите знаке, према једнакости (28).

Ако би се десило да је коефицијенат C_1'' једнак нули, онда је према једнакости (28) дискриминанта D једнака нули. Према томе површина (25) која нема средишта, мора бити конус са бескрајно удаљеним средиштем тј. она претставља цилиндар. Овај ћемо случај проучити засебно.

215. Цилиндричне површине. — Ако постоји услов

$$D = 0, \qquad C_1'' = 0,$$

једначина (25) добија облик

$$S_1x_1^2 + S_2y_1^2 + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 + F = 0, \tag{29}$$

где се C_1 и C_1' изражавају обрасцима (26). Ради упрошћавања те једначине уведимо у равни X_1OY_1 нови координатни систем. Узмимо нови координатни почетак O_1 у некој тачки x_0, y_0, а нове осе O_1X' и O_1Y' повуцимо паралелно старим осама. Према обрасцима трансформације

$$x_1 = x_0 + x', \qquad y_1 = y_0 + y',$$

једначина (29) постаје

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + F_1 = 0, \tag{30}$$

ако се координате x_0 и y_0 одреде условима

$$S_1x_0 + C_1 = 0 \qquad S_2y_0 + C_1' = 0,$$

при чему је

$$F_1 \equiv S_1x_0^2 + S_2y_0^2 + 2C_1x_0 + 2C_1'y_0 + F.$$

Према томе имамо

$$\left.\begin{aligned} x_0 = -\frac{C_1}{S_1} \quad y_0 = -\frac{C_1'}{S_2}, \\ F_1 = F - \frac{C_1^2}{S_1} - \frac{C_1'^2}{S_2} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Лако се може утврдити да је образац за F_1 инваријанта према левој страни једначине коничног пресека (29). Заиста његова се дискриминанта коју ћемо означити са Δ', изражава овако

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & S_2 & C_1' \\ C_1 & C_1' & F \end{vmatrix} = S_1 S_2 \left(F - \frac{C_1^2}{S_1} - \frac{C_1'^2}{S_2} \right).$$

Ова инваријанта Δ' се зове цилиндричка инваријанта. Према томе, а на основу обрасца из n^0 179 (стр. 189) имамо

$$F_1 \equiv F - \frac{C_1^2}{S_1} - \frac{C_1'^2}{S_2} = \frac{\Delta'}{G}$$

и једначина (30) постаје

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 + \frac{\Delta'}{G} = 0 . \tag{32}$$

Ако је инваријанта Δ' различита од нуле, добијена једначина се може довести на канонички облик

$$\frac{x'^2}{-\frac{\Delta'}{S_1 G}} + \frac{y'^2}{-\frac{\Delta'}{S_2 G}} = 1 \tag{33}$$

Једначина (33) одређује цилиндар елиптички, реални или имагинарни, или хиперболички, што зависи од знака чинилаца који улазе у коефицијенте једначине.

Једначина (33) одређује реални елиптички цилиндар, када су Δ' и G различитих знакова и када су оба корена S_i позитивна или Δ' и G имају исти знак, а корени S_i су негативни, у супротним случајевима једначина (33) претставља имагинарни цилиндар.

Ако су корени S_1 и S_2 различитих знакова једначина (33) претставља хиперболички цилиндар.

Најзад ако је инваријанта Δ' једнака нули, једначина (32) постаје

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 = 0.$$

Ова једначина одређује скуп две реалне или имагинарне равни, према томе да ли су корени S_1 и S_2 различитих или једнаких знакова. У овој последњој претпоставци је очевидно да се обе имагинарне равни секу дуж једне реалне праве линије, чије су једначине

$$x' = 0, \qquad y' = 0,$$

а које одређују осу кота.

216. Израчунавање цилиндричке инваријанте. — Да бисмо израчунали вредност коефицијента F_1 у једначини (30), који се изражава помоћу инваријанте Δ' потребно је било извршити низ наведених трансформација. Међутим, лако је доказати да се ова инваријанта може израчунати непосредно помоћу коефицијената полазне једначине (1). Заиста прва два члана леве стране једначине (30), наиме израз

$$S_1 x'^2 + S_2 y'^2 \tag{34}$$

претставља производ два линеарна чиниоца (реална или имагинарна). Према томе морају бити задовољени одговарајући услови за полазни облик, који се претвара у образац (34).

Лако је видети да се овај полазни облик разликује од леве стране једначине (1) за стални члан $-F_1$, што се овако изражава

$$2f(x, y, z) - F_1, \tag{35}$$

Као што је то добро познато, три услова да се овај полином може раставити у два линеарна множиоца, изражавају се помоћу три детерминанте, које су једнаке нули. Формирање ових услова врло је просто. За то се мора изједначити са нулом сваки минор дискриминанте полинома (35) који одговара елементима њене главне дијагонале. Искористимо само прва три услова где фигуришу минори прва три елемента, наиме

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & F-F_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & F-F_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & F-F_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Одавде се добијају три једнакости, растављањем сваке од детерминаната у две детерминанте тј.

$$\begin{aligned} (A'A'' - B^2)F_1 &= \begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & F \end{vmatrix} \equiv D'_A, \\ (AA'' - B'^2)F_1 &= \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & F \end{vmatrix} \equiv D'_{A'}, \\ (AA' - B''^2)F_1 &= \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & F \end{vmatrix} \equiv D'_{A''}, \end{aligned} \tag{36}$$

где D'_A, $D'_{A'}$, $D'_{A''}$ означавају парцијалне изводе дискриминанте D по A, A' односно A''. Свака од једначина (36) потпуно је довољна за израчунавање тражене вредности F_1. Међутим, ако саберемо све три једначине (36), добијамо

$$GF_1 = D'_A + D'_{A'} + D'_{A''}.$$

Према томе види се да се цилиндричка инваријанта изражава овако

$$\Delta' = D'_A + D'_{A'} + D'_{A''}.$$

217. Случај када су два корена секуларне једначине једнака нули. — Претпоставимо, на пр. да је

$$S_1 = S_2 = 0$$

Тада једначина (1) претворена помоћу образаца (24) постаје

$$S_3 z_1^2 + 2C_1 x_1 + 2C_1' y_1 + 2C_1'' z_1 + F = 0, \tag{37}$$

где су коефицијенти дати изразима (26). Претпоставимо да ниједан од коефицијената C_1, C_1' и C_1'' није једнак нули. Извршимо тада трансформацију координата по обрасцима

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y_1 &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \\ z_1 &= z_0 + z', \end{aligned}$$

где су x_0, z_0, координате новог почетка O_1 у равни X_1OZ_1, а x_0, z_0, α три неодређене константе, које ћемо доцније одредити тако, да резултат буде претворена и упрошћена једначина.

Смењујући уведене нове координате у једначини (37) добијамо трансформовану једначину у облику

$$S_3 z'^2 + 2Kx' = 0, \tag{38}$$

под условом да је стављено

$$\left.\begin{aligned} & S_3 z_0 + C_1'' = 0 \\ & S_3 z_0^2 + 2C_1 x_0 + 2C_1'' z_0 + F = 0 \\ & C_1' \cos\alpha - C_1 \sin\alpha = 0, \\ & K \equiv C_1 \cos\alpha + C_1' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Две прве једначине (39) дају вредности координата

$$z_0 = -\frac{C_1''}{S_3}, \qquad x_0 = \frac{1}{2C_1}\left(\frac{C_1''^2}{S_3} - F\right). \tag{40}$$

Трећа једначина (39) одређује угао α обрасцем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1'}{C_1}$$

Узмимо за α најмању вредност угла, и у обрасцима

$$\sin\alpha = \pm\frac{C_1'}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2}}, \qquad \cos\alpha = \pm\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_1'^2}}$$

изаберимо одговарајући знак. Према томе је положај нових оса потпуно одређен. Најзад и последњи образац (39) даје

$$K = \pm\sqrt{C_1^2 + C_1'^2},$$

где се од два знака бира само један према горњем упутству.

Добијена једначина (38) претставља канонички облик једначине (37). Заиста, дискриминанта Δ' коничког пресека (38) у координатној равни $X'O_1Z'$, израчунава се овако

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} S_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K \\ 0 & K & 0 \end{vmatrix} = -K^2 S_3, \tag{41}$$

Одавде се коефицијенат K изражава помоћу цилиндричке инваријанте Δ' у облику

$$K = \pm\sqrt{-\frac{\Delta'}{S_3}},$$

где се од два знака бира онај, који одговара израчунатој вредности K. Према томе једначина (38) постаје

$$S_3 z'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta'}{S_3}}\, x' = 0. \tag{42}$$

Ако је инваријанта Δ' различита од нуле, добијена једначина (42) одређује р е а л н и п а р а б о л и ч к и ц и л и н д а р, јер Δ' и S_3 имају различите знаке према (41). Међутим ако је инваријанта Δ' једнака нули, једначина (42) одређује скуп две равни које се поклапају са координатном равни $X'O_1Y'$.

Изведена трансформација је могућа само под претпоставком, да је коефицијенат

$$C_1 \gtrless 0,$$

јер у супротном случају x постаје бесконачно. При претпоставци, да је

$$C_1 = 0,$$

једначина (37) сменом

$$y_1 = y_0 + y', \qquad z_1 = z_0 + z'$$

постаје

$$S_3 z'^2 + 2C_1' y' = 0, \tag{43}$$

ако уведемо услове

$$S_3 z_0 + C_1'' = 0, \qquad S_3 z_0^2 + 2C_1' y_0 + 2C_1'' z_0 + F = 0.$$

Одавде се добијају координате новог координатног почетка

$$z_0 = -\frac{C_1''}{S_3}, \qquad y_0 = -\frac{1}{2C_1'}\left(F - \frac{C_1''^2}{S_3}\right).$$

Најзад, коефицијенат C_1' у једначини (43) изражава се исто помоћу цилиндричке инваријанте, слично претходном случају, те једначина (43) претставља површину цилиндра.

Испитајмо сада последњу претпоставку, кад су оба коефицијента C_1 и C_1' једнака нули

$$C_1 = C_1' = 0.$$

Тада једначина (37) постаје

$$S_3 z_1^2 + 2C_1'' z_1 + F = 0.$$

Сменом

$$z_1 = z_0 + z'$$

добијена једначина, ако уведемо услове

$$S_3 z_0 + C_1'' = 0, \qquad F' \equiv F + S_3 z_0^2 + 2C_1'' z_0,$$

своди се на облик

$$S_3 z'^2 + F' = 0 \tag{44}$$

Одавде се добијају обрасци

$$z_0 = -\frac{C_1''}{S_3}, \qquad F' = F - \frac{C_1''}{S_3}.$$

Добијена једначина (44) претставља канонички облик једначине (1) кад ова одређује две паралелне равни.

218. Друга цилиндричка инваријанта. — Вредност сталног члана F′ једначине (44) може се непосредно израчунати помоћу коефицијената полазне једначине (1). Заиста, као што је познато, када једначина (1) претставља две паралелне равни које се поклапају, морају се поништити не само напред наведене три детерминанте трећег реда, него и минори који одговарају елементима њихових главних дијагонала.

Примењујући овај став на полином

$$2f(x, y, z) - F'.$$

изједначимо са нулом ове миноре детерминаната (36)

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & F - F' \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} A' & C' \\ C' & F - F' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} A'' & C'' \\ C'' & F - F' \end{vmatrix} = 0.$$

Према томе добијамо једначине

$$AF' = AF - C^2,$$
$$A' F' = A'F - C'^2,$$
$$A''F' = A''F - C''^2.$$

Свака од ових једначина довољна је за израчунавање тражене вредности F′.

Међутим ако саберемо све три једнакости, добијамо (пошто је $A + A' + A'' = S_3$)

$$F' = F - \frac{C^2 + C'^2 + C''^2}{S_3},$$

где се образац

$$S_3 F - C^2 - C'^2 - C''^2$$

зове д р у г а ц и л и н д р и ч к а и н в а р и ј а н т а.

219. Примери. — Испитајмо површину чија је једначина

$$z - ax - y + xy = 0. \tag{45}$$

Дата једначина одређује површину без средишта, јер добијамо

$$\Delta = 0, \qquad D = \frac{1}{16}$$

Секуларна једначина гласи

$$S\left(S^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

и даје

$$S_1 = \frac{1}{2}, \qquad S_2 = -\frac{1}{2}, \qquad S_3 = 0.$$

Према томе косинуси оса површине (45) одређени су таблицом:

	x_1	y_1	z_1
x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
z	0	0	1

Обрасци (26) дају за претворену једначину (45)

$$C_1 = -\frac{a+1}{2\sqrt{2}}; \qquad C_1' = \frac{a-1}{2\sqrt{2}}, \qquad C_1'' = \frac{1}{2}.$$

Према томе се једначина (45) трансформише у канонички облик

$$z' = \frac{1}{2}(y'^2 - x'^2)$$

и претставља хиперболички параболоид. Његово теме налази се у тачки са координатама

$$x_0 = \frac{a+1}{\sqrt{2}}, \qquad y_0 = \frac{a-1}{\sqrt{2}}, \qquad z_0 = +a,$$

а осе x', y', z' су паралелне осама x_1, y_1, z_1.

Проучимо другу једначину

$$13x^2 + 10y^2 + 5z^2 - 12yz - 6xz - 4xy - 16x + 4y + \frac{8}{3}z - 1 = 0 \tag{46}$$

Пошто имамо

$$\Delta = 0, \qquad D = 0,$$

секуларна једначина

$$S^3 - 28S^2 + 196S = 0$$

има корене

$$S_1 = S_2 = 14, \qquad S_3 = 0.$$

Према упутству у n^0 180 (стр. 191) узимамо за α_1, β_1 и γ_1 произвољне вредности $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, које задовољавају прву једначину (32) на стр. (191) за $S_1 = 14$. Тада се положај две друге осе одређује једноставно, те се лако саставља таблица

	x_1	y_1	z_1
x	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{\sqrt{42}}$	$\frac{1}{\sqrt{14}}$
y	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{42}}$	$\frac{2}{\sqrt{14}}$
z	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{42}}$	$\frac{3}{\sqrt{14}}$

Претворена једначина (46) постаје

$$14(x_1^2 + y_1^2) + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 - 1 = 0$$

где имамо, према обрасцима (26),

$$C_1 = \frac{22}{3\sqrt{3}}, \quad C_1' = -\frac{140}{3\sqrt{42}}, \quad C_1'' = 0.$$

Обрасци (31) одређују координате новог почетка O_1 и стални члан овако

$$x_0 = -\frac{11}{21\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{10}{3\sqrt{42}}, \quad F_1 = -\frac{377}{63}.$$

Поново претворена једначина

$$x'^2 + y'^2 = \frac{377}{14.63}$$

претставља кружни цилиндар, чија је оса паралелна координатној оси OZ'.

