ОБРАСЦИ И ТЕОРЕМЕ
ИЗ
МАТЕМАТИКЕ

САСТАВИО
D$^{\underline{r}}$ ДИМИТРИЈЕ ДАНИЋ
РЕД. ПРОФЕСОР ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКА КЊИЖАРНИЦА ГЕЦЕ КОНА
1 КНЕЗ МИХАЈЛОВА УЛИЦА 1
1927

ИЧКОГ ЗАВОДА »МАКАРИЈЕ« А. Д. — ЗЕМУН-БЕОГРАД

АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

I

Прве четири радње са општим бројевима.

1. Сабирање и одузимање.

$$\pm a \pm b = \pm b \pm a. \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} a + b &= a - (-b) \\ a - b &= a + (-b). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ако је $a \gtreqless b, \quad c \gtreqless d$

јесте

$$\left.\begin{aligned} & a \gtreqless b, \quad c \gtreqless d \\ & a \pm c \gtreqless b \pm c \\ & c - a \lesseqgtr c - b \\ & a + c \gtreqless b + d \\ & a - d \gtreqless b - c. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Означимо са $2n$ паран, са $2n \pm 1$ непаран број.
Тада је

$$\left.\begin{array}{ll} 2m \pm 2n = 2(m \pm n) & \text{(парно)} \\ (2m+1) + (2n+1) = 2(m+n+1) & \text{(парно)} \\ (2m+1) - (2n+1) = 2(m-n) & \text{(парно)} \\ 2m \pm (2n+1) = 2(m \pm n) \pm 1. & \text{(непарно)} \end{array}\right\} \tag{4}$$

2. Множење.

$$\left.\begin{aligned} (+a)(+b) &= +(ab) \\ (+a)(-b) = (-a)(+b) &= -(ab) \\ (-a)(-b) &= +(ab). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$ab = ba. \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} (a - b + c)n &= an - bn + cn \\ (a - b + c)(d - f) &= (a - b + c)d - (a - b + c)f \\ &= ad - bd + cd - af + bf - cf. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} am+bn-cm+bm+an-cn= \\ (a+b-c)\,m+(a+b-c)\,n= \\ (a+b-c)(m+n). \end{cases}$$

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} a\cdot 0=0 \\ 0\cdot 0=0. \end{cases}$$

За позитивне бројеве $a \gtreqless b$, $c \gtreqless d$ јесте

$$\text{(10)}\qquad \begin{cases} ac \gtreqless bc \\ ac \gtreqless bd. \end{cases}$$

$$\text{(11)}\qquad \begin{cases} 2m\cdot 2n=2(2mn) & \text{(парно)} \\ (2m+1)(2n+1)=2(2mn+m+n)+1 & \text{(непарно)} \\ 2m\cdot(2n+1)=2(2mn+m) & \text{(парно).} \end{cases}$$

3. Дељење.

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} (+a):(+b)=+(a:b) \\ (+a):(-b)=(-a):(+b)=-(a:b) \\ (-a):(-b)=+(a:b). \end{cases}$$

$$\text{(13)}\qquad (a\cdot b):c=(a:c)\cdot b=(b:c)\cdot a.$$

$$\text{(14)}\qquad a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b.$$

$$\text{(15)}\qquad (a+b-c):d=(a:d)+(b:d)-(c:d).$$

Два полинома D и d деле се кад се њихови чланови среде по азбучном реду, а и сами чланови среде као речи у речнику. Тако се ради и са остатцима $r_1, r_2, \dots$ који се добијају у току рада. Дели се увек *први* члан од D, односно од $r_1, r_2, \dots$ *првим* чланом од d и добијају се поједини чланови $q_1, q_2 \dots$ количника $Q=q_1+q_2+\cdots$

$$\begin{array}{l} D:d=q_1 \\ \underline{d\,q_1} \\ D-d\,q_1=r_1:d=q_2 \\ \qquad\quad \underline{d\,q_2} \\ \qquad\quad r_1-d\,q_2=r_2:d=q_3 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{d\,q_3} \\ \qquad\qquad\qquad r_2-d\,q_3=r_3:d=q_4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{0}{a}=0 \\ \dfrac{a}{0}=\infty. \end{array}\right\}\qquad \text{(16)}$$

За позитивне бројеве $a \gtreqless b$, $c \gtreqless d$ јесте

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{c} \gtreqless \dfrac{b}{c} \\ \dfrac{c}{a} \lesseqgtr \dfrac{c}{b} \\ \dfrac{a}{d} \gtreqless \dfrac{b}{c}. \end{array}\right\}\qquad \text{(17)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{2m+1}{2n+1}=2p+1 & \text{(непарно)} \\ \dfrac{2m}{2n+1}=2p & \text{(парно).} \end{array}\right\}\qquad \text{(18)}$$

Дељивост целих бројева.

I. Ако је a дељиво са b, а b дељиво са c, онда је и a дељиво са c.

II. Ако су a и b дељиви са c, онда је и $a \pm b$ дељиво са c.

III. Изналажење заједничке мере за a и b. Нека је $a > b$. Алгоритмом

$$\begin{array}{l} \overbrace{a \quad : \quad b}^{q_1}\!\!\overbrace{\quad : \quad r_1}^{q_2} \cdots \qquad \overbrace{r_{n-2} \quad : \quad r_{n-1}}^{q_n}\!\!\overbrace{\quad : \quad r_n}^{q_{n+1}} \\ \dfrac{b\,q_1}{a-b\,q_1=r_1} \quad \dfrac{r_1\,q_2}{b-r_1\,q_2=r_2} \qquad \dfrac{r_{n-1}\,q_n}{r_{n-2}-r_{n-1}\,q_n=r_n} \quad \dfrac{r_n\,q_{n+1}}{r_{n-1}-r_n\,q_{n+1}=0} \end{array}$$

добијамо

$$\begin{array}{l} a=b\,q_1+r_1 \\ b=r_1\,q_2+r_2 \\ r_1=r_2\,q_3+r_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_{n-2}=r_{n-1}\,q_n+r_n \\ r_{n-1}=r_n\,q_{n+1} \end{array}$$

Заједничке мере бројева a и b чине и мере броја r_n. Број r_n зове се *највећа заједничка мера* бројева a и b. У случају да је $r_n=1$ ми кажемо да су a и b *односно прости* бројеви.

IV. Ако је код бројева $a, b, c, d, \dots$ и $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ сваки број првог реда односно прост према бројевима другог реда, онда је и производ свих бројева првог реда односно прост према производу свих бројева другог реда.

V. Ако су a и b односно прости бројеви и ако је ak дељиво са b, онда је и k дељиво са b.

VI. Ако је a односно прост број према b, онда је и сваки степен од a односно прост према сваком степену од b.

VII. Простих бројева има бесконачно много, јер ако би њихов број био коначан и највећи од њих био $= p$ тада број $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p + 1$ ипак неби био дељив ни са једним од простих бројева $2, 3, 5, \cdots p$, а то значи да p није највећи прост број.

VIII. Нека су $a, b, c, \cdots$ прости бројеви из којих је састављен број m, дакле

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots l^\lambda.$$

Број делитеља од m јесте $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots$, а збир свих делитеља је

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \cdot \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \cdots$$

IX. Означимо са $\varphi(m)$ број свију бројева од $1, 2, 3, \cdots m$ који су односно прости према m. Тада је

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(m) &= m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right) \\ &= (a-1)a^{\alpha-1}\cdot(b-1)b^{\beta-1}\cdots(l-1)l^{\lambda-1}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

X. Ако су m и m' односно прости бројеви, онда је

$$\varphi(mm') = \varphi(m)\,\varphi(m'). \tag{20}$$

XI. Означимо са n редом све делитеље броја m, онда је

$$\sum \varphi(n) = m. \tag{21}$$

XII. Ако је $m = f + g + h + \cdots$, онда је $\dfrac{m!}{f!\,g!\,h!\cdots}$ *цео* број.

XIII. *Најмањи заједнички садржатељ* за бројеве 24, 36, 150 и 210 јесте $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7 = 12600$, јер растављањем на просте чинитеље налазимо да је

$24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3$, $36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3$, $150 = 2\cdot3\cdot5\cdot5$, $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$.

XIV. Сваки је број дељив са 1. Он је дељив

са 2, ако је последња цифра (јединице) дељива са 2;
са 3, ако је збир свих цифара (попречни збир) дељив са 3;
са 4, ако је број, који представљају последње две цифре (јединице и десетице), дељив са 4;
са 5, ако је последња цифра 5 или 0;

са 6, ако су испуњени услови дељивости за 2 и 3;
са 7, ако је дељив са 7 алгебарски збир који добијамо множећи цифре од десна на лево са 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, итд. и сабирајући те производе;
са 8, ако је број, који представљају последње три цифре (јединице, десетице и стотине), дељив са 8;
са 9, ако је збир цифара (попречни збир) дељив са 9;
са 10, ако је последња цифра 0;
са 11, ако је разлика из збира цифара на парноме месту и збира цифара на непарноме месту дељива са 11 или је $= 0$. Итд.

II

Разломци.

4. Проширење и скраћивање обичних разломака:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a\cdot c}{b\cdot c} \\ \frac{a}{b} &= \frac{a:c}{b:c}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

5. Сабирање и одузимање обичних разломака:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}. \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= \frac{ad \pm bc}{bd} \\ &= \frac{ah \pm ck}{n}, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ако означимо са n најмањи заједнички садржатељ за имените b и d, тако да је $n = bh = dk$.

6. Множење обичних разломака:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b}\cdot n &= \frac{an}{b} \\ &= \frac{a}{b:n}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} n\cdot\frac{a}{b} &= \frac{na}{b} \\ &= (n:b)\cdot a. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \tag{27}$$

7. Дељење обичних разломака:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{a}{b}:n&=\frac{a}{nb}\\ &=\frac{a:n}{b}.\end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$n:\frac{a}{b}=n\cdot\frac{b}{a}. \tag{29}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{a}{b}:\frac{c}{d}&=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\\ &=\frac{a:c}{b:d}.\end{aligned}\right. \tag{30}$$

8. Претварање чисто и нечисто периодних десетних разломака у обичне разломке:

$$0{,}537537\cdots=0{,}\overline{537}=\frac{537}{999}. \tag{31}$$

$$0{,}423838\cdots=0{,}42\overline{38}=\frac{42\frac{38}{99}}{100}. \tag{32}$$

9. Претварање обичног разломка $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ у верижан разломак:

$$\left\{\begin{matrix}\overbrace{b\;:\;a}^{q_1}\;\overbrace{\;:\;r_1}^{q_2}\;\overbrace{\;:\;r_2}^{q_3}\;\overbrace{\;:\;r_3}^{q_4}\;:\;\ldots\\ \dfrac{b\,q_1}{r_1}\quad\dfrac{r_1q_2}{r_2}\quad\dfrac{r_2q_3}{r_3}\quad\dfrac{r_3q_4}{r_4}\end{matrix}\right.\qquad \frac{a}{b}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4+\cdots}}}} \tag{33}$$

НЗ. На исти начин се претвара и десетни разломак у верижан, нпр.

$$0{,}\overline{53}=\frac{53}{99},\qquad \begin{matrix}\overbrace{99:53}^{1}\overbrace{:46}^{1}\overbrace{:7}^{6}\overbrace{:4}^{1}\overbrace{:3}^{1}\overbrace{:1}^{3}\\ \frac{53}{46}\;\;\frac{46}{7}\;\;\frac{42}{4}\;\;\frac{4}{3}\;\;\frac{3}{1}\;\;\frac{3}{0}\end{matrix}$$

$$0{,}\overline{53}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

10. Претварање коначних верижних разломака у обичне разломке.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\frac{3}{4}}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\frac{4}{7}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{7}{46}}}=\cfrac{1}{1+\frac{46}{53}}=\frac{53}{99}.$$

11. Правила за приближне вредности верижних разломака.

1-ва пр. вр. $\dfrac{P_1}{Q_1}=\dfrac{1}{q_1}$

2-га пр. вр. $\dfrac{P_2}{Q_2}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}$

. . . .

n-га пр. вр. $\dfrac{P_n}{Q_n}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}$

Нека је права вредност $=\dfrac{P}{Q}$.

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{q_nP_{n-1}+P_{n-2}}{q_nQ_{n-1}+Q_{n-2}}. \tag{34}$$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}-\frac{P}{Q}>\frac{P}{Q}-\frac{P_n}{Q_n}. \tag{35}$$

Правило (35) гласи: права вредност верижног разломка лежи увек између две узастопне приближне вредности од којих је она доцнија ближа правој вредности.

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}=\frac{\pm 1}{Q_nQ_{n+1}} \tag{36}$$

и то $+$ или $-$ према томе да ли је n непарно или парно. Значи да су непарне приближне вредности веће, а парне приближне вредности мање од праве вредности верижног разломка.

$$\frac{P}{Q}-\frac{P_n}{Q_n}<\frac{1}{Q_n^2}. \tag{37}$$

III

Степеновање и кореновање.

12. Правила за степеновање.

(38) $$(ab)^n = a^n b^n.$$

(39) $$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b_n}.$$

(40) $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

(41) $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

(42) $$a^0 = 1.$$

(43) $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

(44) $$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

(45) $$(n \text{ цело}) \quad \begin{cases} (-a)^{2n} = a^{2n} \\ (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \end{cases}$$

(46) $$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

(47) $$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

13. Правила за кореновање.

(48) $$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}.$$

(49) $$\sqrt[1]{a} = a.$$

(50) $$\begin{cases} \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}} \\ \quad = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n \\ \quad = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}. \end{cases}$$

(51) $$\begin{cases} \sqrt[-m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n}} \\ \sqrt[-m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}. \end{cases}$$

(52) $$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}. \tag{53}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{54}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}. \tag{55}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}. \tag{56}$$

НЗ. Правила за проширење и скраћивање експонената важе у колико се не буде водило рачуна о *броју* корених вредности. Приметимо: 1. да свака корена количина има тачно онолико вредности колико корени експонент јединица[1]; 2. да паран корен из позитивне количине има увек два једнака стварна корена са супротним знацима ($+$ и $-$), а паран корен из негативне количине има само имагинарне вредности, док непаран корен из каквог било броја има увек једну стварну вредност. Тако нпр. није исто $\sqrt{a^2}$ и $\sqrt[4]{a^4}$, јер је $\sqrt{a^2} = \pm a$, док $\sqrt[4]{a^4}$ има четири вредности $+a$, $-a$, $+ia$, $-ia$. Тако исто несме се ставити $\sqrt{-a^2} = \sqrt[4]{(-a^2)^2}$, јер $\sqrt{-a^2}$ нема ниједне, а $\sqrt[4]{(-a^2)^2} = \sqrt[4]{a^4}$ има две стварне вредности.

14. Рационалисање именитеља.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} &= \frac{x(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a-b} \\ \frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}} &= \frac{x(\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 - c} \\ &= \frac{x(\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \mp \sqrt{c})(a+b-c \mp \sqrt{c})}{a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc} \\ \frac{x}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} &= \frac{x\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a \pm b}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

---

[1] Види формулу (71).

15. Извлачење квадратног корена из десетних бројева.

$\sqrt{3|78{,}94|61|5} = 19{,}466\cdots$

$1 = 1^2$

$27(8 \;:\; 2 \;(= 2\cdot 1)$

$26\,1 = 29\cdot 9$

$1\,79(4 \;:\; 38 \;(= 2\cdot 19)$

$1\,53\,6 = 384\cdot 4$

$25\,86(1 \;:\; 388 \;(= 2\cdot 194)$

$23\,31\,6 = 3886\cdot 6$

$2\,54\,55(0 \;:\; 3892 \;(= 2\cdot 1946)$

$2\,33\,55\,6$

994

. . . . .

16. Извлачење кубног корена из десетних бројева.

$\sqrt[3]{19{,}403|5} = 2{,}687\cdots$

$8 = 2^3$

$114(03 \;:\; 12 \;(= 3\cdot 2^2)$

$36 \;(= 3\cdot 2\cdot 6)$

$36 \;(= 6^2)$

1596

$95\,76 = 1596\cdot 6$

$18\,275(00 \;:\; 2028 \;(= 3\cdot 26^2)$

$624 \;(= 3\cdot 26\cdot 8)$

$64 \;(= 8^2)$

209104

$16\,728\,32 = 209104\cdot 8$

$1\,546\,680(00 \;:\; 215472 \;(= 3\cdot 268^2)$

$5628 \;(= 3\cdot 268\cdot 7)$

$49 \;(= 7^2)$

21603529

$151224703 = 21603529\cdot 7$

3443297

. . . . . .

IV
Комплексне количине.

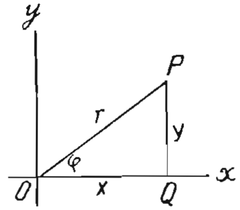
17. Имагинарна јединица:

(58) $$i = \sqrt{-1},$$

тако да је за $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

(59) $$i^{4n} = +1,\; i^{4n+1} = +i,\; i^{4n+2} = -1,\; i^{4n+3} = -i.$$

18. Два вида комплексних количина и њихова геометриска репрезентација.



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \cos\varphi &= \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}},\quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Општи вид комплексних количина у биномној и тригонометриској форми:

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (62)$$

НЗ. Комплексне количине $a+ib$ и $a-ib$ зову се *коњуговане*.

19. Теореме. I.

$$\left.\begin{aligned} &a + ib = 0 \text{ условљава да је} \\ &a = 0,\; b = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

II. Из

следује
$$\left.\begin{aligned} a + ib &= c + id \\ a = c,\; b &= d. \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

20. Правила. I. Сабирање и одузимање:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \qquad (65)$$

II. Множење:

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &\qquad = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned} \qquad (66)$$

Производ двеју коњугованих комплексних:

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = r^2. \qquad (67)$$

III. Дељење:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (68)$$

IV. Степеновање: *Моавр*-ов образац:

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (69)$$

Последица

$$(\cos x + i\sin x)^y = (\cos y + i\sin y)^x. \qquad (70)$$

V. Општи образац за корењовање:

$$(71)\quad \begin{cases} \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2h\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2h\pi}{n}\right) \\ h = 0, 1, 2, \cdots (n-1). \end{cases}$$

Одавде видимо да n-ти корен из једног броја има увек n разних вредности, које добијамо кад у формули (71) поступно ставимо $h=0, 1, 2, \cdots (n-1)$. Специално:

$$(72)\quad \begin{cases} \sqrt[n]{1} = \cos\dfrac{2h\pi}{n} + i\sin\dfrac{2h\pi}{n} \\ \sqrt[n]{-1} = \cos\dfrac{(1+2h)\pi}{n} + i\sin\dfrac{(1+2h)\pi}{n} \\ h = 0, 1, 2, \cdots (n-1). \end{cases}$$

Нпр.

$$(73)\quad \begin{cases} \sqrt{1} = \pm 1 & \sqrt{-1} = \pm i \\ \sqrt[3]{1} = 1, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} & \sqrt[3]{-1} = -1, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt[4]{1} = \pm 1, \pm i & \sqrt[4]{-1} = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Примедбе. 1. Заједнички корени биномних једначина $z^m = 1$ и $z^n = 1$ јесу и корени биномне једначине $z^p = 1$, где је p највећа заједничка мера бројева m и n. То значи: ако су m и n односно прости бројеви, онда биномне једначине $z^m = 1$ и $z^n = 1$ немају заједничке корене осим јединице. Даље: ако је m прост број, биномна једначина $z^m = 1$, осим јединице, нема ни један заједнички корен са сличним биномним једначинама које су нижег степена.

2. Ако је ρ ма који корен биномне једначине $z^m = 1$, онда је и сваки степен од ρ корен исте једначине.

3. Нека је m прост број, ρ ма који корен, изузев јединицу, биномне једначине $z^m = 1$, тада се корени ове једначине могу да представе на начин ρ, ρ^2, ρ^3, $\cdots$ ρ^{m-1}, ρ^m.

Овај став не важи ако је m сложен број, а за ρ узмемо ма коју корену вредност, али он важи ако за ρ узмемо корен који не припада ниједној од једначина $z^n = 1$ код којих је $n < m$.

Корене биномне једначине $z^m = 1$, који не припадају ни којој другој биномној једначини истог вида, али нижег степена, зовемо *примитивним коренима* биномне једначине.

4. Ако је ρ један примитиван корен једначине $z^m = 1$, онда су остали корени $\rho^2, \rho^3, \ldots \rho^m$, дакле $z^m - 1 = (z-\rho)(z-\rho^2)\cdots(z-\rho^m)$ и према томе

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots + \rho^m = 0$$
$$\rho\,\rho^2\,\rho^3 \cdots \rho^m = (-1)^{m-1}.$$

5. Ако је m прост број, онда је, изузев јединицу, сваки корен од $z^m = 1$ примитиван корен и степени ма којег примитивног корена дају остале корене биномне једначине.

6. Број примитивних корена једначине $z^m = 1$, чији је степен сложен из простих бројева $a, b, c, \cdots l$, дакле $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots l^\lambda$, јесте

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right)$$
$$= (a-1)\,a^{\alpha-1}\cdot(b-1)\,b^{\beta-1}\cdot(c-1)\,c^{\gamma-1}\cdots(l-1)\,l^{\lambda-1}$$

(види формулу 19 у чл. 3.). Закључак: решење биномне једначине $z^m = 1$, код које је m ма како сложен број, може да се сведе на решење биномних једначина истог вида, чији су степени прости бројеви или степени простих бројева из којих је састављен изложитељ m.

7. Општа биномна једначина $u^m = c$ доводи се на биномну једначину $z^m = 1$, кад се стави $u = z\sqrt[m]{c}$. Овде означава $\sqrt[m]{c}$ ма коју вредност чији је m-ти степен $= c$.

V

Логаритам.

21. Дефиниција.

$$\left.\begin{aligned} y &= a^x \\ x &= \log^{(a)} y. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

22. Закључци.

$$\left.\begin{aligned} &\text{За } a \gtreqless 1 \text{ јесте } x > 0, \text{ ако је } y \gtreqless 1 \\ &\qquad x < 0, \;\text{„}\;\; \text{„}\;\; y \lesseqgtr 1 \\ &\qquad \log\infty = \pm\infty \\ &\qquad \log 0 = \mp\infty. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

$$\left.\begin{aligned} \log^{(a)} a &= 1 \\ \log^{(a)} 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

23. Правила.

$$\log(ab) = \log a + \log b. \quad (77)$$

(78) $$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

(79) $$\log a^n = n \log a.$$

(80) $$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

24. Претварање логаритама из једне системе у другу. Општи образац за претварање a-логаритама у b-логаритме

(81) $$\log^{(b)} y = \log^{(a)} y \cdot \frac{1}{\log^{(a)} b}.$$

Специално за претварање десетних (*Бриг*-ових) логаритама $\log$ у природне (*Нейер*-ове) логаритме l и обратно имамо

(82) $$\begin{cases} l y = \log y \cdot \dfrac{1}{\log e} \\ \log y = l y \cdot \dfrac{1}{l 10}. \end{cases}$$

Овде је

(83) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\log e} = l 10 = 2{,}3025\,8509 \text{ модуо } \textit{Нейер}\text{-ових} \\ \dfrac{1}{l 10} = \log e = 0{,}4342\,9448 \text{ модуо } \textit{Бриг}\text{-ових} \end{cases}$$

логаритама.

VI
Пропорције.

25. Код аритметичке пропорције:

(84) $$\left\{\text{јесте}\quad \begin{aligned} a - b &= c - d \\ a + d &= b + c. \end{aligned}\right.$$

У поступној аритметичкој пропорцији:

(85) $$\left\{\begin{aligned} &a - b = b - c \\ &\text{јесте аритметичка средња:} \\ &b = \frac{a + c}{2}. \end{aligned}\right.$$

26. Код геометриске пропорције:

$$\left.\begin{aligned} &a : b = c : d \\ \text{јесте}\quad &a d = b c, \\ \text{дакле}\quad &a = \frac{b c}{d} \\ &b = \frac{a d}{c}. \end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

У поступној геометриској пропорцији:

$$\left.\begin{aligned} &a : b = b : c \\ &\text{јесте средња геометриска пропорционала:} \\ &b = \sqrt{a c}. \end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

Пропорција

$$\left.\begin{aligned} &a : b = c : d \\ \text{може да се напише:}\quad &a : c = b : d \\ &b : a = d : c. \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Из пропорције $a : b = c : d$ следују ове нове пропорције:

$$\left.\begin{aligned} a \pm b : c \pm d &= a : c \\ &= b : d. \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

$$\left.\begin{aligned} a \pm c : b \pm d &= a : b \\ &= c : d. \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

$$a + b : a - b = c + d : c - d. \qquad (91)$$

$$\left.\begin{aligned} a n : b n &= c : d \\ \frac{a}{n} : \frac{b}{n} &= c : d. \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

$$\left.\begin{aligned} a^n : b^n &= c^n : d^n \\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} &= \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}. \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Из}\quad &a : b = m : n \\ \text{и}\quad &c : d = m : n \\ \text{следује}\quad &a : b = c : d. \end{aligned}\right\} \qquad (94)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Из}\quad &a : b = c : d \\ \text{и}\quad &\alpha : \beta = \gamma : \delta \\ \text{следује}\quad &(a \pm \alpha) : (b \pm \beta) = (c \pm \gamma) : (d \pm \delta) \\ &a\alpha : b\beta = c\gamma : d\delta \\ &\frac{a}{\alpha} : \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} : \frac{d}{\delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (95)$$

Из продужене пропорције:

(96) следује
$$\begin{cases} a:b:c:\cdots = \alpha:\beta:\gamma:\cdots \\ (a+b+c+\cdots):(\alpha+\beta+\gamma+\cdots) = a:\alpha \\ \qquad = b:\beta \\ \qquad = c:\gamma \\ \qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

27. Хармониска пропорција:

(97) $$a-b:c-d=a:d.$$

Из поступне хармониске пропорције:

(98)
$$\begin{cases} a-b:b-c=a:c \\ \text{следује средња хармониска пропорционала:} \\ b=\dfrac{2ac}{a+c}. \end{cases}$$

Геометриска средња из два броја јесте средња геометриска пропорционала из њихове аритметичке и хармониске средње:

(99) $$\frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}=\sqrt{ab}:\frac{2ab}{a+b}.$$

VII

Једначине.

28. Једначине првог степена са једном непознатом.

(100)
$$\begin{cases} \text{Тип једначине:} \quad ax+b=0. \\ \text{Решење:} \quad x=-\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

29. Једначине првог степена са више непознатих.

(101)
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (\alpha) \\ a_2x+b_2y=c_2. & (\beta) \end{cases}$$

I. Метода замене или супституција.

Из (α) налазимо
$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}, \qquad (\alpha')$$

које замењено у (β) даје
$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$
и са тиме, а на основу (α′)
$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (101')$$

II. Метода упоређења или компарација.

Из (α) следује
$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1} \qquad (\alpha')$$
а тако исто из (β)
$$y=\frac{c_2-a_2x}{b_2}. \qquad (\beta')$$

Упоређењем $(\alpha')=(\beta')$ добијамо горе под (101′) нађене вредности за x и y.

III. Метода једнаких сачинитеља или елиминација.

Множећи (α) са b_2, (β) са $-b_1$, односно (α) са $-a_2$, (β) са a_1 и сабирањем произилази
$$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$$
$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1,$$
одакле као и горе под (101′).

IV. Метода неодређених сачинитеља или *Безу*-ова метода.

Множимо (α) и (β) произвољним коефицијентима λ и κ и сабирамо $(\lambda a_1+\kappa a_2)x+(\lambda b_1+\kappa b_2)y=\lambda c_1+\kappa c_2.$

Узев $\lambda=b_2$, $\kappa=-b_1$ следује $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$, одакле x као у (101′).

Узев $\lambda=-a_2$, $\kappa=a_1$ следује $(-a_2b_1+a_1b_2)y=-a_2c_1+a_1c_2$, које даје y као у (101′).

30. Једначине другог степена.

Тип једначине: $$x^2+px+q=0.$$
Решење: $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \qquad (102)$$

Корени: $$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1x_2=q. \end{cases} \qquad (103)$$

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 \\ &= (x-x_1)(x-x_2). \end{aligned} \qquad (104)$$

НЗ. Једначине које се решавају као квадратне:

$$(105)\quad \left.\begin{cases} x^{2n}+px^{n}+q=0 & \text{заменом } x^{n}=y \\ \sqrt[n]{x}+p\sqrt[2n]{x}+q=0 & \quad\text{„}\quad \sqrt[2n]{x}=y \end{cases}\right\} \text{ даје } y^{2}+px+q=0.$$

31. Неодређене (Диофант-ове) једначине првога степена. I. Са две непознате.

Тип: $\qquad ax \pm by = c,$

где су a, b, c цели и позитивни бројеви који немају заједничке мере; значи да су a и b односно прости бројеви. — Пример:

$$5x-3y=14.$$

Решавамо једначину по непознатој која има мањи коефицијент, овде

$$y=\frac{5x-14}{3}=x-4+\frac{2x-2}{3}.$$

Стављамо

$$\frac{2x-2}{3}=a,$$

дакле

$$x=\frac{3a+2}{2}=a+1+\frac{a}{2}$$

и ако означимо

$$\frac{a}{2}=b,\ a=2b,$$

онда је

$$x=3b+1$$

$$y=5b-3.$$

За $\qquad b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots$

добијамо решења $\begin{cases} x=4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\cdots \\ y=2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\cdots \end{cases}$

II. Са више од две непознате. — Елиминовањем ми сводимо $n-1$ једначину са n непознатих на једну једначину са две непознате. Заменом добивених вредности за ове две непознате у остале једначине налазимо и оне друге непознате.

32. Једначине трећег степена. Општа кубна једначина

$$(106)\qquad x^{3}+px^{2}+qx+r=0$$

заменом

$$x=y-\frac{p}{3} \tag{107}$$

добија вид

$$y^{3}+Qy+R=0, \tag{108}$$

чије корене даје *Кардан*-ов образац

$$y=\sqrt[3]{-\frac{R}{2}+\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^{2}+\left(\frac{Q}{3}\right)^{3}}}+\sqrt[3]{-\frac{R}{2}-\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^{2}+\left(\frac{Q}{3}\right)^{3}}} \tag{108'}$$

у претпоставци да је $\left(\frac{R}{2}\right)^{2}+\left(\frac{Q}{3}\right)^{3}\geqq 0.$

На случај да је $\left(\frac{R}{2}\right)^{2}+\left(\frac{Q}{3}\right)^{3}<0$ мора се применути тригонометриско решење

$$\left.\begin{aligned} y_1&=2\sqrt{\frac{-Q}{3}}\cos\varphi \\ y_2&=2\sqrt{\frac{-Q}{3}}\cos(\varphi+120^{0}) \\ y_3&=2\sqrt{\frac{-Q}{3}}\cos(\varphi+240^{0}), \\ &\text{где је угао } \varphi \text{ одређен обрасцем} \\ \cos 3\varphi&=\frac{-\frac{R}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{Q}{3}\right)^{3}}}. \end{aligned}\right\} \tag{108''}$$

33. Једначине четвртог степена. Решавање једначине

$$x^{4}+px^{3}+qx^{2}+rx+s=0 \tag{109}$$

захтева решавање кубне једначине

$$z^{3}-qz^{2}+(pr-4s)z-r^{2}-(p^{2}-4q)s=0, \tag{110}$$

чији корени, кад се замене у једначину

$$\left(x^{2}+\frac{px}{2}+\frac{z}{2}\right)^{2}=\left(\frac{p^{2}}{4}-q+z\right)x^{2}+\left(\frac{pz}{2}-r\right)x+\frac{z^{2}}{4}-s, \tag{109'}$$

чине да се ова последња једначина раствара на две квадратне једначине чији су корени решења задате једначине (109).

VIII

Прогресије.

34. Нижи аритметички редови:

(111) $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \cdots a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$

Општи или n-ти члан:

(112) $$t_n = a+(n-1)d.$$

Збир првих n чланова:

(113) $$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(a+t_n) \\ \quad = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]. \end{cases}$$

35. Виши аритметички редови. Општи или n-ти члан t_n и збир S_n првих n чланова аритметичког реда k-тога ступња:

(114) $$\begin{cases} t_n = a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}d_3 \\ \qquad +\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdots k}d_k. \end{cases}$$

(115) $$\begin{cases} S_n = na+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d_2+\cdots \\ \qquad +\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k+1)}d_k. \end{cases}$$

36. Геометриска прогресија:

(116) $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \cdots aq^{n-1},\ aq^n, \cdots$

Општи или n-ти члан:

(117) $$t_n = aq^{n-1}.$$

Збир првих n чланова:

(118) $$S_n = \frac{a(q^n-1)}{q-1}.$$

НЗ. Ако је $q<1$ и ставимо $n=\infty$ добијамо

(119) $$S = \frac{a}{1-q}.$$

IX

Интересни рачун и рента.

37. Прост интерес:

$$J = \frac{Kpt}{100}, \tag{120}$$

где је K = капитал, p = проценат (%), t = време у јединици године, J = интерес.

38. Сложени интерес и рента. Нека је K = почетни капитал, K_n = крајњи капитал (после n година), p = проценат (%), $q = 1+\frac{p}{100}$ (процентни фактор), r = рента.

Израчунавање крајње вредности K_n капитала K после n година који је дат под интерес на интерес са p %:

$$K_n = Kq^n. \tag{121}$$

Формула за крајњу вредност K_n капитала K после n година, кад је дат под интерес на интерес са p % и кад се при томе на крају сваке године улаже, односно изузима сума r:

$$K_n = Kq^n \pm \frac{r(q^n-1)}{q-1}. \tag{122}$$

Образац којим се добија сума стечена после n година улогом r на *крају* сваке године:

$$K_n = \frac{r(q^n-1)}{q-1}. \tag{123}$$

Израчунавање суме после n година кад се улози r дају у *почетку* године:

$$K_n = \frac{rq(q^n-1)}{q-1}. \tag{124}$$

Вредност уложног капитала (мизе) K за n година исплаћиване ренте r на крају сваке године:

$$K = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}. \tag{125}$$

Амортизација: формула која показује под којим се условом сума K за време од n година отплаћује са интересом од p_1% узев q (са процентом p) као процентни фактор:

$$Kq^n = K\frac{p_1}{100}\cdot\frac{q^n-1}{q-1}. \tag{126}$$

X
Интерполација.

39. Функционе диференције. Нека су $u_0, u_1, u_2, \cdots u_n, \cdots$ особене (бројне) вредности некакве функције u.

Прве диференције: $\Delta u_0 = u_1 - u_0, \Delta u_1 = u_2 - u_1, \cdots$

Друге диференције: $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,$
$\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1,$
. . . .

Треће диференције: $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$
$\Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1$
. . . .

n-те диференције: $\Delta^n u_0 = \Delta^{n-1} u_1 - \Delta^{n-1} u_0$

(127) $$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-2} - + \cdots \pm u_0$$

$$\Delta^n u_1 = \Delta^{n-1} u_2 - \Delta^{n-1} u_1 = u_{n+1} - n u_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-1} - + \cdots \pm u_1$$
. . . .

40. Члан реда као функција првога члана и његових поступних диференција.

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$
$$u_4 = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 v_0$$
. . . .

(128) $$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0.$$

41. Њутн-ов образац. У формули (128) ред се свршава са $\Delta^n u_0$, јер су коефицијенти следећих чланова равни нули. — За $m \leqq n$ имамо

$$u_m = u_0 + m\Delta u_0 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \Delta^n u_0$$

или узев да су промене x-а све $= h$, дакле $x_m = mh$, $m = \frac{x_m}{h}$ добијамо *Њутн*-ов образац

(129) $$\begin{cases} u = u_0 + \frac{x}{h} \Delta u_0 + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right) \frac{\Delta^2 u_0}{1 \cdot 2} + \cdots \\ \qquad + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right) \cdots \left(\frac{x}{h} - n + 1\right) \frac{\Delta^n u_0}{1 \cdot 2 \cdots n}. \end{cases}$$

Према (129) функција u је цела алгебарска функција n-тога степена која за специалне (еквидистантне) вредности $x = 0, h, 2h, \cdots nh$ добија утврђене вредности u_0, $u_0 + \Delta u_0 = u_1$, $u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_2, \cdots u^n$.

42. Лагранж-ова формула:

$$u = \left.\begin{array}{l} \frac{(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)} u_1 + \\ \frac{(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)} u_2 + \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1})} u_n, \end{array}\right\} \tag{130}$$

Функција u је цела алгебарска функција $n-1$-вог степена која за произвољне вредности аргумента $x = x_1, x_2, \cdots x_n$ добија вредности $u_1, u_2, \cdots u_n$.

XI
Комбинаторика.

43. Пермутације. *a*) Пермутације без понављања.

$$P(1234) = \begin{bmatrix} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1243 & 2143 & 3142 & 4132 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \\ 1342 & 2341 & 3241 & 4231 \\ 1423 & 2413 & 3412 & 4312 \\ 1432 & 2431 & 3421 & 4321 \end{bmatrix}$$

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \tag{131}$$

$n!$ чита се n *производно* или n *факторијел.*

$$0! = 1. \tag{132}$$

b) Пермутације са понављањем.

$$P(abbc) = \begin{bmatrix} abbc & babc & cabb \\ abcb & bacb & cbab \\ acbb & bbac & cbba \\ & bbca & \\ & bcab & \\ & bcba & \end{bmatrix}$$

(133) $$P_{\underset{\alpha,\beta,\gamma,\cdots}{n}} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots} = \frac{P_n}{P_\alpha P_\beta P_\gamma\cdots}.$$

44. Комбинације. *a*) Комбиновање без понављања.

Пример: комбинације четврте класе из шест елемената:

$$C^4(123456) = \left[\begin{array}{lll} 1234 & 2345 & 3456 \\ 1235 & 2346 & \\ 1236 & & \\ & 2356 & \\ 1245 & & \\ 1246 & 2456 & \\ & & \\ 1256 & & \\ & & \\ 1345 & & \\ 1346 & & \\ & & \\ 1356 & & \\ & & \\ 1456 & & \end{array}\right]$$

(134) $$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} = \binom{n}{k}.$$

Ово $\binom{n}{k}$ чита се n *над* k.

b) Комбиновање са неограниченим понављањем.

Пример: комбинације треће класе из елемената a, b, c,

$$\overset{3}{C'}(abc) = \left[\begin{array}{lll} aaa & bbb & ccc \\ aab & bbc & \\ aac & & \\ & bcc & \\ abb & & \\ abc & & \\ & & \\ acc & & \end{array}\right]$$

(135) $$\overset{k}{C'_n} = C^k_{n+k-1}.$$

c) Комбиновање са ограниченим понављањем.

Пример: комбинације треће класе из два елемента a, три елемента b и по једног елемента c и d:

$$C^3(a^2b^3cd) = \left[\begin{array}{ll} aab & bbb \\ aac & bbc \\ aad & bbd \\ & \\ abb & bcd \\ abc & \\ abd & \\ & \\ acd & \end{array}\right]$$

d) Комбиновање са задатим збиром.

Пример: комбинације без понављања друге класе и збиром 12:

$$^{12}C^2 = 1\overline{11},\, 2\overline{10},\, 39,\, 48,\, 57.$$

Комбинације са понављањем треће класе и збиром 6:

$$^{6}\overset{3}{C'} = 114,\, 123,\, 222.$$

e) Обрасци:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P^k\cdot P_{n-k}} = P_{\underset{k,\,n-k}{n}}. \qquad (136)$$

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad \text{или} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \qquad (137)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad \text{или} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \qquad (138)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (139)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \cdots + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}. \qquad (140)$$

$$\left.\begin{array}{l} C^k_{n+k-1} = C_n^k + C_n^{k-1}C_{k-1}^1 + C_n^{k-2}C_{k-1}^2 + C_n^{k-3}C_{k-1}^3 + \\ \qquad \cdots + C_n^3C_{k-1}^{k-3} + C_n^2C_{k-1}^{k-2} + C_n^1C_{k-1}^{k-1}. \end{array}\right\} \qquad (141)$$

45. Варијације. *a*) Варирање без понављања.

Пример. Варијације треће класе из три елемента:

$$\overset{3}{V}(abc) = \begin{bmatrix} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{bmatrix}$$

$$\overset{k}{V}_n = C_n^k\cdot P_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \qquad (142)$$

b) Варирање са (неограниченим) понављањем.

Пример. Варијације друге класе из три елемента:

$$\overset{2}{V'}(abc) = \begin{bmatrix} aa & ba & ca \\ ab & bb & cb \\ ac & bc & cc \end{bmatrix}$$

$$\overset{k}{V'_n} = n^k. \tag{143}$$

c) Варирање са задатим збиром.

Пример. Варијације без понављања треће класе и збиром 9:

$$^9V^3 = P(^9C^3) = P(126, 135, 234)$$

$$= \begin{bmatrix} 126 & 216 & 315 & 423 & 513 & 612 \\ 135 & 234 & 324 & 432 & 531 & 621 \\ 153 & 243 & 342 & & & \\ 162 & 261 & 351 & & & \end{bmatrix}$$

Пример. Варијације са понављањем треће класе и збиром 5:

$$^5\overset{3}{V'} = P(^5\overset{3}{C'}) = P(113, 122) = \begin{bmatrix} 113 & 212 & 311 \\ 122 & 221 & \\ 131 & & \end{bmatrix}$$

XII

Биномни и полиномни образац.

46. Биномни образац за целе и позитивне изложитеље:

$$\begin{cases} (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\ \qquad + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\ (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots \\ \qquad + \binom{n}{k} x^k + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} + x^n. \end{cases} \tag{144}$$

$$\begin{cases} (a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \cdots \\ \qquad \pm \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \mp \cdots \pm \binom{n}{n-1} a b^{n-1} \mp b^n \\ (1-x)^n = 1 - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \cdots \\ \qquad \pm \binom{n}{k} x^k \mp \cdots \pm \binom{n}{n-1} x^{n-1} \mp x^n. \end{cases} \tag{145}$$

47. Обрасци.

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1. \tag{146}$$

$$\left.\begin{aligned} C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots &= 2^{n-1} \\ C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots &= 2^{n-1} - 1. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

48. Полиномни образац:

$$\left.\begin{aligned} (a+b+c+d+\cdots)^n &= \sum P_{\overline{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots}}^{\;n}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots \\ &= \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\cdots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots &= n. \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

XIII

Рачун вероватноће.

49. Дефиниција просте (апсолутне) вероватноће:

$$W = \frac{p}{m}, \tag{149}$$

где је p број повољних, m број (подједнако) могућих случајева.

НЗ. Ако је $W = 0$ $(p = 0)$ догађај је немогућ,

„ „ $W = 1$ $(p = m)$ „ „ извесан,

„ „ $W = \frac{1}{2}$ $\left(p = \frac{m}{2}\right)$ „ „ сумњив.

