COURS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A LA MÊME LIBRAIRIE

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Géométrie élémentaire, à l'usage des élèves des classes de lettres, 5e éd. (G. Masson, éd.).
PREMIÈRE PARTIE, *Géométrie plane* (classes de quatrième et de troisième). Un vol. in-18, relié en toile 1 75
DEUXIÈME PARTIE, *Géométrie dans l'espace* (classes de seconde et de rhétorique). Un vol. in-18, relié en toile 1 50
Les deux parties reliées en un volume relié en toile .... 3 »

Éléments de Géométrie, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire spécial, conformes aux programmes du 10 août 1886, 4e éd. (G. Masson, édit.).
PREMIÈRE PARTIE, Cours de première, de deuxième et de troisième années. 1 vol. in-18, relié en toile 2 60
DEUXIÈME PARTIE, Cours de quatrième, de cinquième et de sixième années. 1 vol. in-18, relié en toile 1 80
Les deux parties réunies en un volume, comprenant toutes les questions du programme de mathématiques élémentaires, 1 vol. relié en toile .... 4 »

Cours de Géométrie, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, avec des compléments à l'usage des candidats à l'École normale et à l'École polytechnique, 3e édit. (G. Masson, éd.) .... 8 »

Précis de trigonométrie, de la collection du baccalauréat ès sciences, 7e éd. (G. Masson, éd.), 1 vol. in-18, broché 1 20
Id. cartonné 1 40

Cours de Trigonométrie, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, avec des compléments destinés aux élèves de mathématiques spéciales, par Ch. VACQUANT, inspecteur général de l'Instruction publique, et par A. MACÉ DE LÉPINAY, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, 3e éd. (G. Masson, éd.).
PREMIÈRE PARTIE, destinée aux élèves de mathématiques élémentaires et aux élèves de cinquième année d'enseignement spécial... 3 »
DEUXIÈME PARTIE, destinée aux élèves de mathématiques spéciales, comprenant toutes les questions de trigonométrie, non comprises dans le cours de mathématiques élémentaires, demandées aux candidats à l'École normale et à l'École polytechnique 2 50
Les deux parties réunies en un volume .... 5 »

Éléments d'algèbre, à l'usage des élèves des classes de lettres et de mathématiques préparatoires, 9e éd. (Delagrave, éd.). 1 vol. in-18.. 2 50

Principes d'algèbre, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire spécial (Ch. Delagrave, éd.). 9e éd., rédigée conformément aux programmes du 10 août 1890.
PREMIÈRE ET DEUXIÈME PARTIES, Cours de troisième et de quatrième années, 1 vol. in-18 .... 2 75
TROISIÈME PARTIE, Cours de cinquième année, 1 vol. in-18..... 2 »

Leçons d'algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et des candidats aux Écoles du gouvernement. 1 vol. in-8, 9e éd., augmentée d'un complément sur les déterminants (Ch. Delagrave, éd.) .... 6 »

9669-2730-1100 — CORBEIL. Imprimerie CRÉTÉ. 84-91.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Avec des Compléments

DESTINÉS AUX CANDIDATS A L'ÉCOLE NORMALE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

CH. VACQUANT
Ancien élève de l'École normale,
Ancien professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis,
Inspecteur général de l'Instruction publique.

TROISIÈME ÉDITION
REVUE ET CORRIGÉE

PARIS
G. MASSON, ÉDITEUR
LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXX

AVIS

Le corps de l'ouvrage forme un cours de géométrie à l'usage des classes de mathématiques élémentaires.

Les passages marqués d'un astérisque ne sont pas exigés pour le baccalauréat.

Les compléments, imprimés en petits caractères, sont destinés aux candidats à l'École normale et à l'École polytechnique.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Des figures. — Ligne droite, ligne brisée, ligne courbe. — Plan. — Objet et divisions de la Géométrie. — Explication de quelques termes. — Mesures des grandeurs; rapport de deux grandeurs de même espèce. — Théorèmes concernant les rapports de grandeurs de même espèce.

Définitions.

1. Des figures. — Un corps occupe dans l'espace indéfini une certaine étendue que l'on nomme *volume*.

Le volume d'un corps est limité et est séparé de l'espace qui l'entoure par un lieu que l'on nomme *surface*.

On appelle *ligne* l'intersection de deux surfaces qui se rencontrent.

On appelle *point* l'intersection de deux lignes qui se rencontrent.

On considère les volumes, les surfaces, les lignes et les points indépendamment des corps qui en ont donné l'idée, et on leur donne le nom commun de *figures*.

2. On peut imaginer qu'un point, une ligne ou une surface d'étendue limitée, se déplace dans l'espace; dans ce mouvement, le point décrit une ligne, la ligne engendre une surface, et la surface engendre un volume.

3. Ligne droite. — Parmi toutes les lignes que l'on peut concevoir, la plus simple est celle dont un fil tendu nous offre l'image : on la nomme *ligne droite*, ou simplement *droite*. Nous avons tous l'idée de la ligne droite, et telle que nous la concevons elle est douée de la propriété suivante :

D'un point A *à un point* B, *on peut toujours mener une droite, et on n'en peut mener qu'une* (*fig.* 1). C'est ce qu'on exprime en disant que *deux points déterminent une droite.* On peut concevoir cette droite prolongée indéfiniment dans les deux sens, et si une seconde droite passe par les deux points A et B, elle coïncide avec la première, non seulement entre les points A et B, mais aussi sur les prolongements de la droite dans les deux sens.

Fig. 1.

4. Une *droite* est en général supposée illimitée dans les deux sens; lorsqu'on la limite dans un sens par un point pris sur cette droite, tout en la laissant illimitée dans l'autre sens, on a ce que l'on nomme une *demi-droite*. La partie d'une droite comprise entre deux points de cette droite est appelée *portion* de droite.

5. On dit que deux portions de droites AB, CD, ont des *longueurs égales*, lorsqu'elles sont superposables, c'est-à-dire lorsqu'on peut placer (*fig.* 2) la droite CD sur la droite AB de façon que le point C coïncide avec le point A et le point D avec le point B.

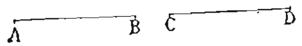


Fig. 2.

Si, sur une droite indéfinie RR' (*fig.* 3), les points A, B, C, D, etc., sont disposés de telle sorte qu'un mobile partant du point A, et se déplaçant sur cette droite dans un sens déterminé, rencontre successivement le point B, puis le point C, puis le point D, etc., on dit que la longueur AC est la *somme* des longueurs AB et BC, que la longueur AD est la *somme* des longueurs AB, BC et CD, et ainsi de suite, et on écrit :

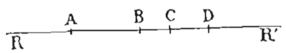


Fig. 3.

$$AC = AB + BC \qquad AD = AB + BC + CD, \text{ etc.}$$

Pour faire la somme de plusieurs portions de droites, il suffit donc de les porter, à la suite les unes des autres, sur une même ligne droite.

Une longueur qui est la somme de deux autres est dite plus grande que chacune d'elles.

Si une longueur AL est la somme de m longueurs égales à la longueur AB, on dit que la longueur AL est égale à m fois

la longueur AB, et que AB est la m^e partie de AL, et on écrit :

$$AL = m\,AB \qquad AB = \frac{1}{m}\,AL.$$

Si une longueur AB est égale à m fois la n^e partie d'une longueur AC, on écrit :

$$AB = \frac{m}{n}\,AC.$$

6. Ligne courbe. — Une ligne composée de portions de lignes droites est dite *brisée ;* une ligne qui n'est ni droite, ni composée de lignes droites, est appelée ligne *courbe*. La ligne ABCDE (*fig.* 4) est une ligne brisée; la ligne MNP (*fig.* 5) est une ligne courbe.

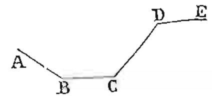


Fig. 4.

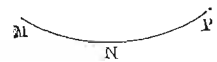


Fig. 5.

7. Plan. — La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*. C'est une surface telle que la droite qui passe par deux quelconques de ses points est tout entière située sur cette surface.

Une surface d'une eau tranquille, une glace bien polie offrent l'image d'une surface plane.

8. Objets et divisions de la Géométrie. — La Géométrie a pour objet l'étude des propriétés des figures. Elle est divisée en deux parties : *Géométrie plane*, *Géométrie de l'espace*.

Dans la Géométrie plane, on ne s'occupe que des figures planes, c'est-à-dire des figures qui ont tous leurs éléments situés dans un même plan. Dans la Géométrie de l'espace, on considère des figures dont les éléments sont situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Explications de quelques termes.

9. Une *proposition* consiste dans l'énoncé d'une hypothèse et d'une conséquence.

En prenant pour hypothèse la conséquence, et pour conséquence l'hypothèse d'une proposition, on forme une nouvelle proposition que l'on nomme la *réciproque* de la première.

En prenant pour hypothèse et pour conséquence la négation de l'hypothèse et la négation de la conséquence d'une proposition, on forme une nouvelle proposition que l'on dit la *contraire* de la première.

Exemple : soient A, B, Q, R, des nombres entiers tels que l'on ait

$$A = B \times Q + R.$$

Proposition directe : Si un nombre est diviseur commun à A et à B, il est diviseur commun à B et à R.

Proposition réciproque : Si un nombre est diviseur commun à B et à R, il est diviseur commun à A et à B.

Proposition contraire : Si un nombre n'est pas diviseur commun à A et à B, il n'est pas diviseur commun à B et à R.

Lorsqu'une proposition est vraie, la réciproque et la contraire peuvent être fausses. Mais, si l'une de ces deux dernières propositions est vraie en même temps que la directe, il en est de même de l'autre.

10. Un *axiome* est une proposition évidente sans démonstration. Exemple :

Deux grandeurs égales à une troisième sont égales entre elles.

11. Un *théorème* est une proposition dont la vérité doit être mise en évidence à l'aide d'une démonstration.

Un *lemme* est une proposition préliminaire établie pour faciliter la démonstration d'un théorème.

12. On appelle *corollaire* une conséquence d'un théorème non comprise dans l'énoncé du théorème.

13. Un problème est une question à résoudre.

Mesure des grandeurs.

14. Pour mesurer une grandeur on fait choix d'une grandeur de même espèce, que l'on prend pour unité, et l'on cherche combien de fois la grandeur qu'il s'agit de mesurer contient soit l'unité, soit une partie *aliquote* de l'unité, c'est-à-dire une partie obtenue en partageant cette unité en un certain nombre de parties égales.

Pour fixer les idées, supposons que la grandeur à mesurer soit la longueur d'une portion de droite ; désignons cette longueur par A. Prenons pour unité la longueur d'une autre portion de droite, et désignons cette longueur par B.

Si la longueur A contient l'unité B un nombre exact de fois,

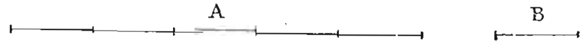


Fig. 6.

5 fois par exemple (*fig.* 6), le nombre 5 est la *mesure* de la longueur A. Si la longueur A ne contient pas un nombre exact de fois l'unité B, on partage cette unité en un certain nombre de parties égales, et l'on cherche combien de ces parties contient la longueur A. Supposons, par exemple, que l'unité B ait été partagée en 7 parties égales, et que A contienne 12 de ces

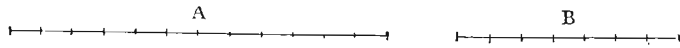


Fig. 7.

parties (*fig.* 7) : la fraction $\frac{12}{7}$ est la *mesure* de la longueur A.

Plus généralement, si la n^e partie de B est contenue m fois dans A, la *mesure* de A, lorsqu'on prend B pour unité, est la fraction $\frac{m}{n}$.

Lorsqu'une *partie aliquote* de B est contenue un nombre exact de fois dans A, cette partie aliquote de B est dite une *commune mesure* entre A et B, et les longueurs A et C sont dites *commensurables*. Tant qu'il en est ainsi, on sait mesurer exactement la longueur A en prenant la longueur B pour unité, et la *mesure* est un nombre entier ou fractionnaire.

15. Mais il peut arriver qu'il n'y ait aucune partie aliquote de B, si petite qu'elle soit, qui soit contenue un nombre exact de fois dans A ; dans ce cas, on dit que les longueurs A et B, qui n'ont pas de commune mesure, sont *incommensurables*.

Lorsque la longueur à mesurer A et l'unité choisie B sont incommensurables, au lieu de mesurer la longueur A elle-même, on mesure deux longueurs A_1, A_2, commensurables avec l'unité B, l'une inférieure, l'autre supérieure à A, et les nombres ainsi obtenus sont appelés des *mesures approchées* de A, l'une par défaut, l'autre par excès. Partageons par exemple B en 7 parties égales, et supposons que la longueur A soit supérieure à 12 de

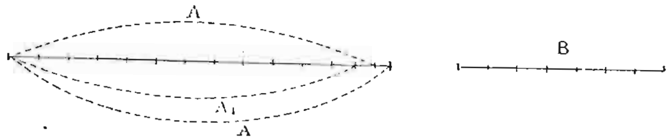


Fig. 8.

ces parties, et inférieure à 13 (*fig.* 8); la longueur A se trouve ainsi comprise entre une longueur A_1 égale à $\frac{12}{7}$ de B, et une longueur A_2 égale à $\frac{13}{7}$ de B. Les nombres $\frac{12}{7}$ et $\frac{13}{7}$, mesures des longueurs A_1 et A_2, seront dits des *mesures approchées* de A, l'une par défaut, l'autre par excès. Comme les longueurs A_1 et A_2 comprennent la longueur A, et diffèrent entre elles de $\frac{1}{7}$ de l'unité B, chacune de ces longueurs diffère de A de moins de $\frac{1}{7}$ de l'unité; pour cette raison nous dirons que les nombres $\frac{12}{7}$ et $\frac{13}{7}$ sont des *mesures approchées* de A, à moins de $\frac{1}{7}$.

Plus généralement, si la longueur A est supérieure à m fois et inférieure à $m+1$ fois la n^e partie de B, les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, mesures de deux longueurs A_1 et A_2 qui comprennent A, et telles que chacune d'elles diffère de A de moins de $\frac{1}{n}$ de l'unité B, sont dits des *mesures approchées* de la longueur A, *à moins de* $\frac{1}{n}$.

Imaginons que l'on fasse croître le nombre entier n indéfiniment suivant une loi quelconque; les longueurs mesurées A_1, A_2, comprendront toujours la longueur à mesurer A; leur différence $A_2 - A_1$, qui est la n^e partie de B, finira par devenir aussi petite que l'on voudra, et, à plus forte raison, la différence

de chacune de ces longueurs avec A finira aussi par devenir aussi petite que l'on voudra. On exprime ce fait en disant que, lorsque le nombre n croît indéfiniment, les longueurs A_1 et A_2, que l'on mesure ainsi, *tendent vers une limite commune* qui est la longueur A. Cela étant, les nombres qui mesurent ces longueurs doivent tendre aussi vers une limite commune; mais cette limite ne peut être ni un nombre entier, ni un nombre fractionnaire; puisqu'aucune partie aliquote de B n'est contenue un nombre exact de fois dans A : on lui donne le nom de *nombre incommensurable*. C'est cette limite commune qu'on appelle *mesure* de la longueur A, quand on prend la longueur B pour unité.

Ainsi, par définition, *la mesure d'une grandeur incommensurable avec l'unité est la limite vers laquelle tendent les mesures de grandeurs qui sont commensurables avec l'unité, et qui ont elles-mêmes pour limite la grandeur donnée.*

Nous avons supposé, pour fixer les idées, que la grandeur à mesurer est la longueur d'une portion de droite, mais ce qui précède s'applique également à la mesure d'une grandeur d'autre espèce quelconque, pourvu que l'on ait défini ce qu'on entend par deux grandeurs de cette espèce *égales* entre elles, et par la *somme* de plusieurs grandeurs de cette espèce.

Théorèmes concernant les rapports de grandeurs de même espèce.

16. On appelle *rapport* d'une grandeur A à une autre grandeur de même espèce B le nombre, commensurable ou incommensurable, qui est la mesure de A lorsque l'on prend B pour unité. Pour indiquer ce rapport on emploie la notation $\frac{A}{B}$; cette notation n'a par elle-même aucun sens, parce que les lettres A et B ne sont ici que des noms donnés aux grandeurs, et non les nombres qui les mesurent, mais elle est employée pour abréger l'écriture.

Si les deux grandeurs sont commensurables, et si la mesure de A, avec B pour unité, est la fraction $\frac{m}{n}$, on a

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}.$$

Si ces grandeurs ne sont pas commensurables, et si les nombres $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$, sont deux mesures approchées de A, avec B pour unité, on a

$$\frac{m}{n} < \frac{A}{B} < \frac{m+1}{n}$$

17. *Par définition*, on dit que le rapport de deux grandeurs de même espèce, incommensurables, A et B, est *égal* au rapport de deux autres grandeurs de même espèce, incommensurables, C et D, lorsque les valeurs approchées du premier rapport, à moins de $\frac{1}{n}$, sont égales aux valeurs approchées du second rapport, à moins de $\frac{1}{n}$, quel que soit n.

Théorème.

18. *Soient* A, B, C, *trois grandeurs quelconques de même espèce, le rapport de* A *à* B *est égal au quotient du rapport de* A *à* C, *par le rapport de* B *à* C.

Supposons d'abord les grandeurs A et B commensurables avec C; soit par exemple :

$$\frac{A}{C} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \frac{B}{C} = \frac{5}{11}.$$

On a, en réduisant les deux fractions $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$ au même dénominateur,

$$\frac{A}{C} = \frac{4 \times 11}{77} \qquad \frac{B}{C} = \frac{5 \times 7}{77}$$

ce qui veut dire que la 77^e partie de C est contenue 4×11 fois dans A, et 5×7 fois dans B. Si donc on partage B en 5×7 parties égales, A contient exactement 4×11 de ces parties. Donc la mesure de A, avec B pour unité, ou le rapport de A à B, est le nombre $\frac{4 \times 11}{5 \times 7} = \frac{4}{7} : \frac{5}{11}$. Donc on a

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} : \frac{B}{C}.$$

19. Examinons maintenant le cas où les grandeurs A et B sont incommensurables avec la grandeur C. Soient A′ et B′, deux grandeurs variables, commensurables avec C, et ayant respectivement pour limites A et B; on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A'}{C} : \frac{B'}{C}.$$

Lorsque les grandeurs variables A′ et B′ tendent simultanément vers leurs limites A et B, les rapports $\frac{A'}{C}$, $\frac{B'}{C}$ tendent (15), le premier vers $\frac{A}{C}$, le second vers $\frac{B}{C}$. Nous allons montrer que dans les mêmes conditions, quelle que soit la grandeur C, le rapport $\frac{A'}{B'}$ tend vers la limite $\frac{A}{B}$.

En effet, soient $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\alpha+1}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta+1}{\gamma}$, les mesures de A et de B, avec C pour unité, à moins de $\frac{1}{\alpha}$.

Posons :

$$A_1 = \frac{\alpha}{\gamma} C, \qquad A_2 = \frac{\alpha+1}{\gamma} C, \qquad B_1 = \frac{\beta}{\gamma} C, \qquad B_2 = \frac{\beta+1}{\gamma} C.$$

On a les inégalités :

$$A_1 < A < A_2$$
$$B_1 < B < B_2$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{A_1}{B_2} < \frac{A}{B} < \frac{A_2}{B_1}$$

On a d'ailleurs

$$\frac{A_1}{B_2} = \frac{\alpha}{\gamma} : \frac{\beta+1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta+1}$$

$$\frac{A_2}{B_1} = \frac{\alpha+1}{\gamma} : \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+1}{\beta},$$

de sorte que les inégalités précédentes peuvent s'écrire :

$$\frac{\alpha}{\beta+1}<\frac{A}{B}<\frac{\alpha+1}{\beta}$$

Si l'on fait croître γ indéfiniment, les rapports $\frac{\alpha}{\beta+1}$ et $\frac{\alpha+1}{\beta}$ tendent à devenir égaux. En effet, le quotient du second divisé par le premier, $\frac{\alpha+1}{\beta}:\frac{\alpha}{\beta+1}$, est égal au produit $\frac{\alpha+1}{\alpha}\times\frac{\beta+1}{\beta}$, ou encore au produit $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$; or, quand le nombre γ croît indéfiniment, les nombres α et β augmentent aussi indéfiniment; les inverses $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ tendent vers zéro, et le produit $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ tend vers l'unité. Les rapports $\frac{\alpha}{\beta+1}$, $\frac{\alpha+1}{\beta}$, c'est-à-dire les rapports $\frac{A_1}{B_2}$, $\frac{A_2}{B_1}$, comprennent le rapport $\frac{A}{B}$; ils tendent à devenir égaux; donc ils ont pour limite commune le rapport $\frac{A}{B}$.

Les grandeurs variables A' et B', par hypothèse, ont respectivement pour limites les grandeurs A et B; cela veut dire que la loi des variations de ces grandeurs est telle que A' finit par tomber et rester indéfiniment comprise entre deux grandeurs, l'une inférieure, l'autre supérieure à A, et différant entre elles d'aussi peu que l'on voudra, et que B' finit de même par tomber et rester indéfiniment comprise entre deux grandeurs, l'une inférieure, l'autre supérieure à B, et différant entre elles d'aussi peu que l'on voudra. On peut donc supposer que l'on a, quelque grand que soit γ,

$$A_1 < A' < A_2$$
$$B_1 < B' < B_2$$

d'où

$$\frac{A_1}{B_2}<\frac{A'}{B'}<\frac{A_2}{B_1}.$$

Or, les rapports $\frac{A_1}{B_2}$, $\frac{A_2}{B_1}$, quand γ augmente indéfiniment ont pour limite commune le rapport $\frac{A}{B}$; donc le rapport $\frac{A'}{B'}$, qui est compris entre $\frac{A_1}{B_2}$ et $\frac{A_2}{B_1}$, a aussi pour limite $\frac{A}{B}$

Ceci posé, reprenons l'égalité

$$\frac{A'}{B'}=\frac{A'}{C}:\frac{B'}{C}.$$

Lorsque les grandeurs A' et B' tendent simultanément vers leurs limites A et B, le rapport $\frac{A'}{B'}$ tend vers $\frac{A}{B}$, les rapports $\frac{A'}{C}$, $\frac{B'}{C}$ tendent vers les rapports $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$

L'égalité $\frac{A'}{B'}=\frac{A'}{C}:\frac{B'}{C}$, qui ne cesse pas d'être vraie, montre que le quotient $\frac{A'}{C}:\frac{B'}{C}$ tend vers une limite déterminée $\frac{A}{B}$ lorsque les grandeurs A' et B' tendent simultanément vers leurs limites A et B; c'est cette limite que l'on convient d'appeler quotient du nombre incommensurable $\frac{A}{C}$ divisé par le nombre incommensurable $\frac{B}{C}$

On a donc encore dans ce cas

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}:\frac{B}{C}.$$

Remarque. *Le rapport $\frac{A}{B}$ est égal au produit des rapports $\frac{A}{C}$ et $\frac{C}{B}$.*

En effet, d'après le théorème précédent, on a, dans tous les cas,

$$\frac{A}{C}=\frac{A}{B}:\frac{C}{B};$$

or, la division étant l'opération inverse de la multiplication, on en déduit

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{B}.$$

Théorème.

20. *Si quatre grandeurs de même espèce* A, B, A', B', *sont telles que l'on a*

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},$$

on aura aussi

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}.$$

En effet, supposons d'abord les rapports égaux $\frac{A}{B'}$, $\frac{A'}{B'}$, commensurables, et soit

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Cela veut dire qu'une certaine grandeur C est contenue α fois dans A et β fois dans B, et qu'une certaine grandeur C' est contenue α fois dans A' et β dans B'. On peut donc poser :

$$A=\alpha\, C \qquad A'=\alpha\, C'$$
$$B=\beta\, C \qquad B'=\beta\, C'.$$

On en déduit :

$$\frac{C}{C'}=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}.$$

Si les rapports égaux $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ sont incommensurables, soient $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha+1}{\beta}$, les valeurs approchées de ces rapports à moins de $\frac{1}{\beta}$; on a les inégalités

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{A}{B}<\frac{\alpha+1}{\beta}$$
$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{A'}{B'}<\frac{\alpha+1}{\beta}$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{\alpha}{\beta}B<A<\frac{\alpha+1}{\beta}B$$
$$\frac{\alpha}{\beta}B'<A'<\frac{\alpha+1}{\beta}B'.$$

De ces dernières inégalités on déduit :

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}B}{\frac{\alpha+1}{\beta}B'}<\frac{A}{A'}<\frac{\frac{\alpha+1}{\beta}B}{\frac{\alpha}{\beta}B'}$$

ou encore

$$\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{B}{B'}<\frac{A}{A'}<\frac{\alpha+1}{\alpha}\frac{B}{B'}$$

ou encore

$$\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)\frac{B}{B'}<\frac{A}{A'}<\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{B}{B'}$$

Ces inégalités subsistent quel que soit β. Or, si l'on fait croître β au delà de toute limite, α croît aussi au delà de toute limite, et les nombres $1-\frac{1}{\alpha+1}$, $1+\frac{1}{\alpha}$ tendant tous deux vers 1, les deux rapports

$$\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)\frac{B}{B'}, \qquad \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\frac{B}{B'}$$

ont pour limite commune $\frac{B}{B'}$. Le rapport $\frac{A}{A'}$ compris entre deux rapports variables qui ont pour limite commune $\frac{B}{B'}$ est lui-même égal à $\frac{B}{B'}$.

Théorème.

Soient A, A' A'' A''',....., *et* B, B', B'', B'''......, *deux séries de grandeurs de même espèce proportionnelles, c'est-à-dire telles que l'on ait*

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}=\frac{A'''}{B'''}=\ldots\ldots ,$$

chacun de ces rapports est aussi égal au rapport

$$\frac{A+A'+A''+A'''+\ldots\ldots}{B+B'+B''+B'''+\ldots\ldots}.$$

Supposons d'abord les rapports donnés commensurables, et égaux à $\frac{\alpha}{6}$; cela veut dire qu'une certaine grandeur C est contenue α fois dans A, et 6 fois dans B; qu'une certaine grandeur C' est contenue α fois dans A' et 6 fois dans B'... etc., de sorte que l'on peut poser :

$$\begin{array}{llll} A=\alpha C & A'=\alpha C' & A''=\alpha C'' & A'''=\alpha C''' \ldots \\ B=6C & B'=6C' & B''=6C'' & B'''=6C''' \ldots \end{array}$$

On en conclut :

$$\begin{aligned} A+A'+A''+A'''+\ldots &= \alpha(C+C'+C''+C'''+\ldots) \\ B+B'+B''+B'''+\ldots &= 6(C+C'+C''+C'''+\ldots) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{A+A'+A''+A'''+\ldots}{B+B'+B''+B'''+\ldots}=\frac{\alpha}{6}.$$

Si les rapports égaux sont incommensurables, supposons que les valeurs de ces rapports, à moins de $\frac{1}{6}$, soient $\frac{\alpha}{6}$ et $\frac{\alpha+1}{6}$.

On aura les inégalités

$$\frac{\alpha}{6}B < A < \frac{\alpha+1}{6}B$$

$$\frac{\alpha}{6}B' < A' < \frac{\alpha+1}{6}B'$$

$$\frac{\alpha}{6}B'' < A'' < \frac{\alpha+1}{6}B''$$

$$\frac{\alpha}{6}B''' < A''' < \frac{\alpha+1}{6}B'''$$

. . . .

. . . .

et, en ajoutant membre à membre,

$$\frac{\alpha}{6}(B+B'+B''+B'''+\ldots) < A+A'+A''+A'''+\ldots < \frac{\alpha+1}{6}(B+B'+B''+B'''\ldots)$$

ou

$$\frac{\alpha}{6} < \frac{A+A'+A''+A'''+\ldots}{B+B'+B''+B'''+\ldots} < \frac{\alpha+1}{6}.$$

Les valeurs approchées, à moins de $\frac{1}{6}$, des rapports donnés et celles du rapport $\frac{A+A'+A''+A'''\ldots}{B+B'+B''+B'''\ldots}$ étant égales, quel que soit β, ces rapports sont égaux (17).

On démontrerait de la même façon que les rapports égaux $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A'''}{B'''}$, ... sont aussi égaux au rapport

$$\frac{\lambda A+\lambda' A'+\lambda'' A''+\lambda''' A'''+\ldots}{\lambda B+\lambda' B'+\lambda'' B''+\lambda''' B'''+\ldots}$$

où λ, λ', λ'', λ''',... sont des nombres quelconques, positifs ou négatifs.

LIVRE PREMIER

LIGNE DROITE

§ I. Angles. — § II. Triangles et polygones. — § III. Perpendiculaire et obliques menées d'un point à une ligne droite. — Lieu géométrique des points équidistants de deux points. — § IV. Cas d'égalité des triangles rectangles. — Lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent. — § V. Droites parallèles. — § VI. Somme des angles d'un polygone. — § VII. Parallélogrammes. — § VIII. Droites concourantes dans un triangle.

§ I. — Angles.

22. On appelle *angle* la figure formée par deux demi-droites OA, OB, partant d'un même point O dans deux directions différentes, et limitées à ce point O ; le point O est le sommet de l'angle, les demi-droites OA, OB sont ses côtés (*fig.* 9).

On désigne l'angle de deux demi-droites OA, OB, soit par

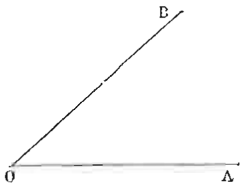


Fig. 9.

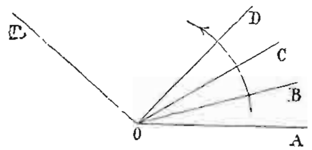


Fig. 10.

la lettre du sommet O, soit par les trois lettres AOB, la lettre du sommet étant placée entre les deux autres. Quand plusieurs angles ont même sommet, on désigne chaque angle par trois lettres, afin d'éviter toute confusion.

23. On dit que deux angles sont *égaux* lorsqu'ils sont superposables.

24. Si les demi-droites OA, OB, OC, OD,... OR, menées par le point O (*fig.* 10), sont dirigées de telle façon qu'une demi-droite mobile d'abord appliquée sur OA et tournant autour

du point O, dans un sens déterminé, vienne se placer successivement sur la demi-droite OB, puis sur la demi-droite OC, puis sur la demi-droite OD, et ainsi de suite, on dit que l'angle AOC est la *somme* des angles AOB, BOC, que l'angle AOD est la *somme* des angles AOB, BOC, COD, et ainsi de suite, et on écrit :

$$AOC = AOB + BOC, \qquad AOD = AOB + BOC + COD, \text{ etc.}$$

Un angle égal à la somme de deux angles est dit *plus grand* que chacun d'eux.

Si l'angle AOR est la somme de m angles égaux à l'angle AOB, on dit que l'angle AOR est égal à m fois l'angle AOB, et que l'angle AOB est la m^e partie de l'angle AOR, et on écrit :

$$AOR = m.\,AOB \qquad AOB = \frac{1}{m}.\,AOR.$$

Si un angle AOB est égal à m fois la n^e partie d'un angle AOC, on écrit :

$$AOB = \frac{m}{n}\,AOC.$$

25. On appelle *angles adjacents* deux angles qui ont même sommet, un côté commun, et sont situés de part et d'autre de leur côté commun. Tels sont les angles AOC, BOC (*fig.* 11).

26. On appelle *angles opposés par le sommet* deux angles tels que chaque côté de l'un soit le prolongement d'un côté de l'autre, en sens contraire. Tels sont les angles AOB et COD (*fig.* 12).

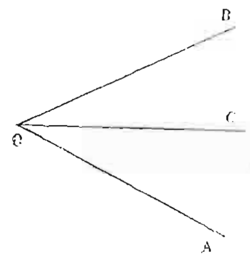


Fig. 11.

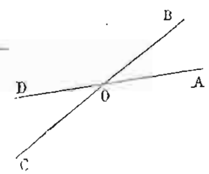


Fig. 12.

27. On appelle *bissectrice* d'un angle AOB (*fig.* 11) une demi-droite OC qui partage l'angle AOB en deux angles égaux BOC, COB.

28. Une demi-droite OC, qui rencontre une droite AB au point O, fait avec elle, d'un même côté de cette droite, deux angles adjacents COA, COB. Si les angles adjacents COA, COB

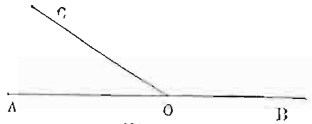


Fig. 13.

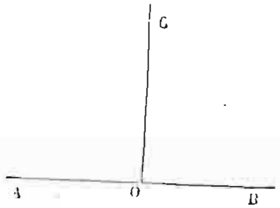


Fig. 14.

sont inégaux, et c'est le cas général (*fig.* 13), la demi-droite OC est dite *oblique* à la droite AB; si ces angles sont égaux, la demi-droite OC est dite *perpendiculaire* sur la droite AB (*fig.* 14).

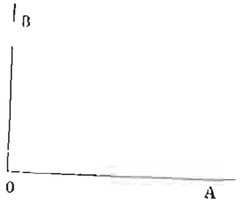


Fig. 15.

Le point O est le pied de la perpendiculaire ou de l'oblique.

29. On dit qu'un angle AOB est droit, quand l'un de ses côtés est perpendiculaire à l'autre (*fig.* 15).

Théorème.

30. *Par un point* O *d'une droite* AB *on peut toujours mener d'un côté de cette droite une demi-droite* OC *perpendiculaire à* AB, *et on n'en peut mener qu'une* (*fig.* 16).

Supposons que la demi-droite OC, d'abord appliquée sur OA, tourne autour du point O, dans le sens indiqué par la flèche, jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur OB. L'angle AOC, d'abord nul, augmente sans cesse, tandis que l'angle BOC diminue sans cesse jusqu'à devenir nul. L'angle AOC, d'abord inférieur à l'angle BOC, s'en rapproche de plus en plus, lui devient égal, puis supérieur, et s'en écarte ensuite de plus en plus. Il y a donc, parmi les positions intermédiaires de la demi-droite OC, une position OD, et *une seule*, pour laquelle les angles adjacents AOD, BOD sont égaux, c'est-à-dire pour laquelle cette demi-droite est perpendiculaire à AB.

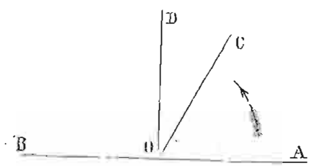


Fig. 16.

31. Corollaire. *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient deux angles droits AOB, A'O'B' (*fig.* 17). Portons le second angle sur le premier, de façon que le côté O'A' s'applique sur le côté OA, le point O' sur le point O et que le côté O'B' soit, par rapport à OA, du même côté que OB. La demi-droite O'B', perpendiculaire à O'A', se placera sur la seule demi-droite OB perpendiculaire à OA, que l'on puisse mener par le point O du même côté que OB par rapport à OA; donc les angles droits AOB, A'O'B' sont égaux.

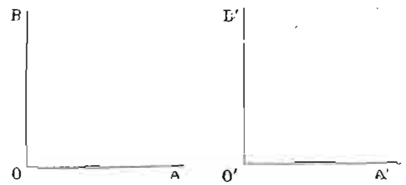


Fig. 17.

32. Tous les angles droits étant égaux, l'angle droit est un type invariable auquel on peut comparer les autres angles.

On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* selon qu'il est plus petit ou plus grand qu'un angle droit. L'angle AOC (*fig.* 18) est un angle *aigu*, tandis que l'angle BOC est un angle *obtus*.

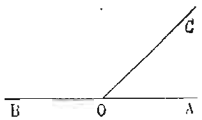


Fig. 18.

33. Deux angles sont dits *complémentaires* quand leur somme vaut un droit, *supplémentaires* quand leur somme vaut deux droits.

Théorème.

34. *Quand deux angles adjacents ont leurs côtés extérieurs en ligne droite, leur somme est égale à deux angles droits.*

Soient les deux angles adjacents AOC et BOC, dont les côtés extérieurs OA et OB sont en ligne droite (*fig.* 19) : la somme de ces angles vaut deux angles droits.

En effet, au point O, du même côté que OC par rapport à la droite AB, menons la demi-droite OD perpendiculaire à la droite AB, et imaginons qu'une demi-droite mobile, tournant autour du point O dans le sens indiqué par la flèche, vienne de la position OA à la position OB; cette demi-droite a tourné d'un certain angle que l'on peut regarder comme la somme des angles AOC et COB, et aussi comme la somme des angles droits AOD et DOB. Donc la somme des angles AOC et COB équivaut à deux angles droits.

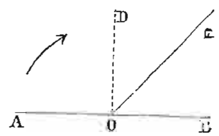


Fig. 19.

35. Corollaire I. *La somme des angles* AOC, COD,... LOB, (*fig.* 20), *formés autour d'un point* O, *d'un même côté d'une droite* AB, *recouvrant toute la portion du plan située d'un même côté de cette droite* AB, *sans que deux angles recouvrent une même portion du plan, vaut deux angles droits.*

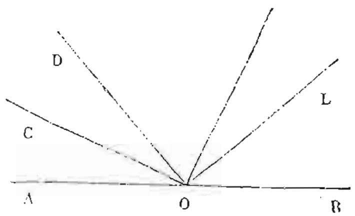


Fig. 20.

En effet, la somme de ces angles équivaut à la somme des deux angles AOC, COB, laquelle vaut deux angles droits.

36. Corollaire II. *La somme des angles* AOB, BOC, COD,... LOA (*fig.* 21), *formés autour du point* O, *et recouvrant tout le plan, sans que deux de ces angles recouvrent une même portion du plan, vaut quatre angles droits.*

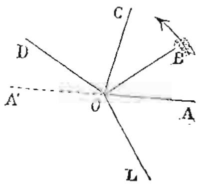


Fig. 21.

En effet, soit OA′ le prolongement de AO ; la somme des angles considérés équivaut à la somme des angles formés autour du point O d'un côté de AA′, plus la somme des angles formés autour du point O de l'autre côté de AA′. Chacune de ces deux sommes valant deux angles droits, la somme totale des angles formés autour du point O, et recouvrant tout le plan, vaut quatre angles droits.

Théorème.

37. *Réciproquement si deux angles adjacents sont supplémentaires ils ont leurs côtés extérieurs en ligne droite.*

En effet, soient deux angles adjacents AOC, COB, supplémentaires (*fig.* 22). Le prolongement de AO fait avec OC un angle qui, d'après le théorème précédent, est supplémentaire de l'angle AOC, et qui, par conséquent, est égal à l'angle COB. Donc le prolongement de AO coïncide avec OB, et les côtés extérieurs des angles AOC, COB sont en ligne droite.

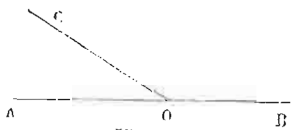


Fig. 22.

38. Corollaire. *Les deux demi-droites* OB, OB′, *perpendiculaires à une droite* AA′, *que l'on peut mener, de part et d'autre de* AA′, *par un point* O *situé sur* AA′, *sont dans le prolongement l'une de l'autre* (*fig.* 23).

La droite indéfinie BOB′, dont les deux parties OB, OB′ sont perpendiculaires à la droite AA′, est dite *une droite perpendiculaire à* AA′. Par un point O, puis sur une droite AA′, on peut mener une droite perpendiculaire à AA′ et on n'en peut mener qu'une.

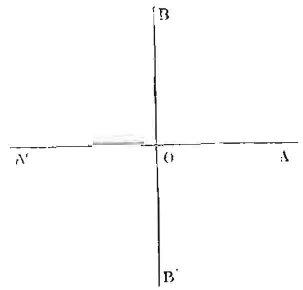


Fig. 23.

Si la droite BOB′ est perpendiculaire à la droite AOA′, réciproquement, la droite AOA′ est perpendiculaire à la droite BOB′, car chacune des demi-droites OA, OA′ est perpendiculaire à la droite BOB′.

39. Chacune des droites indéfinies AOA′, BOB′ étant perpendiculaire à l'autre, on dit que *les deux droites sont perpendiculaires.*

Théorème.

40. *Deux angles opposés par le sommet sont égaux*

Soient AOB, A′OB′, deux angles opposés par le sommet (*fig.* 24).

Les angles adjacents AOB, qui ont les côtés extérieurs en ligne droite, sont supplémentaires; les angles adjacents A′OB′, AOB sont aussi supplémentaires, pour la même raison. Donc les angles AOB, A′OB′, tous deux supplémentaires du même angle AOB′, sont égaux.

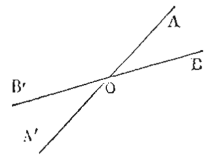


Fig. 24.

41. Remarque. Deux droites qui se coupent forment quatre angles; deux quelconques de ces angles sont, ou égaux comme opposés par le sommet, ou supplémentaires comme angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite. Si l'un des quatre est droit, les trois autres angles sont droits.

Théorème.

42. *Les bissectrices des quatre angles formés par deux droites qui se coupent forment deux droites perpendiculaires.*

Soient AA′, BB′ deux droites qui se coupent au point O, et OC la bissectrice de l'angle AOB (*fig.* 25). On voit d'abord que le prolongement OC′ de la droite OC, en sens contraire, est la bissectrice de l'angle A′OB′. En effet, cette droite OC′ fait avec OA′ l'angle A′OC′ égal à l'angle AOC, et avec OB′ l'angle B′OC′ égal à l'angle BOC. Comme les angles AOC, BOC sont égaux par hypothèse, les angles A′OC′ et B′OC′ sont aussi égaux, et par conséquent le prolongement OC′ de OC est la bissectrice de l'angle A′OB′.

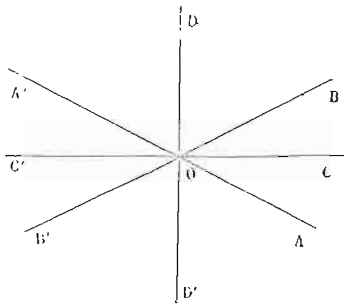


Fig. 25.

De même, si la droite OD est la bissectrice de l'angle BOA′, le prolongement OD′ de OD, en sens contraire, est la bissectrice de l'angle B′OA.

Enfin, la somme des angles AOB, BOA′ valant deux angles droits, l'angle COD qui est la somme des moitiés de ces angles, et qui, par conséquent, vaut la moitié de leur somme, est un angle droit. Donc les droites bissectrices des quatre angles sont les deux droites perpendiculaires CC′ et DD′.

Théorème.

43. *Par un point* O, *pris en dehors d'une droite* AB, *on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une* (*fig.* 26).

Faisons tourner la figure ABO autour de la droite AB, de manière à la rabattre sur la partie inférieure du plan; le point O vient se placer en un certain point O′. Menons la droite OO′, et soit C le point où cette droite rencontre AB. La droite CO venant, après le rabattement de la figure sur la partie inférieure du plan, se placer sur CO′, l'angle OCB est égal à l'angle

O′CB, et la droite OO′ qui fait avec la droite AB des angles adjacents égaux, est perpendiculaire sur cette droite.

D'ailleurs, toute droite menée du point O à un point D de AB, autre que C, est oblique à AB. En effet, menons la droite DO′; les angles ADO, ADO′ sont égaux, car ils coïncident quand on fait tourner la partie supérieure du plan autour de AB pour la rabattre sur la partie inférieure. Ces angles égaux ne sont pas supplémentaires, car ils sont adjacents et leurs côtés extérieurs ne sont pas en ligne droite; donc, ce ne sont pas des angles droits, et, par conséquent, la droite OD est oblique sur la droite AB.

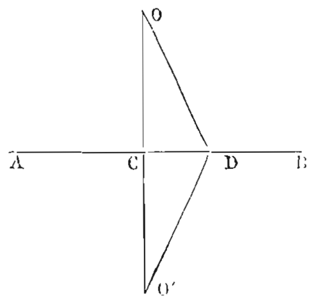


Fig. 26.

§ II. — Triangles et polygones.

44. Définitions. — On appelle *polygone* une portion de plan limitée de toutes parts par des portions de droites. Ces portions de droites sont les *côtés* du polygone; chacun des angles formés par deux côtés consécutifs est un *angle* du polygone; les sommets de ces angles sont les *sommets* du polygone. Une droite qui joint deux sommets non consécutifs est une *diagonale*.

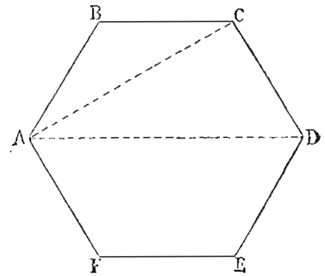


Fig. 27.

La figure 27 représente un polygone; les côtés du polygone sont les portions de droites AB, BC, CD, DE, EF, FA; les sommets sont les points A, B, C, etc.; les angles du polygone sont les angles ABC, BCD, CDE, etc.; les droites AB, AD, etc., sont les diagonales.

L'ensemble des côtés d'un polygone est une ligne brisée fermée.

45. Une ligne brisée est aussi appelée ligne *polygonale*; les portions de droites dont elle se compose sont les *côtés* de la ligne polygonale; la somme des côtés est appelée *périmètre*.

On dit qu'une ligne polygonale, ouverte ou fermée, est *convexe*, lorsqu'elle est tout entière d'un même côté par rapport à l'un quelconque de ses côtés supposé prolongé indéfiniment; dans le cas contraire on dit qu'elle n'est pas convexe. La ligne polygonale ABCDEF (*fig.* 28) est convexe;

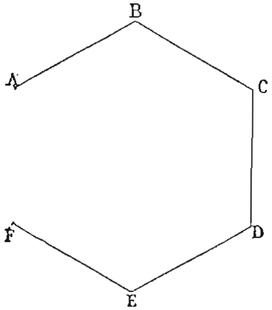


Fig. 28.

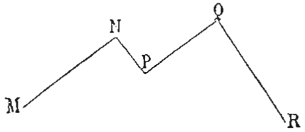


Fig. 29.

la ligne MNPQR (*fig.* 29) n'est pas convexe, car elle a des parties situées de part et d'autre de son côté NP.

46. Une droite ne peut rencontrer une ligne polygonale convexe en plus de deux points. Car, si une droite RR' (*fig.* 30) rencontre une ligne polygonale en trois points M, N, P, le point N étant entre les deux autres, les deux points M et P de la ligne polygonale sont de part et d'autre par rapport au côté de cette ligne qui contient le point N, et par conséquent la ligne polygonale n'est pas convexe.

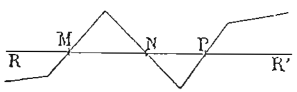


Fig. 30.

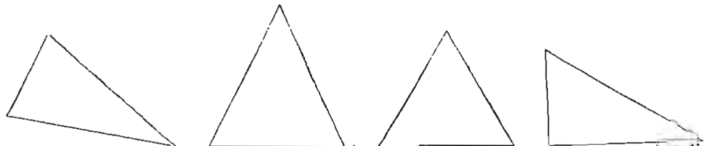
47. Un polygone est dit *convexe*, ou *non convexe*, selon que son contour est une ligne brisée *convexe*, ou *non convexe*.

Un polygone ne peut avoir moins de trois côtés; un polygone de trois côtés est un *triangle*. On appelle *quadrilatère*, *pentagone*, *hexagone*, etc., un polygone de quatre, cinq, six, etc. côtés.

Un triangle est dit *scalène* quand ses trois côtés sont inégaux, *isocèle* quand deux de ses côtés sont égaux, *équilatéral* quand ses trois côtés sont égaux. Si l'un des angles est droit, le triangle est dit *rectangle*, et le côté opposé à l'angle droit est appelé *hypoténuse*.

La droite menée du sommet d'un triangle au milieu du côté opposé est appelée *médiane*.

On appelle *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire menée d'un sommet du triangle au côté opposé; le côté perpendiculaire à la hauteur est appelé *base* du triangle. On peut prendre



Triangle scalène   Triangle isocèle   Triangle équilatéral   Triangle rectangle
Fig. 31.

pour base un quelconque des trois côtés. Dans le triangle isocèle, on désigne plus particulièrement sous le nom de *base* le côté opposé au point de concours des côtés égaux.

Théorème.

48. *Dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit, dans le triangle ABC (*fig.* 32), AB = AC; il faut démontrer que l'angle C est égal à l'angle B.

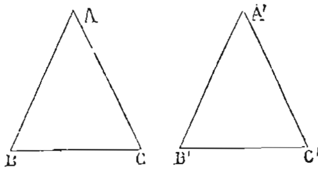


Fig. 32.

Imaginons que l'on détache du triangle ABC un triangle égal A'B'C', que l'on retourne ce triangle de façon que la face primitivement vue devienne la face cachée, et qu'on le transporte sur le triangle ABC de façon que l'angle A' coïncide avec l'angle A. Le côté A'C' prend la direction AB, et le côté A'B' prend la direction AC; comme le côté A'B', qui d'abord coïncidait avec AB, est par hypothèse égal au côté AB, le point C' tombe en B; pour la même raison, le point B' tombe en C, et les deux figures coïncident. Donc, l'angle C' est égal à l'angle B. Mais l'angle C' n'est autre chose que l'angle C; donc l'angle C est égal à l'angle B.

49. Remarque. Cette démonstration met en évidence cette propriété du triangle isocèle d'être *superposable à lui-même par retournement*.

50. Réciproquement. *Si, dans un triangle, deux angles sont égaux, les côtés opposés sont égaux.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 33), dans lequel B = C, il faut démontrer que AC = AB.

Détachons encore du triangle ABC un triangle égal A'B'C', retournons ce triangle, et portons-le sur le triangle ABC de façon que le côté B'C' tombe sur le côté égal BC, C' en B et B' en C. Comme l'angle C', qui d'abord coïncidait avec l'angle C, est par hypothèse égal à l'angle B, le côté C'A' prend la direction BA ; de même, l'angle B', qui d'abord coïncidait avec l'angle B, étant égal à C, le côté B'A' prend la direction CA, et le point A' tombe à la fois sur BA et sur CA, c'est-à-dire en A. Il suit de là que le côté A'B', qui d'abord coïncidait avec AB, coïncide maintenant avec AC, donc AC et AB sont égaux.

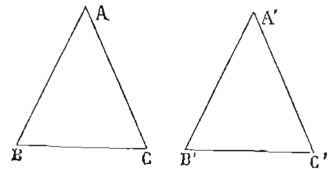


Fig. 33

51. Corollaire. *Un triangle équilatéral a ses trois angles égaux.* On exprime ce fait en disant que le triangle est *équiangle*

Réciproquement : *un triangle équiangle est équilatéral.*

Théorème.

52. *Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle compris entre les côtés égaux est perpendiculaire sur le troisième côté, et le partage en deux parties égales.*

Soit AD la bissectrice de l'angle A compris entre les côtés égaux AB, AC (*fig.* 34) ; il faut démontrer que les angles ADB, ADC sont égaux, et que DB = DC. Faisons tourner autour de AD la partie ADB de la figure pour la rabattre sur la partie ADC ; l'angle DAB étant égal à l'angle DAC, le côté AB vient se placer sur le côté AC, et, comme AB = AC, le point B vient coïncider avec le point C. Les deux triangles ADB, ADC, coïncidant, on a angle ADB = angle ADC, et DB = DC.

