Предавања на Београдском Универзитету

РАЧУНАЊЕ

СА

БРОЈНИМ РАЗМАЦИМА

Од

МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА

проф. Универзитета

Издање Задужбине Луке Ћеловића-Требињца.

БЕОГРАД

1932.

Сложио М. Ковањов, Поенкареова ул. 42.

Штампарија «Карић» Београд, Краљев трг, 20.

САДРЖАЈ.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Бројни размаци у елементарним рачунима.

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Бројни размаци у инфинитезималном рачуну.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

Бројни размаци за интеграле диференцијалних једначина.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Бројни размаци у елементарним рачунима.

I. Бројни размаци као математички елементи.

У чистој, апстрактној математици једна реална количина је један тачно одређен реалан број, једна апстрактна математичка тачка на апстрактној математичкој реалној бројној линији.

Математичка тачка у равни је једно у тој равни место тачно одређено помоћу два тачно одређена реална броја. Континуални низ математичких тачака саставља математичку линију која се протеже само својом дужином.

Математичка тачка у тро-димензионалном простору је у томе простору место тачно одређено помоћу три тачно одређена броја, а континуални низ математичких тачака сачињава равну, или у простору извитоперену математичку линију која се протеже само својом дужином. Континуални низ таквих линија саставља једну математичку површину, која се протеже и својом дужином и својом ширином.

То су основни елементи чисте, апстрактне математике, али на какве се у стварности, у практичној математици, врло ретко кад наилази. Истина, има случајева кад је и у стварности једна уочена реална количина један тачно одређен број, који се поклапа са једном математичком тачком на апстрактној реалној бројној линији. То су случајеви када се зна, да је уочена количина цео или периодичан десетни разломак коме се могу сазнати све децимале (т. ј. кад су те децимале све нуле, или су оне што су различне од нуле, у коначном броју, или се уопште зна закон по коме се оне нижу једна за другом, као што је то случај код рационалних разломака и т. д.). Такав је н. пр. случај са тоталним бројем међу собом једнаких предмета распоређених у коначан број гомила; или случај кад се тражи број реалних корена једне једначине који се налазе између два дата броја; или случај кад се траже цели корени једне алгебарске једначине и т. д.

Сваку другу количину која има бескрајно много децимала, а овима се не зна закон, немогучно је практички, у стварности, одредити као апстрактну математичку тачку на математичкој бројној линији. За такву се количину у најбољем случају може само фиксирати један *бројни размак*, т. ј. један размак на бројној линији за који се може тврдити да се та количина сигурно у њему налази (пример: $\sqrt{2}$ или π). Тако је чак и онда кад би на први поглед изгледало да је количина одређена као математичка тачка у пресеку двеју тачно конструисаних линија (н. пр. двеју правих, или праве и круга, или два круга), јер се практички никад не може нацртати тачна, апстрактна, математичка линија (то ће практички увек бити једна више или мање широка пруга, или више-мање дебела шипка), па и пресеци тако нацртаних линија нису тачке, већ имају коначно протезање (пример: конструкција броја $\sqrt{2}$ помоћу праве и круга; конструкција броја π или e помоћу трактуриографа).

Према самој природи људског сазнавања, једна се реална количина (осим поменутих изузетних случајева) одређује практички, уопште не као тачно одређен број или мамематичка тачка, већ као *бројни размак*; једна тачка као *сегмент* једне праве или криве линије, или као исечак једне површине, или чак и као тело у тро-димензионалном простору; линија у равни као *пруга* коначне ширине; линија у простору као *шипка* коначне дебљине, и т. д. Фактички елементи, са којима има посла математика стварности нису, дакле, они исти са којима има посла чиста, апстрактна математика.

Међутим, на овакве исте елементе, са којима се има посла у математици стварности, наилази се и у проблемима апстрактне математике, поред оних са којима она искључиво рачуна. То су проблеми одређене врсте у којима се н. пр. непознате количине, по самој својој природи, јављају као бројни размаци; или кад саме погодбе задатка не захтевају тачну одредбу непознатих количина; или кад је непознату, због несавладљивих тешкоћа, немогућно тачно одредити; или кад је она такве природе да је довољно наћи довољно сужен размак у коме се она налази, па да се одмах, или бар једним низом практички извршљивих рачунских радња, добије и њена тачна или довољно приближна вредност. Тако:

1° Тачно решење извесних проблема састоји се, не у томе да се нађу тачне вредности непознатих количина, већ у томе да се нађе између којих граница оне треба да се мењају па да услови проблема буду задовољени.

Тако н. пр. задатак одредбе вредности x за које ће квадратна једначина

$$x^2-2x+y^2-3y+3=0$$

имати своје корене x реалне, има као своје решење ово: потребно је и довољно да y лежи у бројном размаку између 1 и 2.

Питање о конвергенцији једнога реда, чији чланови садрже једну промењљиву x, потпуно је решено кад се нађе бројни размак у коме треба да се налази x, па да буде осигурана конвергенција или дивергенција реда. Н. пр. ред са реалним коефицијентима

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

биће конвергентан ако се x налази у бројном размаку од $-R$ до $+R$, где је

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\quad;$$

он ће бити дивергентан ако се x налази ван тог размака.

2° За потребе практичких рачуна (н. пр. за физичаре, хемичаре, техничаре) не само да нису ни мало потребне апсолутно тачне вредности непознатих количина, него чак није потребна ни сувише велика приближност. Често је довољно знати само то да свака од њих није ни мања од једног утврђеног броја, ни већа од другог утврђеног броја, а ти су бројеви, међутим, толики да је размак између њих довољан за потребу за коју се тражи. Тако н. пр. при квантитативним хемијским анализама, у многим случајевима, довољно је знати да се тражена количина налази између два нађена броја који се међу собом разликују тек од треће или четврте децимале.

Тако исто, за потребе практичких рачуна, дешава се да је непознату количину врло тешко и заметно израчунати по датој формули, а међутим је за те потребе довољно знати коликог је од прилике реда та количина, т. ј. да ли она износи неколико десетина, или неколико хиљада, или неколико милиона, и т. д.; тада је довољно познавати извесан бројни размак у коме се она налази, па да се има оно што се тражи.

Пример: за велике вредности n врло је тешко израчунати $n!$ које тада има врло велики број цифара. Али, као што је познато из теорије факторијела, $n!$ увек лежи између двеју вредности

$$\sqrt{2\pi}\,.\,e^{-n}\,.\,n^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{2\pi}\,.\,e^{-n+\frac{1}{12n}}\,.\,n^{n+\frac{1}{2}}$$

које се много лакше израчунавају него $n!$ и тако израчунате дају појам о величини факторијела $n!$.

3° У извесним проблемима дешава се да је не само немогуће наћи у дефинитивном облику сам број, који претставља тачку или довољно приближну вредност непознате количине, већ је немогуће и доћи до тачног математичког обрасца који би имао дати ту вредност кад се у њему смени све што је опште одговарајућим бројним вредностима као подацима. Таква немогућност може произлазити н. пр.

a) од апсолутне немогућности да се и формира математички образац који би дао тражену непознату вредност помоћу данашњих рачунских операција. Примери: одређивање корена какве алгебарске једначине вишег степена од 4, која има један или више општих коефицијената; израчунавање одређеног интеграла $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; одређивање интеграла Ricatti-еве диференцијалне једначине са општим коефицијентима, и т. д.

b) од тога што су сами подаци за тачну одредбу непознате количине недовољни. Примери: одредити непознату

$$x = \sqrt{a^2+b^2}$$

када се зна вредност збира $a+b$; одредити трећу страну c једног троугла, кад се зна збир $a+b$ осталих двеју страна и угао између њих.

Међутим, и у таквим случајевима је увек могуће одредити за непознате по један бројни размак у коме се свака од тих непознатих сигурно налази.

Напослетку, треба напоменути и то, да и у самој чистој, апстрактној математици има интересантних случајева у којима, кад се сазна да један одређен бројни размак насигурно садржи непознату количину, ова се одмах, без икаквог даљег рачунања, може одредити са апсолутном, математичком тачношћу.

I. пример: мерењем по тежини једне гомиле оловних зрнаца од којих свако тежи по један милиграм, нађе се великим бројем мерења, да се та тежина налази између 151,954 mgr и 152,037 mgr; тачан број зрнаца је тада 152 (претпостављајући н. пр. да ни једно зрнце не одступа од милиграма више од 0,5% и да се при колективном мерењу не греши за више од 0,5%).

II. пример: кад се зна да су две непознате x и y цели бројеви, да се x налази у размаку између 2 и 14, а y у размаку 8 и 24, и да при томе задовољавају неодређену једначину

$$9x+7y=184$$

може се тврдити да су тачне вредности непознатих $x=8$, $y=16$.

III. пример: постоји једна алгебарска теорема која даје број корена N што их има једна дата бројна алгебарска једначина у једној датој прстенастој површини описаној око почетка. По тој теореми, да би се одредио број N, треба израчунати бројну вредност P коју добија извесна, истом теоремом потпуно одређена функција коефицијената једначине, кад се у тој функцији смене коефицијенти својим бројним вредностима које имају у датој једначини; број N је по тој теореми једнак највећем целом броју садржаном у бројној вредности P. Ако се, дакле, нађе да број P лежи у једноме бројном размаку који у себи садржи само један цео број, може се закључити да ће број N бити тачно једнак томе целом броју.

IV. пример: за линеарне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\,y=0$$

постоји ова теорема: ако за све вредности x које се налазе у једном датом размаку (a, b), вредност функције $f(x)$ остаје непрестано у размаку од $\frac{p}{x^2}$ до $\frac{p'}{x^2}$ (где су p и p' два стална позитивна броја и $p' > p > {}^1/_4$), број N реалних нула једнога таквога интеграла диференцијалне једначине увек се налази између двеју вредности

$$\alpha = \frac{\sqrt{4p-1}}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sqrt{4p'-1}}{2\pi} \log \frac{b}{a} + 1 .$$

Кад, дакле, размак (α, β) садржи само један цео број M, број N тачно је једнак томе броју M. Довољно је, дакле, познавати такав један размак (α, β), па да се нађе тачна вредност непознате количине.

Из свега се тога види *да се на бројне размаке, као рачунске елементе, наилази не само у практичној математици, већ и у одређеним проблемима саме чисте апстрактне математике.*

II. Рачунски претставници бројних размака.

Кад је дат размак (a, b), где је a његов *предњи* а b његов *задњи* крај, може се, и то на разне начине, формирати једна функција $f(\lambda)$ једнога параметра λ таква:

1^0 да се за једну дату вредност $\lambda = \lambda_1$, вредност функције поклапа са a, а за другу једну дату вредност $\lambda = \lambda_2$ вредност функције поклапа са b;

2^0 да, док λ прелази редом вредности између λ_1 и λ_2, вредност функције пролази кроз све бројеве који се налазе у размаку (a, b).

Такву једну функцију $f(\lambda)$ назваћемо *рачунским претставником* размака (a, b); размак (λ_1, λ_2) назваћемо *параметарским размаком*. Рачунски претставник једнога размака обухвата, у облику једног рачунског израза, све бројеве садржане у томе размаку.

Ставивши, краткоће ради

$$\alpha = \frac{\lambda - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \beta = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

за рачунски претставник размака (a, b) може се узети која

било н. пр. од функција

$$f(\lambda) = \alpha a + \beta b ,$$

$$f(\lambda) = (\alpha a^m + \beta b^m)^{\frac{1}{m}},$$

$$f(\lambda) = a^\alpha b^\beta .$$

Сваки рачунски претставник размака (a, b) има ту особину да се по својој бројној вредности поклапа са једним којим се год хоће бројем у томе размаку, кад се параметру λ да једна подесно изабрана бројна вредност која се налази између λ_1 и λ_2. Тако н. пр. размак (2,5) имаће као један свој рачунски претставник, са параметарским размаком (1,3) функцију

$$f(\lambda) = 2\alpha + 5\beta ,$$

где је

$$\alpha = \frac{3-\lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\lambda - 1}{2},$$

т. ј. функцију

$$f(\lambda) = \frac{1+3\lambda}{2} .$$

Вредност н. пр. 2,75 у размаку (2, 5) добија се кад параметру λ да вредност 1,5 садржана у његовом размаку (1,3).

III. Линеарни рачунски претставници бројних размака.

Између свих могућих облика функције $f(\lambda)$ најпростије су и за рачуне најподесније линеарне функције параметра λ, т. ј. функције облика

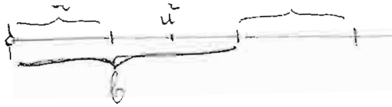
$$f(\lambda) = u + \lambda v , \tag{1}$$

где су и u и v вредности независне од λ, одређене тако да за дати размак (a, b) буде

$$u + \lambda_1 v = a , \quad u + \lambda_2 v = b$$

што ће бити кад се за u и v узму вредности

$$u = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} a - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} b , \quad v = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} b - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} a . \tag{2}$$



Два су случаја од нарочитог интереса по својој простоти и по лакоћи да се са одговарајућим обрасцима рачуна. То су:

Први случај: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$; рачунски претставник бројног размака (a, b) је тада

$$f(\lambda) = u + \lambda v\,, \tag{3}$$

где је

$$u = \frac{b+a}{2}\,, \qquad v = \frac{b-a}{2}\,, \tag{4}$$

а параметарски размак је размак ~~$(-\lambda, +\lambda)$~~ $(-1, +1)$. Тада је

$$a = u - v\,, \quad b = u + v$$

што показује да су крајеви размака (a, b) симетрични наспрам вредности u која се, дакле, налази у средини тога размака. Један ма који број садржан у размаку добија се кад се средини размака дода или од ње одузме један део полу-дужине размака.

Кад се од функције $f(\lambda)$ тражи да се сведе на предњи крај a размака (a, b) за $\lambda = -1$, а на задњи крај b за $\lambda = +1$, треба да је

$$u - v = a\,, \quad u + v = b\,,$$

па пошто је $a < b$, треба да буде $v > 0$.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a за $\lambda = +1$, а задњи крај b за $\lambda = -1$, треба да је

$$u + v = a\,, \quad u - v = b\,,$$

па се из $a < b$ добија да треба да је $v < 0$.

Други случај: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$; рачунски претставник размака (a, b) је

$$f(\lambda) = u + \lambda v \tag{5}$$

где је

$$u = a\,, \quad v = b - a\,,$$

а параметарска амплитуда је размак $(0, 1)$. Тада је

$$a = u\,, \quad b = v + u$$

што показује да су крајеви размака (a, b) несиметрични наспрам вредности u и то тако да се та вредност поклапа са једним крајем тога размака. Један ма који број садржан у размаку (a, b) добија се кад се предњем крају размака дода или од њега одузме један део дужине размака.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a размака (a, b) за $\lambda = 0$, а на задњи крај b за $\lambda = 1$, треба да је

$$u = a\,, \quad u + v = b$$

из чега се, према $a < b$, добија да је $v > 0$.

Кад се тражи да се $f(\lambda)$ сведе на предњи крај a за $\lambda = 1$, а на задњу крај b за $\lambda = 0$, треба да је

$$u + v = a\,, \quad u = b$$

из чега се према $a < b$, добија да је $v < 0$.

Облике функције $f(\lambda)$ из горња два случаја, због њихове простоте и лакоће да се са њима рачуна, сматраћемо за *нормалне рачунске претставнике* размака (a, b) и то:

1° функцију

$$f(\lambda) = u + \lambda v \quad \left(u = \frac{b+a}{2}\,, \quad v = \frac{b-a}{2}\right)$$

са параметарским размаком $(-1, +1)$ назваћемо *симетричким*, а

2° функцију

$$f(\lambda) = u + \lambda v \qquad (u = a,\; v = b - a)$$

са параметарским размаком $(0, +1)$ назваћемо *асиметричким* нормалним претставником размака (a, b).

У овоме што следује биће увек са ω симболички означен један број који лежи између -1 и $+1$, а са ϑ један број који лежи између 0 и 1. Симетрички нормални претставник размака (a, b) биће тада

$$\frac{b+a}{2} + \omega\,\frac{b-a}{2}\,, \tag{6}$$

а несиметрички

$$a + \vartheta\,(b - a)\,. \tag{7}$$

У случају симетричког претставника $u + \omega v$, члан u претставља *средину* размака (a, b), а члан v његову *полу-дужину*.

У случају асиметричког претставника $u + \vartheta v$, члан u претставља предњи крај размака (a, b), а члан v његову *дужину*.

Кад се буде имало посла са више разних бројева ω који леже између -1 и $+1$, или више разних бројева ϑ који леже између 0 и 1, ми ћемо их разликовати запетама или сказаљкама, н. пр. ω', ω'', ω''', ..., ω_1, ω_2, ω_3, ...; ϑ', ϑ'', ϑ''', ..., ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ...

Приметимо и то: да кад је a предњи, а b задњи крај размака (a, b) увек је $a < b$ и разлика $b - a$ увек је позитивна. Према томе у оба нормална облика рачунског претставника размака (a, b), који су

$$u + \omega v \quad \text{и} \quad u' + \vartheta v',$$

количине v и v' увек су позитивне.

Приметимо такође и то: да је асиметрички нормални претставник размака (a, b) облика ϑb, а симетрички нормални претставник облика $\frac{1+\omega}{2} b$.

Тако исто асиметрички нормални претставник размака $(-a, +a)$ је $a(2\vartheta - 1)$, а симетрички ωa.

Кад је један број x познат са p тачних децимала, тако да је

$$x = m,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_p,$$

где је m највећи у њему садржан цео број, а a_k његова к та децимала, број x је садржан у размаку између бројева

$$m,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_p 0 \quad \text{и} \quad m,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_p 9;$$

нормални претставници тог размака су:

$$\text{асиметрички} \qquad m,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_p 0 + \frac{9\vartheta}{10^{p+1}},$$

$$\text{симетрички} \qquad m,\ a_1\ a_2\ .\ .\ .\ a_p 0 + \frac{4,5}{10^{p+1}}(1+\omega).$$

Тако н. пр. казати да број 3,141 претставља број π са три децимале тачне, значи казати да се број π налази у размаку између бројева 3,1411 и 3,1419; нормални претставници тог размака су:

$$\text{асиметрички} \qquad 3,1410 + \vartheta \,.\, 0,0009,$$

$$\text{симетрички} \qquad 3,14145 + \omega \,.\, 0,0005.$$

IV. Трансформације рачунских претставника бројних размака.

Под трансформацијом рачунског претставника датог бројног размака (a, b) разуме се овај проблем:

Нека су λ и μ два промењлива параметра, $f(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$ два рачунска претставника једног истог бројног размака (a, b), а (λ_1, λ_2) и (μ_1, μ_2) амплитуде параметара λ и μ; каква веза постоји између тих елемената?

Пошто је

$$f(\lambda_1) = a \qquad \varphi(\mu_1) = a$$

$$f(\lambda_2) = b \qquad \varphi(\mu_2) = b,$$

то је та веза изражена двема једначинама

$$f(\lambda_1) = \varphi(\mu_1), \qquad f(\lambda_2) = \varphi(\mu_2). \tag{8}$$

Кад су, дакле, утврђени и дати облици обеју функција f и φ, онда се из једначина (8), кад је познат размак једнога од параметра λ и μ, може одредити размак другога, јер се из (8) помоћу познатих λ_1 и λ_2 могу одредити μ_1 и μ_2 и обрнуто.

Ако су утврђене и дате једна од функција f и φ и размак те функције, н. пр. функција $f(\lambda)$ и размак (λ_1, λ_2), друга је функција $\varphi(\mu)$ одређена условом да за $\mu = \mu_1$ добије вредност $f(\lambda_1)$, за $\mu = \mu_2$ вредност $f(\lambda_2)$ и да монотоно расте док μ варира од μ_1 до μ_2. У томе случају задатак, као што се види, није потпуно одређен; за функцију φ може се узети која се хоће од бескрајно многих функција које задовољавају поменуте услове.

Помоћу веза (8) може се, на тај начин, један рачунски претставник датог размака (a, b) преобратити у други, другог облика, што је од важности за многе рачуне. Овде ће бити решено неколико примера те врсте.

I. пример: дат је рачунски претставник размака (a, b) у облику познате функције $f(\lambda)$, са параметарским размаком (λ_1, λ_2); преобратити га у нормални симетрички облик.

Овај ће претставник бити облика

$$\varphi(\omega) = u + \omega v \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant +1,$$

а треба да буде

$$f(\lambda_1) = \varphi(-1) = u - v$$

$$f(\lambda_2) = \varphi(+1) = u + v,$$

дакле

$$u = \frac{f(\lambda_1) + f(\lambda_2)}{2}, \quad v = \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2}$$

према чему ће тражени претставник бити

$$\frac{f(\lambda_2) + f(\lambda_1)}{2} + \omega \frac{f(\lambda_2) - f(\lambda_1)}{2} \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant +1 .$$

II. пример: дат је рачунски претставник размака (a, b) у облику познате функције $f(\lambda)$ са параметарским размаком (λ_1, λ_2); преобратити га у нормални асиметрички облик. Овај ће бити

$$\varphi(\vartheta) = u + \vartheta v \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1,$$

а пошто треба да буде

$$f(\lambda_1) = \varphi(0) = u$$

$$f(\lambda_2)\varphi = (1) = u + v$$

одакле је

$$u = f(\lambda_1), \qquad v = f(\lambda_2) - f(\lambda_1),$$

то ће тражени претставник бити

$$f(\lambda_1) + \vartheta\,[f(\lambda_2) - f(\lambda_1)] \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1 .$$

III. пример: преобратити симетрички нормални облик

$$f(\omega) = u + \omega v \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant +1)$$

у асиметрички нормални облик

$$\varphi(\vartheta) = u' + \vartheta v' \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

за један исти бројни размак (a, b).

Пошто треба да буде

$$f(-1) = \varphi(0) \quad \text{т. ј.} \quad u - v = u',$$

$$f(+1) = \varphi(1) \quad \text{т. ј.} \quad u + v = u' + v',$$

то је

$$u' = u - v, \qquad v' = 2u,$$

па ће, дакле, тражени претставник бити

$$u - v + 2\vartheta u \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

IV. пример: преобратити асиметрички нормални облик

$$f(\vartheta) = u + \vartheta v \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1)$$

у симетрички

$$\varphi(\omega) = u' + \omega v' \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant +1).$$

Пошто треба да буде

$$f(0) = \varphi(-1) \quad \text{т. ј.} \quad u = u' - v',$$

$$f(1) = \varphi(+1) \quad \text{т. ј.} \quad u + v = u' + v',$$

одакле је

$$u' = u + \frac{v}{2}, \quad v' = \frac{v}{2},$$

то ће тражени претставник бити

$$u + \frac{v}{2} + \omega \frac{v}{2} \qquad (-1 \leqslant \omega \leqslant +1).$$

V. пример: зна се из теорије факторијела да је

$$n! = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n + \frac{\vartheta'}{12n}},$$

где је ϑ' један број који, макакво било позитивно n, лежи између 0 и 1; наћи асиметрички нормални претставник за $n!$.

Ако се, краткоће ради, стави да је

$$\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} = N$$

биће

$$n! = N \cdot e^{\frac{\vartheta'}{12n}} .$$

Узевши да је

$$f(\lambda) = N e^{\frac{\lambda}{12n}} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

$$\varphi(\vartheta) = u + \vartheta v \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

треба да је

$$f(0) = \varphi(0) \quad \text{т. ј.} \quad N = u$$

$$f(1) = \varphi(1) \quad \text{т. ј.} \quad N e^{\frac{1}{12n}} = u + v,$$

одакле је

$$u = N, \quad v = (e^{\frac{1}{12n}} - 1)\, N,$$

па ће, дакле, тражени претставник бити

$$N\,[1 + \vartheta\,(e^{\frac{1}{12n}} - 1)] \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1).$$

VI. пример: зна се да ако збир катета једног правоуглог троугла износи s, дужина хипотенузе увек лежи између $\frac{s}{\sqrt{2}}$ и s. Симетрички нормални претставник интервала хипотенузе биће, дакле

$$c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s + \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \quad \text{т. ј.}$$

$$c = 0{,}8534 \,.\, s + 0{,}1435 \,.\, \omega \,.\, s,$$

а асиметрички ће бити

$$c = \frac{s}{\sqrt{2}} + \vartheta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)s, \quad \text{т. ј.}$$

$$c = 0{,}7071 \,.\, s + 0{,}2929 \,.\, \vartheta \,.\, s.$$

V. Функција бројног размака.

Важност и интерес рачунских претставника бројних размака леже у томе *што се помоћу њих може са размацима рачунати као и са обичним бројевима.*

Ако се н. пр. размак (x, y) означи са z, тако да је симболички

$$z = (x, y)$$

може се формирати квадрат, куб, логаритам, синус и уопште једна ма каква функција тога размака. Она ће бити један извесан размак

$$Z = f(z) = (X, Y)$$

који ће такође имати свој рачунски претставник. Веза између размака z и $f(z)$, т. ј. Z састоји се у томе што ће крајеви X, Y, размака Z зависити на један нарочити начин од крајева x и y размака z. Та је веза овакве врсте:

Нека је $z = (x, y)$ један дати бројни размак, а $f(z)$ дата функција. Означимо са M највећу, а са N најмању вредност коју добија функција $f(z)$ док z варира од x до y. Очевидно је да ће $f(z)$ бити један бројни размак чији је предњи крај N, а задњи крај M.

Тај ће размак имати, као симетрички нормални претставник израз

$$Z = f(z) = \frac{M + N}{2} + \omega\,\frac{M - N}{2}$$

а као асиметрички нормални претставник израз

$$Z = f(z) = N + \vartheta\,(M - N).$$

Исти је размак цео садржан у једноме пространијем размаку Z' чији је предњи крај једна ма која доња граница N' вредности $f(z)$ кад z варира од x до y, а M' једна ма која горња граница за те вредности. Размак Z је, дакле, цео садржан у једном размаку Z', чији су нормални претставници

$$Z' = \frac{M' + N'}{2} + \omega'\,\frac{M' - N'}{2}$$

$$Z' = N' + \vartheta'\,(M' - N').$$

Тако одређен размак Z' зваћемо једном *горњом границом* размака Z: то је један размак шири од размака Z и који обухвата овај, т. ј. садржи га као један свој део.

У многим проблемима, ако се не може наћи тачан размак Z, од интереса и од користи је имати бар једну његову горњу границу Z', пошто се и за размак Z' може тврдити да обухвата уочену вредност $f(z)$ коју обухвата и размак Z.

У случајевима кад је $f(z)$ каква монотоно растућа функција промењљиве z у размаку (x, y) биће

$$N = f(x), \quad M = f(y).$$

Кад је то монотоно опадајућа функција у размаку (x, y) биће

$$N = f(y), \quad M = f(x)$$

Кад ни једно ни друго није случај, и ако $f(z)$ има за вредности z у размаку (x, y) максимума који су већи од обеју вредности $f(x)$ и $f(y)$ онда за M треба узети највећи од тих максимума; ако $f(z)$ има у размаку (x, y) минимума који су мањи од обеју вредности $f(x)$ и $f(y)$, онда за N треба узети најмањи од тих минимума.

I. пример: квадрат једног размака.

Нека је нормални асиметрички претставник једног размака

$$z = u + \vartheta v\,;$$

тражи се
$$z^2 = (u + \vartheta v)^2\,.$$

Пошто је v увек позитивно, то је

$$N = u^2 \quad M = (u+v)^2\,, \quad M - N = v^2 + 2uv$$

па дакле

$$z^2 = u^2 + \vartheta' \,(v^2 + 2uv)\,.$$

Кад би размак z био дат својим симетричким претставником

$$z = u + \omega v$$

пошто је v позитивно, било би

$$z^2 = (u + \omega v)^2 \quad N = (u - v)^2 \quad M = (u + v)^2$$

$$M - N = 4uv \qquad M + N = 2\,(u^2 + v^2)$$

и према томе би било

$$z^2 = (u^2 + v^2) + 2\vartheta' uv\,.$$

II. пример: куб једног размака. Нека је

$$z = u + \vartheta v$$

па се тражи

$$z^3 = (u + \vartheta v)^3\,.$$

Биће

$$N = u^3 \quad M = (u + v)^3 \quad M - N = 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

и према томе

$$z^3 = u^3 + \vartheta' \,(3u^2v + 3uv^2 + v^3)\,.$$

Кад је размак z дат својим претставником

$$z = u + \omega v\,, \quad \text{тако да је} \quad z^3 = (u + \omega v)^3$$

биће

$$N = (u - v)^3\,, \qquad M = (u + v)^3$$

$$M - N = 6u^2v + 2v^3 \qquad M + N = 2u^3 + 6uv^2$$

и према томе

$$z^3 = (u^3 + 3uv^2) + \omega'(v^3 + 3u^2v)\,.$$

III. пример: логаритам једног размака.

Нека је

$$z = u + \vartheta v\,, \quad \text{где је} \quad u > 0\,, \quad v > 0\,,$$

па се тражи

$$\log z = \log\,(u + \vartheta v)\,.$$

Биће

$$N = \log u\,, \quad M = \log\,(u + v), \quad M - N = \log\left(1 + \frac{v}{u}\right)$$

и према томе

$$\log z = \log\, u + \vartheta' \log\left(1 + \frac{v}{u}\right)\,.$$

IV. пример: нека је

$$z = u + \vartheta v\,, \quad \text{па се тражи} \quad e^z = e^{u + \vartheta v}\,.$$

Биће

$$N = e^u\,, \quad M = e^{u+v}\,, \quad M - N = e^u\,(e^v - 1)$$

па дакле

$$e^z = e^u + \vartheta' e^u\,(e^v - 1)\,.$$

V. пример: уопште, нека је $f(z)$ једна функција која монотоно расте кад z расте у посматраном размаку, и нека је

$$z = u + \vartheta v\,, \quad \text{па се тражи} \quad f(z) = f(u + \vartheta v)\,.$$

Биће

$$N = f(u)\,, \quad M = f(u + v)\,, \quad M - N = f(u + v) - f(u)$$

па дакле

$$f(z) = f(u) + \vartheta' \,[\,f(u + v) - f(u)\,]\,.$$

На исти би се начин имало $f(u + \vartheta v)$ и у случајевима ако је $f(z)$ функција која монотоно опада кад z расте у посматраном размаку.

VI. Функција више бројних размака.

Нека су

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad \text{и} \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

два дата размака, а $f(z_1, z_2)$ дата функција двеју променљивих количина. Означимо са N и M најмању и највећу вредност коју добија функција $f(z_1, z_2)$ кад z_1 варира од x_1 до y_1, а z_2 од x_2 до y_2. Функција

$$Z=f(z_1, z_2)$$

двају размака z_1 и z_2 биће један размак који ће имати, као свој асиметрички нормални претставник, израз

$$Z=f(z_1, z_2)=N+\vartheta(M-N)\,.$$

Кад су размаци z_1 и z_2 и сами дати својим асиметричким нормалним претставницима

$$z_1=u_1+\vartheta_1 v_1 \qquad z_2=u_2+\vartheta_2 v_2$$

биће

$$x_1=u_1\,,\quad y_1=u_1+v_1\,,\quad x_2=u_2\,,\quad y_2=u_2+v_2\,.$$

У случајевима, дакле, кад је $f(z_1, z_2)$ монотоно растућа функција промењљивих z_1 и z_2 у размацима (x_1, y_1) и (x_2, y_2), биће

$$N=f(x_1, x_2)=f(u_1, u_2)\,,\quad M=f(x_1+y_1, x_2+y_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2)$$

и према томе ће асиметрички претставник размака Z бити

$$Z=f(z_1, z_2)=f(u_1, u_2)+\vartheta\left[f(u_1+v_1, u_2+v_2)-f(u_1, u_2)\right].$$

У случајевима кад је f монотоно опадајућа функција промењљивих z_1 и z_2 у истим размацима, биће

$$N=f(y_1, y_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2)\,,\qquad M=f(x_1, x_2)=f(u_1, u_2)$$

и према томе је асиметрички претставник размака Z

$$Z=f(z_1, z_2)=f(u_1+v_1, u_2+v_2)+\vartheta\left[f(u_1, u_2)-f(u_1+v_1, u_2+v_2)\right].$$

Исти је размак цео садржан у једном пространијем размаку

$$Z'=f(N', M')\,,$$

где су N' и M' једна доња и једна горња граница вредности $f(z_1, z_2)$ кад се z_1 и z_2 мењају у границама својих одговарајућих размака (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Размак Z има за асиметрички нормални претставник израз

$$Z'=N'+\vartheta'(M'-N')$$

и биће једна горња граница размака Z, т. ј. један размак шири

од Z, а за који се такође може тврдити да обухвата вредност $f(z_1, z_2)$ коју обухвата и размак Z.

I. пример: нека је

$$z_1=u_1+\vartheta_1 v_1\,,\qquad z_2=u_2+\vartheta_2 v_2\,,$$

па се тражи размак

$$Z=z_1+z_2\,.$$

Биће

$$N=u_1+u_2\,,\qquad M=u_1+u_2+v_1+v_2\,,$$

па дакле

$$Z=(u_1+u_2)+\vartheta'(v_1+v_2)\,.$$

II. пример: тражи се размак

$$Z=z_1 z_2\,;$$

пошто је

$$N=u_1u_2\,,\quad M=(u_1+v_1)(u_2+v_2)\,.$$

биће

$$Z=u_1u_2+\vartheta'(u_1v_2+u_2v_1+v_1v_2)\,.$$

III. пример: тражи се размак

$$Z=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,;$$

налази се да је

$$Z=\sqrt{u_1^2+u_2^2}+\vartheta'\left[\sqrt{(u_1+v_1)^2+(u_2+v_2)^2}-\sqrt{u_1^2+v_1^2}\right].$$

Исто се тако одређује и дата функција n бројних размака

$$z_1=u_1+\vartheta_1 v_1\,,$$
$$z_2=u_2+\vartheta_2 v_2\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_n=u_n+\vartheta_n v_n\,.$$

Бројеви N и M су тада најмања и највећа вредност коју добија функција f кад се тачка $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ у хипер-простору од n димензија креће тако да свака промењљива z_k остаје у своме размаку одређеном одговарајућим својим рачунским претставником.

Појам *горње границе* за размак Z исти је као и онај за функције двеју промењљивих.

VII. Систем функција бројних размака.

Нека су

$$z_1=(x_1, y_1), \ldots \; z_n=(x_n, y_n)$$

n датих размака, а

$$f_1(z_1, \ldots z_n), \ldots \; f_p(z_1, \ldots z_n)$$

систем од p датих функција тих размака. Свака од ових функција f_k имаће свој размак Z_k у коме ће варирати за време док свака променљива z_i варира у своме размаку (x_i, y_i).

Означимо са N_k и M_k најмању и највећу вредност коју добија функција f_k кад све променљиве $z_1, \ldots z_n$ варирају у својим размацима. Асиметрички нормални претставници система $f_1, \ldots f_p$ биће изрази:

$$Z_1=f_1(z_1, \ldots z_n)=N_1+\vartheta_1(M_1-N_1),$$

$$Z_2=f_2(z_1, \ldots z_n)=N_2+\vartheta_2(M_2-N_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_p=f_p(z_1, \ldots z_n)=N_p+\vartheta_p(M_p-N_p).$$

Кад се знају крајеви x_i, y_i размака z_i, биће

$$z_1=u_1+\vartheta_1' v_1, \quad z_2=u_2+\vartheta_2' v_2, \ldots,$$

где су u_i, v_i одређени помоћу x_i, y_i једначинама

$$x_i=u_i, \qquad y_i=u_i+v_i.$$

Кад је која од функција f_k монотоно растућа или опадајућа функција, одговарајуће вредности N_k и M_k одређују се на напред показани начин.

На место тачних размака $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ у многим случајевима довољно је познавати по једну њихову горњу границу, т. ј. по један размак у коме је садржан одговарајући тачан размак Z_k. Таква је једна горња граница за размак Z_k размак

$$Z_k'=N_k'+\vartheta_k''(M_k'-N_k'),$$

где N_k' и M_k' означују једну доњу и једну горњу границу функције f_k за време док свака променљива z_i варира у своме размаку (x_i, y_i), т. ј. док ϑ_i' у изразу

$$z_i=u_i+\vartheta_i' v_i$$

варира од 0 до 1.

VIII. Стални и променљиви бројни размаци.

Као што се види из овога што претходи, елементарне рачунске радње, које се врше са *тачно одређеним вредностима*, могу се вршити и са *бројним размацима*. Другим речима, рачунске радње које се могу вршити са *тачкама* на реалној бројној линији, могу се вршити и са *сегментима* те линије. Разлика је та што ће, извршене са тачкама, оне дати опет бројне тачке, а вршене са сегментима оне ће дати као резултат бројне сегменте. *Рачунски претставници бројних размака преобраћају двоструке неједначине у једначине;* са таквим се неједначинама, преко њихових рачунских претставника, *могу вршити све елементарне рачунске радње које се врше са једначинама.*

Кад је размак, са којим се ради *сталан*, т. ј. кад су му крајеви непроменљиви и резултат извршених рачунских радња биће један размак са непроменљивим крајевима. А кад је првобитни размак *променљив* (променљиви крајеви) и резултат ће дати један променљив размак. Тако напр. квадрат сталног размака

$$z=2+3\vartheta$$

такође је сталан размак

$$z^2=4+21\vartheta';$$

квадрат променљивог размака

$$z=x+\vartheta(1+x)$$

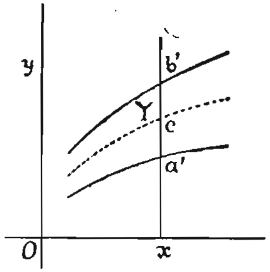
је променљив размак

$$z^2=x^2+\vartheta'(3x^2+4x+1).$$

Нека су x и y две променљиве количине везане међу собом тако, да кад се једна од њих буде мењала, и друга се мења на начин одређен променама прве. Кад се н. пр. променљива x буде мењала тако да јој вредности непрестано остају у једноме бројном размаку X, вредности y остаће у једноме такође одређеном размаку Y. Из дате везе између променљивих x и y добићемо, на напред наведени начин, и везу између размака X и Y т. ј. везу између њихових предњих и задњих крајева.

У применама рачуна са бројним размацима често се наилази на случајеве овакве врсте: веза између променљивих x и y није одређена у толикој мери да се свакој вредности x може одредити одговарајућа вредност y, али се за сваку вредност x

може одредити по један размак Y, за који се поуздано може тврдити да ће одговарајућа вредност y бити у њему садржана. Мењањем променљиве x мењаће се и одговарајући размак Y.



Ако се на осовини Ox обележи вредност x, а на управној у тачки x се пренесу крајеви a' и b' размака Y, па се пусти да се x мења, ти ће крајеви описати сваки по једну линију у равни, а сам размак Y описаће једну *област* ограничену тим двема линијама, које су јој њена *доња и горња гранична линија*. Геометријско место средина c размака Y, *средња линија области*, даће овлашну слику о вези између променљивих x и y. Слика ће бити утолико мање овлашна, уколико је област ужа, т. ј. уколико је мање отстојање граничних линија од средње линије, или, што је исто, уколико су мање амплитуде могућих осцилација променљиве y око средње линије: под *осцилацијом* око средње линије (изнад и испод ове) има се разумети растојање $cb'=a'c$.

На тај начин, у случајевима кад не постоји или се не може наћи *тачна* веза између променљивих x и y, дешава се да је могуће одредити једну *област варијација* променљиве y која чини могућом одредбу бројног размака у коме ће насигурно бити садржана неодређена вредност y за једну макоју тачно дату вредност x. Другим речима, могуће је одредити за x једну средњу линију и осцилације те променљиве око ове средње линије.

Тако н. пр. између координата

$$x=\alpha+\beta \quad \text{и} \quad y=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

једне променљиве тачке P, где су α и β два променљива позитивна параметра, не постоји никаква тачна веза, т. ј. тачка P не описује никакву одређену линију, мада се при мењању количине x уопште мења и количина y. Али пошто је за позитивне α и β увек

$$\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant \alpha+\beta\,,$$

то се тачка, чије су координате x и y, увек налази у области између двеју правих

$$y=\frac{x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y=x\,.$$

Средња линија је права

$$y=0{,}8534\,.\,x,$$

а осцилација око ове је $0{,}1464\,.\,x$.

Кад је једна непозната количина, задовољавајући дати скуп (D) погодаба, као стална, одређена у облику једнога бројног размака који је садржи, или као променљива, одређена у облику њене области варијација, могу се десити овакви случајеви:

1° Добивени бројни размак је *пространији* но што захтева сама природа ствари, т. ј. његов предњи или задњи крај нису стварно достигнути ни у коме појединачном случају, који је у складу са погодбама (D). Другим речима, нађени размак је само једна горња граница онога размака чији је један или други крај одиста достигнут у каквом специјалном случају који није у супротности са погодбама (D).

Тако н. пр. кад се скуп (D) састоји у погодби да су a и b позитивни, вредност $\sqrt{a^2+b^2}$ увек лежи између $\frac{1}{2}(a+b)$ и $\frac{3}{2}(a+b)$, али ниједна од ових граница није ни у коме случају достигнута. Иста вредност лежи такође и у размаку између бројева $\frac{1}{2}(a+b)$ и $(a+b)$, а ова друга граница је достигнута у специјалном случају кад је $b=0$, али прва није никад. Тако исто, иста вредност лежи и између граница $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{3}{2}(a+b)$; предњи крај тога размака достигнут је у специјалном случају кад је $a=b$, али задњи није никад. Размак од $\frac{1}{2}(a+b)$ до $\frac{3}{2}(a+b)$ је, дакле, само једна горња граница ужих размака

$$\left(\frac{a+b}{2},\quad a+b\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\ \frac{3}{2}(a+b)\right)$$

који такође одговарају погодби (D), али су им предњи или задњи крај стварно достигнути у појединим специјалним случајевима.

