Milan Plavšić

VISKOMETRIJSKO TEČENJE FLUIDA SA NESIMETRIČNIM TENZOROM NAPONA

Beograd 1966.

Predgovor

Tema ovog rada je utvrdjivanje egzistencije i uticaja naponskih spregova kod viskoznog tečenja.

Pretpostavka o egzistenciji naponskih spregova (bez obzira o kakvom se materijalu radi) ima za posledicu, i u okvirima linearne teorije, pojavu novih materijalnih konstanata. Egzistencija i veličina ovih konstanata može se odrediti jedino eksperimentom.

S obzirom da je klasična linearna teorija mehanike kontinuuma, u većini slučajeva, davala zadovoljavajuće rezultate za praktične primene, postavljalo se pitanje opravdanosti uvodjenja naponskih spregova. U poslednje vreme, medjutim, pojavljuju se eksperimentalni radovi čiji rezultati pokazuju izvesno odstupanje od onih koje daje klasična teorija. To je u izvesnom smislu dalo opravdanje uvodjenju naponskih spregova, tako da se pojavljuju radovi koji tretiraju uticaj naponskih spregova u inžinjerskoj praksi.

Imajući to u vidu, prof. dr R. Stojanović mi je predložio ovu temu za moju doktorsku disertaciju, što sam sa zadovoljstvom prihvatio.

Kako mi je pomoć svih saradnika Grupe za reologiju Jugoslovenskog društva za mehaniku, u kojoj su rezultati ovog rada bili izlagani, a posebno prof. dr R. Stojanovića, bila od velike koristi, to osećam veliko zadovoljstvo da im se na ovaj način najtoplije zahvalim.

Beograd, decembra 1966. Milan Plavšić

Sadržaj

1. Uvod.

Klasična mehanika neprekidnih sredina, pored ograničenja na usku klasu procesa – sa infinitezimalnim deformacijama – u analizi naponskog stanja operiše sa simetričnim tenzorom napona. U daljem razvoju mehanike neprekidnih sredina pojavljuju se radovi u kojima se, u cilju preciznijeg opisivanja naponskog stanja, pa prema tome i procesa uopšte, uvode pretpostavke o nesimetriji tenzora napona. Neki autori [1] tvrde da pretpostavka o simetriji tenzora napona ima osnova samo kod sistema koji se sastoje iz sfernih molekula, a da se kod drugih sistema može pojaviti i njegov antisimetrični deo.

U većini radova u kojima se proučavaju procesi sa nesimetričnim tenzorom napona, ukazuje se na to da pretpostavka o nesimetriji tenzora napona povlači sa sobom pojavu novih veličina potrebnih za opisivanje naponskog stanja – naponskih spregova. U ovim radovima se, prema tome, naponsko stanje odredjuje nesimetričnim tenzorom napona i tenzorom naponskih spregova.

Nesimetrični tenzor napona i tenzor naponskih spregova pojavili su se u teoriji elastičnosti kao posledica pretpostavke da energija deformacije zavisi ne samo od prvih, već i od drugih gradijenata deformacije. Takvi elastični materijali nazivaju se složeni elastični materijali ili elastični materijali reda dva i oni su do sada, bar što se teorijskih razmatranja tiče, od svih materijala reda dva najviše proučavani. Razloge za to treba tražiti u činjenici da su elastični materijali – pored toga što su dosta korišćeni u praksi – predstavljeni takvim modelima da su najpogodniji za teorijska proučavanja. Nasuprot tome, neki drugi materijali (kao, na primer, plastični, viskoplastični itd.) i u okvirima klasične teorije ostali su nedovoljno teorijski proučeni.

U poslednje vreme, medjutim, pojavljuju se radovi u kojima se proučavaju i neelastični materijali sa nesimetričnim tenzorom napona. Tako je, na primer, učinjen pokušaj da se nesimetrični tenzor napona uvede u teoriju plastičnosti [2] , a isto tako proučavano je i viskozno tečenje sa nesimetričnim tenzorom napona. [3] .

U većini slučajeva procesi koje proučava savremena mehanika neprekidnih sredina su ireverzibilni i kao takvi ne mogu se proučavati izvan osnovnih zakona termodinamike ireverzibilnih procesa. Ta činjenica je, izmedju ostalog, i dovela do toga da se danas termodinamika ireverzibilnih procesa nalazi u veoma intenzivnom razvoju. Jasno je da zahtev da veličine sa kojima operišemo u mehanici neprekidnih sredina zadovoljavaju i zakone termodinamike, nameće izvesna ograničenja relacijama koje uspostavljaju vezu izmedju tih veličina. Sa druge strane, medjutim, taj zahtev nam omogućuje da izmedju tih veličina uspostavimo nove relacije, koje nam daju nove podatke, kako o samom procesu tako i o materijalu na kome se proces odvija.

U ovom radu proučavaćemo proces tečenja viskoznog fluida, definisanog kao specijalna klasa viskoelastičnog materijala, pretpostavljajući da se njegovo naponsko stanje opisuje nesimetričnim tenzorom napona i tenzorom naponskih spregova. Za razliku od napred pomenutog rada ([3]), gde se uvodi dopunska nezavisna rotacija fluidnih delića (što navodi na ideju da se viskozni fluid tu tretira kao orijentisani kontinuum), ovde ćemo se zadržati na klasičnim definicijama tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti.

S obzirom da je proces tečenja viskoznog fluida ireverzibilan proces, to ćemo pri njegovom proučavanju koristiti kako osnovne zakone mehanike tako i osnovne zakone termodinamike ireverzibilnih procesa. Iz tih razloga pri izvodjenju reoloških jednačina iskorišćen je jedan princi termodinamici ireverzibilnih procesa, koji je 1962. god. formulisao H. Cigler (H. Ziegler) [4]. Detaljno izvodjenje reoloških jednačina ovde neće biti izloženo i to iz razloga što je njihovo detaljno izvodjenje dato u jednom posebnom radu [5]. U trećem odeljku biće ukratko izloženi samo rezultati toga rada.

U proučavanju pojedinih strujanja viskoznog fluida, u ovom radu ćemo se ograničiti na proučavanje posebne klase strujanja, tj. strujanja koja - u analogiji sa definicijom koju je dao B. Kolmen (B. Coleman) [6] u slučaju viskoznog fluida sa simetričnim tenzorom napona - spadaju u klasu viskometrijskih strujanja. Tu mislimo na strujanja izmedju dve paralelne ploče (strujanja kroz kanale), strujanja kroz prave kružne cevi kao i strujanja izmedju dva koaksijalna rotaciona cilindra.

Na kraju, biće proučene mogućnosti eksperimentalnog odredjivanja koeficijenata viskoznosti, pa na taj način, i mogućnosti eksperimentalnog utvrdjivanja egzistencije i uticaja naponskih spregova u viskoznom fluidu.

2. Jednačine kretanja

Sva razmatranja vršićemo u euklidskom trodimenzionom prostoru. Koordinate u odnosu na proizvoljni, u tom prostoru dopustivi, koordinatni sistem obeležićemo sa x^i, $(i=1,2,3)$. Ukoliko se pojavi potreba da se za koordinate naglasi da su pravougle Dekartove, to ćemo učiniti na taj način što ćemo ih obeležiti sa y^i, $(i=1,2,3)$.

Položaj fluidnog delića odredjen je koordinatama tačke u kojoj se on nalazi u odredjenom trenutku vremena,

$$x^i = x^i(t) \tag{2.1}$$

Kontravarijantne koordinate brzine dobijamo diferenciranjem koordinata po vremenu,

$$v^i = \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \tag{2.2}$$

i u opštem slučaju su funkcije položaja i vremena, tj.

$$v^i = v^i(x^j, t), \tag{2.3}$$

Ubrzanje dobijamo apsolutnim diferenciranjem brzine po vremenu,

$$\overset{*}{v^i} = \frac{Dv^i}{Dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{,j} v^j, \tag{2.4}$$

gde je

$$v^i_{,j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left\{ {i \atop jk} \right\} v^k = \dot{x}^i_{,j}$$

kovarijantni izvod kontravarijantnog, a

$$v_{i,j} = g_{il}\, v^{l}_{,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \left\{ {k \atop ij} \right\} v_k \quad ,$$

kovarijantni izvod kovarijantnog vektora brzine. Za Dekartove koordinate ti izvodi su parcijalni i, jasno, ne razlikuju se medjusobno.

Tenzor $v_{i,j}$ nazivamo gradijent brzine i možemo ga rastaviti na simetričan i antisimetričan deo,

(2.5) $$v_{i,j} = d_{ij} + \omega_{ij} \quad ,$$

gde je

(2.6) $$d_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)$$

tenzor brzine deformacije, a

(2.7) $$\omega_{ij} = v_{[i,j]} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} - v_{j,i}\right)$$

tenzor vrtloženja.

Zakon održanja mase (jednačina neprekidnosti) ima oblik

(2.8) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho v^{i}\right)_{,i} = 0 ,$$

gde/je ρ gustina, tj. masa jedinice zapremine. Jednačinu (2.8) možemo napisati u obliku

(2.9) $$\frac{d\rho}{dt} = -\rho v^{i}_{,i} = -\rho d_{I} \quad ,$$

gde je $d_I = g^{ij} d_{ij}$ prva osnovna invarijanta tenzora brzine deformacije, ili u obliku

(2.10) $$\rho \frac{dv}{dt} = d_{I} \quad ,$$

gde je $v = \rho^{-1}$ specifična zapremina.

Količina kretanja definisana je izrazom

(2.11) $$K^i = \int_V \rho v^i dV \, ,$$

a zakon količine kretanja ima oblik

(2.12) $$\dot{\overline{K^i}} = \int_V \dot{\overline{\rho v^i}} \, dV = X^i \, ,$$

gde su X^i koordinate rezultujuće sile.

Moment količine kretanja definisan je izrazom

(2.13) $$L^{ij}_{[o]} = 2 \int_V \rho \, y^{[i} \dot{y}^{j]} dV \quad , \quad L^{ij} = -L^{ji} \, ,$$

a zakon momenta količine kretanja ima oblik

(2.14) $$\dot{\overline{L^{ij}_{[o]}}} = M^{ij} \, ,$$

gde je $M^{ij} = -M^{ji}$ rezultujući spreg.

Ako unutar fluida uočimo neku konačnu zapreminu V, ograničenu zatvorenom površinom S, onda se preko svake tačke te površine prenose spoljašnje sile i spoljašnji spregovi. Silu koja deluje u svakoj tački površine sa spoljašnjom normalom $\vec{n}$, računatu po jedinici površine, nazivamo napon i obeležimo ga sa $t^i_{(\vec{n})}$; a spreg nazivamo naponski spreg i obeležimo ga sa $m^{ij}_{(\vec{n})}$. Pored toga na fluid deluju i zapreminske sile, koje ćemo obeležiti sa f^i, a mogu da deluju i zapreminski spregovi koje ćemo obeležiti sa l^{ij}. Za rezultujuću silu sada imamo

(2.15) $$X^i = \oint_S t^i_{(\vec{n})} dS + \int_V \rho f^i dV \quad ,$$

a za rezultujući spreg

(2.16) $$M^{ij} = \oint_S \left\{ m^{ij}_{(\vec{n})} + 2\left(y^{[i} t^{j]}_{(\vec{n})}\right) \right\} dS + \int_V \rho \left\{ l^{ij} + 2\left(y^{[i} f^{j]}\right) \right\} dV \, .$$

Zakone količine kretanja i momenta količine kretanja sada možemo napisati u obliku

$$(2.17)\qquad \int_V \rho \dot{\overline{v^i}}\, dV = \oint_S t^i_{(n)}\, dS + \int_V \rho f^i\, dV ,$$

$$(2.18)\qquad \frac{D}{Dt}\int_V 2\rho y^{[i} v^{j]}\, dV = \oint_S \{ m^{ij}_{(n)} + 2(y^{[i} t^{j]}_{(n)}) \}\, dS + \int_V \rho \{ l^{ij} + 2(y^{[i} f^{j]}) \}\, dV .$$

Ako napon i naponski spreg, koji su definisani u tački za presečnu ravan sa normalom $\vec{n}$, izrazimo u obliku

$$(2.19)\qquad t^i_{(n)} = t^{ij} n_j \quad , \quad t^{ij} n_j\, dS = t^{ij}\, dS_j \; ,$$

$$(2.20)\qquad m^{ij}_{(n)} = m^{ijk} n_k \quad , \quad m^{ijk} n_k\, dS = m^{ijk}\, dS_k \; ,$$

gde je t^{ij} tenzor napona, m^{ijk} tenzor naponskih spregova, i to zamenimo u (2.17) i (2.18), pa zatim transformišemo površinske integrale u zapreminske, posle pogodnih sređivanja dobićemo

$$(2.21)\qquad \int_V (t^{ij}_{,j} + \rho f^i - \rho \dot{\overline{v^i}})\, dV = 0 ,$$

$$(2.22)\qquad \int_V (-2t^{[ij]} + 2y^{[i} t^{j]k}_{,k} + m^{ijk}_{,k} + 2\rho y^{[i} f^{j]} + \rho l^{ij} - 2\rho y^{[i} \dot{\overline{v^{j]}}})\, dV = 0 .$$

Element dV možemo u obe izraze proizvoljno da biramo, pa se stoga gornje jednačine svode na

$$(2.23)\qquad t^{ij}_{,j} + \rho f^i = \rho \dot{\overline{v^i}} \; ,$$

$$(2.24)\qquad m^{ijk}_{,k} + \rho l^{ij} = t^{[ij]} \; ,$$

i u ovom obliku predstavljaju prvi i drugi Košijev zakon tanja ili diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma simetričnim tenzorom napona. U literaturi se još naz jednačine Kosera (Cosserat).

