Ф2 3048

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

GRUPA ZA MEHANIKU

P R I L O G   T E O R I J I   P R E K I D N I H S T R U J A N J A

DOKTORSKA DISERTACIJA

KANDIDAT:

MOMČILO ZDRAVKOVIĆ, dipl. ing.,
magistar mehaničkih nauka

UNIVERZITET U BEOGRADU
SEPTEMBAR 1965

S A D R Ž A J

"L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir."

Pascal

("Ljudska mašta će se pre zamoriti od shvatanja pojava nego priroda od snabdevanja njima")

Paskal

Sl. 1. Dvojni niz vihora iza tela (snimak Ričardsa [39])

REZIME

U prvom poglavlju, je dat istorijski pregled razvoja teorija vihornih* i vrtložnih kretanja fluida sa kritičkim osvrtom na uzroke odstupanja od oglednih podataka. Posebno je istaknuto da ova kretanja predstavljaju veoma čestu pojavu, kako pri kretanju čvrstih tela u fluidu, tako i pri obstrujavanju nepokretnih tela strujom fluida. Prikazani su malo poznati radovi Golubijeva, koji je pokazao da dvojni nizovi vihora, ukoliko imaju suprotni smer obrtanja od Karmanovog vrtložnog niza, stvaraju potisak.

U drugom poglavlju je analiziran fizički mehanizam nastajanja i naizmeničnog odvajanja vihora iza tela. Usvojena je idejna koncepcija po kojoj je nastajanje vihora iza tela posledica namotavanja vrtložnog sloja koji se odvaja od prepreke. Oglednim snimcima je pokazano i stvarno postojanje ovakve pojave iza prepreke. Fizički mehanizam naizmeničnog odvajanja vihora je protumačen periodičnim kretanjem "linije prijanjanja" od jedne do druge ivice tela. Ogledi su pokazali da ako se onemogući "šetanje" ove linije iza tela postavljanjem pregradjivača, onda prestaje odvajanje vihora u celom opsegu značilaca Rejnoldsa u kome se obično javlja. Ovakva idejna koncepcija tumačenja pojave iskorišćena je u matematičkoj interpretaciji pojave.

U trećem poglavlju je prikazana nemogućnost rešavanja Navije-Stoksovih jednačina za slučaj opšteg [illegible] vihornog strujanja. Pokazalo se da jedino rešenje (ako su nezavisno promenljive razdvojene) koje zadovoljava granične i početne uslove vihornog strujanja, jeste slučaj [illegible] strujanja difuzije osamljenog vihora.

* U ovome radu se pod vihornim kretanjem podrazumeva strujanje koje nije potencijalno ni u jednoj tački polja, dok pri vrtložnom strujanju imamo potencijalno brzinsko polje isključujući u njemu samo tačke u kojima se nalaze vrtložna vlakna.

U četvrtom poglavlju je uveden teorijski model vrtložnog sloja kao dalji korak u poboljšanju teorije prekidnih strujanja. Postavljene su približne diferencne jednačine kretanja, a zatim i opšti sistem nelinearnih integro-diferencijalnih jednačina kretanja. S obzirom da se vreme javlja kao parametar, to je ukoliko se sistem jednačina reši, moguće dobiti oblik vrtložnog sloja posle proizvoljnog vremena njegovog nastajanja.

U petom poglavlju je sprovedeno grafičko rešavanje zadatka o obliku i kretanju vrtložnog sloja. Pokazalo se da se konačni vrtložni sloj namotava u spiralu, koja tokom vremena narasta. Ovo dovodi do znatnog povećanja brzine u brazdi u poredjenju sa teorijom Kirhofa i Helmholca što predstavlja osnovni uzrok povećanja otpora prepreke u struji fluida, jer izaziva uvećanje potpritiska u tragu iza tela.

U šestom poglavlju je izvedena aproksimacija spiralnog vrtložnog sloja logaritamskom spiralom. Sa ovako unapred usvojenim oblikom vrtložnog sloja se pokazalo da je moguće rešiti integrale koji se pojavljuju u tom slučaju. Rešenje je dobijeno razvijanjem podintegralne funkcije u red pri čemu se zadržavaju samo prva tri člana, a ostatak je procenjena greška usled njegovog zanemarivanja. Na osnovu toga je moguće omedjiti područje u kome ovakvo rešenje važi pri unapred propisanoj tačnosti. Odredjeno je resultujuće strujno polje koje stvara vrtložni sloj oblika logaritamske spirale.

U sedmom poglavlju je izvršeno uporedjivanje sa oglednim podacima. Uz pomoć dimenzione analize je ukazano na novi bezdimenzioni značilac za opisivanje pojave odvajanja vihora iza tela. Novi značilac je pogodniji od značioca Strouhala, u prvom redu, stoga, što je korelaciona zavisnost linearna. Takodje je pokazano da se zanimljiv fenomen uticaja pritiska i temperature može isto tako linearno predstaviti, i postavljena je jedna nova opšta korelacija za odredjivanje učestanosti odvajanja vihora iza tela.

U osmom je poglavlju ispitivana opravdanost primene Karmanove teorije u slučaju kada je fluid viskozan. Nadjeno je da postoji samo odredjena oblast, u tragu iza tela, za koju važi Karmanova teorija. Ispred ove oblasti nalazi se oblast u kojoj početak vihornog niza ne sme da se zanemari, dok se iza ove prostire oblast u kojoj se uticaj viskoznosti ne može da zanemari. Zanimljivo je da postoji prilično veliki deo opsega značilaca Rejnoldsa u kojoj dolazi do stvaranja dvojnog vihornog niza za koji teorija Karmana uopšte ne važi, što objašnjava zašto su u tom opsegu bila najveća odstupanja izmedju ogleda i teorije.

U devetom poglavlju je teorijski razmatrana i protumačena davno zapažena pojava širenja dvojnog niza vihora iza tela. Postavljene su funkcionalne zavisnosti za odredjivanje oblika širenja početka vihornog niza, kao i oblika širenja vihornog niza u oblasti dejstva viskoznosti. Na osnovu radova Hukera i Timea postavljene su jednačine raspodele brzina u vihoru za uzdužni i poprečni pravac i pokazano je kako se teorijska predvidjanja vrlo dobro poklapaju sa podacima ogleda.

Na kraju, u poslednjem poglavlju, su u sažetom obliku izvučeni najvažniji zaključci do kojih se došlo u ovome radu.

1. U V O D

Pojava vihornih kretanja fluida u tragu iza prepreke nestrujolikog oblika je veoma davno zapažena (još u antici kako navodi Flahsbart [12]). Medjutim, uprkos tome, pitanje teorijskog objašnjenja mehanizma strujanja tečnosti ili gasa u tragu iza loše opticanog tela jeste jedno od nerazvetljenih pitanja savremene teorijske mehanike fluida. U toj oblasti postoji ogroman ogledni materijal, kao i veliki broj teorijskih radova sa pokušajima teorijskog objašnjenja pojave. Ali, kao po pravilu, većina teorijskih tumačenja zasniva se na manje ili više proizvoljnim pretpostavkama, što dovodi samo do delimičnog slaganja sa podacima iz ogleda. S druge strane, i ogledni rezultati se, takodje, dosta razlikuju u radovima raznih istraživača, a odsustvo iscrpnih opisivanja svih detalja i metoda merenja najčešće nas primoravaju da sa izvesnom opreznošću donosimo zaključke prilikom korišćenja raznih podataka.

Pojava odvajanja vihora iza tela koje se kreće u fluidu nije do danas teorijski objašnjena, jer problem još nije matematički formulisan. Činjenica da strujanje fluida oko tela može da bude periodično je vrlo često čak i čujna. Fijuk biča ili bačenog koplja kroz vazduh, hujanje žica na dalekovodima na vetru, zviždanje brodske užadi za vreme bure, pištanje zategnutih žica na avionu, pa čak i nastajanje muzičkih tonova na "eolskoj harfi", poznatoj još u antici, predstavljaju čujnu manifestaciju ove pojave. Lepršanje zastave na vetru predstavlja jedan primer njenog vidnog manifestovanja.

Prvi je Strouhal [44] 1878. godine otpočeo sa sistematskim ispitivanjima koja su pokazala zavisnost eolskog tona žice na vetru od njegove brzine. Teorijsko tumačenje pojave dao je lord Rejli [37a,37b]. Mada je već 1902. godine Alborn [2] snimio periodičke vihore u tragu iza opticanog tela, tek je Benar [4a] 1908. godine povezao muzičke tonove koje je ispitivao Strouhal sa dva naizmenična niza jednako razmoredjenih vihora iza obstrujavanog cilindra u vodi, kao posledice iste pojave.

Kao i za veliki broj važnih mehaničkih problema gde ne postoji još matematička postavka zadatka, već glavnu ulogu igraju ogledi, ovi jedini daju mogućnost uočavanja najprostijih zavisnosti. Za ispravnu postavku i obradu ogleda, s jedne strane, i ustanovljavanje opšte zakonomernosti, koja se može primeniti na slučajeve koje ogled nije dao neposredno, s druge strane, kao i za ulaženje u suštinu pojave neophodno je ispomoći se teorijom sličnosti. Stoga se i učestanost odvajanja vihora iza tela izražava pomoću bezdimenzionog značioca koji nosi ime Strouhal.

1911. godine Karman [23a)] je postavio teoriju beskrajnog dvojnog niza vrtloga ne ulazeći u to kako je ovakav sistem nastao. Iz uslova stabilnosti sistema, on je dobio parametre geometrijske konfiguracije sistema, a preko zakona o količini kretanja izračunao je veličinu otpora koja se jedino dovoljno dobro poklapala sa merenjima. Medjutim, Kočin [26a)] 1939. godine je minucioznom analizom pokazao da je Karmanov geometrijski razmeštaj u opštem slučaju nestabilan i da predstavlja samo slučaj najmanje nestabilnosti sistema. Dolapčijev [9a, 9b)] je uopštio Karmanovu teoriju na dvoparametarske vrtložne nizove. Primenom Kočinove metode malih pomeranja pokazano je da su i dvoparametarski vrtložni nizovi u opštem slučaju nestabilni (Dolapčijev [9c,] Dom [10)] i drugi), a da šahovski razmeštajni poredak predstavlja samo najmanju nestabilnost sistema. Naglasimo da je Benar [4e)] ukazao na vrlo velika odstupanja svojih oglednih podataka od onih predvidjenih Karmanovom teorijom.

Bee i Peterson [4b)] su 1931. godine na osnovu neposrednih vizuelnih opažanja postavili teorijski model "oscilatornog traga" iza prepreke. Oni su pretpostavili da ugaono ubrzanje mase fluida u tragu iza tela potiče usled aerodinamičke sile koja nastaje ako trag zamenimo aeroprofilom istog oblika, čija je dužina jedna perioda traga.

Medjutim, ovaj model nema fizičkog opravdanja, jer uopšte ne uvodi u razmatranje vihorna kretanja fluida u tragu iza tela.

Abernati i Kronauer [1] su pošli od toga da se vrtložni slojevi nepromenljive, ali supretnosmerne cirkulacije mogu pretstaviti sa dva beskrajna niza konačnih vrtložnih niti. Zatim su ispitivali dejstvo antisimetričnih sinusoidalnih poremećaja raznih talasnih dužina na ovakve u početku paralelne nizove vrtložnih niti. Pokazalo se da tokom vremena dolazi do stvaranja dvojnog niza naizmeničnih vihora, koji se sastoje iz nagomilanih vrtložnih niti, nastalih kao resultat medjusobnog dejstva vrtložnih nizova. Osnovni nedostatak ove teorije jeste neophodnost postojanja sinusnih poremećaja u strujanju da bi došlo do obrazovanja dvojnog niza vihora, kao i da je potrebno izvesno vremensko razdoblje da se vrtlozi nagomilaju. Medjutim, na sl. 2 (treći snimak) se vidi da se veliki vihor obrazuje neposredno iza ploče.

S obzirom na relativno retko teorijsko obradjivanje ovoga problema može se steći pogrešan utisak da se ovakvi vihorni sistemi javljaju vrlo retko u praksi. Medjutim, u prirodi postoji niz pojava, čije mehaničko objašnjenje i njihova teorija su u najtešnjoj vezi sa teorijom dvojnog niza vihora.

Golubjev [16] je pokazao, u nizu svojih radova, da se uporedo sa zadatkom odredjivanja otpora javlja, u izvesnom smislu, obrnuti zadatak - odredjivanje potiska mašućeg krila. U oba slučaja se javlja dvojni/ naizmenični niz vihora iza tela, ali smer cirkulacije je obrnut. Ogledi Polonskog [35] su vizuelno pokazali postojanje dvojnog niza vihora iza mašućeg krila. Golubjev [16] je tako uspeo da teorijski objasni i slučaj leta malih ptica i nekih insekata u mestu, što predstavlja savršenu nemogućnost s tačke gledišta savremene teorije uzgonskih površina.

Vihornu sliku koja se još više približava slučaju potiska mašućeg krila imamo kod obrazovanja potisne sile kod čamca pri radu sa krmenim veslom, koje ribari vrlo često upotrebljavaju. Ovde se kao rezultat rada krmenog vesla iza čamca obrazuje tipični naizmenični dvojni niz vihora, ali sa smerom obrtanja suprotnom onom koga imamo u slučaju Karmanovog dvojnog niza vihora iza loše opticanih prepreka. S tačke gledišta obrazovanja sile potiska, dobijamo i ovde vihorni sistem koji se u potpunosti poklapa sa onim koga imamo kod mašućeg krila.

Na kraju, neobično blizak radu krmenog vesla je i mehanizam obrazovanja sile potiska pri radu repa riba. To znači da rep ribe radi u potpunosti isto kao krmeno veslo, pri čemu veoma složena izvijajuća kretanja repa možda predstavljaju vrlo fini mehanizam koji primorava odvajanje vihora samo pri najvećim otklonima repa. U prilog takvih zaključaka ide i zapaženo prisustvo obrazovanih vihora, i to prilično intenzivnih, iza ribe koja pliva.

Navedeni primeri ukazuju na izuzetnu važnost koju vihorna kretanja imaju u objašnjenju osnovnih mehaničkih pojava u prirodi. Ali u teorijskim razmatranjima nailazimo na prilično veliki broj još neistraženih pitanja. Pre svega nisu objašnjeni uslovi stvaranja vihora kao rezultata raspada odvojenog graničnog sloja; nesumnjivo da je taj zadatak najtešnje povezan sa drugim veoma složenim i neizučenim problemom o stabilnosti kretanja odvojenog graničnog sloja.

2. ANALIZA MEHANIZMA POJAVE DVOJNOG NIZA VIHORA

Poznato je da se pri opticanju raznih prepreka odvaja struja fluida duž brazde, to jest granične strujnice, što znači da se u neposrednoj blizini iza tela strujanje "prekida", pa se otuda ovakva strujanja nazivaju prekidna strujanja. Izmedju graničnih strujnica fluid obrazuje trag, za koji su još Helmholc [19] i Kirhof [24] pretpostavili da predstavlja relativno nepokretan fluid - "mrtvu vodu". U stvarnosti, trag iza tela može da ima veoma složena i raznolika kretanja. Mi ćemo se, u ovom radu, baviti isključivo slučajevima kada se u tragu obrazuju dvojni nizovi vihora, koji zatim odlaze niz struju na vrlo velika rastojanja. Da bi se dobila što potpunija slika ove pojave, ukratko će biti izložene sve vrste kretanja u tragu iza prepreke, koje su u ogledima zapažene.

Trag iza prepreke predstavlja jedan od najkarakterističnijih primera koji potvrdjuje fizičku važnost veličine Rejnoldsovog značioca [x]. Sa porastom veličine Rejnoldsovog značioca trag iza kružnog ili eliptičnog cilindra, ravne ploče,[+] višeugaone prizme ili drugih prepreka beskrajnog razmaha, pokazuje naglo izražene promene, koje je moguće, prema opštim osobinama razvrstati na sledeći način.

Pri vrlo malim vrednostima značioca Rejnoldsa (do 0,3) strujnice se zatvaraju iza ploče kao što se vidi na prvom Prantlovom snimku - slika 2, i simetrične su u odnosu na poprečnu osu prepreke.

---

[x] U Rejnoldsov značilac ulaze: beskrajnoj brzina, najveća širina prepreke i kinematička viskoznost fluida.

[+] U daljem opisu ograničićemo se samo na slučaj kada je prepreka ploča postavljena upravno na strujanje, i to samo stoga, što u tom slučaju tačke odvajanja strujanja ostaju nepomične tokom vremena i nalaze se na ivicama ploče. Kod ostalih vrsta prepreka tačka odvajanja menja svoj položaj tokom vremena čime se usložnjava mehanizam odvijanja pojave.

Kako Rejnoldsov značilac približno predstavlja odnos inercijskih i viskoznih sila pri kretanju fluida, to su pri vrlo malim Rejnoldsovim značiocima inercijske sile zanemarljive u poredjenju sa viskoznim. Stoga su delići fluida, koji obilaze oko ivice ploče, u stanju da, zahvaljujući velikim viskoznim silama, zaokrenu oko njih za 180°C.

U opsegu $0{,}5 < Re < 4$ dolazi do razvlačenja strujnica iza ploče usled povećanih inercijskih sila, a time do narušavanja simetrije u poprečnom pravcu.

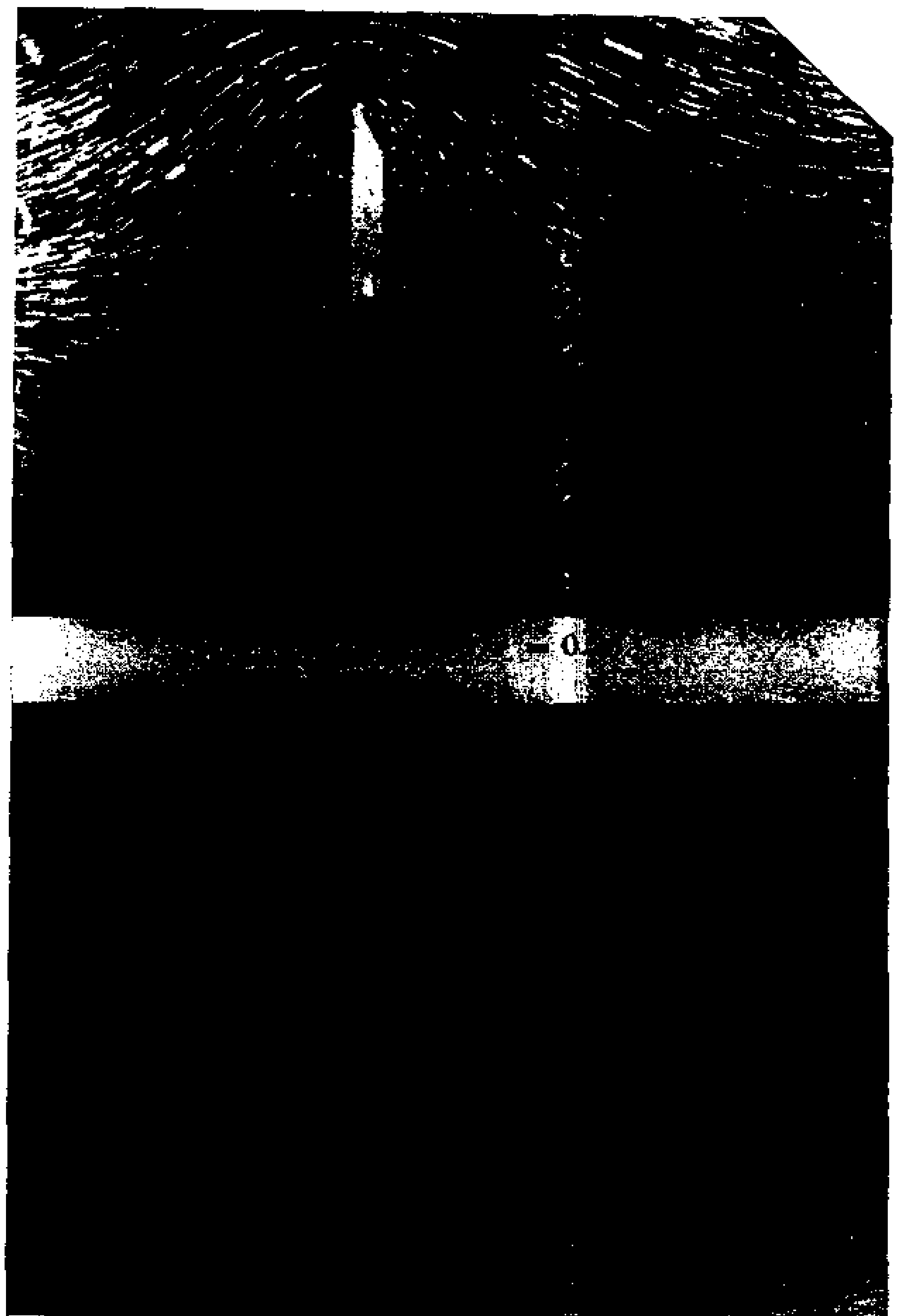


Fig. 62.—$wb/\nu = 10$.

Sl. 2. Strujanje iza ploče pri raznim značiocima Rejnoldsa (snimci Prantla [36e])

Kod još većih značilaca Rejnoldsa, i to $5 < Re < 40$, strujnice se još zatvaraju iza ploče ali se obrazuju dva ustaljena simetrična vihora (lepo se vide na drugom Prantlovom snimku - slika 2). U ovoj oblasti su inercijske sile svakog delića fluida postale dovoljno velike da dovedu do odvajanja strujnica. Kako je skretanje strujnica najveće oko ivica ploče, to je logično da tu dolazi do odvajanja strujanja. Prilikom odvajanja strujanja istovremeno se stvaraju dva vihora, po jedan iza svake ivice, i to sa suprotnim smerom obrtanja. Ukoliko je veći Rejnoldsov značilac u ovom opsegu brzina, utoliko su ovi ustaljeni vihori veći, izduženiji i postavljeni dalje iza ploče.

Posmatrajući ove vihore kao tačkaste vrtloge Fepl [14] je još 1913. godine izgradio teorijski potencijalni model ovakvih strujanja za slučaj da je prepreka kružni cilinder. Pored matematičke jednostavnosti, interesantne teorije stabilnosti, ovaj model daje strujnu sliku koja se odlično poklapa sa ogledima. Medjutim, ovaj model je ipak teorijski neosnovan. U stvarnom fluidu cirkulacija se iz vrtložnih središta rasplinjava, stvarajući umesto tačkastih vrtloga oblast vremenski promenljive zaviherenosti. U blizini središta vrtloga teorijski se dobijaju skoro beskrajno velike brzine, što dovodi, kao što je pokazao Miler [31b], do vrlo velikog neslaganja raspodele pritiska teorijski pretskazanih i ogledom dobijenih.

U daljem opsegu $40 < Re < 10^3 - 10^4$ dolazi do naizmeničnog nastajanja i odvajanja vihora sa jedne i druge strane ivice ploče, i to sa suprotnim smerom obrtanja (ovaj slučaj se vidi na trećem Prantlovom snimku - slika 2). Strujnice se više ne zatvaraju iza ploče, tako da se trag pruža beskonačno daleko ukoliko je fluid savršen.

Pre nego što predjemo na detaljno razmatranje ove oblasti naglasimo da pri daljem povećanju Rejnoldsovog značioca iznad gornjeg opsega, trag postaje sve više turbulentan, a otkrivanje odredjene periodičnosti u njemu sve teže (Roško [42d]).

Na kraju, pri Rejnoldsovim značiocima reda $10^5 - 10^6$ i većim, granični sloj oko ploče postaje turbulentan (Flahsbart [12b]), odvajanje strujanja kao da se odlaže pa se trag iza tela primetno sužava, ali strujnice se i dalje ne zatvaraju.

Prelaz sa slučaja ustaljenih vihora iza ploče na neustaljeni dvojni vihorni niz odigrava se uvek kod jednog odredjenog značioca Rejnoldsa, koji je karakterističan za ovu pojavu, i iznosi oko 40. Medjutim, ne predodredjuje samo Rejnoldsov značilac sliku strujanja u tragu iza tela. Tako, na primer, ogledima Kovasnajia [27] je pokazano da se karakteristični značilac Rejnoldsa, iza koga trag postaje periodičan, smanjuje pod uticajem turbulentnosti okolnog strujnog polja. On se takodje smanjuje, ako se prepreka učvrsti na opruge, tako da slobodne oscilacije budu u rezonanci sa periodom odvajanja vihora u tragu. Na taj način je Tom [47] dobio periodični trag već kod Re = 11.

S druge strane, ako je strujanje ograničeno paralelnim zidovima, tada karakteristični značilac Rejnoldsa raste do 50 ili čak i više. Rozenhed [41a] je teorijski pokazao, a Švabe [41a] ogledom potvrdio, da zidovi snižavaju kriterijum stabilnosti Karmana do veličine razmeštajnog odnosa $h/a = 0,1$ za kanal širine 2h.

Sa h se u celom radu označava poprečno rastojanje nizova, dok je "a" uzdužno rastojanje izmedju osa vihora ili vrtložnih niti.

Medjutim, očevidno je da je moguće isključiti iz razmatranja sve ove dopunske uticaje i posmatrati šta se dešava kada Rejnoldsov značilac postane veći od karakteristične vrednosti - 40. Analizu ćemo razdvojiti na dva dela:

a) nastajanje vihora,

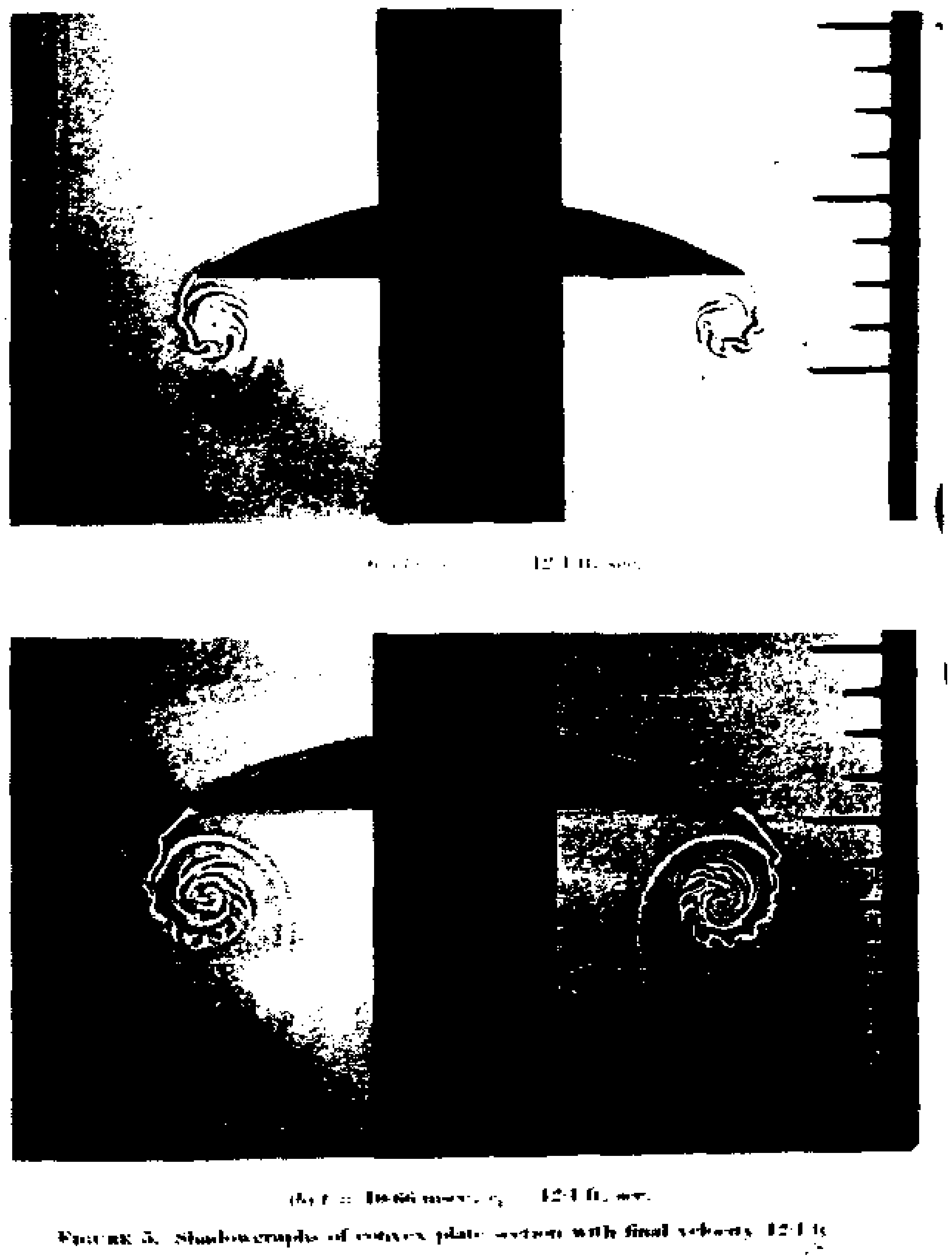
b) odvajanje vihora.

Čim se prevazidje karakteristični Rejnoldsov značilac, dolazi do odvajanja i otiskivanja niz struju ustaljenih vihora, a posle toga do naizmeničnog nastajanja i odvajanja vihora.

Kada bi ploča bila postavljena tačno pod pravim uglom, kada bi obe polovine prednje strane ploče bile savršeno simetrično obradjene i kada bi svi, makako mali bili, poremećaji u strujanju bili apsolutno simetrični, tada bi se moglo očekivati ponovno stvaranje para vihora, koji bi se, kada dostignu svoju kritičnu veličinu, otiskivali niz struju. Medjutim, kako je u prirodi savršena simetričnost malo verovatna, to se ne može ni očekivati njeno ostvarivanje. U zavisnosti od niza nesimetričnih realnih mogućnosti, jedna od ivica ploče dobija, makar kako bilo malo, preimućstvo, koje je odlučujuće za stvaranje novog vihora. Stoga se mehanizam nastajanja ovog i sledećih, nazvaću ih neustaljenih vihora, suštinski razlikuje od prvog para nastalih ustaljenih vihora.

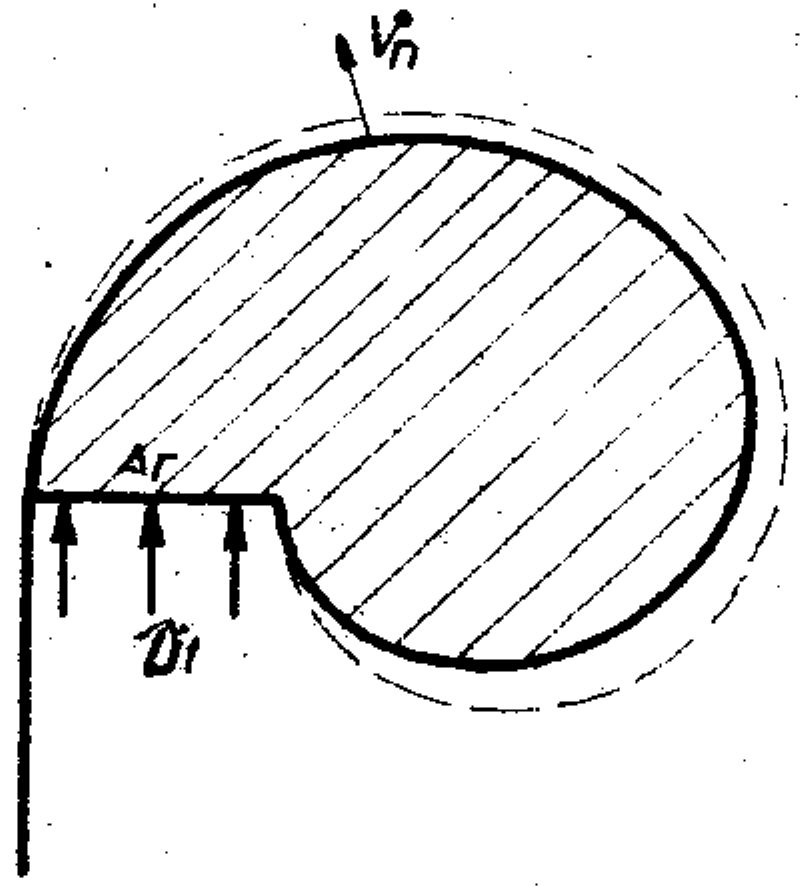
Posmatrajmo nastalu situaciju posle odvajanja vihora. Neposredno iza ivice ploče, usled velikih inercijskih sila, dolazi do odvajanja strujanja, koje bi u savršenom fluidu dovelo do nastajanja mirne oblasti fluida omedjene graničnim strujnicama, kako to predvidja Helmholc-Kirhofova teorija. Ali usled viskoznosti stvarnog fluida, diskontinuitet - skok brzina pri prelazu iz mirnog fluida na graničnu strujnicu je praktično neodrživ, već se obrazuje vrtložni sloj. Delići fluida,koji se nalaze u vrtložnom sloju, produžavaju svoj put po inerciji pravcem granične strujnice, ali pored toga, neprekidno od trenutka odvajanja od tela, vrtložni sloj je izložen indukovanim brzinama koje ga zaokreću i tako namotavaju u spiralu. Ove se veoma lepo vidi na snimcima Pirsa [34] - slika 3 , gde je specijalnom oglednom tehnikom prikazano vidljivim namotavanjem vrtložnog sloja u spiralu sa obe strane ploče. Usled periodičnosti u osnovnom strujanju vidljivo je obrazovanje malih vrtložnih jezgara duž spiralne trake, kao posledica nestabilnosti vrtložnog sloja.

Vrtložni sloj, takodje, indukuje brzine u svakoj tački strujnog polja, što se odražava u usisavanju fluida iz mirne oblasti u spiralu (na slici 3 se vidi kao svetla linija). To znači da mirni fluid iz oblasti iza ploče, čiji je pokretač potpritisak kod ivice, ima takodje spiralno strujanje. Dakle, strujanje koje nastaje od samog početka stvaranja vihora ima u celoj oblasti radijalnu sastavnicu brzine.