2° Добивени размак је *најужи* између свију оних који су у складу са погодбама (D); т. ј. оба његова краја су стварно достигнута у појединим специјалним случајевима.

Тако се н. пр. налази да вредност $\sqrt{a^2+b^2}$, кад су a и b позитивни бројеви, увек лежи у размаку $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\quad a+b\right)$; и један и други крај тога размака стварно су достигнути, предњи крај кад је $a=b$, а задњи кад је $b=0$. Тај је размак одиста најужи међу онима који одговарају погодбама; кад би се још више сузио, он не би више обухватао ова два специјална случаја, т. ј. не би одговарао општем случају.

3⁰ Добивена област варијације једне непознате y, зависне од друге промењљиве x, је *шира* но што захтева природа задатка, т. ј. њена доња ни горња гранична линија нису стварно достигнуте ни у коме случају који је у складу са погодбама (D). Нађена област тада је само једна горња граница једне уже области чија је једна од граничних линија стварно достигнута у једном одређеном специјалном случају.

Тако н. пр. тачка P, чије су координате позитивни бројеви x и $\sqrt{1+x^2}$, увек се налази између двеју правих линија

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{и} \quad y=\frac{3}{2}(1+x),$$

али ниједна од тих правих није никад достигнута. Иста тачка се налази и између правих

$$y=\frac{1}{2}(1+x) \quad \text{и} \quad y=1+x;$$

горња гранична права достигнута је у тачки $x=0$, $y=1$. Тако исто тачка P лежи и између двеју правих

$$y=\frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y=1+x;$$

и доња гранична права достигнута је у тачки $x=1$, $y=\sqrt{2}$.

4⁰ Добивена област варијација је *најужа* између свију које су у складу са погодбама (D), т. ј. обе њене граничне линије могу стварно бити достигнуте у појединим случајевима.

Таке се н. пр. налази да се тачка P увек налази између двеју правих

$$y=\frac{1+x}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad y=1+x;$$

обе граничне линије су стварно достигнуте у појединим тачкама P: доња тачком $x=1$, $y=\sqrt{2}$ а горња тачком $x=0$, $y=1$. Област између тих правих, са десне стране осовине Oy, најужа је међу свима другима; кад би је ма и најмање сузили, она не би више обухватила горе поменуте две специјалне тачке, а које ипак задовољавају погодбе задатка.

По себи се разуме да је увек пробитачно познавати што уже границе између којих остаје непозната количина, јер уколико су ове уже, утолико је мање неодређености у познавању те количине. Најпробитачнији, најповољнији је *најужи* могући размак за ту количину, који је до те мере сужен да се више не може сужавати а да се не изгуби његова генералност, т. ј. да он тиме не престане обухватати све могуће случајеве који су у складу са датим погодбама (D).

Такав најужи могући размак претставља *најоштрије границе* за варијације те количине; он, међу осталим ширим размацима, има ту карактерну одлику да се непозната, задовољавајући погодбе (D), не само непрестано налази у томе размаку, већ она, у одређеним специјалним случајевима, и достиже границе тог размака.

Исто тако најужа могућа област варијација за непознату количину претставља најоштрије границе за те варијације; такав размак даје минимум неодређености за непознату промењљиву количину.

Из досадашњег излагања види се да рачунање са бројним размацима има једну одлику која му у извесном погледу даје и неку превагу над обичним рачунањем са бројевима: то је *апсолутна истинитост резултата до којих оно доводи.* Ма колико на први поглед то изгледало парадоксално, резултати рачунања са размацима изражавају један апсолутно истинит факт, док су резултати рачунања са бројевима само више или мање тачни, и само у изузетним случајевима апсолутно тачни. Казати н. пр. да је $\sqrt{2}=1{,}4142$ није тачно; казати да вредност $\sqrt{2}$ лежи између бројева 1,4141 и 1,4143 тачно је. И може се, шта више, тврдити да, док се при рачунању са бројевима, из потпуно одређених и тачних односа долази до нетачних резултата, дотле се у рачуну са размацима из непотпуно одређених односа долази до резултата којима се не може порицати апсолутна истинитост.

IX. Бројни размаци у Аритметици и Алгебри.

Аритметика и Алгебра су области математике у којима се ради са посебним бројевима, прецизираним или општим. И у једној и у другој области дешава се да:

1^0 или су и сами подаци дати у облику бројних размака или бројних области, па се и резултат рачуна добија у таквом истом облику;

2^0 или су подаци дати у облику тачних (прецизираних или општих) бројева, али се резултат, због техничких рачунских тешкоћа, или због тога што се не тражи велика тачност, већ само приближна вредност или овлашан појам о величини непознате, резултат добија у облику размака или области;

3^0 или, по самој својој природи, задатак има као своје тачно решење, не један одређен (прецизиран или општи) број, већ један бројни размак или једну бројну област;

4^0 или је, због недовољности података, задатак непотпуно одређен, али се може утврдити један размак у коме се непозната, поред све своје неодређености, ипак мора налазити.

Тако на пр. кад се израчунава квадратни корен из једнога броја који није дат тачно, већ једним размаком у коме се он налази, добиће се и један размак у коме се корен мора налазити.

Кад се помоћу логаритамских таблица израчунава вредност једнога израза у коме фигуришу тачно дати бројеви, резултат неће уопште бити тачан број, већ ће бити израчунат само са извесним бројем првих децимала тачних, т. ј. биће одређен само један размак у коме се та вредност мора налазити.

Кад се пита за које ће вредности y квадратна једначина

$$x^2-2x+y^2=0,$$

решена по x, имати своје корене реалне, тачно решење задатка састоји се у овоме: за макоју вредност y садржану у размаку $(-1,\ +1)$.

Непотпуно одређени задатак да се израчуна логаритам

дијагонале c, кад се зна логаритам збира s катета, решен је тиме што се зна да се $\log c$ увек налази у размаку

$$(\log s-\frac{1}{2}\log 2\ ,\ \log s)\,.$$

Овде ће бити наведено неколико задатака такве врсте, који имају честу употребу и у којима се непозната аритметичка или алгебарска количина добија у облику бројног размака.

А) Трином другог степена. На размаке, као решења задатка, наилази се уопште у задацима у којима се траже услови за реалност, позитивност или негативност нула датог полинома; или услови да би се његова вредност, за вредности независно промењиве садржане у датом размаку, и сама налазила у једноме, тако исто, датом размаку; или услови да би реалне нуле полинома биле садржане у истом размаку, и т. д.. Тако, кад коефицијенти полинома садрже какав промењив параметар α, познате теореме из теорије алгебарских једначина, као што су Rolle-ова, Sturm-ова, Descartes-ова, Fourier-ова и др., дају, као решења задатака такве врсте, размаке у којима треба да се налази вредност параметра.

За најпростији случај, за полином другог степена, елементарна теорија квадратне једначине непосредно даје решења таквих задатака. Зна се н. пр. да ће трином

$$ax^2+2bx+c \tag{9}$$

имати обе своје нуле реалне и супротно означене, кад је

$$b^2-ac\geqslant 0 \qquad ac<0\,:$$

да би н. пр. то био случај са триномом

$$(\alpha-5)\,x^2-4\alpha x+\alpha-2$$

потребно је и довољно да се вредност α налази у размаку (2,5), т. ј. да је

$$\alpha=2+3\vartheta\,, \qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1.$$

Да би трином био позитиван за све вредности x, потребно је и довољно да буде

$$b^2-ac<0 \qquad a>0\,;$$

да би то на пр. био случај са триномом

$$(4-\alpha)x^2-3x+\alpha+4$$

потребно је и довољно да се α налази у размаку $\left(-\frac{\sqrt{55}}{2}, +\frac{\sqrt{55}}{2}\right)$, т. ј. да је

$$\alpha=\omega\frac{\sqrt{55}}{2}, \qquad -1\leqslant\omega\leqslant 1 .$$

На такав се задатак своди и овај: одредити максимум и минимум линеарне функције

(10) $$f(x, y)=ax+by+c$$

кад су променљиве x и y везане квадратном релацијом

(11) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 .$$

Ако се стави да је

$$f(x, y)=\alpha$$

елиминацијом једне променљиве, н. пр. y, добија се једна квадратна једначина по x

(12) $$Mx^2+2Nx+P=0 ,$$

где је коефицијенат P полином другог степена по параметру α, коефицијенат N линеарна функција од α, а коефицијенат M независан од α. Задатак се тада своди на одредбу размака, у коме треба да се налази α да би вредности променљиве x, одређене једначином (12) биле реалне; предњи крај тога размака претстављаће минимум, а задњи крај максимум функције $f(x, y)$. Услов за то је да буде

(13) $$N^2-MP>0 , \quad M>0 ,$$

па пошто је N^2-MP полином другога степена по параметру α, то је задатак сведен на малопређашњи.

Тако н. пр. кад се тражи максимум и минимум функције

$$f(x, y)=y-2x ,$$

при чему су променљиве x и y везане релацијом

$$36x^2+16y^2-9=0 ,$$

елиминација променљиве y доводи до квадратне једначине

$$100x^2+64\alpha x+16\alpha^2-9=0 .$$

Услови (13) своде се на

$$(5+4\alpha)(5-4\alpha)>0$$

што значи да α треба да се налази у размаку $\left(-\frac{5}{4}, +\frac{5}{4}\right)$. Минимум функције $f(x, y)$ је, дакле, $-\frac{5}{4}$, а њен максимум $\frac{5}{4}$; за макакву реалну вредност x биће

$$f(x, y)=\frac{5}{4}\omega , \qquad -1\leqslant\omega\leqslant 1 .$$

Овакав начин одређивања максимума и минимума функција, који не захтева употребу извода као обичан начин за то одређивање, није везан само за полиноме првог и другог степена. Кадгод има да се одреди максимум или минимум једне функције

$$f(x, y, z, \ldots)$$

у којој су променљиве $x, y, z, \ldots$ везане датим релацијама чији је број за јединицу мањи од броја тих променљивих, треба функцују f означити са α, па из скупа једначина елиминисати све променљиве осим α и још једне од њих, н. пр. x. Ако је

(14) $$\varphi(x, \alpha)=0$$

резултат елиминације, задатак максимума и минимума своди се на одређивање тачних размака у којима треба да се налази вредност α да би корени једначине (14) били реални. Ако је (α_1, α_2) такав један размак, број α_1 је један минимум, а број α_2 један максимум функције f са датим везама. Сваки такав размак даће по један минимум и по један максимум функције.

На сличан се начин решава и задатак: за које ће вредности x трином (9) непрестано имати вредности садржане у датоме размаку (A, B)?

Тражи се да буде

$$A\leqslant ax^2+2bx+c\leqslant B ,$$

т. ј. да је у исто време

(15) $$\begin{aligned} ax^2+2bx+c-A&>0 \\ ax^2+2bx+c-B&<0 . \end{aligned}$$

Према знацима количина

$$a, \quad b^2-a(c-A), \quad b^2-a(c-B)$$

једна од неједначина (15) биће задовољена за вредности x које се налазе у једном извесном размаку (p, q) који може бити састављен и из два размака, а друга за вредности x које се налазе у једном извесном размаку (p', q'). Услове (15) задовољаваће само вредности x садржане у заједничком делу размака (p, q) и (p', q'); тражене вредности x јесу оне које се налазе у томе заједничком размаку.

Тако н. пр. да би се вредност тринома

$$x^2-14x+50$$

налазила у размаку (5,26), потребно је и довољно да буде у исти мах

$$x^2-14x+45>0,$$

$$x^2-14x+24<0.$$

Прва се неједначина може написати у облику

$$(x-5)(x-9)>0$$

и задовољена је за вредности x које су садржане било у размаку $(-\infty, 5)$, било у размаку $(9, +\infty)$.

Друга неједначина може се написати у облику

$$(x-2)(x-12)<0$$

и задовољена је за све вредности x садржане у размаку (2,12). Заједнички део размака (p, q) и (p', q') су два размака (2,5) и (9,12); тражене вредности x су оне садржане било у првом, било у другом од та два размака.

Кад је дат трином трећег степена, увек сводљив на облик

(16) $$x^3+px+q$$

потребан и довољан услов за реалност његових нула је исказан неједначином

(17) $$4p^3+27q^2<0.$$

Кадгод је лева страна неједначине (17) какав трином другог степена по једном параметру α, услов реалности се своди

на задатак горње врсте и решење му се састоји у одредби размака за тај параметар.

Слично се решење добива и у случају полинома четвртог степена.

Б) Корен реалног броја. Нека је x такав један број да је $1+x>0$. Према биномном обрасцу очевидно је

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx,$$

где је једнакост постигнута или за $x=0$, или за $n=0$, или за $n=1$. Ставивши да је $x=\frac{h}{n}$, добија се да је

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n \geqslant 1+h,$$

па, дакле,

(18) $$1 \leqslant \sqrt[n]{1+h} \leqslant 1+\frac{h}{n}$$

за макакав број h за које је $1+\frac{h}{n}>0$.

Нека је сад z један макоји број већи од јединице, па се из (18), ставивши да је $1+h=z$ добија да је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{z} \leqslant 1+\frac{z-1}{n},$$

па, дакле,

(19) $$\sqrt[n]{z} = 1+\frac{\vartheta}{n}(z-1).$$

Ако је, пак, z какав позитиван број мањи од јединице, узевши у неједначини (18) реципрочне вредности (чиме неједначина мења смисао), добија се

$$\frac{1}{1+\frac{h}{n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}} \leqslant 1,$$

па ако се стави да је

$$\frac{1}{1+h}=z<1, \quad \text{одакле је} \quad h=\frac{1-z}{z},$$

добија се да је

$$\frac{1}{1+\dfrac{1-z}{nz}} \leqslant \sqrt[n]{z} \leqslant 1$$

према чему је

$$\sqrt[n]{z} = 1 + \frac{1-z}{1+(n-1)z}\,\vartheta\,. \tag{20}$$

Из обрасца (19) и (20) се н. пр. јасно види да $\sqrt[n]{z}$ тежи јединици, кад n бескрајно расте. Обрасци су од користи за приближну одредбу n-тог корена датог броја.

В. Збир наизменичког опадајућег реда. То је ред

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \tag{21}$$

у коме су чланови u_k наизменце позитивни и негативни, а по апсолутној вредности је $u_k < u_{k-1}$, тежећи нули кад k бескрајно расте.

Ако се стави да је

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \pm u_n\,,$$

зна се да је

$$S_{2k+1} < S < S_{2k}$$

за сваку вредност $k = 0, 1, 2, \ldots$ индекса k. Према томе је

$$S = S_{2k+1} + \vartheta\,(S_{2k} - S_{2k+1})\,,$$

а пошто је

$$S_{2k} - S_{2k+1} = u_{2k+1}\,,$$

то је

$$S = S_{2k+1} + \vartheta\,.\,u_{2k+1} \tag{22}$$

па макоју вредност имао индекс k. Пошто чланови реда u_k непрестано и бескрајно опадају кад индекс расте, то ће амплитуда варијација збира S непрестано и бескрајно опадати са индексом k.

Из (22) се добија образац

$$S_{2k+1} = S - \vartheta\,.\,u_{2k+1}\,,$$

који даје, у облику бројног размака, збир S_{2k+1} изражен помоћу збира S и члана u_{2k+1}.

I. пример: из обрасца

$$\frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$$

добија се, на горњи начин да је

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{\vartheta}{9!} =$$

$$= 0{,}367879 + \vartheta\,.\,0{,}000002\,,$$

што даје број $\frac{1}{e}$ са 5 децимала тачно.

II. пример: ако се низ простих бројева, који почиње са 5, означи са $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$, постоји познат образац

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \ldots = 0{,}9069\ldots$$

Према томе вредност збира

$$S_{2k+1} = 1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} + \ldots - \frac{1}{p_{2k+1}}$$

налази се у размаку

$$\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{p_{2k+1}}\,,\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$$

тако да је

$$S_{2k+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{\vartheta}{p_{2k+1}}\,.$$

Тако н. пр. пошто је 421 прост број чији је ранг 41 у низу p_k, вредност збира

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \ldots - \frac{1}{421}$$

износи

$$0{,}9046 + \vartheta\,.\,0{,}0023\,.$$

Г) Количник два збира. Нека је $a_1, a_2, \ldots a_n$ један низ реалних бројева ма каквог знака; $b_1, b_2, \ldots b_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ два низа реалних позитивних бројева. Означимо са N и M најмањи и највећи од бројева

$$\frac{a_1}{b_1}\,,\ \frac{a_2}{b_2}\,,\ \ldots\ \frac{a_n}{b_n} \tag{23}$$

водећи рачуна и о њиховим знацима. Може се доказати да је увек

$$\frac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_n b_n}=N+\vartheta(M-N)\,. \tag{24}$$

Јер, макакви били знаци бројева a_k, увек је

$$N\leqslant\frac{a_k}{b_k}\leqslant M\,,$$

па, дакле, и

$$N\lambda_k\leqslant\frac{\lambda_k a_k}{b_k}\leqslant M\lambda_k,$$

према чему је

$$N\lambda_k b_k\leqslant\lambda_k a_k\leqslant M\lambda_k b_k\,.$$

Стављајући узастопце да је $k=1, 2, \ldots n$, сабирајући тако добивене неједначине и поделивши резултат збиром

$$\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_n b_n$$

налази се да се вредност разломка на левој страни једначине (24) налази између N и M, што доказује горње тврђење.

Узевши да је

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1\,,$$

види се да је

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=N+\vartheta(M-N)\,. \tag{25}$$

У случају два пара бројева a_1, a_2, и b_1, b_2, од којих је први макога знака, види се да је

$$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}=n+\vartheta(m-n),$$

где је n мањи, а m већи број $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$.

Израз на левој страни једначине (25) назива се *медиана* разломака (23); као што се види, њена се вредност израчунава у облику једног бројног размака помоћу највеће и најмање вредности тих разломака.

Од интереса је н. пр. навести да се медиана двају разломака

$$n=\frac{333}{106}\quad\text{и}\quad m=\frac{22}{7}\,,$$

а то је број

$$\frac{355}{113}=3{,}1415929\ldots$$

тек у седмом децималу разликује од броја

$$\pi=3{,}1415926\ldots$$

тако, да се може узети да је

$$\pi=\frac{355}{113}$$

са шест децимала тачно. Тачна вредност броја π може се претставити у облику

$$\pi=n+\vartheta(m-n)=\frac{333}{106}+\frac{\vartheta}{1142}\,.$$

Као другу примену узмимо да је

$$\lambda_1=1\,,\quad\lambda_2=x\,,\quad\lambda_3=x^2,\ldots,\quad\lambda_n=x^{n-1}$$

где изложилац n може и бескрајно расти. Ако се стави да је

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_n x^{n-1}&=f(x)\,,\\ b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_n x^{n-1}&=\varphi(x)\,, \end{aligned} \tag{26}$$

где су коефицијенти a_k реални и ма каквог знака, а b_k реални и позитивни, образац (24) показује да је

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=N+\vartheta(M-N)\,, \tag{27}$$

где N означује најмањи, а M највећи од бројева

$$\frac{a_0}{b_0},\ \frac{a_1}{b_1},\ldots,\ \frac{a_n}{b_n}\,.$$

Тако н. пр. ма колика била позитивна вредност x, вредност рационалне функције

$$\frac{2+5x+3x^2+\ x^3}{4+7x+4x^2+8x^3}$$

увек лежи између $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{2}$.

Д) Однос између збира и производа. Нека је

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

један низ позитивних бројева, па означимо да је

$$S = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n\,,$$

$$P = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n)\,.$$

Пошто је

$$(1+a_1)(1+a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2$$

то је

$$(1+a_1)(1+a_2) > 1 + a_1 + a_2$$

Множећи ову неједначину са $1+a_3$, добија се

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) > (1+a_1+a_2)(1+a_3) > 1+a_1+a_2+a_3.$$

Продужујући и даље тако долази се до неједначине

$$P > 1+S\,. \tag{28}$$

Са друге стране, из обрасца

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

види се да је за позитивне вредности x увек

$$e^x > 1+x, \tag{29}$$

па ако се на место x стављају узастопце вредности $a_1, a_2, \dots a_n$ и добивене неједначине измноже међу собом, добија се

$$P < e^S\,, \tag{30}$$

па је, дакле,

$$1+S < P < e^S,$$

што значи да је

$$P = (1+S) + \vartheta\,(e^S - S - 1)\,. \tag{31}$$

Ставимо сада да је

$$1 + a_k = b_k\,,$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = T\,,$$

$$b_1 . b_2 \dots b_n = Q\,,$$

па се из (31) добија једначина

$$Q = (T-n+1) + \vartheta\,(e^{-n} e^T - T + n - 1), \tag{32}$$

која везује збир и производ ма коликога броја позитивних бројева.

Приметимо да неједначина (29) важи и за ма какав реалан број x; то се види из тога што функција

$$e^x - x - 1$$

има свој минимум за $x=0$, и тај је минимум једнак нули, што значи да је за све реалне вредности x

$$e^x - x - 1 > 0\,.$$

Према томе и задња граница e^S размака у коме се налази P према неједначини (30), важи и за све реалне бројеве $a_1, a_2, \dots a_n$.

У случају кад су $a_1, a_2, \dots a_n$ позитивни бројеви мањи од јединице, може се на следећи начин добити један однос збира и производа

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n\,,$$

$$Q = (1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)\,.$$

Пошто је

$$(1-a_1)(1-a_2) = 1 - (a_1+a_2) + a_1 a_2$$

то је

$$(1-a_1)(1-a_2) > 1 - (a_1+a_2)\,.$$

Множењем са позитивним бројем $1-a_3$, добија се

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) > [1-(a_1+a_2)]\,(1-a_3) > 1-(a_1+a_2+a_3)\,.$$

Продужујући тако и даље, долази се до неједначине

$$Q > 1-S\,, \tag{33}$$

а пошто је $Q<1$, то се добија да је

$$1-S < Q < 1\,, \tag{34}$$

према чему је

$$Q = (1-S) + \vartheta S\,, \tag{35}$$

што се може написати и у облику

$$Q = 1 + \lambda S\,, \tag{36}$$

где је λ један број који увек лежи између 1 и 2.

Напослетку, за вредности x садржане у размаку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, важи и следећи резултат.

Лако се уверити да је у томе размаку непрестано

$$1-2x \leqslant e^{-2x} \leqslant 1-x;$$

ако је, дакле, a_1, a_2, ... a_n један низ бројева садржаних у размаку $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и ако се означи да је

$$a_1+a_2+\ldots+a_n = S_n$$

збир

$$T=e^{-2a_1}+e^{-2a_2}+\ldots+e^{-2a_n}$$

налазиће се у размаку

$$(n-2S_n, \quad n-S_n),$$

т. ј. биће

$$T=n-\lambda S_n \qquad 1 \leqslant \lambda \leqslant 2.$$

Тако, нека је

$$f(x)=0$$

једна алгебарска једначина n-тог степена чији су корени α_1, α_2, ... α_n сви реални; она се подесном сменом

$$x=pz+q$$

увек може свести на једну једначину

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_n z^n = 0$$

чији ће корени β_1, β_2 ... β_n бити сви позитивни и мањи од $\frac{1}{2}$. Горњи резултат показује да је

$$e^{-2\beta_1}+e^{-2\beta_2}+\ldots+e^{-2\beta_n} = n-\frac{\lambda a_{n-1}}{a_n}, \qquad 1 \leqslant \lambda \leqslant 2,$$

а из тога обрасца лако је прећи на образац који ће важити за корене првобитне једначине.

Ђ) Збир производа. Нека су a_1, a_2, ... a_n и b_1, b_2, ... b_n два низа реалних бројева макога знака, па означимо да је

$$P=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_n b_n.$$

Из образаца

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2P,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2P,$$

добија се да је

$$P=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\right].$$

Означимо

1° са N и M најмању и највећу апсолутну вредност збирова

$$a_1+b_1,\ a_2+b_2, \ldots a_n+b_n,$$

2° са N' и M' најмању и највећу апсолутну вредност разлика

$$a_1-b_1,\ a_2-b_2, \ldots a_n-b_n,$$

па ће бити очевидно

$$(37) \quad \begin{cases} P \leqslant \frac{n}{4}(M^2-N'^2), \\ P \geqslant \frac{n}{4}(N^2-M'^2). \end{cases}$$

Збир продуката P увек се, дакле, налази у размаку означеном неједначинама (37) према чему је

$$P=\frac{n}{4}\left[N^2-M'^2+\vartheta(M^2+M'^2-N^2-N'^2)\right].$$

Знак једнакости у (37) имаће се кад је за све индексе i и j.

$$a_i+b_i=a_j+b_j \quad \text{и} \quad a_i-b_i=a_j-b_j,$$

т. ј. кад су сви бројеви a_k међу собом једнаки, а тако исто и сви бројеви b_k.

Међутим се за P може имати једна горња граница и на следећи начин. Приметимо да израз

$$(a_1+b_1\lambda)^2+(a_2+b_2\lambda)^2+\ldots+(a_n+b_n\lambda)^2$$

не може бити једнак нули ни за какву реалну вредност λ, пошто су му сви чланови позитивни. То значи да и квадратан једначина

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0,$$

где је

$$A=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2,$$

$$C=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2,$$

$$B=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_n b_n=P,$$

нема реалних корена. То показује да је

$$B^2-AC<0, \quad \text{т ј.}$$

$$P^2<(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

што се назива Cauchy-ева неједначина.

Према томе и првој од неједначина (37) налази се да се збир P увек налази у размаку

$$\left(\frac{n}{4}(M^2-N'^2), \quad \sqrt{AC}\right).$$

Поменућемо само да је доказан и овај резултат у погледу односа између збирова A, C, P: нека су α, β, G, H четири таква позитивна броја,

1^0 да је $\alpha<G$, $\beta<H$,

2^0 да сви посматрани бројеви $a_1, a_2, \ldots a_n$ леже у размаку (α, G),

3^0 да сви посматрани бројеви $b_1, b_2 \ldots b_n$ леже у размаку (β, H). Тада се вредност производа AC увек налази у размаку $(P^2, \lambda P^2)$, где је λ

$$\lambda=\frac{(\alpha\beta+GH)^2}{4\alpha\beta GH},$$

тако да је

$$AC=\left[1+\vartheta\frac{(\alpha\beta-GH)^2}{4\alpha\beta GH}\right]P^2.$$

E) Аритметичка средина. Ако се у обрасцу (24) узме да је

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1, \quad b_1=b_2=\ldots=b_n=1,$$

добија се да је

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=N+\vartheta(M-N),$$

где је N и M најмањи и највећи међу бројевима $a_1, a_2, \ldots a_n$, што значи да се аритметичка средина једнога низа бројева увек налази у размаку између најмањег и највећег од тих бројева. Границе тога размака су достигнуте у случају кад су сви бројеви a_k међу собом једнаки, тада је $M=N$ и обе се границе сливају у једну.

Али се иста аритметичка средина може изразити као размак још на један начин; размак има ту добру страну што је ужи од малопређашњег, па дакле и пробитачнији.

Приметимо да је за ма какве реалне бројеве a и b израз

$$\frac{(a+b)+|a-b|}{2}$$

једнак већем од та два броја a и b (јер кад је $a>b$, он је једнак броју a, а кад је $a<b$ он је једнак броју b, поклапајући се са оба та броја у случају кад су они међу собом једнаки).

Кад је M највећи међу бројевима $a_1, a_2, \ldots a_n$, онда је према томе за све индексе i и j

$$\frac{(a_i+a_j)+|a_i-a_j|}{2}\leqslant M,$$

јер је лева страна једнака већем од бројева a_i и a_j, а ниједан од ових није већи од M. Ако се у тој неједначини индекс j остави непромењен, а ставља се узастопце да је $i=1, 2, \ldots n$, па се добијене неједначине међу собом саберу, добија се да је

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j|\leqslant nM$$

или

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_j|\leqslant nM.$$

Стављајмо сад у овој последњој неједначини узастопце $j=1, 2, \ldots n$, и саберимо добивене неједначине међу собом, па се добија да је

$$\frac{n}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i-a_j|\leqslant n^2M.$$

Кад се збир од прва два збира у овој неједначини подели са n^2, добија се аритметичка средина

$$A = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

бројева a_k; ако се дакле, краткоће ради, стави да је

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_i - a_j| = R, \tag{38}$$

добија се да је

$$A+R \leqslant M,$$

т. ј.

$$A \leqslant M-R \tag{39}$$

што даје једну горњу границу за A.

Да бисмо добили и једну доњу границу, приметимо да је за ма какве реалне бројеве a и b израз

$$\frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

једнак мањем од та два броја a и b. Кад је N најмањи међу бројевима $a_1, a_2, \ldots a_n$, онда је, дакле, за све индексе i и j

$$\frac{(a_i+a_j)-|a_i-a_j|}{2} \geqslant N,$$

јер је лева страна једнака мањем од бројева a_i и a_j, а нијeдан од њих није мањи од N. Из те се неједначине, на исти начин као малочас, долази до неједначине

$$A-R \geqslant N,$$

т. ј.

$$A \geqslant N+R, \tag{40}$$

што даје једну доњу границу за A.

Неједначине (39) и (40) доводе тада до овог резултата.

Ако се са S *означи збир апсолутних вредности свију разлика* $a_i - a_j$ (рачунајући разлике $a_i - a_j$ и $a_j - a_i$ као различне једна од друге), *са* N *и* M *најмањи и највећи међу бројевима* a_k, *аритметичка средина* A *бројева* a_k *увек лежи у размаку*

$$\left(N+\frac{S}{2n^2},\quad M-\frac{S}{2n^2}\right).$$

Аритметичка средина биће, дакле, изражена обрасцем

$$A = \left(N+\frac{S}{2n^2}\right)+\vartheta\left(M-N-\frac{S}{n^2}\right).$$

Кад су вредности a_k једнаке међу собом, биће

$$S=0, \quad M=N$$

и размак A своди се на заједничку вредност бројева a_k.

Ж) Однос између аритметичке, геометриске и хармониске средине два броја. Нека су a и b два позитивна броја, и означимо са A, G, H њихову аритметичку средину

$$A = \frac{a+b}{2},$$

њихову геометриску средину

$$G=\sqrt{ab}$$

и њихову хармониску средину

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

Идентичност

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \tag{41}$$

показује да је

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{42}$$

т. ј.

$$G \leqslant A,$$

где је једнакост достигнута само кад је $a=b$.

Са друге стране, пошто је идентички

$$G^2=AH, \tag{43}$$

то се из неједначине $G \leqslant A$, добија да је

$$G^2=AH \geqslant GH$$

према чему је

$$G \geqslant H.$$

Отуда неједначина

$$H \leqslant G \leqslant A, \tag{44}$$

а одатле је

(45) $$G = H + \vartheta (A - H)$$

или

(46) $$\sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} + \frac{\vartheta}{2} \frac{(a-b)^2}{a+b}.$$

Тај образац даје $\sqrt{ab}$ у облику једнога размака чије су границе рационалне функције од a и b.

Образац (45) је практички употребљив за израчунавање квадратног корена једног датог броја са каквом се хоће приближношћу. Ако се стави да је

(47) $$\begin{aligned} A &= \frac{a+b}{2}, & H &= \frac{2ab}{a+b}, \\ A_1 &= \frac{A+H}{2}, & H_1 &= \frac{2AH}{A+H}, \\ A_2 &= \frac{A_1+H_1}{2}, & H_2 &= \frac{2A_1H_1}{A_1+H_1}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

налази се да у $\sqrt{ab}$, на место a и b, могу узети A_{k-1} и H_{k-1}, чиме образац (45) постаје

(48) $$ab = G^2 = AH = A_1H_1 = A_2H_2 = \dots$$

тако, да се према обрасцу (45) добија да је

(49) $$G = H_k + \vartheta (A_k - H_k)$$

па ма колики био индекс k. Међутим, из идентичности

$$A_k - H_k = (A_{k-1} - H_{k-1}) \frac{A_{k-1} - H_{k-1}}{2(A_{k-1} + H_{k-1})}$$

види се да је

$$A_k - H_k < A_{k-1} - H_{k-1},$$

што значи да члан $\vartheta (A_k - H_k)$ у обрасцу (49) постаје све мањи уколико је индекс k већи, т. ј. уколико се више продуже рачунске радње означене у обрасцима (47). Продуживши их довољно, тај се члан може смањити колико се хоће, тако да се за k довољно велико може узети да је

$$\sqrt{ab} = A_k$$

са приближношћу која се тражи.

Тако н. пр. ако се узме $a = 1$, $b = 2$, добија се узастопце

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2} = 1{,}5, & H &= \frac{4}{3} = 1{,}3, \\ A_1 &= \frac{17}{12} = 1{,}416, & H_1 &= \frac{24}{17} = 1{,}411, \\ A_2 &= \frac{577}{408} = 1{,}414215, & H_2 &= 1{,}414211; \end{aligned}$$

тако се добија

$$\sqrt{2} = A_2 + \vartheta (A_2 - H_2) = 1{,}414211 + \vartheta \cdot 0{,}000004$$

са пет првих децимала тачно.

3) Однос између збира бројева и збира њихових квадрата. Нека је $a_1, a_2 \dots a_n$ један низ реалних позитивних бројева, па означимо да је

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$
$$R = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Позната алгебарска идентичност, која важи за све реалне бројеве a_k,

(50) $$nR - S^2 = \sum (a_i - a_j)^2,$$

показује да је

(51) $$nR - S^2 \geqslant 0,$$

одакле је

$$R \geqslant \frac{S^2}{n},$$

где је једнакост достигнута само кад је

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

А пошто је у исто време, али само за позитивне вредности a_k, очевидно

$$R \leqslant S^2,$$

(где је једнакост постигнута онда кад су сви a_k, осим једнога од њих, једнаки нули), то се добија да је

(52) $$\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{R} \leqslant S,$$

одакле је

(53) $$\sqrt{R} = \frac{1+\vartheta\,(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}}\,S$$

што се може написати у облику

(54) $$\sqrt{R} = \lambda S\ ,$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{\sqrt{n}}$ и 1.

У случају кад је $n=2$, неједначина (51) своди се на

$$2\,(a^2+b^2)-(a+b)^2 \geqslant 0$$

што резултира из идентичности

$$2\,(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2;$$

једначина (54) своди се на

(55) $$\sqrt{a^2+b^2}=\lambda\,(a+b),$$

где је λ један број који лежи између 0,7071 и 1. Доња граница је достигнута кад је $a=b$, а горња кад је један од бројева a и b једнак нули.

У случају $n=3$ добија се да је

(56) $$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\lambda\,(a+b+c)\,,$$

где је λ један број који лежи између 0,5774 и 1.

Тако н. пр. разлика између логаритама бројева $\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b$ не износи никад више од $\frac{1}{2}\log 2$; за логаритме по основици 10 она не износи више од 0,15052. Разлика између логаритама бројева $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ и $a+b+c$ не износи никад више од 0,23856. Те су максималне разлике достигнуте, у првом случају кад је $a=b$, а у другом кад је $a=b=c$.

И) Однос између збира бројева и збира њихових k-тих степена. Нека је $a_1, a_2, \ldots a_n$ један низ позитивних бројева, па означимо да је

$$S=a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n\,,$$

$$U=a_1^k+a_2^k+\ \ldots\ +a_n^k\,.$$

Уочимо функцију од n позитивних променљивих количина x_i

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n)=n^{k-1}(x_1^k+\ \ldots\ +x_n^k)-(x_1+\ \ldots\ +x_n)^k\,,$$

где је k један ма какав реалан број Помоћу теорије максимума и минимума функција које зависе од више променљивих количина, налази се да

1° кад је $k>1$, функција F постаје минимум за

(57) $$x_1=x_2=\ \ldots\ =x_n$$

и вредност тог минимума је нула; функција има, дакле, позитивну вредност за сваки други скуп вредности x_i;

2° кад је $k<1$, функција F постоје максимум за (57) и вредност тога максимума је нула; функција има, дакле, негативну вредност за сваки други скуп вредности x_i;

3° кад је $k=1$, функција F се идентички своди на нулу.

Према томе, ако се стави да је

$$\frac{(x_1+x_2+\ \ldots\ +x_n)^k}{x_1^k+x_2^k+\ \ldots\ +x_n^k}=\varrho$$

биће

$$\varrho \leqslant n^{k-1} \quad \text{за} \quad k>1\,,$$

$$\varrho \geqslant n^{k-1} \quad \text{за} \quad k<1\,,$$

$$\varrho = 1 \quad \text{за} \quad k=1\,.$$

Поред тога очевидно је да је

$$\varrho \geqslant 1 \quad \text{за} \quad k>1 \quad \text{и} \quad \varrho \leqslant 1 \quad \text{за} \quad k<1\,,$$

где је једнакост достигнута кад су сви x_i, осим једнога од њих, једнаки нули.

Из тога излази да вредност ϱ увек лежи између 1 и n^{k-1}; прва је граница достигнута (за ма какву вредност k) кад су сви x_i, осим једнога, једнаки нули, или (за ма какве вредности x_i) кад је $k=1$; друга је граница достигнута кад су сви x_i међу собом једнаки.

За позитивне вредности k је, дакле,

(58) $$\frac{S^k}{n^{k-1}} \leqslant U \leqslant S^k$$

према чему је

(59) $$U=S^k\left[\frac{1}{n^{k-1}}+\vartheta\left(1-\frac{1}{n^{k-1}}\right)\right]$$

или још

$$U = \lambda S^k , \tag{60}$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{n^{k-1}}$ и 1.

Према томе је н. пр.

$$\log \sqrt[k]{u} = \log S + \frac{k-1}{k} \vartheta \log n . \tag{61}$$

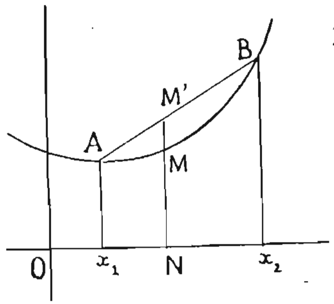
Ј) Однос између аритметичке средине бројева и аритметичке средине њихових функција. Нека је

$$x_1 , x_2 , \ldots x_n$$

један низ позитивних бројева садржаних у датоме размаку (a, b), а $f(x)$ једна позитивна *конвексна* функција у размаку (a, b) т. ј. функција чији је други извод позитиван за вредности x у томе размаку. Означимо са

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} , \\ M_n &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \end{aligned} \tag{62}$$

аритметичку средину бројева x_i и аритметичку средину њихових функција $f(x_i)$.



На слици која претставља криву $y = f(x)$ конвексну према оси Ox види се да, ако се уочи једна тачка M на конвексноме луку криве, чија се апсциса ON налази између апсциса x_1 и x_2, мора бити

$$MN < NM'. \tag{63}$$

Као што је познато из аналитичке геометрије, једна ма која тачка M' која се налази на тетиви AB између тачака A и B, има за координате

$$ON = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} , \quad M'N = \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} ,$$

где су λ_1 и λ_2 два позитивна броја, и ма каква била та два позитивна броја, тачка M' увек лежи између тачака A и B.

Неједначина (63) изражава тада да је

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \leqslant \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{64}$$

за све тачке x_1 и x_2 у размаку конвексности функције $f(x)$ и за све позитивне бројеве λ_1 и λ_2.

Узмимо сад за λ_1 и λ_2 бројеве

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = n - 1 ,$$

за x_2 вредност

$$x_2 = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} ,$$

а за x_1 вредност x_n, па ће горња неједначина постати

$$f(\mu_n) \leqslant \frac{f(x_n) + (n-1) f(\mu_{n-1})}{n} ,$$

одакле је

$$n f(\mu_n) \leqslant f(x_1) + (n-1) f(\mu_{n-1}) .$$

Смењујући у тој неједначини узастопце n са $n-1, n-2, \ldots$ добија се низ неједначина

$$\begin{aligned} n f(\mu_n) &\leqslant f(x_n) + (n-1) f(\mu_{n-1}) , \\ (n-1) f(\mu_{n-1}) &\leqslant f(x_{n-1}) + (n-2) f(\mu_{n-2}) , \\ (n-2) f(\mu_{n-2}) &\leqslant f(x_{n-2}) + (n-3) f(\mu_{n-3}) , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

чијим се сабирањем добија да је

$$n f(\mu_n) \leqslant f(x_n) + f(x_{n-1}) + \ldots + f(x_1) ,$$

што показује да је

$$f(\mu_n) \leqslant M_n . \tag{65}$$

На тај начин је нађена једна доња граница за аритметичку средину M_n. Да бисмо јој одредили и једну горњу границу, ставимо у (64) да је

$$x_1 = x + y , \quad x_2 = 0 , \quad \frac{x}{x+y} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} ,$$

претпостављајући да су x и y позитивни. Неједначина (64) своди се тада на

$$f(x) \leqslant \frac{xf(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} f(0). \tag{66}$$

Ако бисмо сад опет у (64) ставили да је

$$x_2 = x+y, \quad x_1 = 0, \quad \frac{y}{x+y} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

добили бисмо да је

$$f(y) \leqslant \frac{yf(x+y)}{x+y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} f(0). \tag{67}$$

Сабирањем неједначина (66) и (67) добија се да је

$$f(x)+f(y) \leqslant f(x+y)+f(0). \tag{68}$$

Посматрајмо сада израз

$$\begin{aligned} P &= f(x_1)+f(x_2)+ \ldots +f(x_n) = \\ &= [f(x_1)+ \ldots +f(x_{n-2})]+[f(x_{n-1})+f(x_n)]. \end{aligned} \tag{69}$$

Према (68) биће

$$[f(x_{n-1})+f(x_n)] \leqslant f(x_{n-1}+x_n)+f(0),$$

па, дакле, према (69)

$$P \leqslant [f(x_1)+ \ldots +f(x_{n-3})]+[f(x_{n-2})+f(x_{n-1}+x_n)]+f(0).$$

Према (68) биће опет

$$[f(x_{n-2})+f(x_{n-1}+x_n)] \leqslant f(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)+f(0),$$

што чини да ће бити

$$P \leqslant [f(x_1)+\ldots+f(x_{n-4})]+[f(x_{n-3})+f(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)]+2f(0).$$

Продуживши тако и даље док се не исцрпе сви индекси n, добија се да је

$$P \leqslant f(x_1+x_2+ \ldots +x_n)+(n-1)f(0),$$

одакле је после деобе са n

$$M_n \leqslant \frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)}{n},$$

што даје једну горњу границу за аритметичку средину M_n.