Fig. 34.

53. Remarque. La droite AD est à la fois la bissectrice de

l'angle A, la médiane issue du sommet A, la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté opposé, la perpendiculaire au côté BC menée par son milieu. Or, un seul de ces caractères suffit pour déterminer la droite AB. On peut donc déduire du théorème précédent les corollaires suivants :

54. Corollaire I. *Dans un triangle isocèle, la médiane menée par le point de concours des côtés égaux est bissectrice de l'angle formé par ces côtés et est perpendiculaire sur le troisième côté.*

55. Corollaire II. *Dans un triangle isocèle, la perpendiculaire menée du point de concours des côtés égaux sur le troisième côté est bissectrice de l'angle des côtés égaux, et passe par le milieu du troisième côté.*

56. Corollaire III. *Dans un triangle isocèle, la perpendiculaire menée à la base par son milieu passe par le sommet opposé et est bissectrice de l'angle formé par les côtés égaux.*

57. Égalité des triangles. — Les trois côtés et les trois angles d'un triangle forment six grandeurs que l'on nomme les six éléments du triangle.

On dit que deux triangles sont égaux quand ils sont superposables.

Quand deux triangles sont égaux, les six éléments de l'un sont respectivement égaux aux six éléments de l'autre.

Théorème.

58. *Deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, sont égaux.*

Soient les triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 35) ; si l'on a BC = B'C' B = B', C = C', ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de façon que le côté B'C' tombe sur le côté BC qui lui est égal, B' en B, C' en C. L'angle B' étant égal à l'angle B, le côté B'A' prend la direction BA, et le point A' tombe sur BA ; de même l'angle C' étant égal à

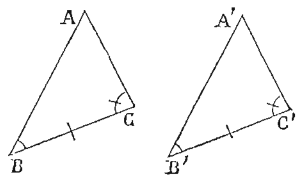


Fig. 35.

l'angle C, le côté C'A' prend la direction CA, et le point A' tombe sur CA. Le point A' tombant sur BA et sur CA, tombe nécessairement au point d'intersection A de ces deux droites. Donc les deux triangles coïncident et sont égaux.

59. Les trois égalités BC = B'C', B = B', C = C', entraînent, comme conséquences, les trois égalités : A = A', AB = A'B', AC = A'C'.

Théorème.

60. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux.*

Soient deux triangles ABC et A'B'C' (*fig.* 36), dans lesquels A = A', AB = A'B', AC = A'C' ; ces deux triangles sont égaux.

En effet, portons le triangle A'B'C' sur le triangle ABC, de façon que le côté A'B' tombe sur le côté AB, qui lui est égal, A' en A, B' en B. L'angle A' étant égal à l'angle A, le côté A'C' prend la direction AC, et comme d'ailleurs A'C' = AC, le point C' tombe en C. A' étant en A, B' en B, C' en C, les triangles coïncident ; donc ils sont égaux.

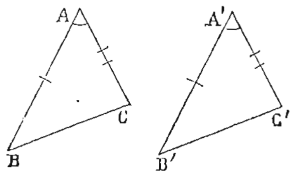


Fig. 36.

61. Les trois égalités A = A', AB = A'B', AC = A'C', entraînent, comme conséquences, les trois égalités : BC = B'C', B = B', C = C'.

Théorème.

62. *Deux triangles qui ont les trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux.*

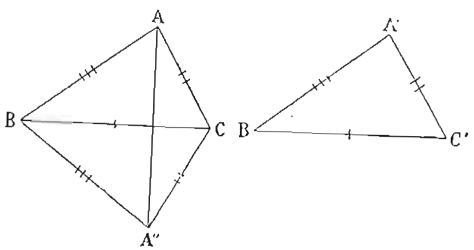


Fig. 37.

Soient les deux triangles ABC, A'B'C' (*fig.* 37), dans lesquels BC = B'C', AC = A'C', AB = A'B' ; ces deux triangles sont égaux.

En effet, transportons le triangle A'B'C' à côté du triangle ABC, en le retournant de façon

que le côté B'C' coïncide avec le côté égal BC, B' en B, et C' en C, et que le sommet A' tombe en A'' du côté opposé, par rapport à BC, à celui où est le sommet A. Les côtés BA, BA'' du triangle ABA'' étant égaux, la bissectrice de l'angle ABA'' est perpendiculaire à AA'', en son milieu (51) ; d'autre part, les côtés CA, CA'' du triangle ACA'' étant égaux, la perpendiculaire à AA'', en son milieu, passe par le point C (55) ; donc la bissectrice de l'angle ABA'' se confond avec la droite BC. Il suit de là que l'angle ABC est égal à l'angle A''BC, c'est-à-dire à l'angle A'B'C'. Donc, les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux chacun à chacun.

63. Les trois égalités AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C', entraînent, comme conséquences, les trois égalités C = C', B = B', A = A'.

64. Remarque. Des théorèmes précédents il résulte que deux triangles ont leurs six éléments égaux chacun à chacun dès qu'ils ont trois éléments égaux chacun à chacun, et que ces élément forment un des trois groupes suivants : 1° un côté et les deux angles adjacents ; 2° deux côtés et l'angle compris ; 3° les trois côtés.

Dans l'étude des figures, on se servira souvent de l'égalité de deux triangles pour démontrer soit l'égalité de deux angles soit l'égalité de deux portions de droite.

Théorème.

65. *Si l'on prolonge un côté d'un triangle, on forme un angle extérieur qui est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.*

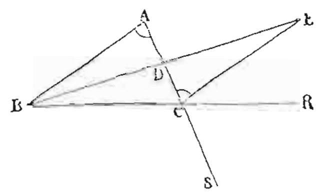


Fig. 38.

Soit, par exemple, l'angle extérieur ACR formé par le prolongement CR de BC, et par le côté CA (*fig.* 38) ; il faut montrer que cet angle est supérieur à chacun des angles A et B. Joignons le point B au milieu D de AC, prolongeons BD d'une longueur DE égale à BD, et menons la droite CE, droite qui tombe nécessairement dans l'angle ACR.

Les deux triangles ADB, CDE sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Il en résulte que l'angle DCE est égal à l'angle A; or, l'angle DCE n'est qu'une partie de l'angle ACR, donc l'angle ACR surpasse l'angle A.

En joignant le point A au milieu de BC on démontrerait de même que l'angle extérieur BCS formé par le prolongement CS de AC et par le côté CB surpasse l'angle B; or les angles BCS, ACR, opposés par le sommet, sont égaux; donc l'angle ACR surpasse aussi l'angle B.

Théorème.

66. *A deux côtés inégaux d'un triangle sont opposés des angles inégaux; au plus grand côté est opposé le plus grand angle.*

Soit, dans le triangle, ABC, AB > AC (*fig.* 39). Il faut démontrer que l'angle ACB surpasse l'angle ABC. Prenons sur AB la longueur AD égale à AC, et menons la droite DC.

L'angle ACB surpasse l'angle ACD; l'angle ACD est égal à l'angle ADC (48); et ce dernier angle extérieur au triangle BDC surpasse l'angle B. Donc, a *fortiori*, l'angle ACB surpasse l'angle ABC.

67. Réciproquement. *A deux angles inégaux d'un triangle*

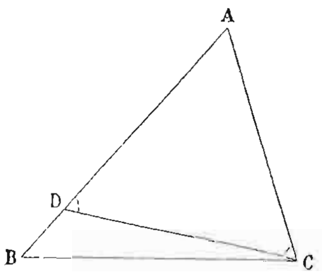


Fig. 39.

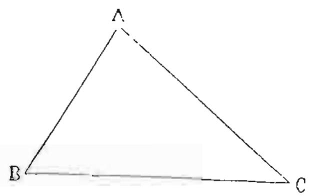


Fig. 40.

sont opposés des côtés inégaux; au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

Soit, dans le triangle ABC, B > C (*fig.* 40). Le côté AC surpasse le côté AB; car, s'il était moindre que AB, ou égal à

AB, l'angle B serait moindre que l'angle C (66), ou égal à l'angle C (48), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème.

68. *Dans un triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Par exemple, dans le triangle ABC, le côté BC est moindre que AB + AC (*fig.* 41). En effet, prolongeons BA d'une longueur AD égale à AC, et menons la droite CD.

Le triangle ADC étant isocèle, l'angle D est égal à l'angle ACD, et, par conséquent, est moindre que l'angle BCD. Donc, dans le triangle BCD, le côté BC opposé à l'angle D est moindre que le côté BD opposé à l'angle BCD. Mais BD est égal à AB + AC, donc on a

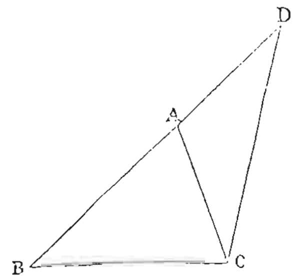


Fig. 41.

$$BC < AB + AC.$$

69. Corollaire. *Dans un triangle un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.*

Soit AB le plus grand des deux côtés AB et AC, le côté BC est plus grand que AB — AC. En effet, d'après le théorème précédent, on a

$$AB < BC + AC$$

et, en retranchant de part et d'autre AC,

$$AB - AC < BC$$

ou

$$BC > AB - AC.$$

Théorème.

70. *Une portion de ligne droite est plus courte que toute ligne brisée terminée aux mêmes extrémités.*

Soit la portion de droite AB et soit la ligne brisée ACDEFB terminée aux mêmes extrémités (*fig.* 42). Menons les droites AD, AE, AF; on a, en vertu du théorème précédent,

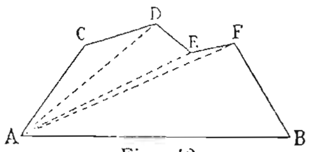


Fig. 42.

$$AD < AC + CD$$
$$AE < AD + DE$$
$$AF < AE + EF$$
$$AB < AF + FB$$

et, en ajoutant membre à membre, et supprimant les parties communes, on a

$$AB < AC + CD + DE + EF + FB$$

71. Corollaire I. *Le périmètre d'une ligne polygonale convexe est moindre que le périmètre de toute ligne polygonale qui l'enveloppe et est terminée aux mêmes extrémités.*

Soit la ligne polygonale convexe ABCDE, et la ligne polygonale AFGHKE qui l'enveloppe et qui est terminée aux mêmes extrémités A et E (*fig.* 43); la longueur de la première est moindre que la longueur de la seconde. En effet, prolongeons les côtés AB, BC, CD de la ligne polygonale convexe enveloppée jusqu'aux points M, N, P, où ils rencontrent la ligne polygonale enveloppante. Nous aurons les inégalités

$$AB + BM < AF + FM$$
$$BC + CN < BM + MG + GN$$
$$CD + DP < CN + NH + HK + KP$$
$$DE < DP + PE$$

et, en ajoutant membre à membre, supprimant les parties communes, et additionnant les diverses portions d'une même droite.

$$AB + BC + CD + DE < AF + FG + GH + HK + KE.$$

72. Corollaire II. *Le périmètre d'une ligne polygonale convexe fermée est moindre que le périmètre d'une ligne polygonale qui l'enveloppe de toutes parts.*

Soit la ligne polygonale convexe ABCDEA, et soit la ligne polygonale MNPQRM qui l'enveloppe de toutes parts (*fig.* 44); le périmètre de la première est moindre que celui de la seconde.

En effet, prolongeons un des côtés de la ligne enveloppée, AB par exemple, jusqu'aux point S et T où il rencontre la ligne enveloppante. On a, d'après ce qui précède, les inégalités

$$SA + AB + BT < SM + MN + NT$$
$$BC + CD + DE + EA < BT + TP + PQ + QR + RS + SA$$

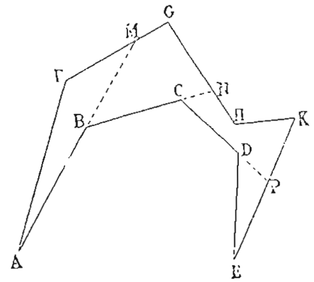


Fig. 43.

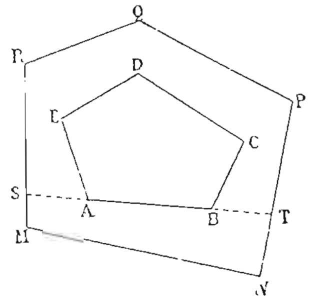


Fig. 44.

et, en ajoutant membre à membre et supprimant les parties communes,

$$AB + BC + CD + DE + EA < SM + MN + NT + TP + PQ + QR + RS$$

ou enfin, en remplaçant RS + SM par RM, et NT + TP par NP,

$$AB + BC + CD + DE + EA < MN + NP + PQ + QR + RM$$

Théorème.

73. *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun comprenant des angles inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux, et celui qui est opposé au plus petit angle est le plus petit.*

Soient les triangles ABC, DEF (*fig.* 45) dans lesquels on a

$$AB = DE, \quad AC = DF, \quad BAC < EDF.$$

Transportons le triangle ABC de façon que le côté AB tombe sur le côté égal DE, A en D, B en E, et que le triangle ABC soit, par rapport à DE, du même côté que le triangle DEF. L'angle BAC étant moindre que l'angle EDF, le côté AC tombera dans l'angle EDF, et le triangle ABC occupera la position EDG. Menons la bissectrice de l'angle GDF; elle rencontre le côté EF en un point I situé dans l'angle EDF, et, par conséquent, entre E et F. Les deux triangles DIG, DIF sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux

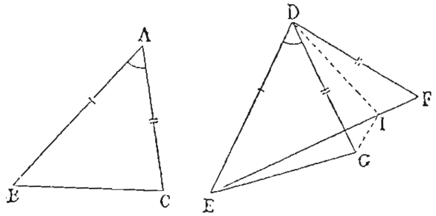


Fig. 45.

chacun à chacun, savoir : l'angle IDG égal à l'angle IDF par construction, le côté DI commun aux deux triangles, et les côtés DG et DF égaux parce qu'ils sont respectivement égaux à AC. Ces deux triangles étant égaux, IG est égal à IF. Or, dans le triangle EGI, on a

$$EG < EI + IG,$$

ou, en remplaçant IG par le côté égal IF,

$$EG < EI + IF \quad \text{ou} \quad EG < EF;$$

et, comme EG est égal à BC, on a enfin

$$BC < EF.$$

74. Remarque. Si, laissant fixes les longueurs des deux côtés AB et AC d'un triangle, on fait varier l'angle BAC compris entre ces côtés, le troisième côté BC du triangle varie; il augmente quand l'angle augmente, il diminue quand l'angle diminue.

75. Réciproquement. *Si deux triangles* ABC, DEF *ont deux côtés égaux chacun à chacun,* AB = DE, AC = DF, *et si les troisièmes côtés* BC, EF *sont égaux, les angles* A, D, *opposés aux côtés inégaux sont inégaux, et l'angle opposé au plus petit côté est le plus petit* (*fig.* 45).

Soit BC < EF, l'angle A est plus petit que l'angle D. En effet l'angle A ne peut être égal à l'angle D, sans quoi les deux triangles seraient égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et les troisièmes côtés BC, EF seraient égaux, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'autre part l'angle A ne peut être plus grand que l'angle D, sans quoi le côté BC serait plus grand que le côté EF, ce qui est encore contraire à l'hypothèse; donc l'angle A est moindre que l'angle D.

§ III. — Perpendiculaire et obliques menées d'un point a une ligne droite. — Lieu géométrique des points équidistants de deux points.

Théorème.

76. *Si d'un point on mène à une droite une perpendiculaire et diverses obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;*

2° *Deux obliques dont les pieds sont équidistants du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *La longueur d'une oblique est d'autant plus grande que son pied est plus éloigné du pied de la perpendiculaire.*

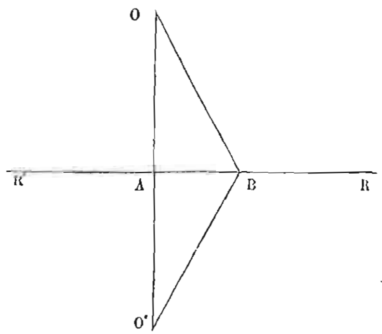


Fig. 46.

1° La perpendiculaire OA menée du point O à la droite RR' est moindre qu'une oblique quelconque OB menée du même point à la même droite.

En effet, prolongeons OA d'une longueur AO' égale à OA, et menons la droite BO' (*fig.* 46). Les triangles OAB, O'AB qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux ; donc OB = O'B. Or, la droite OO′ est moindre que la ligne brisée OB + BO′. Donc OA, moitié de OO′, est moindre que OB, moitié de OB + BO′.

2° Soient OB et OB′ deux obliques dont les pieds B et B′ sont équidistants du pied A de la perpendiculaire OA menée du point O à la droite RR′ (*fig.* 47) : les obliques sont égales.

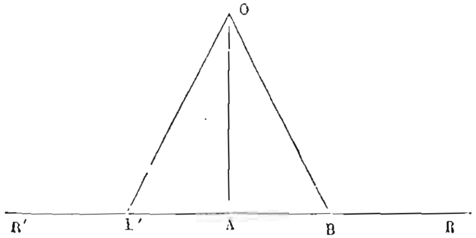


Fig. 47.

En effet, les triangles OAB, OAB′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun ; donc OB = OB′.

3° Soient deux obliques OB, OC, dont les pieds B et C s'écartent inégalement du pied A de la perpendiculaire, et soit AB moindre que AC ; l'oblique OB est moindre que l'oblique OC (*fig.* 48).

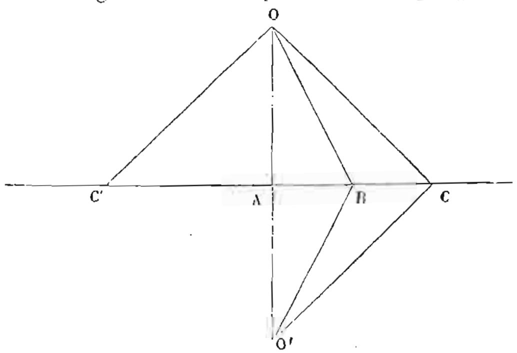


Fig. 48.

Supposons d'abord les deux points B et C d'un même côté par rapport au point A. Prolongeons OA d'une longueur AO′ égale à OA, et menons les droites BO′ et CO′. La ligne OBO′ étant enveloppée par la ligne OCO′, on sait que OB + BO′ est moindre que OC + CO′. Or, OB + BO′ est double de OB′, OC + CO′ est double de OC ; donc OB est moindre que OC.

Nous avons supposé les pieds des obliques d'un même côté de la perpendiculaire ; s'il en est autrement, comme par exemple pour les obliques OB et OC′, on prend, dans le sens AB, AC égale à AC′, et on mène l'oblique OC ; les obliques OC et OC′ étant égales, on peut remplacer OC′ par OC et comparer OB et OC comme ci-dessus.

77. De l'ensemble de ces trois propositions il résulte que RÉCIPROQUEMENT :

1° *La droite la plus courte menée du point* O *à la droite* RR′ *est la perpendiculaire* OA *menée du point* O *à cette droite ;*

2° *Les pieds* B *et* B′ *de deux obliques égales* OC *et* OC′ *menées du point* O *à la droite* RR′ *sont équidistants du pied* A *de la perpendiculaire, et de part et d'autre de ce point ;*

3° *Les pieds* B *et* C *de deux obliques inégales* OB, OC *menées du point* A *à la droite* RR′ *sont à des distances inégales du pied* A *de la perpendiculaire, le pied de la plus grande oblique est le plus éloigné du point* A.

78. COROLLAIRE I. *D'un point on ne peut mener à une droite plus de deux obliques égales.*

Les pieds de ces obliques égales sont de part et d'autre du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite, et sont équidistants de ce point.

79. COROLLAIRE II. *Dans un triangle rectangle chaque côté de l'angle droit est moindre que l'hypoténuse.*

Dans le triangle rectangle OAB par exemple le côté de l'angle droit OA est la perpendiculaire menée du point O à la droite AB, l'hypothénuse OB est une oblique menée du point O à la même droite ; donc OA est moindre que OB.

80. COROLLAIRE III. *Dans un triangle rectangle chacun des angles adjacents à l'hypoténuse est aigu.*

L'angle B par exemple du triangle rectangle OAB, adjacent à l'hypoténuse OB, est opposé au côté OA moindre que l'hypoténuse OB ; donc il est moindre que l'angle droit OAB ; donc il est aigu.

81. DÉFINITION. On appelle *distance d'un point à une droite* la distance de ce point au point de la droite qui en est le plus rapproché. *La distance d'un point à une droite est donc la distance du point au pied de la perpendiculaire menée de ce point à la droite.*

Théorème.

82. *Tout point situé sur la perpendiculaire au milieu de la droite qui passe par deux points donnés est équidistant de ces* *deux points ; et, réciproquement, tout point équidistant de deux points donnés est situé sur la perpendiculaire au milieu de la droite qui joint ces deux points.*

Soient A et B deux points (*fig.* 49) ; par le milieu C de la droite AB menons la perpendiculaire LL′ à la droite AB.

1° Tout point M de la droite LL′ est équidistant des points A et B, car les obliques MA et MB, dont les pieds sont à égale distance du pied C de la perpendiculaire MC, sont égales (76).

2° Soit un point M équidistant des points A et B; les obliques

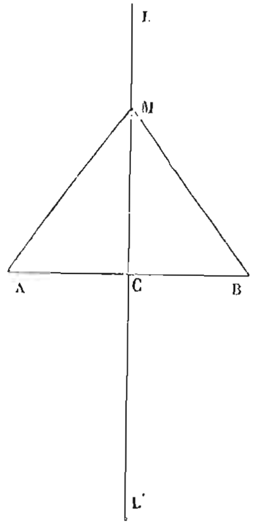


Fig. 49.

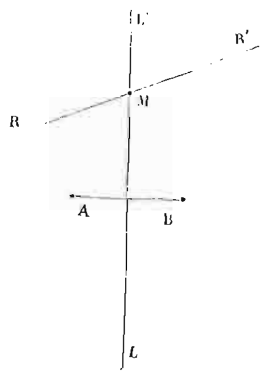


Fig. 50.

MA et MB étant égales, le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur AB est le milieu C de AB (77) ; donc le point M est sur la droite LL′.

83. Définition. On appelle *lieu géométrique* des points qui ont une certaine propriété, ou simplement *lieu* de ces points, une ligne dont tout point jouit de la propriété énoncée, et qui contient tous les points jouissant de cette même propriété.

On peut donc énoncer comme il suit le théorème précédent :

Le lieu géométrique des points équidistants de deux points donnés est la perpendiculaire à la droite qui joint ces deux points, menée par le milieu de cette droite.

84. Application. *Trouver sur une droite indéfinie* RR′ *un point équidistant de deux points donnés* A *et* B (*fig.* 50).

Le point demandé doit être à la fois sur la droite RR′ et sur le lieu des points équidistants de A et de B, c'est-à-dire sur la perpendiculaire LL′ à la droite AB menée par son milieu. Un point situé à la fois sur ces deux droites satisfait d'ailleurs aux conditions demandées. Si donc les droites RR′ et LL′ se rencontrent en un point M, le point M, et ce point seul, satisfait aux conditions du problème.

§ IV. — Cas d'égalité des triangles rectangles. — Lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent.

Théorème.

85. *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal sont égaux.*

Soient les triangles ABC et A′B′C′ (*fig.* 51), rectangles en A et A′, dans lesquels BC = B′C′, et C = C′. Je dis que ces triangles sont égaux.

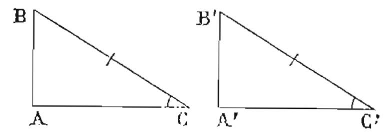


Fig. 51.

Portons le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC, de façon que l'hypoténuse B′C′ tombe sur l'hypoténuse égale BC, B′ en B, C′ en C. L'angle C′ étant égal à C, le côté C′A′ prend la direction CA, et le côté B′A′, perpendiculaire à C′A′, se place sur la perpendiculaire abaissée du point B sur CA, c'est-à-dire sur BA. Le point A′ tombant ainsi sur CA et sur BA tombe en A, et les deux triangles coïncident ; donc ils sont égaux.

Théorème.

86. *Deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal sont égaux.*

Soient les deux triangles ABC, A'B'C', rectangles l'un en A, l'autre en A', dans lesquels BC = B'C', et AB = A'B' (*fig.* 52); je dis que ces triangles sont égaux.

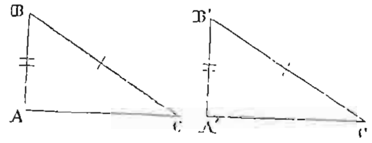


Fig. 52.

Portons le triangle A'B'C' sur ABC, de façon que le côté A'B' tombe sur le côté égal AB, A' en A, et B' en B; le côté A'C', perpendiculaire à A'B', prend la direction AC perpendiculaire à AB. Quant au côté B'C' égal à BC, il tombe sur BC; car du point B on ne peut mener à la droite AB, d'un même côté de BA, qu'une seule oblique égale à BC; les deux triangles coïncident, donc ils sont égaux.

Théorème

87. *Tout point de la bissectrice d'un angle est équidistant des côtés de cet angle; et, réciproquement, tout point situé dans un angle et équidistant de ses côtés est situé sur la bissectrice de cet angle.*

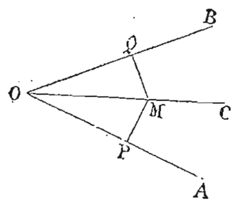


Fig. 53.

Soit M (*fig.* 53) un point quelconque de la bissectrice OC de l'angle AOB. Menons les droites MP et MQ respectivement perpendiculaires à OA et à OB. Les triangles rectangles MOP, MOQ sont égaux comme ayant l'hypoténuse MO commune, et un angle aigu égal, POM égal à QOM. Donc MP est égal à MQ, et le point M est équidistant des côtés de l'angle AOB.

Réciproquement, soit M un point situé dans l'angle AOB, et équidistant de ses côtés, c'est-à-dire tel que les perpendiculaires MP et MQ, menées du point M aux côtés de l'angle, sont égales. Les deux triangles rectangles MOP, MOQ sont égaux comme ayant même hypoténuse OM, et un côté égal MP = MQ. Donc les angles MOP, MOQ sont égaux, et le point M appartient à la bissectrice de l'angle AOB.

Le même théorème peut encore être énoncé comme il suit : *Le lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent*

se compose des bissectrices des angles formés par ces droites.

Considérons, en effet, les deux droites AA' et BB' qui se coupent au point O (*fig.* 54). Dans l'intérieur de l'angle AOB le lieu demandé est la bissectrice de cet angle; il en est de même dans chacun des angles A'OB, BOA' et AOB', et le lieu des points du plan équidistants des deux droites AA' et BB', se compose des bissectrices des quatre angles formés par ces deux droites. On sait d'ailleurs (42) que ces quatre bissectrices OC, OC', OD, OD' forment deux droites COC', DOD', et que ces droites sont perpendiculaires.

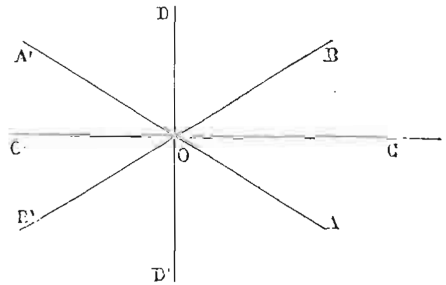


Fig. 54.

88. Application. *Trouver, sur une droite indéfinie* RR', *un point équidistant de deux droites qui se coupent* AA' *et* BB' (*fig.* 55).

Le point demandé doit être à la fois sur la droite RR' et sur le lieu géométrique des points équidistants des deux droites AA' et BB', lieu qui est composé des bissectrices des angles formés par les droites AA' et BB'.

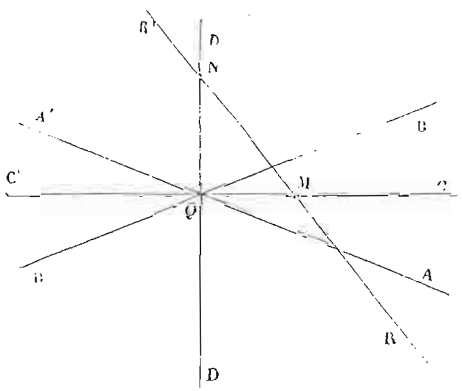


Fig. 55.

Si la droite RR' rencontre la bissectrice CC' en un point M, et la bissectrice DD' en un point N, les deux points M et N satisfont aux conditions demandées; ce sont d'ailleurs les seuls, puisque tout autre point de la droite RR' n'est pas équidistant des droites AA' et BB'.

§ V. — Droites parallèles.

89. Définition. On appelle droites *parallèles* deux droites qui, situées dans un même plan, ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge.

Théorème.

90. *Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.*

Soient, dans un même plan, les droites AB et CD perpendiculaires à la droite EF (*fig.* 56). Ces droites ne peuvent se rencontrer, puisque d'un point on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à une droite ; donc elles sont parallèles.

91. Corollaire. *Par un point C situé en dehors d'une droite* AB, *on peut mener une parallèle à cette droite* (*fig.* 57).

Menons CD perpendiculaire à AB, et CE perpendiculaire à CD ; la droite CE est parallèle à AB.

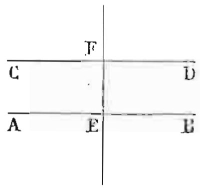


Fig. 56.

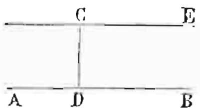


Fig. 57.

Fig. 58

92. On admet comme évident que *par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée.*

De cette proposition qui est appelée *postulatum* découle le corollaire suivant :

93. Corollaire. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles.*

Les droites AB et CD, parallèles à EF (*fig.* 58), ne peuvent se rencontrer, puisqu'on ne peut, par un point, mener qu'une parallèle à une droite donnée ; donc elles sont parallèles.

Théorème.

94. *Deux droites étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

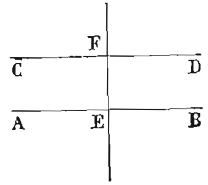


Fig. 59.

Soient AB et CD deux droites parallèles. EF perpendiculaire à AB (*fig.* 59) ; je dis que EF est perpendiculaire à CD.

En effet, si par le point F, où la droite EF rencontre CD, on mène la perpendiculaire à EF, cette droite est parallèle à AB, et par conséquent se confond avec la droite CD parallèle à AB menée par le point F ; donc la droite EF est perpendiculaire à CD.

Théorème.

95. *Une sécante rencontrant deux droites parallèles forme avec elles huit angles, dont généralement quatre sont aigus et quatre obtus : 1° les quatre angles aigus sont égaux ; 2° les quatre angles obtus sont égaux ; 3° l'un quelconque des angles aigus est le supplément de l'un quelconque des angles obtus.*

Soient AB et A′B′ deux droites parallèles, CC′ une sécante, D et D′ les points où la sécante rencontre les parallèles AB et A′B′ (*fig.* 60).

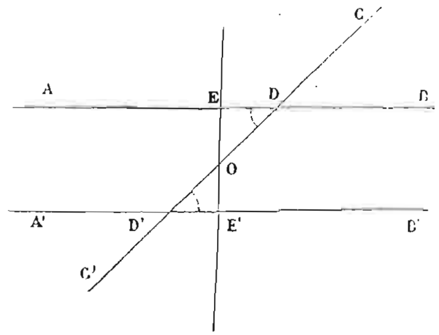


Fig. 60.

La sécante CC′ forme avec AB deux angles aigus égaux CDB, ADD′, et deux angles obtus égaux CDA, BDD′ ; chacun des angles aigus est le supplément de chacun des angles obtus.

De même la sécante CC′ forme avec A′B′ deux angles aigus égaux, DD′B′ et A′D′C′, et deux angles obtus égaux DD′A′ et B′D′C′ ; chacun des angles aigus est le supplément de chacun des angles obtus.

Il suffit donc de démontrer qu'un des angles aigus formés par la sécante avec AB est égal à l'un des angles aigus formés par la sécante avec A'B'. Considérons les deux angles aigus ADD' et DD'B'.

Par le point O, milieu de DD', menons OE perpendiculaire à AB ; le point E où cette droite rencontre AB, est sur la portion DA de AB qui fait avec DO un angle aigu, car, dans un triangle rectangle, tout angle adjacent à l'hypoténuse est aigu (80). La droite OE, perpendiculaire à AB, est aussi perpendiculaire à la droite A'B' parallèle à AB, et le point E' où elle rencontre A'B' est sur la portion D'B' qui forme avec D'O un angle aigu. Les triangles ODE, OD'E', rectangles l'un en E, l'autre en E', sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale OD = OD', et un angle aigu égal DOE = D'OE' ; donc les angles ADD', DD'B' sont égaux.

96. Corollaire. *Si l'un des huit angles est droit, tous les autres sont droits.*

97. Définitions. On a donné des noms particuliers aux divers groupes que l'on peut former en prenant ensemble deux angles formés par la sécante avec l'une et l'autre des deux parallèles. Pour abréger le discours, nous appellerons α, β, γ, δ, les angles formés par la sécante avec AB, et α', β', γ', δ', les angles formés par la sécante avec A'B', comme sur la *figure* 61.

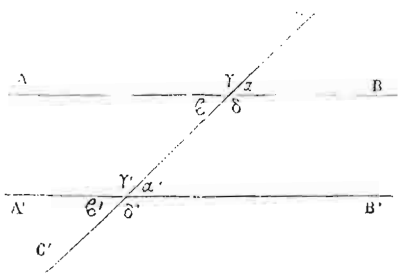


Fig. 61.

On appelle angles *alternes-internes* deux angles situés de part et d'autre de la sécante et dans l'intérieur de deux parallèles ; il y a deux couples d'angles *alternes-internes*, savoir : β et α', δ et γ' ;

Angles *alternes-externes* deux angles situés de part et d'autre de la sécante et à l'extérieur des deux parallèles ; il y a deux couples d'angles *alternes-internes*, savoir : γ et δ', α et β' ;

Angles *correspondants* deux angles situés d'un même côté de la sécante, et ayant leurs côtés dirigés dans le même sens ; il y a quatre couples d'angles correspondants, savoir : α et α', β et β', γ et γ', δ et δ' ;

Angles *intérieurs d'un même côté*, deux angles situés d'un même côté de la sécante et à l'intérieur de deux parallèles ; il y a deux couples d'angles intérieurs d'un même côté, savoir : δ et α', β et γ' ;

Angles *extérieurs d'un même côté*, deux angles situés d'un même côté et à l'extérieur des deux parallèles ; il y a deux couples d'angles extérieurs d'un même côté, savoir : α et δ', γ et β'.

98. Du théorème précédent il résulte qu'une sécante fait avec deux droites parallèles :

Des angles alternes-internes égaux ;
Des angles alternes-externes égaux ;
Des angles correspondants égaux ;
Des angles intérieurs d'un même côté supplémentaires ;
Des angles extérieurs d'un même côté supplémentaires.

Réciproquement. *Si deux droites rencontrées par une sécante forment avec elle :*

Ou deux angles alternes-internes égaux,
Ou deux angles alternes-externes égaux,
Ou deux angles correspondants égaux,
Ou deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires,
Ou deux angles extérieurs d'un même côté supplémentaires,
ces deux droites sont parallèles.

Soient les deux droites AB et A'B' rencontrées par la sécante CC' (*fig.* 62). Je suppose égaux les angles alternes-internes ADD' et DD'B', et je dis que les droites AB et A'B' sont parallèles.

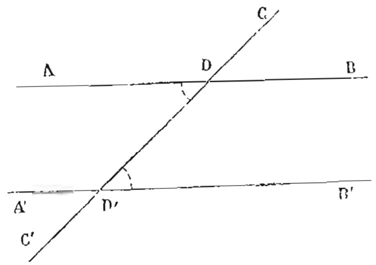


Fig. 62.

En effet, la parallèle à AB menée par le point D' fait avec D'D, à droite de cette ligne, un angle égal à l'angle ADD', parce que les deux angles sont deux angles alternes-internes formés par une sécante et deux parallèles ; mais l'angle ADD' est supposé égal à l'angle DD'B' ; donc la parallèle à AB menée par D' fait avec D'D, à droite de cette ligne, un angle égal à l'angle DD'B', et, par conséquent, elle coïncide avec D'B'.

Le même raisonnement s'applique aux autres cas.

99. Remarque. Du théorème précédent et de la réciproque, il résulte que si deux droites forment avec une sécante des angles qui ne satisfont pas aux conditions précédentes, ces droites ne sont pas parallèles.

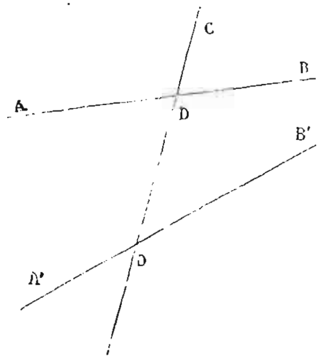


Fig. 63.

En particulier : *Si deux droites* AB, A'B' *font avec une sécante* CD *deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme diffère de deux angles droits, ces droites ne sont pas parallèles.*

La rencontre de ces droites se fait du côté de la sécante CD, où la somme des angles est moindre que deux angles droits (*fig.* 63).

Théorème.

100. *Deux angles qui ont les côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

Comparons à l'angle DOE les quatre angles formés, autour du point C, par deux droites AA' et BB', respectivement parallèles aux côtés OD et OE de cet angle (*fig.* 64).

1° Les angles ACB et DOE, qui ont les côtés *parallèles et de même sens*, sont égaux. En effet, soit I le point de rencontre de BB' avec OD ; les angles ACB, DIB, sont égaux comme angles correspondants formés par deux parallèles et par une sécante (98), et l'angle DIB est égal à l'angle DOE, pour la même raison.

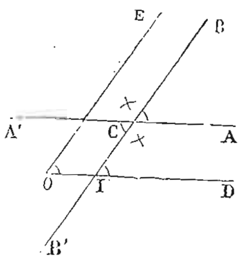


Fig. 64.

2° Les angles A'CB' et DOE, qui ont les côtés respectivement *parallèles et de sens opposés*, sont égaux ; car A'CB' est égal à ACB, ces deux angles étant opposés par le sommet, et ACB = DOE.

3° Les angles ACB' et DOE, qui ont deux côtés parallèles et *de même sens*, CA et OD, et deux côtés parallèles et *de sens contraires*, CB' et OE, sont supplémentaires ; car l'angle ACB' est supplémentaire de l'angle ACB, et celui-ci est égal à DOE. Il en est de même des deux angles A'CB et DOE.

Théorème.

101. *Deux angles qui ont les côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.*

Soient les angles DOE et ACB, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, OD perpendiculaire à CA, OE perpendiculaire à CB (*fig.* 65).

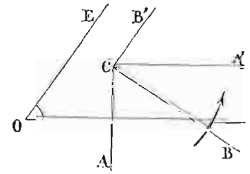


Fig. 65.

Faisons tourner l'angle ACB d'un angle droit autour de son sommet C : de cette façon le côté CA vient se placer perpendiculairement à CA, sur CA', et le côté CB vient se placer perpendiculairement à CB, sur CB'. Les droites CA' et OD, perpendiculaires à CA, sont parallèles (90) ; de même les droites CB' et OE, perpendiculaires à CB, sont parallèles. Donc, dans cette nouvelle position, les côtés de l'angle A'CB' sont respectivement parallèles aux côtés de l'angle DOE, et ces angles sont égaux ou supplémentaires (100).

§ VI. — Somme des angles d'un polygone.

Théorème.

102. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits.*

Soit un triangle ABC (*fig.* 66). Prolongeons le côté AB, et par le point B menons BE, parallèle à AC, et de même sens que AC. L'angle DBE est égal à l'angle A du triangle, ces deux angles étant des angles correspondants formés par deux parallèles AC, BE, et une sécante AB, et comme l'angle A est moindre que l'angle DBC (64) la droite BE tombe dans l'angle DBC. Il suit de là que l'angle EBC est égal à l'angle C du triangle, car ces deux angles sont des angles alternes-internes formés par les mêmes parallèles et par la sécante BC ; l'angle CBA est le troisième angle du triangle. Or la somme des trois angles consécutifs DBE, EBC, CBA, formés autour du

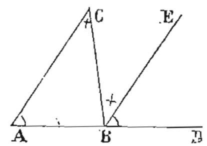


Fig. 66

point B, d'un même côté de la droite AB, est égale à deux angles droits; donc la somme des trois angles d'un triangle quelconque est égale à deux angles droits.

103. COROLLAIRE I. L'angle CBD, formé par le côté BC et le prolongement BD du côté AB, est appelé angle *extérieur* au triangle. Cet angle CBD est égal à la somme des angles A et C. Donc : *un angle extérieur à un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.*

104. COROLLAIRE II. Chaque angle d'un triangle est le supplément de la somme des deux autres. Donc : *si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, les troisièmes angles sont aussi égaux.*

105. COROLLAIRE III. *Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ou plus d'un angle obtus.*

106. COROLLAIRE IV. *Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.*

Théorème.

107. *La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux angles droits que ce polygone a de côtés moins deux.*

Soit par exemple le polygone convexe ABCDEF (*fig.* 67). En joignant le sommet A à chacun des autres sommets, je décompose le polygone en autant de triangles que le polygone a de côtés moins deux; car à l'exception des deux côtés AB, AF, qui comprennent l'angle A, chaque côté du polygone sert de base à un triangle particulier ayant le point A pour sommet. La somme des angles de chacun de ces triangles valant deux droits, la somme totale des angles de ces triangles vaut autant de fois deux droits qu'il y a de triangles, c'est-à-dire autant de fois deux droits que le polygone a de côtés moins deux. Or le polygone étant convexe, la somme totale des angles de ces triangles est égale à la somme des angles du polygone. Donc, la somme des angles du polygone vaut autant de fois deux droits que le polygone a de côtés moins deux

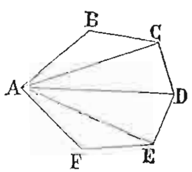


Fig. 67.

Soit n le nombre des côtés d'un polygone; la somme des angles intérieurs est égale à $2(n-2)$ angles droits, ou $2n$ droits moins 4 droits. En particulier, dans un quadrilatère, la somme des quatre angles vaut quatre angles droits.

Théorème.

108. *Étant donné un polygone convexe* ABCD... A (*fig.* 68), *si l'on prolonge le côté* AB *dans le sens* ABB', *le côté suivant* BC *dans le sens* BCC', *le côté suivant* CD *dans le sens* CDD', *et ainsi de suite, la somme des angles extérieurs au polygone, ainsi formés, vaut* 4 *droits.*

Soit n le nombre des côtés du polygone. Chaque sommet A du polygone est le sommet d'un angle intérieur BAF et d'un angle extérieur BAA' valant ensemble deux angles droits. La somme totale des angles intérieurs et extérieurs vaut donc $2n$ droits; or la somme des angles intérieurs vaut $2n$ droits moins 4 droits, donc la somme des angles extérieurs vaut 4 droits, excès de $2n$ droits sur $2n - 4$ droits.

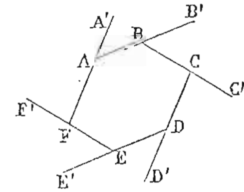


Fig. 68.

§ VII. — PARALLÉLOGRAMMES.

109. DÉFINITIONS. On appelle *parallélogramme* un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles.

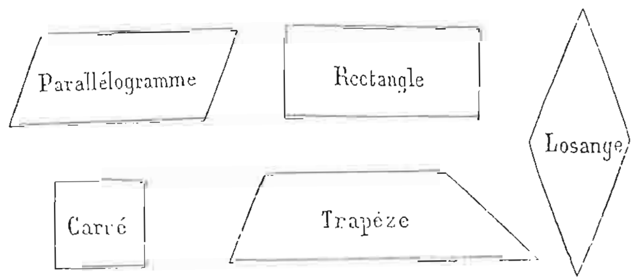


Fig. 69.

Un parallélogramme dont l'un des angles est droit est appelé *rectangle*.

Un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux est appelé *losange*.

Un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux est appelé *carré*.

110. On appelle *trapèze* un quadrilatère qui a deux côtés parallèles; ces côtés parallèles sont appelés les *bases* du trapèze.

Théorème.

111. *Dans un parallélogramme les angles opposés sont égaux, et les angles adjacents à un même côté sont supplémentaires.*

En effet, deux angles opposés, A et C, dans un parallélogramme ABCD (*fig.* 70) ont les côtés respectivement parallèles et de sens contraires, et par conséquent sont égaux. Deux angles A et B adjacents à un même côté AB sont intérieurs, d'un même côté, par rapport à deux parallèles AD, BC et une sécante AB, et par conséquent sont supplémentaires.

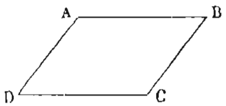


Fig. 70.

112. Corollaire. *Si l'un des angles d'un parallélogramme est droit, les quatre angles sont droits. — Dans un rectangle les quatre angles sont droits.*

113. Réciproquement. *Si dans un quadrilatère les angles opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

Soit dans le quadrilatère ABCD, $A = C$ et $B = D$ (*fig.* 70). La somme des quatre angles du quadrilatère, $A + C + B + D$, ou $2A + 2B$, vaut quatre angles droits; donc la somme des angles A et B est égale à deux angles droits. Les angles supplémentaires A et B étant intérieurs d'un même côté par rapport aux droites AD, BC et à la sécante AB, les droites AD et BC sont parallèles; on reconnait de même que les côtés AB et DC sont parallèles, et on en conclut que la figure ABCD est un parallélogramme.

Théorème.

114. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

Soit le parallélogramme ABCD; menons la diaonale gAC

(*fig.* 71). Les triangles ABC, ACD sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir: AC commun, les angles BAC et DCA égaux comme angles alternes-internes, par rapport à deux droites parallèles et à une sécante, et les angles ACB et CAD égaux pour la même raison : donc $AB = DC$, et $BC = AD$.

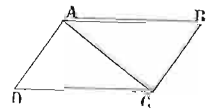


Fig. 71.

115. Corollaire I. *Si dans un parallélogramme deux côtés consécutifs sont égaux, les quatre côtés sont égaux. — Les quatre côtés d'un losange sont égaux.*

116. Corollaire II. *Deux parallèles sont partout également distantes.*

Soient deux parallèles AA′ et BB′ (*fig.* 72); des points M et M′ pris quelconques sur AA′ menons MP et M′P′ perpendiculaires à BB′ : la figure MPP′M′ est un parallélogramme; les côtés opposés MP, M′P′ sont égaux; donc, deux points quelconques de la droite AA′ sont à la même distance de la droite BB′.

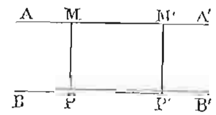


Fig. 72.

117. Corollaire III. *Le lieu des points situés à une distance donnée d'une droite* AB *se compose de deux droites* RR′ *et* SS′, *parallèles à cette droite et situées de part et d'autre de cette droite* (*fig.* 73).

118. Réciproquement. *Si dans un quadrilatère les côtés opposés sont égaux, la figure est un parallélogramme.*

Soit, dans le quadrilatère ABCD (*fig.* 74), $AB = CD$, $AD = BC$.

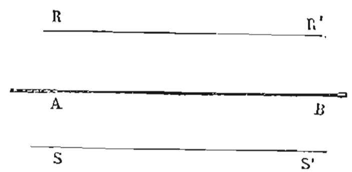


Fig. 73.

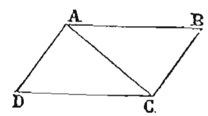


Fig. 74.

Menons la diagonale AC; les deux triangles ABC, ACD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir : AC commun, $AB = CD$, $AD = BC$. Donc les angles BAC, ACD sont égaux, ainsi que les angles ACB et CAD. Les angles égaux BAC et ACD étant alternes-internes par rapport aux droites AB, CD et à la sécante AC, les droites AB et CD sont parallèles. On déduit de même de l'égalité des angles ACB et CAD que BC et AD sont parallèles. Donc la figure ABCD est un parallélogramme.

Théorème.

119. *Si dans un quadrilatère deux côtés opposés sont égaux et parallèles, la figure est un parallélogramme.*

Soit dans le quadrilatère ABCD, les côtés AB et CD égaux et parallèles (*fig.* 75). Menons la diagonale AC. Les deux triangles ABC, ACD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles BAC, ACD égaux comme angles alternes-internes, par rapport à deux droites parallèles et à une sécante, le côté AC commun, et les côtés AB et DC égaux par hypothèse. Donc les angles ACB et CAD sont égaux, et, par suite, les droites BC et AD, qui font avec la sécante AC des angles alternes-internes égaux, sont parallèles. Donc la figure est un parallélogramme.

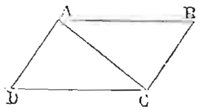


Fig. 75.

Théorème.

120. *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en parties égales.*

Menons les diagonales AC et BD du parallélogramme ABCD (*fig.* 76); les deux triangles AOB et COD sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : AB = CD, côtés opposés du parallélogramme, ABD = BDC, et BAC = ACD comme angles alternes-internes par rapport à deux parallèles et à une sécante. Donc AO = OC, et BO = OD.

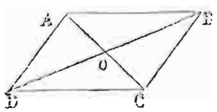


Fig. 76.

121. Réciproquement. *Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en parties égales, la figure est un parallélogramme.*

Soit AO = OC, BO = OD (*fig.* 77); les deux triangles AOB et COD ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; donc AB = DC, et ABD = BDC. Or, les angles égaux ABD et BDC étant alternes-internes par rapport aux droites AB, CD et à la sécante BD, les droites AB et CD sont parallèles. Le quadrilatère ABCD a deux côtés opposés, AB et CD, égaux et parallèles; donc c'est un parallélogramme.

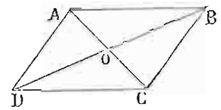


Fig. 77.

Théorème.

122. *Dans un rectangle les diagonales sont égales.*

Soit le rectangle ABCD (*fig.* 78); les triangles ADC et BCD ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles ADC, BCD égaux comme droits, DC côté commun, AD = BC, côtés opposés du rectangle; donc ces triangles sont égaux, et, par conséquent, les diagonales AC et BD sont égales.

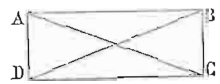


Fig. 78.

123. Réciproquement. *Un parallélogramme dans lequel les diagonales sont égales est un rectangle.*

Soit dans le parallélogramme ABCD (*fig.* 79), AC = BD. Les triangles ADC, BCD sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir : DC commun, AC = BD par hypothèse, AD = BC, côtés opposés du parallélogramme; donc les angles ADC et BDC sont égaux. Ces angles égaux étant d'ailleurs supplémentaires sont des angles droits; donc le parallélogramme est un rectangle.

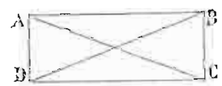


Fig. 79.

Théorème.

124. *Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires.*

Soit le losange ABCD (*fig.* 80), et soit O le point de rencontre des diagonales; le point O est le milieu de AC. Dans le triangle isocèle ABC, la droite BO qui joint le sommet B au milieu de la base est perpendiculaire sur cette base (53); donc les diagonales AOC, BOD sont perpendiculaires.