50. Вероватноћа догађаја који може да наступи на више разних начина:

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n. \tag{150}$$

$$W' = 1 - W = \frac{m-p}{m} \tag{151}$$

зове се *контрерна* (противна) *вероватноћа.*

51. Вероватноћа да се више међусобом независних догађаја случе:

$$W = W_1 W_2 \cdots W_n. \tag{152}$$

Вероватноћа да се један прост догађај под истим околностима понови n пута:

$$W = W_1^n. \tag{153}$$

52. Вероватноћа да се више међусобом зависних догађаја случе:

(154) $$W_n = W_1 \, w_2 \, w_3 \cdots w_n .$$

Овде је W_1 апсолутна вер. првог независног догађаја, w_2 вер. другог догађаја са претпоставком да је први догађај наступио итд. w_n вер. последњег догађаја са претпоставком да су сви они $n-1$ догађаја наступили.

НЗ. За два догађаја је $W_2 = W_1 w_2$, дакле $w_2 = \dfrac{W_2}{W_1}$.

53. Релативна вероватноћа нпр. првог догађаја у n очекиваних догађаја:

(155) $$\mathfrak{W}_1 = \frac{W_1}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n} .$$

54. Вероватноћа да у n покушаја догађај наступи по одређеном реду $n-k$ пута, а изостане k пута:

(156) $$W = W_1^{n-k}(1 - W_1)^k .$$

55. Вероватноћа при понављању покушаја без обзира на ред наступања.

Вероватноћа да у n покушаја догађај, чија је апсолутна вероватноћа $= W_1$, а противна $= W_2$, наступи *тачно* $n-k$ пута (а изостане k пута):

(157) $$W = \binom{n}{k} W_1^{n-k} W_2^k .$$

Вероватноћа да у n покушаја догађај наступи *најмање* $n-k$ пута:

(158) $$W = W_1^n + \binom{n}{1} W_1^{n-1} W_2 + \binom{n}{2} W_1^{n-2} W_2^2 + \cdots + \binom{n}{k} W_1^{n-k} W_2^k .$$

Вероватноћа да у n покушаја догађај *не* наступи *више* од $n-k$ пута, а *не мање* од $n-k-h$ пута:

(159) $$W = \binom{n}{k} W_1^{n-k} W_2^k + \binom{n}{k+1} W_1^{n-k-1} W_2^{k+1} + \cdots + \binom{n}{k+h} W_1^{n-k-h} W_2^{k+h} .$$

Вероватноћа да у n покушаја догађај наступи *бар један пут*:

(160) $$\begin{cases} W = 1 - W_2^n \\ = 1 - (1 - W_1)^n . \end{cases}$$

Одавде:

$$n = \frac{\log(1 - W)}{\log(1 - W_1)} . \qquad (161)$$

$$W_1 = 1 - \sqrt[n]{1 - W} . \qquad (162)$$

56. Највероватнији случај од свију у n покушаја могућих случајева јесте онај чији се број наступања $(n-k)$ има према броју изостајања (k) као што се има апсолутна вероватноћа W_1 тога догађаја према његовој контрерној вероватноћи W_2:

$$n - k : k = W_1 : W_2 . \qquad (163)$$

57. Вероватноћа узрока. Кад за једну појаву или какав догађај могу да постоје разни узроци (тумачења) појмљиво је да се узме оно тумачење као најбоље (као највероватнији узрок) које узето као постојеће даје највећу вероватноћу за посматрани догађај, јер се такво тумачење најбоље слаже са искуством. У овоме лежи *Bayes*-ово правило: вероватноћа узрока (тумачења) пропорционална је вероватноћи догађаја који се њиме објашњава.

Вероватноћа узрока једног догађаја равна је разломку чији је бројитељ раван вероватноћи, којом би тај узрок произвео догађај, а именитељ раван збиру вероватноћа узете за све могуће узроке. Ако узроци нису подједнако могући треба вероватноћу у бројитељу и оне у именитељу помножити вероватноћом одговарајућег узрока.

Вероватноћу да се случи извесан догађај, који може да наступи услед разних узрока, добијамо кад помножимо вероватноћу сваког узрока са вероватноћом догађаја која произилази на основу претпостављеног узрока и најзад све те производе саберемо.

58. Вероватноћа дужине века. На основу таблица смртности добијамо вероватноћу да ће лице старо a година живити још b година:

$$W = \frac{\text{броју живих од } a + b \text{ година}}{\text{бројем живих од } a \text{ година}} . \qquad (164)$$

Ако је овако добивено W равно $\dfrac{1}{2}$, онда се број b зове *вероватна дужина века.* — За интервал од 6-те до 64-те године старости (x) вероватна дужина века (y) представљена је врло приближно једначином:

$$y = 59 - \frac{3}{4} x . \qquad (165)$$

59. Рачун вероватноће код игара и оклада.

За исту награду (добитак D) улози U и вероватноће W на добит мора (код правилне игре или опкладе) да постоји пропорција.

(166) $$U_1 : U_2 = W_1 : W_2 .$$

Математичко очекивање или *математичка нада:*

(167) $$U = WD.$$

Код једнаких улога $U_1 = U_2$ постоји пропорција:

(168) $$\begin{cases} D_1 : D_2 = W_2 : W_1 \\ W_1 D_1 = W_2 D_2. \end{cases}$$ или

Ризико:

(169) $$R = U(1 - W).$$

XIV
Детерминанте.

60. Општа форма детерминанте:

(170) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

61. Вредност једне детерминанте, нпр. ове

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

добијамо узев диагонални производ $a_1 b_2 c_3$ и пермутујући по ступцима (цифре 123) и мењајући знак

$$+123, \ -132, \ +231, \ -213, \ +312, \ -321$$

или пермутујући по врстама (слова abc) и мењајући знак

$$+abc, \ -acb, \ +bca, \ -bac, \ +cab, \ -cba,$$

тако да је

(171) $$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ = a_1 b_2 c_3 - a_1 c_2 b_3 + b_1 c_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 . \end{cases}$$

62. Правила. I. Детерминанта своју вредност не мења кад од хоризонталних редова направимо вертикалне и обратно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{172}$$

II. Узајамна промена два паралелна реда мења знак детерминанте:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{173}$$

III. Детерминанта је $= 0$, ако су сви елементи једног реда $= 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{174}$$

Примена. Проширење детерминаната:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & p & q & r \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k & l & m & n \\ 0 & 1 & p & q & r \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{175}$$

IV. Детерминанта се множи једним бројем кад се елементи ма којег реда помноже тим бројем:

$$p \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p & b_1 & c_1 \\ a_2 p & b_2 & c_2 \\ a_3 p & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 p & b_1 p & c_1 p \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{176}$$

V. Детерминанта, у којој су два паралелна реда једнака, јесте $= 0$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{177}$$

VI. Ако су одговарајући елементи у два паралелна реда пропорционални, онда је таква детерминанта $= 0$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & pb_1 & qb_1 & c_1 \\ a_2 & pb_2 & qb_2 & c_2 \\ a_3 & pb_3 & qb_3 & c_3 \\ a_4 & pb_4 & qb_4 & c_4 \end{vmatrix} = pq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{178}$$

VII. Детерминанта не мења своју вредност кад елементима ма којег реда додамо или одузмемо елементе њему паралелног реда, пошто сваки од њих помножимо каквим бројем:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pa_3 & b_2+pb_3 & c_2+pc_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{cases} \tag{179}$$

VIII. Разлагање детерминанте на *под-* (*суб-*) *детерминанте*:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{cases} \tag{180}$$

IX. Множење детерминаната међусобом:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix} \end{cases} \tag{181}$$

X. Решавање системе линеарних једначина:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+\cdots+k_1t=m_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\cdots+k_2t=m_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_nx+b_ny+c_nz+\cdots+k_nt=m_n. \\ x=\dfrac{D_x}{D},\ y=\dfrac{D_y}{D},\ z=\dfrac{D_z}{D},\ \ldots\ t=\dfrac{D_t}{D}. \\ D_x=\begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & m_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & m_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & m_n & c_n & \ldots & k_n \end{vmatrix},\ldots D_t=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & m_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & m_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & m_n \end{vmatrix} \\ D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & k_n \end{vmatrix} \end{cases} \tag{182}$$

XV
Општа теорија алгебарских једначина.

63. Теореме. I. Полином једначине n-тога степена $f(x)=0$, а то је $x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n$ увек је непрекидна функција x-а.

Закључак. Ако полином $f(x)$ за две вредности $x=\alpha$ и $x=\beta$ добија супротне знаке, нпр. $f(\alpha)>0$, а $f(\beta)<0$ (или обратно), онда између α и β мора лежати бар један корен једначине $f(x)=0$.

II. x може увек да се определи тако да апсолутна вредност првог члана полинома буде већа од збира осталих чланова

$$x^n > A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n.$$

Ово је испуњено кад се узме

$$x > A_p+1,$$

где A_p означава (по апсолутној вредности) највећи коефицијенат у полиному једначине.

III. x се може узети тако мало да апсолутна вредност ма којег члана A_rx^{n-r} полинома буде већа од збира свих претходних чланова

$$A_rx^{n-r} > x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{r-1}x^{n-r+1}.$$

Ово је испуњено кад се узме

$$x \leqq \frac{A_r}{A_p+A_r},$$

где је A_p највећи од коефицијената $A_{r-1}, A_{r-2}, \cdots A_2, A_1, 1$.

Примедба. Узев $r=n$ постаје

$$A_n > x^n+A_1x^{n-1}+A_{\ }x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x,$$

кад је

$$x \leqq \frac{A_n}{A_p+A_n}.$$

IV. Ако је x_1 корен једначине $f(x)=0$, онда је полином $f(x)$ дељив са $x-x_1$.

V. Број корена једне једначине раван је степену једначине.

1. Закључак: $x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_{n-1}x+A_n = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

2. Закључак: $A_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$

$$\begin{aligned} A_2 = x_1x_2 &+ x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + x_1x_n \\ &+ x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n \\ &+ x_3x_4 + \cdots + x_3x_n \\ &\cdots \\ &+ x_{n-1}x_n \\ A_3 = -[x_1x_2x_3 &+ x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n \\ &+ x_2x_3x_4 + \cdots + x_2x_3x_n \\ &\cdots \\ &+ x_{n-2}x_{n-1}x_n] \\ A_n = (-1)^n x_1 x_2 &\cdots x_n. \end{aligned}$$

V. Ако је $a + ib$ корен једначине, онда је $a - ib$ такође корен једначине.

1. Закључак. Ако је $a + ib$, па дакле и $a - ib$ корен једначине, онда је полином $f(x)$ дељив са $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.

2. Закључак. Једначине парног степена имају паран број реалних корена или их немају. Једначине непарног степена имају бар један реалан корен или ако их је више, онда су у непарноме броју.

3. Закључак. Код једначина непарнога степена, које имају само један реалан корен, тај корен је противног знака са последњим чланом A_n полинома.

4. Закључак. Једначина парног степена, у којој је члан A_n негативан има најмање два реална корена који су супротног знака.

VI. Ако замене $x = p$ и $x = q$ у једначини $f(x) = 0$ чине да полином мења знак, онда између p и q има непаран број реалних корена. Ако, пак, полином $f(x)$ за $x = p$ и $x = q$ има исти знак, онда између p и q једначина нема никаквих корена или их има у парном броју.

VII. Кад два узастопна члана једначине имају исти знак, онда кажемо да је то *след*, а кад су противног знака да је *мена*.

VIII. *Декарт*-ово или *Хариот*-ово правило: свака потпуна једначина не може имати више позитивних корена но што је мена, нити може имати више негативних корена но што има следи у једначини.

1. Закључак. Ако једна потпуна једначина има све стварне корене, онда је број позитивних корена раван броју мена, а број негативних раван броју следи.

2. Закључак. Једначина, у којој нема члана између два члана истог знака, мора имати уображених корена. Ако, пак, у једначини нема члана, који би имао да дође између два члана са супротним знаком, онда таква једначина *може* (али не мора) да има све стварне корене.

64. Претварање једначина. I Једначина $f(x) = 0$ претвара се у другу једначину $F(y) = 0$, чији су корени за a већи или мањи од корена задате једначине кад заменимо $x = y \mp a$, дакле $y = x \pm a$.

Примена. Једначина n-тога степена претвара се у нову једначину у којој нема непознате у $n-1$-воме степену кад се учини замена $x = y - \frac{A_1}{n}$.

II. Једначина се претвара у другу са a пута већим коренима кад заменимо $x = \frac{y}{a}$, дакле $y = ax$.

Примена. Једначину са разломљеним коефицијентима претварамо у једначину чији су коефицијенти цели бројеви учинивши замену $x = \frac{y}{m}$, где је m најмањи заједнички садржатељ за именитеље разломљених коефицијената.

65. Решавање бројних једначина. I. *Taylor*-ов ред:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(x) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(x).$$

Овде је

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n \\ f'(x) &= nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + (n-2)A_2x^{n-3} + \cdots + A_{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} \\ &\quad + (n-2)(n-3)A_2x^{n-4} + \cdots + A_{n-2} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)A_1x^{n-4} \\ &\quad + (n-2)(n-3)(n-4)A_3x^{n-5} + \cdots + A_{n-3} \\ &\cdots \\ f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2x + (n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_1 \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1. \end{aligned}$$

II. *Штурм*-ова теорема. Ако означимо са $R_1, R_2, \cdots R_m$ са противним знаком узете остатке до којих долазимо приликом тражења највеће заједничке мере за функцију $f(x)$ и њену прву изводну $f'(x)$ и ставимо у низу функција $f, f', R_1, R_2, \cdots R_m$ за x прво a, а после b, онда има у првом реду таман онолико више мена но што их има у другом реду колико једначина $f(x)=0$ има корена између a и b.

III. *Њутн*-ова метода. Имавши већ једну приближну вредност a за корен једначине $f(x)=0$ стављамо

$$x = a + \alpha,$$

где је α поправка. По *Taylor*-овој формули је

$$f(a+\alpha) = f(a) + \alpha f'(a) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \cdots$$

С обзиром да је α мала количина узећемо за њено израчунавање линеарну једначину

$$f(a) + \alpha f'(a) = 0, \quad \text{одакле} \quad \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

или приближније квадратну једначину

$$f(a) + \alpha f'(a) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} f''(a) = 0,$$

одакле

$$\alpha = \frac{-f'(a) \pm \sqrt{[f'(a)]^2 - 2f(a)f''(a)}}{f''(a)}.$$

Од двојаког знака $\pm$ узећемо онај знак који чини да α постаје мала количина. Узев сада $a + \alpha = b$

$$x = b + \beta$$

поступамо са b као што смо са a и добијамо нову поправку β, а са њоме трећу приближну вредност $c = b + \beta$. Итд.

IV. *Regula falsi.* Нека су a и b две вредности x-а за које полином мења знак: $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Тада је приближна вредност

$$c = \frac{af(b) + bf(a)}{f(a) + f(b)}.$$

Комбинујући добивену приближну вредност $x = c$ са оном од првих двеју (a или b) за коју је знак полинома противан знаку $f(c)$ добијамо нову тачнију вредност за x. Нпр. ако је $f(c) < 0$ узећемо

$$d = \frac{af(c) + cf(a)}{f(a) + f(c)} \quad \text{итд.}$$

АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

I

Појмови и дефиниције.

1. Општи појмови. Количине, које у току једног расматрања своју вредност мењају, зову се *променљиве* количине: $x, y, z, u, \ldots$ Количине, које имају своју одређену вредност, зову се *сталне количине* или *константе*: $a, b, c, \ldots$

Ако две количине зависе једна од друге, тако да мењање једне повлачи собом и промену оне друге, онда се каже да су оне *функције* једна од друге. Једна променљива, нпр. u може зависити од више других променљивих $x, y, z, \ldots$ Променљиве, које замишљамо да се независно мењају, зовемо *независно променљивама* или *прапроменљивама*, а оне које се према њима управљају зависно променљивама или њиховим *функцијама*.

2. Разне форме функција. I. u је функција x-а:

у *откривеној* (*експлицитној*) форми $u = f(x)$;

у *скривеној* (*имплицитној*) форми $F(u, x) = 0$.

Тако исто кажемо да је

u откривена функција од x и y $\quad u = \varphi(x, y)$,

u скривена функција од x и y $\quad \Phi(x, y, u) = 0$.

II. u је *посредна функција* или *функција функције*, кад је

$$u = \varphi(y), \quad y = f(x).$$

III. Функције делимо на *алгебарске* и *трансцендентне*. Основне алгебарске функције јесу $a + x$, $a - x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$.

Најпростије трансцендентне функције то су a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

IV. Алгебарска функција је *рационална* или *ирационална*, према томе да ли су експоненти променљивих количина сви цели бројеви или их има и разломљених.

V. Алгебарска функција је *цела* или *разломљена*, према томе да ли су експоненти променљивих сви позитивни или не.

Према овоме је $y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ једна цела и рационална функција, кад претпоставимо n цело и позитивно, $a_1, a_2, \ldots a_n$ да су ма какве константе, од којих неке могу бити $=0$. Број n одређује *степен* или *димензију* функције.

Једна *рационално разломљена функција*

$$y = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$$

јесте *чисто* или *нечисто разломљена* према томе да ли је $m \gtreqless n$.

VI. За једну функцију кажемо да је *хомогена* k-тог степена кад је

$$f(tx, ty, tz, \cdots) = t^k f(x, y, z, \cdots).$$

Теореме. 1. збир и разлика хомогених функција k-тога степена опет је хомогена функција k-тога степена.

2. производ из једне хомогене функције k-тог и једне хомогене функције h-тога степена јесте хомогена функција $k+h$-тог степена.

3. количник из једне хомогене функције k-тог и једне хомогене функције h-тога степена јесте хомогена функција $k-h$-тог степена.

4. n-ти степен једне хомогене функције k-тога степена јесте хомогена функција nk-тога степена.

5. n-ти корен једне хомогене функције k-тога степена јесте хомогена функција $\frac{k}{n}$-тога степена.

6. једна трансцендентна функција је хомогена и то 0-тог степена, ако је израз иза трансцендентног знака $(log, sin, \cdots)$, односно изложитељ (ако је функција експоненциална) хомогена функција 0-тога степена.

3. Појам о граници. Кад непрекидним растењем или опадањем независно промењиве и приближавањем ње некаквој вредности $x = a$ функција тежи такође некаквој одређеној вредности $f(x) = b$, тако да разлика између вредности b и ма које друге функционе вредности постаје све мања у колико се x мање буде разликовало од броја a, онда се каже да функција тежи *граници* (*limes*) b:

$$\lim_{x=a} f(x) = b.$$

Нпр.

$$\lim_{x=\infty} \frac{5+2x}{x} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{5}{x}+2\right) = 2; \quad \lim_{x=0}\frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x=0}\frac{tg\, x}{x} = 1;$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots \text{ у беск.}\right) = \lim_{n=\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = 2;$$

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = e; \qquad \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

4. Правила за limes.

1. $$\lim[\varphi(x) \pm \psi(x)] = \lim \varphi(x) \pm \lim \psi(x)$$
$$\lim[\varphi(x) \pm C] = \lim \varphi(x) \pm C$$

2. $$\lim[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim\varphi(x)\cdot\lim\psi(x)$$
$$\lim[C\cdot\varphi(x)] = C\cdot\lim\varphi(x)$$

3. $$\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\lim\varphi(x)}{\lim\psi(x)}$$
$$\lim\frac{\varphi(x)}{C} = \frac{\lim\varphi(x)}{C}$$
$$\lim\frac{C}{\psi(x)} = \frac{C}{\lim\psi(x)}$$

4. $$\lim[\varphi(x)^{\psi(x)}] = [\lim\varphi(x)]^{\lim\psi(x)}$$
$$\lim[\varphi(x)^C] = [\lim\varphi(x)]^C$$
$$\lim[C^{\psi(x)}] = C^{\lim\psi(x)}$$

5. $$\lim[\log\varphi(x)] = \log[\lim\varphi(x)].$$

5. Бесконачно мале количине разног реда. Узев једну као *главну бесконачно малу количину*, са којом упоређујемо све остале, ми кажемо за неку другу да је *бесконачно мала количина првог реда*, ако размера исте наспрам главне бесконачно мале количине тежи једној коначној количини. За неку кажемо да је *бесконачно мала другог реда*, ако је њена размера наспрам главне бесконачно мале количине бесконачно мала количина првог реда. Итд.

Начело: бесконачно мале количине вишег реда могу да се занемаре према бесконачно малим количинама нижег реда.

6. Непрекидност функција. Функција, која зависи од x-а, јесте *непрекидна* или *континуирна* од $x=a$ па до $x=b$, ако она за свако $x=c$, где је $a<c<b$ добија одређену (коначну) и стварну вредност:

$$\lim_{\delta=0} f(c-\delta) = \lim_{\delta=0} f(c+\delta) = f(c).$$

Аналогно функција која зависи од x и y јесте непрекидна од $x=a$ па до $x=b$ и од $y=\alpha$ па до $y=\beta$, кад она за свако $x=c$ и $y=\gamma$, где је $a<c<b$, $\alpha<\gamma<\beta$, добија коначну и стварну вредност.

II
Бесконачни редови.

7. Збир и остатак реда.

Збир бесконачног реда $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$ у беск.
збир првих n чланова $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$,
остатак реда $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ у беск.

$$S = S_n + R_n$$
$$R_n = S - S_n.$$

Дефиниција збира: $\quad S = \lim_{n=\infty} S_n.$

Збир бесконачног реда може да буде
1. коначан и одређен. Ред се зове *збирљив* или *конвергентан.*
2. бесконачно велики. Ред је *незбирљив* или *дивергентан.*
3. има више разних вредности. Ред је *неодређен* или *осцилирајући.*

Пример. Бесконачна геометриска прогресија

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n + \cdots \text{ у беск.}$$

за $-1 < q < 1, \lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ ред је конвергентан;

„ $q \geqq 1, \lim_{n=\infty} S_n = \infty$ „ „ дивергентан;

„ $q \leqq -1, \lim_{n=\infty} S_n = \pm\infty$ „ „ дивергентан и неодређен;

„ $q = -1, \lim_{n=\infty} S_n = \frac{0}{a}$ „ „ неодређен.

8. Теореме за збирљивост. I. Ред је конв. ако је

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

II. Ред је конв. кад је од ма ког места па на даље

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

Ред је диверг., ако је

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \quad \lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

III. Ред је конв. кад је од ма ког члана па на даље

$$\sqrt[n]{u_n} < q < 1.$$

Ред је диверг., ако је

$$\sqrt[n]{u_n} > q > 1.$$

IV. Ред је конв. ако је од извесног места па на даље

$$n\, l \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1, \quad \lim_{n=\infty} n\, l \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1.$$

Ред је диверг. ако је

$$n\, l \frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \quad \lim_{n=\infty} n\, l \frac{u_n}{u_{n+1}} \leqq 1.$$

Пример. $\quad \frac{b}{a+b} + \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} +$

$$+ \frac{b(b+1)(b+2)}{(a+b)(a+b+1)(a+b+2)} + \cdots, \text{ где су } a > 0, b > 0.$$

Ред је конв. за $a > 1$, диверг. за $a \leqq 1$.

V. Ред конверг. или диверг. према томе како је

$$\lim_{n=\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \gtreqless 1.$$

Пример. *Гаус*-ов *хипергеометриски ред:*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n + \cdots$$

Претпостављамо да α, β, γ, нису $= 0$ и нису негативни цели бројеви.

За $x < 1$ ред је конв.

„ $x > 1$ „ „ диверг.

„ $x = 1$ „ „ $\begin{cases} \text{конв., ако је } \gamma > \alpha + \beta \\ \text{диверг. „ „ } \gamma < \alpha + \beta \end{cases}$

Ако је $\gamma = \alpha + \beta \begin{cases} \text{ред је диверг. за } \alpha\beta > 1 \\ \text{незна се ако је } \alpha\beta < 1. \end{cases}$

VI. Ред, који је састављен из позитивних и негативних чланова јесте збирљив, ако је збирљив ред који произилази из њега узев све чланове са позитивним знаком.

VII. Ред, у коме су бар они удаљени чланови наизменце позитивни и негативни, а осим тога опадају у бесконачност, јесте збирљив.

VIII. Ред са комплексним члановима

$$(u_1 + iv_1) + (u_2 + iv_2) + \cdots + (u_n + iv_n) + \cdots$$

јесте збирљив, ако су збирљиви редови

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$
$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

IX. Ред са комплексним члановима је збирљив, ако је збирљив модуски ред

$$\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_n + \cdots$$

где је $\rho_k = \sqrt{u_k^2 + v_k^2}$.

III

Функције комплексних количина.

9. Дефиниција експоненциалне функције.

$$e^{x+iy} = \lim_{m=\infty}\left(1 + \frac{x+iy}{m}\right)^m \tag{1}$$

узевши од израза (који је уопште многозначан) његову *најпростију* вредност (ону са најмањом амплитудом).

10. Формуле.

(2) $$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$$

(3) $$l(x+iy) = \frac{1}{2}\, l(x^2+y^2) + i\, arctg\, \frac{y}{x} + 2k\pi i,$$

где је k ма какав цео број.

(4) *Ајлер*-ове формуле
$$\left\{\begin{aligned} &\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi} \\ &\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi} \\ &\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \end{aligned}\right.$$

(5)

За парно n је

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\varphi + \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right]$$

$$\sin^n\varphi = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}}\left[\cos n\varphi - \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi - + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right]$$

За непарно n је

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\cos n\varphi + \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\varphi\right]$$

$$\sin^n\varphi = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left[\sin n\varphi - \binom{n}{1}\sin(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\sin(n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\varphi.\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+iy) &= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x \\ \cos(x+iy) &= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x \\ tg(x+iy) &= \frac{2\sin 2x + i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x} \\ cotg(x+iy) &= \frac{2\sin 2x - i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

11. Хиперболичне функције. I. Дефиниције:

$$\left.\begin{aligned} \sin hyp\,\varphi &= \frac{1}{i}\sin i\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} \\ \cos hyp\,\varphi &= \cos i\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \\ tg\, hyp\,\varphi &= \frac{1}{i}\, tg\, i\varphi = \frac{e^{2\varphi}-1}{e^{2\varphi}+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

II. Формуле.

$$\cos hyp\,\varphi \pm \sin hyp\,\varphi = e^{\pm i\varphi}. \qquad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin hyp(\varphi\pm\psi) &= \sin hyp\,\varphi\cos hyp\,\psi \pm \cos hyp\,\varphi \sin hyp\,\psi \\ \cos hyp(\varphi\pm\psi) &= \cos hyp\,\varphi\cos hyp\,\psi \pm \sin hyp\,\varphi \sin hyp\,\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin hyp\, 2\varphi &= 2\sin hyp\,\varphi \cos hyp\,\varphi \\ \cos hyp\, 2\varphi &= \cos hyp^2\varphi + \sin hyp^2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin hyp\, 0 = 0 && \cos hyp\,\frac{i\pi}{2} = 0 \\ &\sin hyp\, l(1+\sqrt{2}) = 1 && \cos hyp\, 0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} d\sin hyp\,\varphi &= \cos hyp\,\varphi\, d\varphi \\ d\cos hyp\,\varphi &= \sin hyp\,\varphi\, d\varphi \\ d\, tg\, hyp\,\varphi &= \frac{d\varphi}{\cos hyp^2\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} arc\sin hyp\,\varphi &= l(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}} \\ arc\cos hyp\,\varphi &= l(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}} \\ arc\, tg\, hyp\,\varphi &= \frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) = \int\frac{d\varphi}{1-\varphi^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

12. Циклометриске функције за стварне аргументе.

$$(14)\quad \begin{cases} arc\sin x = arc\cos\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\cos x = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ arc\cos x = arc\sin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\sin x = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ arc\;tg\;x = arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - arc\,cotg\,x\,. \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} arc\sin x = n\pi + (-1)^n\,|arc\sin x| \\ arc\cos x = 2n\pi \pm |arc\cos x| \\ arc\,tg\,x = n\pi + |arc\,tg\,x| \\ arc\,cotg\,x = n\pi + |arc\,cotg\,x|\,. \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} arc\sin(-x) = -arc\sin x \\ arc\cos(-x) = \pi - arc\cos x \\ arc\,tg\,(-x) = -arc\,tg\,x \\ arc\,cotg\,(-x) = -arc\,cotg\,x\,. \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} arc\sin x \pm arc\sin y = arc\sin(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}) \\ arc\cos x \pm arc\cos y = arc\cos(xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\ arc\,tg\,x \pm arc\,tg\,y = arc\,tg\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\,. \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} arc\sin x \pm arc\cos y = arc\sin(xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\ \qquad\qquad = arc\cos(y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2}) \\ arc\,tg\,x \pm arc\,cotg\,y = arc\,cotg\,\frac{y \mp x}{xy \pm 1}\,. \end{cases}$$

13. Веза између циклометриских функција ма каквог аргумента и логаритма.

$$(19)\quad \begin{cases} arc\sin u = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\,l(u + \sqrt{u^2-1}) \\ arc\cos u = \frac{\pi}{2} + i\,l(u + \sqrt{u^2-1}) \\ arc\;tg\;u = \frac{1}{2i}\,l\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right). \end{cases}$$

14. О функцијама комплексних промењљивих у опште.

1. Разлика између реалних и комплексних промењљивих. Између једне стварне промењљиве и једне комплексне промењљиве количине постоји та битна разлика да док су двема вредностима стварне промењљиве количине одређене све оне вредности кроз које она мора да прође да би од једне вредности дошла до друге, комплексна промењљива може на безбројно разних начина од једне вредности да стигне до ма које друге описујући увек друге путеве од полазне до крајне тачке. Ако се комплексна количина мења непрекидно, онда се та непрекидност показује једино у непрекидности путање која, међутим, не мора бити представљена у целини једним истим математичким законом: она може бити састављена ма како из правих и кривих линија.

2. Разлика између функција стварних и функција комплексних промењљивих. Према дефиницији је једна количина функција друге неке количине, кад свакој задатој вредности ове друге одговара једна или више вредности оне прве па ма и не била изражена формулом та зависност између једне и друге промењљиве. Ако количина, коју ми сматрамо као функцију, зависи од реалне прапромењљиве, онда се за произвољне вредности прапромењљиве у извесном интервалу могу узети произвољне вредности функције и по принципу непрекидности ова се два низа вредности могу (и математички) довести у везу један с другим. Али, ако за независно промењљиву будемо узимали комплексне вредности, онда се произвољним вредностима прапромењљиве не могу придавати, као кореспондирајуће, произвољне вредности функције тог аргумента. Треба правити разлику између комплексних функција и функција комплексних количина. Ако су у $w = u + iv$ количине u и v функције стварних делова x и y комплексне количине $z = x + iy$, не мора зато да буде w функција од z.

3. Дефиниција функција комплексних количина по *Риман*-у. Промењљива комплексна количина w јесте функција друге једне комплексне количине z, ако се w мења са z тако да вредност диференциалног количника $\frac{dw}{dz}$ остаје независна од вредности диференциала dz или, што се своди на исто, w је функција од $x + iy$, ако се w са $x + iy$ мења на основу једначине

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Саставни делови u и v функције w карактерисани су истом парциалном једначином

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\,.$$

Услов да је $w=f(z)$ може геометриски да се интерпретује на следећи начин. Нека је

$$z=x+iy, \quad w=u+iv=f(z)$$

и узмимо да су x и y ортогоналне координате покретне тачке z у равни, u и v ортогоналне координате тачке w у истој или ма којој другој равни. Пошто је $w=f(z)$ то положај тачке w зависи од положаја тачке z. Слика, коју описује тачка w, она је са сликом, коју описује тачка z, *слична у бесконачно малим деловима.* Таква сличност базира на томе да се у обема сликама одговарајуће линије секу под истим углом. Изузетак чине тачке где је $\frac{dw}{dz}=0$ или $=\infty$. *Сибек* је назвао овакав однос између оригинала и снимка *изогоналним сродством.* Најпростија сродства ове врсте јесу *сличност* ($w=az+b$) и *Мебиус*-ово *кружно сродство* $\left(w=\frac{az+b}{cz+d}\right)$. Колинеација и афинитет нису изогонална сродства. На односу $w=f(z)$ оснива се теорија *конформног снимања*, које има своје важне примене у Вишој Геодезији, Картографији (снимање обртног елипсоида на сферу, Меркатор-ова и стереографска пројекција итд.) и Теорној Физици (Хидродинамици, Теорији топлоте, електрицитета итд.).

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

I

Функције једне прапромењиве.

1. Дефиниција. Нека је

$$y=f(x)$$

једнозначна и непрекидна функција и означимо промену функције $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, промену прапромењиве $\Delta x=(x+\Delta x)-x$.

Тада је *диференциални количник* $\frac{dy}{dx}$ или *изводна* $y'=f'(x)$

$$\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Диференцијал функције $\quad dy=f'(x)\,dx\,.$

2. Теорема. Ако је $\quad u=v+c,$

онда је

$$u'=v'$$

$$du=dv\,.$$

3. Изводна посредне функције. Нека је

$$u=\varphi(y),\ \ y=f(x).$$

Тада је

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

4. Правила за диференциалење алгебарских функција.

$$\left.\begin{aligned} d(u+v-w)&=du+dv-dw\\ d(u+C)&=du.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} d(uv)&=vdu+udv\\ d(Cu)&=Cdu.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$(3)\quad \begin{cases} d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2} \\ d\left(\frac{C}{v}\right)=-\frac{Cdv}{v^2}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} du^m = mu^{m-1}\,du \\ d\sqrt[n]{u}=\frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ d\sqrt{u}=\frac{du}{2\sqrt{u}}. \end{cases}$$

5. Диференциал сложене функције:

$$y=f(u,v)$$

$$dy=\frac{dy}{du}du+\frac{dy}{dv}dv.$$

6. Правила за диференциалење трансцендентних функција.

$$(5)\quad \begin{cases} d\,log\,u=\frac{du}{u}\,log\,e \\ d\,lu=\frac{du}{u}. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} da^u=a^u\,la\,du \\ de^u=e^u du. \end{cases}$$

$$(7)\quad d\,sin\,u=cos\,u\,du.$$

$$(8)\quad d\,cos\,u=-sin\,u\,du.$$

$$(9)\quad d\,tg\,u=\frac{du}{cos^2 u}.$$

$$(10)\quad d\,cotg\,u=-\frac{du}{sin^2 u}.$$

$$(11)\quad d\,arc\,sin\,u=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$(12)\quad d\,arc\,cos\,u=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$(13)\quad d\,arc\,tg\,u=\frac{du}{1+u^2}.$$

$$d\,arc\,cotg\,u=-\frac{du}{1+u^2}. \quad (14)$$

7. Изводна скривене функције:

$$F(x,y)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

8. Изводне двеју скривених функција које зависе од исте прапромењиве

$$F(x,y,z)=0$$

$$\Phi(x,y,z)=0.$$

Овде су y и z функције од x.

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\begin{vmatrix}\frac{dF}{dz} & \frac{dF}{dx} \\ \frac{d\Phi}{dz} & \frac{d\Phi}{dx}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ \frac{d\Phi}{dy} & \frac{d\Phi}{dz}\end{vmatrix}} \qquad \frac{dz}{dx}=z'=\frac{\begin{vmatrix}\frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} \\ \frac{d\Phi}{dx} & \frac{d\Phi}{dy}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ \frac{d\Phi}{dy} & \frac{d\Phi}{dz}\end{vmatrix}}$$

9. Изводне функције вишег ступња. Из задате функције

$$y=f(x)$$

добијамо *изводну* или *диференциални количник првог ступња*

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Одавде, истим начином, налазимо *изводну* или *диференциални количник другог ступња*

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x},$$

а одавде *изводну* или *диференциални количник трећег ступња*

$$y'''=f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}$$

и опште

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

10. Изводне вишег ступња скривене функције:

$$F(x, y) = 0.$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{d^2 F}{dx^2} + 2\dfrac{d^2 F}{dx\,dy}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d^2 F}{dy^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{dF}{dy}} \text{ итд.}$$

11. Мењање прапромењљиве. Кад у једначини

$$y = f(x)$$

заменимо

$$x = \varphi(t),$$

онда је

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\varphi'(t)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f''(x)\varphi'(t)^2 + f'(x)\varphi''(t)$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = f'''(x)\varphi'(t)^3 + 3f''(x)\varphi'(t)\varphi''(t) + f'(x)\varphi'''(t) \text{ итд.}$$

Обратно је

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - du\,d^2x}{dx^3} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5} = \cdots$$

12. Изводне инверзних функција. Нека су

$$y = f(x) \text{ и } x = F(y)$$

инверзне функције. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{F'(y)}$$

$$f''(x) = \frac{F''(y)}{F'(y)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3F''(y) - F'(y)F'''(y)}{F'(y)^5} \text{ итд.}$$

II

Функције које зависе од више промењљивих.

13. Дефиниције. Нека је

$$u = f(x, y, z).$$

Тада су *парцијалне изводне* од u

$$\text{по } x \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0}\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\text{по } y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0}\frac{\Delta u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y = 0}\frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\text{по } z \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z = 0}\frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z = 0}\frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

Парцијални диференцијали јесу

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx, \quad \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad \frac{\partial u}{\partial z}dz,$$

а *тотални диференцијал*

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

14. Диференцијалење сложених функција које зависе од више промењљивих. Нека је

$$t = f(u, v)$$

$$u = \varphi(x, y, z), \quad v = \psi(x, y, z).$$

Правило: $$dt = \frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv,$$

где треба ставити
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz.$$

15. Парциалне изводне разног ступња функције

$$u = f(x, y).$$

Из парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial x}$ следују ове парциалне изводне

другог ступња $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}.$$

Из парциалне изводне $\frac{\partial u}{\partial y}$ добијамо аналогно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}.$$

Теорема: $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Примедба. Ако је $u = f(x, y)$ једна хомогена функција k-тог степена, онда је
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = ku$$
$$\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{(2)} = k(k-1)u$$
$$\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{(3)} = k(k-1)(k-2)u \quad \text{итд.}$$

16. Тотални диференциали вишег ступња функције

$$u = f(x, y).$$
$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$
$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^{(2)}$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^{(n)}$$

17. Парциалне изводне скривене функције

$$F(x, y, z) = 0.$$

Из $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ добијамо $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

" $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ " $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

" $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ " $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

" $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ " $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

" $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ " $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

III

Примене Диф. Рачуна у Анализи.

18. Taylor-ов ред:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} f^{(n+1)}(x + \Theta h). \qquad (15)$$

19. Maclaurin-ов ред:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} f^{(n+1)}(\Theta x), \qquad (16)$$

где је (као и горе) $\Theta < 1$. Ако је функција или једна од њених изводних прекидна за $x = 0$, онда развијамо

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} f^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)]. \qquad (17)$$

20. Примери.

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 \pm \binom{m}{3} x^3 + \cdots \pm \binom{m}{k} x^k \cdots$$

m ма какво, $x^2 < 1$.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \cdots$$
$$- (-1)^k \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2k)} x^k \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - \cdots$$
$$+ (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^k \cdots$$

у оба случаја је $x^2 < 1$.

$$a^x = 1 + \frac{x\,l\,a}{1} + \frac{(x\,l\,a)^2}{2!} + \frac{(x\,l\,a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x\,l\,a)^n}{n!} + \cdots$$

x и a произвољни.

$$a = 1 + \frac{la}{1} + \frac{(la)^2}{2!} + \frac{(la)^3}{3!} + \cdots + \frac{(la)^n}{n!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots \qquad -1 < x \leqq +1.$$

$$l(1-x) = -\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right] \qquad 0 < x < 1.$$

$$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right] \qquad 0 < x < 1.$$

$$lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right] \qquad 0 < x < \infty.$$

$$l\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{x^5} + \cdots\right] \qquad x^2 > 1.$$

$$l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{x}\right)^4 \cdots \qquad x > h.$$

$$l(x+h) = lx + 2\left[\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \cdots\right]$$

$x > 0$, ако је $h > 0$; $x > h$, ако је $h < 0$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1}x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3}x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5}x \sin^5 x \cdots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x \sin^4 x \cdots$$

у обе формуле је n цело и позитивно.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + \cdots$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad x^2 < 1.$$

НЗ. $\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x.$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\,\frac{1}{9 \cdot 2^9} + \cdots$$

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots \qquad x^2 \leqq 1.$$

НЗ. $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{x}.$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi : \sin\frac{\varphi}{2}.$$

$$\sin\varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin(2n-1)\varphi = \sin^2 n\varphi : \sin\varphi.$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \cdots \qquad 0 < \varphi < 2\pi.$$

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots \qquad -\pi < \varphi < \pi.$$

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \cos\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi : \sin\frac{\varphi}{2}.$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi + \frac{1}{3^2}\cos 3\varphi + \frac{1}{5^2}\cos 5\varphi + \cdots \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi.$$

1. Примедба. Ако је $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ и заменимо $f(x)=y$, тако да је $x=\varphi(y)$, онда добијамо нов ред $y=a_0+a_1\varphi(y)+a_2\varphi(y)^2+\cdots$

Тако из реда $arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\cdots$ кад ставимо $arctg\,x=y$, дакле $x=tg\,y$ следује ред

$$y=tg\,y-\frac{tg^3y}{3}+\frac{tg^5y}{5}-\frac{tg^7y}{7}+-\cdots$$

2. Примедба. Развијање количника из два полинома у полином:

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots$$

Коефицијенте $A, B, C, D, \ldots$ добијамо из

$$\begin{aligned}
&A\alpha-a=0\\
&B\alpha+A\beta-b=0\\
&C\alpha+B\beta+A\gamma-c=0\\
&D\alpha+C\beta+B\gamma+A\delta-d=0\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}$$

21. Taylor-ова формула за функције које зависе од више промењљивих

$$u=f(x,y,\cdots)$$

$$\begin{aligned}
f(x+h,y+k,\cdots)=u&+\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)+\\
&\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)^{(2)}+\\
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)^{(3)}+\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)^{(n)}+R
\end{aligned}$$

или краће

$$f(x+h,y+k,\cdots)=u+du+\frac{d^2u}{1\cdot 2}+\frac{d^3u}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{d^nu}{1\cdot 2\cdots n}+R.$$

Овде је

$$R=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h+\frac{dU}{dq}k+\cdots\right)^{(n)}-\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)^{(n)}\right]$$

$$U=f(p,q,\cdots),\ p=x+\Theta h,\ q=y+\Theta k,\cdots\ \Theta<1.$$

22. Maclaurin-ова формула за функције које зависе од више промењљивих.

$$\begin{aligned}
f(x,y,\cdots)=u_0&+\left(\frac{du}{dx}\right)_0x+\left(\frac{du}{dy}\right)_0y+\cdots+\\
&\frac{1}{1\cdot 2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0x+\left(\frac{du}{dy}\right)_0y+\cdots\right]^{(2)}+\\
&\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0x+\left(\frac{du}{dy}\right)_0y+\cdots\right]^{(3)}+\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0x+\left(\frac{du}{dy}\right)_0y+\cdots\right]^{(n)}+R.
\end{aligned}$$

Овде означава u_0, $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{du}{dy}\right)_0,\cdots$ резултат замене $x=0$, $y=0,\cdots$ у изразима u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy},\cdots$

$$R=\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h+\frac{dU}{dq}k+\cdots\right)^{(n)}-\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\cdots\right)^{(n)}\right],$$

где треба ставити $x=0, y=0,\cdots$; заменити $h, k,\cdots$ са $x, y,\cdots$; $p, q,\cdots$ са $\Theta x, \Theta y,\cdots$

23. Израчунавање неодређених израза. I. Узмимо да $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ за $x=a$ добија неодређену форму $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Права вредност је

$$\lim_{x=a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x=a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}=\frac{\varphi'(a)}{f'(a)}$$

или уопште

$$=\lim_{x=a}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)}=\frac{\varphi^{(n)}(a)}{f^{(n)}(a)},$$

где су $\varphi^{(n)}(x)$ и $f^{(n)}(x)$ изводне најнижег ступња које за $x=a$ нису истовремено $=0$ или $=\infty$.