Sl. 3. Spiralno namotavanje vrtložnog sloja iza ivica ploče (snimak Pirsa [34])

Svako spiralno strujanje uvek nastaje kao rezultat slaganja strujanja oko ponora i vrtloga, što znači da su i u ovom slučaju obostrano prisutni. Postavlja se pitanje: kako objasniti postojanje ponora u ovom slučaju kada nema sastavnice brzine u pravcu ose vihora? Kako jednačina neprekidnosti mora biti bezuslovno zadovoljena, to preostaje jedino da se pretpostavi da se spiralni vrtložni sloj u toku vremena ne kreće po jednoj nepokretnoj spiralnoj liniji, već po familiji spiralnih linija koje se šire i razmotavaju za iznos količine fluida koji udje izmedju dva navoja spirale iz mirne oblasti iza ploče (slika 4). Dakle, istovremeno sa namotavanjem vrtložnog sloja u spiralu dolazi do nastanja vihornog kretanja obuhvaćenog ovom spira-



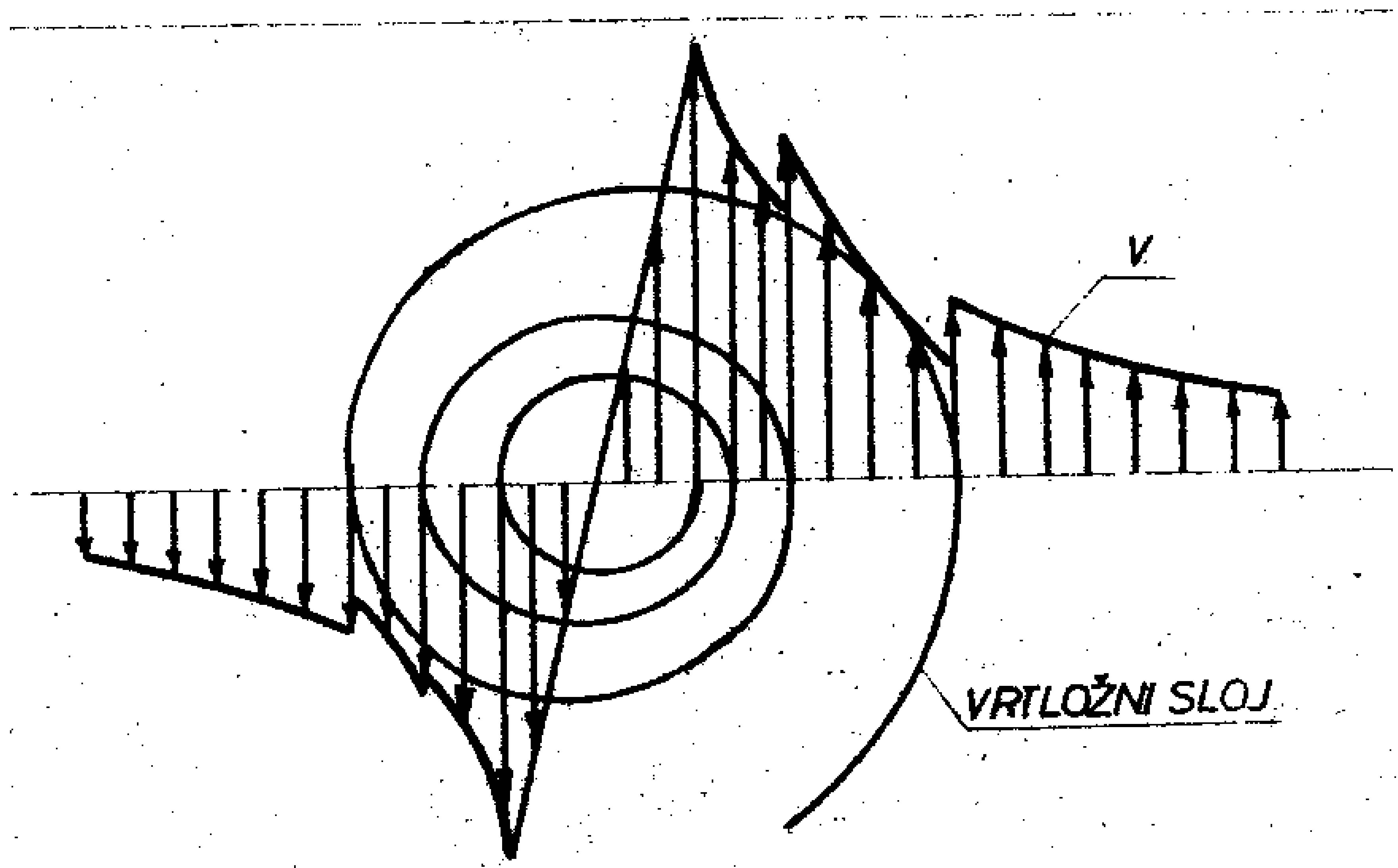
JEDNAČINA NEPREKIDNOSTI:

$$\int_{r_1}^{r_2} v_l \, \Delta r = \int_{\varphi-2\pi}^{\varphi} v_n \, dS$$

$$\Delta r = r_2 - r_1$$

Sl. 4. Shema narastanja spirale

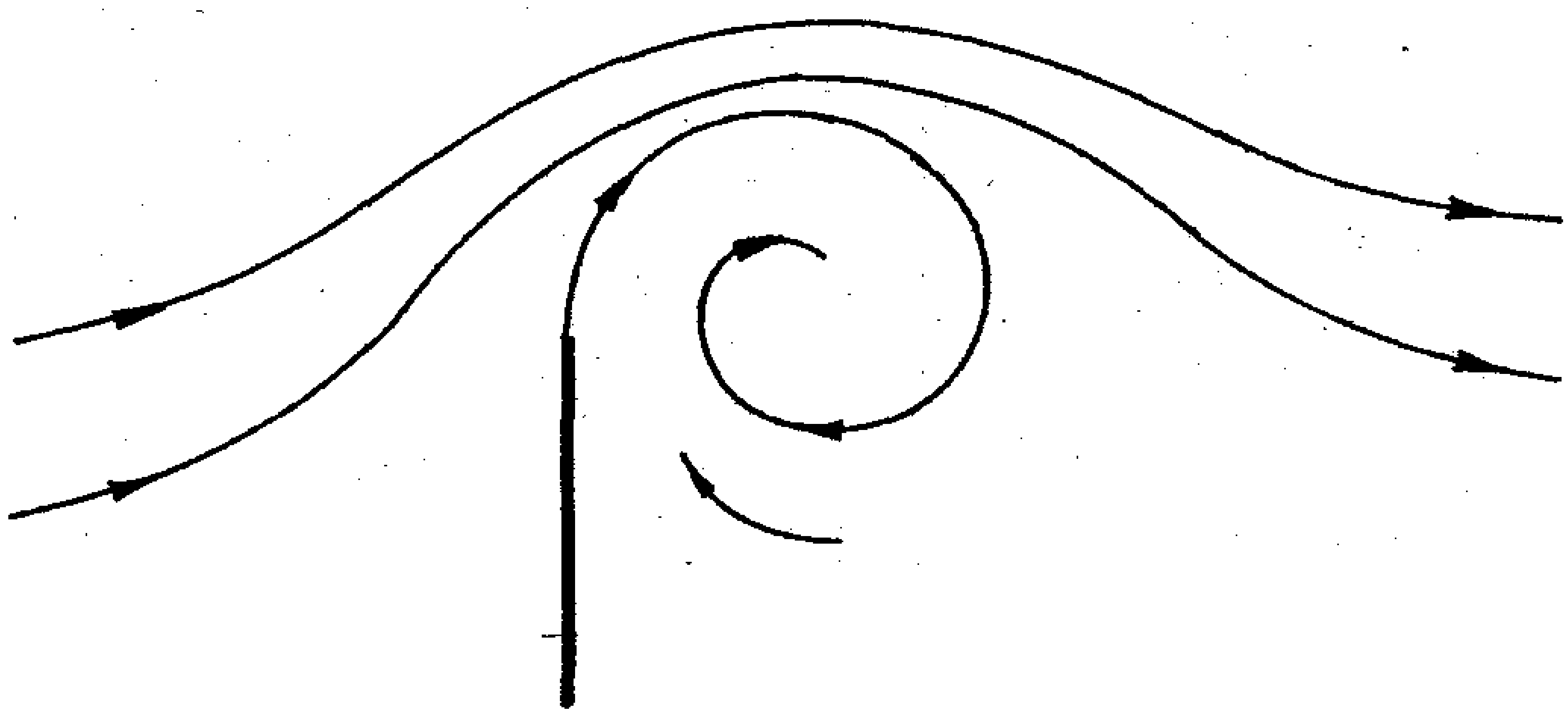
lom. Očevidno je da strujanje u jezgru vihora koji narasta, nije osnosimetrično, ali da ukoliko su namotaji spirale gušći utoliko se približavamo kružnom kretanju, koje, gledano teorijski, postoji samo u neposrednoj okolini središta vihora (slika 5).



Sl. 5. Raspodela obimne brzine u spiralnom vrtložnom sloju (Bee 6b))

Na taj način, neposredno iza faze nastajanja nastupa kontinualno faza narastanja vihora. Bočnim širenjem i "uticanjem" fluida u njega, viher narasta, i kao posledicu izaziva medjusobno sužavanje sused-

nih strujnica upravno na njihov pravac (slika 6).



Sl. 6. Shema narastanja vihora

Ovo prouzrokuje povećanje lokalne brzine delića fluida u njima. Povećanje lokalne obimne brzine znači povećanje inercijskih sila u graničnoj strujnici. Sa povećanjem sila inercije smanjuje se mogući poluprečnik krivine spiralne strujnice posle prolaska ivice ploče, a ovo dovodi do daljeg povećanja prečnika vihora. Medjusobni uticaj svih nabrojanih faktora dovodi neprekidno do narastanja vihora i povećanja njegove cirkulacije.

S druge strane, potrebna količina fluida, koja je neophodna za narastanje vihora, postaje sve veća ukoliko su njegove dimenzije veće. Sa linearnim povećanjem vihora potrebna količina fluida raste sa kvadratom, pa ova jedino predstavlja ograničenje u veličini vihora.

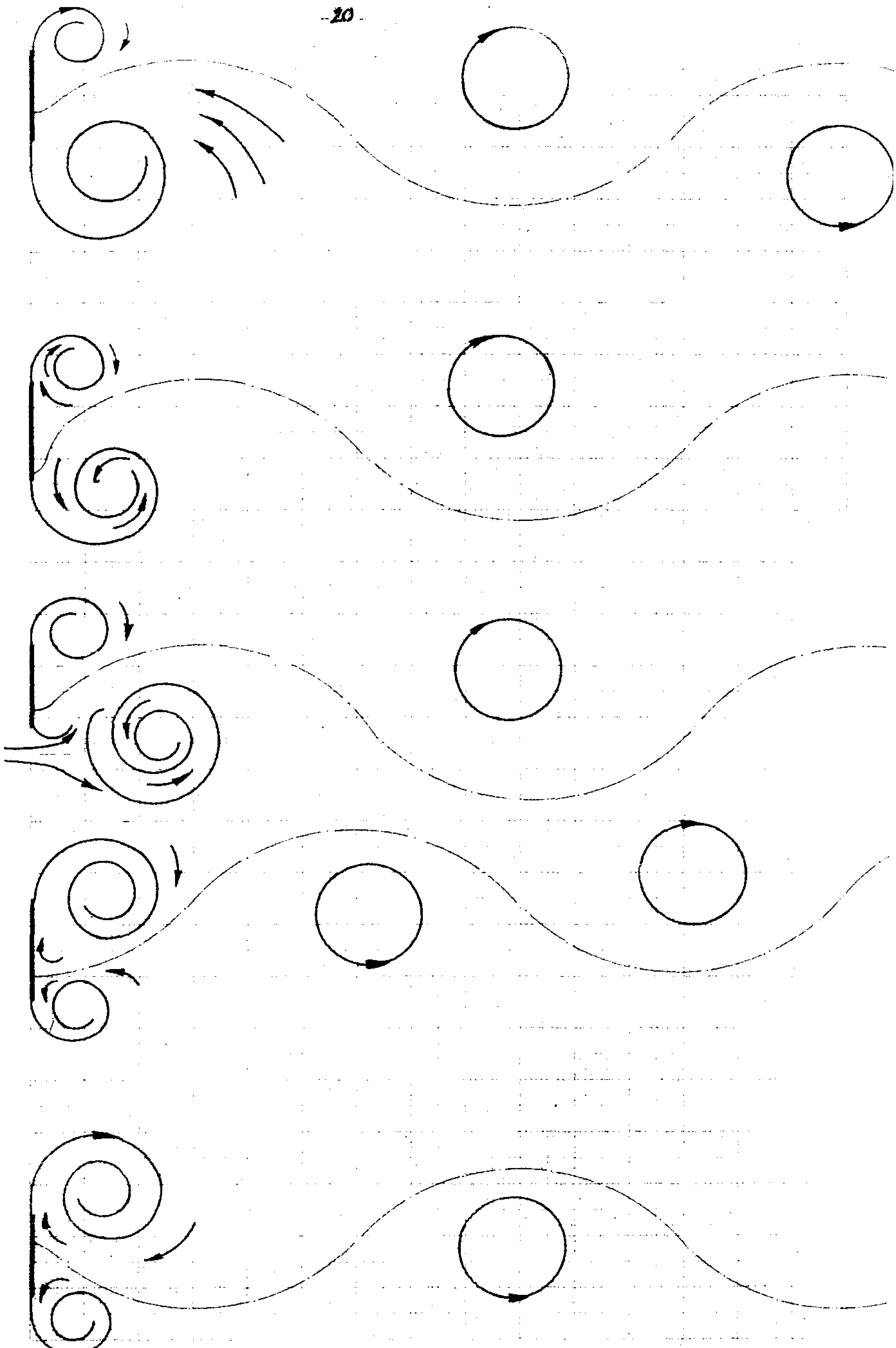
U dosadašnjem opisu je apstrahovan vihor na suprotnoj ivici ploče radi uprošćavanja fizičke slike zbivanja. Medjutim, za odvijanje mehanizma naizmeničnog odvajanja vihora, bitno je da se stvaraju i na jednoj i na drugoj ivici ploče po jedan vrtložni sloj, koji usled suprotnosmerne zavihorenosti, dovode prilikom namotavanja oko svojih slobodnih krajeva, do stvaranja vihora koji se obrću u suprotnim smerovima. U toku narastanja ovih vihora, u njih ulazi izvesna količina fluida, ali pri tom znatno više u veći vihor. Oba vihorna jezgra su medjusobno odeljena zamišljenom strujnom površinom, koja razdvaja fluid koji utiče u jedan vihor od onoga koji utiče u drugi vihor. (Na slici 7 ovo je prikazano linijom crta-tačka.)

Kako posmatramo ravansko strujanje, to se ova strujna površina vidi kao linija, koja uvek na nekom mestu upravno dodiruje ploču, a izgleda kao da je vezana za površinu ploče. Ona predstavlja razdeonu liniju prijanjanja mirnog fluida prilikom njegovog ustrujavanja u spirale. Stoga ćemo ovu liniju ubuduće nazivati "linija prijanjanja". Ona se tokom vremena udaljava od jedne ivice - linije odvajanja, a približava drugoj, na drugoj ivici ploče. Kako je širina ploče konačna, na kraju dolazi do toga da linija prijanjanja jačeg ili bližeg vrtložnog sloja preseče liniju odvajanja drugog vrtložnog sloja na drugoj strani. Ovo tada prouzrokuje nepostojanost i nemogućnost u "hranjenju" drugog vihora, usled čega se vihor otiskuje niz struju, a ovo opet dovodi, do obrazovanja novog namotavajućeg spiralnog vihornog jezgra. Novo vihorno jezgro svojim narastanjem, budući da je bliže površini ploče, potiskuje liniju prijanjanja natrag na drugu stranu ka drugoj ivici, gde se usled toga, ponavlja sličan proces.

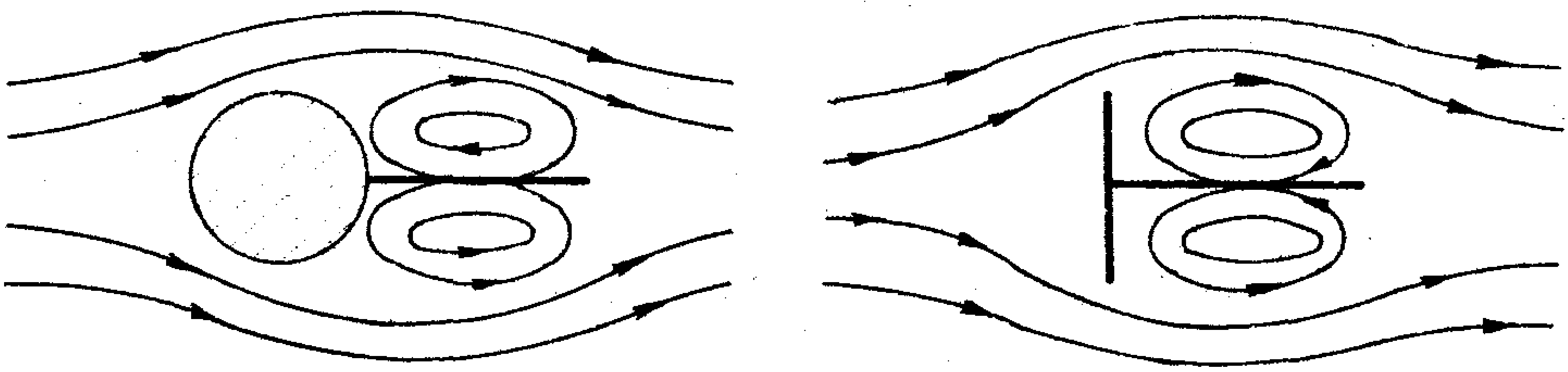
Ovakav mehanizam "šetanja" linije prijanjanja iza ploče stvara potrebnu periodičnost za odvajanje nastalih vihora, i može da dejstvuje i u slučajevima kada se zbog simetrije očekuje ustaljeno strujanje.

Rezultujuće strujanje u tragu iza ploče je dvojni vihorni niz, pojava koja je pored sve složenosti ovakvog mehanizma nastajanja, izvanredno stabilna i regularna.

U prilog ovakvog tumačenja mehanizma odvajanja vihora od tela, kao i dokaz da periodičnost u tragu ima svoj početak u strujanju sasvim blizu zadnje strane tela, nalazimo u ogledima Birmena [3] koji je pokazao da se dodavanjem ravne ploče iza kružnog cilindra ili upravno na ploču (slika 8) duž pravca beskrajnosne brzine, u potpunosti izgubila bilo kakva periodičnost u tragu, i to u celom opsegu značioca Rejnoldsa iza karakterističnog. Istovremeno se pokazalo da dolazi do



Sl. 7. MEHANIZAM ODVAJANJA VIHORA



Sl. 8. Postavljanje pregradjivača iza prepreke (Birman [3])

pada otpora za oko 40%.

Ova idejna koncepcija objašnjenja pojave iskorišćena je u matematičkoj interpretaciji problema.

3. TEŠKOĆE PRI PRIMENI NAVIJE-STOKSOVIH JEDNAČINA ZA SLUČAJ OPŠTEG VIHORNOG STRUJANJA

Sa matematičke tačke gledišta, opšti zadatak hidrodinamike viskozne tečnosti svodi se na rešavanje sistema simultanih parcijalnih diferencijalnih jednačina drugoga reda, poznatih pod imenima Navije-Stoksa. Rešenje ovoga sistema diferencijalnih jednačina pri graničnim i početnim uslovima unapred datim, u opštem obliku do sada ne postoji. U istom stanju nalazi se i pitanje jedinosti rešenja ovoga sistema jednačina.

Osnovna teškoća, kako u opštem istraživanju postojanja i jedinosti rešenja, tako i u konkretnom rešavanju tih jednačina za postojeće najprostije slučajeve kretanja viskoznog fluida sadržana je u nelinearnosti osnovnih parcijalnih diferencijalnih jednačina kretanja. Olakšavajuća pretpostavka o postojanju potencijala brzine je za slučaj viskoznog fluida savršeno nemoguća. Usled toga, svaki pojedini problem kretanja viskoznog nestišljivog fluida uvek ostaje nelinearan*, pa se novi slučajevi strujanja nikada ne mogu dobiti uz pomoć prostog

* Ukoliko se ne prihvate pretpostavke Stoksa i Ozena o kojima će dalje biti govora.

nja već poznatih strujanja. S druge strane, opšta metoda nalaženja rešenja nelinearnih diferencijalnih jednačina ne postoji. Iz tih razloga, pri rešavanju strujanja viskozne tečnosti, moguće je usvojiti jedan od dva sledeća načina:

a) Pretpostaviti od samog početka oblik putanja i strujnica svih delića tečnosti i obrazovati partikularna rešenja koja odgovaraju tim pretpostavkama i graničnim uslovima,

b) Pribegavati približnim metodama koje dozvoljavaju, u ovoj ili onoj meri, da se uproste jednačine i prilagode karakteru specijalnih tipova konkretnih zadataka.

Kako je pretpostavljanje oblika putanja od samog početka moguće samo u ograničenom broju slučajeva, to je prvi način veoma ograničen svojim mogućnostima, dok su mogućnosti drugog načina - uprošćavanje jednačina - mnogo šire. Većina konkretnih zadataka o kretanju viskozne tečnosti rešena je na osnovu približnih jednačina kretanja, koje se uglavnom izvode iz pretpostavke o veoma malim ili veoma velikim značiocima Rejnoldsa. Medjutim, s obzirom da se pojava vihora u tragu iza tela odigrava pri značiocima Rejnoldsa koji se ne mogu smatrati ni malim ni velikim, to su sve dosadašnje približne teorije neprimenljive.

Berker [4] daje enciklopedijski pregled svih dosada rešenih slučajeva Navije-Stoksovih jednačina, i zanimljivo je da ne postoji ni jedno analitičko rešenje koje bi moglo da zadovolji uslove u tragu iza tela. Čak ni numeričke metode rešavanja (Tom [47]) ne opisuju ono što se dešava iza tela.

Kako se pojava nastajanja dvojnog niza vihora u tragu iza tela javlja pri srednjim značiocima Rejnoldsa $80 < Re < 1000$, to je logično predpostaviti da je uticaj viskoznosti u priličnoj meri dominantan. S druge strane, kako je narastanje i odvajanje vihora iza tela izrazito periodična pojava, to je neophodno razmatrati neustaljeno stanje. Jedino uprošćavanje jednačina potiče usled toga što se pojava može smatrati dvodimenzijskom, pa zato iščezavaju svi članovi koji sadrže ili se odnose na koordinatu "z". Ako usvojimo polarni koordinatni sistem, čije je ishodište u središtu vihora iza tela, tada Navije-Stoksove jednačine imaju sledeći oblik:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right), \qquad 3.1$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right). \qquad 3.2$$

Jednačina neprekidnosti je

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} = 0. \qquad 3.3$$

Granični i početni uslovi su sledeći za osamljeni vihor:

za $t = 0$ je $v_r = 0$ i $v_\theta = 0$; za $r = 0$,

za $r \to \infty$ je $v_r = 0$ i $v_\theta = 0$. 3.4

Na osnovu izvedenih razmatranja o mehanizmu nastajanja vihora zaključeno je da strujanje ~~zavisi od polarnog ugla~~. Ovo se, medjutim, može takodje lako proveriti rešavanjem gornjeg sistema jednačina uzimajući da je $v_r = 0$. Smenom u jednačinu 3.3 vidi se da obimna brzina v_θ ne zavisi od polarnog ugla θ . Ali, kako je pri nastajanju vihora u gornjoj polovini lokalna brzina uvek veća od one na donjoj polovini to se stoga nastajanje vihornog strujanja ne može opisati osnosa nepromenljivom brzinom po istom krugu.

Ako pretpostavimo da strujanje nije kružno već eliptično, tada transformacijom Navije-Stoksovih jednačina u eliptični koordinatni sistem, i njihovim rešavanjem uz uslov da je hiperbolička sastavnica brzine nula, dobijamo opet, potpuno analogno kružnom kretanju, rezultat koji ukazuje na nemogućnost ispunjavanja graničnih uslova pri takvim strujnicama.

Stoga ćemo pokušati da dobijemo vihorno strujanje sa promenljivom obimnom brzinom na istom krugu uopštavanjem poznatog rešenja raspodele brzina za slučaj osamljenog vihora koji se difuzno širi u obliku

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right] \cdot G(\theta), \qquad 3.5$$

gde je za $G(\theta)$ usvojena najprostija periodička funkcija - trigonometrijska funkcija. Za ovaj slučaj dobijena je radijalna sastavnica brzine iz jednačine neprekidnosti. Smenom ovako dobijenih v_r i v_{θ} u Navije-Stoksove jednačine pokazalo se da one nisu identički zadovoljene.

Ovaj rezultat ukazuje da je rešenje osamljenog vihora jedino rešenje Navije-Stoksovih jednačina, i da se uopšteni oblik vihornog kretanja ne može tražiti u obliku razdvojenih promenljivih.

Kako nam je zasada nemoguće da unapred pretpostavimo oblik funkcije $v_{\theta}(r,\theta,t)$, a s obzirom da ne postoji opšta metoda za rešavanje, to nismo u mogućnosti da rešimo Navije-Stoksove jednačine za slučaj neustaljenog nastajanja vihornog kretanja.

4. UVODJENJE TEORIJSKOG MODELA VRTLOŽNOG SLOJA

U razvoju hidro i aeromehanike, za poslednjih pola stoleća, zapaža se ogroman značaj metoda zasnovanih na primeni približnih shema - teorijskih modela, koji predstavljaju uprošćenu fizičku sliku pojave. Uspesi i napredak u proučavanju pojava nisu dobijeni povećavanjem tačnosti i razvijanjem čisto matematičkih metoda istraživanja, nego primenom originalne fizičke koncepcije, koja dozvoljava, sa tačnošću dovoljnom za praksu, zamenu posmatrane pojave uprošćenim teorijskim modelom.

Mada se teorijski modeli, po nekim pretpostavkama, čak suštinski razlikuju od stvarne fizičke slike, oni u pojedinim slučajevima daju rešenja koja u potpunosti zadovoljavaju potrebe savremene tehnike.

Navešćemo samo nekoliko danas klasičnih teorijskih modela. Kuta i Žukovski su u teoriji uzgonskih površina uveli model vezanog vrtloga, koji je omogućio Prantlu da postavi teoriju krila konačnog razmaha sa modelom vezanih i slobodnih vrtloga. Pri tome je zanimljivo uočiti da se teorijski model neprekidne vrtložne površine, koja polazi sa zadnje ivice krila konačnog razmaha, nikada ne opaža u stvarnosti, jer se usled nestabilnosti ona odmah namotava u slobodne vrtloge koji se pružaju od ivice krila do beskonačnosti.

Isti takav karakter ima i teorijski model prekidnog strujanja tečnosti, koji su postavili Kirhof i Helmholc. Granične strujnice - brazde, koje se odvajaju iza opticanog tela, omedjuju oblast mirnog fluida koja se prostire do beskonačnosti. U stvarnosti, medjutim, ovo nikada nije slučaj, jer usled viskoznosti dolazi iza tela do veoma složenih kretanja koja dovode do potpuno drugačije slike strujanja. U izvesnom opsegu značilaca Rejnoldsa dolazi do naizmeničnog stvaranja vihora, koji iza tela obrazuju trag u vodi dvojnog niza.

Medjutim, po teoriji Kirhofa i Helmholca, u tragu iza tela fluid je nepokretan i nema nikakvih vihornih kretanja. Po osnovnoj pretpostavci njihove teorije, fluid je neviskozan, što znači da ne dolazi do trenja izmedju granične strujnice i mirne zone pored nje. Ispitivanja Fejdža i Johansena [11)] pokazuju da je i pored toga što je viskoznost veoma mala, veličina izmerenih otpora ploča je za oko 2,3 puta veća od teorijski sračunate vrednosti. Iz tog razloga je njihov teorijski model praktično neupotrebljiv.

Razlog za ovako veliko odstupanje izmedju teorije i ogleda leži u nestabilnosti postojanja granične strujnice, kao i nemogućnosti njene nastajanja pri opticanju ravne ploče u stvarnom fluidu. Brazda predstavlja diskontinuitet brzina, jer se brzina skokovito menja pri prolazu iz mirne zone kroz brazdu. Kod stvarnog fluida, makako njegova viskoznost bila mala, ona deluje tako da pokreće i ubrzava deliće fluida koji se nalaze neposredno uz brazdu u mirnoj zoni. Ovo je posledica gubitka kinetičke energije delića u brazdi koji se usporavaju.

Teorijski model koji opisuje diskontinualni skok brzina jeste trag omedjen vrtložnim slojem. Znači, da bi brazda u teoriji Kirhofa i Helmholca trebalo da bude vrtložni sloj istog geometrijskog oblika. Medjutim, vrtložni sloj sa promenljivom ~~brz~~krivinom, prema teoremi Helmholca, nije stabilan već se namotava u spiralu kao što je računski pokazao Rozenhed [41b]. Na osnovu toga moguće je postaviti hipotezu da vihorno strujanje, koje se obrazuje iza prepreke, nastaje usled spiralnog namotavanja vrtložnog sloja koji se stvara iza ivica prepreke.

Od trenutka odvajanja iza tela vrtložni sloj se kreće brzinom koja je po veličini i pravcu sastavljena od dveju kvalitativno različitih komponenata. Jedna od njih nastaje usled brzina u susednim strujnicama oko opticanog tela i zavisi od beskrajnosne brzine. Njene ćemo komponente u pravcu koordinatnih osa označiti sa U i V. Druga od njih nastaje kada kontinualni vrtložni sloj razbijemo na diskretan niz pojedinačnih vrtloga. Tada svi vrtlozi indukuju odgovarajuće brzine u posmatranoj tački vrtložnog sloja. Ako posmatramo "i"-ti vrtlog, onda svi ostali "j" indukuju komponente brzine u_{ij} i v_{ij}. Dakle, imamo sistem jednačina kretanja "i"-tog vrtloga u obliku

$$u_i = U(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j, \Gamma_j) , \qquad 4.1$$

$$v_i = V(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^{n} v_{ij}(x_i, y_i, x_j, y_j, \Gamma_j) . \qquad 4.2$$

Leva strana ovih jednačina predstavlja brzinu uočenog "i"-tog vrtloga, pa se može napisati i u diferencijalnom obliku

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad 4.3$$

$$v_i = \frac{dy_i}{dt} \qquad 4.4$$

Postupak odredjivanja prvih članova na desnoj strani jednačina 4.1 i 4.2 izvešće se detaljno u sledećem poglavlju, a uz pomoć pretpostavke da je izvan i unutar vrtložnog sloja strujanje takvo, kao da umesto vrtložnog sloja imamo razne granične strujnice. Na taj način je moguće, za poznate koordinate x_i i y_i, odrediti veličinu resultujuće brzine W kao

$$W = F(x_i, y_i) \qquad 4.5$$

Komponente brzine W se dobijaju u zavisnosti od oblika vrtložnog sloja. Pravac brzine se poklapa sa pravcem tangente na vrtložni sloj, a njen koeficijent pravca je dat u obliku

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy_i}{dx_i} \qquad 4.6$$

ili u diferencnom obliku

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \qquad 4.7$$

Ako se poznatim trigonometrijskim relacijama izrase kosinus i sinus preko tangensa tada komponente brzine W glase

$$U = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})\, W}{\left[(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2\right]^{1/2}} \qquad 4.8$$

$$V = \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})\, W}{\left[(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2\right]^{1/2}} \qquad 4.9$$

Komponente indukovane brzine usled "j"-tog vrtloga su

$$u_{ij} = \frac{-\Gamma_j\,(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \qquad 4.10$$

$$v_{ij} = \frac{\Gamma_j (x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \qquad 4.11$$

gde je jačina vrtloga Γ_j funkcija i vremena ako je fluid viskozan. Smenom ovih veličina u jednačine 4.1 i 4.2 dobija se

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{F(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}{\left[(x_{i+1}-x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i, x_j, y_i, y_j, t)(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \qquad 4.12$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{F(x_i, y_i)\,(y_{i+1} - y_{i-1})}{\left[(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_{i+1})^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i, x_j, y_i, y_j, t)(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \qquad 4.13$$

Ako se odabere neki interval vremena Δt, dobija se pomeranje Δx_i svakog vrtloga. Tada se iz jednačina 4.12 i 4.13 dobijaju jednačine pomeranja vrtloga "i"

$$\Delta x_i = \Delta t \left\{ \frac{F(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}{\left[(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i, y_i, x_j, y_j, t)(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right\} \qquad 4.14$$

$$\Delta y_i = \Delta t \left\{ \frac{F(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_{i-1})}{\left[(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(x_i, y_i, y_j, x_j, t)(x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right\} \qquad 4.15$$

gde su: $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$.

Novi položaj svih vrtloga ovoga sistema dobija se iz jednačina

$$x_i + \Delta x_i = x_{i+1} \, . \tag{4.16}$$

$$y_i + \Delta y_i = y_{i+1} \, . \tag{4.17}$$

Ovaj sistem diferencnih jednačina moguće je rešavati metodom uzastopnih približavanja. Shematski postupak je sledeći:

U trenutku $t = 0$ neka imamo samo jedan vrtlog $i = j = 1$. Usvojimo neki mali interval vremena Δt i pomoću jednačina 4.14 i 4.15 odredimo pomeranje vrtloga za ovaj interval vremena. Smenom u jednačine 4.16 i 4.17 dobija se novi položaj vrtloga "2". Ove nove koordinate x_2 i y_2 uvrstimo u jednačine 4.14 i 4.15, s time da na predjašnjem mestu opet imamo vihor koga opet označavamo sa "1". On se opet stvorio na početku vrtložnog sloja. Ovakav postupak se uzastopno ponavlja "n" puta, gde ovaj broj odredjuje ukupnu dužinu vrtložnog sloja koji se obrazovao u vremenu

$$t_o = n \Delta t \, . \tag{4.18}$$

Ovakav sistem diferencnih jednačina, koji se rešava uzastopnim ponavljanjem istih računskih radnji, je pogodan za programiranje i rešavanje na cifarskim elektronskim računarima, gde se veća tačnost rešenja može ostvariti izborom vrlo malog intervala vremena Δt.