U jednačini (2.23) učestvuje celokupni tenzor napona, tj. njegov simetrični i antisimetrični deo, tako da je na osnovu (2.24) možemo napisati u obliku

$$t^{(ij)}_{,j} + m^{ij\alpha}_{,\alpha j} + (\rho \ell^{ij})_{,j} + \rho f^i = \rho \dot{\overline{v^i}} \qquad (2.25)$$

Jedan od osnovnih zadataka pri proučavanju strujanja viskoznog fluida jeste da se odredi raspored brzina u strujnom polju. Znači, potrebno je napisati diferencijalne jednačine kretanja čijom integracijom možemo dobiti raspored brzina. Da bi smo mogli napisati takve diferencijalne jednačine kretanja, na osnovu jednačine (2.25), očigledno je da moremo napone izraziti preko brzine. To ćemo biti u stanju ako znamo reološke (konstitutivne) jednačine za viskozni fluid.

3. Reološke jednačine

Proces viskoznog tečenja po svom karakteru spada u klasu ireverzibilnih procesa. To znači da se pri njegovon proučavanju ne mogu mimoići osnovni zakoni termodinamike ireverzibilnih procesa. Ta činjenica nam, uostalom, i omogućuje da korišćenjem osnovnih teorema i principa termodinamike ireverzibilnih procesa možemo doći do osnovnih jednačina koje karakterišu proces viskoznog tečenja. Polazeći sa te tačke gledišta, autor je u svojoj magistarskoj disertaciji [7] izveo reološke jednačine za viskozni fluid sa naponskim spregovima. Izvodjenje tih jednačina i njihova linearizacija dati su u radu [5] . U ovom odeljku ukratko ćemo izložiti rezultate toga rada jer su nam potrebni za dalje proučavanje.

Viskozni fluid definisan je kao specijalni slučaj viskoelastičnog materijala čiji je reološki model prikazan Kelvinovim telom. Kod ovakvih materijala ukupni tenzor napona sastoji se iz reverzibilnoh i ireverzibilnog dela, tj.

$$t^{ij} = t^{ij}_{(r)} + t^{ij}_{(i)} \quad . \tag{3.1}$$

Za viskozni fluid reverzibilni deo napona iznosi

$$t^{ij}_{(r)} = -p g^{ij} \quad , \tag{3.2}$$

gde p označava hidrostatski pritisak. Ireverzibilni deo tenzora napona obeležen je sa β^{ij} i on se u literaturi obično naziva tenzor viskoznosti. Za ukupni tenzor napona, prema tome, imamo

$$t^{ij} = -p g^{ij} + \beta^{ij} \quad . \tag{3.3}$$

Iz ove definicije viskoznog fluida, s obzirom da je celokupni reverzibilni deo tenzora napona dat hidrostatskim pritiskom, sledi da tenzor naponskih spregova nema reverzibilnog dela, tj.

$$m^{ijk} = m^{ijk}_{(i)} \quad . \tag{3.4}$$

Za odredjivanje ireverzibilnog dela tenzora napona, tj. tenzora viskoznosti, iskorišćen je Ciglerov (H. Ziegler) princip najmanje ireverzibilne sile [4] . Na osnovu tog principa, ireverzibilni deo makroskopske sile iznosi

$$X^{(i)}_{k} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^t}\dot{x}^t\right)^{-1}\phi\,\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}^k} \quad , \tag{3.5}$$

gde je ϕ disipativna funkcija sistema. Ona, kao što se vidi iz jednačine (3.5), igra ulogu potencijala za odredjivanje ireverzibilne makroskopske sile.

U slučaju viskoznog fluida izraz za disipativnu funkciju ima oblik

$$\rho\phi = \beta^{(ij)}d_{ij} - m^{ijk}\omega_{ij,k} \quad . \tag{3.6}$$

Radi mogućnosti primene principa najmanje ireverzibilne sile izraz za disipativnu funkciju je - uvodeći materijalne i prostorne koordinate - transformisan na oblik

$$\phi = \frac{1}{\rho}\tau^{a}\dot{\vartheta}_{a} \qquad (a = 1, 2, \cdots, 27) \quad , \tag{3.7}$$

gde je

$$\tau^{a} = \begin{cases} g_{il}\beta^{(lj)}X^{\alpha}_{;j} - m_{i}^{\cdot jk}X^{\alpha}_{;jk} & \text{za } a = 1, \cdots, 9 \\ -m_{i}^{\cdot jk}X^{\alpha}_{;j}X^{\beta}_{;k} & \text{za } a = 10, 11, \cdots, 27 \end{cases} \tag{3.8}$$

i

$$(3.9) \qquad \mathring{\vartheta}_a = \begin{cases} \mathring{x}^i_{;\alpha} & za \quad \alpha = 1, 2, \cdots, 9 \\ \mathring{x}^i_{;\alpha\beta} & za \quad \alpha = 10, 11, \cdots, 27 \end{cases} .$$

Oblik (3.7) omogućuje primenu principa najmanje ireverzibilne sile, tako da na osnovu (3.5) dobijamo

$$\beta^{(ij)} = \varrho\left(\frac{\partial\phi}{\partial d_{pq}} d_{pq} + \frac{\partial\phi}{\partial\omega_{pq,r}}\omega_{pq,r}\right)^{-1}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial d_{ij}} ,$$

$$m^{ijk} = \varrho\left(\frac{\partial\phi}{\partial d_{pq}} d_{pq} + \frac{\partial\phi}{\partial\omega_{pq,r}}\omega_{pq,r}\right)^{-1}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial\omega_{ij,k}} .$$

Druga od gornjih jednačina predstavlja nepotpuni sistem jednačina za odredjivanje koordinata tenzora naponskih spregova, jer imamo devet nepoznatih koordinata tenzora naponskih spregova a osam medjusobno nezavisnih jednačina. Taj sistem jednačina omogućuje nam da odredimo devijatorski deo tenzora naponskih spregova. Prema tome, gornje jednačine možemo izraziti u obliku

$$(3.10) \qquad \beta^{(ij)} = \varrho\left(\frac{\partial\phi}{\partial d_{pq}} d_{pq} + \frac{\partial\phi}{\partial W_{pq}} W_{pq}\right)^{-1}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial d_{ij}} ,$$

$$(3.11) \qquad \mu^{ij} = -\varrho\left(\frac{\partial\phi}{\partial d_{pq}} d_{pq} + \frac{\partial\phi}{\partial W_{pq}} W_{pq}\right)^{-1}\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial W_{ij}} ,$$

i one predstavljaju najopštiji oblik reoloških jednačina. Jednačine (3.10) i (3.11) su nezavisne od materijalnih simetrija fluida, tj. nezavisne su od kristalne strukture fluida. U tim jednačinama je μ^{ij} devijatorski deo tenzora naponskih spregova, tj.

$$\mu^{ij} = m^{ij} - \frac{1}{3} m_I g^{ij} ,$$

gde je

$$m^{ij} = \frac{1}{2} g^{it} \epsilon_{pzt} m^{pzj} \quad ; \quad m_z = g_{ij} m^{ij} .$$

Isto tako W_{ij} je devijatorski deo gradijenta tenzora vrtloženja, tj.

$$W_{ij} = \omega_{i,j} - \frac{1}{3} \omega_z g_{ij}$$

gde je

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2} g_{it} \epsilon^{pzt} \omega_{pz,j} \quad ; \quad \omega_z = g^{ij} \omega_{i,j} .$$

Medjutim, kako je

$$\omega_z \equiv 0 ,$$

to je gradijent tenzora vrtloženja jednak svom devijatoru,

$$\omega_{i,j} = W_{ij} .$$

Ograničavajući se na proučavanju izotropnih fluida, može se - u literaturi poznatim postupkom, izvršiti linearizacija reoloških jednačina. Tada dobijamo

$$t^{(ij)} = -p g^{ij} + \eta_1 d_z g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij} , \tag{3.12}$$

$$\mu^{ij} = -\left(2\eta_3 W^{ij} + 2\eta_4 W^{ji}\right) . \tag{3.13}$$

Ove jednačine jesu linearne reološke jednačine izotropnog viskoznog fluida sa nesimetričnim tenzorom napona. One su u potpunoj analogiji sa linearnim reološkim jednačinama koje je izveo Kojter (W. T. Koiter, [8]) za elastične materijale sa naponskim spregovima.

Jednačina (3.12) identična je sa reološkom jednačinom izotropnog viskoznog fluida u slučaju kada je tenzor napona simetričan, dok je jednačina (3.13) posledica pretpostavke o egzistenciji naponskih spregova u viskoznom fluidu. Kao što se iz jednačina vidi u njima figurišu četiri medjusobno nezavisne materijalne konstante η_1, η_2, η_3 i η_4.

Za odredjivanje antisimetričnog dela tenzora napona, na osnovu jednačine (2.24), potrebno je da znamo izraz za tenzor naponskih spregova. Kako mi, medjutim, nismo u mogućnosti da odredimo tenzor naponskih spregova, već samo njegov devijatorski deo, to ne možemo odrediti ni antisimetrični deo tenzora napona.

4. Diferencijalne jednačine kretanja

Kao i u ostalim slučajevima u mehanici kontinuuma, tako se i pri izvodjenju reoloških jednačina viskoznog fluida sa nesimetričnim tenzorom napona pokazuje da postoji neodredjenost tenzora naponskih spregova. Naime, za odredjivanje devet koordinata tenzora naponskih spregova na raspolaganju su samo osam jednačina. Poznata je činjenica, medjutim, da se u euklidskom prostoru i pored te neodredjenosti mogu napisati diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma.

Diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma sa nesimetričnim tenzorom napona, u slučaju otsustva zapreminskih sila i zapreminskih spregova, imaju oblik

$$t^{ij}_{\ ,j} = \rho \frac{Dv^i}{Dt} , \tag{4.1}$$

$$m^{ijk}_{\ \ ,k} = t^{[ij]} . \tag{4.2}$$

U prvoj od ovih jednačina pojavljuje se ukupan tenzor napona, tj. njegov simetričan i antisimetričan deo.

Linearne reološke jednačine za izotropni viskozni fluid imaju oblik

$$t^{(ij)} = -p g^{ij} + \eta_1 d_I g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij} , \tag{4.3}$$

$$\mu^{ij} = -(2\eta_3 w^{ij} + 2\eta_4 w^{ji}) . \tag{4.4}$$

Koristeći relacije

$$\mu^{ij} = \frac{1}{2} g^{ia} \epsilon_{bca} \mu^{bcj} ,$$

$$m^{ij} = \frac{1}{2} g^{is} \epsilon_{pqs} m^{pqj} ,$$

$$m_I = g_{st} m^{st} = \frac{1}{2} \epsilon_{pqr} m^{pqr} ,$$

devijatorski deo tenzora naponskih spregova

$$\mu^{ij} = m^{ij} - \frac{1}{3} m_I g^{ij}$$

možemo napisati u obliku

$$\mu^{ijk} = m^{ijk} - \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr} . \tag{4.5}$$

Koristeći još relacije

$$W^{ij} = \frac{1}{2} g^{is} \epsilon_{pqs} \omega^{pq,j} ,$$

$$W^{ji} = \frac{1}{2} g^{ja} \epsilon_{bca} \omega^{bc,i} ,$$

jednačinu (4.4) možemo napisati u obliku

$$\mu^{ijk} = -\left(2\eta_3 \omega^{ij,k} + \eta_4 g_{mn} g^{kr} \delta^{ijn}_{pqr} \omega^{pq,m}\right) ,$$

ili, zamenjujući μ^{ijk} iz (4.5), u obliku

$$m^{ijk} = \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr} - 2\eta_3 \omega^{ij,k} - \eta_4 g_{mn} g^{kr} \delta^{ijn}_{pqr} \omega^{pq,m} , \tag{4.6}$$

pri čemu prvi član na desnoj strani ostaje neodredjen.