II. Ако у изразу $\varphi(x)\cdot f(x)$ за $x=a$ постаје $\varphi(a)=0$, $f(a)=\infty$, онда се израз јавља у неодређеној форми $0\cdot\infty$, а то се своди на случај под I, јер је

$$\lim_{x=a}[\varphi(x)\cdot f(x)]=\left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\right]_{x=a}=\frac{0}{0}\quad\text{или}\quad\lim_{x=a}[\varphi(x)\cdot f(x)]=\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty}.$$

III. Ако $f(x)^{\varphi(x)}$ за $x=a$ добија неодређену форму 0^0, ∞^0 или 1^∞, онда се логаритмовањем своди $\log 0^0 = 0\cdot\infty$, $\log\infty^0 = 0\cdot\infty$, $\log 1^\infty = \infty\cdot 0$, дакле на прошли случај.

IV. Израз $\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$ који за $x=a$ постаје неодређен $\infty-\infty$ услед тога што је $f(a)=0$ и $F(a)=0$ добија кад се напише $\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\Phi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)\,F(x) - f(x)\,\Phi(x)}{f(x)\,F(x)}$ вид $\frac{0}{0}$.

24. Највеће и најмање вредности функције једне прапромењиве. Функција $f(x)$ је за $x=c$, дакле $f(c)$ у *максимуму* или у *минимуму* 1. ако је $f'(c)=0$ (или прекидно), 2. ако су за довољно мало h знаци од $f'(c-h)$ и $f'(c+h)$ различни и то: $f(c)=max$, ако изводна у близини $x=c$ из позитивних иде у негативне вредности: $f'(c-h)>0$, а $f'(c+h)<0$; $f(c)=min$, ако изводна у близини $x=c$ из негативних прелази у позитивне вредности: $f'(c-h)<0$, а $f'(c+h)>0$.

Опште: $f(c)$ је max или min, ако је њена изводна најнижег ступња, која за $x=c$ није $=0$, парног реда и то негативна или позитивна. Ако је изводна најнижег ступња, која за $x=c$ није $=0$, непарног реда, онда $f(c)$ нити је max нити је min.

Примедба. Ако је функција у скривеној форми

$$F(x,y)=0,$$

онда из

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = 0$$

следује као услов за min и max да је

$$\frac{dF}{dx}=0 \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dy}=\infty.$$

Помоћу једно од овога и задате једначине налазимо вредности x-а за које функција y постаје max или min. То да ли је $\frac{d^2y}{dx^2} \lesseqgtr 0$ показује да ли је за добивене вредности x-а $y = \frac{max}{min}$.

25. Највеће и најмање вредности функција које зависе од више промењивих:

$$u=f(x,y).$$

Ако специалне вредности $x=a$ и $x=b$ добивене из једначина

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

испуњавају услов

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0,$$

онда те вредности $x=a$ и $y=b$ чине функцију u max или min према томе да ли је за $x=a$ и $y=b$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ обоје } <0 \text{ или обоје } >0.$$

26. Релативан максимум и минимум. Наћи за прапромењиве такве вредности које ће учинити да функција постане max или min са том погодбом да дотичне вредности прапромењивих испуњују извесне услове (једначине) значи определити *релативан максимум*, односно *релативан минимум*.

I. Дата је функција

$$u=f(x,y,z)$$

са условном једначином

$$\Phi(x,y,z)=0.$$

Заменом $z=\varphi(x,y)$ из друге у прву једначину сводимо функцију на

$$u=f(x,y,\varphi(x,y)),$$

где она зависи само још од две прапромењиве x и y и задатак је исти као онај у прошлом (25.) члану.

II. Ако су осим функције

$$u=f(x,y,z)$$

дате две условне једначине

$$\Phi(x,y,z)=0 \quad \text{и} \quad \Psi(x,y,z)=0$$

из којих добијамо

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x)$$

и заменимо ово у прву једначину, онда добијамо функцију

$$u=f(x,\varphi(x),\psi(x)),$$

која зависи још само од једне прапромењиве x и задатак је сведен на случај чл. 24.

III. Решење не вршећи замену. Дата је функција

$$u=f(x_1,x_2,\cdots x_n).$$

Између $x_1, x_2, \dots x_n$ постоје m условних једначина

$$f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_m(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0.$$

Тражимо max и min за функцију

$$v = f + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_m f_m,$$

где су $k_1, k_2, \dots k_m$ константни чинитељи.

Парциалне изводне $\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0$ (којих има n) у вези са m условних једначина $f_1 = 0, f_2 = 0, \cdots f_m = 0$ дају средство да определимо оних m констаната $k_1, k_2, \dots k_m$ и n непознатих $x_1, x_2, \dots x_n$, који чине да функција u постане max или min.

27. Растављање рационално разломљених функција на просте разломке. Замишљамо да је $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ чисто разломљена функција.

I. Ако једначина $f(x) = 0$ има само просте и реалне корене $a, b, \dots l$, онда се $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ разлаже

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l},$$

где је

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \cdots L = \frac{\varphi(l)}{f'(l)}.$$

II. Узмимо да је a α-струк корен једначине $f(x) = 0$. Тада је $\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = f_1(x)$ цела функција.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

Заменом x са $a + h$ добијамо

$$\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha \varphi_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}.$$

Ако помоћу Taylor-овог реда развијемо леву страну $\frac{\varphi(a+h)}{f_1(a+h)}$ по растућим степенима h-а и сравнимо члан по члан са десном страном добићемо константе $A, A_1, \dots A_{\alpha-1}$. Исту би методу употребили и на остатак $\frac{\varphi_\alpha(x)}{f_1(x)}$.

III. У случају да једначина $f(x) = 0$ има имагинарних корена у изразу за $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ јављају се оваква два разломка

$$\frac{\varphi(\alpha + i\beta)}{f'(\alpha + i\beta)} \frac{1}{x - \alpha - i\beta} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(\alpha - i\beta)}{f'(\alpha - i\beta)} \frac{1}{x - \alpha + i\beta}$$

чији се збир своди на форму

$$\frac{A + iB}{x - \alpha - i\beta} + \frac{A - iB}{x - \alpha + i\beta} = \frac{Px + Q}{(x-\alpha)^2 + \beta^2},$$

где су P и Q реалне константе: $P = 2A, \ Q = -2(A\alpha + B\beta)$.

IV

Примена Диф. Рачуна у Геометрији.

28. Тангента. Нека су $x_1 y_1$ координате додирне тачке. Према томе да ли је једначина линије дата у форми

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad F(x, y) = 0$$

угловни коефицијент тангенте је

$$m = \frac{dy_1}{dx_1} \quad \text{или} \quad m = -\frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{dF}{dy_1}},$$

а једначина тангенте

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad (x - x_1)\frac{dF}{dx_1} + (y - y_1)\frac{dF}{dy_1} = 0. \quad (18)$$

29. Нормала. Угловни коефицијент m_n нормале (управне на тангенти у додирној тачци $x_1 y_1$) јесте

$$m_n = -\frac{dx_1 + dy_1 \cos\vartheta}{dy_1 + dx_1 \cos\vartheta} = \frac{\frac{dF}{dy_1} - \frac{dF}{dx_1}\cos\vartheta}{\frac{dF}{dx_1} - \frac{dF}{dy_1}\cos\vartheta}$$

за координате са углом ϑ, а за правоугле простије

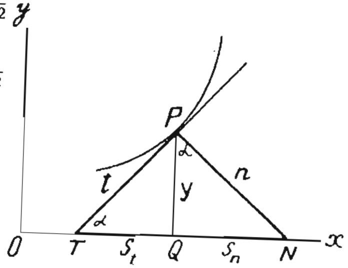
$$m_n = -\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{dF}{dx_1}}.$$

Једначина нормале:

(19) $$x - x_1 = -\frac{dy_1}{dx_1}(y - y_1), \text{ односно } \frac{x - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}}.$$

30. Дужина тангенте, нормале, подтангенте и поднормале.

(20) $$\begin{cases} \textit{тангента } PT = t = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \\ \textit{нормала } PN = n = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ \textit{подтангента } TQ = s_t = y\frac{dx}{dy} \\ \textit{поднормала } QN = s_n = y\frac{dy}{dx}. \end{cases}$$

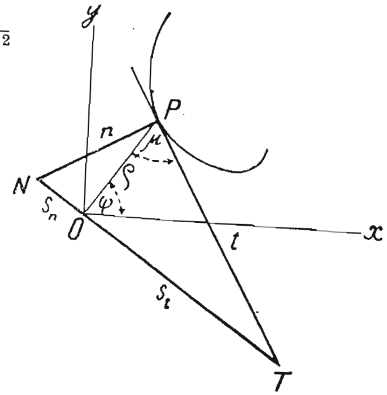


31. Обрасци за поларне координате. Правац тангенте у тачци $P(\rho, \varphi)$ утврђујемо углом $\mu = \sphericalangle OPT$ који дирка у тачци P чини са потегом те тачке.

(21) $$tg\,\mu = \frac{\rho\, d\varphi}{d\rho}$$

Повуцимо $NT \perp OP$, онда је

(22) $$\begin{cases} \textit{поларна тангента} \\ PT = t = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{\rho\, d\varphi}{d\rho}\right)^2} \\ \textit{поларна нормала} \\ PN = n = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} \\ \textit{поларна подтангента} \\ OT = s_t = \frac{\rho^2 d\varphi}{d\rho} \\ \textit{поларна поднормала} \\ ON = s_n = \frac{d\rho}{d\varphi}. \end{cases}$$

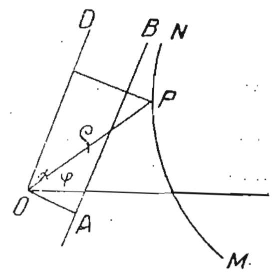


32. Асимптоте у паралелној системи. За бесконачно удаљену тачку додира, тј. за $x_1 = \infty$ и $y_1 = \infty$ једначина тангенте претвара се у

(23) $$y = x \lim_{x_1 = \infty} \frac{dy_1}{dx_1} + \lim_{x_1 = \infty}\left(y_1 - x_1\frac{dy_1}{dx_1}\right),$$

а то је једначина асимптоте $y = mx + b$ у претпоставци да $\lim \frac{dy_1}{dx_1}$ и $\lim\left(y_1 - x_1\frac{dy_1}{dx_1}\right)$ теже за $x_1 = \infty$ и $y_1 = \infty$ одређеним бројевима m и b.

33. Асимптоте у поларној системи. Ако је AB асимптота линије MN, онда удаљавањем тачке P од пола O ρ бива веће и тежи правцу OD, а поларни угао φ одређеној вредности α. Ако поларна подтангента $OA = \rho\, sin(\alpha - \varphi)$ тежи извесној одређеној и коначној вредности, дакле $\lim_{\rho = \infty} \frac{\rho^2 d\varphi}{d\rho} = OA$ кад ставимо $\varphi = \alpha$ за који је угао $\rho = \infty$, онда задата линија има асимптоту у правцу α и одстојању OA од пола.



34. Анвелопе. Геометриско место тачака у којима се секу две бесконачно приближне линије једног низа линија $F(x, y, a) = 0$, зове се *анвелопа* тих линија.

I. Једначину анвелопе једне групе линија $F(x, y, a) = 0$ добијамо кад елиминујемо параметар a из једначина

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF(x, y, a)}{da} = 0.$$

II. Ако у једначини линија улазе два параметра a и b, нпр. $F(x, y, a, b) = 0$, а између њих постоји некаква веза $\Phi(a, b) = 0$, једначину анвелопе добијамо елиминовањем параметара a и b из

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \Phi(a, b) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\frac{d\Phi}{da}}{\frac{dF}{da}} = \frac{\frac{d\Phi}{db}}{\frac{dF}{db}}.$$

35. Пројекционе линије. Геометриско место пројекција једне сталне тачке (a, b) на све могуће тангенте једне задате линије $F(x, y) = 0$ зовемо *пројекционом линијом* оне задате линије. Једначину пројекционе линије добијамо елиминовањем координата додирне тачке (x_1, y_1) из једначине

линије $\qquad F(x_1, y_1) = 0,$

тангенте $\qquad y - y_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$

и нормале из тачке a, b на тангенту $\qquad y - b = -\dfrac{dx_1}{dy_1}(x - a).$

36. **Конвексност и конкавност линија.** Линија је *конвексна* (тангента линије налази се између линије и x-осе) или *конкавна* (линија лежи између њене тангенте и x осе) у односу према x-оси, према томе да ли је $y \gtrless 0$ и $\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ или је $y \gtrless 0$, а $\frac{dy^2}{dx^2} \lessgtr 0$. Ако је у дотичној тачци $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ линија из конвексности прелази у конкавност или обратно. Таква тачка, у којој је $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ или $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$, а пролазећи кроз ту тачку друга изводна мења знак, зове се *инфлексиона тачка*.

Ако је у тачци $x_1 y_1$

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=0,\ \frac{d^3y_1}{dx_1^3}=0,\cdots \frac{d^{n-1}y_1}{dx_1^{n-1}}=0,$$

тако да је тек $\frac{d^ny_1}{dx_1^n} \neq 0$, онда закључујемо:

1. ако n парно, линија је у тачци $x_1 y_1$ конвексна или конкавна у односу према x-оси према томе да ли је $\frac{d^ny_1}{dx_1^n} \gtrless 0$.

2. ако је n непарно тачка $x_1 y_1$ је инфлексиона тачка. Претпоставља се да је координатни угао $\leqq 90^0$.

37. **Додиривање кривих линија.** Ако је у заједничкој тачци P_0 двеју кривих линија $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$, дакле за исту апсцису x_0 и исту ординату $f(x_0)=\varphi(x_0)$ још и $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$, $f''(x_0)=\varphi''(x_0),\cdots f^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0)$, онда кажемо да се такве линије *додирују у n-томе реду*.

Закључак. 1. ако је n (ред додиривања) непаран број, онда у близини тачке P_0 једна линија *обухвата* ону другу.

2. ако је n паран број линије се у тачци P_0 *укрштају*.

38. **Оскулаторне линије.** Највиши ред додиривања једне линије са другом линијом зависи од броја произвољних констаната (параметара) које садржи једначина прве линије. Највиши ред додиривања је за 1 мањи од броја тих констаната. Линија, која према броју констаната њене једначине, додирује једну задату линију у највишем реду, зове се *оскулаторна линија* оне задате.

Нека је $y=f(x)$ једначина задате линије, $y=\varphi(x,a,b,\cdots k)$ једначина једног низа линија. За додиривање у n-томе реду а $n+1$ условна једначина

$$f(x_0)=\varphi(x_0,a,b,\cdots k),\ f'(x_0)=\varphi'(x_0,a,b,\cdots k),\cdots$$
$$f^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0,a,b,\cdots k)$$

из којих одређујемо $n+1$ константу $a,b,\cdots k$.

39. **Примери.** 1. Оскулаторна права $y=mx+b$ за какву криву линију јесте тангента линије у дотичној тачци. Додиривање је у првом реду, јер су две произвољне константе m и b које има да се определе.

2. *Оскулаторни круг* $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ или *круг кривине* додирује линију $y=f(x)$ у другом реду, јер имамо на расположењу три константе α, β (координате *средишта*) и r (*полупречник кривине*).

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= x-\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \beta=y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\\
r &= \pm\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Примедба. Односно двојаког знака за r приметимо да средиште кривине лежи на конкавној страни линије. — С обзиром да је у тачци x,y нормала $n=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (в. чл. 30.) јесте

$$r=\pm\frac{n^3}{y^3\frac{d^2y}{dx^2}}. \tag{25}$$

40. **Кривина линија.** Кривина круга је $\frac{1}{r}=\frac{\omega}{s}$. Овде је ω средишни угао који је једнак са углом који заклапају тангенте у крајним тачкама лука s. Аналогно разумемо под кривином ма какве линије у некој њеној тачци количник из бесконачно малог угла $d\omega$ који захватају тангенте у крајним тачкама бесконачно малог лука ds и тога лука ds, дакле

$$\frac{1}{r}=\frac{d\omega}{ds} \quad \text{или} \quad r=\frac{ds}{d\omega}. \tag{26}$$

Угао $d\omega$ зове се *котингентни угао*.

Примедба. 1. Круг кривине је идентичан са оскулаторним кругом. 2. У инфлексионим тачкама је $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, дакле $r=\infty$, кривина $\frac{1}{r}=0$.

41. Заменом промењиве x новом промењивом t обрасци (24) добијају изглед

$$\alpha = x - \frac{(dx^2+dy^2)dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},\quad \beta = y + \frac{(dx^2+dy^2)dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$$r = \pm\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

У поларној системи имамо

$$r = \pm\frac{(d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2)^{3/2}}{\rho^2 d\varphi^3 + 2d\rho^2 d\varphi - \rho d^2\rho\, d\varphi} = \pm\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}}. \tag{27}$$

Примедба. У инфлексионим тачкама је $\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}=0$.

42. Еволута и еволвента. Средишта кривине једне линије образују линију која се зове *еволуша* оне прве, а ова опет њена *еволвенша.*

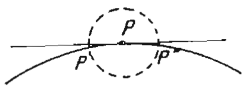
Једначину еволуте у координатама α и β за линију $y=f(x)$ добијамо елиминовањем x и y помоћу једначина

$$y=f(x)$$

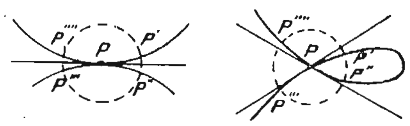
$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+0.$$

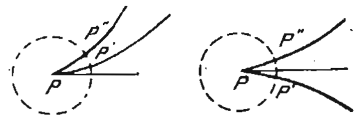
43. Особене тачке кривих линија. I. Појам. Кад око неке тачке P криве линије опишемо круг са бесконачно малим полупречником, онда тај круг сече задату линију уопште у двема тачкама P' и P'' и то тако да је $\sphericalangle P'PP''$ за бесконачно мало различан од 180^0. Тачке криве линије, које имају то својство да онај око њих описани круг не сече линију у двема тачкама или ако је сече, а оно тако да је $\lim \sphericalangle P'PP'' \neq 180^0$, зовемо *особеним шачкама.*



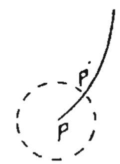
II. *Многосшруке шачке* јесу такве око којих описани бесконачно мали круг сече линију у више од две тачке. Многоструке тачке постају укрштањем или додиривањем више разних грана криве линије. У таквим тачкама линија има више тангената, које се, у извесним случајевима, могу и поклапати. Према броју могућих тангената каже се да је тачка дво-, тро-, ... n-струка.



III. *Повраšне шачке* то су кад из њих описани круг са бесконачно малим полупречником сече линију у двема тачкама P' и P'', али тако да се $\sphericalangle P'PP''$ разликује од 0 за бесконачно мало. У повратној тачци граниче и додирују се две гране. Обе гране имају у повратној тачци једну исту тангенту. Имамо *йовраšне шачке ћрве всшe* код којих гране леже на разним странама и *йовраšне шачке друге врсшe* код којих гране леже на једној истој страни њихове заједничке тангенте. Ако је $P(a,b)$ повратна тачка, онда за $x=a-h$ (h бесконачно мало) добијамо две стварне или две уображене ординате, док за $x=a+h$ ординате су уображене, односно стварне. За $x=a$ следују за y и за $\frac{dy}{dx}$ по две стварне и једнаке вредности. Да ли је P повратна тачка прве или друге врсте оцењује се помоћу $\frac{d^2y}{dx^2}$ у близини тачке P, тј. на основу конвексности, односно конкавности линије код P.



IV. *Одвојене шачке* јесу оне код којих онај бесконачно мали круг линију не сече. Тачка $P(a,b)$ је одвојена ако су за $x=a\pm h$ ординате имагинарне.



V. *Крајње шачке* јесу оне око којих описани круг са бесконачно малим полупречником сече линију само у једној тачци. У таквој се тачци свршава једна грана линије.

VI. *Тачке ћрелامања* јесу тачке где онај бесконачно мали круг сече линију у двема тачкама, али тако да је $0<\sphericalangle P'PP''<180^0$. У таквим се тачкама свршавају две гране линије и свака грана има своју тангенту.

ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

I

Методе интегралења.

1. Појам интеграла. Функција $F(x)$ за коју је

$$dF(x) = f(x)\,dx, \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

зове се *интеграл* диференциала $f(x)dx$ и бележи се

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx, \quad \int dF(x) = F(x).$$

Неодређен интеграл: $\int f(x)\,dx = F(x) + Const.$

Одређен интеграл: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$$= \lim \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\Delta x.$$

2. Основни обрасци.

(1) $$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx.$$

(2) $$\int[f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

(3) $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

(4) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

(5) $$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

(6) $$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

(7) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

(8) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C.$$

(9) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\,x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \qquad (10)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C = -arc\,cotg\,x + C. \qquad (11)$$

Примедба. У свима овим обрасцима x може да представља прапроменљиву или ма какву њену функцију.

3. Метода делимичног интегралења.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (12)$$

4. Интегралење заменом.

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

5. Интегралење рационално разломљених функција.

Ако је функција цела $\psi(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + qx + r$ интегралење се врши према формулама (2) и (3) у чл. 2.

Ако је функција нечисто разломљена, онда се она прво претвара у једну целу и једну чисто разломљену функцију

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \psi(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}.$$

Метода за интегралење чисто разломљених функција основана је на разлагању разломљене функције на просте разломке (Диф. Р. чл. 27.). На случај да $f(x) = 0$ има стварне и просте корене $\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx$ раствара се на извесан број интеграла $K\int \frac{dx}{x-k} = Kl(x-k)$. — Ако $f(x)$ има стварне и многоструке корене долазе у употребу основни интеграли $\int \frac{du}{u^n} = \frac{u^{1-n}}{1-n}$ и $\int \frac{du}{u} = lu$. — Најзад код имагинарних корена примењујемо $\int \frac{du}{u} = lu$ и $\int \frac{du}{1+u^2} = arctg\,u$.

6. Интегралење ирационалних функција.

I. Функција је састављена из разних корена у којима је радиканд линеаран и један исти. Претварамо такав ирационални диференциал у рационалну форму доводећи све корене на заједнички корени изложитељ. Нека је $px + q$ радиканд, n заједнички корени изложитељ.

Супституција је $\sqrt[n]{px+q} = t.$

II. Функција под квадратним кореном је другог степена. Тип:

$$\int \frac{\Phi(x)\,dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

$\Phi(x)$ је ма каква рационална функција.

1. Први члан тринома је позитиван.

Прва метода: $\sqrt{x^2+px+q} = t \pm x$.

Узев $= t - x$

следује

$$\int \frac{\Phi(x)\,dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = 2\int \frac{\Phi\left(\frac{t^2-q}{2t+p}\right)}{2t+p}\,dt.$$

Друга метода: ако је $q<0$, α и β (стварни) корени једначине $x^2+px+q=0$, дакле $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$. Супституција

$$\sqrt{x^2+px+q} = (x-\alpha)t$$

даје

$$\int \frac{\Phi(x)\,dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = 2\int \frac{\Phi\left(\frac{\beta-\alpha t^2}{1-t^2}\right)}{1-t^2}\,dt.$$

2. Први члан тринома је негативан.

Прва метода: ако је $q>0$ стављамо

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{q}+tx$$

и добијамо

$$\int \frac{\Phi(x)\,dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} = -2\int \frac{\Phi\left(\frac{p-2t\sqrt{q}}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\,dt.$$

Ова метода може да се употреби и у случају да је први члан тринома позитиван, ако је $q>0$.

Друга метода: важи кад је $q<0$. Пошто су корени α и β једначине $x^2+px+q=0$ стварни може се употребити друга метода првог случаја. Нека је $\beta>\alpha$. Стављамо

$$\sqrt{-x^2+px-q} = (x-\alpha)t$$

и добијамо

$$\int \frac{\Phi(x)\,dx}{\sqrt{-x^2+px-q}} = -2\int \frac{\Phi\left(\frac{\beta+\alpha t^2}{1+t^2}\right)}{1+t^2}\,dt.$$

7. Интегралење биномних диференциала. Општи вид

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Без штете по општност могу се m и n узети као цели, а n још и као позитиван број. Ако су m и n разломљени бројеви, доводећи их на заједнички именитељ r и учинивши замену $x=t^r$ биномни диференциал добија вид $rt^{mr+r-1}(a+bt^{nr})^p dt$ у коме су изложитељи од t цели бројеви. Најзад изложитељ n можемо сматрати као позитиван, јер се у противном случају може да напише $x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m+np}(b+ax^{-n})^p dx$, где је у загради на десној страни експонент $-n$ позитиван.

I. Биномни диференциал може да се интеграли:

1. ако је p цео број.
2. ако је $\frac{m+1}{n}$ = целом броју или $=0$.
3. ако је $\frac{m+1}{n}+p$ = целом броју или $=0$.

II. Редукционе формуле.

1. кад је $m>n$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

2. кад је $p>0$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1} dx.$$

3. кад је $m<0$ (13)

$$\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)} + \frac{b(np-m+n+1)}{a(m-1)}\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

4. кад је $p<0$

$$\int x^m(a+bx^n)^{-p} dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} - \frac{m+n+1-np}{an(p-1)}\int x^m(a+bx^n)^{-p+1} dx.$$

8. Интегралење тригонометриских функција.

I. Интеграле вида $\int f(\sin x, \cos x, tg\,x, cotg\,x)\,dx$ заменом

$$t = tg\frac{x}{2}$$

претварамо у интеграл алгебарске функције:

$$\int f(\sin x, \cos x, tg\, x, cotg\, x)\, dx = 2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

II. $\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(a-a')x+b-b']}{a-a'} + \frac{\sin[(a+a')x+b+b']}{a+a'}\right] + C.$$

III. Редукционе формуле.

$$\begin{cases} \int \sin^n x \cos^p x\, dx = -\dfrac{\sin^{n-1} x \cos^{p+1} x}{n+p} + \dfrac{n-1}{n+p}\int \sin^{n-2} x \cos^p x\, dx \\ \int \sin^n x \cos^p x\, dx = \dfrac{\sin^{n+1} x \cos^{p-1} x}{n+p} + \dfrac{p-1}{n+p}\int \sin^n x \cos^{p-2} x\, dx. \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} \int \sin^n x\, dx\,^{1} = -\dfrac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx \\ \int \cos^n x\, dx = \dfrac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx. \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \int \dfrac{\sin^n x}{\cos^p x} dx = -\dfrac{\sin^{n-1} x}{(n-p)\cos^{p-1} x} + \dfrac{n-1}{n-p}\int \dfrac{\sin^{n-2} x}{\cos^p x} dx \\ \qquad = \dfrac{\sin^{n+1} x}{(p-1)\cos^{p-1} x} - \dfrac{n-p+2}{p-1}\int \dfrac{\sin^n x}{\cos^{p-2} x} dx \\ \int \dfrac{\cos^p x}{\sin^n x} dx = \dfrac{\cos^{p-1} x}{(p-n)\sin^{n-1} x} + \dfrac{p-1}{p-n}\int \dfrac{\cos^{p-2} x}{\sin^n x} dx \\ \qquad = -\dfrac{\cos^{p+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \dfrac{p-n+2}{n-1}\int \dfrac{\cos^p x}{\sin^{n-2} x} dx. \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \int \dfrac{dx}{\sin^n x} = -\dfrac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\sin^{n-2} x} \\ \int \dfrac{dx}{\cos^n x} = \dfrac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\cos^{n-2} x}. \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \int tg^n x\, dx = \dfrac{tg^{n-1} x}{n-1} - \int tg^{n-2} x\, dx \\ \int cotg^n x\, dx = -\dfrac{cotg^{n-1} x}{n-1} - \int cotg^{n-2} x\, dx. \end{cases} \tag{18}$$

[1] Овакве интеграле можемо да извршимо развијањем $\sin^n x$ и $\cos^n x$ у ред према формулама (5) у чл. 10. Алг. Ан.

$$\begin{cases} \int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx \\ \int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx. \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} \int \dfrac{\sin x}{x^n} dx = -\dfrac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}\int \dfrac{\cos x}{x^{n-1}} dx \\ \int \dfrac{\cos x}{x^n} dx = -\dfrac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \dfrac{1}{n-1}\int \dfrac{\sin x}{x^{n-1}} dx. \end{cases} \tag{20}$$

9. Интегралење експоненциалних и логаритамских функција. За цело и позитивно n, а ма какво p.

$$\begin{aligned} \int x^n e^{px} dx &= \frac{x^n e^{px}}{p} - \frac{n}{p}\int x^{n-1} e^{px} dx \\ &= e^{px}\left[\frac{x^n}{p} - \frac{n x^{n-1}}{p^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{p^3} - + \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{p^{n+1}}\right] + C. \end{aligned} \tag{21}$$

$$\int \frac{e^{px} dx}{x^n} = -\frac{e^{px}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{p}{n-1}\int \frac{e^{px} dx}{x^{n-1}}. \tag{22}$$

$$\begin{cases} \int e^{ax}\cos bx\, dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C \\ \int e^{ax}\sin bx\, dx = \dfrac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C. \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \int \sin(lx)\, dx = \dfrac{x}{2}[\sin(lx) - \cos(lx)] + C \\ \int \cos(lx)\, dx = \dfrac{x}{2}[\sin(lx) + \cos(lx)] + C. \end{cases} \tag{24}$$

II.

Одређени интеграли.

10. Правила и дефиниције.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{25}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^e f(x)dx + \int_e^g f(x)dx + \cdots + \int_k^b f(x)dx. \tag{26}$$

Ако је $f(b)=\infty$, онда треба разумети $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon=0}\int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx.$

„ „ $f(a)=\infty$, „ „ „ $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon=0}\int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx.$

Најзад, ако је $f(c)=\infty$, где је $a<c<b$ треба узети

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon=0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta=0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx.$$

11. Приближне вредности одређеног интеграла. Ако је за $a<x<b$

$$\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$$

онда је

$$\int\varphi(x)\,dx<\int f(x)\,dx<\int\psi(x)\,dx.$$

12. Ајлер-ови интеграли. I. *Ајлер-ови интеграли друге врсте или гамафункције.*

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx. \tag{27}$$

Овде је $n>0$, јер је за $n<0$ интеграл бесконачан.

$$\Gamma(n)=(n-1)\,\Gamma(n-1). \tag{28}$$

Ако је n цело (и позитивно)

$$\Gamma(n)=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)=(n-1)\,! \tag{29}$$

Заменом $x=l\left(\frac{1}{y}\right)$ постаје

$$\Gamma(n)=\int_0^1\left[l\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{n-1}dy. \tag{27a}$$

II. *Ајлер-ови интеграли друге врсте*

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{30}$$

или кад заменимо $x=\frac{y}{1+y}$

$$B(p,q)=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}, \tag{30a}$$

где су p и q два позитивна броја. У противном случају ($p<0$ и $q<0$) интеграл постаје ∞.

Замена $x=sin^2\theta$ даје нов вид

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\,\theta)^{2p-1}(cos\,\theta)^{2q-1}\,d\theta. \tag{30b}$$

$$B(p,q)=B(q,p). \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} B(p+1,q)&=\frac{p}{p+q}B(p,q)\\ B(p,q+1)&=\frac{q}{p+q}B(p,q).\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{33}$$

III. *Лаплас-ов интеграл:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}. \tag{34}$$

IV. *Стирлинг-ова формула:*

$$\Gamma(n+1)\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}. \tag{35}$$

Ако је n цео број, онда је

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}. \tag{36}$$

13. Диференциалење одређеног интеграла:

$$u=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{37}$$

I. Диференциалење по границама a и b:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{da}=-f(a),\quad \frac{du}{db}&=f(b),\\ du=-f(a)\,da+f(b)\,db.\end{aligned}\right\} \tag{37a}$$

II. Диференциалење

$$u=\int_a^b f(x,t)\,dx \tag{38}$$

по параметру t

1. кад границе a и b не зависе од t

$$\frac{du}{dt}=\int_a^b\frac{df(x,t)}{dt}\,dx; \tag{38a}$$

2. кад граница a и b зависе од t

$$du=-f(a,t)\,da+f(b,t)\,db+dt\int_a^b\frac{df(x,t)}{dt}\,dx. \tag{38b}$$

Примедба. За неодређени интеграл је увек

(39) $$\frac{du}{dt}=\int\frac{df(x,t)}{dt}\,dx.$$

14. Интеграљење под интегралним знаком.

(40) $$\int_a^b dx\int_c^e f(x,y)\,dy=\int_c^e dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

15. Интеграљење помоћу бесконачних редова. Развијањем у ред $f(x)=u_1+u_2+\cdots+u_n+R_n$, који је конвергентан за $a\leqslant x\leqslant b$ добијамо резултат

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b u_1\,dx+\int_a^b u_2\,dx+\cdots+\int_a^b u_n\,dx+\int_a^b R_n\,dx.$$

16. Примери. 1. *Елиптичан интеграл прве врсте:*

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$
$$=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\cdots$$

где је $k<1$. Слично за елиптичне интеграле друге врсте:

$$\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$
$$=\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}k^2\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^x\frac{x^6\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\cdots$$

Примедба. Интеграле на десној страни изналазимо формулом $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (на основу прве формуле (13) у чл. 7.).

2. *Интегрални логаритам:*

(41) $$\int\frac{dy}{ly}=C+lly+ly+\frac{(ly)^2}{2!\,2}+\frac{(ly)^3}{3!\,3}+\frac{(ly)^4}{4!\,4}+\cdots$$

3. *Интегрални синус:*

(42) $$\int\frac{\sin x}{x}\,dx=x-\frac{x^3}{3!\,3}+\frac{x^5}{5!\,5}-\frac{x^7}{7!\,7}+-\cdots$$

4. *Интегрални косинус:*

$$\int\frac{\cos x}{x}\,dx=lx-\frac{x^2}{2!\,2}+\frac{x^4}{4!\,4}-\frac{x^6}{6!\,6}+-\cdots \tag{43}$$

5. Ако означимо

$$\left.\begin{aligned}&\int_\infty^{-x}\frac{e^{-x}}{x}\,dx=Ei(x),\quad \int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dx=Si(x),\quad \int_x^\infty\frac{\cos x}{x}\,dx=Ci(x),\\ &\text{онда је}\qquad Ei(x)=Ci(x)+iSi(x).\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

III

Примена Интегралног Рачуна у Геометрији.

1.

Линије у равни.

17. Ректификација линија. 1. у правоуглим координатама:

$$\left.\begin{aligned}ds&=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\\ s&=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

2. у поларним координатама:

$$\left.\begin{aligned}ds&=\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\varphi^2}=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi\\ s&=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

18. Квадратура слика. 1. у правоуглим координатама:

$$\left.\begin{aligned}du&=y\,dx\\ u&=\int_{x_1}^{x_2}y\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

2. у косоуглим координатама:

$$\left.\begin{aligned}du&=y\sin\vartheta\,dx\\ u&=\sin\vartheta\int_{x_1}^{x_2}y\,dx.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

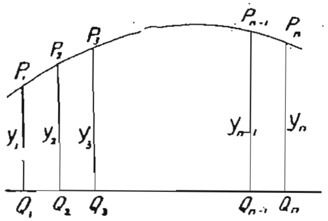
3. у поларним координатама:

$$
(49)\qquad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi \\ u &= \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2 d\varphi . \end{aligned}\right.
$$

$$
(50)\qquad \rho^2 d\varphi = x\,dy - y\,dx .
$$

19. Приближно израчунавање површине слика.

I. *Метода помоћу трапеза.* Нека је $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_3 = \cdots = Q_{n-1} Q_n = h$.



$$
(51)\qquad P_1 P_n Q_1 Q_n = h\left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right).
$$

II. *Симпсон-ова метода.* Претпоставља се да је $Q_1 Q_n$ подељено на *паран* број једнаких делова. Онда је n непарно.

$$
(52)\qquad P_1 P_n Q_1 Q_n = \frac{h}{3}[(y_1 + y_n) + 4(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots) + 2(y_3 + y_5 + y_7 + \cdots)].
$$

III. *Понселе-ова метода.* И овде се претпоставља да је n непарно, тј. да је $Q_1 Q_n$ подељено на *паран* број једнаких делова.

$$
(53)\qquad \left\{\begin{aligned} & P_1 P_n Q_1 Q_n = h[2s + \frac{1}{4}(y_1 + y_n) - \frac{1}{4}(y_2 + y_{n-1})]. \\ & \text{Овде је} \qquad s = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots \end{aligned}\right.
$$

2.

Линије у простору.

20. Једначине линије у простору.

I. Као пресек двеју површина:

$$
F(x, y, z) = 0
$$
$$
\Phi(x, y, z) = 0 .
$$

II. Као пресек два ваљка:

$$
y = f(x)
$$
$$
z = \varphi(x) .
$$

21. Дужина лука.

$$
(54)\qquad \left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx \\ s &= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx . \end{aligned}\right\}
$$

22. Тангента. Једначине тангенте у тачци $x_1 y_1 z_1$

$$
(55)\qquad \left.\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \\ z - z_1 &= \frac{dz_1}{dx_1}(x - x_1) \end{aligned}\right\}
$$

или

$$
(55a)\qquad \frac{x - x_1}{dx_1} = \frac{y - y_1}{dy_1} = \frac{z - z_1}{dz_1}
$$

или најзад

$$
(55b)\qquad \left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dF}{dy_1}(y - y_1) + \frac{dF}{dz_1}(z - z_1) &= 0 \\ \frac{d\Phi}{dx_1}(x - x_1) + \frac{d\Phi}{dy_1}(y - y_1) + \frac{d\Phi}{dz_1}(z - z_1) &= 0 . \end{aligned}\right\}
$$

За углове α, β, γ, које тангента заклапа са координатним осама:

$$
(56)\qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.
$$

23. Нормална раван, а то је раван која стоји $\perp$ на тангенти линије у додирној тачци $x_1 y_1 z_1$ има једначину

$$
(57)\qquad (x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1 = 0 .
$$

24. Оскулаторна раван јесте раван која пролази кроз три бескрајно приближне тачке (садржи дакле и тангенту) једне линије. Једначина оскулаторне равни у тачци $x_1 y_1 z_1$ гласи

$$
(58)\qquad (dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1)(x - x_1) + (dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1)(y - y_1) + (dx_1\,d^2y_1 - dy_1\,d^2x_1)(z - z_1) = 0 .
$$

За углове λ, μ, ν, које нормала на оскулаторну раван заклапа са координатним осама имамо:

$$
(59)\qquad \left.\begin{aligned} \cos\lambda = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{J}, \quad \cos\mu = \frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{J}, \\ \cos\nu = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{J}, \end{aligned}\right\}
$$

где је

$$(59)\quad \begin{cases} J = \sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2} \\ \quad = ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2} \\ \quad = \sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2} \\ \quad = ds^3\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}. \end{cases}$$

25. Главна нормала је нормала у оскулаторној равни; она је управна на тангенти линије и на нормали оскулаторне равни.

Њене једначине:

$$(60)\qquad \frac{x - x_1}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{y - y_1}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{z - z_1}{d\frac{dz}{ds}}.$$

За углове φ, ψ, χ, које главна нормала чини са координатним осама имамо:

$$(61)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}} \\ \cos\psi = \dfrac{\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}} \\ \cos\chi = \dfrac{\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}}. \end{cases}$$

26. Кривина. Угао $d\omega$ који заклапају две бесконачно приближне тангенте зове се *контингентни угао.*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Кривина}\ K = \dfrac{d\omega}{ds}. \\ \textit{Полупречник кривине}\ \rho = \dfrac{1}{K} = \dfrac{ds}{d\omega}. \end{array}\right\}\qquad (62)$$

$$\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2} \\ \quad = \dfrac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}{ds^2}. \end{array}\right\}\qquad (62a)$$

27. Друга кривина (торзија). Означимо са λ, μ, ν углове које чини са координатним осама нормала оскулаторне равни (в. чл. 24.), са $d\theta$ бесконачно мали угао који заклапају две бесконачно приближне оскулаторне равни, а то је *угао торзије*

$$d\theta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}. \qquad (63)$$

Тада је

$$\left.\begin{array}{l} \textit{друга кривина}\ \text{или}\ \textit{торзија}\ T = \dfrac{d\theta}{ds}, \\ \textit{полупречник торзије}\ r = \dfrac{1}{T} = \dfrac{ds}{d\theta}. \end{array}\right\}\qquad (64)$$

3.

Површине.