Sa matematičke tačke gledišta, moguće je postaviti i jednačine kretanja kontinualnog vrtložnog sloja, bez razbijanja na sistem diskretnih vrtloga. Potrebno je samo umesto jačine pojedinačnog vrtloga Γ_j uvesti jačinu cirkulacije po jedinici dužine luka vrtložnog sloja G, a po jednačini

$$\int_{s_1}^{s_2} G \, ds = \Gamma_j \, . \tag{4.19}$$

Sada umesto koordinata x_i i y_i uvedimo tekuće koordinate x i y, a umesto koordinata položaja vrtloga x_j i y_j tekuće koordinate $\xi(s)$ i $\eta(s)$, pa se za brzine indukovane vrtložnim slojem dobijaju umesto suma integrali

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^S \frac{G(s,t)[y-\eta(s)]\,ds}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.20$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^S \frac{G(s,t)[x-\xi(s)]\,ds}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.21$$

što smenom u jednačine 4.1 i 4.2 daje

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(x,y)}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^S \frac{G(s,t)[y-\eta(s)]\,ds}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.22$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{F(x,y)\frac{dy}{dx}}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^S \frac{G(s,t)[x-\xi(s)]\,ds}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.23$$

Dobijen je sistem simultanih nelinearnih diferencijalnih jednačina koji se može odmah formalno integraliti. Ako su granice integracije u opsegu $0<t<t_0$ tada dobijamo

$$x = \int_0^{t_0} \frac{F(x,y)\,dt}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0}\int_0^S \frac{G(s,t)[y-\eta(s)]\,ds\,dt}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.24$$

$$y = \int_0^{t_0} \frac{\frac{dy}{dx}F(x,y)\,dt}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{t_0}\int_0^S \frac{G(s,t)[x-\xi(s)]\,ds\,dt}{[x-\xi(s)]^2+[y-\eta(s)]^2} \qquad 4.25$$

Dobijeni sistem nelinearnih integro-diferencijalnih jednačina, u koliko se može rešiti, daje posle eliminacije parametra - vreme t_0 - oblik vrtložnog sloja u obliku

$$y = f(x) \qquad 4.26$$

Očevidno je da će se za razne vrednosti parametara t_0 dobiti razni oblici vrtložnog sloja.

Kako za ovakav sistem jednačina ne postoji opšta metoda rešavanja, a u svakom pojedinom slučaju račun je veoma komplikovan, rešenje ćemo potražiti grafičkim putem.

NAMOTAVANJE VRTLOŽNOG SLOJA IZA PLOČE - GRAFIČKO REŠENJE

Pretpostavimo da u izvesnom trenutku vremena ($t = 0$) počinje ...ajno kretanje ploče beskrajnosnom brzinom V_∞, i tada sa ivica ...če započinje da se odvaja vrtložni sloj. Njegova tangentna brzina ...tanja jeste poluzbir tangentnih brzina neposredno iznad i ispod ...nične strujnice, dok se normalne komponente brzine moraju* biti is... sa obe strane vrtložnog sloja. Kako je tangentna brzina duž granič... strujnice - brazde konstantna i ravna beskrajnosnoj brzini, dok je ... mirnoj zoni nula, to je tangentna brzina kretanja vrtložnog sloja ...lovina beskrajnosne brzine. Napominjemo da se ovakva strujna slika ... dogadja samo na početku kretanja, već se u stvarnosti dogadja sva... put neposredno iza odvajanja vihora.

Nastali vrtložni sloj polazi od ivice ploče u prvom trenutku ... duž granične strujnice. Ali, ovakav konačni vrtložni sloj in...uje brzine pri daljem kretanju koje neprekidno utiču kako na njegov ...lik tako i na njegovu brzinu. Radi mogućnosti grafičkog rešavanja ...datka, pretpostavićemo da se vrtložni sloj sastoji iz niza vrtloga, ...ja je jačina srazmerna medjusobnom rastojanju. Znači kontinualni vrtlož... sloj zamenjujemo diskretnim vrtlozima.

Odredjivanje jačine diskretnih vrtloga, sa kojima je zamenjen ...rtložni sloj, izvedeno je na sledeći način. Ako se predpostavi da je ...rina vrtložne trake zanemarljivo mala, a da su brzine na suprotnim ...ranama V_1 i V_2, tada cirkulacija oko pravougaonika, čija je duža ...rana element δs, vrtložnog sloja, ima sledeći oblik

$$\Gamma = (V_1 - V_2)\delta s. \qquad 5.1$$

kako je ova dužina ujedno i pomeranje vrtložnog sloja to imamo

$$\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{V_1 + V_2}{2} \qquad 5.2$$

...se smenom u jednačinu 5.1 dobija

*...iskontinuitet sloja se očituje samo kod tangentnih brzina, ...k je na primer u slučaju kosih udarnih talasa obrnuto.

$$\Gamma = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) \delta t \quad 5.3$$

Brzina indukovana ovim vrtlogom u bilo kojoj tački polja odredjuje se po obrascu

$$V_i = \frac{\Gamma}{2 r_i \pi} \quad 5.4.$$

Jednačine granične strujnice u parametarskom obliku prema teoriji Helmholca i Kirhofa glase (Kočin [26b], I, str. 328)

$$x = \frac{1}{V_\infty} \left[\sqrt{\varphi(\varphi - c)} - c \ln \frac{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi - c}}{\sqrt{c}} \right], \quad 5.5$$

$$y = \frac{h}{2} + \frac{2\sqrt{c}}{V_\infty} (\sqrt{\varphi} - \sqrt{c}), \quad 5.6.$$

gde je $c = \frac{h V_\infty}{\pi + 4}$, φ – potencijal. 5.7

Iz ovih jednačina se neposredno dobija i koeficijent pravca tangente na graničnu strujnicu na proizvoljnom mestu

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c}{\varphi - c}} \quad 5.8$$

Uvedimo nove parametarske veličine u obliku

$$c = H V_\infty \quad 5.9$$

$$\varphi = \Phi V_\infty \quad 5.10$$

gde sada H i Φ imaju dimenzije dužine. Prema jednačini 5.7 veza izmedju H i h je sledeća

$$H = \frac{h}{\pi + 4} \quad 5.11$$

Smenom 5.9 i 5.10 u 5.5 i 5.6 dobija se

$$\frac{x}{H} = \sqrt{\frac{\Phi}{H}\left(\frac{\Phi}{H} - 1\right)} - \ln\left(\sqrt{\frac{\Phi}{H}} + \sqrt{\frac{\Phi}{H} - 1}\right), \qquad 5.5a$$

$$\frac{y}{H} = \frac{\pi + 4}{2} + 2\left(\sqrt{\frac{\Phi}{H}} - 1\right). \qquad 5.6a$$

Dakle, oblik granične strujnice ne zavisi od beskrajnosne brzine, već samo od širine ploče. Ovo je osnovni nedostatak ove teorije, po kojoj se dobija uvek jedna i uvek ista granična strujnica za datu ploču bez obzira na veličinu beskrajnosne brzine.

U stvarnosti će pri većim beskrajnosnim brzinama strujanja delići fluida u brazdi trpeti veće viskozne sile kočenja,* što dovodi do sužemja traga iza ploče i vice versa. Medjutim, kako u slučaju kada se granična strujnica zameni vrtložnim slojem dolazi do promene njegovog oblika, neophodno je unapred poznavati veličinu brzine u graničnoj strujnici, kada je ova šira ili uža od teorijski date. Fizički posmatrano, očevidno je da ukoliko imamo širi trag, utoliko dolazi do većeg zgušnjavanja strujnica, pa shodno dinamičkim uslovima, brzina duž brazde je povećana, a kod užeg traga imamo manje brzine duž brazde. U graničnom slučaju, kada beskrajnosna brzina teži nuli tada se iz jednačine 5.7 dobija da $c \to 0$, i

$$\lim \frac{dy}{dx} = 0 \text{ , kada } V_{\infty} \to 0 \qquad 5.8a$$

$$c \to 0$$

Znači, unutar pravih linija koje polaze od obe ivice ploče paralelno osi strujanja brzina je nula, dok idući ka graničnoj strujnici raste do veličine beskrajnosne brzine na ovoj, a izvan ove takodje produžuje da raste. Zakonomernost porasta ove brzine, koja postoji u stvarnom fluidu, je za sad nepoznata, pa je radi rešavanja postavljenog zadatka potrebno uvesti neku pretpostavku o brzinskom polju za slučaj raznih širina traga iza ploče.

---

* veći je porast tangentnih brzina u poprečnom pravcu

Pretpostavimo da se širina prepreke menja i dobija vrednosti: 0,5h, 1,5h, 2,0h, itd., pa sračunajmo oblike graničnih strujnica u tim slučajevima. Posle toga vratimo se opet jednačini 5.7, i iz nje zaključujemo da se ista vrednost dobija bez obzira kako su grupisane veličine

$$c = \frac{(1{,}5h)\ V_{\infty}}{\pi + 4} = \frac{h\ (1{,}5\ V_{\infty})}{\pi + 4} = \text{const.} \qquad 5.13$$

Na ovaj način moguće je dobiti brzinsko polje za koje pretpostavljamo da je istovetno sa strujnim poljima oko ploča sa raznim širinama. Napominje se da učinjene pretpostavke nemaju teorijskog opravdanja, jer posmatrano matematički parametar koji je menjan je, u stvari, širina ploče, a ne beskrajnosna brzina koja uopšte nije parametar u ovome sistemu jednačina. Medjutim, na ovaj način odredjeno brzinsko polje zadovoljava dinamičke uslove, to jest da se pri širenju traga brzina brazde povećava, a prilikom sužavanja traga brzina brazde smanjuje.

Mi ćemo na dalje usvojiti da je ovim brzinskim poljem odredjena samo veličina brzine, a pravac će se dobiti u svakom pojedinom slučaju povlačenjem tangente na vrtložni sloj u toj tački.

Ove su dve jedine teorijski proizvoljne pretpostavke koje su učinjene pre grafičkog rešavanja zadatka.

<u>Grafičko rešavanje konkretnog zadatka</u>

Usvojeni su sledeći ulazni podaci:

a) Ravna ploča širine	$h = 3$ mm
b) Beskrajnosna brzina	$V_{\infty} = 1$ m/sek
c) Kinematička viskoznost vazduha	$\nu = 15{,}1\cdot 10^{-6}$ m^2/sek
d) Značilac Rejnoldsa	$Re = 200$

Na osnovu ispitivanja Roškoa [42a] iz dijagrama 21 se dobija:

$$R = 200 \quad - \quad S \cdot R = 38 \text{ ,}$$

pa je $S = 0{,}19$.

Učestanost odvajanja vihora se dobija iz

$$N = \frac{S\ V_{\infty}}{h} = \frac{0{,}19 \cdot 1}{0{,}003} = 63{,}3 \text{ sek}^{-1} \quad .$$

Jedan vihor se izgradi za vreme

$$T = \frac{1}{N} = 0{,}0158 \text{ sek.}$$

Ako usvojimo vremenski interval

$$t = 0{,}001 \text{ sek.}$$

tada će posle 15,8 vremenskih intervala doći do odvajanja vihora. Čim su poznati beskrajnosna brzina i vremenski interval, moguće je prema jednačini 5.3 sračunati jačinu vrtloga koncentrisanog u tački, a koji odgovara stvorenom vrtložnom sloju u tom intervalu vremena

$$\Gamma = \frac{1}{2}\, V_{\infty}^{2}\ \ t = 0{,}5 \cdot 0{,}001 \ /\frac{m^2}{sek}/ = 500 \ \ mm^2/\text{sek.}$$

Indukovana brzina na proizvoljnom rastojanju r_1 /mm/ od datog vrtloga je

$$v_1 = \frac{\Gamma}{2\ r_1 \pi} = \frac{500}{2 \pi r_1} = \frac{79{,}5}{r_1} \quad \text{mm/sek.}$$

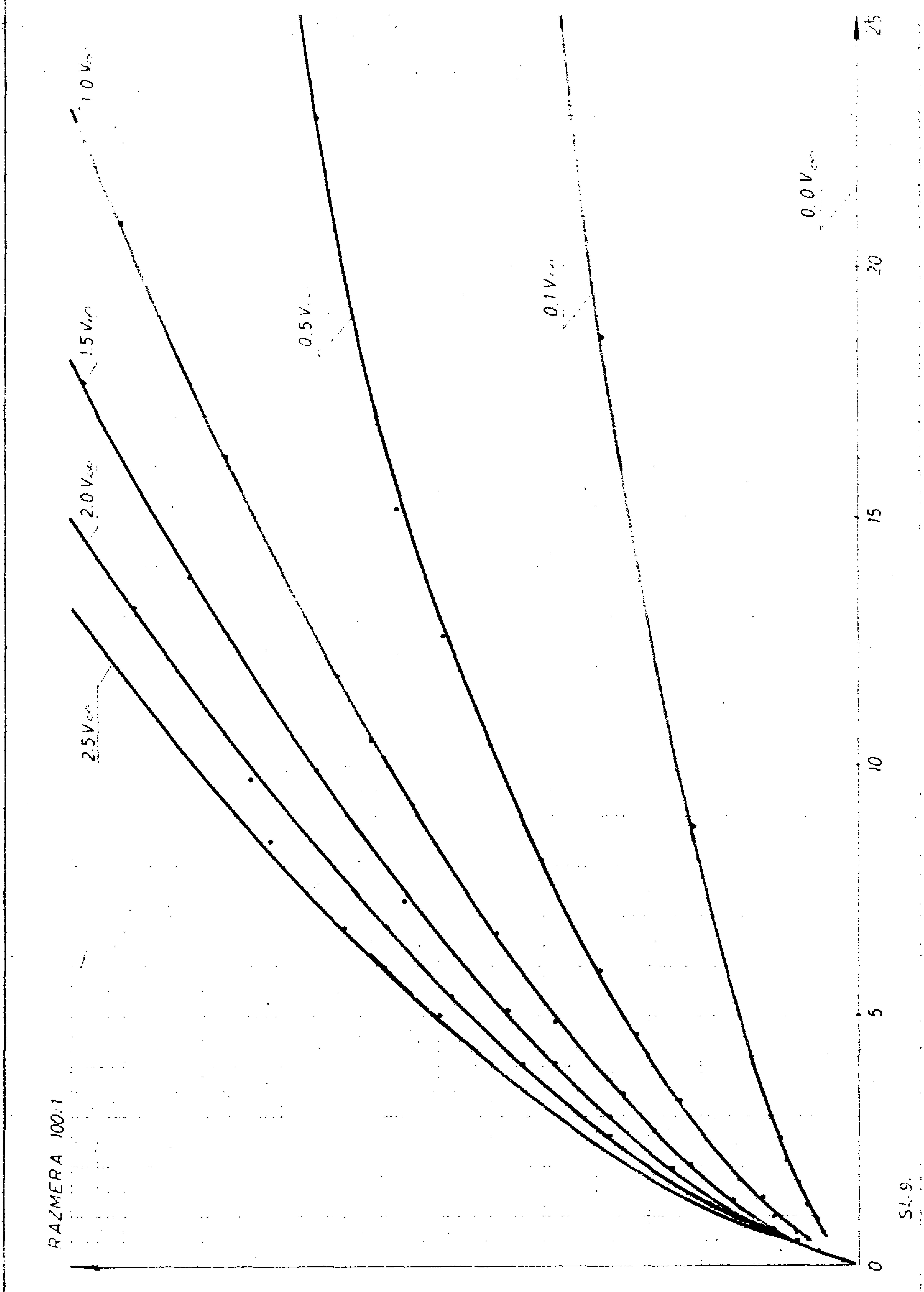
Ova zavisnost je data grafički radi lakšeg rada.

Oblik granične strujnice je sračunat tabelarno prema jednačinama 5.5, 5.6 i 5.7, a ostale brazde su dobijene u sledećoj tabeli prema jednačini 5.13.

Ulazni podaci: $V_{\infty} = 100$ cm/sec; $h = 0,3$ cm

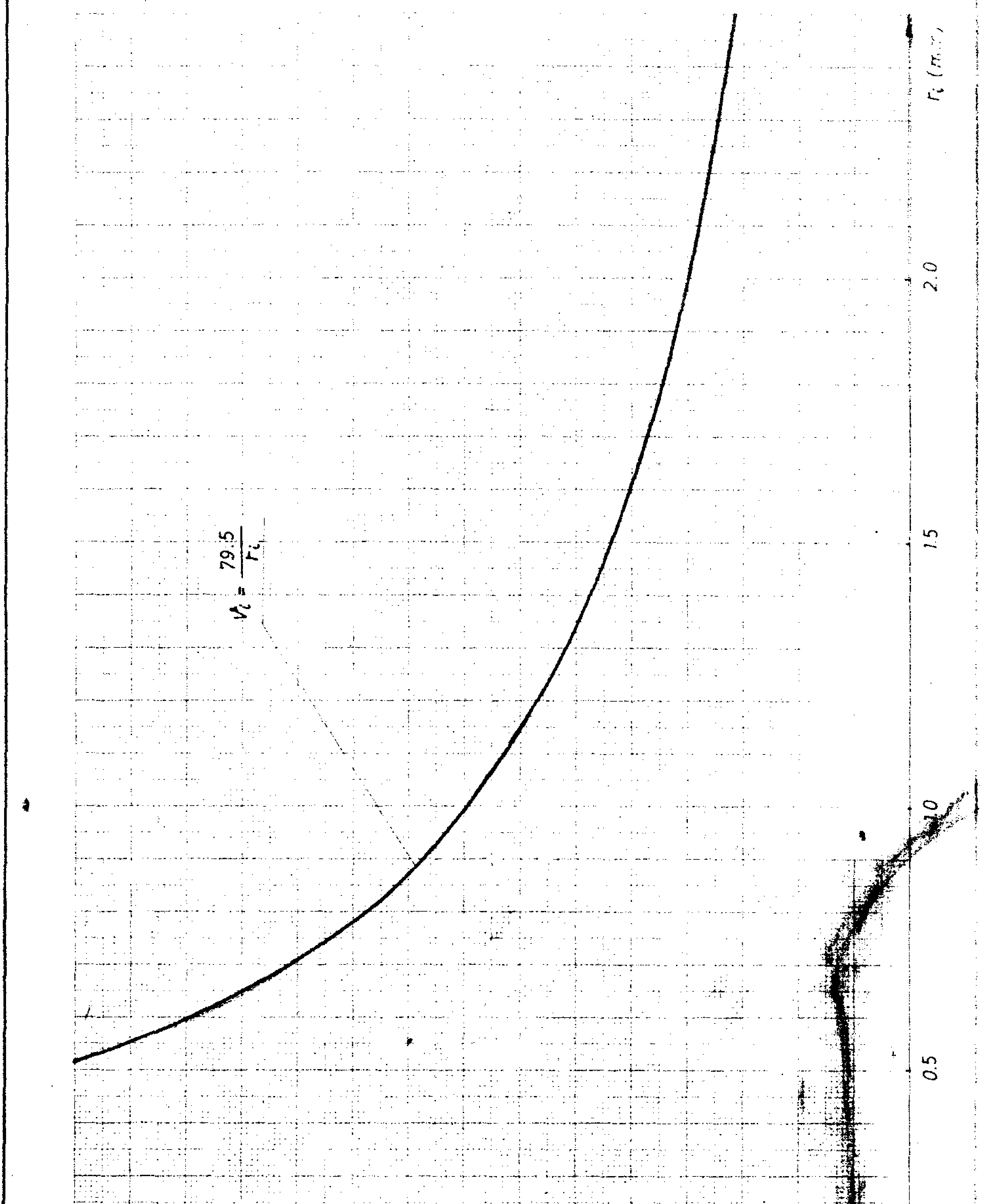
$C = 4,2$
$\sqrt{C} = 2,05$
$2\sqrt{C} = 4,10$

No	φ	$\varphi - C$	$\sqrt{\varphi}$	$\sqrt{\varphi - C}$	$\underbrace{\sqrt{\varphi(\varphi - C)}}$	$\underbrace{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi - C}}$	$\frac{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi - C}}{\sqrt{C}}$	log $\varkappa$	C ln$\varkappa$	100 x	$\sqrt{\varphi} - \sqrt{C}$	$100(y - \frac{h}{2})$
1	4,5	0,3	2,12	0,55	1,17	2,67	1,302	0,115	1,108	0,1	0,07	0,3
2	5,0	0,8	2,24	0,89	2,01	3,13	1,527	0,184	1,78	0,3	0,19	0,8
3	5,5	1,3	2,34	1,14	2,67	3,48	1,697	0,230	2,22	0,5	0,29	1,2
4	6,0	1,8	2,45	1,34	3,29	3,79	1,849	0,267	2,58	0,7	0,40	1,6
5	7,0	2,8	2,64	1,67	4,41	4,31	2,102	0,323	3,12	1,3	0,59	2,4
6	8,0	3,8	2,83	1,95	5,52	4,78	2,332	0,368	3,55	2,0	0,78	3,2
7	9,0	4,8	3,00	2,19	6,57	5,19	2,532	0,403	3,90	2,7	0,95	3,9
8	10,0	5,8	3,16	2,41	7,61	5,57	2,717	0,434	4,20	3,4	1,09	4,5
9	12,0	7,8	3,46	2,79	9,66	6,25	3,049	0,484	4,68	4,9	1,41	5,8
10	14,0	9,8	3,74	3,13	11,70	6,87	3,351	0,525	5,10	6,6	1,69	6,9
11	17,0	12,8	4,12	3,58	14,70	7,70	3,756	0,575	5,50	9,2	2,07	8,5
12	20,0	15,8	4,47	3,97	17,70	8,44	4,117	0,615	5,90	11,8	2,42	9,9
13	25,0	20,8	5,00	4,56	22,80	9,56	4,653	0,669	6,50	16,3	2,95	12,1
14	30,0	25,8	5,48	5,08	27,80	10,56	5,151	0,712	6,90	20,9	3,43	14,0
15	35,0	30,8	5,91	5,50	32,50	11,41	5,566	0,746	7,20	25,3	3,86	15,8
16	40,0	35,8	6,32	5,98	37,80	12,30	6,000	0,778	7,50	30,3	4,27	17,5
17	50,0	45,8	7,07	7,67	54,20	14,74	7,190	0,857	8,30	45,9	5,02	20,6
18	100,0	95,8	10,00	9,79	97,90	19,79	9,654	0,985	9,50	88,4	7,95	32,6
19	200,0	195,8	14,14	13,99	197,00	28,13	13,70	1,137	11,00	186,0	12,09	49,6
20	300,0	295,8	17,32	17,20	298,00	34,52	16,82	1,226	11,91	286,0	15,27	62,5
21	400,0	395,8	20,00	19,89	398	39,89	19,40	1,288	12,50	387,5	17,95	74,1
22	500,0	495,8	22,36	22,27	499	44,63	21,70	1,336	13,00	486,0	20,31	83,7

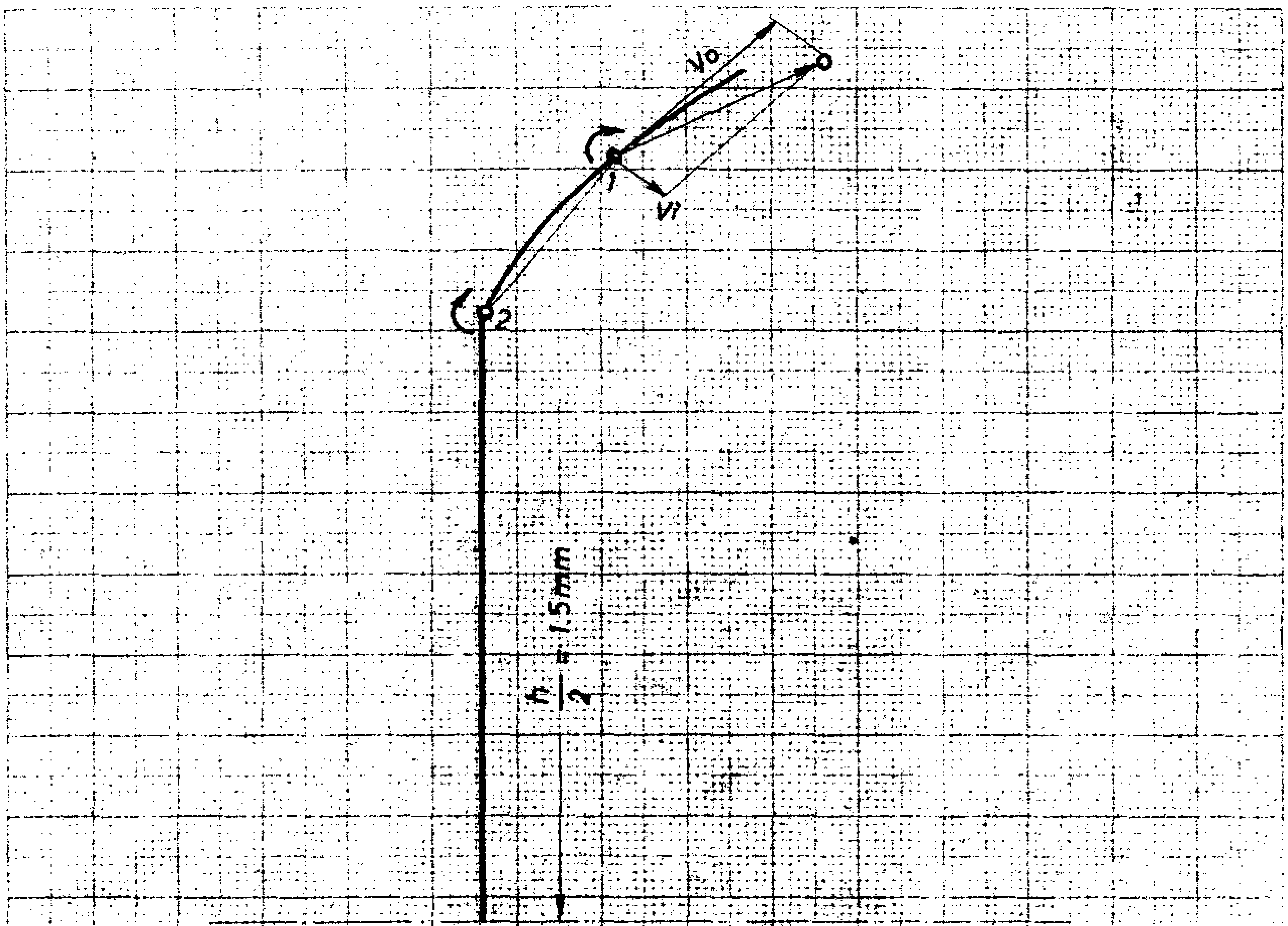


SL.9 POLJE BRZINA IZA IVICE PLOČE

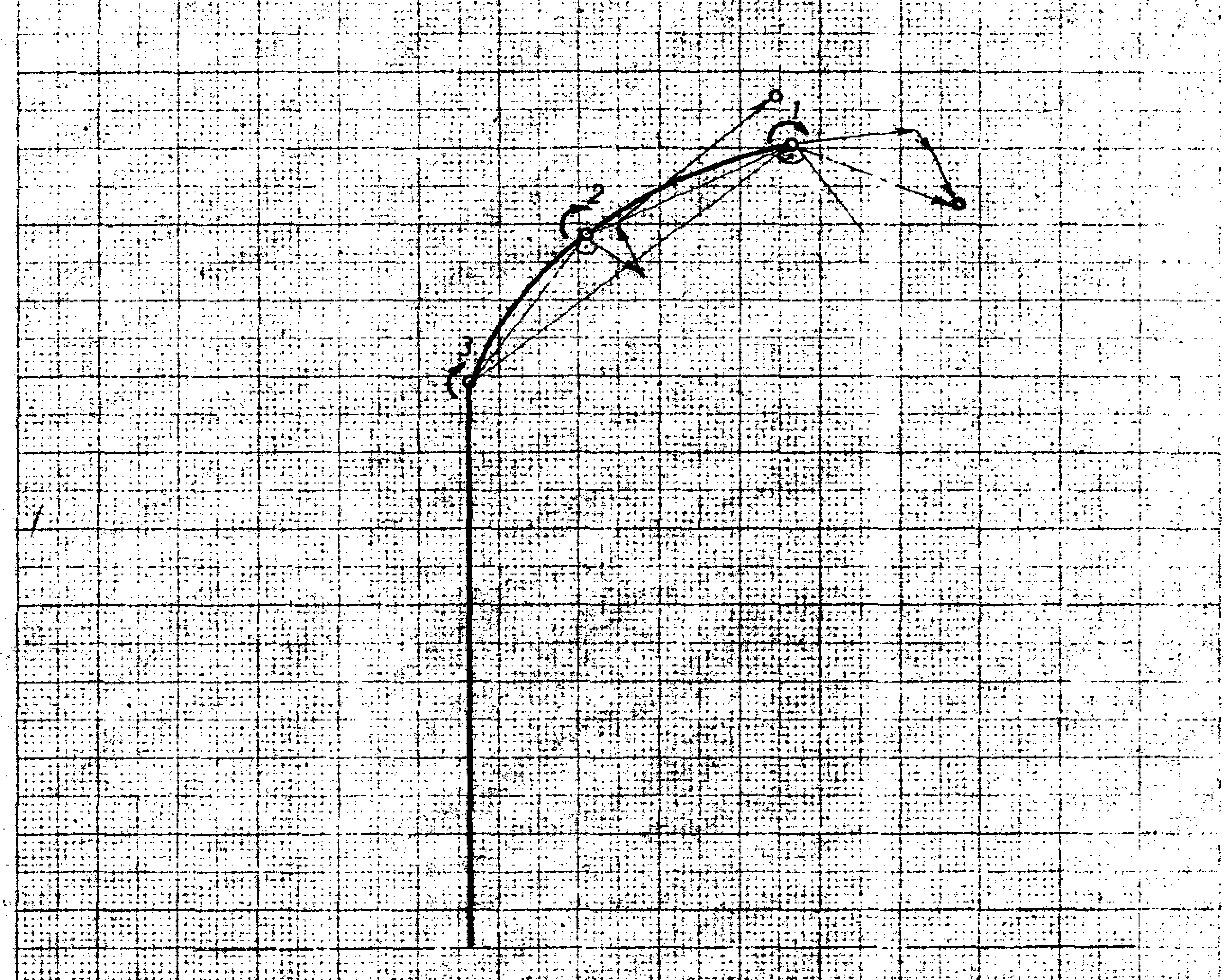
LIST 38



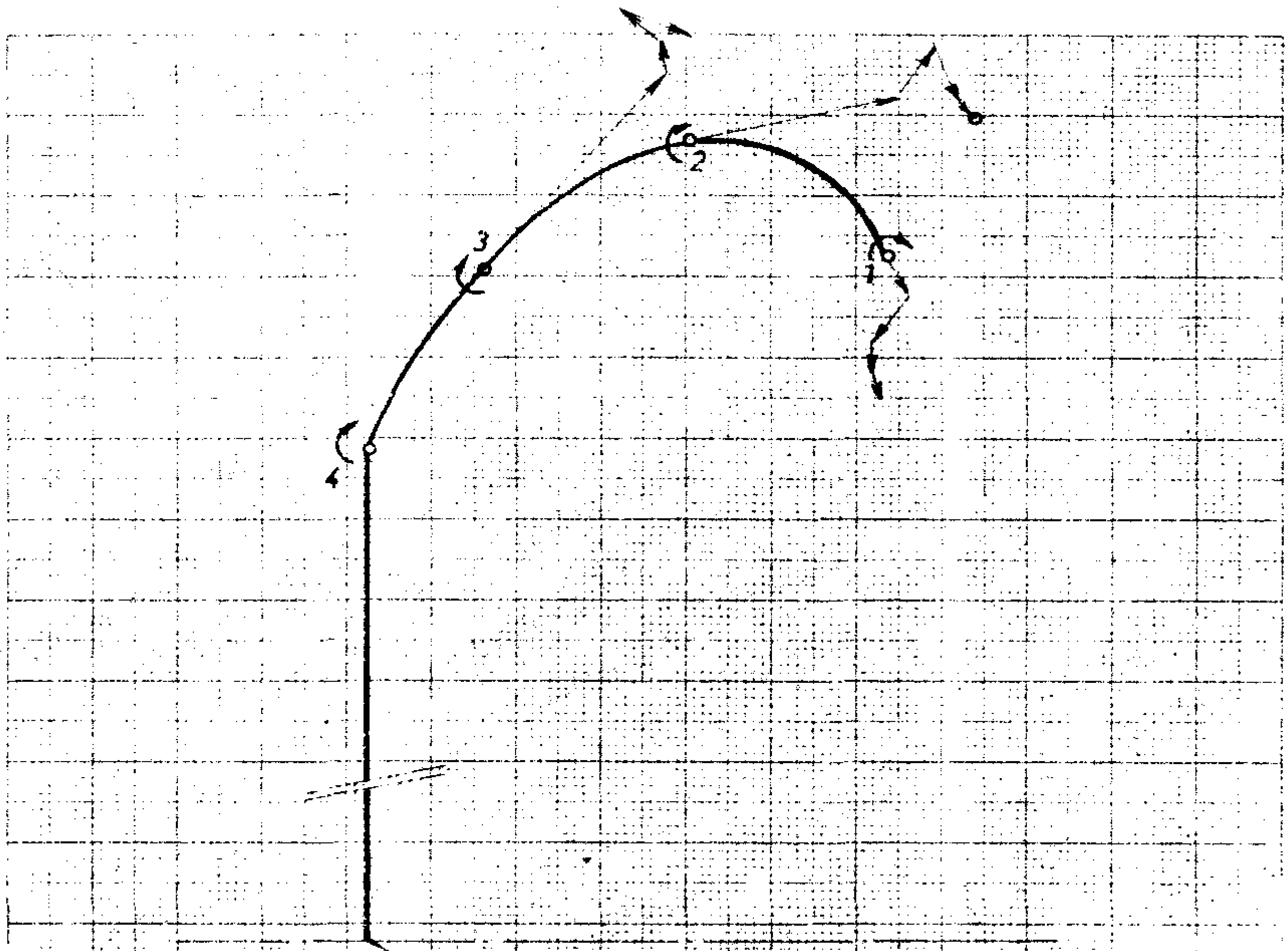
SL.10. POLJE INDUKOVANIH BRZINA USLED USAMLJENOG VRTLOGA | LIST 39



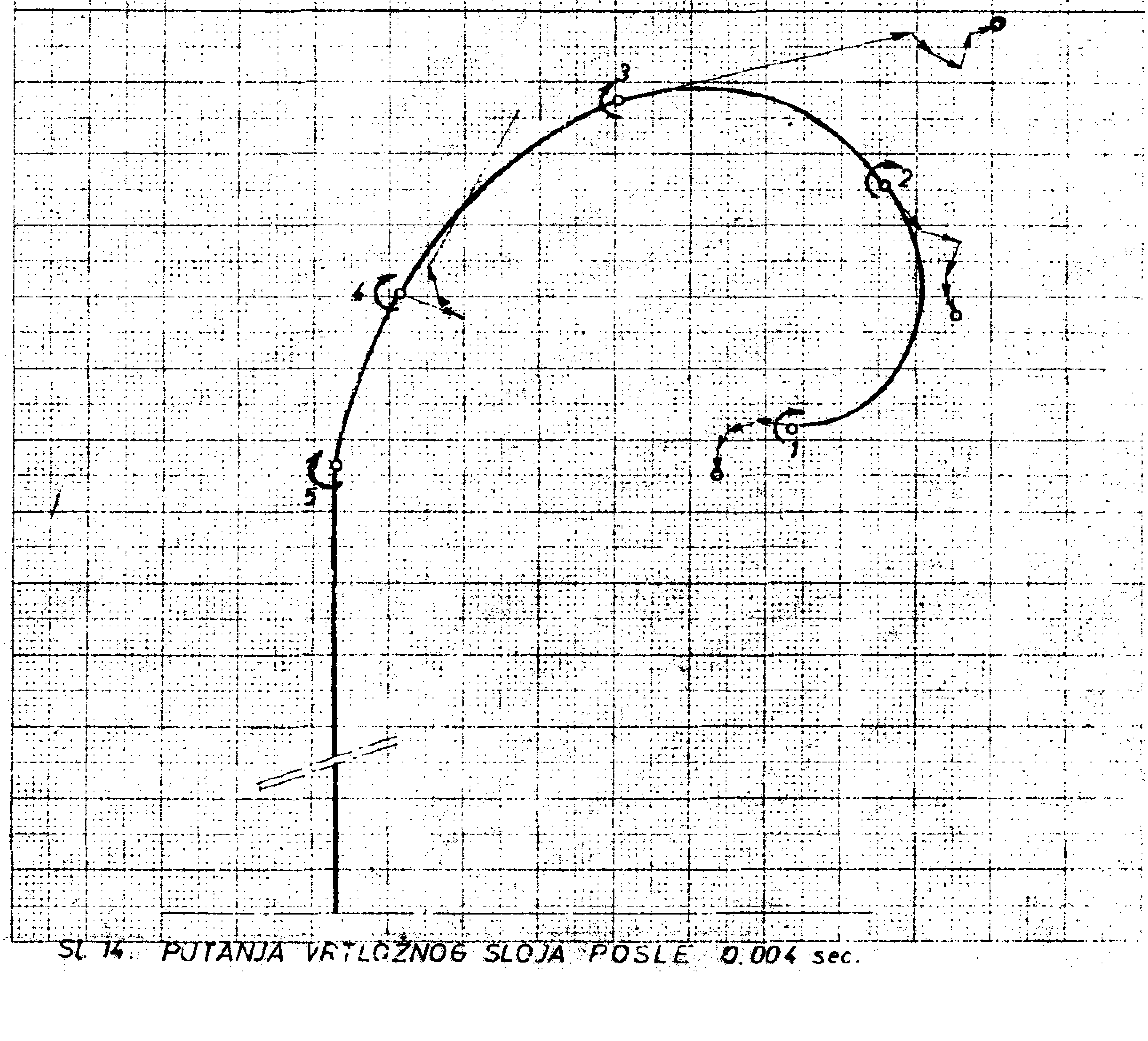
SL.11. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0,001 sek.