Тиме се долази до овог општег односа између аритметичких средина M_n и μ_n: увек је

$$f(\mu_n) \leqslant M_n \leqslant \frac{f(n\mu_n)+(n-1)f(0)}{n}. \tag{70}$$

Однос претпоставља да су вредности $x_1, x_2, \ldots x_n$ позитивне, а функција $f(x)$ позитивна и конвексна за све вредности x у размаку између најмање и највеће међу вредностима x_i.

Размак има, као асиметрички нормални рачунски претставник, израз

$$M = f(\mu)+\vartheta\varphi(\mu), \tag{71}$$

где је

$$\varphi(\mu) = \frac{f(n\mu)+(n-1)f(0)-nf(\mu)}{n}. \tag{72}$$

Из (70) се види да се вредност

$$f(x_1+x_2+ \ldots +x_n)$$

увек налази у размаку између двеју вредности

$$[f(x_1)+f(x_2)+ \ldots +f(x_n)]-(n-1)f(0) = A \tag{73}$$

и

$$\frac{f(nx_1)+f(nx_2)+ \ldots +f(nx_n)}{n} = B$$

и за ма коју функцију поменуте врсте ове границе размака могу стварно бити достигнуте. Кад се овај размак изрази у облику

$$f(x_1+x_2+ \ldots x_n) = A+\vartheta(B-A), \tag{74}$$

добија се једна врста адиционе теореме за функцију $f(x)$; теорема изражава, у облику бројног размака, функцију збира помоћу функције сабирака умножених једним истим сталним бројем n.

Тако се исто из (70) види и то, да вредност симетричне функције

$$f(x_1)+f(x_2)+ \ldots +f(x_n)$$

од n позитивних бројева чији је збир s, лежи увек у размаку између двеју вредности

$$nf\left(\frac{s}{n}\right) = C \tag{75}$$

и

$$f(s)-nf\left(\frac{s}{n}\right)+(n-1)f(0) = D,$$

тако да је

$$f(x_1)+\ldots+f(x_n)=C+\vartheta(D-C); \tag{76}$$

границе размака су такође достигнуте у поменутим случајевима, па ма каква била функција $f(x)$ посматране врсте.

Неједначине (70) одређују размак, у коме ће се налазити средина M_n, изражен помоћу средине μ_n. Границе тога размака су одиста достигнуте за ма какву конвексну функцију $f(x)$, и то, доња граница кад су све вредности x_i међу собом једнаке, а горња граница кад су све оне једнаке нули осим једне од њих.

Приметимо и то да те неједначине важе и за функције $f(x)$ позитивне и *конкавне* у посматраном размаку, т. ј. функције чији је други извод негативан за вредности x у томе размаку, само што се тада мења смисао неједначина.

I. пример: нека је

$$f(x)=x^k$$

која је фукција конвексна за $k>1$, а за x позитивно. Тада је

$$f(\mu_n)=\mu_n^k=\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^k}{n^k},$$

$$M_n=\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{n}$$

па неједначине (70) дају

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{n^k}\leqslant\frac{x_1^k+\ldots+x_n^k}{n}\leqslant\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{n},$$

што значи да се вредност количника

$$\frac{(x_1+\ldots+x_n)^k}{x_1^k+\ldots+x_n^k}=\varrho$$

увек налази у размаку $(1, n^{k-1})$. Границе тог размака стварно су достигнуте кад су сви x_i међу собом једнаки, или кад су сви они једнаки нули осим једнога од њих.

У специјалном случају кад је $k=2$ добија се раније наведена неједначина

$$1\leqslant\frac{(x_1+\ldots+x_n)^2}{x_1^2+\ldots+x_n^2}\leqslant n$$

чији је специјалан случај неједначина

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a+b$$

или неједначина

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}}\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqslant a+b+c.$$

У случају кад је $k<1$, функција x^k је конкавна и горње неједначине мењају смисао.

Ти исти резултати су нађени, у ранијем одељку, на други начин.

II. пример: узевши $f(x)=e^x$ налази се да је

$$e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}=C+\vartheta H,$$

где је

$$C=ne^{\frac{S}{n}},\quad H=e^S-ne^{\frac{S}{n}}-1,\quad S=x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

III. пример: узевши

$$x_1=\sin^2 x,\quad x_2=\cos^2 x$$

налази се да је

$$f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)=C+\vartheta H,$$

где су C и H бројеви независни од промењиве x

$$C=2f\left(\frac{1}{2}\right),\quad H=f(1)+f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right).$$

IV. пример: узевши

$$x_1=\alpha,\quad x_2=\beta,\quad x_3=\gamma,$$

где су α, β, γ углови једног троугла (изражени у деловима од π), збир $x_1+x_2+x_3$ има за вредност π и налази се да је

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=C+\vartheta H,$$

где су C и H бројеви независни од углова

$$C=3f\left(\frac{\pi}{3}\right),\quad H=f(\pi)+2f(0)-3f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Тако н. пр. за све троугле биће

$$e^\alpha+e^\beta+e^\gamma=3e^{\frac{\pi}{3}}+\vartheta\left(2+e^\pi-3e^{\frac{\pi}{3}}\right),$$

т. ј.

$$e^{\alpha}+e^{\beta}+e^{\gamma}=8{,}5489+16{,}5914\,\vartheta\,.$$

V. пример: узевши

$$x_1=\alpha_1\,,\quad x_2=\alpha_2,\;\ldots\; x_n=\alpha_n\,,$$

где су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ корени алгебарске једначине

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0 \tag{77}$$

која има све своје корене реалне и позитивне, биће

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-_1\,a,$$

па се налази да вредност симетричне функције корена

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_n)$$

увек лежи у размаку између вредности

$$C=nf\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

и
$$D=f(-a_1)+(n-1)\,f(0)-nf\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

тако да је

$$f(\alpha_1)+f(\alpha_2)+\ldots+f(\alpha_n)=C+\vartheta(D-C).$$

Ма каква била функција $f(x)$ поменуте врсте, граница C размака је достигнута кад су α_i корени алгебарске једначине

$$\left(x+\frac{a_1}{n}\right)^n=0\,,$$

а граница D кад су α_i корени једначине

$$x^{n-1}(x+a_1)=0\,.$$

Тако је н. пр.

$$e^{r\alpha_1}+e^{r\alpha_2}+\ldots+e^{r\alpha_n}=C+\vartheta(D-C)\,,\quad r=\text{const.},$$

где је

$$C=ne^{-\frac{ra_1}{n}},\quad D=e^{-ra_1}-ne^{-\frac{ra_1}{n}}+n-1\,.$$

У случајевима кад су корени α_i једначине (77) реални, а ма кога знака, узевши да је

$$x_1=\alpha_1^2,\quad x_2=\alpha_2^2,\;\ldots\; x_n=\alpha_n^2\,,$$

биће сви x_i позитивни и

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1^2-2a_2$$

и према томе

$$f(\alpha_1^2)+f(\alpha_2^2)+\ldots+f(\alpha_n^2)=C+\vartheta H,$$

где је

$$C=nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right),$$

$$H=f(a_1^2-a_2)+(n-1)\,f(0)-nf\left(\frac{a_1^2-2a_2}{n}\right).$$

Тако је н. пр.

$$e^{\alpha_1^2}+e^{\alpha_2^2}+\ldots+e^{\alpha_n^2}=C+\vartheta H,$$

где је

$$C=ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}},$$

$$H=e^{a_1^2-2a_2}-ne^{\frac{a_1^2-2a_2}{n}}+n-1\,.$$

Исто се тако налази да је

$$\alpha_1^{2k}+\alpha_2^{2k}+\ldots+\alpha_n^{2k}=\lambda\,(a_1^2-2a_2)\,,$$

где је λ један број који увек лежи између $\frac{1}{n^{2k-1}}$ и 1.

К) Реални корени алгебарских једначина као бројни размаци. Нека је дата алгебарска једначина

$$a_0+a_1x+\ldots+a_n\,x^n=0\,, \tag{78}$$

чији су коефицијенти сви позитивни; тада ће сви њени реални корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ бити негативни и може се доказати ова теорема (теорема *Какеуа*):

Сви корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ налазе се у размаку између $-M$ и $-N$, где је N најмања, а M највећа од вредности

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_2}{a_3},\ \ldots\ \frac{a_{n-1}}{a_n}\,. \tag{79}$$

Да бисмо то доказали, уочимо најпре алгебарску једначину

$$p_0+p_1z+p_2z^2+\ldots+p_n z^n=0 \tag{80}$$

чији су коефицијенти $p_0, p_1, \ldots p_n$ сви позитивни и све мањи у колико им је ранг већи, т. ј.

(81) $$p_n < p_{n-1} < \ldots < p_1 < p_0 .$$

Ако се пође од идентичности

$$(1-z)(p_0+p_1z+\ldots+p_nz^n) =$$
$$= p_0-(p_0-p_1)z-(p_1-p_2)z^2-\ldots-(p_{n-1}-p_n)z^n-p_nz^{n+1} =$$
$$= p_0-\{(p_0-p_1)z+(p_1-p_2)z^2+\ldots+(p_{n-1}-p_n)z^n+p_nz^{n+1}\},$$

то, пошто су све разлике p_0-p_1, p_1-p_2, ... $p_{n-1}-p_n$, као и p_n, позитивни бројеви, велика заграда на десној страни имаће за $-1<z<0$ вредност мању од оне, коју би имала за $z=+1$, т. ј. мању од

$$(p_0-p_1)+(p_1-p_2)+\ldots+(p_{n-1}-p_n)+p_n = p_0,$$

што значи да је за $-1<z<0$ вредност израза

$$(1-z)(p_0+p_1z+\ldots+p_nz^n)$$

увек позитивна и различита од нуле. Па пошто је за такве вредности z вредност $1-z$ различита од нуле, тако ће бити и са полиномом

$$p_0+p_1z+\ldots+p_nz^n .$$

Једначина (80) нема дакле корена између -1 и 0.

Уочимо сада једну ма коју једначину

(82) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n = 0$$

са позитивним коефицијентима (од којих неки могу бити и једнаки нули).

Ставимо најпре

$$x = Nz,$$

где је N најмањи од бројева

(83) $$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

па се из неједначине

$$N < \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

добија да је

(84) $$a_{k+1}N^{k+1} < a_kN^k .$$

Једначина (82) том сменом постаје

$$a_0+a_1Nz+a_2N^2z^2+\ldots+a_nN^nz^n=0$$

тако да коефицијенат p_k од z^k има за вредност $p_k=a_kN^k$, а коефицијенат p_{k+1} од z^{k+1} вредност $p_{k+1}=a_{k+1}N^{k+1}$.

Према неједначини (84) њени коефицијенти p_k опадају кад им ранг расте. Та једначина нема, дакле, корена између -1 и 0, т. ј. није задовољена ни за какву вредност $-1<z<0$ или $-1<\frac{x}{N}<0$; то значи да једначина (82) нема ниједан корен x такав да је

$$\frac{x}{N}=-\vartheta \quad \text{т. ј.} \quad x=-N\vartheta ; \qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1$$

она, дакле, нема никакав корен у размаку $(0, -N)$.

Ставимо сад

$$x=\frac{M}{z},$$

где је M највећи од бројева (83) па се из неједначине

(85) $$M > \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

добија да је

(86) $$a_{k+1}M^{k+1} > a_kM^k .$$

Једначина (82) том сменом постаје

(87) $$a_nM^n+a_{n-1}M^{n-1}z+\ldots+a_2M^2z^{n-2}+a_1Mz^{n-1}+a_0z^n = 0$$

тако да коефицијенат p_k од z^k има за вредност

$$p_k=a_{n-k}M^{n-k},$$

а коефицијенат p_{k+1} од z^{k+1} вредност

$$p_{k+1}=a_{n-k-1}M^{n-k-1} .$$

Према неједначини (86), из које је

$$a_{n-k}M^{n-k} > a_{n-k-1}M^{n-k-1},$$

види се да је $p_k>p_{k+1}$, т. ј. да коефицијенти једначине (87) опадају кад им ранг расте. Та једначина није задовољена ни за какву вредност $-1<z<0$ или $-1<\frac{M}{x}<0$; једначина (82) не може имати ниједан корен x такав да је

$$\frac{M}{x} = -\vartheta, \quad \text{т. ј.} \quad x = -\frac{M}{\vartheta}; \quad \text{где је} \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

што значи да она нема никакав корен у размаку између $-\infty$ и $-M$.

Као што се види из свега овога, једначина (82) не може имати никакав корен у размаку између $-\infty$ и $-M$ ни у размаку од $-N$ до 0; кадгод, дакле, она има реалних корена, сви се ови морају налазити у размаку $(-M, -N)$, чиме је теорема доказана.

Теореми се може дати овај облик:

Ако се са N и M означе најмањи и највећи међу бројевима

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

сви реални корени $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ једначине (82) могу се изразити у облику

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= N + \vartheta_1 (M-N), & 0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1 \\ \alpha_2 &= N + \vartheta_2 (M-N), & 0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 1 \\ \alpha_3 &= N + \vartheta_3 (M-N), & 0 \leqslant \vartheta_3 \leqslant 1 \\ &\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Применимо теорему, примера ради, на квадратну једначину

$$x^2 + px + q = 0$$

са позитивним коефицијентима p и q. За њу је

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{q}{p}, \qquad \frac{a_1}{a_2} = p,$$

па пошто је из услова за реалност корена

$$\frac{q}{p} \leqslant \frac{p}{4}$$

па дакле у толико пре и $\frac{q}{p} \leqslant p$, биће

$$N = \frac{q}{p}, \quad M = p,$$

и корени се налазе у размаку између $\left(-p \text{ и } -\frac{q}{p}\right)$ што показује да се они могу изразити у облику

$$-\alpha_1 = \frac{q}{p} + \vartheta_1 \left(p - \frac{q}{p}\right),$$

$$-\alpha_2 = \frac{q}{p} + \vartheta_2 \left(p - \frac{q}{p}\right).$$

Кад су оба корена једнака, биће $p^2 - 4q$ према чему је

$$N = \frac{q}{p} = \frac{p}{4}, \quad M = p;$$

оба корена имају заједничку вредност која се може изразити у облику

$$\alpha_{1,2} = -\frac{p}{4}(1 + 3\vartheta),$$

па пошто тај корен треба да буде $-\frac{p}{2}$, то број ϑ што одговара двоструком корену јесте $\vartheta = \frac{1}{3}$.

Л) Размак вредности полинома. Нека је

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ма какав полином по x, па означимо са (A, B) један размак у коме ће се налазити вредности тога полинома за све вредности x које се налазе у једном датом размаку (a, b).

У случају кад су a и b позитивни бројеви, постоји Cauchy-ево правило које гласи: ако се у полиному раздвоје скуп чланова $f_1(x)$ са позитивним коефицијентима, и скуп чланова $f_2(x)$ са негативним коефицијентима, тако да је

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

за размак (A, B) може се узети размак између вредности

$$f_1(a) + f_1(b) \quad \text{и} \quad f_2(a) + f_2(b).$$

Али постоји једно правило које не претпоставља ништа о знацима бројева a и b, и у опште даје ужи, па дакле и пробитачнији размак (A, B). То је Laguerre-ово правило које се састоји у овоме:

Нека су

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$$

два низа вредности дефинисаних рекурсивним обрасцима

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 = a_n\,, & \alpha_1 = a\alpha_0 + a_{n-1} \\ \alpha_2 = a\alpha_1 + a_{n-2} \ldots & \alpha_n = a\alpha_{n-1} + a_0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_n = \alpha_n & \beta_{n-1} = \alpha_n + (b-a)\,\alpha_{n-1} \\ \beta_{n-2} = \alpha_{n-1} + (b-a)\,b\alpha_{n-2}\,, & \beta_{n-3} = \alpha_{n-2} + (b-a)\,b^2\alpha_{n-3} \\ \cdots & \cdots \\ \beta_1 = \alpha_2 + (b-a)\,b^{n-2}\alpha_1 & \beta_0 = \alpha_1 + (b-a)\,b^{n-1}\alpha_0\,. \end{Bmatrix}$$

Означимо са N и M најмању и највећу међу вредностима $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_n$, *па се за размак* (A, B) *може узети размак* (N, M).

Правило се може исказати и у овоме облику: *за све вредности*

$$x = a + \vartheta\,(b-a)$$

биће

$$f(x) = N + \vartheta\,(M-N)\,.$$

Тако н. пр. кад је

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

и кад је $a=1$, $b=2$ добија се да је

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 = 1 & \alpha_1 = -1 & \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = -3 & \alpha_4 = 1 & \alpha_5 = -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_5 = -1 & \beta_4 = 0 & \beta_3 = -6 \\ \beta_2 = -6 & \beta_1 = -14 & \beta_0 = -2 \end{Bmatrix}$$

што показује да се за размак (A, B) може узети размак $(-14, 2)$, т. ј. да ће се за $x = 1 + \vartheta$ имати

$$f(x) = -14 + 16\vartheta'.$$

Међутим, по Cauchy-евом правилу за (A, B) би се добио шири размак $(-40, 41)$.

Кад је $a=2$, $b=3$ добија се да је

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 = 1 & \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = -1 & \alpha_4 = 2 & \alpha_5 = 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_5 = 2 & \beta_4 = 4 & \beta_3 = 1 \\ \beta_2 = 10 & \beta_1 = 10 & \beta_0 = 91 \end{Bmatrix}$$

што показује да се за (A, B) може узети размак $(1, 91)$, т. ј. да ће се за $x = 2 + \vartheta$ имати

$$f(x) = 1 + 90\vartheta'$$

док би се по Cauchy-евом правилу добио шири размак $(-143, 236)$.

Навешћемо овде и једно правило за логаритамски извод ма каквог полинома $f(x)$ који има све своје нуле реалне, т. ј. за рационалну функцију

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Правило гласи: ако је x ма која вредност већа од свих нула полинома $f(x)$, одговарајућа вредност извода $\varphi'(x)$ увек се налази у размаку између

$$-\varphi(x) \quad \text{и} \quad -\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}\,.$$

Јер ако су нуле полинома $f(x)$ означене са $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$, где је n његов степен, биће

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{x-\alpha_n}$$

и према томе

$$-\varphi'(x) = \frac{1}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-\alpha_n)^2}\,,$$

Пошто су све разлике $x - \alpha_k$ позитивне, вредност десне стране последње једначине налазиће се у размаку

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \varphi(x)\,,$$

што доказује горње правило. *Према томе је*

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \vartheta\,(\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n}}\,\varphi(x)$$

за све поменути вредности x.

М) Разни други бројни размаци. У разним областима Аритметике и Алгебре постоји непрегледан број случајева у којима се за једну посматрану количину, ма се и не знала њена тачна вредност, зна одређен размак у коме се она насигурно налази. Поред оних који су довде наведени, навешћемо још неке од њих који су од користи било са теориског гледишта, било са гледишта практичних примена.

α) Laguerre је нашао да је, за вредности x што се налазе између 0 и $\frac{\pi}{2}$, разлика између двеју функција

$$f(x) = \cos x$$

$$\varphi(x) = 1 - \frac{z^2}{z + (z-1)\sqrt{\frac{2-z}{3}}}, \qquad z = \frac{2x}{\pi}$$

увек негативна и по апсолутној вредности не прелази вредност 0,0003. *Према томе је за те вредности x*

$$\cos x = \varphi(x) - \vartheta \, . \, 0{,}0003 \, ,$$

а из тога се изводе и слични обрасци за изражавање других тригонометријских функција помоћу алгебарских функција, у облику бројних размака.

β) Зна се да се за

$$a \geqslant 20b > 0$$

и за логаритме са основицом 10, вредности

$$\log(a+b) \quad \text{и} \quad \log a + \frac{2Mb}{2a+b},$$

где је

$$M = \log e = 0{,}434295\ldots$$

разликују тек у шестој децимали. Према томе је за такве вредности a и b

$$\log(a+b) = \log a + \frac{2Mb}{2a+b} + \frac{9\vartheta}{10^6}$$

што олакшава практично израчунавање логаритама.

γ) Уочимо алгебарску једначину непарног $(2n+1)$-ог степена

$$\varphi(x) + \lambda = 0\,, \tag{88}$$

где је $\varphi(x)$ полином по x који садржи само непарне степене променљиве, а λ ма какав реалан број. Ако се са α означи апсолутна вредност броја λ, Чебишев је доказао да једначина (88) има бар један реалан корен у размаку између

$$-2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad +2\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}}\,.$$

То значи да једначина има бар један корен који се може изразити у облику

$$x = 2\omega\sqrt[2n+1]{\frac{\alpha}{2}}\,. \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant 1$$

Применивши то н. пр. на једначину трећег степена

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{89}$$

пошто се ова сменом

$$x = z - \frac{a}{3}$$

сведе на једначину

$$z^3 + pz + q = 0,$$

где је

$$p = b - \frac{a^3}{3},$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

добија се овај резултат: једначина (89) има бар један корен који се може изразити у облику

$$x = -\frac{a}{3} + \frac{4\omega}{3}\sqrt[3]{a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c}$$

што олакшава практично решавање једначине трећег степена.

δ) Нека је $f(x)$ коначна и непрекидна функција за вредности x садржане у размаку (a, b), као и њен извод $f'(x)$. Према теореми за коначне прираштаје, постоји у размаку (a, b) бар једна вредност c за коју је

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)\,.$$

Ако се, дакле, означи са N најмања, а са M највећа вредност коју има извод $f'(x)$ за вредности x у размаку (a, b) биће

(90) $$f(b)-f(a)=(b-a)\,[N+\vartheta\,(M-N)]\,,\qquad 0<\vartheta<1\,.$$

Тако се н. пр. налази да је

$$\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg}x+\delta\,,$$

где се δ увек налази у размаку

$$\frac{1}{1+(x+1)^2}\quad \text{и}\quad \frac{1}{1+x^2}\,.$$

в) Потражимо размак у коме ће се налазити вредност

(91) $$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)$$

за вредности h садржане у размаку $(0,\ a)$. Тога ради потражимо вредност λ за коју ће бити

(92) $$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)-\lambda h^2=0.$$

Посматрањем функције

$$g(z)=f(a)-2f(a+z)+f(a+2z)-\lambda z^2$$

види се да је она једнака нули за $z=0$ и $z=h$; према Rolle-овој теореми њен извод

$$g'(z)=-2f'(a+z)+2f'(a+2z)-2\lambda z$$

мора постати једнак нули за једну вредност $z=c$ садржану у размаку $(0,\ h)$. За ту ће вредност c бити

$$\lambda c=f'(a+2c)-f'(a+c)\,,$$

а применом обрасца (90) налази се да се десна страна ове једначине може написати у облику

$$[P+\vartheta\,(Q-P)]\,c\,,$$

где су P и Q најмања и највећа вредност коју има други извод $f''(z)$ за вредности z садржане у размаку $(0,\ h)$. Отуда

$$\lambda=P+\vartheta\,(Q-P)\,,$$

што према обрасцу (92) показује да се вредност

$$f(a)-2f(a+h)+f(a+2h)$$

увек налази у размаку између

$$Ph^2\quad \text{и}\quad Qh^2.$$

X. Бројни размаци у теорији грешака.

За сваки недовољно одређен податак x може се утврдити један размак (α,β) у коме ће се он насигурно налазити, т. ј. x се може написати у облику

(93) $$x=\alpha+\vartheta\,(\beta-\alpha)\,.$$

Кад се таквим податком буду вршиле какве било рачунске радње, резултат рачуна такође ће бити један недовољно одређен број X. Али и за тај број увек се може одредити један размак $(A,\ B)$ изван кога се он насигурно неће налазити, тако да ће бити

(94) $$X=A+\vartheta\,(B-A)\,.$$

Тако исто, кад непозната количина X зависи од више недовољно одређених података $x_1, x_2, \ldots x_n$, може се за сваки од ових утврдити по један размак $(\alpha_k,\ \beta_k)$ у коме ће се x_k насигурно налазити, т. ј. ти се подаци могу изразити у облику

(95) $$\begin{aligned} x_1&=\alpha_1+\vartheta_1\,(\beta_1-\alpha_1)\,,\\ x_2&=\alpha_2+\vartheta_2\,(\beta_2-\alpha_2)\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Кад се, помоћу везе која буде дата између X и x_i, буде израчунала вредност X, она неће бити довољно одређена, али се и за њу може одредити један размак $(A,\ B)$, тако да се она може изразити у облику (94).

Тако исто, кад више непознатих количина $X_1, X_2 \ldots X_p$ истовремено зависе од више података $x_1, x_2 \ldots x_n$, од којих је сваки недовољно одређен, па се те непознате израчунају помоћу везе која буде постојала између X_k и x_i, за сваку непознату X_k може се утврдити по један размак $(A_k,\ B_k)$ у коме ће се она налазити, т. ј. тако да буде

(96) $$\begin{aligned} X_1&=A_1+\vartheta_1\,(B_1-A_1)\,,\\ X_2&=A_2+\vartheta_2\,(B_2-A_2)\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Очевидно је да одређивање грешака којима се излаже израчунавање непознате количине из нетачних података, није ништа друго до одређивање размака у којима се могу кретати тако израчунате непознате, а који би се размаци свели на тачне вредности ових, кад би сами подаци били апсолутно тачни.

На тај начин, *рачунање са недовољно одређеним подацима и израчунавање резултујућих грешака што произилазе од њих, своди се на рачунање са бројним размацима.* Задатак се своди на један од три основна задатка ове врсте, који су били предмет ранијег излагања:

1^0 одредити размак за вредности дате функције $f(x)$ кад је x дато у облику једног размака;

2^0 одредити размак за вредности функције $f(x_1, \ldots x_n)$ кад је свака од вредности x_i дата у облику једног размака;

3^0 одредити размаке за вредности датог скупа функција $f_1, f_2, f_3, \ldots f_p$ које све истовремено зависе од скупа података $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Уопште, кад се зна да једна количина x лежи у размаку (α, β), ако се за x узме једна вредност p садржана у том размаку, тиме учињена грешка δx, т. ј. разлика $p-x$, не може по апсолутној вредности бити већа од дужине размака (α, β), т. ј. по апсолутној вредности биће

$$\delta x < \beta - \alpha$$

и та грешка може бити позитивна или негативна.

Учињена *релативна грешка* Δx, т. ј. одступање узете вредности p од тачне вредности x, упоређено са самом вредношћу x, била би

$$\Delta x = \text{апс. вред. } \frac{\delta x}{x}.$$

Међутим, пошто нам је тачна вредност x непозната, а познаје се само вредност p по којој се цени и сама величина x, то се за релативну грешку учињену на вредности x обично узима

$$\Delta x = \text{апс. вред. } \frac{\delta p}{p} = \text{апс. вред. } \frac{\delta x}{p}.$$

Уосталом, кад је учињена грешка δx довољно мала наспрам p тако да је квадрат количника $\dfrac{\delta x}{p}$ занемарљив, разлика између такве две релативне грешке

$$\frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{\delta x}{p-\delta x} - \frac{\delta x}{p} = \frac{(\delta x)^2}{p\,(p-\delta x)}$$

биће практички занемарљива.

Учињена *процентална грешка* је $100 \,.\, \Delta x$.

Пошто је увек $x \geqslant \alpha$, то је

$$\Delta x \leqslant \frac{\delta x}{\alpha}$$

и према томе је, ако се води рачун и о знаку грешака,

$$\delta x = \omega\,(\beta-\alpha),$$

$$\Delta x = \omega\,\frac{\beta-\alpha}{\alpha}, \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant 1$$

а ако се води рачун само о апсолутној вредности грешака

$$\delta x = \vartheta\,(\beta-\alpha),$$

$$\Delta x = \vartheta\,\frac{\beta-\alpha}{\alpha}.$$

Ови изрази за Δx су илузорни у случајевима кад је $\alpha = 0$, јер се тада могу поклопити са ма којом вредношћу од $-\infty$ до $+\infty$ (односно од нуле до $+\infty$).

Ако се за број p узме средина $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ размака (α, β) учињена грешка δx није никад већа од полудужине $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ тога размака, а може бити позитивна или негативна. Тада је, дакле

$$\delta x = \omega\,\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\Delta x = \omega\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}.$$

Напослетку, ако се за p узме предњи крај размака (α, β), грешка δx не премаша дужину $\beta-\alpha$ размака и увек је позитивна; тада је

$$\delta x = \vartheta\,(\beta-\alpha),$$

$$\Delta x = \vartheta\,\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}. \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1.$$

Кад је размак (α, β) довољно узак да су степени његове дужине $(\beta - \alpha)$ врло мали бројеви, занемарљиви наспрам саме те дужине, грешка δx може се сматрати као диференцијал количине x, пошто су тада и степени од δx занемарљиви наспрам δx.

Одговарајућа грешка δf, учињена на датој функцији f, која зависи од x, као размак између израчунате и тачне вредности f (која би се имала кад би x било тачан број) има се сматрати као диференцијал те функције. Ако ова зависи од више података $x_1, x_2, \ldots x_n$ са довољно уским размаком варијација (т. ј. довољно малим могућним грешкама), грешка δf има се сматрати као тотални диференцијал функције по променљивима x_i. Напослетку, ако један дати скуп функција $f_1, f_2, \ldots f_p$ истовремено зависи од података $x_1, x_2, \ldots x_n$, грешка δf_k има се сматрати као тотални диференцијал функције f_k по променљивима x_i.

На тој је примедби основана теорија утицаја нетачних података са довољно малим могућним грешкама, на резултате рачуна са таквим подацима. Али кад су могућне грешке на подацима толике, да им виши степени и међусобни производи нису занемарљиви наспрам њих самих, тако да се не могу сматрати као диференцијали, утицај таквих података, изражен у *резултујућој грешки*, мора се решавати методама рачунања са бројним размацима, које су предмет ових излагања.

I. пример: у коме ће се размаку налазити износ P површине квадрата чија је страна $x = 2{,}3$ m. дата са једном децималом тачно?

Овде је $2{,}3 < x < 2{,}4$, па дакле у метрима

$$x = 2{,}3 + \vartheta \,.\, 0{,}1\,,$$

према чему је

$$P = x^2 = (2{,}3 + \vartheta \,.\, 0{,}1)^2\,,$$

па дакле

$$P = 5{,}29 + \vartheta \,.\, 0{,}4221\,.$$

Ако се за P узме средина тога размака, т. ј. вредност $5{,}525$ m^2 учињена грешка је

$$\delta x = \omega \,.\, 0{,}235 \ \ m^2\,,$$

а релативна грешка

$$\Delta x = \omega \,.\, 0{,}164\,.$$

II. пример: израчунати вредност

$$x = \sqrt{p}\,,$$

где је p дат цео позитиван број, тако да разлика између тачне и нађене вредности не премаша вредност $\frac{1}{q}$, где је q опет дат цео позитиван број.

Означимо са m највећи цео број садржан у вредности

$$x' = \sqrt{pq^2}\,,$$

па ће бити

$$m \leqslant x' \leqslant m+1\,,$$

па дакле и

$$\frac{m}{q} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{q}\,,$$

према чему је

$$x = \frac{m}{q} + \frac{\vartheta}{q}\,. \qquad\qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1\,.$$

Рационалан број $\frac{m}{q}$ претставља дакле $\sqrt{p}$ са негативном грешком која не премаша $\frac{1}{q}$.

Тако н. пр. ако се тражи $\sqrt{4368}$ тако да грешка буде негативна, а не премаша $\frac{1}{7}$, биће

$$m = 462\,, \qquad \frac{m}{7} = 66,$$

тако да је

$$\sqrt{4368} = 66 + \frac{\vartheta}{7}\,.$$

III. пример: са колико тачних децимала треба узети број π да би се из тако узете вредности могао израчунати

$$x = \sqrt{\pi}$$

са позитивном грешком која не премаша $\frac{1}{10^4}$?

Ако се са m означи највећи цео број садржан у вредности

$$x' = \sqrt{10^8 \,.\, \pi}\,,$$

биће

$$m \leqslant x' \leqslant m+1 ,$$

па дакле и

$$\frac{m}{10^4} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{10^4} .$$

према чему је

$$x = \frac{m}{10^4} + \frac{\vartheta}{10^4} .$$

Рационалан број $\frac{m}{10^4}$ претставља $\sqrt{\pi}$ са позитивном грешком која не премаша $\frac{1}{10^4}$, а за то је потребно и довољно да је број π дат са 8 тачних децимала.

IV пример: у коме ће се размаку налазити износ запремине V лопте полупречника $x = 1{,}23$ m. датог са две децимале тачно, а кад се број π узме са 3 децимале тачно?

Овде је

$$1{,}23 < x < 1{,}24 ,$$

$$3{,}141 < \pi < 3{,}142 ,$$

па дакле у метрима

$$x = 1{,}23 + \vartheta \,.\, 0{,}01 ,$$

$$\pi = 3{,}141 + \vartheta' \,.\, 0{,}001 ,$$

према чему је

$$V = 7{,}794 + \vartheta'' . 0{,}1850 .$$

Ако се за V узме средина тога размака, т. ј. вредност

$$p = 7{,}886,$$

учињена грешка је

$$\delta x = \omega \,.\, 0{,}0975 ,$$

а релативна грешка

$$\Delta x = \omega \,.\, 0{,}123 .$$

V. пример: претпоставимо да су у једној смеши која садржи калијум и натријум у облику соли, ове соли најпре претворене у карбонате и у томе облику измерене, па да је тако нађена колективна тежина q_1, са грешком која ни у позитивном, ни у негативном смислу не прелази позитиван број δ_1; затим да су карбонати претворени у хлориде и у томе облику измерени, па да је нађена тежина q_2, са грешком која ни у позитивном, ни у негативном смислу не прелази позитиван број δ_2.

Претпостављајући да се не узима у обзир нетачност атомских тежина K, Na, C, O, Cl, тежина Z_1 калијума и тежина Z_2 натријума у првобитној смеши израчунавају се из одговарајућих хемиских једначина

$$Z_1 = 25{,}875\, x_1 - 23{,}444\, x_2 ,$$

$$Z_2 = 17{,}989\, x_2 - 19{,}421\, x_1 ,$$

где би x_1 и x_2 имале бити тачне тежине карбоната и хлорида у смеши.

У којим ће се размацима насигурно налазити тежине Z_1 и Z_2 кад се на место x_1 и x_2 узму q_1 и q_2.

Симетрички нормални претставник размака у којима ће се налазити x_1 и x_2 су

$$x_1 = q_1 + \omega_1 \delta_1 , \qquad -1 \leqslant \omega_1 \leqslant 1$$

$$x_2 = q_2 + \omega_2 \delta_2 , \qquad -1 \leqslant \omega_2 \leqslant 1$$

и према томе ће њихов асиметрички нормални претставник бити

$$x_1 = q_1 - \delta_1 + 2\vartheta_1 \delta_1 , \qquad 0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1$$

$$x_2 = q_2 - \delta_2 + 2\vartheta_2 \delta_2 . \qquad 0 \leqslant \vartheta_2 \leqslant 1$$

Крајеви размака Z_1 биће дакле

$$N_1 = 25{,}875\,(q_1 - \delta_1) - 23{,}444\,(q_2 + \delta_2) ,$$

$$M_1 = 25{,}875\,(q_1 + \delta_1) - 23{,}444\,(q_2 - \delta_2) ,$$

а крајеви размака Z_2 биће

$$N_2 = 17{,}989\,(q_2 - \delta_2) - 19{,}421\,(q_1 + \delta_1) ,$$

$$M_2 = 17{,}989\,(q_2 + \delta_2) - 19{,}421\,(q_1 - \delta_1) .$$

Тражени размаци су, дакле

$$Z_1 = 25{,}875\,(q_1 - \delta_1) + \vartheta'_1 .\, 46{,}888\, \delta_2 , \qquad 0 \leqslant \vartheta'_1 \leqslant 1$$

$$Z_2 = 17{,}989\,(q_2 - \delta_2) + \vartheta'_2 .\, 38{,}842\, \delta_2 . \qquad 0 \leqslant \vartheta'_2 \leqslant 1$$

VI. пример: ако је z један број већи од јединице или једнак јединици напред је показано да је

$$1 \leqslant \sqrt[n]{z} < 1 + \frac{z-1}{n} \cdot$$

Ако се за x узме средина тог размака

$$p = \sqrt[n]{z} = \frac{z+n-1}{2n}$$

учињена грешка δx ће бити

$$\delta x = \omega \frac{z-1}{2n} . \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant 1 .$$

Ако је, пак, z број мањи од јединице, показано је да је

$$\frac{1}{1+\frac{1-z}{nz}} < \sqrt[n]{z} < 1 ,$$

тако, да ако се узме средина тог размака

$$p = \sqrt[n]{z} = \frac{(2n-1)\,z+1}{2(n-1)\,z+2} ,$$

учињена грешка ће бити

$$\delta x = \omega \frac{1-z}{2\,(n-1)\,z+2} .$$

У оба случаја грешка ће бити у толико мања, у колико је z ближе јединици и у колико је n веће.

VII. пример: напред је показано да је за позитивне вредности a и b

$$x = \sqrt{a^2+b^2} = \lambda\,(a+b) , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

где је доња граница размака достигнута кад је $a=b$, а горња кад је једна од вредности a и b једнака нули. Пошто је

$$\alpha = \frac{a+b}{\sqrt{2}} , \qquad \beta = a+b ,$$

то ако се за x узме средина размака

$$p = \frac{\alpha+\beta}{2} = 0{,}8535\,(a+b) ,$$

учињена грешка ће бити

$$\delta x = \omega \,.\, \frac{\beta-\alpha}{2} = \omega \,.\, 0{,}1465\,(a+b) \qquad -1 \leqslant \omega \leqslant 1$$

и она је једнака нули кад је $a=b$, а добија своју највећу могућну вредност $0{,}1465\,b$ кад је $a=0$.

Релативна грешка је

$$\Delta x < \frac{\delta x}{p} = \frac{\beta-\alpha}{2} \cdot \frac{2}{\alpha+\beta} = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha} ,$$

према чему је

$$\Delta x = \omega \,.\, 0{,}1716 .$$

Навешћемо да постоји више начина за изражавање израза $x = \sqrt{a^2+b^2}$ у линеарном хомогеном облику

$$x = \xi a + \eta b .$$

Начин Poncelet а, у случају кад се о позитивним бројевима a, b ништа не претпоставља, доводи до резултата који се подударају са напред наведеним, т. ј.

$$\xi = \eta = 0{,}83 ,$$

са релативном грешком која не премаша 0,172, т. ј. од прилике $^1/_6$. Међутим тај начин даје могућности да се одреде коефицијенти ξ, η тако да релативна грешка Δx буде знатно мања, у случајевима кад се бар овлашно зна колико је пута један од бројева a, b већи од другога.

Тако се налази да је

за	$b > a$,	$x = 0{,}40a + 0{,}96b$,	$\Delta x < \frac{1}{25}$;
за	$b > 2a$,	$x = 0{,}23a + 0{,}99b$,	$\Delta x < \frac{1}{71}$;
за	$b > 3a$,	$x = 0{,}16a + 0{,}99b$,	$\Delta x < \frac{1}{154}$;
за	$b > 4a$,	$x = 0{,}12a + 0{,}99b$,	$\Delta x < \frac{1}{266}$;
за	$b > 5a$,	$x = 0{,}10a + b$,	$\Delta x < \frac{1}{417}$;

за $b > 6a$, $x = 0{,}08a + b$, $\Delta x < \frac{1}{589}$;

за $b > 7a$, $x = 0{,}07a + b$, $\Delta x < \frac{1}{800}$;

за $b > 8a$, $x = 0{,}06a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1049}$;

за $b > 9a$, $x = 0{,}05a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1428}$;

за $b > 10a$, $x = 0{,}05a + b$, $\Delta x < \frac{1}{1538}$;

Навешћемо, примера ради, један прост начин који доводи до обрасца

$$(97) \qquad \sqrt{a^2+b^2} = 0{,}40a + 0{,}96b$$

у случају кад се зна да је $b > a$.

Лако се уверити да је

$$(98) \qquad \frac{24}{25}\sqrt{a^2+b^2} < 0{,}40a + 0{,}96b < \frac{26}{25}\sqrt{a^2+b^2},$$

јер, ако се примети да је

$$0{,}40 = \frac{10}{25}, \qquad 0{,}96 = \frac{24}{25},$$

неједначине постају

$$12\sqrt{a^2+b^2} < 5a + 12b < 13\sqrt{a^2+b^2}$$

или квадрирањем

$$144\,(a^2+b^2) < 25a^2 + 120ab + 144b^2 < 169\,(a^2+b^2).$$

Лева се неједначина своди на

$$119a^2 < 120ab$$

и она очевидно постоји пошто је $b > a$.