28. Тангенциална раван. Према томе да ли је једначина површине у форми $F(x, y, z) = 0$ или у форми $z = f(x, y)$ једначина *тангенциалне равни* на површину у тачци $x_1 y_1 z_1$ гласи

$$\frac{dF}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dF}{dy_1}(y - y_1) + \frac{dF}{dz_1}(z - z_1) = 0 \qquad (65)$$

или

$$p(x - x_1) + q(y - y_1) - (z - z_1) = 0,$$

где означава

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}. \qquad (65a)$$

29. Нормала, а то је управна на тангенциалној равни у додирној тачци, има једначину

$$\frac{x - x_1}{\frac{dF}{dx_1}} = \frac{y - y_1}{\frac{dF}{dy_1}} = \frac{z - z_1}{\frac{dF}{dz_1}}, \qquad (66)$$

односно

$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{-1}. \tag{66a}$$

За углове α, β, γ, које нормала чини са координатним осама, имамо

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\dfrac{dF}{dx_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dz_1}\right)^2}} \\ \cos\beta &= \frac{\dfrac{dF}{dy_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dz_1}\right)^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{\dfrac{dF}{dz_1}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy_1}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dz_1}\right)^2}}, \end{aligned}\right. \tag{67}$$

односно

$$\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}. \tag{67a}$$

30. Кривина једне линије на задатој површини. Означимо са θ угао који заклапа полупречник кривине R једне линије на површини у тачци $x_1 y_1 z_1$ са нормалом површине у тој тачци, са dl линиски елеменат и означимо

$$\left\{\begin{aligned} & r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \qquad \text{Тада је} \\ & R=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\theta}{r\left(\dfrac{dx}{dl}\right)^2+2s\dfrac{dx}{dl}\dfrac{dy}{dl}+t\left(\dfrac{dy}{dl}\right)^2} \\ & =\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\cos\theta}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}, \end{aligned}\right. \tag{68}$$

где су α и β углови које тангента линије у тачци $x_1 y_1 z_1$ чини са x- и y-осом.

Ако оскулациона раван линије (на површини) пролази кроз нормалу површине ($\Theta=0$ или $\Theta=180^0$), онда је полупречник кривине *нормалног пресека*:

$$\rho=\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}. \tag{69}$$

$$R=\rho\cos\Theta \qquad (\textit{Meusnier}\text{-ова теорема}). \tag{70}$$

31. Други израз за кривину нормалних пресека. Тачку, у којој посматрамо R, узимамо за координатни почетак, а тангенциалну раван у тој тачци за xy-раван, дакле z-осу у правцу нормале. Означимо са φ угао који заклапа тангента линије у тачци O са x-осом: $\dfrac{dx}{dl}=\cos\varphi$, $\dfrac{dy}{dl}=\sin\varphi$.

Тада је:

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\varphi+2s\sin\varphi\cos\varphi+t\sin^2\varphi}. \tag{71}$$

32. Главни пресеци то су они нормални пресеци у којима се налазе највећи и најмањи полупречник кривине. Равни главних пресека стоје $\perp$. Ако једну од њих узмемо за xz-, другу за yz-раван имамо

$$\rho=\frac{1}{r\cos^2\varphi+t\sin^2\varphi}. \tag{72}$$

Главни полупречници кривине:

$$\rho'=\frac{1}{r},\qquad \rho''=\frac{1}{t}. \tag{73}$$

Кривина нормалног пресека који са главним пресеком у равни zox заклапа угао φ

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\cos^2\varphi}{\rho'}+\frac{\sin^2\varphi}{\rho''}. \tag{74}$$

Збир кривина два нормална пресека, који су $\perp$ један на другом, константно $=$ збиру кривина главних пресека:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}. \tag{75}$$

Тачка, у којој сви нормални пресеци имају исту кривину, зове се *кружна тачка*. За кружне тачке важе једначине

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}. \tag{76}$$

Ако се последње (две) једначине своде свега на једну, задата површина има безбројно много кружних тачака, које образују *линију сферне кривине*. Најзад, ако су једначине (76) идентичне, онда су све тачке на површини кружне тачке (сфера).

33. Линије кривине јесу линије на површини чије се нормале у узастопним тачкама секу. Кроз сваку тачку на површини пролазе две линије кривине, које су представљене диференциалном једначином

(77) $$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} + [pqr - (1+p^2)s] = 0$$

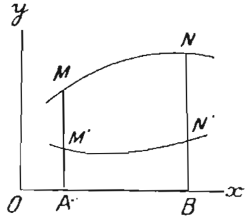
и једначином површине.

4.

Кубатура тела.

34. Кубатура обртног тела које постаје обртањем једне равне фигуре $MNAB$ око x-осе

(78) $$dV = \pi y^2\,dx, \quad V = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$



Кубатура обртног тела које постаје обртањем фигуре $MNM'N'$ око x-осе

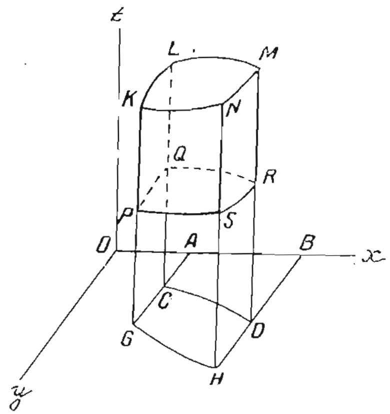
(79) $$V = \pi\int_a^b (y^2 - y'^2)\,dx,$$

где је $y = f(x)$ једначина линије MN, $y' = \varphi(x)$ једначина линије $M'N'$.

35. Општи случај. Нека је $F(x,y,z) = 0$ једначина криве површине $KLMN$, $\Phi(x,y,z) = 0$ друге криве површине $PQRS$. Узмимо две са yz-равни // равни $CGKL$ ($x = a$) и $DHMN$ ($x = b$). Најзад два ваљка $y = \varphi(x)$. и $y' = \psi(x)$ оба $\perp$ на xy-равни. Први ваљак сече површине по линијама LM и и QR; други ваљак по линијама KN и PS.

Ваљци $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ са површинама $F(x,y,z) = 0$ и $\Phi(x,y,z) = 0$ и равнима $x = a$ и $x = b$ образују простор $KLMNPQRS$ чија је запремина

(80) $$V = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z')\,dy.$$



Ако место ваљака $y = \varphi(x)$ и $y' = \psi(x)$ узмемо две са xz-равни // равни $\varphi(x) = c$ и $\psi(x) = e$, онда је

$$V = \int_a^b dx\int_c^e (z - z')\,dy. \qquad (80a)$$

Најзад, ако место површине $\Phi(x,y,z) = 0$ узмемо саму xy-раван (ставимо $z' = 0$) последња два обрасца гласе

$$V = \int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy \qquad (81)$$

$$V = \int_a^b dx\int_c^e z\,dy. \qquad (81a)$$

5.

Многоструки интеграли.

36. Дефиниција.

$$\int_{x=a}^{x=b} dx\int_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,dy = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0}} \sum_{x=a}^{x=b}\sum_{y=\varphi(x)}^{y'=\psi(x)} z\,\Delta y\,\Delta x$$

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} u\,dz = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y=0\\ \Delta z=0}} \sum_{x=a}^{x=b}\sum_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)}\sum_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} u\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

37. Правило. За многоструке интеграле са константним границама

$$\int_a^b dx\int_c^e z\,dy = \int_c^e dy\int_a^b z\,dx. \qquad (82)$$

6.

Компланација површина.

38. Општи обрасци. Образац за површину

$$S = \iint\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx\,dy,$$

где означава $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ добија следећи израз

1. ако је површина, која је представљена једначином $z = f(x,y)$, ограничена равнима $x = a$ и $x = b$, а са друге две стране ваљцима $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy. \tag{83}$$

2. ако је површина $z = f(x,y)$ ограничена равнима $x = a$, $x = b$ и $y = c$, $y = e$

$$S = \int_a^b dx \int_c^e \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy. \tag{83a}$$

39. Компланација обртних површина које описује једна линија обртањем око x-осе

$$\left\{\begin{aligned} dS &= 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi y\, ds \\ S &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int y\, ds. \end{aligned}\right. \tag{84}$$

7.
Трансформација многоструких интеграла.

40. Образац. Заменом

$$u = f_1(x,y), \qquad v = f_2(x,y)$$

претварамо

$$\left\{\begin{aligned} \iint F(x,y)\, dx\, dy &= \iint \pm D F(u,v)\, du\, dv \\ D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Аналогно заменом

$$u = f_1(x,y,z), \quad v = f_2(x,y,z), \quad w = f_3(x,y,z)$$

следује

$$\left.\begin{aligned} \iiint F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint \pm D F(u,v,w)\, du\, dv\, dw \\ D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{85a}$$

41. Примери. 1. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $D = r$

$$\iint F(x,y)\, dx\, dy = \iint F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi.$$

2. $x = r\cos\varphi\cos\omega$, $y = r\cos\varphi\sin\omega$, $z = r\sin\varphi$, $D = r^2\cos\varphi$

$$\iiint F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint F(r\cos\varphi\cos\omega, r\cos\varphi\sin\omega, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi\, d\omega.$$

Специално:

$$\iiint dx\, dy\, dz = \iiint r^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi\, d\omega.$$

3. $S = \iint \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy$

$$= \iint \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2}\, du\, dv.$$

Заменом $x = r\cos\varphi\cos\omega$, $y = r\cos\varphi\sin\omega$, $z = r\sin\varphi$ постаје

$$S = \iint \sqrt{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right]\cos^2\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r\, d\varphi\, d\omega.$$

8.
Употреба површинских координата.

42. Разне форме за једначину површине.

1. $F(x,y,z) = 0$.
2. $z = f(x,y)$.
3. $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$.

1. Пример. Лопта.

1. $$x^2+y^2+z^2=r^2$$

2. $$z=\sqrt{r^2+x^2+y^2}.$$

3. $x=r\cos u\cos v,\quad y=r\sin u\cos v,\quad z=r\sin v.$

2. Пример. Елипсоид.

1. $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. $$z=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2c^2-b^2c^2x^2-a^2c^2y^2}.$$

3. $x=a\cos u\cos v,\quad y=b\sin u\cos v,\quad z=c\sin v.$

43. Скраћено бележење.

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}-\dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial z}{\partial u}=A & \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E\\ \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}=B & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}=F\\ \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}-\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}=C & \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G\end{array}\right. \tag{86}$$

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2. \tag{87}$$

44. Угао ω под којим се секу u- и v-линије.

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\omega=\dfrac{F}{\sqrt{EG}}\\ \sin\omega=\dfrac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{EG}}.\end{array}\right. \tag{88}$$

Линије u и линије v јесу $\perp$, ако је $F=0$.

45. Израз за криволиниску површину

$$\left\{\begin{array}{l}dS=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv\\ S=\iint\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.\end{array}\right. \tag{89}$$

Ако је uv-система ортогонална

$$dS=\sqrt{EG}\,du\,dv,\quad S=\iint\sqrt{EG}\,du\,dv. \tag{90}$$

46. Обрасци за лук криве линије $v=f(u)$

$$\left.\begin{array}{l}ds=\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}=\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du\\ s=\int\sqrt{E+2Fv'+Gv'^2}\,du.\end{array}\right\} \tag{91}$$

Ако су линиске системе u и v ортогоналне, онда

$$\left.\begin{array}{l}ds=\sqrt{E\,du^2+G\,dv^2}=\sqrt{E+Gv'^2}\,du\\ s=\int\sqrt{E+Gv'^2}\,du.\end{array}\right\} \tag{92}$$

47. Углови које тангента ма какве линије на површини заклапа са координатним осама

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{ds}{du}},\quad \cos\beta=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{ds}{du}},\quad \cos\gamma=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{ds}{du}}. \tag{93}$$

48. Угао који заклапа линија L на површини са u- и са v-линијама.

$$\cos(L,u)=\frac{E+F\dfrac{dv}{du}}{\sqrt{E}\dfrac{ds}{du}},\quad \cos(L,v)=\frac{F+G\dfrac{dv}{du}}{\sqrt{G}\dfrac{ds}{du}}. \tag{94}$$

Ако су линије u и v ортогоналне, дакле $(L,u)+(L,v)=90^0$, онда простије

$$\cos(L,u)=\frac{\sqrt{E}\,du}{ds},\quad \sin(L,u)=\frac{\sqrt{G}\,dv}{ds},\quad tg(L,u)=\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}. \tag{95}$$

Пример. *Локсодрома* на лопти. То је линија која сече меридиане под истим углом. Између осталих линија и упоредници су локсодроме, јер они секу меридиане под истим (правим) углом. — Једначина лопте у географским координатама (узев $r=1$)

$$x=\cos u\cos v,\quad y=\sin u\cos v,\quad z=\sin v.$$

Меридиани су v-линије. $E=\cos^2 v,\ F=0,\ G=1$. За локсодрому је (L,v) константно $=\alpha$ и диференциална једначина локсодроме $tg\,\alpha=\cos v\dfrac{du}{dv}$, одакле $tg\,\alpha\, l\,tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{v}{2}\right)+c=u$.

Узев полазну тачку локсодроме на нултом меридиану са географском ширином $v=\beta$, дакле почев за $u=0,\ v=\beta$ једначина локсодроме гласи

$$u = tg\,\alpha\, l\left[\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{v}{2}\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}\right].$$

49. Једначина тангенциалне равни у тачци $x_1 y_1 z_1$

(96) $$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

Једначине нормале у тачци $x_1 y_1 z_1$

(97) $$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}.$$

За углове α, β, γ, које нормала заклапа са координатним осама имамо

(98) $$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

50. Деформовање површина. Две површине, код којих количине E, F, G зависе од u и v на исти начин како код једне тако и код друге, могу деформовањем (без истезања и скупљања) да се разастру једна на другу. Или по *Гаус-у*: две површине могу (деформовањем) да се разастру једна на другу, ако је код обеју површина производ из полупречника главне кривине, а то је $=\dfrac{(p^2+q^2+1)^2}{rt-s^2}$ у одговарајућим тачкама једнак.

Површина је *девелопабл*, тј. може да се разастре у раван, ако је

$$rt-s^2=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0.$$

51. Гаус-ова дефиниција за кривину површине:

(99) $$K=\frac{1}{R_1 R_2}=\frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2},$$

где су R_1 и R_2 полупречници главне кривине.

Кад се једна површина деформује тако да растојања између тачака, мерена на површини, остану непромењена, онда и мера за кривину остаје у свакој тачци на површини непромењена.

52. Геодетске линије имају карактерно својство да је њихова оскулаторна раван у свакој тачци нормална раван површине. Геодетска линија је, обично, најкраће растојање између двеју тачака на површини.

ДИФЕРЕНЦИАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

I
Обичне диференциалне једначине.

1.
Диференциалне једначине првог реда.

1. Одвајање промењљивих. Ако се задата једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

може да доведе на вид

$$f(x)\,dx=\varphi(y)\,dy$$

интегралење се врши непосредно

$$\int f(x)\,dx=\int\varphi(y)\,dy.$$

I. Ако су у задатој једначини

$$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0 \tag{1}$$

f и φ *хомогене* функције истог степена, заменом

$$y=xt \tag{1a}$$

задата се једначина претвара у

$$\frac{dx}{x}=-\frac{\varphi(t)\,dt}{f(t)+t\varphi(t)},$$

одакле

$$lx=c-\int\frac{\varphi(t)\,dt}{f(t)+t\varphi(t)}, \tag{1b}$$

где се ставља $t=\dfrac{y}{x}$.

II. Нехомогену једначину

$$(a+bx+cy)\,dx+(a'+b'x+c'y)\,dy=0 \tag{2}$$

супституцијом

$$a+bx+cy=u, \quad a'+b'x+c'y=v \tag{2a}$$

претварамо у хомогену једначину

(2b) $$(c'u - b'v)\,du + (bv - cu)\,dv = 0\,.$$

Примедба. Трансформација (2a) је немогућа ако је $bc' - b'c = 0$. С обзиром да је $c' = \frac{b'c}{b}$ и на основу замене

$$bx + cy = t$$

једначина се доводи на $b\,dx = \frac{(a'b + b't)\,dt}{a'b - ac + (b' - c)t}$, одакле

$$bx = \int \frac{(a'b + b't)\,dt}{a'b - ac + (b' - c)t}.$$

III. Линеарна диф. једначине првог реда

(3) $$\frac{dy}{dx} + y f(x) = \varphi(x)$$

има решење

(3a) $$y = \left[\int e^{\int f(x)\,dx}\varphi(x)\,dx + C\right] e^{-\int f(x)\,dx}.$$

Примедба. *Бернули*-ова једначина

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = y^n \varphi(x)$$

кад се напише

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n} f(x) = \varphi(x)$$

и стави

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$$

добија вид линеарне једначине

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) z f(x) = \varphi(x).$$

IV. Нека је задата диф. једначина вида

(4) $$\varphi(x)\frac{dy}{dx} + y f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n.$$

Узев решење у форми

(4a) $$y = Ce^{-\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx} + \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \mu x^n$$

добијамо коефицијенте $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu$ упоређујући чланове истог степена x-а на левој и десној страни једначине

$$\varphi(x)[\beta + 2\gamma x + \cdots + \mu n x^{n-1}] + f(x)[\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots \mu x^n] = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n. \quad (4b)$$

2. Интеграљење потпуних диференцијала. I. Услов под којим је $P\,dx + Q\,dy$ потпун диференцијал некакве функције $u = f(x, y)$ јесте

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Тако опет услов да би $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ био потпун диференцијал некакве функције $u = f(x, y, z)$ јесте

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dR}{dx} = \frac{dP}{dz}.$$

II. Интегралење потпуног диференцијала

$$du = P\,dx + Q\,dy \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy + C \\ v &= \int P\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Аналогно за

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \int P\,dx + \int\left(Q - \frac{dv}{dy}\right)dy + \int\left(R - \frac{dv}{dz}\right)dz + C \\ v &= \int P\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (6a)$$

III. Ако у једначини

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad (7)$$

нису испуњени услови (I) за интегралење, онда множењем извесним фактором μ (који је некаква функција x-а и y-а) израз на левој страни (7) може да се начини потпуним диференцијалом. За одређивање *интеграционог фактора* μ имамо диф. једначину

$$\mu\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = M\frac{d\mu}{dy} - N\frac{d\mu}{dx}. \quad (7a)$$

Примедба. Ако узмемо μ да зависи само од x, онда имамо простију диф. једначину

$$(7b)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mu}{\mu} = \dfrac{\dfrac{dM}{dy} - \dfrac{dN}{dx}}{N} dx = f(x) \\ \mu = e^{\int f(x)\,dx}. \end{cases}$$

Аналогно, ако μ зависи само од y.

IV. Теореме. 1. Свака диф. једначина првог реда има свој интеграл. 2. За сваку диф. једначину првога реда (7) постоје безбројно много интеграционих фактора. 3. Ако M и μ два интеграциона фактора, онда је $\dfrac{M}{\mu} = C$ интеграл диф. једначине (7).

3. Диференциалне једначине првог реда.

I. Линеарне диф. једначине првог реда

$$\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$$

в. чл. 1. III, IV.

II. Диф. једначине првог реда које су вишег степена.

Први случај. — Ако се диф. једначина

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

у којој се $\dfrac{dy}{dx}$, јавља у вишем степена, може да реши по $\dfrac{dy}{dx}$, онда се задата једначина раствара на више диф. једначина које су првог степена и за које важи чл. 1. III, IV.

Други случај. — На случај да се диф. јндначина може да доведе на форму

$$(8)\qquad y = f(x, p),$$

где је $p = \dfrac{dy}{dx}$ интегралењем једначине

$$p\,dx = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dp}dp$$

и елиминовањем количине из добивене једначине и једначине (8) добијамо решење.

Трећи случај. — Ако је задата једначина

$$(9)\qquad F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

а може да се реши по $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (9a)$$

решење је

$$y = \int f(x)dx. \qquad (9b)$$

Четврти случај. — Задата једначина има вид

$$x = f(p). \qquad (10)$$

Елиминовањем количине p из (10) и

$$y = pf(p) - \int f(p)dp + C \qquad (10a)$$

добијамо решење.

III. *Сингуларна решења* диф. једначине (7) чији је општи интеграл $F(x, y, a) = 0$ налазе се елиминовањем константе a из

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{da} = 0 \\ \text{или из}\quad &F(x, y, a) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{dy} = \infty \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

(в. Диф. Р. чл. 34.).

IV. *Трајекторију*, која сече линије

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (12)$$

(са променљивим параметром a) под извесним углом τ ($tg\,\tau = m$), добијамо елиминовањем a из (12) и

$$m\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = m\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}. \qquad (12a)$$

За *ортогоналну трајекторију* место (12a) имамо

$$\frac{dF}{dx}dy - \frac{dF}{dy}dx = 0. \qquad (12b)$$

2.

Диференциалне једначине вишег реда.

4. Диференциалне једначине другог реда. I. Напомена. Пошто не постоје методе за интегралење диф. једначина другог реда у општој форми

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

узећемо извесне особене случајеве: $F(y'') = 0$, $F(x, y'') = 0$, $F(y, y'') = 0$, $F(y', y'') = 0$, $F(x, y', y'') = 0$, $F(y, y', y'') = 0$, $F(x, y, y'') = 0$.

Најобичнија је замена

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{dy^2}{dx^2}=\frac{dp}{dx},$$

којом диф. једначину другог реда сводимо на диф. једначину првог реда.

II.
$$\frac{dy^2}{dx^2}-a=0 \tag{13}$$

или

$$\frac{dp}{dx}-a=0,\quad p=ax+C$$

$$y=\frac{ax^2}{2}+Cx+C'. \tag{13a}$$

III.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(x)=0 \tag{14}$$

или

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(x)=0,\quad p=-\int\varphi(x)dx+C=f(x)+C$$

$$y=\int f(x)dx+Cx+C'. \tag{14a}$$

IV.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi(y)=0 \tag{15}$$

или

$$pdp=-\varphi(y)dy,\quad p^2=-2\int\varphi(y)dy+C=f(y)+C$$

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{f(y)+C}}+C'. \tag{15a}$$

V.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{16}$$

или

$$\frac{dp}{dx}+\varphi(p)=0,\quad x=-\int\frac{dp}{\varphi(p)}+C. \tag{16a}$$

Ако се последња једначина може да реши по p, нпр.

$$p=\psi(x),$$

онда је ово интеграл диф. једначине (16)

$$y=\int\psi(x)dx+C'. \tag{16b}$$

Ако се (16a) не може да реши по p, онда из

$$dy=pdx=-\frac{pdp}{\varphi(p)},$$ односно из

$$y=-\int\frac{pdp}{\varphi(p)}+C'. \tag{16c}$$

и (16a) елиминовањем количине p добијамо општи интеграл задате диф. једначине.

VI.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\varphi(x)=0 \tag{17}$$

или

$$\frac{dp}{dx}+pf(x)+\varphi(x)=0,\quad p=\psi(x,C) \tag{17a}$$

$$y=\int\psi(x,C)dx+C'. \tag{17b}$$

Ако се (17a) не може да реши по p, а може по x-у

$$x=\chi(p,C), \tag{17c}$$

одакле

$$\frac{dy}{p}=\chi'(p,C)dp,\quad y=\int p\chi'(p,C)dp, \tag{17d}$$

онда елиминовањем p из (17c) и (17d) добијамо општи интеграл диф. једначине (17).

VII.
$$\frac{dy^2}{dx^2}+f(y)\frac{dy}{dx}+\varphi(y)=0 \tag{18}$$

или

$$pdp+pf(y)dy+\varphi(y)dy=0. \tag{18a}$$

Успемо ли да ову једначину интегралимо и тиме добијемо y као функцију од p или p као функцију од y, онда је даљи поступак као са (17a).

VIII.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+ayf(x)=0. \tag{19}$$

Заменом

$$y=e^t,\quad \frac{dt}{dx}=p \tag{19a}$$

добијамо

$$\frac{dp}{dx}+p^2+af(x)=0,\quad p=\varphi(x)$$

$$y=\int\varphi(x)\,dx. \tag{19b}$$

IX.
$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+y\varphi(x)=0. \tag{20}$$

Заменом

$$y=uv,\quad v=e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx} \tag{20a}$$

добијамо фиф. једначину

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u\left[\varphi(x)-\frac{1}{4}f(x)^2-\frac{1}{2}f'(x)\right]=0 \tag{20b}$$

са којом поступамо као са (19).

Примедба. Ако познајемо један партикуларан интеграл y_1 диф. једначине (20), онда се иста може да сведе на једну диф. једначину првог реда:

$$\frac{du}{dx} + uf(x) = 0,$$

одакле

$$u = Ce^{-\int f(x)\,dx}.$$

Овде је $u = y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx}$, тако да је $d\frac{y}{y} = \frac{Ce^{-\int f(x)\,dx}}{y_1^2}$

$$y = C' y_1 + C'' y_1 \int \frac{e^{-\int f(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx. \tag{20c}$$

X. Метода неодређених сачинитеља. Интеграл диф. једначине

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

нека има вид

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots$$

$(\alpha < \beta < \gamma < \cdots)$, дакле

$$y' = \alpha A x^{\alpha-1} + \beta B x^{\beta-1} + \gamma C x^{\gamma-1} + \cdots$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1) A x^{\alpha-2} + \beta(\beta-1) B x^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1) C x^{\gamma-2} + \cdots$$

Заменом ових вредности за y, y', y'' у задату диф. једначину добијамо једначину за опредељавање констаната $A, B, C, \cdots$ изузев двеју или једне. Ако остају две произвољне константе, онда је интеграл општи, ако само једна константа интеграл је партикуларан.

5. Диференциалне једначине вишег реда. Свака диф. једначина има свој интеграл. — Општи интеграл једне диф. једначине n-тог реда садржи n произвољних констаната.

I.
$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x) \tag{21}$$

$$y = \underbrace{\int dx}_{1} \underbrace{\int dx}_{2} \cdots \underbrace{\int}_{n} \varphi(x)\,dx + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1} x + c_n. \tag{21a}$$

II. Диференциалне једначине чији се ред може да смањи.

1.
$$F\left(x, \frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{22}$$

Заменом

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p \tag{22a}$$

једначина се своди на ред $n - m$

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \cdots \frac{d^{n-m} p}{dx^{n-m}}\right) = 0. \tag{22b}$$

2.
$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{23}$$

Узев y као независно променљиву и супституишући

$$\frac{dy}{dx} = p \tag{23a}$$

диф. једначина постаје тиме ова

$$\Phi\left(y, p\frac{dp}{dy}, \cdots \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0, \tag{23b}$$

дакле за 1 нижег реда.

3. Ако је
$$F(x, y, y', y'', \cdots y^{(n)}) = 0 \tag{24}$$

хомогена у погледу $y, y' y'', \ldots$ ред једначине може да се смањи за 1 кад напишемо једначину

$$y^k \Phi\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \cdots \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \tag{24a}$$

и ставимо

$$y = e^{\int u\,dx}. \tag{24b}$$

6. Линеарне диференциалне једначине вишег реда.

I. За линеарну диф. једначину n-тога реда

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + Uy = V$$

каже се да је *потпуна* за разлику од

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + T\frac{dy}{dx} + Uy = 0 \tag{25}$$

у којој нема члана на десној страни. Овде су $P, Q, \ldots T, U, V$ функције од x.

II. Пошто је једначина (25) хомогена у погледу $y, y', y'', \ldots$ то се њен ред може да смањи за 1 (чл. 5. II 3) кад узмемо

(25a) $$y = e^{\int u\,dx},$$

али добивена једначина није више линеарна:

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + (u^n + Pu^{n-1} + Qu^{n-2} + \cdots + Tu + U) = 0.$$

Ако једначина

(25b) $$u^n + Pu^{n-1} + Qu^{n-2} + \cdots + Tu + U = 0$$

има корен r, који је независан од x, онда је

(25c) $$y = C e^{\int r\,dx} = C e^{rx}$$

један партикуларан интеграл једначине (25).

Примедба. Ако су $y_1, y_2, \ldots y_n$ партикуларна решења диф. једначине (25) њено је опште решење

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

Претпоставља се да су партикуларна решења независна међусобом.

III. Ако су коефицијенти $P, Q, \ldots T, U$ константни, онда се увек може да добије општи интеграл за (25). У овоме су случају корени једначине

$$f(r) = r^n + Pr^{n-1} + Qr^{n-2} + \cdots + Tr + U = 0$$

константни.

1. ако су корени стварни и различни опште решење диф. једначине (25) јесте

(25d) $$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

2. ако постоје имагинарни корени, нпр. $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ има да се стави

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x} = c e^{\alpha x}\sin(\beta x + c').$$

3. на случај многоструких корена, нпр. $r_1 = r_2 = r_3$ опште решење је

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{r_1 x} + C_4 e^{r_4 x} + \cdots$$

IV. Општа линеарна диф. једначина другог реда са константним коефициентима:

(26) $$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = F(x).$$

Опште решење

$$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}, \tag{26a}$$

где су r_1 и r_2 корени једначине

$$r^2 + Ar + B = 0, \tag{26b}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)e^{-r_1 x}dx + C_1, \\ \beta &= \frac{1}{r_2 - r_1}\int F(x)e^{-r_2 x}dx + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{26c}$$

3.

Симултане диференциалне једначине.

7. Интегралење симултаних диф. једначина. I. Једна система симултаних једначина може да се замене једном диф. једначином, која је вишег реда. Обратно: једна диф. једначина вишег реда може да се замени једном системом симултаних једначина нижег реда.

II. Две линеарне симултане диф. једначине првог реда

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + Py + Qz &= V \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z &= V', \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

где су P, Q, V, P', Q', V', функције од x, могли бисмо, путем елиминације, да заменимо једном линеарном диф. једначином другог реда само са једном функцијом (y или z). Боље је поступити на следећи начин.

Из (27) образујемо

$$\frac{dy}{dx} + \Theta\frac{dz}{dx} + (P + P'\Theta)y + (Q + Q'\Theta)z = V + V'\Theta \tag{27a}$$

и стављамо

$$t = y + \Theta z. \tag{27b}$$

Тиме растварамо (27a) на ове две једначине

$$\frac{d\Theta}{dx} + (P + P'\Theta)\Theta - Q - Q'\Theta = 0 \tag{27c}$$

$$\frac{dt}{dx} + (P + P'\Theta)\Theta - V - V'\Theta = 0. \tag{27d}$$

Познавајући два партикуларна решења Θ_1 и Θ_2 једначине ($27c$) заменом њих у ($27d$) добијамо две вредности t_1 и t_2, а према ($27b$) налазимо y и z из

$$t_1 = y + \Theta_1 z$$
$$t_2 = y + \Theta_2 z.$$

Примедба. У случају да су P, Q, P', Q' константни, може се и Θ сматрати као константно и ($27c$) постаје тиме

$$(P + P'\Theta)\Theta - Q - Q'\Theta = 0 \quad \text{или} \quad P'\Theta^2 + (P - Q')\Theta - Q = 0,$$

одакле Θ_1 и Θ_2.

III. Узмимо три линеарне симултане диф. једначине првог реда

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + Py + Qz + Rt = V \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R't = V' \\[2ex] \dfrac{dt}{dx} + P''y + Q''z + R''t = V''. \end{cases}$$

Из њих образујемо једначину

$$(28a) \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \Theta\dfrac{dz}{dx} + \lambda\dfrac{dt}{dx} + (P + \Theta P' + \lambda P'')y + (Q + \Theta Q' + \lambda Q'')z \\ \qquad + (R + \Theta R' + \lambda R'')t = V + \Theta V' + \lambda V'', \end{cases}$$

коју кад ставимо

$$(28b) \qquad y + \Theta z + \lambda t = u$$

растварамо на ове три

$$(28c) \qquad \frac{d\Theta}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)\Theta - Q - Q'\Theta - Q''\lambda = 0$$

$$(28d) \qquad \frac{d\lambda}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)\lambda - R - R'\Theta - R''\lambda = 0$$

$$(28e) \qquad \frac{du}{dx} + (P + P'\Theta + P''\lambda)u - V - V'\Theta - V''\lambda = 0.$$

Ако су нам познате три партикуларне вредности за Θ, нпр. $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, а тако и три кореспондирајуће вредности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, онда сваки од та три спрега за Θ и λ дају, према последњој једначини, по једно решење за u, а помоћу тих u_1, u_2, u_3 добијамо интеграле из

$$y + \Theta_1 z + \lambda_1 t = u_1$$
$$y + \Theta_2 z + \lambda_2 t = u_2$$
$$y + \Theta_3 z + \lambda_3 t = u_3.$$

Примедба. Ако су коефицијенти $P, Q, R, P', \cdots$ константни, једначине за Θ и λ добивају простији вид

$$(P + P'\Theta + P''\lambda)\Theta - Q - Q'\Theta - Q''\lambda = 0$$
$$(P + P'\Theta + P''\lambda)\lambda - R - R'\Theta - R''\lambda = 0.$$

II

Парциалне диференциалне једначине.

8. **Особени случајеви.** Ако се у диф. једначини налазе парциалне изводне само по једној прапромењљивој, онда се са таквом парциалном диф. једначином поступа као са обичном диф. једначином са том разликом што се место произвољне константе у интегралу узима произвољна функција оне прапромењљиве по којој нису узете парциалне изводне.

1. Пример. $$z\frac{\partial z}{\partial x} = y.$$

Сматравши y као стално следује

$$\frac{z^2}{2} = xy + \varphi(y).$$

2. Пример.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yz}{x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial z}{z} = \frac{y\,\partial y}{x}$$

пошто сматрамо x као константу добијамо решење

$$z = e^{\frac{y^2}{2x}} e^{\varphi(x)} \quad \text{или} \quad z = e^{\frac{y^2}{2x}} \cdot \psi(x).$$

3. Пример. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F(x, y),$$

одакле

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int F(x, y)\,dx + \varphi(y)$$

$$z = \int\left[\int F(x, y)\,dx + \varphi(y)\right]dx + \psi(y).$$

4. Пример.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F(x, y),$$

одакле

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int F(x, y)\, dx + \varphi(y)$$

$$z = \int [\int F(x, y)\, dx + \varphi(y)]\, dy + \psi(x).$$

9. Линеарне парциалне диф. једначине првог реда.

I. Тип линеарне парциалне диф. једначине првог реда са две прапромењиве:

(29)
$$Pp + Qq = R,$$

где P, Q, R означавају функције од x, y, z, а

(29*a*)
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

1. Пример. Општа једначина за цилиндарске површине

$$\Phi(x - mz, y - nz) = 0$$

има за парциалну диф. једначину

$$mp + nq = 1.$$

2. Пример. Општа једначина за конусне површине

$$\Phi\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0$$

има за парциалну диф. једначину

$$(x - f)p + (y - g)q = z - h.$$

3. Пример. Општа једначина за обртне површине

$$\Phi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

има за парциалну диф. једначину

$$py - qx = 0.$$

II. Интегралење линеарних парциалних диф. једначина првог реда са две прапромењиве (29). Образујемо симултане једначине

(29*b*)
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Нека су

(29*c*)
$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = \alpha \\ f_2(x, y, z) = \beta \end{cases}$$

њихови интеграли. Опште решење парциалне диф. једначине (29) јесте

$$\beta = \varphi(\alpha) \tag{29d}$$

означивши са φ ма какву функцију.

III. Тип линеарне парциалне диф. једначине првог реда са три прапромењиве:

$$Pp + Qq + Rr = V, \tag{30}$$

где су P, Q, R, V функције од x, y, z, t, а

$$p = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial t}{\partial z}. \tag{30a}$$

IV. Интегралење типа (30). Узимамо симултане диф. једначине

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dt}{V}, \tag{30b}$$

које интегралене дају

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= \alpha \\ f_2(x, y, z, t) &= \beta \\ f_3(x, y, z, t) &= \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{30c}$$

Општи интеграл парциалне диф. једначине (30) јесте

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma), \tag{30d}$$

означивши са φ какву било функцију.

10. Линеарне парциалне диф. једначине другог реда.

I. Општа форма линеарне парциалне диф. једначине другог реда са две прапромењиве јесте

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = G.$$

Нарочито је важан случај кад је $G = 0$, дакле

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0. \tag{31}$$

Ако су коефицијенти A, B, C, D, E, F константни, онда је лако наћи партикуларно решење ове једначине. Стављамо

$$z = e^{\alpha x + \beta y}. \tag{31a}$$

За α и β имамо квадратну једначину

$$A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0. \tag{31b}$$

Пошто овој једначини одговарају безбројно много спрегова α и β значи да имамо безбројно много партикуларних интеграла $J_1, J_2 \cdots$ Опште је решење хомогене једначине (31) ово

$$C_1 J_1 + C_2 J_2 + \cdots$$

и оно садржи безбројно много произвољних констаната.

Примедба. У питањима, која воде парцијалним диф. једначинама од највеће је важности да се константе определе на начин како ће бити испуњени задатком постављени услови.

II. Особени случајеви.

1. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P \frac{\partial z}{\partial x} = Q. \tag{32}$$

Овде су P и Q функције од x и y. Заменом

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t \tag{32a}$$

једначина (32) претвара се у

$$\frac{\partial t}{\partial x} + Pt = Q \tag{32b}$$

(в. чл. 1. III једн. 3). Стављамо

$$t = uv \tag{32c}$$

са тим да је

$$\left.\begin{aligned} v = e^{-\int P dx}, \quad u &= \int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y), \\ \text{дакле} \qquad t &= \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y)\right] e^{-\int P dx}, \end{aligned}\right\} \tag{32d}$$

а с овим

$$z = \int \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y)\right] e^{-\int P dx} dx + \psi(y). \tag{32e}$$

Примедба. Ако су P и Q константе, онда је

$$v = e^{-Px}, \quad u = \frac{Q}{P} e^{Px} + \varphi(y)$$

$$t = \frac{Q}{P} + \varphi(y) e^{-Px}$$

$$z = \frac{1}{P}[Qx - \varphi(y) e^{-Px}] + \psi(y).$$

2. $$\frac{\partial^2 y}{d t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{33}$$

Стављамо

$$\left.\begin{aligned} x + at &= u \\ x + at &= v \end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

и претварамо тиме (33) у

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \tag{33b}$$

(в. чл. 8. пример 4) чији је интеграл $y = \varphi(u) + \psi(v)$, дакле

$$y = \varphi(x + at) + \psi(x - at). \tag{33c}$$

ВАРИАЦИОНИ РАЧУН

I

Дефиниције и теореме.

1. Предмет Варијационог Рачуна. Док у питањима max. и min. познајемо извесну функцију, која зависи од једне или више промењљивих и ми тражимо оне специалне вредности ових за које задата функција постаје већа или мања од њених оближњих вредности, тј. већа или мања од оних вредности до којих долазимо променом промењљивих за бескрајно мало, — у Вариационом Рачуну има да се одреди функција једне или више промењљивих тако да некакав одређени интеграл, у чијем се интегранду јавља та функција и њене изводне, постане max. или min., тј. тако да дотични интеграл добије већу или мању вредност од оних које бисмо добили променом функције за ма како мало. Нпр. (*проблем брахистохроне*): дате су две тачке. Наћи линију по којој ће тешка тачка падати да би из прве тачке у другу тачку у најкраћем времену стигла. Значи: треба одредити извесну функцију $y = f(x)$ (линију најбржег падања) како би интеграл (време падања)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\sqrt{x - x_0}} dx = min.$$

2. Појам варијације. Ако функцију y представимо линијом $y = f(x)$, онда је *диференциал* dy функције промена ординате прешав од једне тачке другој бескрајно приближној тачци на истој линији, док *вариацију* δy представља промена ординате кад од једне тачке на линији пређемо другој бескрајно приближној тачци на линији која је бескрајно мало различна од прве линије.

Променом x- и y-а за δx, односно δy функција U, која зависи од x, y и ма колико изводних $y', y'', \cdots$, добија промену

$$\Delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \\ + \frac{1}{1 \cdot 2}\left[\frac{d^2U}{dx^2}\delta x^2 + 2\frac{d^2U}{dx\,dy}\delta x \delta y + \frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2\right] + \cdots$$

Под вариацијом функције U разумемо

$$\delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y.$$

Друга вариација је $\delta(\delta U) = \delta^2 U$, трећа вариација је $\delta(\delta^2 U) = \delta^3 U$ итд.

3. Теореме. Пермутовање знакова d и δ, $\int$ и δ:

$$\delta d U = d \delta U \tag{1}$$

и уопште

$$\delta^m d^n U = d^n \delta^m U \tag{1a}$$

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} V dx = \int_{x_0}^{x_1} \delta(V dx). \tag{2}$$

II.

Вариација одређеног интеграла.

4. Интегранд садржи само једну функцију y промењљиве x и независан је од интегралних граница.

Посматрајмо

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V dx \tag{3}$$

и претпоставимо да је

$$V = f(x, y, p, q), \tag{4}$$

где означава

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{5}$$

Тада је

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta(V dx)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (\delta V \cdot dx + V d\delta x),$$

а с обзиром да је

$$\int V d\delta x = V \delta x - \int \delta x \cdot dV$$

и означивши са $(V\delta x)_0^1 = (V\delta x)_1 - (V\delta x)_0$ вредности од $V\delta x$ за $x = x_0$ и $x = x_1$, јесте

$$\delta U = (V\delta x)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}(\delta V\cdot dx - \delta x\cdot dV).$$

Ако ставимо

$$(6)\qquad M = \frac{dV}{dx},\quad N = \frac{dV}{dy},\quad P = \frac{dV}{dp},\quad Q = \frac{dV}{dq},$$

дакле

$$dV = M dx + N dy + P dp + Q dq$$
$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q$$

и означимо

$$(5a)\qquad r = \frac{dq}{dx}$$

добићемо

$$(7)\quad \delta U = (V\delta x)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}[N(\delta y - p\delta x) + P(\delta p - q\delta x) + Q(\delta q - r\delta x)]\,dx.$$

Овај образац добија простији израз кад унесемо

$$(8)\qquad \omega = \delta y - p\delta x$$

(где ω представља разлику ордината у двема бесконачно приближним линијама за апсцису $x + \delta x$)

$$(7a)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\omega}{dx} = \delta p - q\delta x \\[2mm] \dfrac{d^2\omega}{dx^2} = \delta q - r\delta x \end{cases}$$

$$(9)\qquad \delta U = (V\delta x)_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)dx.$$

Пошто је (на основу делимичног интеграљења)

$$\int P\frac{d\omega}{dx}dx = P\omega - \int\omega\frac{dP}{dx}dx$$

$$\int Q\frac{d^2\omega}{dx^2}dx = Q\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{dQ}{dx} + \int\omega\frac{d^2Q}{dx^2}dx$$

последњи образац може да се напише

$$(10)\quad \delta U = \left[V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)\omega + Q\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1}\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right)\omega\,dx.$$

Означивши

$$\Gamma = \left[V\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)\omega + Q\frac{d\omega}{dx}\right]_0^1 \qquad (11)$$

$$K = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \qquad (12)$$

последња формула добија вид

$$\delta U = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}K\omega\,dx \qquad (13)$$

или с обзиром на (8)

$$\delta U = \Gamma + \int_{x_0}^{x_1}(K\delta y - Kp\delta x)\,dx. \qquad (13a)$$

Услед (8) и (8a) може (11) да се напише

$$\Gamma = \left\{\left[V - \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)p - Qq\right]\delta x + \left(P - \frac{dQ}{dx}\right)\delta y + Q\delta p\right\}_0^1. \qquad (11a)$$

5. Интегранд садржи две функције y и z промењиве x.

$$V = f(x, y, p, q, z, p', q') \qquad (IV)$$

$$p' = \frac{dz}{dx},\quad q' = \frac{dp'}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} \qquad (V)$$

$$N' = \frac{dV}{dz},\quad P' = \frac{dV}{dp'},\quad Q' = \frac{dV}{dq'} \qquad (VI)$$

$$\omega' = \delta z - p'\delta x \qquad (VIII)$$

$$K' = N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} \qquad (XII)$$

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}V dx = \Gamma' + \int_{x_0}^{x_1}(K\omega + K'\omega')\,dx. \qquad (XIII)$$

Количину Γ' добијамо кад у изразу (11a) за Γ додамо чланове који произилазе заменом количина $P, Q, p, \ldots$ количинама $P', Q', p', \ldots$

6. Интегранд зависи од интегралних граница. Претпоставимо да V садржи само једну функцију од x, али да зависи од интегралних граница x_0 и x_1. У таквоме случају варијацији интеграла има да се додају они чланови који произилазе варијацијом граница, а то су

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx_0}\delta x_0+\frac{dV}{dy_0}\delta y_0+\frac{dV}{dp_0}\delta p_0+\frac{dV}{dq_0}\delta q_0\right)dx+$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx_1}\delta x_1+\frac{dV}{dy_1}\delta y_1+\frac{dV}{dp_1}\delta p_1+\frac{dV}{dq_1}\delta q_1\right)dx.$$

Пошто су $\delta x_0, \delta y_0, \ldots \delta x_1, \delta y_1, \ldots$ константни у погледу интегралења по x-у, то се овај додатак може да напише и овако $\delta x_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dx_0}dx+\delta y_0\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dy_0}dx+\cdots+\delta x_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{dV}{dx_1}dx+\cdots$

На исти начин бисмо поступили да V садржи две функције y и z променљиве x.