Узмимо као трећи пример једначину облика

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 6yz - 6xz - 2xy + 2x - 4z = 0. \tag{47}$$

За ову једначину добијамо

$$\Delta = 0 \qquad D = 0$$

Секуларна једначина

$$S^3 - 11S^2 = 0$$

има корене

$$S_1 = S_2 = 0 \qquad S_3 = 11.$$

Двоструком корену $S_1 = 0$ одговара једна једначина

$$m_1 - n_1 - 3p_1 = 0.$$

Због тога се може узети

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_1 = 0$$

Тада су косинуси свих тражених углова одређени таблицом

	x_1	y_1	z_1
x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{22}}$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$
y	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{3}{\sqrt{22}}$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$
z	0	$\frac{2}{\sqrt{22}}$	$\frac{3}{\sqrt{11}}$

Претворена једначина (47) добија облик

$$11z_1^2 + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 + 2C_1''z_1 = 0, \tag{48}$$

где су коефицијенти дати изразима (26) овако

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad C_1' = -\frac{1}{\sqrt{22}}, \quad C_1'' = -\frac{7}{\sqrt{11}}.$$

Нови координатни почетак O_1 који се налази у координатној равни X_1OZ_1, одређен је изразима (40), тј.

$$z_0 = \frac{7}{11\sqrt{11}}, \qquad x_0 = \frac{49}{11^2\sqrt{2}}.$$

Угао α одређен је обрасцем

$$tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{11}},$$

а за K узмимо вредност

$$K = -\sqrt{\frac{6}{11}}$$

Тада једначина (48) постаје

$$z'^2 = \frac{2\sqrt{6}}{11\sqrt{11}}\, x'$$

и одређује параболички цилиндар, чије су генератрисе паралелне оси O_1Y'. Узмимо четврти пример

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2xz + 4xy + 2x + 4y - 2z + 1 = 0 \tag{49}$$

За ову једначину добијамо

$$\Delta = 0 \qquad D = 0$$

Секуларна једначина постаје

$$S^2(S-6) = 0$$

и одређује корене

$$S_1 = S_2 = 0, \qquad S_3 = 6$$

Косинуси углова главних оса одређени су таблицом

	x_1	y_1	z_1
x	0	$\frac{5}{\sqrt{30}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{2}{\sqrt{30}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
z	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{30}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

Претворена једначина (49) добија облик

$$6z_1^2 + 2C_1x_1 + 2C_1'y_1 + 2C_1''z_1 + 1 = 0,$$

где су вредности коефицијената дате обрасцима (26)

$$C_1 \equiv 0, \qquad C_1' \equiv 0, \qquad C_1'' \equiv -\sqrt{6}.$$

Према томе се добијена једначина своди на канонички облик

$$(\sqrt{6}\ z_1 - 1)^2 = 0$$

и претставља скуп две равни које се поклапају

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

III. Конструкција површина другог реда

220. Дефиниција. — Појам елемената проширен је, у претходним одељцима, на све површине другог реда, чије су једначине

$$2f(x, y, z) \equiv SAx^2 + 2SBxy + 2SCx + F = 0, \tag{1}$$

где симболи S означавају симетричне збирове координата и коефицијената уз њих.

Ова једначина садржи десет коефицијената

$$A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', F \tag{2}$$

Међутим једначина (1) је линеарна и хомогена у односу на ове коефицијенте. Према томе, ако је поделимо са једним од коефицијената (2), види се да у ствари једначина (1) зависи свега од 9 сталних коефицијената.

Одавде следује да за одређивање једначине неке површине другог реда морају бити познате тих девет размера. Према томе, са аналитичког алгебарског гледишта довољно је имати девет једначина за одређивање девет поменутих величина. Да бисмо саставили те једначине морамо имати за то довољан број података, који се изражавају помоћу датих елемената површина.

Као и у теорији коничних пресека тако и за површине другог реда њихови се елементи разликују према броју једнакости које претстављају релације између вредности тражених коефицијената и служе за њихову дефиницију. Према броју ових релација елемент је прост, двојак или вишеструк. Тако на пример, тачка је прост елемент, јер резултат замене координата дате тачке у једначини (1) даје само једну релацију између тражених коефицијената. Тангентна раван претставља исто тако прост елемент. Заиста, идентификујући дату једначину са једначином једне тангентне равни површине (1) добијамо три релације. Резултат елиминације трију координата додира из наведених трију релација и једначине површине (1) одређује једну релацију за тражене коефицијенте једначине (1). Према томе и тангентна раван претставља прост елемент. Међутим, дата једначина тангентне равни и дата тачка додира образују вишеструки елемент. Лако је увидети да је његов ред једнак броју три. Заиста, један се услов добија сменом датих координата тачке додира у једначини (1). Осим тога се добијају још ове две релације. Заиста, дата раван, која пролази кроз дату тачку (x_0, y_0, z_0) додира, изражава се једначином

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

где су a, b и c дате величине. Ова раван мора се поклапати са једначином тангентне равни (в. n^0 181, образац 4),

$$f'_{x_0}(x - x_0) + f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{z_0}(z - z_0) = 0$$

Пошто обе ове једначине претстављају исту раван, морају постојати услови

$$\frac{f'_{x_0}}{a} = \frac{f'_{y_0}}{b} = \frac{f'_{z_0}}{c}$$

које одређују две везе између тражених коефицијената. Према томе елемент који се састоји из дате тангентне равни и дате тачке додира трећег је реда.

Исто тако дата тачка која је центар површине (1) претставља један елемент трећег реда, јер изједначујући вредности координата дате тачке са обрасцима за координате центра површине, добијамо три релације између коефицијената једначине површине (1).

Једначине праве, која се мора налазити на површини (1) претставља њен елеменат трећег реда. Овај закључак следује отуда што смењујући вредност две од координата из једначина дате праве у једначину површине (1) добијамо квадратну једначину у односу на трећу координату. Пошто она мора бити идентички задовољена, изједначимо са нулом све чланове дотичне једначине. На овај начин добијају се три релације између тражених коефицијената.

Препуштамо читаоцу да одреди сам ред елемената који претстављају скуп две или три праволиниске генератрисе површине другог реда под условима, кад ове генератрисе припадају једној истој или различитим породицама. Слично питање поставља се за кружне пресеке и за тачке заокругљавања површина другог реда.

Пошто смо навели да је девет број непознатих коефицијената у једначини (1) у општем случају то је за њено одређивање потребан број различитих елемената чији је збир редова једнак девет. Овај закључак вреди за оне површине другог реда, чије једначине садрже девет међу собом независних коефицијената.

Међутим за конусне површине или за површине без средишта (тј. са бескрајно удаљеним средиштем) постоји по једна релација између коефицијената. Тако за конусне површине анулира се прва дискриминанта, а за површине без средишта друга дискриминанта. Према томе поменуте површине поседују само осам међу собом независних коефицијената. За то је за њихово одређивање потребан један елеменат мање.

У исто се време за сваки цилиндар, обе дискриминанте анулирају, те због тога за њихове површине, у општем облику, постоји увега седам различитих коефицијената.

Ако је тражена површина дата једначином у одређеном партикуларном облику или у канонском облику, то је број непознатих коефицијената још мањи. То долази од тога, што су за свођење једначина на поменути засебан облик већ биле искоришћене особине извесних елемената посматраних површина.

221. Одређивање површина другог реда помоћу њихових елемената. — Да бисмо одредили површину чија се једначина изражава помоћу девет различитих коефицијената у општем облику, за то је на пр. довољно да буду дате девет тачака, кроз које мора пролазити тражена површина.

Ставимо ли координате датих тачака у једначину (1) добијају се девет једначина које су линеарне у односу на непознате коефицијенте. Према томе налазимо за њих у опште потпуно одређене вредности под условом да се дате тачке не налазе у некој засебној конфигурацији.

Заиста, означимо са

$$(x_i, y_i, z_i) \qquad (i = 1,\ 2, \ldots 9)$$

координате девет датих тачака. Према томе сменом ових координата у једначини (1) добијамо девет једначина

$$\begin{aligned} Ax_i^2 + A'y_i'^2 + A''z_i'^2 + 2By_iz_i + 2B'x_iz_i + 2B''x_iy_i + 2Cx_i + \\ + 2C'y_i + 2C''z_i + F = 0. \qquad (i = 1,\ 2, \ldots 9) \end{aligned} \tag{3}$$

Ове су једначине линеарне у односу на непознате коефицијенте (2). Детерминанта од коефицијената уз величине (2) постаје

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & 2y_1z_1 & 2x_1z_1 & 2x_1y_1 & 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & 2y_2z_2 & 2x_2z_2 & 2x_2y_2 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & 2y_9z_9 & 2x_9z_9 & 2x_9y_9 & 2x_9 & 2y_9 & 2z_9 \end{vmatrix}$$

Ако су дате тачке тако распоређене да је ова детерминанта различита од нуле, онда су једначине (3) различите у односу на величине (2) и дају за њих потпуно одређене вредности. Резултат смене добијених вредности коефицијената (2) у једначини (1) одређује једначину тражене површине.

Међутим, ако се детерминанта δ идентички анулира, тј. дате тачке имају неки одређени нарочити положај у простору, једначине (3) нису у стању одредити вредности тражених коефицијената, те неки од њих остају неодређени.

Ако се тражи површина без средишта или конус довољно је да буду дате осам тачака, а за тражену површину цилиндра седам тачака. Под првом претпоставком добија се систем осам линеарних једначина по траженим коефицијентима и накнадна једначина у облику прве дискриминанте изједначене са нулом, односно друге дискриминанте. У случају траженог цилиндра имамо систем седам линеарних једначина у односу на непознате коефицијенте и две допунске једначине које се добијају анулирајући обе поменуте дискриминанте.

Између наведених случајева постоји разлика у погледу броја различитих тражених површина које задовољавају постављене услове. Док се за површине одређене помоћу девет тачака добија у опште, само једна површина, то није случај за друге претпоставке. За површине, које морају пролазити кроз осам тачака, осам непознатих коефицијената изражавају се као линеарне функције од једне непознате. Према томе накнадни услов у облику друге дискриминанте изједначене са нулом даје једначину трећег степена у односу на поменути девети коефицијент. Овај дакле, може добити највише три различите вредности. Тако се добијају највише три тражене површине, које задовољавају постављене услове. На сличан начин, у случају конуса, који мора пролазити кроз осам датих тачака добија се највише четири различита решења. Најзад, за цилиндричну површину, која пролази кроз седам датих тачака, налазимо највише дванаест различитих решења. Заиста, пошто је дато седам тачака, седам од непознатих коефицијената једначине (1) изражавају се као линеарне функције два остала непозната коефицијента. Ако уврстимо вредности седам првих коефицијената у обрасце обе дискриминанте, онда налазимо, у односу на два последња непозната коефицијента, две једначине, једну трећег, а другу четвртог степена.Ове одређују највише дванаест различитих решења. Зато се добијају највише дванаест различитих цилиндара који пролазе кроз седам датих тачака.

Претпоставимо сад да није довољан број датих елемената за одређивање тражене површине. У таквом случају у једначини (1) известан број коефицијената остаје неодређен. Према томе добијају се, место одређених површина, читаве породице различитих површина, које задовољавају постављене услове.

Наведимо најједноставнији пример. Тражи се елипсоид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{4}$$

који би пролазио кроз три дате тачке

$$(a, 0, 0), \qquad (0, b, 0), \qquad (0, 0, c)$$

У посматраном случају једначине (3) постају

$$Aa^2 = 1, \qquad Bb^2 = 1, \qquad Cc^2 = 1,$$

па је једначина траженог елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Међутим поставимо ли услов да елипсоид (4) мора пролазити кроз три тачке смештене на истој оси апсциса. Лако се уверити да се морају дате тачке заједно поклапати. Осим тога место једног одређеног елипсоида, добија се читава породица елипсоида са две осе произвољне дужине, дуж координатних оса ордината и кота.

ГЛАВА ДЕСЕТА

ТЕОРИЈА ПОВРШИНА

I. Лопта

222. Једначина лопте у правоуглом координатном систему. — Једначина лопте, чије се средиште налази у координатном почетку или у одређеној тачки у односу на посматрани систем, наведена је раније у n^0 29 (стр. 34). Општија једначина лопти налази се у n^0 39 (стр. 41), у облику

$$A(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+F=0. \qquad (1)$$

Та се једначина може написати

$$\left(x+\frac{C}{A}\right)^2+\left(y+\frac{C'}{A}\right)^2+\left(z+\frac{C''}{A}\right)^2=R^2,$$

где је

$$R^2=\frac{C^2+C'^2+C''^2-AF}{A^2}.$$

Према томе координате средишта лопте одређене су обрасцима

$$\left(-\frac{C}{A},\quad -\frac{C'}{A},\quad -\frac{C''}{A}\right).$$

Посматрана лопта је реална, ако је њен полупречник реалан што је случај под условом

$$C^2+C'^2+C''^2>AF.$$

Једначина површина другог реда општег облика

$$SAx^2+2SByz+2SCx+F=0 \qquad (2)$$

одређује, дакле, лопту, ако се своди на облик (1). За то коефицијенти једначине (2) морају испуњавати услове

$$A=A'=A''$$
$$B=B'=B''=0.$$

223. Потенција тачке према лопти. — *Потенцијом тачке према лопти зове се дужина тангенте повучене из дате тачке на лопту.*

Ако кроз дату тангенту поставимо раван која пролази кроз центар лопте она ће је сећи по великом кругу. Према познатој теореми геометрије производ два отсечка, које одваја овај круг на свакој сечици позученој кроз дату тачку претставља сталну величину једнаку квадрату тангенте повучене на тај круг из посматране тачке. Стога се наведена дефиниција потенције тачке према лопти може формулисати и друкчије овако. *Она је стални производ два отсечка које одваја лопта на свакој сечици повученој из дате тачке.*

Горе формулисана дефиниција даје за *потенцију тачке према лопти ову вредност*

$$d^2 - R^2,$$

где је *d растојање дате тачке од центра лопте а* R *њен полупречник.*

Полазећи од овог обрасца лако је наћи аналитички израз дате потенције P према лопти чија једначина у односу на одређени правоугли координатни систем гласи

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0,$$

где су x, y, z такође координате, а зредности a, b, c означавају координате центра посматране лопте.

Означимо ли са X, Y, Z координате дате тачке чија се потенција P тражи према посматраној лопти, предходни образац за потенцију даје

$$P = (X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 - R^2.$$

Према томе, вредност тражене потенције изражава се аналитички резултатом смене координата дате тачке у левој страни једначине лопте где је коефицијенат код тринома $x^2 + y^2 + z^2$ једнак јединици.