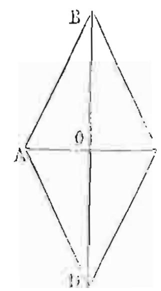


Fig. 80.

125. Corollaire. *Dans un carré les diagonales se coupent en parties égales, sont égales et sont perpendiculaires.*

126. Réciproquement. *Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.*

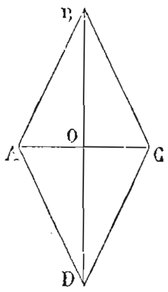


Fig. 81.

Soit ABCD (*fig.* 81), un parallélogramme dans lequel les diagonales AC, BD sont perpendiculaires. Les deux côtés consécutifs BA et BC sont égaux comme obliques dont les pieds s'écartent également du pied O de la perpendiculaire BO sur AC; donc la figure est un losange.

127. Corollaire. *Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en parties égales, sont égales et sont perpendiculaires, le quadrilatère est un carré.*

§ VIII. — Droites concourantes dans un triangle

Théorème.

128. *Si par le milieu de chaque côté d'un triangle on mène une perpendiculaire à ce côté, on obtient trois droites qui se coupent en un même point.*

Soit DD′ la perpendiculaire au côté BC du triangle ABC menée par le milieu de ce côté; soit de même EE′ la perpendiculaire au côté AC menée par son milieu (*fig.* 82). Les deux droites DD′, EE′ ne sont pas parallèles, sans quoi les droites CB, CA, qui sont respectivement perpendiculaires à ces droites, seraient dans le prolongement l'une de l'autre; donc elles se coupent. Soit O leur point de concours. Ce point est équidistant des points B et C parce qu'il est sur DD′; il est aussi équidistant des points C et A parce qu'il est sur EE′ (82); donc il est équidistant des points A et B, et appartient pour cette raison à la perpendiculaire FF′ au côté AB menée par son milieu.

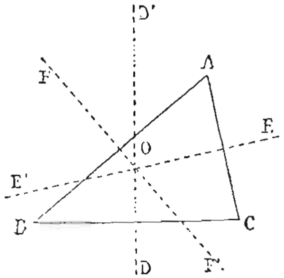


Fig. 82.

Donc les trois droites DD′, EE′, FF′ se coupent en un même point, et ce point est équidistant des trois sommets du triangle.

129. Remarque. Le point O est le seul point du plan équidistant des trois points A,B,C; car tout point équidistant des trois points A,B,C appartient au lieu des points équidistants des points B et C, c'est-à-dire à la droite DD′, et au lieu des points équidistants des points A et C, c'est-à-dire à la droite EE′, et, par conséquent, se confond avec le point de concours O de ces deux droites.

Théorème.

130. *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

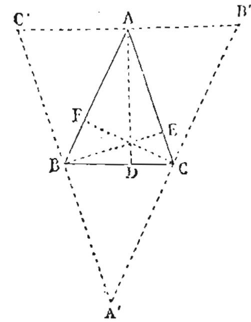


Fig. 83.

Soient AD, BE, CF les trois hauteurs du trangle ABC (*fig.* 83). Par chaque sommet de ce triangle menons une parallèle au côté opposé, nous formons ainsi un nouveau triangle A′B′C′: nous allons montrer que les hauteurs du triangle ABC sont les perpendiculaires menées à chacun des côtés du triangle A′B′C′ par son milieu, et nous en conclurons, d'après le théorème précédent, que ces trois droites sont concourantes. La droite AD, perpendiculaire à BC, est aussi perpendiculaire à la droite B′C′ qui est parallèle à BC; de plus, les quadrilatères ABCB′, ACBC′ sont, par construction, des parallélogrammes; donc BA′ et AC′ sont tous deux égaux à BC, et le point A est le milieu de B′C′. On démontre de même que BE est la perpendiculaire menée au côté A′C′ par son milieu, et que CF est la perpendiculaire menée au côté A′B′ par son milieu. Donc le théorème est démontré.

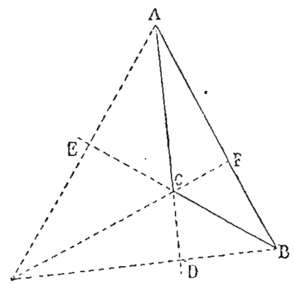


Fig. 84.

131. Remarque. Si les trois angles du triangle sont aigus, le point de concours des hauteurs est dans l'intérieur du triangle; si l'un des angles est obtus (*fig.* 84), le point de concours des hauteurs est extérieur au triangle. Si le triangle est rectangle, le point de concours des hauteurs est le sommet de l'angle droit.

Théorème.

132. *Les bissectrices des trois angles d'un triangle se coupent en un même point.*

Soient AR, BS, CT les bissectrices des trois angles du triangle ABC (*fig.* 85). Les droites AR et BS se coupent, car elles forment avec AB, d'un même côté que le point C par rapport à AB, deux angles intérieurs d'un même côté, BAR, ABS, dont la somme, égale à la demi-somme des angles A et B du triangle, est moindre que deux droits. — Le point de rencontre O de ces droites est, par rapport à AB, du même côté que le point C; il se trouve ainsi à la fois dans l'angle CAB et dans l'angle CBA, et, par conséquent, dans l'intérieur du triangle. — Ce point O est équidistant des côtés AC et AB parce qu'il est sur la bissectrice de l'angle A; il est équidistant des côtés BC et BA, parce qu'il est sur la bissectrice de l'angle B; donc il est équidistant des côtés AC et BC, et, comme il est dans l'angle C, il appartient à la bissectrice CT de cet angle. Donc les bissectrices des trois angles du triangle sont concourantes.

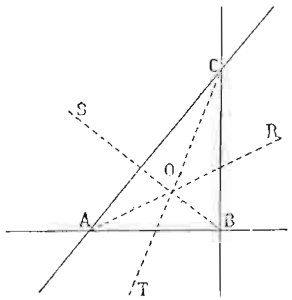


Fig. 85.

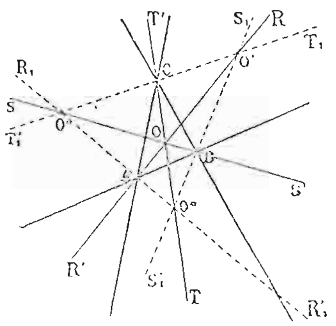


Fig. 86.

133. Corollaire. *La bissectrice d'un angle d'un triangle et les bissectrices des angles extérieurs au triangle, non adjacents à cet angle, se coupent en un même point.*

Soient AR_1, BS_1, CT_1 les bissectrices des angles extérieurs au triangle (*fig.* 86). Les droites AR et BS_1 se coupent, car elles

font avec AB, du même côté que le point C par rapport à AB, deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme, égale à $\frac{1}{2}(A+B)+1$ droit, est moindre que deux droits. — Le point de rencontre O' est, par rapport à AB, du même côté que le point C; il se trouve ainsi à la fois dans l'angle A et dans l'angle extérieur formé par BC et par le prolongement de AB, c'est-à-dire dans l'angle A et hors du triangle. — Ce point O' est équidistant des côtés AC et AB parce qu'il est sur la bissectrice AR de l'angle A; il est équidistant des côtés AB et BC parce qu'il est sur la bissectrice BS_1 de l'angle extérieur en B, il est donc équidistant des côtés AC et BC; et, comme il est dans l'angle A, hors du triangle, il appartient à la bissectrice CT_1 de l'angle extérieur en C.

Donc la bissectrice AR de l'angle A, les bissectrices BS_1, CT_1 des angles extérieurs en B et en C, concourent en un point O' qui est dans l'angle A, hors du triangle. On verrait de même que la bissectrice BS de l'angle B, et les bissectrices AR_1, CT_1 des angles extérieurs en A et en C concourent en un point O'' situé dans l'angle B, hors du triangle, et que la bissectrice CT de l'angle C, les bissectrices AR_1, BS_1 des angles extérieurs en A et en B concourent en un point O''' qui est situé dans l'angle C, hors du triangle.

134. Remarque. Chacun des quatre points O, O', O'', O''', est équidistant des trois droites AB, BC, AC. Ce sont les seuls points du plan qui jouissent de cette propriété, car tout point équidistant des trois côtés du triangle ABC doit être à la fois sur une des droites AR, AR_1, sur une des droites BS, BS_1, et sur une des droites CT, CT_1, et, par conséquent, doit se confondre avec un des quatre points O, O', O'', O'''.

Théorème.

135. *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté du triangle et égale à sa moitié.*

Par le milieu D de AB menons DE parallèle à BC (*fig.* 87). Pour démontrer le théorème énoncé, il suffira de montrer que E est le milieu de AC, et que DE est la moitié de BC. Or, menons DF parallèle à AC. Les deux triangles ADE, DBF ont un côté égal, AD = DB par construction, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, DAE, BDF comme correspondants et ADE, DBF pour la même raison; donc ces triangles sont égaux, et par suite, AE = DF, et DE = BF. Mais le quadrilatère DECF étant un parallélogramme, on a aussi EC = DF, et FC = DE. Les longueurs AE, EC, égales à DF sont égales, donc E est le milieu de AC; les longueurs BF, FC, égales à DE sont égales, donc DE et la moitié de BC, et le théorème est ainsi démontré.

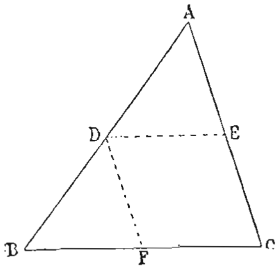


Fig. 87.

Théorème.

136. *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point.*

Soit AD la médiane issue du sommet A (*fig.* 88). Toute droite menée du sommet B à un point de AC situé entre A et C rencontre évidemment AD entre A et D. Soit BE la médiane issue du point B, elle rencontre AD en un certain point O situé entre A et D; nous allons montrer que la longueur DO est le tiers de la longueur DA. A cet effet, menons par C la parallèle à BE; elle rencontre le prolongement de AD en un certain point I. Dans le triangle ACI la droite EO passe par le milieu de AC et est parallèle à CI, donc (135) le point O est le milieu de AI. D'autre part, les triangles BDO, CDI ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : BD = CD par construction, DBO = DCI comme alternes-internes, BDO = CDI comme opposés par le sommet; donc ces triangles sont égaux, et DO et égal à DI. DO est donc la moitié de OI, ou la moitié

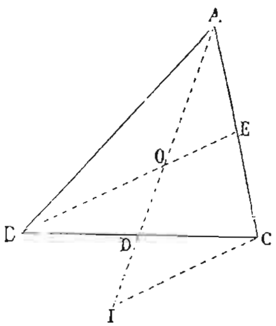


Fig. 88.

de la longueur égale OA; donc DO est le tiers de DA. Or on démontrerait de même que la médiane issue du point C rencontre la médiane AD, entre A et D, en un point dont la distance au point D est le tiers de DA, c'est-à-dire au point O. Donc les trois médianes sont concourantes.

EXERCICES SUR LE LIVRE I.

Théorèmes à démontrer.

1. La somme des distances d'un point pris à l'intérieur d'un triangle, aux trois sommets du triangle est comprise entre la moitié du périmètre du triangle et ce périmètre.

2. Soit AD une médiane du triangle ABC (*fig.* 89), on a ·

$$\frac{1}{2}(AB + AC - BC) < AD < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

3. La somme des longueurs des trois médianes d'un triangle est comprise entre la moitié du périmètre du triangle et ce périmètre.

4. Dans un triangle, la bissectrice d'un angle, la médiane issue du sommet de l'angle, et la hauteur issue du même sommet, sont généralement trois droites distinctes; si deux de ces droites coïncident, les trois coïncident, et le triangle est isocèle.

5. Dans un triangle isocèle, les hauteurs correspondant aux côtés égaux sont égales. — Réciproquement, si deux des hauteurs d'un triangle sont égales, les côtés correspondants sont égaux.

6. Dans un triangle équilatéral les trois hauteurs sont égales. — Réciproquement si les trois hauteurs d'un triangle sont égales, le triangle est équilatéral.

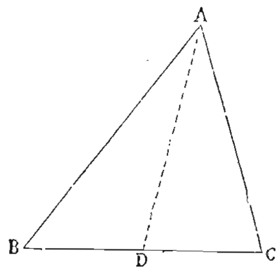


Fig. 89.

7. La somme des distances d'un point de la base d'un triangle isocèle aux deux côtés égaux est constante. — Comment faut-il modifier l'énoncé du théorème quand le point est pris sur le prolongement de la base?

8. La somme des distances d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral aux trois côtés du triangle est constante. — Comment faut-il modifier l'énoncé du théorème quand le point est pris en dehors du triangle?

9. Les milieux des côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme. — Quelles conditions doit remplir le quadrilatère donné pour que le parallélogramme ainsi formé soit un rectangle, ou un losange, ou un carré?

10. Dans un quadrilatère, les droites qui passent par les milieux de deux côtés opposés et la droite qui joint les milieux des diagonales se coupent en un même point, et chacune d'elles est partagée par ce point en deux parties égales.

11. Soit O le point de concours des médianes d'un triangle ABC ; par ce point on mène une droite quelconque OR, et des sommets du triangle on abaisse sur OR les perpendiculaires AA', BB', CC'. Démontrer que la somme des deux perpendiculaires qui sont d'un même côté de OR est égale à la longueur de l'autre.

12. Si le point de concours des bissectrices d'un triangle est sur l'une des hauteurs ou sur l'une des médianes, le triangle est isocèle. Si ce point est à la fois sur deux hauteurs ou sur deux médianes, le triangle est équilatéral.

13. Si le point de concours des médianes d'un triangle est sur la bissectrice d'un des angles du triangle ou sur une des hauteurs, le triangle est isocèle. Si ce point est à la fois sur deux bissectrices, ou sur deux hauteurs, le triangle est équilatéral.

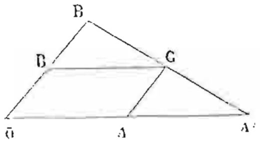


Fig. 90.

14. Dans un trapèze, la droite qui passe par les milieux des côtés non parallèles est parallèle aux bases, et passe par les milieux des diagonales du trapèze. La portion de cette droite comprise entre les deux diagonales du trapèze est égale à la demi-différence des bases.

15. Soit un parallélogramme OACB, on prend, sur OA, OA' = 2OA, et, sur OB, OB' = 2OB (*fig.* 90). Démontrer que la droite A'B' passe par le point C, et que ce point est le milieu de A'B'.

16. Un polygone convexe ne peut avoir plus de trois angles aigus.

Problèmes à résoudre.

17. Trouver un point qui soit à la fois équidistant de deux points donnés et équidistant de deux droites données.

18. Trouver un point équidistant de deux points donnés et situé à une distance donnée d'une droite donnée.

19. Trouver un point équidistant de deux droites données et situé à une distance donnée d'une droite donnée.

20. Deux angles d'un triangle valent, l'un $\frac{3}{5}$ d'un angle droit, l'autre $\frac{4}{3}$ d'un angle droit : quelle est la valeur du troisième angle du triangle?

21. Quelle condition doivent remplir les côtés non parallèles d'un trapèze pour que deux angles opposés du trapèze soient supplémentaires?

22. Quelle est la figure formée par les bissectrices des angles d'un parallélogramme? Dans quel cas cette figure est-elle un carré ?

23. Étant donnés une droite MN, et deux points A et B, situés d'un même côté de cette droite, déterminer sur la droite MN un point C tel que l'angle ACM soit égal à l'angle BCN. — Démontrer que le point C ainsi obtenu est, de tous les points de la droite MN, celui dont la somme des distances aux points A et B est la plus petite.

24. Étant donnés deux points A et B dans un angle MON, trouver un point C sur OM, et un point D sur ON, tels que la personne des distances AC + CD + DB soit la plus petite possible.

25. Mener une parallèle à un côté d'un triangle, telle que la portion de cette ligne comprise dans le triangle soit égale à la somme ou à la différence des segments des deux autres côtés compris entre cette ligne et le côté du triangle auquel elle est parallèle.

26. Démontrer que dans un rectangle on peut inscrire un nombre infini de parallélogrammes ayant leurs côtés respectivement parallèles aux diagonales du rectangle, et que tous ces parallélogrammes ont le même périmètre.

27. Soit un triangle ABC (*fig.* 91) ; on prend sur BC un point quelconque M, et on mène par ce point MN parallèle à AB et MP parallèle à AC, de manière à former le parallélogramme MNAP. On demande le lieu décrit par le point de concours O des diagonales de ce parallélogramme, quand le point M parcourt la droite BC.

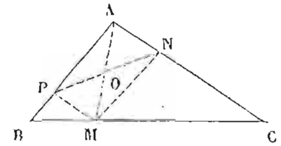


Fig. 91.

28. Trouver le lieu géométrique des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites fixes est constante et égale à une longueur donnée.

29. Soit un angle ROS ; sur les côtés de cet angle on prend les longueurs OA et OB telles que la somme OA + OB soit égale à une longueur donnée, et l'on construit le parallélogramme OACB : trouver le lieu du sommet C du parallélogramme.

30. Même question en supposant que la différence OA — OB est constante.

31. Soient deux points fixes A, B, et une droite LL' perpendiculaire à la droite qui passe par les points A et B; on prend sur LL' un point quelconque C; on mène, du point A, AA' perpendiculaire à BC, et, du point B, BB' perpendiculaire à AC : on demande le lieu décrit par le point de rencontre des droites AA' et BB' quand le point C parcourt la droite LL'.

LIVRE II

CERCLE

§ I. Préliminaires. — § II. Arcs et cordes. — § III. Tangente à la circonférence. — Normale. — § IV. Positions relatives de deux circonférences. — § V. Mesure des angles. — § VI. Usage de la règle et du compas. — Recherche de la plus grande commune mesure entre deux longueurs. — Problèmes relatifs aux perpendiculaires, aux parallèles, aux angles. — Équerre. — Rapporteur. — § VII. Problèmes élémentaires sur la construction des triangles. — § VIII. Problèmes sur les tangentes. — Tracer une circonférence passant par trois points. — Tracer une circonférence tangente à trois droites. — Décrire un arc de cercle capable d'un angle donné.

§ I. — Préliminaires.

137. Définitions. — La circonférence est une ligne plane dont tous les points sont également distants d'un point du plan nommé *centre*. La portion de plan limitée par la circonférence est appelée *cercle*.

Une droite OA qui va du centre à un point de la circonférence est un *rayon* (*fig.* 92). Tous les rayons d'une même circonférence sont égaux.

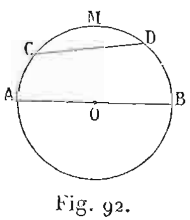


Fig. 92.

Tout point intérieur à une circonférence étant à une distance du centre moindre que le rayon, et tout point extérieur étant à une distance du centre plus grande que le rayon, une circonférence est le *lieu* des points du plan dont la distance au centre est égale au rayon.

138. Une droite AB passant par le centre, et terminée de part et d'autre à la circonférence, est un *diamètre*. Tout diamètre est double du rayon.

139. Une portion CMD de la circonférence est un *arc*. La droite CD qui joint les extrémités d'un arc est une *corde*. On dit

que la corde CD *sous-tend* l'arc CD, et que l'arc CD est *sous-tendu* par la corde CD.

La portion de cercle comprise entre un *arc* et la corde qui le sous-tend est appelée *segment*.

140. On dit que deux arcs de même rayon sont égaux quand ils sont superposables.

Si, sur une circonférence, les points A, B, C, D, etc. (*fig.* 93), sont disposés de façon qu'un mobile qui part du point A, et se déplace sur la circonférence dans un sens déterminé, rencontre successivement le point B, puis le point C, puis le point D, etc., on dit que l'arc AC est la somme des arcs AB et BC, que l'arc AD est la somme des arcs AB, BC, CD, et ainsi de suite, et on écrit :

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} \qquad \widehat{AD} = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD}.$$

141. Pour faire la somme de plusieurs arcs de même rayon, il suffit donc de les placer à la suite les uns des autres sur une circonférence de même rayon que celui de ces arcs.

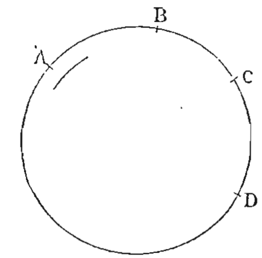


Fig. 93.

Un arc qui est la somme de deux arcs de même rayon est dit plus grand que chacun d'eux.

Si un arc AL est la somme de m arcs de même rayon égaux à un arc AB, on dit que l'arc AL est égal à m fois l'arc AB, et que l'arc AB est la m^{me} partie de l'arc AL, et on écrit :

$$\widehat{AL} = m\,\widehat{AB} \qquad \widehat{AB} = \frac{1}{m}\widehat{AL}.$$

Si un arc AB est égal à m fois la n^{me} partie d'un arc de même rayon AC, on écrit :

$$\widehat{AB} = \frac{m}{n}\widehat{AC}$$

Théorème.

142. *Une droite ne peut rencontrer une circonférence en plus de deux points.*

En effet, du centre de la circonférence on ne peut mener à la droite plus de deux obliques égales au rayon (78).

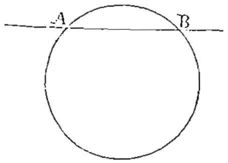


Fig. 94.

Une droite AB qui rencontre une circonférence en deux points est dite *sécante* (*fig.* 94).

Théorème.

143. *Tout diamètre* AB *partage la circonférence et le cercle en deux parties égales.*

Faisons tourner (*fig.* 95) la partie AMB de la figure autour du diamètre AB pour la rabattre sur la partie AM'B. Un point quelconque M de l'arc AMB vient se placer sur l'arc AM'B, parce que la circonférence est le *lieu* des points du plan dont la distance au centre est égale au rayon; donc l'arc AMB coïncide avec l'arc AM'B, et le diamètre AB partage la circonférence et le cercle en deux parties égales.

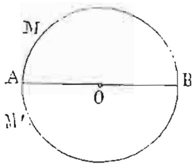


Fig. 95.

Théorème.

144. *Le diamètre est la plus grande corde du cercle.*

Soit un diamètre MN, et une corde AB ne passant pas par le centre (*fig.* 96). Menons les rayons OA et OB. Le diamètre MN, double du rayon, est égal à OA + OB; la ligne brisée OA + OB est plus longue que la ligne droite AB; donc un diamètre MN est plus grand qu'une corde quelconque AB.

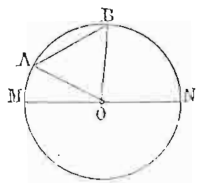


Fig. 96.

§ II. — Arcs et cordes.

Théorème.

145. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux arcs égaux sont sous-tendus par des cordes égales.*

Soient, dans deux cercles égaux O et O', les arcs égaux AMB et A'M'B' (*fig.* 97); les cordes AB et A'B' qui les sous-tendent sont égales.

En effet, menons les rayons OA, OB, O'A' et O'B'; les angles au centre AOB et A'O'B', qui dans des cercles égaux correspondent à des arcs égaux, sont égaux; par suite les triangles AOB, A'O'B', ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et les cordes AB, A'B' sont égales.

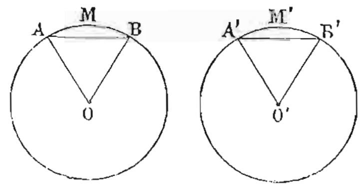


Fig. 97.

146. Réciproquement. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, des cordes égales sous-tendent des arcs égaux.*

Soient, en effet, dans les cercles égaux O et O' les cordes égales AB et A'B' (*fig.* 97). Les triangles AOB, A'O'B', qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux; par suite, les angles au centre AOB, A'O'B' sont égaux, et les arcs correspondants AMB, A'M'B' sont égaux.

147. Remarque. Chacune des cordes AB, A'B' sous-tend deux arcs, l'un moindre qu'une demi-circonférence, l'autre plus grand. Nous avons montré que les arcs AMB, A'M'B', tous deux moindres qu'une demi-circonférence, sont égaux; les arcs ANB, A'N'B', tous deux plus grands qu'une demi-circonférence, sont aussi égaux comme excès de circonférences égales sur des arcs égaux.

Théorème.

148. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, deux arcs inégaux et moindres qu'une demi-circonférence sont sous-*

tendus par des cordes inégales ; le plus grand arc est sous-tendu par la plus grande corde.

Soit, sur des cercles égaux O et O′, l'arc AMB plus grand que l'arc CND, et moindre qu'une demi-circonférence : la corde AB est plus grande que la corde CD (*fig.* 98). En effet, portons le cercle O′ sur le cercle O, de manière que les cercles coïncident et que C tombe en A. Le point D tombe sur l'arc AB, entre A et B, en E, je suppose, et la corde AE est égale à la corde CD. Menons les rayons OA, OB, OE. Les triangles AOB, AOE ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant des angles inégaux, savoir : OA côté commun, OB égal à OE comme rayons d'un même cercle, et l'angle AOB évidemment plus grand que l'angle AOE ; donc le troisième côté AB du premier triangle est plus grand que le troisième côté AE du second.

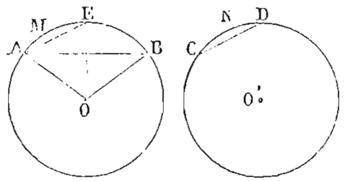


Fig. 98.

149. Remarque. Dans un cercle, un arc AM moindre que la moitié de la circonférence de cercle et la corde qui le sous-tend sont deux grandeurs qui varient dans le même sens : quand l'arc augmente, la corde augmente ; si l'arc devient égal à la demi-circonférence de cercle, la corde devient égale au diamètre. Si l'arc devient plus grand que la demi-circonférence, alors l'arc et la corde qui le sous-tend sont deux grandeurs qui varient en sens contraires : quand l'arc augmente, la corde diminue. Donc :

150. Réciproquement. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, deux cordes inégales sous-tendent des arcs, moindres qu'une demi-circonférence, qui sont inégaux ; et la plus grande corde sous-tend le plus grand arc.*

Si l'on considère des arcs tous deux plus grands qu'une demi-circonférence, c'est la plus petite corde qui sous-tend le plus grand arc.

Théorème.

151. *Un diamètre CD perpendiculaire à une corde AB partage*

en deux parties égales la corde AB et chacun des arcs ACB, ADB qu'elle sous-tend (*fig.* 99).

Soient O le centre du cercle et I le point où le diamètre CD, perpendiculaire à la corde AB, rencontre cette corde. Les obliques OA, OB, étant égales, comme rayons d'un même cercle, leurs pieds A, B, sont équidistants du pied I de la perpendiculaire OI ; donc, le diamètre CD partage en deux parties égales la corde AB. D'autre part, de ce que IA = IB, il résulte que les cordes CA, CB, sont des obliques égales, et, par suite, les arcs CA, CB, sous-tendus par ces cordes, sont égaux. On verrait de même que les arcs DA, DB, sont égaux. Donc le diamètre CD partage en deux parties égales chacun des arcs ACB, ADB, sous-tendus par la corde AB.

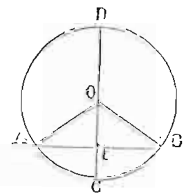


Fig. 99.

152. Corollaire I. *Dans un cercle, le centre, le milieu d'une corde, et les milieux des deux arcs sous-tendus par cette corde, sont quatre points en ligne droite.*

153. Corollaire II. *Le lieu des milieux des cordes d'un cercle parallèles à une direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction.*

Théorème.

154. *Par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence, et on n'en peut faire passer qu'une.*

Soient A, B, C, trois points non en ligne droite (*fig.* 100) ; ces points sont les sommets d'un triangle ABC. Or, on a vu (128) que les perpendiculaires DD′, EE′, à deux côtés, en leur milieu, se coupent en un point O équidistant des trois sommets. Si donc, du point O comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence de cercle, elle passe par les trois points A, B, C.

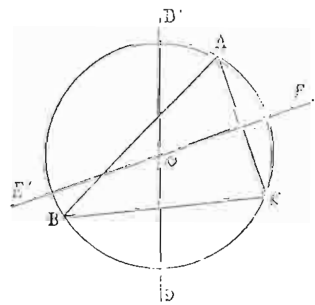


Fig. 100.

Cette circonférence est d'ailleurs la seule qui passe par les trois points A, B, C ; car, si une circonférence passe par ces points, son centre est équidistant de ces trois points, et par conséquent se confond avec le point O, seul point du plan équidistant des points A, B, C (129); cette circonférence ayant pour centre O, et passant par A, a pour rayon OA.

155. COROLLAIRE. *Deux circonférences distinctes ne peuvent se rencontrer en plus de deux points.*

Car, si elles avaient trois points communs, elles coïncideraient.

156. REMARQUE. Si les trois points donnés sont en ligne droite (*fig.* 101), les droites DD′, EE′, perpendiculaires à une même droite ABC, sont parallèles, et le point de rencontre s'éloigne à l'infini, ce qui indique que le problème n'est plus possible.

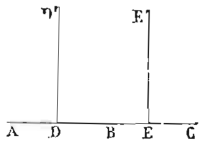


Fig. 101.

On savait d'ailleurs que par trois points en ligne droite on ne peut pas faire passer une circonférence, puisqu'une droite ne rencontre jamais une circonférence en plus de deux points (142).

Théorème.

157. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, deux cordes égales sont également éloignées du centre.*

Soient (*fig.* 102), dans les cercles égaux O et O′, les cordes égales AB et A′B′ : les perpendiculaires OI et O′I′, menées des centres sur ces cordes, sont égales. En effet, portons le cercle O′ sur le cercle O, de façon que le centre O′ tombe sur le centre O, et faisons tourner le cercle O′ autour du point O pour amener le point A′ sur le point A. Les cercles coïncident, et les arcs AB, A′B′ sous-tendus par des cordes égales étant égaux, le point B′ tombe en B, la corde A′B′ coïncide avec AB, et par suite la perpendiculaire O′I′ coïncide avec OI, et lui est égale.

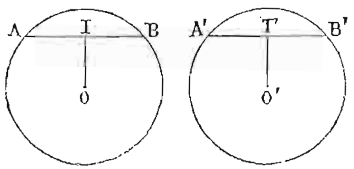


Fig. 102.

Théorème.

158. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, de deux cordes inégales la plus grande est la plus rapprochée du centre.*

Soit dans le cercle O, la corde AB plus grande que la corde CD (*fig.* 103) : la corde AB est plus rapprochée du centre que la corde CD.

En effet, prenons l'arc AME égal à l'arc CD; cet arc est moindre que l'arc AMB, parce que la corde CD est plus petite que la corde AB, et l'extrémité E tombe entre les points A et B. Les cordes AE et CD, qui sous-tendent des arcs égaux, sont égales et, par suite, également éloignées du centre. Il s'agit donc de démontrer que la distance OI du centre à la corde AB est plus petite que la distance OH du centre à la corde AE. Or le centre O et le point H, milieu de la corde AE, étant de part et d'autre de la corde AB, la perpendiculaire OH rencontre nécessairement la corde AB en un point K situé entre O et H, et OK est moindre que OH; d'autre part, la perpendiculaire OI est moindre que l'oblique OK; donc, à plus forte raison, OI est moindre que OH.

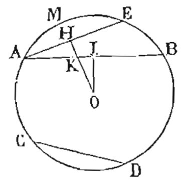


Fig. 103.

159. REMARQUE. Dans un cercle, la longueur d'une corde et la distance du centre à cette corde sont deux grandeurs qui varient en sens inverse : quand la première augmente, la seconde diminue. On en conclut la réciproque du théorème précédent : *Dans un même cercle, ou dans deux cercles égaux, des cordes également éloignées du centre sont égales.*

§ III. — TANGENTE A LA CIRCONFÉRENCE. — NORMALE.

160. DÉFINITION. On dit qu'une droite est *tangente* en un point A à une circonférence lorsqu'elle n'a que ce seul point commun avec la circonférence; ce point est appelé *point de contact* de la tangente.

Le fait qu'une droite peut n'avoir qu'un seul point commun avec une circonférence et, par suite, lui être tangente, n'est pas évident *a priori*. Cette possibilité se trouve démontrée par le théorème suivant.

Théorème.

161. *La perpendiculaire* AT *à l'extrémité d'un rayon* OA *d'une circonférence est tangente à cette circonférence* (*fig.* 106).

En effet, tout point M de la droite AT autre que le point A est extérieur au cercle, car l'oblique OM est plus grande que la perpendiculaire OA.

Il en résulte que la droite AT ne rencontre la circonférence qu'au seul point A. Donc elle lui est tangente, et A est le point de contact.

162. Réciproquement. *Une tangente* TT′ *à une circonférence est perpendiculaire au rayon* OA *qui passe par le point de contact* (*fig.* 104).

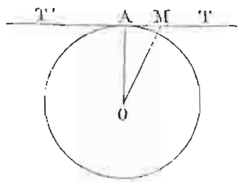


Fig. 104.

La tangente TT′ ne peut avoir aucun point dans l'intérieur du cercle ; sans quoi, cette droite indéfinie rencontrerait la circonférence en plus d'un point. Tout point M de cette droite, autre que A, est donc en dehors du cercle, et par conséquent est à une distance du centre O plus grande que le rayon OA. Donc OA est la plus courte distance du point O à la droite TT′, et par suite le rayon OA est perpendiculaire à la tangente TT′.

163. Remarque. Si l'on fait tourner une sécante AB autour du point A, jusqu'à ce que le point B vienne se confondre avec le point A (*fig.* 105), le milieu I de la corde AB vient aussi se confondre avec le point A, et par suite la droite OI vient se placer sur OA. Or la sécante AB est perpendiculaire sur OI ; donc, à la limite, quand le point B vient se confondre avec le point A, la sécante AB se place sur la perpendiculaire, au point A, au rayon OA, et se confond ainsi avec la tangente en A.

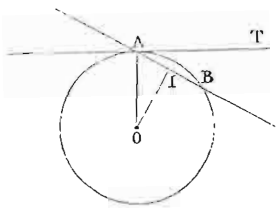


Fig. 105.

On peut donc regarder la tangente AT comme la position-limite vers laquelle tend une sécante AB, qui tourne autour du point A, jusqu'à ce que le second point B, où elle rencontre la circonférence, vienne se confondre avec le point A.

164. Définition. On appelle *normale* à une circonférence, en un point donné A (*fig.* 106), la perpendiculaire AN menée par ce point à la tangente en A à la circonférence. Le point A est appelé le *pied* de la normale.

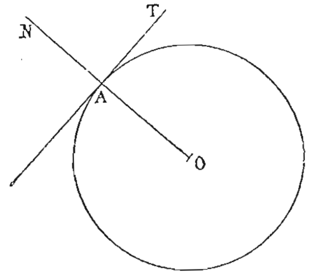


Fig. 106.

La normale au point A, à une circonférence de cercle, se confond, d'après le théorème précédent, avec le rayon AO mené par ce point.

Il en résulte que toutes les normales à une circonférence passent par le centre de cette circonférence.

Par un point P, pris en dehors d'une circonférence (*fig.* 107), on peut mener à cette circonférence deux normales,

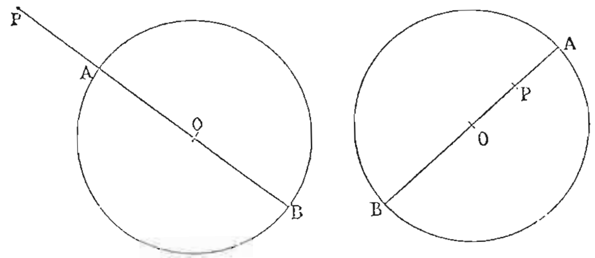


Fig. 107.

PA, PB, situées toutes deux sur la droite qui passe par le point P et par le centre du cercle, et ayant pour *pieds*, l'une l'extrémité A, l'autre l'extrémité B du diamètre qui passe par le point P.

Théorème.

165. *La longueur d'une oblique* PM *menée d'un point* P *à un* *point* M *d'une circonférence est comprise entre les longueurs des normales* PA, PB, *menées du point* P *à la même circonférence.*

Soit PA la plus petite des deux normales PA, PB (*fig.* 108). Si un mobile M parcourt la demi-circonférence AMB, dans le

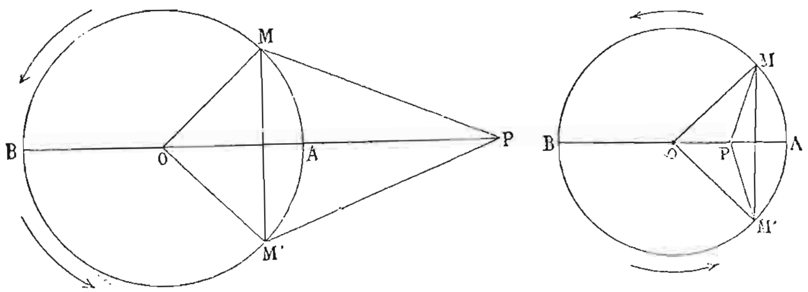


Fig. 108.

sens indiqué par la flèche, l'angle POM augmente, et comme les côtés OP, OM du triangle POM sont des longueurs invariables, la longueur du troisième côté PM va sans cesse en augmentant ; égale à PA quand le point M est en A, elle augmente et devient égale à PB quand le point M arrive en B ; elle reste donc comprise entre PA et PB, pour toute position du point M sur la demi-circonférence AMB. Si le mobile parcourt ensuite la demi-circonférence BM'A, toujours dans le même sens, l'angle POM diminue, et par suite la longueur PM diminue ; égale à PB quand le point M est en B, elle décroît et atteint la longueur PA quand le point M arrive en A. Elle reste donc encore comprise entre PA et PB, pour toute position du point M sur la demi-circonférence BM'A.

Pour deux points M et M', situés sur une perpendiculaire au diamètre AB, les angles POM, POM' sont égaux, et, par suite, les longueurs PM, PM' sont égales.

166. Définition. On appelle *distance d'un point* P *à une circonférence* O, la distance du point P au point de la circonférence qui est le plus rapproché du point P. D'après ce qui précède, la distance du point P à la circonférence O est la plus petite des deux normales PA, PB menées du point P à la circonférence.

Théorème.

167. *Deux droites parallèles interceptent sur une circonférence des arcs égaux.*

1° Soient d'abord les deux droites parallèles AB et CD, toutes deux sécantes (*fig.* 109) : les arcs interceptés AC et BD sont égaux. En effet, menons le diamètre EF perpendiculaire à la droite AB et, par suite, perpendiculaire à CD. Ce diamètre partage en deux parties égales les arcs AFB et CFD sous-tendus par les cordes AB et CD. Donc les arcs AF et BF sont égaux, ainsi que les arcs CF et DF, et par suite l'arc AC, excès de AF sur CF, est égal à l'arc BD, excès de BF sur DF.

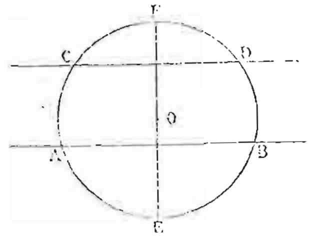


Fig. 109.

2° Soient encore les droites parallèles AB et GH, la première sécante, la seconde tangente au point E (*fig.* 110) ; les arcs interceptés AE et BE sont égaux. En effet, le rayon OE, qui passe par le point de contact, est perpendiculaire à la tangente GH, et, par suite, à la droite AB parallèle à GH ; donc il partage l'arc AEB en deux parties égales.

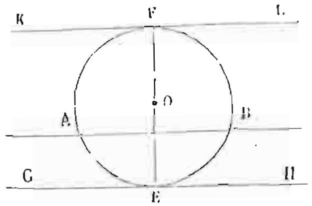


Fig. 110.

3° Soient enfin deux droites parallèles GH et KL, toutes deux tangentes, l'une en E, l'autre en F (*fig.* 112) ; les arcs interceptés EAF et EBF sont encore égaux. En effet, les rayons OE et OF, respectivement perpendiculaires aux droites parallèles GH et KL, sont dans le prolongement l'un de l'autre, et la ligne EOF et un diamètre qui partage la circonférence en deux parties égales.

168. Corollaire. *Lorsque deux tangentes à un cercle sont parallèles, les points de contact sont les extrémités d'un même diamètre.*

§ IV. — Positions relatives de deux circonférences.

Théorème.

169. *Lorsque deux circonférences* O *et* O′ *ont deux points* M *et* M′ *communs* (*fig.* 111), *la corde commune* MM′ *est perpendiculaire à la ligne des centres, et est partagée par elle en deux parties égales.*

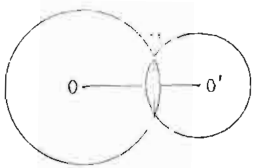


Fig. 111.

En effet, la droite OO′, qui passe par deux points O et O′ respectivement équidistants de M et de M′, est le lieu des points équidistants de M et de M′; donc elle est perpendiculaire à MM′, en son milieu.

170. Remarque. Nous savons que deux circonférences ne peuvent avoir plus de deux points communs (158). Quand elles ont deux points communs, on les dit *sécantes*, et les deux points communs sont placés *symétriquement* par rapport à la la ligne des centres. Si l'un des points communs est sur la ligne des centres, en A (*fig.* 112 et *fig.* 113), l'autre est confondu avec le premier en A, et les deux circonférences n'ayant plus qu'un seul point commun sont dites *tangentes*. Le point de contact est sur la ligne des centres, et les deux tangentes en ce point aux deux circonférences sont confondues avec la perpendiculaire à la ligne des centres.

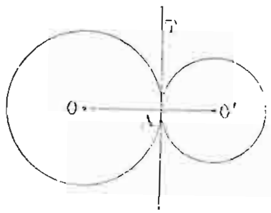


Fig. 112.

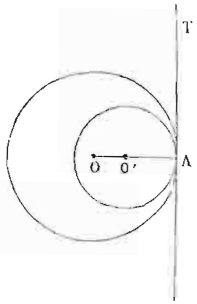


Fig. 113.

Deux circonférences étant tangentes, si tous les points de chacune d'elles sont en dehors de l'autre, on dit qu'elles sont *tangentes extérieurement* (*fig.* 112); si tous les points de l'une sont à l'intérieur de l'autre, on dit qu'elles sont *tangentes intérieurement* (*fig.* 113).

Deux circonférences n'ayant aucun point commun, on dit qu'elles sont *extérieures* si tous les points de l'une sont en dehors de l'autre (*fig.* 116); on dit que l'une est *intérieure* à l'autre si tous les points de la première sont à l'intérieur de la seconde (*fig.* 117).

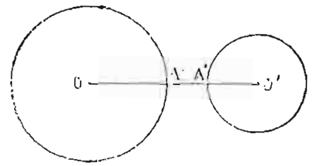


Fig. 114.

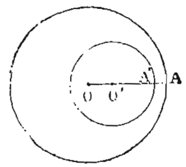


Fig. 115.

Deux circonférences situées dans un plan occupent toujours, l'une par rapport à l'autre, une des cinq positions que nous venons de définir.

Théorème.

171. *Quand deux circonférences sont extérieures, la distance des centres est plus grande que la somme des rayons.*

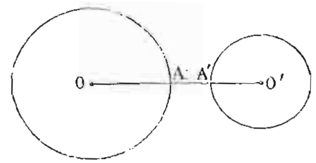


Fig. 116.

On voit, en effet, que la distance des centres OO′ (*fig.* 116) se compose de la somme des rayons, OA, O′A′, augmentée de AA′.

Théorème.

172. *Quand deux circonférences sont tangentes extérieurement, la distance des centres est égale à la somme des rayons.*

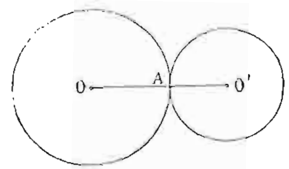


Fig. 117.

Le point de contact A (*fig.* 117) est situé sur la ligne des centres; le centre O′, extérieur au cercle O, est sur le prolongement de OA, et la distance des centres OO′ se compose de la somme des rayons OA + O′A.

Théorème.

173. *Quand deux circonférences sont sécantes, la distance des centres est à la fois plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.*

Soient, en effet, deux circonférences sécantes O et O′, et M un des deux points communs (*fig.* 118).

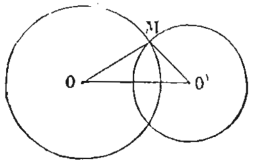


Fig. 118.

Le point M étant en dehors de la ligne des centres, les trois points O, O′, M sont les sommets d'un triangle dans lequel le côté OO′ est à la fois plus petit que la somme des deux autres OM et O′M et plus grand que leur différence. Donc la distance des centres OO′ est à la fois plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence.

Théorème.

174. *Quand deux circonférences sont tangentes intérieurement, la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

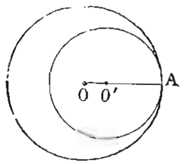


Fig. 119.

En effet, le point de contact A (*fig.* 119) est situé sur la ligne des centres, le centre O′ de la plus petite circonférence est entre O et A, et la distance des centres OO′ est égale à OA — O′A, c'est-à-dire à la différence des rayons.

Théorème.

175. *Quand une circonférence est intérieure à une autre, la distance des centres est plus petite que la différence des rayons.*

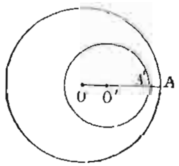


Fig. 120.

En effet, la distance des centres OO′ (*fig.* 120) est égale au rayon OA, moins le rayon O′A′, moins encore la portion de rayon A′A comprise entre les deux circonférences.

176. *En résumé*, en appelant D la distance des centres, R et

R′ les deux rayons, R étant le plus grand des deux, si les deux circonférences sont :

Extérieures, on a.	$D > R + R'$
Tangentes extérieurement, on a. . . .	$D = R + R'$
Sécantes, on a.	$\begin{cases} D < R + R' \\ D > R - R' \end{cases}$
Tangentes intérieurement, on a. . . .	$D = R - R'$
L'une intérieure à l'autre, on a. . . .	$D < R - R'$.

Théorème.

177. *Les réciproques des cinq derniers théorèmes sont vraies, c'est-à-dire que si l'on a :*

1°	$D > R + R'$	les circonférences sont	*extérieures ;*
2°	$D = R + R'$	*id.*	*tangentes extérieurement ;*
3°	$\begin{cases} D < R + R' \\ D > R - R' \end{cases}$	*id.*	*sécantes ;*
4°	$D = R - R'$	*id.*	*tangentes intérieurement ;*
5°	$D < R - R'$	*id.*	*l'une intérieure à l'autre.*

Prenons, par exemple, la première condition, $D > R + R'$; elle exclut chacune des quatre dernières, et les deux circonférences ne pouvant occuper aucune des quatre autres positions sont nécessairement extérieures. Il en est de même pour la deuxième, pour la quatrième, et pour la cinquième condition.

La troisième condition est double ; elle comprend les deux inégalités :

$$D < R + R', \quad \text{et} \quad D > R - R'.$$

L'inégalité $D < R + R'$ exprime que les circonférences ne sont ni extérieures, ni tangentes extérieurement ; l'inégalité $D > R - R'$ exprime que les circonférences ne sont ni l'une intérieure à l'autre, ni tangentes intérieurement ; les deux inégalités, prises simultanément, expriment donc que les circonférences sont sécantes, parce qu'elles n'occupent aucune des quatre autres positions.

§ V. — Mesure des angles.

178. Définition. On appelle *angle au centre* d'une circonférence un angle dont le sommet est au centre d'une circonférence; tel est l'angle AOB *fig.* 121).

On appelle *angle inscrit* dans une circonférence un angle formé par deux cordes qui se coupent sur une circonférence; tel est l'angle ACB (*fig.* 121).

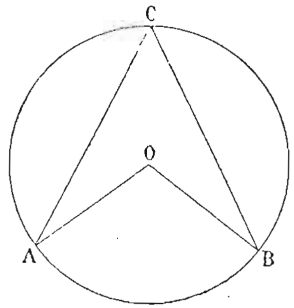


Fig. 121.

Théorème.

179. *Dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, 1° deux angles au centre égaux interceptent des arcs égaux; 2° deux angles au centre inégaux, interceptent des arcs inégaux, le plus grand angle au centre intercepte le plus grand arc.*

1° Soient, dans deux cercles égaux O et O', les angles au centre égaux AOB et A'O'B' (*fig.* 122). Portons le cercle O' sur

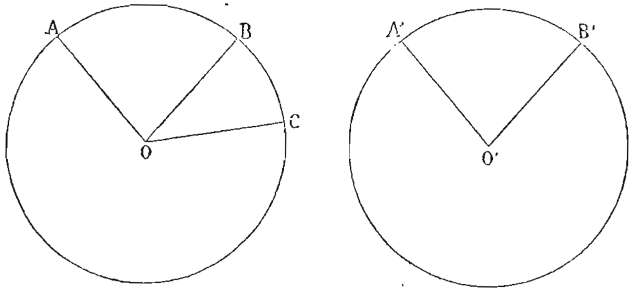


Fig. 122.

le cercle égal O, de façon que le centre O' tombe en O; les deux cercles coïncident. Faisons tourner le cercle O' autour du point O de manière à amener le rayon O'A' sur le rayon OA; les deux cercles coïncident toujours; et, comme l'angle A'O'B' est égal à l'angle AOB, le rayon O'B' vient se placer sur le rayon OB.

Il en résulte que les deux arcs A'B' et AB coïncident; donc, ils sont égaux.

2° Soient dans deux cercles égaux O et O' les angles au centre AOC, A'O'B' inégaux et soit l'angle AOC plus grand que l'angle A'O'B' (*fig.* 122). Portons encore le cercle O' sur le cercle O de façon que le centre O' tombe en O; les deux cercles coïncident. Faisons tourner le cercle O' autour du centre O de manière à amener O'A' sur OA; les deux cercles coïncident toujours; et, comme l'angle AOC est plus grand que l'angle A'O'B', le rayon O'B' vient se placer à l'intérieur de l'angle AOC, et son extrémité B' vient se placer sur l'arc AC en un certain point B situé entre A et C. Il en résulte que l'arc AC est plus grand que l'arc AB; mais l'arc AB est égal à l'arc A'B', donc l'arc AC est plus grand que l'arc A'B'.

De l'ensemble de ces deux propositions, il résulte que :

180. Réciproquement, *dans un même cercle, ou dans deux cercles égaux; 1° à deux arcs égaux correspondent des angles au centre égaux, 2° à deux arcs inégaux correspondent des angles au centre inégaux; au plus grand arc correspond le plus grand angle au centre.*

Théorème.

181. *Si des sommets de deux angles comme centres, on décrit deux arcs de cercle d'un même rayon, le rapport des angles est égal au rapport des arcs compris entre les deux côtés.*

Des sommets O et C des angles AOB, DCE, comme centres (*fig.* 123), avec un même rayon, décrivons les arcs de cercle AB et DE : le rapport des angles AOB et DCE est égal au rapport des arcs AB et DE. En effet, supposons d'abord que les arcs AB, DE aient une commune mesure, c'est-à-dire qu'un certain arc PQ soit contenu un nombre entier de fois dans chacun des deux arcs, par exemple, cinq fois dans AB et quatre fois dans DE; le rapport des arcs AB et DE est alors égal à $\frac{5}{4}$. Menons

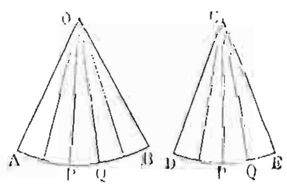


Fig. 123.

des rayons par les points de division des arcs AB et DE. Les angles AOB et DCE se trouvent ainsi partagés en angles égaux à l'angle POQ : car, dans des cercles égaux, ces angles au centre interceptent sur la circonférence des arcs égaux. Or l'angle AOB contient cinq de ces angles, l'angle DCE en contient quatre; donc le rapport des angles AOB et DCE est aussi $\frac{5}{4}$.