Na osnovu jednačine (4.2), za antisimetrični deo tenzora napona sada imamo

$$t^{[ij]} = \frac{1}{3!} \delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr}{}_{,k} - 2\eta_3 g^{\ell k} \omega^{ij}{}_{,\ell k} , \tag{4.7}$$

pri čemu se prilikom izračunavanja divergencije poslednji član iz (4.6) anulirao jer je

$$\delta^{ijn}_{pqr}\,\omega^{pq,r} \equiv 0 .$$

Ako jednačini (4.3) dodamo jednačinu (4.7) dobićemo izraz za ukupan tenzor napona

$$t^{ij} = -p g^{ij} + \eta_1 d_I g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij} + \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr}{}_{,k} - 2\eta_3 g^{lk}\omega^{ij}{}_{,lk} , \tag{4.8}$$

odakle sledi

$$t^{ij}{}_{,j} = -p_{,j} g^{ij} + \eta_1 d_{I,j} g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij}{}_{,j} + \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr}{}_{,kj} - 2\eta_3 g^{lk}\omega^{ij}{}_{,lkj} .$$

Medjutim, kako je

$$\delta^{ijk}_{pqr} m^{pqr}{}_{,kj} \equiv 0 ,$$

to dobijamo

$$t^{ij}{}_{,j} = -p_{,j} g^{ij} + \eta_1 d_{I,j} g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij}{}_{,j} - 2\eta_3 g^{lk}\omega^{ij}{}_{,lkj} .$$

Zamenjujući ovo u jednačinu (4.1) dobijamo

$$\rho\frac{Dv^i}{Dt} = -p_{,j} g^{ij} + \eta_1 d_{I,j} g^{ij} + 2\eta_2 d^{ij}{}_{,j} - 2\eta_3 g^{lk}\omega^{ij}{}_{,lkj} . \tag{4.9}$$

Izvršimo li u jednačini (4.9) sledeće zamene

$$d_{I,j} = d^l{}_{l,j} = v^l{}_{,lj} ,$$

$$d^{ij}{}_{,j} = \frac{1}{2}(v^{i,j} + v^{j,i})_{,j} = \frac{1}{2} g^{kl} v^i{}_{,kl} + \frac{1}{2} g^{ij} v^l{}_{,lj} ,$$

$$\omega^{ij}{}_{,lkj} = \frac{1}{2} g^{jt} v^i{}_{,tlkj} - \frac{1}{2} g^{it} v^j{}_{,tlkj} ,$$

ona dobija oblik

$$\rho\frac{Dv^i}{Dt} = -p_{,j} g^{ij} + (\eta_1+\eta_2) g^{ij} v^k{}_{,kj} + \eta_2 g^{kl} v^i{}_{,kl} - \eta_3 g^{kl} g^{pq} v^i{}_{,klpq} + \eta_3 g^{ij} g^{kl} v^p{}_{,pjkl} . \tag{4.10}$$

U vektorskom obliku (4.1o) izgleda

$$(4.11)\ \rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p+(\eta_1+\eta_2)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})+\eta_2\Delta\vec{v}-\eta_3\Delta\Delta\vec{v}+\eta_3\Delta[\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})].$$

Materijalne konstante η_1 i η_2 povezane su sa tzv. koeficijentom zapreminske viskoznosti η_v, tj.

$$\eta_v=\eta_1+\frac{2}{3}\eta_2$$

tako da je

$$\eta_1+\eta_2=\eta_v+\frac{4}{3}\eta_2$$

pa jednačina (4.11) može da se napiše u obliku

$$(4.12)\ \rho\frac{d\vec{v}}{dt}=-\operatorname{grad}p+(\eta_v+\frac{4}{3}\eta_2)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})+\eta_2\Delta\vec{v}-\eta_3\Delta\Delta\vec{v}+\eta_3\Delta[\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})],$$

gde je η_v koeficijent zapreminske viskoznosti, η_2 koeficijent smičuće viskoznosti, a η_3 koeficijent rotacione viskoznosti. Ovaj naziv za η_3 potiče otuda što se on u reološkim jednačinama pojavljuje kao množilac uz gradijent tenzora vrtloženja.

Koeficijent rotacione viskoznosti η_3 karakteriše "rotaciono trenje" izmedju fluidnih delića u strujnom polju. Postojanje ovog trenja izmedju fluidnih delića dovodi do promene gradijenta tenzora vrtloženja u strujnom polju, tj. do pojave naponskih spregova u fluidu.

Jednačina (4.12) predstavlja najopštiji oblik diferencijalnih jednačina kretanja viskoznog fluida sa nesimetričnim tenzorom napona. Kao što se iz jednačine vidi ona je opštija od Navie-Stoksove jednačine, tj. diferencijalne jednačine kretanja viskoznog fluida u slučaju simetričnog tenzora napona. Razlika je u tome što se u jednačini (4.12) pojavljuju poslednja dva člana kao posledica uticaja naponskih spregova. U slučaju odsustva naponskih spregova ($\eta_3=0$) jednačina (4.12) se svodi na Navie-Stoksovu.

U literaturi se proučava i tzv. fluid bez zapreminske viskoznosti ($\eta_v = 0$). U ovom slučaju diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik

$$(4.13)\quad \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad}p + \frac{1}{3}\eta_2 \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) + \eta_2\Delta\vec{v} - \eta_3\Delta\Delta\vec{v} + \eta_3\Delta\left[\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v})\right].$$

Ako je fluid nestišljiv (u kom slučaju je, jasno, bez zapreminske viskoznosti), s obzirom da je

$$\rho = const., \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

diferencijalne jednačine kretanja imaju oblik

$$(4.14)\qquad \rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad}p + \eta_2\Delta\vec{v} - \eta_3\Delta\Delta\vec{v}.$$

Poslednji član u ovoj jednačini, za razliku od Navie-Stoksove jednačine za nestišljiv viskozni fluid, predstavlja uticaj naponskih spregova.

5. Granični uslovi

Uvodjenje naponskih spregova, pri opisivanju naponskog stanja viskoznog fluida, ima za posledicu potrebu da se pri rešavanju konkretnih problema formiraju složeniji granični uslovi. Njihovo formiranje vrši se na osnovu uzajamnog dejstva fluida i graničnih površina. Imajući u vidu da je u većini slučajeva nemoguće tačno ustanoviti kakav je uticaj graničnih površina na fluidne deliće, to se pri formiranju graničnih uslova pristupa, manje ili više, idealizaciji. Pravilno formiranje ovakvih graničnih uslova mora se, na kraju, potvrditi eksperimentom.

Granični uslovi po svom karakteru mogu biti kinematički i dinamički. Kinematički granični uslovi sastoje se u tome što se brzini fluidnih delića v^i i njihovoj ugaonoj brzini ω^i, na graničnim površinama daju odredjene (fiksirane) vrednosti.

U mehanici viskoznog fluida najčešće se pretpostavlja da se fluidni delići "lepe" uz graničnu površinu, tako da je brzina delića jednaka brzini površine. U tom slučaju imamo sledeća tri granična uslova

$$(5.1) \qquad \vec{v}/_S = \vec{V} \quad \left(v^i/_S = V^i\right),$$

gde je $\vec{v}$ brzina fluidnih delića, a $\vec{V}$ brzina granične površine S.

U nekim slučajevima moguće je da je uticaj granične površine na fluid toliko jak, da može da se uzme da je ugaona brzina delića na površini jednaka ugaonoj brzini same površine. U tom slučaju je

$$(5.2) \qquad \omega^i/_S = \Omega^i ,$$

gde je $\omega^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\omega_{jk}$ ugaona brzina delića, a Ω^i ugaona brzina granične površine.

Naponski spregovi u viskoznom fluidu povezani su, kao što se iz reološke jednačine vidi, sa gradijentom tenzora vrtloženja. Znači, naponski spregovi će postojati u fluidu ako u strujnom polju postoji promena gradijenta vrtloženja; a to znači da postoji "rotaciono trenje" izmedju fluidnih delića. Ovo trenje okarakterisano je koeficijentom rotacione viskoznosti. Ako u strujnom polju nema rotacionog trenja, nema ni naponskih spregova, pa možemo reći da se fluidni delići slobodno vrtlože.

Na isti način kao izmedju fluidnih delića, postoji rotaciono trenje izmedju delića i granične površine. U ovom slučaju, medjutim, to trenje ne zavisi samo od materijalnih osobina fluida (koeficijenata viskoznosti), već, na neki način, i od karaktera granične površine. Pri formiranju graničnih uslova (5.2) pretpostavili smo da je rotaciono trenje toliko jako da deliće "kruto" vezuje uz graničnu površinu.

U nekim slučajevima, u kojima je uticaj granične površine na ugaonu brzinu delića neznatan, moguće je uzeti da su naponski spregovi na graničnoj površini jednaki nuli. To znači da na graničnoj površini zanemarujemo rotaciono trenje, tj. pretpostavljamo da se delići na graničnoj površini slobodno vrtlože. Tada imamo sledeća tri dinamička granična uslova

$$(5.3) \qquad m^{ij}\big|_S = m^{ijk} n_k \big|_S = 0\,,$$

gde su m^{ij} koordinate naponskog sprega, m^{ijk} koordinate tenzora naponskih spregova i n_k jedinični vektor normale na graničnoj površini.

Granični uslovi (5.2) i (5.3) predstavljaju izvesnu idealizaciju. Koji ćemo od tih uslova uzeti zavisi, jasno, od samog problema.

Postojanje rotacionog trenja na graničnoj površini dovodi do pojave naponskih spregova na površini, pa u tom slučaju treba uzeti u obzir uticaj površinskih naponskih spregova na ugaonu brzinu delića. S obzirom da naponski spregovi na površini ne mogu biti zadani, to moramo, na neki način, ustanoviti mehanizam za njihovo odredjivanje. To znači da treba da ustanovimo vezu izmedju površinskih naponskih spregova i ugaone brzine delića na graničnoj površini. U tom cilju, najjednostavnije je pretpostaviti da su površinski naponski spregovi proporcionalni relativnoj ugaonoj brzini delića na graničnoj površini [3] (pod relativnom ugaonom brzinom ovde podrazumevamo razliku izmedju ugaone brzine delića na graničnoj površini i ugaone brzine sa me površine). Znači, imamo

(5.4) $$M_i\big|_S = \alpha_{ij}\bar{\omega}^j ,$$

gde je M_i naponski spreg (računat po jedinici površine), $\bar{\omega}^i$ relativna ugaona brzina data sa

(5.5) $$\bar{\omega}^i = \omega^i - \Omega^i ,$$

i gde su α_{ij} koeficijenti rotacionog površinskog trenja.

S obzirom da je

$$M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ipq}\, m^{pqr} n_r$$

i

$$\bar{\omega}^j = \frac{1}{2}\epsilon^{jab}(\omega_{ab} - \Omega_{ab}) ,$$

to se izraz (5.4) može napisati u obliku

(5.6) $$m^{ij}\big|_S = m^{ijk} n_k\big|_S = \alpha_{st}\,\epsilon^{sij}\epsilon^{tpq}(\omega_{pq} - \Omega_{pq})\big|_S ,$$

Ovakvo formiranje graničnih uslova (5.6), koje je, treba naglasiti, proisteklo iz fizičkih razmatranja, treba potvrditi eksperimentom. To znači da se koeficijenti rotacionog trenja mogu odrediti jedino eksperimentom. Imajući to u vidu kao i činjenicu da se i koeficijenti viskoznosti (smičuće i rotacione) moraju odredjivati eksperimentalno, vidi se na kakve se teškoće nailazi prilikom proučavanja konkretnog strujanja.

Granični uslovi (5.6) sadrže, kao specijalni slučaj, uslove (5.2) i (5.3). Naime, ako koeficijenti površinskog rotacionog trenja α_{st} teže beskonačnosti, onda se (5.6) svodi na (5.2). Isto tako, ako koeficijenti α_{st} teže nuli (što praktično znači ako zanemarimo površinsko rotaciono trenje), uslovi (5.6) se svode na (5.3).

Na osnovu prethodnog vidimo da za rešavanje konkretnih problema, pored graničnih uslova koji se koriste u klasičnoj mehanici viskoznog fluida, imamo na raspolaganju još tri granična uslova. To su uslovi (5.2), (5.3) ili (5.6). Uslovi (5.1) koriste se i u klasičnoj mehanici fluida.

U našim daljim razmatranjima, prilikom proučavanja konkretnih strujanja, pretpostavićemo da je uticaj graničnih površina na ugaonu brzinu delića neznatan, tj. zanemarivaćemo površinsko rotaciono trenje. To znači da ćemo se koristiti graničnim uslovima (5.1) i (5.3). Jasno je da ovakav izbor graničnih uslova predstavlja izvesnu idealizaciju, jer sigurno je da uticaj graničnih površina postoji bez obzira na njegovu veličinu. Ovakav izbor graničnih uslova posledica je naše želje da ustanovimo da li će se i u kojim slučajevima u viskoznom fluidu pojaviti naponski spregovi nezavisno od uticaja graničnih površina. Drugim rečima, cilj nam je da proučimo strujanja viskoznog fluida sa naponskim spregovima čija pojava nije posledica uticaja graničnih površina.

6. Stacionarno viskometrijsko tečenje nestišljivog fluida

Svi do sada dobijeni rezultati izvedeni su bez posebnih ograničenja na pojedine vrste strujanja. U našim daljim razmatranjima ograničićemo se na proučavanje strujanja nestišljivog izotropnog fluida, pri kome je polje brzine odredjeno kontravarijantnim koordinatama

$$v^i = \{0\ ,\ v(x^1), 0\}\ , \tag{6.1}$$

u nekom dopustivom ortogonalnom koordinatnom sistemu x^1, x^2, x^3, sa kovarijantnim metričkim tenzorom

$$g_{ij} = \begin{Bmatrix} [h_1(x^1)]^2 & 0 & 0 \\ 0 & [h_2(x^1)]^2 & 0 \\ 0 & 0 & [h_3(x^1)]^2 \end{Bmatrix} . \tag{6.2}$$

Pretpostavimo još da su koordinate x^1 i x^2 ravanske, tj. da koordinatne linije x^1 i x^2 leže u ravni $x^3 = 0$.

Strujanja sa ovakvim poljem brzine predstavljaju posebnu klasu strujanja; ona obuhvataju ravanska i osnosimetrična strujanja. Pri proučavanju ovakvih strujanja dovoljno je proučiti strujanje u ravni $x^3 = 0$, jer je ono identično sa strujanjima u svim ostalim ravnima $x^3 = \text{const.}$, bilo da se radi o ravanskom ili osnosimetričnom strujanju. S obzirom da ćemo proučavati strujanja u ravni $x^3 = 0$, to će promenljive koordinate biti x^1 i x^2, tj. strujanje je dvodimenzionalno.