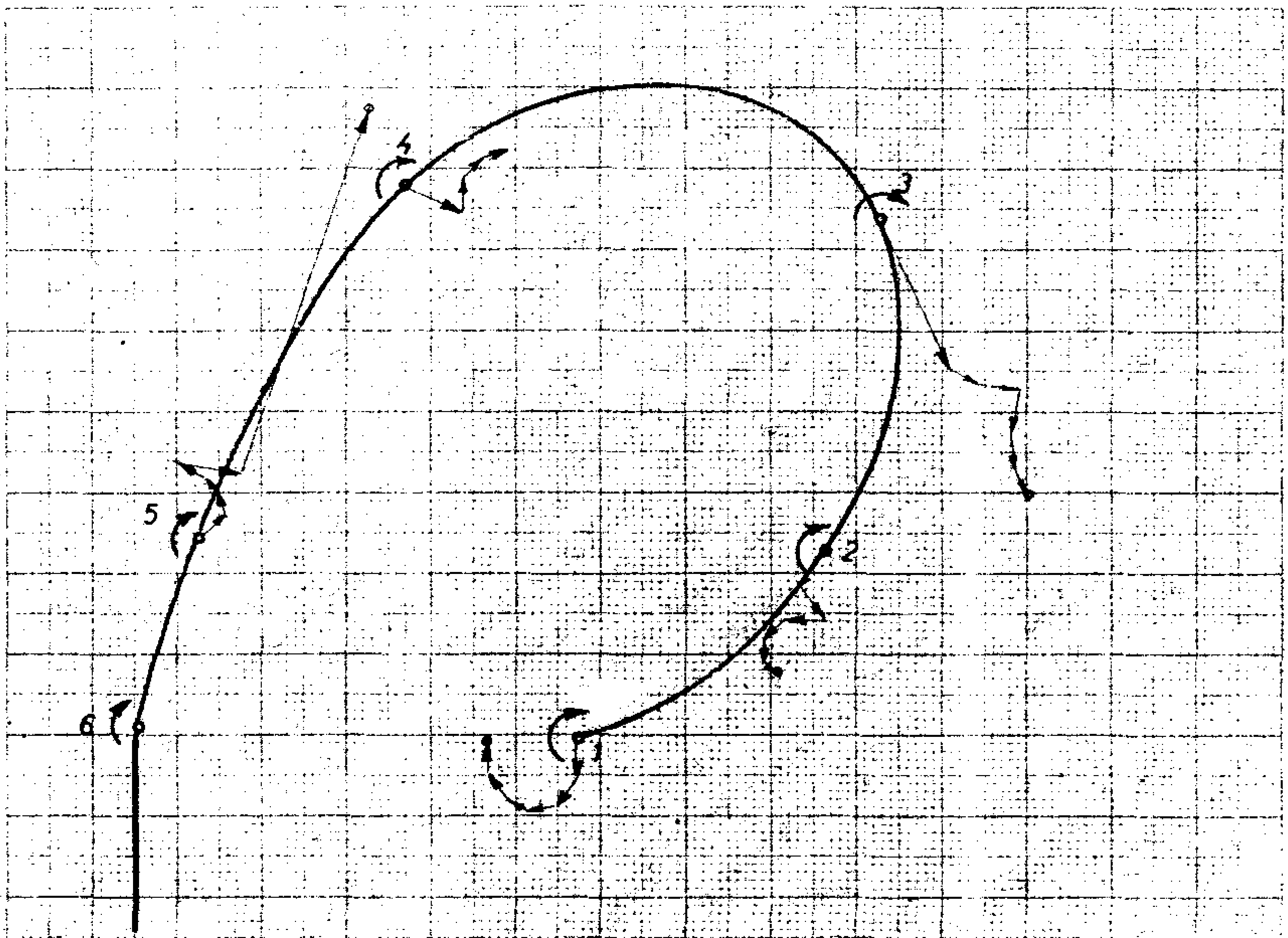
SL.12. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0.002 sek.



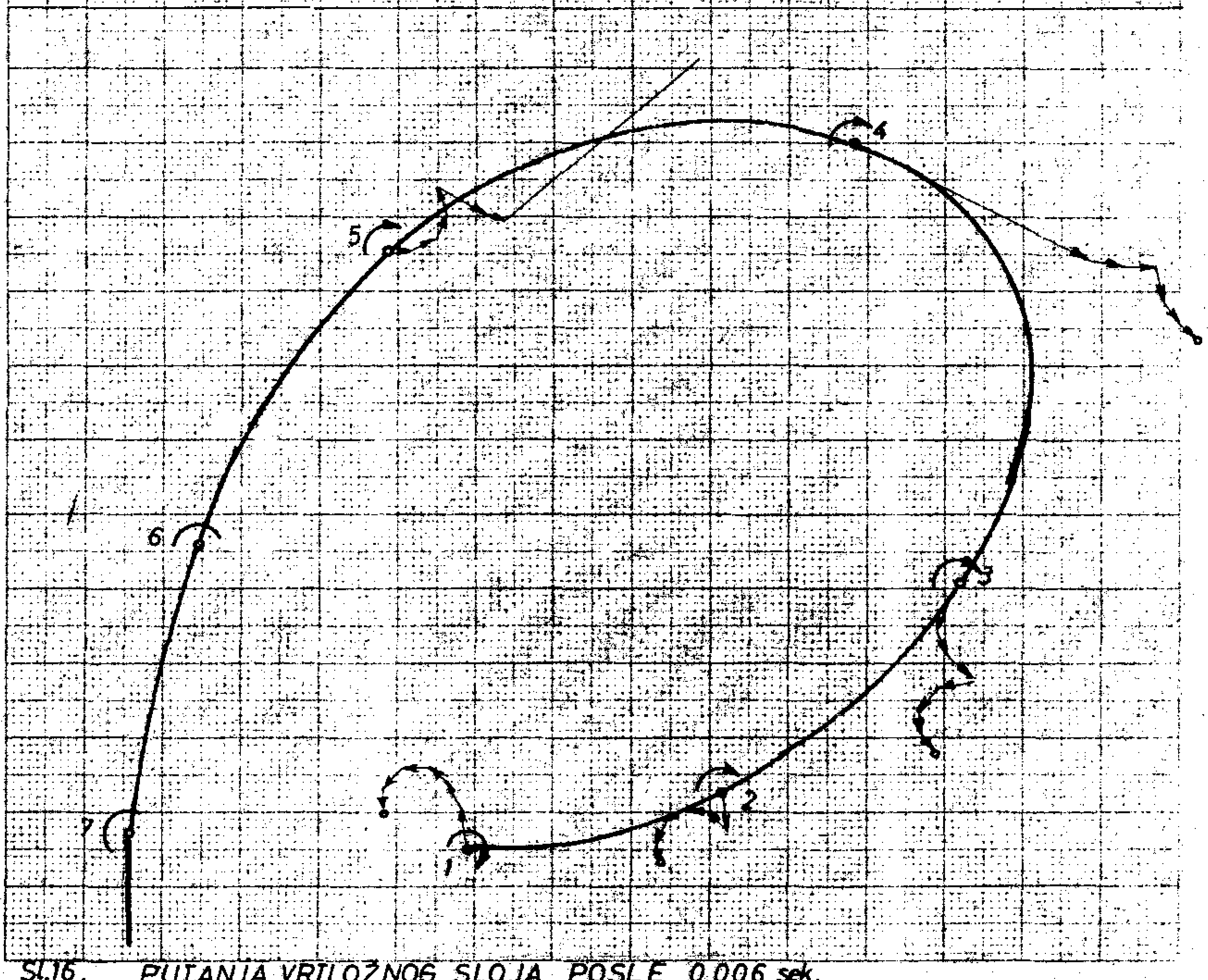
Sl. 13. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0,003 sek.



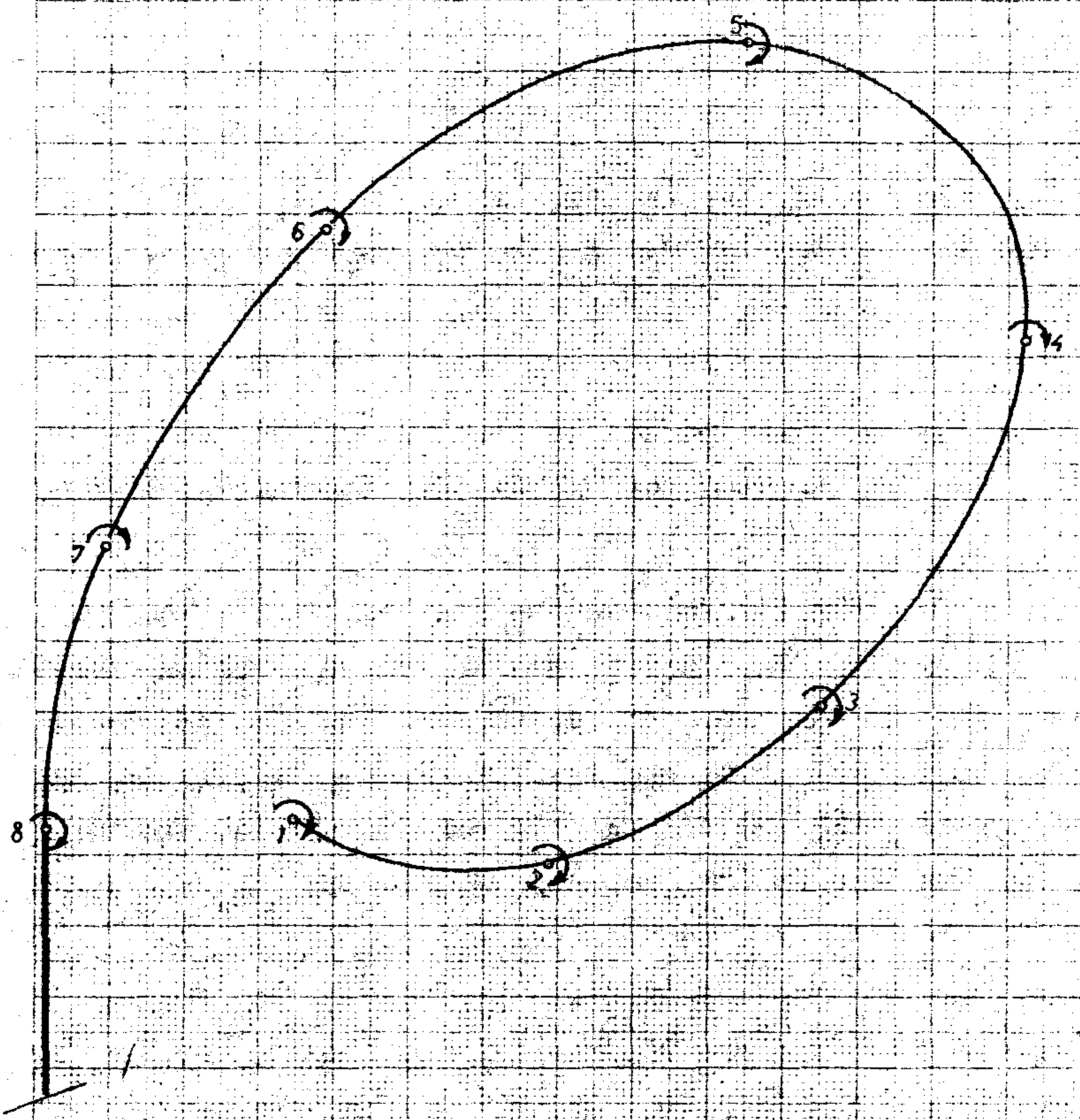
Sl. 14. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0,004 sec.



SL.15. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0.005 sek.



SL.16. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0.006 sek.



Sl. 17. PUTANJA VRTLOŽNOG SLOJA POSLE 0.007 sek.

Na osnovu grafički izvedene kinematičke analize dobili smo sledeće rezultate:

1) Vrtložni sloj se spiralno namotava oko svoga slobodnog kraja.

2) Neprekidno u toku namotavanja vrtložnog sloja dolazi uporedo i do narastanja vihora.

3) Diskretne vrtložne niti, kojima je zamenjen kontinualni vrtložni sloj, se tokom vremena sve više i više udaljuju jedna od druge. Kako one predstavljaju odredjeni deo vrtložnog sloja, to znači da njegova gustina opada.

4) Kod slobodnog kraja vrtložnog sloja dolazi tokom vremena do približavanja vrtložnih niti, što znači da gustina vrtloga u vihorkom jezgru raste.

5) Kada se izgradi jedan namotaj spirale, tada slobodni kraj vrtložnog sloja dolazi u blizinu ivice ploče i indukuje na ovoj brzinu (V_2 u jednačini 5.1), koja dovodi do smanjivanje jačine daljih vrtloga koji nastaju. Ovo daje objašnjenje davno zapaženog neslaganja izmedju ukupne cirkulacije koja se stvara u vrtložnom sloju, prema onoj kod vihora koji se odvaja (odnos 100% : 60%).

6. APROKSIMACIJA SPIRALNOG VRTLOŽNOG SLOJA

Pri proučavanju kretanja kružno-cilindričnog vrtložnog sloja (v. Kočin [26b)]) konstantne vrtložne "gustine" * - G, funkcija kompleksnog potencijala se dobija u obliku

$$W = \frac{G\,R}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \ln\,(z - R\,e^{i\theta})\,d\theta\,, \qquad 6.1$$

odnosno kompleksne brzine koje ovaj vrtložni sloj indukuje biće

$$v_x - v_y = \frac{G\,R}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z - R\,\exp(i\theta)} = \begin{cases} 0, & \text{za } /z/ < R \\ \dfrac{GR}{iz}, & \text{za } /z/ > R \end{cases} \qquad 6.2$$

Znači, unutar cilindra ograničenog vrtložnim slojem kretanja nema, a izvan cilindra kretanje je takvo kao da u osi cilindra imamo vrtložnu nit sa cirkulacijom $2\pi R G$.

Prantl [36b)] je još 1912 godine pokazao da strujnice oblika logaritamske spirale ispunjavaju i kinematičke i dinamičke uslove strujanja. Pretpostavimo da je vrtložni sloj otvorena kriva linija.

Prema teoremi Helmholca pravolinijska vrtložna vlakna moraju da počinju i da se završavaju na granicama tečnosti ili se prostiru u beskonačnost. U slučaju dvodimenzijskog vrtložnog sloja, ovaj uslov je ispunjen, jer se pravolinijske vrtložne niti prostiru na obe strane u beskonačnost. Vrtložni sloj ne mora da bude zatvorena kriva linija, a beskonačne indukovane brzine na njegovom kraju mogu da se ponište ako je gustina vrtložnog sloja na njegovom kraju nula. Ukoliko imamo vrtložni sloj konstantne gustine, beskonačna indukovana brzina na slobodnom kraju se može izbeći dodavanjem jednog malog (na primer

---

* Vrtložna gustina predstavlja cirkulaciju po jedinici dužine vrtložnog sloja.

linearno) opadajućeg dela na kraju koji ide do nule.

Posmatrajmo vrtložni sloj u polarnom koordinatnom sistemu i pretpostavimo da je njegov oblik unapred data funkcija.

$$R = R(\theta) \, , \qquad 6.3$$

~~gde je [illegible] spiralne linije u [illegible]~~

U opštem slučaju promenljiva gustina vrtložnog sloja $G(R,\theta)$ na elementarnoj dužini luka ds data je jednačinom

$$G[R(\theta), \theta] ds = G(\theta) \sqrt{R'^2 + R^2} \, d\theta \, . \qquad 6.4$$

2 3 1

Sada je moguće ~~[illegible]~~ kompleksni potencijal postaviti u opštijem obliku kao krivolinijski integral duž proizvoljnog luka AB u obliku

$$W = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} G(\theta) \sqrt{R'^2 + R^2} \, \ln (z - R e^{i\theta}) \, d\theta \, . \qquad 6.5$$

Očevidno je da se u specijalnom slučaju kružnog cilindričnog (R = const.) vrtložnog sloja konstantne gustine (G = const.) dobijeni kompleksni potencijal 6.5 poistovećuje sa jednačinom 6.1.

Kompleksne brzine u proizvoljnoj tački polja indukovane vrtložnim slojem glase

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} \frac{G(\theta) \sqrt{R'^2 + R^2} \, d\theta}{z - R e^{i\theta}} \, . \qquad 6.6$$

Pretpostavimo da vrtložni sloj ima oblik logaritamske spirale, koja ima osobinu da se beskonačno mnogo puta obavija oko svoga pola, približavajući mu se sve bliže i bliže, ali ga nikad ne dostiže. Jednačina logaritamske spirale u polarnim koordinatama jeste

$$R = a \, e^{m\theta} \, , \qquad 6.7$$

gde usvajamo da θ raste u smeru kazaljke na satu. Konstanta "a" određuje ~~[illegible]~~ ~~(tangenta na spiralu)~~. [illegible] Konstanta "a" ne utiče na oblik logaritamske spirale nego samo na njen položaj, a na oblik spirale utiče samo konstanta "m", i u našem slučaju je negativna.

Ako radi daljeg uprošćavanja usvojimo da je gustina vrtložnog sloja konstantna

$$\theta = \text{const.} \qquad 6.8$$

te smenom u jednačinu 6.6 dobijamo

$$v_x - i v_y = \frac{G\sqrt{m^2+1}}{2\pi i}\int_0^{2k\pi} \frac{a\, e^{m\theta}\, d\theta}{z - a e^{(m+i)\theta}} \; . \qquad 6.9$$

gde "k" predstavlja broj namotaja spirale, i radi jednostavnijeg računa usvojićemo da je "k" neki ceo broj.

Sračunavanje integrala će se izvesti pošto se prethodno podintegralna funkcija napiše u bezdimenzionom obliku

$$\int \frac{e^{m\theta}\, d\theta}{\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}} = \int e^{-i\theta}\, \frac{e^{(m+i)\theta}\, d\theta}{\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}} \qquad 6.10$$

Sada uvedimo sledeću smenu promenljivih

$$u = e^{-i\theta} \; ; \qquad dv = \frac{e^{(m+i)\theta}\, d\theta}{\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}}$$

$$du = -\, i\, e^{-i\theta} d\theta \; ; \quad v = -\frac{1}{m+i} \ln \left(\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}\right) \qquad 6.11$$

i primenimo delimičnu integraciju pa dobijamo

$$\int \frac{e^{m\theta}\, d\theta}{\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}} = -\frac{e^{-i\theta}}{m+i} \ln \left(\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}\right) - \frac{i}{m+i}\int e^{-i\theta} \ln\left(\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}\right) d\theta, \qquad 6.12$$

Drugi integral na desnoj strani jednačine 6.12 ne može se rešiti kvadraturama u zatvorenom obliku pa će se njega logaritamska funkcija razvijati u red na sledeći način

$$\ln\left(\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}\right) = \ln\frac{z}{a} + \ln\left(1 - \frac{a}{z}\,e^{(m+i)\theta}\right) \qquad 6.13$$

Sada usvojimo da je odnos za jedan namotaj spirale

$$\frac{|a\,e^{(m+i)\theta}|}{|z|} < 1 \qquad 6.14$$

Ova nejednačina će uvek biti zadovoljena ako se tekuća koordinata "z" nalazi izvan spirale, i to ukoliko se nalazi dalje, u toliko je približno rešenje integrala tačnije pri zadržavanju na istom broju članova reda. Razvijanjem logaritamske funkcije u red dobija se

$$\ln\left(1 - \frac{a}{z}\,e^{(m+i)\theta}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{z}\,e^{(m+i)\theta}\right)^{n+1}, \qquad 6.15$$

što smenom u integral 6.13 daje

$$\int e^{-i\theta}\ln\left(\frac{z}{a} - e^{(m+i)\theta}\right) = \ln\frac{z}{a}\int e^{-i\theta}d\theta - \frac{a}{z}\int e^{m\theta}\,d\theta -$$

$$- \frac{a^2}{2z^2}\int e^{-i\theta}\,e^{(m+i)^2\theta^2}d\theta - \frac{a^3}{3z^3}\int e^{-i\theta}\,e^{(m+i)^3\theta^3}d\theta - \dots \qquad 6.16$$

Prva dva integrala su tablični slučajevi, dok se treći integral svodi uvodjenjem nove promenljive

$$u = (m+i)\left(\theta - \frac{i}{2(m+i)^2}\right). \qquad 6.17$$

na integral

$$\int e^{-i\theta}\,e^{(m+i)^2\theta^2}\,d\theta = \frac{e^{\frac{i^2}{4(m+i)^2}}}{m+i}\int e^{u^2}\,du\,. \qquad 6.18$$

koji je poznata i tabulisana specijalna funkcija. Medjutim, četvrti član kao i dalji članovi koji su višega reda ne mogu se izračunati, jer specijalne funkcije toga tipa nisu tabulisane. Iz tog razloga smo prinudjeni da se zadržimo na trećem članu reda.

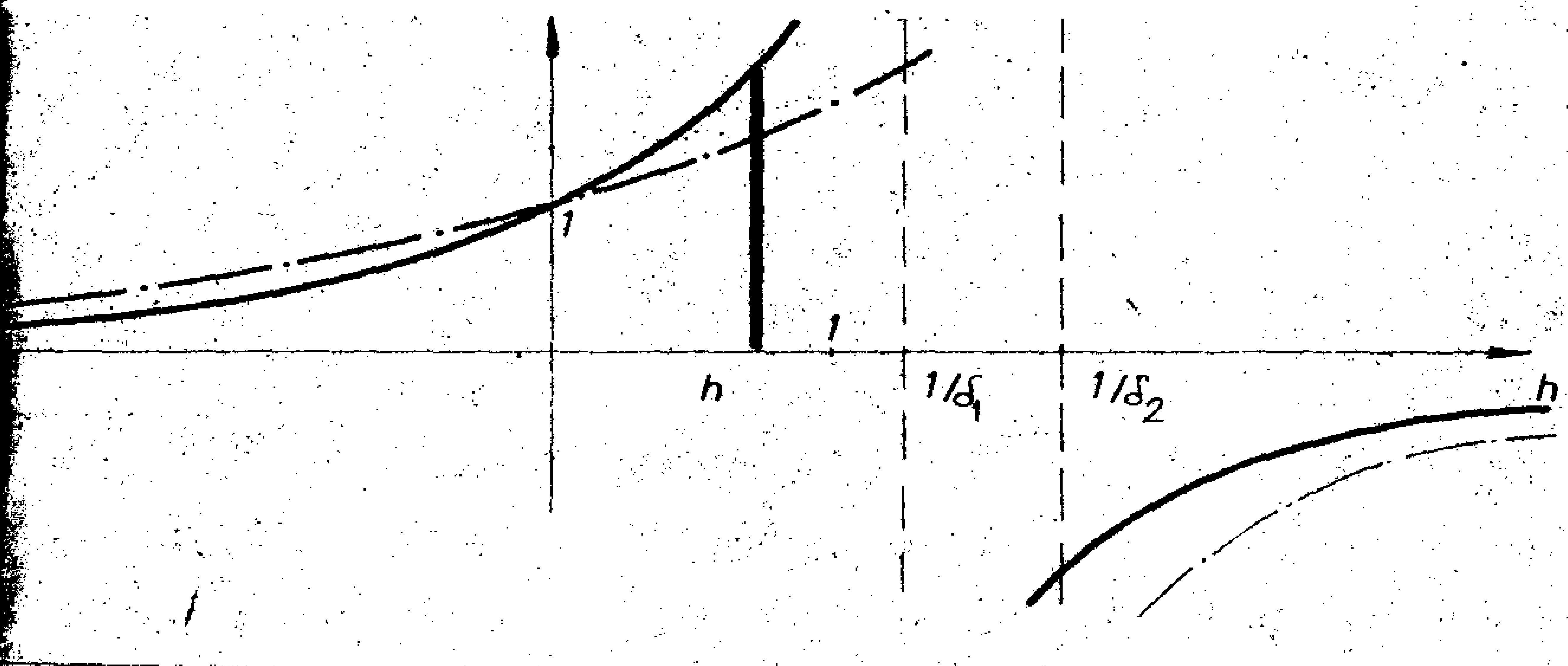
Sada ćemo proceniti grešku koju time činimo, odnosno utvrdićemo u kojoj oblasti važi približno integraljenje tako da učinjena greška nije veća od unapred zadate vrednosti. Koristićemo Lagranževu metodu procene veličine ostatka Tajlorovog reda koja je oblika

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)} (a+\delta h) \qquad 6.19$$

U našem slučaju ostatak od trećeg člana na dalje glasi

$$R_3 = \frac{h^3}{3!} f'''(a+\delta h) = \frac{h^3}{6} \frac{2}{(1-\delta h)^3} \qquad 6.19a$$

Majoriranjem će se odrediti vrednost za δ tako da ostatak ima najveću vrednost. Funkcija ostatka ima asimptotu za $h = \frac{1}{\delta}$ i grafički je predstavljena na slici 19



Sl.19. Funkcija ostatka R_3

Za fiksirano h menjajući parametar δ očevidno je da je ostatak najveći kada je $\delta = 1$. Ako još propišemo da greška bude manja od 5% tada je

$$\frac{1}{3} \left(\frac{h}{1-h}\right)^3 \le 0{,}05 \qquad 6.20$$

odakle se dobija

$$h = \frac{a\left|e^{(m+1)\theta}\right|}{|z|} \leqslant 0{,}35$$

Dakle, unutar ovega opsega se može prihvatiti približno rešenje integrala, jer je greška manja od 5%.

Da bi odredili vrednost integrala unutar spirale koristićemo se nejednakošću koja važi za jedan namotaj spirale $0 \leq \theta \leq 2$

$$\frac{|z|}{a\left|e^{(m+1)\theta}\right|} < 1 , \qquad 6.21$$

pa se u tome slučaju argument logaritma transformiše na sledeći način

$$\ln \left(\frac{z}{a} - e^{(m+1)\theta}\right) = (m+1)\theta + \pi i + \ln \left(1 - \frac{z}{a\, e^{(m+1)\theta}}\right) \qquad 6.22$$

Razvijanjem logaritamske funkcije u red dobijamo smenom u integral 6.12

$$\int e^{-i\theta} \ln \left(\frac{z}{a} - e^{(m+1)\theta}\right) d\theta = (m+1) \int \theta\, e^{-i\theta} d\theta +$$

$$+ \; i \int e^{-i\theta}\, d\theta - \frac{z}{a} \int e^{-(m+2i)\theta} d\theta - \frac{z^2}{2a^2} \int e^{-i\theta} e^{-(m+1)^2\theta^2} d\theta - \ldots$$

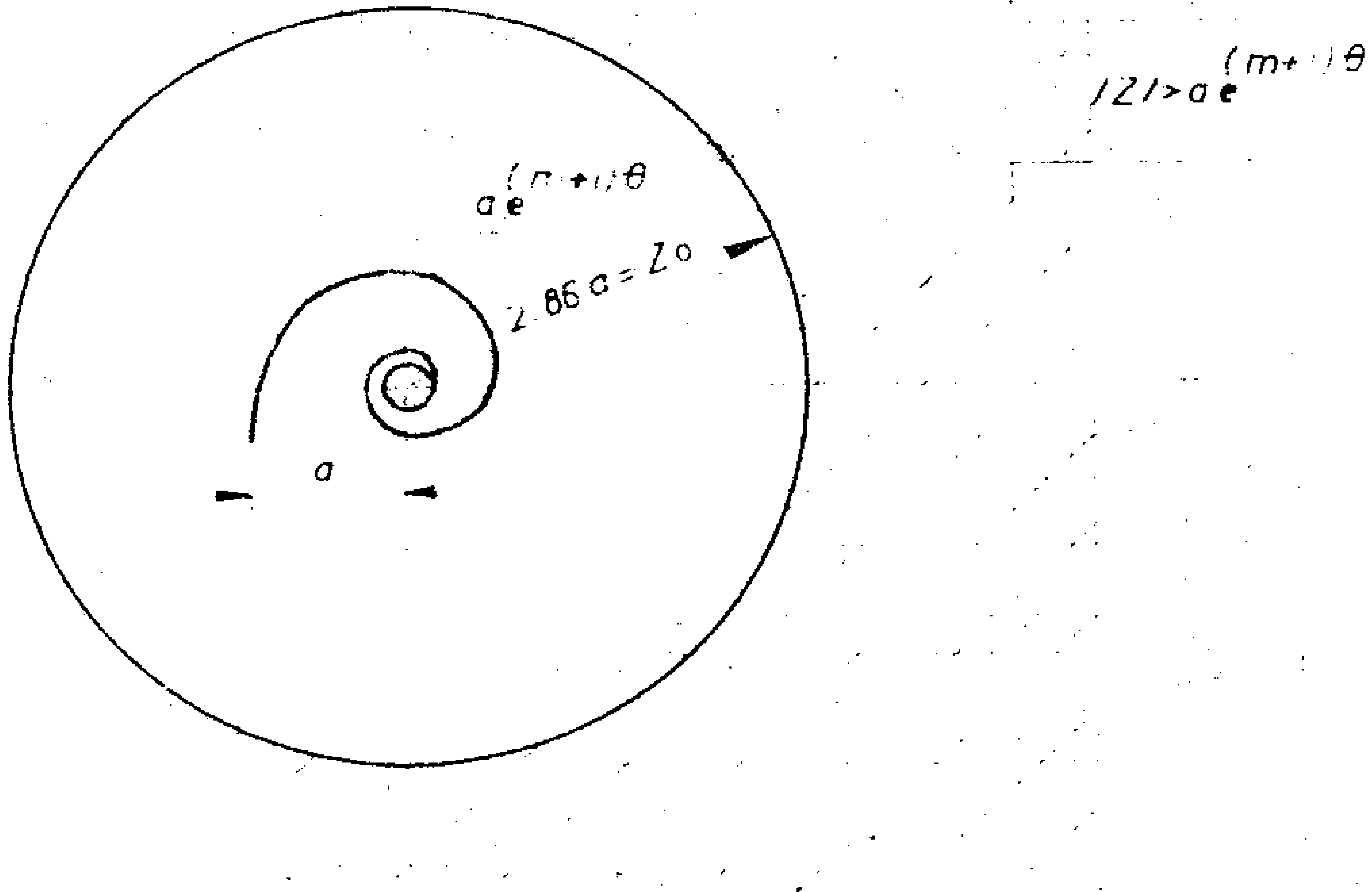
$$6.23$$

Prva tri integrala su tablični slučajevi, dok se četvrti svodi na integral verovatnoće greške i to potpuno analogno kao i ranije uvodjenjem nove promenljive

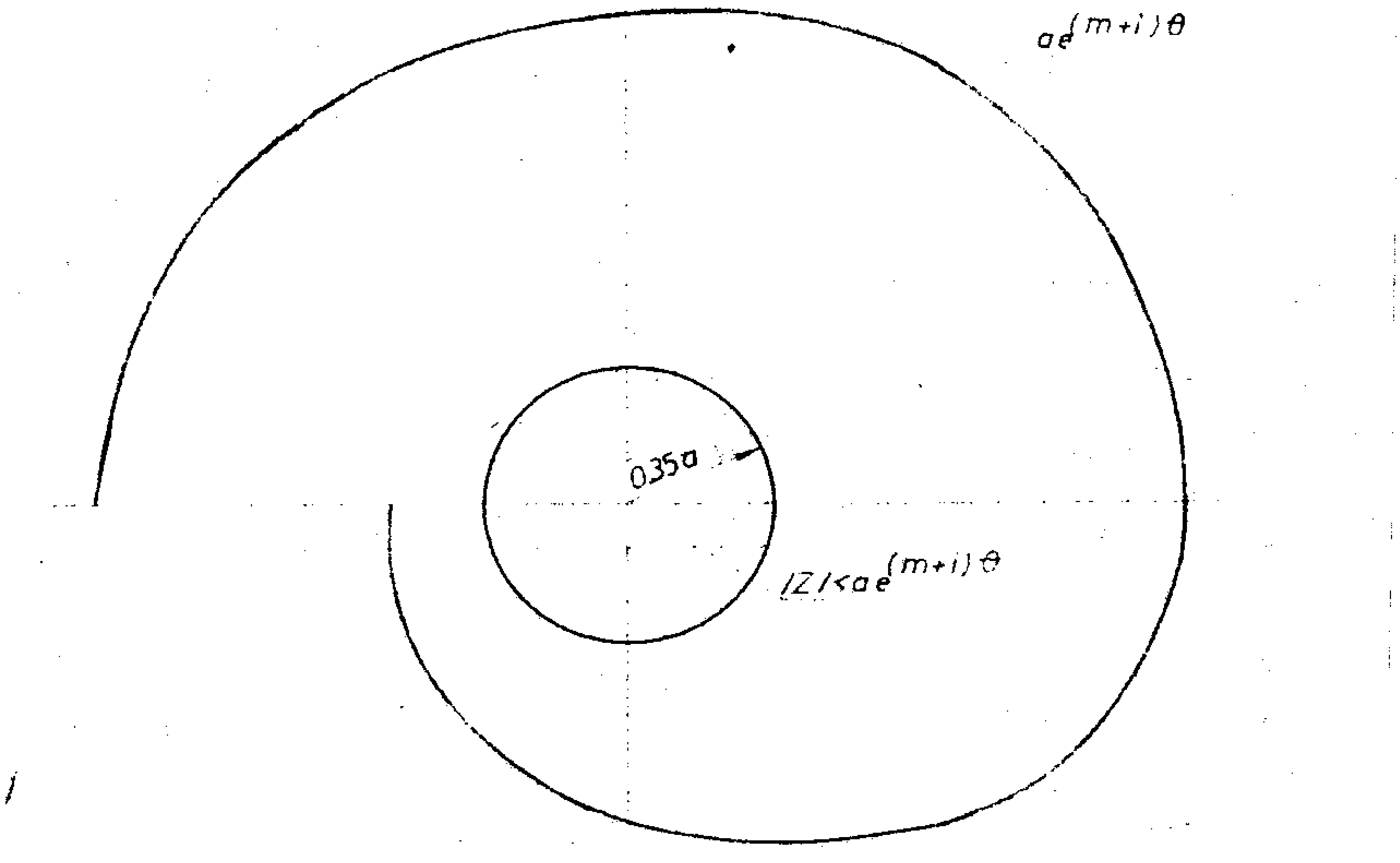
$$u = (m + 1) \left(\theta + \frac{i}{2(m+1)^2} \right)$$

tako da imamo

$$\int e^{-i\theta} e^{-(m+1)^2\theta^2} d\theta = \frac{e^{\frac{1}{4(m+1)^2}}}{m+1} \int e^{-u^2} du \, . \qquad 6.24$$



SL.19. OBLAST IZVAN SPIRALE U KOJOJ JE DOBIJENO REŠENJE TAČNO (ŠRAFIRANO)



SL.20. OBLAST UNUTAR SPIRALE U KOJOJ JE DOBIJENO REŠENJE TAČNO (ŠRAFIRANO)

Posle integracije neodredjenih integrala moguće je smenom granica 0 i $2k\pi$ sračunati vrednosti odredjenih integrala. Tako se posle integriranja iz jednačina 6.16 i 6.18 dobija za oblast izvan spirale kompleksna brzina u obliku

$$v_x - i\,v_y = \frac{G(m-i)}{2\pi i\sqrt{m^2+1}}\left\{-\ln\left(\frac{\frac{Z}{a}-B}{B-1}\right) + \frac{Ai}{mB}(B-1) + \frac{i\,a^2}{2\,Z^2}\,\frac{\frac{1}{4(m+i)^2}}{(m+i)}\ldots\right\} \qquad 6.25$$

gde smo radi kratkoće označili sa velikim slovima sledeće veličine

$$E = e^{2km\pi} \quad ; \quad F = F(2k\pi) = \int e^{u^2} du;$$

ili s obzirom na relaciju koja povezuje sastavnice brzine u polarnom i dekartovom koordinatnom sistemu i koja glasi

$$v_r - i\cdot v_\Theta = \frac{dW}{dz}\, e^{i\Theta} \qquad 6.26$$

imamo da ako jednačinu 6.25 pomnožimo sa $e^{i\Theta}$ dobijamoneposredno radijalnu i obimnu sastavnicu brzine. Kako su one, kao što se vidi iz jednačine 6.25 različite od nule, to rezultujuće strujanje izvan spirale nije sa nepromenljivom obimnom brzinom po istom krugu.