224. Радикални елементи две, три и четири лопте. — Узмемо ли две лопте чије су једначине

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) + m^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_1x + b_1y + c_1z) + m_1^2 = 0,$$

где су уведене ознаке

$$m^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$
$$m_1^2 \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - R_1^2.$$

Разлика једначина посматраних лопти даје

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + 2(c_1 - c)z + m^2 - m_1^2 = 0$$

и претставља једначину равни, која пролази кроз тачке пресека (реалне или имагинарне) наших лопти и зове се њихова р а д и к а л н а р а в а н.

Наведимо овe две особине радикалне равни:

1° *Радикална раван две лопте је управна на праву која спаја њихова средишта.* Заиста, једначина праве која пролази кроз две тачке

$$(a, b, c), \qquad (a_1, b_1, c_1)$$

гласи

$$\frac{x-a}{a_1-a} = \frac{y-b}{b_1-b} = \frac{z-c}{c_1-c}.$$

Пошто су коефицијенти ове праве и радикалне равни сразмерни, *радикална раван две лопте управна је на правој што спаја центре.*

2° *Радикална раван две лопте претставља геометриско место тачака, које имају једнаке потенције према обе лопте.* Означимо са x, y, z координате ма које тачке радикалне равни посматраних лопти тако да постоји идентичност

$$2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + 2(c_1 - c)z + m^2 - m_1^2 = 0.$$

Потенције тачке (x, y, z) према нашим лоптама изражавају се респективно обрасцима

$$P = x^2 + y^2 + z^2 - 2(ax + by + cz) + m^2$$
$$P_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_1x + b_1y + c_1z) + m_1^2$$

Одавде као последицу претходне идентичности добијамо једнакост

$$P - P_1 = 0 \qquad \text{тј.} \quad P = P_1$$

Уведемо ли сад трећу лопту

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_2x + b_2y + c_2z) + m_2^2 = 0,$$

где је

$$m_2^2 \equiv a_2^2 + b_2^2 + C_2^2 - R_2^2.$$

Поред горе поменуте радикалне равни прве две лопте имамо радикалне равни прве и треће лопте, односно друге и треће лопте, које се изражавају респективно једначинама

$$2(a_2 - a)x + 2(b_2 - b)y + 2(c_2 - c)z + m^2 - m_2^2 = 0$$
$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + 2(c_2 - c_1)z + m_1^2 - m_2^2 = 0.$$

Лако се види да је разлика једначина друге и прве радикалне равни идентична једначини треће радикалне равни.

Према томе добијамо закључак:

Три радикалне равни за по две од трију датих лопти секу се дуж једне те исте праве, која се назива радикална оса трију датих лопти а чија је једначина одређена скупом ма које две од наведених радикалних равни.

Посматрајмо, најзад, четврту лопту

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(a_3x + b_3y + c_3z) + m_3^2 = 0,$$

где је

$$m_3^2 \equiv a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 - R_3^2.$$

Да бисмо узидели појам радикалног средишта четири дате лопте приметимо да радикална оса трију првих лопти сече само у једној јединој тачки радикалну раван прве и четврте лопте. По себи се разуме да је потенција ове тачке иста према свакој од четири посматране лопте. А према томе ова се тачка налази у пресеку свих шест радикалних посматраних лопти и све четири њихове радикалне осе.

Та тачка се назива р а д и к а л н о с р е д и ш т е четири дате лопте.

225. Једначина лопте у косоуглом координатном систему. — Обележимо са λ, и односно γ координатне углове косоуглог координатног система

OXYZ (в. сл. 40, на стр. 61). Означимо са x_0, y_0, z_0 координате центра лопте полупречника R а са x, y, z текуће координате ма које тачке лопте. Тада, према обрасцу (8) (n^0 54, стр. 67), једначина посматране лопте постаје

$$S(x-x_0)^2+2S(y-y_0)(z-z_0)\cos\lambda=R^2. \tag{3}$$

226. Одређивање центра и полупречника лопте. — Узмимо једначину општег облика

$$Sx^2+2Syz\cos\lambda+2SC_1x+D=0; \tag{4}$$

и претпоставимо да дотична једначина (4) одређује лопту облика (3). За то морају постојати услови

$$\left.\begin{aligned} x_0+y_0\cos\nu+z_0\cos\mu+C_1&=0,\\ x_0\cos\nu+y_0+z_0\cos\lambda+C_1'&=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} x_0\cos\mu+y_0\cos\lambda+z_0+C_1''&=0,\\ Sx_0^2+2\,Sy_0z_0\cos\lambda-R^2&=D\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Полазећи од једначине општег облика (4) може се тврдити да она одређује лопту, чије су координате средишта (x_0, y_0, z_0) и полупречник R одређени једнакостима (5) и (6).

Три једначине (5) су линеарне по x_0, y_0, z_0; па се њихове вредности лако одређују, јер је детерминанта коефицијената уз њих једнака вредности синуса координатног триједра Ω који је различит од нуле (в. n^0 51, стр. 63). Да бисмо елиминисали одговарајуће вредности x_0, y_0, z_0, из једначине (6) која служи за одређивање вредности полупречника R трансформишимо претходно ову једначину на овај начин. Додајмо јој једначине (5) помножене респективно са $-x_0$, $-y_0$, односно $-z_0$. На овај начин трансформисана једначина (6) постаје

$$C_1x_0+C_1'y_0+C_1''z_0+D+R^2=0. \tag{7}$$

Резултат елиминације x_0, y_0 и z_0 из четири по њима линеарне једначине (5) и (7) гласи

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & C_1\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & C_1'\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C_1''\\ C_1 & C_1' & C_1'' & D+R^2\end{vmatrix}=0\,.$$

Растављајући детерминанту леве стране добијене једначине у две детерминанте налазимо за одређивање R^2 једначину у облику

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & C_1\\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & C_1\\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & C''_1\\ C_1 & C_1' & C_1'' & D\end{vmatrix}+\Omega R^2=0$$

Према вредности R^2 која се одавде добија, једначина општег облика (4) претставља реалну или имагинарну лопту или једну тачку ако је R једнако нули.

II Образовање површина

227. Изналажење једначине површине. — Ако тачке тражене површине задовољавају извесне геометриске особине, које су исте за све њих, једначина те површине се добија помоћу алгебарског изражавања дотичних особина. На овај начин смо саставили једначине више површина: лопте (в. n^0 29, и n^0 39), елипсоида, решавајући Дипенов проблем (в. n^0 38) и лопте која, у генералисаном Аполонијевом проблему, додирује четири дате лопте (в. n^0 42). Са друге стране, одређивали смо све површине другог реда (в. глава VI) кретањем извесних кривих линија, као геометриско место различитих положаја тих кривих које у исто време мењају свој облик према датом закону. Наведене покретне криве звали смо г е н е р а т р и с е.

228. Генерализација површина кретањем кривих линија. — Проучимо сад у општем облику, две претпоставке кад једначине покретне генератрисе садрже један променљив параметар или их има у већем броју.

Претпоставимо, најпре, да су једначине посматране генератрисе изражене у облику

$$f(x,y,z,m)=0 \qquad \varphi(x,y,z,m)=0, \tag{1}$$

где је m променљив параметар. Лако је доказати да резултат елиминације параметра m из обе једначине (1) у облику

$$F(x,y,z)=0 \tag{2}$$

претставља једначину тражене површине.

Посматрајмо, заиста, криву која претставља један посебан положај генератрисе (1) који одговара партикуларној вредности m_1 параметра m. Узмимо одређену тачку $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ на овој кривој. Према томе добијамо идентичности

$$f(x_1,y_1,z_1,m_1)=0;\quad \varphi(x_1,y_1,z_1,m_1)=0,$$

одакле следује да обе једначине

$$f(x_1,y_1,z_1,m)=0,\quad \varphi(x_1,y_1,z_1,m)=0$$

допуштају заједничко решење $m=m_1$. То значи да координате тачке M_1 задовољавају једначину (2). Пошто је M_1 ма која тачка површине, која се одређује посматраном покретном генератрисом (1), то значи да све тачке дотичне површине задовољавају једначину (2).

Лако је доказати и обрнути став да се свака тачка површине која је дата једначином (2) налази на површини одређеној покретном генератрисом (1). Заиста, сменимо ли у једначинама (1) x, y и z вредностима x, y', и z', које задовољавају једначину (2), добијамо две једначине

$$f(x',y',z',m)=0,\quad \varphi(x'_1,y'_1,z'_1,m)=0.$$

Оне имају заједнички корен $m=m'$. Овоме одговарају површине

$$f(x,y,z,m')=0,\quad \varphi(x,y\,z,m')=0.$$

Оне се секу у тачки (x', y', z'). То значи да ова тачка припада површини, која је одређена помоћу покретне генератрисе (1). Могу се међутим десити изузетни случајеви, и то:

1° За извесну област дефинисану једначином (2) једначине (1) дају имагинарне вредности за параметар m. Тада су обе одговарајуће површине (1) имагинарне. Мада су тачке пресека ових површина реалне, ипак оне не припадају посматраном геометриском месту;

2° За поједине тачке површине (2) једначине (1) одређују имагинарне вредности за параметар m. И у овом случају те тачке не припадају посматраном геометриском месту;

3° Мада параметар m има реалне вредности, он према природи постављеног проблема не може узимати све могуће реалне вредности. Пређимо сад на другу претпоставку, кад је број параметара већи од јединице. Означимо једначине генератрисе са

$$f(x, y, z, m_1, m_2, \dots m_k) = 0; \qquad \varphi(x, y, z, m_1, m_2, \dots m_k) = 0, \tag{3}$$

где $m_1, m_2 \dots m_k$ одређују k различитих параметара. Да би посматрана генератриса одређивала једну површину, ови параметари морају бити везани међусобом са $k—1$ различитих релација у облику

$$\psi_i(m_1, m_2, \dots m_k) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots k-1). \tag{4}$$

Тада се слично са предходним доказује да резултат елиминације k параметара $m_1, m_2 \dots m_k$ из $k+1$ једнакости (3) и (4) даје једначину тражене површине, која је одређена генератрисом (3) под условом (4). Ови се могу успоставити на различите начине. На пр. закон према коме се генератриса креће и мења свој облик, може се одредити условом да генератриса мора пролазити кроз дате непокретне криве, које се зову д и р е к т р и с е. Означимо једначине одређене директрисе са

$$\theta(x, y, z) = 0, \qquad \theta_1(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

Пошто генератриса (3) мора сећи директрису, координате тачака пресека задовољавају идентички све четири једначине (3) и (5). Резултат елиминације ових координата даје тада једну релацију између параметара $m_1, m_2 \dots m_k$. Видели смо да, ради одређености тражене површине, дати параметри морају задовољавати $k—1$ релацију. Према томе мора постојати, у посматраном случају, $k—1$ различита директриса. Изложена општа расуђивања обухватају све проблеме формирања површина другог реда, који су већ проучени раније у глави VI. Сада ћемо иста расуђивања применити на низ других проблема формирања различитих површина.

III Цилиндричне површине

229. Дефиниција и једначина. — Узмимо у односу на одређени праволиниски правоугли координатни систем у простору OXYZ (сл. 80) неку праву линију EF чије се једначине изражавају овако

$$\left.\begin{aligned} x &= az + \alpha \\ y &= bz + \beta \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Претпоставимо да коефицијенти a и b имају сталну вредност и да α и β, координате продора EF кроз раван XOY, претстављају променљиве параметре. Под овом претпоставком све посматране праве су очевидно паралелне међу собом па због тога образују површину неког цилиндра.

Кретање генератрисе EF jесте потпуно одређено ако буде дат према предходном, услов који везује вредности параметра α и β у облику једнакости

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0, \tag{2}$$

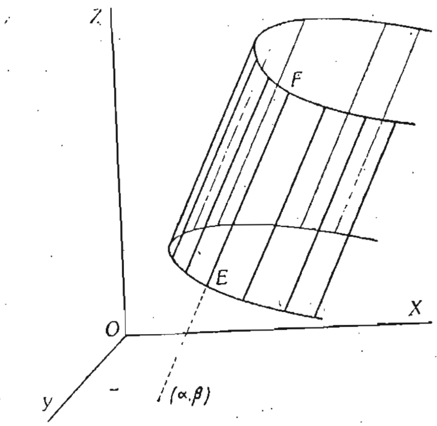
која се зове к а р а к т е р и с т и ч н а ј е д н а ч и н а ц и л и н д р и ч н е п о в р ш и н е. Резултат елиминације вредности α и β из једначина (1) и (2) одређује, дакле, тражену једначину цилиндричне површине. Заиста, ако заменимо у једначини (2) вредности

$$\alpha = x - az, \qquad \beta = y - bz$$

које су одређене помоћу једначина (1) добићемо тражену једначину

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0. \tag{3}$$

Ова претставља релацију између два линеарна бинома по текућим координатама, сваког од по две променљиве.



Сл. 80

230. Најопштији облик једначине цилиндричне површине. — Претпоставимо да је директриса траженог цилиндра дата једначинама општег облика

$$\theta(x, y, z) = 0, \qquad \theta_1(x, y, z) = 0. \tag{4}$$

Међутим једначине праволиниске генератрисе узмимо у облику две једначине општег облика

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + d &= \alpha, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= \beta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где су α и β променљиви параметри. Према томе свака од двеју равни (5) за променљиве вредности параметара α и β одређује низ паралелних равни. Услед тога њихове линије пресека претстављају такође низ п а р а л е л н и х п р а в и х л и н и ј а.

Резултат елиминације координата x, y, z из четири једначине (4) и (5) одређује карактеристичну једначину (2) која у нашем случају даје тражену цилиндричну површину у облику

$$\varphi(ax + by + cz + d, \quad a_1x_1 + b_1y + c_1z + d_1) = 0. \tag{6}$$

Лако је доказати да обрнуто свака једначина општег облика (6) одређује увек цилиндричну површину. Заиста, ако ставимо

$$ax + by + cz + d = \mu, \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = \nu, \tag{7}$$

једначина (6) ће постати

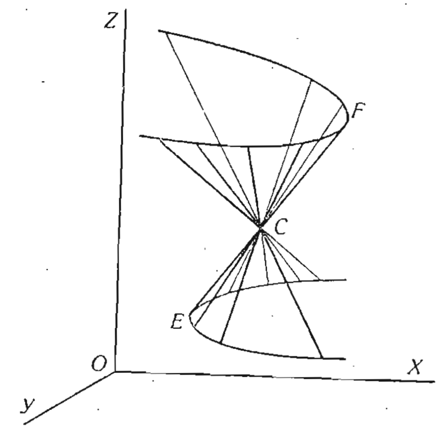
$$\varphi(\mu, \nu) = 0 \tag{8}$$

и одређује за сваку вредност једног од параметра μ или ν потпуно одређену вредност другог параметра. Према томе скуп двеју једначина (7) које одговарају тим вредностима μ и ν одређују неку праву линију у простору. Обрасци (7) доказују да су све те праве линије, које одговарају различитим вредностима μ и ν п а р а л е л н е. Услед тога једначина (6) одређује цилиндричну површину. Према томе може се рећи да је *општа једначина цилиндричних површина одређена релација између два полинома првог степена у текућим координатама*. Претпоставимо, на пр. да је директриса цилиндра нека крива линија у равни XOY. Према томе α и β морају бити текуће координате те криве линије, у равни, и једнакости (2) одређује неку криву.