Десна неједначина постаје

$$120ab < 25b^2 + 144a^2$$

па и она постоји према идентичности

$$144a^2 - 120ab + 25b^2 = (12a - 5b)^2 > 0\,.$$

Двострука неједначина (98) постоји дакле за $b > a$, а из ње се добија да је

$$0{,}40a + 0{,}96b = \frac{24 + 2\vartheta}{25}\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Вредност разломка пред квадратним кореном увек се налази у размаку између

$$1 - \frac{1}{25} \quad \text{и} \quad 1 + \frac{1}{25}$$

што значи да образац (97) одиста даје вредност $\sqrt{a^2+b^2}$ у линеарном облику са грешком чија апсолутна вредност не прелази $\frac{1}{25} = 0{,}04$, т. ј. 4%.

XI. Бројни размаци у Геометрији.

Као у Аритметици и у Алгебри, и геометриске величине могу се јављати као размаци, т. ј. једна величина x може бити одређена размаком између двеју величина исте врсте у коме се x налази. Тада ће и све геометриске величине, које се рачуном или геометриском конструкцијом изводе из таквих података x, бити и саме одређене у облику размака. То се н. пр. дешава:

а) кад подаци нису тачно дати;

б) кад рачунске или конструктивне тешкоће не допуштају тачну одредбу непознате величине из датих података баш кад би ови и били тачни;

в) кад се одредба непознате, по самој природи задатка, не састоји у тачној одредби њене вредности, већ у одредби размака у коме она треба да се налази да би били задовољени услови задатка;

г) кад су подаци недовољни за тачну одредбу непознате, али су довољни за одредбу једнога размака у коме се непозната непрестано налази.

Случај ове последње врсте јавља се н. пр. кад је један податак x збир од неколико геометриских величина $x_1, x_2, x_3, \ldots$, а тражена непозната геометриска величина y зависи од збира квадрата или трећих степена и т. д. величина x_k. Тада се има посла са *недовољно одређеним задацима*, као што су н. пр. ови:

1^0 одредити хипотенузу правоуглог троугла из датог збира његових катета;

2^0 одредити углове правоуглог троугла, кад се зна да овај има као катете збир катета и хипотенузу једнога другог, непознатог, правоуглог троугла;

3^0 одредити дијагоналу паралелипипеда из датог збира његових страна;

4^0 одредити обим и површину једног троугла из датог збира двеју његових страна и угла који оне захватају;

5^0 одредити збир отстојања једне произвољне тачке описаног круга око правилног полигона, од свију темена полигона, знајући само број страна и обим овога.

А) Задаци који се своде на проучавање аритметичке средине конвексних или конкавних функција. У великоме броју задатака такве врсте служи као основица раније доказани резултат да, ако се са μ_n означи аритметичка средина позитивних бројева $x_1, x_2, \ldots x_n$, а са M_n аритметичка средина

$$M_n = \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n},$$

где је $f(x)$ ма каква функција променљиве x, позитивна и конвексна у размаку који садржи све бројеве x_i, вредност M_n увек се налази у размаку између вредности

$$f(\mu_n) \quad \text{и} \quad \frac{f(n\mu_n) + (n-1)f(0)}{n}, \tag{99}$$

где су границе размака стварно достигнуте кад су сви x_i међу собом једнаки; или кад су сви једнаки нули, осим једнога од њих.

Међутим, *тај се размак може још сузити у случају кад су x_1, x_2, x_3 стране a, b, c једног истог троугла.*

Пођимо од неједначине која према општем ставу важи за три ма која позитивна броја x, y, z

$$3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant f(x) + f(y) + f(z) \leqslant f[x+y+z) + 2f(0). \tag{100}$$

Кад су a, b, c стране једнога истог троугла, мора бити

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b,$$

тако да ако се полузбир страна означи са

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

мора бити

$$p>a, \quad p>b, \quad p>c,$$

т. ј. вредности

$$x = p-a, \quad y = p-b, \quad z = p-c \tag{101}$$

увек су позитивне.

Ставимо у (100) да је

$$f(t) = F(p-t),$$

па ће, пошто је

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d^2F}{dt^2},$$

функција F бити конвексна за сваки размак променљиве x за који је и сама функција f конвексна. Неједначина (101) тада постаје

$$3F\left(p - \frac{x+y+z}{3}\right) \leqslant F(p-x) + F(p-y) + F(p-z) \leqslant$$

$$\leqslant F(p-x-y-z) + 2F(p),$$

а ова ће, кад се у њој x, y, z смене својим вредностима (101), постати

$$3F\left(\frac{2p}{3}\right) \leqslant F(a) + F(b) + F(c) \leqslant F(0) + 2F(p). \tag{102}$$

Вредност симетричке функције страна троугла

$$F(a) + F(b) + F(c), \tag{103}$$

где је F ма каква конвексна функција тих страна, увек лежи у размаку између вредности

$$3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{и} \quad F(0) + 2F(p), \tag{104}$$

где је p полузбир страна.

Ове границе размака стварно су достигнуте у случају равностраног троугла, или равнокраког троугла са углом између једнаких страна који је једнак нули.

Да је размак (104) одиста ужи од размака између вредности

$$3F\left(\frac{2p}{3}\right) \quad \text{и} \quad F(2p)+2F(0) \tag{105}$$

које одређује неједначина (100) за ма какве позитивне бројеве a, b, c, види се н. пр. из специјалног случаја када се узме да је

$$F(x)=x^2.$$

Размак (105) у коме ће се налазити збир $a^2+b^2+c^2$ био би онај између вредности $\frac{4}{3}p^2$ и $4p^2$, т. ј. између вредности

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \quad \text{и} \quad (a+b+c)^2,$$

док би размак (104) био онај између вредности $\frac{4}{3}p^2$ и $2p^2$, т.ј. између

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{(a+b+c)^2}{2}, \tag{106}$$

а тај је размак очевидно ужи од размака (105).

Збир квадрата страна једног троугла увек се, дакле, налази у размаку између вредности (106), и то је у исто време и најужи размак, који се може утврдити за општи случај. Његове су границе стварно достигнуте кад је троугао равностран, или равнокрак са трећом страном једнаком нули.

Горњем резултату о размаку у коме се налази функција (103) страна троугла може се дати и овај облик од интереса за разноврсне примене:

Ставимо у неједначини (102) да је

$$F(t)=\Phi(p-t),$$

па ће $\Phi(t)$ опет бити конвексна функција променљиве t пошто је

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2}=\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{d^2f}{dt^2}.$$

Образац (102) тада постаје

$$3\Phi\left(\frac{p}{3}\right)\leqslant \Phi(p-a)+\Phi(p-b)+\Phi(p-c)\leqslant \Phi(p)-2\Phi(0).$$

Кад се н. пр. узме да је

$$\Phi(t)=t^k, \quad (k>1)$$

добија се

$$\frac{p^k}{3^{k-1}}\leqslant (p-a)^k+(p-b)^k+(p-c)^k\leqslant p^k.$$

Кад се у обрасцу (102) узме да је

$$F(t)=\frac{t}{2p-t},$$

$F(t)$ ће опет бити конвексна функција променљиве t за $t=a$, $t=b$, $t=c$, пошто је

$$\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{4p}{(2p-t)^2}.$$

а свака је од разлика $2p-a$, $2p-b$, $2p-c$ позитивна.

Образац (102) тада постаје

$$\frac{3}{2}\leqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2$$

што значи *да је за све троугле*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{a}{a+b}=1{,}5+\vartheta\cdot 0{,}5 \qquad (0\leqslant\vartheta\leqslant 1).$$

Уосталом, кадгод је $F(t)$ каква хомогена функција по променљивима p и t, онда, ако је то хомогена функција нултог реда, доња и горња граница размака, у коме ће се налазити збир

$$F(a)+F(b)+F(c),$$

имаће се у облику апсолутног броја. *Кад је степен хомогености те функције једнак каквом броју h, границе размака добиће се у облику вредности p^h помножене једним апсолутним бројем.*

I. пример: хипотенуза c правоуглог троугла, за који је познат само збир $a+b$ двеју катета, је

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \lambda (a + l), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

према чему је

$$c = (0{,}7071 + \vartheta \,.\, 0{,}2929)\,(a + b)\,.$$

II. пример: хипотенуза h правоуглог троугла, чије су катете дијагонале паралелограма обима s, увек лежи у размаку између $\frac{s}{2}$ и s, тако да је

$$h = s\,\frac{1 + \vartheta}{2}\,.$$

То излази непосредно из особине паралелограма да је збир квадрата његове четири стране једнак збиру квадрата његових дијагонала.

III. пример: који правоугли троугли могу имати као своје две катете збир катета и хипотенузу другог једног правоуглог троугла?

Ако се катете првог троугла означе са a и b, а катете другога са a' и b', треба да је

$$a = a' + b'$$

$$b = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \lambda\,[a' + b'], \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

према томе један угао α првог троугла треба да је такав да је

$$tg\alpha = \frac{b}{a} = \lambda\,,$$

т. ј. треба да лежи у размаку између $35^0 16'$ и 45^0 (а други угао између 45^0 и $54^0 44'$).

IV. пример: знајући збир страна $a + b + c$ једног паралелипипеда, одредити му дужину дијагонале d. Пошто је

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \mu (a + b + c), \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \mu \leqslant 1\,,$$

то је

$$d = [0{,}5774 + \vartheta \,.\, 0{,}4226)\,(a + b + c)\,.$$

V. пример: знајући збир страна $a + b + c = s$ једног паралелипипеда, као и то да се од страна a, b, c може саставити један троугао, одредити дужину дијагонале d паралелипипеда.

Као што је напред показано, кад су a, b, c, три стране једног троугла, количник

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{a + b + c}$$

лежи у размаку између $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$.

Према томе дужина d дијагонале лежи у размаку између

$$0{,}5774\, s \quad \text{и} \quad 0{,}7071\, s\,.$$

Ако се, дакле, за d узме средина тог размака, тако да је

$$d = 0{,}6922\, s\,,$$

учињена грешка не премаша вредност $0{,}0649\, s$, т. ј. $6^1/_2\,{}^0/_0$.

VI. пример: из познатог обрасца

$$m^2 + n^2 + p^2 = \frac{3}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

за дужине m, n, p медиана једног троугла чије су стране a, b, c, добија се да је

$$\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\lambda\,(a + b + c)\,. \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Према томе дијагонала d паралелипипеда, који има за стране медиане једног троугла чији је обим s, одређена је размаком

$$d = (0{,}5 + \vartheta \,.\, 0{,}1123)\, s\,.$$

Из тога се н. пр. види да се правоугли троугли, који имају као једну катету обим једнога троугла, а као другу катету дијагоналу паралелипипеда састављеног из медиана истог троугла као страна, налазе само међу оним правоуглим троуглима чији један угао има за тангенс какву вредност, која се налази у размаку између

$$0{,}5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}6123\,,$$

т. ј. чији се један угао налази у размаку између

$$26^0\, 33' \quad \text{и} \quad 31^0\, 28'\,.$$

VII. пример: у Геометрији је позната ова теорема за правилне полигоне од n страна: збир квадрата отстојања једне произвољне тачке на описаном кругу, од свих темена полигона, има за вредност $2nR^2$, где је R полупречник тога круга. Ако се, дакле, та растојања означе са a_1, a_2, ..., a_n, биће

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=R\sqrt{2n}.$$

Према напред доказаном резултату је

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\lambda(a_1+a_2+\ldots+a_n),\qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\lambda\leq 1;$$

међутим, ни једна ни друга од тих двеју граница није никад достигнута, јер на описаном кругу не постоји ни једна тачка, за коју ће сва растојања a_k бити међу собом једнака, или сва једнака нули осим једнога од њих.

Из тога се види да се збир растојања

$$s=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

увек налази у размаку између

$$R\sqrt{2n}\quad\text{и}\quad nR\sqrt{2},$$

тако да је

$$s=[\sqrt{2n}+\vartheta\sqrt{2}(n-\sqrt{n})]R.$$

За троугао ће н. пр. бити

$$s=(2{,}4495+\vartheta\,.\,1{,}7931)R,$$

за квадрат

$$s=2{,}8284(1+\vartheta)R,$$

за пентагон

$$s=(3{,}1622+\vartheta\,.\,3{,}9088)R \text{ и т. д.}$$

Кад је, на место полупречника R описаног круга, дата дужина a стране полигона, треба у горњим обрасцима заменити

за троугао $\qquad R=\frac{\sqrt{3}}{3}a=0{,}5773\,a,$

дакле

$$s=(1{,}4140+\vartheta\,.\,1{,}0351)a;$$

за квадрат $\qquad R=\frac{a}{\sqrt{2}}=0{,}7071\,a,$

дакле

$$s=2(1+\vartheta)a,$$

за пентагон $\qquad R=\frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}=0{,}8506\,a,$

дакле

$$s=(2{,}6897+\vartheta\,.\,3{,}3248)a.$$

Кад је, на место R, дата површина P полигона, треба сменити

за троугао $\qquad R=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{P}=0{,}8774\sqrt{P},$

дакле

$$s=(2{,}1491+\vartheta\,.\,1{,}5732)\sqrt{P};$$

за квадрат $\qquad R=\sqrt{\frac{P}{2}}=0{,}7071\sqrt{P},$

дакле

$$s=2(1+\vartheta)\sqrt{P};$$

за пентагон $\qquad R=\sqrt{\frac{8}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}\sqrt{P}=0{,}3856\sqrt{P},$

дакле

$$s=(1{,}2193+\vartheta\,.\,1{,}5072)\sqrt{P}.$$

VIII. пример: у Геометрији је позната и ова теорема за правилне полигоне од n страна ($n>3$): нека су A'_1, $A'_2\ldots A'_n$ пројекције темена A_1, A_2, ... A_n полигона на једну произвољну праву, O' пројекција средишта полигона на исту праву; ако се стави да је

$$S=\overline{O'A'_1}^4+\overline{O'A'_2}^4+\ldots+\overline{O'A'_n}^4,$$

увек је

$$S=\frac{3n}{8}R^4.$$

Према томе је

$$\sqrt[4]{S}=R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}},$$

а пошто је, према напред показаном

$$\sqrt[4]{S}=\lambda s,\qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\leq\lambda\leq 1$$

где је

$$s=\overline{O'A'}_1+\overline{O'A'}_2+\ldots+\overline{O'A'}_n,$$

то се вредност $s=\frac{1}{\lambda}\sqrt[4]{S}$ увек налази у размаку између

$$R\sqrt[4]{\frac{3n}{8}} \quad \text{и} \quad R\sqrt[4]{\frac{3n^3}{8}}.$$

Према томе: збир растојања $\overline{O'A'}_k$ претстављен је размаком

$$\sqrt[4]{\frac{3n}{8}}\,[1+\vartheta\,(\sqrt{n}-1)]\,R,$$

који се н. пр. за троугао своди на

$$\sqrt[4]{\frac{9}{8}}\,(1+\vartheta\,.\,0{,}7320)\,R=(1{,}0299+\vartheta\,.\,0{,}7540)\,R,$$

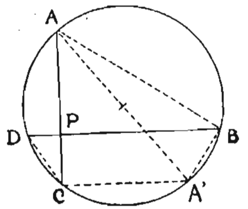
за квадрат на

$$\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\,(1+2\vartheta)\,R=(1{,}1067+\vartheta\,.\,2{,}2134)\,R,$$

за пентагон на

$$\sqrt[4]{\frac{15}{8}}\,(1+\vartheta\,.\,1{,}2360)\,R=(1{,}1702+\vartheta\,.\,1{,}4461)\,R.$$

IX. пример: ако се из једне тачке на кругу полупречника r повуку две, једна на другу управне сечице $\overline{AC}$ и $\overline{DB}$, збир отсечака $\overline{AC}+\overline{DB}$ има дужину која се увек налази у размаку између $2r$ и $2r\sqrt{2}$.



Јер је

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2,$$

$$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{DC}^2=\overline{A'B}^2,$$

па дакле

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{AB}^2+\overline{A'B}^2=4r^2.$$

Вредност збира квадрата на левој страни налази се у размаку између вредности

$$\frac{(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})^2}{2}=\frac{(\overline{DB}+\overline{AC})^2}{2}$$

и вредности

$$(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD})^2=(DB+AC)^2$$

и према томе је

$$\frac{(\overline{DB}+\overline{AC})^2}{2}\leqslant 4r^2\leqslant(\overline{DB}+\overline{AC})^2.$$

Одатле је

$$2r\leqslant\overline{DB}+\overline{AC}\leqslant 2r\sqrt{2},$$

чиме је горње тврђење доказано.

Из тога се, у исто време, види и ово: ако се збир отсечака двеју међусобно управних сечица круга означи са l, пречник круга увек се налази у размаку између 0,7071 l и l.

Ако се кроз једну сталну, произвољно изабрану тачку P у кругу повуче један ма који пар међу собом управних сечица, може се доказати да се збир отсечака $\overline{DB}+\overline{AC}$ увек налази у размаку између

$$2\sqrt{2r^2-d^2} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{2}\sqrt{2r^2-d^2}.$$

Јер је

$$\overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC},$$

$$\overline{DB}=\overline{PB}+\overline{PD},$$

а одатле квадрирањем и сабирањем

$$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+\overline{PB}^2+\overline{PD}^2+2\overline{PA}\,.\,\overline{PC}+2\overline{PB}\,.\,\overline{PD}.$$

Са друге стране, ако се са d означи стално растојање $\overline{OP}$, биће

$$\overline{PA}\,.\,\overline{PC}=\overline{PB}\,.\,\overline{PD}=r^2-d^2,$$

па ће, водећи рачуна о горе нађеној једначини, бити

$$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=8r^2-4d^2,$$

па пошто се вредност збира квадрата на левој страни налази у размаку између

$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2} \quad \text{и} \quad (\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

тако да је

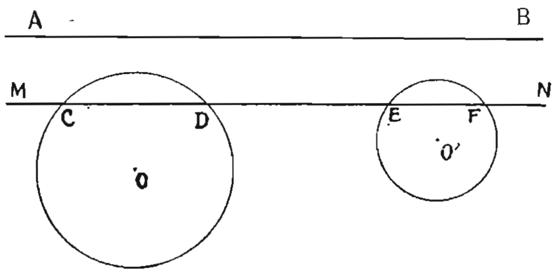
$$\frac{(\overline{AC}+\overline{DB})^2}{2}\leqslant 8r^2-4d^2\leqslant(\overline{AC}+\overline{DB})^2,$$

биће

$$2\sqrt{2r^2-d^2} \leqslant \overline{AC}+\overline{DB} \leqslant 2\sqrt{2}\,\sqrt{2r^2-d^2},$$

што доказује горње тврђење.

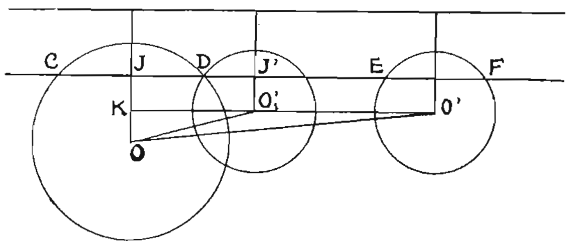
Слични се резултати добијају и за отсечке које у једној кугли чини један систем од три међу собом управне сечице.



X. пример: дата су два круга са средиштима O и O' и једна права $\overline{AB}$; повући једну заједничку сечицу $\overline{MN}$ за оба круга, паралелну правој $\overline{AB}$ и такву да збир $\overline{CD}+\overline{EF}$ њених отсечака има дату дужину λ.

Повуцимо на праву $\overline{AB}$ две управне и из O' праву $\overline{O'K}$ паралелну правој $\overline{AB}$. Померимо круг O' паралелно правој AB дотле, док се тачка E не поклопи се тачком D и нека је O'_1 нов положај средишта O', па ће бити

$$\overline{KO'}_1=\overline{JD}+\overline{DJ'}=\frac{\overline{CD}}{2}+\frac{\overline{EF}}{2}=\frac{\lambda}{2}\,.$$



Ако се око O'_1, са полупречником $\overline{O'E}$, опише круг, пресек овога са кругом O пашће тачно у тачку D.

Означимо са d, r, r' *непромењљиву* дужину $\overline{OK}$ и полу-

пречнике кругова O и O'. Изразивши да се кругови O и O' секу или додирују, добија се за могућност решења задатка овај услов: потребно је и довољно да буде

$$r-r' \leqslant \overline{OO}_1' \leqslant r+r',$$

а пошто је

$$\overline{OO'}_1^{\,2}=\overline{OK}^2+\overline{KO'}_1^{\,2}=d^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

то се квадрирањем горњих неједначина добија као услов

$$(r-r')^2-d^2 \leqslant \frac{\lambda^2}{4} \leqslant (r+r')^2-d^2,$$

што значи да је потребно и довољно да се дужина λ налази у размаку између дужина

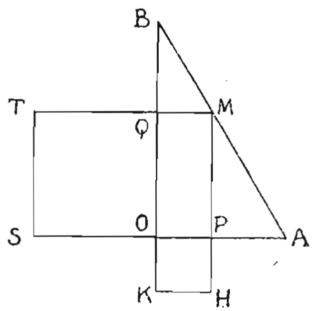
$$2\sqrt{(r-r')^2-d^2} \quad \text{и} \quad 2\sqrt{(r+r')^2-d^2}.$$

Б) Задаци који се своде на проучавање тринома другог степена. Велики број геометриских задатака своди се на одређивање бројних размака у вези са триномом другог степена

$$f(x)=ax^2+2bx+c$$

и то тако да се решење задатка састоји не у одредби вредности x за које тај трином постаје једнак нули, већ у одредби размака у коме треба да се налази било сама вредност x, било какав променљив параметар λ, који фигурише у коефицијентима a, b, c тринома. Такве су врсте задаци наведени у следећим примерима:

I. пример: из произвољне тачке M на хипотенузи AB правоуглог троугла AOB повуку се две управне MP и MQ на катете троугла, па се на отсечцима OP и OQ ових конструишу два квадрата $OPHK$ и $OSTQ$. За који ће положај тачке M површина ограничена испреламаном линијом $MPHKOSTQM$ имати дату вредност λ^2?



Означимо да је

$$\overline{OA}=a\,,\quad \overline{OB}=b\,,\quad \overline{OP}=x, \qquad (a<b)$$

па се добија једначина

$$\lambda^2 = x^2 + \frac{b^2 (a-x)^2}{a^2} + \frac{bx(a-x)}{a}$$

или

$$f(x) = (a^2 - ab + b^2)\,x^2 - ab\,(2b-a)\,x + a^2 (b^2 - \lambda^2) = 0\,.$$

Да би решење имало смисла, потребно је и довољно да су корени једначине реални и да се бар један од њих налази у размаку између 0 и a. Први услов тражи да је

$$(107) \qquad m^2 \geqslant \frac{3a^2b^2}{4\,(a^2 - ab + b^2)}\,,$$

а да би се проучио други услов, треба испитати знаке израза

$$f(0) = a^2 (b^2 - \lambda^2)\,,$$

$$f(a) = a^2 (a^2 - \lambda^2),$$

и разликовати ове случајеве:

1° кад се λ^2 налази у размаку између a^2 и b^2, вредности $f(0)$ и $f(a)$ имају супротне знаке, што значи да постоји једна вредност x која задовољава услов задатка;

2° кад је $\lambda^2 < a^2$, онда је и $\lambda^2 < b^2$; обе су вредности $f(0)$ и $f(a)$ позитивне; тада, ако је испуњен услов реалности (107), или ће оба корена задовољити услов задатка, или га неће задовољити ни један од њих. Да би се имао први случај, потребно је и довољно да се вредност полузбира тих корена налази у размаку између нуле и a, т. ј. да буде

$$0 < \frac{ab\,(2b-a)}{2\,(a^2 - ab + b^2)} < a\,,$$

што ће бити ако је у једно исто време

$$2b - a > 0 \qquad \text{и} \qquad 2a - b > 0\,.$$

Прва неједначина постоји пошто је $a < b$; друга тражи да је

$$a > \frac{b}{2}\,.$$

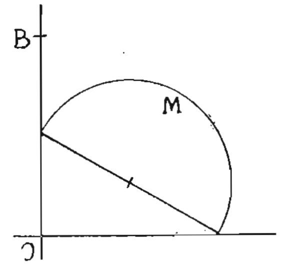
Према томе, да би оба корена једначине $f(x) = 0$ задовољила услов задатка, потребно је и довољно:

α) да се a налази у размаку између $\frac{b}{2}$ и b;

β) да се λ^2 налази у размаку између

$$\frac{3a^2b^2}{4\,(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{и} \quad a^2.$$

II. пример: на крацима правог угла обележе се тачке A и B на одстојањима $OA = a$, $OB = b$ од темена; одредити на OB такву једну тачку D, да збир полуобима круга DMA и отсечка DB буде једнак датој дужини λ.



Ако се за непознату узме дужина $BD = x$, задатак се своди на једначину

$$\frac{1}{2}\,\pi\,\sqrt{a^2 + (b-x)^2} + x = \lambda\,,$$

т. ј. на једначину

$$(108) \qquad (\pi^2 - 4)\,x^2 - 2\,(\pi^2 b - 4\lambda)\,x + \pi^2 (a^2 + b^2) - 4\lambda^2 = 0\,.$$

Да би вредност x, добијена решењем те једначине, дала решење задатка, потребно је и довољно да она буде реална, позитивна и мања од λ.

Услов реалности се може довести на облик

$$(2\lambda - 2b + a\,\sqrt{\pi^2 - 4})\,(2\lambda - 2b - a\,\sqrt{\pi^2 - 4}) \geqslant 0\,,$$

а он ће бити задовољен или кад је

$$(109) \qquad \lambda \leqslant b - \frac{a}{2}\,\sqrt{\pi^2 - 4}\,,$$

или кад је

$$(110) \qquad \lambda \geqslant b + \frac{a}{2}\,\sqrt{\pi^2 - 4}\,.$$

Лако се види да је увек $\lambda > b$ и да према томе неједначина (109) не може бити задовољена тако да долази у обзир само неједначина (110).

Производ корена квадратне једначине (108) има за вредност

$$(111) \qquad \frac{\pi^2 (a^2 + b^2) - 4\lambda^2}{\pi^2 - 4}\,,$$

па пошто је именилац позитиван број, тај ће производ имати знак свога бројиоца. И онда се имају разликовати ови случајеви:

α) нека се λ налази у размаку између

$$b + \frac{a}{2}\sqrt{\pi^2 - 4} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2}\sqrt{a + b^2}.$$

Тада је производ (111) позитиван, па дакле су корени x истог знака, а то је знак њиховог збира

$$\frac{2\,(\pi^2 b - 4\lambda)}{\pi^2 - 4}\,; \tag{112}$$

они ће бити позитивни, т. ј. моћи претстављати решења задатка само кад је

$$\lambda < \frac{\pi^2 b}{4}.$$

β) нека је

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2 + b^2};$$

пошто је производ (111) једнак нули, један је од корена x једнак нули; да би други корен дао решење задатка, он треба да је позитиван, т. ј. треба да је позитиван бројилац израза (112), што захтева да је

$$a < \frac{b}{2}\sqrt{\pi^2 - 4}\,;$$

γ) нека је

$$\lambda > \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2 + b^2};$$

тада је израз (111) негативан и корени x су супротно означени; у томе случају постоји један позитиван корен x и он даје решење задатка.

В) Бројни размаци у тригонометриским задацима. На одређивање бројних размака у тригонометриским задацима наилази се или при испитивању реалности решења, или по самим особинама тригонометриских функција реалних количина да не могу изићи ван једног одређеног размака, као што је н. пр. случај са синусом, косинусом и разноврсним њиховим комбинацијама.

I. пример: поделити дати угао α на два таква дела да збир тангенса тих делова има дату вредност 2λ.

Ако се ти делови означе са x и y, имаће се две једначине

$$x + y = \alpha,$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\lambda.$$

Другој се једначини може дати облик

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \,.\, \cos y} = 2\lambda,$$

па пошто је

$$\sin(x+y) = \sin\alpha,$$

$$2\cos x \,.\, \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos\alpha + \cos(x-y)$$

па та иста једначина постаје

$$\cos(x-y) = \frac{\sin\alpha}{\lambda} - \cos\alpha. \tag{113}$$

Ако је, дакле, α најмањи угао чији косинус има за вредност десну страну једначине (113), за одредбу непознатих x и y имаће се две једначине

$$x + y = \alpha,$$

$$x - y = 2k\pi \pm \alpha,$$

које дају решења x и y.

Али да би решење имало смисла, треба да је

$$-1 < \frac{\sin\alpha}{\lambda} - \cos\alpha < +1,$$

што се може написати и у облику

$$-(1 - \cos\alpha) < \frac{\sin\alpha}{\lambda} < 1 + \cos\alpha.$$

Кад је н. пр. $\sin\alpha > 0$, те неједначине показују да се вредност $\frac{1}{\lambda}$ мора налазити у размаку између

$$-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad \cos\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

II. пример: кад је α дат оштар угао, за које ће вредности x израз

$$(x-1)\,[x^4-2\,(1+\cos^2\alpha)\,x^2+\sin^4\alpha]$$

бити позитиван?

Израз се може написати у облику

$$(x-1)\,[x+(1+\cos\alpha)\,]\,[x+(1-\cos\alpha)\,]\,[x-(1-\cos\alpha)]\,[x-(1+\cos\alpha)].$$

Пошто је $\cos\alpha > 0$, израз ће бити позитиван ако се x налази у једноме, ма коме, од ова три размака

или између $-(1-\cos\alpha)$ и $-(1+\cos\alpha)$

или између $1-\cos\alpha$ и 1

или између $1+\cos\alpha$ и $+\infty$.

III. пример: за какве се позитивне вредности x, y, z може написати да је

$$x^2=y^2+z^2-2yz\cos\alpha\,,$$

где је α какав реалан угао?

Пошто се вредност

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\cos\alpha$$

мора налазити у размаку између -1 и $+1$, то се добијају две неједначине из којих се налази да x треба да се налази у размаку између

$$\pm(y-z) \quad \text{и} \quad (y+z)\,.$$

IV. пример: одредити елементе једног троугла знајући му дужину a једне стране, супротни угао A и збир k^2 квадрата осталих двеју страна b и c.

За одредбу страна b и c има се систем од две једначине

$$(114)\qquad \begin{aligned} b^2+c^2&=k^2\,,\\ a^2&=b^2+c^2-2bc\,.\cos A\,,\end{aligned}$$

одакле је

$$2bc=\frac{k^2-a^2}{\cos A}\,.$$

Додавањем те вредности и одузимањем првој од једначина (114), добијају се две једначине

$$(115)\qquad \begin{aligned} (b+c)^2&=\frac{k^2(1+\cos A)-a^2}{\cos A}\,,\\ (b-c)^2&=\frac{a^2-k^2(1-\cos A)}{\cos A}\,,\end{aligned}$$

из којих се могу израчунати b и c. Да би решење имало смисла, потребно је и довољно:

α) да десне стране једначина (115) буду позитивне;

β) да се a налази у размаку $(b-c,\ b+c)$.

Разликујмо ова два случаја према томе да ли је угао A оштар или туп:

1^0 угао A је оштар; услов α) своди се на двоструку неједначину

$$k^2(1-\cos A)<a^2<k^2(1+\cos A)\,,$$

а услов β) на

$$\frac{a^2-k^2(1-\cos A)}{\cos A}<a^2<\frac{k^2(1+\cos A)-a^2}{\cos A}$$

из које излази да треба да буде

$$k^2>a^2\,.$$

Ти се услови тада своде на

$$2k^2\sin^2\frac{A}{2}<a^2<k^2$$

што значи да збир k^2 треба да се налази у размаку између

$$a^2 \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{2\sin^2\frac{A}{2}}\,;$$

2^0 угао A је туп; услов α) своди се на двоструку неједначину

$$k^2(1-\cos A)<a^2<k^2(1+\cos A)\,,$$

а услов β) на

$$k^2<a^2\,.$$

Ти се услови тада своде на

$$k^2(1-\cos A)<a^2<k^2$$

што значи да k^2 треба да се налази у размаку између

$$\frac{a^2}{2\sin^2\frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad a^2.$$

V. пример: нека су a, b, c стране троугла ABC; кад су дате две стране a и b $(b>a)$, а није дат и њима захваћен угао C, трећа страна c одређена је размаком

$$c=(b-a)+2\vartheta a\,,$$

пошто је увек

$$b-a \leqslant c \leqslant b+a\,.$$

Кад је, пак, дат и угао C, биће

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\,.\cos C}\,.$$

Из односа

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$$

добија се

$$a=\frac{\sin A}{\sin A+\sin B}(a+b)\,,$$

$$b=\frac{\sin B}{\sin A+\sin B}(a+b)\,,$$

тако да је

$$c=(a+b)\,\varphi\,(A,\,B,\,C)\,,$$

где је

$$\varphi(A,\,B,\,C)=\frac{\sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\,.\sin B\,.\cos C}}{\sin A+\sin B}\,.$$

Идентичност

$$2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)\,,$$

узевши да је

$$p=\sin A\,,\qquad q=\sin B\,,$$

претвара израз φ у

$$\varphi(A,\,B,\,C)=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{(p+q)^2}(1+\cos C)-\cos C}\,,$$

а пошто су p и q увек позитивни, биће

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{p^2+q^2}{(p+q)^2}\leqslant 1\,.$$

То показује да је

$$\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}-\cos C\leqslant\varphi\,(A,\,B,\,C)\leqslant 1\,,$$

што према обрасцу

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

даје

$$\sin\frac{C}{2}\leqslant\varphi\,(A,\,B,\,C)\leqslant 1\,,$$

чиме се долази до овога резултата: страна c троугла ABC увек се налази у размаку између

$$(a+b)\sin\frac{C}{2} \quad \text{и} \quad (a+b)\,.$$

Према обрасцу

$$1-\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),$$

то показује да је

$$c=\left(\sin\frac{C}{2}+2\vartheta\,.\cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b)\,,$$

а тај образац даје могућност да се из збира двеју страна и захваћеног угла једнога троугла израчуна трећа страна у облику размака.

Ако се за c узме средина тога размака, тако да је

$$c=(a+b)\cos^2\frac{\pi-C}{4}$$

учињена грешка по апсолутној вредности неће премашити вредност

$$(a+b)\cos^2\frac{\pi+C}{4}\,,$$

а релативна грешка неће премашити вредност

$$\Delta c=\left(\frac{\cos\frac{\pi+C}{4}}{\cos\frac{\pi-C}{4}}\right)^2=\operatorname{tg}^2\frac{\pi-C}{4}\,.$$

Ова је грешка у толико мања, у колико се угао C мање разликује од 180^0; за тај угао она је једнака нули.

Уопште, горњи је резултат од нарочитог интереса за троугле ABC са тупим углом C. За такве троугле, ако се узме да је

$$c = (a+b) \cos^2 \frac{\pi - C}{4},$$

учињена релативна грешка никад не премаша вредност

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 0{,}171,$$

а она брзо опада кад се C приближује углу од 180^0. Тако је

за $C > 120^0$	$\Delta C < 0{,}070$
$C > 140^0$	$\Delta C < 0{,}040$
$C > 150^0$	$\Delta C < 0{,}018$
$C > 160^0$	$\Delta C < 0{,}007$
$C > 170^0$	$\Delta C < 0{,}002$
$C > 175^0$	$\Delta C < 0{,}0003$.

Троуглови за које је релативна грешка ΔC мања, по апсолутној вредности, од једног датог броја ε, јесу они за које је туп угао C, изражен у деловима од π, већи од разлике

$$\pi - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon},$$

или, за довољно мале вредности ε

$$C > \pi - 4\sqrt{\varepsilon}.$$

Обим s троугла ABC изражен помоћу збира $a+b$ и угла C, је

$$s = \left(1 + \sin\frac{C}{2} + 2\vartheta \cdot \cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b).$$

Ако се, дакле, за обим узме средина тога размака, тако да је

$$s = \left(1 + \sin\frac{C}{2} + \vartheta \cdot \cos^2\frac{\pi+C}{4}\right)(a+b)$$

учињена грешка неће, по апсолутној вредности, премашити вредност

$$(a+b) \cdot \cos^2\frac{\pi+C}{4}.$$

XII. Потпуна и непотпуна функционална зависност.

Кад две променљиве количине x и y стоје у таквој међусобној вези, да датој вредности једне од њих одговара, не ма каква, већ једна или више потпуно одређених вредности друге, за те се количине каже да су у *функционалној вези* једна са другом, да су *функције* једна од друге. Тај је појам уведен још при оснивању и првој обради општега рачуна са функцијама, кад се појавио проблем успостављања везе између поступних промена једне количине и одговарајућих промена других количина које се са њоме упоредо мењају.

Међутим, поред такве *потпуно одређене*, постоји још и *непотпуно одређена функционална зависност* између променљивих количина, на коју смо већ наилазили у ранијем излагању. Појам о њој добићемо најлакше и најбрже из ових неколиких простих примера.

На први поглед изгледало би н. пр. да не постоји никаква функционална зависност између дужине хипотенузе c и збира s катета a и b једног правоуглог троугла. Тако, могућно је поступно мењати збир s, а да хипотенуза c остане иста, и обрнуто. Довољно је н. пр. да се давши збиру s једну произвољно изабрану вредност, за катету a узме један корен квадратне једначине

$$a^2 + (s-a)^2 = A^2,$$

а за другу катету разлику $s-a$, па да, поред све произвољности збира s хипотенуза c има вредност A која се не мења кад се мења s. Тако исто се може учинити да се хипотенуза c мења са збиром s по произвољном закону $c = \varphi(s)$; довољно је узети за катету a један корен квадратне једначине

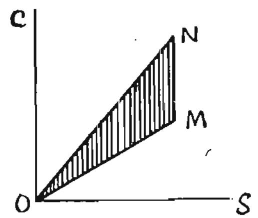
$$a^2 + (s-a)^2 = [\varphi(s)]^2,$$

а за другу катету разлику $s-a$. Међутим, ипак између c и s

постоји једна врста зависности: напред нађена двострука неједначина

$$(a+b)^2 \leqslant a^2+b^2 \leqslant 2(a+b)^2$$

показује да c никад не излази из размака који се налази између вредности s и $s\sqrt{2}=s\,.\,1{,}4142\ldots$ Ако се у равни xOy повуку две праве OM и ON, од којих прва заклапа са осом Ox угао од 45^0, а друга угао од $54^0 44'$, тачка P чије су координате $x=s$, $y=c$ никад није изван области између тих правих. Она се може у специјалним случајевима и поклопити са једном или другом од тих двеју правих: и то са правом ON кад је троугао равнокрак, а са правом OM кад се једна катета троугла смањи до нуле.



Између s и c постоји, дакле, једна нарочита врста зависности: једној датој вредности s не одговара ни потпуно одређена, ни сасвим произвољна вредност c, већ једна вредност која се може произвољно мењати само у једноме одређеном размаку, ван кога она никад не може изићи. Зависност која би постојала кад би датој вредности s одговарала једна потпуно одређена вредност c, била би геометриски претстављена једном *линијом* у равни; у горњем случају она је претстављена једном *пругом* чија је ширина све већа у колико је дужина s већа, а дужина јој је неограничена. Пруга је ограничена двема правама које се секу у почетку и те граничне праве могу бити стварно достигнуте у појединим специјалним случајевима.

Узмимо, као други пример, једначину трећег степена

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0\,, \tag{116}$$

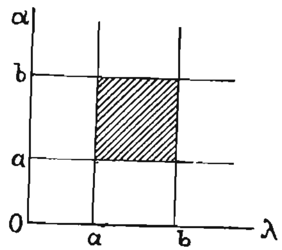
чији су коефицијенти реални и позитивни. Означимо са λ вредност једнога, кога било, од три количника

$$\frac{a_0}{a_1},\quad \frac{a_1}{a_2},\quad \frac{a_2}{a_3}. \tag{117}$$

На први мах би изгледало да не постоји никаква функционална зависност између корена једначине и вредности λ, јер се подесним мењањем коефицијената a_0, a_1, a_2, a_3, може учинити да се н. пр. λ поступно мења, а да се при томе не про-

мени ни један од три корена. Међутим, ако се пусти да се λ мења у размаку (a, b) између вредности остала два количника (117), напред је показано да апсолутне вредности сва три корена једначине, мењајући се, никако неће изаћи ван размака (a, b).

Једној, дакле, датој вредности λ у размаку (a, b) опет не одговара ни потпуно одређена, ни сасвим произвољна вредност корена, већ свакоме корену одговара по једна вредност, која се може произвољно мењати само у једноме одређеном размаку. Таква зависност, на место тога да буде графички претстављена једном *линијом*, биће претстављена једном *пругом* непроменљиве ширине, једнаке њеној дужини; зависност је исте врсте као и у првоме примеру. Пруга је ограничена двема правама паралелним оси x и двема правама паралелним оси y



Узмимо, као трећи пример, аритметичку средину

$$\mu=\frac{x_1+x_2+\,.\,.\,.\,+x_n}{n}$$

једнога низа позитивних бројева $x_1, x_2, \ldots x_n$ садржаних у једном датом размаку (a, b) и аритметичку средину

$$M=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\,.\,.\,.\,+f(x_n)}{n}$$

вредности $f(x_k)$, где је $f(x)$ једна дата реална, позитивна и конвексна функција променљиве x у размаку (a, b), т. ј. таква да је за све вредности x у томе размаку производ

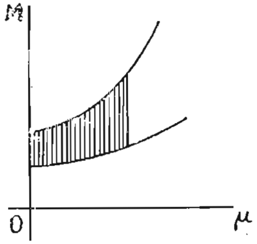
$$f(x)\,.\,f''(x)$$

позитиван.