Potpuno analogno uvrštavanjem istih granica u jednačine 6.23 i 6.24 dobija se funkcija kompleksne brzine unutar spirale kao

$$v_x - i\cdot v_y = \frac{a\,(m-i)}{2\,i\pi\sqrt{m^2+1}}\left\{\pi i - \ln\frac{z-\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} + i\cdot(m+1)\cdot 2k\pi - \frac{z}{a}\,\frac{1}{m+2i}\left(e^{-(m+2i)2k}-1\right) - \frac{z^2}{2a^2}\,\frac{i\,\xi}{m+i}\right\} \qquad 6.27$$

Množenjem sa $e^{i\Theta}$ dobijaju se radijalna i obimna sastavnica brzine.

Funkcija kompleksnog potencijala se dobija integriranjem kompleksne brzine i zanimljivo je da se prvi član u oba slučaja (izvan i unutar spirale) javlja u obliku $z \ln z$ koji pretstavlja osnovnu karakteristiku spiralnog strujanja.

7. UPOREDJIVANJE SA OGLEDNIM PODACIMA

Prvi laboratorijski ogledi zasnivali su se na zvučnom efektu pojave vihora. Čeněk * Strouhal [44], profesor fizike na Karlovom Univerzitetu u Pragu, je 1878. godine ispitivao učestanost koju proizvodi žica izložena vazdušnoj struji i pokazao da se ogledna kriva može aproksimirati sledećom zavisnošću

$$N = \frac{V}{6D} \quad . \qquad 7.1$$

gde su: N - učestanost zvuka

V - beskrajnosna brzina vazduha

D - prečnik žice.

Nekoliko decenija kasnije kada se pokazalo da su uzročnici nastajanja zvuka vihori, koji se naizmenično odvajaju od tela, uveden je bezdimenzioni značilac koji danas nosi ime Strouhala

$$S = \frac{N\,D}{V} \qquad 7.2$$

Ogledni podaci se prikazuju u bezdimenzijskom obliku u ravni: značilac Strouhala i značilac Rejnoldsa. Na slici 21 su prikazani ogledni podaci Roškoa [42a] koji je ispitivao žice raznih prečnika (od 0,0235 do 0,635 mm) u vazdušnom aerotunelu. Karakteristično je veliko rasipanje oglednih vrednosti, složeni oblik krive linije i vrlo mali opseg promena značilaca Strouhala.

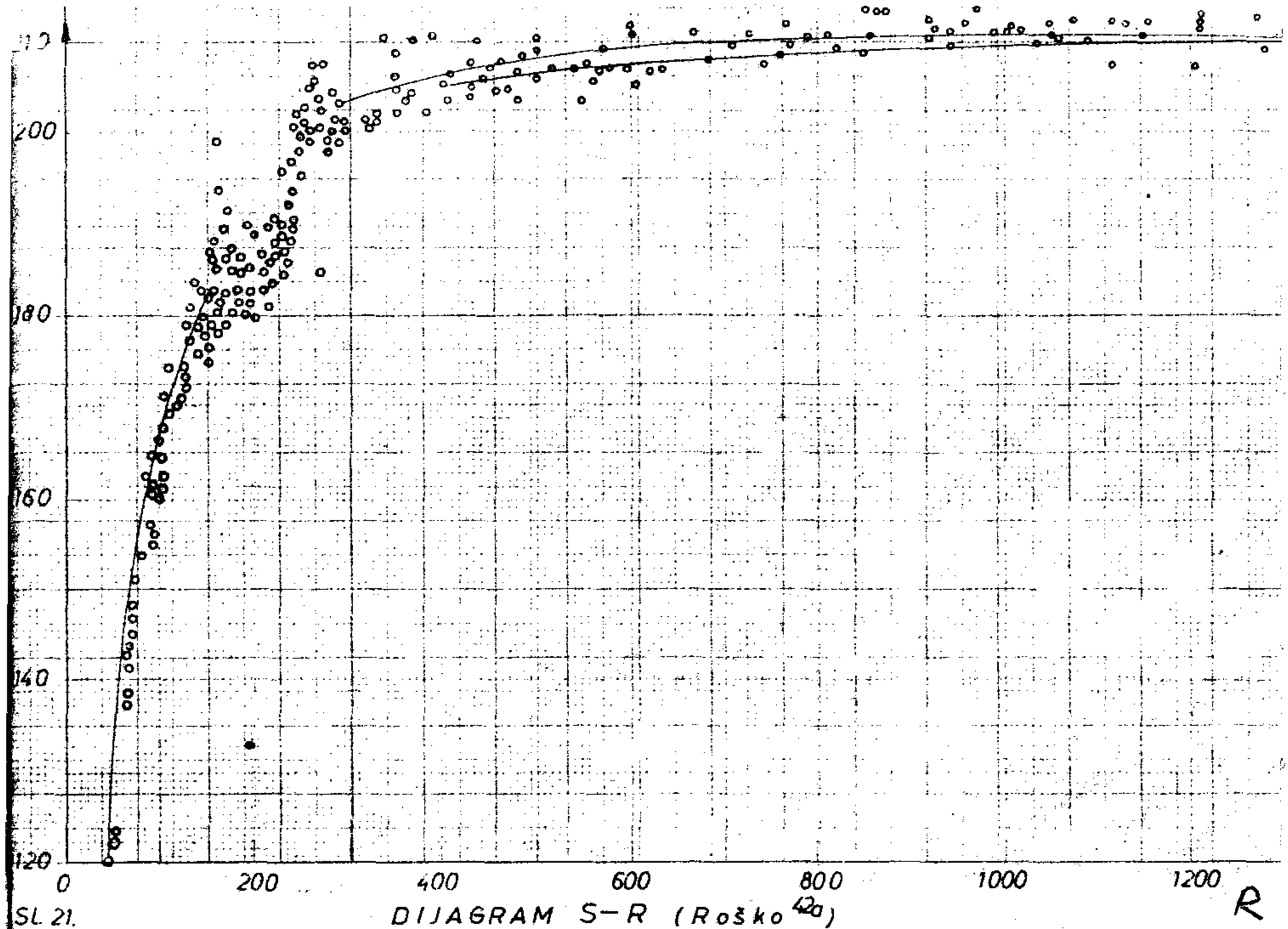
Približnu empirijsku korelaciju navodi Goldštajn [25] u obliku

$$S \approx 0{,}21 \left(1 - \frac{20}{Re}\right) . \qquad 7.3$$

Mi ćemo sada primeniti dimenzionu analizu za najprostiju

---

* Zanimljivo je da ga u celokupnoj literaturi navode kao V. Strouhal, je su svi pošli za nečijom greškom. Takodje je interesantno da se njegovo ime još ne nalazi u velikim enciklopedijama.



Sl. 21. Dijagram R - S (podaci Roškoa [42a])

zavisnost, na primer pretpostavićemo da učestanost odvajanja vihora zavisi samo od beskrajnosne brzine strujanja, neke karakteristične geometrijske veličine (na primer najveća širina prepreke) i kinematičke viskoznosti fluida u obliku

$$N = f\,(\,V,\,D,\,\nu\,) \qquad 7.4$$

Ako se primeni dimenziona analiza imamo

$$\mathrm{Din}\,/N/ = \mathrm{Din}\,/V^{x}\,D^{y}\,\nu^{z}/\;, \qquad 7.5$$

odakle neposredno sledi sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ x + z - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad 7.6$$

Dve jednačine 7.6 sa tri nepoznate mogu da se reše ako se jedna nepoznata usvoji kao parametar:

a) Ako je z parametar dobija se

$$x = 1 - z$$
$$y = -(z + 1) \qquad 7.6a$$

Što zamenom u jednačinu 7.5 daje

$$\frac{ND}{V} = f_1 \left(\frac{\nu}{VD} \right)$$

ili

$$S = f_1 \left(\frac{1}{R} \right) \qquad 7.7$$

b) Ako je x parametar dobija se

$$z = 1 - x$$
$$y = x - 2 \qquad 7.6b$$

Što zamenom u jednačinu 7.5 daje

$$\frac{N D^2}{\nu} = f_2 \left(\frac{V D}{\nu} \right)$$

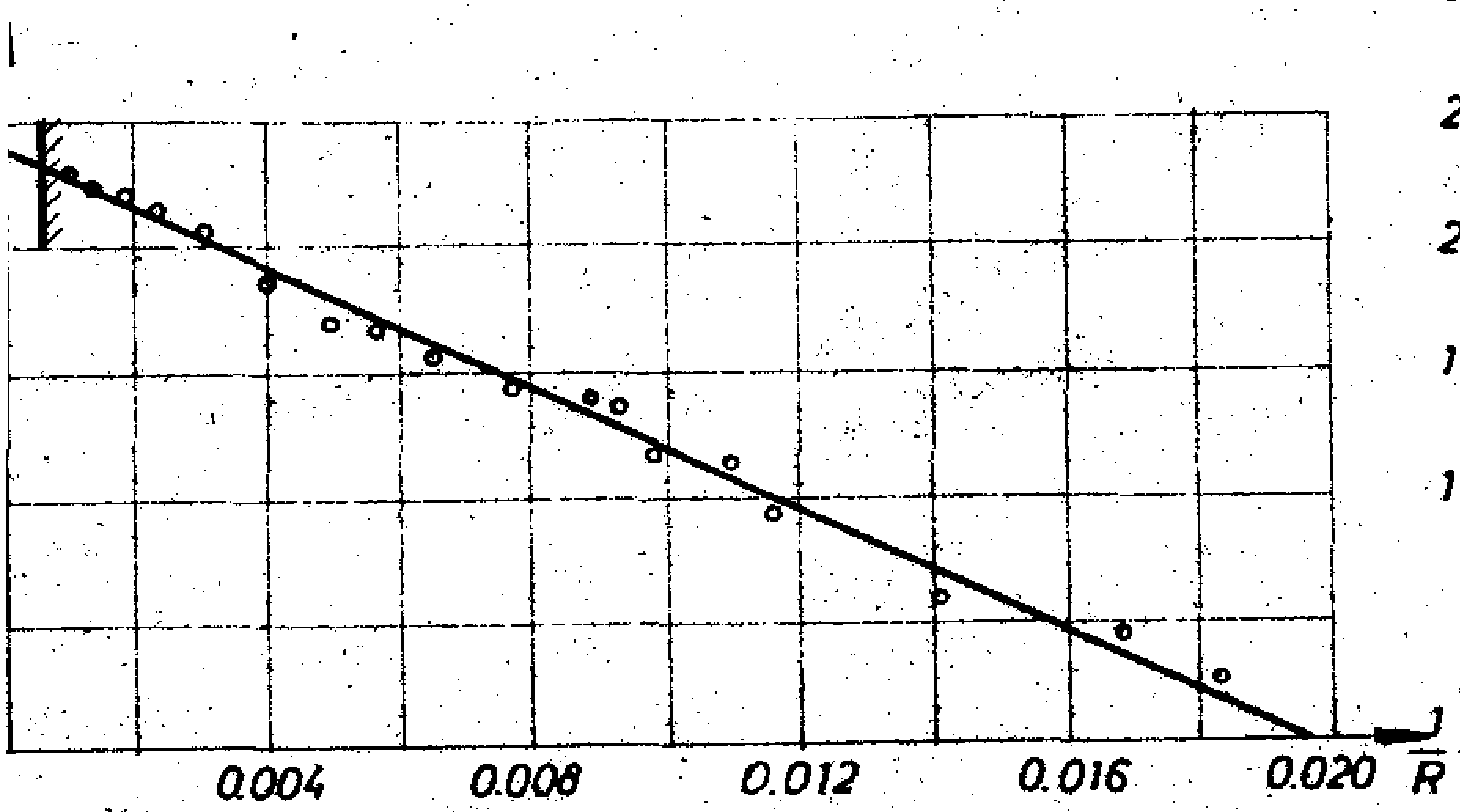
ili

$$S \cdot R = f_2 (R) \qquad 7.8$$

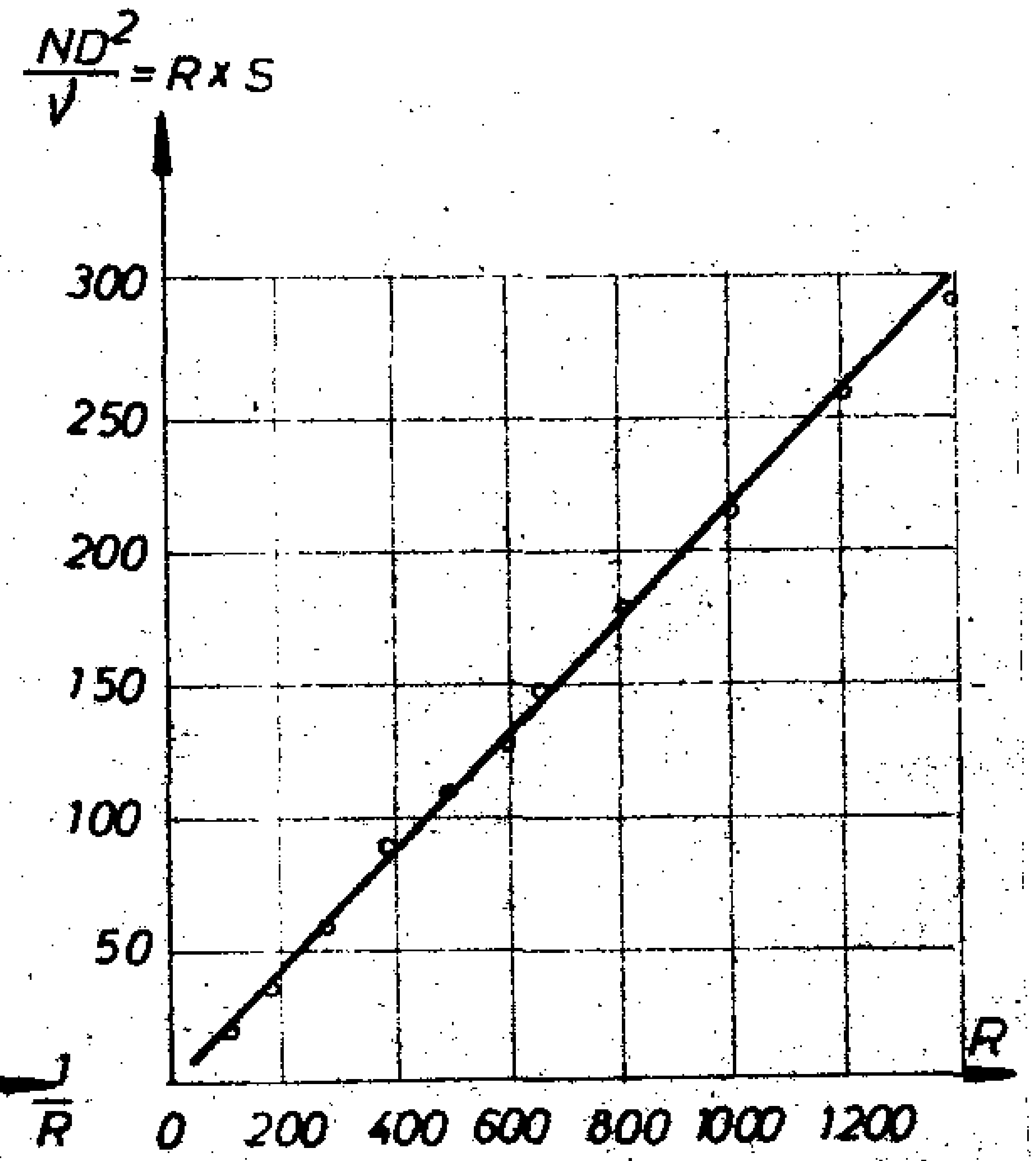
Dimenziona analiza pokazuje da se ogledni podaci mogu predstaviti i u ravnima $S - \frac{1}{R}$ ili $S \cdot R - R$ i ovo je učinjeno na slikama 22 i 23.

Linearnost je očigledna u oba slučaja, tako da su nepoznate funkcije f_1 i f_2 pravolinijske zavisnosti.

Dobijena linearna zavisnost ide u prilog teorije vrtložnog sloja, jer pokazuje da u datom fluidu (ν), dato telo (D) ima učestanost odvajanja vihora koja linearno raste sa brzinom. Prvobitna korelacija Strouhala jednačina 7.1 je, takodje, u saglasnosti sa ovim. Stoga se može zaključiti da je proizvod Strouhalovog i Rejnolds-



Sl. 22. DIJAGRAM $S - \frac{1}{R}$ (Rosko [42a])



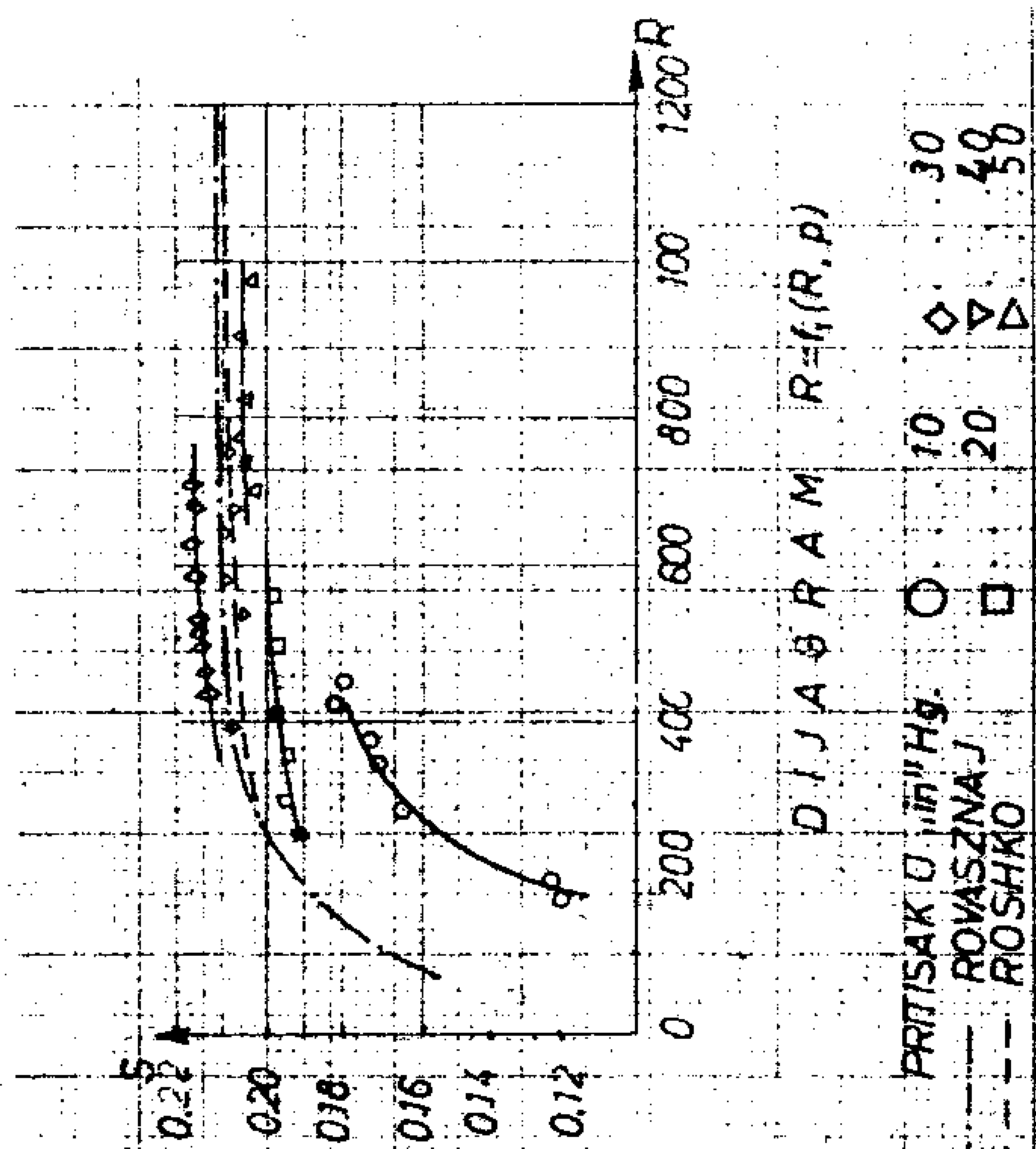
Sl.23. DIJAGRAM S–R (Rpško [42a])

novog značioca mnogo prikladnija bezdimenzijska veličina za opisivanje pojave. U prilog ovome navode se sledeći razlozi:

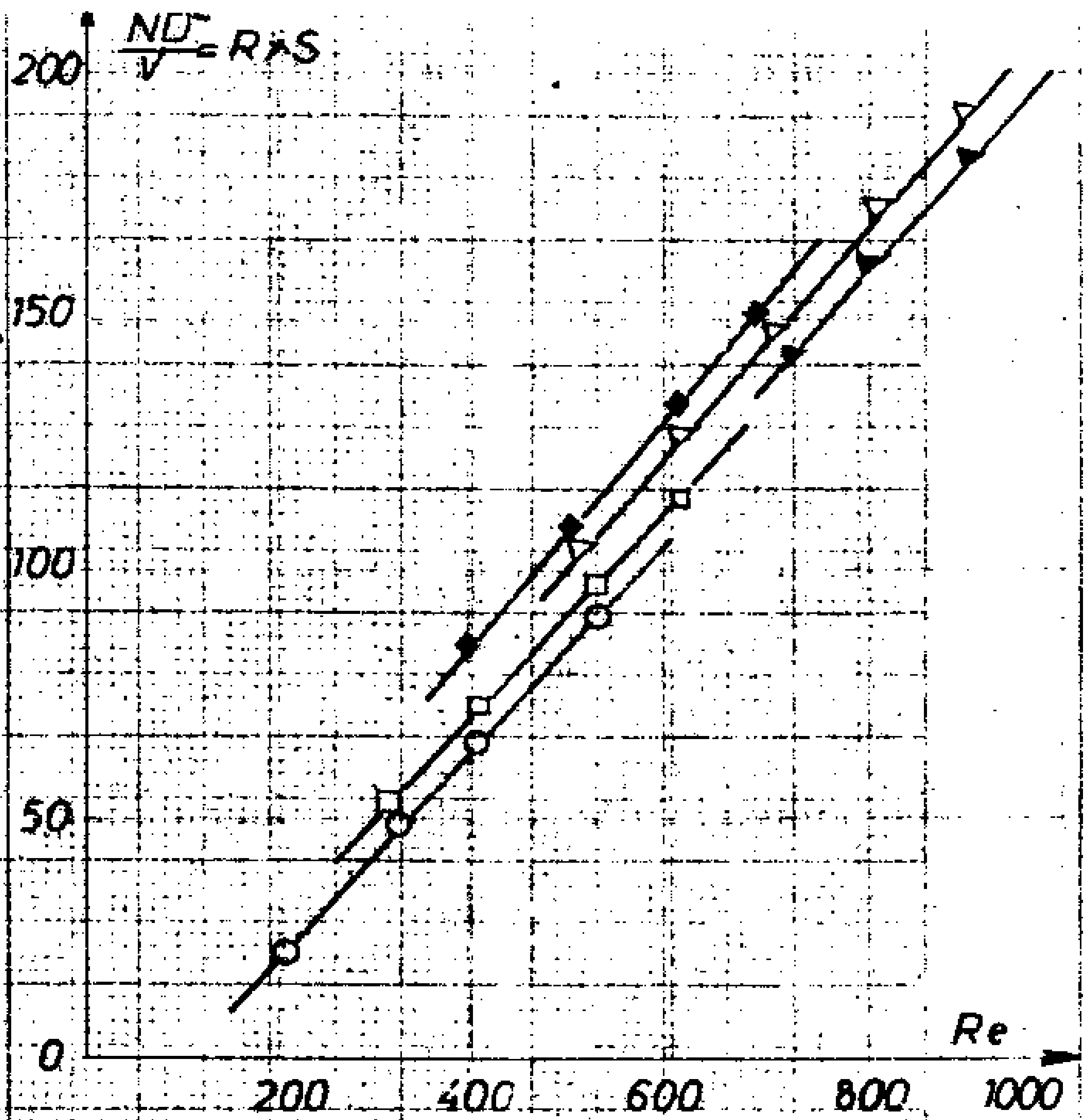
1) Zavisnost je linearna u ravni S.R – R ,
2) Opseg vrednosti S.R ima isti red veličina kao i R,
3) Rasturanje oglednih podataka se nešto smanjuje.

Rimoldi i drugi [40] i Kliford [8] su pokazali na osnovu svojih merenja, u svojim ogledima, da učestanost odvajanja vihora iza cilindra obrazuje razne krive za razne pritiske i temperature vazduha u ravni S – R (slike 24 i 26). Ovo potvrdjuje oglede Benara[44], koji je 1926.godine na Kongresu Mehanike u Cirihu saopštio:

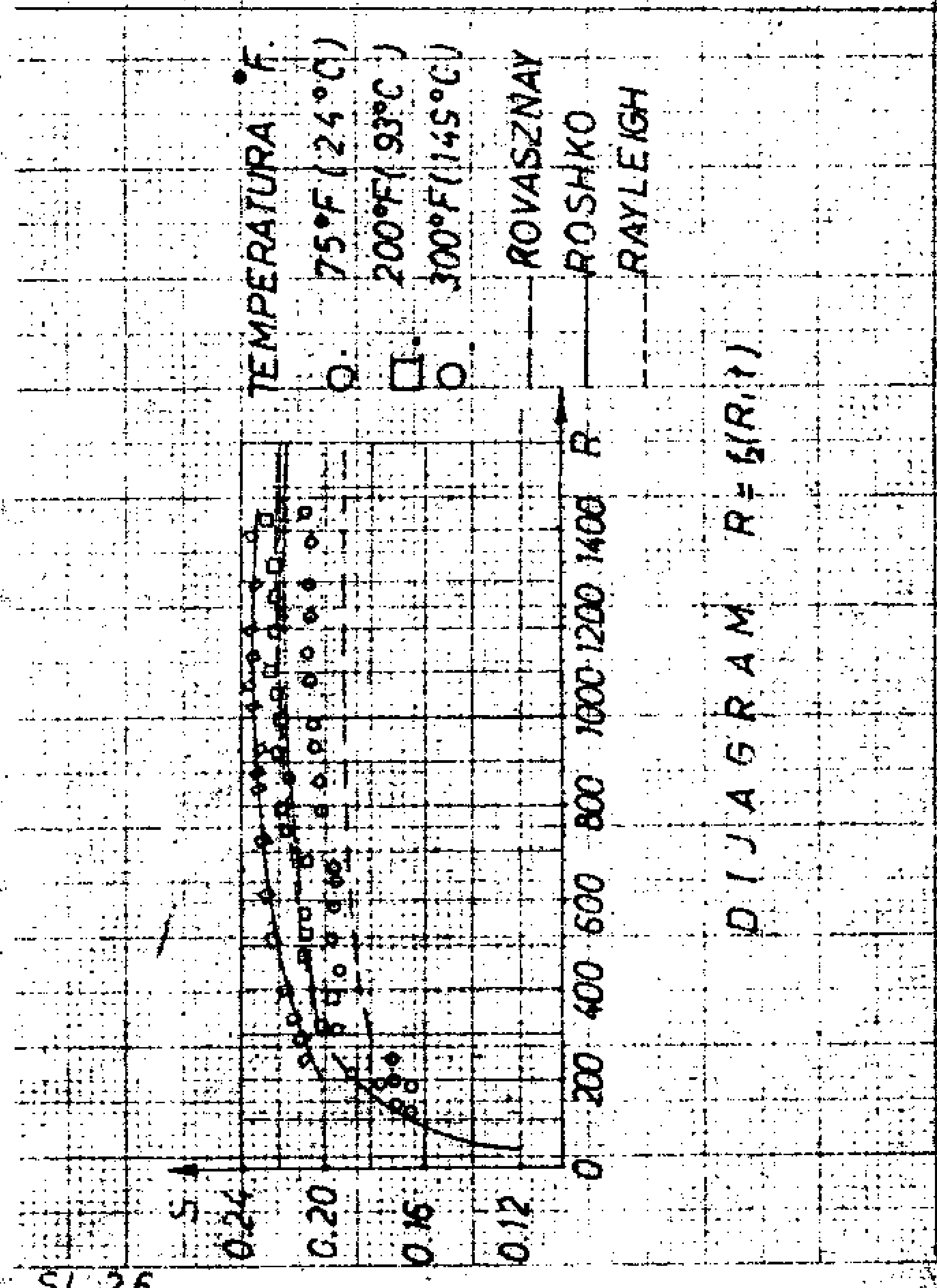
"Ja sam usvojio S – R ravan za predstavljanje 71 odnosne tačke za četiri tačnosti koje sam koristio... i bitan rezultat je da tačke leže na četiri krive linije, a ne na jednoj jedinoj". Dakle, on



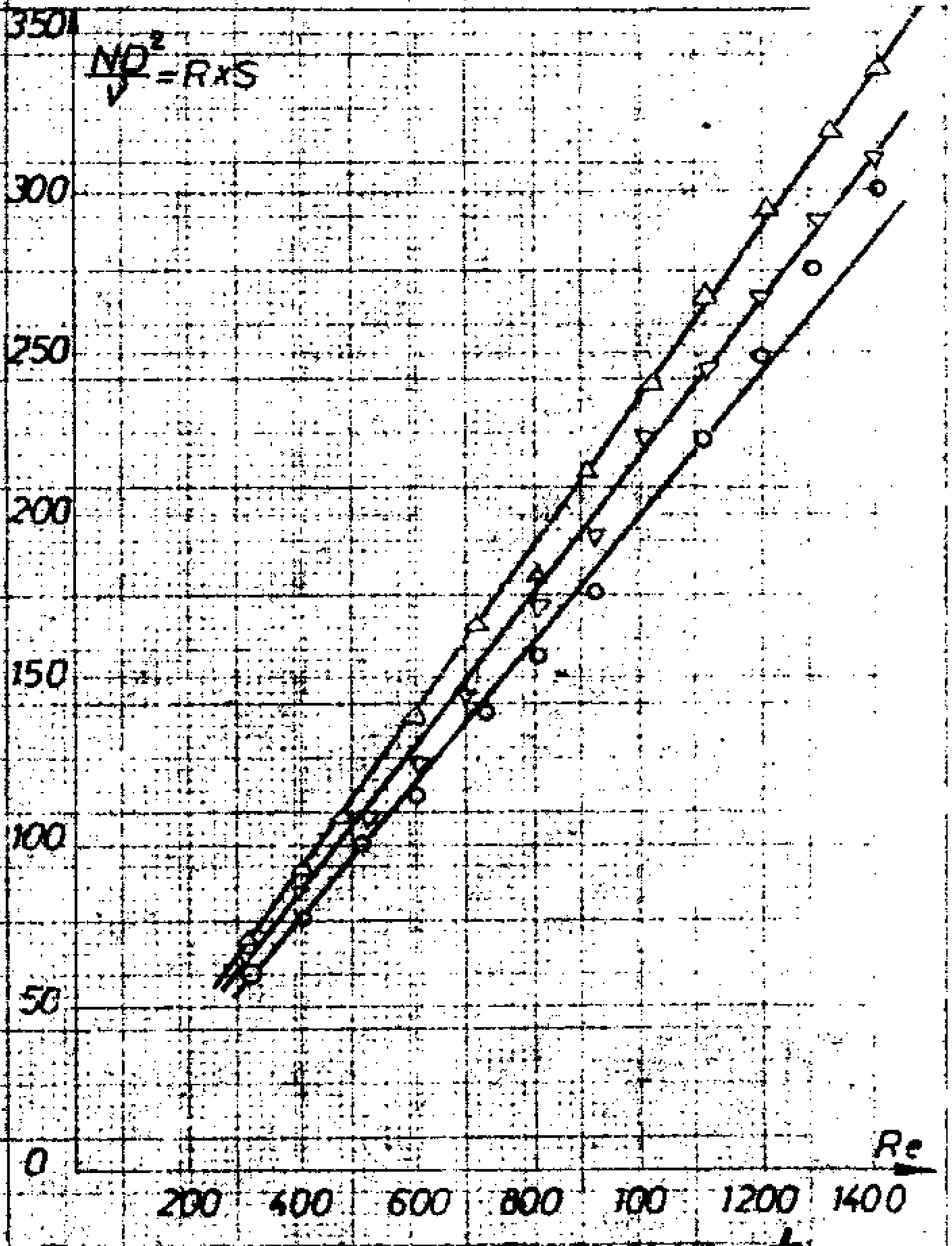
Sl. 24.