Ако је на пр. та директриса алгебарска крива линија у равни XOY, онда цилиндар, који њој одговара, претставља такође алгебарску површину истог реда као што је генератриса.

IV Конусне површине

231. Дефиниција и једначина. — Конусна површина је одређена кретањем одређене праве линије која мора увек пролазити кроз исту непокретну тачку тзв. т е м е к о н у с а. Означимо са x_0, y_0, z_0 координате тог темена C, (сл. 81) у праволиниском правоуглом координатном систему OXYZ.



Сл. 81

Нека је генератриса права EF. Онда су њене једначине

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{1}, \qquad (1)$$

где су a, b, 1, коефицијенти сразмерни косинусима углова, које генератриса заклапа са координатним осама. Кад генератриса EF својим кретањем описује посматрану површину, коефицијенти a и b се мењају. Из једначине (1) добијамо да је

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=a\,, \qquad \frac{y-z_0}{z-z_0}=b\,. \qquad (2)$$

Да бисмо одредили облик конусне површине, треба успоставити неку одређену везу између промењљивих параметара a и b тако да би некој датој вредности једног од њих одговарала потпуно одређена вредност другог параметра. На овакав се начин одређује површина конуса; Претпоставимо, на пр. да се изведена веза изражава једначином

$$\varphi(a, b)=0. \qquad (3)$$

Ова се зависност зове к а р а к т е р и с т и ч н а ј е д н а ч и н а к о н у с а.

Скуп три једначине (2) и (3) потпуно одређује конус у параметарском облику. Ако елиминишемо a и b из посматране три једначине, једначина конуса постаје

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0\,. \qquad (4)$$

У случају кад се теме конуса (x_0, y_0, z_0) налази у координантом почету једначина (4) добија облик

$$\varphi\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0\,, \qquad (5)$$

тј. претставља хомогену једначину текућих координата.

Лако је увек пренети координатни почетак у теме конуса. Према томе једначина конуса може увек добити облик хомогене једначине (5).

Раније смо доказали (в. n^0 31, стр. 35) и обрнути став, наиме да свака хомогена једначина

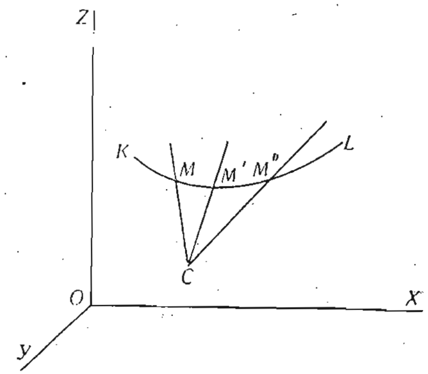
$$F(x, y, z)=0 \qquad (6)$$

одређује површину конуса чије се теме налази у координатном почетку.

232. Увођење једначине директрисе. — За одређивање неког конуса, место карактеристичне једначине (3) може се узети *директриса, тј. крива која претставља геометриско место тачака, кроз које морају пролазити генератрисе* (1). Претпоставимо за то да је директриса дата скупом једначина

$$\begin{aligned}\theta(x, y, z)&=0\\ \theta_1(x, y, z)&=0\end{aligned} \qquad (7)$$

које одређују неку криву линију KL у простору (сл. 82). Означимо са M, M′, M″ ... тачке директрисе, кроз које пролазе одговарајуће генератрисе. Пошто координате поменутих тачака задовољавају заједнички једначине (1) и (7), ове једначине морају бити сагласне. Ако елиминишемо из њих координате x, y и z добићемо, уопште, једну једначину у облику (3), која претставља карактеристичну једначину посматраног конуса. Према томе једначина конуса са директрисом (7) добија се на пређашњи начин.



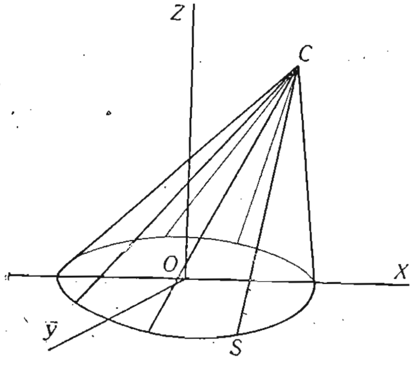
Сл. 82

Узмимо на пр. директрису у облику круга S, са полупречником r чије је средиште у координатном почетку а који се налази у координатној равни XOY (сл. 83).

Једначине посматраног круга изражавају се овако

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=r^2\\ z&=0\end{aligned} \qquad (8)$$

Ако је тачка C (x_0, y_0, z_0) теме траженог конуса, елиминишимо x, y, z из система, четири једначине (1) и (8). Према другој једначини (8) тражена карактеристична једначина постаје



Сл. 83

$$(x_0 - az_0)^2 + (y_0 - bz_0)^2 = r^2. \quad (9)$$

Да бисмо добили одавде једначину траженог косог конуса са основицом S уврстимо у једначину (9) вредности параметра a и b, које су одређене обрасцима (2). Одавде се добија тражена једначина посматраног косог конуса

$$(x_0 z - z_0 x)^2 + (y_0 z - z_0 y)^2 = r^2(z - z_0)^2$$

Ако се дато теме налази на координатној оси кота, а то значи да је $x_0 = y_0 = 0$, једначина одговарајућег правог конуса постаје

$$z_0^2(x^2 + y^2) = r^2(z - z_0)^2$$

Изложена расуђивања показују како се формира једначина датог конуса, који је одређен својим теменом и карактеристичном једначином или једначином директрисе.

233. Испитивање једначина које одређују конус. — Проучимо сад друго питање, да бисмо решили обрнут проблем, кад нека дата једначина одређује површину конуса.

Ако је дата једначина хомогена по текућим координатама, то је очевидно, према горе изнесеном, да она одређује конус, чије теме се налази у координатном почетку. Да бисмо направили потпуно слику одговарајућег конуса, треба сад одредити његову директрису. За то се може узети свака крива која се добија пресеком посматраног конуса са ма којом равни која је паралелна једној од координатних равни.

Али ако дата једначина није хомогена, може се покушати да се она претвори у хомогену једначину помоћу трансформације координатног система. Узмимо на пр. једначину

$$3x^2 + 2y^2 - 2xz + 4yz - 4x - 8z - 8 = 0. \quad (10)$$

Извршимо трансформацију координата помоћу транслације координатних оса.

$$x = \alpha + x_1, \qquad y = \beta + y_1, \qquad z = \gamma + z_1, \quad (11)$$

где су α, β и γ координате новог почетка у старом координатном систему, а x_1, y_1, z_1 нове координате. Ако сад уврстимо вредности старих координата, које су одређене обрасцима (11) у једначину (10) она ће добити облик

$$3x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1z_1 + 4y_1z_1 + 2Px_1 + 2Qy_1 + 2Rz_1 + F = 0, \quad (12)$$

где је

$$\begin{aligned} P &\equiv 3\alpha - \gamma - 2, \\ Q &\equiv 2\beta + 2\gamma \\ R &\equiv -\alpha + 2\beta - 4 \\ F &\equiv 3\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\gamma + 4\beta\gamma - 4\alpha - 8\gamma - 8. \end{aligned}$$

Да би претворена једначина (12) постала хомогена, све четири вредности P, Q, R и F морале би се заједнички анулирати. Према томе вредности α, β, γ које се одређују из прве три једначине

$$\begin{aligned} P &\equiv 3\alpha - \gamma - 2 = 0 \\ Q &\equiv 2(\beta + \gamma) = 0, \\ R &\equiv -\alpha + 2\beta - 4 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

морале би анулирати и трећи образац F.

Једначине (13) дају да је

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = -2.$$

Одмах се види да се заиста израз F анулира идентички за нађене вредности α, β и γ. Према томе претворена једначина (12) постаје хомогена

$$3x_1^2 + 2y_1^2 - 2x_1z_1 + 4y_1z_1 = 0 \quad (14)$$

и зато претставља конус чије се теме налази у новом координатном почетку.

Потражимо сад директрису, која лежи у старој координатној равни XOY, тј. у равни која је у односу на нови систем одређена једначином

$$z_1 = 2.$$

За ту вредност z_1 једнакост (14) постаје

$$3x_1^2 + 2y_1^2 - 4x_1 + 8y_1 = 0. \quad (15)$$

Добијена једначина претставља неки конични пресек. Њене три инваријанте су

$$\Delta \equiv -56, \qquad G \equiv -6, \qquad s = 5.$$

Према томе крива (15) је реална елипса. Очевидно да се њено средиште налази у тачки $O''\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ координатне равни XOY.

Узмимо сада најопштију једначину површине

$$\psi(x, y, z) = 0 \quad (16)$$

и поставимо питање да ли ова једначина може одређивати површину неког конуса. За то би дата једначина (16) морала имати облик (4). Уведимо ознаке

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \mu, \qquad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \nu \quad (17)$$

где су μ и ν два промењљива параметра. Решавајући једначине (17) по x и y добијамо

$$x = x_0 + \mu(z - z_0), \quad y = y_0 + \nu(z - z_0). \quad (18)$$

Ако једначина (16) одређује конус права (18) мора се налазити на његовој површини, те вредности (18) промењљивих x и y морају задовољавати идентички једначину (16), тј.

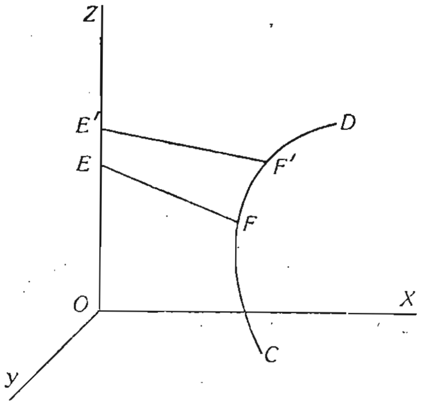
$$\psi[x_0 + \mu(z - z_0), \quad y_0 + \nu(z - z_0), \quad z] = 0 \quad (19)$$

Осим тога теме конуса (x_0, y_0, z_0) мора се налазити на површини (16) и зато мора постојати идентичност

$$\psi(x_0, y_0, z_0) = 0$$

V Коноидне површине

234. Дефиниција и једначина. — *Коноидна* зове се *површина, која је одређена кретањем праве линије, која је увек паралелна некој датој равни а креће се дуж дате праве линије и друге дате криве линије.* Дата раван зове се директорна а дата права оса коноидне површине, дата крива линија пак назива се кривом директрисом. Узмимо (сл. 84) осу коноида за координатну осу OZ и координатну раван XOY поставимо паралелно директорној равни наше површине коноида.



Сл. 84

Тада су једначине генератриса EF, E'F' које су увек паралелне координатној равни XOY одређене овако

$$z = \alpha, \qquad \frac{y}{x} = \beta, \tag{1}$$

јер она се налази у равни паралелној равни XOY и њене пројекција на ту раван претставља праву која пролази кроз координатни почетак O. Што се тиче вредности α и β, оне морају задовољавати одређени услов, карактеристичну једначину коноида, која је одређена помоћу криве директрисе CD, тј.

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

Резултат елиминације α и β из три једначине (1) и (2) одређује тражену површину

$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0$$

235. Пример. — Претпоставимо на пр. да је оса коноида управна на директорну раван и да је крива директриса круг, управан на директорној равни и на другој равни која пролази кроз осу коноида и кроз средиште круга.

Последњу раван узимамо за координатну раван XOZ и поставимо осу OX кроз средиште круга, а осу OY управно на њу.

Тада једначине круга криве директрисе постају

$$x = a, \qquad y^2 + z^2 = R^2 \tag{3}$$

те су x, y z текуће координате круга. Да би генератриса EF пролазила кроз тачку M круга, параметри α и β морају задовољавати услове

$$\alpha = z, \qquad \beta = \frac{y}{x}, \qquad \text{т.ј.} \qquad y = a\beta,$$

Према томе из (3) се добија карактеристични услов

$$a^2\beta^2 + \alpha^2 = R^2.$$

Резултат елиминације α и β из три једначине (1) и (4) одређује тражену једначину површине коноида

$$x^2z^2 + a^2y^2 = R^2x^2$$

која је четвртог степена.

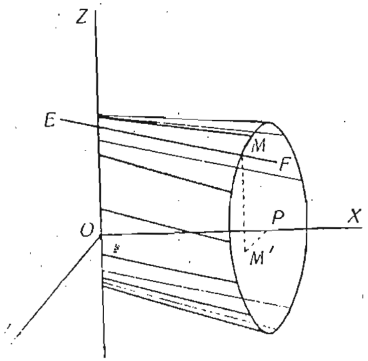
За неку вредност $z = c$ добићемо линије пресека површине коноида са равни, која је паралелна координатној равни XOY,

$$(R^2 - c^2)x^2 - a^2y^2 = 0.$$

Пошто је увек $c < R$ добијена једначина одређује две стварне праве

$$\sqrt{R^2 - c^2}\,x \pm ay = 0,$$

које пролазе кроз осу OZ а симетрично су распоређене односно осе OX.



Сл. 85

За $c = +R$ добија се само једна права $y = 0$.

Најзад, линија пресека површине коноида са равни која је паралелна кривој директрисе, за вредност $x = b$ постаје

$$\frac{z^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2b^2}{a^2}} = 1.$$

тј. претставља елипсу, чија је полуоса паралелан оси Z увек једнака R, а друга је полуоса већа или мања од R, према томе где се налази раван $x = b$. Ако је $b < a$, друга је полуоса мања од R; међутим за $b < a$ друга је полуоса већа од R.

VI Обртне површине

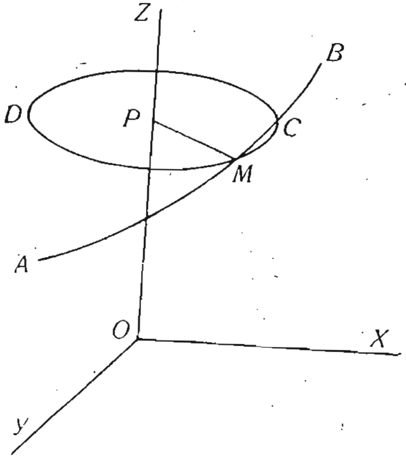
236. Дефиниција и једначина. — Ако је површина одређена обртањем криве линије AB (сл. 86) око осе OZ, која је са њом непромењиво везана, онда се она зове површина обртања. Крива AB се назива њена генератриса. Свака тачка M генератрисе AB описује круг, чија је раван управна на оси OZ.

Полупречник тог круга PM претставља растојање тачке M од осе обртања. Узмимо ову осу OZ за координатну осу, а осе OX и OY поставимо управно на осу OZ.