Изгледало би, опет, да не постоји никаква функционална веза између аритметичких средина μ и M, јер се подесним мењањем бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може учинити да се μ потпуно мења, а да се при томе не промени M, или да се мења по произвољно датом закону. Међутим, као што је напред показано, ма како се мењала вредност μ, вредност M, мењајући се, никад неће изаћи ван размака који се налази између вредности

$$f(\mu)\quad \text{и}\quad \frac{f(n\mu)+(n-1)\,f(0)}{n}\,.$$

Случај је исте врсте као онај у горња два примера; графички претставник зависности између μ и M биће једна *пруга* чија се ширина мења са величином μ, а дужина је неограничена. Пруга је ограничена двема кривим линијама



$$y = f(x) \quad \text{и} \quad y = \frac{f(nx) + (n-1)\, f(0)}{n}$$

које су обе конвексне према осовини ox.

Овакву врсту *непотпуно одређене функционалне зависности*, на какву се наилази у горњим примерима, а која је *апсолутно објективна* и произлази од саме природе ствари, не треба мешати са једном *чисто субјективном* чињеницом сличне врсте, на коју се често наилази при решавању математичких задатака. Дешава се, на име, да је, ма да задатак има своје математички тачно решење у облику *једнога тачнога броја,* до тога решења практички немогуће доћи, али се ипак може утврдити један бројни размак у коме ће се то решење тачно налазити.

Тако н. пр. ма да је количник обима једнога круга и његовог пречника тачан број $\pi = 3{,}141592\ldots$, овај се не може одредити тачно са свима његовим бескрајно многим децималама, али се н. пр. лако сазнаје да се он налази у размаку између

$$\frac{333}{106} \quad \text{и} \quad \frac{22}{7}.$$

Тако исто, кад је дата једначина петога степена

$$x^5 - 80x + a = 0,$$

где је a променљив параметар, немогуће је одредити тачно њене корене ма да ови постоје; међутим се лако сазнаје применом Rolle-ове теореме да она има:

1^0 три реална корена кад се a налази у размаку $(-128, +128)$ и та три корена леже у следећим размацима:

α) $a > 0$, у размацима $(-\infty, -2)$, $(0, +2)$, $(+2, +\infty)$,

β) $a < 0$, у размацима $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(+2, +\infty)$;

2^0 један реалан корен кад се a налази ван размака $(-128, +128)$ и тај се једини реалан корен налази у размаку:

α) $a > 128$, у размаку $(-\infty, -2)$,

β) $a < -128$, у размаку $(+2, +\infty)$.

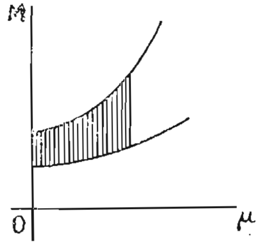
Али таква је непотпуно одређена зависност између корена и коефицијента чисто субјективна и произлази само од неспособности онога који рачуна да нађе тачну функционалну везу између једне и друге променљиве количине, или између децимала једне и друге, ма да таква веза насигурно постоји. Међутим за зависност о којој је реч у напред наведеним примерима, постоји *апсолутна немогућност* да се она геометриски претстави *линијом*, јер у ствари и не постоји линија која би је претстављала; она је по својој природи изражљива само *пругом* сталне или променљиве ширине. Грубо речено, таква је зависност апсолутно неизражљива трагом који у равни за собом оставља идеално заоштрени врх игле; она се може изразити само трагом који оставља један сегменат праве коначне и од нуле различне дужине, који се транслаторно креће у равни остајући н. пр. непрестано паралелан једном одређеном правцу, или непрестано управан на једну дату криву и т. д.

О тој се врсти зависности мора водити рачуна при склапању задатака, да се не би изложило случајности да задатак буде бесмислен, апсурдан. Задатак н. пр. да се одреде углови троугла чије су стране $a = 6$, $b = 2$, $c = 3$, бесмислен је, јер се страна a мора налазити у размаку између $c - b$ и $c + b$. Задатак да се одреде елементи правоуглог троугла чија хипотенуза c има дужину 11 m. а збир катета s износи 10 m., и ако је алгебарски потпуно решљив, јер се за одредбу катета имају две једначине са две непознате, бесмислен је геометриски: дужина c мора се налазити у размаку између s и $0{,}7071\, s$.

У тако простим задацима овакву бесмисленост није тешко уочити и на први поглед. Али у маси задатака то је већ теже. Такав би н. пр. један задатак био овакве врсте: знајући обим s и површину једног троугла, дијагоналу d правоуглог паралелипипеда који има за стране медиане тог троугла, одредити елементе истог троугла. Задатак је алгебарски потпуно решљив. Али ако се унапред не води рачуна о томе да се дужина d увек налази у размаку између

$$\frac{s}{2} \quad \text{и} \quad \frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

Случај је исте врсте као онај у горња два примера; графички претставник зависности између μ и M биће једна *пруга* чија се ширина мења са величином μ, а дужина је неограничена. Пруга је ограничена двема кривим линијама



$$y=f(x) \quad \text{и} \quad y=\frac{f(nx)+(n-1)\,f(0)}{n}$$

које су обе конвексне према осовини ox.

Овакву врсту *непотпуно одређене функционалне зависности*, на какву се наилази у горњим примерима, а која је *апсолутно објективна* и произлази од саме природе ствари, не треба мешати са једном *чисто субјективном* чињеницом сличне врсте, на коју се често наилази при решавању математичких задатака. Дешава се, на име, да је, ма да задатак има своје математички тачно решење у облику *једнога тачнога броја*, до тога решења практички немогуће доћи, али се ипак може утврдити један бројни размак у коме ће се то решење тачно налазити.

Тако н. пр. ма да је количник обима једнога круга и његовог пречника тачан број $\pi=3{,}141592\ldots$, овај се не може одредити тачно са свима његовим бескрајно многим децималама, али се н. пр. лако сазнаје да се он налази у размаку између $\frac{333}{106}$ и $\frac{22}{7}$.

Тако исто, кад је дата једначина петога степена

$$x^5-80x+a=0\,,$$

где је a променљив параметар, немогуће је одредити тачно њене корене ма да ови постоје; међутим се лако сазнаје применом Rolle-ове теореме да она има:

1° три реална корена кад се a налази у размаку $(-128, +128)$ и та три корена леже у следећим размацима:

α) $a>0$, у размацима $(-\infty,\ -2)$, $(0,\ +2)$, $(+2,\ +\infty)$,

β) $a<0$, у размацима $(-\infty,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(+2,\ +\infty)$;

2° један реалан корен кад се a налази ван размака $(-128, +128)$ и тај се једини реалан корен налази у размаку:

α) $a>128$, у размаку $(-\infty,\ -2)$,

β) $a<-128$, у размаку $(+2,\ +\infty)$.

Али таква је непотпуно одређена зависност између корена и коефицијента чисто субјективна и произлази само од неспособности онога који рачуна да нађе тачну функционалну везу између једне и друге променљиве количине, или између децимала једне и друге, ма да таква веза насигурно постоји. Међутим за зависност о којој је реч у напред наведеним примерима, постоји *апсолутна немогућност* да се она геометриски претстави *линијом*, јер у ствари и не постоји линија која би је претстављала; она је по својој природи изражљива само *пругом* сталне или променљиве ширине. Грубо речено, таква је зависност апсолутно неизражљива трагом који у равни за собом оставља идеално заоштрени врх игле; она се може изразити само трагом који оставља један сегменат праве коначне и од нуле различне дужине, који се транслаторно креће у равни остајући н. пр. непрестано паралелан једном одређеном правцу, или непрестано управан на једну дату криву и т. д.

О тој се врсти зависности мора водити рачуна при склапању задатака, да се не би изложило случајности да задатак буде бесмислен, апсурдан. Задатак н. пр. да се одреде углови троугла чије су стране $a=6$, $b=2$, $c=3$, бесмислен је, јер се страна a мора налазити у размаку између $c-b$ и $c+b$. Задатак да се одреде елементи правоуглог троугла чија хипотенуза c има дужину 11 m. а збир катета s износи 10 m., и ако је алгебарски потпуно решљив, јер се за одредбу катета имају две једначине са две непознате, бесмислен је геометриски: дужина c мора се налазити у размаку између s и $0{,}7071\ s$.

У тако простим задацима овакву бесмисленост није тешко уочити и на први поглед. Али у маси задатака то је већ теже. Такав би н. пр. један задатак био овакве врсте: знајући обим s и површину једног троугла, дијагоналу d правоуглог паралелипипеда који има за стране медиане тог троугла, одредити елементе истог троугла. Задатак је алгебарски потпуно решљив. Али ако се унапред не води рачуна о томе да се дужина d увек налази у размаку између

$$\frac{s}{2} \quad \text{и} \quad \frac{s}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,,$$

може се склопити задатак горње врсте који је геометриски бесмислен.

Исти би случај био н. пр. са алгебарским задатком да се формира једначина трећег степена

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0 ,$$

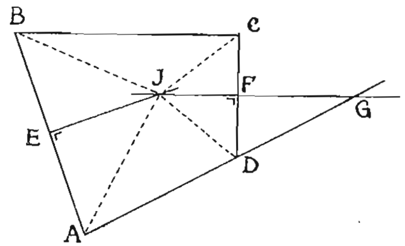
која ће имати као један корен $x = 3$, а за коју ће сва три количника

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_3}$$

имати дате вредности веће од 4. Корен 3, према ономе што је напред речено, мора се налазити у размаку између најмањег и највећег од та три количника; кад су ови сви већи од 4, корен не може бити 3.

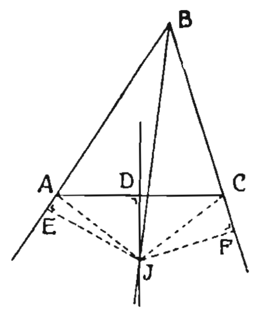
Навешћемо и један од познатих геометриских доказа, који су нетачни ако се при конструкцији не води рачуна о томе, да се извесна тачка при тој конструкцији увек налази, или никад не налази, у једном одређеном размаку.

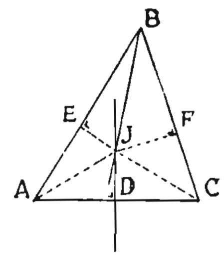
Нека је дат четвороугао $ABCD$ чији је један угао C прав, један угао D туп, а стране BC и AD међу собом једнаке. Из средина E и F страна AB и CD подигнимо две управне на те стране. Те управне не могу бити паралелне, јер би у том случају биле паралелне и стране AB и CD, што се претпоставља да није случај. Управне у E и F секу се, дакле, у једној тачки J. Било да је та тачка у унутрашњости четвороугаоника, било да је ван овога или на самоме њему, лако се доказује да су троугли AJD и BJC међу собом једнаки и да је према томеу гао ADJ једнак углу BCJ, т. ј. да је угао ADF прав, што по претпоставци није. Грешка произлази отуда што се при горњој конструкцији није водило рачуна о томе да се пресечна тачка J увек налази, не само ван четвороугла, већ и даље од пресечне



тачке G стране AD са управном у F у коме је случају горњи доказ немогућ.

У томе се примеру има посла са случајем где једна карактеристична тачка при конструкцији треба да се налази *ван једног одређеног размака*. У следећем примеру она треба да се налази *у једном одређеном размаку*. Нека је ABC ма какав троугао, који има све три стране неједнаке. Повуцимо бисектрису BJ угла B и управну на страну AC у њеној средини D. Те две праве нису паралелне, јер би у томе случају троугао био равнокрак. Оне се дакле секу у једној тачки J. Било да





је ова тачка у унутрашњости троугла, било да је ван овога, лако се доказује да су правоугли троугли BJE и BJF, где су праве EJ и FJ управне на AB и BC, међу собом подударни, па је, дакле, $BE = BF$. Тако су исто правоугли троугли AJE и CJF међу собом подударни, па је, дакле, $AE = CF$. Додајући, односно одузимајући једнаким дужинама BE и BF једнаке дужине AE и CF, добија се да је $BA = BC$, што није случај и што би значило да је сваки троугао равнокрак. Грешка произлази отуда што при конструкцији није вођено рачуна о томе да се пресечна тачка J никад не налази у унутрашњости троугла; кад је она већ ван троугла, пресечна тачка E управне спуштене из J на већу страну AB са самом том страном увек се налази у размаку између тачака A и B, у коме случају је горњи доказ немогућ.

Такви примери довољно показују колико се при склапању задатака, или при доказима алгебарских или геометриских резултата, мора унапред водити рачуна о *размацима* у којима се, или ван којих се, одређени елементи морају налазити. А до тих се размака долази проучавањем функционалне зависности између алгебарских или геометриских елемената *и то зависности баш онакве врсте, о каквој је реч у овим предавањима.*

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Бројни размаци у инфинитезималном рачуну.

XIII. Диференцијалење и интегралење бројних размака.

Кад је једна промењива y у недовољно одређеној зависности од друге промењиве x, тако, да једној одређеној вредности x одговара, не једна одређена вредност y, већ један размак у коме ће се ова налазити, мењањем вредности x помераће се и мењаће се и деформисаће се и тај размак; крајеви размака описиваће доњу и горњу граничну линију области у којој ће се налазити вредност y.

Ако се пусти да промењива x прирасте, у позитивном или негативном смислу, за dx, ординате и једне и друге граничне линије такође ће прирасти за једну одређену количину која се одређује из једначина тих линија као диференцијал њихових ордината. Али сам прираштај dy промењиве y остаје неодређен; све што се може знати је то да се нова вредност $y+dy$ те промењиве налази између граничних линија, али се ништа не може знати за сам прираштај dy.

То се, уосталом, види и посматрањем рачунског претставника

$$y = f(u, v, \lambda), \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$$

где су u и v две тачно одређене функције променљиве x, а λ_1 и λ_2 два одређена броја. Пошто се λ, и ако увек лежи између та два броја, мења од једне вредности x до друге, то ће и тај параметар λ бити извесна функција променљиве x, за коју ћемо познавати само границе њених варијација, али ни у колико не и њен ток или аналитички облик. Према томе, неће се познавати ни њен извод по x који, и ако λ непрестано лежи у размаку (λ_1, λ_2), може имати ма коју, нама непознату, вредност између $-\infty$ и $+\infty$. Па пошто је

$$dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dx}\right) dx,$$

где ћемо тачно познавати вредности свих извода што фигуришу у томе изразу, осим извода $\frac{d\lambda}{dx}$ који остаје потпуно неодређен, то нећемо ни у колико познавати величину dy.

Према томе: *обично диференцијалење бројних размака уопште нема смисла и оно се уопште и не врши.*

Па ипак, у појединим специјалнијим случајевима, *постоји одређена веза између размака у коме се креће извод функције и размака у коме се креће вредност саме функције.* Тај случај наступа н. пр. сваки пут кад се зна да је посматрана функција y интеграл какве диференцијалне једначине првога реда

$$y' = f(x, y).$$

Кад се y креће у размаку између $A(x)$ и $B(x)$ при кретању променљиве x у размаку (a, b), може се одредити размак у коме ће се налазити вредност извода y'. Ако се са $N(x)$ и $M(x)$ означе крајеви једног променљивог размака у коме ће се кретати функција двеју променљивих $f(x, y)$, кад се x креће у размаку (a, b), а y у размаку (A, B), очевидно је *да ће се вредност извода y' непрестано налазити у томе променљивом размаку (N, M).*

Такав је случај н. пр. са ма каквом рационалном функцијом $y = R(x)$ променљиве x; елиминацијом x из двеју једначина

$$y = R(x) \quad \text{и} \quad y' = R'(x)$$

добија се једначина облика

$$y' = T(y)$$

и означивши са N и M најмању и највећу вредност коју има посматрана грана функције $T(y)$ кад се y креће у размаку између вредности $A(x)$ и $B(x)$, вредност y' ће се непрестано налазити у размаку (N, M).

Исти је случај и са ма каквим полиномом $y = P(x)$, као специјалним случајем рационалних функција. Доказан је, шта више, и један општи, а прост резултат према коме, ако се вредности једног полинома n-тог степена, за вредности x садржане у једном датом размаку (a, b), налазе у једноме размаку $(-M, +M)$, вредности његовог извода $P'(x)$ налазиће се, за исте вредности x, непрестано у размаку између вредности $-n^2M$ и $+n^2M$.

Тако исто, показано је да, ако се вредност једног тригонометриског полинома

$$S(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

за ма које вредности x, непрестано налази у једноме размаку $(-M, +M)$, вредност његовог извода $S'(x)$ непрестано ће се налазити у размаку $(-nM, +nM)$.

Исто тако, а као што је напред показано, ако је $\varphi(x)$ логаритамски извод једнога полинома n-тог степена чије су нуле све реалне, биће

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \vartheta\,(\sqrt{n} - 1)}{\sqrt{n}} \cdot \varphi(x)$$

за сваку вредност x већу од свију нула полинома. Кад се, дакле, вредност $\varphi(x)$ креће у једноме размаку (N, M), вредност $\varphi'(x)$ кретаће се у размаку $\left(\frac{N}{\sqrt{n}}, M\right)$.

Сличан ће се случај имати увек кад се из диференцијалне једначине једне функције y може извести закључак да се, за вредности x и y садржане у одговарајућим размацима, извод y' мора непрестано налазити у одређеном размаку.

Али, такви су случаји изузетни и *у општем случају не постоји одређена веза између размака функције и њеног извода.* Па и у тим изузетним случајевима до те се везе не долази обичним диференцијалењем размака, јер ово уопште нема смисла, већ непосредним закључивањем из специјалних услова које задовољава посматрана функција.

Међутим, лако се уверити да *интеграљење бројних размака, у одређеним границама, има смисла и да се оно уопште може вршити са размацима, као и са тачно одређеним функцијама.*

Тако, претпоставимо да је рачунски претставник размака y сведен на асиметрички нормални облик

$$y = u + \vartheta v ,$$

где су u и v одређене функције промењљиве x, и v позитивна функција у једноме посматраном размаку (a, b) промењљиве x; уочимо тада одређени интеграл

$$J = \int_a^b y\, dx = \int_a^b u\, dx + \int_a^b \vartheta v\, dx .$$

Први интеграл на десној страни има тачно одређену вредност. Други интеграл, према теореми средњих вредности, има за вредност

$$\vartheta_1 \int_a^b v\, dx \qquad 0 \leqslant \vartheta_1 \leqslant 1$$

и према томе је вредност интеграла J одређена размаком чији је рачунски претставник, у своме асиметричком нормалном облику

$$J = \int_a^b u\, dx + \vartheta_1 \int_a^b v\, dx$$

што доказује горње тврђење.

Да интеграл једне функције y, дате само размаком у коме се она налази, одиста има смисла у толико, што се она може изразити у облику одређеног размака, види се и из овога: ма какав ток имала крива

$$y = f(x)$$

која се налази између двеју утврђених кривих

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{и} \quad y_2 = f_2(x) ,$$

површина те линије, ограничена луком криве y, двема крајњим ординатама и x-осовином, увек се налази у једном размаку

који је одређен одговарајућим површинама кривих y_1 и y_2. Међутим, факт да се износ површине криве y налази између два позната износа површина, ни у колико не даје могућности да се позна сам ток криве y; криве y са бескрајно разноврсним током, а које ипак непрестано остају у утврђеном и познатом размаку, могу имати износ површине садржан у једноме истом размаку. Другим речима: интеграл једнога размака, и сам као размак, увек има смисла, док га извод не мора имати.

XIV. Одређени интеграли као бројни размаци.

У непрегледном броју случајева, за један одређени интеграл

1⁰ или није могућно тачно израчунати му вредност, или је такво израчунавање заметно и тешко;

2⁰ или, за оно што се има у виду, није ни потребно знати му тачну, па чак ни врло приближну вредност, већ само његову овлашну величину или његов инфинитезимални ред наспрам друге које количине са којом се упоређује.

У таквим случајевима интеграл се одређује у облику једног бројног размака у коме се он налази, што је увек извршљиво и што је врло често довољно за оно што се има у виду.

Тако се н. пр. интеграл

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$$

за произвољну вредност n не може тачно израчунати; међутим се лако налази да његова вредност увек лежи између 0,50 и 0,52 за ма коју вредност $n > 2$.

Тако исто, интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

се не може израчунати док не буде тачно дата функција $f(x)$ па и тада је то уопште немогућно, сем у изузетним и ретким случајевима; међутим се налази да његова вредност увек лежи у једном одређеном размаку $\left(\frac{A}{n}, \frac{B}{n}\right)$, где A и B зависе само од облика функције $f(x)$, а ни у колико не од n. Тај резултат игра доста важну улогу при испитивању конвергенције тригонометриских редова и довољан је за многа друга испитивања и израчунавања.

Интеграл

$$J = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

се може, за дату вредност целога броја n, израчунати са апсолутном тачношћу, јер је његова вредност цео број $1, 2, 3 \ldots n$. Али за велике вредности n такво је израчунавање практички тешко и заметно, јер се имају извршити множења бројева са великим бројем цифара. Међутим се налази да вредност интеграла лежи у размаку између

$$e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \quad \text{и} \quad e^{-n+\frac{1}{12n}}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

и ако се н. пр. за $n = 20$ узме за ту вредност доњи крај овог размака, добија се на доста брз начин

$$J = 2422786385510400000$$

на место тачне вредности

$$J = 2432902008176640000;$$

разлика између двеју вредности је велика, али се ипак из тих вредности добија овлашна, за многа питања довољно одређена претстава о величини интеграла J, која је н. пр. за доказивање појединих теорема довољна.

Постоји пространа област случајева, у којима се један одређени интеграл може лако одредити у облику бројног размака, ширег или ужег према природи случаја. За образац који изражава једну пространију класу одређених интеграла у облику размака, каже се да претставља једну *теорему средње вредности* за ту класу интеграла; разлог се називу налази у томе што се интеграл таквим обрасцем одређује као нека средња, и ако недовољно одређена, вредност између крајева размака.

Таквих теорема средњих вредности има доста велики број, и овде ће бити наведене неке од њих које имају пространe области своје применљивости.

XV. Обична теорема интеграла средњих вредности.

Она гласи:

Ако су f_1, f, f_2 три функције променљиве x, коначне у размаку (a, b) те променљиве и такве да је за све вредности x у томе размаку

$$f_1 \leqslant f \leqslant f_2 ,$$

биће

$$\int_a^b f(x)\, dx = u + \vartheta v , \tag{118}$$

где је

$$u = \int_a^b f_1(x)\, dx, \quad v = \int_a^b f_2(x)\, dx - \int_a^b f_1(x)\, dx .$$

Доказ је у томе што оба интеграла

$$\int_a^b (f - f_1)\, dx \quad \text{и} \quad \int_a^b (f_2 - f)\, dx$$

немају ни један негативан интегрални елеменат, па оба имају позитивну вредност.

Кад је дат интеграл

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^\alpha}} ,$$

где је α један ма колики број већи од 2, пошто је између интегралних граница $x^\alpha < x^2$, биће за све вредности x у размаку $\left(0 , \frac{1}{2}\right)$

$$1 < f < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

тако да се може узети

$$f_1 = 1 , \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} ,$$

и онда је

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_1\,dx = \frac{1}{2} = 0{,}5, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} f_2\,dx = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = 0{,}523\ldots$$

и према томе

$$J = 0{,}5 + \vartheta\,.\,0{,}023\ldots$$

Непосредна последица горње теореме је ова:

Нека су f и φ две функције променљиве x, коначне у размаку (a, b) променљиве x, у коме φ непрестано задржава један исти знак (н. пр. $+$) и за које вредности функције f непрестано остају у области ограниченој двема функцијама f_1 и f_2, тако да је

$$f_1 \leqslant f \leqslant f_2\,;$$

тада ће бити

$$\int_a^b f\varphi\,dx = u + \vartheta v\,,$$

где је

$$u = \int_a^b f_1\varphi\,dx\,, \quad v = \int_a^b f_2\varphi\,dx - \int_a^b f_1\varphi\,dx\,.$$

Довољно је у првој теореми узети $f\varphi$ за f, $f_1\varphi$ за f_1 и $f_2\varphi$ за f_2.

У случају кад, за све вредности x у размаку (a, b), вредности функције f остају у размаку између два стална броја N и M, биће

$$\int_a^b f\varphi\,dx = [N + \vartheta\,(M-N)]\int_a^b \varphi\,dx.$$

Узмимо, као пример, одредбу збира s реда

$$\frac{1}{a+a} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots \tag{119}$$

који је конвергентан за $b > 0$; та одредба је веома дуга и заметна (нарочито кад је вредност b мала наспрам вредности a), а међу тим се помоћу обрасца (118) s брзо и доста тачно одређује у облику размака.

Тога ради приметимо да је

$$\frac{1}{a+pb} = \frac{1}{b}\int_0^1 x^{p+\frac{a}{b}-1}\,dx\,, \quad (p = 1, 2, 3\ldots) \tag{120}$$

па дакле наш ред

$$s = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - \ldots$$

имаће за збир

$$s = \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{x^{\frac{a}{b}}}{1+x}\,dx\,. \tag{121}$$

Ако се сад стави да је

$$\frac{1}{1+x} = (1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3) + U,$$

налази се да је

$$U = \frac{1}{4}\,\frac{x^2\,(1-x)^2}{1+x}\,.$$

Функција U остаје непрестано позитивна у размаку $(0,1)$ променљиве x и достиже свој максимум за

$$x = \frac{\sqrt{33}-3}{6} = 0{,}457427\ldots,$$

а вредност тог максимума је $0{,}0106\ldots$. Према томе је у размаку $(0,1)$

$$0 < U < 0{,}0106\,,$$

што значи, ако се стави

$$\psi(x) = 1 - x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3\,,$$

биће, за вредности x у размаку $(0,1)$,

$$\psi(x) \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant \psi(x) + 0{,}0106\ldots,$$

т. ј.

$$\frac{1}{1+x}=\psi(x)+\vartheta\,.\,0{,}0106\ldots,\qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1\,.$$

Образац (121) добија тада облик

$$s=\frac{1}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{b}}\psi(x)\,dx+\frac{\vartheta'}{b}\int_0^1 x^{\frac{a}{b}}dx\,.\,0{,}0106\ldots$$

што, кад се изврше означене интеграције, доводи до обрасца

$$s=\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+2b}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{a+4b}\right)+\vartheta'\,\frac{0{,}0106\ldots}{a+b}.$$

Тај образац даје збир s са грешком увек позитивном, а која никад не премаша $\frac{0{,}0106\ldots}{a+b}$. Да би се толика тачност имала непосредним сумирањем реда, требало би сабрати најмање 94 члана.

Као другу последицу горње теореме навешћемо то, да кад је f коначна и непрекидна функција у размаку (a, b) променљиве x, и кад њене вредности за тај размак непрестано леже у размаку између два броја N и M, увек је

$$\int_a^b f(x)\,dx=[N+\vartheta\,(M-N)\,]\,(b-a)\,. \tag{122}$$

Довољно је узети да је у последњој теореми $\varphi=1$. Ако се, пак, са $\varphi(x)$ означи једна функција која има за извод функцију $f(x)$, биће

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(b)-\varphi(a)$$

и образац (122) постаје

$$\varphi(b)-\varphi(a)=[N+\vartheta\,(M-N)\,]\,(b-a)\,, \tag{123}$$

где су N и M такве две вредности, да се за све вредности променљиве x у размаку (a, b) вредности извода $\varphi'(x)$ налазе у размаку (N, M).

Образац (123) зове се *образац за коначне прираштаје*

произвољне функције $\varphi(x)$ т. ј. он даје коначни прираштај $\varphi(b)-\varphi(a)$ те функције у облику једног размака. Тај ће размак бити најужи ако се за N и M узме најмања и највећа међу вредностима које добија $\varphi'(x)$ за време док се x мења од a до b; он се обично изражава у облику (в. стр. 63 и 64)

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\,\varphi'(c)\,,$$

где је c једна вредност што се налази између a и b.

Образац (122) не претпоставља ништа друго за функцију f, осим њену коначност и непрекидност у размаку (a, b). Ако су, међутим, познате још и неке друге особине посматране функције, размак одређен десном страном једначине (122), може бити замењен неким ужим размацима.

Тако н. пр. кад је функција $f(x)$ позитивна и конвексна у размаку (a, b), т. ј. таква да је за ма који пар вредности x' x'' у томе размаку непрестано

$$\frac{f(x')+f(x'')}{2}\leqslant f\left(\frac{x'+x''}{2}\right),$$

доказује се да је

$$\int_a^b f(x)\,dx=[M+N+\vartheta\,(M-N)\,]\,.\,\frac{b-a}{2}; \tag{124}$$

размак (124) очевидно је ужи од размака (122).

Кад је $f(x)$ какав тригонометриски полином n-тог реда, т. ј. облика

$$f(x)=(a_0+a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx)+$$
$$+(b_1\cos x+b_2\cos 2x+\ldots+b_n\cos nx)\,,$$

доказује се (теорема Fejér-а) да је

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[\left(N+\frac{M-N}{n+1}\right)+\vartheta\left(1-\frac{2}{n+1}\right)(M-N)\right]\frac{b-a}{2}\,; \tag{125}$$

размак (125) је најужи могући размак док се остаје у генералности, јер су његове обе границе стварно достигнуте за поједине специјалне тригонометриске полиноме $f(x)$.

На сличан је начин одређен и најужи могући размак за интеграл (122) кад је $f(x)$ какав полином n-тог степена по x.

XVI. Друга теорема средњих вредности интеграла.

Доказаћемо најпре један помоћни Abel-ов став за два коначна или бескрајна низа реалних бројева

(126) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p ,$$

(127) $$u_0, u_1, u_2 \dots u_p ,$$

од којих се за прве претпоставља да су позитивни и да опадају са својим рангом. Став гласи:

Ако се сви збирови

$$S_0 = u_0, \quad S_1 = u_0+u_1, \quad S_2 = u_0+u_1+u_2, \dots, S_p = u_0+u_1+\dots+u_p$$

налазе у једноме бројном размаку (A, B), збир

(128) $$V = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p$$

налазиће се у размаку $(A\alpha_0, B\alpha_0)$.

Јер, пошто се може написати да је

$$u_0 = S_0, \quad u_1 = S_1 - S_0, \quad u_2 = S_2 - S_1, \dots, u_p = S_p - S_{p-1},$$

биће

(129) $$V = (\alpha_0-\alpha_1) S_0 + (\alpha_1-\alpha_2) S_1 + (\alpha_2-\alpha_3) S_2 + \dots \\ \dots + (\alpha_{p-1}-\alpha_p) S_{p-1} + \alpha_p S_p .$$

По претпоставци, свака од разлика $\alpha_{k-1}-\alpha_k$ је позитивна; према томе, ако се на десној страни израза (121) сваки збир S_k смени најпре својом доњом границом A, па затим својом горњом границом B, биће очевидно

$$A\alpha_0 < V < B\alpha_0 ,$$

чиме је став доказан.

Нека је сад дат интеграл

$$J = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx , \qquad (a<b)$$

где је $\varphi(x)$ каква непрекидна, позитивна и непрестано опадајућа функција за вредност x у размаку (a, b), а $f(x)$ је ма каква функ-

ција за коју интеграл $\int_a^x f(x)\,dx$ има смисла за вредности x у размаку (a, b).

Ако се размак (a, b) подели на n размака

$$x_1-a, \quad x_2-x_1, \quad x_3-x_2, \dots, b-x_{n-1},$$

интеграл ће бити гранична вредност збира

$$f(a)\varphi(a)(x_1-a)+f(x_1)\varphi(x_1)(x_2-x_1)+\dots+f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

кад n бескрајно расте и кад сваки од размака $x_k - x_{k-1}$ тежи нули.

Ако се у горњем ставу узме да је

$$\alpha_0 = \varphi(a), \quad \alpha_1 = \varphi(x_1), \quad \alpha_2 = \varphi(x_2) \dots$$

и $u_0 = f(a)(x_1-a), \quad u_1 = f(x_1)(x_2-x_1), \quad u_2 = f(x_2)(x_3-x_2) \dots$

биће

$$S_0 = f(a)(x_1-a),$$
$$S_1 = f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1),$$
$$S_2 = f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_{n-1} = f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\dots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1}),$$

и према томе биће

$$V = f(a)\varphi(a)(x_1-a)+f(x_1)\varphi(x_1)(x_2-x_1)+ \\ +f(x_2)\varphi(x_2)(x_3-x_2)+\dots+f(x_{n-1})\varphi(x_{n-1})(b-x_{n-1}).$$

Према горњем ставу, ако се сви збирови S_k налазе у једном размаку (A, B), збир ће се V налазити у размаку између $A\varphi(\alpha)$ и $B\varphi(\alpha)$.

То важи за ма колики број n уметнутих размака $x_k - x_{k-1}$, па и кад се пусти да n бескрајно расте. Збир V постаје тада интеграл J, а збир S_k, узевши да је увек $x_{k+1} \leqslant x$, тежи интегралу,

$$S = \int_a^x f(x)\,dx .$$

Ако се са N' и M' означе једна доња и једна горња граница интеграла

$$(130) \qquad \int_a^x f(x)\,dx\,,$$

збир ће се V налазити у размаку између

$$N'\varphi(a) \quad \text{и} \quad M'\varphi(a)\,,$$

т. ј. биће

$$(131) \qquad J=[N'+\vartheta\,(M'-N')]\,\varphi(a)\,.$$

Томе се резултату може дати још и овај облик: ако се са N и M означе најмања и највећа вредност коју добија интеграл (130) за вредност x у размаку (a, b), вредност $\dfrac{J}{\varphi(a)}$ налазиће се у размаку (N, M), т. ј. она ће бити једнака вредности коју добија интеграл (130) за једну извесну вредност $x=\xi$ што се налази у размаку (a, b), т. ј. једнака вредности

$$\int_a^\xi f(x)\,dx\,, \qquad a<\xi<b\,.$$

Према томе је

$$(132) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx\,, \qquad a<\xi<b$$

и у томе се састоји *први део теореме Ossian-Bonnet-a*, познате под именом *друге теореме средњих вредности интеграла*.

У случају кад је $\varphi(x)$ позитивна и растућа функција променљиве x у размаку (a, b), на исти се начин доказује образац

$$(133) \qquad J=[P'+\vartheta\,(Q'-P')]\,\varphi(b)\,,$$

где су P' и Q' једна доња и једна горња граница интеграла

$$(134) \qquad \int_x^b f(x)\,dx\,,$$

док x варира од a до b.

Томе се резултату, на исти начин као и у првом случају, може дати и облик:

$$(135) \qquad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx\,, \qquad a<\xi<b\,;$$

то је други део теореме Ossian-Bonnet-a.

Лако се увиђа да знак функције $\varphi(x)$ у размаку (a, b) не утиче на доказивање образаца (132) и (135); он може само повући за собом међусобну пермутацију вредности M', N', односно P', Q', што не мења обрасце (132) и (135).

Претпоставимо сад да функција φ мења, у размаку (a, b) променљиве x, свој смисао варијација, тако да наизменично расте и опада. Поделимо тада размак (a, b) на узастопне размаке

$$(136) \qquad (a, x_1)\,,\ (x_1, x_2)\,, \ldots, (x_{n-1}, b)$$

такве, да се у сваком од њих φ мења у истом смислу, непрестано растући или непрестано опадајући. Интеграл J ће бити збир од интеграла

$$\int_a^{x_1},\ \int_{x_1}^{x_2}, \ldots, \int_{x_{n-1}}^b$$

и за сваки од ових горња ће теорема дати по један размак у коме ће се интеграл налазити. Из тога се, према ономе што је раније показано, може извести размак у коме ће се налазити и сам интеграл J.

Тако н. пр. кад је дат интеграл

$$(137) \qquad J=\int_a^b \psi(x)\cos nx\,dx\,,$$

ако се узме да је

$$\varphi(x)=\psi(x) \qquad \text{и} \qquad f(x)=\cos nx\,,$$

па се размак (a, b) подели на размаке (136) такве да се у сваком од њих функција $\psi(x)$ мења непрестано у једном смислу, према горњој теореми имаћемо за један од размака (x_k, x_{k+1}) у коме она непрестано *опада*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(x) \cos nx\, dx = \psi(x_k) \int_{x_k}^{\xi_1} \cos nx\, dx = \psi(x_k)\, \frac{\sin n\xi_1 - \sin nx_k}{n},$$

а за један од размака (x_i, x_{i+1}) у коме она непрестано *расте*

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) \cos nx\, dx = \psi(x_{i+1}) \int_{\xi_2}^{x_{i+1}} \cos nx\, dx = \psi(x_{i+1})\, \frac{\sin nx_{i+1} - \sin n\xi_2}{n}.$$

Интеграл J, као збир свих тих интеграла, добиће се у облику

$$J = \frac{A + \vartheta B}{n},$$

где су A и B вредности које, као линеарне комбинације синуса са коефицијентима што не зависе од n, остају коначне кад n бескрајно расте. Према томе *за велике вредности n интеграл се J понаша као $\frac{H}{n}$, где је H једна коначна количина.*

Исти се резултат добија и на исти начин, за интеграл

$$J = \int_a^b \psi(x) \sin nx\, dx. \tag{138}$$

Ти су резултати од важности при испитивању конвергенције тригонометријских редова, т. ј. редова уређених по $\sin nx$ и $\cos nx$, јер су коефицијенти тих редова интеграли облика (137) и (138).

XVII. Лучни интеграли као бројни размаци.

А) Луци кривих у равни. Кад су дате две реалне количине u и v, означивши са $\dot{u}$ и $\dot{v}$ њихове апсолутне вредности, биће

$$\sqrt{u^2+v^2} = \lambda(\dot{u}+\dot{v}), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Ако су u и v две функције променљиве x, множећи их са dx и интегралећи у једном размаку (a, b) те променљиве, за који оба интеграла

$$J_1 = \int_a^b \dot{u}\, dx \quad \text{и} \quad J_2 = \int_a^b \dot{v}\, dx$$

имају смисла, биће према томе

$$J = \int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\, dx = \lambda(J_1 + J_2),$$

тако, да ако се н. пр. узме за λ средина размака у коме се та вредност налази, биће

$$J = 0{,}8535\,(J_1 + J_2),$$

са учињеном грешком која не премаша $0{,}1465\,(J_1+J_2)$; процентна грешка не достиже, дакле, никад $15^0/_0$.

Тако се добија да се, н. пр. вредност елиптичког интеграла

$$J = \int_a^b \sqrt{h + kx^4}\, dx,$$

(где су h и k позитивни бројеви) увек налази у размаку између вредности

$$0{,}7071\left[(b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3-a^3)\right] \quad \text{и} \quad (b-a)\sqrt{h} + \frac{\sqrt{k}}{3}(b^3-a^3).$$

Горњи образац даје могућност да се одреди размак, у коме ће се налазити дужина лука дате криве линије у равни, између двеју његових тачака, *помоћу интеграла простијих од лучног интеграла.*

Тако, кад крива $y = f(x)$ никако не опада у размаку (a, b), дужина њеног лука s у томе размаку биће

$$s = \int_a^b dx\, \sqrt{1 + f'(x)^2} = \lambda\,[(b-a) + f(b) - f(a)], \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

а кад крива никако не расте у том размаку биће

$$s=\lambda\,[(b-a)+f(a)-f(b)]\,.$$

Гранична вредност $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ достигнута је у случају праве $y=x+c$, а гранична вредност $\lambda=1$ у случају праве $y=c$.

Тако би се, н. пр., дужина лука параболе трећег степена

$$y=\alpha\,x^3\,, \qquad (\alpha>0)$$

између тачака $x=a$ и $x=b$, налазила у размаку између

$$0{,}7071\,[(b-a)+\alpha\,(b^3-a^3)] \quad \text{и} \quad (b-a)+\alpha\,(b^3-a^3)\,.$$

Ако, пак, крива наизменично расте и опада дуж лука s, може се поделити на луке s_1, s_2, s_3 . . . дуж којих крива има један исти смисао, па на сваки од ових лукова применити горњи образац и резултате сабрати у лук s.

Тако се може решити у облику размака и овај, у општем случају тачно нерешљив задатак:

Одредити криве у равни чији је лук s дата функција $f(x,y)$ координата његове крајње тачке (x,y).

Нека су x_0, y_0 координате почетне тачке лука; сменивши у једначини задатка $s=f(x,y)$ лук s са

$$\lambda\,[(x-x_0)+(y-y_0)]\,,$$

или са

$$\lambda\,[(x-x_0)-(y-y_0)]\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\lambda\leqslant 1\,,$$

(према томе да ли се крива дуж лука s пење или силази), тражене криве биће одређене једном или другом од области у равни (x,y):

$$f(x,y)-\lambda\,[(x-x_0)+(y-y_0)]=0\,,$$

$$f(x,y)-\lambda\,[(x-x_0)-(y-y_0)]=0\,.$$

Тако н. пр. једначине растуће гране кривих што пролазе кроз координатни почетак, а чији је лук облика

$$s=(mx+n)\,y-(hx+k)\,,$$

(где су m, n, h, k позитивне константе) увек се могу довести на облик

$$y=\frac{(h+\lambda)\,x+k}{mx+(n-\lambda)}\,,$$

тако, да се за позитивне вредности x те гране увек налазе између двеју хипербола:

$$y=\frac{(h+0{,}7071)\,x+k}{mx+(n-0{,}7071)} \quad \text{и} \quad y=\frac{(h+1)\,x+k}{mx+n-1}\,;$$

и опадајуће гране ће се такође налазити између двеју хипербола које је лако одредити.