En second lieu, supposons que les arcs AB et DE n'aient pas de commune mesure. Partageons l'arc DE en un certain nombre de parties égales, par exemple en n parties égales, et supposons que l'arc AB soit supérieur à m de ces parties et inférieur à $m+1$. Les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des arcs AB et DE. Or si nous menons des rayons par les points de division des arcs AB et DE, l'angle DCE se trouve partagé en n parties égales, et l'angle AOB est supérieur à m de ces parties et inférieur à $m+1$. Les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont donc aussi les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des angles AOB et DCE. Les valeurs approchées à moins de $\frac{1}{n}$ des deux rapports, étant égales, quel que soit n, les rapports sont égaux (17).

182. Le rapport de deux grandeurs étant la mesure de la première quand on prend la seconde pour unité, on peut encore énoncer comme il suit le théorème précédent :

Si l'on prend pour unité d'arc, sur une circonférence de rayon quelconque, l'arc de cette circonférence compris entre les côtés d'un angle au centre égal à l'angle choisi pour unité d'angle, la mesure d'un angle au centre est la même que celle de l'arc compris entre ses côtés.

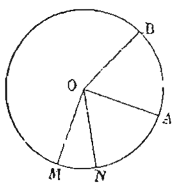


Fig. 124.

En effet, soit MON l'angle pris pour unité d'angle, et AOB l'angle à mesurer (*fig.* 124). Du point O comme centre, avec un rayon quelconque, décrivons une circonférence : l'arc MN de cette circonférence est l'unité d'arc sur cette circonférence. La mesure de l'angle AOB est le rapport $\frac{\text{AOB}}{\text{MON}}$, la mesure de l'arc AB est le rapport $\frac{\text{MN}}{\text{AB}}$. Ces deux rapports sont égaux; donc la mesure de l'angle AOB est la même que celle de l'arc AB.

183. Arc et angle d'un degré. On prend ordinairement pour unité d'arc, sur une circonférence quelconque, la 360^e partie de cette circonférence, et cette partie de la circonférence est appelée *arc d'un degré*.

On prend alors pour unité d'angle l'angle au centre correspondant et on l'appelle *angle d'un degré*. A un arc d'un certain nombre de degrés correspond ainsi un angle du même nombre de degrés.

On partage l'arc d'un degré en 60 parties égales qu'on appelle *minutes*, et l'arc d'une minute en 60 parties égales qu'on appelle *secondes*. A un arc d'une minute correspond un angle au centre qu'on appelle *angle d'une minute;* à un arc d'une seconde correspond un angle au centre qu'on appelle *angle d'une seconde*.

A un arc de 67 degrés, 28 minutes, 43 secondes, correspond un angle au centre de 67 degrés, 28 minutes, 43 secondes, et on écrit, pour abréger, cet arc ou cet angle sous la forme

$$67^\circ\ 28'\ 43''.$$

Deux diamètres perpendiculaires partagent la circonférence en quatre parties égales; un angle droit dont le sommet est au centre d'une circonférence intercepte sur la circonférence un arc égal au quart de la circonférence, c'est-à-dire un arc de 90° : un angle droit vaut donc 90°. Deux angles complémentaires valent ensemble 90°. Deux angles supplémentaires valent ensemble 180°. La somme des trois angles d'un triangle est égale à 180°. Dans un triangle équilatéral chaque angle vaut le tiers de 180°, ou 60°. Dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus vaut 90°.

Théorème.

184. *Un angle inscrit dans une circonférence a même mesure que la moitié de l'arc compris entre ses côtés.*

Nous distinguerons trois cas :

1° *Le centre* O *du cercle est sur l'un des côtés* CB *de l'angle inscrit* ACB (*fig.* 125).

Menons le rayon OA ; dans le triangle OAC, les côtés OA, OC étant égaux, les angles opposés C et A sont égaux. Or, la somme de ces deux angles du triangle est égale à l'angle extérieur non adjacent AOB ; donc chacun de ces angles est égal à la moitié de l'angle AOB. L'angle au centre AOB a même mesure que l'arc AB ; l'angle ACB, moitié de AOB, a même mesure que la moitié de l'arc AB.

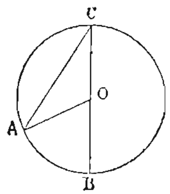


Fig. 125.

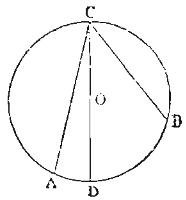


Fig. 126.

2° *Le centre* O *est dans l'intérieur de l'angle* (*fig.* 126).

Menons le diamètre COD ; l'angle ACB est la somme des angles ACD, DCB. Le premier a même mesure que la moitié de l'arc AD, le second a même mesure que la moitié de l'arc DB ; donc l'angle ACB a même mesure que la moitié de la somme des arcs AD et DB, c'est-à-dire que la moitié de l'arc AB.

3° *Le centre* O *est en dehors de l'angle* ACB (*fig.* 127).

Menons encore le diamètre COD. L'angle ACB est la différence des angles ACD, BCD. Le premier a même mesure que la moitié de l'arc AD, le second a même mesure que la moitié de l'arc BD ; donc l'angle ACB a même mesure que la moitié de la différence des arcs AD et BD, c'est-à-dire que la moitié de l'arc AB.

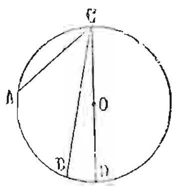


Fig. 127.

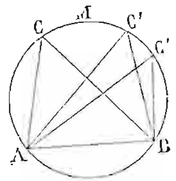


Fig. 128.

185. Corollaire I. *Tous les angles* ACB, AC′B, AC″B, *etc., inscrits dans un même segment* AMB, *sont égaux* (*fig.* 128).

En effet, tous ces angles ont même mesure que la moitié du même arc AB.

On dit pour cette raison que le segment AMB est capable de l'angle ACB. Quand l'arc du segment est plus grand qu'une demi-circonférence, les angles inscrits sont aigus ; quand il est plus petit qu'une demi-circonférence, les angles inscrits sont obtus. Quand l'arc est égal à une demi-circonférence, les angles inscrits sont droits.

186. Corollaire II. *Un angle* ABC, *formé par une corde* AB *et une tangente* BC, *a même mesure que la moitié de l'arc* AMB *soustendu par la corde* AB, *et situé, par rapport à cette corde, du même côté que le côté* BC (*fig.* 129).

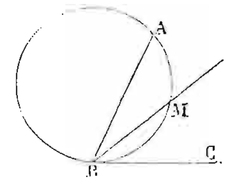


Fig. 129.

Menons la sécante BM, l'angle inscrit ABM a même mesure que la moitié de l'arc AM ; faisons tourner la sécante BM autour du point B, de façon que le point M se rapproche indéfiniment du point B et vienne se confondre avec lui. L'angle ABM a toujours même mesure que la moitié de l'arc AM. Or, quand le point M se confond avec le point B, la sécante BM se confond avec la tangente BC, et l'angle ABM devient l'angle ABC ; l'arc AM devient l'arc AB ; donc l'angle ABC a même mesure que la moitié de l'arc AMB.

187. Corollaire III. *Deux angles opposés* A *et* C *d'un quadrilatère convexe* ABCD *inscrit dans un cercle sont supplémentaires* (*fig.* 130).

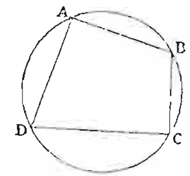


Fig. 130.

En effet, l'angle A ayant même mesure que la moitié de l'arc BCD, et l'angle C ayant même mesure que la moitié de l'arc DAB, la somme de ces deux angles a même mesure que la moitié d'une circonférence entière, et par conséquent elle équivaut à deux angles droits.

Théorème.

188. *Un angle* ACB, *formé par deux sécantes, dont le point de rencontre est dans l'intérieur d'un cercle, a même mesure que la* *moitié de la somme de l'arc* AB *compris entre ses côtés et de l'arc* DE *compris entre leurs prolongements* (*fig.* 131).

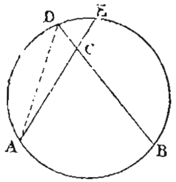


Fig. 131.

Menons la corde AD; l'angle ACB, extérieur au triangle ADC, est la somme des angles intérieurs non adjacents D et A; or ces angles D et A étant inscrits dans le cercle, ont, le premier, même mesure que la moitié de l'arc AB, le second, même mesure que la moitié de l'arc DE. Donc l'angle ACB a même mesure que la moitié de la somme des arcs AB et DE.

Théorème.

189. *Un angle* ACB, *formé par deux sécantes, dont le point de rencontre est extérieur à un cercle, a même mesure que la moitié de la différence des arcs* AB *et* DE *compris entre ses côtés* (*fig.* 132).

Menons la corde AE; l'angle AEB extérieur au triangle ACE est la somme des angles intérieurs non adjacents, et par suite, l'angle ACB est l'excès de l'angle AEB sur l'angle CAE. Il a donc même mesure que l'excès de la moitié de l'arc AB sur la moitié de l'arc DE, ou que la moitié de la différence de ces deux arcs.

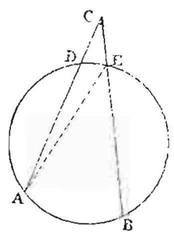


Fig. 132.

Si l'on fait tourner les côtés de l'angle autour du point C de manière à amener un de ces côtés ou tous les deux à être tangents au cercle, on voit que le théorème subsiste pour un angle formé soit par une sécante et une tangente, soit par deux tangentes.

190. Corollaire I. *Le lieu des points d'un plan d'où une portion de droite* AB *est vue sous un angle donné se compose de deux arcs de cercle égaux sous-tendus par la corde commune* AB, *et situés de part et d'autre de cette corde* (*fig.* 133).

Soit C un point du lieu; traçons la circonférence qui passe par les trois points A, B, C; le segment AMCB est capable de l'angle ACB, et, par conséquent, tous les points de l'arc AMCB

sont des points du lieu. Un segment AM'B égal à celui-ci et placé de l'autre côté de AB est également capable de l'angle ACB, et, par conséquent, tous les points de l'arc AM'B sont aussi des points du lieu.

Il reste à faire voir que ces deux arcs contiennent tous les points du lieu. Prenons, par exemple, un point du plan qui, par rapport à AB, soit du même côté que l'arc AMB; si ce point est à l'intérieur du segment, comme le point P, l'angle APB, sous lequel la droite AB est vue de ce point, est plus grand que l'angle donné AMB; car cet angle APB a même mesure que la moitié de l'arc ANB plus la moitié de l'arc CD compris entre les prolongements de ses côtés; si ce point est extérieur au segment AMB, comme le point Q, l'angle AQB est plus petit que l'angle donné, car cet angle AQB a même mesure que la moitié de l'arc ANB moins la moitié de l'autre arc CD compris entre ses côtés.

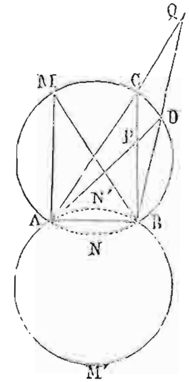


Fig. 133.

L'arc AMB contient donc tous les points du lieu situés, par rapport à AB, du même côté que le point M; l'arc AM'B contient de même tous les points du lieu situés de l'autre côté de AB, et le lieu demandé se compose de ces deux arcs.

Les arcs ANB, AN'B composent le lieu des points d'où la droite AB est vue sous un angle supplémentaire de l'angle AMB.

191. Quand l'angle donné est droit, chacun des arcs AMB, AM'B est une moitié de la circonférence décrite sur AB comme diamètre, et le lieu est cette circonférence (*fig.* 134).

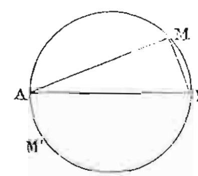


Fig. 134.

192. Corollaire II. *Si deux angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires, le quadrilatère est inscriptible.*

Supposons les angles opposés A, C du quadrilatère convexe ABCD supplémentaires (*fig.* 135); il faut démontrer que les quatre points A, B, C, D sont sur une même circonférence. Traçons la circonférence qui passe par les trois points B, A, D. L'arc

BMD est capable d'un angle supplémentaire de l'angle A, et cet arc est, d'après le théorème précédent, le lieu des points situés, par rapport à BD, du côté où n'est pas le point A, d'où la droite BD est vue sous un angle égal au supplément de A; donc cet arc BMD contient le point C.

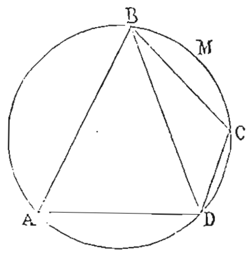


Fig. 135.

193. Ce corollaire et le précédent montrent que la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible, c'est qu'il ait deux angles opposés supplémentaires.

§ VI. — Usage de la règle et du compas. — Recherche de la plus grande commune mesure entre deux longueurs. — Tracé des perpendiculaires et des parallèles. — Problèmes relatifs aux perpendiculaires, aux parallèles, aux angles. — Équerre. — Rapporteur.

USAGE DE LA RÈGLE ET DU COMPAS.

194. Pour tracer une ligne droite sur le papier, on se sert d'une *règle*, ou barre de bois, dont les faces sont planes, et les bords taillés en ligne droite. Si la droite doit passer par deux points donnés A et B, on applique la règle sur le papier, et on amène l'un des bords de la règle à passer par ces deux points (*fig.* 136); puis, avec la pointe d'un crayon bien taillé, ou avec un tire-ligne, on trace une ligne sur le papier en suivant bien exactement le bord de la règle.

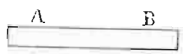


Fig. 136.

195. Avant d'employer une règle, il faut la vérifier, c'est-à-dire s'assurer que le bord dont on se sert est bien en ligne droite. A cet effet, on trace avec la règle une ligne sur le papier, et sur cette ligne on marque deux points A et B; puis on fait mouvoir la règle, sans changer la face appuyée contre le papier, de façon que l'extrémité N, voisine du point A, vienne se placer

près du point B; on fait en sorte que le bord passe encore par les points A et B, et on trace une nouvelle ligne en suivant ce même bord. Si la règle est bonne, la seconde ligne coïncide exactement avec la première (*fig.* 137); dans le cas contraire, les deux lignes sont différentes (*fig.* 138).

Fig. 137.

Fig. 138.

196. Pour tracer une circonférence, on se sert d'un instrument appelé *compas*. Le compas se compose de deux branches métalliques terminées en pointe, et réunies par un axe autour duquel elles tournent avec frottement. Le frottement doit être suffisant pour maintenir invariable l'écartement des branches quand on manie le compas; mais il doit néanmoins permettre d'ouvrir le compas sans secousses, de manière à faire varier progressivement la distance des deux pointes. Une vis placée en tête du compas permet de serrer plus ou moins fortement les deux branches l'une contre l'autre, et par là d'augmenter ou de diminuer le frottement à volonté. Pour tracer, d'un point O comme centre, une circonférence de rayon égal à une longueur AB, il suffit d'ouvrir le compas de façon que les deux pointes reposent l'une sur le point A, l'autre sur le point B, de placer ensuite une pointe en O, et de faire mouvoir l'autre sur le papier tandis que la première reste en O.

RECHERCHE DE LA PLUS GRANDE COMMUNE MESURE ENTRE DEUX LONGUEURS.

197. Si deux longueurs A, B, ont une commune mesure C, elles admettent aussi comme commune mesure toute partie aliquote de C.

Si par exemple C est contenue 10 fois dans A et 7 fois dans B, une partie aliquote de C, le 15^{me} par exemple, sera contenue 15×10 ou 150 fois dans A, et 15×7 ou 105 fois dans B; le 15^{me} de C est une commune mesure entre A et B. Lors donc que deux longueurs ont une commune mesure, elles en ont une infinité.

Proposons-nous de trouver, s'il y a lieu, la plus grande commune mesure entre deux longueurs A et B. Le procédé est analogue à celui que l'on emploie pour trouver le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers. Soit B la plus petite des deux longueurs; si B est une partie aliquote de A, il est évident que B est la plus grande commune mesure entre A et B.

Si B n'est pas contenue un nombre exact de fois dans A, si par exemple A contient m fois la longueur B plus un reste R moindre que B, la plus grande commune mesure à A et à B est la même que la plus grande commune mesure à B et à R. En effet, toute commune mesure à A et à B est une partie aliquote de A, de B et par suite de mB, et par conséquent de A — mB ou de R; c'est donc une commune mesure à B et à R. Réciproquement, toute commune mesure à B et à R est une partie aliquote de mB et de R, et par suite de mB + R ou A, et est ainsi une commune mesure à A et à B. Donc les communes mesures à A et à B *sont les mêmes* que les communes mesures à B et à R; en particulier, la plus grande commune mesure à A et à B est aussi la plus grande commune mesure à B et à R.

198. D'après cela, pour chercher la plus grande commune mesure à A et à B, on porte, à l'aide d'un compas, B sur A autant de fois que cela est possible; s'il n'y a pas de reste, B est la plus grande commune mesure; s'il y a un reste R_1, on est ramené à chercher la plus grande commune mesure à B et à R_1. On porte R_1 sur B autant de fois que cela est possible, s'il n'y a pas de reste, R_1 est la plus grande commune mesure; s'il y a un reste R_2, on est ramené à chercher la plus grande commune mesure à R_1 et à R_2, et ainsi de suite.

Si l'on arrive à un reste R_n, contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent, ce reste R_n est la plus grande commune mesure cherchée.

199. Si les longueurs A et B sont commensurables, on arrivera nécessairement, après un nombre limité d'opérations, à un reste R_n contenu un nombre exact de fois dans le reste précédent. En effet, le premier reste R est moindre que $\frac{1}{2}$A, car il est moindre que B, et A contient R_1 et au moins une fois B; le second reste R_2 est moindre que $\frac{1}{2}R_1$, et, *a fortiori*, moindre que

la moitié de $\frac{1}{2}$A, ou $\frac{1}{2^2}$A. De même le 3^{me} reste R_3 est moindre que $\frac{1}{2^3}$A. Il suit de là que si on poursuit l'opération, les restes successifs, non seulement vont sans cesse en diminuant, mais deviennent plus petits que telle longueur que l'on voudra. Or si A et B ont une plus grande commune mesure C, l'opération prolongée ne peut conduire à un reste moindre que C, puisque C, qui est une partie aliquote de tous les restes, n'en peut surpasser aucun. Donc, quand A et B sont commensurables, l'opération se termine nécessairement.

Dans la pratique il en est toujours ainsi; car après un nombre limité d'opérations, les restes obtenus n'ont plus de longueur appréciable. Mais théoriquement, on peut concevoir deux longueurs n'ayant aucune commune mesure : dans ce cas la suite des opérations prolongées indéfiniment conduit à des restes aussi petits que l'on veut sans qu'aucun soit nul.

PROBLÈMES RELATIFS AUX PERPENDICULAIRES, AUX PARALLÈLES, AUX ANGLES.

Problème.

200. *Mener d'un point donné* A *une perpendiculaire à une droite donnée* MN.

1° Le point est sur la droite MN (*fig.* 139). Prenez de part et d'autre du point A sur la droite MN des longueurs égales AB et AC; puis du point B comme centre, avec un rayon arbitraire mais plus grand que AB, décrivez un arc de cercle; du point C comme centre, avec le même rayon, décrivez un second arc de cercle qui coupe le premier en un point D; enfin menez la droite AD : cette droite est la perpendiculaire demandée.

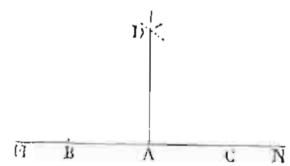


Fig. 139.

En effet, les points A et D étant équidistants des points B et C appartiennent à la perpendiculaire au milieu de la droite BC (82).

2° Le point A est en dehors de la droite MN (*fig.* 140). Du point A comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivez un arc de cercle qui rencontre la droite MN aux deux points B et C. Du point B comme centre, avec un rayon arbitraire mais plus grand que la moitié de BC, décrivez un arc de cercle, et du point C comme centre, avec le même rayon, décrivez un second arc de cercle qui coupe le premier au point D. Menez la droite AD : cette droite est la perpendiculaire demandée. En effet, les points A et D, étant équidistants des points B et C, appartiennent à la perpendiculaire au milieu de la droite BC.

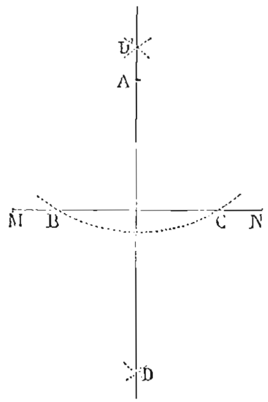


Fig. 140.

201. Remarque. Les arcs de cercle décrits des points B et C comme centres, avec le même rayon, se coupent en deux points D et D', on se servira de préférence, pour tracer la droite demandée, de celui de ces points qui est le plus éloigné du point donné A.

Problème.

202. *Mener une perpendiculaire à une droite limitée* AB, *en son milieu.*

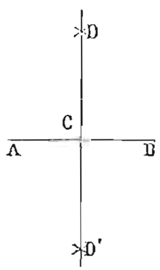


Fig. 141.

Du point A comme centre, avec un rayon arbitraire plus grand que la moitié de AB, je décris un arc de cercle (*fig.* 141); du point B comme centre avec le même rayon, je décris un second arc de cercle; ces deux arcs se coupent aux points D et D'. Je mène la droite DD' : cette droite est perpendiculaire à la droite AB, et elle la rencontre en un point C qui est le milieu de AB.

En effet, les points D et D' étant équidistants des points A et B, la droite DD' est le lieu des points équidistants des points A et B; elle est donc perpendiculaire à la droite AB, en son milieu.

203. Remarque. Cette construction permet de trouver le milieu C d'une portion de droite AB.

Problème.

204. *Partager un arc de cercle* AB *en deux parties égales.*

Je mène, comme dans le problème précédent, la droite DD', lieu des points équidistants de A et de B (*fig.* 142) ; cette droite est perpendiculaire à la corde AB, en son milieu, et partage l'arc AB en deux parties égales (154).

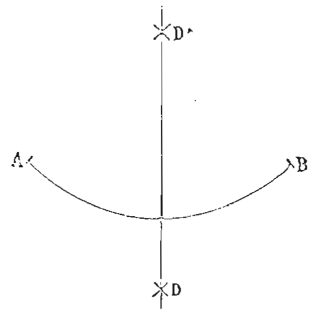


Fig. 142

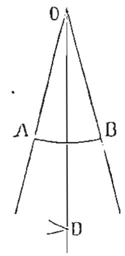


Fig. 143.

Problème.

205. *Mener la bissectrice d'un angle donné* AOB (*fig.* 143).

Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, je décris un arc de cercle qui rencontre les côtés de l'angle aux points A et B. De ces points comme centres, avec un rayon plus grand que la moitié de la corde AB, je décris des arcs de cercle qui se coupent en D. Je joins O et D. La droite OD est la bissectrice de l'angle AOB, car elle partage l'arc AB et par suite l'angle AOB, en deux parties égales.

Problème.

206. *Mener par un point donné* A *une parallèle à une droite donnée* MN (*fig.* 144).

D'un point quelconque B de la droite MN pris pour centre, avec BA pour rayon, décrivez un arc de cercle qui rencontre la droite MN au point C; du point A comme centre, avec le même rayon, décrivez un arc de cercle BD ; portez ensuite sur cet arc une ouverture de compas BE égale à AC, et menez la droite AE; cette droite est la parallèle demandée.

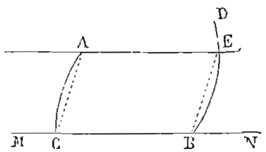


Fig. 144.

En effet, d'après les constructions effectuées, le quadrilatère ACBE a ses côtés opposés égaux, et par conséquent est un parallélogramme (118).

Problème.

207. *Mener, par un point* A *d'une droite* AB, *une droite faisant avec la droite* AB *un angle égal à un angle donné* EDF (*fig.* 145).

Du point D comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, décrivez un arc de cercle qui coupe en G et en H les côtés de l'angle EDF; du point A comme centre, avec la même ouverture de compas, décrivez l'arc de cercle KM; puis, avec une ouverture de compas égale à la corde GH, déterminez la corde KL égale à la corde GH, enfin menez la droite AL. L'angle BAL est égal à l'angle EDF, car les arcs de même rayon GH et KL, étant sous-tendus par des cordes égales, sont égaux, et, par conséquent, les angles au centre GDH et KAL sont égaux.

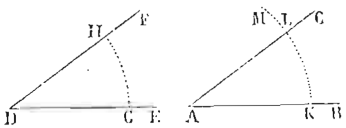


Fig. 145.

Problème.

208. *Connaissant deux angles* A *et* B *d'un triangle, déterminer le troisième* (*fig.* 146).

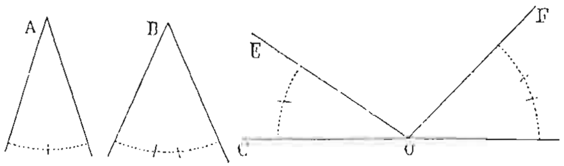


Fig. 146.

Par un point O d'une droite CD menez une droite OE, telle que l'angle COE soit égal à A, et une droite OF, telle que

l'angle DOF soit égal à B; l'angle EOF, supplément de la somme des deux angles A et B, est l'angle cherché.

ÉQUERRE.

209. L'*équerre* (*fig.* 147) est un triangle rectangle, en bois ou en métal, qui sert à mener des perpendiculaires et des parallèles.

Pour mener, par un point A, une perpendiculaire à une droite MN (*fig.* 148), on applique l'équerre sur le papier, de façon que l'un des côtés *ab* de l'angle droit coïncide avec la droite MN; puis, appuyant la main sur l'équerre afin de l'empêcher de glisser, on applique le bord d'une règle PQ, contre l'hypoténuse de l'équerre. Cela fait, on appuie la main sur la règle PQ, pour la rendre immobile à son tour, et on fait glisser l'équerre sur le papier, l'hypoténuse appuyée contre la règle, jusqu'à ce que le second côté *ac* de l'angle droit transporté en *a'c'* passe par le point A. On trace alors une ligne droite en suivant le bord *a'c'* de l'équerre, et cette droite est la perpendiculaire demandée. On voit, en effet, que les angles correspondants *bca*, *b'c'a'* étant égaux, le côté *ca* de l'équerre s'est transporté parallèlement à lui-même en *a'c'*, et comme *ac* est perpendiculaire à MN, la droite *a'c'* l'est aussi.

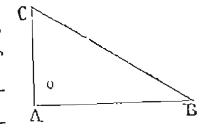


Fig. 147.

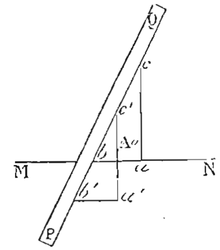


Fig. 148.

210. Pour mener, par un point A, une parallèle à la droite MN (*fig.* 149), appliquez sur MN l'un des bords de l'équerre, *bc*, par exemple, et contre un autre bord de l'équerre, *ac*, je suppose, appliquez une règle PQ; pressez avec la main la règle contre le papier pour la rendre immobile, faites glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce que le côté *bc*, venant

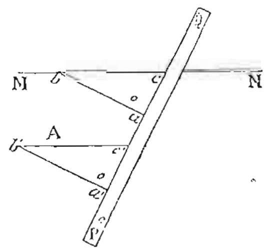


Fig. 149.

en $b'c'$, passe par le point A ; servez-vous du bord $b'c'$ de l'équerre comme d'une règle, et tracez une droite ; cette droite est évidemment la parallèle demandée.

211. Avant d'employer une équerre, on doit la vérifier, c'est-à-dire s'assurer que les trois bords constituent de bonnes règles, et que l'angle *bac* est rigoureusement droit. — La première vérification se fait comme nous l'avons expliqué pour la règle. — Pour vérifier que l'angle *bac* est droit, on applique un côté de l'angle droit *ab* contre une règle (*fig.* 150), et

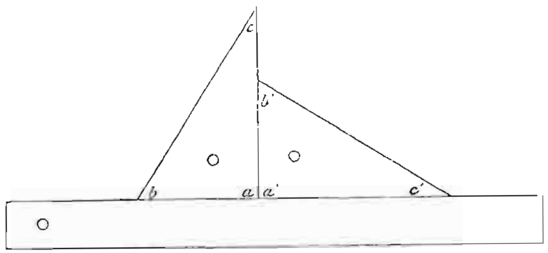


Fig. 150.

avec un crayon on trace une ligne suivant le côté *ac*, puis on fait mouvoir l'équerre, sans changer la face appuyée contre le papier, de façon à l'amener dans la position $a'b'c'$, le sommet a' coïncidant avec le sommet a, et le côté $a'c'$ étant appliqué contre la règle. On trace une nouvelle droite suivant $a'b'$; si l'angle *bac* de l'équerre est droit, cette droite $a'b'$ coïncide avec la droite *ac* ; si l'angle n'est pas droit, la coïncidence n'a pas lieu.

212. Toutefois, la construction d'une perpendiculaire à une droite au moyen de l'équerre ne comporte pas une grande précision, il vaut mieux employer la règle et le compas. Si l'on a à mener plusieurs perpendiculaires à une même droite, on construira d'abord, avec la règle et le compas, une perpendiculaire à la droite, puis, avec l'équerre, on mènera des parallèles à cette perpendiculaire.

RAPPORTEUR.

213. Le *rapporteur* est un demi-cercle, ordinairement en cuivre ou en corne, dont la demi-circonférence est divisée en

180 degrés. Les divisions sont marquées au burin, et numérotées de 10 en 10 dans les deux sens ; le centre est marqué par un petit trou (*fig.* 151). On se sert du rapporteur pour évaluer en degrés l'angle donné sur le papier, et pour faire sur le papier un angle d'un nombre déterminé de degrés.

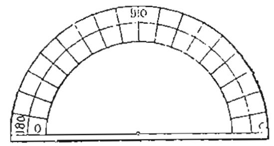


Fig. 151.

Pour mesurer avec le rapporteur un angle AOB, on place le centre du rapporteur au sommet O de l'angle, on dirige le diamètre 0° — 180° sur le côté OA, et on lit sur la circonférence le nombre de degrés et la fraction de degré que contient l'arc DE compris entre les côtés de l'angle AOB (*fig.* 152).

Pour faire avec le rapporteur un angle d'un nombre donné de degrés, de 40° par exemple, en un point A d'une droite MN, on opère comme il suit : on place le rapporteur de façon que le centre et la division 40° soient sur la droite MN (*fig.* 153), puis on fait glisser le rapporteur sur le papier, en

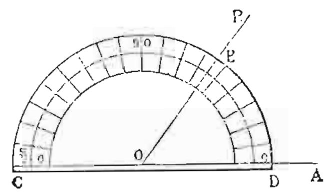


Fig. 152.

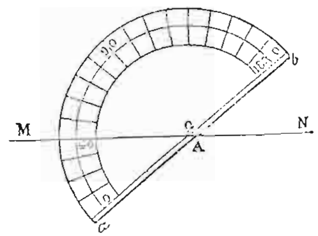


Fig. 153.

laissant toujours le centre et la division 40° sur la droite MN, jusqu'à ce que le bord *ab* du rapporteur passe par le point A, et avec un crayon on trace une droite en se servant du bord *ab* comme d'une règle. Cette droite, parallèle au diamètre 0° — 180° du rapporteur, fait avec la droite MN, au point A, un angle de 40°.

214. On rend plus commode l'usage du rapporteur en lui donnant une forme rectangulaire (*fig.* 154), qui permet de le faire glisser comme une équerre le long d'une règle. Les traits de division s'obtiennent alors en prolongeant les rayons qui passent par les traits de division d'un demi-cercle dont le diamètre est la ligne 0° — 180° du rapporteur. Si l'on veut, avec un rapporteur de cette forme, mener par un point A une droite faisant avec une droite MN un angle de 40°, par exemple, on place le rapporteur (*fig.* 155) de façon que le centre et la division 40° soient sur la ligne MN, le bord ab fait ainsi un angle de 40° avec MN. On appuie une règle contre le bord ac, et on fait glisser le rapporteur le long de la règle jusqu'à ce que le bord ab, transporté parallèlement à lui-même en $a'b'$, passe

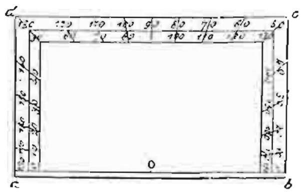


Fig. 154.

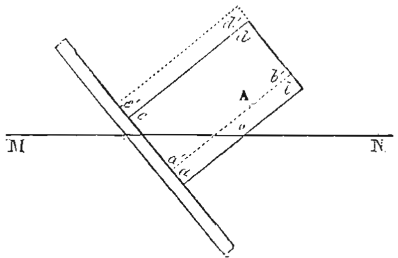


Fig. 155.

par le point A ; puis on trace la droite demandée en se servant de ce bord $a'b'$ comme d'une règle.

Avant d'employer un rapporteur, il faut le vérifier, c'est-à-dire s'assurer que les 180 divisions de la circonférence sont égales entre elles. A cet effet, on trace sur le papier un angle d'un certain nombre de degrés, on place le centre du rapporteur au sommet de l'angle, et l'on fait tourner le rapporteur autour de ce point. Si les divisions du rapporteur sont égales, il est évident que le nombre des divisions comprises entre les côtés de l'angle doit rester constant.

§ VII. — Problèmes élémentaires sur la construction des triangles.

Problème.

215. *Construire un triangle, connaissant un côté et les deux angles adjacents* B *et* C (*fig.* 156).

Sur une droite indéfinie on prend une longueur BC égale

à a; au point B on fait un angle ABC égal à B, au point C un angle ACB égal à C, et le triangle ABC ainsi formé est le triangle demandé.

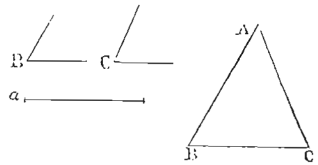


Fig. 156.

Problème.

216. *Construire un triangle, connaissant deux côtés* a, b, *et l'angle compris* C (*fig.* 157).

On prend sur une ligne droite une longueur CB égale à a; on fait au point C un angle BCA égal à l'angle C, et, sur la droite CA, on prend une longueur CA égale à b; enfin on joint B et A. Le triangle BCA est le triangle demandé.

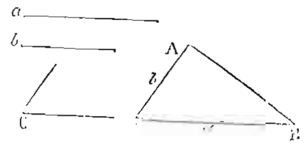


Fig. 157.

Problème.

217. *Construire un triangle, connaissant les trois côtés* a, b *et* c (*fig.* 158).

On prend sur une droite indéfinie une longueur BC égale à a; du point C comme centre, avec un rayon égal à b, on décrit une circonférence ; du point B comme centre, avec un rayon égal à c, on décrit une seconde circonférence qui coupe la première aux points A et A'. Les deux triangles ABC, A'BC, ont respectivement leurs côtés égaux à a, b, c, et répondent à la question ; mais, comme ils sont égaux (61), le problème n'admet qu'une solution.

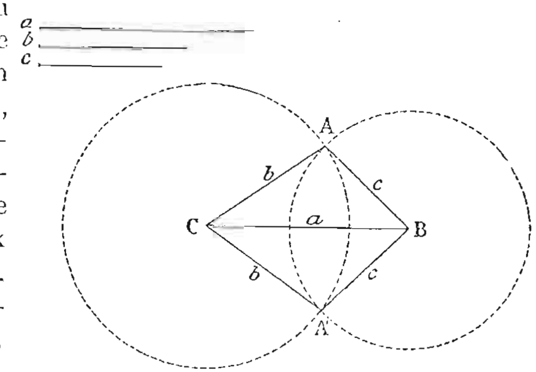


Fig. 158.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que les circonférences décrites des points C et B comme centres, avec des rayons égaux à b et à c, se coupent, c'est-à-dire que la distance des centres a soit à la fois plus petite que la somme des rayons b et c et plus grande que leur différence. Donc, *pour qu'on puisse construire un triangle ayant pour côtés trois longueurs données, la condition nécessaire et suffisante est que l'une de ces longueurs soit à la fois plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence.*

On peut dire encore que *la condition nécessaire et suffisante est que la plus grande des trois longueurs données soit plus petite que la somme des deux autres.* Car la plus grande des trois longueurs est toujours plus grande que la différence des deux autres.

Problème.

218. *Construire un triangle, connaissant deux côtés* a, b, *et l'angle* A *opposé au côté* a.

On prend (*fig.* 159) l'angle CAR égal à l'angle donné A, et sur l'un des côtés de cet angle on porte une longueur AC égale à b; puis du point C comme centre, avec un rayon égal à a, on décrit une circonférence. Soit B un point où cette circonférence rencontre le côté AR de l'angle donné; le triangle ABC satisfait aux conditions du problème. Donc, selon que la circonférence décrite du point C comme centre, avec a pour rayon, rencontre la portion AR de la droite indéfinie RR' en deux points, en un point, ou ne la rencontre pas, le problème admet deux solutions, une solution, ou n'en admet pas.

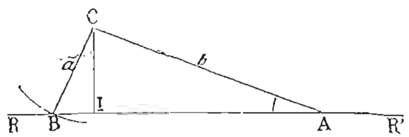


Fig. 159.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que la circonférence employée rencontre la droite RR', et pour cela il faut que a soit supérieur ou égal à la perpendiculaire CI menée du point C à la droite RR'.

Supposons cette condition remplie. La circonférence rencontre la droite RR'. Pour distinguer les cas qui peuvent se

présenter, nous supposerons successivement l'angle A aigu, droit, ou obtus.

1° L'angle A est aigu (*fig.* 160). Si a est égal à CI la circonférence est tangente en I à RR', et le triangle rectangle ACI répond seul à la question. Si a est plus grand que CI et moindre que b, la circonférence rencontre la droite RR' en deux points B et B' situés sur la portion AR de cette droite, et les deux triangles ACB, ACB' répondent à la question. Si a est égal à b, le point B' se confond avec le point A, le triangle ACB' se réduit à une droite, l'autre devient isocèle. Si a est plus grand que b, les deux points B et B' sont l'un sur la portion AR de la droite RR', l'autre sur la portion AR', et, par conséquent, le premier seul convient et le problème n'a qu'une solution.

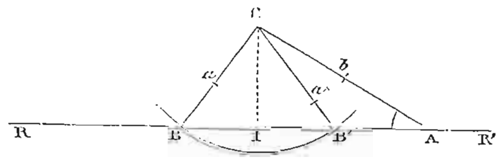


Fig. 160.

2° L'angle A est obtus (*fig.* 161). Si a est plus grand que b, la circonférence rencontre la droite RR' en deux points B et B',

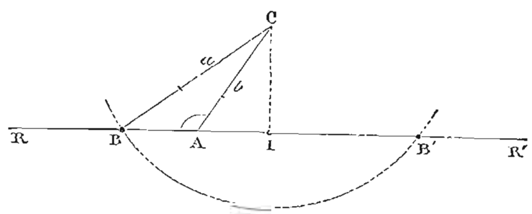


Fig. 161.

situés l'un sur AR, l'autre sur AR'; le premier convient, le second ne convient pas, et le problème admet une solution. Si a est égal à b, le point B se confond avec le point A, et le triangle se réduit à une droite. Si a est moindre que b, les points B et B' sont tous deux sur la portion AR' de la droite RR', et le problème est impossible.

3° L'angle A est droit (*fig.* 162). Dans ce cas les deux portions AR et AR' de la droite RR' faisant le même angle avec la droite AC, il n'y a plus lieu de les distinguer l'une de l'autre. Si a est supérieur à CA, c'est-à-dire à b, la circonférence rencontre la droite RR' aux deux points B et B', situés à égale distance du point A. Les deux triangles ACB, ACB' répondent à la question; mais, comme ils sont égaux, nous dirons que le problème n'admet qu'une solution. Si a est égal à b, le triangle ABC se réduit à une droite; si a est moindre que b, le problème est impossible.

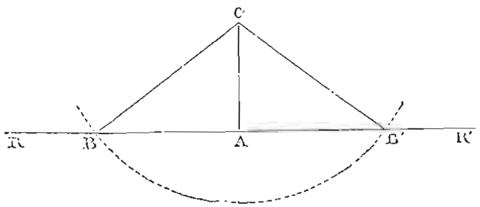


Fig. 162.

Nous pouvons réunir dans le tableau suivant les résultats principaux de cette discussion.

$a < \mathrm{CI}$			o solution.
$a > \mathrm{CI}$	$\mathrm{A} < 90°$	$a < b$	2 solutions.
		$a > b$	1 solution.
	$\mathrm{A} > 90°$	$a < b$	o solution.
		$a > b$	1 solution.
	$\mathrm{A} = 90°$	$a < b$	o solution.
		$a > b$	1 solution.

§ VIII. — Problèmes sur les tangentes. — Tracer une circonférence passant par trois points. — Tracer une circonférence tangente à trois droites. — Décrire un arc de cercle capable d'un angle donné.

Problèmes.

219. *Mener une tangente à une circonférence : 1° par un point de la circonférence; 2° par un point extérieur; 3° parallèlement à une droite donnée.*

1° Pour mener une tangente à une circonférence par un point A de cette circonférence, il suffit d'élever au point A une perpendiculaire au rayon OA (*fig.* 163).

2° Supposons le problème résolu. Soit B le point de contact d'une tangente AB menée par le point A à la circonférence

donnée (*fig.* 164). Tout revient à trouver le point B. Or la tangente étant perpendiculaire au rayon OB, l'angle OBA est droit, et le point B est sur la circonférence décrite sur OA

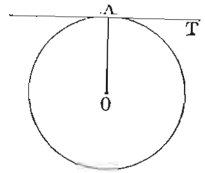


Fig. 163.

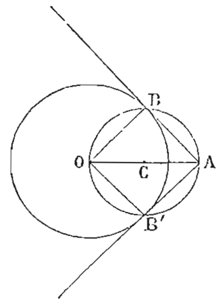


Fig. 164.

comme diamètre; comme il doit être aussi sur la circonférence donnée, il est l'un des points de rencontre de ces deux circonférences. On décrira donc sur OA comme diamètre, une circonférence et on joindra le point A aux deux points de rencontre de cette circonférence avec la circonférence donnée.

Si le point A est extérieur au cercle donné, les deux circonférences se coupent en deux points B, B', et du point A on peut mener à la circonférence donnée les deux tangentes AB, AB'.

Si le point A est à l'intérieur du cercle donné, les deux circonférences ne se rencontrent pas. Le problème est impossible, ce qui d'ailleurs est évident *a priori* puisqu'une tangente à un cercle n'a aucun point à l'intérieur de ce cercle.

Si le point A est sur la circonférence donnée, les deux circonférences sont tangentes en A, les points B, B' sont confondus avec le point A, les deux tangentes AB, AB', sont confondues avec la perpendiculaire au rayon OA au point A.

3° Supposons le problème résolu. Soit A le point de contact d'une tangente AT à la circonférence donnée parallèle à une droite donnée MN (*fig.* 165). Tout revient à trouver ce point A. Or le rayon OA étant perpendiculaire à la tangente AT, et, par suite, à la droite MN parallèle à AT, le point A est sur la perpendiculaire menée du centre O à la droite MN, et, comme il doit être aussi sur la circonférence donnée, il est un des deux points de rencontre de la circonférence donnée et de la perpendiculaire à MN menée par le point O. On mènera donc du point O la perpendiculaire à MN, et, par chacun des points A, A', où elle rencontre la circonférence donnée, on mènera une parallèle à MN. On obtiendra ainsi deux tangentes AT, A'T'.

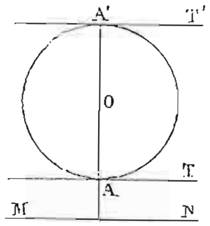


Fig. 165.

Problème.

220. *Mener un tangente commune à deux cercles.*

Supposons le problème résolu. Soit d'abord une droite AA_1, tangente commune aux deux cercles O et O_1 et telle que les deux cercles soient d'un même côté par rapport à cette droite (*fig.* 166). Menons les rayons OA et O_1 A_1 qui passent par les

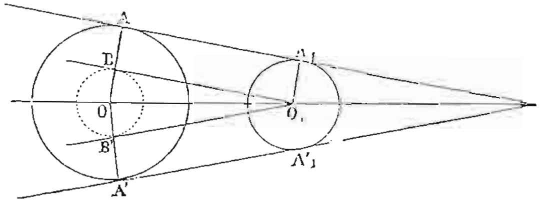


Fig. 166.

points de contact; ils sont tous deux perpendiculaires à la tangente commune AA_1 et sont dirigés dans le même sens; menons encore la droite O_1B parallèle à AA_1. La figure ABO_1A_1 est un rectangle; les côtés opposés BA et O_1A_1 sont égaux, et la longueur OB est égale à la différence des rayons des deux cercles. Si du point O comme centre, avec un rayon égal à la différence des deux rayons, on décrit une circonférence, cette circonférence est tangente à la droite O_1B au point B, puisque

O_1B est perpendiculaire au rayon OB. De là résulte la construction suivante :

Du point O comme centre, avec un rayon égal à la différence des deux rayons, décrivez une circonférence, et du point O_1 menez à cette circonférence les tangentes O_1B et O_1B'; menez les rayons OBA, OB'A' du cercle donné O, et par les points A et A' menez les droites AA'_1, $A'A'_1$, respectivement parallèles aux droites $B'O_1$, BO_1 ; ces droites sont des tangentes communes aux deux cercles. Ces tangentes sont telles que les deux cercles sont d'un même côté par rapport à chacune d'elles; on les nomme *tangentes communes extérieures*.

221. Remarque. La construction précédente suppose le point O_1 extérieur au cercle OB, c'est-à-dire la distance des centres des cercles donnés plus grande que la différence des rayons; elle est donc applicable tant que les cercles ne sont ni intérieurs ni tangents intérieurement (180). Si les cercles sont tangents intérieurement (*fig.* 167), le point O_1 étant sur le cercle OB, les points B et B' se confondent avec le point O_1 ; les points A et A' se confondent avec le point de contact des deux cercles, et, par suite, les tangentes communes extérieures aux deux cercles se confondent en une seule. Si le second cercle est intérieur au premier, le point O_1 étant à l'intérieur du cercle OB, la construction est impossible. Il est d'ailleurs évident *a priori* que, dans ce cas, les cercles n'ont pas de tangente commune.

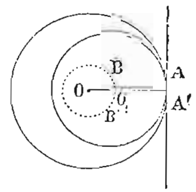


Fig 167.

222. Soit en second lieu une droite CC_1 tangente commune aux cercles O et O_1, et telle que les deux cercles soient de part et d'autre de cette droite (*fig.* 168). Menons les rayons OC et O_1C_1 qui passent par les points de contact; ils sont tous deux perpendiculaires à la tangente commune CC_1, et sont dirigés en sens contraires. Menons encore la parallèle O_1D à la tangente CC_1. La figure CDO_1C_1 est un rectangle; les côtés opposés CD, C_1O_1 sont égaux, et la longueur OD est égale à la somme des rayons des deux cercles. Si du point O comme centre, avec un rayon égal à la somme des rayons des deux cercles, nous décrivons une circonférence, cette circonférence est tangente au point D à la droite O_1D, puisque O_1D est perpendiculaire à OD. De là résulte la construction suivante :

Du point O comme centre, avec un rayon égal à la somme

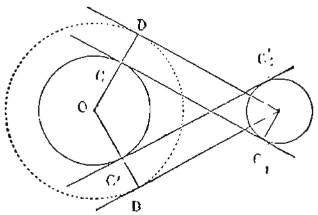


Fig. 168.

des rayons, décrivez la circonférence OD ; menez du point O_1 les tangentes O_1D et O_1D' à cette circonférence, et, par les points C et C′ où les rayons OD et OD′ rencontrent la circonférence donnée O, menez les droites CC_1, $C'C'_1$, respectivement parallèles aux droites DO_1, $D'O_1$; ces droites sont des tangentes communes aux deux cercles donnés. Ces tangentes sont telles que les deux cercles sont de part et d'autre de chacune d'elles : on les nomme *tangentes communes intérieures*.

223. Remarque. Cette construction suppose le point O_1 extérieur au cercle OD, c'est-à-dire la distance des centres des cercles donnés plus grande que la somme des rayons; elle est donc applicable quand les cercles sont extérieurs. Si les cercles sont tangents extérieurement (*fig.* 169), le point O_1 est sur le cercle OD, les points C et C′ se confondent avec le point de contact des deux cercles, et les deux tangentes communes intérieures se confondent en une seule. Dans tout autre position des deux cercles, le point O_1 étant à l'intérieur du cercle O, la construction est impossible. Il est d'ailleurs évident, *a priori*, qu'alors les cercles n'ont pas de tangente commune intérieure.

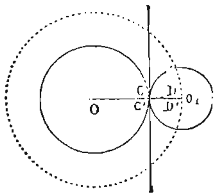


Fig. 169.

Problème.

224. *Tracer une circonférence passant par trois points donnés.*

On sait que par trois points A, B, C, non en ligne droite, on peut faire passer une circonférence et une seule (153). Pour déterminer le centre de cette circonférence, des points A et B

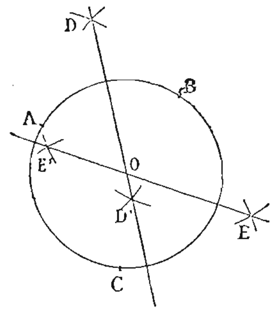


Fig. 170.

comme centres (*fig.* 170), avec un même rayon plus grand que la moitié de AB, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent aux points D et D′, et on trace la droite DD′, qui est le lieu des points équidistants de A et de B ; on trace, de la même façon, la droite EE′, lieu des points équidistants de B et de C. Le point de concours O des droites DD′ et EE′ est équidistant de A, B, C. Il ne reste qu'à décrire du point O comme centre, avec OA pour rayon, une circonférence; cette circonférence est celle qui passe par les trois points A, B, C.

Problème.

225. *Mener un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle.*

Le centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle est un point équidistant de ces trois côtés. Réciproquement, si un point est équidistant des trois côtés, un cercle décrit de ce point comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point à l'un des côtés, est tangent aux trois côtés du triangle.