Једначине круга, који описује тачка M генератрисе AB јесу

$$x^2 + y^2 = \alpha^2, \qquad z = \beta, \tag{1}$$

где су x, y, z координате тачке M површине, која се налази на кругу CD; α је једнако њеном полупречнику PM, а β претставља растојање круга DC од равни XOY, тј. α и β су координате тачке C генератрисе у равни XOZ.



Сл. 86

Пошто генератриса AB одређује иззесну релацију између величина α и β, оне су везане неком једначином облика

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

Да би нашли једначину геометриског места тачака M тражене обртне површине довољно је да елиминишемо променљиве параметре α и β из трију једначина (1) и (2).

Замењујући вредности α и β из једначина (1) у једначину (2) добијамо тражену једначину

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}, \quad z\right) = 0.$$

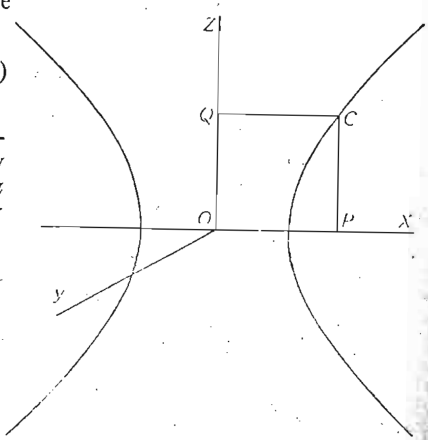
Пример. Претпоставимо на пр. да генератриса, која се налази у равни *XOZ претставља хиперболу са полуосама a и b и са средиштем у координатном почетку O, чије се осе поклапају са координатним осама OX и OZ* (сл. 87).

Пошто су у нашем случају α и β координате неке тачке C хиперболе, услов (2) изражава да параметри α и β задовољавају једначину. хиперболе

$$\frac{\alpha^2}{a} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

која у посматраном случају, претставља карактеристичну једначину (2). Замењујући вредности (1) α и β у једнакости (3) добићемо једначину тражене површине

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{4}$$



Сл. 87

која претставља обртну површину једнокрилног хиперболоида, чије су полуосе у равни XOY једнаке. Лако је добити исти резултат тражећи једначину површине која је одређена обртањем праве око осе која не лежи у истој равни са датом правом генератрисом. Заиста, нека је дата права генератриса EF (сл. 88) у односу на праволиниски правоугли координатни систем у простору OXYZ чија оса OZ претставља осу тражене обртне површине.

Обележимо са x, y, z координате неке тачке M генератрисе EF, која описује круг полупречника $PM = \alpha$ на растојању $OP = \beta$ од координатне равни XOY.

Нека су једначине праве EF

$$x = nz + \kappa, \qquad y = mz + l. \tag{5}$$

Да бисмо нашли услов (2) у нашем случају, довољно је елиминисати координате x, y, z из четири једначине (1) и (5). Тражени услов постаће

$$\alpha^2 = (n\beta + \kappa)^2 + (m\beta + l)^2$$

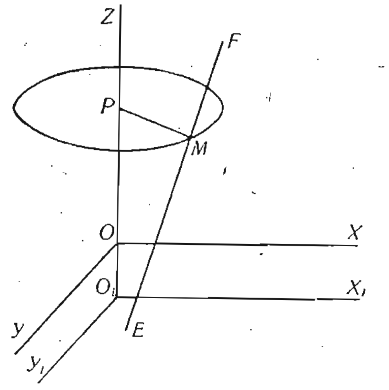
Замењујући вредности (1), за α и β у последњој једначини добићемо тражени резултат

$$x^2 + y^2 = (nz + \kappa)^2 + (mz + l)^2$$

или

$$x^2 + y^2 = (n^2+m^2)z^2 + 2(n\kappa+ml)z + \kappa^2 + l^2$$

$$x^2 + y^2 = (n^2+m^2)\left(z + \frac{nk+ml}{n^2+m^2}\right)^2 + k^2 + l^2 - \left(\frac{nk+lm}{n^2+m^2}\right)^2.$$



Сл. 88

Претворимо координатни систем тако да би нова координатна раван X_1OY_1 пролазила на растојању $OO_1 = \dfrac{nk+ml}{n^2+m^2}$ у односу на стари систем.

Ако обележимо са z_1 нову коту добићемо

$$x^2+y^2 = (n^2+m^2)z_1^2 + k^2 + l^2 - \frac{(nk+lm)^2}{n^2+m^2}$$

или

$$x^2+y^2 = (n^2+m^2)z_1^2 + \frac{n^2l^2+k^2m^2-2nklm}{n^2+m^2}$$

или

$$x^2+y^2 = (n^2+m^2)z_1^2 + \frac{(nl-km)^2}{n^2+m^2}$$

тј.

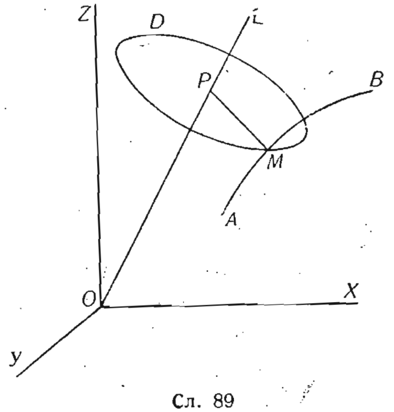
$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z_1}{b^2} = 1,$$

где је

$$a = \frac{nl-km}{\sqrt{n^2+m^2}}, \qquad b = \frac{nl-km}{n^2+m^2}.$$

Препоручујемо читаоцу да реши сам задатак одређивања једначине обртне површине торуса који је одређен обртањем круга око осе, која се налази у његовој равни, па не пролази кроз средиште круга.

237. Најопштија једначина обртне површине. — Претпоставимо сад да се оса обртне површине OL (сл. 89) не поклапа са координатном осом OZ, али пролази кроз координатни почетак првог правоуглог координатног система OXYZ.



Сл. 89

Нека су једначине осе OL изражене овако

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$

где су x, y, z текуће координате. Свака тачка M генератрисе AB описује круг, са средиштем у тачки P, управан на осу OL. Једначина тога круга одређена је овако

$$x^2+y^2+z^2=\alpha^2, \qquad ax+by+cz=\beta, \quad (6)$$

где α претставља полупречник PM, а β растојање равни PMD у којој се налази наш круг, јер он је управан на осу OL.

Претпоставимо да се генератриса изражава двема једначинама по координатама тачке M у облику

$$F(x,y,z)=0 \qquad f(x,y\,z,)=0. \quad (7)$$

Тада резултат елиминације координата x, y, z из четири једначине (6) и (7) одређује карактеристичну једначину површине у облику

$$\varphi(\alpha,\beta)=0 \quad (8)$$

Ако заменимо вредности (6) за α и β у последњој једначини (8) добићемо тражену једначину обртне површине

$$\varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad ax+by+cz\right)=0 \quad (9)$$

Лако је доказати да свака једначина облика (9) одређује увек обртну површину са осом, која пролази кроз координатни почетак. Заиста повуцимо кроз координатни почетак неку праву, чије су једначине

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \quad (10)$$

и уведимо ознаке

$$\alpha=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \beta=ax+by+cz. \quad (11)$$

Према томе дата једнакост (9) добија облик

$$\varphi(\alpha,\beta)=0$$

Ова одређује за сваку вредност једног параметра од α или β потпуно одређену вредност за други параметар. На основу образаца (11) вредности α и β одређују површину лопте, са средиштем у координатном почетку

односно раван, које се секу по кругу. Његова раван је очигледно управна на правој линији (10), која пролази кроз координатни почетак. Према томе геометриско место свију паралелних кругова претставља обртну површину са осом (10). Претпоставимо сад да оса обртне површине пролази кроз неку тачку простора (x_0, y_0, z_0) и да су њене једначине

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Сваки пресек обртне површине управан на дату осу одређује се као линија пресека лопте са средиштем у датој тачки (x, y, z) чија је једначина

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\alpha^2$$

и равни

$$ax+by+cz=\beta,$$

која је управна на дату осу.

Према томе се једначина тражене обртне површине може овако написати

$$\varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \quad ax+by+cz\right)=0.$$

ТРЕЋИ ДЕО

Примери и задаци

I Основни појмови

1. — Наћи отстојање између тачака $M_1(2, 1, 2)$ и $M_2(1, 2, 1)$. Координатне осе су правоугле.

2. — Дата су отстојања тачке од три осе координатног система. Наћи њене координате.

3. — Дате су дзе тачке (1, 3, 2) и (—2, 0, 4). Наћи њихово отстојање и отстојање сваке од њих од тачака симетричних с другом тачком у погледу координатних равни.

4. — Наћи тачку M на правој која спаја тачке $M_1(1, 2, -1)$ и $M_2(-1, 2, 1)$ која лежи између тачака M_1 и M_2 тако да је $\frac{M_1M}{MM_2} = 2$.

5. — Дата је тачка (1, 2, 3). Наћи на једној од координатних равни тачку тако, да се средина њеног отстојања од дате тачке налази на оси кроз коју пролазе две остале координатне равни.

6. — Дате су две тачке (3, 5, —4), (—2, 4, 7). Наћи однос у коме је отстојање између ових тачака подељено координатним равнима.

7. — Наћи две тачке чије је отстојање подељено тачкама (1, 0, 2) (0, 3, —1) на три једнака дела.

8. — У равни XOY наћи тачку подједнако удаљену од тачака (0, 0, 5), (0, 4, 3), (1, 1, 1).

9. — Наћи тачке A, B, C на три координатне равни тако, да тетраедар OABC (O је координатни почетак) буде правилан са ивицом дужине l.

10. — Права линија заклапа са две осе координатног система углове од по 60°. Наћи угао ове праве са трећом осом.

11. — Наћи углове праве, која заклапа једнаке углове са координатним осама.

12. — У паралелопипеду (сл. 90) су дати углови AOB = 60°, AOC= =120°, и BOC = 120°. Одредити дужину дијагонале AD и угао који она заклапа са ивицом OC. Дужина ивица паралелопипеда је l.

13. — Наћи запремину паралелопипеда чије су ивице 1, 1, 2 а стране тространог рогља су 120°, 150°, 60°.

14. — Помоћу пројекција израчунати угао између две супротне ивице правилног тетраедра.

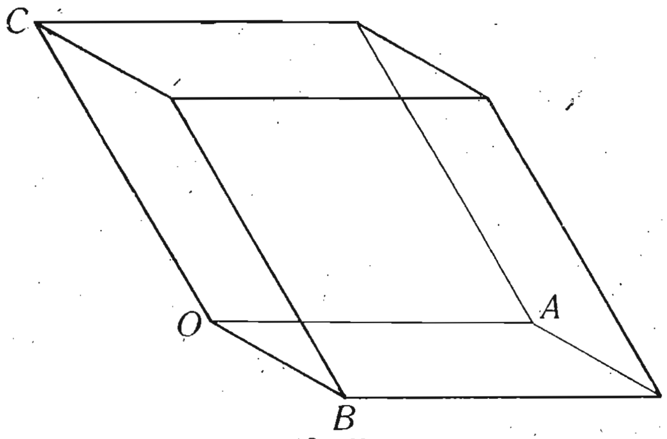
15. — Дат је тераедар чије се једно теме налази у координатном почетку а три остала у тачкама (0, 0, 2), (0, 2, 1), (3, 1, 2). Наћи дужине свих његових ивица и углове које заклапају са координатним осама оне ивице које пролазе кроз координатни почетак.

16. — Једна права пролази кроз координатни почетак. Дате су две тачке на овој правој.

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2)$$

с исте стране од координатног почетка. Означимо са r_1 и r_2 растојања ових тачака од координатног почетка. Треба доказати образац:

$$r_1 r_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$



Сл. 90

17. — Одредити геометриски смисао једначина

$$\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{y^3+1}{y+1} = \frac{z^3+1}{z+1}.$$

18. — Наћи тачку пресека површина $2x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

19. — Наћи пројекцију линије, која је изражена скупом једначина: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 3$, на координатне равни.

20. — Наћи геометриско место тачака, које се налазе на истом растојању од две дате тачке у простору.

21. — Наћи геометриско место тачака, чија су растојања од три дате тачке једнака.

22. — Наћи координате центра и полупречник лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 2z + 9 = 0.$$

23. — Наћи тачке пресека осе кота с лоптом

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

и доказати да је производ оба отсечка који се рачунају од координатног почетка, једнак

$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2.$$

Који се закључак из тога може извести за правце оба отсечка?

24. — Наћи тачке пресека лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

са координатним осама и показати да производ координата добијених тачака на свакој од оса има исту вредност.

25. — Наћи једначину лопте која мора пролазити кроз три дате тачке (1, 2, 1), (3, 4, 0), (5, 1, 1) а додиривати координатну раван XOY.

26. Написати једначину правог цилиндра чија је основица круг полупречника 3, који се налази у равни XOY, а има центар у тачки C(2, 1, 0). Генератрисе су паралелне оси OZ.

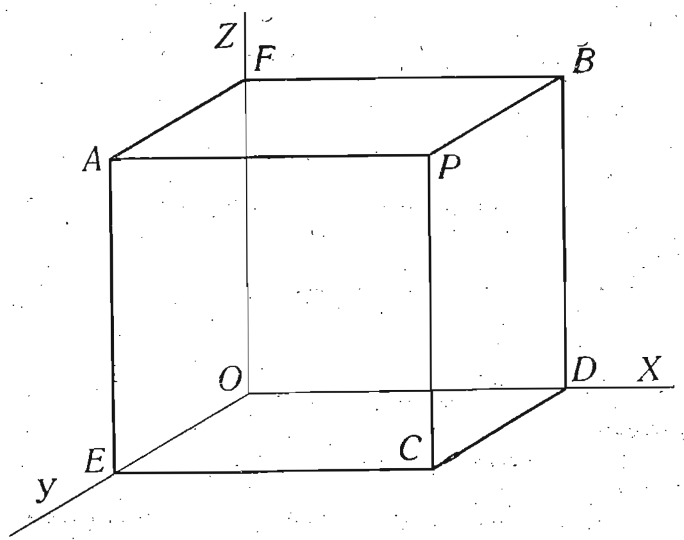
27. — Описати прави кружни цилиндар око праве призме, чије су стране одређене једначинама

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

28. — Дате су координате четири тачке (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6). Наћи полупречник лопте која пролази кроз ове четири тачке

II Раван

29. — Наћи једначину равни, која пролази кроз три темена A, B и C дате коцке (сл. 91); написати и једначину равни PEF.



Сл. 91

30. — Наћи једначину равни, која пролази кроз три дате тачке (1, 0, 5), (2, 3, 0), (1, 5, 4).

31. — Наћи једначину равни која пролази кроз тачку M(2, 1, —1) и која отсеца на осама OX и OZ отсечке 2 и 1.