Б) Луци кривих у простору. Ако су u, v, w три реалне функције, биће

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2}=\lambda\,(\dot u+\dot v+\dot w)\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\lambda\leqslant 1\,.$$

Означивши са

$$J_1=\int_a^b \dot u\,dx\,,\quad J_2=\int_a^b \dot v\,dx\,,\quad J_3=\int_a^b \dot w\,dx\,,$$

биће

$$J=\int_a^b \sqrt{u^2+v^2+w^2}\,dx=\lambda\,(J_1+J_2+J_3)\,,$$

тако, да ако се за λ узме средина размака у коме се та вредност налази, биће

$$J=0{,}7887\,(J_1+J_2+J_3)$$

са учињеном грешком која не прелази $0{,}2113\,(J_1+J_2+J_3)$.

Када је н. пр. крива у простору дефинисана једначинама $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, где су f и φ растуће функције променљиве x у размаку (a,b) те променљиве, дужина s лука криве у томе размаку биће

$$s=\int_a^b dx\,\sqrt{1+f'^2+\varphi'^2}=\lambda\,[(b-a)+f(b)+\varphi(b)-f(a)-\varphi(a)]\,,$$

а сличан се резултат има и за ма који начин варијације функција f и φ у размаку (a,b).

В) Луци кривих у хиперпростору. За лук једне криве у хиперпростору од n димензија казаћемо да *има монотони ток* према једноме узетом праволиниском и правоуглом координатном систему $Ox_1, \ldots Ox_n$, ако дуж тога лука, идући са једног краја на други, ни једна од координата x_i не мења свој смисао варијација, тако да свака од њих при том или непрестано расте, или непрестано опада.

Ако се са α_k означи јединица, кад јој се прида непромењив знак диференцијала dx_k дуж лука s, биће

$$ds^2 = (\alpha_1\, dx_1)^2 + \ldots + (\alpha_n\, dx_n)^2, \qquad s = \int_{P_0}^{P_1} ds\,,$$

где P_0 и P_1 означују крајње тачке лука s. Према томе је

$$ds = \lambda\,(\alpha_1\, dx_1 + \ldots + \alpha_n\, dx_n)\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$

Ако се са X_k означи коначни прираштај координате x_k при преласку од једнога краја лука на други, из горњих се образаца изводи овај резултат:

Дужина лука s налази се у размаку између

$$(139) \qquad N = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad M = X_1 + \ldots + X_n\,,$$

т. ј.

$$s = \lambda\,(X_1 + \ldots + X_n)\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$

У случајевима кад поједине координате x_i престају имати монотон ток дуж лука s, овај се може поделити на више лукова $s_1, s_2, s_3 \ldots$ таквих, да дуж сваког од њих све координате имају монотон ток. Применивши тада на сваки од лукова s_k горњи резултат, сумирањем добијених размака добио би се размак у коме ће се налазити дужина самог лука s.

Све се то непосредно примењује и на интеграле

$$J = \int_a^b \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2}\, dx\,,$$

где су f_i функције променљиве x. Ако која од њих мења знак у размаку (a, b), тај ће се размак поделити на друге, у којима свака од функција има монотон ток; на такве размаке интеграције применио би се горњи резултат и сабирањем добијених размака за поједине интеграле добио би се размак варијације интеграла J.

Г) Истегљивост лукова са монотоним током. Нека је дат лук s у хиперпростору од n димензија, који има монотон ток према узетом координатном систему $Ox_1 \ldots Ox_n$. До које се мере може тај лук истегнути а да се не промене његове крајње тачке и да не изгуби монотонију свога тока?

Пошто је сваки прираштај X_k координата при преласку од једног краја лука до другог, при таквој деформацији, остао непромењен, нови, деформисани лук s' налазиће се опет у размаку (N, M) датом обрасцем (139). А пошто се и првобитни лук s налази у томе истом размаку, лук s' може бити највише $\sqrt{n}$ пута дужи од лука s, из чега излази овај закључак:

Један лук у простору од n димензија, са утврђеним крајњим тачкама, не може се истегнути више од $\sqrt{n}$ пута, а да при том истезању не изгуби монотонију свога тока.

Та крајња граница истегљивости постигнута је у специјалном случају кад се лук s састављен из сегмента праве

$$\alpha_1 x_1 + a_1 = \alpha_2 x_2 + a_2 = \ldots = \alpha_n x_n + a_n\,, \qquad (a_i = \text{const})$$

деформише тако, да се претвори у испрелamану линију састављену из n праволиниских сегмената паралелних координатним осовинама, а која линија пролази кроз крајеве сегмента s.

Тако, *лук у равни не може се истегнути више од 1,4142... пута, а лук кривих у обичном простору више од 1,7320... пута без губитка монотоније свог тока.* Те су крајње границе достигнуте кад се лук s своди на сегменат праве која гради исти угао са сваком од координатних оса, а деформисани лук s' поклопи са испреламаном линијом, што пролази кроз крајеве лука s, састављеном из праволиниских комада паралелних координатним осама.

Д) Однос између дужине лука и праваца дирака за криве у равни. Нека је s дужина лука једне непрекидне криве између крајњих тачака A и B лука, а l дужина тетиве AB. Може се доказати да:

Синус половине угла који граде међу собом два произ-

вољна правца у равни криве, а која нису паралелна ни једној дирци на кривој дуж лука s, *никад не премаша вредност* $\frac{l}{s}$.

Јер ако се за координатне осе узму две праве паралелне таквим двама правцима што пролазе кроз тачке A и B и ако се са α_1 и α_2 означи јединица, пошто јој се прида знак диференцијала dx и dy, обе су вредности $\alpha_1 dx$ и $\alpha_2 dy$ позитивне дуж лука s. То излази из тога, што, по претпоставци, дуж лука s ниједна дирка није паралелна ни једној ни другој од координатних оса, па према томе сваки од диференцијала dx и dy задржава непромењен знак дуж целог тог лука.

Ако се са ϑ означи угао између две праве узете за координатне осе, лук се s може изразити обрасцем

$$s = \int_A^B \sqrt{(\alpha_1 dx)^2 + (\alpha_2 dy)^2 - 2(\alpha_1 dx)(\alpha_2 dy)\cos\vartheta}\,.$$

А пошто је страна ds елементарног троугла мања од збира осталих двеју страна, то је квадратни корен под знаком интеграла мањи од вредности $\alpha_1 dx + \alpha_2 dy$. Ако су, дакле, $(a, 0)$ и $(0, b)$ координате крајњих тачака A и B, а h дужина

$$h = \alpha_1 a + \alpha_2 b\,,$$

биће

$$s < h\,. \tag{140}$$

Са друге стране, дужина тетиве AB има за израз

$$l = \sqrt{(\alpha_1 a)^2 + (\alpha_2 b)^2 - 2(\alpha_1 a)(\alpha_2 b)\cos\vartheta}\,,$$

а као што је напред показано (стр. 95), израз на десној страни никад нема мању вредност од

$$(\alpha_1 a + \alpha_2 b)\sin\frac{\vartheta}{2}\,,$$

према чему је

$$l > h\sin\frac{\vartheta}{2}\,. \tag{141}$$

Упоређењем неједначина (140) и (141) добија се да је

$$\sin\frac{\vartheta}{2} < \frac{l}{s}\,, \quad \text{т. ј.} \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\lambda l}{s}\,, \qquad 0 \leqslant \lambda < 1\,, \tag{142}$$

што доказује горње тврђење. А томе резултату се може дати и овај облик:

Кад дужина лука није мања од k *пута дужине тетиве, угао између ма која два правца, који нису паралелни ниједној дирци на кривој дуж тога лука, има за синус своје половине једну вредност која не премаша* $\frac{1}{k}$.

Као што се види, сама чињеница да постоје два правца који нису паралелни ни једној дирци на кривој дуж лука s, повлачи собом неједнакост

$$s < \frac{l}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\,, \quad \text{т. ј.} \quad s = \frac{\lambda l}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\,, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\,, \tag{143}$$

где ϑ означује угао између та два правца.

Тако н. пр. кад год постоје два, један на другом управна правца, који нису паралелни ни једној дирци дуж лука s, дужина лука никад не прелази $l\sqrt{2}$.

Приметимо да се горњој граници за лук s, претстављеној десном страном неједначине (143), лук s може у специјалном случају приближити колико се год хоће: то ће бити за криве које се врло мало разликују од двеју страна равнокраког троугла чија је основица дужина l а ϑ угао између тих двеју страна.

XVIII. Површине у простору као бројни размаци.

Као пример за одредбу износа површине у простору у облику бројног размака, навешћемо такву одредбу за *обртне површине*.

Нека је P обртна површина описана обртањем лука s једне криве у равни око једне осовине коју ћемо узети за осу Ox. Означимо

1° са A апсолутну вредност износа равне површине ограничене луком s, обртном осом Ox и ординатама крајњих тачака лука s;

2° са B равну површину која има за износ: *a*) или апсолутну вредност полу-разлике квадрата ордината крајњих тачака лука s (то у случају кад крива има монотон ток дуж целога лука s); b) или збир апсолутних вредности полу-разлика квадрата ордината крајњих тачака лукова на које се може поделити лук s тако, да у сваком од тих крива задржава монотонију тока;

3° са R страну квадрата чија је површина $A+B$.

Тада се може доказати овај резултат:

Износ површине P једнак је износу површине круга полупречника $r=\lambda R$, где је λ један апсолутан број који се за све обртне површине налази у размаку између

$$\sqrt[4]{2}=1{,}1892\ldots \quad \text{и} \quad \sqrt{2}=1{,}4142\ldots$$

Да бисмо то доказали, претпоставимо најпре да крива има монотон ток дуж целог лука s, и нека су (x_0, y_0) и (x_1, y_1) координате крајњих тачака M_0 и M_1 лука. Тада је

$$P=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\, ds=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{(\alpha_1\, dx)^2+(\alpha_2\, dy)^2},$$

где α_1 и α_2 означују јединицу, пошто јој се прида непромењив знак диференцијала dx и dy. Па пошто је

$$\sqrt{(\alpha_1\, dx)^2+(\alpha_2\, dy)^2}=\lambda'\,(\alpha_1\, dx+\alpha_2\, dy), \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\lambda'\leqslant 1,$$

то је

$$P=\lambda'\, 2\pi\left[\alpha_1\int_{x_0}^{x_1} y\, dx+\alpha_2\frac{y_1^2-y_0^2}{2}\right].$$

Према томе, пошто је

$$\alpha_1\int_{x_0}^{x_1} y\, dx=A \quad \text{и} \quad \alpha_2\frac{y_1^2-y_0^2}{2}=B,$$

добија се да је

$$P=\lambda'\, 2\pi\,(A+B)=\pi\,(R\sqrt{2\lambda'})^2=\pi r^2,$$

где је

$$r=\lambda R, \quad \text{са} \quad \lambda=\sqrt{2\lambda'},$$

и према томе

$$\sqrt[4]{2}\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2},$$

чиме је горњи резултат доказан.

Претпоставимо сад да крива ма колико пута мења монотонију свога тока дуж лука s; такав се лук може разделити на лукове (континуалне или испреламане)

$$(144) \qquad M_0M',\quad M'M'',\quad M''M''',\ldots$$

такве да крива у свакоме од њих има монотон ток. Означимо тада:

1° са A', A'', $A'''\ldots$ износе површина A што одговарају луцима (144);

2° са B', B'', $B'''\ldots$ износе равних површина B што одговарају истим луцима;

3° са C', C'', $C'''\ldots$ износе површина описаних обртањем истих лукова око осе Ox.

Тада ће, према овоме што претходи, бити

$$2\pi\frac{A'+B'}{\sqrt{2}}\leqslant P'\leqslant 2\pi\,(A'+B'),$$

$$2\pi\frac{A''+B''}{\sqrt{2}}\leqslant P''\leqslant 2\pi\,(A''+B''),$$

. . . .

а из тог се сабирањем добија

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\sum A^{(i)}+\sum B^{(i)}\right]\leqslant\sum P^{(i)}\leqslant 2\pi\left[\sum A^{(i)}+\sum B^{(i)}\right].$$

Збир $\Sigma A^{(i)}$ једнак је износу целокупне површине A ограничене луком s, осом Ox и ординатама крајњих тачака лука s; збир $\Sigma B^{(i)}$ једнак је износу површине B, који је једнак збиру апсолутних вредности полу-разлика квадрата узастопних ордината на крајевима лукова (144).

Износ целокупне површине

$$P=\Sigma P^{(i)}$$

описане обртањем лука s око Ox, има, дакле, опет за вредност $P=\pi r^2$, тако да горе доказани резултат важи и онда кад крива мења монотонију свога тока дуж лука s ма колико пута.

Отуда општи закључак:

Полупречник r круга, чија је површина једнака износу P обртне површине, увек се налази у размаку између

$$1{,}1892\,R \quad \text{и} \quad 1{,}4142\,R.$$

Ако се за P узме средина тога размака, тако да буде

$$r = 1{,}3017\,R,$$

учињена релативна грешка биће, по апсолутној вредности, мања од $0{,}0864\,R$, т. ј. процентална грешка не достиже 9% ни за коју обртну површину.

Границе тако одређених размака су у исто време и *најуже границе* док се остаје у претпостављеној генералности, јер се њима одређен размак не може сузити, а да се та генералност не изгуби. То се види из тога, што су обе границе одиста достигнуте у појединим случајевима.

Тако, граница $\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. ј. граница $\lambda = \sqrt[4]{2}$, достигнута је у случају кад је обртна површина један обртни конус чије генератрисе заклапају са обртном осовином угао од 45^0. Јер тада је (померивши за колико је потребно теме конуса дуж осе Ox) $Oy = x$ и према томе је

$$A = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} = \frac{y_1^2 - y_0^2}{2} = B,$$

тако да је

$$P = \lambda' \,.\, 4\pi B = \lambda' \,.\, 4\pi\,(y_1 - y_0)\,\frac{y_1 + y_0}{2} = \lambda' \,.\, 4\pi\,(x_1 - x_0)\,\frac{y_1 + y_0}{2};$$

ако се, дакле, са h означи висина, а са d средњи пречник посматраног зарубљеног конуса, биће

$$P = \lambda' \,.\, 4\pi h d,$$

а према чему би полупречник r имао за вредност

$$(145) \qquad r = 2\sqrt{\lambda'} \,.\, \sqrt{hd}.$$

Међутим тачна је вредност

$$P = 2\pi s\,\frac{y_1 + y_0}{2} = 2\pi \,.\, \sqrt{2}\,(y_1 - y_0)\,\frac{y_1 + y_0}{2} = 2\pi \,.\, \sqrt{2}\,hd,$$

према чему је тачна вредност полупречника r

$$(146) \qquad r = \sqrt[4]{8} \,.\, \sqrt{hd}.$$

Упоређењем вредности (145) и (146) добија се да је

$$2\sqrt{\lambda'} = \sqrt[4]{8},$$

из чега се види да је

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{т. ј.} \quad \lambda = \sqrt[4]{2}.$$

Тако је исто достигнута и граница $\lambda' = 1$, т. ј. $\lambda = \sqrt{2}$, и то у случају кад је обртна површина једна обртна цилиндарска површина. Означивши тада са ϱ полупречник основице цилиндра, а са h његову висину, биће

$$A = \varrho\,(x_1 - x_0) = \varrho h, \quad B = 0,$$

тако да је

$$(147) \qquad r = \sqrt{2\lambda'} \,.\, \sqrt{\varrho h}.$$

Међутим тачна је вредност

$$P = 2\pi \,.\, \varrho h,$$

према чему је

$$(148) \qquad r = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\varrho h}.$$

Упоређењем вредности (147) и (148) добија се да је

$$\sqrt{2\lambda'} = \sqrt{2},$$

према чему је

$$\lambda' = 1 \quad \text{т. ј.} \quad \lambda = \sqrt{2}.$$

I. пример: Обртна површина описана обртањем кружног квадранта полупречника ϱ око његовог полупречника (узетог за осу Ox). Тада је

$$A = \frac{\pi \varrho^2}{4}, \quad B = \frac{\varrho^2}{2},$$

тако да је

$$R = \sqrt{A + B} = \alpha \varrho,$$

где је α апсолутни број

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} = 1{,}1337\ \ldots$$

Према томе је

$$r = \lambda R = \mu \,.\, \varrho\,,$$

где је μ један апсолутан број који се налази у размаку између

$$\alpha \sqrt[4]{2} = 1{,}3482\ \ldots \quad \text{и} \quad \alpha\sqrt{2} = 1{,}6033\ \ldots$$

Ако се, дакле, за μ узме средина тога размака, тако да буде

(149) $$r = 1{,}4758\, \varrho\,,$$

учињена грешка, према горњем општем резултату, неће премашати $9^0/_0$. И одиста, пошто је тачна вредност

(150) $$r = \varrho\sqrt{2} = 1{,}4142\,\varrho\,,$$

грешка која се чини кад се узме вредност (149) за (150) износи $4{,}1^0/_0$.

II. пример: Обртна површина описана обртањем квадранта елипсе, чије су полуосе a и b, око a (узете за осу Ox). Тада је

$$A = \frac{\pi ab}{4}\,, \quad B = \frac{b^2}{2}\,,$$

тако да је

$$R = \sqrt{A+B} = b\sqrt{\frac{\pi a}{4b} + \frac{1}{2}}\,.$$

Према томе је

$$r = \lambda R = \lambda b \sqrt{\frac{\pi a}{4b} + \frac{1}{2}}\,,$$

тако да полупречник круга који има исту површину као и посматрани полу-елипсоид, лежи у размаку између

$$1{,}1892\, R \quad \text{и} \quad 1{,}4142\, R\,.$$

Кад је $a = b$, ови се обрасци своде на оне што важе за полукуглу.

XIX. Разне класе одређених интеграла као бројни размаци.

А) Интеграл производа. Поред напред наведеног обрасца, који даје интеграл продукта у облику бројног размака (обична теорема средњих вредности) и који претпоставља да један од чинилаца продукта не мења знак у размаку интеграције, доказаћемо још један образац за исти задатак, али који не претпоставља да је задовољен поменути услов.

Нека су u и v ма какве функције промењљиве x, реалне у размаку (a, b) те промењљиве. Из идентичности

$$uv = \frac{1}{2}(u^2+v^2) - \frac{1}{2}(u-v)^2$$

добија се да је

$$J = \int_a^b uv\,dx = V - \delta\,, \qquad (b > a)\,,$$

где је

$$V = \frac{1}{2}\int_a^b u^2 dx + \frac{1}{2}\int_a^b v^2 dx\,,$$

(151) $$\delta = \frac{1}{2}\int_a^b (u-v)^2\,dx\,.$$

Ако се са N и M означе једна горња граница позитивне вредности $(u-v)^2$, вредност δ ће се налазити у размаку између

$$\frac{b-a}{2}N^2 \quad \text{и} \quad \frac{b-a}{2}M^2$$

и према томе *вредност интеграла J ће се налазити у размаку између*

$$V - \frac{b-a}{2}M^2 \quad \text{и} \quad V - \frac{b-a}{2}N^2,$$

тако да је

(152) $$J = V - \frac{b-a}{2}M^2 + \vartheta\,\frac{b-a}{2}(M^2 - N^2)\,.$$

Интерес овога обрасца лежи у томе, што се помоћу њега интеграл J разлаже на два, од којих један зависи само од u, а други само од v, са једним корективним чланом који је у толико мањи, у колико је мања разлика између u и v у размаку интеграције. Осим тога, образац не претпоставља о функцијама u и v ништа друго осим реалност у размаку интеграције и услов да горњи интеграли имају коначне и одређене вредности.

Тако исто, из идентичности

$$uv = \frac{1}{4}(u+v)^2 = \frac{1}{4}(u-v)^2$$

добија се да је

$$J = \int_a^b uv\,dx = W - \frac{\delta}{2},$$

где је

$$W = \frac{1}{4}\int_a^b (u+v)^2\,dx,$$

а δ је дато обрасцем (151). *Вредност интеграла J налази се, дакле, у размаку између*

$$W - \frac{b-a}{4}M^2 \quad \text{и} \quad W - \frac{b-a}{4}N^2;$$

тако да је

$$J = W - \frac{b-a}{4}M^2 + \vartheta\,.\,\frac{b-a}{4}(M^2 - N^2)\,. \tag{153}$$

Интерес обрасца је у томе што се помоћу њега интеграл J изражава помоћу интеграла квадрата збира функција u и v; са једним корективним чланом који је два пута мањи од онога у обрасцу (152), а у толико је мањи у колико се u и v мање разликују у размаку интеграције. Образац (153) не претпоставља о функцијама u и v ништа друго до оно што претпоставља и образац (152).

Ма какве биле функције u и v, интеграбилне у размаку интеграције (a, b), може се за интеграл продукта имати једна горња граница која доводи до закључака од интереса, како при израчунавању разноврсних одређених интеграла, тако и за доказивање разних резултата у математичкој анализи. Уочимо одређени интеграл

$$J = \int_a^b (u + \lambda v)^2\,dx,$$

(где је λ промењљив параметар) који има све своје елементе позитивне и према томе не може бити једнак нули ни за какву реалну вредност λ. Пошто се он може написати у облику

$$J = \int_a^b u^2 dx + 2\lambda \int_a^b uv\,dx + \lambda^2 \int_a^b v^2 dx,$$

та је чињеница изражена неједначином

$$\left(\int_a^b u^2 dx\right)\left(\int_a^b v^2 dx\right) - \left(\int_a^b uv\,dx\right)^2 > 0,$$

према чему је

$$\left(\int_a^b uv\,dx\right)^2 < \left(\int_a^b u^2\,dx\right)\left(\int_a^b v^2\,dx\right),$$

што се назива *Schwarz-овом интегралном неједначином*.

Кад су u и v још и позитивне функције у размаку (a, b), може се, дакле, написати да је

$$\int_a^b uv\,.\,dx = \vartheta \sqrt{\left(\int_a^b u^2\,dx\right)\left(\int_a^b v^2\,dx\right)}\,.$$

Б) Интеграл уопштеног биномног диференцијала. Нека су u, v, w три функције позитивне у размаку интеграције (a, b), па уочимо одређени интеграл

$$J = \int_a^b w\,(u^m + v^m)^p\,dx,$$

где су m, p произвољни реални стални бројеви. Према раније доказаноме резултату, вредност количника

$$(154) \qquad \varrho = \frac{(u^m + v^m)^p}{u^{mp} + v^{mp}}$$

увек се налази у размаку Δ између вредности 1 и 2^{p-1}; границе тога размака су достигнуте у случају кад је $u = v$, или кад је једна од количина u и v једнака нули.

Према томе је

$$(155) \qquad J = \lambda \left[\int_a^b w u^{mp} dx + \int_a^b w v^{mp} dx \right],$$

где је λ један број који се налази у размаку Δ.

Узевши да је $p = \frac{1}{m}$, добија се образац

$$(156) \qquad \int_a^b w \sqrt[m]{u^m + v^m}\, dx = \lambda \left(\int_a^b uw\, dx + \int_a^b vw\, dx \right),$$

а узевши да је $m = -\frac{1}{p}$, добија се

$$(157) \qquad \int_a^b \frac{w\, dx}{\sqrt[m]{u^m + v^m}} = \lambda \left(\int_a^b \frac{w}{u}\, dx + \int_a^b \frac{w}{v}\, dx \right).$$

В) Интеграл квадрата збира или разлике. Из идентичности

$$(u \pm v)^2 = u^2 + v^2 \pm 2uv$$

добија се да је

$$\int_a^b (u+v)^2\, dx = U^2 + V^2 \pm 2 \int_a^b uv\, dx,$$

где је

$$U^2 = \int_a^b u^2 dx, \quad V^2 = \int_a^b v^2 dx.$$

Кад су u и v интеграбилне и позитивне функције у размаку (a, b), биће као што је малочас показано

$$\int_a^b uv\, dx = \vartheta \,.\, UV \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

што доводи до образаца

$$\int_a^b (u+v)^2\, dx = U^2 + V^2 + 2\vartheta \,.\, U \,.\, V,$$

$$\int_a^b (u-v)^2\, dx = U^2 + V^2 - 2\vartheta \,.\, U \,.\, V.$$

Ти обрасци претпостављају само интеграбилност посматраних функција и услов да су обе функције u и v позитивне у размаку интеграције (a, b). Нађени размаци за интеграле квадрата збира или квадрата разлике, изражени истим обрасцима, су *најужи* могући размаци за те интеграле док се остаје у претпостављеној генералности, јер осцилација $2\vartheta \,.\, UV$ одиста достиже своју највећу могућу вредност $2UV$ у случају кад је $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Обрасци су од интереса стога што дају за посматрани интеграл један размак чије границе поједини интеграли исте врсте стварно и достижу, а те се границе израчунавају помоћу два интеграла U и V од којих један зависи само од u, а други само од v.

У случају $m = 2$ број λ у обрасцу (156) налази се у размаку између $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$ и 1.

У случају *елиптичких* и *хиперелиптичких* интеграла, ти обрасци изражавају вредност интеграла у облику размака чије се границе добијају као интеграли *рационалних* функција.

Исти начин одређивања интегралног размака примењује се и на интеграле облика

$$(158) \qquad J_m = \int_a^b w \,.\, \log\,(u^m + v^m)\, dx$$

за функције u, v, w позитивне у размаку (a, b). Из тога што се вредност количника (154) увек налази у размаку између 1 и 2^{p-1}, закључује се да је за ма коју вредност броја p

$$\text{(159)} \qquad \log(u^m + v^m) = \frac{1}{p}\log(u^{mp} + v^{mp}) + \vartheta \cdot \frac{p-1}{p}\log 2\,,$$

$$\log(u^{mp} + v^{mp}) = p\log(u^m + v^m) - (p-1)\log 2\,.$$

Према томе је

$$\text{(160)} \qquad J_m = \frac{1}{p} J_{mp} + \vartheta\,\frac{p-1}{p}\log 2\int_a^b w\,dx\,,$$

$$\text{(161)} \qquad J_{mp} = p\,J_m - \vartheta\,(p-1)\log 2\int_a^b w\,dx\,.$$

Кад се у једначини (160) узме $p = \frac{1}{m}$, добија се

$$\int_a^b w\,.\log(u^m + v^m)\,dx =$$

$$= m\int_a^b w\,.\log(u+v)\,dx + \vartheta\,(1-m)\log 2\int_a^b w\,dx\,,$$

а применом тога на Jensen-ов интеграл

$$\int_a^{2\pi} \log_{(e)}\sqrt{u^2+v^2}\,dx$$

који игра важну улогу у теорији функција комплексне променљиве количине, добија се тај резултат, *да се разлика између њега и интеграла* $\int_0^{2\pi}\log(\dot{u}+\dot{v})\,dx$ *увек налази у размаку између*

$$-\frac{1}{2}\log 2 = -0{,}3462\ldots \quad \text{и} \quad \text{нуле}.$$

Г) Интеграл монотоно опадајуће функције. Нека је $f(x)$ једна функција која монотоно опада до нуле кад x расте од 0 до ∞, па уочимо интеграл

$$J_n = \int_0^n f(x)\,dx\,,$$

где је n цео позитиван број. Пошто је

$$\text{(162)} \qquad J_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n f(x)\,dx\,,$$

а функција $f(x)$ монотоно опада, биће за сваки број k у размаку $(1, n)$ и за сваку вредност x у размаку $(k-1, k)$

$$f(x) < f(k-1)\,,$$

па, дакле, такође и

$$\int_{k-1}^k f(x)\,dx < f(k-1),$$

према чему је

$$\text{(163)} \qquad J_n < f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1)\,.$$

Са друге стране, пошто је у исто време и

$$f(x) > f(k)\,,$$

биће такође и

$$\int_{k-1}^k f(x)\,dx > f(k)\,,$$

према чему је

$$\text{(164)} \qquad J_n > f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n)\,.$$

Ако се, дакле, стави да је

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n) = F(n)\,,$$

неједначине (163) и (164) показују да *се вредност интеграла J_n налази у размаку између*

$$F(n)-f(0) \quad \text{и} \quad F(n)-f(n)$$

тако да је

$$(165) \qquad J_n = \int_0^n f(x)\,dx = F(n)-f(0)+\vartheta\,[f(0)-f(a)]\,.$$

Границе размака у коме ће се налазити интеграл J_n могу се, дакле, одредити сумирањем коначнога реда чији је општи члан $f(k)$. Кад се пусти да n бескрајно расте, $f(n)$ тежи нули, а $F(n)$ постаје збир S бескрајног реда

$$(166) \qquad S = f(0)+f(1)+f(2)+\ldots\,;$$

образац (165) постаје

$$(167) \quad \int_0^\infty f(x)\,dx = S-f(0)+\vartheta\,.\,f(0) = S-\vartheta'\,.\,f(0), \qquad 0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1$$

и вредност интеграла налазиће се у размаку између $S-f(0)$ и S.

Образац (167) даје непосредан доказ Cauchy-ове теореме: *интеграл (167) и збир реда (166) или су обоје коначни, или су обоје бескрајни;* један од њих не може бити коначан а да и други то не буде.

У случају кад је $\varphi(0)=\infty$, треба на место интеграла J посматрати интеграл у коме је на место доње интегралне границе 0 узета граница 1; ако је $\varphi(1)=\infty$, треба за доњу границу узети 2 и т. д.. Тако н. пр. вредност интеграла

$$J_n = \int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}$$

налази се у размаку $(S-1, S)$, где је

$$S = \frac{1}{1^k}+\frac{2}{2^k}+\frac{3}{3^k}+\ldots$$

Интеграл J и збир S су обоје коначни за $k>1$. Интеграл

$$J = \int_2^\infty \frac{dx}{x\log x} = \log\log\infty - \log\log 2$$

и збир реда

$$S = \frac{1}{2\,.\,\log 2}+\frac{1}{3\,.\,\log 3}+\frac{1}{4\,.\,\log 4}+\ldots$$

су обоје бескрајни.

Д) Интеграл алгебарске функције другога реда. Уочимо интеграл

$$J = \int_a^b y\,dx,$$

где је y функција променљиве x одређена квадратном једначином

$$y^2+f(x)\,y+\varphi(x)=0$$

и где је размак интеграла (a, b) такав, да су у њему обе функције

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \quad \text{и} \quad f(x)-\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

коначне, одређене и позитивне. Према ономе што је напред показано за корене квадратне једначине, апсолутна вредност функције y може се написати у облику

$$y = \frac{\varphi}{f}+\vartheta\left(f-\frac{\varphi}{f}\right) \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

према чему ће бити

$$J = \int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx+\vartheta\left(\int_a^b f\,dx-\int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx\right)$$

тако *да ће се интеграл* J *налазити између*

$$\int_a^b f\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \frac{\varphi}{f}\,dx\,.$$

Интерес резултата лежи у томе што се границе интеграла, у коме функције под интегралним знаком *стоје под квадратним кореном*, одређују као размаци чији су крајеви интеграли без *тих квадратних корена.*

Сличан се резултат добија и за интеграле алгебарских функција m-тог реда, помоћу напред наведене теореме о размаку који садржи апсолутне вредности свих реалних корена дате алгебарске једначине m-тог степена.

Ђ) Једна класа одређених интеграла. На одређене интеграле облика

$$J(x) = \int_a^b u e^{vx} dt,$$

где су u и v дате функције интеграционе променљиве t, наилази се, као на рачунске елементе, у разноврсним проблемима математичке анализе.

Кад је размак интеграције (a, b) коначан, а u и v коначне и непрекидне функције у томе размаку, сваки такав интеграл $J(x)$ претставља по једну функцију променљиве x холоморфну у целој равни те променљиве. Та се функција може развити у ред

$$J(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

конвергентан у целој равни x, а где ће бити

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_a^b u v^n \, dt.$$

Конвергенција се лако доказује поделивши размак интеграције (a, b) на под-размаке такве да у свакоме од њих функција u задржава један исти знак. Ако је (α, β) такав један подразмак, биће по апсолутној вредности, а према обичној теореми за средње вредности одређених интеграла,

$$\int_\alpha^\beta u v^n \, dt = R^n \int_\alpha^\beta u \, dt,$$

где је R једна вредност која се налази између најмање и највеће вредности функције v у томе размаку. Групишући такве интеграле за све под-размаке у размаку (a, b), добија се за

a_n један израз који показује да је по апсолутној вредности

$$a_n < \frac{AM^n}{n!},$$

где су A и M независни од n, а што доказује конвергенцију реда.

Ма какав био знак функције u у размаку (a, b), пошто e^{vx} задржава непроменљив знак у томе размаку, теорема средњих вредности показује *да се за ма коју реалну вредност x, вредност интеграла налази у размаку између*

$$(1.68) \qquad N \int_a^b e^{v_1 x} dt \quad \text{и} \quad M \int_a^b e^{v_2 x} dt,$$

где су v_1 и v_2 две ма какве функције између којих се за t у (a, b) налази вредност функције v; N и M су предњи и задњи крај једнога, ма кога, размака у коме се налази вредност функције u за вредности t у размаку (a, b). Могу се н. пр. за N и M узети најмања и највећа вредност коју добија функција u за вредности t у размаку (a, b). Тако се исто за v_1 и v_2 може узети најмања и највећа вредност Q и P коју добија функција v за t у размаку (a, b); *размак функције $J(x)$ је тада онај између вредности*

$$Pe^{Nx} \quad \text{и} \quad Qe^{Mx}$$

или између

$$Pe^{Mx} \quad \text{и} \quad Qe^{Nx}$$

према знаку посматраних вредности x.

Један, по кашто ужи, па дакле и пробитачнији, размак за вредности функције $J(x)$, добија се применом Schwarz-ове интегралне неједначине

$$\left(\int \varphi\psi \, dt\right)^2 < \left(\int \varphi^2 \, dt\right)\left(\int \psi^2 \, dt\right)$$

која, као што је казано, важи за ма какве интеграбилне функције φ и ψ променљиве t. Ако се стави да је

$$\varphi = u, \quad \psi = e^{vx}$$

добија се

$$J^2(x) < H\int_a^b e^{2\nu x}\,dt\,,$$

где је H константа

$$H = \int_a^b u^2\,dt\,.$$

Ако је, дакле, $\lambda(x)$ тачна вредност, или једна горња граница интеграла

$$\int_a^b e^{2\nu x}\,dx\,,$$

задњи се крај размака (168) за функцију $J(x)$ *може сменити вредношћу* $\sqrt{H\lambda(x)}$ што је од интереса кад је та вредност мања од вредности

$$M\int_a^b e^{\nu_2 x}\,dx\,,$$

јер је тада размак функције $J(x)$ ужи од размака (168).

Из обрасца

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \int_a^b u\nu^k e^{\nu x}\,dx$$

у коме су изводи функције J изражени интегралима истога типа као и сама функција J, добијају се на исти начин и размаци у којима ће се налазити вредности тих извода за посматране вредности x.

Као пример, одредићемо такве размаке за вредности функције

$$J(x) = \int_0^1 e^{\nu x}\,dx\,,$$

где је $\nu = t\log\frac{1}{t}$. Та се функција поклапа са једном трансцендентом на коју се наилази у многобројним општијим аналитичким проблемима и која је претстављена редом

$$\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{256} + \ldots$$

Пошто функција ν, за време док t расте од 0 до 1, и сама почиње расти од нуле, достиже свој максимум чија је вредност

$$\frac{1}{e} = 0{,}36788\ldots$$

па затим опада до нуле, биће према теореми средњих вредности

$$J(x) < e^{\frac{x}{e}} \quad \text{за} \quad x > 0\,,$$

$$J(x) > e^{\frac{x}{e}} \quad \text{за} \quad x < 0\,.$$

Вредност $J(x)$ налази се, дакле, увек у размаку између 1 и $e^{\frac{x}{e}}$, тако да је

$$J(x) = 1 + \vartheta\,(e^{\frac{x}{e}} - 1) \quad \text{за} \quad x > 0,$$

$$J(x) = e^{\frac{x}{e}} + \vartheta\,(1 - e^{\frac{x}{e}}) \quad \text{за} \quad x < 0.$$

Међутим за позитивне вредности x могу се за $J(x)$ одредити и ужи размаци на овај начин:

Из двогубе неједначине

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

која вреди за све целе бројеве $n \geqslant 5$, налази се да је за такве вредности

(169) $$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Ако се стави да је

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^n}\,,$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} + \ldots$$

тако да је

(170) $$J(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

према неједначини (169) биће за $n \geqslant 5$

(171) $$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k < R_n(x) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

Међутим, бескрајни збирови, који фигуришу на левој и десној страни неједначине (171), нису ништа друго до остаци редова

(172) $$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{e}\right)^k = e^{\frac{x}{e}},$$

(173) $$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k = e^{\frac{x}{2}}.$$

Применом познатог правила да остатак једнога реда

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

има за вредност

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\vartheta x) \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

налази се да ће остатак реда (172) бити

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{\vartheta x}{e}}}{e^{2(n+1)}},$$

а остатак реда (173)

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{\vartheta' x}{e}}}{2^{2(n+1)}},$$

где су ϑ и ϑ' два броја који се налазе у размаку (0, 1).

Неједначина (171) тада доводи до овог резултата:

За све позитивне вредности x и ма колики био цео број $n \geqslant 5$, биће

$$J(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где се $R_n(x)$ увек налази у размаку између вредности

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{e^{2(n+1)}} \quad \text{и} \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{e^{\frac{x}{e}}}{4^{n+1}}.$$

Ако се узме $n = 5$, добија се на тај начин да је

$$J(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{27} + \frac{x^3}{256} + \frac{x^4}{3125} + R_n(x),$$

где се $R_n(x)$ увек налази у размаку између вредности

$$Ax^6 \quad \text{и} \quad Bx^6 e^{\frac{x}{e}},$$

где су A и B константе

$$A = \frac{1}{6!\, e^{12}} = 8534 \,.\, 10^{-12},$$

$$B = \frac{1}{6!\, 2^{12}} = 339084 \,.\, 10^{-12}.$$

На сличан се начин, помоћу обрасца

$$\frac{d^k J(x)}{dx^k} = \int_0^1 v^k e^{vx}\, dx$$

могу одредити и размаци између којих ће се налазити вредности извода функције $J(x)$.

Из обрасца

$$J(x) = \int_0^1 e^{vx}\, dt, \qquad v = t \log \frac{1}{t},$$

пошто функција v остаје непрестано позитивна између интегралних граница 0 и 1, види се у исто време да:

1° кад x бескрајно расти у правцу $+\infty$, функција $J(x)$ бескрајно расти;

2° кад x бескрајно расти у правцу $-\infty$, функција $J(x)$ тежи нули.

Према горњем интегралном обрасцу за n-ти извод функције $J(x)$, то исто важи и за све изводе те функције.

Крива линија $y = J(x)$ има, квалитативно, исти облик као експоненцијална крива линија $y = e^x$. Она има осу Ox као асимптоту за $x = -\infty$; док x расти од $-\infty$ до $+\infty$, она непрестано расти од нуле до $+\infty$, немајући при томе ни максимума, ни минимума, ни превојних тачака и секући осу Oy у тачки $y=1$.

На функције се облика $J(x)$ наилази н. пр. при одредби износа површине од $x=0$ до $x=1$, ограничене осом Ox и луком ма које интегралне криве линеарне диференцијалне једначине ма кога реда, која се трансформацијом

$$t \log t = z$$

интеграционе променљиве t своди на линеарну једначину са сталним коефицијентима.

Исте се функције употребљавају у разноврсним проблемима математичке анализе, као *компаративни елементи* за разне друге класе функција, које се са њима упоређују, па се из тих упоређења сазнају поједине особине тих класа функција.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

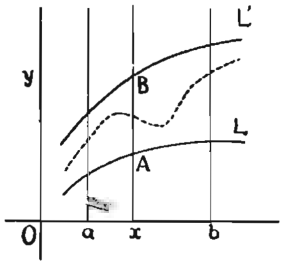
Бројни размаци за интеграле диференцијалних једначина.

XX. Међусобно упоређивање диференцијалних једначина.

Поред доста великог броја диференцијалних једначина које се могу интегралити помоћу квадратура, или помоћу познатих комбинација њихових коефицијената, постоји непрегледан и од првога бескрајно већи број једначина које се не могу интегралити у таквоме облику. Та немогућност или је *апсолутна*, т. ј. интеграл је уопште неизражљив на поменути начин, или је *привремена*, т. ј. долази од тога што се за данас нема метода за такву интеграцију. Међутим, и у једном и у другом случају постоје методе за интеграцију помоћу бескрајних редова, конвергентних у одређеним размацима независно променљиве количине; такве методе дају могућност да се интеграл $y(x)$, који за једну дату почетну вредност $x=x_0$ има дату вредност $y=y_0$, израчуна и за сваку другу вредност x садржану у размаку конвергенције добијеног реда.