U slučaju ovakvog dvodimenzionalnog strujanja nestišljivog fluida, reološke jednačine (4.3) i (4.4) redukuju se na oblik

(6.3) $$t^{(ij)} = -pg^{ij} + 2\eta_2 d^{ij} \quad , \quad d^i_i = 0 \ ,$$

(6.4) $$m^{ijk} = -2\eta_3 \omega^{ij,k} \ ,$$

pri čemu tenzor naponskih spregova ima samo dve nezavisne koordinate, i to

(6.5) $$m^{121} = -2\eta_3 \omega^{12,1}$$

i

(6.6) $$m^{122} = -2\eta_3 \omega^{12,2} \ .$$

Na osnovu jednačina (6.3), (6.4) i (2.24), s obzirom da zanemarujemo zapreminske sile i zapreminske spregove, za ukupni tenzor napona imamo

(6.7) $$t^{ij} = -pg^{ij} + 2\eta_2 d^{ij} - 2\eta_3 g_{kl} \omega^{ij,kl} \ .$$

Kod nestišljivih (inkompresibilnih) materijala hidrostatski pritisak je reološki neodredjen, pa se kao takav odredjuje iz dinamičkih graničnih uslova. To znači da od polja deformacije ne može zavisiti ukupni tenzor napona, već samo tenzor viskoznosti

(6.8) $$\beta^{ij} = 2\eta_2 d^{ij} - 2\eta_3 g^{kl} \omega^{ij}{}_{,kl} \ .$$

Ako matricu fizičkih koordinata tenzora β^{ij} obeležimo sa $(\underset{\sim}{B})$, a matrice fizičkih koordinata tenzora d^{ij} i tenzora $g^{kl}\omega^{ij}{}_{,kl}$, sa $(\underset{\sim}{D})$ i $(\underset{\sim}{C})$ respektivno, tada (6.8) možemo napisati u obliku

(6.9) $$\underset{\sim}{B} = 2\eta_2 \underset{\sim}{D} - 2\eta_3 \underset{\sim}{C} \ ,$$

gde je

$$(6.10)\qquad (\underset{\sim}{B}) = \begin{pmatrix} \beta_{<11>} & \beta_{<12>} & \beta_{<13>} \\ \beta_{<21>} & \beta_{<22>} & \beta_{<23>} \\ \beta_{<31>} & \beta_{<32>} & \beta_{<33>} \end{pmatrix},$$

$$(6.11)\qquad (\underset{\sim}{D}) = \begin{pmatrix} 0 & h_1h_2d^{12} & 0 \\ h_1h_2d^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h_1h_2d^{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(6.12)\qquad (\underset{\sim}{C}) = \begin{pmatrix} 0 & h_1h_2\Delta\omega^{12} & 0 \\ -h_1h_2\Delta\omega^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = h_1h_2\Delta\omega^{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iz (6.9) vidimo da je tenzor viskoznosti $\underset{\sim}{B}$ potpuno odredjen ako znamo tenzore $\underset{\sim}{D}$ i $\underset{\sim}{C}$. Na osnovu fizičkog rezonovanja, jasno je da tenzor viskoznosti $\underset{\sim}{B}$ ne sme zavisiti od izbora koordinatnog sistema. Ovu činjenicu izražavamo na taj način što kažemo da je zadovoljen princip materijalne indiferencije. To znači da $\underset{\sim}{B}$ mora biti izotropna tenzorska funkcija tenzorskih promenljivih $\underset{\sim}{D}$ i $\underset{\sim}{C}$, ili, drugim rečima, relacija (6.9) mora biti invarijantna u odnosu na ortogonalne transformacije, tj.

$$(6.13)\qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}(2\eta_2\underset{\sim}{D} - 2\eta_3\underset{\sim}{C})\underset{\sim}{Q}^T = 2\eta_2\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Q}^T - 2\eta_3\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{Q}^T,$$

gde je $\underset{\sim}{Q}$ ma koji ortogonalni tenzor, koji, prema tome, zadovoljava relaciju

$$(6.14)\qquad \underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^{-1},$$

gde je $\underset{\sim}{Q}^T$ transponovano $\underset{\sim}{Q}$.

Ako za $\underset{\sim}{Q}$ izaberemo tenzor sa sledećim fizičkim koordinatama

$$(6.15) \qquad (\underset{\sim}{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onda ortogonalna transformacija koja odgovara ovako izabranom tenzoru $\underset{\sim}{Q}$ predstavlja ogledanje oko ravni $x^3 = 0$. Očigledno je, s obzirom na istovetnost strujanja u svim ravnima koje su paralelne ravni $x^3 = 0$, da tenzor viskoznosti mora biti isti u tačkama koje su simetrične u odnosu na ravan $x^3 = 0$. Nije teško proveriti da se u ovom slučaju, s obzirom da je

$$(6.16) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{D},$$

$$(6.17) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{C},$$

relacija (6.9) svodi na

$$(6.18) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{B},$$

što znači da se tenzor viskoznosti ne menja pri ovakvom ogledanju. Iz (6.18) sledi da matrica tenzora $\underset{\sim}{B}$ mora imati oblik

$$(6.19) \qquad (\underset{\sim}{B}) = \begin{pmatrix} \beta_{\langle 11\rangle} & \beta_{\langle 12\rangle} & 0 \\ \beta_{\langle 21\rangle} & \beta_{\langle 22\rangle} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{\langle 33\rangle} \end{pmatrix}, \qquad \beta_{\langle 11\rangle} + \beta_{\langle 22\rangle} + \beta_{\langle 33\rangle} = 0.$$

U analogiji sa definicijom koju je dao B. Kolmen (B. Coleman) [6] u slučaju strujanja fluida sa simetričnim tenzorom napona, strujanja čije je polje brzine dato sa (6.1), polje deformacija sa (6.11) i (6.12) i čiji tenzor viskoznosti, prema tome, ima oblik (6.19), spadaju u klasu viskometrijskih strujanja. U ovu klasu strujanja spadaju strujanja izmedju dveju paralelnih ravni, strujanja kroz prave kružne cevi kao i strujanja izmedju dva koaksijalna rotaciona cilindra, što su uglavnom strujanja koja se odvijaju u aparatima za eksperimentalno odredjivanje koeficijenata viskoznosti, tzv. viskozimetrima.

Iz (6.9) za matricu fizičkih koordinata tenzora viskoznosti dobijamo

$$(6.20)\quad (\underset{\sim}{B})=\begin{pmatrix} 0 & 2h_1h_2(\eta_2 d^{12}-\eta_3\Delta\omega^{12}) & 0 \\ 2h_1h_2(\eta_2 d^{12}+\eta_3\Delta\omega^{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

što je u saglasnosti sa (6.19).

Za ukupni tenzor napona, prema (6.7), imamo

$$(6.21)\quad \{t^{ij}\}=\begin{Bmatrix} -pg^{11} & 2\eta_2 d^{12}-2\eta_3\Delta\omega^{12} & 0 \\ 2\eta_2 d^{12}+2\eta_3\Delta\omega^{12} & -pg^{22} & 0 \\ 0 & 0 & -pg^{33} \end{Bmatrix}$$

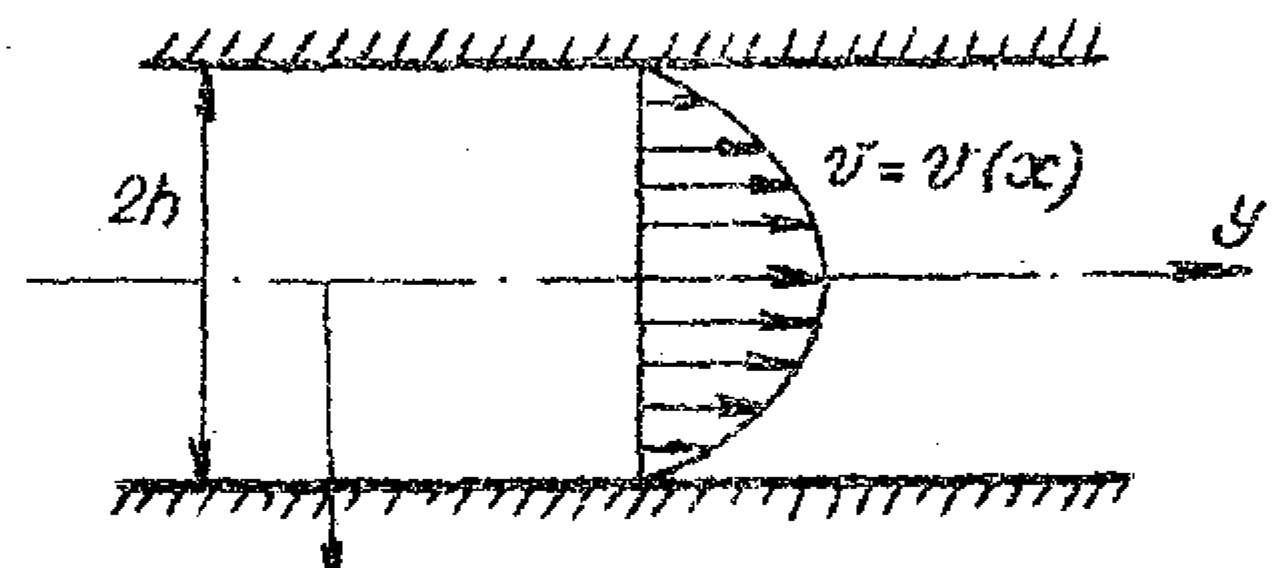
ili u fizičkim koordinatama

$$(6.22)\quad (\underset{\sim}{T})=\begin{pmatrix} -p & 2h_1h_2(\eta_2 d^{12}-\eta_3\Delta\omega^{12}) & 0 \\ 2h_1h_2(\eta_2 d^{12}+\eta_3\Delta\omega^{12}) & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

U našim daljim izlaganjima bavićemo se pojedinačnim proučavanjima gore navedenih strujanja.

7. Strujanje izmedju dve ravne ploče

Posmatrajmo ustaljeno strujanje nestišljivog fluida izmedju dve beskonačne ravne, medjusobno paralelne ploče na uzajamnom rastojanju 2h. Pretpostavimo da brzina ima fizičke koordinate



sl. 7.1

(7.1) $\vec{v} = \{0, v(x), 0\}$.

Ovo strujanje možemo proučavati kao ravansko strujanje prikazano na slici (7.1). Iz jednačine neprekidnosti

(7.2) $$d_I = v^i_{,i} = 0,$$

dobijamo

(7.3) $$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad , \quad v_y = v(x) \; ,$$

a iz pretpostavke da je strujanje ustaljeno

(7.4) $$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \; ,$$

Unoseći (7.3) i (7.4) u diferencijalne jednačine kretanja

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta_2 \Delta \vec{v} - \eta_3 \Delta\Delta \vec{v} \; ,$$

dobijamo sledeće dve diferencijalne jednačine

(7.5) $$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_2 \frac{d^2 v}{dx^2} - \eta_3 \frac{d^4 v}{dx^4} ,$$

(7.6) $$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} .$$

Iz (7.6) sledi

$$p = p(y) ,$$

tako da (7.5) možemo napisati u obliku

(7.7) $$\frac{dp}{dy} = \eta_2 \frac{d^2 v}{dx^2} - \eta_3 \frac{d^4 v}{dx^4} .$$

S obzirom da leva strana ove jednačine funkcija samo od y, a desna samo od x, to se ona razdvaja na sledeće dve diferencijalne jednačine

(7.8) $$\frac{dp}{dy} = -k , \quad (k \gtrless 0) ,$$

(7.9) $$\frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\eta_2}{\eta_3}\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{k}{\eta_3} = 0 ,$$

gde je k proizvoljna konstanta.

Integracijom jednačine (7.8) dobijamo

(7.1o) $$p = p_0 - ky ,$$

odakle zaključujemo da pritisak opada u pravcu strujanja, tj. strujanje se ostvaruje pod dejstvom konstantnog gradijenta pritiska. Integraciona konstanta p_0 predstavlja pritisak u tačkama y = o.