32. — Позући раван кроз пројекције тачке M(2, 1, 2) на три координатне равни и раван кроз M(2, 1, 2) која је паралелна првобитној равни.

33. — Наћи једначину равни, која је паралелна равни

$$4x+5y+2\sqrt{2}\cdot z=6,$$

а пролази на растојању 5 од координатног почетка.

34. — Наћи растојање тачке (3, 8, 1) од равни, чија је једначина

$$4x-3y+12z+13=0.$$

35. — Дата је раван

$$48x+39y-20z+17=0$$

Наћи равни, које су њој паралелне а налазе се на растојању 2 од координатног почетка.

36. Наћи геометриско место тачака, које су подједнако удаљене од две дате равни.

37. — Наћи раван која полови угао диједар између равни $x+2y-1=0$, $2x-y+1=0$, и која пролази кроз онај део простора у коме се налази координатни почетак.

38. — На оси OZ наћи тачку подједнако удаљену од две равни

$$12x+9y-20z-19=0 \text{ и } 16x-12y+15z-9=0.$$

39. — Наћи на оси кота тачку, чије је растојање два пута веће од дате равни

$$12x+9y-20z+1=0$$

него од друге равни

$$16x-12y+15z-1=0.$$

40. — Дата је једна тачка и две узајамно упразне равни. Наћи геометриско место тачака, чија растојања од дате тачке претстављају средњу пропорционалу између њених растојања од две дате равни.

41. — Кроз тачку M(1, —1, 1) позући раван нормалну на равнима

$$x-y+z-1=0, \quad 2x+y+z+1=0$$

42. — Дата је раван $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. Наћи површину троугла, који чине линије пресека дате равни са координатним равнима.

43. — Дата су темена троугла (1, 5, 2); (1, —7, —3); (—3, 8, 0). Наћи површину овог троугла.

44. — Наћи једначину равни, која пролази кроз две дате тачке (1, 0, 3), (2, 5, 1), а упразна је на раван

$$x+y+z=1.$$

45. Наћи геометриско место стварних тачака, које се налазе у имагинарној равни

$$x+\sqrt{-1}\,y-\sqrt{-1}\,z+2-3\sqrt{-1}=0.$$

46. — Наћи услов нормалности праве, која заклапа са координатним осама углове α, β, γ, и равни која отсеца на овим осама отсечке a, b, c.

47. — Наћи угао између две равни које пролазе кроз осе OX, односно OZ и кроз заједничку тачку (1, 2, 4).

48. — Наћи раван која пролази кроз тачку (1, 2, —1) и кроз линију пресека равни:

$$2x-z+1=0, \quad 3y+2z-2=0.$$

49. — Наћи у равни $4x-3y-5z+9=0$ тачку тако да средина њеног отстојања од тачке (1, 1, 1) налази се на оси OZ.

50. — Наћи услов да се пресечна тачка три равни налази у једној од координатних равни.

51. — Наћи услов да пресек две дате равни сече једну од координатних оса.

52. — Показати да се координате сваке тачке равни која пролази кроз три дате тачке (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) изражавају формулама:

$$x=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}, \quad y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}, \quad z=\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}$$

53. — Наћи општи облик равни чији је пресек са призмом коју образују равни $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$ равнострани троугао.

54. — Наћи једначину лопте чији је центар у тачки (3, —2, 30) и која додирује раван $3x+4y+4=0$.

55. — Проверити да ли се равни

$$x+y+2z-4=0, \quad x+2y-z-2=0, \quad 2x-y-z=0,$$
$$x+y+z-3=0$$

секу у једној тачки, не тражећи ову пресечну тачку.

56. — Наћи обим тетраедра чије су стране $x+y+z-1=0$, $x-y-1=0$, $x-z-1=0$, $z-2=0$.

57. — Наћи геометриско место тачака $M_0(x, y, z)$ тако да запремине тетраедара $M_0(x, y, z)$, $M_1(1, 2, 1)$, $M_2(-1, 1, 1)$, $M_3(2, 1, 1)$ износе 1.

58. — Наћи косинусе углова које заклапа раван $x+2y-z+1=0$ са координатним равнима и координатним осама.

59. — Кроз тачке M(2, 0, 0) и M(0, 2, 0) позући равни под углом од 45^0 према равни $x+y+z+1=0$.

60. — Наћи геометриско место центара лопти које пресецају две дате лопте по великим кругозима.

III Права линија

61. — Дата је коцка. Саставити једначине свих њених ивица у односу на систем од три ивице, које су узете за координатне осе.

62. — Саставити једначину праве која спаја тачке M(1, 5, 2) и (0, —1, —5). Да ли се тачке (2, 1, —4), (0, 0, 0), (3, 0, —1) и (2, 11, 9) налазе на овој правој линији?

63. — Изразити у облику пропорције једначине праве

$$x+y-2z+1=0, \quad 2x-y+z+1=0.$$

64. — Наћи реалну праву линију, која пролази кроз имагинарну тачку

$$(2i, 3-i, 5+i).$$

65. — Наћи реалну тачку, која се налази на имагинарној правој линији

$$x=(2+i)z-3-i$$
$$y=(1+i)z+1-2i.$$

66. — Показати да једначине $x^2=y^2=z^2$ претстављају скуп од четири праве.

67. — Наћи на оси OX тачку чија се средина отстојања од тачке (5, 6, 10) налази на правој која пролази кроз координатни почетак и заклапа са осом OZ угао од 45^0.

68. — Наћи једначине праве, када су дата њена растојања од координатног почетка и од координатних оса.

69. Наћи зависност између коефицијената a, b, c, m, n, p да би једначине $y+az+m=0, \quad z+bx+n=0, \quad x+cy+p=0$ изражавале пројекције једне исте праве линије.

70. — Наћи једначине праве линије, која пролази кроз дату тачку и заклапа дате углове са две дате праве линије.

71. — Наћи растојање тачке (1, 2, 3) од праве линије

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{4}.$$

72. — Наћи растојање између две праве

$$\frac{x-3}{16}=\frac{y-1}{15}=\frac{z-5}{12}$$

и

$$\frac{x-2}{16}=\frac{y-1}{15}=\frac{z-5}{12}.$$

73. — Одредити дужину и положај најкраћег растојања двеју правих линија

$$x=a, \quad y=b, \quad x=y=z$$

74. — Дате су три праве линије

$$x=z-1, \quad y=3z-4$$
$$x=5z, \quad y=z-5$$
$$x=2z+1 \quad y=4z-3$$

Наћи четврту праву која сече две прве праве а паралелна је трећој прави.

75. — Дата је нека права и једна тачка, која се не налази на тој правој; наћи праву која пролази кроз дату тачку, управно на дату праву и сече је.

76. — Доказати да се праве

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x}{\sqrt{3}}=y, \quad z=0$$

секу у координатном почетку.

77. — Одредити l у једначини праве $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{l}$

тако да она сече праву $x+1=y+1=z$.

78. Наћи зависност између константата да би се праве $x=az+m$, $y=bz+n$ и $ax+by=1$, $z=p$, секле међу собом.

79. — Дата је права линија

$$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

Наћи праву која је сече и стоји на њој управно.

80. — Наћи једначину праве линије, која пролази кроз дату тачку и сече две дате праве линије.

81. — Наћи праву, која сече праве линије

$$x=3z-1, \quad y=2z-3 \quad \text{и} \quad y=2x-5, \quad z=7x+2,$$

а у исто време је на њих управна.

82. — Наћи геометриско место правих линија, које су управне на две праве:

$$x-2=0, \qquad y-3z=0;$$
$$3x+2y=0, \qquad 5y-z=0$$

и секу праву линију

$$\frac{x-3}{12}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

83. — Наћи угао између правих:

$$x+y=0, \quad x-y=0; \quad y+z=0, \quad y-z+2=0.$$

84. — Наћи угао између две праве линије:

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-5}; \qquad x+y=0; \qquad z=10y.$$

85. — Доказати да праве

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{x}{\sqrt{3}}=y, \qquad z=0$$

чине угао од 30^0.

86. — Наћи косинусе углова праве која полови угао између две дате праве линије.

87. — Дата је права линија

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Наћи углове, које ова права чини са три праве линије, од којих свака спаја траг дате праве на свакој од координатних равни са координатним почетком.

88. — Дате су једначине ивица једног тетраедра; наћи координате пресечне тачке правих линија, које спајају средине супротних ивица.

89. — Дате су једначине ивица једног тетраедра; наћи једначине правих линија, које спајају темена тетраедра са датом тачком.

90. — Наћи геометриско место правих које пресецају праве

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}, \qquad \frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{8}=\frac{z+2}{7}$$

и осу OZ.

91. — Решити, да ли права, која пролази кроз тачке (5, 2, —1) и (4, —2, 7) сече лопту

$$x^2+y^2+z^2=25.$$

Наћи координате тачака пресека.

92. — Наћи геометриско место тачака чији збир или разлика растојања од неке две праве линије чине сталну количину.

93. — Наћи једначину геометриског места правих које пролазе кроз тачку $M\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ а нормалне су на праву

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}.$$

94. — Отсечак сталне дужине клизи својим крајевима по две праве које се укрштају. Наћи геометриско место његове средине.

95. — Наћи једначину површине, која се добија клижењем праве линије по правама

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}, \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z}{-1},$$

$$x=y=z.$$

96. — Наћи геометриско место правих које пресецају праве $y=1$, $z=1$, $x=1$, $z=0$, и круг $x^2+z^2=1$, који се налази у равни XOZ.

97. — Наћи геометриско место правих које пролазе кроз дату тачку и образују са два дата правца углове чији је збир сталан.

98. — Наћи теме тространог рогља чији су углови прави, а чије ивице пролазе кроз три дате тачке.

99. — Наћи геометриско место центара лопти, које додирују праву:

$$z=2x+1 \qquad z=-2x-y$$

IV Раван и права линија

100 — Дата је коцка, чија ивица има дужину 1. Узимајући за координатне осе неке три дијагонале саставити једначине страна и ивица коцке.

101. — Наћи раван која пролази кроз осу OX и кроз тачку пресека трију равни

$$x+2y+z+2=0, \quad 3x+z=1, \quad x+y+3=0$$

102. — Наћи једначину равни, која се одређује помоћу дате праве

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

и дате тачке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

103. — Наћи једначине равни, које пролазе кроз тачку (2, 6, —5) и кроз сваку од координатних оса.

104. — Наћи једначину равни, која пролази кроз координатни почетак и кроз праву линију

$$x=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}.$$

105. — Наћи једначину равни која спаја координатни почетак са линијом пресека равни

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

106. — Наћи једначину равни, која пролази кроз дату тачку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и кроз линију пресека двеју равни

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

107. — Која се од правих линија

$$x=5z-1, \qquad y=2z+3;$$
$$x=4z+1, \qquad y=18z+2;$$
$$x=5z, \qquad y=-z$$

налази у равни

$$7x-2y+8z-3=0.$$

108. — Саставити услов да се права

$$x=\mu z+a, \qquad y=\nu z+b$$

налази у једној од координатних равни.

109. — Наћи једначину равни која пролази кроз две паралелне праве

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}, \qquad \frac{x-x_2}{\cos\alpha}=\frac{y-y_2}{\cos\beta}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma}.$$

110. — Наћи тачку пресека праве

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{2}$$

са равни

$$3x + 5y - z = 8.$$

111. — Дата је једначина равни

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Наћи јој угао са координатном равни XOY и угао, који заклапа са осом OX права пресека дате равни са истом координатном равни.

112. — Наћи праву линију која мора пролазити кроз тачку (1, 2, 1) управно на раван

$$3x + 5y - z + 2 = 0.$$

113. — Одредити раван, која мора да буде управна на праву линију

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4},$$

а мора да се пролази кроз тачку (1, 5, 0).

114. — Наћи геометриско место правих линија, које су паралелне равнима

$$3x - 2y + 5z - 1 = 0,$$
$$2x - 4y + z - 2 = 0$$

и секу осу OY.

115. — Наћи у равни XOY праву, која пролази кроз координатни почетак, а управна је на праву.

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z}{7}.$$

116. — Дата је раван

$$4x - 3y + 5z - 2 = 0$$

Наћи једначине равни, које су управне на ову раван и пролазе кроз линије пресека дате равни с координатним равнима.

117. — Наћи једначине равни, које пролазе кроз осе координата, а нормална су на дату раван

$$4x - 3y + 5z = 2.$$

118. — Наћи праву линију, која пролази кроз тачку (1, 1, 1), паралелна равни

$$x + y + z = 0,$$

а управна је на праву

$$y = 2x, \qquad x = 3z.$$

119. — Наћи једначине праве, која пролази кроз тачку (1, 0, 2) и управна је на раван

$$x + y + z = 1.$$

120. Наћи једначину равни, која пролази кроз дату тачку, а паралелна је са две праве линије, које нису међу собом паралелне.

121. — Саставити једначину равни која би пролазила кроз неку дату праву, а била би паралелна другој датој правој линији.

122. — Права линија A B управна је на раван P; треба доказати да ће свака раван, која је паралелна правој линији AB, бити управна на раван P.

123. — Наћи праву, која пролази кроз дату тачку паралелно са две дате равни.

124. — Наћи једначину равни, која пролази кроз дату тачку, а паралелна је са две праве линије.

125. — Наћи једначину равни која пролази кроз средину између две дате тачке, а управна је на праву, која спаја ове тачке.

126. — Наћи раван, која пролази кроз дату праву и управна је на дату раван.

127. — Наћи растојање праве линије од равни, која јој је паралелна.

128. — Наћи у датој равни праву линију, која је управна на дату праву линију и пролази на датом растојању d од координатног почетка.

129. — Наћи услов када се може повући једна раван паралелно са три дате праве, које нису паралелне међу собом.

130. — Наћи праву линију, која се налази у датој равни, управна је на дату праву и сече једну од координатних оса.

131. — Наћи једначину равни, која пролази кроз дату тачку управно на дату праву линију.

132. — Повући кроз дату тачку праву која би била паралелна датој равни и секла би дату праву.

133. — Дате су једна раван и једна права линија. Наћи праву, која пролази кроз координатни почетак паралелно датој равни, и сече дату праву.

134. — Наћи једначину равни, која пролази кроз осу OX и заклапа угао од 30^0 са равни

$$4x - 12y + 3z = 0.$$

135. — Наћи у равни

$$4x - 3y - 5z + 9 = 0$$

тачку тако, да се средина њеног растојања од тачке (1, 1, 1) налази на оси кота.

136. — Наћи углове између три равни, које пролазе свака кроз по једну од координатних оса и једну заједничку тачку (a, b, c).

137. — Дате су две праве

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-2}{4}; \qquad y = 1, \; z = 3x - 2.$$

Наћи раван, која пролази кроз прву праву и пресеца осу OX у тачки чије је отстојање од друге праве једнако 1.