La recherche du centre d'un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle est ainsi ramenée à la recherche d'un point équidistant des trois côtés du triangle. Or nous avons vu (134) qu'il y a, dans le plan d'un triangle, quatre points équidistants des côtés d'un triangle; il y a donc quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle. Celui qui a pour centre le point de

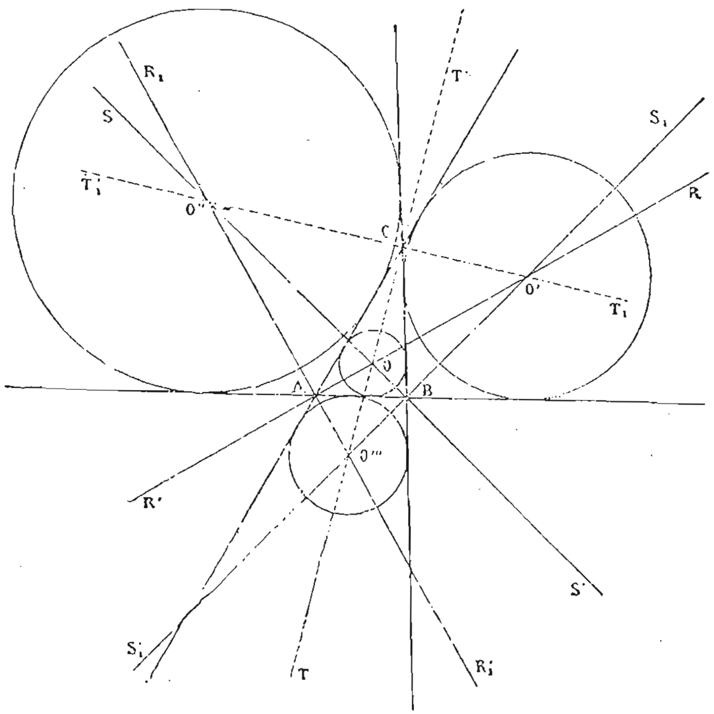


Fig. 171.

concours O (*fig.* 171) des bissectrices des angles du triangle est dans l'intérieur du triangle; on le nomme cercle *inscrit.*

Chacun des trois autres cercles est situé en dehors du triangle, et dans l'un des angles du triangle; on les nomme les *cercles exinscrits.* On distingue l'un des cercles exinscrits des deux autres en indiquant l'angle du triangle dans lequel il est situé. Ainsi le cercle exinscrit qui a pour centre O′, point de concours de la bissectrice de l'angle A et des bissectrices des

angles extérieurs non adjacents à l'angle A, est le cercle exinscrit situé dans l'angle A.

Problème.

226. *Décrire sur une droite* AB, *d'un côté de cette droite, l'arc d'un segment de cercle capable d'un angle donné.*

Supposons le problème résolu. Soit AMB l'arc demandé et soit O le centre de cet arc (*fig.* 172). Le point O est sur la perpendiculaire DE menée à la droite AB, par son milieu. D'autre part, soit BC la tangente en B à l'arc AMB; l'angle ABC, formé par la corde AB et par la partie BC de la tangente située par rapport à AB du côté opposé à celui où est l'arc AMB, a même mesure que la moitié de l'arc ANB, comme tout angle inscrit dans le segment AMB; par conséquent cet angle ABC est égal à l'angle donné. Si donc on mène par le point B une droite BC faisant avec BA, du côté de BA opposé à celui où est l'arc demandé, un angle ABC égal à l'angle donné, cette droite est la tangente en B à l'arc demandé. Mais alors le centre de cet arc est aussi situé sur la perpendiculaire BF à BC, au point B. Le centre de l'arc demandé est donc le point de concours des droites DE et BF.

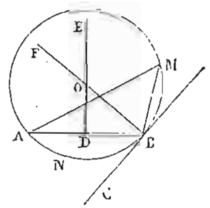


Fig. 172.

De là résulte la construction suivante : on élève à AB une perpendiculaire DE, en son milieu; on mène par le point B une droite BC faisant avec BA un angle ABC égal à l'angle donné, et, par le point B, on mène la droite BF perpendiculaire à BC. Du point de concours O des droites DE et BF, comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une circonférence. L'arc AMB de cette circonférence, situé par rapport à AB du côté où n'est pas l'angle ABC, est l'arc demandé.

L'arc ANB situé de l'autre côté de la corde est l'arc d'un segment capable d'un angle égal au supplément de l'angle donné.

227. Remarque. Lorsque la solution d'un problème se présente aisément à l'esprit, on indique cette solution, et on démontre ensuite qu'elle satisfait aux conditions demandées, c'est la marche *synthétique;* c'est celle que nous avons suivie pour résoudre les problèmes des nos 200, 202, 204 et 205. Mais lorsque la solution paraît plus difficile à découvrir, on procède autrement : on commence par supposer le problème résolu : on construit, aussi bien que possible, une figure que l'on suppose satisfaire à toutes les conditions du problème ; puis, par un examen attentif de cette figure, on cherche à découvrir quelles constructions il faudrait effectuer avec les données du problème pour construire effectivement la figure demandée. C'est la marche *analytique;* c'est celle que nous avons suivie pour résoudre les problèmes des nos 219, 220, 222 et 226.

228. Lorsqu'en opérant ainsi on reconnaît que la construction de la figure dépend essentiellement de la détermination d'un point, pour trouver ce point, on cherche à déterminer deux lignes sur lesquelles ce point doit être situé. A cet effet, on laisse d'abord de côté une des conditions du problème, et l'on cherche quel est le lieu géométrique des points qui satisfont aux autres conditions de l'énoncé ; puis, reprenant la condition d'abord négligée, on en laisse une autre de côté, et on cherche encore le lieu géométrique des points qui satisfont aux conditions conservées ; on a ainsi deux lieux géométriques sur lesquels le point doit être situé. Si ces deux lieux ne se composent que de droites et de cercles, on saura trouver leurs points communs, et le problème sera résolu.

Reprenons, par exemple, le dernier problème

Décrire sur une portion de droite AB, *d'un côté de cette droite, l'arc d'un segment capable d'un angle donné.*

Ayant supposé le problème résolu et tracé l'arc AMB qui est censé satisfaire aux conditions de l'énoncé, on voit que la possibilité de tracer cet arc dépend uniquement de la détermination de son centre O. Or, l'arc doit remplir trois conditions, passer par A, passer par B, et limiter un segment capable d'un angle donné, situé d'un côté déterminé de AB, au-dessus par exemple. Laissant de côté la dernière condition, on dira : Le lieu des centres des arcs qui passent par A et par B est la droite DE perpendiculaire à AB en son milieu ; donc le point O est sur la droite DE. Puis, reprenant la dernière condition, le segment AMB, situé au-dessus de AB, est capable de l'angle

donné, et abandonnant la première, l'arc passe par A ; on dira : le lieu des centres des arcs de cercle qui passent par B et limitent avec la droite BA, au-dessus de cette droite, des segments capables de l'angle donné, est la perpenpiculaire BF menée par le point B à une droite BC qui fait avec BA, au-dessous de BA, un angle ABC égal à l'angle donné. Or on sait construire les deux droites DE et BF qui toutes deux doivent contenir le point O, et par suite on sait déterminer la position de ce point.

EXERCICES SUR LE LIVRE II.

Théorèmes à démontrer.

1. Deux cercles étant tangents, si l'on mène par le point de contact deux sécantes quelconques, les droites qui joignent les extrémités de ces sécantes sont parallèles.

2. Si sur les côtés d'un triangle considérés comme diamètres, on décrit trois circonférences, celles-ci se coupent deux à deux sur les côtés du triangle.

3. Deux cercles se coupant, si par l'un des points communs on mène deux sécantes quelconques, les droites qui joignent les extrémités de ces sécantes font un angle constant.

4. Soient quatre points A, B, C, D, situés sur une circonférence (*fig.* 173) ; on peut mener par ces quatre points les trois couples de sécantes AB et CD, AC et BD, AD et BC. Démontrer que les bissectrices des angles des sécantes AB et CD sont parallèles aux bissectrices des angles des sécantes AC et BD, et aussi aux bissectrices des angles des sécantes AD et BC.

5. Un parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange. — Dans un losange on peut toujours inscrire un cercle.

6. Soit un arc de cercle AB ; si en un point quelconque M de cet arc, on mène une tangente au cercle, la portion PQ de cette ligne, comprise entre les tangentes au cercle aux points A et B, est vue du centre sous un angle constant (*fig.* 174).

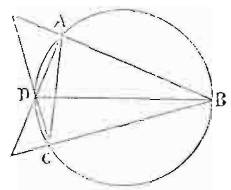


Fig. 173.

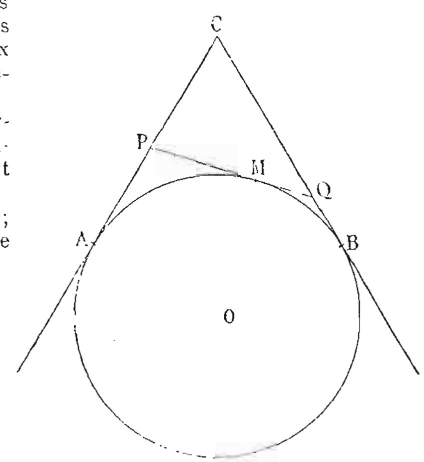


Fig. 174.

7. Soient un arc de cercle AMB, moindre qu'une demi-circonférence, AC et BC, les tangentes au cercle aux points A et B (*fig.* 174); si, en un point quelconque M de l'arc AB, on mène une tangente PQ, cette tangente forme avec les droites CA et CB un triangle CPQ dont le périmètre est constant. — Si l'arc donné AB, est plus grand qu'une demi-circonférence, l'excès de la somme des côtés CP et CQ sur le côté PQ est constant.

8. Trouver la condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les côtés d'un quadrilatère convexe pour que ce quadrilatère soit circonscriptible à un cercle. On distinguera deux cas, selon que l'on exige, ou non, que les quatre points de contact soient sur les côtés non prolongés.

9. Les pieds des perpendiculaires abaissées du sommet A d'un triangle ABC sur les quatre bissectrices des angles formés par la droite BC avec les droites AB et AC, sont quatre points en ligne droite.

10. Dans un triangle les droites qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent les sommets au centre du cercle circonscrit.

11. Les hauteurs d'un triangle sont les bissectrices des angles du triangle qui a pour sommets les pieds des hauteurs.

12. Soient a, b, c, les milieux des côtés d'un triangle ABC, et O le centre du cercle circonscrit; on prolonge les trois droites Oa, Ob, Oc, et on prend $OA' = 2Oa$, $OB' = 2Ob$, $OC' = 2Oc$. Démontrer que les triangles ABC, A'B'C' sont égaux et ont les côtés parallèles, et que si l'on répète sur le triangle A'B'C' la même construction, on retrouve le triangle ABC.

13. Soient un angle ROR' et OS la bissectrice de cet angle (*fig.* 175);

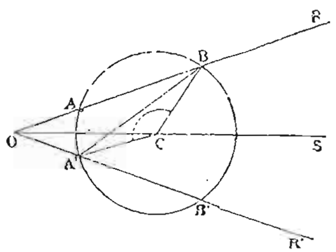


Fig. 175.

on prend, sur cette bissectrice OS, un point quelconque C, et de ce point comme centre, avec un rayon arbitraire, on décrit une circonférence qui rencontre les côtés de l'angle aux points A, B, A', B'. Démontrer que la droite BA' qui joint les points B et A' situés de part et d'autre de OS, et non situés sur une perpendiculaire à OS, est vue du point C sous un angle BCA' dont la grandeur ne dépend ni de la position du point C sur OS, ni du rayon de la circonférence.

Problèmes à résoudre.

Construire un triangle connaissant :

14. Le rayon du cercle circonscrit et deux angles;

15. Le rayon du cercle circonscrit, un côté et l'un des angles adjacents à ce côté;

16. Le rayon du cercle circonscrit et deux côtés;

17. Le rayon du cercle inscrit et deux angles;

18. Le rayon du cercle inscrit, un angle et un côté adjacent à cet angle;

19. Deux côtés et une médiane;

20. Un côté et deux médianes;

21. Les trois médianes;

22. Un angle, l'un des côtés de cet angle, et l'angle que fait le côté opposé à l'angle donné avec la médiane qui correspond à ce côté;

23. Un côté, l'angle opposé et la somme ou la différence des deux autres côtés;

24. Un côté, un angle adjacent et la somme ou la différence des deux autres côtés.

25. Un côté, l'angle opposé et le rayon du cercle exinscrit situé dans l'angle donné;

26. Deux côtés et l'une des hauteurs;

27. Un côté et deux des hauteurs ;

28. Deux angles et l'une des hauteurs;

29. Un angle et deux des hauteurs;

30. Le périmètre et deux angles.

31. Déterminer les sommets d'un triangle, connaissant les points de rencontre autres que les sommets du triangle, des bissectrices des angles du triangle avec le cercle circonscrit au triangle.

32. Déterminer les sommets d'un triangle, connaissant les points de rencontre, autres que les sommets du triangle, du cercle circonscrit au triangle avec les perpendiculaires abaissées de chaque sommet du triangle sur le côté opposé.

33. Déterminer les sommets d'un triangle ABC, connaissant les points, autres que le point A, où le cercle circonscrit au triangle est rencontré par la perpendiculaire abaissée de A sur BC, par la bissectrice de l'angle A et par la droite qui joint le point A au milieu de BC.

34. Avec un rayon donné, tracer une circonférence passant par deux points donnés.

35. Avec un rayon donné, tracer une circonférence tangente à deux droites données.

36. Avec un rayon donné, tracer une circonférence passant par un point donné et tangente à une droite donnée.

37. Avec un rayon donné, tracer une circonférence tangente à une droite et à une circonférence données.

38. Avec un rayon donné, tracer une circonférence tangente à deux circonférences données.

39. Mener, par deux points donnés sur une circonférence, deux cordes parallèles dont la somme ait une longueur donnée.

40. Mener un cercle tangent à une droite donnée en un point donné, et tangent à un cercle donné.

41. Mener un cercle tangent à un cercle donné en un point donné, et tangent à une droite donnée.

42. Construire un quadrilatère, connaissant les longueurs des quatre côtés et la longueur de la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés.

43. Étant donnés quatre points, tracer une circonférence également distante de ces quatre points. (La distance d'un point à une circonférence est comptée sur la droite qui passe par ce point et par le centre du cercle.)

44. Soit AB un diamètre d'un cercle (*fig.* 176); on prend sur la circonférence un point quelconque C, on mène la droite AC, et sur CA, de part et d'autre du point C, on prend les longueurs CD et CD' égales à la corde CB. Trouver le lieu décrit par les poids D et D', quand le point C parcourt le cercle donné.

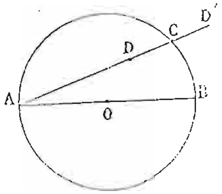


Fig. 176.

45. Lieu des milieux des cordes d'un cercle qui passent par un point donné.

46. Lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires menées de chacun d'eux aux trois côtés d'un triangle soient en ligne droite.

47. Soit un triangle ABC; on déplace le sommet C dans le plan du triangle, de façon que la base AB du triangle restant fixe, la médiane issue du sommet A conserve une longueur fixe : 1° Quel est le lieu décrit par le sommet C? 2° Quel est le lieu décrit par le point de concours des médianes du triangle?

48. Deux cercles se coupent au point A (*fig.* 177); on mène par le point A une sécante fixe BAC et une sécante mobile MAN; on mène par les extrémités de ces sécantes les droites CM et CN qui se coupent en un point P. Lieu décrit par le point P quand on fait tourner la sécante mobile MAN autour du point A.

49. Soient un triangle ABC et un point fixe P sur le côté AB (*fig.* 178). On mène par le point P une droite quelconque qui rencontre en Q le

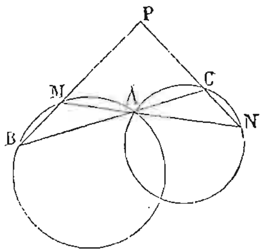


Fig. 177.

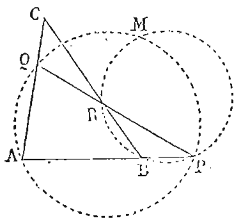


Fig. 178.

côté AC, et en R le côté BC; par les trois points P, A, Q on fait passer un cercle, de même par les trois points P, B, R on fait passer un cercle; ces deux cercles se coupent au point P et en un autre point M. On demande le lieu décrit par le point M, quand la sécante PRQ tourne autour du point P.

50. Une droite de longueur constante AB se meut, en restant appuyée par ses extrémités A et B sur les côtés d'un angle droit ROS; on demande : 1° le lieu du sommet C du rectangle AOBC, construit sur OA et sur OB; 2° le lieu du milieu de la droite AB.

51. Soient deux points A, B, et une droite KK' perpendiculaire à la droite AB. On prend sur KK' un point quelconque C; on joint ce point aux points A et B, puis on mène au point A une perpendiculaire à AC, et au point B une perpendiculaire à BC; ces deux droites se coupent en un point M. On demande le lieu du point M quand le point C parcourt la droite KK'.

52. On donne un cercle et un point A extérieur au cercle; par le point A, on mène une sécante qui rencontre le cercle aux points M et M'; sur cette sécante, on prend, dans le sens AM, une longueur AP égale à AM + AM'; on demande le lieu décrit par le point P quand la sécante tourne autour du point A. — Comment faut-il modifier l'énoncé pour obtenir le même lieu quand le point A est intérieur au cercle.

53. On donne un cercle et une droite LL'; par un point A du cercle on mène un parallèle à LL'; et sur cette droite, dans un sens déterminé, on porte une longueur AB égale à une longueur donnée; on demande le lieu décrit par le point B quand le point A parcourt le cercle.

54. On fait tourner un cercle autour d'un de ses points, et, dans chacune de ses positions, on mène à ce cercle des tangentes parallèles à une direction donnée; lieu des points de contact.

55. Construire un trapèze, connaissant les longueurs des bases parallèles et les deux diagonales.

56. Construire un trapèze, connaissant les longueurs des bases parallèles et des côtés non parallèles.

57. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle; le côté AB restant fixe, on fait mouvoir le point C sur le cercle, et on demande : 1° le lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ABC; 2° le lieu du centre de chacun des cercles exinscrits au même triangle.

58. Démontrer que, dans un triangle rectangle isocèle, un côté est plus grand que la moitié de l'hypoténuse et moindre que trois fois l'excès de l'hypoténuse sur ce côté. — Déduire de là que si l'on applique la méthode du n° 197 à la recherche de la plus grande commune mesure entre la diagonale et le côté d'un carré, l'opération ne peut pas se terminer, ce qui prouve que ces deux longueurs sont incommensurables.

LIVRE III

FIGURES SEMBLABLES.

§ I. Longueurs proportionnelles. — § II. Propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangle. — § III. Polygones semblables. — § IV. Proportionnalité des segments interceptés sur deux droites parallèles par des droites concourantes. — § V. Relations métriques entre les éléments d'un triangle. — § VI. Relations métriques entre les éléments d'un quadrilatère inscriptible. — § VII. Invariabilité du produit des segments interceptés par un cercle sur une sécante qui tourne autour d'un point fixe. — § VIII. Problèmes sur les longueurs proportionnelles. — § IX. Remarque sur les constructions des formules algébriques. — § X. Construction des racines d'une équation du second degré. — § XI. Problèmes relatifs à la détermination d'un cercle. — § XII. Figures homothétiques. — § XIII. Polygones réguliers; leur inscription dans un cercle. — § XIV. Longueur d'un arc de cercle. — § XV. Rapport de la circonférence au diamètre.

§ I. — Longueurs proportionnelles.

Théorème.

229. *Sur la droite indéfinie qui passe par deux points* A *et* B, *il y a deux points tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux points* A *et* B *est égal à un rapport donné, et il n'y en a que deux. Un de ces points est entre* A *et* B, *l'autre sur l'un ou sur l'autre des prolongements de la droite* AB (*fig.* 179).

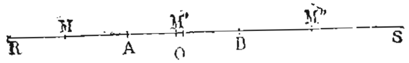


Fig. 179.

Pour le démontrer, supposons le point A à gauche du point B, et proposons-nous d'étudier comment varie le rapport $\frac{MA}{MB}$ des distances du point M aux points A et B, quand le point M parcourt, de gauche à droite, la droite indéfinie RS qui passe par les points A et B.

1° Si le point M est à gauche de A, on a

$$MA = MB - AB$$

d'où

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MB - AB}{MB} = 1 - \frac{AB}{MB}.$$

Le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal à l'unité diminuée du rapport $\frac{AB}{MB}$. Or, à mesure que le point M avance vers la droite, MB diminue, $\frac{AB}{MB}$ augmente, et par suite $1 - \frac{AB}{MB}$, ou $\frac{MA}{MB}$, diminue. Quand le point M est à l'infini vers la gauche, $\frac{AB}{MB}$ est nul, et le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal à 1; quand le point M arrive en A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ est nul. Quand le point M, venant de l'infini à gauche, avance jusqu'en A, le rapport $\frac{MA}{MB}$ part de la valeur 1, et décroît jusqu'à 0; il varie d'ailleurs d'une manière continue, et, par conséquent, il passe une fois, et une fois seulement, par une valeur quelconque moindre que 1, et ne prend aucune valeur plus grande que 1.

2° Supposons le point mobile entre A et B, en M'. A mesure que le point M' avance vers la droite, le numérateur du rapport $\frac{M'A}{M'B}$ augmente, tandis que le dénominateur M'B diminue; pour cette double raison le rapport augmente.

Nul quand le point M' part de A, le rapport $\frac{M'A}{M'B}$ augmente à mesure que M' se rapproche de B, et il devient infini quand le point M' arrive en B; dans l'intervalle, il varie d'ailleurs d'une manière continue; donc il passe une fois, et une fois seulement, par une valeur donnée quelconque.

3° Supposons le point mobile à droite de B, en M''. On a, dans ce cas,

$$M''A = M''B + AB,$$

d'où

$$\frac{M''A}{M''B} = \frac{M''B + AB}{M''B} = 1 + \frac{AB}{M''B}.$$

Le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ se compose de l'unité augmentée du rapport $\frac{AB}{M''B}$. Or, à mesure que le point M″ avance vers la droite, M″B augmente, $\frac{AB}{M''B}$ diminue, et, par suite, $1 + \frac{AB}{M''B}$, ou $\frac{M''A}{M''B}$, diminue. Quand le point M″ est en B, le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ est infini; quand le point M est à l'infini vers la droite, $\frac{AB}{M''B}$ est nul, et le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ est égal à 1. Lors donc que le point M″ part du point B et s'éloigne à l'infini à droite, le rapport $\frac{M''A}{M''B}$ part de l'infini, décroît, et décroît jusqu'à 1 : il varie d'ailleurs d'une manière continue ; donc il passe une fois, et une fois seulement, par une valeur quelconque plus grande que 1, et il ne prend aucune valeur moindre que 1.

230. De cette étude, il résulte que sur la droite indéfinie RS, qui passe par les deux points A et B, il y a deux positions du point M pour lesquelles le rapport $\frac{MA}{MB}$ est égal à un rapport donné λ, une entre A et B, l'autre sur l'un des prolongements RA, BS, de AB. Soit O le milieu de AB ; si λ est plus petit que 1, une des positions du point M est entre A et O, l'autre sur AR ; si λ est plus grand que 1, une des positions du point M est entre O et B, l'autre sur BS ; si $\lambda = 1$, une des positions du point M est en O, l'autre est rejetée à l'infini.

Théorème.

231. *Une parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés des segments proportionnels.*

Soit, dans le triangle ABC (*fig.* 180), la droite DE parallèle à BC; je dis que l'on a

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$

Supposons d'abord que DA et DB aient une commune mesure Am, et que cette commune mesure soit, par exemple, contenue 4 fois dans DA, et 3 fois dans DB; le rapport $\frac{DA}{DB}$ est égal à $\frac{4}{3}$, et il faut démontrer que le rapport $\frac{EA}{EC}$ est aussi égal à $\frac{4}{3}$.

Les droites DA et DB étant partagées l'une en 4, l'autre en 3 parties égales, par les points de division menons des parallèles au côté BC; ces lignes déterminent sur AC des segments qui sont tous égaux entre eux. Considérons en effet un segment quelconque pq, et le segment An; menons pr parallèle à AB, et comparons le triangle prq au triangle Amn. Le côté pr est égal à st (côtés opposés d'un parallélogramme), et st est égal à Am par hypothèse ; les angles rpq et mAn sont égaux comme angles correspondants formés par une sécante et deux parallèles; les angles prq et Amn sont égaux comme ayant les côtés parallèles et de même sens; les deux triangles ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun, sont égaux; par suite, pq est égal à An. Les longueurs AE et EC contiennent donc, la première 4 fois, la seconde 3 fois, une même longueur An. Donc le rapport $\frac{EA}{EC}$ est égal à $\frac{4}{3}$.

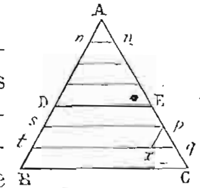


Fig. 180.

Si DA et DB n'ont pas de commune mesure, on démontre que le rapport de ces longueurs est égal au rapport des longueurs EA et EC en répétant le raisonnement fait au n° 181.

Nous avons supposé que la parallèle DE au côté BC rencontre le côté AB entre A et B, mais on répéterait le même raisonnement si le point de rencontre D de ces droites était sur le prolongement de AB, dans le sens AB (*fig.* 181), ou dans le sens BA (*fig.* 182).

232. Corollaire I. De l'égalité

$$\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$$

on déduit (20) l'égalité

$$\frac{DA}{EA} = \frac{DB}{EC},$$

et, de cette dernière, d'après le théorème du n° 21, on déduit :

$$(1) \qquad \frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{DA+DB}{EA+EC},$$

et, selon que DA est plus grand ou plus petit que DB,

$$(2) \qquad \frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{DA-DB}{EA-EC}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{DB-DA}{EC-EA}.$$

Si le point D est entre A et B (*fig.* 180)

$$DA+DB=AB, \qquad EA+EC=AC,$$

et les égalités (1) deviennent

$$\frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Si le point D est sur le prolongement de AB, dans le sens AB (*fig.* 181), on a

$$DA-DB=AB, \qquad EA-EC=AC,$$

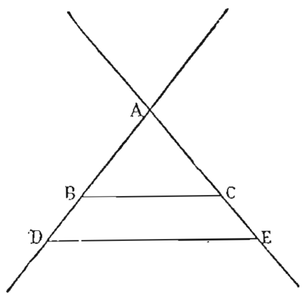


Fig. 181.

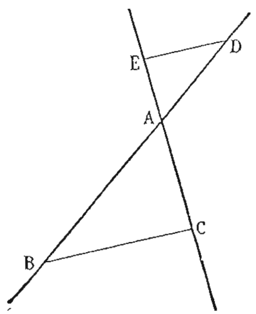


Fig. 182.

et les égalités (2) deviennent

$$\frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Enfin, si le point D est sur le prolongement de AB, dans le sens BA (*fig.* 182), on a

$$DB-DA=AB \qquad EC-EA=AC$$

et les égalités (3) deviennent

$$\frac{DA}{EA}=\frac{DB}{EC}=\frac{AB}{AC}.$$

Donc, dans tous les cas, *si l'on mène une droite* DE *parallèle au côté* BC *d'un triangle, les côtés* AB, AC, *du triangle sont proportionnels aux segments de ces côtés compris entre le sommet* A *et la droite* DE, *et aussi aux segments de ces côtés compris entre le côté* BC *et la droite* DE.

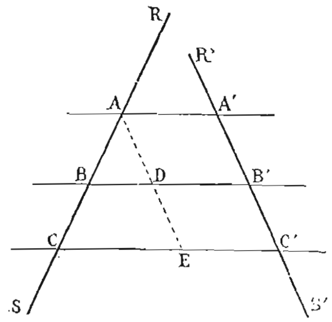


Fig. 183.

233. Corollaire II. *Trois droites parallèles déterminent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.*

Soient AB et BC, A'B' et B'C' les segments déterminés par trois droites parallèles AA', BB', CC', sur deux droites RS, R'S' (*fig.* 183). Menons par A une parallèle à R'S', et soient D et E les points où cette droite rencontre BB' et CC'. On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}.$$

Or, AD = A'B', et DE = B'C' (114), donc

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

234. Application. Le théorème précédent permet de déterminer, sur la droite passant par deux points A et B (*fig.* 184), les deux points D et D' tels que les rapports $\frac{DA}{DB}$ et $\frac{D'A}{D'B}$ soient égaux au rapport de deux longueurs données m et n.

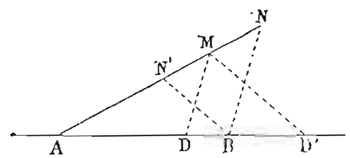


Fig. 184.

Menons en effet par A une droite quelconque, et sur cette droite, à partir de A, portons une longueur AM égale à m, puis à partir de M, dans le sens AM et dans le sens opposé, les longueurs MN et MN′ égales à n. Joignons N et B, et menons MD parallèle à NB; joignons N′ et B, et menons MD′ parallèle à N′B. Les points D et D′ sont les points demandés. Car, en vertu du théorème précédent, on a

$$\frac{DA}{DB}=\frac{MA}{MN}=\frac{m}{n}$$

et

$$\frac{D'A}{D'B}=\frac{MA}{MN'}=\frac{m}{n}.$$

Théorème.

235. RÉCIPROQUEMENT. *Toute droite qui détermine sur deux côtés d'un triangle des segments proportionnels est parallèle au troisième côté du triangle, pourvu toutefois que les points de rencontre de la droite avec les deux côtés du triangle soient tous deux sur ces côtés non prolongés, ou tous deux sur les prolongements.*

Soient sur les côtés AB, AC du triangle ABC les points D et E tels que l'on ait

$$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EB}.$$

1° Si les points D et E sont tous deux sur les côtés AB, AC non prolongés, la droite DE est parallèle à BC (*fig.* 185). En effet, supposons le point D entre A et B; si l'on mène par le point D une parallèle à BC, cette parallèle rencontre la droite AC, entre A et C, en un point tel que le rapport de ses distances aux points A et C est égal à $\frac{DA}{DB}$; or on sait qu'entre les points A et C le point E est le seul point qui satisfasse à cette condition; donc la parallèle au côté BC menée par le point D passe par le point E, et, par conséquent, se confond avec DE.

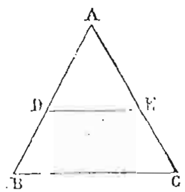


Fig. 185.

2° Si les points D et E sont tous deux sur les prolongements

des côtés AB et AC, DE est encore parallèle à BC. Remarquons d'abord que si le point D est sur le prolongement de AB, dans le sens AB (*fig.* 186), le rapport $\frac{DA}{DB}$ est plus grand que 1; il en est de même du rapport égal $\frac{EA}{EC}$; donc le point E est sur le prolongement de AC, dans le sens AC. Si au contraire (*fig.* 187) le point D est sur le prolongement de AB, dans le sens BA, le rapport $\frac{DA}{DB}$ est plus petit que 1; il en est de même du rapport égal $\frac{EA}{EC}$, et par conséquent le point E est sur le prolongement de AC, dans le sens CA. Ces remarques

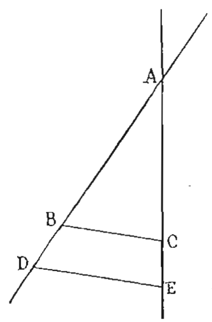


Fig. 186.

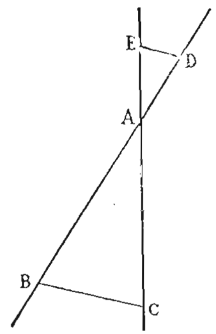


Fig. 187.

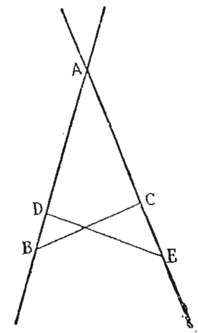


Fig. 188.

faites, on achèvera la démonstration comme dans le premier cas.

Si le point D était sur le côté AB non prolongé, et le point E sur le prolongement de AC (*fig.* 188), il est clair que malgré l'égalité

$$\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$$

la droite DE ne serait pas parallèle à BC.

§ II. — Propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangle.

Théorème.

236. *La bissectrice d'un angle* C *d'un triangle* ABC *rencontre le côté opposé en un point* D *tel que le rapport* $\frac{DA}{DB}$ *des distances du point* D *aux points* A *et* B *est égal au rapport* $\frac{CA}{CB}$ *des distances du sommet* C *aux mêmes points* A *et* B.

La bissectrice de l'angle extérieur BCK *jouit de la même propriété.*

1° Menons par le point B la parallèle BE à la bissectrice CD, et soit E le point où elle rencontre la droite AC (*fig.* 189). Dans le triangle ABE, la droite DC, parallèle au côté BE, partage les autres côtés en parties proportionnelles, et on a le rapport

$$\frac{DA}{DB}=\frac{CA}{CE};$$

Pour démontrer que le rapport $\frac{DA}{DB}$ est aussi égal au rapport $\frac{CA}{CB}$, il suffit de prouver que CE est égal à CB.

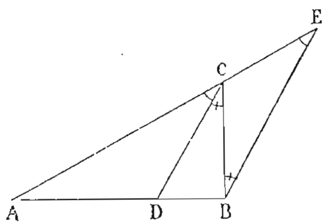


Fig. 189.

Or les angles CEB et ACD sont égaux comme angles correspondants formés par une sécante et deux parallèles ; les angles CBE et DCB sont aussi égaux comme angles alternes-internes formés par une sécante et deux parallèles ; d'ailleurs les angles ACD, BCD sont égaux par hypothèse ; donc les angles CEB et CBE, respectivement égaux aux angles égaux ACD et BCD, sont égaux, et par suite, dans le triangle CBE, les côtés CE et CB opposés à des angles égaux sont égaux.

2° Soit CD′ la bissectrice de l'angle extérieur BCK (*fig.* 190); il faut démontrer que $\frac{D'A}{D'B}$ est égal à $\frac{CA}{CB}$; la démonstration est la même que dans le cas précédent. On mène BE′ parallèle à la bissectrice CD′ ; dans le triangle AD′C, la droite BE′, parallèle au côté D′C, détermine sur les autres côtés des segments proportionnels, et l'on a

$$\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CE'}.$$

Pour prouver que le rapport $\frac{D'A}{D'B}$ est aussi égal à $\frac{CA}{CB}$, il suffit de prouver que CE′ est égal à CB.

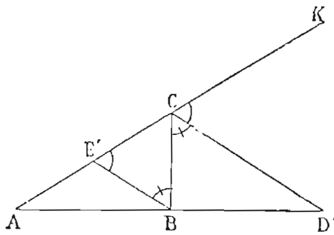


Fig. 190.

Or les angles CE′B et KCD′ sont égaux comme angles correspondants formés par une sécante et deux droites parallèles ; les angles CBE′ et BCD′ sont égaux comme angles alternes-internes formés par une sécante et deux droites parallèles ; d'ailleurs les angles BCD′ et KCD′ sont égaux par hypothèse ; donc les angles CE′B et CBE′, respectivement égaux à des angles égaux, sont égaux, et les côtés CE′ et CB du triangle CBE′, opposés à des angles égaux, sont égaux.

Si les côtés CA, CB du triangle sont égaux, la bissectrice de l'angle C passe par le milieu de AB, et est perpendiculaire à AB ; la bissectrice de l'angle extérieur BCK est parallèle à AB. Le point D est au milieu de AB, le point D′ est rejeté à l'infini.

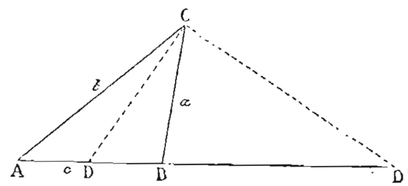


Fig. 191.

237. Réciproquement. *Si sur le côté* AB *d'un triangle* ABC, *deux points* D, D′, *sont tels que l'on ait*

$$\frac{DA}{DB}=\frac{D'A}{D'B}=\frac{CA}{CB}$$

les droites CD, CD′ *sont, l'une la bissectrice de l'angle* C *du triangle, l'autre la bissectrice de l'angle extérieur en* C (229).

238. Application. Soient a, b, c, les trois côtés du triangle ABC; calculer les distances DA et DB, D′A et D′B, des points de rencontre du côté AB avec les bissectrices de l'angle C et de l'angle extérieur en C, aux sommets A et B du triangle (*fig.* 191),

On a, en supposant $a < b$,

$$\frac{DA}{b} = \frac{DB}{a} = \frac{DA + DB}{a+b} = \frac{c}{a+b}$$

et

$$\frac{D'A}{b} = \frac{D'B}{a} = \frac{D'A - D'B}{b-a} = \frac{c}{b-a},$$

d'où

$$DA = \frac{bc}{a+b} \qquad DB = \frac{ac}{a+b}$$

$$D'A = \frac{bc}{b-a} \qquad D'B = \frac{ac}{b-a}.$$

Théorème.

239. *Le lieu géométrique des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux à deux points fixes* A *et* B *est égal à un rapport donné, est un cercle dont le centre est sur la droite* AB.

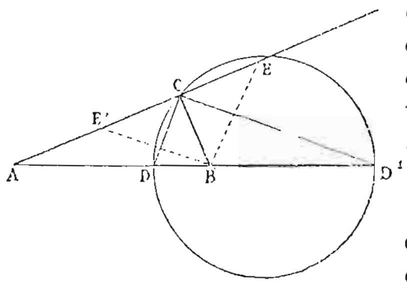


Fig. 192.

Soit λ le rapport donné; on sait qu'il y a sur la droite AB deux points tels que le rapport des distances de chacun d'eux aux points A et B est égal à λ. Il y a donc

sur la droite AB deux points du lieu; soient D et D′ ces deux points (*fig.* 192), soit C un point quelconque du lieu, en dehors de la droite AB; on a

$$\lambda = \frac{DA}{DB} = \frac{D'A}{D'B} = \frac{CA}{CB};$$

donc les droites CD, CD′ sont, l'une la bissectrice de l'angle C du triangle ACD, l'autre la bissectrice de l'angle extérieur en C (237). Donc l'angle DCD′ est un angle droit; donc le point C est sur le cercle décrit sur DD′ comme diamètre.

Réciproquement, tout point C du cercle décrit sur DD′ comme diamètre est un point du lieu. En effet, par le point B menons la parallèle BE à CD et la parallèle BE′ à CD′, et soient E et E′ les points où ces droites rencontrent la droite AC.

Du parallélisme des droites DC et BE il résulte l'égalité

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CE}.$$

Du parallélisme des droites D′C et BE′ il résulte de même l'égalité

$$\frac{D'A}{D'B} = \frac{CA}{CE'};$$

mais, $\frac{DA}{DB}$ étant, par hypothèse, égal à $\frac{D'A}{D'B}$, on a

$$\frac{CA}{CE} = \frac{CA}{CE'},$$

et par suite CE = CE′. Or l'angle EBE′, dont les côtés sont respectivement parallèles aux côtés de l'angle droit DCD′, est lui-même un angle droit; son sommet B est sur une circonférence décrite sur EE′ comme diamètre, et par conséquent CE = CE′ = CB. Le rapport $\frac{DA}{DB}$, qui est égal à $\frac{CA}{CE}$, est donc aussi égal à $\frac{CA}{CB}$, et le point C est un point du lieu.

240. Remarque. Si le rapport donné λ est égal à 1, le point D est le milieu de AB, le point D′ est rejeté à l'infini. — Le cercle décrit sur DD′ comme diamètre est remplacé par la perpendiculaire à la droite AB, en son milieu.

§ III. — Polygones semblables.

241. Définitions. Lorsque deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun, on dit qu'un côté de l'un est *homologue* à un côté de l'autre si ces côtés sont adjacents à des angles égaux chacun à chacun.

On dit que deux polygones sont *semblables* lorsqu'ils ont les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. Le rapport de deux côtés homologues est appelé *rapport de similitude* des deux polygones.

Dans un triangle, à chaque côté est opposé un angle et un seul. Si deux triangles ont les angles égaux chacun à chacun, deux côtés homologues sont opposés à des angles égaux, et, réciproquement, deux côtés opposés à des angles égaux sont homologues, car ils sont adjacents à deux angles égaux chacun à chacun.

Lors donc que deux triangles ont les angles égaux chacun à chacun, on peut encore dire qu'un côté du premier et un côté du second sont homologues quand ils sont opposés à des angles égaux.

On ne peut reconnaître de la même façon les côtés homologues de deux polygones qui ont les angles égaux chacun à chacun, parce qu'à un même côté d'un polygone sont opposés plusieurs angles de ce polygone.

Le fait qu'il y a des polygones semblables à un polygone donné n'est pas évident *a priori*. Ce fait sera démontré, pour un triangle par le théorème suivant, pour un polygone quelconque par les théorèmes nos 254 et 255.

Théorème.

242. *Toute droite* DE, *parallèle à l'un des côtés* BC *d'un triangle* ABC, *forme avec les deux autres côtés du triangle un nouveau triangle* ADE *semblable au premier* (*fig.* 193).

On voit d'abord que dans ces triangles, les angles sont égaux chacun à chacun; car l'angle A est commun, et les an-

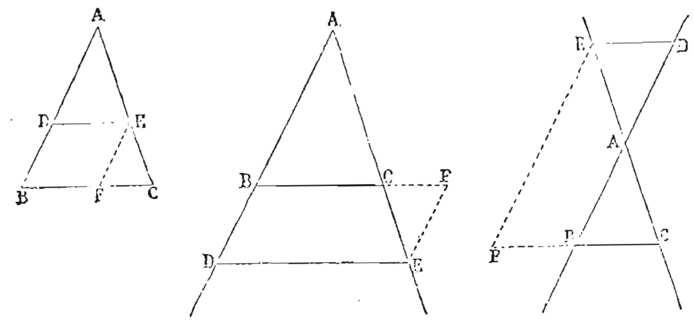


Fig. 193.

gles D et B sont égaux comme correspondants; il en est de même pour les angles E et C.

Je dis de plus que les côtés homologues sont proportionnels. Du parallélisme des droites DE et BC, il résulte que le rapport $\frac{AD}{AB}$ est égal au rapport $\frac{AE}{AC}$; si on mène la parallèle EF au côté AB, on voit encore que le rapport $\frac{AE}{AC}$ est égal au rapport $\frac{BF}{BC}$; on a donc les trois rapports égaux

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}.$$

Mais, dans le parallélogramme BDEF, les côtés opposés DE et BF sont égaux; on a donc, en remplaçant BF par DE,

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}.$$

Les triangles ADE et ABC, qui ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels, sont semblables.

243. Réciproquement. *Si, deux triangles* ABC, A′B′C′ *étant* *semblables, on déplace le triangle* A'B'C' *de façon à placer l'angle* A' *sur l'angle homologue* A *du triangle* ABC, *ou sur l'angle opposé par le sommet, chacun des côtés qui comprennent l'angle* A' *étant sur le triangle homologue du triangle* ABC, *le côté* B'C' *vient se placer en* $B'_1C'_1$ *dans l'angle* A *du triangle* ABC *ou en* $B'_2C'_2$ *dans l'angle opposé par le sommet à l'angle* A *du triangle, et chacune des droites* $B'_1C'_1$, $B'_2C'_2$ *est parallèle à* BC (*fig.* 193 *bis*).

On a, en effet, par hypothèse

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC};$$

or, comme on a

$$A'B'=AB'_1=AB'_2, \qquad A'C'=AC'_1=AC'_2,$$

on en déduit les égalités

$$\frac{AB'_1}{AB}=\frac{AC'_1}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{AB'_2}{AB}=\frac{AC'_2}{AC}$$

qui démontrent le fait énoncé.

De ce théorème et de la réciproque il résulte que, pour former tous les triangles semblables à un triangle donné ABC, il suffit de mener, dans le plan du triangle, une parallèle à l'un de ses côtés BC par exemple et de faire mouvoir cette droite de façon que, passant d'abord par le sommet A, elle s'éloigne indéfiniment de ce sommet en restant, par rapport à ce sommet, du même côté que le côté BC, ou de l'autre. Si la droite s'éloigne du sommet A successivement des deux côtés, chaque triangle semblable au triangle ABC est obtenu deux fois.

Théorème.

244. *Deux triangles qui ont deux angles égaux, chacun à chacun, sont semblables.*

Soient les triangles ABC et A'B'C' dans lesquels $A=A'$ et $B=B'$ (*fig.* 194). Les angles C' et C' sont égaux, comme suppléments d'angles égaux. Je prends sur le côté AB, homologue

de A'B', la longueur AD égale à A'B'; et, par le point D, je mène la parallèle DE au côté BC. Le triangle ADE ainsi formé est semblable au triangle ABC. Si je fais voir que le triangle

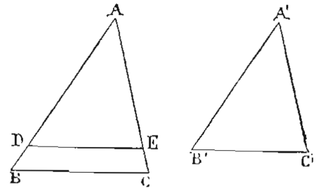


Fig. 194.

A'B'C est égal à ce triangle ADE, j'aurai démontré le théorème énoncé. Or les triangles A'B'C' et ADE sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : $A'B'=AD$ par construction; $A'=A$ par hypothèse, et $B'=D$, parce que les angles B' et B sont égaux par hypothèse, et que les angles B et D sont égaux comme correspondants.

245. Les deux égalités

$$A'=A, \qquad B'=B,$$

entraînent comme conséquences les trois égalités

$$C'=C, \qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}.$$

246. Corollaire. *Deux triangles rectangles qui ont un angle aigu égal sont semblables.*

Théorème.

247. *Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels sont semblables.*

Soit, dans les triangles ABC et A'B'C' (*fig.* 195).

$$A'=A, \quad \text{et} \quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC};$$

je dis que ces triangles sont semblables. Pour le démontrer, je prends sur AB, homologue de A′B′, la longueur AD égale à A′B′, et par le point D je mène la parallèle DE à BC. Le trian-

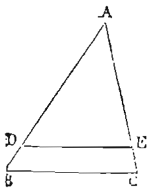


Fig. 195.

gle ADE ainsi formé est semblable au triangle ABC. Si je fais voir que le triangle A′B′C′ est égal au triangle ABC, j'aurai démontré le théorème énoncé.

Or les triangles ADE et ABC étant semblables, on a

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC};$$

on a aussi par hypothèse

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC};$$

et, comme d'ailleurs AD est égal à A′B′ par construction, il en résulte que AE est égal à A′C′. Les deux triangles ADE et A′B′C′ ayant un angle égal, $A=A'$, compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, $AD=A'B'$ et $AE=A'C'$, sont deux triangles égaux.

248. Les deux égalités

$$A'=A,\qquad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC},$$

entraînent comme conséquences les trois égalités

$$B'=B,\qquad C'=C,\qquad \frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}.$$

Théorème.

249. *Deux triangles qui ont les côtés proportionnels sont semblables.*

Soit dans les triangles ABC et A′B′C′ (*fig.* 196),

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC};$$

je dis que ces triangles sont semblables. Pour le démontrer, je prends sur AB une longueur AD égale à A′B′, et je mène DE

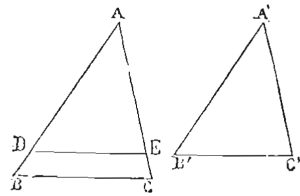


Fig. 196.

parallèle à BC. Le triangle ADE est semblable au triangle ABC; si je fais voir que le triangle A′B′C′ est égal au triangle ADE, j'aurai démontré le théorème énoncé. Or ces deux triangles sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun; on a en effet par hypothèse

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC};$$

à cause de la similitude des triangles ADE, ABC, on a aussi

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC};$$

comme d'ailleurs $A'B'=AD$ par construction, les seconds rapports sont égaux aux premiers, et comme les dénominateurs sont les mêmes, les numérateurs sont respectivement égaux, et on a

$$A'B'=AD,\qquad A'C'=AE,\qquad \text{et}\qquad B'C'=DE.$$

250. Les deux égalités

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

entraînent comme conséquences les trois égalités

$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C.$$

Théorème.

251. *Deux triangles* ABC, A'B'C', *qui ont les côtés respectivement parallèles, ou perpendiculaires, sont semblables.*

Supposons d'abord que les angles A et A', B et B', C et C' aient leurs côtés respectivement parallèles (*fig.* 197). On sait que ces angles sont deux à deux égaux, ou supplémentaires.

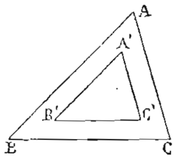


Fig. 197.

Or il est facile de reconnaître qu'ils sont nécessairement égaux deux à deux. D'abord ils ne peuvent être en même temps supplémentaires ni dans les trois groupes ni dans deux de ces groupes; car, dans le premier cas, la somme des six angles de ces triangles ferait six angles droits, tandis que l'on sait qu'elle équivaut toujours à quatre angles droits; dans le second cas, la somme de quatre des six angles des triangles vaudrait quatre droits, et serait ainsi égale à la somme des six angles, ce qui est évidemment impossible. Donc les angles seront égaux au moins dans deux des trois groupes; mais alors ils seront aussi nécessairement égaux dans le troisième groupe. Donc les triangles ont les angles égaux chacun à chacun, et par conséquent ils sont semblables. Les côtés parallèles sont homologues.

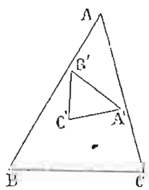


Fig. 198.

On démontre de même la similitude de deux triangles dont les côtés sont respectivement perpendiculaires. Dans ces triangles, deux côtés perpendiculaires sont homologues (*fig.* 198).

252. REMARQUE I. Les conditions comprises dans les trois premiers cas de similitude sont *nécessaires et suffisantes;* les conditions énoncées dans ce dernier théorème sont *suffisantes*, mais non *nécessaires*.

253. REMARQUE II. Des théorèmes précédents il résulte que les six éléments d'un triangle ABC et les six éléments d'un triangle A'B'C' satisfont aux *cinq* relations

$$A' = A, \qquad B' = B, \qquad C' = C,$$
$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB},$$

dès qu'ils satisfont à *deux* de ces relations formant un des trois groupes compris dans les trois premiers cas de similitude, ou encore dès que les côtés d'un de ces triangles sont parallèles ou perpendiculaires aux côtés de l'autre.

Dans l'étude des figures, on se servira souvent de la similitude de deux triangles pour démontrer soit l'égalité de deux angles, soit l'égalité du rapport de deux segments de droites au rapport de deux autres segments de droites.

Théorème.

254. *Deux polygones* P *et* P', *composés de triangles semblables chacun à chacun et disposés de la même façon sont semblables.*

Il importe d'abord d'expliquer ce que l'on entend par deux polygones P et P' composés de triangles semblables, chacun à chacun, et *disposés de la même façon.* Prenons, parmi les triangles qui composent le polygone P, deux triangles quelconques R et S, ayant un côté commun MN; et soient, parmi les triangles qui composent le polygone P', les triangles R' et S' respectivement semblables aux triangles R et S (*fig.* 199). On entend que les triangles R', et S' ont aussi un côté commun M'N', que les côtés MN et M'N' sont homologues à la fois dans les triangles R, R', et dans les triangles S, S'; que celui des sommets M' ou N' du triangle R' qui est homologue au sommet

M du triangle S est le sommet du triangle S′ homologue au sommet M du triangle S ; enfin on suppose que les triangles R′ et

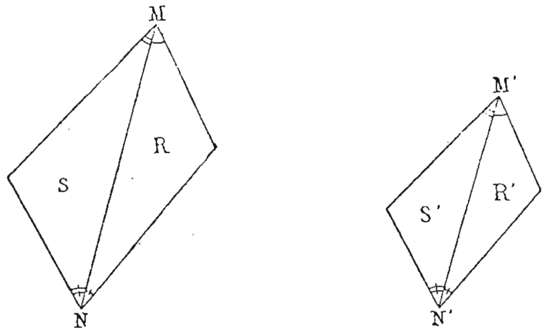


Fig. 199.