SL 25. DIJAGRAM R · S = f1 (R, p)



Sl. 26.



DIJAGRAM R · S = f2 (R, t)

je dobio razne krive za razne viskoznosti fluida.

Zanimljivo je spomenuti da ogledi Relfa [18] iz 1921. godine takodje pokazuju da za vodu i vazduh podaci obrazuju dve krive, ali pisac provlači jednu krivu liniju izmedju ovih vrednosti.

Roško [42c] je u svom komentaru na radove [40] i [8] tražio fizičko tumačenje ovih rezultata s obzirom na zakone dinamičke sličnosti. Zanimljivo je, stoga, opet navesti Benara koji je svoje saopštenje [4d] zaključio rečima:

"Moji ogledi vode rezultatima koji se ne slažu sa zakonima dinamičke sličnosti, i izgleda mi da se ovo razilaženje ne može pripisati greškama merenja".

Ako sada predstavimo ogledne podatke Rimoldija i drugih [40] i Kliforda [8] u ravni S·R – R kao što je učinjeno na slici 25 za razne pritiske i na slici 27 za razne temperature, očevidno je da linearnost ostaje očuvana u oba slučaja. Medjutim, za razne pritiske prave linije su skoro paralelne, dok za razne temperature prave linije imaju različite nagibe. Na osnovu ovih činjenica moguće je uopštiti korelaciju za odredjivanje učestanosti odvajanja vihora i za pogodno izabrani koordinatni početak predstaviti u obliku

$$S \cdot R = R\, g\,(t/t_o) - h\,(p/p_o) \qquad 7.9$$

gde su g – funkcija odnosa temperatura i h – funkcija odnosa pritisaka (indeks o odnosi se na atmosferske uslove).

Ako se primeni dimenziona analiza na proširenu zavisnost učestanosti odvajanja vihora uključivši još: pritisak p, temperaturu t, koeficijent provodjenja toplote λ i dinamičku viskoznost μ, dobija se posle odgovarajućeg postupka, analognog ranijem, da je

$$S \cdot R = f\,(R, M, Pr, \varkappa) \qquad 7.10$$

gde su: M – značilac Maha, Pr – značilac Prantla i $\varkappa$ – odnos specifičnih toplota.

Medjutim, u ogledima Rimoldija i drugih koji su izvedeni na konstantnoj temperaturi vazduha, dodatni značioci se ne menjaju sa pritiskom. Prema tome ovi značioci ne objašnjavaju očevidni uticaj pritiska. Jedino značilac Rejnoldsa zavisi od pritiska, tako da nuka od karakterističnih i fizičkih veličina koje ulaze u njega moraju da se promene i tada će svi podaci ležati na jednoj krivoj liniji.

U slučaju ogleda Kliforda [8], promena temperature u navedenoj oblasti će promeniti značilac Maha, ali ne i značilac Prantla. Izvesno je, medjutim, da su ogledi izvedjeni pri vrednosti značioca Maha dovoljno mali, tako da se uticaj stišljivosti može zanemariti. Stoga ovi značioci ne objašnjavaju očevidni uticaj temperature.

Jedino za slučaj Benarovih ogleda moguće je dati izvesno fizičko tumačenje zašto su dobijene četiri krive linije. Naime, Benar je u svojim ogledima, da bi ostvario razne viskoznosti vode, dodavao vodi razne količine šećera. Kao što je poznato, voda ima vrlo veliku specifičnu toplotu, dok šećer ima tri puta manju vrednost. Iz tog razloga procentualni sadržaj rastvorenog šećera u vodi znatno menja specifičnu toplotu vode, tako da se poslednji značilac jednačine 7.10 menja. Nažalost, nije moguće i kvantitativno pokazati ove zavisnosti, jer Benar nije objavio svoje podatke ogleda.

Na kraju ćemo podvući u čemu je osnovni prilog ovog poglavlja:

1) Pokazano je da linearnost pojava koju je moguće prikazati pogodnim izborom bezdimenzionih veličina daje manje rasturanja ogledanih podataka. Linearnost ostaje sačuvana i za podatke ogleda Rinaldija i Kliforda. Jedina razlika je da za razne pritiske dobijamo paralelne prave linije, a za razne temperature one imaju različite nagibe.

2) Na osnovu slika 25 i 27 postavljena je opšta korelacija koja može biti korisna za praktičnu primenu. Medjutim, oba niza navedenih ogleda nisu dovoljno potpuni za tabulisanje funkcija "g" i "h".

3) Pokazano je da pojava učestanosti odvajanja vihora ostaje teorijski neobjašnjena u slučaju raznih pritisaka i temperatura, a da je uz pomoć dimenzione analize nadjen put za prostije grafičko predstavljanje podataka. Izgleda da je razmimoilaženje izmedju teorije sličnosti i ogleda, koji je prvi uočio Benar za razne viskoznosti, potvr-

8. O POSTOJANJU DVOJNOG VRTLOŽNOG NIZA

U svim izvedenim ogledima [7] opšta osobina strujanja je konstantnost uzdužnog razmeštaja vihora "a". Za ma koji dvojni vihorni niz rastojanje izmedju susednih vihora u jednom nizu vidno je da ostaje konstantno, a povećanje razmeštajnog poretka je usled povećanja širine izmedju nizova "h". Vredno je napomenuti da konstantnost uzdužnog rasporeda znači da brzina translacije vihora ostaje nepromenjena. Opšti zaključak iz svih ogleda je da bez obzira da li se dvojni vihorni niz obrazuje kretanjem tela kroz fluid ili strujanjem fluida oko tela, razmeštajni odnos h/a, koji je izmeren, je znatno veći od onog predvidjenog Karmanovom teorijom i ne ostaje konstantan. Odstupanja se ne mogu pripisati uticaju zidova kanala u kome se ogledi izvode, jer je Rozenhed [42a] pokazao da je u praktičnim slučajevima veličina uticaja zidova zanemarljiva, a kada nije, onda teži da smanji odnos h/a.

Postavlja se pitanje da li je opravdano zaključiti da uočena odstupanja od Karmanove vrednosti $h/a = 0{,}281$ su samo usled nestabilnosti dvojnog vrtložnog niza. Ako je tako kako mogu ogledi Ričardsa [39], Prantla [36], Švabea [41a] i drugih istraživača da se smatraju za one u kojima se približno stabilni razmeštajni poredak postiže, a iščezava samo usled difuzije vihora. U svima takodje, razmeštajni odnos znatno prevazilazi teorijsku vrednost i nije konstantan, već raste.

Teorijski model koji je kvantitativno opisao pojavu dao je u svom klasičnom radu Karman [23]. Osnovne dve pretpostavke na kojima je zasnovao svoju teoriju jesu:

1) Stvarni vihori zamenjeni su osamljenim vrtlozima,

2) Ovakav idealni dvojni vrtložni niz se prostire na obe strane u beskonačnost.

Postavlja se pitanje u kojim slučajevima i u kojoj meri su ove dve pretpostavke opravdane? Da bi na ovo pitanje odgovorili potrebno je ispitati uticaj ne usvajanja ovih pretpostavki na mehanizam pojave. Prantl [36a] je uveo pojam graničnog sloja koji predstavlja onaj deo strujnog prostora u kome ne može da se zanemari uticaj viskoznosti. Vice versa, strujanje izvan graničnog sloja se može smatrati kao potencijalno strujanje, jer se viskoznost i njen uticaj u potpunosti mogu ispustiti iz razmatranja. U inženjerskim proračunima se usvaja da se granični sloj prostire sve do one oblasti na čijoj je granici brzina jednaka 99% od brzine odgovarajućeg potencijalnog strujanja.

Primenimo analogno rezonovanje u slučaju vihornog viskoznog strujanja i iznadjimo da li postoji oblast strujanja u kojoj se uticaj viskoznosti može da zanemari, odnosno u kojoj je strujanje istovetno strujanju oko osamljenog vrtloga. Da bi analogija bila potpuna, potrebno je da i smičući naponi imaju vrlo malu vrednost, odnosno da promena brzine u susednim strujnicama bude mala. I ovaj uslov je ispunjen kao što će biti kasnije pokazano.

Osnovna ideja je izbeći rešavanje nelinearnih Navije-Stoksovih diferencijalnih jednačina za granične uslove dvojnog niza vihora, time što ćemo rešenje linearne diferencijalne jednačine potencijalno osamljenog vrtloga proširiti na dvojni niz vihora, a pri tom ćemo dokazati da se uticaj viskoznosti u ovako idealizovanom slučaju ne može zanemariti samo u izvesnim ograničenim oblastima, u kojima se, opet za svaku ponaosob, može primeniti poznato neustaljeno rešenje difuzije vihora.

Opšta nelinearna diferencijalna jednačina koja se dobija iz punih Navije-Stoksovih jednačina glasi u polarnom koordinatnom sistemu

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + v_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = \nu \nabla^2 \Omega \qquad 8.1$$

gde je sa Ω označena jačina vihora koja u polarnom koordinatnom sistemu glasi

$$\Omega = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] . \qquad 8.2$$

Za slučaj jednog usamljenog vihora imamo

$$v_r = 0 \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0 , \qquad 8.3$$

pa se dobija iz jednačine 8.1 linearna diferencijalna jednačina u obliku

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \Omega , \qquad 8.4$$

čije je rešenje

$$\Omega = \frac{\Gamma_o}{8 \nu t} \exp \left(- \frac{r^2}{4 \nu t} \right) \qquad 8.5$$

S obzirom da imamo samo obimnu sastavnicu brzine te radi kraćeg pisanja stavimo $v_\theta = v$.

Raspodela obimne brzine za usamljeni vihor pri neustaljenom strujanju dobija se iz jednačina 8.2 i 8.5 u obliku

$$v = \frac{\Gamma}{2 \pi r} \left[1 - \exp \left(- \frac{r^2}{4 \nu t} \right) \right] , \qquad 8.6$$

dok je raspodela brzina usled vrtloga (podznaka p potiče od potencijalnog)

$$v_p = \frac{\Gamma}{2 \pi r} . \qquad 8.7$$

Potražimo kada se brzine usled potencijalnog vrtloga i viskoznog vihora razlikuju samo za 1%

$$v_p - v = 0{,}01 \, v_p . \qquad 8.8$$

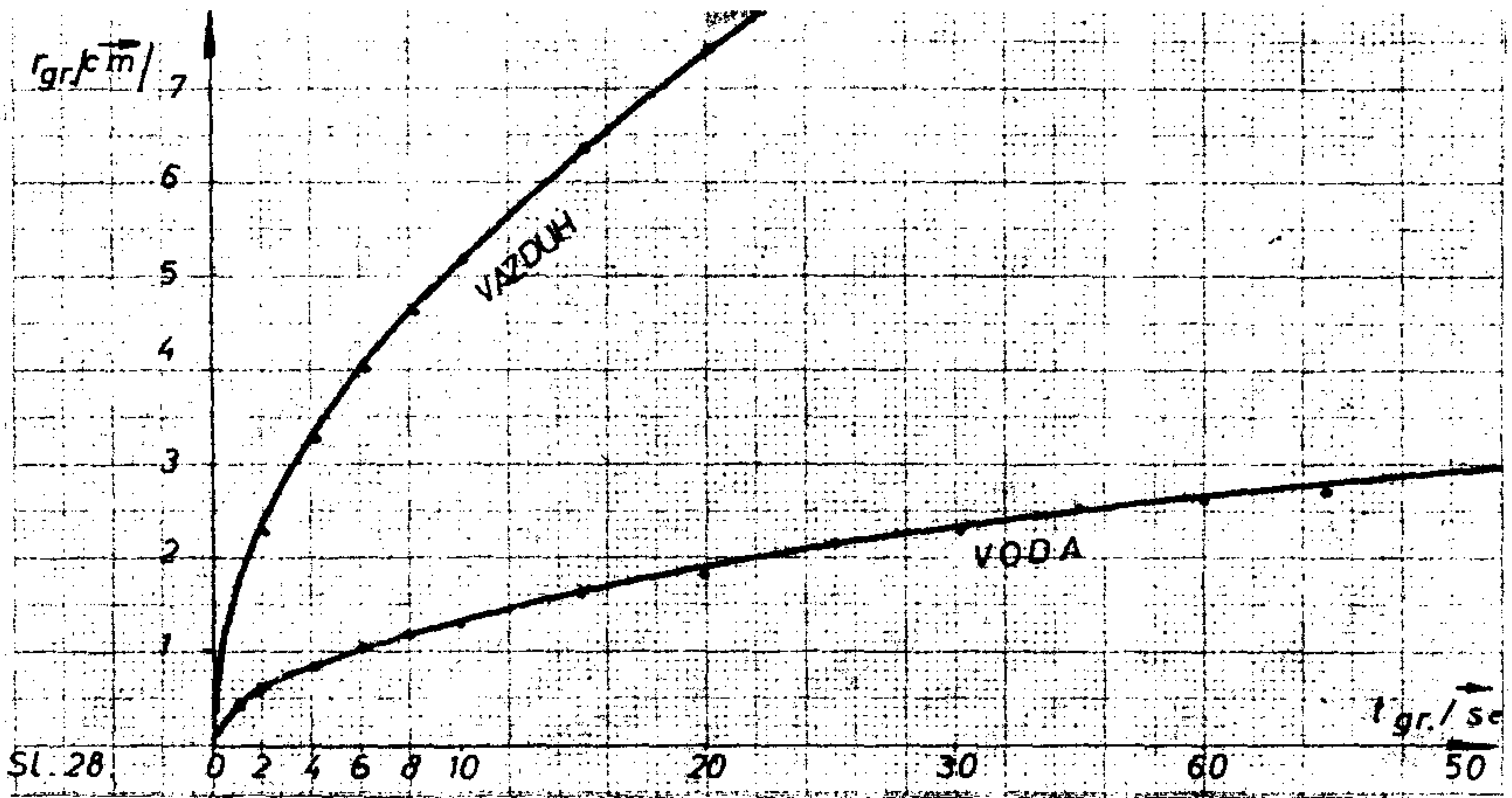
Ako se zamene jednačine 8.6 i 8.7 d

$$\exp \left(- \frac{r^2}{4 \nu t} \right) = 0{,}01 . \qquad 8.9$$

a ovo će biti za vrednost argumenta

$$\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right)_{gr} = 4{,}6 \; . \qquad 8.10$$

Dakle, u datom fluidu (ν) postoji za vihor odredjene "starosti" (t) granična vrednost poluprečnika (r) izvan koga se uticaj viskoznosti može da zanemari sa greškom manjom od 1%, odnosno, drugačije rečeno, strujanje izvan ovog viskoznog jezgra je potpuno istovetno kao da umesto viskoznog jezgra u središtu imamo potencijalno vrtložno vlakno. Na slici 28 prikazana je jednačina 8.10 koja pokazuje kako se viskozno jezgro širi u određenom trenutku vremena



Sl. 28. Prikaz zavisnosti graničnog poluprečnika viskoznog jezgra od "starosti" vihora.

Da bi ovaj zaključak važio u celoj oblasti potrebno je ispitati da li izvan viskoznog jezgra razlika brzina postaje sve manja sa udaljenjem. Iz jednačina 8.6 i 8.7 je evidentno da obe raspodele brzina imaju zajedničku asimptotu, jer su

$$\lim_{r \to \infty} v_p = \lim_{r \to \infty} \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \; , \qquad 8.7a$$

$$\lim_{r \to \infty} v = 0 \qquad 8.6a$$

Ovo predstavlja potreban uslov da se krive približavaju, dok za brzinu opadanja njihove razlike sa rastojanjem u svakom odredjenom trenutku sleduje

$$\lim_{r \to \infty} (v_p - v) = \lim_{r \to \infty} \frac{\Gamma}{2\pi r} \exp\left(- \frac{r^2}{4 \nu t}\right) = 0. \qquad 8.11$$

Dakle, sa povećanjem rastojanja se raspodela brzine usled vihora monotono i vrlo brzo približava raspodeli brzine usled potencijalnog vrtloga.

Nagib krive raspodele brzina na granici viskoznog jezgra iznosi

$$\frac{dv}{dr} = - 0{,}048 \frac{\Gamma}{2 \nu t_{gr}} \qquad 8.12$$

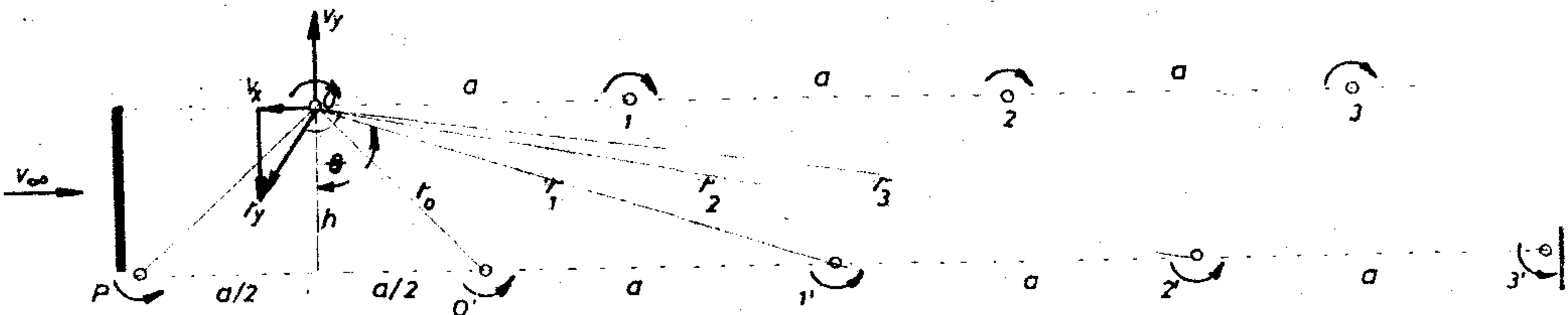
tako da se za dati fluid (ν) može lako propisati posle koga vremena je nagib krive proizvoljno mali.

Znači, raspodela brzina usled potencijalnog osamljenog vrtloga je asimptota viskoznih jezgara svih "starosti" t, što omogućuje da se izvede opštiji zaključak, da se i u slučaju dvojnog vihornog niza viskoznost mora uzeti u obzir samo u viskoznim jezgrima, koja su u zavisnosti od "starosti" vihora definisana jednačinom 8.10.

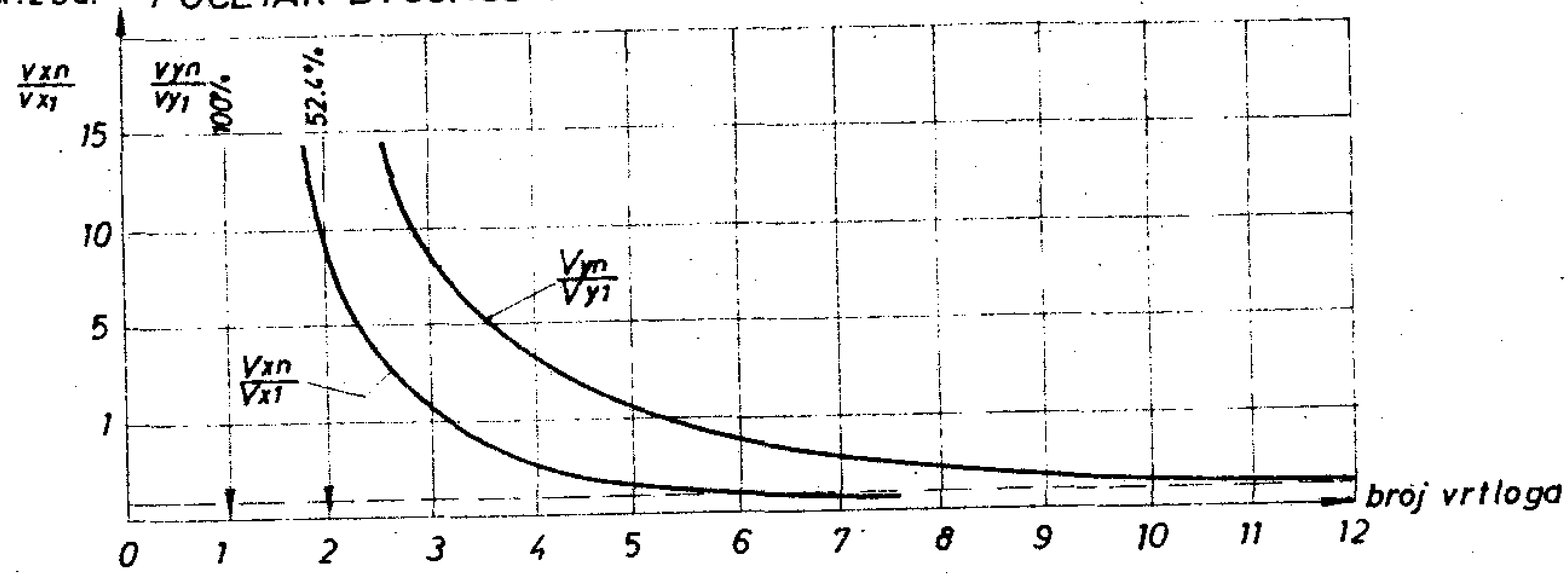
Predjimo sada na razmatranje opravdanosti druge Karmanove pretpostavke na kojoj se zasniva njegova teorija. Stoga posmatrajmo konačni dvojni vrtložni niz koji je šematski prikazan na sl. 29a. Indukovane brzine usled svih vrtloga u gornjem i donjem nizu stvaraju u uočenoj tački O bočnu i horizontalnu sastavnicu brzine. Kako se bočne sastavnice indukovane brzine usled vrtloga P' i Q' uzajamno poništavaju to posmatrajmo sledeći par vrtloga 1 i 1', pa prema Sl. 29a imamo

$$r_1^2 = a^2\left(\frac{9}{4} + \frac{h^2}{a^2} \right) \qquad 8.13$$

$$v_{x1} = \frac{\Gamma h}{2\pi r_1^2} = \frac{\Gamma h}{2 a^2 \pi \left(\frac{9}{4} + \frac{h^2}{a^2}\right)} \qquad 8.14$$



sl.29a. POČETAK DVOJNOG VRTLOŽNOG NIZA



sl. 29.b. SASTAVNICE INDUKOVANE BRZINE U ZAVISNOSTI OD DALJINE VRTLOGA

$$v_{y1} = \frac{\Gamma}{2\pi a} - \frac{\Gamma}{2\pi a}\frac{3a}{2r_1} = \frac{\Gamma}{2\pi a}\left(1 - \frac{3/2}{\frac{9}{4}+\frac{h^2}{a^2}}\, 2\right) \qquad 8.15$$

Potpuno analogno moguće je postaviti zavisnosti za "n"-ti vrtložni par u obliku

$$r_n^2 = a^2 \left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{a^2}\right] \qquad 8.13a$$

$$v_{xn} = \frac{\Gamma}{2\pi r_n}\,\frac{h}{r_n} = \frac{\Gamma h}{2\pi a^2}\,\frac{1}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{a^2}} \qquad 8.14a$$

$$v_{yn} = \frac{\Gamma}{2\pi na} + \frac{\Gamma}{2\pi r_n}\,\frac{(2n+1)a}{2r_n} = \frac{\Gamma}{2\pi a}\left[\frac{1}{n} - \frac{(2n+1)/2}{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{a^2}}\right] \qquad 8.15a$$

Sada primenimo ranije rezonovanje i postavimo pitanje posle kog vrtloga će indukovana brzina biti manja od 1% od vrednosti indukovane brzine najbližeg vrtloga, znači kada je

$$v_n = 0{,}01\, v_1 \qquad 8.16$$

Smenom ovih uslova u jednačine 8.14, 8.15, 8.14a i 8.15a dobija se kvadratna jednačina po "n" za horizontalne sastavnice brzine, odnosno kubna jednačina po "n" za bočne sastavnice brzine. Rešavanjem ovih jednačina dobijaju se vrednosti za "n" koje zadovoljavaju uslov 8.16.

Grafički prikaz ovih zavisnosti dat je na Sl. 29b iz koje se vidi da je horizontalna sastavnica brzine manja od 1% brzine već posle 6. vrtloga, dok je bočna sastavnica brzine manja od 1% svoje početne vrednosti tek iza 11. vrtloga.

Znači ukoliko se uočeni vrtlog 0 nalazi iza 11 vrtloga daleko od ploče (početka vrtložnog niza), tada će svi vrtlozi sa leve strane poništavati dejstvo 11 vrtloga sa desne strane, pa će indukovana brzina 12. vrtloga sa desne strane biti manja od 1% brzine koju on indukuje prvom susednom vrtlogu. Stoga je Karmanova pretpostavka da je vrtložni niz beskrajan sa obe strane opravdana unutar ovako usvojene tačnosti već iza 11. vrtloga iza ploče.

Postavlja se sledeće pitanje: dokle se ona može primenjivati?

Karmanova teorija se može primenjivati sve dok važe njegove dve pretpostavke, a to je do onog trenutka kada viskozna jezgra toliko narastu u toku "starenja" vihora, da obuhvate središte susednog "mladjeg" vihora. Viskozno jezgro definisano jednačinom 8.10 treba rešiti po vremenu t, a za poluprečnik uvrstiti najkraće rastojanje vihora, pa se dobija

$$t_{gr} = \frac{a^2}{18,4\,\nu}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]. \qquad 8.17$$

odnosno usvajanjem Karmanovog rasporeda h/a = 0,281 imamo

$$t_{gr} = \frac{a^2}{56\,\nu} \qquad 8.17a$$

Znači, kada vihor dostigne "starost" t_{gr} viskozno jezgro je došlo do središta susednog vihora, pa se uticaj viskoznosti mora uzimati u obzir. "Starost" vihora istovremeno predstavlja i njegovo rastojanje od tela, jer se vrtlozi kreću konstantnom brzinom u, pa je

$$t = n\frac{a}{u} , \qquad 8.18$$

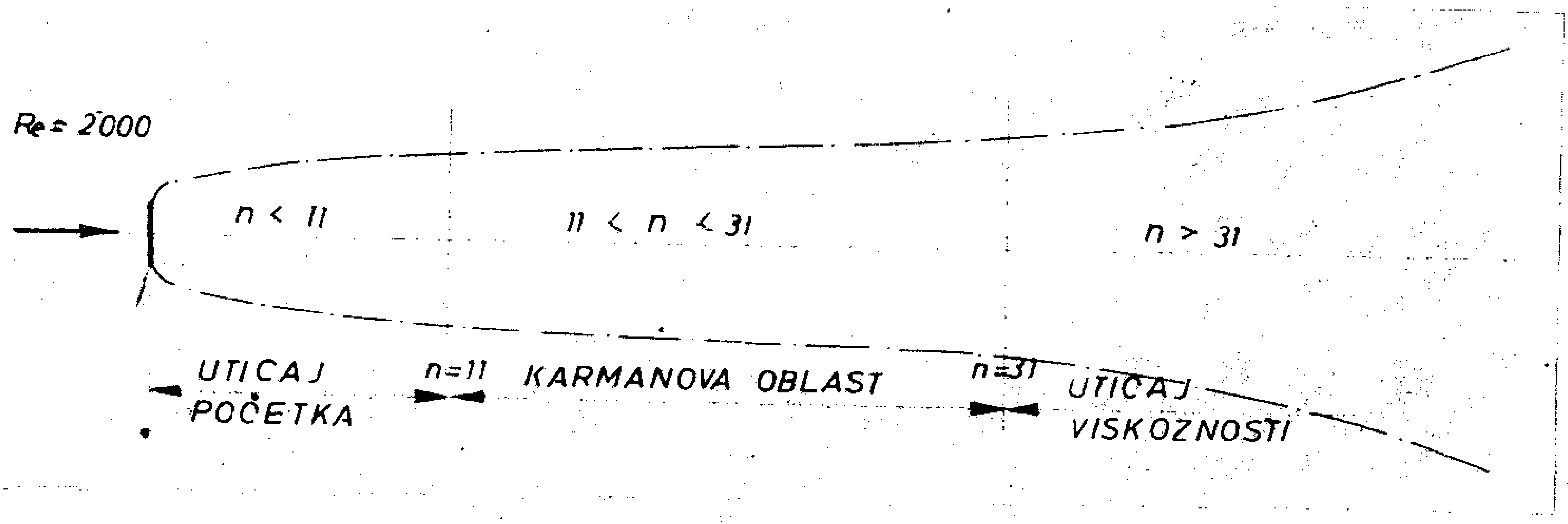
gde je n broj vrtloga koji se nalazi izmedju tela i uočenog vrtloga. Kako je prema oglednim ispitivanjima [26b] brzina vrtloga približno $u \approx 0,2\, V_{\infty}$ to smenom 8.18 u 8.17a dobijamo

$$n_{gr} = \frac{1}{280}\ \frac{a\, V_{\infty}}{\nu} = \frac{Re}{280}\ \frac{a}{d} , \qquad 8.19$$

gde je d najveća širina opticanog tela. Ako se iskoriste veličine koje su poznate iz ogleda [26], $h = 1,2\, d$ i $\frac{h}{a} = 0,281$, tada se dobija konačan obrazac za granični broj vrtloga na koji se može primeniti Karmanova teorija

$$n_{gr} = \frac{Re}{65,5} \qquad 8.19a$$

Kao primer navodi se da za $Re = 2000$ imamo $n_{gr} = 31$. Shematski predstavljen trag iza ploče dat je na slici 30.



Sl. 30. Tipovi oblasti u tragu iza ploče

Sada smo u mogućnosti da postavimo kriterijum za postojanje Karmanove oblasti dvojnog vihornog niza. Karmanova oblast će postojati samo tada, ako je vreme potrebno za stvaranje jedanaest vrtloga manje od vremena difuzije viskoznog jezgra do prvog susednog vihora. Ukoliko je ovo vreme jednako ili veće od vremena difuzije Karmanova oblast ne postoji u dvojnom vihornom nizu iza tela. Uslov postojanja je

$$n_{gr} > 11 \tag{8.20}$$

ili ako se iskoristi jednačina 8.19a dobija se

$$Re_{gr} > 716 \tag{8.20a}$$

Karmanova oblast postoji samo za veće Rejnoldsove brojeve od 716. Medjutim, kako se pojava dvojnog vihornog niza odigrava već od $Re > 40$, to Karmanova teorija ne važi u svim slučajevima koji su u intervalu

$$40 < Re < 716 \tag{8.21}$$

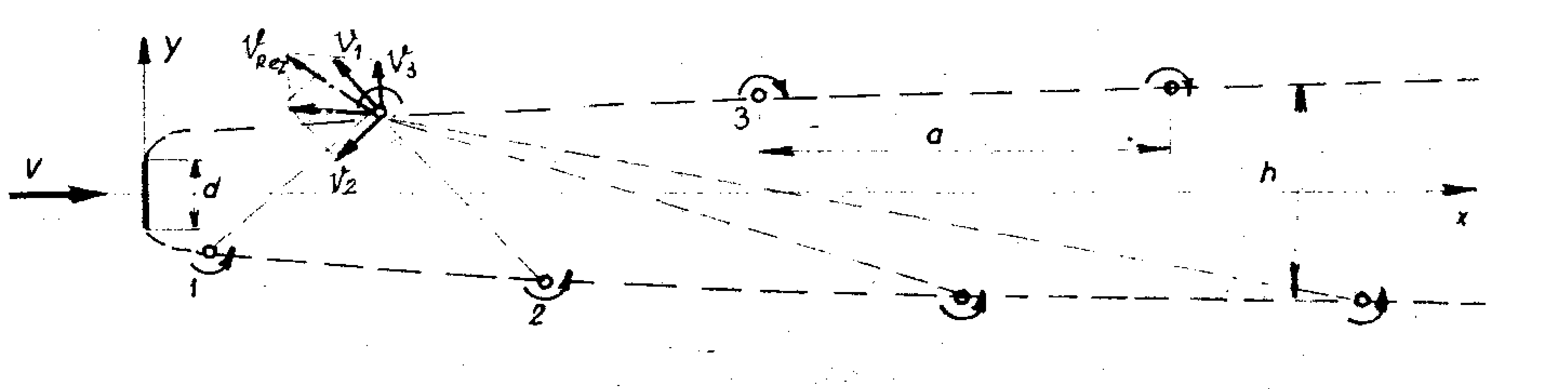
Kako se uticaj viskoznosti i konačnosti dvojnog vihornog niza odražava u njegovom širenju, kao što će biti pokazano, to je logično zašto je kod Feidža i Johansena [11], Ričardsa [39] i drugih ustanovljeno u jednom delu puta h/a = const., dok je kod velikog broja autora h/a raslo čak do vrednosti 0,5, jer su oni ispitivali u oblasti Rejnoldsovog značnica gde ne važi Karmanova teorija.