Integracijom jednačine (7.9) dobijamo

(7.11) $$v = -\frac{k}{2\eta_2} x^2 + C_1 \frac{\eta_3}{\eta_2} e^{\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} x} + C_2 \frac{\eta_3}{\eta_2} e^{-\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} x} + C_3 x + C_4 .$$

Za odredjivanje integracionih konstanata potrebna su četiri uslova za brzinu. Granični uslovi (5.1) i (5.3) daju nam sledeća dva uslova

(7.12) $$v\big|_S = 0 \quad ,$$

(7.13) $$m^{ij}\big|_S = m^{ijk} n_k\big|_S = 0 \, .$$

Uslov (7.13), s obzirom da jedinična normala na graničnim površinama ima koordinate

(7.14) $$\vec{n} = \{1 \, , \, 0 \, , \, 0\} \quad ,$$

svodi se na

(7.15) $$m^{12}\big|_S = m^{121}\big|_S = 0 \quad .$$

Na osnovu (6.4), imamo

(7.16) $$m^{121} = -2\eta_3 \omega^{12,1} = -2\eta_3 v''(x) \, ,$$

tako da je (7.15) identično sa

(7.17) $$v''(\pm h) = 0 \, .$$

Iz očigledne simetrije strujanja, u odnosu na srednju ravan izmedju ploča, sledi da brzina u toj ravni mora imati ekstremnu vrednost. Prema tome, kao treći uslov za brzinu imamo

(7.18) $$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = v'(0) = 0 \quad .$$

Medjutim, kako je u ovom slučaju

(7.19) $$v'(x) = \omega(x) \quad ,$$

to (7.18) možemo napisati u obliku

$$\omega(o) = 0 \, . \tag{7.20}$$

Na kraju, iz izraza za brzinu (7.11) vidimo da izvod brzine, tj. vrtlog, nije linearna funkcija od x. Isto tako ni drugi izvod brzine, tj. gradijent vrtloga, nije linearna funkcija od x, pa postoji promena gradijenta vrtloga od jedne do druge tačke. Imajući to u vidu kao i simetriju strujanja sledi da vrtlog ima prevojnu tačku na y-osi, tako da imamo četvrti uslov za brzinu

$$\omega''(o) = v'''(o) = 0 \, . \tag{7.21}$$

Prema tome, za odredjivanje integracionih konstanata na raspolaganju su nam sledeća četiri uslova za brzinu

(7.22)

1. $v(h) = v(-h) = 0,$

2. $\omega(o) = v'(o) = 0,$

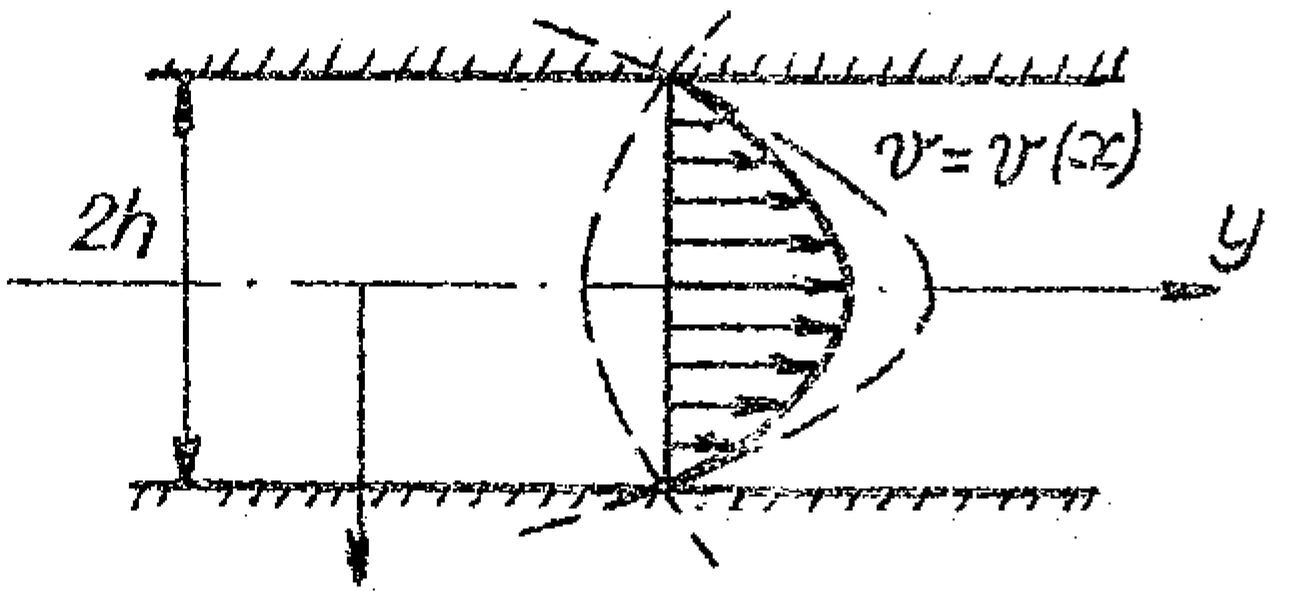
3. $m^{(2)}(\pm h) = \omega'(\pm h) = v''(\pm h) = 0,$

4. $\omega''(o) = v'''(o) = 0 \, .$

Ako iz ovih uslova odredimo integracione konstante, posle pogodnih sredjivanja dobijamo

$$v = \frac{k}{2\eta_2}(-x^2 + h^2) + \frac{k\eta_3}{\eta_2^2}\left[\frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\,x\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\,h\right)} - 1\right] . \tag{7.23}$$

Ovim izrazom odredjen je raspored brzina u strujnom polju, sl. (7.2). Prvi član na desnoj strani pretstavlja rešenje za brzinu u slučaju odsustva naponskih spregova, tj. u slučaju simetričnog tenzora napona, dok drugi član predstavlja uticaj naponskih spregova na veličinu i raspored (profil) brzina. Klasično rešenje dobićemo iz (7.23) ako stavimo da je $\eta_3 = 0$.

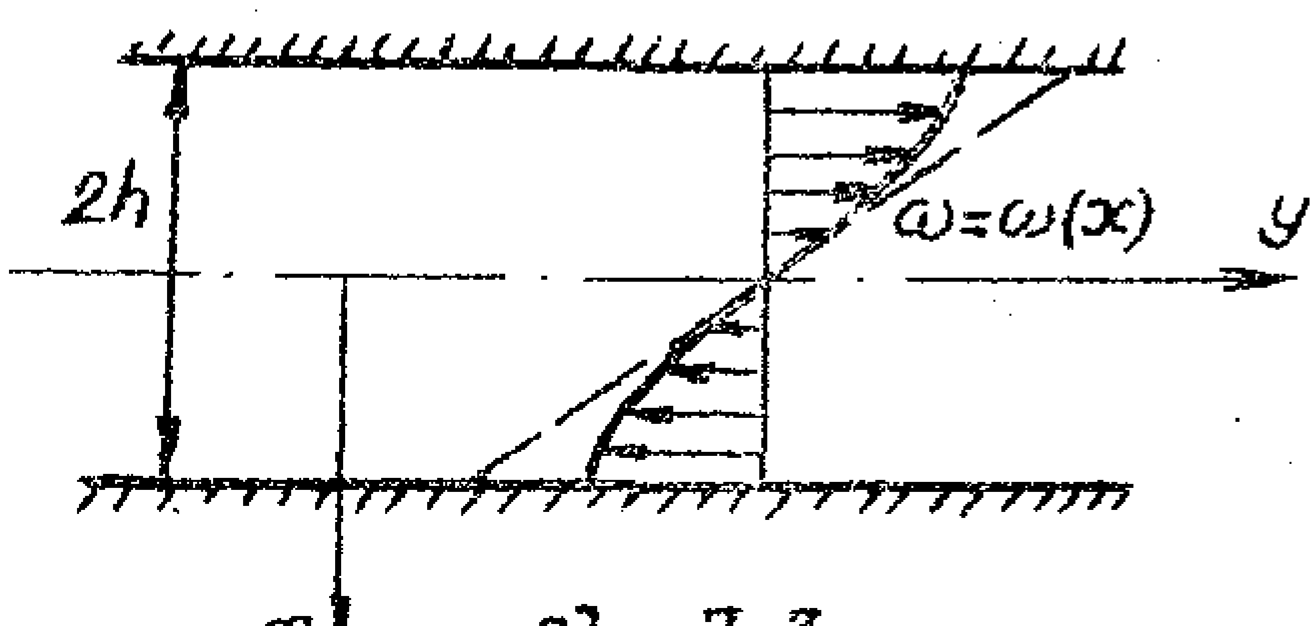


sl. 7.2

Isto tako za razliku od klasičnog rešenja, gde je vrtlog ω bio linearna funkcija od x, ovde to nije slučaj. Naime, diferenciranjem izraza (7.23) dobijamo izraz za vrtlog,

$$\omega = -\frac{\kappa}{\eta_2} x + \frac{\kappa\sqrt{\eta_2\eta_3}}{\eta_2^2} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, x\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, h\right)} , \tag{7.24}$$

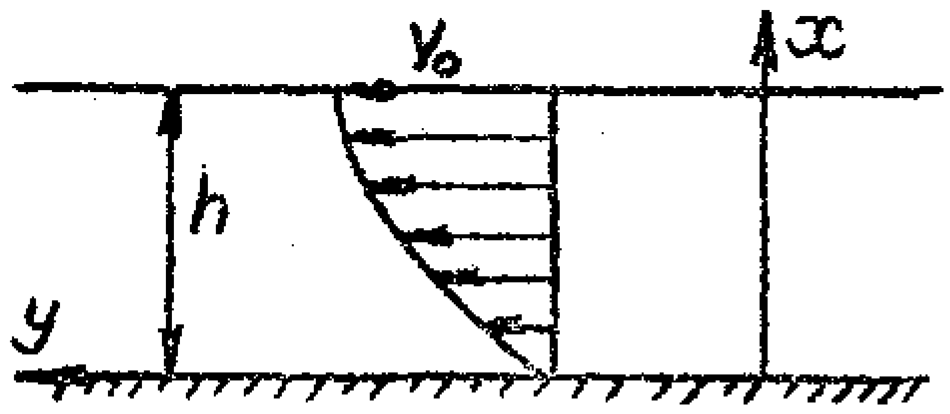
čiji je raspored prikazan na slici (7.3). Prema tome, vidimo da u strujnom polju, kao posledica pretpostavke o egzistenciji naponskih spregova, postoji promena gradijenta vrtloga od jedna do druge tačke. Vrtlog je jednak nuli na sredini izmedju ploča i u tim tačkama gradijent vrtloga ima najveću vrednost, tj. naponski spregovi u tim tačkama imaju najveće vrednosti. Na površinama ploča naponski spregovi su jednaki nuli pa je i gradijent vrtloga u tim tačkama jednak nuli, tj. vrtlog u tim tačkama ima stacionarnu vrednost.



sl. 7.3

Na osnovu predhodnog možemo zaključiti da pretpostavka o egzistenciji naponskih spregova ima za posledicu promenu gradijenta vrtloženja od jedne do druge tačke u strujnom polju. Iz tog razloga u reološkim jednačinama, pa prema tome i u diferencijalnim jednačinama kretanja kao i u njihovim integralima, pojavljuje se koeficijent rotacione viskoznosti η_3 , koji karakteriše unutrašnji otpor promeni gradijenta vrtloženja. Kao rezultat toga dobijaju se nešto smanjene brzine u odnosu na one koje se dobijaju u klasičnom slučaju.

Izmenićemo sada problem utoliko što ćemo uzeti da se jedna od ploča kreće konstantnom brzinom V_o, sl. (7.4).



sl. 7.4

U ovom slučaju integracione konstante odredjujemo iz sledećih graničnih uslova

(7.25)
$$1.\ v(o)=0\ ,\qquad 2.\ v(h)=V_o\ ,\qquad 3.\ v''(o)=0\ ,\qquad 4.\ v''(h)=0\ ,$$

tako da posle izvesnih sredjivanja za brzinu dobijamo

(7.26)
$$v=-\frac{k}{2\eta_2}x^2+\left(\frac{V_o}{h}+\frac{k}{2\eta_2}h\right)x+$$
$$+\frac{k\,\eta_3}{\eta_2^2\sinh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}h\right)}\left[\sinh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}x\right)-\sinh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}h\right)+\sinh\left\{\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}(h-x)\right\}\right].$$

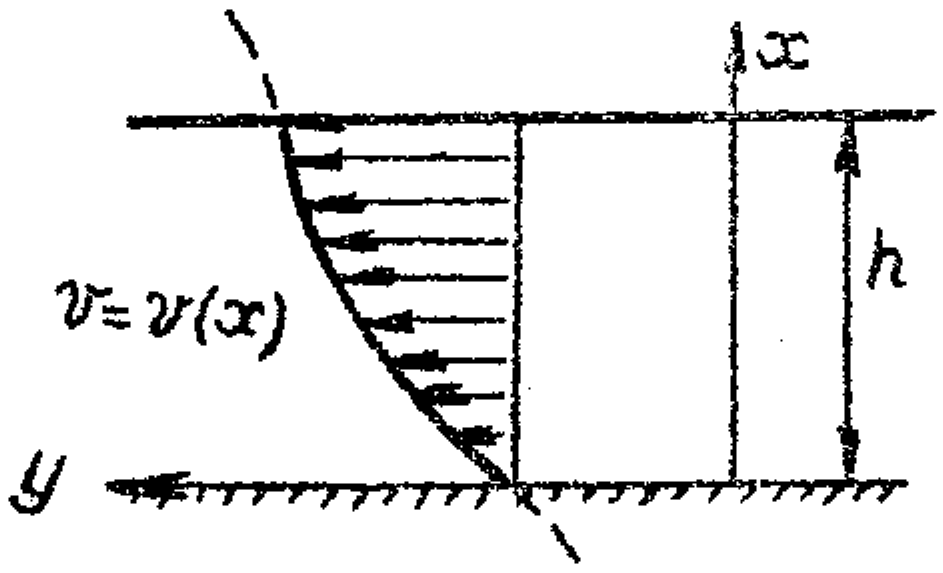
Kao i ranije i ovde poslednji član predstavlja uticaj naponskih spregova. Klasično rešenje dobijamo stavljajući da je η_3 = o.