III

Максимум и минимум одређеног интеграла.

7. Интегранд зависи само од једне функције y променљиве x. Услов да је интеграл $U=\int_{x_0}^{x_1}Vdx$ за извесну функцију $y=f(x)$ *max.* или *min.* јесте

(14) $$\delta U=0.$$

Ако је $\delta^2 U>0$ за какве било бесконачно мале вариације δx и δy, U је *min.*; ако је $\delta^2 U<0$, онда је $U=max.$ Функција U није ни *max.* ни *min.* ако $\delta^2 U$ мења знак.

Услов (14), који важи како за *max.*, тако и за *min.*, повлачи собом ове две једначине

(15) $$\Gamma=0$$

и

(16) $$K=0 \quad \text{или} \quad N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0.$$

Ова је једначина четвртог реда $\left(\text{пошто у } \frac{d^2Q}{dx^2} \text{ улази } \frac{d^2q}{dx^2}=\frac{d^4y}{dx^4}\right)$ и њен интеграл

$$y=f(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$$

садржи четири произвољне константе при одређивању којих треба имати у виду (15) у погледу интегралних граница. Треба имати на уму следеће случајеве:

1. ако су за x, y, p, q дате вредности за обе границе, онда је једначина (15) идентично задовољена и за одређивање констаната C_1, C_2, C_3, C_4 имамо једначине

$$\left.\begin{aligned} y_0=f(x_0, C_1, C_2, C_3, C_4), \quad p_0=f'(x_0, C_1, C_2, C_3, C_4)\\ y_1=f(x_1, C_1, C_2, C_3, C_4), \quad p_1=f'(x_1, C_1, C_2, C_3, C_4).\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

2. ако је једна од шест количина $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$ произвољна, нпр. количина p_1, онда једначина (15) није идентично задовољена. У таквом случају треба коефицијенат од δp_1 (у обрасцу 11*a*) ставити $=0$ и та једначина $Q_1=0$ са горње четири једначине (*) одређује константе C_1, C_2, C_3, C_4 и количину p_1.

3. на случај да између $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$ постоји једначина

$$\varphi(x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1)=0. \quad (**)$$

Ако из $\frac{d\varphi}{dx_0}\delta x_0+\frac{d\varphi}{dy_0}\delta y_0+\frac{d\varphi}{dp_0}\delta p_0+\frac{d\varphi}{dx_1}\delta x_1+\frac{d\varphi}{dy_1}\delta y_1+\frac{d\varphi}{dp_1}\delta p_1=0$ узмемо вредност за δp_1 и унесемо је у $\Gamma=0$ и ставимо коефицијенте од $\delta x_0, \delta y_0, \delta p_0$, δx_1 и δy_1 да су $=0$ добијамо пет једначина, које у вези са онима под (*) и (**) даје укупно десет једначина за одређивање десет непознатих C_1, C_2, C_3, C_4, x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1.

Аналогно бисмо поступили ако би, место једне једначине (**), имали више њих којима су количине x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1 везане међусобом.

8. Интегранд зависи од двеју функција y и z променљиве x. У овоме је случају за *max.* и *min.*

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}Vdx=\Gamma+\int_{x_0}^{x_1}(K\omega+K'\omega')dx=0, \quad \text{(XIV)}$$

које повлачи собом условне једначине

$$\Gamma=0, \quad \text{(XV)}$$

$$K=0, \quad K'=0. \quad \text{(XVI)}$$

Последње две једначине (XVI) одређују y и z као функције од x, док (XV) служи за опредељавање констаната, које се уносе интегралењем једначина (XVI).

Напомена. Ако између y и z постоји нека веза, нпр.

(17) $$F(x,y,z)=0$$

тада вариације δy и δz нису независне једна од друге и услед тога је

(18) $$K\frac{dF}{dz}-K'\frac{dF}{dy}=0.$$

Последње две једначине служе за опредељавање y и z као функције од x, док једначина $\Gamma=0$ служи за одређивање констаната.

9. Релативан максимум и минимум. Задатак је: Да се нађе функција $y=f(x)$ за коју одређени интеграл $\int_{x_0}^{x_1} W\,dx$ има назначену вредност (нпр. $=a$), док други одређени интеграл $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ постаје *max.* или *min.*, тј. добија већу, односно мању вредност но што би имао кад би функцију y заменули ма којом другом која би одговарала услову да је $\int_{x_0}^{x_1} W\,dx=a$. Нпр. (*изопериметриски проблем*): наћи криву линију у равни чији лук има одређену дужину између двеју утврђених тачака и која чини да је површина између линије, комада апсцисне осе и крајних ордината *maximum*. Значи да треба наћи y као функцију од x која ће учинити $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx=max.$ са тим да је $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=a.$

Изналажење *релативног* максимума или минимума интеграла $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ са погодбом да буде $\int_{x_0}^{x_1} W\,dx=a$ (константно) своди се на изналажење *апсолутног* максимума или минимума интеграла $\int(V+mW)\,dx$, где је m извесна константа која се одређује тиме што овде за одређивање констаната имамо једну једначину више но код изналажења апсолутних *max.* и *min.*, а то је једначина $\int_{x_0}^{x_1} W\,dx=a$.

ЕЛИПТИЧНИ ИНТЕГРАЛИ И ЕЛИПТИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ

I
Елиптични интеграли.

1. Општи вид елиптичних интеграла:

$$\int F(x,\sqrt{X})\,dx,$$

где је F рационална функција од x и $\sqrt{X}$, а

$$X=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E.$$

Нека су $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ корени једначине $X=0$, који су сви различни, јер иначе интеграл престаје бити елиптичан.

Заменом

$$x=\frac{a+b\xi}{1+\xi},$$

где је

$$a+b=\frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},\quad ab=\frac{(\gamma+\delta)\alpha\beta-(\alpha+\beta)\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$$

сводимо $\sqrt{X}$ на $\sqrt{(1+m\xi^2)(1+n\xi^2)}$ и кад поново заменимо

$$\xi=x\sqrt{-m},\quad k^2=+\frac{n}{m}$$

корена количина добија вид

$$y=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

а елиптичан интеграл

$$\int f(x,y)\,dx.$$

Знак f представља опет рационалну функцију. Количину k (*модуо*) можемо сматрати да је <1.

Примедба. 1. Горња трансформација постаје немогућа ако је $\alpha+\beta-\gamma-\delta=0$, у коме случају чинимо замену

$$x-\frac{\alpha+\beta}{2}=\xi$$

тако да и онда непарни степени од ξ нестају под кореним знаком.

2. Ако је X трећег степена $\sqrt{X}=\sqrt{Bx^3+Cx^2+Dx+E}=\sqrt{B(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$ заменом

$$x-\alpha=\xi^2$$

чинимо да је

$$\sqrt{X}=\xi\sqrt{B(\xi^2+\alpha-\beta)(\xi^2+\alpha-\gamma)}.$$

2. **Сви елиптични интеграли могу да се сведу на три основна типа:**

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\\&\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\\&\int_0^x\frac{dx}{(1+ax^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.\end{aligned}\right.$$

Ово су *елиптични интеграли прве, друге и треће врсте*. Пошто се може да учини да је $-1<x<+1$, *Лежандр* ставља

$$x=\sin\varphi$$

и добија основне типове елиптичних интеграла у тригонометриској форми

$$(2)\quad \int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \int_0^\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad \int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

φ је *амплитуда*, k *модуо*, a *параметар*.

II.

Елиптичне функције.

3. **Дефиниције.** Елиптичан интеграл прве врсте у *нормалној форми*

$$(3)\qquad u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\qquad 0<k<1,$$

а на основу замене

$$x=\sin\varphi \tag{3a}$$

у *тригонометриској форми*

$$u=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi,k). \tag{3b}$$

где је φ *амплитуда аргумента* u:

$$\varphi=am\,u\quad\text{или}\quad\varphi=am(u,k) \tag{3c}$$

даје инверзијом *елиптичне функције*. *Лежандр* је обележио

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\Delta\varphi. \tag{4}$$

Тригонометриске функције лука φ (амплитуде од u) и функција Δ сачињавају елиптичне функције:

$$\left.\begin{array}{c}\sin am\,u,\quad \cos am\,u,\quad \Delta am\,u,\\ tg\,am\,u,\quad cotg\,am\,u,\quad sec\,am\,u,\quad cosec\,am\,u.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Најважније су прве три. Модуе k и k'

$$k^2+k'^2=1 \tag{6}$$

назвао је *Лежандр комплементним*.

4. **Напомене.** I. За $k=0$ елиптичне функције претварају се у тригонометриске: $am(u,0)=u$, дакле $\sin am(u,0)=\sin u$ итд. За $k=1$ елиптичне функције претварају се у експоненциалне: $\sin am(u,1)=\dfrac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$ итд.

II.

$$\left.\begin{array}{c}am(0,k)=0\\ \sin am(0,k)=0,\quad \cos am(0,k)=1,\quad \Delta am(0,k)=1.\end{array}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{c}am(-u)=-am\,u\\ \sin am(-u)=-\sin am\,u,\quad \cos am(-u)=\cos am\,u,\\ \Delta am(-u)=\Delta am\,u.\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\sin am\,u}{du}&=\cos am\,u\,\Delta am\,u\\ \frac{d\cos am\,u}{du}&=-\sin am\,u\,\Delta am\,u\\ \frac{d\,\Delta am\,u}{du}&=-k^2\sin am\,u\cos am\,u.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

5. **Потпуни интеграли:**

$$(10)\quad \begin{cases} K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\varphi}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ K'=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 sin^2\varphi}}=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} am(K,k)=am(K',k')=\frac{\pi}{2} \\ sin\,am(K,k)=1,\quad cos\,am(K,k)=0,\quad \Delta\,am(K,k)=k'. \end{cases}$$

Примедба. Количина K игра код елиптичних функција исту улогу коју $\frac{\pi}{2}$ код тригонометриских функција. За $k=0$ јесте $K=\frac{\pi}{2}$, за $k=1$ јесте $K=\infty$.

6. **Теорема.**

$$(12)\quad \int\limits_0^{n\pi\pm\alpha} f(sin^2\varphi)\,d\varphi=2n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(sin^2\varphi)\,d\varphi\pm\int\limits_0^{\alpha} f(sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

$\int f(sin^2\varphi)\,d\varphi$ је заједнички вид за све три врсте елиптичних интеграла. n је цео број, $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

За интеграле прве врсте јесте

$$am(nK)=n\,am\,K$$

$$(13)\quad \int\limits_0^{n\pi\pm\alpha}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2nK\pm\int\limits_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

7. **Напомена.** Елиптичне функције имају двојаку периоду: једна је стварна, као код тригонометриских функција, друга је имагинарна као код експоненцијалних функција.

8. **Стварна периода елиптичних функција.**

$$(14)\quad \begin{cases} sin\,am(u\pm 4K)=sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 4K)=cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 4K)=\Delta\,am\,u. \end{cases}$$

$$sin\,am\,4K=0,\quad cos\,am\,4K=1,\quad \Delta\,am\,4K=1. \quad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(u\pm 2K)&=-sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 2K)&=-cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 2K)&=\Delta\,am\,u. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$sin\,am\,2K=0,\quad cos\,am\,2K=-1,\quad \Delta\,am\,2K=1. \quad (17)$$

Индекс реалне периоде је за све елиптичне функције $4K$, док $tg\,am\,u$ и $\Delta\,am\,u$ имају за индекс $2K$.

9. **Елиптичне функције са имагинарним аргументом.**

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(iu)&=i\,tg\,am(u,k') \\ cos\,am(iu)&=\frac{1}{cos\,am(u,k')} \\ \Delta\,am(iu)&=\frac{\Delta\,am(u,k')}{cos\,am(u,k')}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

10. **Имагинарна периода елиптичних функција.**

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(u\pm 4iK')&=sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 4iK')&=cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 4iK')&=\Delta\,am\,u. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

$$sin\,am\,4iK'=0,\quad cos\,am\,4iK'=1,\quad \Delta\,am\,4iK'=1. \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(u\pm 2iK')&=sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 2iK')&=-cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 2iK')&=-\Delta\,am\,u. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$sin\,am\,2iK'=0,\quad cos\,am\,2iK'=-1,\quad \Delta\,am\,2iK'=-1. \quad (22)$$

Индекс имагинарне периоде је $4iK'$ за модуо k, а за модуо k' је $4iK$.

11. **Двојака периода елиптичних функција.**

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(u\pm 4K\pm 4iK')&=sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 4K\pm 4iK')&=cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 4K\pm 4iK')&=\Delta\,am\,u. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} &sin\,am(4K\pm 4iK')=0,\quad cos\,am(4K\pm 4iK')=1, \\ &\Delta\,am(4K\pm 4iK')=1. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} sin\,am(u\pm 2K\pm 2iK')&=-sin\,am\,u \\ cos\,am(u\pm 2K\pm 2iK')&=cos\,am\,u \\ \Delta\,am(u\pm 2K\pm 2iK')&=-\Delta\,am\,u. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left\{\begin{aligned} & \sin am(2K \pm 2iK') = 0, \quad \cos am(2K \pm 2iK') = 1, \\ & \qquad \Delta\, am(2K \pm 2iK') = -1. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Поред општих периода $4K$, $4iK'$, $4K \pm 4iK'$, које важе за све елиптичне функције, постоје

за $\sin am\, u$ најкраћи индекси $4K$ и $2iK'$,
„ $\cos am\, u$ „ „ $4K$ „ $2K \pm 2iK'$,
„ $\Delta\, am\, u$ „ „ $2K$ „ $4iK'$,
„ $tg\, am\, u$ „ „ $2K$ „ $4iK'$.

12. Елиптичне функције коамплитуде.

$$\left\{\begin{aligned} & \sin am\,(K-u) = \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ & \cos am\,(K-u) = \frac{k' \sin am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ & \Delta\, am\,(K-u) = \frac{k'}{\Delta\, am\, u}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Јакоби је означио $am(K-u) = \cos am\, u$.

$$\left\{\begin{aligned} & \sin am\,(u \pm K) = \pm \frac{\cos am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ & \cos am\,(u \pm K) = \pm \frac{k' \sin am\, u}{\Delta\, am\, u} \\ & \Delta\, am\,(u \pm K) = \frac{k'}{\Delta\, am\, u}. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$\left\{\begin{aligned} & \sin am \frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}}, \quad \cos am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}} \\ & \Delta\, am \frac{K}{2} = \sqrt{k'}, \quad tg\, am \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1}{k'}}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

III
Елиптичне трансценденте.

13. Појам. Елиптичне интеграле друге и треће врсте елиптичних функција зовемо *елиптичним трансцендентама*.

14. Као нормалну форму за елиптичне интеграле друге врсте Лежандр је узео

$$\int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = E_1(\varphi). \tag{30}$$

Интеграл је потпун за $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi\, d\varphi = E_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = E. \tag{31}$$

Узев

$$\varphi = am\, u$$

следује $\int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^{u} \Delta^2 am\, u\, du$. Ово је елиптична трансцендента и означавамо

$$\int_0^{u} \Delta^2 am\, u\, du = E(u), \tag{32}$$

дакле

$$E(u) = E_1(\varphi). \tag{32a}$$

$$\int_0^{K} \Delta^2 am\, u\, du = E(K) = E. \tag{33}$$

15. Као нормални вид за елиптичне интеграле треће врсте Лежандр је узео

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + a \sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \Pi_1(\varphi, a). \tag{34}$$

Јакоби, сматравши елиптичне интеграле треће врсте као интеграле елиптичних функција, узео је за њих овај нормални вид

$$\int_0^{u} \frac{k^2 \sin am\, p \cos am\, p\, \Delta\, am\, p \sin^2 am\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 am\, p \sin^2 am\, u} = \Pi(u, p). \tag{35}$$

Веза између *Лежандр*-ове и *Јакоби*-ове нормалне форме:

$$\left.\begin{aligned} & \Pi_1(\varphi, a) = u + \frac{tg\, am\, p}{\Delta\, am\, p}\Pi(u, p) \\ & a = -k^2 \sin^2 am\, p. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Примедба,

$$\Pi(0, p) = 0, \quad \Pi(u, K) = 0, \quad \Pi(u, iK') = \infty. \tag{37}$$

Обрасци.

$$\Pi(u, p) = \Pi(p, u) + u E(p) - p E(u). \tag{38}$$

$$\Pi(K, p) = K E(p) - p E. \tag{39}$$

IV

Основна својства елиптичних функција.

16. Лагранж-ова формула. Ако је

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma) \tag{40}$$

интегрална једначина диференциалне једначине

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0, \tag{40a}$$

онда је

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\sigma \tag{40b}$$

или опште

$$\cos am(u \pm v) = \cos am u \cos am v \mp \sin am u \sin am v\, \Delta am(u \pm v). \tag{40c}$$

Примедба. *Лагранж* је запазио велику сличност између формуле (40*c*) и основне формуле Сферне Тригонометрије

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Узев $a = am u$, $b = am v$ као стране једног сферног троугла, онда је $c = am(u - v)$ или $c = am(u + v)$ трећа страна тога троугла према томе да ли прве две стране захватају оштар или туп угао. Модуо амплитуде је

$$k = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

и овај модуо је < 1 само тада ако троугао има један или сва три угла тупа. У суплементном сферном троуглу $\left(A' = 180^0 - a,\ a' = 180^0 - A,\ \frac{\sin A'}{\sin a'} = \frac{\sin a}{\sin A}\right)$ је модуо мањи од 1, кад је у првом троуглу > 1 и обратно.

Ова веза између елиптичних функција и Сферне Тригонометрије показује да се из образаца једне Теорије могу да добију обрасци оне друге Науке.

17. Основни обрасци за елиптичне функције.

$$\left.\begin{aligned}
\sin am(u \pm v) &= \frac{\sin am u \cos am v\, \Delta am v \pm \cos am u \sin am v\, \Delta am u}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v} \\
\cos am(u \pm v) &= \frac{\cos am u \cos am v \mp \sin am u \sin am v\, \Delta am u\, \Delta am v}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v} \\
\Delta am(u \pm v) &= \frac{\Delta am u\, \Delta am v \mp k^2 \sin am u \cos am u \sin am v \cos am v}{1 - k^2 \sin^2 am u \sin^2 am v}.
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin am 2u &= \frac{2 \sin am u \cos am u\, \Delta am u}{1 - k^2 \sin^4 am u} \\
\cos am 2u &= \frac{\cos^2 am u - \sin^2 am u\, \Delta^2 am u}{1 - k^2 \sin^4 am u} \\
\Delta am 2u &= \frac{\Delta^2 am u - k^2 \sin^2 am u \cos^2 am u}{1 - k^2 \sin^4 am u}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin am s + \sin am t &= \frac{2 \sin am \frac{s+t}{2} \cos am \frac{s-t}{2}\, \Delta am \frac{s-t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}} \\
\sin am s - \sin am t &= \frac{2 \cos am \frac{s+t}{2} \sin am \frac{s-t}{2}\, \Delta am \frac{s+t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}} \\
\cos am s + \cos am t &= \frac{2 \cos am \frac{s+t}{2} \cos am \frac{s-t}{2}\, \Delta am \frac{s+t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}} \\
\cos am s - \cos am t &= \frac{2 \sin am \frac{s+t}{2} \sin am \frac{s-t}{2}\, \Delta am \frac{s-t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}} \\
\Delta am s + \Delta am t &= \frac{2 \Delta am \frac{s+t}{2}\, \Delta am \frac{s-t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}} \\
\Delta am s - \Delta am t &= \\
&= \frac{-2k^2 \sin am \frac{s+t}{2} \sin am \frac{s-t}{2} \cos am \frac{s+t}{2} \cos am \frac{s-t}{2}}{1 - k^2 \sin^2 am \frac{s+t}{2} \sin^2 am \frac{s-t}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

18. Ланден-ова трансформација.

Трансформација на *мањи* модуо:

$$(44)\qquad \begin{cases} F(\varphi,k) = \dfrac{1+k_1}{2}\,F(\varphi_1,k_1) \\[2mm] k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'} \\[2mm] tg\,\varphi_1 = \dfrac{(1+k')\,tg\,\varphi}{1-k'\,tg^2\varphi} \end{cases}$$

Трансформација на *већи* модуо:

$$(45)\qquad \begin{cases} F(\varphi_1,k_1) = (1+k')\,F(\varphi,k) \\[2mm] k = \dfrac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} \\[2mm] sin(2\varphi-\varphi_1) = k_1 sin\,\varphi_1\,. \end{cases}$$

19. Примена Ланден-ове трансформације.

$$(46)\qquad \begin{cases} K=(1+k_1)K_1, \quad K_1=(1+k_2)K_2,\ldots \quad K_{n-1}=(1+k_n)K_n \\[2mm] k_i = \dfrac{2\sqrt{k_{i+1}}}{1+k_{i+1}}, \quad k_{i+1} = \dfrac{1-k'_i}{1+k'_i}. \end{cases}$$

$$(47)\qquad \begin{cases} K=(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)K_n \\[2mm] \lim\limits_{n=\infty} k_n = 0, \quad \lim\limits_{n=\infty} K_n = \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] K = \dfrac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots \end{cases}$$

$$(48)\qquad \begin{cases} F(\varphi,k) = \dfrac{(1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_n)}{2^n}\,F(\varphi_n,k_n) \\[2mm] tg\,\varphi_i = \dfrac{1+k'_{i-1}}{1-k'_{i-1}\,tg^2\varphi_{i-1}}. \end{cases}$$

20. Адициона теорема за другу врсту:

$$(49)\qquad E_1(\varphi)+E_1(\psi) = E_1(\sigma) + k^2 sin\,\varphi\, sin\,\psi\, sin\,\sigma,$$

где између φ, ψ и σ постоје једначине (40), (40a), (40b).

Заводећи елиптичне функције:

$$\varphi = am\,u, \quad \psi = am\,v, \quad \sigma = am(u+v),$$
$$E_1(\varphi)=E(u), \quad E_1(\psi)=E(v), \quad E_1(\sigma)=E(u+v),$$

адициона теорема за другу врсту представљена је формулом

$$E(u+v) = E(u) + E(v) - k^2 sin\,am\,u\, sin\,am\,v\, sin\,am(u+v)\,. \qquad (49a)$$

Примедба. Узев $v=K$, а с обзиром на формуле (11), (28), (33), следује

$$E(u+K) = E(u) + E - \frac{k^2\, sin\,am\,u\, cos\,am\,u}{\Delta\, am\,u}. \qquad (50)$$

21. Адициона теорема за трећу врсту:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_1(\varphi,a)+\Pi_1(\psi,a)-\Pi_1(\sigma,a) = \\ &\sqrt{\frac{a}{(1+a)(k^2+a)}}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{a(1+a)(k^2+a)}\,sin\,\varphi\, sin\,\psi\, sin\,\sigma}{1+a\,sin^2\sigma - a\,sin\,\varphi\, sin\,\psi\, cos\,\sigma\,\Delta\,\sigma}. \end{aligned}\right\} (51)$$

На случај да је параметар a негативан и бројно мањи од k^2 стављамо $a = -k^2 sin^2\alpha$ и употребом формуле $\frac{1}{i}\,arc\,tg\,i w = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+w}{1-w}$ (Алг. Анал. образац 19 за $u=iw$) имамо

$$\left.\begin{aligned} &\Pi_1(\varphi,a)+\Pi_1(\psi,a)-\Pi_1(\sigma,a) = \\ &\frac{1}{2}\,\frac{tg\,\alpha}{\Delta\,\alpha}\,l\,\frac{1-k^2 sin\,\alpha\, sin\,\varphi\, sin\,\psi\,\dfrac{sin\,\sigma\, cos\,\alpha\,\Delta\,\alpha - sin\,\alpha\, cos\,\sigma\,\Delta\,\sigma}{1-k^2 sin^2\alpha\, sin^2\sigma}}{1+k^2 sin\,\alpha\, sin\,\varphi\, sin\,\psi\,\dfrac{sin\,\sigma\, cos\,\alpha\,\Delta\,\alpha + sin\,\alpha\, cos\,\sigma\,\Delta\,\sigma}{1-k^2 sin^2\alpha\, sin^2\sigma}}. \end{aligned}\right\} (51a)$$

Узев елиптичне функције:

$$\varphi = am\,u, \quad \psi = am\,v, \quad \sigma = am(u+v), \quad \alpha = am\,p,$$

$$\Pi_1(\varphi,a) = u + \frac{tg\,am\,p}{\Delta\,am\,p}\,\Pi(u,p) \qquad \text{(једн. 36)},$$

адициона теорема за трећу врсту добија овај израз

$$\left.\begin{aligned} &\Pi(u,p)+\Pi(v,p)-\Pi(u+v,p) = \\ &\frac{1}{2}\,l\,\frac{1-k^2 sin\,am\,p\, sin\,am\,u\, sin\,am\,v\, sin\,am(u+v-a)}{1+k^2 sin\,am\,p\, sin\,am\,u\, sin\,am\,v\, sin\,am(u+v+a)}. \end{aligned}\right\} \qquad (51b)$$

Примедба. Збир од ма колико елиптичних интеграла може да се сведе на један елиптичан интеграл.

22. Елиптичне функције у виду бесконачног производа.

Употребом формуле $\prod\limits_{h=1}^{\infty} f(h) = f(1)f(2)f(3)f(4)\cdots$ имамо

$$
(52)\qquad
\begin{cases}
\sin am\, u = \dfrac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin\dfrac{\pi u}{2K} \displaystyle\prod_{h=1}^{\infty} \dfrac{1-2q^{2h}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h-2}} \\[2ex]
\cos am\, u = \dfrac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \cos\dfrac{\pi u}{2K} \displaystyle\prod_{h=1}^{\infty} \dfrac{1+2q^{2h}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h-2}} \\[2ex]
\triangle am\, u = \sqrt{k'} \displaystyle\prod_{h=1}^{\infty} \dfrac{1+2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h-2}}.
\end{cases}
$$

$$
(52a)\qquad q = e^{-\pi\cdot\frac{K'}{K}}.
$$

$$
(53)\qquad
\begin{cases}
k = 4\sqrt{q}\displaystyle\prod\left(\dfrac{1+q^{2h}}{1+q^{2h-1}}\right)^4 \\[2ex]
k' = \displaystyle\prod\left(\dfrac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^4 \\[2ex]
K = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\prod\left(\dfrac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2\left(\dfrac{1-q^{2h}}{1-q^{2h-1}}\right)^2.
\end{cases}
$$

23. Развијање елиптичних функција у редове. Употребом символа $\sum\limits_{h=1}^{\infty} f(h) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots$ можемо да напишемо

$$
(54)\qquad
\begin{cases}
\sin am\, u = \dfrac{2\pi}{kK}\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{q^{2h-1}}}{1-q^{2h-1}}\sin(2h-1)\dfrac{\pi u}{2K} \\[2ex]
\cos am\, u = \dfrac{2\pi}{kK}\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{q^{2h-1}}}{1+q^{2h-1}}\cos(2h-1)\dfrac{\pi u}{2K} \\[2ex]
\triangle am\, u = \dfrac{\pi}{2K}+\dfrac{2\pi}{K}\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\dfrac{q^h}{1+q^{2h}}\cos h\dfrac{\pi u}{K} \\[2ex]
am\, u = \dfrac{\pi u}{2K}+2\displaystyle\sum_{h=1}^{\infty}\dfrac{q^h}{h(1+q^{2h})}\sin h\dfrac{\pi u}{K}.
\end{cases}
$$

24. Развијање друге врсте у ред.

$$
(55)\qquad E(u) = \left[1-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\cdot 8\sum_{h=1}^{\infty}\frac{hq^h}{1-q^{2h}}\right]u + \frac{2\pi}{K}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{q^h}{1-q^{2h}}\sin h\frac{\pi u}{K}.
$$

$$
E = \left[1-\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 8\sum_{h=1}^{\infty}\frac{hq^h}{1-q^{2h}}\right]K \qquad (56)
$$

$$
E(u) = \frac{E}{K}u + \frac{2\pi}{K}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{q^h}{1-q^{2h}}\sin h\frac{\pi u}{K}. \qquad (55a)
$$

Јакоби заводи нову функцију и бележи је

$$
\mathrm{Z}(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{q^h}{1-q^{2h}}\sin h\frac{\pi u}{K} \qquad (57)
$$

и добија

$$
E(u) = \frac{E}{K}u + \mathrm{Z}(u). \qquad (55b)
$$

Примедба:

$$
\mathrm{Z}(o) = 0,\quad \mathrm{Z}(K) = 0,\quad \mathrm{Z}\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1-k'}{2}. \qquad (58)
$$

$$
\mathrm{Z}(u+2K) = \mathrm{Z}(u). \qquad (59)
$$

$$
\mathrm{Z}(-u) = -\mathrm{Z}(u). \qquad (60)
$$

25. Развијање треће врсте у ред.

$$
\left.
\begin{aligned}
\Pi(u,p) &= u\mathrm{Z}(p) - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{q^h}{h(1-q^{2h})}\left(\cos\frac{h\pi(u-p)}{K} - \cos\frac{h\pi(u+p)}{K}\right) \\
&= u\mathrm{Z}(p) - 2\sum_{h=1}^{\infty}\frac{q^h}{h(1-q^{2h})}\sin\frac{h\pi u}{K}\sin\frac{h\pi p}{K}.
\end{aligned}
\right\} (61)
$$

Примедба. Формула којом се $\Pi(u,p)$ представља помоћу логаритма једног бесконачног производа:

$$
\Pi(u,p) = u\mathrm{Z}(p) + \frac{1}{2}\, l\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi(u-p)}{K}+q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi(u+p)}{K}+q^{4h-2}}. \qquad (62)
$$

26. Јакоби-ова функција. Примећујемо да се производ $\prod\limits_{h=1}^{\infty}\left(1-2q^{2h-1}\cos\dfrac{\pi u}{K}+q^{4h-2}\right)$ јавља као именитељ код сва три обрасца (52) за $\sin am\,u$, $\cos am\,u$ и $\triangle am\,u$, као и у обрасцу (62) за $\Pi(u,p)$ са аргументима $u-p$ и $u+p$. Констатујемо да је

$$\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h-2}\right)=$$
$$=A\left[1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K}-\cdots\right]$$

$$A=\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2h}}=\frac{1}{\prod\limits_{h=1}^{\infty}(1-q^{2h})}.$$

Ред на десној страни, који множен са A, јесте *Јакоби-ова функција* и бележи се са $\Theta(u)$:

$$(63)\qquad \Theta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+ +2q^{16}\cos\frac{4\pi u}{K}-\cdots$$

Примећујемо да су степени од q квадрати природних бројева и ред спада у најконвергентније редове.

Специалне вредности:

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\Theta(0)=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots=\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1-q^h}{1+q^h}=\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}\\
&\Theta(K)=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots=\\
&\qquad=\prod_{h=1}^{\infty}\frac{1+q^{2h-1}}{1-q^{2h-1}}\cdot\frac{1-q^{2h}}{1+q^{2h}}=\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\\
&\Theta\left(\frac{K}{2}\right)=1-2q^4+2q^{16}-2q^{36}+2q^{64}-\cdots
\end{aligned}\right.$$

$$(65)\qquad \Theta(-u)=\Theta(u).$$

Јакоби-ова функција је периодна, јер је

$$(66)\qquad \Theta(u+2K)=\Theta(u),$$

али просто периодна пошто она мења вредност кад аргумент u повећамо за $2iK'$:

$$(67)\qquad \Theta(u+2iK')=-\frac{1}{q}e^{-\frac{\pi i u}{K}}\Theta(u).$$

27. Представљање елиптичних функција помоћу Јакоби-ове функције.

$$\Pi(u,p)=uZ(p)+\frac{1}{2}l\frac{\Theta(u-p)}{\Theta(u+p)}.\qquad(68)$$

Одавде

$$\Pi(u,p)-uZ(p)=\Pi(p,u)-pZ(u).\qquad(69)$$

$$\Pi(K,p)=KZ(p).\qquad(70)$$

$$\left.\begin{aligned}
&l\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}=\int_0^u Z(u)\,du,\quad \Theta(u)=\Theta(0)e^{\int_0^u Z(u)\,du},\\
&Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(71)$$

Јакоби заводи функцију

$$H(u)=2\left[\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots\right],\qquad(72)$$

где је ред на десној страни јако конвергентан.

С обзиром да је

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta(u+iK')=\\
&=\frac{2ie^{-\frac{\pi i u}{2K}}}{\sqrt[4]{q}}\left[\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\cdots\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(73)$$

постоји између функција H и Θ ова веза

$$H(u)=\frac{\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}}{i}\Theta(u+iK').\qquad(74)$$

$$H(u)=2\sqrt[4]{q}\prod_{h=1}^{\infty}(1-q^{2h})\sin\frac{\pi u}{2K}\left(1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}\right).\qquad(75)$$

$$\left.\begin{aligned}
&H(u+K)=2\sqrt[4]{q}\prod_{h=1}^{\infty}(1-q^{2h})\cos\frac{\pi u}{2K}\left(1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K}+q^{4h}\right)\\
&H(u+K)=\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}\Theta(u+K+iK')\\
&H(u+K)=2\left[\sqrt[4]{q}\cos\frac{\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^9}\cos\frac{3\pi u}{2K}+\sqrt[4]{q^{25}}\cos\frac{5\pi u}{2K}+\cdots\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(76)$$

$$(77)\quad\begin{cases} sin\,am\,u = \sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{k}}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}\,\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u)} \\ \quad = 2\sqrt{\frac{1}{k}}\,\frac{\sqrt[4]{q}\,sin\frac{\pi u}{2K} - \sqrt[4]{q^9}\,sin\frac{3\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\,sin\frac{5\pi u}{2K} - \cdots}{1-2q\,cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots} \\ cos\,am\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u+K)}{\Theta(u)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2K}}\,\frac{\Theta(u+K+iK')}{\Theta(u)} \\ \quad = 2\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\sqrt[4]{q}\,cos\frac{\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^9}\,cos\frac{3\pi u}{2K} + \sqrt[4]{q^{25}}\,cos\frac{5\pi u}{2K} + \cdots}{1-2q\,cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots} \\ \Delta\,am\,u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} \\ \quad = \sqrt{k'}\,\frac{1+2q\,cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi u}{K} + 2q^9 cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots}{1-2q\,cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots} \end{cases}$$

$$(78)\qquad \Theta'(u) = \frac{2\pi}{K}\left[q\,sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots\right],$$

дакле (с обзиром на 71)

$$(79)\qquad \mathrm{Z}(u) = \frac{2\pi}{K}\,\frac{q\,sin\frac{\pi u}{K} - 2q^4 sin\frac{2\pi u}{K} + 3q^9 sin\frac{3\pi u}{K} - \cdots}{1-2q\,cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9 cos\frac{3\pi u}{K} + \cdots}$$

С обзиром на формуле (68) и (63) имамо за трећу врсту

$$(80)\quad\begin{cases} \Pi(u,p) = u\,\mathrm{Z}(p) + \\ \quad + \frac{1}{2}\,l\,\frac{1-2q\,cos\frac{\pi(u-p)}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi(u-p)}{K} - \cdots}{1-2q\,cos\frac{\pi(u+p)}{K} + 2q^4 cos\frac{2\pi(u+p)}{K} - \cdots} \end{cases}$$

$$(81)\qquad \mathrm{H}(o) = 0,\quad \mathrm{H}(u+2K) = -\mathrm{H}(u),\quad \mathrm{H}(u+4K) = \mathrm{H}(u),$$

одакле видимо да је функција Н периодна и да је индекс периоде $= 4K$.

$$\mathrm{H}(-u) = -\mathrm{H}(u). \tag{82}$$

$$\mathrm{H}(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\left[\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \cdots\right]. \tag{83}$$

$$\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}(K)}{\Theta(K)} = 2\,\frac{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \sqrt[4]{q^{49}} + \cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}. \tag{84}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(o)}{\Theta(K)} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\cdots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots}. \tag{85}$$

ТЕОРИЈА ГРЕШАКА

1. Подела грешака на **сталне, систематске** или **правилне** и **случајне грешке.**

Утицај сталних грешака смањујемо поглавито *методом мерења* и дајемо им карактер случајних грешака.

Нека су $x_1, x_2, \dots x_n$ добивене вредности за x из n мерења која су извршена под једнаким околностима. Као највероватнија вредност x-а узима се

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{h=1}^{h=n} x_h}{n}, \tag{1}$$

одакле

$$(X - x_1) + (X - x_2) + \cdots + (X - x_n) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{h=1}^{h=n}(X - x_h) = 0. \tag{1a}$$

На случај да $x_1, x_2, \dots x_n$ имају разан ступањ поузданости (*тежине*) нпр. да је x_1 добивено из p_1 подједнако добрих, x_2 из $p_2, \dots x_n$ из p_n подједнако добрих мерења има се узети

$$X = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \tag{2}$$

2. Функција грешке. Означимо са $\triangle$ грешку (нпр. $\triangle_1 = x - x_1$, $\triangle_2 = x - x_2, \cdots$) са $\varphi(\triangle)$ вероватноћу да је учињена грешка $\triangle$. Вероватноћа да учињена грешка лежи у границама α и β јесте

$$W(\alpha < \triangle < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\triangle)\, d\triangle, \tag{3}$$

дакле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\triangle)\, d\triangle = 1 \tag{4}$$

$$\varphi(\triangle) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \triangle^2}. \tag{5}$$

Константа h зове се (по *Гаус*-у) *мера тачности*. За мерења, која су извршена под истим околностима, h има исту вредност.

Тачност посматрања (па дакле и број h) има се сматрати као релативан број, који се односи на две серије посматрања. Тачност посматрања стоји у обрнутој пропорцији са величином грешке, која је у оба низа посматрања подједнако вероватна.

3. Начело Методе Најмањих Квадрата. Најбољи начин за одређивање непознате x јесте тај, који ће учинити да код подједнако поузданих мерења буде

$$\triangle_1^2 + \triangle_2^2 + \cdots + \triangle_n^2 = Min., \tag{6}$$

а код неједнако поузданих мерења буде

$$h_1^2 \triangle_1^2 + h_2^2 \triangle_2^2 + \cdots + h_n^2 \triangle_n^2 = Min. \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \cdots &= p_1 : p_2 : p_3 : \cdots \\ h_1 : h_2 : h_3 : \cdots &= \sqrt{p_1} : \sqrt{p_2} : \sqrt{p_3} : \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Речима: тежине $(p_1, p_2, \dots)$ пропорционалне су са квадратом мере тачности или мере тачности пропорционалне су са квадратним кореном из тежине.

4. Вероватна грешка. Ако све грешке, учињене у једној серији опажања, средимо по њиховој апсолутној величини једну до друге, онда се она у средини (ако је број опажања непаран) или аритметичка средња из оне две у средини (ако је број опажања паран) зове *вероватна грешка*. Вероватна грешка r то је она за коју је

$$W(-r < \triangle < +r) = \int_{-r}^{+r} \varphi(\triangle)\, d\triangle = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

$$hr = 0{,}476\,936\,2761. \tag{10}$$

Према овоме (10) можемо да израчунамо h кад претходно одредимо r. Мера тачности је у обрнутој сразмери са вероватном грешком.

Вероватноћа да апсолутна вредност једне грешке не буде већа од δ_1 јесте

$$W(-\delta_1 < \triangle < +\delta_1) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta_1}^{+\delta_1} e^{-h^2 \triangle^2}\, d\triangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+h\delta_1} e^{-x^2}\, dx.$$

Број грешака, чија апсолутна вредност лежи између δ_1 и δ_2 (узев $\delta_2 > \delta_1$) у групи од n опажања (мерења), која су извршена са тачношћу h, јесте

$$B = n\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta_2} e^{-x^2}\,dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta_1} e^{-x^2}\,dx\right]. \tag{11}$$

Примедба. Број грешака, чија апсолутна вредност није већа од δ_1 у једној групи од n мерења, која су извршена са тачношћу h, јесте

$$B_1 = n\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\delta_1} e^{-x^2}\,dx. \tag{12}$$

Узмимо $n = 1000$,

$\delta_1 = \frac{1}{2}r$,	дакле	$h\delta_1 = \frac{hr}{2} = 0{,}23847$	и	налазимо	$B_1 = 264$,
$\delta_1 = r$	„	„ = „ $= 0{,}47694$	„	„	$B_1 = 500$,
$\delta_1 = 2r$	„	„ „ $= 0{,}95387$	„	„	$B_1 = 823$,
$\delta_1 = 3r$	„	„ „ $= 1{,}43081$	„	„	$B_1 = 956$,
$\delta_1 = 4r$	„	„ „ $= 1{,}90774$	„	„	$B_1 = 993$,
$\delta_1 = 5r$	„	„ „ $= 2{,}38468$	„	„	$B_1 = 999$.

То значи да по теорији треба у 1000 опажања да се јаве

264 грешке $< \frac{1}{2}r$,
500 „ $< r$,
823 „ $< 2r$,
956 „ $< 3r$,
993 „ $< 4r$,
999 „ $< 5r$,

где r означава вероватну грешку.