S′ sont de part et d'autre de M′N′, ou d'un même côté de M′ N′, selon que les triangles R et S sont de part et d'autre de MN ou d'un même côté de MN.

Cela posé, soient le polygone ABCDE composé des cinq triangles R, S, T, U, V, et le polygone A′B′C′D′E′ composé des

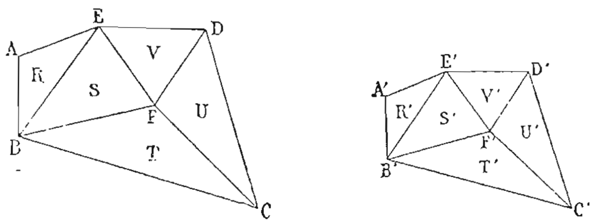


Fig. 200.

triangles R′,S′,T′,U′,V′, respectivement semblables aux précédents, et disposés de la même façon (*fig.* 200).

On voit d'abord que les deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun : les angles A et A′ sont égaux par hypothèse; ceux des angles des triangles R,S,T, dont la somme est l'angle ABC, sont respectivement égaux à ceux des angles des triangles R′,S′,T′, dont la somme est l'angle A′B′C′ ; donc les angles ABC, A′B′C′, sont égaux ; et ainsi de suite.

On voit aussi que les côtés homologues sont proportionnels.

En effet, de la similitude des triangles R, R′, et de leur disposition par rapport aux triangles S et S′, on déduit :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BE}{B'E'}=\frac{EA}{E'A'};$$

de la similitude des triangles S, S′ et de leur disposition par rapport aux triangles R, R′, et aux triangles T, T′, on déduit :

$$\frac{BE}{B'E'}=\frac{BF}{B'F'};$$

de la similitude des triangles T, T′, et de leur disposition par rapport aux triangles S, S′, et par rapport aux triangles U, U′, on déduit :

$$\frac{BF}{B'F'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CF}{C'F'};$$

de la similitude des triangles U, U′, et de leur disposition par rapport aux triangles T, T′, et par rapport aux triangles V, V′, on déduit :

$$\frac{CF}{C'F'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DF}{D'F'};$$

de la similitudes des triangles V, V′, et de leur disposition par rapport aux triangles U, U′, et par rapport aux triangles S, S′, on déduit :

$$\frac{DF}{D'F'}=\frac{DE}{D'E'};$$

de ces diverses égalités on déduit enfin :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

Les deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues proportionnels ; donc ils sont semblables.

Dans la figure 200, les triangles avec lesquels le polygone P est composé sont tels que deux triangles qui ont un côté com-

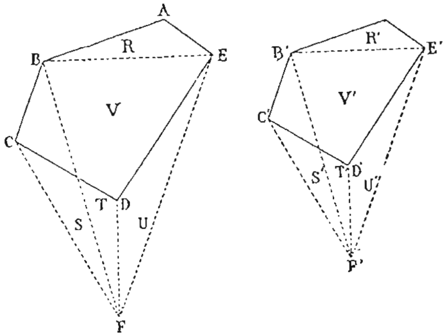


Fig. 201.

mun, sont de part et d'autre de ce côté. La démonstration se ferait de la même façon si, comme dans la figure 201, cette condition n'était pas remplie ; dans ce cas les angles C et C' des polygones sont égaux chacun à chacun ; les angles D et D' sont égaux comme excès de quatre angles droits sur des sommes d'angles égaux chacun à chacun.

Théorème.

255. — *Deux polygones semblables peuvent être décomposés en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun et disposés de la même façon.*

Soient deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 202). Prenons dans l'intérieur du premier un point quelconque O ; menons les droites AO, BO, puis, à l'intérieur du second polygone, faisons avec A'B' les angles B'A'O', A'B'O' égaux aux angles BAO, ABO. Si nous joignons le point O aux divers sommets du premier polygone, le point O' aux divers sommets du second, nous aurons décomposé les deux polygones en un même nombre de triangles semblables chacun à chacun, et disposés de la même façon. En effet, on voit d'abord que les triangles OAB, O'A'B' sont semblables, puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun. De la similitude de ces trian-

gles, il résulte que les rapports $\frac{OB}{O'B'}$, $\frac{AB}{A'B'}$, sont égaux ; mais $\frac{AB}{A'B'}$ est égal, par hypothèse, à $\frac{BC}{B'C'}$; donc les rapports $\frac{OB}{O'B'}$, $\frac{BC}{B'C'}$, sont égaux. D'autre part les angles ABC, A'B'C' sont égaux par hypothèse ; les angles ABO, A'B'O' sont égaux

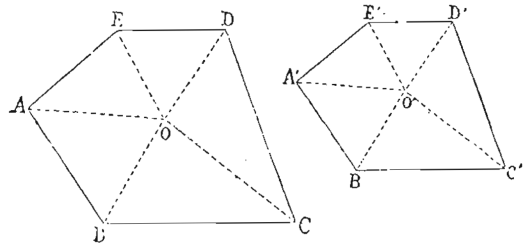


Fig. 202.

par construction, donc les angles OBC, O'B'C', sont égaux comme différences d'angles égaux. Il suit de là que les triangles OBC, O'B'C', sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. On voit d'ailleurs que les triangles O'A'B', O'B'C', semblables aux triangles OAB, OBC, sont disposés de la même façon que ces derniers.

De même, de la similitude de ces triangles on déduit la similitude des triangles OCD, O'C'D' et les triangles O'B'C', O'C'D' semblables aux triangles OBC, OCD, sont disposés comme ceux-ci ; ainsi de suite.

256. Remarque I. On dit que deux points O et O' sont homologues par rapport à deux polygones semblables, quand les triangles OAB, O'A'B' formés en joignant le point O à deux sommets du premier polygone et le point O' aux sommets homologues du second, sont semblables et disposés de la même façon par rapport aux deux polygones. Le point O' est ainsi intérieur ou extérieur au second polygone selon que le point O est intérieur ou extérieur au premier.

On peut, pour effectuer la décomposition des deux polygones en triangles semblables, prendre pour sommet des triangles du premier polygone un point O quelconque, et pour sommet des triangles du second polygone le point homologue O'. Si ces points sont intérieurs, les deux polygones sont décomposés en triangles tous additifs, mais si ces points sont exté-

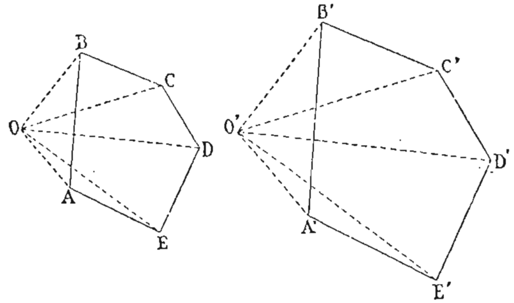


Fig. 203.

rieurs (*fig.* 203), chaque polygone doit être considéré comme décomposé en triangles additifs et en triangles soustractifs.

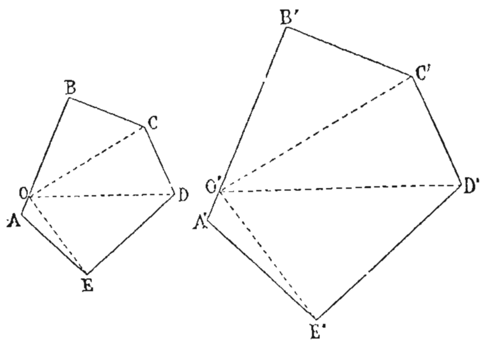


Fig. 204.

Chaque polygone est ainsi décomposé en n triangles si le nombre des côtés est n.

Le nombre des triangles de chaque polygone se réduit à $n - 1$, si le point O est sur un des côtés du premier polygone. Si le point O est, par exemple, entre A et B, sur le côté AB (*fig.* 204), le point O' est le point de A'B', entre A' et B', tel que $\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{OA}{OB}$.

Le nombre des triangles de chaque polygone se réduit à $n - 2$, si le point O est à la fois sur deux côtés du premier po-

lygone, c'est-à-dire en un de ses sommets; si le point O est au sommet A du premier polygone (*fig.* 205), le point O' est au sommet homologue A' du second.

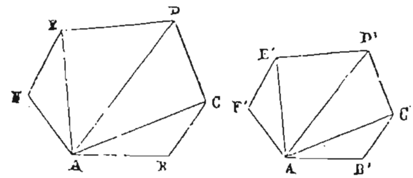


Fig. 205.

257. Corollaire I. *Le rapport de similitude de deux polygones semblables est égal au rapport de la droite qui unit deux points de l'un à la droite qui unit les points homologues de l'autre.*

258. Corollaire II. *Le rapport de similitude de deux polygones semblables est aussi égal au rapport des périmètres de ces polygones.*

En effet, si les côtés de l'un des polygones sont AB, BC, CD, etc., et les côtés homologues de l'autre A'B', B'C', C'D', etc., on a, par hypothèse,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B'C}{BC'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots$$

Or, dans une suite de rapport égaux (21), chaque rapport est égal au rapport de la somme des numérateurs à la somme des dénominateurs. La somme des numérateurs est le périmètre du premier polygone, la somme des dénominateurs est le périmètre du second; donc chacun de ces rapports, c'est-à-dire le rapport de similitude des deux polygones, est égal au rapport de leurs périmètres.

259. Remarque II. — Les deux théorèmes précédents font connaître les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux polygones soient semblables : il faut et il suffit qu'ils soient composés de triangles semblables chacun à chacun, disposés de la même façon. Si chaque polygone a n côtés, on peut décomposer chacun en $n - 2$ triangles. La similitude de deux triangles correspondants exige deux conditions, le nombre total des conditions nécessaires pour entraîner la similitude des deux polygones est donc $2(n - 2)$.

Problème.

260. *Construire un polygone semblable à un polygone donné* ABCDEF, *et tel que le côté homologue au côté* AB *du polygone donné ait une longueur donnée* l (*fig.* 206).

Je joins le sommet A du polygone donné aux autres sommets de ce polygone (*fig.* 206); je prends une longueur A′B′ égale à l, puis je construis le triangle A′B′C′ semblable au triangle ABC, en faisant l'angle B′A′C′ égal à l'angle BAC, et l'angle A′B′C′ égal à l'angle ABC. Je construis de même le triangle A′C′D′ semblable au triangle ACD, et disposé par rapport à A′B′C′ comme ACD est disposé par rapport à ABC. En continuant ainsi, je forme le polygone A′B′C′D′E′F′ composé de triangles respectivement semblables aux triangles qui composent le polygone donné et disposés de la même façon. Du théorème 254 il résulte que le polygone ainsi formé est semblable au polygone donné; du théorème 255 il résulte que ce polygone est le seul polygone semblable au polygone donné et tel que le côté homologue au côté AB ait une longueur égale à l. En faisant croître la longueur donnée l de zéro à l'infini, on obtiendra tous les polygones semblables au polygone donné.

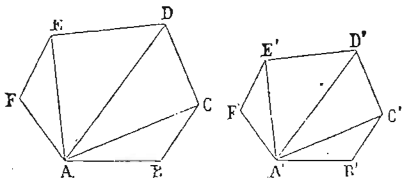


Fig. 206.

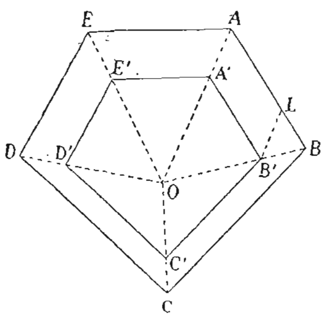


Fig. 207.

261. On peut encore opérer comme il suit : on prend, dans le plan du polygone, un point quelconque O (*fig.* 207), et on joint ce point à tous les sommets du polygone; puis, dans l'angle AOB, on inscrit une droite A′B′ parallèle à AB, et de longueur l. A cet effet, on prend sur AB la longueur AL égale à l, on mène par L une parallèle à OA, et, par le point B′ où cette droite rencontre OB, on mène, dans l'angle AOB, la droite B′A′ parallèle à BA. Cela

fait, on mène dans l'angle BOC, la droite B′C′ parallèle à BC, puis, dans l'angle COD, la droite C′D′ parallèle à CD, et ainsi de suite. La parallèle à EA menée, dans l'angle EOA, par le point E′, passe par le point A′, et le polygone A′B′C′D′E′ ainsi formé est le polygone demandé.

En effet, les deux polygones sont composés de triangles semblables chacun à chacun et disposés de la même façon. Les triangles qui composent l'un de ces polygones sont d'ailleurs tous additifs, ou les uns additifs et les autres soustractifs, selon que le point O est pris à l'intérieur du polygone donné (*fig.* 207), ou à l'extérieur (*fig.* 208).

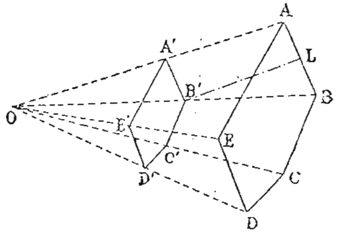


Fig. 208.

§ IV. — Proportionnalité des segments interceptés sur deux droites parallèles par des droites concourantes.

Théorème.

262. *Si des droites passant par un même point* O *coupent deux droites parallèles* RS, R′S′, *aux points* A, B, C,... *et* A′, B′, C′,... *les segments* AB, BC, CD,... *sont proportionnels aux segments* A′B′, B′C′, C′D′,... (*fig.* 209).

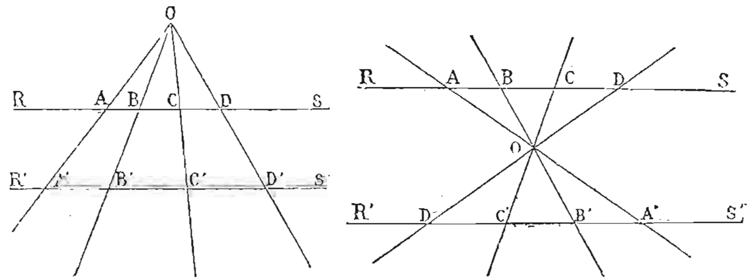


Fig. 209.

En effet, les triangles OAB, OA′B′ sont semblables, et on a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'};$$

les triangles OBC, OB'C' sont semblables, et l'on a :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}$$

d'où

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

On aura de même

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{CD}{C'D'}$$

et ainsi de suite. Donc

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}.$$

Si le point O est en dehors de la portion du plan comprise entre les deux parallèles, les points A', B', C', D' sont rangés sur la droite R'S' dans le même ordre que les points A, B, C, D, sur la droite RS. Si le point O est entre les deux parallèles, les points A', B', C', D' sont rangés sur R'S' dans l'ordre inverse de celui des points A, B, C, D sur RS (*fig.* 210).

Théorème.

263. Réciproquement. *Soient sur une droite* RS *les points* A, B, C, D,... *et, sur une droite* R'S' *parallèle à* RS, *les points* A', B', C', D',... *disposés dans le même ordre que les points pris sur* RS, *ou dans l'ordre inverse; si les segments* AB, BC, CD,... *sont proportionnels aux segments* A'B', B'C', C'D',... *les droites* AA', BB', CC', DD',... *concourent en un même point. Le point de concours est en dehors de la portion du plan comprise entre les parallèles si la disposition des points correspondants sur les deux parallèles est la même, entre les deux parallèles si elle est inverse.*

Supposons la disposition des points correspondants la même sur les deux parallèles. Le point de rencontre des droites AA', BB' est dans la portion du plan non comprise entre les parallèles; soit O ce point (*fig.* 209).

Les triangles OAB, OA'B' sont semblables, et l'on a :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

Le point de concours des droites BB', CC' est aussi dans la portion du plan non comprise entre les deux parallèles; soit O_1 ce point. Les triangles O_1BC, $O_1B'C'$ sont semblables, et on a :

$$\frac{O_1B}{O_1B'}=\frac{BC}{B'C'};$$

mais, par hypothèse, $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$; donc

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{O_1B}{O_1B'}.$$

Comme les points O et O_1 sont tous deux sur la portion de BB'

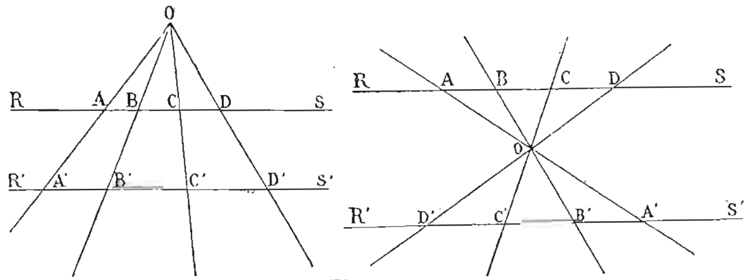


Fig. 210.

non comprise entre B et B', l'égalité précédente ne peut avoir lieu qu'autant que les points O et O_1 coïncident. Donc la droite CC' passe par le point de concours O des droites AA' et BB'.

On démontrera de même que DD' passe par ce point, et ainsi de suite.

Si la disposition des points sur une des parallèles est inverse de la disposition des points correspondants sur l'autre, la démonstration se fait de la même façon, avec cette seule différence que le point de concours des droites est entre les deux parallèles (*fig.* 210).

§ V. — Relations métriques entre les éléments d'un triangle

264. Une relation *métrique* entre certaines longueurs est une relation entre les nombres que l'on obtient en mesurant ces longueurs avec une même longueur prise pour unité. La longueur prise pour unité peut être choisie arbitrairement, la relation métrique subsiste quelle que soit cette unité.

Afin d'abréger le discours, dans l'énoncé d'une relation métrique entre des longueurs, on dit *côté* d'un triangle pour *nombre* qui est la mesure de ce côté, *carré d'un côté* pour *carré du nombre* qui est la mesure de ce côté, *produit de deux côtés* pour *produit des nombres* qui sont les mesures de ces côtés.

On dit qu'un nombre a est moyen proportionnel entre deux nombres b et c lorsque le rapport de b à a est égal au rapport de a à c, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{c}.$$

Cette relation équivaut à la suivante

$$a^2=bc.$$

On peut donc dire aussi qu'un nombre a est moyen porportionnel entre deux autres b et c quand le carré de a est égal au produit des nombres b et c.

Par suite on pourra exprimer qu'une longueur est moyenne proportionnelle entre deux autres en disant que son *carré* est égal au *produit* des deux autres.

265. Définitions. On appelle *projection* d'un point sur une droite le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite. On appelle projection d'une portion de droite AB sur une droite indéfinie RS la portion A′B′ de la droite RS comprise entre les projections A′ et B′ des points A et B sur la droite RS (*fig.* 211).

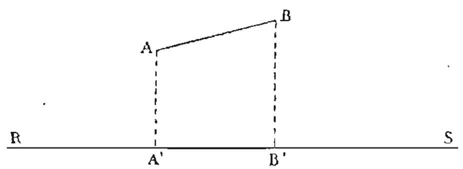


Fig. 211.

Théorème.

266. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse: 1° chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse; 2° la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.*

Soit un triangle rectangle ABC (*fig.* 212); je remarque d'abord que la perpendiculaire AD, abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, détermine deux triangles rectangles ADB et ADC semblables au triangle ABC, car chacun de ces triangles a avec le triangle rectangle ABC un angle aigu commun.

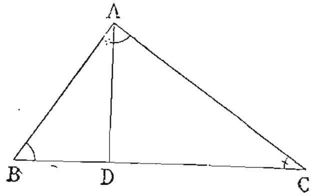


Fig. 212.

1° Les triangles ABC et ABD ont les côtés homologues proportionnels; pour reconnaître les côtés homologues, je remarque que, l'angle aigu B étant commun aux deux triangles, le second angle aigu C du triangle ABC est égal au second angle aigu BAD du triangle ABD. L'hypoténuse BC du triangle ABC est homologue à l'hypoténuse AB du triangle ABD ; le côté AB du triangle ABC, opposé à l'angle C, est homologue au côté BD du triangle ADB opposé à l'angle BAD. Donc on a :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{BD},$$

et le côté de l'angle droit AB est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière BC et la projection BD de ce côté sur l'hypoténuse. On aurait de même, en comparant les triangles semblables ABC et ADC :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{CD},$$

c'est-à-dire que le côté AC est moyen proportionnel entre BC et CD .

2° Les triangles ADB et ADC, tous deux semblables au triangle ABC, sont semblables ; leurs côtés homologues sont proportionnels. On en déduit, en opérant comme précédemment pour reconnaître les côtés homologues,

$$\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{DC}.$$

Donc la perpendiculaire AD est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

267. Remarque. Si l'on mesure les longueurs AB, AC, BC, etc. avec une même unité de longueur, et si on désigne par AB, AC, BC, etc., les nombres ainsi obtenus, on aura entre ces nombres les relations :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \quad \text{ou} \quad \overline{AB}^2 = BC \times BD \qquad (1)$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 = BC \times CD \qquad (2)$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD} \quad \text{ou} \quad \overline{AD}^2 = BD \times CD \qquad (3)$$

268. Corollaire. *Le rapport des carrés des côtés de l'angle droit est égal au rapport des deux segments de l'hypoténuse.*

En effet, en divisant membre à membre les égalités (1) et (2), on a :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}.$$

269. Remarque. Si l'on joint un point M d'une circonférence (*fig.* 213) aux deux extrémités d'un diamètre AB, on forme un triangle rectangle AMB. Donc :

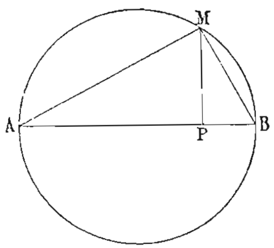


Fig. 213.

Toute corde AM *est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui passe par une de ses extrémités et la projection de la corde sur ce diamètre :*

$$\overline{AM}^2 = AB \times AP.$$

Toute perpendiculaire MP *abaissée d'un point* M *de la circonférence sur un diamètre* AB, *est moyenne proportionnelle entre les deux segments* AP, PB *du diamètre :*

$$\overline{MP}^2 = AP \times PB.$$

Théorème.

270. *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 214) ; menons la perpendiculaire AD du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, nous aurons (267) :

$$\overline{AB}^2 = BC \times BD$$

$$\overline{AC}^2 = BC \times CD$$

et, en additionnant membre à membre,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC(BD + CD) = \overline{BC}^2.$$

271. Corollaire I. *Le carré d'un côté de l'angle droit d'un*

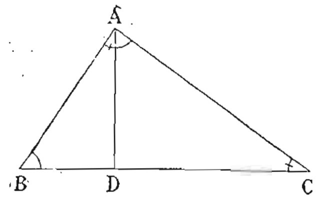


Fig. 214.

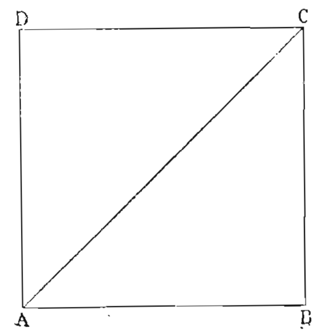


Fig. 215.

triangle rectangle est égal au carré de l'hypoténuse moins le carré de l'autre côté de l'angle droit.

En effet, de la relation

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

on déduit :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2.$$

272. Corollaire II. *Le rapport de la diagonale d'un carré au côté de ce carré est le nombre incommensurable* $\sqrt{2}$.

Soit, en effet, le carré ABCD (*fig.* 215). Le triangle ABC étant rectangle en B, on a :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AB}^2$$

d'où

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}.$$

273. Remarque. Désignons par a l'hypoténuse d'un triangle rectangle, par b et par c les côtés de l'angle droit, par b' et par c' les projections de ces côtés sur l'hypoténuse, et par h la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse ; d'après les deux théorèmes précédents, ces six grandeurs sont liées entre elles par les quatre relations

$$b^2 = ab' \qquad c^2 = ac' \qquad h^2 = b'c' \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

qui permettent de calculer quatre de ces six grandeurs quand on connaît les deux autres.

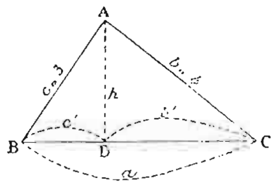


Fig. 216.

274. Applications numériques. I. On donne, dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit, $b = 4^m$, $c = 3^m$: calculer l'hypoténuse a, les projections b' et c' des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la hauteur h (*fig.* 216).

On a

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$$

d'où

$$a = 5.$$

On a encore

$$b^2 = ab' \qquad c^2 = ac'$$

d'où

$$b' = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{5} = 3,2$$

$$c' = \frac{c^2}{a} = \frac{9}{5} = 1,8;$$

et enfin

$$h^2 = b'c' = 3,2 \times 1,8 = 5,76$$

d'où

$$h = \sqrt{5,76} = 2,4.$$

L'unité de longueur étant ici le mètre, on a

$$a = 5^m, \quad b' = 3^m,2, \quad c' = 1^m,8, \quad \text{et} \quad h = 2^m,4.$$

Comme vérification, on a

$$b' + c' = 3^m,2 + 1^m,8 = 5^m = a.$$

II. On donne, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse $a = 7^m$, un côté de l'angle droit $b = 4^m$; calculer l'autre côté c de l'angle droit, les projections b' et c' des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse et la hauteur h.

On a

$$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 16 = 33$$

d'où

$$c = \sqrt{33} = 5,744$$

à un millième près.

Ayant b et c, le problème est ramené au problème précédent. On aura

$$b' = \frac{b^2}{a} = \frac{16}{7} = 2,286$$

$$c' = \frac{c^2}{a} = \frac{33}{7} = 4,714$$

à un demi-millième près.

Enfin, on a pour déterminer h

$$h^2 = b'c' = 2,286 \times 4,714 = 10,776204$$

d'où

$$h = \sqrt{10,776204} = 3,282.$$

On a donc, le mètre étant l'unité, à un millimètre près,

$$c = 5^m,744, \qquad b' = 2^m,286, \qquad c' = 4^m,714$$
$$\text{et} \quad h = 3^m,282.$$

Comme vérification, on a

$$b' + c' = 2^m,286 + 4^m,714 = 7^m = a.$$

III. On donne, dans un triangle rectangle, les projections des côtés de l'angle droit sur l'hypoténuse, $b' = 4^m$, $c' = 5^m$, calculer les autres éléments du triangle.

L'hypoténuse a est la somme des projections des deux côtés

$$a = b' + c' = 9^{\text{m}}.$$

Des relations

$$b^2 = ab' \qquad c^2 = ac'$$

on déduit

$$b^2 = 9 \times 4 = 36 \qquad c^2 = 9 \times 5 = 45$$

d'où

$$b = \sqrt{36} = 6^{\text{m}} \qquad c = \sqrt{45} = 6^{\text{m}},708\ldots$$

Enfin on a

$$h^2 = b'c' = 4 \times 5 = 20$$

d'où

$$h = \sqrt{20} = 4^{\text{m}},472$$

à un millimètre près.

Théorème

275. *Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de l'un de ses côtés par la projection de l'autre sur lui.*

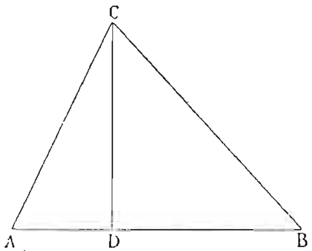


Fig. 217.

Dans le triangle ABC (*fig.* 217), le carré du côté BC, opposé à l'angle aigu A, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés AB et AC, moins deux fois le produit de l'un de ces deux côtés par la projection de l'autre sur lui, par exemple, moins deux fois le produit de AB par la projection AD de l'autre côté AC sur AB.

En effet, dans le triangle rectangle BDC, on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;$$

or

$$BD = AB - AD$$

et

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \times AD + \overline{AD}^2;$$

donc

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB \times AD + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

et, comme $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ est égal à $\overline{AC}^2$, on a enfin

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AB \times AD.$$

Théorème.

276. *Dans un triangle, le carré d'un côté opposé à un angle obtus est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le produit de l'un de ces côtés par la projection de l'autre sur lui.*

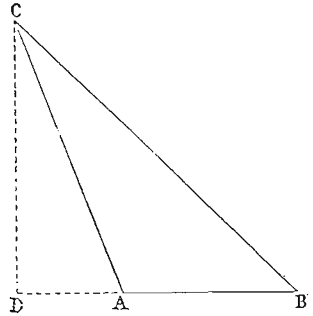


Fig. 218.

Dans le triangle ABC (*fig.* 218), le carré du côté BC, opposé à l'angle obtus A, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés AB et AC, plus deux fois le produit de l'un de ces deux côtés, AB par exemple, par la projection AD de l'autre côté AC sur AB.

En effet, dans le triangle rectangle BDC, on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2;$$

or

$$BD = AB + AD$$

et

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \times AD + \overline{AD}^2;$$

donc

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + 2AB \times AD + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$

et, comme $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ est égal à $\overline{AC}^2$, on a enfin

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AB \times AD.$$

277. Corollaire. *Selon que le carré d'un côte d'un triangle est inférieur, supérieur, ou égal à la somme des carrés des deux autres, l'angle opposé est aigu, obtus, ou droit.*

278. Application. Les théorèmes qui précèdent permettent, connaissant les trois côtés d'un triangle, de calculer les projections de deux de ces côtés sur le troisième, et la hauteur qui correspond à ce troisième côté.

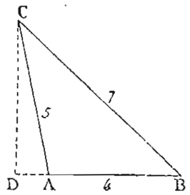


Fig. 219.

Soient par exemple AB $= 4^m$, AC $= 5^m$, BC $= 7^m$, les trois côtés d'un triangle ABC; proposons-nous de calculer les projections BD et AD des côtés BC et AC sur AB, et la hauteur CD qui correspond au côté AB (*fig.* 219).

On remarque d'abord que le plus grand des côtés, le côté BC $= 7^m$, étant tel que son carré 49 surpasse la somme des carrés des deux autres, $16 + 25$, ou 41, l'angle A opposé au côté BC est obtus. Les deux autres angles du triangle sont aigus.

On a donc

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2AB \times BD$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \times AD$$

d'où

$$BD = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2}{2AB} = \frac{49 + 16 - 25}{8} = 5^m,$$

$$AD = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2}{2AB} = \frac{49 - 16 - 25}{8} = 1^m.$$

Pour calculer la hauteur CD, on a, dans le triangle rectangle ADC,

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = 25 - 1 = 24$$

d'où

$$CD = \sqrt{24} = 4^m,898$$

à un millimètre près.

On aurait pu calculer aussi CD en considérant CD comme côté du triangle rectangle CDB; on aurait

$$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BD}^2 = 49 - 25 = 24.$$

279. Plus généralement, connaissant les trois côtés a, b, c, d'un triangle ABC, proposons-nous de calculer la hauteur $\alpha =$ AD qui correspond au côté a (*fig.* 220).

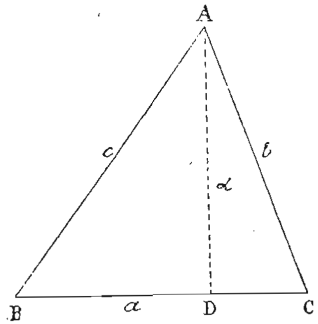


Fig. 220.

Supposons b inférieur ou égal à c; l'angle B, inférieur ou égal à C, est aigu, et on a

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \times BD$$

d'où

$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Or, dans le triangle rectangle ABD, on a

$$\alpha^2 = c^2 - \overline{BD}^2,$$

donc

$$\alpha^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}.$$

La différence des deux carrés, $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$, est égale au produit $(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$, ou encore à $\left[(a + c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a - c)^2\right]$. La différence des carrés, $(a + c)^2 - b^2$, est égale au produit $(a + c + b)(a + c - b)$; la différence des carrés, $b^2 - (a - c)^2$, est égale au produit $(b + a - c)(b - a + c)$. Donc enfin on a

$$\alpha^2 = \frac{(a + b + c)(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}{4a^2}.$$

Si l'on désigne par $2p$ le périmètre $a + b + c$ du triangle, on a

$$a + b + c = 2p$$
$$b + c - a = 2(p - a)$$
$$a + c - b = 2(p - b)$$
$$a + b - c = 2(p - c)$$

et, par suite,

$$\alpha^2 = 4\,\frac{p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}$$

d'où

$$\alpha = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Théorème.

280. *Dans un triangle, la somme des carrés de deux côtés est égale à deux fois le carré de la moitié du troisième côté, plus deux fois le carré de la médiane correspondant à ce troisième côté.*

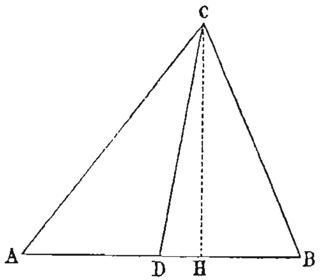


Fig. 221.

Soit CD la médiane issue du sommet C du triangle ABC, et soit CH la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté opposé BC (*fig.* 221). Des deux angles supplémentaires ADC, BDC, l'un est généralement aigu, l'autre obtus ; supposons ADC obtus. On a d'après les théorèmes précédents :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2AD \times DH$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 - 2BD \times DH;$$

en ajoutant membre à membre, et en tenant compte de ce que AD est égal à BD, on a

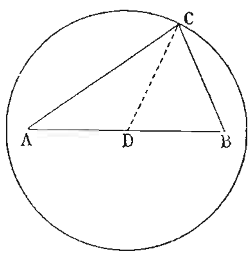


Fig. 222.

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

281. Corollaire I. *Le lieu des points d'un plan tels que la somme des carrés des distances de chacun d'eux à deux points fixes* A, B, *soit constante, est un cercle dont le centre est au milieu de* AB (*fig.* 222).

Désignons par K² la somme constante donnée; soit C un point quelconque du lieu ; on a

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = K^2,$$

ou, la somme $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ étant égale à $2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2$,

$$2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2 = K^2,$$

d'où

$$\overline{DC}^2 = \frac{1}{2}K^2 - \overline{AD}^2.$$

Donc DC est constant, et le lieu du point C est un cercle décrit du point D comme centre, avec un rayon égal à

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}K^2 - \overline{AD}^2}.$$

Ce lieu se réduit à un point si $\frac{1}{2}K^2$ est égal à $\overline{AD}^2$; si $\frac{1}{2}K^2$ est inférieur à $\overline{AD}^2$, aucun point du plan ne satisfait aux conditions de l'énoncé.

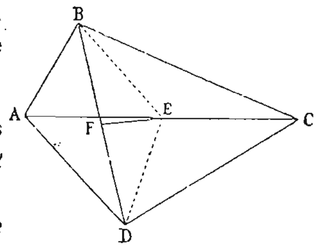


Fig. 223.

282. Corollaire II. *La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales plus quatre fois le carré de la droite qui joint les milieux des diagonales.*

Soit le quadrilatère ABCD, et soient E et F les milieux des diagonales AC, BD (*fig.* 223). On a

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$$
$$\overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{DE}^2$$

et, en ajoutant membre à membre,

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\overline{AE}^2 + 2(\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2).$$

Or, dans le triangle BED, on a

$$\overline{BE}^2 + \overline{DE}^2 = 2\overline{BF}^2 + 2\overline{EF}^2;$$

d'où

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\overline{AE}^2 + 4\overline{BF}^2 + 4\overline{EF}^2,$$

mais $4\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, et $4\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2$; donc enfin

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EF}^2.$$

283. Si le quadrilatère est un parallélogramme, les diagonales se coupant en parties égales, les points E et F se confondent, et par suite EF est nulle. Réciproquement, si EF est nulle, les diagonales se coupent en parties égales, et le quadrilatère est un parallélogramme.

Donc :

La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales.

Réciproquement, si la somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, le quadrilatère est un parallélogramme.

Théorème.

284. *La différence des carrés de deux côtés d'un triangle est égale à deux fois le produit du troisième côté par la projection sur ce côté de la médiane qui lui correspond.*

Soit (*fig.* 224), dans le triangle ABC, le côté AC plus grand que le côté BC. Soit D le milieu de AB et soit H le pied de la

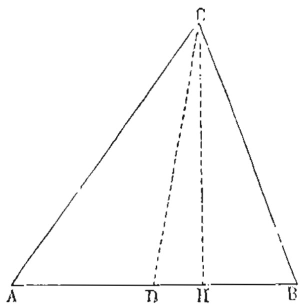


Fig. 224.

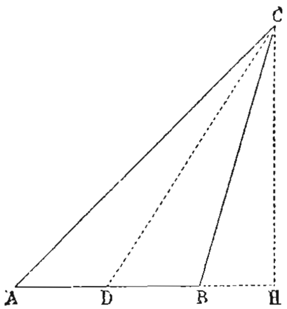


Fig. 225.

perpendiculaire abaissée du sommet C sur AB, le point H tombe sur DB (*fig.* 224), ou sur le prolongement de DB, dans le sens DB (*fig.* 225). On a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\,AD \times DH$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 - 2BD \times DH,$$

en retranchant membre à membre et en tenant compte de ce que AD est égal à BD, on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4AD \times DH;$$

or, 4AD est égal à 2AB, donc

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2AB \times DH,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

285. Corollaire. *Le lieu des points C, tels que la différence $\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$ des carrés des distances de chacun d'eux aux deux points fixes A et B soit constante, est une droite perpendiculaire à AB.*

Désignons par K^2 la différence constante donnée. Soit C un point quelconque du lieu ; on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = K^2,$$

ou, puisque $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2AB \times DH$,

$$2AB \times DH = K^2$$

d'où

$$DH = \frac{K^2}{2AB}.$$

La longueur DH est donc constante, ce qui veut dire que le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du lieu sur AB tombe en un même point H, pris sur DB, ou sur son prolongement dans le sens DB, à une distance de D égale à $\frac{K^2}{2AB}$. Donc tout point du lieu est sur la perpendiculaire à AB, au point H. Réciproquement, tout point C de cette perpendiculaire est un point du lieu, car on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2AB \times DH = K^2.$$

Donc le lieu demandé est la perpendiculaire à AB, au point H.

Théorème.

***286.** *Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit du diamètre du cercle circonscrit au triangle par la hauteur qui correspond au troisième côté.*

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (*fig.* 226); menons le diamètre AD qui passe par le sommet A, abaissons du point A la perpendiculaire AH sur BC, et menons la corde BD.

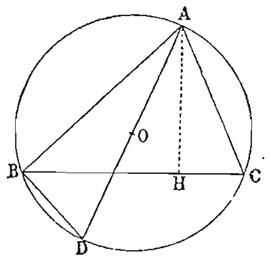


Fig. 226.

Les triangles rectangles ABD, AHC sont semblables, car les angles aigus ADB, ACH, sont égaux comme inscrits dans le même segment de cercle. Donc on a

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AH}$$

d'où

$$AB \times AC = AD \times AH.$$

***287** Remarque. Ce théorème permet de calculer le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction des trois côtés.

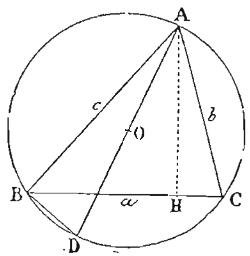


Fig. 227.

Soient a, b, c, les trois côtés du triangle, R le rayon du cercle circonscrit (*fig.* 227); on a

$$bc = 2R \times AH$$

et (279)

$$AH = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

d'où

$$R = \frac{bc}{2AH} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

§ VI. Relations métriques entre les éléments d'un quadrilatère inscriptible.

Théorème.

***288.** *Le produit des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est égal à la somme des produits des côtés opposés. Réciproquement, si le produit des diagonales d'un quadrilatère est égal à la somme des produits des côtés opposés, le quadrilatère est inscriptible.* (Théorème de Ptolémée.)

Soit ABCD un quadrilatère quelconque (*fig.* 228); construisons, du même côté que le quadrilatère par rapport à CD, sur CD pris pour homologue du côté AC, le triangle CDE semblable au triangle ACB, de façon que les angles C et D du triangle CDE soient respectivement homologues des angles C et A du triangle ACB. On a

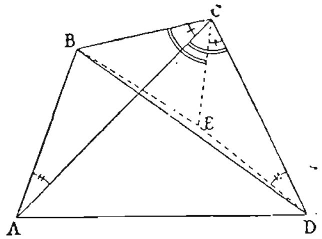


Fig. 228.

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CD}=\frac{BC}{CE}.$$

De l'égalité des deux premiers rapports on déduit

$$(1) \qquad AB \times CD = AC \times DE.$$

De l'égalité des deux derniers rapports, et de ce que les angles ACD, BCE sont égaux, comme sommes ou comme différences d'angles égaux, on déduit que les triangles ACD, BCE sont semblables, parce qu'ils ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ; on a donc encore

$$\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{BC}$$

d'où

$$(2) \qquad AD \times BC = AC \times BE.$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on a

$$AB \times CD + AD \times BC = AC(BE + DE).$$

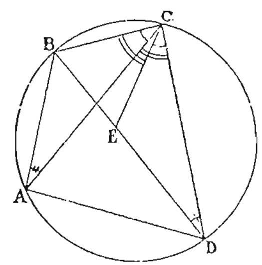


Fig. 229.

Par construction l'angle CDE est égal à l'angle BAC, lequel est généralement différent de l'angle CDB ; donc, en général, le point E est en dehors de BD, et la somme BE + ED surpasse BD. Pour que cette somme soit égale à BD, *il faut* et *il suffit* que l'angle CDB soit égal à l'angle CAB, c'est-à-dire que le quadrilatère ABCD soit inscriptible.

Donc, quand le quadrilatère est inscriptible, et dans ce cas seulement (*fig.* 229), on a

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD.$$

***289.** Remarque. Ce théorème donne le moyen de calculer la longueur de la corde qui sous-tend la somme ou la différence de deux arcs quand on connaît les longueurs des cordes qui sous-tendent ces arcs.

Supposons connues, dans un cercle de rayon R, les longueurs des cordes $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ qui sous-tendent les arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$. Soit d'abord (*fig.* 230) l'arc $\widehat{ABC}$ égal à la somme des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$; proposons-nous de calculer la longueur de la corde $\overline{AC}$. A cet effet, menons par le point B le diamètre BD, et considérons le quadrilatère ABCD.

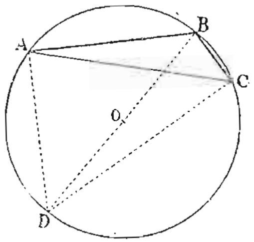


Fig. 230.

On a, d'après le théorème précédent,

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD.$$

D'autre part, les triangles ABD, BCD, étant rectangles, on a

$$AD = \sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2} \qquad CD = \sqrt{4R^2 - \overline{BC}^2}$$

ce qui permet d'écrire comme il suit la relation précédente :

$$AC \times 2R = AB\sqrt{4R^2 - \overline{BC}^2} + BC\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}$$

ou encore

$$AC = \frac{AB\sqrt{4R^2 - \overline{BC}^2} + BC\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}}{2R}.$$

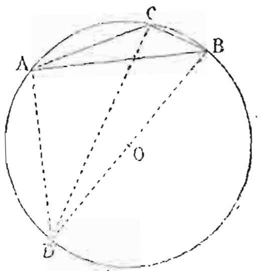


Fig. 231.

En second lieu, soit (*fig.* 231) l'arc $\widehat{AC}$ égal à la différence des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$; pour calculer la longueur de la corde $\overline{AC}$, menons encore le diamètre BD, et considérons le quadrilatère inscrit ACBD. On a

$$AB \times CD = AC \times DB + BC \times AD$$

ou

$$AB\sqrt{4R^2 - \overline{BC}^2} = AC \times 2R + BC\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}$$

d'où

$$AC = \frac{AB\sqrt{4R^2 - \overline{BC}^2} - BC\sqrt{4R^2 - \overline{AB}^2}}{2R}.$$

***290.** Corollaire. *Le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde.*

Soit le quadrilatère inscriptible ABCD (*fig.* 232); on a

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + CB \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}.$$

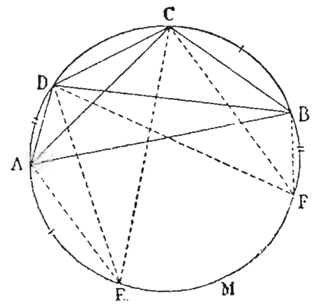


Fig. 232.

Pour le démontrer, prenons sur l'arc $\widehat{AMB}$, l'arc $\widehat{AE}$ égal à l'arc $\widehat{BC}$, et sur l'arc $\widehat{BMA}$, l'arc $\widehat{BF}$ égal à l'arc $\widehat{AD}$; puis appliquons le théorème (288) aux deux quadrilatères AECD, FBCD. Nous aurons

$$AC \times DE = CE \times AD + AE \times CD \qquad (1)$$
$$BD \times CF = DF \times BC + BF \times DC. \qquad (2)$$

D'autre part, les cordes qui sous-tendent des arcs égaux d'une même circonférence étant égales, on a

$$DE = FC, \quad EC = AB = DF, \quad AE = BC \quad \text{et} \quad BF = DA.$$

En divisant membre à membre les égalités (1) et (2), et en tenant compte des dernières égalités, on a

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AD \times AB + CB \times CD}{BA \times BC + DA \times DC}$$

c'est-à-dire la relation qu'il fallait démontrer.

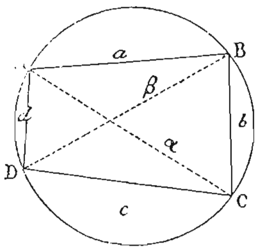


Fig. 233.

291. Remarque. Le théorème et le corollaire permettent de calculer les diagonales d'un quadrilatère inscriptible en fonction des quatre côtés. Désignons, pour abréger, par a, b, c, d, les longueurs des côtés AB, BC, CD, DA, et par α et β les longueurs des diagonales AC et BD (*fig.* 233). On a

$$\alpha\beta = ac + bd$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

d'où, en multipliant membre à membre, puis en divisant membre à membre,

$$\alpha^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$$

$$\beta^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

§ VII. Invariabilité du produit des segments interceptés par un cercle sur une sécante qui tourne autour d'un point fixe.

Théorème.

292. *Si par un point pris dans le plan d'un cercle on mène des sécantes, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la direction de la sécante.*

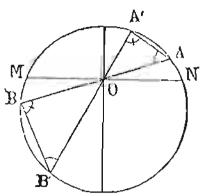


Fig. 234.

Considérons d'abord le cas où le point donné O est dans l'intérieur du cercle (*fig.* 234); si nous menons par ce point deux sécantes quelconques AOB et A'OB', nous aurons toujours

$$OA \times OB = OA' \times OB'.$$

En effet, menons les cordes AA' et BB'; les triangles AOA' et BOB' sont semblables, car ils ont deux angles égaux chacun à chacun, savoir : les angles en O égaux comme opposés par le sommet, et les angles OA'A et OBB' égaux comme étant inscrits dans le même segment AA' BB'; dans ces triangles semblables les côtés homologues sont proportionnels, et on a

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OA'}{OB}$$

d'où

$$OA \times OB = OA' \times OB'.$$

Si donc nous faisons tourner la sécante AB autour du point O, les longueurs OA et OB varient, mais leur produit reste constant. En particulier, si la sécante se place sur la droite MN perpendiculaire au diamètre passant par O, les deux longueurs OM et ON sont égales (154), et le produit constant est égal à $\overline{OM}^2$.

Considérons le cas où le point O est en dehors du cercle (*fig.* 235); menons par le point O deux sécantes quelconques OBA et OB'A', nous aurons encore

$$OA \times OB = OA' \times OB'.$$

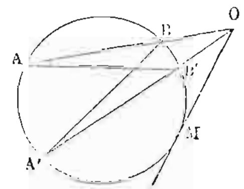


Fig. 235.

En effet, menons les cordes AB' et BA'. Les triangles OAB' et OA'B sont semblables parce qu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun, savoir : l'angle O commun, et les angles OAB' et OA'B égaux comme étant inscrits dans le même segment BAA'B'; ces triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels, et on a

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB'}{OB}$$

d'où

$$OA \times OB = OA' \times OB'.$$

Si donc nous faisons tourner la sécante AB autour du point O, les distances OA et OB varient, mais leur produit reste constant. En particulier, si la sécante devient la tangente OM, les deux distances deviennent égales à OM, et le produit constant est égal à $\overline{OM}^2$; donc :

293. Corollaire. *Si d'un point extérieur à un cercle on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

294. Remarque. Si l'on prend au hasard quatre points A, B, C, D, sur une circonférence, les droites AB, CD, se rencontrent généralement ; si leur point de concours O est entre A et B, il est aussi entre C et D (*fig.* 236); s'il est sur le prolongement de AB, il est aussi sur le prolongement de CD (*fig.* 237); dans les deux cas le produit OA $\times$ OB est égal au produit OC $\times$ OD.

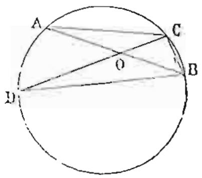


Fig. 236.

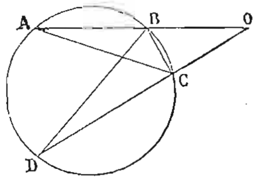


Fig. 237.

295. Réciproquement. *Soient dans un plan quatre points* A, B, C, D, *tels que le point de rencontre* O *des droites* AB, CD, *soit à la fois entre* A *et* B *et entre* C *et* D, *ou sur le prolongement de* AB *et sur le prolongement de* CD (*fig.* 236 *et* 237) *si l'on a*

$$OA \times OB = OC \times OD$$

les quatre points A, B, C, D, *sont sur une même circonférence.*

En effet l'égalité OA $\times$ OB = OC $\times$ OD peut être écrite

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

et les triangles AOC et DOB sont semblables comme ayant un angle égal, AOC = DOB, compris entre deux côtés proportionnels ; dans ces triangles semblables, les angles BAC et BDC opposés aux côtés homologues OC et OB sont égaux. D'ailleurs les sommets A et D sont situés d'un même côté par rapport à la droite BC ; si donc on décrit sur BC, du même côté que A par rapport à BC, l'arc d'un segment capable de l'angle BAC, cet arc contient les points A et D, et par conséquent les quatre points donnés sont sur une même circonférence.

§ VIII. Problèmes sur les longueurs proportionnelles.

Problème.

296. *Partager une longueur donnée en parties proportionnelles à des longueurs données.*

Soit à partager une longueur AB (*fig.* 238) en quatre parties proportionnelles aux longueurs M, N, P, Q. On mène par le point A une droite quelconque AR, sur laquelle on prend avec un compas AC = M, CD = N, DE = P, EF = Q ; on joint les points B et F, et on mène les droites CG, DH et EK parallèles à BF. La droite AB est ainsi partagée par les points G, H, K, en parties proportionnelles aux longueurs données M, N, P, Q.

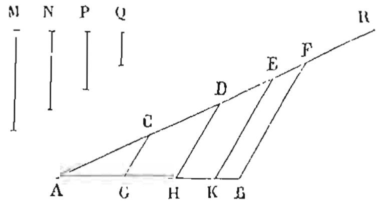


Fig. 238.