U zavisnosti od dejstva konstantnog gradijenta pritiska, ovde mogu nastupiti tri karakteristična slučaja:

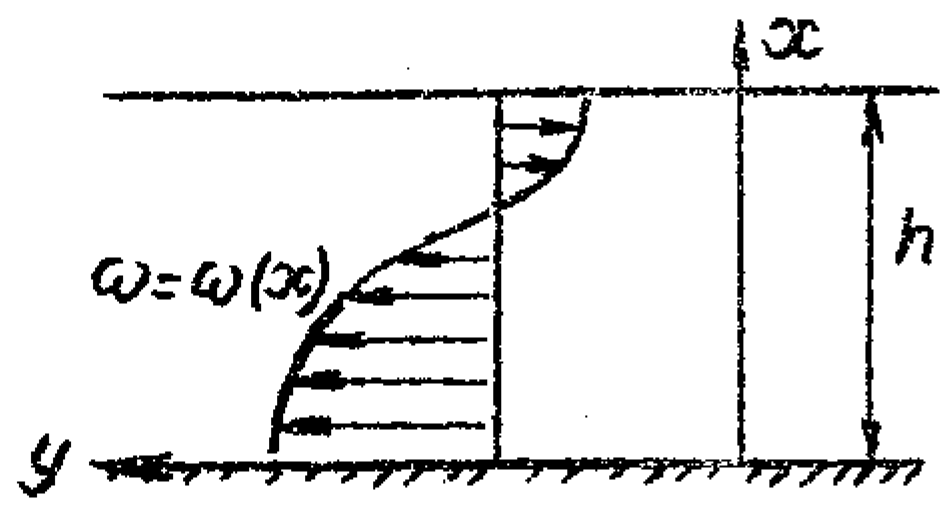
a) Ako je $k>o$, tj. pritisak opada u smeru brzine V_o, brzine u celom strujnom polju imaju isti smer, sl. (7.5). Za vrtlog u ovom slučaju dobijamo

(7.27)
$$\omega=-\frac{k}{\eta_2}x+\frac{V_o}{h}+\frac{k}{2\eta_2}h+$$
$$+\frac{k\sqrt{\eta_2\eta_3}}{\eta_2^2\sinh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}h\right)}\left\{\cosh\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}x\right)-\cosh\left[\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}(h-x)\right]\right\}\ ,$$

i njegov raspored u strujnom polju prikazan je slici (7.6).



sl. 7.5



sl. 7.6

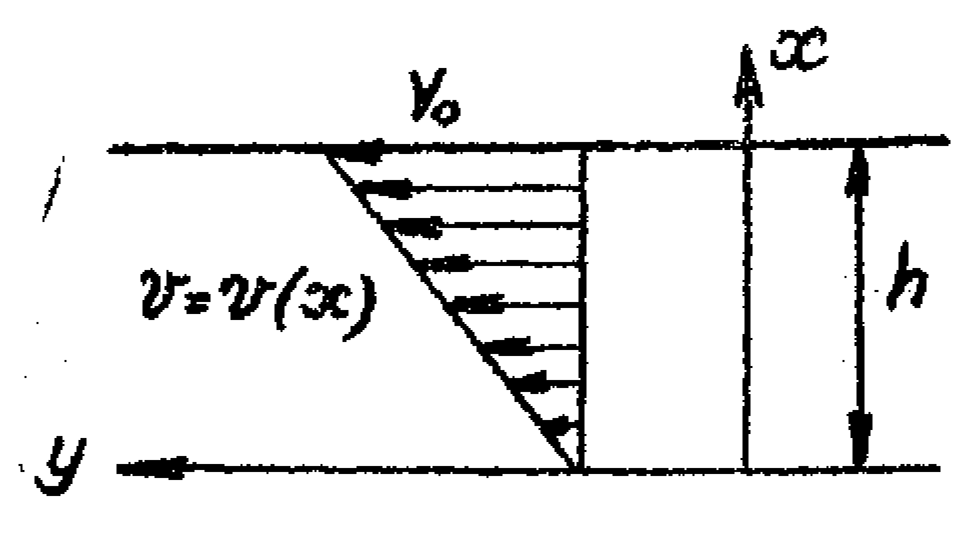
b) Za k = o imamo linearan raspored brzina,

(7.28) $$v = \frac{V_o}{h}\, x \; ,$$

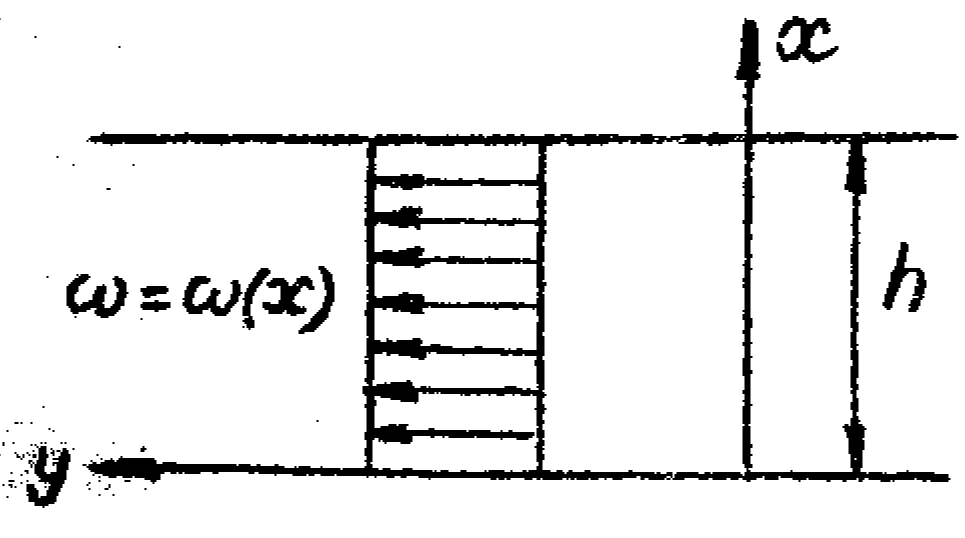
prikazan na slici (7.7). U ovom slučaju vrtlog je konstantan u strujnom polju,

(7.29) $$\omega = \frac{V_o}{h} \; ,$$

tako da nema promene gradijenta vrtloga, tj. u strujnom polju se ne pojavljuju naponski spregovi. Raspored vrtloga u ovom slučaju prikazan je na slici (7.8).

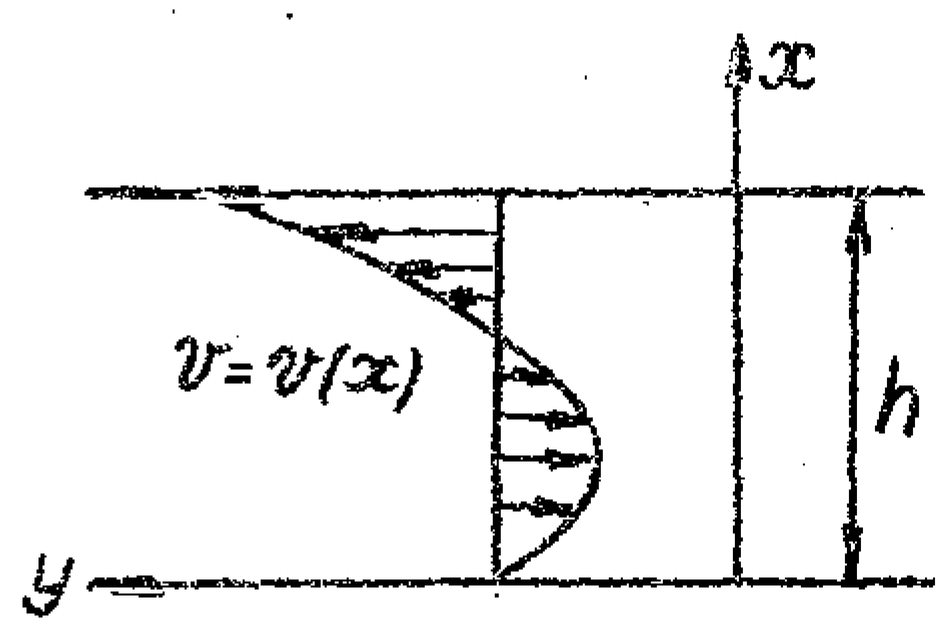


sl. 7.7

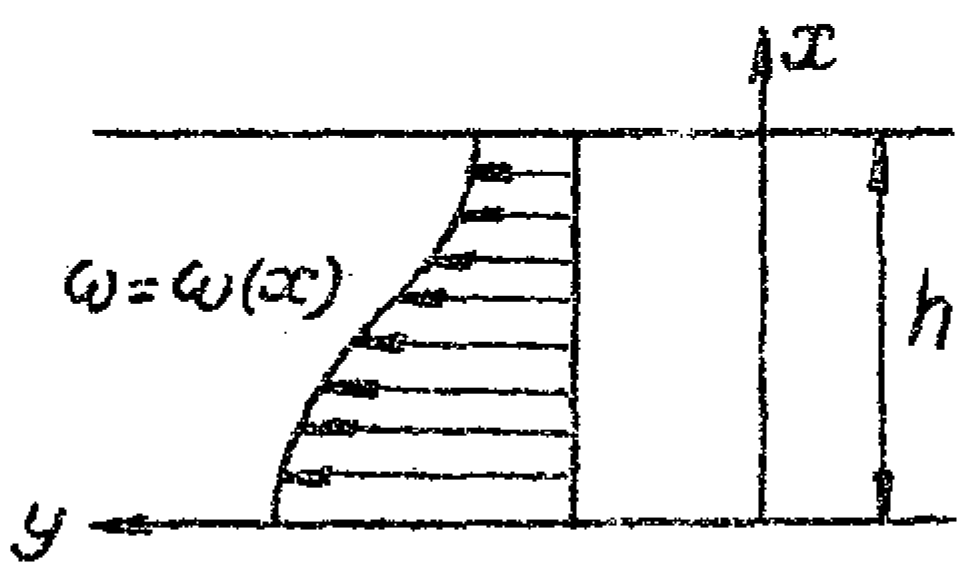


sl. 7.8

c) Ako je k<o, tj. pritisak opada u suprotnom smeru od smera brzine V_o, onda u strujnom polju mogu postojati i negativne brzine. Raspored brzina prikazan je slici (7.9), a raspored vrtloga na slici (7.10).



sl. 7.9



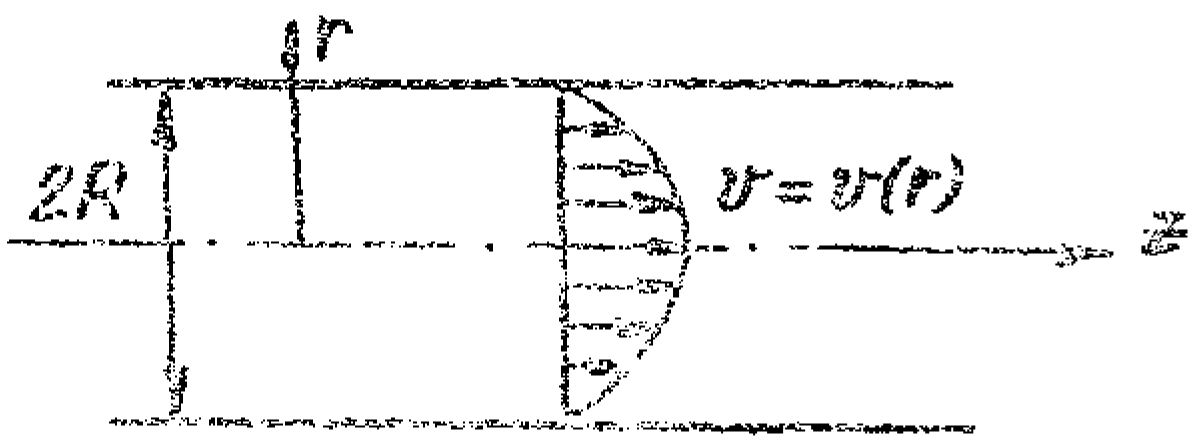
sl. 7.1o

Da li će se u ovom slučaju u strujnom polju pojaviti negativne brzine ili ne, očigledno je da zavisi od intenziteta konstantnog gradijenta pritiska i brzine V_o.

Iz analize ova tri slučaja vidi se da naponski spregovi mogu ali ne moraju da se jave u viskoznom fluidu. Da li će se oni javiti ili ne zavisi od karaktera strujanja, tj. od uzroka koji izaziva strujanje fluida. Ovaj zaključak potvrdjuje činjenicu da naponski spregovi nisu privilegija odredjene klase materijala, već da su to veličine koje karakterišu njegovo naponsko stanje.

8. Strujanje kroz pravu kružnu cev

Posmatrajmo, sada, ustaljeno strujanje nestišljivog fluida kroz pravu kružnu cev poluprečnika R. Uvedimo polarno-cilindarske koordinate (r, z, θ). Kako je ovo strujanje osnosimetrično mi ćemo ga proučavati samo u ravni $\theta = 0$, sl. (8.1). U ovom slučaju polje brzine ima oblik



sl. 8.1

$$\vec{v} = \{ 0 , v(r) , 0 \} \quad , \tag{8.1}$$

S obzirom da je strujanje ustaljeno imamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad , \tag{8.2}$$

pa diferencijalne jednačine kretanja daju

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial r} = 0 , \\ &\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 , \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = \eta_2 \Delta v - \eta_3 \Delta\Delta v . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Iz prve dve jednačine zaključujemo da je p = p(z), a treću, s obzirom da joj je leva strana funkcija samo od z a desna samo od **r**, možemo napisati u obliku

$$\frac{dp}{dz} = \eta_2 \Delta v - \eta_3 \Delta\Delta v = -k \; , \; (k \geq 0) \; , \tag{8.4}$$

tj. ona se razdvaja na dve diferencijalne jednačine

$$\frac{dp}{dz} = -\kappa \,,$$

(8.5)

$$\eta_3 \Delta\Delta v - \eta_2 \Delta v - \kappa = 0 \,.$$

Integracijom prve od ovih jednačina dobijamo

(8.6) $$p = p_0 - \kappa z \,,$$

odakle zaključujemo, kao i u slučaju strujanja izmedju dve paralelne ploče, da pritisak opada u pravcu strujanja, tj. da se strujanje ostvaruje pod dejstvom konstantnog gradijenta pritiska .