138. — Наћи праву која пролази кроз тачку (1, 1, 1) и сече раван

$$4x+5y-3z+2=0$$

у тачки, која лежи на истој правој са тачкама (1, 3, 2) и (5, —2, —1).

139. Наћи раван, која пролази кроз праву

$$x=3z+1, \qquad y=5z-2$$

и која образује једнаке углове с правом

$$3x=5y, \qquad 3y=4z$$

и са осом OX.

140. — Наћи раван, која пролази кроз координатни почетак и заклапа једнаке углове са три дате праве.

141. — Наћи праву линију, која пролази кроз дату тачку и заклапа једнаке углове са три дате равни.

142. — Дата је раван. Наћи углове између линија њеног пресека са координатним равнима.

143. — Дате су две паралелне праве. Наћи геометриско место правих по којима се секу равни, које пролазе кроз по једну од датих правих а нормалне су међу собом.

144. — Доказати да раван, у којој леже пројекције тачке M на координатној равни, дели отсечак који спаја M са координатним почетком у односу који не зависи од положаја тачке M.

145. — Кроз праву

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$$

и тачку M(3, 2, 1) поставити раван.

146. — Наћи једначину праве, која лежи у равни

$$x-y+z-1=0$$

и пролази кроз тачке њеног пресека с правама

$$x=0, \quad y=0; \qquad x=1, \quad z=0.$$

147. — Кроз тачку M(1, —1, 1) повући праву тако да средина њеног отсечка између равни лежи на правој

$$x+2y-z+1=0, \quad x+2y-z-3=0$$

148. — Утврдити да се праве

$$1^0 \quad 2x+2y-z+1=0, \quad x+2y+2z-1=0;$$
$$2^0 \quad x+5y+4z-3=0, \quad x+2y+2z-1=0$$

секу и наћи раван у којој оне леже.

149. — Утврдити да праве

$$\frac{x+1}{2}=\frac{1-y}{1}=\frac{z}{1}, \qquad 3-x=\frac{y+5}{2{,}5}=2z$$

леже у једној равни и наћи симетрале углова, које оне заклапају.

150. — Кроз праву

$$2x=y=2z$$

повући раван P тако да дата права буде симетрала угла, који образују пресечне линије равни P са равнима

$$y=0; \qquad x+1=0.$$

151. — Наћи дужину нормале спуштене из тачке (—1, 2, 1) на праву која пролази кроз координатни почетак и заклапа с координатним осама углове од 120^0, 60^0, 45^0.

152. — Наћи једначине пројекција на равни XOY, XOZ, YOZ нормале спуштене из тачке M(2, 1, 1) на раван

$$x+y+z-1=0.$$

153. — Наћи најкраће растојање између правих

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}, \qquad \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

154. — Наћи једначине заједничке нормале правих

$$x+4z+1=0, \quad x-4y+9=0;$$
$$y=0, \quad x+2z+4=0.$$

155. — Наћи једначину и дужину нормале спуштене из тачке M(0,—1, 1) на праву

$$y+1=0, \quad x+2z-7=0.$$

156. — Наћи пројекцију тачке M(2, 1, 1) на праву

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}.$$

157. — Наћи тачку пресека праве

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$$

са равни

$$x+y-z+1=0$$

158. — Наћи једначину пројекције праве

$$2x-y+z-1=0, \qquad x+y-z+1=0$$

на равни

$$x+2y-z+1=0$$

159. — Наћи угао W између праве

$$x + y + 3z = 0, \quad x - y - z = 0$$

и равни

$$x - y - z + 1 = 0$$

160. — Кроз тачку M(1, 2, 1) повући праву нормалну на раван

$$x + 2y - z = 0.$$

161. — Кроз праву

$$2x - y + z - 1 = 0, \quad x + y - z + 1 = 0$$

и тачку M(2, 1, 1) позући раван

162. — Наћи праву која пролази кроз тачку (1, 1, 1), паралелна је равни

$$x + y + z = 0$$

и нормална на правој

$$y = 2x, \quad x = 3z.$$

163. — Наћи праву која лежи у равни

$$7x - 5y - z + 1 = 0$$

пресеца осу OZ и заклапа са осом OY угао од 45^0.

164. — Наћи једначину праве, која пролази кроз координатни почетак, пресеца дату праву и паралелна је датој равни.

165. — Дате су две праве линије. Трећа права сече их и помера се тако да остаје паралелна датој равни. Наћи геометриско место средина између тачака пресека ове праве са датим правама.

166. — На правој, по којој се секу равни

$$x + y + z - 2 = 0, \quad x + 2y - z - 1 = 0,$$

наћи тачку подједнако удаљену од паралелних равни

$$x + 2y - z + 1 = 0 \text{ и } x + 2y - z - 3 = 0.$$

167. — У једначини равни

$$x + y + lz = 0,$$

одредити l из услова да се кроз осу OX може поставити само једна раван, која заклапа са правом равни угао од 330^0.

168. — Наћи једначину нормале спуштене из тачке (3, 8, 1) на раван

$$4x - 3y + 12z - 13 = 0.$$

169. — Наћи геометриско место правих линија пресека двеју узајамно управних равни од којих свака пролази стално кроз једну дату праву линију.

170. — Наћи геометриско место система правих линија, које пролазе кроз дату тачку паралелно датој равни.

171. — Наћи геометриско место правих линија, које секу две дате праве а паралелне су датој равни.

V. Површине

172. — Наћи отсечке на координатним осама, које чини раван, која додирује у тачки (x_1, y_1, z_1) лопту

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

173. — Наћи услов, кад раван

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

додирује лопту

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

и координате тачке додиривања.

174. — Доказати да су паралелне две равни, које додирују лопту

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

у теменима једног пречника.

175. — Наћи услов додиривања праве $x = y = z$ с лоптом

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

176. — Наћи размеру запремина лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 24z + 48 = 0$$

и конуса који је описан око ње, а чије се теме налази у координатном почетку, а за основицу има круг додиривања с датом лоптом.

177. — Наћи лопту која додирује раван XOY у некој тачки праве $y = 3x + 2$ и раван YOZ у некој тачки праве $y = -5z + 1$.

178. — Наћи обе равни чији је скуп одређен једначином

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2xz + 2xy - 10x - 10y - 10z + 25 = 0.$$

179. — Одредити обе равни, чија је заједничка једначина

$$8x^2 + 18y^2 + 2z^2 + 12yz + 8xz + 24xy - 50x - 75y - 25z + 75 = 0.$$

180. — Доказати да једначина

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz - 4yz - 2x + 2z + 1 = 0$$

одређује скуп две равни, па наћи њихове једначине.

181. — Да ли једначина

$$x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2 + 4x + 8y + 12z + 1 = 0$$

одређује две равни?

182. — Проучити, кад једначина

$$(ax + by - z)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(x^2 + y^2 - z^2)$$

одређује скуп двеју равни.

183. — Наћи за које вредности коефицијената a, b, и c једначина

$$ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bxz+2cxy-1=0$$

одређује скуп две равни, па наћи њихове једначине.

184. — За које вредности параметара m, n и p једначина

$$x^2+y^2-z^2+mxz+nyz-5x-6y+3z+p=0$$

одређује скуп две равни.

185. — Наћи за које вредности коефицијента m једначина

$$x^2+my^2+3z^2-mxz=0$$

претставља скуп две равни.

186. — Испитати облик површина:

$2x^2+4y^2-z^2-4yz-8xz+4xy+2x-4y-22=0;$
$x^2+6yz+8xz-4xy+2x+4y-14z+64=0;$
$25x^2+22y^2+16z^2+16yz-4xz-20xy-26x-40y-44z+ +44=0;$
$4x^2+10y^2+2z^2-8yz+4zx-4xy+4x+10y+3z+9=0;$
$yz+3xz+2xy-y+x+2z+4=0;$
$2x^2+4y^2-z^2+4yz-8xz-4xy+2x-4y-22=0;$
$x^2-2y^2+z^2+2xy-4xz+4y+4z-9=0;$
$3x^2-5xy+y^2-2z^2+3x-2z+1=0;$
$x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy+x+y+z-2=0;$
$4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0;$
$2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0;$
$2B'xz-2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0;$
$(y-x)^2-2(y-x)z+z^2=1;$
$x^2-yz=k;$
$3x^2+5y^2+6x-10y+2z+2\beta=0;$
$xz=y;$
$z=(y-z)^2;$
$5x^2+3y^2-2z^2=0;$
$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz-2x-2y-2z+1=0;$

187. — Довести на канонски облик једначине површина

$5x^2+3y^2-8z^2+5xy+4x-3y=0;$
$7x^2+2xy+8xz-5y+z-3=0;$
$9x^2-z^2+6xy+2yz+4x+4y+4z=0;$
$5x^2+5y^2+8z^2-4yz+4xz-8xy+6x+6y-3z=0;$
$x^2+y^2+z^2+4xy-2xz-2yz+x-y+z-1=0;$

$x^2+z^2-2yz+8x=0;$
$5y^2-8z^2-2xy+4xz-3x+2z+1=0;$
$9x^2+y^2+2z^2+6xz+2yz-3x+5=0;$
$2x^2-y^2+3z^2+2xy+6xz+6yz-5x=0;$
$x^2-2y^2+z^2-4xz+6yz-8x+10y=0;$
$9x^2+y^2+2z^2+6xz+z+2yz-3x+5=0;$

$$\frac{yz}{m}+\frac{xz}{n}-\frac{xy}{p}=1.$$

188. — Одредити главне равни површине

$$3x^2+5y^2+6x-10y+2z+24=0$$

и довести њену једначину на канонски облик.

189. — Наћи три дијаметарске равни површине

$$5y^2-8z^2-2xy+4xz-6yz-3x+2z+1=0.$$

које пролазе кроз координатне осе.

190. — Наћи конус који је описан око површине

$$2x^2-3y^2-4z=0,$$

а има теме у тачки (1, 1, 1).

191. — Наћи услове кад ће једначина

$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1xz+2B_2xy+F=0$$

одредити цилиндар или конус.

192. — Наћи једначину цилиндра чија је генератриса

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{4},$$

а директриса је

$$x^2=2py.$$

193. — Наћи једначину цилиндра, чија је генератриса

$$x=z+\alpha, \qquad y=-z+\beta,$$

а директриса је линија пресека елипсоида са равни

$$x+2y+3z=1.$$

194. — Доказати да једначина

$$4x^2+9y^2+97z^2-16xz-54yz-36=0$$

одређује један цилиндар. Одредити његов облик и положај.

195. — Показати да једначина

$$8xy + 16xz + 8yz - 8x + 8y - 16z - 7 = 0$$

одређује конус и наћи координате његовог темена.

196. — Наћи једначину конуса са теменом на оси кота на растојању l од координатног почетка, а са директрисом $(x-1)^2+y^2=1$.

197. — Саставити једначину конуса са теменом у тачки (1, 2, 3), и директрисом, која претставља круг пресека лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

са равни

$$x + y + z = 0.$$

198. — Наћи једначину конуса с теменом у координатном почетку, чија је директриса линија пресека површине

$$(x-1)^2 + \frac{z^2}{4} = 1$$

са равни

$$x + y + z = 0.$$

199. Наћи једначину конуса, чије се теме налази у координатном почетку, а чија је директриса линија пресека неког елипсоида са равни

$$x + y + z = 1.$$

200. — Наћи једначину конуса, чије се теме налази у координатном почетку и чија директриса преставља линију пресека површине 2-ог реда општег облика са равни

$$x + y + z = 1.$$

201. — Доказати да је услов

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & F \end{vmatrix} = 0$$

не само довољан, но је и потребан да би једначина

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0$$

одређивала конус.

202. — Наћи услов, кад једна права датог правца, пролазећи кроз дату тачку, додирује површину другог реда општег облика.

Искористити овај услов за одређивање описаног цилиндра, чије су генератрисе паралелне датој правој линији.

203. — Наћи услов, кад једна права, која пролази кроз две дате тачке, додирује површину другог реда општег облика.

Применити овај услов за састављање једначина описаног конуса са теменом у датој тачки.

204. — Наћи координате темена параболе, која се добија као пресек цилиндра $y^2 = 2x$ и равни

$$x + y + z = 1.$$

205. — Дат је цилиндар

$$y^2 - 2px = 0$$

и раван

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0$$

Наћи координате темена параболе, која претставља пресек датог цилиндра и равни. Одредити геометриско место свих темена, кад се λ мења.

206. — Наћи једначину кружног цилиндра, који додирује равни:

$$x + y + z = 0; \quad x - y + z = 0; \quad x + 5y + z + 1 = 0.$$

207. — Круг полупречника R додирује осу OY у координатном почетку и налази се у равни XOY. Други круг истог полупречника налази се у равни

$$x - \lambda z = 0$$

и додирује осу OY у координатном почетку. Наћи једначину цилиндарске површине, која пролази кроз ове кругове.

208. — Кроз тачке (0, —2, 2) и (—1, 0, 0) повући праве, које секу конус

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

по параболама.

209. — Одредити λ тако да конус $x^2 - 2xy + \lambda z^2 = 0$ буде ротациони конус и одредити једначине осе ротације.

210. — Одредити λ и μ тако да једначина

$$x^2 - y^2 + 3z^2 + (\lambda x + \mu y)^2 - 1 = 0$$

претставља ротациони цилиндар.

211. — Наћи дијаметарске равни површине

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6 = 0.$$

212. — Наћи главне дијаметарске равни површине

$$2x^2 + 3y^2 - 4z = 0$$

и довести њену једначину на кононски облик.

213. — Наћи главне дијаметарске равни површине

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z = 0.$$

214. — Дата је површина

$$xy + xz + yz = 1.$$

Наћи њене осе, па њен облик, кад су ове осе узете за координатне осе.

215. — Наћи правце оса површине

$$z^2 - xy = 1.$$

216. — Дате су у правоуглом координатном систему раван и површина другог реда:

$$x - 2y + 3z = 0,$$
$$4x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 7xy + 9xz - 3yz + 2z - 1 = 0.$$

Наћи пројекције кривих линија њихових пресека на три координатне равни.

217. — Наћи геометриско место средишта кривих линија, које су линије пресека површине једнокрилног хиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

са равнима, које пролазе кроз дату тачку (x_1, y_1, z_1).

218. — Доказати, да се једначина површине другог реда са средиштем у тачки (a, b, c) може довести на облик

$$\mathrm{A}x(x - 2a) + \mathrm{B}y(y - 2b) + \mathrm{C}z(z - 2c) + \mathrm{D}(xy - bx - ay) + \mathrm{E}(xz - cx + az + \mathrm{F}(yz - cy - bz) + \mathrm{K} = 0.$$

219. — Наћи геометриско место средишта кривих линија, које се добијају у пресеку једне површине другог реда општег облика са равнима, паралелним једној од координатних равни.