5. Средња грешка:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}^{*} = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \tag{13}$$

Средња грешка је таква да је вероватноћа да се она у n мерења понавља исто толика као и за стварно учињене грешке $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ са претпоставком да је обе серије опажања једна иста мера тачности.

* Означавање суме ћошкастом заградом је по *Гаус*-у.

6. Просечна грешка је аритметичка средња из апсолутних вредности $(\Delta_1), (\Delta_2), \ldots (\Delta_n)$ грешака

$$\eta = \frac{(\Delta_1) + (\Delta_2) + \cdots + (\Delta_n)}{n} = \frac{[(\Delta)]}{n} = \Sigma\,\Delta(\varphi)\,\Delta. \tag{14}$$

Ако претпоставимо n довољно велико, онда је веома приближно

$$\eta = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\,\varphi(\Delta)\,d\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} h\,\Delta\,e^{-h^2\Delta^2}\,d\Delta$$

или

$$\eta = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{15}$$

7. Веза између мере тачности (h), вероватне (r), средње (μ) и просечне грешке (η):

$$\left.\begin{aligned}
h &= 0{,}4769362761\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{\mu\sqrt{2}}\left(= 0{,}7071068\cdot\frac{1}{\mu}\right) = \\
&\qquad = \frac{1}{\eta\sqrt{\pi}}\left(= 0{,}56419\cdot\frac{1}{\eta}\right)\\
r &= 0{,}4769362761\cdot\frac{1}{h} = 0{,}6744898\cdot\frac{1}{\mu} = 0{,}8453476\,\eta\\
\mu &= \frac{1}{h\sqrt{2}}\left(= 0{,}7071068\cdot\frac{1}{h}\right) = 1{,}4826021\,r = \\
&\qquad = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta\,(= 1{,}2533141\,\eta)\\
\eta &= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left(= 0{,}56419\cdot\frac{1}{h}\right) = 1{,}1829372\,r = \\
&\qquad = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\,(= 0{,}7978846\,\mu).
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

8. Упоређење тачности аритметичке средње са тачношћу појединих мерења. Нека су $a_1, a_2, \ldots a_n$ измерене вредности за x, дакле $\Delta_1 = a_1 - x$, $\Delta_2 = a_2 - x$, $\cdots \Delta_n = a_n - x$ грешке појединих мерења. Из $x = a_1 - \Delta_1$, $x = a_2 - \Delta_2$, $\cdots x = a_n - \Delta_n$ сабирањем

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n}{n}.$$

Први члан $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ јесте аритметичка средња, дакле највероватнија вредност за x, други члан $\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}$ је грешка аритметичке средње. Означимо $\frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n}=M.$

Тада је за велики број n врло приближно

$$M=\frac{\mu}{\sqrt{n}},\quad \mu=M\sqrt{n}. \tag{17}$$

Аналоган однос постоји између вероватне грешке R аритметичке средње и вероватне грешке r појединих мерења

$$R=\frac{r}{\sqrt{n}},\quad r=R\sqrt{n}. \tag{18}$$

Означимо са H меру тачности за аритметичку средњу. Слично обрасцима (16) постоје односи

$$\left\{\begin{aligned} \mathsf{H}&=\frac{1}{M\sqrt{2}}=0{,}7071068\cdot\frac{1}{M}\\ R&=0{,}6744898\,M\\ M&=\frac{1}{\mathsf{H}\sqrt{2}}=0{,}7071068\cdot\frac{1}{\mathsf{H}}=1{,}4826021\,R. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\mathsf{H}=\frac{\sqrt{n}}{\mu\sqrt{2}}=h\sqrt{n}. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} M:\mu&=\sqrt{p}:\sqrt{P}\\ R:r&=\sqrt{p}:\sqrt{P}\\ \mathsf{H}:h&=\sqrt{P}:\sqrt{p}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Овде означава P тежину аритметичке средње, а p тежину једног посматрања.

Примедба. Тежина највероватније вредности равна је збиру тежина појединих мерења.

9. Израчунавање грешака на основу аритметичке средње из подједнако добрих посматрања. Израчунавање свих врста грешака базира на *правим* грешкама, а то су разлике између истинске вредности x и мерењем добивених резултата. Пошто

нам је истинска вредност x непозната, то су нам непознате и праве грешке. Ми располажемо са *приближним* грешкама, а то су разлике између посматраних вредности $a_1, a_2, \ldots a_n$ и њихове аритметичке средње

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Приближне грешке за поједина мерења јесу

$$a_1-a=\delta_1,\ a_2-a=\delta_2,\cdots a_n-a=\delta_n.$$

Грешка аритметичке средње је

$$a-x=\epsilon.$$

Праве грешке појединих мерења јесу

$$a_1-x=\Delta_1,\ a_2-x=\Delta_2,\cdots a_n-x=\Delta_n.$$

Према томе је

$$\Delta_1=\delta_1+\epsilon,\ \Delta_2=\delta_2+\epsilon,\cdots \Delta_n=\delta_n+\epsilon.$$

Израчунавање средње и вероватне грешке појединих мерења, као и средње и вероватне грешке аритметичке средње из познатих нам (приближних) грешака δ

$$\left.\begin{aligned} \mu&=\pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}\\ r&=\pm 0{,}6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}\\ M&=\pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n(n-1)}}=\frac{\mu}{\sqrt{n}}\\ R&=\pm 0{,}6745\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n(n-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Завођењем суме $[(\delta)]$ место суме $[\delta^2]$ чинимо да формуле (22) постају подесније за практично рачунање код подједнако добрих мерења. Ако претпоставимо да је број мерења (n) врло велики може са великом приближношћу да се стави $\sqrt{[\delta^2]}=\pm\frac{[(\delta)]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и са тиме

$$(23)\quad \begin{cases} \mu = \pm \dfrac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \pm 1{,}2533 \dfrac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}} \\ r = \pm 0{,}6745 \dfrac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \pm 0{,}8453 \dfrac{[(\delta)]}{\sqrt{n(n-1)}} \\ M = \pm \dfrac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \pm 1{,}2533 \dfrac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}} \\ R = \pm 0{,}6745 \dfrac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \pm 0{,}8453 \dfrac{[(\delta)]}{n\sqrt{n-1}}. \end{cases}$$

10. Одређивање средње и вероватне грешке из неједнако добрих посматрања. За резултате $a', a'', \ldots$ који имају разне тежине $p', p'', \ldots$ јесте

$$a = \frac{p'a' + p''a'' + \cdots}{p' + p'' + \cdots} = \frac{[pa]}{[p]}.$$

Узев да се тежине $p', p'', \ldots$ резултата $a', a'', \ldots$ могу сматрати као бројеви посматрања која су учињена са једнаком тачношћу (тежином $= 1$) средња грешка крајнег резултата је $M = \dfrac{\mu}{\sqrt{[p]}}$, где μ означава средњу грешку једног мерења са тежином 1.

Средња и вероватна грешка једног посматрања тежине 1

$$(24)\quad \begin{cases} \mu = \pm\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{n-1}}, & M = \pm\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{[p](n-1)}} \\ r = \pm 0{,}6745\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{n-1}}, & R = \pm 0{,}6745\sqrt{\dfrac{[p\delta^2]}{[p](n-1)}}. \end{cases}$$

ПЛАНИМЕТРИЈА

I

Права линија.

1. Аксиоми. I. Права линија је основни појам за који није могуће дати задовољавајућу дефиницију.

II. Кроз две тачке може да се положи само једна права линија.

III. Права је најкраћа линија између двеју тачака.

IV. Кад једна права има две тачке заједнички са једном равни, онда она лежи сва у тој равни.

V. Кроз једну тачку изван једне праве линије може само једна паралелна са том правом да се повуче.

2. Углови. I. Дефиниције. *Пун, опружен, прав* угао постаје обртањем једне праве око једне њене тачке за цео, половину, четвртину обрта.

Цео обрт делимо на 360 делова (степена), тако да је пун угао $= 360^0$, опружен угао $= 180^0$, прав угао $= 90^0$. Делимо степене (^{0}) на минуте ($'$), а ове на секунде ($''$): $1^0 = 60'$, $1' = 60''$.

Угао који је $< 90^0$ зове се *оштар*,

" " " $> 90^0$ или $< 180^0$ зове се *туп*,

" " " $> 180^0$ зове се *испупчен*.

Углове, који постају обртањем противно кретању сахатне казаљке (од десна на лево), сматрамо као *позитивне*, оне који постају обртањем у смислу кретања сахатне казаљке (од лева на десно) као *негативне*.

Два угла који се допуњују до $\begin{cases} 90^0 \\ 180^0 \end{cases}$ зову се $\begin{cases} \textit{комплементни} \\ \textit{суплементни}. \end{cases}$

Два угла, који имају заједнички теме и један крак, а допуњују се до 180^0, зову се *напоредни углови*.

Два угла са заједничким теменом, тако да су краци једнога продужења кракова другога, јесу једнаки и зову се *унакрсни углови*.

Два угла, чији су краци поједине нормални један на другом зову се *нормални углови*. Таква два угла или су једнака или суплементна према томе да ли су оба оштра (тупа) или је један оштар, а други туп.

II. Теореме. Половнице двају напоредних углова стоје $\perp$ једна на другој.

Из једне тачке може само једна нормала да се спусти на једну праву.

3. Симетрија. Две фигуре јесу *симетричне* у односу према једној правој (*симетралној оси*), ако се оне преклапањем за 180^0 око те праве могу да доведу до поклапања. (*Осовинска симетрија*).

Две фигуре јесу симетричне у односу према једној тачци (*средишту симетрије*) кад се свака од њих обртањем за 180^0 око оне тачке може да доведе до поклапања са оном другом. (*Средишна симетрија*).

II

Троугао.

Означимо са a, b, c стране, са α, β, γ њима супротне углове, а са α', β', γ' спољашне углове.

4. Подела. По странама: на равностране, равнокраке и разностране. По угловима: на оштроугле, правоугле и тупоугле.

5. Теореме. I. $\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$

II. $\alpha' = \beta + \gamma.$

III. $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0.$

IV. Ако је $a \geqq b \geqq c$, онда је $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$.

V. Ако је $a > b > c$, онда је $a < b + c$, $c > a - b$.

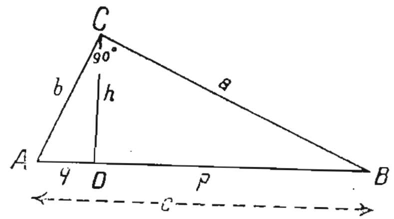
VI. У једном троуглу секу се у истој тачци:

1. симетрале страна. (Средиште око троугла описаног круга).
2. симетрале унутрашњих углова. (Средиште у троугао уписаног круга).
3. симетрала једног унутрашњег и симетрале друга два спољашна угла. (Средишта кругова који додирују једну страну и продужења осталих двеју страна).
4. тежишне линије које везују средине страна са супротним теменима у тачци која те линије дели по размери 2 : 1. (Тежиште троугла).
5. висине.

VII. Случајеви подударности. Два троугла јесу подударна кад имају једнако по реду:

1. једну страну и два угла.
2. две стране и захваћени угао.
3. две стране и већој страни супротни угао.
4. све три стране.

6. Правоугли троугао. I. *Питагорино правило:*



$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

II. Пропорције:

$$a : c = h : b \text{ или } h = \frac{ab}{c}. \qquad (2)$$

$$p : h = h : q \text{ или } h = \sqrt{pq}. \qquad (3)$$

$$p : a = a : c \text{ или } a = \sqrt{pc}. \qquad (4)$$

III

Четвороугао.

7. Подела. 1. *Паралелограми* код којих су супротне стране паралелне. 2. *трапези* са само двема паралелним странама. 3. *трапезоиди* код којих нема паралелних страна.

8. Теореме. I. За четвороугао су у главноме потребни пет $(2 \cdot 3 - 1)$ података.

II. Збир унутрашњих и збир спољашњих углова је $= 360^0$.

9. Паралелограм. Супротне стране и супротни углови једнаки. Дијагонале полове једна другу. Разне форме паралелограма: 1. *квадрат:* све стране једнаке и сва четири угла једнака $(= 90^0)$; дијагонале једнаке и $\perp$ једна на другој.

2. *правоугаоник:* супротне стране једнаке; сва четири угла једнака $(= 90^0)$; дијагонале једнаке, али под косим углом.

3. *ромб:* све четири стране једнаке; супротни угли једнаки; дијагонале неједнаке, а $\perp$ једна на другој.

4. *ромбоид* (паралелограм у ужем смислу): супротне стране и супротни углови једнаки; дијагонале неједнаке и секу се под косим углом.

10. Трапез. Средња линија = аритметичкој средњој из паралелних страна.

11. Трапезоид. Карактеристична форма: *делтоид:* по две обличне стране једнаке; дијагонале се полове и $\perp$ једна на другој

IV
Многоугао.

12. Правила. За n-угаоник је потребно $2n-3$ комада.

Број диагонала у n-угаонику јесте $=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Збир унутрашњих углова је $=(n-2)\,180^0$.
Збир спољашњих углова је $=360^0$.

13. Правилни полигони одређени су са два комада.

Унутрашњи угао у полигону са n страна је $=\dfrac{(n-2)\,180^0}{n}$.

НЗ. Обрасце за правилне полигоне види Триг. чл. 32.

V
Израчунавање површине.

14. Обрасци за површину P за правоугаоник:

$$P=ab, \tag{5}$$

где су a и b две оближње стране. Квадрат:

$$P=a^2, \tag{6}$$

где је a страна. Паралелограм:

$$P=ah, \tag{7}$$

где a ма која страна, h висина према њој. Троугао:

$$P=\frac{ah}{2}, \tag{8}$$

где је a ма која страна, h висина према њој. Трапез:

$$P=\frac{h(a+c)}{2}, \tag{9}$$

где су a и c паралелне стране, дакле $\dfrac{a+c}{2}=$ средњој линији, h одговарајућа висина. Делтоид:

$$P=\frac{d_1 d_2}{2}, \tag{10}$$

где су d_1 и d_2 диагонале.

VI
Круг.

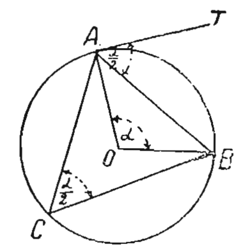
15. Правила. I. Круг је одређен трима тачкама које не леже на једној правој.

II. Једнаким тетивама у истоме кругу (или једнаким круговима) одговарају једнаки средишни углови и једнаки луци.

III. *Средишни угао:* $\sphericalangle AOB=\alpha$.

Периферијски угао: $\sphericalangle ACB=\dfrac{\alpha}{2}$.

Тангентни угао: $\sphericalangle BAF=\dfrac{\alpha}{2}$.



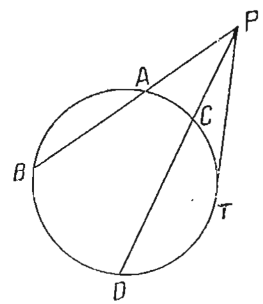
IV. Углови над полукругом (над пречником) јесу $=90^0$.

V. Мерење круга и његових делова види Триг. чл. 125.

VI. Два круга K_1 и K_2 са полупречницима $r_1>r_2$ и централом d.

Ако је $d=0$ кругови су *концентрични*.
„ „ $0<d<r_1-r_2$ K_2 лежи у K_1.
„ „ $d=r_1-r_2$ кругови се додирују изнутра.
„ „ $r_1-r_2<d<r_1+r_2$ кругови се секу.
„ „ $d=r_1+r_2$ кругови се додирују споља.
„ „ $d>r_1+r_2$ кругови леже један изван другог.

16. Потенција једне тачке P изван круга јесте позитивна $=PA\cdot PB=PC\cdot PD=PT^2$. За тачку у кругу потенција је негативна.



Потенциална линија за два круга јесте: сечица која пролази кроз њихове заједничке тачке (ако се кругови *секу*), тангента у заједничкој тачци (ако се кругови *додирују*) или извесна права која је изван оба округа (ако кругови немају заједничких тачака). Тачке на потенциалној линији имају једнаке потенције у односу на оба круга. Тангенте повучене из ма које тачке потенциалне линије на оба круга имају исту дужину.

Потенциалне линије трију кругова секу се у истој тачци (*потенциалној тачци*).

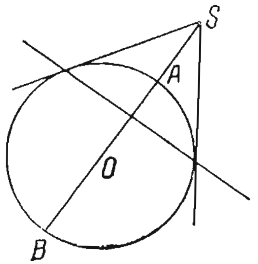
17. Пол и полара. $\left.\begin{array}{l} S \text{ } \textit{пол} \text{ праве } s \\ s \text{ } \textit{полара} \text{ тачке } S \end{array}\right\}$ у односу на круг.

$$p : r = r : d$$

или

$$p = \frac{r^2}{d}, \quad d = \frac{r^2}{p}.$$

$r =$ полупречник круга; $p = OP, d = OS$. s сече ($p < r$), додирује ($p = r$) или лежи изван ($p > r$) круга, према томе да ли је S изван ($d > r$), на ($d = r$) или у ($d < r$) кругу.



Поларе тачака једне праве секу се у истој тачци: у полу оне праве линије.

Полови правих линија које се секу све у истој тачци налазе се сви на једној правој: на полари оне заједничке тачке.

Полара пресечне тачке двеју правих пролази кроз полове оних правих. Пол праве која везује две тачке јесте пресек полара оних двеју тачака.

A, B, P, S јесу четири хармониске тачке; P и S јесу коњуговане тачке. Нормала s на AB у тачци P јесте полара тачке S, а и обратно нормала на AB у тачци S јесте полара тачке P. Тачке P и S зову се *коњуговани полови*.

18. Тачке сличности. Ако у два круга повучемо два у $\left\{\begin{array}{l}\text{истом}\\\text{противном}\end{array}\right\}$ правцу паралелна полупречника и спојимо њихове крајне тачке, онда та права дели централу по $\left\{\begin{array}{l}\text{спољашњој}\\\text{унутрашњој}\end{array}\right\}$ размери та два полупречника. Пресечна тачка ове праве и централе зове се $\left\{\begin{array}{l}\text{спољашња}\\\text{унутрашња}\end{array}\right\}$ *тачка сличности*.

Два круга, који леже један изван другог, имају четири заједничке тангенте: две које пролазе кроз спољашњу и две кроз унутрашњу тачку сличности.

Све три спољашње тачке сличности, као и две унутрашње са по једном спољашњом тачком сличности трију кругова леже на једној правој тз. *оси сличности*. (*Монж*-ова теорема).

19. Тетивни и тангентни полигони. У тетивном четвороуглу је: збир супротних углова $= 180^0$; производ дијагонала раван збиру производа двеју супротних страна. (*Птоломеј*-ова теорема). Триг. формула 53.

У тангентном четвороуглу је збир супротних страна једнак.

Све три пресечне тачке двеју супротних страна у једном тетивном шестоуглу леже на једној правој. (*Паскал*-ова теорема).

Све три праве које везују по два супротна темена једнога тангентног шестоугла секу се у једној тачци. (*Брианхон*-ова теорема).

VII

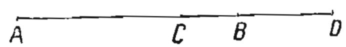
Пропорционалност дужи и сличност слика.

20. Дуж a подељена је по *златноме пресеку* ако је

$$a - x : x = x : a, \tag{11}$$

где означава x већи, $a - x$ мањи комад дужи a.

21. Размера *унутрашње поделе* дужи AB тачком C јесте $\frac{AC}{BC}$ негативна.



Размера *спољашње поделе* дужи AB тачком D јесте $\frac{AD}{BD}$ позитивна.

НЗ. Размери $+1$ одговара бесконачно удаљена тачка праве AB; размери -1 одговара средина дужи AB.

22. Симетрала угла у троуглу дели по унутрашњој, а симетрала спољашњег троугловог угла дели по спољашњој подели супротну страну и то по размери налеглих страна.

23. Хармониска подела. Ако је дуж AB подељена тачком C по унутрашњој, тачком D по спољашњој истој размери, онда се каже да су A, B, C, D, четири *хармониске тачке*. Тачке A и B, а тако исто и тачке C и D зову се *коњуговане*. Дуж AB подељена је хармониски тачкама C и D, као и обратно што је дуж CD подељена хармониски тачкама A и B.

Четири праве, које полазе из исте тачке и пролазе кроз четири хармониске тачке, образују један *хармониски сноп*. Зраци, који пролазе кроз две коњуговане тачке, јесу такође коњуговани.

Свака права сече један хармониски сноп у хармониским тачкама.

Средини једне дужи коњугована тачка пада у бесконачност. — Симетрали једнога угла коњуговани зрак стоји $\perp$ на симетрали.

24. Потпун четвространа. Четири праве, од којих не пролазе више од две кроз једну тачку, образују један *потпун четвространа*. Ове четири праве (*стране*) секу се у шест тачака (*темена*). Имамо три пута по два (*супротна*) темена која не леже на истој страни и која спојена дају три *дијагоналне праве*.

Свака дијагонала у потпуном четворострану подељена је хармониски другим двема дијагоналама тако да крајне тачке прве дијагонале образују један пар, а тачке пресека оних других двеју дијагонала са првом дијагоналом образују други пар коњугованих тачака.

25. Колинеација. Кад два троугла леже тако да се одговарајуће стране секу тачкама на једној правој (*оси колинеације*), онда се праве, које везују одговарајућа темена, секу у истој тачци (*средишту колинеације*). Таква два троугла јесу *колинеарна*, *перспективна* или *хомологна*.

26. Дефиниција. Два троугла јесу слична кад је

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1 \quad \text{и}$$
$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1.$$

27. Случајеви сличности. Два троугла јесу слична:

1. кад су им две стране пропорционалне и захваћени угао једнак;
2. кад су два угла једнака;
3. кад су им све три стране пропорционалне;
4. кад су им две стране пропорционалне, а угао супротан већој страни једнак.

28. Теореме. I. Висине једнога троугла пропорционалне су реципрочним вредностима одговарајућих страна:

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} h_a : h_b : h_c &= \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \\ &= bc : ca : ab. \end{aligned} \right.$$

II. $\left.\begin{matrix}\text{Обими}\\ \text{Површине}\end{matrix}\right\}$ сличних полигона пропорционални су $\left\{\begin{matrix}\text{првоме}\\ \text{другоме}\end{matrix}\right\}$ степену хомологих дужи.

III. Ако су два полигона слична и две хомологе стране //, онда су и све остале хомологе стране // и полигони су у перспективном положају.

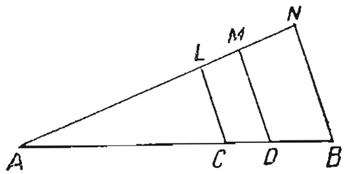
IV. Висина над хипотенузом дели правоугли троугао на два правоугла троугла који су слични задатоме троуглу.

V. Ако се над странама једног правоуглог троугла конструишу сличне фигуре, онда је збир фигура над катетама једнак са фигуром над хипотенузом.

VI. Ако над сваком катетом као пречником опишемо полукруг који не покрива троугао, а тако исто опишемо полукруг над хипотенузом као пречником који троугао покрива, онда је збир оне две фигуре у форми српа (тз. lunulae Hippocratis), који образују полукругови, једнак правоуглом троуглу.

29. Конструкције основане на сличности.

1. Задатак. Поделити једну дуж AB на неколико делова, нпр. три дела AC, CD, DB, који се имају као $l:m:n$.

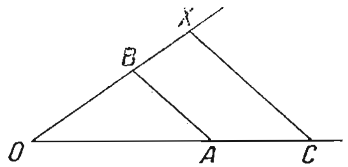


Решење: из A повлачимо у произвољноме правцу праву на којој у каквој било јединици одмеравамо $AL = l$, $LM = m$, $MN = n$, спајамо N са B и повлачимо $LC \,//\, NB$, $MD \,//\, NB$. Тада је $AC : CD : DB = l : m : n$.

2. Задатак. Поделити задату дуж на колико било једнаких делова.

Решење: као и у прошлом задатку са том разликом што се узима да је $AL = LM = MN = \cdots$ онолико пута на колико се делова хоће да подели дуж AB.

3. Задатак. Конструисати четврту пропорционалу за дужи a, b, c.

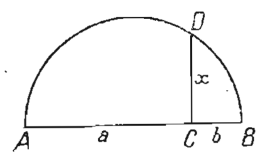


Решење: на крацима каквог било угла α пренашамо дужи $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Везујемо A са B и повлачимо $CX \,//\, AB$. Тада је $OX = x$ у пропорцији $a : b = c : x$.

НЗ. Ако узмемо $a = 1$, онда је $x = bc$ (множење).

„ „ $c = 1$, „ „ $x = \dfrac{b}{a}$ (дељење).

4. Задатак. Конструисати средњу геометриску пропорционалу за дужи a и b.



Решење: описати над $AC + CB = a + b$ полукруг. Подићи $CD = x \perp AB$, које одговара пропорцији $a : x = x : b$, дакле $x = \sqrt{ab}$.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. Праве линије и равни у простору.

I. Раван је одређена трима тачкама које не леже на истој правој.

II. Две праве могу 1. да се секу, 2. да су паралелне и 3. да се укрштају.

III. Пресек двеју равни јесте права линија.

IV. Ако права не лежи у равни, онда она са равни може имати само једну заједничку тачку или је // са равни.

V. Ако је права // са једном правом у равни, онда је та права // са равни.

VI. Две секуће се равни деле простор на четири дела тз. *телесна угла*, од којих су два *напоредна*, а два *унакрсна*. Полуравни, које ограничавају телесни угао, зову се његове *стране*, а права по којој се оне секу *ивица*.

VII. Пресек двеју // равни трећом равни јесу две // праве.

VIII. Кроз једну тачку изван равни може да се положи само једна паралелна раван.

IX. Ако је права $\perp$ на једној равни, онда је та права $\perp$ на свакој правој у тој равни.

X. Из једне тачке изван равни може да се спусти на ту раван само *једна* нормала.

XI. Из једне тачке може да се положи само једна нормална раван према једној правој.

XII. Нормале спуштене из појединих тачака једне праве на какву раван леже све у *једној* равни.

XIII. Тачка у којој нормала спуштена из једне тачке на раван ту раван сече зове се (*нормална* или *ортогонална*) *пројекција* тачке.

XIV. Пројектовањем двеју тачака једне праве на какву раван добијамо пројекцију праве на ту раван.

XV. Под *нагибним углом* једне праве према некој равни разумемо угао који заклапа та права са њеном пројекцијом у тој равни. Тај угао је *најмањи* од свију углова које права гради са правама у пројекционој равни, а које пролазе кроз тачку продора пројектоване праве са пројекционом равни.

XVI. Под нагибним углом двеју равни разумемо угао који чине две у којој било тачци пресека тих равни у равнима на пресек подигнуте нормале.

XVII. Три секуће се равни секу се по трима паралелним правама или се секу у једној истој тачци.

2. Теореме за тела.

I. У свакоме полиедру је број ивичних углова (U) два пута колико ивица (J):

$$U = 2J. \tag{1}$$

II. У конвексном полиедру је збир рогљева (R) и страна (S) за 2 већи од броја ивица (J):

$$R + S = J + 2. \tag{2}$$

(*Ајлер*-ова теорема).

III. Два тела једнаке висине, код којих како основе, тако и са основом паралелни пресеци повучени у истом одстојању од основе, имају једнаке површине, јесу по запремини једнаки (*Cavalieri*-ово правило).

IV. Површине сличних тела имају се као квадрати, а запремине као кубови одговарајућих дужи.

V. Пресек пирамиде паралелан основи јесте полигон сличан основи. Површина пресека и површина основе имају се као квадрати њихових одстојања од врха.

VI. Правилни полиедри.	Рогљеви	Стране	Ивице
Тетраедар (четворострана пирамида)	4	4	6
Октаедар	6	8	12
Икосаедар	12	20	30
Хексаедар (коцка)	8	6	12
Додекаедар	20	12.	30.

3. Обрасци за површину и запремину.

M = омотач; P = површина; V = запремина; B и b основе; a, b, c ивице; h = висина; s = ивица омотачева; Q = пресек; r и r_1 полупречници основе; R полупречник лопте.

I. Призма.
$$P = 2B + M. \tag{3}$$
$$V = Bh = Qs. \tag{4}$$

Квадар.
$$P = 2(ab + bc + ca). \tag{5}$$
$$V = abc. \tag{6}$$

Коцка
$$P = 6a^2. \tag{7}$$
$$V = a^3. \tag{8}$$

II. Пирамида. $$P = B + M. \tag{9}$$

$$V = \frac{Bh}{3}. \tag{10}$$

Правилан тетраедар. $$P = a^2\sqrt{3}. \tag{11}$$

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}. \tag{12}$$

Зарубљена пирамида. $$P = B + b + M. \tag{13}$$

$$V = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b). \tag{14}$$

III. Октаедар. $$P = 2a^2\sqrt{3}. \tag{15}$$

$$V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}. \tag{16}$$

IV. Додекаедар. $$P = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}. \tag{17}$$

$$V = \frac{a^2}{4}(15 + 7\sqrt{5}). \tag{18}$$

V. Икосаедар. $$P = 5a^2\sqrt{3}. \tag{19}$$

$$V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5}). \tag{20}$$

VI. Ваљак. $$M = 2r\pi h. \tag{21}$$

$$P = 2B + M = 2r\pi(r + h). \tag{22}$$

$$V = r^2\pi h. \tag{23}$$

Ваљкаста цев. $$P = 2B + M + M_1 = 2\pi(r + r_1)(r - r_1 + h). \tag{24}$$

$$V = (r^2 - r_1^2)\pi h. \tag{25}$$

VII. Купа. $$P = B + M = \pi r(r + s). \tag{26}$$

$$M = r\pi s, \quad s = \sqrt{r^2 + h^2}. \tag{27}$$

$$V = \frac{Bh}{3} = \frac{1}{3}r^2\pi h. \tag{28}$$

Зарубљена купа. $$P = B + b + M = \pi[r^2 + r_1^2 + s(r + r_1)]. \tag{29}$$

$$M = \pi s(r + r_1). \tag{30}$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rr_1 + r_1^2). \tag{31}$$

VIII. Лопта. $$P = 4R^2\pi. \tag{32}$$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi. \tag{33}$$

Лоптин појас. $$P = 2R\pi h. \tag{34}$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + 3r_1^2 + h^2). \tag{35}$$

Лоптин одсечак. $$P = 2R\pi h = (r^2 + h^2)\pi. \tag{36}$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \tag{37}$$

Лоптин исечак. $$V = \frac{2}{3}R^2\pi h. \tag{38}$$

4. Гулдин-ова правила.

I. Површина једног обртног тела једнака је производу из дужине линије која обртањем производи површину и дужине путање коју тежиште линије описује.

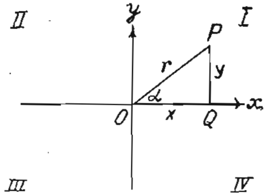
II. Запремина једног обртног тела једнака је производу из површине фигуре која се обрће и дужине путање коју тежиште линије описује.

ТРИГОНОМЕТРИЈА

I
Гониометрија.

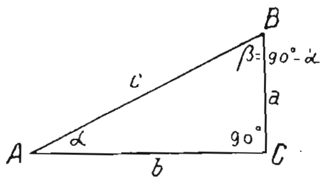
1. Дефиниције тригонометриских функција за ма какав угао.

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{y}{r} & \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y} = \dfrac{1}{\sin\alpha} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} & \sec\alpha = \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \end{cases}$$



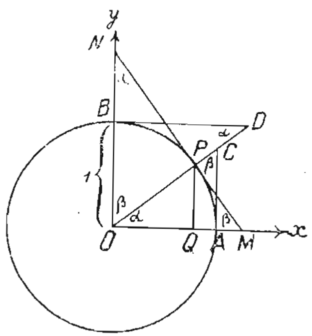
2. Тригонометриске функције комплементних углова.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{c} = \sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha) \\ \dfrac{b}{c} = \cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha) \\ \dfrac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}(90^0 - \alpha) \\ \dfrac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90^0 - \alpha) \\ \dfrac{c}{b} = \sec\alpha = \operatorname{cosec}(90^0 - \alpha) \qquad \dfrac{c}{a} = \operatorname{cosec}\alpha = \sec(90^0 - \alpha). \end{cases}$$



3. Графичко представљање тригонометриских функција.

$$(3)\quad \begin{cases} \sin\alpha = QP = \cos\beta \\ \cos\alpha = OQ = \sin\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = AC = PM = \operatorname{cotg}\beta \\ \operatorname{cotg}\alpha = BD = PN = \operatorname{tg}\beta \\ \sec\alpha = OC = OM = \operatorname{cosec}\beta \\ \operatorname{cosec}\alpha = OD = ON = \sec\beta. \end{cases}$$



4. Знаци триг. функција у појединим квадрантима.

квадрант	I	II	III	IV	
sinus	+	+	—	—	
cosinus	+	—	—	+	(4)
tangens	+	—	+	—	
cotangens	+	—	+	—	

5. Крајње вредности тригонометриских функција.

$\alpha =$	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0	
$\sin\alpha =$	0	1	0	-1	0	
$\cos\alpha =$	1	0	-1	0	1	(5)
$\operatorname{tg}\alpha =$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	
$\operatorname{cotg}\alpha =$	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$.	

6. Односи између триг. функција једног истог угла.

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} \\ \cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1. \quad (7)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (8)$$

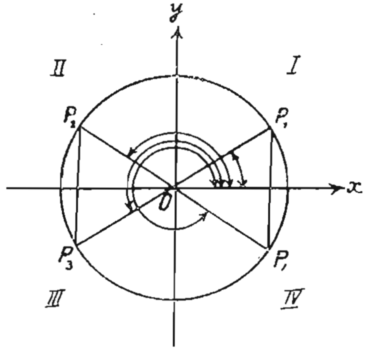
7. Свођење тригонометриских функција углова који су већи од 90° на тригонометриске функције углова испод 90°.

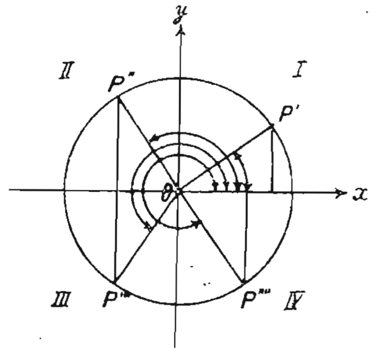
Први начин редукције.

квадрант	II	III	IV	
угао	$180^0 - \alpha$	$180^0 + \alpha$	$360^0 - \alpha$	
sinus	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	
cosinus	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	(9)
tangens	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	
cotangens	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$.	

Други начин редукције.

$$
(10)\qquad \left\{\begin{array}{llll}
\text{квадрант} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\
\text{угао} & 90^0+\alpha & 270^0-\alpha & 270^0+\alpha \\
sinus & \cos\alpha & -\cos\alpha & -\cos\alpha \\
cosinus & -\sin\alpha & -\sin\alpha & \sin\alpha \\
tangens & -\operatorname{cotg}\alpha & \operatorname{cotg}\alpha & -\operatorname{cotg}\alpha \\
cotangens & -\operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\alpha & -\operatorname{tg}\alpha\,.
\end{array}\right.
$$





Констатујемо да је

$$
(11)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\sin\alpha = \sin(180^0-\alpha) \\
\cos\alpha = \cos(360^0-\alpha) \\
\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180^0+\alpha) \\
\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(180^0+\alpha)
\end{array}\right.
$$

тј. да једној истој вредности {синуса, косинуса, тангенте, котангенте} одговарају по две угловне вредности које се {допуњују до {180^0, 360^0}; разликују за 180^0}.

8. Тригонометриске функције негативних углова.

$$
(12)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\
\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\
\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha\,.
\end{array}\right.
$$

9. Тригон. функције збира и разлике двају лукова.

$$
\left.\begin{array}{l}
\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \\
\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}\,.
\end{array}\right\} \qquad (13)
$$

10. Тригон. функције дво- и троструких лукова.

$$
\left.\begin{array}{l}
\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \\
\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}\,.
\end{array}\right\} \qquad (14)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\
\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha} \\
\operatorname{cotg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}^3\alpha}{1-3\operatorname{cotg}^2\alpha}\,.
\end{array}\right\} \qquad (15)
$$

11. Тригон. функције половљених лукова.

$$
\left.\begin{array}{l}
\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\
\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\
\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \\
\operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\,.
\end{array}\right\} \qquad (16)
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right] \\
\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right].
\end{array}\right\} \qquad (17)
$$

12. Претварање збира и разлике триг. функција у производе.

$$(18)\quad \begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\ tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ cotg\,\alpha \pm cotg\,\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}. \end{cases}$$

13. Тригон. функције за неке особене углове.

$$(19)\quad \begin{cases} \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ tg\,45^0 = cotg\,45^0 = 1. \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \\ \cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ tg\,30^0 = cotg\,60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ cotg\,30^0 = tg\,60^0 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ \cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\ tg\,18^0 = cotg\,72^0 = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \\ cotg\,18^0 = tg\,72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

II

Равна Тригонометрија.

14. Пројекциона теорема:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta. \qquad (22)$$

15. Синусна теорема:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \qquad (23)$$

16. Косинусна теорема:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \qquad (24)$$

17. Молвајде-ови обрасци:

$$\left.\begin{aligned} a : b + c &= \cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \\ a : b - c &= \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

18. Тангентна теорема:

$$a + b : a - b = tg\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (26)$$

19. Тангентни обрасци:

$$tg\,\alpha = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma}. \qquad (27)$$

20. Обрасци за израчунавање углова помоћу страна.

$$a + b + c = 2s$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \qquad (28)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \qquad (29)$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \qquad (30)$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (31)$$

21. Обрасци за површину троугла.

(32) $$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha\,.$$

(33) $$P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta+\gamma)}.$$

(34) $$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

22. Обрасци за израчунавање малих промена (грешака) код страна и углова једног троугла.

(35) $$\begin{cases} \dfrac{\Delta a}{a} - \dfrac{\Delta b}{b} = \dfrac{\Delta\alpha}{tg\,\alpha} - \dfrac{\Delta\beta}{tg\,\beta} \\ \dfrac{\Delta b}{b} - \dfrac{\Delta c}{c} = \dfrac{\Delta\beta}{tg\,\beta} - \dfrac{\Delta\gamma}{tg\,\gamma} \\ \dfrac{\Delta c}{c} - \dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta\gamma}{tg\,\gamma} - \dfrac{\Delta\alpha}{tg\,\alpha} \\ \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 0. \end{cases}$$

23. Четири основна задатка за троугао.

I. Дато: a, β, γ. Тражи се: $\alpha, b, c, P, \Delta\alpha, \Delta b, \Delta c$.

1. решење: $$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$$

$$\Delta\alpha = -\Delta\beta - \Delta\gamma$$

$$\Delta b = b\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta\alpha}{tg\,\alpha} + \frac{\Delta\beta}{tg\,\beta}\right)$$

$$\Delta c = c\left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta\alpha}{tg\,\alpha} + \frac{\Delta\gamma}{tg\,\gamma}\right).$$

2. решење:

$$b + c = a \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$b - c = a \sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \quad \text{итд.}$$

II. Дато: b, c, α. Тражи се: $\beta, \gamma, a, P, \Delta\beta\, \Delta\gamma, \Delta a$.

Решење: $$\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$$

$$tg\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot g \frac{\alpha}{2}$$

$$a = (b+c)\cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \quad \text{или} \quad a = (b-c)\sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$\Delta\beta = \frac{\sin\gamma \cdot \Delta b - \sin\beta \cdot \Delta c + b\cos\gamma \cdot \Delta\alpha}{a}$$

$$\Delta\gamma = \frac{\sin\beta \cdot \Delta c - \sin\gamma \cdot \Delta b - c\cos\beta \cdot \Delta\alpha}{a}$$

$$\Delta a = \cos\gamma \cdot \Delta b + \cos\beta \cdot \Delta c + b\sin\gamma \cdot \Delta\alpha.$$

III. Дато: a, b, c. Тражи се: $\alpha, \beta, \gamma, P, \Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$.

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta a - \Delta b \cdot \cos\gamma - \Delta c \cdot \cos\beta}{b \sin\gamma}$$

$$\Delta\beta = \frac{-\Delta a \cdot \cos\gamma + \Delta b - \Delta c \cdot \cos\alpha}{c \sin\alpha}$$

$$\Delta\gamma = \frac{-\Delta a \cdot \cos\beta - \Delta b \cdot \cos\alpha + \Delta c}{a \sin\beta}.$$

IV. Дато: a, b, α. Тражи се: $\beta, \gamma, c, P, \Delta\beta, \Delta\gamma, \Delta c$.

Решење: $$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$$

показује да овај задатак
нема ни једно решење, ако је $a < b\sin\alpha$,
има 1 решење (правоугли троугао), ако је $a = b\sin\alpha$,
има 2 решења, ако је $b\sin\alpha < a < b$,
има 1 решење (равнокраки троугао), ако је $a = b$,
има 1 решење, ако је $a > b$.

Остале троуглове елементе налазимо:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta), \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

$$\Delta\beta = \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a}\right) tg\,\beta + \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}\Delta\alpha$$

$$\Delta\gamma = \left(\frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a}\right) tg\,\beta - \frac{c}{a\cos\beta}\Delta\alpha$$

$$\Delta c = \frac{\Delta a}{\cos\beta} - \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\Delta b - c\,tg\,\beta\,\Delta\alpha.$$

24. Полупречник око троугла описаног круга.

(36) $$R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

(37) $$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

25. Полупречник у троугао уписаног круга.

(38) $$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

(39) $$r = (s-a)\,tg\frac{\alpha}{2}.$$

(40) $$r = a\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

26. Полупречници кругова који додирују једну страну троугла и продужења других двеју страна.

(41) $$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

$$r_a = s \cdot tg\frac{\alpha}{2}. \tag{42}$$

$$r_c = a\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \tag{43}$$

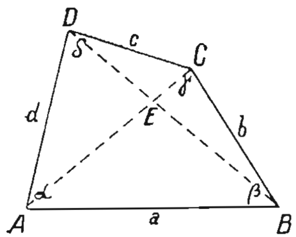
27. Односи између полупречника око троугла описаног круга, полупречника кругова који додирују стране троугла и површине троугла.

$$P = \sqrt{r r_a r_b r_c}. \tag{44}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}. \tag{45}$$

$$R = \frac{1}{4}(r_a + r_b + r_c - r). \tag{46}$$

28. Површина оштег четвороугла.



$$P = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin E. \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(ab\sin\beta + cd\sin\delta) \\ &= \frac{1}{2}(ad\sin\alpha + bc\sin\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

29. Тетивни четвороугао.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^0. \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sin\gamma \\ \sin\beta &= \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \sin\delta. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

$$P = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha. \tag{51}$$

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{52}$$

$$AC \cdot BD = ac + bd. \text{ (\textit{Птоломејева теорема.})} \tag{53}$$

$$\frac{AC}{BD}=\frac{ad+bc}{ab+cd}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{54}$$

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}. \tag{55}$$

$$a+b+c+d=2s.$$

30. Тангентни четвороугао.

$$a+c=b+d. \tag{56}$$

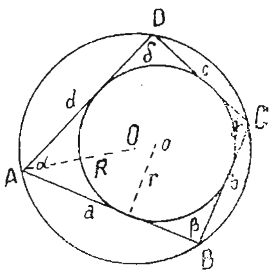
$$P=sr. \tag{57}$$

$$r=\frac{a}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}. \tag{58}$$

$$r=a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{59}$$

31. Кружни четвороугао.