En effet, dans le triangle ADH, la ligne CG étant parallèle au côté DH, on a

$$\frac{AG}{AC} = \frac{GH}{CD} = \frac{AH}{AD};$$

de même, dans le triangle AKE, les droites HD et BF étant parallèles au côté KE, on a

$$\frac{AH}{AD} = \frac{HK}{DE} = \frac{KB}{EF}$$

d'où

$$\frac{AG}{M} = \frac{GH}{N} = \frac{HK}{P} = \frac{KB}{Q}.$$

297. Remarque. Si les longueurs données M, N, P, Q étaient égales, la longueur AB serait partagée par les points G, H, K en quatre parties égales : il résulte de là un procédé très simple pour partager une longueur donnée en un nombre quelconque de parties égales.

Problème.

298. *Construire une quatrième proportionnelle à trois longueurs données* M, N, P.

On dit qu'une longueur X est quatrième proportionnelle aux trois longueurs M, N, P, lorsqu'on a

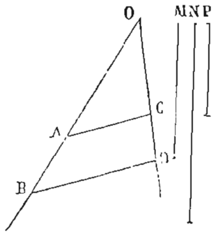


Fig. 239.

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{X}$$

Par un point O je mène deux droites quelconques (*fig.* 239); je prends sur l'une OA = M et OB = N, sur l'autre OC = P, et je joins les points A et C. Je mène BD parallèle à AC; OD est la longueur demandée.

On a en effet

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}, \text{ ou } \frac{M}{N} = \frac{P}{OD},$$

donc OD = X.

Si P = N, on a $\frac{M}{N} = \frac{N}{X}$, et on dit que X est troisième proportionnelle à M et N.

Si l'on désigne par m, n, p, et x les nombres obtenus en mesurant avec une même unité les trois longueurs données et la longueur cherchée, on a entre ces quatre nombres la relation

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$$

d'où

$$x = \frac{np}{m}.$$

Nous venons de voir comment, étant données les trois longueurs M, N, P, on peut avec la règle et le compas construire

une longueur X telle qu'entre les nombres m, n, p, x, qui mesurent ces longueurs on ait, quelle que soit d'ailleurs l'unité choisie, la relation

$$x = \frac{np}{m}.$$

299. Plus généralement, étant données $n+1$ longueurs A_1, A_2, ... A_{n+1}, et n longueurs B_1, B_2, ... B_n, on peut avec la règle et le compas construire une longueur X telle que si la longueur donnée et la longueur cherchée sont mesurées avec la même unité, on a, entre les nombres a_1, a_2, ... a_{n+1}, b_1, b_2, ..., b_n, x, qui mesurent les longueurs données et la longueur cherchée, la relation

$$x = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots b_n}.$$

Il suffit en effet de construire successivement les longueurs mesurées par les nombres x_1, x_2, x_3, ... x_n, tels que l'on ait

$$x_1 = \frac{a_1 a_2}{b_1}, \quad x_2 = \frac{x_1 a_3}{b_2}, \quad x_3 = \frac{x_2 a_4}{b_3}, \ldots\ldots \quad x_n = \frac{x_{n-1} a_{n+1}}{b_n}.$$

La dernière longueur construite sera la longueur demandée; car, si l'on multiplie ces égalités membre à membre, et si l'on supprime les facteurs communs, on a

$$x_n = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots b_n} = x.$$

Problème.

300. *Construire une moyenne proportionnelle entre deux longueurs données* M et N.

1re SOLUTION. Sur une droite indéfinie je prends AB = M, et à la suite BC = N (*fig.* 240); sur AC comme diamètre je décris une demi-circonférence; j'élève au point B la perpendiculaire BD sur AC. Soit D le point où cette ligne rencontre la demi-circonférence; la longueur BD est la longueur demandée.

En effet, si l'on joint le point D au point A et au point C, on forme un triangle rectangle ADC dans lequel la perpendiculaire DB, menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de l'hypoténuse.

2^e^ Solution. Soit AB $= M$ la plus grande des deux longueurs données; je prends sur BA, de B vers A, une longueur BC égale à N (*fig.* 241), et, sur AB comme diamètre, je décris une demi-

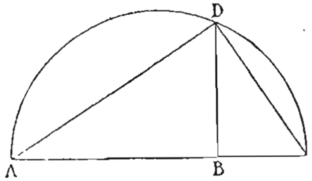


Fig. 240.

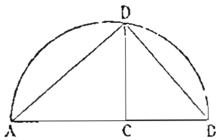


Fig. 241

circonférence; j'élève au point C la perpendiculaire CD à AB. Soit D le point où cette ligne rencontre la demi-circonférence: la longueur BD est la longueur demandée.

En effet, dans le triangle rectangle ADB, le côté BD est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et la projection du côté BD sur l'hypoténuse.

3^e^ Solution. Soit encore AB $= M$ la plus grande des deux longueurs données; je prends sur la droite BA, de B vers A, la longueur BC égale à N (*fig.* 242); par les points A et C je fais passer une circonférence quelconque, et je mène du point B la tangente BD à cette circonférence : la longueur BD est la longueur demandée.

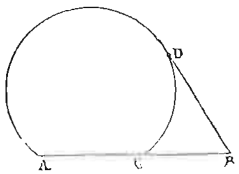


Fig. 242.

On sait en effet que, si d'un point on mène une tangente et une sécante à un cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.

301. Si l'on désigne par m, n, x, les nombres obtenus en mesurant avec une même unité les longueurs données et la longueur cherchée, on a entre ces nombres la relation

$$\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$$

ou

$$x^2 = mn$$

ou enfin

$$x = \sqrt{mn}.$$

302. Application. Construire une longueur X telle que le rapport de cette longueur à une longueur donnée A soit égal à la racine carrée d'un nombre donné, $\frac{3}{5}$ par exemple. Soient a et x les nombres qui mesurent la longueur donnée A et la longueur cherchée X. On doit avoir

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

relation que l'on peut écrire

$$x^2 = a \times \frac{3}{5} a.$$

On construit la longueur égale aux $\frac{3}{5}$ de la longueur donnée (296) et le problème est ramené à construire la moyenne géométrique entre cette longueur et la longueur donnée.

§ IX. Remarque sur les constructions des formules algébriques.

***303.** Les deux problèmes qui précèdent conduisent à la solution du problème général suivant : *Construire, avec la règle et le compas, une longueur telle que le nombre qui la mesure soit une fonction connue des lettres qui représentent les mesures d'un certain nombre de longueurs données, quand cette fonction est algébrique, homogène, du premier degré, rationnelle ou irrationnelle, mais ne renfermant que des radicaux dont l'indice est une puissance de* 2.

Pour abréger le discours, dans ce qui suit, nous dirons longueurs $a, b, c, \ldots\ldots x$, pour longueurs mesurées par les nombres $a, b, c, \ldots\ldots x$, les données et l'inconnue étant les longueurs elles-mêmes et non les nombres qui les mesurent.

***304**. Considérons d'abord le cas où la fonction est rationnelle. Si elle est un monôme, elle est de la forme

$$x = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_{n+1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots\ldots b_n}$$

et on a vu, n° 299, comment on obtient la longueur x en construisant une série de quatrièmes proportionnelles.

Si la fonction donnée est un polynôme, on construit séparément la longueur représentée par chaque terme, et finalement on a à construire une longueur dont la mesure x est donnée par une formule de la forme

$$x = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots\ldots \pm a_n$$

ce qui n'offre aucune difficulté.

***305**. Si la fonction est le quotient de deux polynômes, l'un de degré $p + 1$, l'autre de degré p, la relation est de la forme

$$x = \frac{A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm A_m}{B_1 \pm B_2 \pm B_3 \ldots\ldots \pm B_n}$$

où, $A_1, A_2 \ldots\ldots A_m$ sont des monômes du degré $p + 1$, et $B_1, B_2, \ldots\ldots B_n$ des monômes du degré p. On choisit une longueur arbitraire λ, et on construit les longueurs $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$, $b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n$ telles que

$$a_1 = \frac{A_1}{\lambda^p} \quad a_2 = \frac{A_2}{\lambda^p} \quad \ldots\ldots \quad a_m = \frac{A_m}{\lambda^p}$$

$$b_1 = \frac{B_1}{\lambda^{p-1}} \quad b_2 = \frac{B_2}{\lambda^{p-1}} \quad \ldots\ldots \quad b_n = \frac{B_n}{\lambda^{p-1}};$$

on a ainsi

$$A_1 = a_1\lambda^p \qquad A_2 = a_2\lambda^p \ldots\ldots\ldots \quad A_m = a_m\lambda^p$$
$$B_1 = b_1\lambda^{p-1} \quad B_2 = b_2\lambda^{p-1} \ldots\ldots \quad B_n = b_n\lambda^{p-1};$$

et par suite

$$x = \frac{\lambda^p(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots\ldots \pm a_m)}{\lambda^{p-1}(b_1 \pm b_2 \ldots\ldots \pm b_n)} = \frac{\lambda\alpha}{\beta}$$

α et β étant deux longueurs telles que l'on ait

$$\alpha = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots\ldots\ldots \pm a_m$$
$$\beta = b_1 \pm b_2 \pm b_3 \ldots\ldots \pm b_n.$$

La longueur x est une quatrième proportionnelle aux longueurs λ, α, β.

***306**. Supposons la fonction irrationnelle. Soit d'abord

$$x = \sqrt{A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots\ldots \pm A_m}$$

où $A_1, A_2, \ldots\ldots A_m$ sont des monômes du second degré. On fait encore choix d'une longueur arbitraire λ, et on construit des longueurs $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$, telles que l'on ait

$$A_1 = \lambda a_1 \qquad A_2 = \lambda a_2 \ldots\ldots \qquad A_m = \lambda a_m;$$

on a ainsi

$$x = \sqrt{\lambda(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots\ldots \pm a_m)}$$

ou

$$x = \sqrt{\lambda\alpha}$$

α étant la longueur telle que

$$\alpha = a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ \ldots\ldots \pm a_m.$$

On obtient la longueur x en construisant la moyenne proportionnelle entre λ et α.

307. On pourrait construire de cette façon les longueurs x et y telles que l'on ait

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad y = \sqrt{a^2 - b^2};$$

mais il est plus simple d'observer que, dans ce cas, x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont a et b, et que y est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est a, et un côté b. Pareillement, pour construire les longueurs x et y, telles que

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2},$$

on construirait d'abord une longueur α telle que

$$\alpha = \sqrt{a^2 + b^2};$$

on aurait

$$\alpha^2 = a^2 + b^2,$$

et, par suite,

$$x = \sqrt{\alpha^2 + c^2} \qquad y = \sqrt{\alpha^2 - c^2}.$$

***308.** Si la fonction donnée est de la forme

$$x = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

où A est une fonction rationnelle homogène, du degré $p + 2$, et B une fonction rationnelle homogène du degré p, on prend encore une longueur arbitraire λ, et on construit, comme il a été expliqué plus haut, des longueurs α et β telles que

$$A = \lambda^{p+1}\alpha \qquad B = \lambda^{p-1}\beta$$

on a ainsi

$$x = \sqrt{\frac{\lambda^2\alpha}{\beta}} = \sqrt{\lambda\frac{\lambda\alpha}{\beta}}.$$

On construit une longueur γ telle que

$$\gamma = \frac{\lambda\alpha}{\beta}$$

et, finalement, on a

$$x = \sqrt{\lambda\gamma}.$$

La longueur demandée est la moyenne proportionnelle entre λ et γ.

***309.** Si la fonction contient un terme qui est un radical dont l'indice est une puissance de 2, la quantité sous le radical étant une fonction homogène de degré égal à cet indice, on remplace ce radical par une série de radicaux du second degré superposés.

Soit par exemple

$$x = \sqrt[4]{A_1 \pm A_2 \pm A_3 \ldots\ldots \pm A_m}$$

A_1, A_2 ..... A_m étant des monômes du quatrième degré. On prend une longueur arbitraire λ, et on construit les longueurs a_1, a_2, ... a_m, telles que l'on ait

$$A_1 = \lambda^3 a_1, \qquad A_2 = \lambda^3 a_2, \; \ldots\ldots \qquad A_m = \lambda^3 a_m$$

et on a

$$x = \sqrt[4]{\lambda^3(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \ldots\ldots \pm a_m)}$$

ou, en construisant α telle que

$$\alpha = a_1 \pm a_2 \pm \ldots\ldots \pm a_m,$$

$$x = \sqrt[4]{\lambda^3\alpha} = \sqrt[4]{\lambda^2\lambda\alpha}.$$

On construit une longueur β telle que $\beta = \sqrt{\lambda\alpha}$, et, par suite, $\beta^2 = \lambda\alpha$; on a ainsi

$$x = \sqrt[4]{\lambda^2\beta^2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\lambda^2\beta^2}} = \sqrt[2]{\lambda\beta}.$$

La longueur cherchée est la moyenne proportionnelle entre λ et β.

Si l'on a

$$x = \sqrt[4]{\frac{A}{B}}$$

où A est une fonction rationnelle homogène du degré $p + 4$, et B une fonction rationnelle homogène du degré p, on construira de même les longueurs α et β telles que l'on ait

$$A = \lambda^{p+3}\alpha \qquad B = \lambda^{p-1}\beta$$

λ étant une longueur arbitraire, et on aura

$$x = \sqrt[4]{\lambda^4\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[4]{\lambda^3\frac{\lambda\alpha}{\beta}} = \sqrt[4]{\lambda^3\gamma}$$

en posant

$$\gamma = \frac{\lambda\alpha}{\beta},$$

et

$$x = \sqrt[4]{\lambda^2\delta^2}$$

en posant

$$\delta = \sqrt{\lambda\gamma}.$$

Or

$$\sqrt[4]{\lambda^2\delta^2} = \sqrt{\sqrt{\lambda^2\delta^2}} = \sqrt{\lambda\delta};$$

donc enfin

$$x = \sqrt{\lambda\delta}.$$

§ X. Construction des racines d'une équation du second degré.

Problème.

310. *Construire deux longueurs, connaissant leur somme et leur moyenne proportionnelle.*

Soit a la somme des longueurs à construire, l leur moyenne proportionnelle.

Prenons sur une droite indéfinie une longueur AB égale à a et sur AB comme diamètre, décrivons une demi-circonférence (*fig.* 243). Au point A menons la perpendiculaire AC à AB, et prenons sur cette ligne $AC = l$. Par le point C menons la parallèle CR à AB, et soit D l'un des points où cette ligne rencontre la circonférence. Menons DE perpendiculaire à AB : AE et EB sont les deux longueurs demandées.

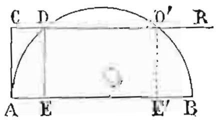


Fig. 243.

En effet, on a d'une part $AE + EB = AB = a$, et, d'autre part, on a (269)

$$AE \times EB = \overline{DE}^2 = l^2.$$

La droite CR rencontre la circonférence en un second point D', et si l'on mène D'E' perpendiculaire à AB, les longueurs AE', E'B ont aussi leur somme égale à a, et leur moyenne géométrique égale à l; mais il est facile de voir que l'on a $AE' = EB$ et $BE' = AE$, de sorte que ces longueurs sont les mêmes que les précédentes.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la parallèle à la droite AB menée par le point C rencontre la circonférence décrite sur AB comme diamètre, c'est-à-dire que l soit inférieure ou égale à $\frac{a}{2}$.

Si $l = \frac{a}{2}$, les deux longueurs cherchées sont égales à $\frac{a}{2}$.

Il est facile d'exprimer les longueurs cherchées au moyen

des longueurs données a et l. On a en effet, en appelant O le milieu de AB,

$$AE = OA - OE, \qquad BE = OA + OE;$$

or

$$OA = \frac{a}{2},$$

$$OE = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2};$$

donc

$$AE = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2} \qquad BE = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}.$$

Problème.

311. *Construire deux longueurs, connaissant leur différence et leur moyenne proportionnelle.*

Soit a la différence des deux longueurs cherchées, l leur moyenne proportionnelle.

Soit $AB = a$; au point A menons la perpendiculaire AC à AB, et prenons $AC = l$. Sur AB, comme diamètre, décrivons une circonférence, et joignons le point C au centre O de cette circonférence (*fig.* 244). Soient D et E les points où la droite CO rencontre la circonférence; les longueurs CD, CE, sont les longueurs demandées.

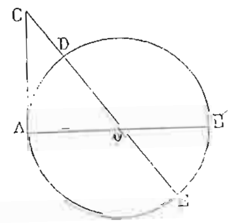


Fig. 244.

En effet, d'une part,

$$CE - CD = DE = AB = a,$$

et, d'autre part, la droite AC étant tangente au cercle A, on a

$$CD \times CE = \overline{CA}^2 = l^2.$$

Le problème est toujours possible. On peut encore exprimer les longueurs cherchées CD, CE, au moyen des longueurs données a et l.

On a en effet

$$CD = OC - OD \quad \text{et} \quad CE = OC + OD.$$

Or

$$OD = \frac{a}{2} \qquad OC = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + l^2};$$

donc

$$CD = \sqrt{\frac{a^2}{4} + l^2} - \frac{a}{2} \qquad CE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + l^2} + \frac{a}{2}.$$

Problème.

312. *Construire les racines d'une équation du second degré.*

Soit l'équation du second degré homogène

$$x^2 \pm ax \pm bc = 0$$

dans laquelle a, b, c représentent les nombres qui mesurent trois longueurs données; proposons-nous de construire, avec la règle et le compas, les longueurs qui ont pour mesures les racines de cette équation.

Construisons d'abord la moyenne géométrique l entre les longueurs b et c; l'équation devient

$$x^2 \pm ax \pm l^2 = 0,$$

et si nous faisons toutes les combinaisons de signes possibles, nous voyons qu'elle peut prendre une des quatre formes suivantes :

$$x^2 - ax + l^2 = 0 \quad (1)$$
$$x^2 - ax - l^2 = 0 \quad (2)$$
$$x^2 + ax + l^2 = 0 \quad (3)$$
$$x^2 + ax - l^2 = 0 \ . \quad (4)$$

Comme la troisième et la quatrième se déduisent respectivement de la première et de la seconde en y changeant x en $-x$, les racines de ces deux dernières équations sont les racines des deux premières changées de signes. Il suffira donc de considérer les équations (1) et (2).

1° Prenons d'abord l'équation (1)

$$x^2 - ax + l^2 = 0. \quad (1)$$

On sait (voir les *Leçons d'algèbre*) que la condition de réalité des racines est

$$\frac{a^2}{4} > l^2,$$

ou, comme a et l sont ici des nombres positifs,

$$\frac{a}{2} \geqslant l.$$

Supposons cette condition remplie; les racines sont réelles et positives. Désignons-les par x' et par x''; on a

$$x' + x'' = a$$
$$x'x'' = l^2.$$

Donc x' et x'' sont deux longueurs dont la somme est a, et dont la moyenne géométrique est l.

On les construit comme il a été expliqué au n° 310.

On remarquera que la condition de possibilité de la construction est précisément la condition de réalité des racines de l'équation.

2° Prenons l'équation (2)

$$x^2 - ax - l^2 = 0. \quad (2)$$

Les deux racines sont réelles et de signes contraires. Si l'on désigne par x' la racine positive, et par $-x''$ la racine négative, on a

$$x' - x'' = a$$

et

$$x' \times (-x'') = -l^2$$

ou

$$x'x'' = l^2.$$

Donc x' et x'' sont deux longueurs dont la différence est a, et dont la moyenne géométrique est l. On les construit comme il a été expliqué n° 311 :

Problème.

313. *Partager une portion de droite* AB *en moyenne et extrême raison.*

On dit qu'une portion de droite AB est partagée par un point M en moyenne et extrême raison quand la distance du point M à l'une des extrémités de AB est moyenne proportionnelle entre la longueur AB et la distance du point M à l'autre extrémité de AB, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\frac{AB}{MA}=\frac{MA}{MB}.$$

On reconnaît, *a priori*, qu'il y a sur la droite AB deux points qui remplissent cette condition.

Concevons en effet un mobile M (*fig.* 245), parcourant la

Fig. 245.

droite AB, dans un sens déterminé. Si le point M va de A en B, le rapport $\frac{AB}{MA}$ décroît d'une manière continue de l'infini jusqu'à la valeur 1, tandis que le rapport $\frac{MA}{MB}$ croît d'une manière continue de la valeur zéro à l'infini. Il y a donc entre A et B une position particulière du point M, et une seule, pour laquelle les deux rapports sont égaux. Si le point M continue à se mouvoir, dans le même sens, sur BR, le rapport $\frac{AB}{MA}$ est moindre que 1, tandis que le rapport $\frac{MA}{MB}$ est supérieur à 1 ; donc pour aucune position du point sur BR, les deux rapports ne sont égaux. Si le point, partant de A, parcourt AR', dans le sens BA, le rapport $\frac{AB}{MA}$ diminue d'une manière continue depuis l'infini

jusqu'à la valeur 1, tandis que le rapport $\frac{MA}{MB}$ croît d'une manière continue depuis zéro jusqu'à 1 ; il y a donc sur AR' une position particulière du point M, et une seule, pour laquelle les deux rapports sont égaux.

Soient M et M' les deux points de la droite indéfinie R'R qui partagent la droite AB en moyenne et extrême raison, le point M entre A et B, le point M' sur AR'. On a

$$\frac{AB}{MA}=\frac{MA}{MB} \quad \text{et} \quad \frac{AB}{M'A}=\frac{M'A}{M'B}$$

d'où

$$\overline{MA}^2=AB\times MB$$
$$\overline{M'A}^2=AB\times M'B.$$

On déduit de ces deux dernières relations, en les retranchant membre à membre,

$$\overline{M'A}^2-\overline{MA}^2=AB\times(M'B-MB),$$

ou

$$(M'A-MA)(M'A+MA)=AB\times(M'B-MB);$$

or, les longueurs $M'A+MA$ et $M'B-MB$ sont toutes deux égales à MM' ; donc la relation précédente, en supprimant un facteur commun aux deux membres, devient

$$(1)\qquad M'A-MA=AB.$$

D'autre part, de la relation

$$\frac{AB}{MA}=\frac{MA}{MB}$$

on déduit

$$\frac{AB}{AB+MA}=\frac{MA}{MA+MB}.$$

Or, $AB+MA=M'A$ d'après la relation (1) ; $MA+MB=AB$, puisque le point M est supposé entre A et B ; donc on a

$$\frac{AB}{M'A}=\frac{MA}{AB}$$

ou

$$M'A \times MA = \overline{AB}^2. \quad (2)$$

Les deux longueurs M'A, MA sont donc telles que leur différence est égale à AB, et leur moyenne géométrique égale à AB. En appliquant la solution du problème (311), on est conduit à la construction suivante :

Au point B, on élève une perpendiculaire à AB, et on prend sur cette ligne BC = AB ; sur BC comme diamètre on décrit

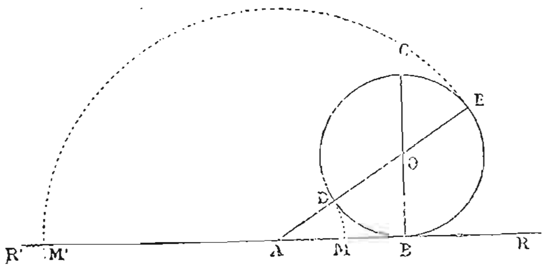


Fig. 246

une circonférence, et on joint le point A au centre O de cette circonférence ; soient D et E les points de rencontre de AO avec la circonférence. On porte, sur AB, AM = AD, et sur AR', AM' = AE ; les points M et M' ainsi construits sont les points cherchés.

Les segments MA et MB dont la somme est égale à AB sont dits *additifs ;* les segments M'A, M'B dont la différence est égale à AB sont dits *soustractifs*. MA est le plus grand segment additif, M'A le plus petit segment soustractif de la droite AB partagée en moyenne et extrême raison.

314. Désignons la longueur AB par a, et proposons-nous d'évaluer, en fonction de a, les longueurs des quatre segments MA, M'A, MB, M'B. On a

$$MA = AD = AO - OD$$
$$M'A = AE = AO + OD.$$

Or, OD est $\frac{a}{2}$; AO est $\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2}$ ou $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Donc

$$MA = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$
$$M'A = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

On a aussi

$$MB = AB - MA = a - \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$
$$M'B = AB + M'A = a + \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

d'où, en réduisant,

$$MB = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$$
$$M'B = \frac{a}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right).$$

§ XI. Problèmes relatifs a la détermination d'un cercle.

Problème.

315. *Mener par deux points donnés* A *et* B *un cercle tangent à une droite donnée* L'L.

Supposons le problème résolu, soit D (*fig*. 247) le point de contact d'un cercle tangent à la droite L'L, et passant par les points A et B. Si l'on prolonge la droite AB jusqu'au point C où elle rencontre L'L, on sait que la longueur CD est moyenne proportionnelle entre les longueurs CA et CB. De là résulte la solution suivante : par les points A et B faites passer un cercle quelconque, et du point C menez à ce cercle une tangente CM ; CM est moyenne proportionnelle entre CA et CB, et par conséquent égale à CD. Sur la droite L'L, prenez, de part et d'autre du point C, les longueurs CD et CD' égales à CM. Le cercle cherché est un cercle passant par les deux points A et B et par le point D, ou par le point D'.

Nous allons montrer que la construction précédente est possible tant que les deux points donnés sont d'un même côté de L'L, et qu'elle ne l'est pas dans le cas contraire. Si les points A et

B sont d'un même côté par rapport à L'L, le point C est sur la droite indéfinie AB, en dehors de la portion AB de cette droite; il est donc extérieur à tout cercle passant par les points A et B, et par conséquent on peut, de ce point, mener une tangente CM à un tel cercle. Au contraire, si les points A et B étaient de part et d'autre de la droite L'L, le point C serait entre A et B; il serait par suite intérieur à tout cercle passant par les points A et B, et on ne pourrait pas mener de ce point une tangente à un tel cercle. Il est d'ailleurs évident *à priori* que, dans ce dernier cas, le problème proposé est impossible.

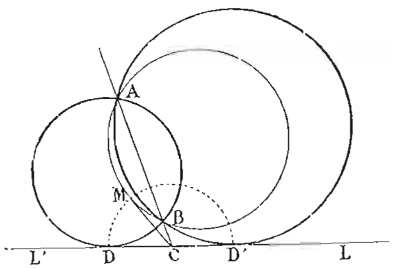


Fig. 247.

316. De ce qui précède il résulte que le problème admet deux solutions quand les points A et B sont d'un même côté de la droite L'L, et qu'il est impossible quand ils sont de part et d'autre de cette droite.

Si l'un des points, B par exemple, était sur la droite, le point C se confondrait avec le point B; CM serait nulle, et par suite les points D et D' se confondraient aussi avec le point B, et les deux solutions se confondraient en une seule.

Problème.

317. *Mener par deux points donnés* A *et* B *un cercle tangent à un cercle donné* O.

Supposons le problème résolu. Soit O' (*fig.* 248), un cercle qui passe par les points A et B, et qui est tangent au cercle O; soit C le point de contact. Si le point C était connu, le problème serait ramené à celui-ci : mener un cercle par les trois points A, B, C. Tout revient donc à déterminer le point C. La tangente commune aux deux cercles en C rencontre la droite AB en un point D extérieur à la portion AB de cette droite; si le point D était connu, on déterminerait le point C en menant de ce point une tangente DC au cercle O. Or, si l'on joint le point D, supposé connu, à un point E quelconque du cercle O, et si l'on

désigne par F le second point de rencontre de la droite DE avec le cercle O, on a

$$DE \times DF = \overline{DC}^2$$

et, puisque $\overline{DC}^2 = DA \times DB$,

$$DE \times DF = DA \times DB.$$

Or, cette égalité montre que les quatre points A, B, E, F, sont situés sur un même cercle (295). Si donc, par les points A, B, E, on fait passer un cercle Ω, le second point de rencontre de ce cercle avec le cercle O se confond avec le second point de rencontre de la droite DE avec le même cercle, de sorte que la corde commune aux deux cercles O et Ω passe par le point D. Le point E étant quelconque sur le cercle O, le cercle Ω est lui-même un cercle quelconque mené par les points A et B, et assujetti seulement à la condition de couper le cercle O. On n'aura donc, pour déterminer le point D, qu'à mener par les points A et B un cercle quelconque coupant le cercle O, et à prendre le point de rencontre de la corde commune à ce cercle et au cercle O avec la droite AB. Le point D déterminé, on mène de ce point les tangentes DC, DC' au cercle O. Le cercle qui passe par les trois points A, B, C, et le cercle qui passe par les trois points A, B, C', satisfont, et satisfont seuls, aux conditions du problème.

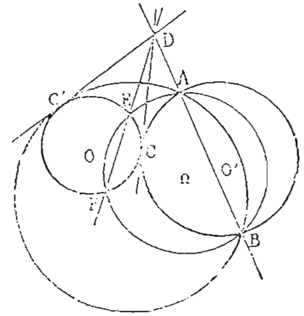


Fig. 248.

318. Pour que la construction précédente soit possible, il faut et il suffit que du point D on puisse mener une tangente au cercle O, c'est-à-dire que ce point D ne soit pas intérieur au cercle. Or, il est facile de reconnaître que le point D n'est intérieur au cercle O que dans le cas où les points A et B sont l'un intérieur, l'autre extérieur à ce cercle, cas où il est d'ailleurs évident, *a priori*, que le problème proposé est impossible.

En effet, supposons d'abord le point A extérieur au cercle O (*fig.* 249), menons par ce point un cercle quelconque Ω coupant le cercle O aux points E et F, et examinons comment se déplacerait le point D sur EF, si le point B parcourait le cercle Ω.

Si B parcourt l'arc ENF intérieur au cercle O, le point D parcourt la portion EF de la droite EF et est ainsi dans le cercle O. Si le point B parcourt l'arc FME extérieur au cercle O, le point D parcourt successivement chacune des parties de la droite indéfinie EF extérieures à la portion EF, et par conséquent reste en dehors du cercle O. Comme le cercle auxiliaire Ω, assujetti à passer par A et à couper le cercle O, peut passer par tel point du plan que l'on voudra, on conclut de ce qui précède que le point D est extérieur au cercle O tant que les deux points A et B sont tous deux extérieurs à ce cercle, tandis qu'il lui est intérieur quand les points donnés sont de part et d'autre du cercle.

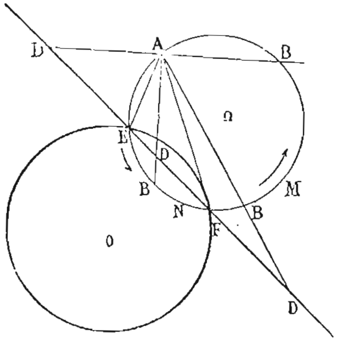


Fig. 249.

En supposant le point A intérieur au cercle O, on verrait de même que le point D est encore extérieur à ce cercle, quand les points A et B sont tous deux intérieurs à ce cercle.

Si l'un des points donnés, B par exemple, est sur le cercle O, le point D n'est autre que le point B; les points C et C′ se confondent également avec le point B, et par suite les deux cercles passant par A et par B, et tangents au cercle O, se confondent en un seul.

§ XII. Figures homothétiques.

319. Définition. Soit, dans le plan d'une figure F, un point O (*fig.* 250); si sur les droites OA, OB, OC,..... qui vont du point O aux différents points de la figure F on prend les points A′, B′, C′,.... tels que l'on ait

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}\ldots\ldots=\lambda,$$

on forme une seconde figure F′ que l'on dit *homothétique* de la première. Le point O est appelé *centre* d'homothétie; le rapport constant λ est le rapport d'homothétie. Les points correspondants A et A′, B et B′, etc., sont dits *homologues;* les droites

OA et OA′, OB et OB′, OC et OC′, etc., qui vont du centre d'homothétie à deux points homologues, sont des *rayons homologues;*

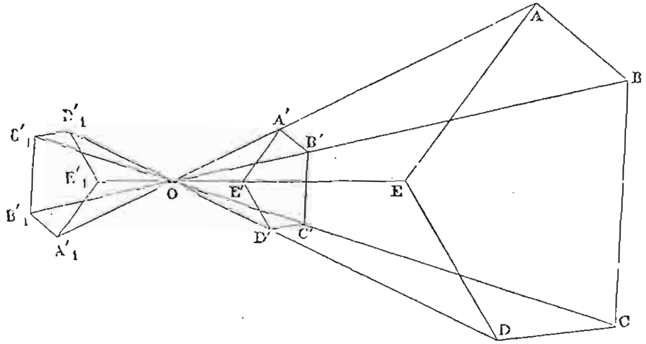


Fig. 250.

la droite qui joint deux points de la figure F et la droite qui joint les points homologues de la figure F′ sont des *droites homologues.*

On dit que l'homothétie est *directe*, ou *inverse*, suivant que dans les deux figures les rayons homologues sont de même sens, ou de sens opposés. Les figures ABCDE, A′B′C′D′E′ sont *directement homothétiques*, tandis que les figures ABCDE, $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1$ sont *inversement homothétiques.*

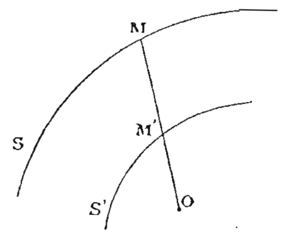


Fig. 251.

A une figure formée de points isolés correspond une figure formée de points isolés. A une ligne continue S correspond, comme figure homothétique, une ligne continue S′. Pour concevoir la génération de cette ligne S′, prenons sur la ligne S (*fig.* 251) un point quelconque M, et construisons le point homologue M′

tel que l'on ait $$\frac{OM'}{OM}=\lambda;$$

imaginons que le point M parcoure la ligne S, le point homologue M′ décrira la ligne S′.

Si, par rapport à un même centre d'homothétie O, et avec un même rapport d'homothétie λ, on construit deux figures F′, F'_1, homothétiques, la première directement, la seconde inversement, à une même figure F, les figures F′, F'_1 sont égales. On voit en effet qu'il suffit de faire tourner la figure F'_1 de 180° autour du point O pour l'amener à coïncider avec la figure F'. Il suit de là que lorsque deux figures sont inversement homothétiques, il suffit de faire tourner l'une d'elles de 180° autour du centre d'homothétie pour la rendre directement homothétique à l'autre.

Théorème.

320. *La droite* AB *qui joint les points* A *et* B *d'une figure, et la droite* A'B' *qui joint les points* A' *et* B' *homologues des points* A *et* B *dans une seconde figure homothétique à la première, sont deux droites parallèles, et le rapport de leurs longueurs est égal au rapport d'homothétie des deux figures.*

En effet, la droite A'B' (*fig.* 252), qui divise les côtés OA et OB du triangle OAB en parties proportionnelles, est parallèle à AB (235) et, par suite, les triangles OA'B', OAB sont semblables, et on a

$$\lambda = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Si l'homothétie est *directe*, les droites A'B' et AB sont dirigées dans le même sens; si l'homothétie est *inverse*, elles sont dirigées en sens contraire.

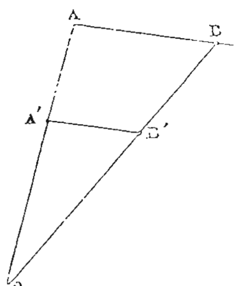


Fig. 252.

321. Corollaire I. *A trois points en ligne droite de la première figure correspondent trois points en ligne droite de la seconde.* En d'autres termes, *une figure homothétique à une ligne droite est une ligne droite parallèle à la première.*

Si une droite passe par le centre d'homothétie, toute droite homothétique à cette droite coïncide avec elle, quel que soit le rapport d'homothétie.

Réciproquement, si deux droites homothétiques coïncident, elles passent par le centre d'homothétie, à moins toutefois que le rapport d'homothétie ne soit égal à l'unité, auquel cas deux droites directement homothétiques coïncident quel que soit le point pris pour centre d'homothétie.

322. Corollaire II. *L'angle de deux droites d'une figure est égal à l'angle des droites homologues d'une figure homothétique.*

323. Corollaire III. *Deux polygones homothétiques sont semblables.* Car ils ont les angles égaux et les côtés homologues

proportionnels. Le rapport de similitude est égal au rapport d'homothétie.

324. Corollaire IV. *Les tangentes à deux courbes homothétiques, en deux points homologues, sont parallèles.*

On appelle *tangente* en un point M à une courbe S la position limite vers laquelle tend une sécante MN lorsque le point N, se mouvant sur cette courbe, vient se confondre avec le point M. Cela posé, soient deux points homologues M, M', sur deux courbes S et S' homothétiques par rapport à un centre O (*fig.* 253). Prenons sur la ligne S un point N voisin du point M, et sur la ligne S' le point N' homologue de N. Si le point N se mouvant sur S vient se confondre avec le point M, le point homologue N' se meut sur la ligne S' et vient se confondre avec le point M', car la droite ON'N vient alors sur la droite OM'M. Or, les sécantes MN, M'N' sont parallèles; donc, les tangentes MT, M'T', positions limites de ces sécantes, sont aussi parallèles.

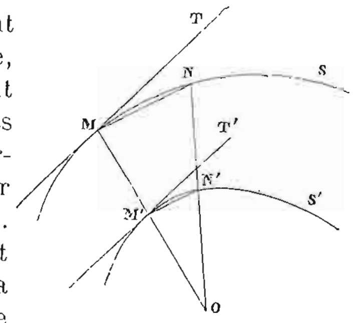


Fig. 253.

Théorème.

325. *Si deux systèmes de points* A, B, C,... *et* A', B', C',... *sont tels que les droites menées d'un point* I *aux points* A, B, C,... *du premier système, et les droites menées d'un autre point* I' *aux points* A', B', C',... *du second système, sont deux à deux parallèles et de même sens, ou deux à deux parallèles et de sens contraires, et si le rapport de deux quelconques de ces droites parallèles est constant, les deux systèmes sont homothétiques. L'homothétie est directe, ou inverse, selon que les droites parallèles sont de même sens, ou de sens contraires.*

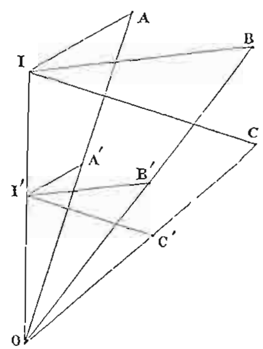


Fig. 254.

En effet, si les droites IA et I'A' sont parallèles et de même sens et si leur rapport constant est λ (*fig.* 254), la droite AA′ rencontre la droite II′ sur le prolongement de cette ligne, en un point O

tel que l'on a $\qquad \dfrac{OI'}{OI} = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{I'A'}{IA} = \lambda.$

Les droites BB′, CC′... passent au même point O pour la même

raison, et l'on a $\quad \lambda = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OC'}{OC} \cdots\cdots$

Donc les systèmes sont directement homothétiques; le centre d'homothétie est le point O, et le rapport d'homothétie est λ.

Si les droites IA et I′A′ sont parallèles et de sens contraires (*fig.* 255), et si leur rapport constant est λ, la droite AA′ rencontre la droite II′ entre les points I et I′ en un point O_1, tel que l'on a

$$\frac{O_1I'}{O_1I} = \frac{O_1A'}{O_1A} = \frac{I'A'}{IA} = \lambda,$$

les droites BB′, CC′, etc..., passent au même point O_1 pour la même raison, et l'on a

$$\lambda = \frac{O_1A'}{O_1A} = \frac{O_1B'}{O_1B} = \frac{O_1C'}{O_1C} \cdots\cdots$$

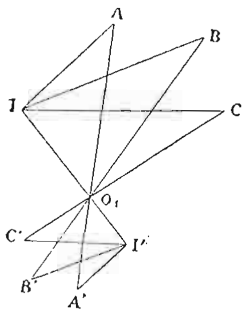


Fig. 255.

Donc les deux systèmes sont inversement homothétiques; le point O_1 est le centre d'homothétie, et λ est le rapport d'homothétie.

326. Remarque. Si le rapport donné λ est égal à 1, les droites II′, AA′, BB′, etc., sont parallèles; le point O est rejeté à l'infini. On dit encore que les deux figures, qui dans ce cas sont égales, sont homothétiques, mais que leur centre d'homothétie est rejeté à l'infini. Le mode de construction d'une figure homothétique à une autre indiqué par ce théorème est ainsi plus général que le premier.

Selon que l'on emploie le premier ou le second mode de construction, pour déterminer une figure homothétique à une figure donnée on devra se donner, avec le rapport d'homothétie, soit le point O pris pour centre d'homothétie, soit le point I′ de la seconde figure que l'on fait correspondre à un point donné I de la première.

327. Corollaire. *Deux circonférences quelconques sont à la fois directement et inversement homothétiques.*

En effet, deux rayons parallèles quelconques et de même sens IM et I′M′, de même que deux rayons parallèles et de sens contraires IM et IM'_1, sont toujours dans un rapport constant (*fig.* 256). Le centre d'homothétie directe est le point O, où la droite MM′ rencontre la ligne des centres. Le centre d'homothétie inverse

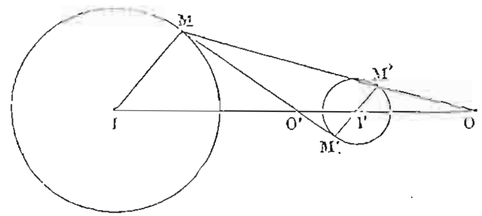


Fig. 256.

est le point O′, où la droite MM'_1 rencontre la ligne des centres. Si les cercles sont égaux le centre d'homothétie directe est rejeté à l'infini.

328. Remarque. Si nous faisons tourner la sécante OMN autour du point O (*fig.* 257) jusqu'à ce que les points M et N, où elle rencontre la circonférence I, se confondent en un seul point P, les points M′ et N′, où elle rencontre la circonférence I′, points homologues des points M et N, viennent se confondre en un seul point P′ homologue du point P, et par conséquent, lorsque la

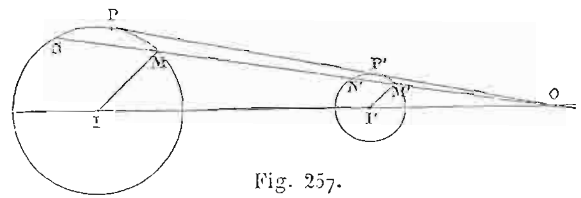


Fig. 257.

sécante OMN, en tournant autour du point O, devient tangente à l'un des cercles, elle devient aussi tangente à l'autre.

On déduit de là un nouveau procédé pour mener les tangentes communes à deux cercles. On détermine les deux centres d'homothétie directe et inverse, et par chacun de ces points on mène des tangentes à l'un des deux cercles. Les tangentes menées par le centre d'homothétie directe sont les tangentes communes extérieures; les tangentes menées par le centre d'homothétie inverse sont les tangentes communes intérieures.

Théorème.

329. *Deux polygones semblables peuvent être placés de façon à être directement ou inversement homothétiques.*

Il y a deux cas à distinguer selon que, pour un observateur placé successivement à l'intérieur de chaque polygone, les parties homologues paraissent disposées dans le même ordre, ou dans l'ordre inverse. Soient par exemple (*fig.* 258) les polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E', A"B"C"D"E", dans lesquels les sommets homologues sont désignés par une même lettre, sans accent dans le premier, avec un accent dans le second, deux accents dans le troisième. Imaginons un mobile parcourant successivement les côtés des polygones en suivant l'ordre alphabétique; tandis que, pour un observateur placé à l'intérieur du premier ou du second polygone, le mouvement du mobile, sur ce polygone, paraît se faire de gauche à droite, pour un observateur placé à l'intérieur du troisième, le mouvement du mobile, sur ce polygone, paraît se faire de droite à

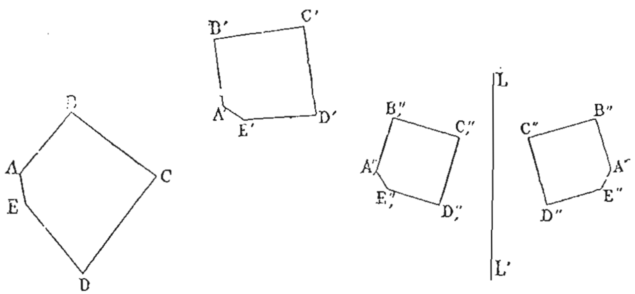


Fig. 258.

gauche. Nous dirons que dans les deux premiers polygones la disposition des parties homologues est la même, tandis que dans le premier et le troisième elle est inverse. Il est d'ailleurs facile de ramener le second cas au premier, car si on fait tourner le polygone A"B"C"D"E" autour d'une droite quelconque LL' du plan, de façon à la rabattre en $A''_1B''_1C''_1D''_1E''_1$, la disposition des parties homologues est la même dans ce dernier polygone $A''_1B''_1C''_1D''_1E''_1$ et dans le polygone ABCDE.

Cela posé, soient, dans un plan, deux polygones semblables ABCDE, A'B'C'D'E' dans lesquels les parties homologues ont la même disposition (*fig.* 259). Prenons dans l'intérieur du premier un point I quelconque, et dans l'intérieur du second un point I' tel que le triangle I'A'B' soit semblable au triangle IAB. Si l'on joint le point I aux sommets du premier polygone, et le point I' aux sommets du second, les deux polygones sont décomposés en triangles semblables chacun à chacun, et disposés dans le même ordre. Menons par le point I' la droite R_1I'R parallele à IA, la portion I'R dirigée dans le sens IA, la portion I'R_1 dans le sens opposé. Si, faisant tourner le second polygone autour du point I', nous amenons I'A' sur I'R, les rayons I'A', I'B', I'C'..... viendront se placer suivant I'A",

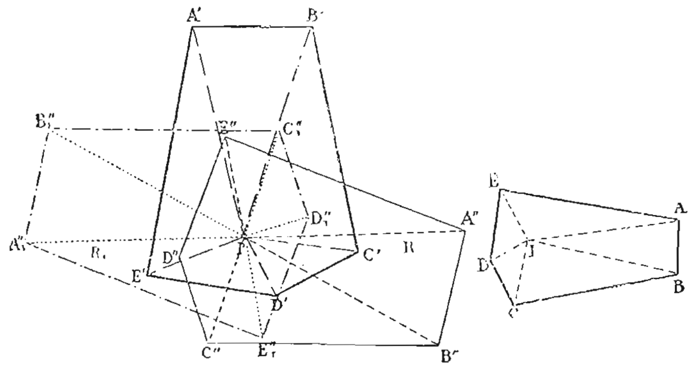


Fig. 259.

I'B", I'C"..... et seront rendus respectivement parallèles, et de même sens, aux rayons IA, IB, IC,.....

Comme d'ailleurs on a

$$\frac{\text{I'A''}}{\text{IA}} = \frac{\text{I'B''}}{\text{IB}} = \frac{\text{I'C''}}{\text{IC}} \cdots,$$

le polygone A"B"C"D"E" est directement homothétique au polygone ABCDE.

Si, faisant toujours tourner le second polygone autour de I', on amenait le rayon I'A' sur I'R_1, le second polygone prendrait la position $A''_1B''_1C''_1D''_1E''_1$, et serait rendu inversement homothétique au premier.

330. Définition de deux lignes semblables. Deux polygones homothétiques étant deux polygones semblables et deux polygones semblables pouvant toujours être placés de façon à être homothétiques, on est naturellement conduit à dire que deux lignes courbes sont semblables lorsqu'elles peuvent être placées de façon à être homothétiques.

Théorème.

331. *Si deux figures F′ et F″ sont homothétiques à une figure F, elles sont homothétiques entre elles et le rapport d'homothétie de F′ à F″ est le quotient du rapport d'homothétie de F′ à F divisé par le rapport d'homothétie de F″ à F.*

Les figures F′ F″ sont directement ou inversement homothétiques entre elles, selon qu'elles sont homothétiques de la même façon, ou de façon différente, avec la figure F.

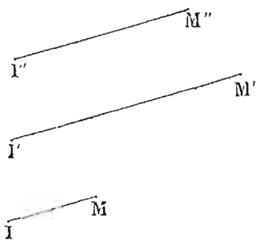


Fig. 260.

Prenons d'abord (*fig.* 260) un point quelconque I de la figure F, le point homologue I′ de la figure F′, et le point homologue I″ de la figure F″. Joignons le point I à un autre point quelconque M de la figure F, et de même les points I′ et I″ respectivement aux points M′ et M″ homologues de M dans les figures F′ et F″. Les droites I′M′, I″M″ seront parallèles à IM, et par suite parallèles entre elles; de plus on a

$$\frac{I'M'}{I''M''} = \frac{I'M'}{IM} : \frac{I''M''}{IM};$$

donc le rapport $\frac{I'M'}{I''M''}$ est constant et égal au quotient du rapport d'homothétie de F′ à F divisé par le rapport d'homothétie de F″ à F.

Enfin si les figures F′ et F″ sont toutes deux directement, ou toutes deux inversement, homothétiques à la figure F, les droites I′M′ et I″M″ sont toutes deux de même sens que IM, ou toutes deux de sens opposé, à celui de IM, dans tous les cas toutes deux de même sens; donc les figures F′ et F″ sont homothétiques directes. Au contraire, si l'une des figures F′ et F″ est directement et l'autre inversement homothétique à la figure F, les droites I′M′, I″M″ sont dirigées l'une dans le sens IM, l'autre dans le sens opposé et les figures F′ et F″ sont homothétiques inverses. Donc le théorème est démontré.

332. Corollaire I. *Si le rapport d'homothétie des figures F′ et F est égal au rapport d'homothétie des figures F″ et F, les figures F′ et F″ sont égales.*

En effet, elles sont semblables et leur rapport de similitude est égal à 1.

333. Corollaire II. *Avec un même point pris pour centre d'homothétie, et en faisant varier de 0 à l'infini le rapport d'homothétie, on peut construire des figures égales à toutes les figures homothétiques d'une même figure F, et par suite égales à toutes les figures semblables à la figure F.*

Théorème.

334. *Lorsque trois figures sont deux à deux homothétiques, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite.*

Soient F, F′, F″, trois figures deux à deux homothétiques; appelons O le centre d'homothétie des figures F′ et F″, O′ le centre d'homothétie des figures F et F″, O″ le centre d'homothétie des figures F et F′. Il faut démontrer que les trois points O, O′, O″ sont en ligne droite (*fig.* 261).

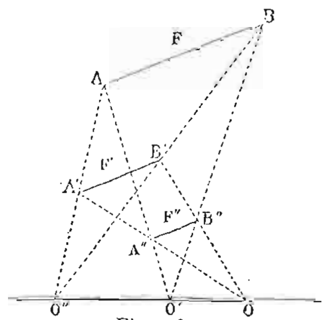


Fig. 261.

Si nous considérons la droite O″O′ comme appartenant à la figure F′, elle a pour homologue dans la figure F la droite O″O′ elle-même, puisqu'elle passe par le point O″, centre d'homothétie des deux figures F′ et F. Si nous considérons la même droite O″O′ comme appartenant à la figure F″, elle a encore pour homologue dans la figure F la droite O″O′ elle-même, puisqu'elle passe par le point O′, centre d'homothétie des deux figures F″ et F. Il en résulte que cette droite est aussi homologue à elle-même dans les deux figures homothétiques F et F″, donc elle passe par le centre O d'homothétie de ces deux figures. Donc les trois points O, O′, O″ sont en ligne droite.