Prva kvadratura druge jednačine (8.5) daje

(8.7) $$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{\eta_2}{\eta_3} v = \frac{1}{4}\frac{\kappa}{\eta_3} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \,.$$

Ovo je nehomogena modifikovana Beselova diferencijalna jednačina. Njeno opšte rešenje je

(8.8) $$v = -\frac{\kappa}{4\eta_2} r^2 - C_1 \frac{\eta_3}{\eta_2} \ln r - C_2 \frac{\eta_3}{\eta_2} + C_3 I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, r\right) + C_4 K_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, r\right) - \frac{\kappa \eta_3}{\eta_2^2} \,,$$

gde su I_0 i K_0 modifikovane Beselove funkcije prve i druge vrste.

S obzirom da brzina mora imati konačnu vrednost u tačkama $r = 0$, to konstante C_1 i C_4 moraju biti jednake nuli jer se pojavljuju kao množioci uz $\ln r$ (i K_0 sadrži $\ln r$), pa se gornje rešenje svodi na

(8.9) $$v = -\frac{\kappa}{4\eta_2} r^2 - C_2 \frac{\eta_3}{\eta_2} + C_3 I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, r\right) - \frac{\kappa \eta_3}{\eta_2^2} \,.$$

Preostale dve konstante dobićemo stavljajući da su brzine i naponski spregovi na zidovima cevi jednaki nuli. Tada dobijamo sledeća dva granična uslova

$$
(8.10) \qquad \begin{aligned} v(R) &= 0 , \\ v''(R) &= 0 . \end{aligned}
$$

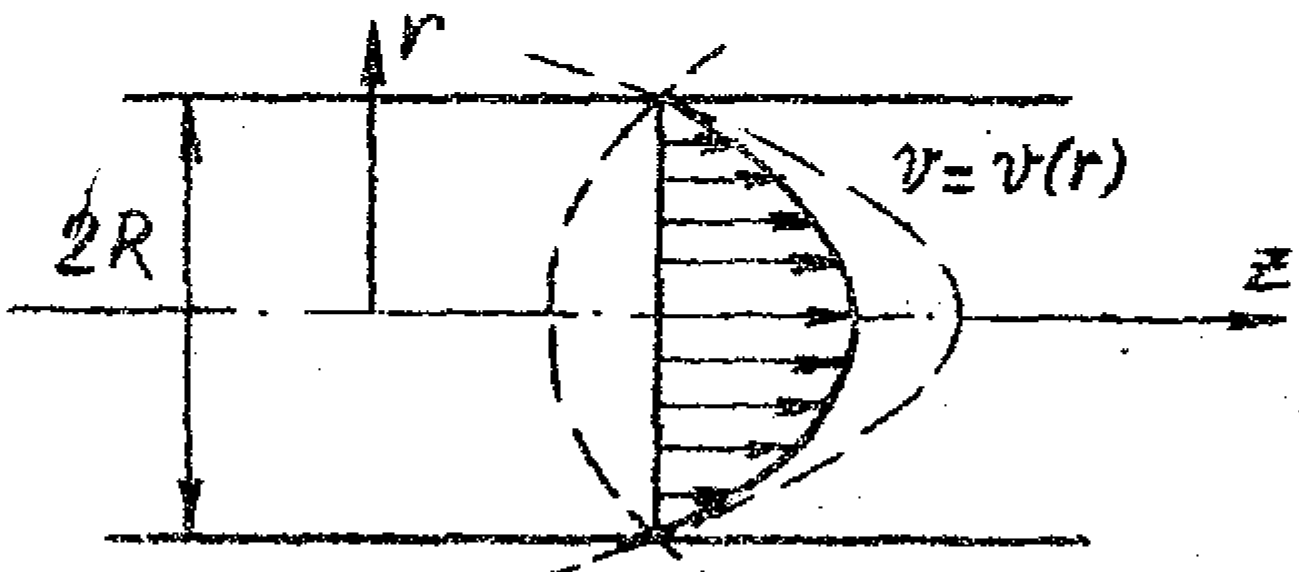
Iz ovih graničnih uslova za konstante dobijamo

$$
(8.11) \qquad \begin{aligned} C_2 \frac{\eta_3}{\eta_2} &= -\frac{\kappa}{4\eta_2} R^2 + C_3 I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right) - \frac{\kappa \eta_3}{\eta_2^2} , \\ C_3 &= \frac{\kappa \eta_3}{2\eta_2^2 I_0''\left(\sqrt{\eta_2/\eta_3}\, R\right)} . \end{aligned}
$$

Unošenjem ovoga u (8.9), posle izvesnih sredjivanja za brzinu dobijamo

$$
(8.12) \qquad \begin{aligned} v &= \frac{\kappa}{4\eta_2}\left(-r^2 + R^2\right) + \\ &+ \frac{\kappa \eta_3}{\eta_2^2} \cdot \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right) + I_2\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right)} \left[\frac{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}\, r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right)} - 1 \right] . \end{aligned}
$$

Poslednji član na desnoj strani ove jednačine predstavlja uticaj naponskih spregova na raspored brzine u strujnom polju. Taj član otpada ako zanemarimo naponske spregove ($\eta_3 = 0$), pa se rešenje svodi na klasično. Raspored brzine u strujnom polju prikazan je na slici (8.2).

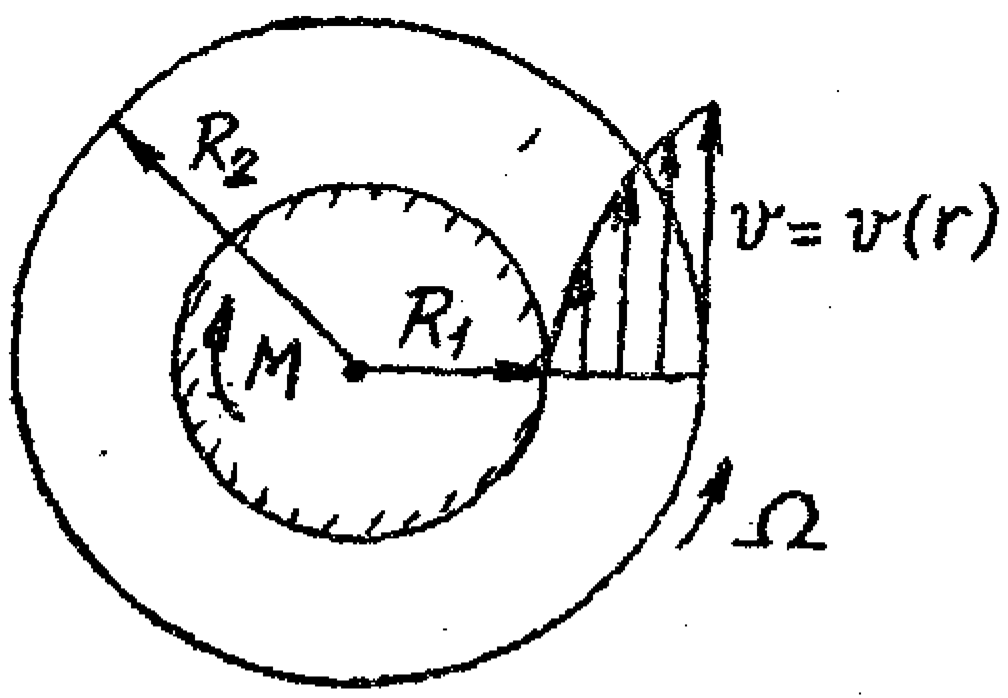


sl. 8.2

Zaključak o vrtloženju i postojanju promenljivog gradijenta vrtloženja u potpunoj je analogiji sa strujanjem izmedju dve paralelne ploče. Prema tome, i u ovom slučaju dobijamo nešto smanjene brzine u odnosu na one koje dobijamo u slučaju simetričnog tenzora napona.

9. Strujanje izmedju dva koaksijalna cilindra

U ovom odeljku proučićemo stacionarno strujanje nestišljivog fluida izmedju dva saosna valjka poluprečnika R_1 i R_2 ($R_1 < R_2$), slika (9.1). Strujanje se ostvaruje na taj način što se spoljašnji cilindar obrće ugaonom brzinom Ω, dok unutrašnji miruje pod dejstvom sprega M. U ovom slučaju, uvodeći polarno-cilindarske koordinate (r, θ, z), polje brzine odredjeno je fizičkim koordinatama



sl. 9.1

$$(9.1) \quad \vec{v} = \{0, v(r), 0\}, \quad v = r\dot{\theta},$$

Iz pretpostavke da je strujanje ustaljeno imamo

$$(9.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 .$$

Zamenjujući (9.1) i (9.2) u diferencijalne jednačine kretanja

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \eta_2 \Delta \vec{v} - \eta_3 \Delta\Delta \vec{v},$$

dobijamo sledeće dve diferencijalne jednačine

$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$(9.3)$$

$$0 = \eta_2 \Delta v - \eta_3 \Delta\Delta v .$$

Kako je brzina funkcija samo od r, to iz prve od ovih jednačina sledi

$$(9.4) \quad p = p(r),$$

a drugu možemo da napišemo u obliku

$$\Delta\Delta v - \frac{\eta_2}{\eta_3}\Delta v = 0 \quad . \tag{9.5}$$

Prva kvadratura ove jednačine daje

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \left(\frac{\eta_2}{\eta_3} + \frac{1}{r^2}\right)v = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad . \tag{9.6}$$

Ovo je modifikovana nehomogena Beselova diferencijalna jednačina. Njen opšti integral je oblika

$$v = -C_1\frac{\eta_3}{\eta_2}r - C_2\frac{\eta_3}{\eta_2}\frac{1}{r} + C_3 I_1\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}r\right) + C_4 K_1\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}r\right) \tag{9.7}$$

gde su I_1 i K_1 modifikovane Beselove funkcije prve u druge vrste.

Za odredjivanje integracionih konstanata na raspolaganju su nam četiri granična uslova. Iz pretpostavke da se fluidni delići "lepe" uz zidove cilindara imamo dva granična uslova

$$\begin{aligned} &v(R_1) = 0 \ , \\ &v(R_2) = R_2\Omega \ . \end{aligned} \tag{9.8}$$

Još dva granična uslova dobićemo stavljajući da su naponski spregovi na zidovima cilindara jednaki nuli. Lako je proveriti da su naponski spregovi na graničnim površinama

$$m^{12}/_S = \pm m^{121} \ . \tag{9.9}$$

Iz reološke jednačine po naponskim spregovima (6.4), medjutim, sledi

$$m^{121} = -2\eta_3\omega^{12,1} \ , \tag{9.10}$$

tako da, s obzirom da je (za fizičke koordinate brzine)

(9.11) $$\omega^{12,1} = -\frac{1}{2r}\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right),$$

jednačina (9.9) dobija oblik

(9.12) $$m^{12}/_s = \pm \frac{\eta_3}{r}\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right)_{r=R_1, R_2}$$

Na osnovu ovoga imamo još dva granična uslova

(9.13) $$v''(R_1) + \frac{1}{R_1} v'(R_1) = 0 \quad ,$$
$$v''(R_2) + \frac{1}{R_2} v'(R_2) - \frac{v(R_2)}{R_2^2} = 0 \quad .$$

Iz graničnih uslova (9.8) i (9.13) za integracione konstante dobijamo

(9.14) $$C_1 = -\frac{\eta_2 R_2^2}{\eta_3(R_2^2 - R_1^2)}\Omega \quad , \quad C_2 = \frac{\eta_2 R_1^2 R_2^2}{\eta_3(R_2^2 - R_1^2)}\Omega \quad ,$$
$$C_3 = C_4 = 0 \quad .$$

Unoseći ovo u (9.7) za brzinu dobijamo

(9.15) $$v = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega r - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{\Omega}{r} \quad .$$

Iz gornjeg izraza za brzinu vidimo da je on identičan sa izrazom koji se dobija u slučaju strujanja fluida sa simetričnim tenzorom napona. Nije teško proveriti da je u ovom slučaju

(9.16) $$m^{121} = \eta_3\left(v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{v}{r^2}\right) \equiv 0,$$
$$m^{122} \equiv 0 \quad ,$$

što znači da su naponski spregovi identički jednaki nuli u celom strujnom polju, pa je, prema tome, tenzor napona simetričan. Na osnovu toga možemo reći da, u ovom slučaju, fluid struji kao fluid sa smičućom viskoznošću ili kao fluid bez toracione viskoznosti.

Kontravarijantna koordinata tenzora vrtložnosti (izražena preko fizičke koordinate brzine) iznosi

$$\omega^{12} = \frac{1}{2}\left(v^{1,2} - v^{2,1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r^2}\right), \tag{9.16}$$

tj.

$$\omega^{12} = -\frac{1}{2}\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{\Omega}{r} . \tag{9.17}$$

Fizička koordinata tenzora vrtložnosti (vrtlog) iz (9.16) iznosi

$$\omega_{<12>} = \omega = -\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r}\right), \tag{9.18}$$

odnosno

$$\omega = -\frac{1}{2}\frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega , \tag{9.19}$$

pa vidimo da je vrtlog konstantan u strujnom polju.

Iz (9.19) vidimo da će vrtlog (tj. ugaona brzina fluidnih delića) biti jednak ugaonoj brzini (po apsolutnoj vrednosti) spoljašnjeg cilindra ako je odnos poluprečnika cilindara

$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{3}{2} \tag{9.2o}$$

10. Mogućnosti eksperimentalnog odredjivanja koeficijenata viskoznosti

U ovom odeljku proučićemo mogućnosti eksperimentalnog odredjivanja koeficijenata viskoznosti. Za njihovo odredjivanje najčešće se upotrebljavaju dva standardna instrumenta, tzv. cevni i rotacioni cilindrični viskozimetar.