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^0\\ a+c=b+d.\end{cases} \tag{60}$$



$$\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{bc}{ad}}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{cd}{ab}}=\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}.\end{cases} \tag{61}$$

$$P=\sqrt{abcd}. \tag{62}$$

$$r=\frac{\sqrt{abcd}}{a+c}=\frac{\sqrt{abcd}}{b+d}. \tag{63}$$

32. Правилни многоуглы.

a) Обрасци за правилан полигон са уписаним и описаним кругом.

Означимо са

n број страна,
s дужину стране,
p обим (периметар) полигона,
P површину полигона,
r полупречник уписаног круга,
R полупречник описаног круга.

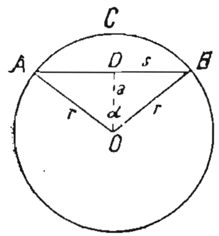
$$\left.\begin{aligned}
s&=2r\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}=2R\sin\frac{180^0}{n}\\
p&=ns=2nr\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}=2nR\sin\frac{180^0}{n}\\
P&=\frac{nsr}{2}=\frac{ns^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}=nr^2\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}=\frac{nR^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}\\
r&=\frac{1}{2}s\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}=R\cos\frac{180^0}{n}\\
R&=\frac{s}{2\sin\frac{180^0}{n}}.
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

b) Обрасци за круг са уписаним и описаним правилним полигоном.

$$s=S\cos\frac{180^0}{n}\quad\text{или}\quad S=\frac{s}{\cos\frac{180^0}{n}}. \tag{65}$$

s је страна полигона од n страна око којег је круг описан, S је страна полигона од n страна у који је круг уписан.

33. Израчунавање линија и углова који су у вези са кругом.



$$\left.\begin{aligned}
s&=2r\sin\frac{\alpha}{2}=2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\\
r&=\frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\\
\sin\frac{\alpha}{2}&=\frac{s}{2r},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{r},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{s}{2a}\\
\operatorname{arc}AB&=2r\pi\frac{\alpha^0}{360^0}=\frac{\pi s}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha^0}{360^0}.
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

34. Кружни исечак (сектор) и кружни одсечак (сегмент).

$$\left.\begin{aligned}
Sk&=\pi r^2\frac{\alpha^0}{360^0}=\frac{r}{2}\operatorname{arc}AB=\frac{r^2}{2}\operatorname{arc}\alpha=\frac{\pi s^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{\alpha^0}{360^0}\\
&=\frac{s\cdot\operatorname{arc}AB}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{s^2}{8\sin^2\frac{\alpha}{2}}\operatorname{arc}\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$(68)\quad \begin{cases} Sg = \dfrac{r}{2}\left(2\pi\dfrac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) = \dfrac{r^2}{2}(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha) \\ \quad = \dfrac{s^2}{8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}(\operatorname{arc}\alpha - \sin\alpha). \end{cases}$$

III

Сферна Тригонометрија.

35. Теореме за сферни троугао.

I. Ако је $a = b$, онда је и $A = B$ и обратно.

II. $b + c > a,\ c + a > b,\ a + b > c.$

III. $a + b + c < 360^0.$

IV. $180^0 < A + B + C < 540^0.$

$$A + B + C - 180^0 = E\ (\text{сферни ексцес})$$

$$0 < E < 360^0$$

$$\frac{E}{2} < A,\quad \frac{E}{2} < B,\quad \frac{E}{2} < C.$$

V. Ако је $a > b$, онда је и $A > B$ и обратно.

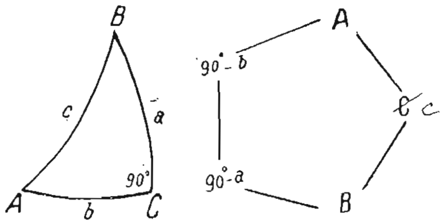
VI. За $a + b \gtreqless 180^0$ јесте и $A + B \gtreqless 180^0$ и обратно.

VII. У правоуглом сферном троуглу ($C = 90^0$) за $a \gtreqless 90^0$ јесте и $A \gtreqless 90^0$ и обратно.

VIII. Случајеви подударности.

1. $a = a',\quad b = b',\quad c = c'.$
2. $A = A',\ B = B',\ C = C'.$
3. $a = a',\quad b = b',\quad C = C'.$
4. $a = a',\ B = B',\ C = C'.$
5. $a = a',\quad b = b',\ A = A',\ B + B' \gtrless 180^0.$
6. $A = A',\ B = B',\ a = a',\quad b + b' \gtrless 180^0.$

36. Непер-ово правило за правоугли сферни троугао. Нека су a, B, c, A, b, нерачунајући прав троугао C, комади једног правоуглог сферног троугла по реду којим следују једно другоме. Ма који од тих комада има два њему *налегла* (*обліжња*) и два од њега *одвојена* (или *супротна*) комада. *Непер*-ово правило гласи: у правоугломе сферном троуглу јесте косинус једног комада једнак производу синуса одвојених комада или раван производу котангената налеглих комада, узев место катета њихове допуне до 90^0.



$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \sin c \sin A = tg\, b\, cotg\, B \\ \sin b &= \sin c \sin B = tg\, a\, cotg\, A \\ \cos c &= \cos a \cos b = cotg\, A\, cotg\, B \\ \cos A &= \cos a \sin B = tg\, b\, cotg\, c \\ \cos B &= \cos b \sin A = tg\, a\, cotg\, c. \end{aligned}\right\}\quad (69)$$

37. Непер-ово правило за троугао у коме је $c = 90^0$.

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \sin C \sin a = tg\, B\, cotg\, b \\ \sin B &= \sin C \sin b = tg\, A\, cotg\, a \\ \cos C &= -\cos A \cos B = -\,cotg\, a\, cotg\, b \\ \cos a &= \cos A \sin b = -\,tg\, B\, cotg\, C \\ \cos b &= \cos B \sin a = -\,tg\, A\, cotg\, C. \end{aligned}\right\}\quad (70)$$

Општи сферни троугао.

38. Синусна теорема:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C. \quad (71)$$

39. Косинусна теорема:

за стране: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ (72)

за углове: $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$ (73)

40. Тангентни обрасци:

за углове:

$$tg\, A = \frac{tg\, a \sin B}{\sin c - tg\, a \cos c \cos B} = \frac{tg\, a \sin C}{\sin b - tg\, a \cos b \cos C} \quad (74)$$

за стране:

$$tg\,a = \frac{tg\,A \sin b}{\sin C + tg\,A \cos C \cos b} = \frac{tg\,A \sin c}{\sin B + tg\,A \cos B \cos c}. \tag{75}$$

41. Обрасци за израчунавање углова помоћу страна.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}. \tag{76}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}. \tag{77}$$

$$tg\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}. \tag{78}$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}. \tag{79}$$

$$a + b + c = 2s$$

42. Обрасци за израчунавање страна помоћу углова.

$$\cos\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}. \tag{80}$$

$$\sin\frac{a}{2}\sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}. \tag{81}$$

$$tg\frac{a}{2} = \cos(S-A)\sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \tag{82}$$

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \sin C}\sqrt{-\cos S \cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}. \tag{83}$$

$$A + B + C = 2S.$$

43. Гаус-ове једначине.

$$\left\{\begin{aligned}
\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}\\
\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}\\
\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}\\
\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{C}{2}.
\end{aligned}\right. \tag{84}$$

44. Непер-ове аналогије.

$$\left.\begin{aligned}
tg\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2} \qquad & tg\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\,cotg\frac{C}{2}\\
tg\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,tg\frac{c}{2} \qquad & tg\frac{A-B}{2} &= \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\,cotg\frac{C}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

45. Површина сферног троугла.

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{E\pi r^2}{180^0}\\
P &= r^2 \,arc\, E.
\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

r је полупречник лопте.

46. Сферни ексцес.

$$tg\frac{E}{2} = \frac{\sin C}{cotg\frac{a}{2}\,cotg\frac{b}{2} + \cos C}. \tag{87}$$

НЗ. Ако је $C = 90^0$ имамо

$$tg\frac{E}{2} = tg\frac{a}{2}\,tg\frac{b}{2}. \tag{88}$$

Lhuilier-ов образац:

$$tg\frac{E}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}\,tg\frac{s-a}{2}\,tg\frac{s-b}{2}\,tg\frac{s-c}{2}}. \tag{89}$$

47. Обрасци за израчунавање малих промена (грешака) код страна и углова сферног троугла.

$$\Delta a = \cos C\,\Delta b + \cos B\,\Delta c + \sin b \sin C\,\Delta A. \tag{90}$$

$$\Delta A = -\cos c\,\Delta B - \cos b\,\Delta C + \sin B \sin c\,\Delta a. \tag{91}$$

$$\frac{\Delta a}{tg\,a} - \frac{\Delta b}{tg\,b} = \frac{\Delta A}{tg\,A} - \frac{\Delta B}{tg\,B}. \tag{92}$$

НЗ. Свака од ових једначина даје још по две аналогне једначине кружним мењањем малих и великих слова.

48. Шест основних задатака за правоугли троугао. Нека је $C = 90^0$.

I. Дато: a, c. Тражи се: b, A, B.

Решење: $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$, $\cos B = tg\, a\, cotg\, c$, па онда

$$\cos A = \cos a \sin B = tg\, b\, cotg\, c \quad \text{или} \quad tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b} = \frac{cotg\, B}{\cos c}$$

$$\left(\text{место: } \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}\right).$$

II. Дато: a, b. Тражи се: c, A, B.

Решење: $\cos c = \cos a \cos b$, $tg\, A = \frac{tg\, a}{\sin b}$, $tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin a}$

или $\cos A = tg\, b\, cotg\, c$, $\cos B = tg\, a\, cotg\, c$.

III. Дато: c, A. Тражи се: a, b, B.

Решење: $tg\, b = tg\, c \cos A$, $tg\, B = \frac{cotg\, A}{\cos c}$, па онда

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos A}{\sin B}, \quad tg\, a = \sin b\, tg\, A = tg\, c \cos B$$

(место: $\sin a = \sin c \sin A$).

IV. Дато: a, B. Тражи се: b, c, A.

Решење: $tg\, b = \sin a\, tg\, B$, $tg\, c = \frac{tg\, a}{\cos B}$, $\cos A = \cos a \sin B$.

V. Дато: A, B. Тражи се: a, b, c.

Решење: $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$, $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$, $\cos c = cotg\, A\, cotg\, B$.

VI. Дато: a, A. Тражи се: b, c, B.

Решење: ма који од непознатих комада израчунавали ми га добијамо синусном функцијом: $\sin b = tg\, a\, cotg\, A$, $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$ и задатак има у опште два решења. Задатак је немогућ, ако није испуњен услов $a \gtreqless 90^0$, $A \gtreqless 90^0$.

Задатак има само једно решење 1. кад је $A > 90^0$, дакле $A + C > 180^0$, па и $a + c > 180^0$, а само једна од вредности за c, које даје формула $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$, одговара услову $a + c > 180^0$ и 2. ако је $A < 90^0$, дакле $A + C < 180^0$, а само једна од добивених вредности за c испуњава услов да је $a + c < 180^0$. — Ако је $A = 90^0$, онда је и $a = 90^0$, па дакле и $c = 90^0$, а по томе $B = b$. У свима осталим случајевима задатак има два решења: два троугла који се допуњују до једног сферног двоугла.

49. Шест основних задатака за општи троугао.

I. Дато: a, b, c. Тражи се: $A, B, C, E, \triangle A, \triangle B, \triangle C$.

НЗ. Да би задатак био у опште могућ мора да је

$$b + c > a, \quad c + a > b, \quad a + b > c, \quad a + b + c < 360^0.$$

Решење. За углове A, B, C имамо (76), (77), (78), (79).

$E = A + B + C - 180^0$ или помоћу (89). Најзад:

$$\triangle A = \frac{\triangle a - \cos C \triangle b - \cos B \triangle c}{\sin b \sin C}$$

$$\triangle B = \frac{\triangle b - \cos A \triangle c - \cos C \triangle a}{\sin c \sin A}$$

$$\triangle C = \frac{\triangle c - \cos B \triangle a - \cos A \triangle b}{\sin a \sin B}.$$

II. Дато: A, B, C. Тражи се: $a, b, c, E, \triangle a, \triangle b, \triangle c$.

НЗ. Задатак је могућ само ако је $180^0 < A + B + C < 540^0$.

Решење. За стране имамо (80), (81), (82), (83).

$$E = A + B + C - 180^0$$

$$\triangle a = \frac{\triangle A + \cos c \triangle B + \cos b \triangle C}{\sin B \sin c}$$

$$\triangle b = \frac{\triangle B + \cos a \triangle C + \cos c \triangle A}{\sin C \sin a}$$

$$\triangle c = \frac{\triangle C + \cos b \triangle A + \cos a \triangle B}{\sin A \sin b}.$$

III. Дато: a, b, C. Тражи се: c, A, B, E, $\triangle c, \triangle A, \triangle B$.

Решење: $$tg\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\, cotg\frac{C}{2},$$

$$tg\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\, cotg\frac{C}{2}, \quad tg\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\, tg\frac{a+b}{2}$$

$E = A + B + C - 180^0$ или помоћу (87).

$$\triangle c = \cos B \triangle a + \cos A \triangle b + \sin a \sin B \triangle C$$

$$\triangle A = \frac{\sin B \triangle a - \cos c \sin A \triangle b - \sin a \cos C \triangle C}{\sin c}$$

$$\triangle B = \frac{\sin A \triangle b - \cos c \sin B \triangle a - \sin b \cos A \triangle C}{\sin c}.$$

IV. Дато: c, A, B. Тражи се: $a, b, C, E, \Delta a, \Delta b, \Delta C$.

Решење: $$tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} tg\frac{c}{2},$$

$$tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} tg\frac{c}{2}, \quad tg\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} cotg\frac{A+B}{2}$$

$$E = A + B + C - 180^\circ.$$

$$\Delta C = -\cos b\,\Delta A - \cos a\,\Delta B + \sin A \sin b\,\Delta c$$

$$\Delta a = \frac{\sin b\,\Delta A + \cos C \sin a\,\Delta B + \sin A \cos b\,\Delta c}{\sin C}$$

$$\Delta b = \frac{\sin a\,\Delta B + \cos C \sin b\,\Delta A + \sin B \cos a\,\Delta c}{\sin C}.$$

V. Дато: a, b, A. Траже се остали елементи.

Решење. Пошто први комад налазимо синусом

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}\sin A$$

задатак има у опште два решења, а може имати и само једно, па немати и ниједно решење. Задатак је неодређен:

1. кад је $a + b > 180^0$, $A > 90^0$, $a > b$ и
2. кад је $a + b < 180^0$, $A < 90^0$, $a < b$.

У сваком другом случају задатак је одређен или немогућ. C и c добијамо помоћу (85). Најзад:

$$\Delta c = \frac{\Delta a - \cos C\,\Delta b - \sin b \sin C\,\Delta A}{\cos B}$$

$$\Delta B = \left(\frac{\Delta A}{tg A} - \frac{\Delta a}{tg a} + \frac{\Delta b}{tg b}\right) tg B$$

$$\Delta C = \frac{\sin B\,\Delta a - \sin A \cos c\,\Delta b - \sin c\,\Delta A}{\sin a \cos B}.$$

VI. Дато: A, B, a. Траже се остали елементи.

Решење. $$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A}\sin a.$$

Задатак има два решења само у ова два случаја:

1. кад је $A + B > 180^0$, $a > 90^0$, $A > B$ и
2. кад је $A + B < 180^0$, $a < 90^0$, $A < B$.

Задатак је иначе одређен или је немогућ.

$$\Delta C = \frac{-\Delta A - \cos c\,\Delta B + \sin B \sin c\,\Delta a}{\cos b}$$

$$\Delta b = \left(\frac{\Delta a}{tg a} - \frac{\Delta A}{tg A} + \frac{\Delta B}{tg B}\right) tg b$$

$$\Delta c = \frac{-\sin b\,\Delta A - \sin a \cos C\,\Delta B + \sin C\,\Delta a}{\sin A \cos b}.$$

50. Лежандр-ова теорема. У колико су стране сферног троугла мање наспрам полупречника лопте у толико се пре може заменити сферни троугао a, b, c, A, B, C равним троуглом a, b, c, $\alpha = A - \frac{E}{3}$, $\beta = B - \frac{E}{3}$, $\gamma = C - \frac{E}{3}$.

51. Полупречник око троугла описаног круга.

$$tg R = \frac{tg\frac{a}{2}}{\cos(S - A)}. \tag{93}$$

$$tg R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}. \tag{94}$$

$$tg R = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin A}. \tag{95}$$

$$tg R = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}. \tag{96}$$

52. Полупречник у троугао уписаног круга.

$$tg\,r = \sin(s-a)\,tg\frac{A}{2}. \tag{97}$$

$$tg\,r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}. \tag{98}$$

$$tg\,r = \frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin a}{\cos\frac{A}{2}}. \tag{99}$$

$$tg\,r = \frac{\sqrt{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}. \tag{100}$$

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА У РАВНИ

I

Методе.

1. Тумачење једначина. I. Свака једначина $F(x,y)=0$ представља у координатној системи xy извесну линију и зове се *једначина линије*.

II. Тачка $x_1 y_1$ лежи на линији $F(x,y)=0$, ако је $F(x_1,y_1)=0$. Линија пролази кроз почетак координата ($x=0$, $y=0$), ако у њеној једначини нема сталног члана.

III. Две једначине $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$ дају тачке пресека двеју линија.

$F(x,y)=0$, $y=0$ даје пресек линије са x-осом.

$F(x,y)=0$, $x=0$ „ „ „ „ y-осом.

IV. Једначина $F_1(x,y)\pm\lambda F_2(x,y)=0$ припада свима линијама које пролазе кроз пресек линија $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$.

II

Тачке у равни.

2. Теорема. Алгебарски збир пројекција свих страна једног полигона на коју било праву линију раван је нули.

3. Опште трансформационе једначине за паралелне координате.

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{X\sin(X,y) - Y\sin(Y,y)}{\sin(x,y)} \\[2ex] y = b + \dfrac{X\sin(X,x) + Y\sin(Y,x)}{\sin(x,y)}, \end{cases}$$

где су a, b координате почетка системе X, Y у односу према системи x, y.

НЗ. Трансформовањем *ступањ* алгебарских једначина се *не мења*.

4. Трансформација паралелних координата у поларне и обратно.

I. Претварање паралелних координата x, y у поларне ρ, φ са истим почетком:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\frac{\sin(\vartheta-\alpha-\varphi)}{\sin\vartheta} \\ y &= \rho\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\vartheta}. \end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

Овде је $\vartheta = \sphericalangle(x,y)$, α угао који поларна оса чини са x-осом.

II. Претварање поларних координата у паралелне са истим почетком

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\vartheta} \\ tg(\alpha+\varphi) &= \frac{y\sin\vartheta}{x+y\cos\vartheta}. \end{aligned}\right\}\qquad (3)$$

5. Растојање двеју тачака (x_1,y_1) и (x_2,y_2)

за косоугле координате
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\vartheta}$$
за правоугле координате $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

„ поларне „ $d=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$. (4)

6. Дељење дужи P_1P_2 тачком (x,y) по размери $m_1 : m_2$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 \pm m_2x_2}{m_1+m_2} \\ y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}. \end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

Десно треба узети знак $+$ за унутрашњу, знак $-$ за спољашњу поделу.

Координате средине једне дужи једнаке су аритметичкој средини из координата крајних тачака:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1+x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1+y_2}{2}. \end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

7. **Површина троугла** са теменима (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

(7) $$\triangle = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\vartheta,$$

где ϑ означава коорд. угао.

III

Линије првога степена.
(Права линија.)

8. Свака једначина првога степена представља једну праву линију и обратно: једначина праве линије навек је првог степена.

9. **Разни видови једначине праве линије.**

I. Општа форма:

(8) $$Ax + By + C = 0.$$

Ако је $A = 0$ права је // са x-осом.
„ „ $B = 0$ „ „ „ „ y-осом.
„ „ $C = 0$ права пролази кроз коор. почетак. $x = 0$ је једначина y-осе; $y = 0$ је једначина x-осе.

II. Друга форма:

(9) $$y = mx + b.$$

У косоуглој системи је *угловни сачинитељ*

(10) $$m = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

а у правоуглој

(10a) $$m = tg\,\alpha.$$

Овде су α, β углови које права заклапа са x- и y-осом. Количина b је дуж коју праву одсеца на y-оси.

III. Трећа форма:

(11) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

a и b јесу дужи које права одсеца на x- и на y-оси.

IV. *Нормални облик:*
за косоуглу систему

(12) $$x\cos\mu + y\cos\nu = p,$$

а за правоуглу

$$x\cos\mu + y\sin\mu = p. \qquad (12a)$$

p је дужина нормале спуштена из почетка на праву, μ и ν углови које нормала чини са коорд. осама.

V. Претварање опште форме (8) у форме (9), (11), (12) и (12a).

$$m = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}. \qquad (13)$$

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}. \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\mu &= \frac{A\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}}, \quad \cos\nu = \frac{B\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}}, \\ -p &= \frac{C\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Ако је } \vartheta = 90^0, \quad \cos\mu &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ -p &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (15a)$$

10. **Основни проблеми.** I. Једначина праве која пролази кроз тачку (x_1, y_1), а има правац одређен сачинитељем m:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (16)$$

II. Једначина праве која пролази кроз тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\left.\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ \text{или} \quad &\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

НЗ. Ово исказује услов да три тачке (x, y), (x_1, y_1) и (x_2, y_2) леже на истој правој.

III. Одстојање d тачке (x_1, y_1) од једне задате праве у косоуглој системи:

$$\left.\begin{aligned} d &= \pm(x_1\cos\mu + y_1\cos\nu - p) \\ d &= \frac{(Ax_1 + By_1 + C)\sin\vartheta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\vartheta}} \\ d &= \frac{(y_1 - mx_1 - b)\sin\vartheta}{\sqrt{1 + 2m\cos\vartheta + m^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

у правоуглој системи:

$$(18a)\qquad \begin{cases} d = \pm\,(x_1 \cos\mu + y_1 \sin\mu - p) \\ d = \dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ d = \dfrac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{1+m^2}}, \end{cases}$$

према томе да ли је једначина праве дата у форми (12), (8) или (9).

IV. Координате пресечне тачке правих

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

јесу

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \\ y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Праве се не секу (јесу //), ако је $A_1 : A_2 = B_1 : B_2$.

V. За угао ω, који заклапају две праве, јесте

(20) у косоуглој системи: $tg\,\omega = \pm\dfrac{(m_2 - m_1)\sin\vartheta}{1 + (m_1 + m_2)\cos\vartheta + m_1 m_2}$,

(20a) у правоуглој системи: $tg\,\omega = \pm\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$.

Праве су нормалне, ако је

(21) $1 + (m_1 + m_2)\cos\vartheta + m_1 m_2 = 0$ (за косоугле коор.)

(21a) $1 + m_1 m_2 = 0$ или $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$ (за правоугле коор.)

VI. Једначине праве која пролази кроз тачку (x_1, y_1) и са правом $y = m_1 x + b$ заклапа угао φ:

(22) $y - y_1 = \dfrac{m_1 - tg\,\varphi}{1 + m_1\,tg\,\varphi}(x - x_1)$ (за правоугле коор.)

VII. Једначина праве која пролази кроз тачку (x_1, y_1) и стоји $\perp$ на правој $y = m_1 x + b$

(23) $y - y_1 = -\dfrac{1}{m_1}(x - x_1)$ (за правоугле коор.)

11. Услов под којим се три праве секу у истој тачци:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (24)$$

12. Скраћено бележење по Пликер-у. Нека су $l_1 = 0$ и $l_2 = 0$ једначине двеју правих у нормалној форми. Једначина $l_1 - kl_2 = 0$ представља све могуће праве (*зрачни сноп*) који полази из пресечне тачке оних двеју правих, узев све могуће вредности за $k = \dfrac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)}$.

Четири праве, које се секу у истој тачци, могу да се представе једначинама

$$l_1 = 0 \qquad l_1 - k_1 l_2 = 0$$
$$l_2 = 0 \qquad l_1 - k_2 l_2 = 0.$$

Количник $\dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \dfrac{\sin(ad)}{\sin(db)} = (a, b, c, d)$ зове се (по *Мебиус-у*) *двојна размера* или *анхармонична размера* снопа правих a, b, c, d.

Ако је $k_1 : k_2 = -1$, онда је сноп *хармониски*. Једначине правих јесу тада

$$l_1 = 0 \qquad l_1 - k_1 l_2 = 0$$
$$l_2 = 0 \qquad l_1 + k_1 l_2 = 0.$$

Два снопа, за које је двојна размера четири зрака једнога снопа једнака двојној размери одговарајућа четири зрака другог снопа, зову се *пројективна*.

IV

Линије другога степена.

13. Дискусија опште једначине другога степена

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (25)$$

Ова се једначина раствара на две линеарне једначине ако је

$$D(BD - CE) + E(AE - CD) + F(C^2 - AB) = 0$$

и представља кад је
$C^2 - AB < 0$ једну тачку,
$C^2 - AB > 0$ две секуће се праве линије,
$C^2 - AB = 0$ две паралелне праве или никакав геометриски облик.

Праве линије, које полове један низ паралелних тетива, зову се *пречници*.

Једначина пречника који полови тетива у правцу m јесте

$$Ax + Cy + D + m(Cx + By + E) = 0. \tag{26}$$

Два пречника, од којих сваки полови тетива паралелна оном другом, зову се *спрегнути* (*коњуговани*) *пречници*.

Угловни сачинитељи m_1 и m_2 два коњугована пречника везани су једначином

$$A + C(m_1 + m_2) + Bm_1m_2 = 0. \tag{27}$$

Онај спрег коњугованих пречника, који се сече под правим углом, зовемо *главним осама* линије.

Пречници линија другога степена или се *секу сви* у истој тачци (*средишту*) или су // међусобом.

Координате средишта:

$$u = \frac{BD - CE}{C^2 - AB}, \quad v = \frac{AE - CD}{C^2 - AB}. \tag{28}$$

Једначина другога степена (која се не раствара на две линеарне једначине) представља

$$\begin{cases} \text{елипсу (у извесном случају и круг), ако је } C^2 - AB < 0, \\ \text{хиперболу} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{„ „ } C^2 - AB > 0, \\ \text{параболу} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{„ „ } C^2 - AB = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Прве две линије су *са*, трећа *без* средишта.

14. Круг. I. Општа једначина круга у косоуглој системи:

$$\begin{cases} Ax^2 + Ay^2 + 2Axy\cos\vartheta + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad \text{или} \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + 2(x-a)(y-b)\cos\vartheta = r^2, \end{cases} \tag{30}$$

где су a, b координате средишта, r полупречник, ϑ координатни угао

$$\begin{cases} a = \dfrac{E\cos\vartheta - D}{A\sin^2\vartheta}, \quad b = \dfrac{D\cos\vartheta - E}{A\sin^2\vartheta} \\ r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 2DE\cos\vartheta - AF\sin^2\vartheta}}{A\sin\vartheta}. \end{cases} \tag{31}$$

У правоуглој системи имамо једначине и обрасце:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{E}{A}, \quad r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - AF}}{A}. \tag{31a}$$

Средишна једначина круга:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{32}$$

II. Једначина тангенте у тачци ξ, η

$$\xi x + \eta y = r^2. \tag{33}$$

Конструкција тангенте у тачци (ξ, η): угловни сачинитељ тангенте $= -\frac{\xi}{\eta}$, а угловни сачинитељ полупречника у додирној тачци $= \frac{\eta}{\xi}$, дакле тангента $\perp$ на полупречнику.

Координате додирних тачака тангенте у правцу m:

$$\xi = \frac{mr}{\pm\sqrt{1+m^2}}, \qquad \eta = \frac{r}{\mp\sqrt{1+m^2}}.$$

Координате додирних тачака за тангенте из тачке (X, Y):

$$\xi = \frac{r^2X \pm rY\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{X^2 + Y^2}, \qquad \eta = \frac{r^2Y \mp rX\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{X^2 + Y^2}.$$

III. Једначина поларе тачке (пола) X, Y у односу на круг $x^2 + y^2 = r^2$

$$Xx + Yy = r^2. \tag{34}$$

(О овоме види Планим. пол и полара.)

15. Једно опште својство линија другога степена. Геометриско место тачака, чија одстојања од једне сталне праве (*директрисе*) и једне задате тачке (*жиже*) стоје у константном односу, нпр. $1 : \epsilon$ (ϵ је *бројни ексцентрицитет*), јесте линија другога степена. Једначина геометриског места, доведена на форму

$$y^2 = 2px - (1 - \epsilon^2)x^2, \tag{35}$$

представља елипсу, ако је $\epsilon < 1$
хиперболу, „ „ $\epsilon > 1$
параболу, „ „ $\epsilon = 1$.

p (ордината у жижи) зове се *параметар*.

Код елипсе ($\epsilon < 1$) јесте $a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$.

Код хиперболе ($\epsilon > 1$) јесте $a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}$.
a и b јесу главне полуосе.

16. Елипса. I. Средишна једначина елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{36}$$

II. Конструкције елипсе. 1. помоћу два концентрична круга са полупречницима a и b.

2. помоћу *елиптичног шестара*, разлагањем једначине елипсе на $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, где је φ такозвана *екцентрична аномалија*.

3. помоћу правоугаоника са странама $2a$ и $2b$.

4. помоћу паралелограма из једног спрега коњугованих пречника и угла који они заклапају.

5. помоћу конца, а на основу тога што је збир одстојања ма које елипсине тачке од жижа (збир фокалних зракова r_1 и r_2) константно = великој оси:

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{37}$$

III. Одстојање жиже од средишта $= c$ зове се *линеарни екцентрицитет*:

$$\epsilon = \frac{c}{a}. \tag{38}$$

Конструктивно одређивање жижа (дужи c) базира на

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{39}$$

Конструкција директриса помоћу пропорције:

$$\gamma : a = a : c, \tag{40}$$

где је γ = одстојању директрисе од средишта.

IV. Једначина елипсе у системи једног спрега коњугованих пречника:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{41}$$

Аполоније-ве теореме:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2. \tag{42}$$

$$a_1 b_1 \sin\alpha = ab. \tag{43}$$

Ово значи да су паралелограми, конструисани из два спрегнута пречника и угла који они заклапају, једнаки по површини и сви = правоугаонику из главних оса.

Дијагонале паралелограма, који је конструисан из два коњугована пречника, падају у правац два коњугована пречника.

Коњуговани пречници у правцу дијагонала правоугаоника из главних оса јесу једнаки:

$$a_0^2 = b_0^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}. \tag{44}$$

За коњугациони угао α_0 једнаких спрегнутих пречника јесте

$$\sin\alpha_0 = \frac{2ab}{a^2+b^2}, \; \cos\alpha_0 = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}. \tag{45}$$

Једначина елипсе у системи једнаких коњугованих пречника:

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{a_0^2} = 1 \text{ или } x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2}. \tag{46}$$

Два тетива, која полазе из једне тачке на елипси и свршавају се у крајним тачкама једног пречника, зову се *суплементна тетива*.

Два суплементна тетива јесу // са два коњугована пречника.

Примена на конструктивно одређивање главних оса као коњугованих пречника који су $\perp$ један према другом.

V. Збир квадрата реципрочних вредности два нормална полупречника константан је:

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{47}$$

VI. Једначина тангенте у тачци (ξ, η):

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\eta y}{b^2} = 1. \tag{48}$$

Једначина нормале у тачци (ξ, η):

$$y - \eta = \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi}(x - \xi). \tag{49}$$

Конструкције дирке. 1. Пројекција жиже на тангенту пада на периферију круга који је описан из средишта полупречником a (*главни круг*). Примена: повући тангенту α) у тачци на елипси; β) у задатоме правцу; γ) из једне тачке изван елипсе.

2. Тангента елипсе и тангента на главни круг у тачкама са једнаком апсцисом секу се у истој тачци на x-оси. Примена: повући дирку у тачци на елипси.

3. Тангента је // са пречником који је спрегнут пречнику који пролази кроз додирну тачку. Примена: да се конструише дирка α) у тачци на елипси; β) у задатоме правцу.

4. Жижни зраци чине са тангентом у додирној тачци једнаке углове. Примена: конструкције дирке α) у тачци елипсе; β) из једне тачке изван елипсе.

17. Хипербола. I. Једначина хиперболе у системи њених главних оса:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{50}$$

Једначине њених *асимйшоша:*

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{51}$$

За *асимйшошни угао* ω јесте:

$$\cos\frac{\omega}{2}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\frac{\omega}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad tg\frac{\omega}{2}=\frac{b}{a}. \tag{52}$$

Сйрегнуше хийерболе:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ и } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{53}$$

имају заједничке асимптоте.

Равнострана или равнокрака хипербола:

$$x^2-y^2=a^2. \tag{54}$$

II. Конструкције хиперболе. 1. Разлагањем једначине на $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, $y=b\,tg\,\varphi$.

2. Помоћу правоугаоника из главних оса.

3. Помоћу паралелограма који је образован из два коњугована пречника и њиховог коњугационог угла.

4. На основу тога што је разлика фокалних зракова за сваку тачку на хиперболи константна

$$r_2-r_1=2a. \tag{55}$$

5. Конструкција хиперболе помоћу асимптота и једне хиперболине тачке основана на томе да дужи између пресечних тачака једне праве и хиперболе и пресечних тачака исте праве и асимптота имају исту средину.

III. Као код елипсе и овде је

$$\epsilon=\frac{c}{a}. \tag{56}$$

За одређивање жижа (линеарног ексцентрицитета c) имамо:

$$c^2=a^2+b^2. \tag{57}$$

Конструкција директриса помоћу пропорције

$$\gamma:a=a:c, \tag{58}$$

где је γ = одстојању директрисе од средишта.

IV. Једначина хиперболе у системи два коњугована пречника:

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1. \tag{59}$$

Аполоније-ве теореме:

$$a_1^2-b_1^2=a^2-b^2. \tag{60}$$

$$a_1b_1\sin\alpha=ab. \tag{61}$$

Разнострана хипербола нема једнаких спрегнутих пречника. Код равнокраке хиперболе спрегнути пречници су увек једнаки.

За суплементна тетива и конструкцију главних оса важи исто као и за елипсу.

Темена свију паралелограма, који су конструисани из коњугованих пречника и њиховог угла, као и темена правоугаоника из главних оса, леже на асимптотама.

Асимптоте равнокраке хиперболе полове све коњугационе углове.

V. Једначина тангенте у тачци (ξ,η):

$$\frac{\xi x}{a^2}-\frac{\eta y}{b^2}=1. \tag{62}$$

Једначина нормале у тачци (ξ,η):

$$y-\eta=-\frac{a^2\eta}{b^2\xi}(x-\xi). \tag{63}$$

Конструкције тангенте. 1. Пројекција жиже на тангенту пада на периферију круга који је описан из средишта хиперболе са полупречником a. Примена: повући дирку α) у једној тачци. хиперболе; β) у задатоме правцу; γ) из једне тачке изван хиперболе

2. Тангента је // са пречником који је коњугован пречнику у додирној тачци. Примена: повући дирку α) у једној тачци на хиперболи; β) у задатоме правцу.

3. Тангента полови угао који заклапају фокални зраци у додирној тачци. Примена: конструисати дирку α) у тачци на хиперболи; β) из тачке изван хиперболе.

VI. Једначина хиперболе у системи њених асимптота:

$$xy = \frac{c^2}{4}. \tag{64}$$

Паралелограми, конструисани из координата ма које тачке на хиперболи и координатног (асимптотног) угла, једнаки су по површини.

18. Парабола. I. Темена једначина параболе:

$$y^2 = 2px. \tag{65}$$

Конструкције параболе. 1. Помоћу пропорције

$$2x : y = y : p.$$

2. Разлагањем једначине параболе на

$$y = x\,tg\,\varphi, \quad y = 2p\,cotg\,\varphi.$$

II. Једначина тангенте у тачци (ξ, η):

$$\eta y = p(x + \xi). \tag{66}$$

Једначина нормале у тачци (ξ, η):

$$y - \eta = -\frac{\eta}{p}(x - \xi). \tag{67}$$

Конструкције тангенте. 1. Пројекција жиже на тангенту пада *на* y-осу. Примена: повући дирку α) у тачци на параболи; β) у задатом правцу; γ) из једне тачке изван параболе.

2. *Подтангента*, а то је пројекција комада тангенте између додирне тачке и пресечне тачке дирке са x-осом, на x-оси, пољовљена је теменом параболе. — *Поднормала*, а то је пројекција комада нормале између додирне тачке и пресека нормале са x-осом, на x-оси једнака је параметру p. — Ово двоје може да послужи за конструкцију тангенте и нормале у тачци на параболи.

3. Угли, које чини тангента са жижним зраком додирне тачке и са x-осом једнаки су. Примена код конструкције дирке у тачци на параболи.

4. Пречници параболе (који су сви // међусобом) полове тетива у правцу тангенте која је повучена у крајњој тачци пречника. Примена: повући тангенту α) у тачци на параболи; β) у задатом правцу.

19. Елиптичне координате. Линије другог степена које имају заједничке жиже зову се *конфокалне*. Конфокалне елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} = 1, \qquad a^2 > u < b^2. \tag{68}$$

Конфокалне хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2 - v} - \frac{y^2}{v - b^2} = 1, \qquad a^2 > v > b^2. \tag{69}$$

Конфокалне елипсе и конфокалне хиперболе секу се узајамно под правим углом.

$$x^2 = \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{a^2 - b^2}, \quad y^2 = \frac{(b^2 - u)(v - b^2)}{a^2 - b^2}. \tag{70}$$

u, v зовемо *елиптичним координатама.*

20. Тангента и полара. Општа једначина за све линије другог степена:

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Једначина тангенте у тачци ξ, η

$$(A\xi + C\eta + D)x + (C\xi + B\eta + E)y + D\xi + E\eta + F = 0. \tag{71}$$

Једначина поларе за тачку X, Y

$$(AX + CY + D)x + (CX + BY + E)y + DX + EY + F = 0. \tag{72}$$

Полара s пресечне тачке S двеју правих s_1 и s_2 пролази кроз полове S_1 и S_2 тих правих. Обратно: пол S праве s, која пролази кроз тачке S_1 и S_2 лежи у пресечној тачци полара s_1 и s_2 тих тачака.

Опште: поларе тачака једне праве s секу се све у истој тачци (полу праве s) и обратно: полови правих које се секу у тачци S леже на једној правој (полари тачке S).

21. Реципрочно-поларне фигуре. Две фигуре, које стоје у таквом односу да свакој тачци S и свакој правој σ једне фигуре одговара, као полара односно пол, извесна права s, односно тачка Σ у другој фигури, зовемо *реципрочно-поларним фигурама.*

Ако разумемо под *степеном* (или *редом*) једне алгебарске линије број тачака у којима права линија може сећи ту линију, а под *класом* највећи број тангената, које се из једне тачке могу повући на линију, онда следује да је степен једне алгебарске линије једнак са класом њене реципрочно-поларне линије.

V

Алгебарске линије вишег степена.

22. Цисоида:

(73) $$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2r - x}}$$

или

(73*a*) $$\rho = 2r \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

1. Линија је симетрична у односу према x-оси.
2. Линија се простире између y-осе и једне у одстојању $2r$ са y-осом // праве.
3. права линија $x = 2r$ је асимптота.

23. Строфоида. Коса строфоида:

(74) $$x^3 + xy(y + 2x\cos\vartheta) - a(x^2 - y^2).$$

Права строфоида:

(74*a*) $$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0 \quad \text{или} \quad y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}},$$

а у поларним координатама

(74*b*) $$\rho = a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

Права строфоида:

1. симетрична је у односу према x-оси.
2. простире се између паралелних $x = + a$ и $x = - a$.
3. свршава се у тачци $x = + a, y = 0$. Права $x = - a$ је асимптота.
4. у тачци 0 има две тангенте које са x-осом чине угао од $\pm 45^0$ и стоје $\perp$ једна на другој.
5. онај део са позитивним апсцисама затворен је.

24. Декартов лист:

$$x^3 + y^3 - axy = 0. \tag{75}$$

1. линија је симетрична у односу према правој која полази из почетка 0 под углом од 45^0.
2. онај део линије са позитивним апсцисама затворен је.
3. права $x + y + \frac{a}{3} = 0$ је асимптота.

25. Најлова парабола:

$$y^2 = Ax^3. \tag{76}$$

1. линија је симетрична у односу према x-оси.
2. линија се простире од $x = 0$ па до $x = + \infty$.
3. x оса је тангента линије у тачци 0.

26. Паскалова линија:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2) \tag{77}$$

или

$$\rho = a\cos\varphi \pm b. \tag{77a}$$

Спољашна форма линије зависи у многоме од тога да ли је $a \gtreqless b$. У случају $a = b$ линија се зове *кардиоида.*

27. Касиниева линија:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = c^2. \tag{78}$$

Линија је свршена и симетрична је у односу према x- и y-оси. Иначе облик линије зависи битно од односне вредности константата a и c. За $a = \sqrt{c}$ линија се зове *лемнискатa:*

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \tag{79}$$

или

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi. \tag{79a}$$

Линија изгледа као положена осмица (∞). У почетку координата линија има две тангенте под углом од $\pm 45^0$ према x-оси.

28. Конхоида:

$$x = \pm \frac{y + a}{y} \sqrt{b^2 - y^2}. \tag{80}$$

1. линија је симетрична у односу према коорд. осама.
2. састоји се из два дела које x-оса асимптотно додирује.

Изглед доњег дела знатно зависи од тога да ли је $a \lesseqgtr b$.

29. Параболичне линије:

(81) $$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n.$$

Најважнији је проблем овде да се определи пароболична линија која пролази кроз известан број задатих тачака, а то значи одредити целу и рационалну функцију, која за извесне вредности њене променљиве добија одређене вредности. Решење даје *Лагранж*-ова интерполациона формула (в. Ар. и Алг. чл. 42.).

VI

Трансцендентне линије.