Na kraju još jedanput podvucimo da su dobijene brojne vrednosti vezane za pretpostavku o 99% brzine. Za neki drugi procenat bile bi i druge brojke. Usled nedostatka ogledних merenja celog traga iza tela nemoguće je proveriti opravdanost uvodjenja baš vrednosti od 99% brzine.

9. PRELAZ NA DVOJNI VIHORNI NIZ

9.1. Razmeštajni poredak na početku dvojnog vihornog niza

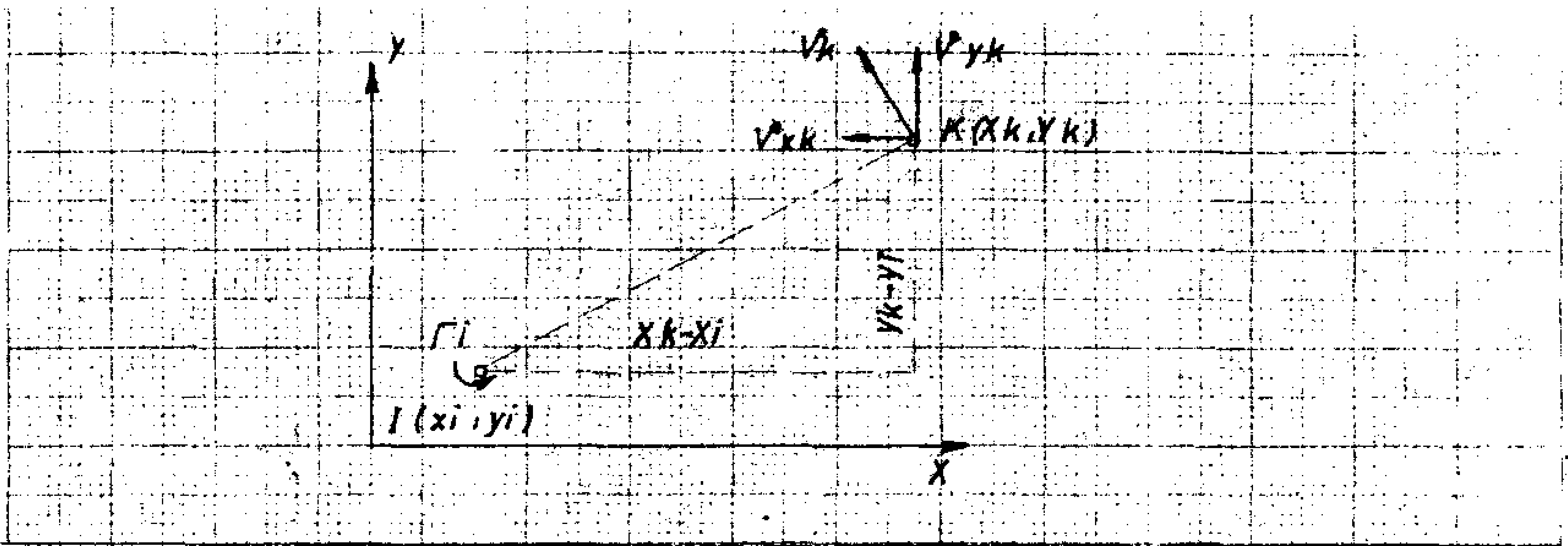
Da bi odredili putanje vihora u oblasti od nastajanja vihora iza tela do onoga preseka gde se uticaj početka vihornog niza praktično ne manifestuje, poćićemo od neke pretpostavljene krive linije unapred usvojene (kao na slici 31). Pretpostavka da su vihori vrtlozi je opravdana u ovoj oblasti dvojnog vihornog niza.



Sl. 31. Oblik putanje vihora neposredno iza ploče.

Već najgrublja geometrijska konstrukcija slaganja indukovanih brzina u rezultantu, za samo tri vihora sa donje i gornje strane (slika 31), pokazuje da se, usled nepostojanja odgovarajućih homolognih vihora sa leve strane koji bi poništili bočnu sastavnicu brzine, dvojni vihorni niz širi. Takodje je evidentno, da ukoliko smo dalje od ivice utoliko imamo veći broj vihora i sa leve strane koji poništavaju odgovarajući uticaj istog broja vihora sa desne strane. Stoga usvojena kriva linija koja predstavlja putanju vihora, mora da ima najveći nagib na početku, a horizontalnu tangentu na mestu gde počinje Karmanova oblast. Putanja se nalazi izmedju ordinata $\frac{d}{2} \leqslant y \leqslant \frac{h}{2}$ za usvojeni koordinatni početak kao na slici 31.

Kada je poznata putanja po kojoj se kreću vihori tada su i koordinate svih "n" vihora u gornjem nizu poznate (označimo ih sa $x_1', x_2', x_3', \dots, x_n', y_1', y_2', \dots, y_n'$), a kako je kriva putanje donjeg niza simetrična prvoj, te su poznate i koordinate donjih vihora (označimo ih sa x_1'', x_2'', ..., x_n'', y_1'', y_2'', ..., y_n''). Usvojimo koordinatni početak na sredini ploče. Ako posmatramo neki "i"-ti vrtlog i potražimo sastavnice brzine v_x i v_y koje on indukuje u središtu "k"-tog vrtloga dobija se



Sl. 32. Indukovana brzina u tački K usled vrtloga u tački I

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{y_k - y_i}{(x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2}\,,$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{x_k - x_i}{(x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2}\,. \qquad 9.1$$

U slučaju dvojnog vihornog niza imamo "n" vrtloga gde je n = 11. Tako da sistem jednačina 9.1 postaje

$$v_{xk} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\sum_1^n \frac{y_k' - y_n'}{(x_k' - x_n')^2 + (y_k' - y_n')^2}\Bigg|_{n\neq k} + \sum_1^n \frac{y_k' - y_n''}{(x_k' - x_n'')^2 + (y_k' - y_n'')^2}\right],$$

$$v_{yk} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\sum_1^n \frac{x_k' - x_n'}{(x_k' - x_n')^2 + (y_k' - y_n')^2}\Bigg|_{n\neq k} + \sum_1^n \frac{x_k' - x_n''}{(x_k' - x_n'')^2 + (y_k' - y_n'')^2}\right]. \qquad 9.2.$$

S druge strane, poznato je da se pravac tangente na putanji poklapa sa pravcem rezultujuće brzine. Ako je oblik putanje poznat i beskrajnosna brzina V_∞ = const. tada je

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k = \frac{v_{yk}}{V_\infty + v_{xk}} \qquad 9.3$$

Iz sistema jednačina 9.2. moguće je sračunati desnu stranu jednačine 9.3 za bilo koji položaj vihora "k". Ovaj sračunati nagib tangente na putanji sigurno će se razlikovati od onog unapred postavljenog. Stoga je potrebno konstruisati novu krivu liniju putanje vihora koja će imati nagib tangente dobijen jednačinom 9.3. Za novu putanju vihora imamo nove koordinate vihora, tako da je moguće iznova sračunati sastavnice brzine v_{xk} i v_{yk} prema jednačini 9.2 i smenom u jednačini 9.3 dobijamo novi nagib krive u drugom približenju. Ovaj postupak treba ponavljati sve dotle, dok se sračunati nagib ne poklopi sa prethodno dobivenim u onolikoj tačnosti koliko želimo.

Postavlja se pitanje, može li se sistem jednačina rešiti bez iteracije, odnosno može li se prva početna kriva linija da dobije, baš za prvo približenje, u analitičkom obliku. Radi ovoga ćemo uvesti i neke dopunske pretpostavke zasnovane na oglednim posmatranjima. Ustanovljeno je da je odnos širine dvojnog vihornog niza prema širini ploče približno h/d = 1,2 ili (1 − d/h) = 0,16 najveća razlika ordinata krive linije iznosi

$$\frac{h - d}{2} = 0{,}08\ h\ , \qquad 9.5$$

odnosno za Karmanov razmeštajni odnos h/a = 0,281

$$\frac{h - d}{2} = 0{,}08 \cdot 0{,}281 \cdot a = 0{,}022 \cdot a \qquad 9.5a$$

Vidi se da je razlika ordinata, koja je uvek manja od ove ekstremne vrednosti, veličina nižeg reda u odnosu na uzdužno rastojanje vihora pa je stoga opravdano uvesti sledeća zanemarivanja

$$y'_k - y'_n \approx 0$$
$$y'_k - y''_n \approx h \qquad 9.6$$

što smenom u sistem jednačine 9.2 daje

$$v_{xk} = -\frac{\Gamma h}{2\pi}\sum_1^n \frac{1}{(x'_k - x''_n)^2 + h^2},$$
$$v_{yk} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\sum_1^n \frac{x'_k - x'_n}{(x'_k-x'_n)^2+h^2}\Bigg|_{n\neq k} + \sum_1^n \frac{x'_k - x''_n}{(x'_k-x''_n)^2 + h^2}\right]. \qquad 9.7$$

Ako se sada zadržimo na prvom vihoru u nizu i njegovo rastojanje označimo sa "x" tada se apscise svih ostalih vihora gornjeg i donjeg niza mogu izraziti preko "x" u obliku

$$x'_n = x + n\cdot a,$$
$$x''_n = x + \frac{2n-1}{2}a, \qquad 9.8$$

za n = 0,1,2,...,10%

Smenom u sistem 9.7 dobija se

$$v_{xk} = -\frac{\Gamma h}{2\pi}\sum_1^n \frac{1}{(na)^2 + h^2}.$$
$$v_{yk} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\sum_1^n -\frac{na}{(na)^2 + h^2} + \sum_1^n \frac{\frac{2n-1}{2}a}{\left(\frac{2n-1}{2}a\right)^2 + h^2}\right] \qquad 9.9$$

odnosno smenom u jednačinu 9.3 izlazi da je

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_o = f_o\,(a,h,n). \qquad 9.10$$

Početni nagib tangente može da se unapred sračuna.

Potpuno analogno za bilo koji "k"-ti vihor na putanji dobijaju se dve jednačine

$$x_n' = x_k + (n - k)\, a \; ,$$
$$x_n'' = x_k + \left(\frac{2n - 1}{2} - k\right) a \; , \qquad 9.8a$$

što zmenom u sistem jednačina 9.9 i jednačinu 9.3 daje

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k = f_k\,(a,h,n) \; . \qquad 9.10a$$

Dakle, prvo se sračunaju nagibi tangente krive linije pa se ona tada naorta kao upisana linija, i tek tada izvrši tačni proračun po jednačinama 9.2 i 9.3, koji sada sa jednim približavanjem daje konačni oblik putanje vihora.

9.2. Karmanova oblast dvojnog vihornog niza

Za ovu oblast, kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, opravdane su pretpostavke da se dvojni vihorni niz može zameniti dvojnim vrtložnim nizom. Ali pretpostavka o zanemarivanju viskoznosti ne sme se protegnuti na celo strujno polje, već samo izvan viskoznih jezgara vihora.

Za kompleksni potencijal beskrajnog dvojnog vrtložnog niza Karman je našao sledeću funkciju

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \frac{\sin \frac{\pi}{a}(z - z_o)}{\sin \frac{\pi}{a}(z + z_o)} \; , \qquad 9.11$$

gde je koordinatni sistem usvojen tako da se prvi vrtlog nalazi na mestu

$$z_o = a/4 + i \cdot h/2 \; , \qquad 9.12$$

odnosno kompleksna brzina polja

$$v_x - i\, v_y = -\frac{i\Gamma}{a} \; \frac{\cosh\left(\frac{\pi h}{a}\right)}{i \sinh\left(\frac{\pi h}{a}\right) + \cos\left(\frac{2\pi z}{a}\right)} \qquad 9.13$$

Ako posmatramo raspodelu brzina duž ordinatne ose koja prolazi kroz središte vrtloga kao na slici 33, tada je kompleksna promenljiva oblika

$$z = a/4 + i\,y \quad , \qquad 9.12a$$

što smenom u jednačinu 9.13 i razdvajanjem realnog i imaginarnog dela daje

$$v_x = -\frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cosh\left(\frac{\pi h}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi h}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi}{a}\,y\right)} \quad ; \quad v_y = 0 \; . \qquad 9.14$$

Ovo predstavlja raspodelu brzina u preseku "y" jednoga vrtloga, koje su nastale od indukovanih brzina svih ostalih vrtloga, ali i usled posmatranog vrtloga koji smo presekli. Medjutim, svi ostali vihori se mogu smatrati vrtlozima, jer su dovoljno daleko, osim onog vrtloga koga smo presekli i koji ima viskozno jezgro. Stoga je neophodno u jednačini 9.14 oduzeti indukovane brzine presečenog vrtloga koje on stvara kao vrtlog i dodati indukovane brzine koje na njegovom mestu stvara vihor. Na osnovu toga dobijamo

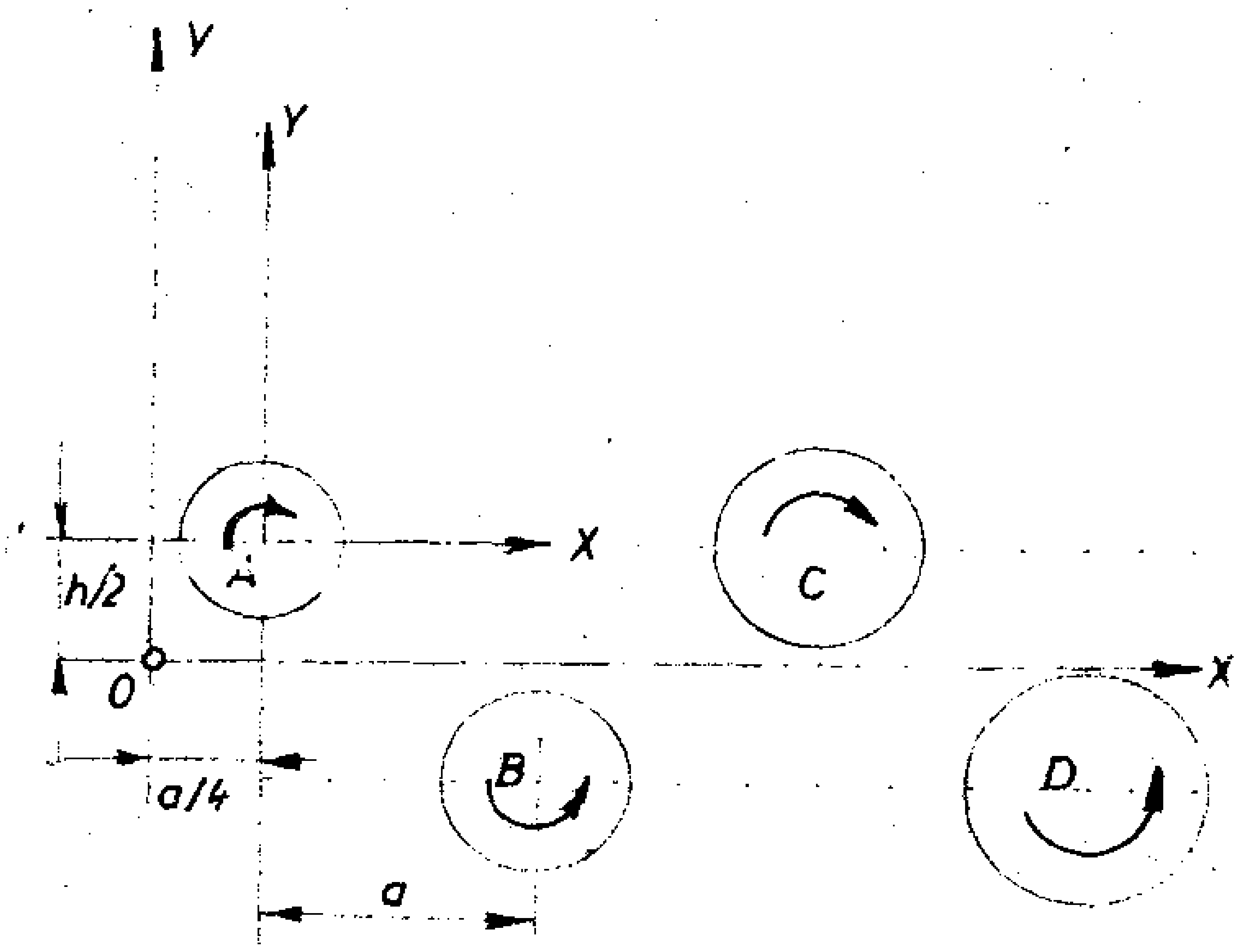
$$v_x = -\frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cosh\left(\frac{\pi h}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi h}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi}{a}\,y\right)} - \frac{\Gamma}{2\pi\left(y - \frac{h}{2}\right)} + \frac{\Gamma}{2\pi\left(y - \frac{h}{2}\right)}\left[1 - \exp\left(-\frac{\left(y - \frac{h}{2}\right)^2}{4\nu t}\right)\right] ,$$

ili posle sredjivanja imamo

$$v_x = -\frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cosh\left(\frac{\pi h}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi h}{a}\right) - \sinh\left(\frac{2\pi}{a}\,y\right)} - \frac{\Gamma}{2\pi\left(y-\frac{h}{2}\right)}\exp\left(-\frac{\left(y-\frac{h}{2}\right)^2}{4\nu t}\right) \qquad 9.15$$

Ako radi kratkoće uvedemo umesto "y" - "Y" po jednačini

$$Y = y - h/2 \qquad 9.16$$



LEGENDA:
OXY – USVOJENI KOORDINATNI SISTEM KOD KARMANA
OXY – USVOJENI KOORDINATNI SISTEM PRI ODREĐIVANJU RASPODELE BRZINE VIHORA A DUŽ OSE Y

Sl. 33. Shema Karmanove oblasti dvojnog vihornog niza

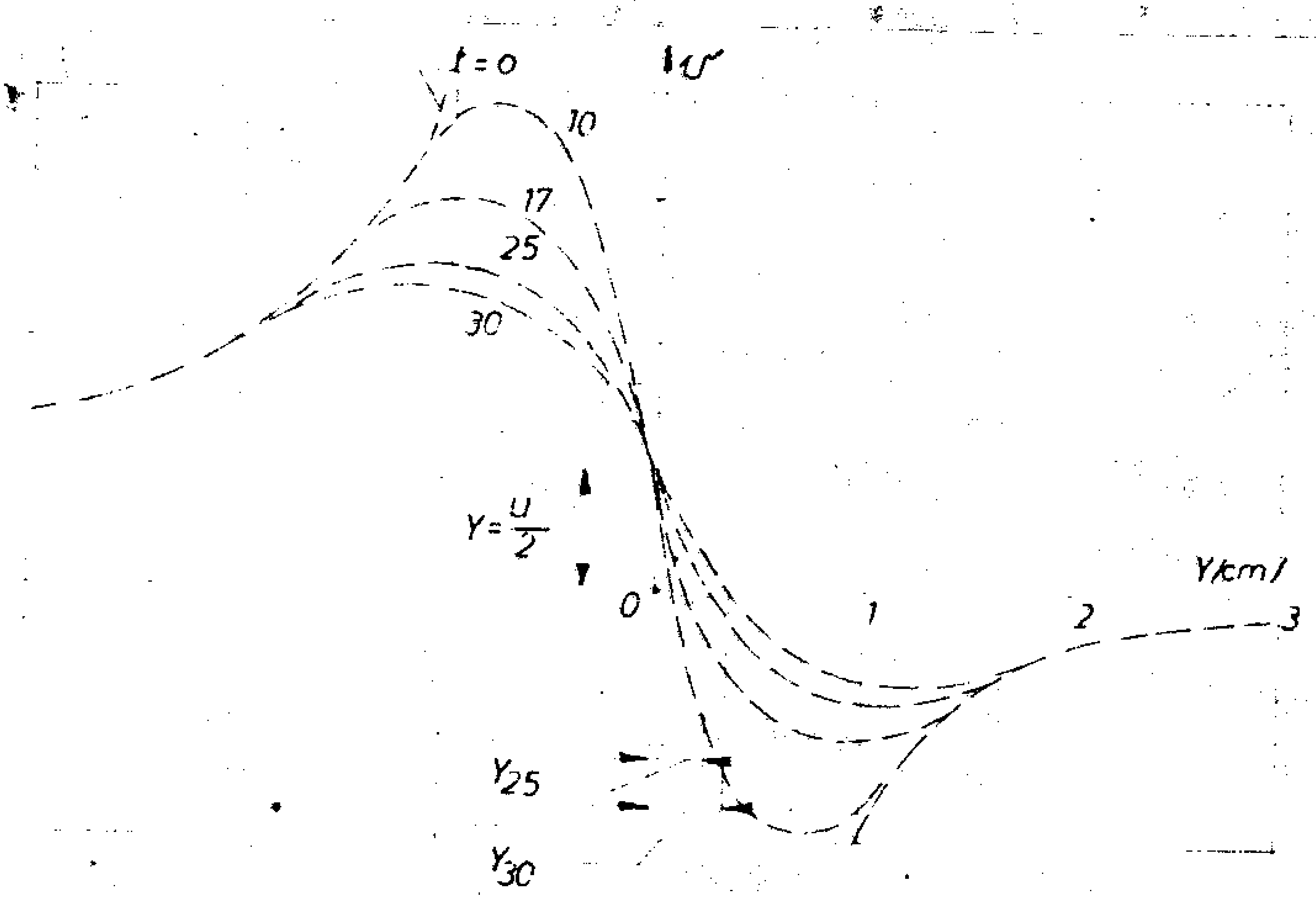
$$v_x = -\frac{\Gamma}{a}\,\frac{\operatorname{ctgh}\left(\frac{\pi h}{a}\right)}{1-\operatorname{ctgh}\left(\frac{\pi h}{a}\right)\sinh\left(\frac{2\pi}{a}y\right)-\cosh\left(\frac{2\pi}{a}y\right)} - \frac{\Gamma}{2\pi y}\exp\left(-\frac{y^2}{4\nu t}\right) \qquad 9.17$$

Ovo ustvari predstavlja raspodelu brzina ako je ishodište koordinatnog sistema u središtu vihora "A". Dobijenu relaciju 9.15 za raspodel brzine duž "y"-ose postavio je Huker [20], ali ne za Karmanova oblast dvojnog vihornog niza za koju ona jedino važi, već za idealni slučaj kada bi Karmanev dvojni vrtložni niz iznenada u nekom trenutku vremena postao viskozan. Znači da njegovo izvodjenje važi u idealiziranom slučaju ako su svi vrtlozi iste starosti.

Sa novo uvedenim pojmom Karmanove oblasti u dvojnom vihornom nizu moguće je uvesti dalja uopštavanja. Naime, raspodela brzina duž "y"-ose u Karmanovoj oblasti se menja od vihora do vihora na ist njihove povećane "starosti" t, tako da jednačina 9.17 daje raspodelu brzina za sve vihore u intervalu vremena

$$t_{11} < t_n < t_{gr}$$

Grafički prikaz raspodele brzina prema jednačini 9.17 za vodu i Karmanovu vrtložnu konfiguraciju dao je Huker [19] (slika 34). Sve krive se seku u jednoj tački čija je ordinata $y = h/2$, jer tu je brzina usled samog vihora koji je posmatran nula, pa ordinata - brzina predstavlja samo uticaj ostalih vrtloga koji su nezavisni od vremena. Ovo je, znači, uniformna brzina kojom se ceo sistem kreće usled medjusobnog dejstva i pokazuje se da ne zavisi od viskoznosti. Otud difuzija viskoznog jezgra ne prouzrokuje širenje puta u Karmanovoj oblasti.



Sl. 34. Prikaz jednačine 9.17 za vodu (Huker [20]).

Zanimljive su presečne tačke krivih linija sa osom Y, jer je tu $v_x = 0$. U svim snimcima prilikom posmatranja nam izgleda da se fluid okreće oko ovih prividnih središta - tačaka nulte brzine (slika

Stvarna središta ostaju tamo gde je središte obrtanja samog vihora, koje se u toku vremena ne menja, jer je difuzija uvek simetrična. Ovo samo ukazuje da se u Karmanovoj oblasti ne poklapaju središte obrtanja vihora (cirkulacija) i prividno središte oko koga se fluid obrće. Huker [20] je tako pokazao da je širenje dvojnog vihornog niza samo prividno ali ne i stvarno.

Potpuno analogno se može naći i raspodela brzine u pravcu "x"-ose ako se u jednačini 9.12 stavi

$$z = x + i\cdot h/2 \qquad 9.12b$$

tako da se dobija

$$v_y = \frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{\operatorname{tgh}^2\left(\frac{\pi h}{a}\right)\left[1-\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]^2+\cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}\,,$$

$$v_x = 0 \qquad 9.17$$

Ako se sada vrtlog zameni vihorom, analogno ranijem, imamo

$$v_y = \frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cosh^2\left(\frac{\pi h}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)}{2\sinh^2\left(\frac{\pi h}{a}\right)\left[1-\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]+\cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)} +$$

$$+\frac{\Gamma}{2\pi\left(x-\frac{a}{4}\right)}\exp\left(-\frac{\left(x-\frac{a}{4}\right)^2}{4\nu t}\right) \qquad 9.18$$

Pomeranjem koordinatnog početka u središte vihora transformacijom

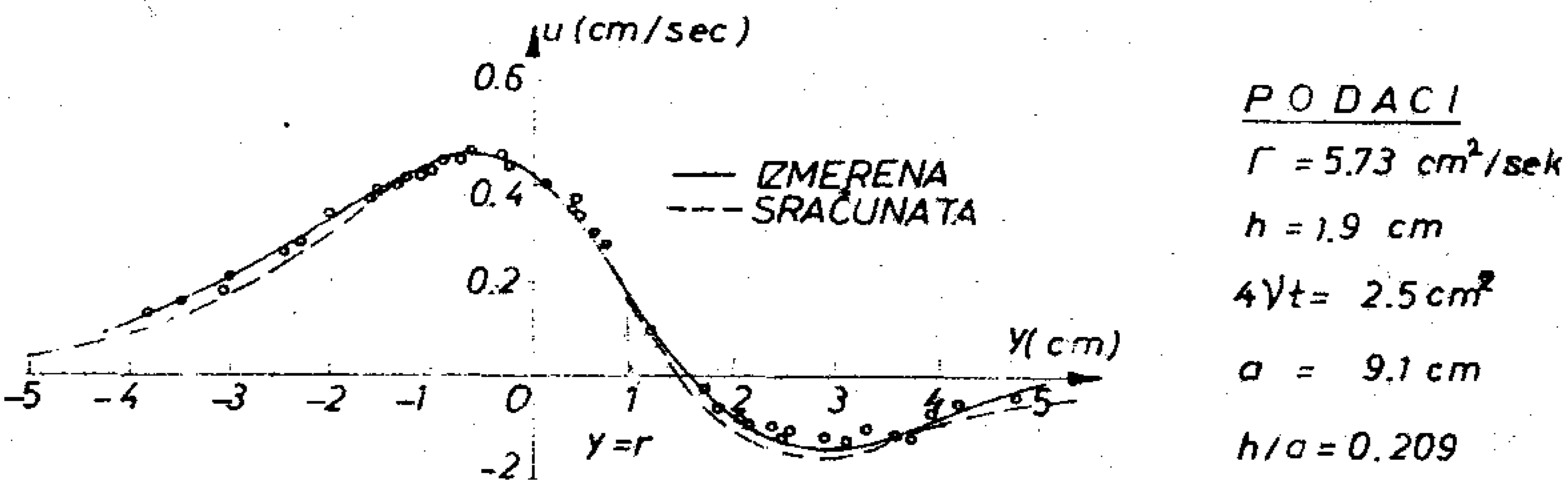
$$X = x - a/4 \qquad 9.19$$

dobijamo

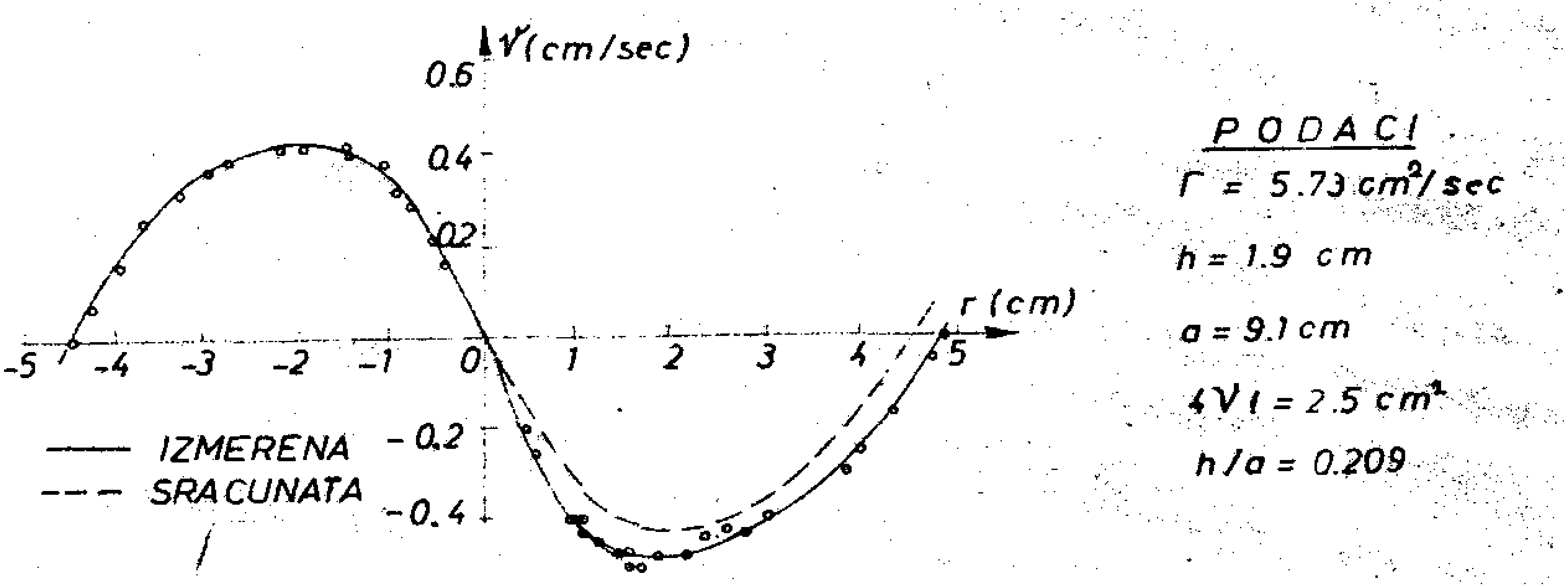
$$v_y = \frac{\Gamma}{a}\,\frac{\cosh^2\left(\frac{\pi h}{a}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}X\right)}{2\sinh^2\left(\frac{\pi h}{a}\right)\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}X\right)\right]+\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}X\right)} +$$

$$+\frac{\Gamma}{2\pi X}\exp\left(-\frac{X^2}{4\nu t}\right) \qquad 9.20$$

dobijaju se ravne raspodele za ravne "starosti" vihora.



Sl. 35. Izmereni i sračunati profili brzina u vihoru duž ose upravne na dvojni niz vihora (Time [46])

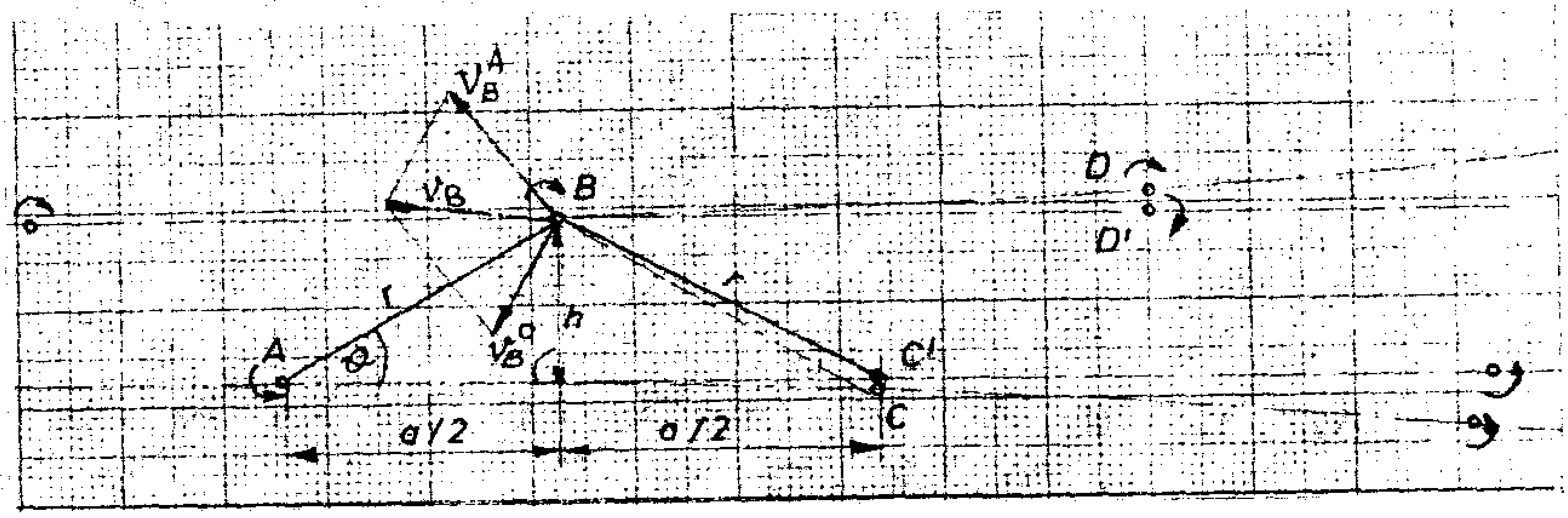


Sl. 36. Izmereni i sračunati profili brzina u vihoru duž ose paralelne dvojnom nizu (Time [46])

Ovo u potpunosti potvrdjuju ogledna istraživanja Timea [46] slike 35 i 36.