Osnovni element cevnog instrumenta je cev kružnog poprečnog preseka, poluprečnika R, kroz koju struji fluid. Suština eksperimenta sastoji se u tome što se može meriti protok fluida kroz cev instrumenta, čime se dolazi do jednog eksperimentalnog podatka koji se, dalje, može iskoristiti za izračunavanje koeficijenata viskoznosti.

Rotacioni cilindrični viskozimetar sastoji se od dva koaksijalna rotaciona cilindra od kojih se, recimo, spoljašnji obrće konstantnom ugaonom brzinom Ω, a unutrašnji miruje pod dejstvom sprega M. Mereći ugaonu brzinu spoljašnjeg cilindra i spreg M koji "koči" unutrašnji cilindar, dolazimo do eksperimentalnih podataka koje, opet, možemo iskoristiti za izračunavanje koeficijenata viskoznosti.

Mi ćemo se u daljim izlaganjima zadržati samo na gore navedenim viskometrijskim instrumentima.

<u>a) Cevni instrument</u>. Izraz za brzinu pri strujanju kroz ovaj instrument ima oblik

$$(10.1)\quad v=\frac{k}{4\eta_2}\left(-r^2+R^2\right)+\frac{k\eta_3}{\eta_2^2}\cdot\frac{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}R\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}R\right)+I_2\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}R\right)}\left[\frac{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}r\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}}R\right)}-1\right].$$

Integracijom po površini poprečnog preseka dobijamo sledeći izraz za protok

$$(1o.2) \qquad Q = \frac{R^4 \pi k}{8 \eta_2} - \frac{R^2 \eta_3 k}{2 \eta_2^2} \cdot \frac{I_2\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right) + I_2\left(\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_3}} R\right)} ,$$

odakle zaključujemo da je, za poznato k, protok funkcija koeficijenata viskoznosti i poluprečnika cevi, tj.

$$(1o.3) \qquad Q = Q(\eta_2, \eta_3, R) .$$

Mereći protoke na dva različita instrumenta, poluprečnika R_1 i R_2, dobićemo

$$(1o.4) \qquad \begin{aligned} Q_1 &= Q_1(\eta_2, \eta_3, R_1) , \\ Q_2 &= Q_2(\eta_2, \eta_3, R_2) . \end{aligned}$$

Ove jednačine, za poznato Q_1, Q_2, R_1 i R_2, predstavljaju sistem algebarskih nelinearnih jednačina po nepoznatim koeficijentima viskoznosti. Rešenjem tog sistema dobijamo

$$(1o.5) \qquad \begin{aligned} \eta_2 &= \eta_2(Q_1, Q_2, R_1, R_2) , \\ \eta_3 &= \eta_3(Q_1, Q_2, R_1, R_2) . \end{aligned}$$

S obzirom da je sistem (1o.4), sistem nelinearnih algebarskih jednačina po nepoznatim koeficijentima viskoznosti, to se on može rešiti jednom od poznatih metoda za približno rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina. Ovde ćemo navesti, ne upuštajući se u izvodjenje dokaza, tzv. Njutnov metod približnog rešavanja sistema nelinearnih algebarskih jednačina [9] .

Sistem (1o.4) napišimo u obliku

$$(1o.6) \qquad \begin{aligned} f_1(\eta_2, \eta_3) &= 0 , \\ f_2(\eta_2, \eta_3) &= 0 . \end{aligned}$$

Ovaj sistem možemo predstaviti u vektorskom obliku

(1o.7) $$\vec{f}(\vec{\eta}) = 0,$$

gde su $\vec{f}$ i $\vec{\eta}$ vektori kolone, tj.

(1o.8) $$\vec{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{\eta} = \begin{Bmatrix} \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} .$$

Rešenje sistema (1o.7) predstavimo u obliku

(1o.9) $$\vec{\eta} = \vec{\eta}^{(p)} + \vec{\varepsilon}^{(p)},$$

gde je $\vec{\eta}^{(p)}$ p-to približno rešenje, a $\vec{\varepsilon}^{(p)}$ odstupanje toga rešenja od tačnog. Sada, na osnovu (1o.7) imamo

(1o.1o) $$\vec{f}\left(\vec{\eta}^{(p)} + \vec{\varepsilon}^{(p)}\right) = 0 .$$

Razvijanjem ove funkcije u red i zadržavanjem na linearnom članu dobijamo

(1o.11) $$\vec{f}\left(\vec{\eta}^{(p)} + \vec{\varepsilon}^{(p)}\right) = \vec{f}\left(\vec{\eta}^{(p)}\right) + \underset{\sim}{W}\left(\eta^{(p)}\right)\vec{\varepsilon}^{(p)},$$

gde je $\underset{\sim}{W}(\eta^{(p)})$ matrica oblika

(1o.12) $$\underset{\sim}{W}\left(\eta^{(p)}\right) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \eta_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \eta_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \eta_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \eta_3} \end{Bmatrix}$$

Jednačina (1o.11) može da se napiše u obliku

(1o.13) $$\vec{f}\left(\vec{\eta}^{(p)}\right) + \underset{\sim}{W}\left(\eta^{(p)}\right)\vec{\varepsilon}^{(p)} = 0 .$$

Odavde sledi

(1o.14) $$\vec{\varepsilon}^{(p)} = -\underset{\sim}{W}^{-1}\left(\eta^{(p)}\right)\vec{f}\left(\vec{\eta}^{(p)}\right),$$

pa je

$$\vec{\eta}^{(p+1)} = \vec{\eta}^{(p)} - \underset{\sim}{W}^{-1}(\eta^{(p)})\vec{f}(\vec{\eta}^{(p)}). \tag{lo.15}$$

Polazeći od proizvoljne početne vrednosti možemo postupnim približavanjem da dodjemo do rešenja sa željenom tačnošću.

b) Rotacioni cilindrični instrument. Izraz za brzinu u ovom slučaju ima oblik

$$v = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\Omega r - \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{\Omega}{r} . \tag{lo.16}$$

Kao što je ranije bilo pokazano, naponski spregovi u strujnom polju identički su jednaki nuli, pa je, prema tome, tenzor napona simetričan i na osnovu reološke jednačine (6.3) za fizičku koordinatu smičućeg napona dobijamo

$$t_{<12>} = \tau = 2\eta_2 d_{<12>} . \tag{lo.17}$$

Sa druge strane, medjutim, smičući napon iznosi [1o], [11]

$$\tau = \frac{M}{2\pi h r^2} . \tag{lo.18}$$

Izjednačujući desne strane jednačina (lo.17) i (lo.18) i vodeći računa da je

$$d_{<12>} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{\Omega}{r^2} , \tag{lo.19}$$

dobijamo

$$2\eta_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\cdot\frac{\Omega}{r^2} = \frac{M}{2\pi h r^2} . \tag{lo.2o}$$

Odavde za η_2 dobijamo

$$\eta_2 = \frac{M(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi h R_1^2 R_2^2 \Omega} \quad (10.21)$$

gde je h dužina cilindara.

Merenjem sprega M, koji deluje na unutrašnji cilindar, i ugaone brzine Ω spoljašnjeg cilindra, na osnovu (10.21) možemo izračunati koeficijent smičuće viskoznosti.

Prilikom odredjivanja koeficijenata viskoznosti odredjenog fluida mogu se koristiti oba instrumenta na taj način što bi se prvo pomoću rotacionog instrumenta odredio koeficijent smičuće viskoznosti, pa zatim pomoću cevnog instrumenta koeficijent rotacione viskoznosti. Na ovaj način izbeglo bi se rešavanje sistema nelinearnih jednačina (10.4).

11. Diskusija i zaključne primedbe

U uvodnom delu je bilo pomenuto da pretpostavka o nesimetriji tenzora napona povlači za sobom egzistenciju naponskih spregova u fluidu. U svim radovima u kojima se naponsko stanje materijala (bez obzira o kakvom se materijalu radi) opisuje nesimetričnim tenzorom napona i tenzorom naponskih spregova, pokazuje se da postoji neodredjenost tenzora naponskih spregova. Pojam deformacije u ovim radovima potpuno je isti kao i u klasičnoj teoriji, tj. tenzor deformacije (ili brzine deformacije) je i dalje simetričan.

U uvodnom delu je, takodje, bilo pomenuto da su Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин и Е. В. Кувшинский [3] proučavali viskozno tečenje sa nesimetričnim tenzorom napona. Ovde, medjutim, treba napomenuti da se osnovne koncepcije njihovog rada razlikuju od koncepcija ovoga rada. Oni su, naime, pretpostavili da fluidni delići imaju nezavisnu dopunsku rotaciju, što navodi na pomisao da viskozni fluid proučavaju kao orijentisani kontinuum (kontinuum Cosserat), iako to eksplicitno ne kažu. Ova njihova pretpostavka ima za posledicu nesimetričnost tenzora brzine deformacije, koji je kod njih oblika

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \dot{\Omega}_\ell \epsilon_{\ell k i} \, . \tag{11.1}$$

Na ovaj način reološke jednačine u potpunosti odredjuju tenzor naponskih spregova, što ima za posledicu da se u reološkim jednačinama pojavljuje veći broj materijalnih konstanata.

U ovom radu mi smo se zadržali na klasičnoj definiciji tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti, pri čemu je bilo pokazano da naponski spregovi impliciraju postojanje promenljivog gradijenta tenzora vrtložnosti.

Jasno je da pretpostavka o zanemarivanju površinskih naponskih spregova ima uticaja na izgled strujne slike. Medjutim, mi smo ovu pretpostavku učinili iz dva razloga. Prvo, što nam se čini da je sa fizičke tačke gledišta dopustiva, i, drugo, jer smo želeli da proučimo pojavu i uticaj naponskih spregova nezavisno od uticaja graničnih površina. Da li ova pretpostavka, i u kojim slučajevima, ima smisla, može se utvrditi jedino eksperimentom.

Iz samog toka izlaganja vidi se da smo se u radu koristili svim dopustivim analogijama sa klasičnom teorijom, pri čemu smo se trudili da pokažemo da se svi rezultati pod odredjenim uslovima svode na one koje daje klasična teorija.

Vršeći linearizaciju reoloških jednačina i njihovim daljim korišćenjem mi smo se, jasno, zadržali na linearnoj teoriji. To znači da smo pretpostavili da su brzine deformacije dovoljno male da možemo nelinearne članove zanemariti. Pisanje nelinearnih reoloških jednačina i njihovo dalje korišćenje dovodi do velikih matematičkih teškoća. Medjutim, sigurno je da bi nelinearna teorija, pored toga što bi bila egzaktnija, dovela do nekih novih efekata koji se ne pojavljuju u linearnoj teoriji. Pitanje traženja egzaktnih rešenja, kao i u teoriji elasčnosti, još uvek je otvoreno. Pogotovu u slučaju viskoznog fluida, jer tu praktično i nema teorijskih niti eksperimentalnih radova.

U vezi sa tim čini nam se da je od posebnog interesa što je u ovom radu ukazano na mogućnosti eksperimentalnog odredjivanja koeficijenata viskoznosti. Jer na taj način ne samo da možemo utvrditi da li se naponski spregovi javljaju pri strujanju viskoznog fluida, već možemo utvrditi koliki je njihov uticaj na strujanje. A to nam se u ovom trenutku čini od velike važnosti, jer se još uvek vodi polemika oko toga ima li ili nema smisla uvoditi naponske spregove prilikom opisivanja naponskog stanja.

Literatura

[1]. S. R. de Groot and P. Mazur: Non-equilibrium thermodynamics, Amsterdam, 1962. R2 1685

[2]. S. Komljenović: Plastično tečenje sa nesimetričnim tenzorom napona, disertacija, Beograd, 1964.

[3]. Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Е.В. Кувшинский: Асиметрическая гидромеханика, прик. мат. и мех., том 29, 1964.

[4]. H. Ziegler: Some exstremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics, Progress in solid mechanics, vol. IV, 1963.

[5]. M. Plavšić i R. Stojanović: Konstitutivne jednačine viskoznog fluida sa naponskim spregovima, VIII Jug. kongres racionalne i primenjene mehanike, Split, 1966.

[6]. B. Coleman: Kinematical Concepts with Applications in the Mechanics and Thermodynamics of Incompressible Viscoelastic Fluids, Arch.Rat.Mech. Anal., 9, 1962.

[7]. M. Plavšić: Termodinamika viskoznog tečenja sa nesimetričnim tenzorom napona, magistarska disertacija, Bgd., 19

[8]. W. T. Koiter: Couple-stresses in the theory of elasticity, Koninkl. nederl. Akademic van Wetenschappen, Amsterdam, Series B, 67, No 1, 1964.

[9]. Б.П. Демидович и И.А. Марон: Основы вычислит математики, Госиздат, физ.-мат. лит., Моск

[10]. M. Reiner: Rhéologie théorique, Paris, 1955.

[11] . M. Reiner: Rheology, Handbuch der Physic, VI, 1958.

Pored gore navedenih radova korišćena je još sledeća literatura:

1. K. Voronjec i N. Obradović: Mehanika fluida, Beograd, 1960.

2. T. Andjelić: Tenzorski račun, Beograd, 1952.

3. R. Stojanović: Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma, autorizovana skripta, Beograd, 1964.

4. B. Coleman and W. Noll: On Certain Steady Flows of General Fluids, Arch. Rat. Mech. Anal., 3, 1959.