30. Логаритамска линија:

(82) $$y = a^x \quad \text{или} \quad x = log^{(a)} y.$$

1. линија се простире у бесконачност и то у смислу позитивних ордината.
2. x-оса је асимптота.

31. Ланчаница:

(83) $$y = m\frac{e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}}{2}.$$

1. линија се простире у бесконачност и то у смислу позитивних ордината.
2. линија је симетрична у односу према y-оси.

32. Архимедова (линеарна) спирала:

(84) $$\rho = a\varphi \qquad (a > 0)$$

1. линија полази из пола 0.
2. простире се по целој равни.
3. састоји се из два дела симетрична у односу према нормали на поларној оси.
4. одстојање завијутака је константно $= 2a\pi$.
5. x-оса је тангента у полу.

33. Хиперболична (реципрочна) спирала:

(85) $$\rho\varphi = a \qquad (a > 0)$$

1. Линија се састоји из две половине од којих једна произилази из друге обртањем за 180^0 око нормале на x-оси у полу.

2. пол је *асимптотна тачка* којој се спирала непрекидно приближује, али је не достиже.
3. завијутци расту са удалењем од пола.
4. права // са x-осом у одстојању a је асимптота.

34. Параболична спирала:

$$\rho^2 = 2p\varphi. \tag{86}$$

1. линија пролази кроз пол.
2. састоји се из два дела од којих један произилази из другог обртањем за 180^0 око x-осе и око нормале на овој у тачци 0.
3. завијутци се са одстојањем од пола све више један другом приближују.

35. Логаритамска спирала:

$$\rho = a^{\varphi} \quad \text{или} \quad \varphi = log^{(a)} \rho. \tag{87}$$

1. пол је асимптотна тачка.
2. завијутци се удаљавају са одстојањем од пола.

36. Проста циклоида:

$$x = a(\omega - sin\,\omega), \; y = a(1 - cos\,\omega) \tag{88}$$

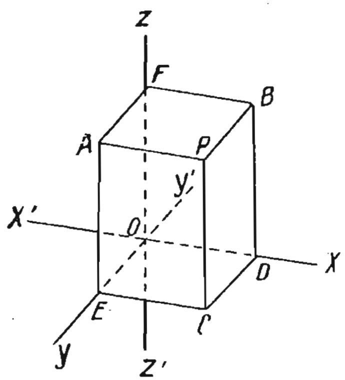
или

$$x = a\,arc\,cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}. \tag{88a}$$

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА У ПРОСТОРУ

I
Методе.

1. Паралелне координате. Тачка P у простору, као пресек трију (покретних) равни PD, PE и PF, које су појединце // са (сталним) *координатним равнима* YOZ, ZOX и XOY, одређена је дужима $OD = x$ (*апсциси*), $OE = y$ (*ордината*) и $OF = z$ (*апликата*), које почињемо да бројимо од *координатног почетка* O и меримо их на *координатним осама* $X'X$, $Y'Y$, $Z'Z$, узевши их са знаком $+$ или $-$ према томе да ли се узимају у правцу OX, OY, OZ, или у супротном правцу OX', OY', OZ'. Вредности ових *праволиниских* или *паралелних координата* x, y, z крећу се од $-\infty$ до $+\infty$.



Ако се коорд. равни, па дакле и коорд. осе, секу под правим углом, систем се зове *правоугла* или *ортогонална*; у противном случају *косоугла*.

За тачке у коорд. равни YOZ је $x = 0$,
„ „ „ „ „ ZOX „ $y = 0$,
„ „ „ „ „ XOY „ $z = 0$.
За тачке на оси $X'X$ је $y = z = 0$,
„ „ „ „ $Y'Y$ „ $z = x = 0$,
„ „ „ „ $Z'Z$ „ $x = y = 0$.
У почетку O је $x = y = z = 0$.

2. Теореме о пројекцијама. Тачке A, B, C у којима праве PA, PB, PC, повучене из P // са коорд. осама, продиру коорд. равни, зову се *пројекције* тачке P на коорд. равни. Тачке D, E, F, као тачке продора појединих оса са равнима, које пролазе кроз

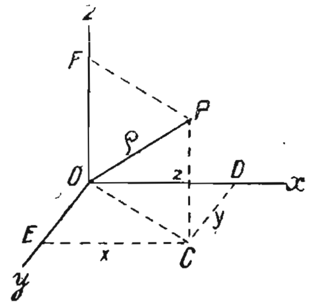
P, а // су са коор. равнима других двеју оса, представљају пројекције тачке P на коор. осама.

У следећем подразумеваћемо ортогоналне пројекције и ортогоналне координате.

I. Теорема. Пројекција једне дужи на раван равна је производу дужи и косинуса угла који дуж чини са равни.

II. Теорема. Пројекција једне дужи на какву праву једнака је производу дужи и косинуса угла који дуж заклапа са правом.

III. Примена. Означимо са α, β, γ углове које *потега* ρ тачке P чини са коорд. осама.



$$x = \rho \cos\alpha, \quad y = \rho\cos\beta, \quad z = \rho\cos\gamma. \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\rho}. \tag{1a}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3}$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2. \tag{3a}$$

IV. Примена. Узмимо две тачке $P_1(x_1 y_1 z_1)$ и $P_2(x_2 y_2 z_2)$ и ставимо $P_1 P_2 = d$. Нека су α, β, γ углови које d чини са коорд. осама.

$$x_2 - x_1 = d\cos\alpha, \quad y_2 - y_1 = d\cos\beta, \quad z_2 - z_1 = d\cos\gamma. \tag{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}. \tag{4a}$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \tag{5}$$

V. Теорема. Алгебарски збир пројекција страна $s_1, s_2, \ldots s_n$ једнога полигона на ма какву праву g раван је нули:

$$\sum_{k=1}^{k=n} s_k \cos(s_k, g) = 0.$$

Примена на полигон $ODCPO$:

$$\rho\cos(\rho, g) = x\cos(x, g) + y\cos(y, g) + z\cos(z, g). \tag{6}$$

$$\rho = x\cos(x, \rho) + y\cos(y, \rho) + z\cos(z, \rho).$$

VI. Теорема. Пројекција једне равне фигуре на какву раван једнака је производу фигуре и косинуса угла које те две равни заклапају.

Означимо са F_1, F_2, F_3 пројекције фигуре F на три нормалне (нпр. координатне) равни, са α, β, γ углове које F чини са тим равнима. Тада је

(7) $$\begin{cases} F_1 = F\cos\alpha, \quad F_2 = F\cos\beta, \quad F_3 = F\cos\gamma. \\ F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2. \end{cases}$$

3. Координате тачке која дели дуж $P_1 P_2$ по размери $u : v$

(8) $$x = \frac{ux_1 + vx_2}{u+v}, \quad y = \frac{uy_1 + vy_2}{u+v}, \quad z = \frac{uz_1 + vz_2}{u+v}.$$

Координате *средине* дужи $P_1 P_2$

(9) $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

4. Угао ω који заклапају две секуће се праве.

(10) $$\cos\omega = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

(10 *a*) $$\begin{cases} \sin^2\omega = (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1)^2 + \\ + (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1)^2 + (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\gamma_2 \cos\alpha_1)^2. \end{cases}$$

Праве стоје *нормално* једна на другој, ако је

(11) $$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ и $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ означавају углове које праве чине са осама ортог. системе.

5. Одстојање n тачке $x_1 y_1 z_1$ од праве која пролази кроз почетак координата и чине углове α, β, γ са осама.

(12) $$\begin{cases} n^2 = (x_1 \cos\beta - y_1 \cos\alpha)^2 + (y_1 \cos\gamma - z_1 \cos\beta)^2 + \\ \qquad + (z_1 \cos\alpha - x_1 \cos\gamma)^2. \end{cases}$$

6. Трансформација паралелних координата.

I. Паралелно померање координатних оса. Нов почетак је у тачци a, b, c.

(13) $$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

II. Трансформација косоуглих координата у косоугле са заједничким почетком.

$$\left.\begin{aligned} x\cos(x, n_x) &= X\cos(X, n_x) + Y\cos(Y, n_x) + Z\cos(Z, n_x) \\ y\cos(y, n_y) &= X\cos(X, n_y) + Y\cos(Y, n_y) + Z\cos(Z, n_y) \\ z\cos(z, n_z) &= X\cos(X, n_z) + Y\cos(Y, n_z) + Z\cos(Z, n_z). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

n_x, n_y, n_z означавају нормале на коорд. равни yz, zx, xy.

III. Ако је прва система (x, y, z) правоугла.

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos(X, x) + Y\cos(Y, x) + Z\cos(Z, x) \\ y &= X\cos(X, y) + Y\cos(Y, y) + Z\cos(Z, y) \\ z &= X\cos(X, z) + Y\cos(Y, z) + Z\cos(Z, z) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

или ако означимо

$$\begin{aligned} &\cos(X, x) = \alpha, \quad \cos(Y, x) = \alpha', \quad \cos(Z, x) = \alpha'', \\ &\cos(X, y) = \beta, \quad \cos(Y, y) = \beta', \quad \cos(Z, y) = \beta'' \\ &\cos(X, z) = \gamma, \quad \cos(Y, z) = \gamma', \quad \cos(Z, z) = \gamma'', \end{aligned}$$

простије

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z. \end{aligned}\right\} \quad (15a)$$

Између оних девет косинуса на десној страни (15*a*) постоје следеће релације

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

IV. Ако су обе системе правоугле имамо

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos(X, x) + y\cos(X, y) + z\cos(X, z) \\ Y &= x\cos(Y, x) + y\cos(Y, y) + z\cos(Y, z) \\ Z &= x\cos(Z, x) + y\cos(Z, y) + z\cos(Z, z) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

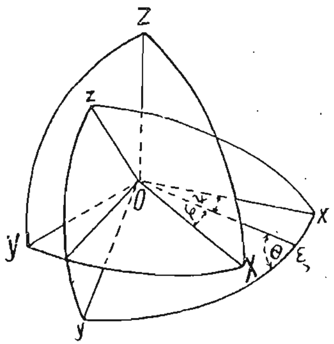
или краће

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ Y &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ Z &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}\right\} \quad (17a)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$
(19)\quad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 . \end{cases}
$$

$$
(20)\quad \begin{cases} \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0 \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 . \end{cases}
$$



V. *Ајлер*-ове једначине за претварање правоуглих координата у правоугле помоћу три независна угла ψ, Θ и φ. Овде је ψ угао који заклапа $O\xi$, а то је пресек коорд. равни XY и xy са x осом. Θ је нагибни угао између равни XY и xy, тако да ова два угла ψ и Θ утврђују положај XY-равни према xy-равни. Углом φ опредељен је правац X-осе у XY-равни.

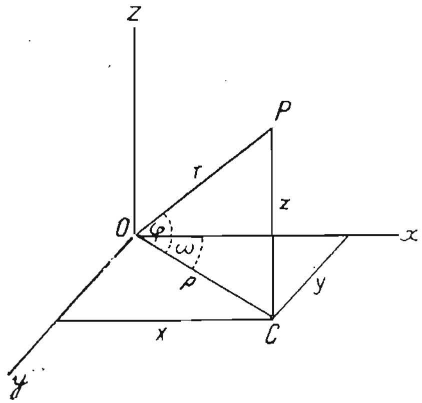
$$
(21)\quad \begin{cases} x = X(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Theta) \\ \qquad - Y(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\Theta) + Z\sin\psi\sin\Theta \\ y = X(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\Theta) \\ \qquad - Y(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\Theta) - Z\cos\psi\sin\Theta \\ z = X\sin\varphi\sin\Theta + Y\cos\varphi\sin\Theta + Z\cos\Theta . \end{cases}
$$

Упоређењем ових једначина са (17), односно (17a) следује

$$
(22)\quad \begin{cases} \cos(X,x) = \alpha = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Theta \\ \cos(Y,x) = \alpha' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\Theta \\ \cos(Z,x) = \alpha'' = \sin\psi\sin\Theta \\ \cos(X,y) = \beta = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\Theta \\ \cos(Y,y) = \beta' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\Theta \\ \cos(Z,y) = \beta'' = -\cos\psi\sin\Theta \\ \cos(X,z) = \gamma = \sin\varphi\sin\Theta \\ \cos(Y,z) = \gamma' = \cos\varphi\sin\Theta \\ \cos(Z,z) = \gamma'' = \cos\Theta . \end{cases}
$$

$$
(23)\quad tg\,\varphi = \frac{\gamma}{\gamma'}, \quad tg\,\psi = -\frac{\alpha''}{\beta''}, \quad \cos\Theta = \gamma'' .
$$

$$
(24)\quad \begin{cases} X = x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\Theta) \\ \qquad + y(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\Theta) + z\sin\varphi\sin\Theta \\ Y = x(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\Theta) \\ \qquad - y(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\Theta) + z\cos\varphi\sin\Theta \\ Z = x\sin\psi\sin\Theta - y\cos\psi\sin\Theta + z\cos\Theta . \end{cases}
$$



7. Цилиндричне координате тачке P јесу поларне коорд. $OC = p$, $\sphericalangle xOC = \omega$ тачкине пројекције на једну од коорд. равни и одстојање $PC = z$ тачке P од дотичне равни.

$$0 < p < +\infty, \quad 0 < \omega < 360^0, \quad -\infty < z < +\infty .$$

Трансформација правоуглих координата у цилиндричне и обратно:

$$
x = p\cos\omega, \quad y = p\sin\omega, \quad z = z . \tag{25}
$$

$$
p = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad tg\,\omega = \frac{y}{x}, \quad z = z . \tag{26}
$$

8. Сферне или поларне координате тачке P јесу $OP = r$, $\sphericalangle POC = \varphi$, $\sphericalangle xOC = \omega$.

$$0 < r < +\infty, \quad -90^0 < \varphi < +90^0, \quad 0 < \omega < 360^0 .$$

Трансформација правоуглих координата у сферне и обратно:

$$
x = r\cos\varphi\cos\omega, \quad y = r\cos\varphi\sin\omega, \quad z = r\sin\varphi . \tag{27}
$$

$$
r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad tg\,\omega = \frac{y}{x}, \quad \sin\varphi = \frac{z}{+\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} . \tag{28}
$$

Напомена. Ако је xy-раван хоризонат места O на земној површини, zx-раван меридиан места O, OP визирни правац ка некој звезди P, угао $90^0 - \varphi$ зове се *зенитно одстојање*, угао ω *азимут* звезде P.

У Географији се узима OZ у правцу земне осе, xy-раван у положају екватора, zx-раван као први меридиан. Тада је φ *географска ширина* ($90^0 - \varphi$ *поларно удаљење*), ω *географска дужина* тачке P.

9. Тумачење једначина. I. Свака једначина између координата представља уопште једну површину.

Једначине, у којима нема једне координате, нпр. $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(y, z) = 0$, $\chi(z, x) = 0$, представљају (цилиндричне) површине које постају кретањем једне праве која, клизећи по каквој кривој линији, остаје у свима положајима // сама себи.

Једначине, које садрже само једну координату, представљају извесан број равни које су // са једном од коорд. равни. Једначине $x=a$, $y=b$, $z=c$ представљају равни // са yz-, zy-, xy-равни, а $x=0$, $y=0$, $z=0$ саме yz-, zx-, xy-раван.

II. Две једначине између координата представљају пресек двеју површина, дакле некакву линију.

Тако нпр. једначине $y=0$ и $z=0$ представљају x-осу,
$z=0$ и $x=0$ „ y-осу,
$x=0$ и $y=0$ „ z-осу.

Поступним елиминовањем y-а и z-а из оних двеју датих једначина добијамо нове једначине вида $y=\varphi(x)$ и $z=\psi(x)$, којима је линија представљена као пресек два ваљка или (што је исто) њеним пројекцијама на xy- и xz-раван.

III. Три једначине између координата дају тачке у којима се оне три површине секу.

IV. Површине класификујемо према њиховим једначинама. Раван пресек површине може да буде линија највише истог степена којег је и једначина површине. Права линија продире површину n-тога степена највише у n тачака.

V. Линије у простору класификујемо према броју тачака које оне могу имати заједнички са једном равни.

VI. Две површине m-тога и n-тога степена секу се уопште по линији mn-тог степена.

Линију, чији степен може да се разложи на два чинитеља m и n, можемо замислити као *потпун* пресек једне површине m-тог и једне n-тог степена.

VII. Нека су $F_1=0$, $F_2=0$ и $F_3=0$ једначине трију површина. Једначина $lF_1+mF_2=0$ представља површину која пролази кроз пресек првих двеју површина, а једначина $lF_1+mF_2+nF_3=0$ површину која пролази кроз све заједничке тачке оне три површине.

II

Раван и права линија.

10. Раван. I. Једначина првог степена представља увек раван и обратно једначина равни увек је првог степена.

II. Једначина равни, чија је нормала спуштена из почетка на њу $=p$, а α, β, γ углови које нормала заклапа са коорд. осама, гласи

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p. \tag{29}$$

III. Претварање опште једначине првог степена

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{30}$$

у нормалан вид (29)

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha&=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & \cos\beta&=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, & p&=\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Односно двојаког знака ($+$ или $-$) корене количине $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ треба узети на ум да p мора бити позитивно.

IV. Једначина равни у одсечцима a, b, c, које раван чини на коорд. осама

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{32}$$

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}. \tag{33}$$

V. За угао Θ који заклапају две равни

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

имамо формуле

$$\left.\begin{aligned} \cos\Theta&=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}\\ \sin^2\Theta&=\frac{(B_1C_2-B_2C_1)^2+(C_1A_2-C_2A_1)^2+(A_1B_2-A_2B_1)^2}{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Равни су $\perp$, ако је

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{35}$$

Равни су //, ако је

$$A_1:B_1:C_1=A_2:B_2:C_2. \tag{36}$$

VI. Једначина равни која пролази кроз три тачке $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$:

$$x\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{37}$$

Напомена. Једначина (37) изражава услов под којим четири тачке xyz, $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ леже у истој равни.

VII. Одстојање d тачке $x_1y_1z_1$ од равни

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \quad \text{или} \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(38) \qquad \begin{cases} d = \pm (x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p) \\ d = \pm \dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases}$$

Овде треба узети знак + ако тачка P_1 и почетак O леже на супротним странама равни, а знак — ако су те тачке на истој страни равни.

VIII. Једначина $kE_1 + lE_2 = 0$ представља равни, које се са равни $E_1 = 0$ и $E_2 = 0$ секу по истој правој линији. Једначина $kE_1 + lE_2 + mE_3 = 0$ представља равни, које пролазе кроз заједничку тачку равни $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ и $E_3 = 0$. Четири равни $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ и $E_4 = 0$ секу се у једној тачци, ако су им везане једначине на начин

$$k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4 = 0,$$

тј. ако је

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Једначина $kE_1 + l = 0$ представља равни, које су // са равни $E_1 = 0$. — Једначина $kE_1 + lE_2 + m = 0$ представља равни, које су // са пресеком равни $E_1 = 0$ и $E_2 = 0$.

11. Права линија. I. Две једначине првог степена

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

представљају праву линију као пресек двеју равни.

Поступним елиминовањем y-а и x-а из задатих једначина доводимо једначине праве линије на вид

$$(39) \qquad \begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b. \end{cases}$$

Прва једначина даје пројекцију праве у xz-равни (вертикалну пројекцију), друга њену пројекцију у yz-равни (профилну пројекцију). Једначину пројекције у xy-равни (хоризонталну пројекцију) добили бисмо елиминовањем z-а. Једначине праве линије садрже четири независне константе.

II. Једначине праве линије која пролази кроз тачке $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (40)$$

III. Две праве линије у простору уопште узев не секу се. Да би се две праве линије у простору секле постоји исти услов као и за сечење четири равни у једној тачци:

$$kE_1 + lE_2 + mE_3 + nE_4 = 0.$$

1. Напомена. Ако су једначине правих у форми (39) услов под којим се праве секу гласи

$$(m_1 - m_2) : (n_1 - n_2) = (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2).$$

2. Напомена. Једначина равни која је постављена кроз две секуће се праве линије јесте

$$(m_1 - m_2)(y - n_1z - b_1) = (n_1 - n_2)(x - m_1z - a_1)$$

или

$$(a_1 - a_2)(y - n_1z - b_1) = (b_1 - b_2)(x - m_1z - a_1).$$

IV. Једначине праве линије која пролази кроз тачку x_1, y_1, z_1 и чини са коорд. осама угле α, β, γ:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}. \qquad (41)$$

V. Једначине нормале из тачке x_1, y_1, z_1 на раван

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

јесте

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}. \qquad (42)$$

VI. Да бисмо одредили углове, које једна права заклапа са коорд. осама, доводимо њену једначину на форму (42) и онда је

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

VII. За угао ω, који заклапају праве

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$$
$$\frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_1}{n_3},$$

имамо

(44) $$\cos\omega=\frac{l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Праве стоје нормално, ако је

(45) $$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0.$$

VIII. За угао ω, који права линија

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

чини са равни

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

имамо образац

(46) $$\sin\omega=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Права је паралелна са равни, ако је

(47) $$Al+Bm+Cn=0.$$

IX. Пресек праве линије са равни налази се као пресек трију равни.

X. Права

$$x=mz+a$$
$$y=nz+b$$

пада у раван

$$Ax+By+Cz+D=0$$

када је

(48) $$\begin{cases} Aa+Bb+D=0\\ Am+Bn+C=0.\end{cases}$$

III

Произвођење површина.

12. Површине дефинишемо или као геометриско место за све тачке које уживају извесно заједничко својство или их замишљамо да постају кретањем какве линије. Ово кретање ми

обично замишљамо као клизење једне покретне линије *(генератрисе* или *изводиље)* по некој сталној линији *(директриси* или *водиљи)*.

Површине, које постају кретањем праве линије, зову се *праволиниске површине*.

13. Цилиндричне површине, ваљци или облице постају кретањем једне праве линије дуж какве криве линије с тиме да покретна права у свим њеним положајима остаје паралелна сама себи.

I. Претпоставимо да је директриса једна равна крива линија и њену раван узмимо за xy-раван. Нека су

$$\begin{cases} x=mz+x_0\\ y=nz+y_0\end{cases} \qquad (A$$

једначине покретне праве (генератрисе). m и n су сталне количине, а x_0, y_0 мора да задовоље једначину директрисе

$$\Phi(x,y)=0. \qquad (B$$

Једначину цилиндричне површина добијамо елиминујући параметре x_0, y_0 из A) и B). Резултат је једначина

$$\Phi(x-mz,\ y-nz)=0. \qquad (49)$$

II. Једначина цилиндричних површина добија простији вид, ако z-осу узмемо у правцу генератрисе. Тада је $m=0$, $n=0$ и једначина цилиндричних површина постаје тиме

$$\Phi(x,y)=0. \qquad (50)$$

14. Конусне површине или купе постају кретањем једне праве линије дуж једне криве линије пролазећи стално кроз извесну тачку, коју зовемо *средиштем* или *врхом* конусне површине.

I. Претпоставимо да је директриса равна линија и њену раван узмимо за xy-раван. Једначине праве, које пролазе кроз сталну тачку (f,g,h), гласе

$$x-f=m(z-h)$$
$$y-g=n(z-h),$$

одакле, кад ставимо $z=0$, добијамо координате x_0, y_0, које мора да задовоље и једначину директрисе. Имамо $x_0-f=-mh$, $y_0-g=-nh$, дакле $m=-\frac{x_0-f}{h}$, $n=-\frac{y_0-g}{h}$ и према томе једначине генератрисе

$$A)\qquad \begin{cases} x - f = -\dfrac{x_0 - f}{h}(z - h) \\[2ex] y - g = -\dfrac{y_0 - g}{h}(z - h), \end{cases}$$

помоћу којих и једначине директрисе

$$B)\qquad \Phi(x_0, y_0) = 0,$$

елиминовањем параметара x_0, y_0, добијамо тип за једначину конусних површина

$$\Phi\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0. \tag{51}$$

II. Ако је директриса просторна линија, онда се такав случај да свести на прошли кад је линија равна.

III. Узмимо да z-оса пролази кроз врх купе, тада је $f = g = 0$ и једначина конусне површине је

$$\Phi\left(\frac{hx}{h - z}, \frac{hy}{h - z}\right) = 0. \tag{52}$$

IV. Једначина добија најпростију форму ако заменимо $h - z$ са z, тј. ако поставимо врх купе у почетак координата. Једначина гласи

$$\Phi\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0. \tag{53}$$

15. Обртне површине постају обртањем једне криве линије око једне сталне (непокретне) праве, тако да свака тачка покретне линије описује круг са средиштем у оној сталној правој. Стална права зове се *оса* површине.

Равни пресеци нормални према оси обртне површине јесу кругови и зову се *паралелни кругови*. Пресеци, који садрже у себи обртну осу, сви су конгруентни и зову се *меридианске линије*.

Постанак можемо да представимо кретањем једног круга са променљивим полупречником тако да његова раван остаје паралелна сама себи, док му средиште описује праву линију (осу површине), а периферија стално додирује извесну криву линију (једну од меридианских линија).

I. Нека је

$$A)\qquad F(x_0, z_0) = 0$$

једначина покретне линије (генератрисе) у xz-равни. За обртну осу узећемо z-осу једне ортогоналне системе. Једначине паралелног круга, који описује нека тачка P_0 покретне линије, јесу

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_0^2 \\ z &= z_0. \end{aligned}\right\} \qquad (B$$

Једначину обртне површине добијамо кад из A) и B) елиминујемо x_0 и z_0. То је једначина

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{54}$$

II. Узмимо да обртна оса лежи у коме било правцу α, β, γ, а да пролази кроз почетак координата.

Сваки паралелан круг можемо да сматрамо као пресек лопте

$$x^2 + y^2 + z^2 = \eta^2,$$

која је описана из почетка координата и једне према обртној оси нормалне равни

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \xi.$$

С обзиром на то да тачке на паралелним круговима припадају и генератрисама мора између ξ и η постојати извесна веза, која је изражена нпр. једначином

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Елиминовањем параметара ξ, η из горње три једначине добијамо једначину обртне површине

$$F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) = 0. \tag{55}$$

III. Најзад, ако обртна оса не пролази кроз почетак координата, но кроз произвољну тачку x_1, y_1, z_1, паралелне кругове можемо да сматрамо као пресеке лопте

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \eta^2,$$

која је описана из тачке x_1, y_1, z_1 и равни

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = \xi,$$

која стоји управно на обртној оси. И пошто између ξ и η постоји извесна веза

$$F(\xi, \eta) = 0$$

следује, као најопштија форма једначине обртних површина, овакав израз

$$F(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}, x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) = 0. \tag{56}$$

IV

Површине другога степена.

16. Општа својства површина другога степена.

I. Општа једначина другога степена са паралелним координатама x, y, z, а то је

$$
(57)\qquad \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy + \\ \qquad\qquad 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 0 \end{cases}
$$

садржи девет независних констаната. Значи да је површина другога степена одређена са девет података, нпр. са девет тачака.

II. У једној тачци површине другога степена могу да се повуку бесконачно много тангената на површину. Све те тангенте леже у једној равни, која се зове *додирна* или *тангенциална раван*.

Једначина тангенциалне равни у тачци x', y', z':

$$
(58)\qquad (x - x')\frac{dF}{dx'} + (y - y')\frac{dF}{dy'} + (z - z')\frac{dF}{dz'} = 0
$$

или

$$
(58a)\quad \begin{cases} x(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}) + y\,(a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}) \\ + z(a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z' + a_{34}) + a_{14}x' + a_{24}y' + a_{34}z' + a_{44} = 0. \end{cases}
$$

III. Пошто је једначина симетрична у погледу x, y, z и x', y', z' може да се напише и овако

$$
(\mathrm{LVIII}a)\ \begin{cases} x'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + y'(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \\ + z'(a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) + a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0 \end{cases}
$$

или краће

$$
(\mathrm{LVIII})\quad (x' - x)\frac{dF}{dx} + (y' - y)\frac{dF}{dy} + (z' - z)\frac{dF}{dz} = 0.
$$

Једначине (58), (58*a*), (LVIII) и (LVIII*a*) везују координате x, y, z једне променљиве и координате x', y', z' једне задате тачке на површини и представљају тангенциалну раван у тачци x', y', z'. Узмемо ли x', y', z' као променљиве, x, y, z као сталне координате, онда горње једначине представљају једну раван као геометриско место за додирне тачке тангената, које се из једне тачке могу повући на површину. Та раван се зове *поларна раван* оне тачке из које замишљамо да су дирке повучене. Тачка се зове *пол* те равни.

Тангенте, односно тангенциалне равни повучене из једне тачке на површину образују *додирни* или *тангенциални конус*.

Тангенциална раван је поларна раван додирне тачке.

Поларна раван је геометриско место четврте хармониске тачке за све групе код којих је једна тачка у полу, а друге су две продорне тачке ма које из пола повучене праве са површином.

Ако у поларној равни тачке A лежи тачка B, онда поларна тачке B пролази кроз тачку A.

Пресек поларних равни тачака A и B то је права која се зове *поларна линија* праве AB, тј. праве која везује полове A и B.

Поларне равни тачака једне праве секу се све по истој правој: поларној линији оне праве. И обрнуто: полови равни, које се секу по истој правој леже на једној истој правој: поларној линији пресека оних равни.

IV. У случају да је $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$ једначина другог степена је хомогена

$$
a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy = 0 \qquad (59)
$$

и представља један конус са теменом у почетку координата.

Једначина тангенциалне равни у тачци x', y', z' гласи

$$
x\frac{dF}{dx'} + y\frac{dF}{dy'} + z\frac{dF}{dz'} = 0 \qquad (60)
$$

или

$$
x'\frac{dF}{dx} + y'\frac{dF}{dy} + z'\frac{dF}{dz} = 0. \qquad (\mathrm{LX})
$$

Тангенциална раван пролази увек кроз врх конуса и додирује конус дуж целе праве која везује додирну тачку са врхом.

Једначине (60) и (LX) представљају и поларну раван тачке x', y', z' замишљајући ову ма где у простору (место на површини).

Поларна раван ма које тачке пролази кроз врх конуса.

Тачке на правој која пролази кроз врх купе имају исту поларну раван.

V. Тачка, која полови тетива која пролазе кроз њу, зове се *средиште* површине. Координате u, v, w средишта добијамо из једначина

$$
\frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0,
$$

а то су ове три линеарне једначине

$$
\begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + a_{14} &= 0 \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w + a_{24} &= 0 \\ a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w + a_{34} &= 0. \end{aligned}
$$

Имали површина средиште или га нема зависи од детерминанте

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Површина има средиште, ако је $D \lesseqgtr 0$, а нема га, ако је $D = 0$.

VI. Раван, која полови сва тетива у извесном правцу $\lambda (= \cos\alpha)$, $\mu (= \cos\beta)$, $\nu (= \cos\gamma)$ зове се томе правцу *спрегнута* или *коњугована диаметрална раван.*

Једначина правцу λ, μ, ν коњуговане диаметралне равни гласи

$$\lambda \frac{dF}{dx} + \mu \frac{dF}{dy} + \nu \frac{dF}{dz} = 0. \tag{61}$$

Ова раван пролази кроз пресечну тачку равни $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dy} = 0$, $\frac{dF}{dz} = 0$, а то су диаметралне равни, које полове тетива паралелна са x-, y- односно z-осом.

Кад у диаметралној равни, која је спрегнута неком правцу, узмемо једну праву, онда диаметрална раван ове праве пролази кроз праву, којој је спрегнута прва диаметрална раван.

Три диаметралне равни јесу спрегнуте, кад је свака од њих спрегнута пресеку оних други двеју.

Тако исто кажемо за три пречника да су спрегнута, кад је сваки од њих спрегнут равни која пролази кроз она два друга пречника.

Три коњугована пречника добијамо кад одредимо коњуговани пречник за раван, која пролази кроз два спрегнута пречника, па дакле и кроз средиште површине.

VII. Диаметрална раван, која стоји нормално на тетивама, које она полови, зове се *главна раван.* Површине другога степена имају уопште три главне равни. Пречници, који стоје нормално на главним равнима зову се *осе* површине. И њих има уопште три.

17. Класификација површина другог степена.

I. Површине са средиштем ($D \lesseqgtr 0$).

Вршимо две трансформације координата. Првом трансформацијом, а то је премештањем почетка координата у средиште (тачку u, v, w) постизавамо да из једначине нестају чланови прве димензије, тако да једначина добија вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy + F(u,v,w) = 0.$$

Другом трансформацијом (мењањем правца координатних оса избацујемо из једначине чланове са производима yz, xz, xy и једначина се своди на

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + F(u,v,w) = 0.$$

1. $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Односно сталног члана претпоставићемо, без штете по општност расматрања, да је $F_1 < 0$. (У случају $F_1 = 0$ једначина представља купу.) Једначина може да се напише

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{62}$$

Површина се зове *елипсоид.* Количине a, b, c дају *полуосе* елипсоида.

На случај да су две полуосе једнаке, нпр. $a = b$ површина се зове *обртни елипсоид* и постаје обртањем елипсе са полуосама a и c око z-осе. Ако је обртна оса већа од оних двеју једнаких оса ($c > a$) елипсоид је *продужен.* У противном случају ($c < a$) кажемо да је *спљоштен* и зове се *сфероид.*

Кад је $a = b = c$ елипсоид се претвара у *лопту.*

Ако је једна полуоса, нпр. $c = \infty$, елипсоид дегенерише у елиптичан или кружан ваљак, према томе да ли су остале две осе неједнаке или једнаке.

2. Једна од количина A, B, C је негативна, нпр. $A > 0$, $B > 0$, $C < 0$. Једначина површине има вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{63}$$

Површина се зове *прост* или *једнокрилни хиперболоид* или *хиперболоид са једном површином.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

представља *асимптотни конус.*

3. Нека су две од констаната A, B, C негативне, нпр. $A > 0$, $B < 0$, $C < 0$. Једначина је

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{64}$$

и представља *двокрилни хиперболоид* или *хиперболоид са две површине.*

У случају да је $b = c$ површина је ротациона и постаје обртањем хиперболе око њене стварне (овде x-) осе, док ротациони једнокрилни хиперболоид ($a = b$) постаје обртањем хиперболе око њене имагинарне (z-) осе.

4. $A < 0$, $B < 0$, $C < 0$, Једначина

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

нема геометриског значаја, јер није задовољена ниједним стварним спрегом x-а, y-а и z-а.

5) $F_1 = 0$. Трансформована једначина има вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0.$$

Имамо да разликујемо:

α) случај под 1) и 4), где једначина гласи

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Једначина је задовољена свега једним координатним спрегом $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и представља само једну тачку (почетак координата).

β) случај под 2) и 3), где једначина добија један од ова два вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Обе једначине припадају конусним површинама.

II. Површине без средишта ($D = 0$).

Избором правца координатних оса (задржавајући почетак) можемо да избацимо из једначине чланове у којима су производи yz, xz, xy као и један од чланова са x^2, y^2 или z^2, тако да се једначина скраћује на

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0.$$

Паралелним померањем координатних оса (избором новога почетка) можемо да учинимо да у једначини нестану чланови са x и y у првоме степену и да се једначина сведе на

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0.$$

1) $a'_{34} = 0$. Једначина

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{44} = 0$$

представља елиптичан или хиперболичан ваљак, према томе да ли су a'_{11} и a'_{22} истога или супротнога знака.

Ако је $a'_{34} = 0$ и $a'_{44} = 0$ једначина

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 = 0$$

даје две секуће се равни (ако су a'_{11} и a'_{22} различног знака) или једну праву (ако су a'_{11} и a'_{22} истога знака).

2) $a'_{34} \lesseqgtr 0$. Премештајем почетка координата избацујемо из једначине сталан члан и доводимо је на вид

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{34}z = 0.$$

Коефицијенат a'_{34} можемо сматрати као негативан. Имамо два подслучаја.

α) a'_{11} и a'_{22} имају исте знаке, нпр. $a'_{11} > 0$ и $a'_{22} > 0$. Једначина, која има вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0, \tag{65}$$

представља *елиптичан параболоид.*

За $a = b$ имамо обртни параболоид.

β) a'_{11} и a'_{22} имају супротне знаке: $a'_{11} > 0$, $a'_{22} < 0$.

Једначина има изглед

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0 \tag{66}$$

и представља *хиперболичан параболоид.*

3. Један од коефицијената a'_{11} или a'_{22} раван нули, нпр. $a'_{22} = 0$. Једначина је

$$a'_{11}x^2 + a'_{24}y + 2a'_{34}z + a_{44} = 0$$

и може трансформацијом да се сведе на

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{24} + a_{44} = 0.$$

Једначина представља један параболичан ваљак.

4) Ако је осим $a'_{22} = 0$ још и $a'_{24} = a'_{34} = 0$ једначина даје две (са yz-равни) паралелне равни.

18. Теореме. I. Паралелне равни секу површину другог степена по линијама које су сличне и слично положене. Средишта ових линија леже на пречнику који је коњугован њиховој равни.

II. Збир квадрата реципрочних вредности ма која три међусобом нормална пречника је константан:

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

III. Збир квадрата нормала, које су спуштене из средишта на три међусобом нормалне тангенциалне равни је константан:

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2=a^2+b^2+c^2.$$

Закључак. Тачке, у којима се секу по три тангенциалне равни, које су међусобом нормалне, леже све на једној лопти чије је средиште у средишту површине, а квадрат неког полупречника је $=a^2+b^2+c^2$.

IV. Паралелопид конструисан из три коњугована полупречника има константну запремину $=abc$.

V. Збир квадрата три коњугована полупречника је константан:

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2.$$

VI. Постоје две системе паралелних равни које са површином дају кружне пресеке. Те су равни паралелне са двема равнима кроз средиште површине. Крајни положаји ових система равни јесу тангенциалне равни које дају *кружне тачке* и којих код елипсоида има четири.

Увек су два кружна пресека, од којих један припада једној, а други другој системи, који леже на истој лопти.

VII. Хиперболоид са једном површином може се сматрати као геометриско место правих по којима се секу по две одговарајуће равни из два снопа равни са једнаком двојном размером.

VIII. Ма које две праве на једнокрилном хиперболоиду које припадају разним ситемама леже у истој равни.

IX. Свака права на једнокрилном хиперболоиду паралелна је са једном од изводиља асимптотне купе.

X. Свака права једне системе правих на једнокрилном хиперболоиду сече све праве друге системе.

XI. Две површине другог степена са истим средиштем (концентричне) и поклапајућим се осама (коаксиалне) јесу *конфокалне*, ако су разлике квадрата њихових оса код обеју површина једнаке. Тако за елипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ јесте општа једначина конфокалних површина

$$\frac{x^2}{a^2\pm\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2\pm\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2\pm\lambda^2}=1.$$

Узев за λ^2 позитиван знак, као и за све негативне вредности од λ^2 које су $<c^2$ конфокална површина је елипсоид. Граница ових елипсоида је лопта са бесконачним полупречником (за $\lambda^2=\infty$). За негативне вредности од λ^2 између c^2 и b^2 горња једначина представља хиперболоиде са једном, а за λ^2 између b^2 и a^2 хиперболоиде са две површине. За $\lambda^2=c^2$ добија се раван $z=O$ као граница између елипсоида и хиперболоида са једном површином. Аналогно дели раван $y=0$ једнокрилне хиперболоиде од двокрилних.

XII. Кроз једну тачку пролазе три површине које су конфокалне са једном задатом површином другог степена. Те три површине јесу један елипсоид, један једнокрилни и један двокрилни хиперболоид.

XIII. Две конфокалне површине секу се увек под правим углом.

19. Реципрочно поларни облици. Лако је увидити да теорија реципрочних полара из Геометрије у равни може да се пренесе на проблеме Геометрије у простору. Замислимо да су поларе конструисане у односу на какву површину другог степена. Свакој тачци одговара једна раван и обратно; свакој правој, која везује две тачке одговара једна права као пресек двеју равни. Једној површини S, као геометриском месту тачака, одговара једна површина Σ као анвелопа од равни. Површини другог степена одговара опет једна површина другог степена као реципрочно поларна.

Образујући реципрочну систему добијамо место низа тачака, правих и равних одговарајуће низове равни, прави и тачака. Реципрочни облик за ред тачака, које образују једну криву линију у простору, јесте низ равни које додирују једну девелопаблу површину. Ако је крива линија састављена из тачака које све леже у једној равни, онда код реципрочног облика пролазе све одговарајуће равни кроз једну тачку и чине додирне равни једне купе.

Заједничке тачке двеју површина образују једну линију у простору. Овоме реципрочно одговарају тангенциалне равни које су заједничке двема површинама и које додирују једну деволопаблу површину која обухвата оне две површине.

Реципрочни облици узимају се често у односу на једну сталну сферу, чије се средиште зове *почетак* или *средиште реципрочности*. Овоме почетку одговара бесконачно удаљена раван. Ако почетак реципрочности лежи изван површине другог степена њена реципрочна површина је хиперболоид; ако је почетак у површини реципрочна полара је елипсоид, а ако почетак реципрочности лежи на самој површини, онда је реципрочна површина параболоид.

Реципрочно поларна површина једне праволиниске површине је такође праволиниска површина. Једнокрилном хиперболоиду одговара увек једнокрилан хиперболоид у колико почетак реципрочности није на површини иначе је реципрочна површина хиперболичан параболоид.

ПОГОВОР.

Нека ми се дозволи да учиним извесне напомене. Пре свега да назначим циљ књиге да се од ње неби тражило што није у њеном плану. Књига има да послужи као збирка важнијих формула и правила из главних делова Математике, а осим тога и као средство за репетицију. Односно њеног својства као збирке формула и правила писца је руководио добар избор и прегледност материјала. Ово последње је нарочито од значаја по употребљивост збирке. Прегледност трудио сам се да појачам распоредом и подесним нумерисањем формула и ресултата. Сваки који буде имао намеру да ову књигу чешће консултује учиниће добро, ако се претходно упозна детаљно са њеним распоредом. То рекогносцирање учиниће да ће се овом књигом моћи служити лакотом којом се служимо речником. Што се тиче избора материје, која је унесена у збирку, тај избор је донекле унапред утврђен, а делом је ипак зависан од личног нахођења. У колико ово последње одговара циљу вероватно је да ће мишљења бити подељена.

Ма да ова књига може у неколико важити као енциклопедија Математике у изводу разуме се, да она не може служити за учење, но само за понављање и утврђивање већ стеченог знања.

Најзад да скренем пажњу на техничку израду, која много доприноси употребљивости књиге ове врсте. Мислим да нећу погрешити, ако поред мог личног признања, изјавим да ће издавач моћи рачунати на признање стручних лица.

Београд,
Априла 1927.

Dr. Димитрије Данић.

САДРЖАЈ

АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ РАЧУН

ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

ИСПРАВКА

На стр. 167. сл. десно место C треба c.