Али, било да је тачна интеграција могућна или немогућна, постоје методе за *одређивање интеграла у облику размака*, тако да се за сваку вредност x садржану у једноме размаку

(a, b) може одредити одговарајући размак (A, B) у коме ће се насигурно налазити вредност уоченог интеграла дате диференцијалне једначине. Такав је размак, као што се види, променљив, јер се он мења од једне вредности x до друге. Кад се x поступно мења у размаку (a, b), крајеви A и B *интегралног размака* (A, B) описују по једну линију у равни xOy: то су *граничне линије* интеграла y у томе размаку променљиве x, и то *доња* и *горња* гранична линија L и L'.



Одређивање интеграла у облику размака састоји се у одређивању горње и доње граничне линије интеграла. Кад су ове одређене, интегрални размак (A, B) за једну дату вредност x, имаће се као отсечак (сегмент) праве која пролази кроз тачку $(x, 0)$ и која је паралелна осовини Oy.

За одређивање граничних линија интеграла постоје разне методе. Већина је од њих основана на *међусобном упоређивању диференцијалних једначина* у овоме смислу: кад је дата једначина

$$f(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \tag{174}$$

и кад су дате почетне вредности x_0, y_0, где је вредност x садржана у датоме размаку (a, b) променљиве x, нађу се две једначине

$$\begin{aligned} f_1(x, u, u', u'', \ldots) &= 0, \\ f_2(x, v, v', v'', \ldots) &= 0, \end{aligned} \tag{175}$$

које задовољавају ове захтеве:

1^0 да се могу одредити њихови интеграли u и v који за $x = x_0$ добијају вредности $u = y_0$, $v = y_0$;

2^0 да се за све вредности x у размаку (a, b) може доказати двострука неједнакост

$$u \leqslant y \leqslant v .$$

Криве у равни xOy, које претстављају такве интеграле u и v, биће граничне линије интеграла y; једначине (175) играју тада улогу *компаративних једначина* за дату диференцијалну једначину (174). Кад су нађене такве две једначине и њихови

интеграли u и v, интеграл y једначине (174) биће дат у облику размака обрасцем

$$y = u + \vartheta\,(v - u), \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1 .$$

У овоме, што сада долази, биће изложено неколико метода за одређивање компаративних једначина и граничних линија за интеграле дате диференцијалне једначине. Те су методе од нарочите користи у случајевима кад се диференцијална једначина не може ни тачно, ни приближно интегралити, па је корисно сазнати бар то, у коме се размаку налази вредност њеног интеграла за дату вредност променљиве x.

XXI. Прва метода.

Нека су

$$y' = F(x, y), \tag{176}$$

$$u' = F_1(x, u), \tag{177}$$

$$v' = F_2(x, v). \tag{178}$$

три диференцијалне једначине првога реда. Функције двеју променљивих x и y

$$F(x, y) - F_1(x, y), \tag{179}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y), \tag{180}$$

имаће, у равни xOy, свака своју позитивну и негативну област. Означимо са:

Δ_1 и Δ_2 позитивну и негативну област функције (179);

Ω_1 и Ω_2 позитивну и негативну област функције (180);

$D_1, D_2, \ldots$ линије које ограничавају те области;

$E_1, E_2, \ldots$ линије које претстављају геометриска места сингуларитета функција F, F_1, F_2;

Π део равни који је заједнички за један пар области Δ и Ω супротно означених, н. пр. за области Δ_1 и Ω_2.

Нека је $M_0(x_0, y_0)$ једна тачка која не припада ни једној од линија D ни E, а која се налази у области Π.

Напослетку, нека су y, u, v интеграли једначина (176), (177), (178), који за $x = x_0$ имају заједничку вредност

$$y = y_0\,, \quad u = y_0\,, \quad v = y_0\,.$$

Тада ће, са једне и друге стране тачке $(x_0, 0)$, постојати на оси Ox један размак чије пространство није нула, н. пр. размак

(181) $$\text{од} \quad x_0 - h_1 \quad \text{до} \quad x_0 + h_2\,,$$

(где су h_1 и h_2 два позитивна броја) који ће испуњавати ове услове:

α) док се x мења у размаку (181), интеграли u и v једначина (177) и (178), као и њихови први изводи, су одређени, коначни и непрекидни;

β) контура Γ састављена од кривих u, v и двеју правих

$$x = x_0 - h_1 \quad \text{и} \quad x = x_0 + h_2$$

садржана је у области Π и она не обухвата ни један део кривих D ни E, нити се са којом од ових сече.

Тада се може доказати овај резултат:

Кад се x мења у размаку (181), интеграл у једначине (176) биће коначан и непрекидан, а налазиће се непрестано у размаку између одговарајућих вредности интеграла u и v једначина (177) и (178), т. ј. интеграла који за $x = x_0$ добијају вредност y_0.

Јер, пошто се тачка M_0 налази у области Π, биће за ту тачку

(182) $$F(x, y) - F_1(x, y) > 0\,, \qquad F(x, y) - F_2(x, y) < 0$$

и према томе

(183) $$\frac{d}{dx}(y - u) > 0, \qquad \frac{d}{dx}(y - v) < 0.$$

Са друге стране је за $x = x_0$

(184) $$y - u = 0\,, \quad y - v = 0\,,$$

па дакле

(185) $$v < y < u \quad \text{за} \quad x = x_0 - \varepsilon\,, \qquad u < y < v \quad \text{за} \quad x = x_0 + \varepsilon\,,$$

где је ε довољно мали позитиван број.

Горње тврђење, дакле, насигурно важи за један довољно узак размак са једне и друге стране вредности x_0; ми ћемо сад доказати да он важи и за све вредности x у размаку (181). Тога ради приметимо да би он тек онда могао да престане важити, кад би наступио један или други од ова два случаја:

а) или да крива y пресече једну од кривих u или v у једној тачки чија се апсциса налази у размаку (181);

б) или да за једну вредност $x = \alpha$, садржану у размаку (181), и за једну вредност $y = \beta$ садржану у размаку између $u(\alpha)$ и $u(\beta)$, извод $\dfrac{dy}{dx}$, па дакле и функција $F(x, y)$, постане било бескрајна, било неодређена, или да промени детерминацију.

Случај *а*) не може наступити, јер кад би $x = \gamma$, $y = \delta$ биле координате једне заједничке тачке M, н. пр. кривих y и u која је, међу осталим заједничким тачкама (ако их има) најближа тачки M_0, то, пошто се тачка M налази на самој контури Γ, а ова је садржана у области Π, морало би за ту тачку M бити

$$F(x, y) - F_1(x, y) > 0$$

и према томе

$$\frac{d}{dx}(y - u) > 0\,,$$

а уз то и

$$y - u = 0\,.$$

Према томе би морало бити

(186) $$y < u \quad \text{за} \quad x = \gamma - \varepsilon\,, \qquad y > u \quad \text{за} \quad x = \gamma + \varepsilon\,,$$

а то је у супротности са неједначинама (185), јер упоредивши међу собом неједначине (185) и (186) види се да би разлика $y - u$ при преласку од тачке M_0 на тачку M морала променити знак, што је немогуће пошто, између тих двеју тачака, та разлика не постаје једнака нули.

Случај *б*) такође не може наступити, јер се ни једна тачка кривих E не налази ни у контури Γ ни на њој самој; извод $\dfrac{dy}{dx}$ је, дакле, одређен, коначан и непрекидан за све вредности

α садржане у размаку (181) и за све вредности β садржане у размаку између $u(\alpha)$ и $u(\beta)$; он за њих не мења ни детерминацију.

Горње тврђење је тиме доказано и оно важи за цео размак (181), и то тако да је

$$v < y < u \quad \text{у размаку} \quad \text{од} \quad x_0 - h_1 \quad \text{до} \quad x_0,$$
$$u < y < v \quad \text{у размаку} \quad \text{од} \quad x_0 \quad \text{до} \quad x_0 + h_2.$$

Кад би се тачка M_0 налазила у заједничком делу области Δ_2 и Ω_1, све досадашње неједначине промениле би смисао, а резултат би остао исти, тако да се може сматрати као доказан овај општи резултат:

Кад год се тачка (x_0, y_0) налази у заједничком делу двеју области Δ_i, Ω_k, где је један од индекса i или k паран, а други непаран, интеграл y, који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, биће коначан, непрекидан и садржан у размаку између u и v за све вредности x у размаку (181).

Приметимо да за сваку диференцијалну једначину (176)

$$y' = F(x, y)$$

и за сваки пар (x_0, y_0) почетних вредности (остављајући на страну изузетне напред поменуте парове) постоји такав размак (181) чије пространство није нула. *За сваку, дакле, једначину (176) и за сваки пар вредности (x_0, y_0) може се одредити један размак који ће насигурно садржати интеграл y за све вредности x садржане у једноме размаку (181) око вредности x_0.* У појединим случајевима размак (181), који се никад не своди на нулу, може обухватати и све вредности x од 0 до $+\infty$. или од $-\infty$ до $+\infty$.

Једначине (177) и (178) играју улогу компаративних једначина за једначину (176), а u и v дају граничне линије за интеграл y.

Пример: применимо то на Riccati-еву једначину

$$y' = y^2 + f(x), \tag{187}$$

где се претпоставља да функција $f(x)$ нема никакав реалан сингуларитет (н. пр. да је она какав полином по x).

Уочимо најпре случај кад је вредност $f(x_0)$ позитивна; тада постоји један размак (α_1, α_2) вредности x, који обухвата

вредност x_0 и у коме ће функција $f(x)$ бити непрестано позитивна.

Означимо са N и M предњи и задњи крај једнога размака који обухвата вредности $f(x)$, док се x мења у размаку (α_1, α_2), па узмимо за компаративне једначине (177) и (178), једначине

$$\begin{aligned} u' &= u^2 + N, \\ v' &= v^2 + M. \end{aligned} \tag{188}$$

Функције (179) и (180) ће бити

$$f(x) - N, \quad f(x) - M, \tag{189}$$

а области се Δ_1 и Ω_2 поклапају са делом равни xOy између правих $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$; тај део равни претставља у исто време и заједничку им област Π.

Интеграли u и v компаративних једначина, који за $x = x_0$ имају заједничку вредност y_0, овде су

$$\begin{aligned} u &= \frac{y_0 \sqrt{N} + N \operatorname{tang}[(x - x_0)\sqrt{N}]}{\sqrt{N} + y_0 \operatorname{tang}[(x - x_0)\sqrt{N}]}, \\ v &= \frac{y_0 \sqrt{M} + M \operatorname{tang}[(x - x_0)\sqrt{M}]}{\sqrt{M} + y_0 \operatorname{tang}[(x - x_0)\sqrt{M}]} \end{aligned} \tag{190}$$

и они су одређени, коначни и непрекидни у извесном размаку

$$\text{од} \quad \beta_1 = x_0 - k_1 \quad \text{до} \quad \beta_2 = x_0 + k_2,$$

где су k_1 и k_2 позитивне константе које је лако одредити.

Криве E овде не постоје, пошто функције (189) немају реалних сингуларитета. Са друге стране, пошто се област Π протеже на целокупан део равни xOy што се налази између правих $x = \alpha_1$ и $x = \alpha_2$, то је и контура Γ садржана у тој области.

Према свему томе, као размак (181) има се сматрати заједнички део размака (α_1, α_2) и (β_1, β_2); *за све вредности x у томе размаку интеграл y ће бити коначна и непрекидна функција променљиве x, садржана у размаку између функција u и v изражених обрасцима (190).*

Уочимо сад случај кад је вредност $f(x_0)$ негативна; функција $f(x)$ ће тада бити непрестано негативна у једноме размаку (α_1, α_2) који обухвата вредност x_0.

Означимо са $-M$ и $-N$ предњи и задњи крај једнога размака који обухвата вредности $f(x)$, док се x мења у размаку (α_1, α_2), па узмимо за компаративне једначине

$$u' = u^2 - M, \qquad v' = v^2 - N. \tag{191}$$

Њихови интеграли u и v који за $x = x_0$ имају заједничку вредност y_0, тада су

$$u = \sqrt{M}\,\frac{(y_0+\sqrt{M})+(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}}{y_0+\sqrt{M}-(y_0-\sqrt{M})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M}}},$$
$$v = \sqrt{N}\,\frac{(y_0+\sqrt{N})+(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}}{y_0+\sqrt{N}-(y_0-\sqrt{N})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{N}}} \tag{192}$$

и они су одређени, коначни и непрекидни за све вредности x у извесном размаку (β_1, β_2), који обухвата вредност x_0 и који је лако одредити.

На исти начин као у првоме случају, лако се види да се као размак (181) има сматрати заједнички део размака (α_1, α_2) и (β_1, β_2) *и да ће за све вредности x у томе размаку интеграл y бити коначна и непрекидна функција променљиве x, садржана у размаку између функција u и v изражених обрасцима* (192).

XXII. Друга метода.

Наведена прва метода је општа и *примењива на све диференцијалне једначине првога реда, како алгебарске, тако и трансцендентне и за све парове почетних вредности x_0, y_0,* осим оних изузетних парова који се могу унапред сазнати непосредно на самој диференцијалној једначини.

Међутим, у специјалним случајевима, кад једначина задовољава извесне, више или мање простране услове, може се интегрални размак одредити на разне друге начине, везане за такве случајеве и за такве услове. Једна од многобројних метода за то одређивање била би ова што ће се овде навести.

Нека је дата диференцијална једначина првога реда

$$y' = F(x, \varphi), \tag{193}$$

где је φ дата функција променљиве y, па уочимо случај кад су испуњени ови услови:

1° да су функција $\varphi(y)$ и њен први извод функције реалне, непрекидне и коначне за све вредности y од $-\infty$ до $+\infty$;

2° да су функција F и њен парцијални извод $\dfrac{\partial F}{\partial \varphi}$ реални, коначни, непрекидни и непроменљивог знака за све вредности x садржане у једноме размаку (α_1, α_2) и за све вредности y садржане у истом размаку (N, M) који садржи и вредност функције $\varphi(y)$ за вредности y од $-\infty$ до $+\infty$;

3° да, означивши са k један ма који сталан број садржан у размаку (N, M), а са x_1 и x_2 два ма која стална броја садржана у размаку (α_1, α_2), одређен интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, k)\,dx$$

има само једну реалну вредност, и то одређену и коначну (а може имати и колико се хоће других, али имагинарних вредности које н. пр. произлазе од интегралних периода).

Узмимо за почетне вредности x_0, y_0 једну ма коју вредност x_0 садржану у размаку (α_1, α_2) и једну ма коју вредност y_0 од $-\infty$ до $+\infty$, па формирајмо две функције

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N)\,dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M)\,dx.$$

Тада се може доказати овај резултат:

Интеграл y једначине (193), који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, биће коначан и непрекидан за све вредности x садржане у размаку (α_1, α_2), мењаће се при томе у једном истом смислу, монотоно растући или опадајући, и биће непрестано садржан у размаку између одговарајућих вредности функција λ и μ.

Да бисмо то доказали, приметимо да кад су испуњени услови 1° и 2°, апсолутна вредност функције F остаје мања од једног коначног позитивног броја за све вредности x садржане у размаку (α_1, α_2) и за све вредности y од $-\infty$ до $+\infty$. То ће исто бити и са њеним парцијалним изводом

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dy} .$$

Према једној познатој теореми из аналитичке теорије диференцијалних једначина првога реда, интеграл y једначине (193) који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, биће коначан и непрекидан за све вредности x садржане у размаку (α_1, α_2).

Према услову 2° функција F и њен парцијални извод $\frac{\partial F}{\partial y}$ имају у размацима (α_1, α_2) и (N, M) непромењљив знак; уочимо случај кад је овај позитиван. Према једначини (193) интеграл y непрестано расте, а према двострукој неједначини

$$F(x, N) \leqslant F(x, \varphi) \leqslant F(x, M)$$

и према једначини (193), интеграл

$$\int_{x_0}^{x} F(x, \varphi)\, dx ,$$

који није ништа друго до разлика $y - y_0$, налазиће се увек у размаку између одговарајућих вредности интеграла

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx ,$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx ,$$

чиме је горње тврђење доказано.

Исти би се резултат и исти доказ, само са пермутованим крајевима размака, имао и у случају кад би знак функција F и $\frac{\partial F}{\partial y}$ био негативан.

У случају кад размак (α_1, α_2) обухвата све реалне бројеве, *горњи резултат важи за ма које почетне вредности* x_0, y_0.

I. пример: нека је дата једначина

$$y' = mx^2 + ne^{-ky^2} ,$$

где су k, m, n позитивне константе. Узевши да је

$$\varphi(y) = e^{-ky^2} ,$$

услови 1° и 2° испуњени су н. пр. за све позитивне вредности x, y; вредности N и M су: $N = 0$, $M = 1$; функције λ и μ су

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3) ,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \frac{m}{3}(x^3 - x_0^3) + n(x - x_0)$$

и за све позитивне вредности x_0 и x интеграл y биће коначна, непрекидна и позитивна, монотоно растућа функција, садржана у размаку (λ, μ).

II. пример: нека је дата једначина

$$y' = \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2} - ne^{-kx^2 - py^2}} ,$$

где су m, n, k, p, r позитивне константе, а уз то је још и

$$m + n < 1 .$$

Узевши да је

$$\varphi(y) = e^{-ky^2} ,$$

услови 1° и 2° су испуњени за све реалне вредности x, y; тада је $N = 0$, $M = 1$; функције λ и μ су:

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - me^{-kx^2}}\, dx ,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (m+n)\, e^{-kx^2}}\, dx$$

и оне ограничавају интеграл J, који за $x=x_0$ добија вредност $y=y_0$ и остаје коначан, непрекидан, позитиван за све реалне вредности x, растући пре томе монотоно.

III пример: нека је дата једначина

$$y' = \frac{a+y^2}{ab+x+by^2},$$

где су a и b позитивне константе. Узевши да је

$$\varphi(y) = \frac{1}{a+y^2},$$

чиме једначина добија облик

$$y' = \frac{1}{b+x\varphi(y)},$$

услови 1° и 2° испуњени су н. пр. за све позитивне вредности x, y; тада је $N=0$, $M=\frac{1}{a}$; функције λ и μ су

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{b} = C_1 + \frac{x}{b},$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{b+\frac{x}{a}} = C_2 + a\log(x+ab),$$

где су C_1 и C_2 константе

$$C_1 = y_0 - \frac{x_0}{b},$$

$$C_2 = y_0 - a\log(x_0+ab),$$

и за све позитивне вредности x_0 и x интеграл ће бити садржан у размаку (λ, μ).

Асимптотна вредност интеграла. Казано је да, кад размак (α_1, α_2) обухвата све реалне бројеве, горњи резултати важе за ма које почетне вредности x_0, y_0. У томе случају *асимптотна вредност* интеграла y, т. ј. његова вредност за $x=+\infty$ или за $x=-\infty$, биће коначна или бескрајна према томе да ли

одговарајуће вредности интеграла J_1 и J_2 теже коначним или бескрајно великим границама. *Кад год су те границе коначне, асимптотна вредност у налази се у размаку између вредности*

$$y_0 + \lim J_1(x) \qquad \text{и} \qquad y_0 + \lim J_2(x)$$

тако да, ако се стави да је

$$\text{асимпт. вредност } y = Y,$$

$$\text{асимпт. вредност } J_1 = A_1,$$

$$\text{асимпт. вредност } J_2 = A_2,$$

биће

$$Y = A_1 + \vartheta(A_2 - A_1).$$

Тако, у првом примеру, кад је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = mx^2 + ne^{-ky^2},$$

(m, n, k позитивне константе) асимптотна вредност интеграла y, који за $x=x_0$ има вредност y_0, бескрајно је велика, јер интеграли J_1 и J_2 теже бескрајно великим границама.

Напротив, у другоме примеру, кад је дата једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2-py^2}},$$

(α, β, k, p позитивне константе и $\alpha+\beta<1$) лако се уверавамо да је асимптотна вредност интеграла коначна и да јој се може одредити бројни размак у коме ће се она насигурно налазити. Јер у томе је случају

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1-\alpha e^{-kx^2}}\,dx$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1-(\alpha+\beta)e^{-kx^2}}\,dx.$$

А пошто је за вредности z, по апсолутној вредности мање од 1,

$$\frac{1}{1-ze^{-kx^2}} = 1+ze^{-kx^2}+z^2e^{-2kx^2}+z^3e^{-3kx^2}+\dots,$$

то је

$$\frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}} = e^{-rx^2}+ze^{-(r+k)x^2}+z^2e^{-(r+2k)x^2}+$$
$$+z^3e^{-(r+3k)x^2}+\dots$$

и према томе је

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx = u_0+u_1z+u_2z^2+u_3z^3+\dots,$$

где је

$$u_n = \int_0^\infty e^{-(r+nk)x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r+nk}},$$

тако, да се може написати

$$(194)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(z),$$

где је

$$(195)\qquad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{\sqrt{r+nk}},$$

који образац важи за вредности z по апсолутној вредности мање од 1.

Међутим, према обрасцу

$$\int_{x_0}^{\infty} = \int_{x_0}^{0} + \int_0^\infty$$

и обрасцима (194) и (195) може се написати да је

$$A_1 = J_1(0)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(\alpha)$$

$$A_2 = J_2(0)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Phi(\alpha+\beta),$$

па пошто су вредности α и $\alpha+\beta$ мање од јединице, обе су вредности A_1 и A_2 коначне и одређене; *асимптотна вредност интеграла у коначна је и налази се у размаку између* A_1 *и* A_2.

Од интереса је скренути пажњу на улогу коју игра функција $\Phi(z)$ при одредби размака у коме се налази асимптотна вредност интеграла y горње једначине. Та је функција дефинисана редом (195) у коме ранг n његових чланова фигурише под квадратним кореном, а на такве се редове никад не наилази при интеграцији алгебарских диференцијалних једначина.

XXIII. Квалитативни први интеграли диференцијалних једначина.

Напред изложене две методе односе се на диференцијалне једначине *првога реда;* метода која ће овде бити изложена примењива је на једначине *ма кога реда.* Она се састоји у употреби једне нарочите врсте првих интеграла диференцијалних једначина.

У општој теорији диференцијалних једначина сматра се као *први интеграл* дате једначине

$$(196)\qquad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

такав један израз

$$(197)\qquad \Phi(x, y, y', \dots, y^{(m)}),$$

који се према самој једначини (196) своди на једну константу кад се у њему y смени једним *којим било* интегралом (196). Егзистенција таквог интеграла изражава се једначином

$$(198)\qquad \Phi = \text{const}.$$

Тако н. пр. једначина

$$yy''+y'^2 = 0$$

има као свој први интеграл

$$yy' = \text{const.};$$

за једначину

$$(y+2xy')\,y''+2y'^2 = 0$$

постоји први интеграл

$$xy'^2+yy' = \text{const}.$$

Међутим, поред такве врсте првих интеграла, који изражавају да се један одређен израз *Φ не мења* са промењљивом x кад се у њему y смени интегралом једначине (196), у великом броју случајева постоји за исту једначину и такав један израз *Φ*, који се *мења само у одређеном бројном размаку*, кад се у њему y смени интегралом једначине (196); то се изражава једначином

$$\Phi = \lambda \tag{199}$$

са придодатом јој двоструком неједначином

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 \tag{200}$$

(где λ_1 и λ_2 означавају предњи и задњи крај размака у коме се мења израз *Φ*) или једначином

$$\Phi = \lambda_1 + \vartheta\,(\lambda_2 - \lambda_1), \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1. \tag{201}$$

Али, док једначина (198) важи *за који било* интеграл једначине (196), једначина (199) важи *само за поједине врсте* интеграла исте једначине (196), н. пр. само за интеграле реалне, или позитивне, или монотоно растуће, или конвексне и т. д.

Тако н. пр. пошто је за реалне вредности y и y'

$$\frac{1}{2}\,(y'^2 + y^2)^2 \leqslant y'^4 + y^4 \leqslant (y'^2 + y^2)^2,$$

то се за диференцијалну једначину

$$y'^4 + y^4 = f(x) \tag{202}$$

добија да је

$$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta\,(\sqrt{2} - 1), \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1,$$

тако да је, за ма који реални интеграл једначине (202)

$$\frac{y'^2 + y^2}{\sqrt{f(x)}} = 1 + \vartheta\,.\,0{,}4142. \tag{203}$$

Тако исто, пошто је за реалне и позитивне вредности и y'

$$\frac{1}{2}\,(y' + y)^2 \leqslant y'^2 + y^2 \leqslant (y' + y)^2,$$

то ће, за ма који позитиван и монотоно растући интеграл једначине

$$y'^2 + y^2 = \varphi(x) \tag{204}$$

бити

$$\frac{y' + y}{\sqrt{\varphi(x)}} = 1 + \vartheta\,.\,0{,}4142. \tag{205}$$

Тако се исто налази, да ће за ма који позитиван и конвексан интеграл једначине

$$y''^2 + y^2 = \psi(x) \tag{206}$$

бити

$$\frac{y'' + y}{\sqrt{\psi(x)}} = 1 + \vartheta\,.\,0{,}4142. \tag{207}$$

Тако исто, док једначина (198) важи за *све вредности* x, како реалне тако и имагинарне, једначина (199) важи само за *реалне* вредности x, обично *садржане у једноме одређеном размаку* (a, b). Тако н. пр. у случају једначине (202), једначина (203) ће важити само за оне размаке (a, b) вредности x у коме је уочени интеграл реалан; у случају једначине (204), једначина (205) важи само за размак (a, b) у коме је интеграл позитиван и монотоно расте и т. д..

Скуп од свију тих чињеница означује се једначином

$$\Phi = \lambda \tag{208}$$

и неједначинама

$$\left|\begin{array}{c} a < x < b \\ \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \end{array}\right|,$$

где ћемо, као и до сада, означавати λ са ϑ кад $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, а са ω кад је $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$.

При томе треба имати на уму да су λ, ϑ, ω ипак функције промењљиве x, чије вредности непрестано остају у одговарајућем размаку (λ_1, λ_2), односно $(0, 1)$ или $(-1, +1)$, али су различне за разне вредности x садржане у размаку (a, b).

Док први интеграл у обичном смислу, т. ј. једначина $\Phi = \text{const}$, изражава једну потпуно одређену математичко-*квантитативну* чињеницу, дотле једначина (208) изражава једну непотпуно одређену чињеницу, која је математичко-*квалитативне* природе, јер само означује размак у коме се налази израз Φ, не прецизирујући његов праву вредност. Стога ће се за једначину (208), или за сам израз Φ, казати да претстављају један *квалитативни први интеграл* дате једначине (196).

Таква врста првих интеграла, ма да не изражава никакву прецизну математичку чињеницу, може ипак корисно послужити за проучавање интеграла на које се односи. На име, такви први интеграли дају могућности да се одреди размак у коме ће бити садржане вредности уоченог интеграла y дате једначине (196), број нула интеграла y у датоме размаку (a, b) променљиве x, размаци који се односе на максимуме и минимуме интеграла y у размаку (a, b) променљиве x и т. д. А све је то од нарочитог интереса у случајевима кад се диференцијална једначина не може ни тачно, ни приближно интегралити. Такав начин одређивања интегралних размака видеће се из овога што следује.

XXIV. Интегрални размаци одређени помоћу квалитативних првих интеграла.

У великом броју случајева, искористивши обрасце за интегралне размаке, изложене у ранијим одељцима ове књиге, могућно је интегралити диференцијалну једначину $\Phi = \lambda$ која претставља квалитативни први интеграл дате једначине $F=0$, а да се при томе не мора знати тачна вредност броја λ која одговара датој вредности x, т. ј. да се не мора знати функција $\lambda(x)$. Тада се интеграл y, који за $x=x_0$ има вредност $y=y_0$ добија у облику

$$y = f(x, x_0, y_0, \mu)\,, \tag{209}$$

где је μ један број коме се не зна тачна вредност, али се зна размак у коме ће се он насигурно налазити па ма каква била вредност x у размаку (a, b).

Помоћу једначине (209) може се тада одредити и променљив размак (A, B) у коме ће се налазити интеграл y кад се променљива x буде мењала у своме размаку (a, b). Размак (A, B) може се тада израчунати и у облику свога асиметричког или симетричког нормалног претставника

$$y = u_1 + \vartheta v_1\,, \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$$

$$y = u_2 + \omega v_2\,, \qquad -1 \leqslant \varpi \leqslant 1$$

тако, да се са интегралом y, као бројним размаком, могу вршити све врсте рачуна, на напред показани начин за бројне размаке.

Начин на који се, из једног познатог квалитативног првог интеграла $\Phi = \lambda$ долази до бројног размака за интеграл y, зависи у првоме реду од аналитичког облика израза Φ. За одређене типове таквих израза везане су поједине особине интеграла y, које се своде на одредбу појединих бројних размака. Овде ће бити показано како то бива за неколико простих типова израза Φ.

I. тип облика

$$\Phi = \frac{y'}{y} = \lambda\,, \quad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \end{array} \right| .$$

Одатле је интеграцијом

$$\log y - \log y_0 = \int_{x_0}^{x} \lambda\, dx = \lambda' \int_{x_0}^{x} dx = \lambda' \,(x - x_0)$$

(где је λ' један број који лежи између λ_1 и λ_2) и према томе се интеграл дате једначине $F=0$, који за $x=x_0$ има вредност $y=y_0$ може написати у облику

$$y = y_0\, e^{\lambda'(x-x_0)}\,,$$

Из тога се облика види да *интеграл y не постаје једнак нули ни за коју вредност x садржану у размаку (a, b) и да је за све вредности x у томе размаку и сам садржан у размаку између функција*

$$y_0 e^{\lambda_1 (x-x_0)} \quad \text{и} \quad y_0 e^{\lambda_2 (x-x_0)}\,,$$

тако да је

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + \vartheta \left(C_2 e^{\lambda_2 x} - C_1 e^{\lambda_1 x}\right)\,, \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1\,,$$

где су C_1 и C_2 константе

$$C_1 = y_0 e^{-\lambda_1 x_0}, \quad C_2 = y_0 e^{-\lambda_2 x_0}.$$

У случају кад се размак (a, b) распростире од 0 до ∞, *интеграл асимптотно тежи нули или бескрајно расте као експоненцијална функција* $e^{\alpha x}$ (где је α једна вредност садржана у размаку између λ_1 и λ_2) према знаку λ_1 и λ_2. Сличан резултат важи и за случај кад се (a, b) пружа од $-\infty$ до 0, или од $-\infty$ до $+\infty$.

I. пример: нека је дата диференцијална једначина

$$(\varphi+\psi y^2)^2 y'^2-(\varphi^2+\psi^2 y^4) y^2 = 0,$$

где су φ, ψ функције променљиве x, позитивне и коначне у размаку (a, b). Пошто је, за ма какву реалну вредност y

$$\frac{1}{2}(\varphi+\psi y^2)^2 \leqslant \varphi^2+\psi^2 y^4 \leqslant (\varphi+\psi y^2)^2,$$

то ће се, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне интеграле y, имати као квалитативни први интеграл:

$$\frac{y'}{y} = \lambda, \quad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ \frac{1}{\sqrt{2}} < \lambda < 1 \end{array} \right| \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ -1 < \lambda < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right|,$$

према једној или другој детерминацији квадратног корена

$$\sqrt{\varphi^2+\psi^2 y^4}.$$

II. пример: диференцијална једначина

$$y' = (a + b e^{-x^2-y^2}) y,$$

где су a и b позитивне константе, има за све реалне вредности x и за све своје интеграле, као први интеграл

$$\frac{y'}{y} = \lambda, \quad \left| \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ a < \lambda < a+b \end{array} \right|,$$

II. тип облика

$$(y'+y)\varphi = \lambda, \quad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \end{array} \right|,$$

где је φ функција променљиве x. Интеграцијом и применом обичне теореме средњих вредности налази се да се интеграл y, који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$, може написати у облику

$$y = e^{-(x-x_0)}\left[y_0 + \lambda' e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right],$$

где је λ' један број који лежи у размаку (λ_1, λ_2). Из тога се види да је, за вредности x садржане у размаку (a, b), интеграл y садржан у размаку између функција

$$e^{-x}\left(C+\lambda_1\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right)$$

и

$$e^{-x}\left(C+\lambda_2\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right),$$

где је C константа

$$C = y_0 e^{x_0}.$$

Сличан се резултат добија и за случај кад постоји један квалитативни први интеграл облика

$$(y'-y)\varphi = \lambda.$$

III. пример: нека је дата диференцијална једначина

$$y'^2 + y^2 = f(x),$$

где је функција $f(x)$ реална, позитивна, коначна и непрекидна у уоченом размаку (a, b) променљиве x.

Уочимо, најпре, позитивну детерминацију квадратног корена $\sqrt{f(x)}$ и интеграл y који за $x = x_0$ има вредност $y = y_0$. Почетна тачка $M_0(x_0, y_0)$ може се налазити изнад или испод осе Ox, или на њој самој; ми ћемо узети да се она налази изнад те осе. Та се тачка тада мора налазити у области равни xOy, ограниченој осом Ox и кривом

(210) $$y = \sqrt{f(x)},$$

јер би иначе уочена грана интеграла y била имагинарна.

$$C_1 = y_0 e^{-\lambda_1 x_0}, \quad C_2 = y_0 e^{-\lambda_2 x_0}.$$

У случају кад се размак (a, b) распростире од 0 до ∞, *интеграл асимптотно тежи нули или бескрајно расте као експоненцијална функција* $e^{\alpha x}$ (где је α једна вредност садржана у размаку између λ_1 и λ_2) према знаку λ_1 и λ_2. Сличан резултат важи и за случај кад се (a, b) пружа од $-\infty$ до 0, или од $-\infty$ до $+\infty$.

I. пример: нека је дата диференцијална једначина

$$(\varphi+\psi y^2)^2\, y'^2-(\varphi^2+\psi^2 y^4)\, y^2=0\,,$$

где су φ, ψ функције променљиве x, позитивне и коначне у размаку (a, b). Пошто је, за ма какву реалну вредност y

$$\frac{1}{2}\,(\varphi+\psi y^2)^2 \leqslant \varphi^2+\psi^2 y^4 \leqslant (\varphi+\psi y^2)^2\,,$$

то ће се, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне интеграле y, имати као квалитативни први интеграл:

$$\frac{y'}{y}=\lambda\,, \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ \frac{1}{\sqrt{2}}<\lambda<1 \end{array}\right| \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ -1<\lambda<-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right|,$$

према једној или другој детерминацији квадратног корена

$$\sqrt{\varphi^2+\psi^2 y^4}\,.$$

II. пример: диференцијална једначина

$$y'=(a+b e^{-x^2-y^2})\, y\,,$$

где су a и b позитивне константе, има за све реалне вредности x и за све своје интеграле, као први интеграл

$$\frac{y'}{y}=\lambda\,, \quad \left|\begin{array}{c} -\infty<x<\infty \\ a<\lambda<a+b \end{array}\right|,$$

II. тип облика

$$(y'+y)\,\varphi=\lambda\,, \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ \lambda_1<\lambda<\lambda_2 \end{array}\right|,$$

где је φ функција променљиве x. Интеграцијом и применом обичне теореме средњих вредности налази се да се интеграл y, који за $x=x_0$ има вредност $y=y_0$, може написати у облику

$$y=e^{-(x-x_0)}\left[y_0+\lambda' e^{-x_0}\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right],$$

где је λ' један број који лежи у размаку (λ_1, λ_2). Из тога се види да је, за вредности x садржане у размаку (a, b), интеграл y садржан у размаку између функција

$$e^{-x}\left(C+\lambda_1\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right)$$

и

$$e^{-x}\left(C+\lambda_2\int_{x_0}^{x}\frac{e^x}{\varphi}\,dx\right),$$

где је C константа

$$C=y_0\, e^{x_0}.$$

Сличан се резултат добија и за случај кад постоји један квалитативни први интеграл облика

$$(y'-y)\,\varphi=\lambda\,.$$

III. пример: нека је дата диференцијална једначина

$$y'^2+y^2=f(x)\,,$$

где је функција $f(x)$ реална, позитивна, коначна и непрекидна у уоченом размаку (a, b) променљиве x.

Уочимо, најпре, позитивну детерминацију квадратног корена $\sqrt{f(x)}$ и интеграл y који за $x=x_0$ има вредност $y=y_0$. Почетна тачка $M_0(x_0, y_0)$ може се налазити изнад или испод осе Ox, или на њој самој; ми ћемо узети да се она налази изнад те осе. Та се тачка тада мора налазити у области равни xOy, ограниченој осом Ox и кривом

$$y=\sqrt{f(x)}\,, \tag{210}$$

јер би иначе уочена грана интеграла y била имагинарна.

Кроз тачку M_0 пролазе две позитивне гране интеграла, једна монотоно растућа Y_1, која за коефицијенат правца дирке у M_0 има вредност

$$+\sqrt{f(x_0)-y_0^2},$$

друга монотоно опадајућа Y_2, која за тај коефицијенат има вредност

$$-\sqrt{f(x_0)-y_0^2};$$

обе се дирке међу собом поклапају кад се тачка M_0 налази на кривој (210).

Грани Y_1 одговара квалитативни први интеграл

$$\frac{y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda, \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2} \end{array}\right|,$$

што, према горе реченом, показује да се она, за вредности x садржане у размаку (a, b), непрестано налази у размаку између функција

$$e^{-x}\left[C+\int_{x_0}^{x} e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$e^{-x}\left[C+\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^{x}\sqrt{f(x)}\,dx\right],$$

где је C константа

$$C=y_0e^{x_0}.$$

Грани Y_2 одговара квалитативни први интеграл

$$\frac{-y'+y}{\sqrt{f(x)}}=\lambda, \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2} \end{array}\right|,$$

што показује да се она, за вредности x садржане у размаку (a, b), непрестано налази у размаку између функција

$$y=e^{x}\left[D-\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right]$$

и

$$y=e^{x}\left[D-\int_{x_0}^{x} e^{-x}\sqrt{f(x)}\,dx\right].$$

Кроз тачку $M'_0(x_0,-y_0)$, симетричну тачки M_0 према оси Ox, пролазе такође две, и то негативне гране интеграла y, једна монотоно опадајућа U_1, друга монотоно растућа U_2; оне су симетричне гранама Y_1 и Y_2 према оси Ox, и лако им је на горњи начин одредити размаке у којима ће се оне налазити.

III. тип облика

$$\Phi=\frac{y''}{y}=\lambda \quad \left|\begin{array}{c} a<x<b \\ \lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2 \end{array}\right|. \tag{211}$$

Из таквог се облика израза Φ може одмах закључити, да *сваки коначан и непрекидан интеграл једначине $F=0$ мења знак при свакоме своме проласку кроз нулу.* Јер, ако се у једначини

$$y''-\lambda y=0 \tag{212}$$

стави

$$y=(x-a)^k\cdot\varphi,$$

где је a произвољан број, добија се

$$(x-a)^2(\varphi\lambda-\varphi'')=k(k-1)\varphi+2k(x-a)\varphi'. \tag{213}$$

Кад је $x=a$ један корен k-тог реда једначине $y=0$, функција φ остаје коначна, одређена и од нуле различна за $x=a$, као и њени узастопни изводи. Једначина (213) тада показује да њена десна страна за $x=a$ тежи граници $k(k-1)\varphi$, па пошто та граница мора бити нула, треба да је или $k=0$ (у коме случају a није корен једначине $y=0$) или $k=1$ (у коме је случају a прост корен исте једначине) чиме је горње тврђење доказано.

Разликујмо сада ова два случаја:

Први случај: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Нека је $x = x_0$ један прост корен једначине $y' = 0$ садржан у размаку (a, b). Пошто су тада, према једначини (211), y и y'' истога знака за све вредности x садржане у размаку (a, b), то интеграл y не може у томе размаку имати ни позитивних максимума, ни негативних минимума. Према томе, ако се са y_0 означи вредност коју има y за $x = x_0$ онда

1^0 ако је $y_0 > 0$, интеграл ће y за $x = x_0$ достићи један позитиван минимум, а у размаку вредности x од a до x_0 биће позитиван и опадаће монотоно; за вредности x у размаку од x_0 до b он ће бити позитиван и монотоно ће расти;

2^0 ако је $y_0 < 0$, интеграл ће y за $x = x_0$ достићи један негативан максимум, а за вредности x у размаку од a до x_0 биће негативан и монотоно ће расти; за x у размаку од x_0 до b он ће бити негативан и монотоно ће опадати.

У сваком случају, промена знака извода y' наступа само за $x = x_0$.

Множећи једначину (211) са $y'dx$, интегралећи између граница x и x_0, где је x једна произвољна вредност садржана у размаку (a, x_0) и водећи рачуна о томе да је $y' = 0$ за $x = x_0$, добија се да је

$$(214) \qquad -\frac{y'^2}{2} = \int_x^{x_0} \lambda\, yy'\, dx .$$

Пошто производ yy' не мења знак у размаку интеграције, обична теорема средњих вредности, примењена на интеграл (214), даје

$$y'^2 = \lambda' \,(y_0^2 - y^2), \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2,$$

одакле се опет интеграцијом и применом исте теореме добија да је

$$(215) \qquad y = y_0 \frac{e^X + e^{-X}}{2} = y_0 ch X,$$

где је

$$(216) \qquad X = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\lambda'}\, dx = \lambda'' \,(x - x_0), \qquad \sqrt{\lambda_1} \leqslant \lambda'' \leqslant \sqrt{\lambda_2}.$$

Да смо, пак, на место интеграције између граница x и x_0,

извршили интеграцију између граница x_0 и x, где је x једна произвољна вредност садржана у размаку (x_0, b), добила би се једначина

$$-\frac{y'^2}{2} = \int_{x_0}^{x} \lambda\, yy'\, dx ,$$

која доводи до истих образаца (215) и (216).