10.3. Širenje dvojnog vihornog niza usled difuzije vihora

Od onog trenutka kada viskozno jezgro naraste toliko da dodje do središta najbližeg susednog vihora počinje širenje dvojnog vihornog niza. Uzrok širenja jeste difuzija viskoznog jezgra vihora usled čega kao posledica nastaje smanjenje indukovane brzine unutar viskoznog jezgra u poredjenju sa indukovanom brzinom vrtloga. Ovo dovodi do stvaranja bočne komponente brzine kao što je shematski pretstavljeno na slici 37



Sl. 37. Slaganje indukovanih brzina pri difuziji vihora.

U prvom približavanju učiniće se sledeće dve pretpostavke radi uprošćavanja zadatka:

1) Pretpostavićemo da je susedni vihor C koji je homolog vihoru A, ostao na pravoj koja je produžetak Karmanovog dvojnog vrtložnog niza.

2) Pretpostavićemo da se svi ostali vihori takodje nalaze na pravama Karmanovog dvojnog vrtložnog niza, a ne na novoj putanji koja se širi.

Opravdanje za prvu pretpostavku zasnovano je na očekivanju da je širenje – bočno kretanje vihora veličina nižeg reda u odnosu na uzdužno rastojanje "a". Sa ovom pretpostavkom, s obzirom da je rastojanje "r" skoro istovetno, veličine indukovane brzine su iste, a razlika nastaje jedino u pravcu (tačan pravac dat je crtkasto na slici 37). Iz sheme je evidentno da je greška u odnosu na bočnu sastavnicu brzine vrlo mala, dok se uzdužna sastavni... tako da kompenzira smanjenje rezultujuće vrednosti in... usled uticaja viskoznosti. Stoga sledi da vihori putuju ... menjenom brzinom i u oblasti širenja dvojnog vihornog ... fuzije.

Opravdanje za drugu pretpostavku ne može više ... za prvu, jer je sigurno da širenje odnosno bočna brzi... nadalje mala veličina u odnosu na uzdužno rastojanje. ... u očekivanju da su indukovane brzine usled ostalih ... po svojoj vrednosti i manje ukoliko su oni udaljeniji, a intenzitet je ... kao i homolognih vihora sa leve strane, jer se svi ... kao vrtlozi. Dakle u slučaju, kada bi vihori ležali ... dvojnog Karmanovog niza rezultujuće bočne brzine ... ali usled širenja javlja se izvesno skretanje po pravcu ... brzine, čija se bočna komponenta smatra zanemarljivom, ... takva da održava konstantnu brzinu vihornog sistema.

Bočna sastavnica indukovane brzine u tački ... A (slika 37), čije viskozno jezgro još nije doprlo ... vetna je indukovanoj brzini vrtloga u tački A.

$$v_B^A = \frac{\Gamma}{2\pi r}\cdot\frac{a}{2r} = \frac{\Gamma}{\pi a\left[1 + 4(h/a)^2\right]} ,$$

i ako se usvoji Karmanov razmeštajni odnos $h/a = 0,$...

$$v_B^A = \frac{\Gamma}{1,316\, a\pi}$$

Bočna sastavnica indukovane brzine u tački B ... C, čije viskozno jezgro je obuhvatilo središte vihora B ... jednačini 9,6

$$v_B^C = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\,\frac{a}{2r}\left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) = -\frac{\Gamma}{1,316\, a\pi}(1 - \ldots$$

Rezultujuća bočna sastavnica brzine u tački B u okviru učinjenih pretpostavki je

$$v_B^A + v_B^C = v_{By} = \frac{\Gamma}{1{,}316\ a\,\pi}\, e^{-\frac{0{,}082\ a^2}{\nu t}} \qquad 9.23$$

Ako se izrazi bočna sastavnica brzine kao izvod po vremenu imamo

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\Gamma}{1{,}316\ a\,\pi}\, e^{-\frac{0{,}082\ a^2}{\nu t}} \,; \qquad 9.24$$

i shodno učinjenim pretpostavkama uzdužna sastavnica brzine je

$$\frac{dx}{dt} = v_{Bx} = u = const. \qquad \therefore \qquad x = ut \qquad 9.25$$

Sada ako se iz jednačina 9.24 i 9.25 eliminiše parametar "t" dobija se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Gamma}{1{,}316\ a\,\pi}\, e^{-\frac{0{,}082\ a^2 u}{\nu}\cdot\frac{1}{x}} \qquad 9.26$$

gde je početak koordinatnog sistema usvojen tamo gde počinje širenje dvojnog vihornog niza (na granici sa Karmanovom oblašću). Ako radi kratkoće uvedemo nove oznake

$$\frac{\Gamma}{1{,}316\ a\pi u} = A \ ; \qquad \frac{0{,}082\ a^2 u}{\nu} = B \ , \qquad 9.26a$$

tada se zadatak svodi na izračunavanje sledećeg integrala

$$y = A \int e^{-\frac{B}{x}}\, dx \ . \qquad 9.27$$

Uvodjenjem nove smene promenljivih

$$z = \frac{B}{x} \ ; \quad dz = -\frac{B}{x^2}\, dx \ ; \quad dx = -\frac{dz \cdot B}{z^2}$$

integral se svodi na oblik

$$y = -AB \int \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz \ . \qquad 9.27a$$

Sada sprovedimo delimičnu integraciju posle čega dobijamo

$$y = AB \left[\frac{e^{-z}}{z} + \int \frac{e^{-z}}{z} dz \right] . \qquad 9.28$$

Eksponencijalna integralna funkcija je definisana kao

$$- Ei\ (-z) = \int_{z}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} > 0 \ , \quad za\ 0 < z < \infty$$

tako da se rešenje integrala dobija u obliku

$$y = A \left[x\, e^{-\frac{B}{x}} - B\, Ei\ \left(- \frac{B}{x}\right)\right] . \qquad 9.28a$$

Veličina konstante A se određuje uz pomoć Kaymanovog obrasca za vrednost cirkulacije vrtloga, a koji glasi

$$\Gamma = 2\sqrt{2}\, a\, u\ ,$$

što smenom u jednačinu 9.26a daje

$$A = \frac{\Gamma}{1{,}316\,\pi\, a\, u} = \frac{2\sqrt{2}}{1{,}316\,\pi} = 0{,}684.$$

Konstanta B, koja ima dimenziju dužine , može se uprostiti uz pomoć značioca Rejnoldsa i uzdužnog rastojanja vihora ža" dećim transformacijama (jednačina 9.26a)

$$B = \frac{0{,}082\, a^2 u}{V_\infty\, d} \frac{V_\infty d}{\nu} = 0{,}082 \frac{u}{V_\infty} \cdot \frac{h}{d} \frac{a}{h} Re\ ,$$

Ako za vrednosti ovih odnosa uvrstimo one sa strane 67 dobijamo

$$B = 0{,}082 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}57 \cdot (0{,}281)^{-1} a\ Re = 0{,}092 \cdot a \cdot Re$$

Kda uvrstimo ove vrednosti u jednačinu 9.28a imamo

$$y = 0{,}685 \left[x\, e^{-0{,}092 \frac{a}{x} Re} - 0{,}092 \cdot a \cdot Re \cdot Ei\left(-0{,}092 \frac{a}{x} Re\right)\right]$$

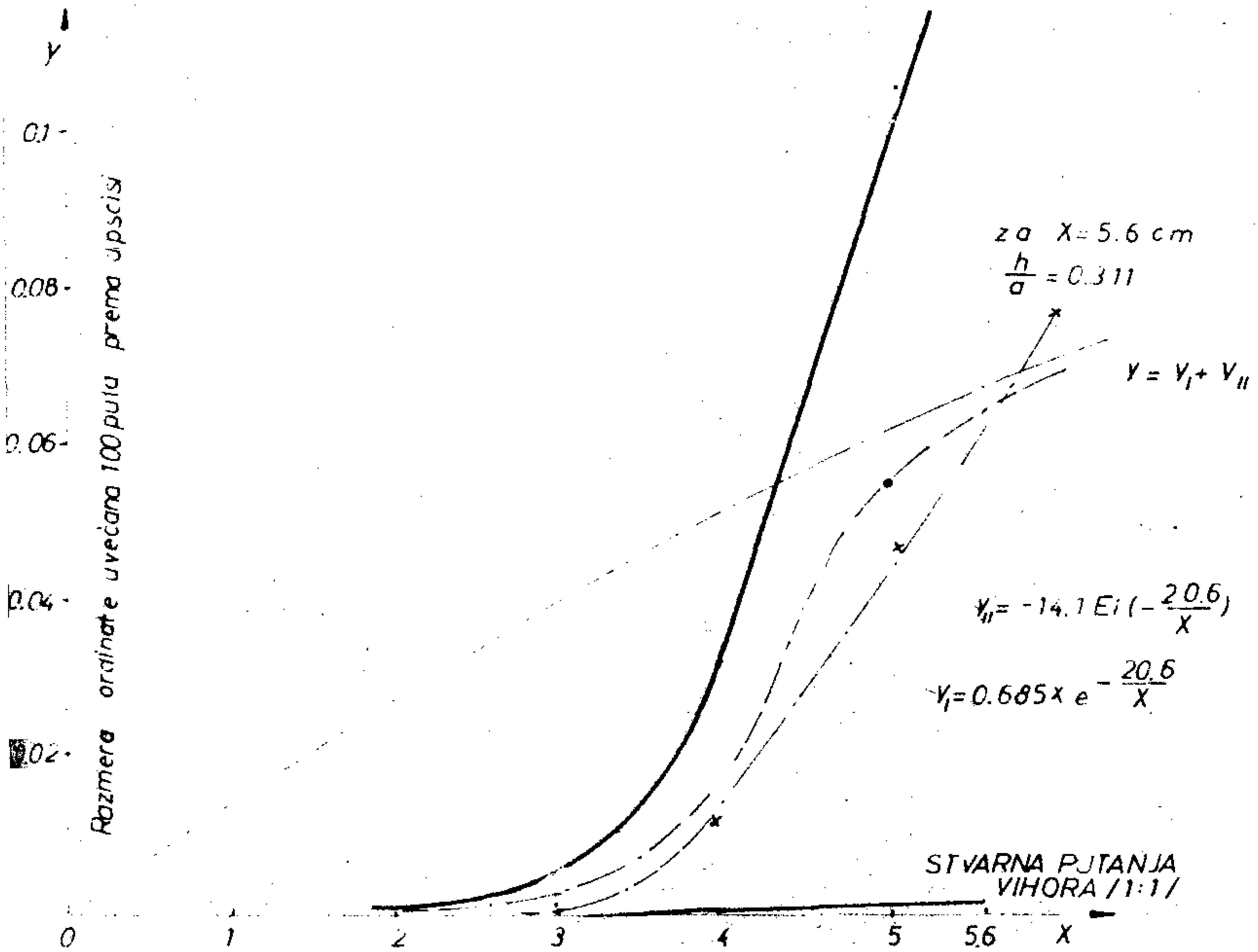
gde se promenljiva "x" menja u opsegu $0 \leq x \leq A$.

Da bi ispitali funkciju koja se javlja kao prvi član jednačine 9.28a obrazujmo njen prvi izvod koji je oblika

$$\frac{dy}{dx} = A\, e^{-\frac{B}{x}} \left(1 + \frac{B}{x} \right), \quad \lim \left(\frac{dy}{dx}\right) = A, \quad kada \quad x$$

što ukazuje da kriva ima asimptotu.

Grafički prikaz jednačine 9.28c dat je na slici 38 za



SL. 38. PUTANJE VIHORA NA POCETKU OBLASTI UTICAJA VISKOZNOSTI

Ovde je zanimljivo da su jedni istraživači tvrdili da se dvojni vihorni niz širi pravolinijski dok su drugi prema svojim ogledima navodili da se širi po nekom kvadratnom zakonu. Teorijska kriva na slici 38 je pokazala da su i jedni i drugi u pravu, jer se u početku kriva može aproksimirati parabolom, a kasnije se asimptotski približava pravoj liniji.

Medjutim po isteku vremena $t_o = \frac{a}{u}$ i levi vihor A je svojim viskoznim jezgrom obuhvatio vihor B tako da izvedena jednačina mora da se proširi dopunskim članom. Umesto jednačine 9.21 mora se uzeti jednačina 8.6 i tako se potpuno analogno ranijem dolazi do nove rezultujuće indukovane brzine

$$v_B^A + v_B^C = v_{By} = \frac{\Gamma a}{2\pi r^2}\left(e^{-\frac{r^2}{4\nu t_C}} - e^{-\frac{r^2}{4\nu t_A}}\right) \,. \qquad 9.22$$

sada su: $x_A = t_A \cdot u$, $x_C = x_A + a = u \cdot t_C$ pa je $t_C = \frac{x_A}{u} + \frac{a}{u}$

Ako zadržimo isti koordinatni početak kao ranije ($x_A = x$) i zadržimo usvojenu pretpostavku da se uzdužna brzina vihora ne menja, tada se iz jednačine 9.29 dobija

$$y = \frac{\Gamma a}{2\pi u r^2} \left[\int e^{-\frac{r^2 u}{4\nu(x+a)}} dx - \int e^{-\frac{r^2 u}{4\nu x}} dx \right], \qquad 9.30$$

odnosno sa ranije uvedenim oznakama

$$y = A \left(\int e^{-\frac{B}{x+a}} dx - \int e^{-\frac{B}{x}} dx \right) . \qquad 9.30a$$

Posle integriranja dobijamo

$$y = AB \left[\frac{x+a}{B} e^{-\frac{B}{x+a}} - \frac{x}{B} e^{-\frac{B}{x}} - Ei\left(-\frac{B}{x+a}\right) + Ei\left(-\frac{B}{x}\right) \right] \qquad 9.31$$

Važnost ove jednačine se proteže sve dok desni vihor D ne dostigne viskoznim jezgrom tačku B. U tom slučaju indukovana bočna sastavnica brzine počinje da se smanjuje usled viskoznosti u poredjenju sa homolognom indukovanom brzinom u suprotnom pravcu

$$v_B^D = \frac{\Gamma}{2\pi a} \left(1 - e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} \right) , \qquad 9.32$$

gde je vreme $t = \frac{x}{u} + \frac{3}{2}\,\frac{a}{u}$, tako da izvedena jednačina dobija još jedan dopunski član

$$v_B^D + v_B^E = -\frac{\Gamma}{2\pi a} e^{-\frac{a^2}{4\nu(x/u + 3a/2u)}} , \qquad 9.33$$

$$y = -\frac{\Gamma}{2\pi a} \int e^{-\frac{a^2}{4\nu(x/u + 3a/2u)}} dx , \qquad 9.34$$

$$y = -\frac{2\Gamma a}{\pi\, 16\, \nu} \left[\frac{4\nu}{a^2 u}\left(x + \frac{3}{a}\right) e^{-\frac{a^2 u}{4\nu\left(x + \frac{3}{2}a\right)}} - Ei\left(-\frac{a^2 u}{4\nu\left(x + \frac{3}{2}a\right)}\right) \right] . \qquad 9.35$$

Mogude je uopštiti gornja razmatranja i napisati putanje vihora za slučaj "n"-tog viskoznog vihora

$$y = \frac{A}{B}\sum_{1}^{m}\left[(-1)^{n}\,\frac{x+na}{B}\,e^{-\frac{B}{x+na}} + (-1)^{n}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{B}{x+na}\right)\right] -$$

$$-\frac{A}{B'}\sum_{1}^{m}\left[(-1)^{n}\left(x+\frac{2n+1}{2}a\right)\frac{1}{B'}\exp\left(\frac{-B'}{x+\frac{2n+1}{2}a}\right) +\right.$$

$$\left. + (-1)^{n}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{B'}{x+\frac{2n+1}{2}a}\right)\right] . \qquad 9.36$$

Na taj način korak po korak moguće je analitički konstruisati putanju širenja dvojnog vihornog niza. Kada se ova odredi, moguće je odbaciti obe pretpostavke učinjene na početku, a koordinate vihora usvojiti da leže na ovoj krivoj, analogno postupku koji je izveden za početak dvojnog vihornog niza. Rezultat će biti nova putanja za koju se očekuje da se skoro poklapa sa ovako izvedenom, jer su pretpostavke vrlo realne.

10. Z A K L J U Č C I

Osnovni zaključak koji sleduje iz izvedene teorijske analize prekidnih strujanja, jeste da vihorna kretanja fluida u tragu iza prepreke nastaju usled viskoznosti, ali istovremeno ona je i uzrok njihovog nestajanja.

Teorijsko objašnjenje mehanizma nastajanja vihora iza prepreke zasnovano je na ideji da se viskoznost stvarnog fluida može posredno uvesti preko modela vrtložnog sloja u savršenom fluidu. Na taj način moguće je zadržati sve pretpostavke i rezultate teorije prekidnih strujanja Helmholca i Kirhofa, s tim da graničnu strujnicu zamenimo vrtložnim slojem.

Postavljene jednačine nestaljenog kretanja vrtložnog sloja predstavljaju sistem nelinearnih integro-diferencijalnih jednačina.

S obzirom na njihovu složenost pristupilo se grafičkom rešavanju jednog odredjenog zadatka. Pokazalo se da se vrtložni sloj spiralno namotava tokom vremena oko svoga slobodnog kraja i da neprekidno u toku namotavanja dolazi uporedo i do narastanja i širenja oblasti obuhvaćene ovom spiralom. Diskretne vrtložne niti, kojima je zamenjen kontinualni vrtložni sloj, se tokom vremena sve više udaljuju jedna od druge u spoljnem delu spirale, a kod slobodnog kraja vrtložnog sloja dolazi do njihovog nagomilavanja, što znači da gustina vrtloga u vihornom jezgru raste. Osnovna karakteristika ovakvog mehanizma nastajanja vihornog strujanja jeste veoma brzo obrazovanje u jezgru neredsredjene cirkulacije, što u potpunosti potvrdjuju ogledi. Kada se obrazuje jedan namotaj spiralnog vrtložnog sloja, tada njegov slobodni kraj dolazi u blizinu ivice ploče i indukuje na ovoj brzinu sa unutrašnje strane, koja prouzrokuje smanjivanje jačine vrtložnog sloja koji dalje nastaje. Ovo daje objašnjenje davno zapaženog neslaganja izmedju ukupne cirkulacije koja se stvori u toku obrazovanja vrtložnog sloja i one koju ima vihor u trenutku odvajanja od ploče.

Približno odredjivanje resultujućeg strujanja u slučaju kada je vrtložni sloj oblika logaritamske spirale, predstavlja uopštavanje Košinovog razmatranja cilindričnog vrtložnog sloja.

U prilog uvedenog teorijskog modela vrtložnog sloja ide i zakonitost pokazana linearnost učestanosti odvajanja vihora koja je postignuta pogodnim izborom bezdimenzionih veličina.

Zanimljivi su zaključci koji se mogu izvući iz analize primenljivosti Karmanove teorije na dvojni niz vihora u tragu iza tela. Analiza je zasnovana na ideji da se izbegne rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina za granične uslove dvojnog niza vihora, time što ćemo rešenje linearne diferencijalne jednačine potencijalnog usamljenog vrtloga proširiti na dvojni niz vihora, a pri tom dokazati da se uticaj viskoznosti u ovako idealizovanom slučaju ne može zanemariti samo u izvesnim ograničenim oblastima, u kojima se, opet za svaku ponaosob, može primeniti poznato neustaljeno rešenje difuzije vihora.

Tako je dobijeno da unutar granica unapred propisane tačnosti u dvojnom vihornom nizu iza tela postoje uvek dve oblasti:

1) Oblast neposredno iza tela u kojoj se uticaj viskoznosti može da zanemari, jer se manifestuje samo unutar viskoznih jezgara koji su s obzirom na malu"starost" vihora manji od njihovog medjusobnog rastojanja.

2) Oblast širenja dvojnog vihornog niza usled difuzije viskoznih jezgara u toku njihovog"starenja".

Prva oblast se pri usvojenoj tačnosti od jednog procenta može podeliti za vrednosti značilaca Rejnoldsa veće od 716 na oblast uticaja početka dvojnog vihornog niza i Karmanovu oblast u kojoj se jedino može primeniti njegova teorija. Na taj način su objašnjeni uzroci mnogih neslaganja izmedju ogleda i Karmanove teorije kod onih istraživača koji su ispitivali dvojni vihorni niz u opsegu značilaca Rejnoldsa u kome prema ovde izvedenoj analizi ne važi Karmanova teorija.

Odredjivanje putanje vihora u dvojnom vihornom nizu izvedeno je za sve tri oblasti ponaosob. Najzanimljivija je putanja vihora u slučaju širenja dvojnog vihornog niza u oblasti dejstva viskoznosti, koja predstavlja istovremenu potvrdu oglednih zapažanja kako onih istraživača koji su tvrdili da se vihori šire po nekom paraboličnom zakonu tako i onih koji su smatrali da se vihori približno pravolinijski razilaze.

Na osnovu izloženog zaključujemo da je viskoznost osnovni pokretač i prigušivač vihornih strujanja, koje neprekidno stvara i uništava tokom vremena. Moguće je da viskozni mehanizam nastajanja i nestajanja vihora u tragu predstavlja makro-model, mikro-modela koji danas zovemo turbulencija. Priroda nas i ovde zadivljuje i nadmašuje svojom maštom kao što kaže Paskal.

Autor želi da izrazi svoju duboku zahvalnost profesoru D^{r}. Konstantinu Voronjecu, rukovodiocu teme, za mnogobrojne diskusije, savete kao i konstruktivne kritike prilikom pregleda preliminarnih verzija svakog pojedinog poglavlja ovoga rada.

LITERATURA

1) Abernathy, F. H., Kronauer, R. E.,
The Formation of Vortex Streets,
Journal of Fluid Mechanics, vol. 13, part 1, p. 1 - 18, 1962.

2) Ahlborn, F.,
Über den Mechanismus des Hydrodynamischen Widerstandes,
Abhandl. Geb. Naturwiss., Band 17, s. 26 - 28, 1902.

3) Bearman, P. W.,
Investigation of the Flow behind a Two-dimensional Model with a Blunt Trailing Edge and Fitted with Splitter Plates,
Journal of Fluid Mechanics, vol. 21, part 2, p.241-255, 1965.

4) Bénard, H.,

a) Formation de centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement,
Comp. Rend. Acad. Sci. (Paris), t. 147, Nov. 9, p.839-842, 1908.

b) Sur la zone de formation des tourbillons alternes derrière un obstacle,
Comp. Rend. Acad. Sci., t. 156, 31 mars, p. 1003-1005, 1913.

c) Sur le marche des tourbillons alternes derriere un obstacle,
Comp. Rend. Acad. Sci., t.156, 21 avril, p. 1225-1228, 1913.

d) Sur le lois de frequences des tourbillons alternes détaches à l arriere d un obstacle,
Verhandl. des 2 Intern. Kongr. für Tech. Mech., Zürich, 12-17 sept, p. 495-501, 1926.

e) En resume, les lois de Karman sont tres loin de s appliques aux tourbillons des liquides reels,
Verh. 2 Int. Kongr. für Tech. Mech., Zürich, 12-17 sept, p.523-525, 1926.

5) Berker, R.,
Integration des equations du mouvement d un fluide visqueux incompressible,
Handbuch der Physik, Strömungsmechanik, Band VIII/2, Springer Verlag, Berlin, 1963.

6a) Betz, A., Petersohn, E.,
Anwendung der Theorie der freien Strahlen,
Ing. Archiv, Band. 2, s. 190 - 211, 1931.

6b) Betz, A.,

6) Betz, A.,
Wie entsteht ein Wirbel in einer wenig zähen Flüssigkeit,
Die Naturwissenschaften, Band 37, Heft 9, s. 193-196, 1950.

7a) Birkhoff, G.,
Formation of Vortex Street,
Journal of Applied Physics, vol. 24, p. 98-103, 1953

b) Hydrodynamics, A Study in Logic, Fact and Similitude,
John Willey, New York, 1954.

c) Birkhoff, G., Zarantonello, E.,
Jets, Wakes and Cavities, Academic Press, New York, 1957.

8) Clifford, W. D.,
Effect of Air Pressure-Temperatures on Vortex Shedding
Frequency of Cylinders,
Journal of AeroSpace Sciences, vol. 24, No. 11, p. 852, 1957.

9a) Dolapčiev, D.,
Über die Stabilität der Karmanschen Wirbelstrasse,
Z A M M, vol. 17, s. 313-327, 1937.

b) Obobščajuščij prijom opredjeljenjija ustojčivostji proizvoljno raspoloženih vihrevih dorožek,
Dokladi Akademii Nauk SSSR, Novaja serija LXXVII, no.6,
str. 985 - 988, 1951.

10) Domm, U.,
Über die Wirbelstrassen von geringster Instabilität,
Z A M M, Band 36, Heft 9/10, s. 367-371, 1956

11) Fage, A. & Johansen, F. C.,
On the Flow of Air behind an Inclined Flat Plate of Infinite
Span, Proc. Roy. Soc. A, London, vol. 116, p. 170-197, 1928.

12a) Flachsbart, O.,
Geschichte der experimentellen Hydro und Aeromechanik insbesondere Widerstandsforschung,
Handbuch der Experimentalphysik, E. Schiller ed., Akademische
Verlag, G.m.b.H., Bd. 4, Teil 2, s. 3 - 61, Leipzig, 1932.

b) Der Widerstand quer angeströmter Rechtekplatten bei Reynoldschen Zahlen 1000 bis 8000,
Z A M M, Bd. 15, s. 32 - 37, 1935.

13) Foch, A.,
Introduction a la Mecanique des Fluides, (p. 135),
Paris, 1932.

14) Föppl, L.,
Wirbel bewegungen hinter einem Kreiszylinder,
Sitzungsberichtd. Kön. bayr. Akad. d. Wissensch., 1913.

15) Goldstein, S., ed.,
Modern Developments in Fluid Mechanics, II,
The Clarendon Press, Oxford, 1938.

16) Golubjev, V. V.,

a) K teoriji vihrevih dorog Karmana,
Mat. Sbornik, tom 40, No. 1, 1933.

b) Mehanjizm obrazovanjija tjagi mašuščevo krila,
Naučnaja Konferencija VVA KA, 1944.

c) Teorija mašuščevo krila i obščaja problema tjagi i soprotivljenij
Obščeje sobranjije Akademiji Nauk SSSR, 14-17 X 1944, s. 193, 194[illegible]

d) Tjaga mašuščevo krila,
Izvest. Akademiji Nauk SSSR, otdelj. tehn. nauk, No. 5, 1946.

e) O njekatorih vaprosah teoriji mašuščevo krila,
Učenije zapiski M G U, vipusk [illegible], T.XXX, 1951.

f) Isljedovanjija po teoriji mašuščevo krila,
Učenije zapiski M G U , vipusk [illegible], tom IV, 1952.

g) O koeficijente poljeznovo dejstvija mašuščevo krila,
Učenije zapiski M G U , tom V, 1954.

h) O strojenjiji sputnoj zoni [illegible] obtekajemim telom,
Izvest. Akademiji Nauk SSSR, Otdelj. Tehn. Nauk, No. 12, 1954.

17) Hama, R. F.,
Three dimensional Vortex Pattern [illegible] Circular Cylinder,
Journal of Aeronautical Sciences, vol. 24, pp. 156-158,1957.

18) Heisenberg, W.,
Die absoluten Dimensionen der [illegible]en Wirbelbewegung,
Physikalische Zeitschrift, Band [illegible], 363-366, 1922.

19) Helmholtz, H.,
Über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen,
Monatsbericht Berli Akad., s. [illegible], 1868.
Preštampano u : Philosophical Magazine, vol. 36, p. 337- 346, 1868.

20) Hooker, S. G.,
On the Action of Viscosity in [illegible] the Spacing Ratio of
a Vortex Street,Proc. Roy. Soc., A, London, vol. 154,p.67-89,
1936.

21) Jahnke, E. und Emde, F.,
Funktionentaffeln, Teubner Verlag, 1907,

22) Kaden, H.,
Aufwicklung einer unstabilen Unstätigkeit
Ingenieur Archiv, Band II, s. 140-168, 19

23) Kármán, Th.,
a) Über den Mechanismus des Widerstandes den
in einer Flüssigkeit erfährt,
Göttinger Nachr. d. Gesellschaft für Wiss
Heft 5, s. 509 - 517, 1911.

b) Über den Mechanismus des Flüssigkeits un
Physikalische Zeitschrift, No. 2, s. 49-5

24) Kirchoff, G.,
Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen,
Journal für reine und angewandte Math., B

25) Klein, F.,
Über die Bildung von Wirbeln in reibungsl
Zeitschrift Math. Phys., Bd. 58, s. 259,

26a) Kočin, N. E.,
O neustojčivostji vihrevih cepošek Karman
Dokladi Akademiji Nauk SSSR, tom XXIV, No.

26b) Kočin, N. E., Kibelj i Roze,
Teortičeskaja gidromehanika, I i II, 6 iz

27) Kovasznay, L. S. G.,
Hot Wire Investigations of the Wake Behind
Reynolds Numbers,
Proc. Roy. Soc. A., A, London, vol. 198, p

28) Küchemann, D.,
Report on I.U.T.A.M. (International Union
Applied Mechanics) Symposium on Concentrat
Fluids, Journal of Fluid Mechanics, vol. 2

29) Lippisch, A. M.,
Flow visualisation, Aero. Eng. Rev. Vol. 1

30) Morkovin, M. V.,
Flow around circular Cylinder a Kaleidosco
Phenomena,
A S M E Symposium on Fully Separated Flows,

31) Müller, W.,

a) Mathematische Strömungslehre, Springer Verlag, Berlin, 1928.

b) Einführung in die Theorie der Zähen Flüssigkeiten, Leipzig, 1932.

32) Nekrasov, A. N.,

Difuzija vihra, Trudi CAGI, vipusk 84, s. 1-31, 1931.

33) Pengeley, D. C.,
Flow in a Viscous Vortex, Journal of Appl. Physics, Vol. , 1954.

34) Pierce, D.,
Photographic Evidence of the Formation and Growth of Vorticity behind Plates accelerated from Rest in Still Air,
Journal of Fluid Mechanics, vol. 11, pp460-466, 1961.

35) Polonskij, Ja. ,
Vihrevije doroški i ih primeñenija v teoriji mašuščevo krila,
Dissert. V V A K A imeni Žukevskovo, 1948.
Isto:
Njakotorije vaprosi mašuščevo krila, Inženjernij Sbornik, T. 8,1950

36) Prandtl, L.,

a) Uber Entstehung von Wirbeln in der Idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben,
Vorträge auf dem Gebiete der Hydro- und Aeromechaniks,Insbrucks,192

b) Uber Wirbelablösung und deren Verhinderung,
A V A , Göttingen, III Lief. s. 6-9, 1927

c) The Generation of Vortices in Fluids of Small Viscosities,
Roy. Aer. Soc., vol. XXXI, p. 720 -743, 1927.

d) Entstehung von Wirbeln bei Wasserströmungen,
Veröffentlichung der Reichstelle für den Unterrichtfilm C 1-3,1932

e) Theoretical and Applied Hydro and Aerodynamics, Springer, 1933.

37) Rayleigh, L.,

a) Acoustical Observations, Phil. Mag, ser.5, vol.7,No.42,p.149-162, 1879.

b) The Theory of Sound, II, Cambridge University Press, 1894.

38) Relf, E. R.,
On the Sound emitted by Wires of Cylinders when exposed to Air Current,
Phil. Mag.,6, vol.42, pp. 173-176, 1921.

39) Richards, G. J.,
Phil. Trans. Vol. 233, A, p. 279-302, (slika 16), 1934.

40) Rimoldi, R. F., Clifford, W. D., Bacigalupi, R.J.,
Effect of Air Pressure on Vortex Shedding Frequency of Cylinders,
Jour. Aeronautical Sciences, vol. 25, No. 8, p. 532, 1958.

41) Rosenhead, L.,
a) An experimental investigation of the flow behind Circular Cylinders in Channels of different Widths,
Proc. Roy. Soc. A, vol. 129, pp.115-135, 1930.

b) The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity,
Proc. Roy. Soc. A, vol. 134, p. 170-192, 1932.

c) Vortex Systems in Wakes,
Advances in Applied Mechanics, vol.3, Academic Press, New York,1953.

42) Roshko. A.,
a) On the development of Turbulent Wakes from Vortex Streets,
N A C A Technical Report No. 1191, 1954

b) On the Drag and Shedding Frequency of Bluff Bodies,
N A C A Technical Note, No. 3169, 1954.

c) On the Effect of Air Pressure on Strouhal Number,
Journal of AeroSpace Sciences, vol. 26, p. 121, 1959.

d) Experiments on the Flow past a circular Cylinder at very high Reynol Numbers, Journal of Fluid Mechanics, vol.10, pp.345-355, 1961.

43) Sljozkin, N. A.,
Dinamika vjaskoj nesžimajemoj židkostji, GITTL, Moskva, 1955.

44) Strouhal ,Č.,
Uber eine besondere Art der Tonerregung,
Ann, Phys. und Chemie, Neue Folge, Bd.5, Heft 10, p.216-251, 1878.

45) Sullivan, R. D.,
A Two-cell Vortex Solution of the Naviers-Stokes Equations,
Jour. of AeroSpace Sciences, vol. 26, p. 767-768, 1959.

46) Timme, A.,
Uber die Geschwindigkeitsverteilung in Wirbeln,
Ingenieur Archiv, Bd. XXV, s. 205-225, 1957.

47) Thom, A.,
The Flow Past Cyrcular Cylinders at Low Speeds,
Proc. Roy. Soc. A, vol. 141, p. 651-689, 1933.

48) Vinogradov, R. I.,
Fisičeskije osnovi teoriji samokolebanjiji krila v ploskom potoke,
Naučno-tehničeskij sbornik, vipusk 13, 1953.

49) Wehrmann, O.,
Hitzdrahtmessungen in einer aufgespaltenen Karmanschen Wirbelstras
D V L Bericht, No. 43, 1957.

50) Zdravković, M.,
a) Prekidno strujanje stišljivog fluida upravno na ploču,
Izvod iz magistarske teze, Tehnika, God.XVIII, Br.4,s.197,1963.

b) Comments of the Effect of Pressure and Temperature on Strouhal Number,

A I A A Journal, Sepber, 1965 (u štampi).