220. — Наћи геометриско место средишта површине другог реда, која пролази кроз осе OX, OY и кроз две тачке

$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, -1).$$

221. — Наћи геометриско место средишта површине

$$x^2 + y^2 + z^2 + mxz + nyz - 5x - 6y + 3z = 0,$$

где су m и n променљиви параметри.

222. — Наћи једначину обртне површине, која се добија окретањем круга око његове сечице.

223. — Елипса се обрће око једне од њених оса. Наћи једначину површине коју она описује у погледу координатног система, чији почетак се налази у центру елипсе, а једна од оса се поклапа са осом ротације.

224. — Наћи једначину површине, која се одређује обртањем параболе око тангенте у темену.

225. — Испитати, која се од површина другог степена може сматрати као коноид.

226. — Наћи једначину површине торуса, која се одређује обртањем једног круга око осе, која пролази изван њега.

227. — Наћи услов кад једначина

$$x^2z + ax^2 + by^2 + c = 0$$

одређује површину једног коноида и протумачити њен геометриски облик.

228. — Наћи површину другог реда, која пролази кроз координатни почетак и кроз две праве

$$x = 0, \qquad z = 1,$$
$$y = 0, \qquad z = -1.$$

а чије се средиште налази на правој

$$x = 3z + 1, \qquad y = 5z - 2.$$

229. — Одредити различите врсте кривих линија, које се добијају у пресеку површине

$$x^2 + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{2} = 1$$

са равни

$$x + y + mz = 0,$$

за различите вредности коефицијента m.

230. — Дате су две површине

$$3x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy - 4xz - 2y + 6z = 0,$$
$$2x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xy + 6xz + 6yz - 5x = 0.$$

Наћи угао између дијаметара ових површина, који пролазе кроз координатни почетак.

230. — Наћи услов, кад једна од оса површине другог реда општег облика, пролази кроз координатни почетак.

232. — Наћи једначину линије пресека елипсоида са равни у односу на координатни систем, који се налази у овој равни.

233. — Наћи геометриско место средишта кривих линија пресека датог хиперболоида, са равнима, које пролазе кроз дату тачку.

234. — Наћи геометриско место средишта кривих линија, које се добијају као пресеци површине другог реда општег облика са равнима, које су паралелне једној од координатних равни.

235. — Наћи геометриско место правих линија, које, пролазећи кроз дату тачку, секу дату површину другог реда у двема тачкама, једнако удаљеним од дате тачке.

236. — Наћи геометриско место средина тетива површине другог реда, које пролазе кроз дату тачку.

237. — Наћи једначину површине, која се одређује кретањем једне праве паралелне равни xy, која пролази кроз осу кота и кроз криву:

$$xyz = a^2, \qquad x^2 + y^2 = c^2.$$

238. — Наћи једначину површине, која се одређује кретањем неке праве, која пролази управно кроз праву $x+y=0$, $z=0$ и кроз параболу:

$$x^2 = \alpha z, \qquad y = 0.$$

239. — Наћи геометриско место правих линија, које су управне на 2 праве линије

$$x-2=0, \qquad y-3z=0;$$
$$3x+2y=0; \quad 5y-z=0,$$

па секу праву линију

$$\frac{x-3}{12}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}.$$

240. — Наћи геометриско место средине тетива површине другог реда, које пролазе кроз дату тачку (x_1, y_1, z_1), у претпоставци да је површина одређена једначином општег облика.

241. — Доказати да један једнокрилни хиперболоид претставља геометриско место тачака, чији је производ растојања од три не паралелне стране паралелопипеда једнак производу растојања од три супротне стране.

242. — Наћи геометриско место тачака за које је производ отстојања од две непаралелне ивице коцке сталан.

243. — Наћи дужину оса елипсе, која се добија као пресек елипсоида

$$x^2+y^2+4z^2-1=0$$

и равни

$$x+y+z=0.$$

244. — Наћи једначину конуса, чији је врх у координатном почетку, а директриса је задата једначинама

$$x^2+3y^2+z^2=1, \quad x+y-3z=1.$$

245. — Наћи геометриско место центара елипса, које се добијају као пресеци елипсоида и равни од његовог центра за дато отстојање p.

246. — Наћи раван, која пролази кроз центар елипсоида и кроз нормалу подигнуту у једној датој његовој тачки.

247. — Наћи тачку на елипсоиду, у којој тангентна раван отсеца једнаке отсечке на његовим осама.

248. — Наћи геометриско место центара површина другог реда, које пролазе кроз дату елипсу и кроз две тачке симетричке у односу на раван елипсе.

249. — Доказати да се, ако две површине другог реда пролазе кроз једну исту кризу другог реда, остале њихове заједничке тачке налазе на другој кризој другога реда.

250. — Доказати да једначину

$$x^2+y^2+z^2+2xz+2y+1=0$$

задовољавају само тачке, које леже на правој

$$x-y+z-1=0, \qquad x+y+z+1=0.$$

ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ

Страна	Ред	Место	Треба
IX	12 одоздо	једначине	једначина
IX	8 „	једначине	једначина
IX	7 „	једначине	једначина
X	2 одозго	једначина	једначине
XII	24 „	тантентна	тангентна
XIII	1 одоздо	—	Трећи део
3	11 одозго		Примери и задаци
4	21 „	праволугли	правоугли
6	Слика 5	$\overline{OM}^2 + \overline{M'M^2}$	$\overline{OM'}^2 + \overline{M'M}^2$
8	14 одозго	XOY'	XOY
9	7 „	$a_1\ b_1$	$a\ b_1$
9	21 „	òбразцу	обрасцу
9	27 „	$in\ \varphi$	$Sin\ \varphi$
10	1 „	конуси	косинуси
12	5 „	dx	a_x
12	Слика 11	A' B' C'	A' B' C_1
14	5 одозго	S	σ
14	6 „	озрасци	обрасци
16	9 одоздо	λz_1	$\lambda_1\ z_1$
19	7 одозго	који	које
19	6 одоздо	праволуглог	правоуглог
22	11 одозго	овице	ивице
22	22 „	обаразац	образац
22	29 „	праволуглих	правоуглих
22	7 одоздо	10	7
23	24 одозго	v	ν
23	10 одоздо	ν	ν'
24	6 одозго	еђутим	међутим
24	15 „	V'	Λ'
28	14 одоздо	v	ν
29	8 одоздо	Z_l	Z_i
30	1 „	$\cos\ (p, \overline{p})$	$\cos\ (p, \overline{p'})$
31	4 „	$-\overline{p}\,\Lambda\,\overline{p}$	$-\overline{p'}\,\Lambda\,p$
32	2 одозго	E y	E' y
34	4 одоздо	пријекцију	пројекцију
43	5 „	A M B C	A M' B C
44	1 одозго	свих —	свуда +
45	7 „	x_1	x_i
45	7 „	страну	дијагонални троугао
45	8 „	супротну	супротан
45	13 „	ивици $M_2\,M_5$	дијагонали $M_2\,M_4$
45	15 „	једне стране	једног дијагоналног троугла
47	11 одоздо	ивице	дијагонале
51	12 одозго	β^2	β'^2
51	1 одоздо	$y\ z$	$y'\ z'$
52	13 одозго	OXYZ'	OX'Y'Z'
52	17 „	тачк	тачке
55	Слика 36	(3)	(2)
55	26 одозго	Z Z	ZZ'
		X O Y'	X' O Y

Страна	Ред	Место	Треба
57	1 одозго	φ са φ	φ са $-\varphi$
57	11 одоздо	x	x'
57	7 „	P	P′
58	2 одозго	P	P′
58	10 одоздо	y	y'
62	10 „	$2\,\Psi_1$	$2\,\Psi$
68	13 „	права	права L_1
69	8 одозго	$\sqrt{2\,\Psi}\cdot\sqrt{2\,\Psi}$	$\sqrt{2\,\Psi}\cdot\sqrt{2\,\Psi'}$
69	11 „	Ψ_1	Ψ'_1
69	20 „	F_2	F'_2
71	11 одоздо	$a_1\ F'_1$	$a_1\ F_1$
76	1 „	ν	ν'
76	1 „	μ	μ'
90	3 одозго	анулирају	могу да анулирају
91	2 „	—	+
91	3 „	—	+
91	4 „	—	+
92	11 „	други	први
94	8 „	$+\,0$	$=\,O$
96	4 „	Z	Z′
97	17 „	$M_1\,M_1\,M$	$M_1\,M'_1\,M$
97	19 „	$\overline{MM}$	$\overline{M_1M}$
97	6 одоздо	услед	и услед
98	2 одозго	једној	левој
98	3 одоздо	μ_2	$-\,\mu_2$
102	14 одозго	M	M′
102	16 „	AM	AM′
102	16 „	BM	BM′
102	16 „	CM	CM′
102	12 одозго	M	M′
102	11 „	$\frac{1}{M}$	$\frac{1}{M'}$
105	3 одозго	једначине	једначина
107	16 одоздо	једначине	једначина
107	4 „	једначине	једначина
109	15 одозго	o'	y_0'
113	4 одозго	$-\frac{\delta''}{\delta}$	$\frac{\delta''}{\delta}$
115	2 „	једначина	једначине
119	9 одоздо	An	— An
124	6 одозго	сразмеру	размеру
125	6 „	једначина	једначине
125	18 „	M	M′
125	20 „	p M	p M′
125	20 „	q M	q M′
125	20 „	r M	r M′
125	25 „	M	M′
129	18 „	пропорционалних	пропорционалне
129	6 одоздо	све	све линеарне
131	14 одозго	74	73
133	4 „	μ X,	$\mu\ X_1$,
137	4 „	M	**M**
137	8 „	M	**M**
137	14 „	M	**M**
138	17 „	параметра	параметара
141	18 одоздо	$A'\,A'_1,\,B'\,B'_1$	$A',\,A'_1,\,B',\,B'_1$
148	15 „	две	све
152	Слика 66	B_1	B'_1
153	Слика 67	B_1	B'_1
158	18 одозго	p	l
162	8 „	OY	на OY
163	1 „	z_0	z_0'

Страна	Ред	Место	Треба
163	2 одозго	већој	највећој
163	5 „	већој	највећој
163	2 одоздо	већој	највећој
163	1 „	већој.	највећој
163	8 одоздо	одређује	одређују
163	6 „	x_o	x_o'
163	7 „	y_o	y_o'
163	8 „	z_o	z_o'
163	2 „	средиште се налази	средишта им се налазе
169	13 одозго	$\alpha+\beta$	$\alpha'+\beta'$
172		сл. 72	сл. 73
174	15 одоздо	степена	реда
174	1 „	једначину	једначини
175	8 „	B	B′
175	9 „	B′	B″
175	9 „	A	A″
175	9 „	—	(5)
176	12 одозго	Δ	Δ'''
177	6 „	y_1	y_c
179	19 одоздо	$A'\,\beta'$	A'^{2}
183	10 одозго	$-\,B''\,(A''-S_{1,2})$	$-B''^2\ (A''-S_{1,2})$
183	11 „	$-'\,A$	$-\,A'$
184	15 „	B^2B^2	$B^2\,B'^2$
186	1 „	A—A	A—A′
188	4 одоздо	A + A″ A—A	A′ + A″ A′—A″
192	12 одозго	f_y	f'_y
192	9 одоздо	γ	по $\alpha,\ \beta,\ \gamma$
193	3 одозго	површине	површине са паралелним равнима
193	15 одоздо	y,z	$y,$
199	18 „	$\pm\frac{q\,m}{n}$	$\mp\frac{q\,m}{n}$
199	13 „	$\mp\,my$	$\pm\,my$
206	9 одозго	степена	реда
207	11 одоздо	$A'_1\,x^2$	$A'_1\,x'^2$
209	2 „	подпадају	потпадају
211	6 „	степена	реда
212	15 „	$-\,n$	—
213	2 одозго	бесконачности	у бесконачности
214	21 „	степена	реда
215	14 „	m	$m\,y$
216	9 „	l	l
216	21 „	$l_1'\,m$	$l_1'\,m'$
216	7 одоздо	mh_1'	$m'\,h_1'$
216	2 „	$m_1'\,h$	$m_1'\,h'$
216	1 „	$m^2h_1'^2$	$m'^2\,h_1'^2$
217	4 одозго	$u\,\beta^2+v\,\gamma^2$	$u\ \beta'^2+v\gamma'^2$
218	4 „	(18)	—
219	19 одоздо	$y=o$	$x=o$
219	14 „	степена степена	реда реда
219	1 „	β^2	β'^2
220	5 „	z_2	z^2
220	6 „	степена	реда
221	13 „	y^2	y_1^2
224	17 „	lm_1'	$l'\,m_1'$
225	7 одозго	$v\gamma^2$	$v\,\gamma'^2$
225	10 одоздо	1)	(41)
226	9 „	$(2\,z-q)$	$(2\,z'\mp q)$
226	12 „	степена	реда
228	1 одозго	(49)	(49),
228	9 „	$p-\lambda\quad q-\lambda$	$p-\lambda_1\ \ q-\lambda_1$
229	2 „	степена	реда
230	7 „	на	по једну на
232	11 „	B″	B_1''

Страна	Ред	Место	Треба
235	9 „	и	или
235	12 одоздо	и	или
235	1 „	$\overline{}$ A″	$\frac{1}{A'}$
238	15 одозго	и задацима	или знацима
246	1 „	y''	y'
248	8 одоздо	(36)	(30)
251	1 одозго	$x, y. z,$	$x', y'. z'$
253	20 одоздо	S_1	s_1
253	17 „	G	G_1
253	9 и 10 одоздо реченицу „Елементи... преместити у 4 ред одоздо пред „Како елементи...		
254	5 одозго	D_1	D_2
256	3 одоздо	обрасцу	обрасцу (n^0 179, стр. 189)
259	1 „	$\overset{1}{}$	S_1
268	9 „	$z_i'^2$	z_i^2
268	12 „	1 2,	1. 2,
271	10 одозго	$\left(y+\frac{C}{A}\right)^2$	$\left(y+\frac{C'}{A}\right)^2$
273	5 одоздо	лопти	равни
273	1 „	λ, и односно γ	λ, μ односно ν
275	7 „	$x,$	$x',$
277	2 одозго	предходном	претходном
278	9 „	једнакости	једнакост
278	9 одоздо	$y—z_0$	$y—y_0$
280	21 „	потпуно	потпуну
280	22 „	теме се	се теме
283	9 одозго	кониоида	коноида
283	15 одоздо	парапелан	паралелна
283	13 „	за $b < a$	за $b > a$
284	10 одозго	да би	да бисмо
284	17 одоздо	a	a^2
285	6 „	z_1	z_1^2
286	10 одозго	управан	који је управан
286	15 „	растојање	растојање од координатног почетка
295	6 одоздо	рава	Права
299	1 „	$y—z_1$	$z—z_1$
300	14 одозго	да се	да
311	18 „	230	231