На тај се начин долази до овога резултата:

Кад дата диференцијална једначина $F = 0$ има за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле y, а за вредности x садржане у размаку (a, b), један квалитативни први интеграл (211), где су a и b позитивни бројеви, сваки се од тих интеграла, а за такве вредности x, може написати у облику

$$y = y_0 \frac{e^{\lambda''(x - x_0)} + e^{-\lambda''(x - x_0)}}{2} = y_0 ch\,[\lambda''(x - x_0)],$$

где је y_0 прост корен једначине $y' = 0$ који се налази у размаку (a, b), а λ'' један број који се налази у размаку између вредности $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$.

Став, као што се види, важи за оне, међу интегралима y једначине $F = 0$, чији први извод постаје једнак нули за једну вредност $x = x_0$ садржану у размаку (a, b), а таквих интеграла има бескрајно много. *Сви такви интеграли леже у размаку између вредности*

$$(217) \qquad y_0\, ch\,(x - x_0)\sqrt{\lambda_1} \qquad \text{и} \qquad y_0\, ch\,(x - x_0)\sqrt{\lambda_2}\,.$$

за све вредности x садржане у размаку (a, b).

За све вредности x довољно блиске вредности x_0, интеграли се налазе у области између двеју парабола

$$y = y_0 \left[1 + \frac{\lambda_1}{2} (x - x_0)^2\right],$$

$$y = y_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{2} (x - x_0)^2\right],$$

које пролазе кроз тачку (x_0, y_0). То се види из облика реда уређеног по степенима разлике $x - x_0$, у који се могу развити изрази (217).

I. пример: хомогена линеарна диференцијална једначина другога реда

$$y'' - f(x)\, y = 0 \tag{218}$$

обухваћена је горњим ставом за сваки размак вредности x у коме је функција $f(x)$ *позитивна;* вредности λ_1 и λ_2 су најмања и највећа вредност које има $f(x)$ у томе размаку. За интеграл y те једначине важи све оно што је малочас нађено за III тип квалитативних првих интеграла.

II. пример: диференцијална једначина

$$y'' + \varphi y' + \psi y = 0$$

сменом

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int \varphi dx}$$

претвара се у једначину

$$z'' - f(x)\, z = 0 ,$$

где је

$$f(x) = \psi - \frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi'}{2} , \tag{219}$$

из чега се изводи овај резултат:

Сваки реалан интеграл, коначан и непрекидан у једноме размаку (a, b) променљиве x, у коме је функција (218) позитивна, и који је такав, да први извод функције

$$z = y e^{\frac{1}{2}\int \varphi dx}$$

постаје једнак нули за једну вредност $x = x_0$ садржану у размаку (a, b), налази се у размаку између вредности

$$\frac{y_0}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi dx}\, ch\,[\,(x - x_0)\,\mu_1\,]$$

и

$$\frac{y_0}{2}\, e^{-\frac{1}{2}\int \varphi dx}\, ch\,[\,(x - x_0)\,\mu_2\,] ,$$

где су μ_1 и μ_2 најмања и највећа вредност, које има квадратни корен функције (219) у размаку (a, b).

III. пример: нека је дата диференцијална једначина n-тога реда

$$[x^{2k} + y^{2k} + y'^{2k} + \dots + y^{(n)\,2k}]\, y'' - [x^2 + y^2 + y'^2 + \dots + y^{(n)2}]^k\, y = 0 , \tag{220}$$

где је k цео број већи од јединице; према ранијем ставу да је за позитивне вредности a_k

$$1 \leqslant \frac{(\,a_1 + a_2 + \dots + a_p\,)^k}{a_1^k + a_2^k + \dots + a_p^k} \leqslant p^{k-1}$$

види се да једначина (220) има, за све своје интеграле y, реалне, коначне и непрекидне у размаку (a, b) променљиве x, један квалитативни први интеграл облика (211), где је

$$\lambda_1 = 1 , \qquad \lambda_2 = (n+1)^{k-1} .$$

Уочени интеграли, за x у размаку (a, b), налазе се, дакле, у размаку између функција

$$\frac{y_0}{2}\left[\, e^{(x-x_0)} + e^{-(x-x_0)} \,\right] ,$$

$$\frac{y_0}{2}\left[\, e^{(x-x_0)\,(n+1)^{\frac{k-1}{2}}} + e^{-(x-x_0)\,(n+1)^{\frac{k-1}{2}}} \,\right] .$$

Други случај: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Диференцијална једначина

$$y'' + h y = 0 , \tag{221}$$

где је h позитивна константа, има за општи интеграл израз

$$y = C_1 \cos\,(\,C_2 + x\sqrt{h}\,) , \tag{222}$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе. Интеграл је, дакле, осцилаторан и састављен из полу-таласа наизменце позитивних и негативних.

У теорији линеарних диференцијалних једначина другога реда доказује се да то исто важи и за општи интеграл једначине (221) кад год је h каква функција променљиве x, *позитивна* за вредности x садржане у једном довољно пространом размаку (a, b). (Sturm-ова теорема за хомогене линеарне једначине другога реда).

Уочимо, дакле, једначину

$$y'' + \lambda y = 0 , \tag{223}$$

где вредност λ, пошто се креће у позитивном размаку

$$(-\lambda_1, \ -\lambda_2),$$

остаје позитивна за вредности x садржане у размаку (a, b).

Посматрајмо најпре један *позитиван* полу-талас интеграла y. Према самој једначини (223), други извод y'' је негативан дуж целога тога полу-таласа, што значи да овај на њему може имати само један максимум. Нека је $x=x_0$ вредност за коју је тај максимум достигнут, а нека су $x=x_1$ и $x=x_2$ вредности x које одговарају двама крајевима полу-таласа.

Док се x мења од x_1 до x_0, интеграл y је непрестано позитиван и расте; док се x мења од x_0 до x_2, он је непрестано негативан и опада. У свакоме од два размака (x_1, x_0) и (x_0, x_2) производ yy' има, дакле, непроменљив знак.

Уочимо најпре део полу-таласа y у размаку (x_1, x_0). Множећи једначину (223) са $y'dx$, интегралећи између граница x и x_0, где је x једна произвољна вредност садржана у томе размаку и водећи рачуна о томе да је $y'=0$ за $x=x_0$, добија се једначина (214), па пошто производ yy' не мења знак у размаку (x, x_1), обична теорема средњих вредности даје тада

$$y'^2 = \lambda'(y_0^2 - y^2), \qquad -\lambda_1 \leqslant \lambda' \leqslant -\lambda_2, \tag{224}$$

где је y_0 вредност y за $x=x_0$; ова вредност претставља, дакле, *амплитуду полу-таласа*. Из тога се налази

$$y = y_0 \cos[(x-x_0)\mu], \qquad \left| \begin{array}{c} x_1 < x < x_0 \\ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2} \end{array} \right|, \tag{225}$$

где је

$$\mu_1 = -\lambda_1, \quad \mu_2 = -\lambda_2.$$

За део полу-таласа y у размаку (x_0, x) добили бисмо на исти начин исту једначину (224), из чега се закључује да се цео полу-талас може изразити једначином (225) са неједначинама

$$\begin{array}{c} x_1 < x < x_2, \\ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2}. \end{array} \tag{226}$$

Посматрајмо сад један негативан полу-талас чији крајеви нека су $x=x_1$ и $x=x_2$. Према једначини (223), други извод y'' тада је позитиван дуж целога тога полу-таласа, што значи да овај на њему може имати само један минимум, достигнут н. пр. за $x=x_0$. Док се x мења од x_1 до x_0, интеграл y је непрестано негативан и опада; док се x мења од x_0 до x_2, он је непрестано позитиван и расте. У свакоме од та два размака производ yy' има, дакле, непроменљив знак. И тада се налази, као малочас за позитиван полу-талас, да се цео полу-талас може изразити једначином (225) са неједначинама (226).

Из тога се изводи овај општи закључак:

Кад дата диференцијална једначина (196) *има за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле y, за вредности x садржане у размаку (a, b), један квалитативни први интеграл облика* (211), *где су λ_1 и λ_2 негативни бројеви, интеграл y састављен је из позитивних и негативних полу-таласа; сваки од ових може се изразити у облику*

$$y = y_0 \cos[(x-x_0)\mu], \qquad \left| \begin{array}{c} x_1 < x < x_2 \\ \sqrt{\mu_1} \leqslant \mu \leqslant \sqrt{\mu_2} \end{array} \right|, \tag{227}$$

где су: $x=x_1$ и $x=x_2$ крајеви полу-таласа, y_0 његова амплитуда, а μ_1 и μ_2 апсолутне вредности бројева λ_1 и λ_2.

Пошто дуж посматраног полу-таласа, т. ј. за вредности x садржане у размаку (x_1, x_2), израз

$$\cos[(x-x_0)\mu]$$

не мења знак, то је за све те вредности

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant (x-x_0)\mu \leqslant +\frac{\pi}{2},$$

па, дакле,

$$x_1 = x_0 - \frac{\pi}{2\mu}, \quad x_2 = x_0 + \frac{\pi}{2\mu},$$

а пошто се μ налази у размаку између $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$, то се x_1 налази у размаку између вредности

$$x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}} \quad \text{и} \quad x_0 - \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_2}},$$

а x_2 у размаку између вредности

$$x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_2}} \quad \text{и} \quad x_0 + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu_1}}.$$

То показује *да се разлика* $x_2 - x_1$, *т. ј. дужина полу-таласа, увек налази у размаку између*

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}},$$

из чега се н. пр. лако изводи закључак о броју полу-таласа у једноме датоме размаку (a, b) вредности x. Дужина l полу-таласа може се написати у облику

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}} + \vartheta\pi\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\right), \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1;$$

ако се са p означи цео број који показује колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1}}$ садржана у вредности $b-a$, а са q цео број који показује колико је пута $\frac{\pi}{\sqrt{\mu_2}}$ садржано у истој вредности $b-a$, *број целих полу-таласа, садржаних у размаку* (a, b), *увек се налази у размаку* (p, q), *т. ј. он је*

$$p + \vartheta' (q-p), \qquad 0 \leqslant \vartheta' \leqslant 1.$$

XXV. Диференцијалне једначине првог и другог реда са осцилаторним интегралима.

Најважнији тип диференцијалних једначина са *осцилаторним интегралима*, т. ј. чији је интеграл састављен из наизменичких полу-таласа, је хомогена линеарна једначина другога реда. Кад је таква једначина сведена на тип

$$(228) \qquad y'' + f(x)\, y = 0,$$

кад год је функција $f(x)$ у једном датом, довољно пространом, размаку (a, b) променљиве x, коначна, непрекидна и позитивна, из овога што претходи види се да су њени интеграли уопште *осцилаторне функције* те променљиве у размаку (a, b). Честина осцилација, т. ј број полу-таласа у томе размаку, одређује се на напред наведени начин. Кад функција $f(x)$ садржи какав променљив параметар, овај ће очевидно утицати и на честину осцилација. Тај се утицај може испитивати проучавајући начин промена бројева λ_1 и λ_2 (из ранијег одељка), кад се буде мењао тај параметар. Интерес и важност таквих испитивања долази отуда, што се на линеарне диференцијалне једначине другога реда наилази у великоме броју проблема механике и математичке физике, у теоријама осцилаторних појава, као што су: кретање клатна, светлосне и електричне осцилације, појаве еластичности и т. д..

Приметимо да интеграл може бити осцилаторан и онда кад функција $f(x)$ наизменце прелази од једнога знака на други, постајући наизменце позитивна и негативна. Јер тада израз

$$yy'' = -f(x)\, y^2,$$

који увек има знак функције $-f(x)$, и сам постаје наизменце позитиван и негативан, што значи да интегрална крива наизменце прелази од конвексности на конкавност (према оси Ox), а што може бити и једним низом осцилација. Само што, при таквим осцилацијама, прелаз из једног полу-таласа у други (т. ј. места промене конвексности и конкавности) бива за сталне вредности x, које не зависе од интеграционих констаната и које се налазе међу коренима једначине $f(x) = 0$, па се, дакле, не мењају од једног партикуларног интеграла до другог. Напротив, у случајевима кад $f(x)$ задржава стално позитиван знак, ти прелази бивају за вредности x које зависе од тих констаната и мењају се од једног интеграла до другог.

Међутим, *једначине облика* (228) *задовољавају и интеграли појединих диференцијалних једначина првога реда*

$$(229) \qquad y' = F(x, y)$$

тако, да кад год функција $f(x)$, што им одговара после извршеног диференцијалења једначине (229), задовољава напред изложене погодбе за осцилаторни карактер интеграла једначине (228), и *интеграли једначине (229) ће бити осцилаторни.*

Које су то једначине (229) чији општи интеграл задовољава једну једначину облика (228)?

Из (229) се добија диференцијалењем

$$y'' = \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Интеграл у задовољаваће, дакле, једну једначину (228) *кад год се израз* $\frac{y''}{y}$, *т. ј. израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+F\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{230}$$

своди на једну функцију само променљиве x; та ће функција тада бити $f(x)$ *из једначине* (228), *пошто јој се промени знак.*

I. пример: за једначину првога реда

$$y'^2+y^2=\varphi(x) \tag{231}$$

израз (230) има облик

$$\pm\frac{\varphi'}{2y\sqrt{\varphi-y^2}}-1;$$

да би он био независан од y потребно је и довољно да буде $\varphi=\text{const}$, чему одговара

$$f(x)=\text{const}.$$

Једначина (231), чији општи интеграл задовољава једну једначину облика (228), јесте, дакле,

$$y'^2+y^2=a^2 \tag{232}$$

(где је a константа која се увек може свести на јединицу), а њој одговара једначина (228) облика

$$y''+y=0. \tag{233}$$

Општи интеграл једначине (233)

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x$$

је осцилаторан, па ће то бити случај и са општим интегралом једначине (232), који је (за $a=1$)

$$y=C\sin x+\sqrt{1-C^2}\cos x.$$

II. пример: за линеарну једначину првога реда

$$y'=uy+v$$

(где су u и v дате функције променљиве x) израз (230) је облика

$$(u'+u^2)+\frac{1}{y}(v'+uv);$$

да би он био независан од y, потребно је и довољно да буде

$$u=-\frac{v'}{v} \tag{234}$$

и да одговарајућа функција

$$f(x)=-(u'+u^2)$$

буде позитивна. Пошто се тада налази да је

$$u'+u^2=\frac{2v'^2-vv''}{v^2},$$

то поред услова (234), треба још да је у посматраном размаку (a, b) и израз

$$vv''-2v'^2$$

позитиван, или да фунција

$$\frac{v''}{v}-2\left(\frac{v'}{v}\right)^2$$

наизменце прелази од једнога знака на други.

Али једначина (228) *није једина диференцијална једначина другога реда која има осцилаторне интеграле.* Тако, постоји бескрајно много, како алгебарских, тако и трансцендентних функција $F(x, y)$ које, кад се променљива x буде мењала у једноме датоме размаку (a, b), остају непрестано *позитивне и веће од једнога сталног позитивног броја* N, па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили у F променљиву y.

Таква би н. пр. једна функција, међу алгебарским функцијама, био полином $P(x, y)$ по променљивој y, који садржи само *парне* степене те променљиве, са коефицијентима који су, као и $P(x, 0)$ или сталне *позитивне* количине, или ма какве функције променљиве x позитивне у размаку (a, b). Таква би, такође међу трансцендентним функцијама, била функција

$$F(x, y)=f(x)+\varphi(x)\,e^{-P(x,y)}, \tag{235}$$

где је P ма какав полином, а f и φ ма какве функције променљиве x, коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b).

У исто време, постоји и бескрајно много, како алгебарских, тако и трансцендентних функција $\Phi(x, y)$ таквих да, док се x мења у једном датом размаку (a, b), вредност је функције непрестано позитивна и налази се између два стална броја N и M $(N < M)$ па ма каквом реалном вредношћу (коначном или бескрајном) сменили у њој y.

Таква би н. пр. била функција

$$\Phi(x, y) = \frac{u + vy^2}{w + sy^2},$$

где су u, v, w, s или сталне позитивне количине, или коначне, неприкидне и позитивне функције променљиве x у размаку (a, b). Таква би била и функција

$$\Phi(x, y) = \frac{u^2 + v^2 y^4}{(u + vy^2)^2}.$$

Са тако дефинисаним функцијама F и Φ има се, дакле, резултат:

Диференцијална једначина

$$y'' + y\,F(x, y) = 0 \tag{236}$$

има као квалитативни први интеграл

$$\frac{y''}{y} = \lambda, \quad \left|\begin{array}{c} a < x < b \\ N < \lambda < +\infty \end{array}\right|, \tag{237}$$

а диференцијална једначина

$$y'' + y\Phi(x, y) = 0 \tag{238}$$

има као такав интеграл

$$\frac{y''}{y} = \mu, \quad \left|\begin{array}{c} a < x < b \\ N < \mu < M \end{array}\right|. \tag{239}$$

Из овога се непосредно изводе закључци везани за такве прве интеграле, а који су напред наведени, т. ј.

1° сваки интеграл y, кад год су он и његов први и други извод коначне и непрекидне функције променљиве x у размаку (a, b) довољно пространом да би се у њему могао испољити осцилаторни карактер, биће *осцилаторан*: имаће у томе размаку само простих нула, мењајући знак сваки пут при проласку кроз сваку од ових;

2° интеграл y једначине (236) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полу-таласа, колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ садржана у вредности $b-a$;

3° интеграл y једначине (238) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полу-таласа, колико се пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ садржи у вредности $b-a$, *а највише* онолико колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ садржана у $b-a$.

Тако н. пр. једначини

$$y'' + \alpha y + \beta y^3 = 0$$

(α, β позитивне константе), а која се интеграли помоћу елиптичких функција, одговара функција

$$F(x, y) = \alpha + \beta y^2,$$

чија је вредност увек већа од α; њен ће интеграл, дакле, имати у размаку (a, b) *најмање* онолико полу-таласа колико се пута број $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ садржи у разлици $b-a$.

Једначини

$$(u + vy^2)\,y'' + y\sqrt{v^2y^4 + u^2} = 0 \tag{240}$$

[u и v су или сталне позитивне количине, или функције променљиве x, које су коначне, непрекидне и позитивне у размаку (a, b)] одговара функција

$$\Phi(x, y) = \frac{\sqrt{u^2 + v^2y^4}}{u + vy^2},$$

чија вредност, за све вредности x у размаку (a, b) и за све реалне вредности y, лежи у размаку између $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Према томе је

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\ldots, \qquad M = 1$$

и интеграл y једначине (240) има у размаку (a, b) *најмање* онолико полу-таласа, колико се пута број $\pi\sqrt[4]{2}$ садржи у разлици $b-a$, а *највише* онолико полу-таласа колико се пута број π садржи у тој разлици.

Услов да би општи интеграл једне диференцијалне једначине првога реда

$$y' = f(x, y)$$

задовољавао једну једначину облика (236) или (238), састоји се у овоме: *треба да се израз*

$$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

своди на једну функцију $F(x, y)$ *или* $\Phi(x, y)$.

XXVI. Размаци за интеграле система симултаних једначина.

Систем симултаних једначина

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{241}$$

може такође имати, за своје реалне, коначне и непрекидне интеграле $y_1, y_2, \dots, y_n$, квалитативних првих интеграла

$$\Phi = \lambda, \quad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ M_1 < \lambda < M_2 \end{array} \right|, \tag{242}$$

где је Φ једна одређена функција једне или више непознатих $y_1, y_2, \dots, y_n$, променљиве x и извода непознатих функција y_k по x; Φ може, уосталом, зависити и од почетних вредности функција y_k.

Тако, кад год се, међу једначинама (241), налази једна или више једначина облика

$$\frac{dy_k}{dx} = y_k f_k \tag{243}$$

где је f_k каква функција променљиве x и непознатих y_k, по вредности непрестано већа од једног сталног позитивног броја N за све реалне (коначне или бескрајне) вредности променљивих што у њој фигуришу, *свакој таквој једначини* (241) *одговараће по један квалитативни први интеграл облика*

$$\frac{1}{y_k}\frac{dy_k}{dx} = \lambda, \quad \left| \begin{array}{c} -\infty < x < +\infty \\ N < \lambda < +\infty \end{array} \right|.$$

Из таквог се првог интеграла могу извести напред наведени закључци за интеграл y_k, везани за егзистенцију првих интеграла таквих облика. Тако, *интеграл* y_k *система* (241), *који за* $x = x_0$ *има вредност* $y = y_{k,0}$ *биће, за сваку реалну вредност* x, *по апсолутној вредности већи од*

$$y_{k,0}\, e^{N(x-x_0)};$$

он неће имати реалних нула и т. д.

Диференцијалењем једне, ма које, од једначина (241) добија се једначина облика

$$\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx},$$

која, према самим једначинама (241) постаје

$$\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_1\frac{\partial f_k}{\partial y_1} + f_2\frac{\partial f_k}{\partial y_2} + \dots + f_k\frac{\partial f_k}{\partial y_n},$$

према чему је

$$\frac{1}{y_k}\frac{d^2y_k}{dx^2} = \frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum_{i=1}^{i=n} f_i\,\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right), \quad (k = 1, 2, \dots n).$$

И тада, кад год један или више израза

$$\frac{1}{y_k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + \sum f_i\,\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right)$$

за вредности x у размаку (a, b) остаје по вредности непрестано мањи од једног негативног сталног броја $-N$, а већи од једнога негативног сталног броја $-M$, па ма какве реалне вредности имали $y_1, y_2, \dots, y_k$, *k-тој једначини* (241) *одговараће по један квалитативан први интеграл облика*

$$\frac{1}{y_k}\frac{d^2y_k}{dx^2} = \lambda, \qquad \left| \begin{array}{c} a < x < b \\ -M < \lambda < -N \end{array} \right| .$$

А из егзистенције таквог првог интеграла, закључује се на напред показани начин:

1⁰ *да је интеграл* y_k, *који за* $x = x_0$ *има вредност* $y = y_{k,0}$ *састављен из позитивних и негативних полу-таласа* од којих се сваки може изразити у облику

$$y = y_{k,0} \cos\left[(x - x_0)\,\mu\right], \qquad \left| \begin{array}{c} x_1 < x < x_2 \\ \sqrt{N} < \mu < \sqrt{M} \end{array} \right| ,$$

где су x_1 и x_2 крајеви полу-таласа;

2⁰ *да се дужина* l *полу-таласа може изразити у облику*

$$l = \frac{\pi}{\sqrt{M}} + \vartheta\pi\left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{M}}\right);$$

3⁰ ако се са p и q означе цели бројеви, који показују колико је пута вредност $\frac{\pi}{\sqrt{N}}$ и $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ садржана у разлици $b-a$, *број* h *полу-таласа у размаку* (a, b) *биће*

$$h = p + \vartheta'(q-p).$$

Пример: нека је дат систем

$$(244) \qquad \frac{dy_1}{dx} = \alpha y_2 y_3, \qquad \frac{dy_2}{dx} = \beta y_1 y_3, \qquad \frac{dy_3}{dx} = \gamma y_1 y_2$$

(α, β, γ константе), на који се наилази у проблему кретања чврстог тела и чији се интеграли изражавају помоћу елиптичких функција.

Диференцијалењем прве једначине добија се

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha\left(y_2\frac{dy_3}{dx} + y_3\frac{dy_2}{dx}\right)$$

што, према другој и трећој једначини, даје

$$(245) \qquad \frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha\left(\gamma y_2^2 + \beta y_3^2\right),$$

а сличне се једначине добијају и за изразе

$$\frac{1}{y_2}\frac{d^2y_2}{dx^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{y_3}\frac{d^2y_3}{dx^2}.$$

Кад су β и γ *истога знака*, израз (245) може бити једнак нули само за такву једну реалну вредност $x = x'$, за коју би било у исти мах $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$. Али, те две функције не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$. Јер, узастопним диференцијалењем једначина (244) добио би се за ма који извод интеграла y_1 један израз који и сам постаје једнак нули кад је $y_2 = 0$ и $y_3 = 0$, т. ј. за $x = x'$. А пошто вредност n-тог извода функције y_1 за $x = x'$, подељен са $n!$, претставља коефицијенат од $(x-x')^n$ у развитку интеграла y_1 у Taylor-ов ред (који, према основној теореми о егзистенцији интеграла симултаних једначина, мора бити конвергентан у близини вредности $x = x'$), то би сви ти коефицијенти, изузевши први, били једнаки нули, т. ј. интеграл y_1 би се идентички свео на константу. Према томе би се, на основу прве једначине (244) један од два интеграла y_2 и y_3 свео идентички на нулу, а према (245) и други. Кад год су, дакле, y_1 и y_2 праве функције променљиве x, оне не могу бити једнаке нули за једну исту вредност $x = x'$.

Из тога се закључује, да кад су β и γ *истога знака*, апсолутна вредност израза (245) за све реалне вредности x остаје непрестано *већа* од једнога сталног позитивног броја M, што значи *да систем* (244) *има један квалитативан први интеграл облика*

$$\frac{1}{y_1}\frac{d^2y_1}{dx^2} = \lambda,$$

$$\left| \begin{array}{c} -\infty < x < +\infty \\ M < \lambda < +\infty \end{array} \right| \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{c} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < \lambda < -M \end{array} \right|$$

(према томе да ли је заједнички знак констаната $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ позитиван или негативан) тако да се могу применити напред наведена посматрања.

XXVII. Размаци за интеграле парцијалних диференцијалних једначина.

Као и обичне диференцијалне једначине и систем симултаних једначина, тако и парцијалне једначине

$$(246) \qquad F\,(x_1, x_2, \ldots . x_n\,;\; V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots . \frac{\partial V}{\partial x_n}\,;\, \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \ldots .) = 0$$

могу имати квалитативних првих интеграла облика

$$(247) \qquad \Phi = \lambda, \qquad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\,,$$

за одређене области независно променљивих количина $x_1, \ldots x_n$, и за своје реалне интеграле V који, при томе, задовољавају још и какве дате услове.

Такве је прве интеграле могућно формирати н. пр. користећи се раније изведеним алгебарским или интегралним неједначинама, које би, примењене на израз F, дале могућности да се из његовог облика закључи о егзистенцији једнога израза Φ који би

1° зависио од променљивих $x_1, \ldots, x_n$, непознате функције V и њених парцијалних извода по тим променљивим;

2° остао, за посматрану класу интеграла V, непрестано у једноме одређеном размаку (λ_1, λ_2), а за све вредности $x_1, \ldots x_n$ што се налазе у једној опет одређеној области Δ.

Тако добивена једначина (247) претставља једну нову парцијалну једначину; ако се ова може интегралити за произвољну вредност λ, *тражени интеграл V налазиће се између двеју функција V_1 и V_2 које се добијају кад се у интегралу једначине* (247) *смени λ један пут са најмањом, а други пут са највећом вредношћу коју добија овај интеграл док се λ мења од λ_1 до λ_2*

Тако ће се добити интеграл V у *облику једнога размака.*

То ће овде бити објашњено на једноме важном типу парцијалних једначина првога реда, на које се наилази у општијим проблемима геометрије, механике и математичке физике. То је једначина

$$(248) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где је f дата функција независно променљивих количина $x_1, \ldots, x_n$.

Нека је Δ једна посматрана област променљивих $x_1, \ldots x_n$, па уочимо оне интеграле V једначине (248), који су у тој области реални и такви да им сваки од парцијалних извода

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

у тој области задржава непроменљив знак. Означимо са s_k јединицу узету са непроменљивим знаком извода $\frac{\partial V}{\partial x_k}$, па се једначина (248) може написати у облику

$$(249) \qquad \sqrt{\left(s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2} = \varphi\,(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

где је

$$(250) \qquad \varphi\,(x_1, \ldots x_n) = \sqrt{f\,(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Пошто се, као што је напред показано, вредност на левој страни једначине (249) у којој су сви чланови

$$s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad s_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}, \ldots, s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

очевидно позитивни, налази у размаку између

$$\frac{P}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad P\,,$$

где је

$$P = s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\,,$$

то се једначина (250) може написати у облику

$$(251) \qquad s_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + s_n \frac{\partial V}{\partial x_n} = \lambda\varphi\,(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{n}$$

(где за φ треба узети позитивну детерминацију квадратног корена на левој страни једначине 250).

Једначина (251) *претставља један квалитативни први интеграл дате једначине* (248).

Једначина се (251) може интегралити за произвољну вредност λ, и то по обичном упуству за интеграцију линеарних парцијалних једначина првога реда. По томе упуству треба образовати систем

$$s_1 \frac{dx_1}{1} = s_2 \frac{dx_2}{1} = \ldots = s_n \frac{dx_n}{1} = \frac{dV}{\lambda\varphi}\,,$$

из кога се добија

$$(252)\qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{s_1}{s_2}x_1 + C_1, \\ x_3 &= \frac{s_1}{s_3}x_1 + C_2, \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= \frac{s_1}{s_n}x_1 + C_{n-1} \end{aligned}$$

као и једначина

$$(253)\qquad \frac{dV}{dx_1} = s_1\lambda\varphi .$$

Ако се, према општем упуству за ту интеграцију, на десној страни једначине (253) смене $x_2, x_3, \ldots x_n$ њиховим вредностима (252), та једначина постаје

$$(254)\qquad \frac{dV}{dx_1} = s_1\lambda\psi(x_1, C_1, C_2, \ldots C_{n-1}),$$

где је ψ одређена функција променљиве x_1, која садржи $n-1$ произвољних констаната $C_1, \ldots C_{n-1}$; та ће функција бити одређена непосредно поменутом сменом.

Из (254) се добија интеграцијом

$$(255)\qquad V = s_1\int \lambda\psi\, dx_1 + C_n ,$$

где је C_n једна нова интеграциона константа.

Према датој једначини (248), функција f као збир квадрата реалних количина увек је позитивна; према томе је функција φ, па дакле и функција ψ, увек реална и од нуле различна у области Δ. Функција ψ задржава, дакле, непроменљив знак у тој области и онда, применом обичне теореме за средње вредности интеграла, налази се да је

$$\int \lambda\psi\, dx_1 = \mu\int \psi\, dx_1 \qquad 1 < \mu < \sqrt{n},$$

тако, да једначина (255) постаје

$$(256)\qquad V = s_1\mu\int \psi dx_1 + C_n .$$

Међутим, из (252) и (256) је

$$C_k = x_{k+1} - \frac{s_1}{s_{k+1}}x_1, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$C_n = V - s_1\mu F(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

где је

$$F(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1}) = \int \psi(x_1, C_1, \ldots, C_{n-1})\, dx_1 .$$

Према упутству за интеграцију линеарних парцијалних једначина ако се означи да је

$$(257)\qquad \begin{aligned} u_k &= s_{k+1}x_{k+1} - s_1 x_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ u_n &= V - s_1\mu F(x_1, u_1, \ldots, u_{n-1}), \end{aligned}$$

сваки интеграл V посматране врсте мора задовољавати по једну једначину облика

$$(258)\qquad H(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

где је H функција само променљивих $u_1, \ldots, u_n$; обрнуто, свакој произвољно узетој функцији H одговара један интеграл V.

Решењем једначине (258) по u_n, а с обзиром на последњу од једначина (257), добија се интеграл V у облику

$$(259)\qquad V = s_1\mu F(x_1, u_1, \ldots u_{n-1}) + \Phi(u_1, \ldots, u_{n-1}),$$

где је Φ произвољна функција променљивих $u_1, \ldots u_{n-1}$.

Свакоме партикуларном интегралу V посматране врсте одговара у изразу (259) по једна специјална функција Φ, и свакој произвољно узетој функцији Φ одговара по један партикуларни интеграл V. Тај ће интеграл, а за вредности $x_1, \ldots, x_n$ садржане у области Δ, лежати у размаку између

$$s_1 F + \Phi \quad \text{и} \quad s_1\sqrt{n}F + \Phi.$$

Функција F, као шта се види из горе наведеног, добија се из дате функције f помоћу једне просте квадратуре. На тај начин, *сви интеграли V посматране врсте добијају се у облику размака, помоћу једне просте квадратуре.* Произвољна функција Φ одређује се, као и увек код парцијалних једначина, помоћу почетних услова које има да задовољи интеграл V што се има у виду.

Пример: нека је дата једначина

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2=(x_2-x_1)^4,$$

па потражимо њене реалне интеграле чији је извод $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ непрестано негативан, а извод $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ непрестано позитиван у датој области Δ равни (x_1, x_2). Тада је

$$s_1=-1,\ s_2=+1$$

и

$$\varphi(x_1, x_2)=(x_2-x_1)^2,$$

тако да се има формирати систем

$$-\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{1}=\frac{dV}{\lambda(x_2-x_1)^2}, \qquad 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2}.$$

Одатле је

$$x_2=-x_1+C_1,$$

$$u_1=x_2+x_1.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=-\lambda(x_2-x_1)^2=-\lambda(C_1-2x_1)^2,$$

и према томе

$$V=\mu\frac{(C_1-2x_1)^3}{6}+C_2, \qquad 1\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{2},$$

$$F(x_1, C_1)=-\frac{(C_1-2x_1)^3}{6},$$

$$F(x_1, u_1)=-\frac{(x_2-x_1)^3}{6}.$$

Сваки од тражених интеграла V биће, дакле, облика

$$V=\mu\frac{(x_2-x_1)^3}{6}+\Phi(x_1+x_2),$$

где је Φ функција једне променљиве. Број μ зависи од x_1 и x_2, али за све вредности тих променљивих, што се налазе у области Δ, остаје непрестано у размаку између 1 и $\sqrt{2}$. Он достиже

своју граничну вредност $\mu=1$ за оне парове вредности x_1, x_2, за које један или други од извода $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial V}{\partial x_2}$ постаје једнак нули; он такође достиже своју граничну вредност $\sqrt{2}$ за оне парове вредности x_1, x_2 за које је

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=-\frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \text{т. ј.} \quad \frac{\partial V}{\partial x_1}+\frac{\partial V}{\partial x_2}=0.$$

Свакој функцији Φ (која се може произвољно бирати) одговара по један размак горње врсте у коме се налази један партикуларни интеграл V. Узевши н. пр. $\Phi=\text{const}$ добијају се интеграли облика

$$V=\mu\frac{(x_2-x_1)^3}{6}+\text{const.},$$

који се сви могу изразити у облику

$$V=(1+0{,}4142\,\vartheta)\frac{(x_2-x_1)^3}{6}+\text{const.}, \qquad 0\leqslant\vartheta\leqslant 1.$$

Интеграл V те врсте који н. пр. постаје једнак нули за $x_1=x_2$ лежаће у области између функција

$$\frac{(x_2-x_1)^3}{6} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{6}(x_2-x_1)^3,$$

т. ј. између функција

$$0{,}1667\,(x_2-x_1)^3 \quad \text{и} \quad 0{,}2357\,(x_2-x_1)^3.$$

ИСПРАВКЕ.

Стр.	Ред		На место	Треба
3	13	одоздо	са реалним	са позитивним
8	8	одозго	$(-\lambda, +\lambda)$	$(-1, +1)$
10	13	»	(a, b)	$(0, b)$
»	10	одоздо	$m, a_1 a_2 \ldots a_p 9$	$m, a_1 a_2 \ldots a_p 999 \ldots$
»	8	»	$+\frac{9\vartheta}{10^{p+1}}$	$+\frac{\vartheta}{10^{p}}$
»	7	»	$+\frac{4,5}{10^{p+1}}(1+\omega)$	$+\frac{5}{10^{p+1}}(1+\omega)$
»	4	»	3,1411 и 3,1419	3,141 и 3,142
»	2	»	$+\vartheta\,.\,0,0009$	$+\vartheta\,.\,0,001$
»	1	»	3,14145	3,1415
11	7	одозго	амплитуде	размаци
»	13	»	$f(\lambda_2)\quad\varphi(\mu_2)$	$f(\lambda_2)=\varphi(\mu_2)$
12	14	»	$f(\lambda_2)\,\varphi=(1)=u+v$	$f(\lambda_2)=\varphi(1)=u+v$
»	3	одоздо	$2u$	$2v$
»	1	»	ϑu	$2\vartheta v$
16	14	»	$2\vartheta' uv$	$2\omega uv$
»	6	»	u^2+	u^3+
21	15	»	$+\vartheta \frown +x)$	$+\vartheta\,(1+x)$
26	5	»	$+y^2-0$	$+y^2=0$
27	9	»	изоставити $b^2-ac \geqslant 0$.	
31	13	одозго	h за које је $1+\frac{h}{n}$	$h>0$
32	3	»	$\sqrt[n]{z}=1+$	$\sqrt[n]{z}=1-$
37	10	»	$>$	$\geqslant$
»			редове 11—13 изоставити.	
38	1	»	1 и 2	$-1,\ 0$
44	15	одоздо	(45)	(43)
49	8	одозго	изоставити $x_2=$	
51	1	одоздо	изоставити $-nf\left(\frac{s}{n}\right)$	
53	11	одозго	средњи образац сменити са $H=e^{s}-ne^{\frac{s}{n}}+n-1$	
55	14	»	$\lambda\,(a_1^2-2a_2)$	$\lambda\,(a_1^2-2a_2)^k$
56	11	одоздо	неки могу бити и једнаки	ни један не сме бити једнак
57	9	»	$p=$	$p_k=$
58	15—17	одозго	$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$	$-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ -\alpha_3$
59	5	»	p^2-4q	$p^2=4q$
60	7	»	$\beta_{n-1}=\alpha_n+$	$\beta_{n-1}=\beta_n+$
»	8	»	$\beta_{n-2}=\alpha_{n-1}+$ $\beta_{n-3}=\alpha_{n-2}+$	$\beta_{n-2}=\beta_{n-1}+$ $\beta_{n-3}=\beta_{n-2}+$
»	9	»	$\beta_1=\alpha_2+\quad\beta_0=\alpha_1+$	$\beta_1=\beta_2+\quad\beta_0=\beta_1+$
»	16	одоздо	ϑ	ϑ'
»	9	»	$\beta_0=-2$	$\beta_0=2$
61	12	»	$-\varphi(x)$ и $-\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}$	$-\varphi^2(x)$ и $-\frac{\varphi^2(x)}{n}$
»	4	»	$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{n}}$ и $\varphi(x)$	$\frac{\varphi^2(x)}{n}$ и $\varphi^2(x)$
»	2	»	сменити образац са $-\varphi'(x)=\frac{1+\vartheta(n-1)}{n}\varphi^2(x)$	
62	5	»	$\frac{9\vartheta}{10^6}$	$\frac{\vartheta}{10^5}$
63	9	»	сменити образац овим $x=-\frac{a}{3}+\frac{2\omega}{3}\sqrt[3]{a^3-\frac{9}{2}ab+\frac{27}{2}c}$	
67	1	»	$\beta+\alpha$	α
68	6	»	$+\vartheta\,.\,0,4221$	$+\vartheta'\,.\,0,47$
»	1	»	0,164	0,104
70	8	одозго	8	4
71	13	»	претставник	претставници
72	3	»	$z+n-1$	$z+2n-1$
73	12	одоздо	0,83	0,85
79	11	»	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{c}{a+b}$
81	8	одозго	9	4
83	2	одоздо	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$
84	3	одозго	$R\sqrt[4]{\frac{3n^3}{8}}$	$nR\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$
»	5	»	$\sqrt{n}$	$\sqrt[4]{n^3}$ и према тој измени исправити и одговарајуће бројеве у редовима 7, 9, 11 одозго.
88	8	»	m^2	λ^2
89	12		на слици тачке пресека пречника са осама Ox и Oy означити са A и D.	
91	12	»	α	β

Стр.	Ред		На место	Треба
91	9	одоздо	$x \quad y = 2k\pi \pm \alpha$	$x - y = 2k\pi \pm \beta$
»	1	»	$\cos tg$	cotg
96	1	»	изоставити ϑ	
101	13	»	11 *m.*	7 *m.*
107	14	»	образац заменити овим $-\varphi'(x) = \frac{1+\vartheta\,(n-1)}{n}\,\varphi^2(x)$	
»	11	»	$\left(\frac{N}{\sqrt{n}},\ M\right)$	$\left(\frac{N^2}{n},\ M^2\right)$
109	7	»	0,52	0,524
111	1	одозго	*интеграла средњих вредности*	*средњих вредности интеграла*
112	5	одоздо	заменити образац овим $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} - \dots$	
129	14	одозго	C	P
130	8	»	0,0864 R	0,0864
»	11	одоздо	$Oy =$	$y =$
134	9	одозго	другог знака =	знак —
136	1	»	реални	позитивни
136	11	»	после обрасца (156) ставити $\frac{1}{2^{\frac{m-1}{m}}} \leqslant \lambda \leqslant 1$.	
»	12 и 13	»	изоставити	
138	5	одоздо	$\int\limits_a^{2\pi}$	$\int\limits_0^{2\pi}$
140	10	»	$\varphi(0)$	$f(0)$
	8	»	$\varphi(1)$	$f(1)$
	4	»	$\frac{2}{2^k} + \frac{3}{3^k} + \dots$	$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$
141	6 и 16	одозго	y	$\lvert y \rvert$
146	2	„	$J(x)$	$1 + x\,J(x)$
»	2	одоздо	$J(x)$	$1 + x\,J(x)$
147	3 и 4	одозго	$R_n(x)$	$R_4(x)$
	5	»	x^6	x^5
160	3	»	пре	при
164	2	одоздо	и y'	y и y'
172	7	»	y'^2	$-y'^2$
»	»	»	λ	λ'
174	10	»	(2 8)	(219)
175	11 и 15	одозго	$(n+1)$	$(n+2)$