335. Corollaire I. *Les trois centres d'homothétie directe de trois cercles sont en ligne droite, et deux quelconques des centres d'homothétie inverse sont en ligne droite avec le centre d'homothétie directe qui correspond au troisième centre d'homothétie inverse.*

Soient trois cercles O, O′, O″ (fig. 262); deux quelconques de ces cercles sont à la fois directement et inversement homothétiques. Soient D, D′, D″, les centres d'homothétie directe des cercles O′ et O″, O et O″, O et O′; et soient I, I′ I″, les centres d'homothétie inverse des mêmes cercles.

Les cercles O′ et O″ sont directement homothétiques au

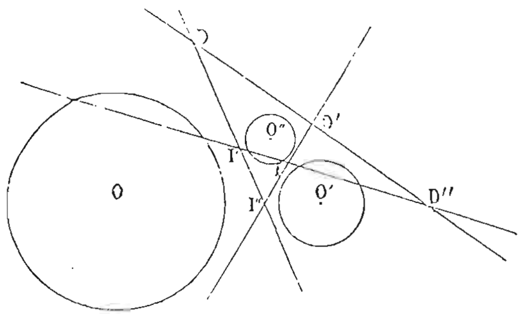


Fig. 262.

cercle O, et, comme tels, sont directement homothétiques entre eux; donc les trois points D″, D′, D sont en ligne droite. D'autre part, les cercles O′ et O″ sont inversement homothétiques au cercle O, et, comme tels, sont directement homothétiques entre eux; donc le centre I″ d'homothétie inverse des cercles O′ et O, le centre I′ d'homothétie inverse des cercles O″ et O, et le centre D d'homothétie directe des cercles O′ et O″ sont trois points en ligne droite.

De même les cercles O″ et O étant inversement homothétiques au cercle O′, et, comme tels, directement homothétiques entre eux, les points I, I″ et D′ sont en ligne droite. Enfin, les

cercles O et O′ étant inversement homothétiques au cercle O″, et, comme tels, directement homothétiques entre eux, les points I′, I et D″ sont en ligne droite. Les trois cercles ont ainsi quatre *axes d'homothétie*. Celui qui passe par les trois centres d'homothétie directe est appelé *axe d'homothétie directe;* chacun des trois autres contient deux centres d'homothétie inverse et un centre d'homothétie directe, et est appelé *axe d'homothétie inverse.*

§ XIII. Polygones réguliers; leur inscription dans un cercle.

336. Définitions. On dit qu'une ligne brisée est *régulière* quand elle remplit les trois conditions suivantes : 1° tous ses côtés sont égaux; 2° tous ses angles sont égaux; 3° de trois côtés consécutifs quelconques le premier et le troisième sont d'un même côté par rapport au second. Si la ligne est convexe, cette troisième condition est toujours remplie, mais il n'en est pas de même si la ligne n'est pas convexe. Chacune des

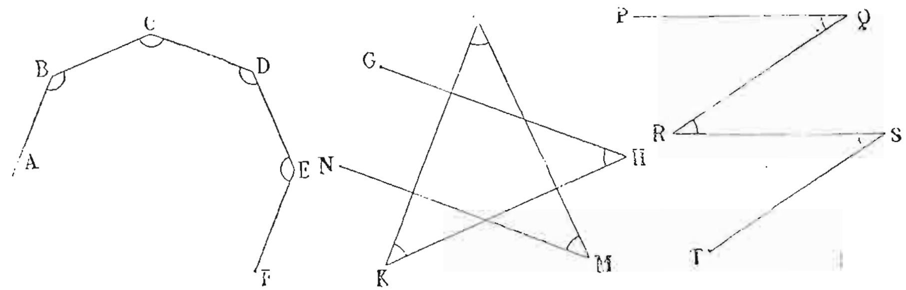


Fig. 263.

trois lignes brisées ABCDEF, GHKLMN, PQRST, de la figure 263, a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux; les deux premières satisfont à la troisième condition, et sont *régulières;* mais des trois côtés consécutifs PQ, QR, RS de la troisième, le premier PQ et le troisième RS sont de part et d'autre du second QR, et, pour cette raison, la ligne brisée PQRST, bien qu'ayant tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux, n'est pas *régulière.*

On dit qu'un polygone, convexe ou non convexe, est *régulier*, quand son contour, qui est une ligne brisée fermée, est une ligne brisée *régulière*.

Une ligne brisée est dite inscrite dans un cercle quand tous ses sommets sont sur le cercle, elle est dite circonscrite au cercle quand tous ses côtés sont tangents au cercle. Inversement, on dit qu'un cercle est circonscrit à une ligne brisée, ou inscrit dans cette ligne, s'il passe par tous ses sommets, ou s'il est tangent à tous ses côtés.

Théorème.

337. *Si une circonférence est partagée en un certain nombre de parties égales, les cordes qui unissent les points de division consécutifs forment un polygone régulier inscrit, et les tangentes à la circonférence aux points de division forment un polygone régulier circonscrit.*

Soient A, B, C, D,... les points de division consécutifs de la circonférence (*fig.* 264). Le polygone inscrit ABCD... est régulier, car les côtés de ce polygone sont égaux comme sous-tendant des arcs égaux, et les angles sont égaux comme inscrits dans des arcs égaux.

Le polygone circonscrit A'B'C'D'... est aussi régulier; en effet, la corde AB fait avec les tangentes AA' et BA' des angles BAA' et ABA' qui sont égaux, comme ayant tous deux même mesure que la moitié de l'arc AB; de même la corde BC fait avec les tangentes BB' et CB' des angles égaux entre eux, et égaux aux précédents; et ainsi de suite. Il en résulte que les triangles A'AB, B'BC, C'CD... sont des triangles isocèles, qui ont des bases égales, et les angles à la base égaux entre eux, et, par conséquent, que ces triangles sont égaux. On en conclut l'égalité des angles A', B', C',..., du polygone, et l'égalité des segments AA', A'B, BB', B'C, CC',... et, par suite, l'égalité des côtés du polygone, puisque chacun d'eux comprend deux de ces segments.

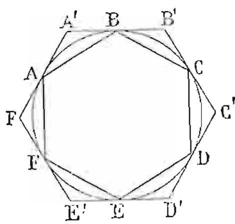


Fig. 264.

Le polygone A'B'C'D'... ayant ses angles égaux et ses côtés égaux, est un polygone régulier.

338. Remarque. Comme on peut toujours concevoir une circonférence partagée en un nombre m quelconque de parties égales, ce théorème montre qu'il y a des polygones réguliers convexes d'un nombre m quelconque de côtés, ce qui n'était pas évident *à priori*.

339. Corollaire. Toute ligne brisée convexe dont les côtés sont des cordes égales inscrites dans un cercle est une ligne brisée régulière.

Théorème.

340. *Une circonférence étant partagée en* m *parties égales, si l'on joint les points de division de* n *en* n, *de façon que chaque corde sous-tende* n *divisions, on forme un polygone régulier dont le nombre des côtés est* $\frac{m}{d}$, d *étant le plus grand commun diviseur entre* m *et* n.

Soit une circonférence partagée en m parties égales, et supposons qu'à partir de l'un des points de division, et dans un sens déterminé, on joigne les points de division de n en n; on forme évidemment une ligne brisée régulière. Pour que l'on revienne au point de départ, c'est-à-dire pour que la ligne brisée se ferme, il faut que le nombre des divisions parcourues, qui est un multiple de n, soit en outre un multiple de m, puisque la circonférence contient m divisions. On reviendra donc au point de départ, pour la première fois, lorsqu'on aura parcouru un nombre de divisions égal au plus petit multiple commun à m et à n. On aura d'ailleurs le nombre p des côtés du polygone formé, en divisant par n ce plus petit multiple, puisque chaque côté du polygone sous-tend n divisions. On sait que le plus petit multiple commun à deux nombres m et n, dont le plus grand commun diviseur est d, est $\frac{mn}{d}$; on a donc

$$p = \frac{m}{d}.$$

341. Le polygone formé est convexe, ou non convexe, selon que la somme des arcs sous-tendus par ses côtés est égale ou supérieure à une circonférence. Or, cette somme contient $\frac{mn}{d}$ divisions; d'ailleurs la circonférence en contient m; donc le polygone est convexe, ou non convexe, selon que $\frac{n}{d}$ est égal ou supérieur à 1.

342. Chaque côté de la ligne brisée sous-tend deux arcs de la circonférence, l'un égal à n divisions, l'autre à $m-n$. Il suit de là que si, parcourant la circonférence dans un sens, on joint les points de division de n en n, et si, parcourant la circonférence en sens inverse, on joint les points de division de $m-n$ en $m-n$, on obtient dans les deux cas le même polygone.

Pour que le polygone ainsi formé ait m côtés, il faut et il suffit que d soit égal à 1, c'est-à-dire que n soit premier avec m.

On obtiendra donc tous les polygones réguliers de m côtés, en faisant successivement n égal à chacun des nombres premiers avec m et inférieurs à $\frac{m}{2}$. Celui qui correspond à $n=1$ est le seul convexe.

Il suit de là que *le nombre des polygones réguliers de* m *côtés est égal au nombre des nombres premiers avec* m *et moindres que* $\frac{m}{2}$.

Il n'y a qu'un triangle équilatéral, qu'un carré, qu'un hexagone régulier.

Il y a deux pentagones réguliers, un convexe et un étoilé : le côté du premier sous-tend $\frac{1}{5}$, le côté du second $\frac{2}{5}$ de la circonférence.

Il y a deux octogones réguliers, un convexe et un étoilé; les côtés sous-tendent dans l'un $\frac{1}{8}$, dans l'autre $\frac{3}{8}$ de la circonférence.

Il y a deux décagones, un convexe et un étoilé; les côtés sous-tendent dans l'un $\frac{1}{10}$, dans l'autre $\frac{3}{10}$ de la circonférence.

Il y a de même deux dodécagones réguliers, un convexe et un étoilé ; les côtés sous-tendent dans l'un $\frac{1}{12}$, dans l'autre $\frac{5}{12}$ de la circonférence.

Il y a quatre pentédécagones réguliers (polygones de 15 côtés), un convexe et trois étoilés. Le côté du premier sous-tend $\frac{1}{15}$ de la circonférence, les côtés des trois autres sous-tendent $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{15}$ de la circonférence.

Théorème.

343. *Étant donnée une ligne brisée régulière, on peut toujours mener deux cercles concentriques, l'un circonscrit à cette ligne et l'autre inscrit dans cette ligne.*

Soient A, B, C, D, E, ... (*fig.* 265) les sommets consécutifs d'une ligne brisée régulière. Je remarque d'abord que

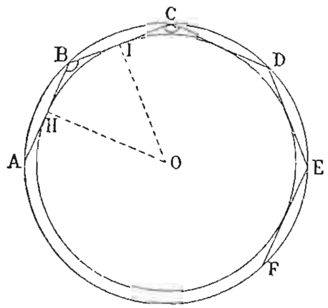


Fig. 265.

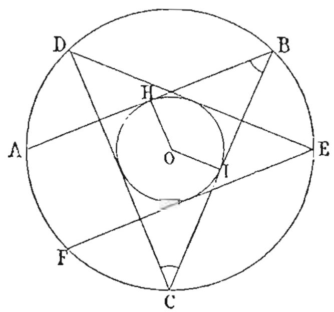


Fig. 266.

si par trois sommets consécutifs A, B, C, on fait passer un cercle, ce cercle passe par le sommet suivant D. En effet, soit O le centre de la circonférence qui passe par les sommets A, B, C, et soit I le milieu du côté BC ; la droite OI est perpendiculaire sur BC, et si je fais tourner autour de OI la partie IBA de la figure pour la rabattre sur la partie ICD, la droite IB coïncide avec IC, l'angle IBA qui est égal à l'angle ICD, et est situé du même côté que ICD par rapport à IC, vient coïncider avec l'angle ICD ; et, comme BA est égal à CD, le point A se confond avec le point D ; le point O étant resté fixe, la droite OA est venue coïncider avec OD, donc elle est égale à OD. Donc le cercle qui passe par trois sommets consécutifs A, B, C, de la ligne brisée passe par le sommet suivant D. Passant par les trois sommets consécutifs B, C, D, il passe de même par le sommet suivant E, et ainsi de suite ; donc il passe par tous les sommets de la ligne brisée, et, par conséquent, il est circonscrit à cette ligne.

Les côtés de la ligne brisée ABCDE... sont des cordes égales du cercle O, et par suite sont tous également éloignés du centre ; donc, si du point O comme centre avec un *rayon* égal à la distance OI du point O à l'un des côtés, je décris un cercle, ce cercle est tangent à tous les côtés du polygone, et, par conséquent, il est inscrit dans cette ligne.

Le centre commun du cercle circonscrit et du cercle inscrit à une ligne brisée régulière est appelé *centre* de cette ligne. Le rayon OA du cercle circonscrit est appelé rayon de la ligne brisée régulière, et le rayon OI du cercle inscrit est appelé *apothème* de cette ligne.

Tous les côtés d'une ligne brisée régulière sont vus du centre sous des angles égaux. L'angle AOB, sous lequel un côté AB de la ligne est vu du centre, est appelé l'*angle au centre* de la ligne.

Cet angle au centre AOB est évidemment égal à l'angle HOI de deux apothèmes consécutifs, lequel est le supplément de l'angle ABC de la ligne brisée ; donc l'*angle au centre d'une ligne brisée régulière et l'angle de cette ligne sont supplémentaires.*

344. REMARQUE. Ce qui précède s'applique à une ligne brisée régulière, fermée ou non fermée, convexe ou non convexe. Donc : *Étant donné un polygone régulier quelconque, convexe ou non convexe, on peut toujours mener deux cercles concentriques, l'un inscrit dans ce polygone, l'autre circonscrit.*

Soit (*fig.* 266) un polygone régulier *convexe* de m côtés. La somme des m angles au centre vaut quatre droits, donc chaque angle au centre vaut $\frac{4}{m}$ d'un droit.

L'angle du polygone, qui est le supplément de son angle au centre, vaut

$$\left(2-\frac{4}{m}\right)\text{dr.},\qquad \text{ou}\qquad \frac{2(m-2)}{m}\text{dr.}$$

Soit un polygone régulier, non convexe, de m côtés, obtenu en joignant de n en n, les points de division d'une circonférence partagée en m parties égales. La somme des angles au centre du polygone vaut $4n$ angles droits, et par conséquent, l'angle au centre vaut $\frac{4n}{m}$ dr. L'angle du polygone vaut

$$2\text{ dr.}-\frac{4n}{m}\text{dr.},\qquad \text{ou}\qquad \frac{2(m-2n)}{m}\text{dr.}$$

Une portion du contour d'un polygone régulier composée d'un certain nombre de côtés consécutifs est toujours une ligne brisée régulière ; mais une ligne brisée régulière n'est pas toujours une portion du contour d'un polygone régulier. Pour qu'une ligne brisée régulière soit une portion du contour d'un polygone régulier, il faut et il suffit que l'angle au centre de cette ligne soit commensurable avec un angle droit ; car, dans ce cas, et dans ce cas seulement, la ligne se ferme quand on en construit un nombre suffisant de côtés consécutifs.

Théorème.

345. *Deux polygones réguliers convexes d'un même nombre de côtés sont semblables, et les périmètres de ces polygones sont proportionnels aux rayons des cercles circonscrits, et aux rayons des cercles inscrits.*

Soient ABCD..., A'B'C'D'... (*fig.* 267), deux polygones réguliers convexes de n côtés. Chacun des angles d'un polygone régulier de n côtés valant $\frac{(n-2)\times 2}{n}$ d'un angle droit, les deux polygones ont tous leurs angles égaux ; d'ailleurs les rapports $\frac{AB}{A'B'}, \frac{BC}{B'C'}, \frac{CD}{C'D'}, \ldots$ sont identiques ; donc ces polygones sont semblables.

Soient O et O′ les centres des deux polygones; les triangles AOB et A′O′B′, qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables, et le rapport de AB à A′B′ est égal au rapport de OA à O′A′. Or, le rapport des périmètres des deux polygones est égal au rapport des deux côtés homologues AB et A′B′; il est donc aussi égal au rapport des rayons OA et O′A′ des cercles circonscrits.

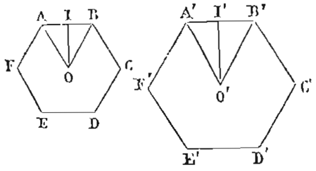


Fig. 267.

Si nous menons OI perpendiculaire à AB, et O′I′ perpendiculaire à A′B′, les triangles rectangles OAI, O′A′I′, qui ont un angle aigu égal, sont semblables, et le rapport de OA à O′A′ est égal au rapport de OI à O′I′; donc le rapport des périmètres des deux polygones est aussi égal au rapport des rayons des cercles inscrits.

Problème.

346. *Inscrire un carré dans un cercle.*

Je prends deux diamètres rectangulaires AC et BD (*fig.* 268), et je joins leurs extrémités; le quadrilatère ABCD, ainsi formé, est un carré, car les sommets partagent la circonférence en quatre parties égales.

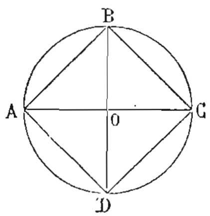


Fig. 268.

Soit R le rayon du cercle; dans le triangle rectangle AOB, on a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2R^2;$$

donc, le côté du carré inscrit AB est égal à $R\sqrt{2}$.

347. Remarque. On sait partager un arc en deux parties égales; donc, sachant partager la circonférence en quatre parties égales, on saura la partager en 8, puis en 16, puis en 32,... et en général, en 2^n parties égales. Par suite on sait inscrire dans un cercle les polygones réguliers de 2^n côtés.

Problème.

348. *Inscrire dans un cercle un hexagone régulier.*

Supposons le problème résolu, et soit AB (*fig.* 269) le côté d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle OA. L'angle AOB étant le sixième de 360°, est égal à 60°; chacun des angles égaux OAB et OBA est la moitié du supplément de 60°, c'est-à-dire la moitié de 120°, ou 60°; donc le triangle AOB est équiangle et, par suite, équilatéral, et le côté de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon du cercle.

Il suffit donc, pour inscrire dans un cercle un hexagone régulier, de prendre six cordes consécutives égales au rayon.

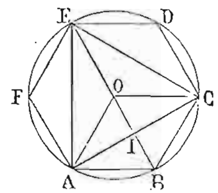


Fig. 266.

349. Corollaire. En joignant de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier on obtient le triangle équilatéral inscrit ACE. Mais, le quadrilatère ABCO, dont les quatre côtés sont égaux, étant un losange, les diagonales AC, OB se coupent en parties égales, et à angle droit. De là résulte un autre moyen pour inscrire un triangle équilatéral dans un cercle : on prend un rayon OB, et on mène une corde AC perpendiculaire au milieu du rayon OB. Les points A et C sont deux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle; le troisième sommet est le point E diamétralement opposé au point B.

350. Si on appelle R le rayon du cercle donné, on a, dans le triangle rectangle AOI,

$$\overline{AI}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

d'où

$$AI = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad AC = R\sqrt{3}.$$

351. Remarque. Sachant partager la circonférence en 3 parties égales, on sait la partager en 6, 12, 24,.. et en général en 3×2^n parties égales. Donc, on sait inscrire dans un cercle les polygones réguliers de 3×2^n côtés.

Problème.

352. *Inscrire dans un cercle un décagone régulier, un pentagone régulier, et calculer les côtés de ces polygones.*

On peut inscrire dans un cercle deux espèces de décagones réguliers : un décagone convexe dont le côté sous-tend $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et un décagone non convexe dont le côté sous-tend $\frac{3}{10}$ de la circonférence. Supposons la circonférence partagée en dix parties égales aux points A, B, C, D, E, F, G, H, K, L (*fig.* 270). Les cordes AB et AD sont les côtés des deux décagones. Menons les rayons OA, OB, OD, et soit I le point de rencontre de OB avec AD.

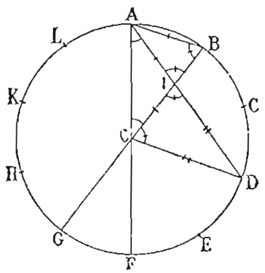


Fig. 270.

Si nous remarquons que le prolongement de AO passe par le point F, et que le prolongement de BO passe par le point G, nous reconnaissons que les angles AOB, OAI sont égaux, car chacun a même mesure qu'un arc égal à $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et que les angles ABO, AIB, OID, DOI sont égaux comme ayant chacun même mesure qu'un arc égal à $\frac{2}{10}$ de la circonférence.

De là résultent les égalités :

$$AB = AI = OI$$
$$ID = OD.$$

La différence AD — AB entre les côtés des deux décagones, est égale à AD — AI, ou à ID, ou à OD, c'est-à-dire à R. On a donc :

$$AD - AB = R.$$

D'autre part, les triangles AOD, AOI sont semblables, et l'on a :

$$\frac{AD}{OA} = \frac{OA}{AI}$$

d'où, AI étant égal à AB,

$$AD \times AB = \overline{OA}^2 = R^2.$$

On connaît donc la différence R des côtés des deux décagones réguliers, et leur moyenne géométrique R. On construit ces côtés comme il a été expliqué au n° 313. On prend (*fig.* 271) le rayon OM perpendiculaire à OA, et sur OM comme diamètre on décrit une circonférence. Soient P et Q les points de rencontre de cette circonférence avec la droite qui joint son centre au point A ; AP et AQ sont les longueurs demandées. La plus petite AP est égale au côté AB du décagone convexe, et l'autre AQ au côté AD du décagone étoilé.

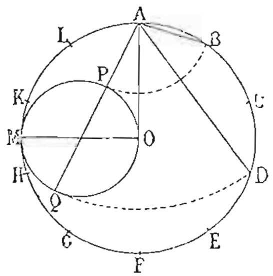


Fig. 271.

Il faut remarquer que la moyenne géométrique R de ces deux côtés étant égale à leur différence, AB est le plus grand segment additif du rayon divisé en moyenne et extrême raison, et AD est le plus petit segment soustractif du même rayon divisé en moyenne et extrême raison (313).

353. Pour partager la circonférence en dix parties égales, il

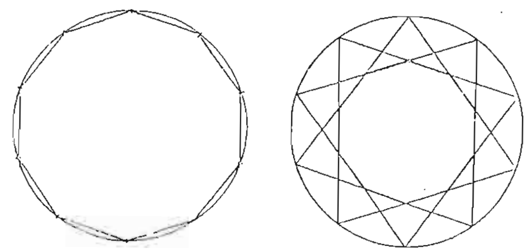


Fig. 272.

suffit d'inscrire dans la circonférence, à la suite les unes des autres, dix cordes égales à AB. Cela fait, le décagone régulier convexe inscrit est formé par ces cordes elles-mêmes ; et pour avoir le décagone régulier étoilé, il suffit de joindre les points de division de trois en trois (*fig.* 272).

354. Il y a deux espèces de pentagones réguliers : l'un convexe, dont le côté sous-tend $\frac{1}{5}$ ou $\frac{2}{10}$ de la circonférence ; l'autre non convexe dont le côté sous-tend $\frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{10}$ de la circonférence. La circonférence étant partagée en 10 parties égales, on

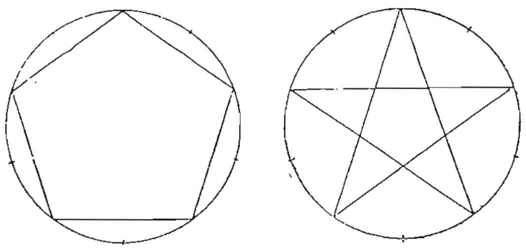


Fig. 273.

obtient le premier pentagone en joignant les points de division de 2 en 2, et le second en les joignant de 4 en 4 (*fig.* 273).

355. Ayant partagé la circonférence en 5 parties égales, on saura la partager en 10, 20, 40..., et en général en 5×2^n parties égales.

On saura donc inscrire dans la circonférence les polygones réguliers de 5×2^n côtés.

356. On peut évaluer en fonction du rayon R les côtés des deux décagones réguliers inscrits. On a (314) :

$$AB = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$AD = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

357. On peut aussi évaluer les côtés AC, AE des pentagones réguliers inscrits. Dans le triangle rectangle ACF (*fig.* 274), on a

$$\overline{AC}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{CF}^2 ;$$

or

$$AF = 2R, \quad CF = AD = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right);$$

donc

$$\overline{AC}^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}\left(5 + 2\sqrt{5} + 1\right) = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right)$$

d'où

$$AC = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

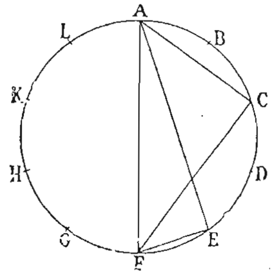


Fig. 274

Dans le triangle rectangle AEF on a :

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{EF}^2 ;$$

or

$$AF = 2R, \quad EF = AB = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right);$$

donc

$$\overline{AE}^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}\left(5 - 2\sqrt{5} + 1\right) = \frac{R^2}{4}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$$

d'où

$$AE = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

358. Désignons en général par C_m^n le côté du polygone régulier formé en joignant de n en n les points de division de la circonférence partagée en m parties égales. Nous aurons, en remarquant que $C_{10}^2 = C_5^1$, et que $C_{10}^4 = C_5^2$:

$$C_{10}^1 = AB = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$C_{10}^3 = AD = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)$$

$$C_5^1 = AC = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$C_5^2 = AE = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

De là on déduit :

$$\left(C_5^1\right)^2 - \left(C_{10}^1\right)^2 = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5} - 5 + 2\sqrt{5} - 1\right) = R^2$$

$$\left(C_5^2\right) - \left(C_{10}^3\right) = \frac{R^2}{4}\left(10 + 2\sqrt{5} - 5 - 2\sqrt{5} - 1\right) = R^2$$

ou

$$\left(C_5^1\right)^2 = R^2 + \left(C_{10}^1\right)^2$$

$$\left(C_5^2\right)^2 = R^2 + \left(C_{10}^3\right)^2;$$

ce qui démontre les théorèmes suivants :

Le côté du pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont le rayon du cercle et le côté du décagone régulier convexe inscrit dans le même cercle.

Le côté du pentagone régulier étoilé inscrit dans un cercle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont le rayon du cercle et le côté du décagone régulier étoilé inscrit dans le même cercle.

Problème.

359. *Inscrire dans un cercle un pentédécagone régulier.*

On sait qu'il y a quatre espèces de pentédécagones réguliers, et que les côtés de ces polygones inscrits dans un cercle sous-tendent $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15}$ de la circonférence du cercle. L'inscription de ces polygones est donc ramenée à la division de la circonférence en 15 parties égales. On effectue cette division en s'appuyant sur l'égalité

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}.$$

Si du point A de la circonférence (*fig.* 275), on mène d'un même côté du diamètre passant par A, deux cordes AB, AC,

la première égale au côté de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle, la seconde égale au côté du décagone régulier convexe inscrit dans le même cercle, l'arc AB est égal à $\frac{1}{6}$ de la circonférence, l'arc AC est égal à $\frac{1}{10}$ de la circonférence, et l'arc CB, qui est leur différence, est égal à $\frac{1}{15}$ de la circonférence.

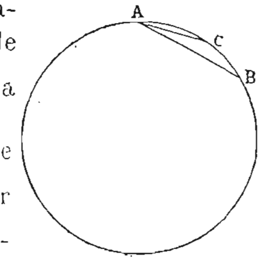


Fig. 275.

Soient $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{14}$ les points de division d'une circonférence partagée en 15 parties égales. On saura inscrire dans cette circonférence les quatre pentédécagones réguliers.

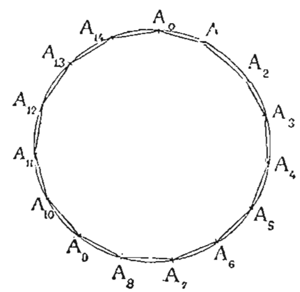


Fig. 276.

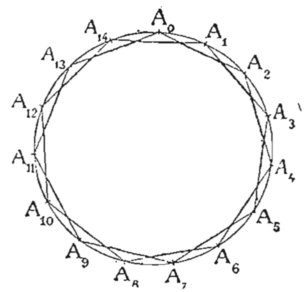


Fig. 277.

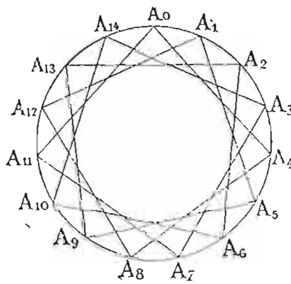


Fig. 278.

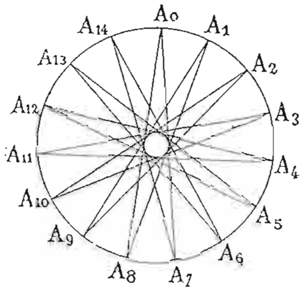


Fig. 279.

La figure 276 représente le pentédécagone convexe, dont le côté sous-tend $\frac{1}{15}$ de la circonférence. Les figures 277, 278, 279 représentent les pentédécagones étoilés dont les côtés sous-tendent $\frac{2}{15}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{7}{15}$, de la circonférence.

***360.** On peut calculer, en fonction du rayon, les côtés C_{15}^1, C_{15}^2, C_{15}^4, C_{15}^7 des quatre pentédécagones.

Pour calculer C_{15}^1, on part de l'égalité

$$\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}.$$

On prend, dans le même sens, les arcs AB et AC égaux à $\frac{1}{6}$ et à $\frac{1}{10}$ de la circonférence, de sorte que l'arc BC est $\frac{1}{15}$ de la circonférence, et on considère le quadrilatère inscrit qui a pour sommets les points A, C, B, et le point D diamétralement opposé au point A (*fig.* 280). On sait que, en vertu du théorème de Ptolémée (288), on a :

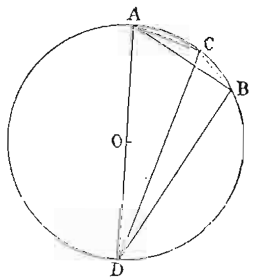


Fig. 280.

$$AB\times CD=BC\times AD+AC\times BD$$

d'où

$$BC\times AD=AB\times CD-AC\times BD$$

Or, on a :

$$BC=C_{15}^1,\quad AD=2R,\quad AB=C_6^1=R$$

$$CD=C_5^2=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\quad AC=C_{10}^1=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$BD=C_3^1=R\sqrt{3}.$$

Donc en remplaçant, on a :

$$C_{15}^1\times 2R=\frac{R^2}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{R^2}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

d'où

$$C_{15}^1=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right].$$

***361.** Pour calculer C_{15}^2, on part de l'égalité

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{6}-\frac{2}{10}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}.$$

On prend, dans le même sens, les arcs AB, AC égaux à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{1}{5}$ de la circonférence, de sorte que l'arc BC soit égal à $\frac{2}{15}$ (*fig.* 281). Soit D le point diamétralement opposé au point A. On a, d'après le théorème de Ptolémée (288),

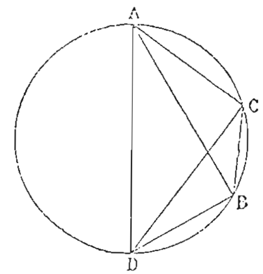


Fig. 281.

$$AB\times CD=BC\times AD+AC\times BD$$

d'où

$$BC\times AD=AB\times CD-AC\times BD.$$

Or, dans ce cas,

$$BC=C_{15}^2,\quad AD=2R,\quad AB=C_3^1=R\sqrt{3}$$

$$CD=C_{10}^3=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}+1\right),\quad AC=C_5^1=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$BD=C_6^1=R.$$

Donc, en remplaçant, on a

$$C_{15}^2\times 2R=\frac{R^2}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\frac{R^2}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

d'où

$$C_{15}^2=\frac{R}{4}\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right].$$

362. Pour calculer C_{15}^{4}, on part de l'égalité

$$\frac{4}{15}=\frac{4}{6}-\frac{4}{10}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}.$$

On prend, dans le même sens, l'arc ACB et l'arc AC égaux à $\frac{2}{3}$ et à $\frac{2}{5}$ de la circonférence, de sorte que l'arc BC soit égal à $\frac{4}{15}$ de la circonférence (*fig.* 282). Soit D le point diamétralement opposé au point A. On a, d'après le théorème de Ptolémée (288) :

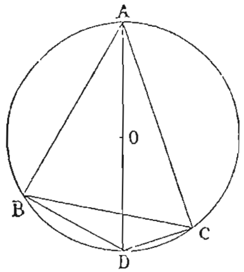


Fig. 282.

$$BC\times AD=AB\times CD+AC\times BD.$$

Or, dans ce cas,

$$BC=C_{15}^{4}\quad AD=2R,\quad AB=C_{3}^{1}=R\sqrt{3}$$

$$CD=C_{10}^{1}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),\quad AC=C_{5}^{2}=\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\quad BD=C_{6}^{1}=R$$

d'où, en substituant, et en réduisant :

$$C_{15}^{4}=R\left[\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$$

* **363.** Enfin, pour calculer C_{15}^{7}, on part de l'égalité

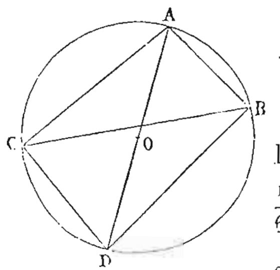


Fig. 283.

$$\frac{7}{15}=\frac{7}{6}-\frac{7}{10}=\frac{1}{6}+1-\frac{7}{10}=\frac{1}{6}+\frac{3}{10}.$$

On prend, dans deux sens opposés, les arcs AB et AC égaux, le premier à $\frac{1}{6}$, le second à $\frac{3}{10}$ de la circonférence, de sorte que l'arc BAC est égal à $\frac{7}{15}$ de la circonférence (*fig.* 283); soit D le point diamétralement opposé au point A, on a, en vertu du théorème de Ptolémée (288),

$$BC\times AD=AB\times CD+AC\times BD.$$

Or, dans ce cas,

$$BC=C_{15}^{7},\quad AD=2R,\quad AB=C_{6}^{1}=R,$$

$$CD=C_{5}^{1}=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\qquad AC=C_{10}^{3}=\frac{R}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$BD=C_{3}^{1}=R\sqrt{3}$$

d'où, en substituant et réduisant,

$$C_{15}^{7}=\frac{R}{4}\left[\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\right]$$

Problème.

364. *Connaissant le périmètre* p_n *d'un polygone régulier convexe de* n *côtés inscrit dans un cercle de rayon* R, *calculer le périmètre* p_{2n} *d'un polygone régulier convexe de* 2n *côtés inscrit dans le même cercle.*

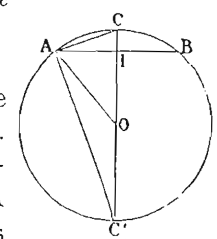


Fig. 284.

Soit AB (*fig.* 284) le côté d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle OA. Si nous menons le diamètre CC' perpendiculaire à AB, et si nous joignons le point A au milieu C du plus petit des deux arcs sous-tendus par AB, nous obtiendrons le côté d'un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans le même cercle. Menons la corde AC' et le rayon OA; le triangle CAC' est rectangle en A, et on a :

$$\overline{AC}^2=CC'\times CI=2R(R-OI);$$

d'ailleurs, dans le triangle rectangle AOI, on a :

$$\overline{OI}^2=\overline{OA}^2-\overline{AI}^2=R^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}$$

d'où

$$OI=\sqrt{R^2-\frac{\overline{AB}^2}{4}};$$

donc enfin,

$$\overline{AC}^2 = 2R\left[R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right]$$

Or

$$p_n = n.AB, \quad p_n^2 = n^2.\overline{AB}^2$$
$$p_{2n} = 2n.AC, \quad p_{2n}^2 = 4n^2.\overline{AC}^2;$$

donc

$$p_{2n}^2 = 4n^2.2R\left[R - \sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}\right]$$

ou

$$p_{2n}^2 = 4nR\left[2nR - \sqrt{4n^2R^2 - p_n^2}\right].$$

365. Si l'on prend pour unité de longueur le diamètre du cercle, c'est-à-dire si l'on fait 2R égal à 1, on a :

$$p_{2n}^2 = 2n\left[n - \sqrt{n^2 - p_n^2}\right].$$

* **366**. Remarque. On peut généraliser comme il suit le problème précédent : *Connaissant les côtés des différents polygones réguliers de* m *côtés que l'on peut inscrire dans un cercle de rayon* R, *calculer les côtés des différents polygones réguliers de* 2m *côtés que l'on peut inscrire dans le même cercle.*

On distinguera deux cas selon que m est pair ou impair.

1° m pair. Le nombre m étant pair, tout nombre premier avec $2m$ est premier avec m, et, réciproquement, tout nombre premier avec m est premier avec $2m$. Il en résulte que les nombres premiers avec $2m$ et moindres que la moitié de $2m$ sont les nombres premiers avec m et moindres que m, et que, par suite, le nombre des polygones réguliers de $2m$ côtés est double du nombre des polygones réguliers de m côtés.

A chaque polygone régulier de m côtés correspondent deux polygones réguliers de $2m$ côtés. En effet, soit n un nombre premier avec m et moindre que m; le nombre $m-n$ est aussi premier avec m et moindre que m. Aux deux nombres n et $m-n$ correspond un seul polygone régulier de m côtés, et le côté de ce polygone peut être représenté indistinctement par C_m^n, ou par C_m^{m-n}; mais, à ces deux nombres correspondent deux polygones réguliers différents de $2m$ côtés, et les côtés de ces polygones sont représentés l'un par C_{2m}^n, et l'autre par C_{2m}^{m-n}.

Cela posé, soit n le plus petit des deux nombres n et $m-n$; ce nombre est moindre que la moitié de m. Soit AB, le côté C_m^n d'un polygone régulier obtenu en joignant de n en n les points de division de la circonférence partagée en m parties égales. Ce côté sous-tend un arc ACB, moindre qu'une demi-circonférence, contenant n divisions de la circonférence partagée en m parties égales, et un arc AC'B, supérieur à une demi-circonférence, contenant $m-n$ des mêmes divisions. Si l'on mène le diamètre CC' perpendiculaire à AB, et les cordes AC, AC', la première sous-tend un arc AC contenant n divisions de la circonférence partagée en $2m$ parties égales, la seconde sous-tend un arc AC' contenant $m-n$ divisions de la circonférence partagée en $2m$ parties égales. On a donc :

$$C_m^n = AB, \qquad C_{2m}^n = AC, \qquad C_{2m}^{m-n} = AC'.$$

Or, si I est le point de rencontre du côté AB et du diamètre CC', on a :

$$\overline{AC}^2 = CC' \times CI = 2R(R - OI) = 2R(R - \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2})$$
$$\overline{AC'}^2 = CC' \times C'I = 2R(R + OI) = 2R(R + \sqrt{R^2 - \overline{AI}^2})$$

et, comme AI, moitié de AB, est égal à $\frac{1}{2}C_m^n$, on a :

$$C_{2m}^n = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(C_m^n)^2}\right)$$
$$C_{2m}^{m-n} = 2R\left(R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(C_m^n)^2}\right).$$

2° m impair. Dans ce cas, tout nombre premier avec $2m$ est encore premier avec m, mais, parmi les nombres premiers avec m, ceux-là seuls qui sont impairs sont premiers avec $2m$. Pour former la suite des nombres premiers avec $2m$ et inférieurs à la moitié de $2m$, il faut donc prendre, dans la suite des nombres premiers avec m et moindres que m, tous les nombres impairs, et ceux-là seulement. Or, soit n un nombre premier avec m et inférieur à m; le nombre $m-n$ est aussi premier avec m et moindre que m; mais, de ces deux nombres dont la somme est le nombre impair m, l'un est impair, l'autre est pair, et, par suite, un, et un seul, est premier avec m. Il suit de là que, quand m est impair, le nombre des polygones réguliers de $2m$ côtés est égal au nombre des polygones réguliers de m côtés. Au polygone régulier de m côtés, dont le côté est C_m^n, correspond un polygone régulier de $2m$ côtés, et un seul; et le côté de ce polygone est C_{2m}^n si n est impair, tandis qu'il est C_{2m}^{m-n} si n est pair. Si on suppose le nombre n, qui est premier avec m, inférieur à la moitié de m, on a encore, comme ci-dessus,

$$C_{2m}^n = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(C_m^n)^2}\right)$$

et

$$C_{2m}^{m-n} = 2R\left(R + \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}(C_m^n)^2}\right).$$

Si n est impair, c'est la première formule qui donne le côté du seul polygone régulier de $2m$ côtés qui correspond au polygone régulier de m côtés considéré. La seconde formule donnerait alors le côté du polygone régulier de m côtés, obtenu en joignant de $\frac{m-n}{2}$ en $\frac{m-n}{2}$ les points de division de la circonférence partagée en m parties égales.

Si n est pair, c'est la seconde formule qui donne le côté du seul polygone régulier de $2m$ côtés qui correspond au polygone régulier de m côtés considéré; la première formule, dans ce cas, donnerait le côté du polygone régulier de m côtés, obtenu en joignant de $\frac{n}{2}$ en $\frac{n}{2}$ les points de division de la circonférence partagée en m parties égales.

Problème.

367. *Connaissant le périmètre p_n d'un polygone régulier convexe de* n *côtés inscrit dans un cercle de rayon* R, *calculer le périmètre* P_n *d'un polygone régulier convexe du même nombre de côtés, circonscrit au même cercle.*

Le rapport des périmètres de ces polygones est égal au rapport de leurs apothèmes OC et OI (*fig.* 285); donc on a :

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{OC}{OI} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{\overline{AB}^2}{4}}}.$$

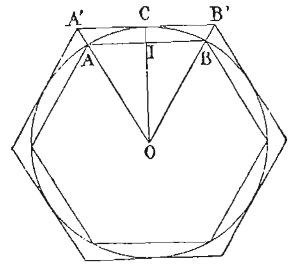


Fig. 285.

Or

$$p_n^2 = n^2\overline{AB}^2,$$

d'où

$$\overline{AB}^2 = \frac{p_n^2}{n^2}.$$

Donc

$$\frac{P_n}{p_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{p_n^2}{4n^2}}} = \frac{2nR}{\sqrt{4n^2R^2 - p_n^2}}.$$

et

$$P_n = p_n \times \frac{2nR}{\sqrt{4n^2R^2 - p_n^2}}.$$

368. Si l'on prend pour unité de longueur le diamètre du cercle, c'est-à-dire si l'on fait 2R égal à 1, on a :

$$P_n = p_n \times \frac{n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}.$$

Problème.

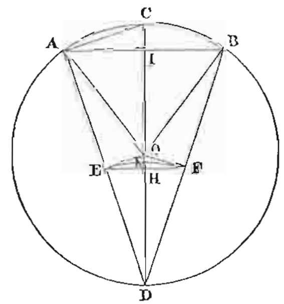


Fig. 286.

369. *Étant donnés le rayon* r *et l'apothème* a *d'un polygone régulier convexe, calculer le rayon* r' *et l'apothème* a' *d'un polygone régulier convexe, de même périmètre et d'un nombre double de côtés.*

Quand deux polygones ont le même périmètre, on dit qu'ils sont *isopérimètres*.

Soit AB le côté d'un polygone régulier, et soit O le centre du cercle circonscrit (*fig.* 286). Le rayon r du polygone est OA, et l'apothème a est la perpendiculaire OI menée du point O à AB. Figurons le cercle circonscrit, et prolongeons la droite OI jusqu'aux points C et D, où elle rencontre la circonférence de ce cercle. Du centre O, abaissons sur les cordes AD et BD les perpendiculaires OE et OF, et menons la droite EF. Comme les points E et F sont les milieux des cordes AD et BD, la droite EF est parallèle à AB, et égale à la moitié de AB. Cette droite EF est donc le côté d'un polygone régulier isopérimètre au premier, et d'un nombre double de côtés. D'autre part, l'angle EDF, ou l'angle inscrit ABD, est la moitié de l'angle au centre AOB qui comprend entre ses côtés le même arc AB. Donc l'angle EDF est l'angle au centre du nouveau polygone, et par conséquent, le cercle circonscrit à ce polygone est égal au cercle décrit du point D comme centre, avec DE pour rayon. Le rayon r' du second polygone est donc DE, et son apothème a' est DH.

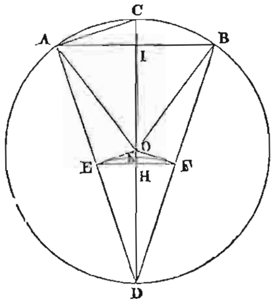


Fig. 286 bis.

La droite EF étant parallèle à AB, on a :

$$\frac{DH}{DI}=\frac{DE}{DA}=\frac{1}{2}.$$

Or, DH est a', $DI=DO+OI$, ou $r+a$; donc

$$a'=\frac{a+r}{2}.$$

D'autre part, le triangle OED étant rectangle en E, on a :

$$\overline{DE}^2=DO.DH$$

et comme DE est r', on a :

$$r'^2=ra'$$

d'où

$$r'=\sqrt{ra'}.$$

370. Remarque. Dans le triangle rectangle DEO, le côté DE est plus petit que l'hypoténuse DO, donc r' est plus petit que r. D'autre part, DH est égal à HI, et, par conséquent, plus grand

que OI ; donc a' est plus grand que a. Ainsi, quand on passe d'un polygone régulier à un nouveau polygone régulier isopérimètre d'un nombre double de côtés, le rayon diminue et l'apothème augmente. Pour cette double raison, la différence entre le rayon et l'apothème diminue, et $r'-a'$ est moindre que $r-a$.

On peut même démontrer que la différence $r'-a'$ est moindre que le quart de la différence $r-a$. En effet, soit K le point où la circonférence du cercle circonscrit au second polygone rencontre OD ; la différence $r'-a'$ est égale à HK. Or, les arcs KE, KF étant egaux, les angles FEK, KEO sont égaux, et la droite EK est bissectrice de l'angle FEO. Donc on a :

$$\frac{HK}{KO}=\frac{EH}{EO};$$

et comme la perpendiculaire EH est moindre que l'oblique EO, HK est plus petit que KO. Il en résulte que HK est moindre que la moitié de HO. Mais, à cause de la similitude des triangles HEO et IAC, le rapport de OH à CI est égal au rapport de EH à AI, ou à $\frac{1}{2}$. Donc HK est moindre que le quart de CI, et on a :

$$r'-a'<\frac{1}{4}\left(r-a\right).$$

Théorème.

***371.** *Si l'on désigne par* P *et* p *les périmètres de deux polygones réguliers convexes de* n *côtés, le premier circonscrit, le second inscrit à un cercle de rayon* R, *et par* P′ *et* p′ *les périmètres de deux polygones réguliers convexes de* 2n *côtés, le premier inscrit, le second circonscrit au même cercle, les périmètres* P′ *et* p′ *se déduisent des périmètres* P *et* p *par les formules*

$$\frac{1}{P'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{P}\right),\qquad \frac{1}{p'}=\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}.$$

Soient en effet (*fig.* 287) AB et A′B′ les côtés des polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit au cercle de rayon OA; AC et DE les côtés des polygones réguliers de $2n$ côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit au même cercle.

On a :

$$p = nAB = 2nAI, \qquad P = nA'B' = 2nA'C.$$
$$p' = 2nAC = 4nCH, \qquad P' = 2nDE = 4nCD.$$

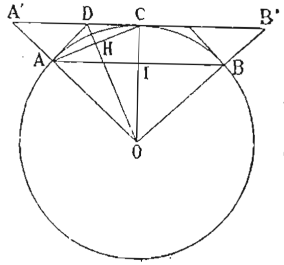


Fig. 287.

D'autre part, le rapport $\frac{p}{P}$ est égal à $\frac{OA}{OA'}$, ou à $\frac{OC}{OA'}$, ou encore à $\frac{CD}{DA'}$, attendu que la droite OD est bissectrice de l'angle COA'. On a donc:

$$\frac{p}{P}=\frac{CD}{DA'}$$

d'où

$$\frac{p}{CD}=\frac{P}{DA'}=\frac{p+P}{CA'}$$

ou

$$\frac{p}{p+P}=\frac{CD}{CA'}=\frac{4nCD}{4nCA'}=\frac{P'}{2P},$$

d'où encore

$$Pp=\frac{1}{2}P'\left(p+P\right),$$

et si l'on divise les deux membres par PpP',

$$\frac{1}{P'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{p}\right);$$

c'est la première formule à démontrer.

Pour établir la seconde, remarquons que le rapport $\frac{p}{p'}$ est égal à $\frac{AI}{AC}$, ou, les triangles AIC, CDH étant semblables, à $\frac{CH}{CD}$: On a donc

$$\frac{p}{p'}=\frac{CH}{CD}=\frac{4nCH}{4nCD}=\frac{p'}{P'},$$

d'où

$$p'^2 = pP'$$

et par conséquent

$$\frac{1}{p'}=\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}.$$

***372**. On voit ainsi que $\frac{1}{P'}$ et $\frac{1}{p'}$ se déduisent de $\frac{1}{P}$ et $\frac{1}{p}$ comme, dans le problème précédent, a' et r' se déduisent de a et r.

Il en résulte naturellement que, de même que $r'-a'$ est moindre que $\frac{r-a}{4}$, $\frac{1}{p'}-\frac{1}{P'}$ est moindre que $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{P}\right)$.

§ XIV. — Longueur d'un arc de cercle.

373. Une ligne droite étant applicable sur une ligne droite, on a pu dire dans quel cas deux portions de droites ont des longueurs égales, définir la somme des longueurs de plusieurs portions de droites, et arriver ainsi à la notion du rapport des longueurs de deux portions de droite.

On a pu procéder de même façon relativement à des arcs d'un même cercle, ou de cercles de même rayon, parce que de tels arcs sont applicables l'un sur l'autre. Mais un arc de cercle n'est applicable ni sur une ligne droite, ni sur un arc de cercle de rayon différent. On ne peut donc comparer un arc de cercle ni à une portion de ligne droite, ni à un arc de cercle de rayon différent. C'est pourquoi il est nécessaire de définir le sens attaché au mot *longueur* appliqué soit à un arc de cercle, soit à la circonférence entière de ce cercle.

374. *On appelle longueur d'un arc de cercle* AR *la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne polygonale régulière convexe*, ABC... R *inscrite dans cet arc, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne.*

On définit de la même façon la longueur d'une circonférence de cercle, la ligne polygonale ouverte ABC... R étant remplacée par une ligne polygonale fermée ABC... A.

Pour justifier la définition précédente, il faut démontrer que la limite en question existe, et qu'elle est indépendante du nombre des côtés de la première ligne polygonale considérée.

Supposons que l'on ait inscrit dans l'arc AR une ligne polygonale régulière convexe, ABC...R (*fig.* 288), et imaginons que l'on double une première fois, puis une seconde fois, et ainsi de suite indéfiniment le nombre des côtés. Les périmètres des lignes polygonales ainsi formées vont sans cesse en augmentant, car chaque fois que l'on double le nombre des côtés, on remplace chacun des côtés, AB par exemple, par une ligne brisée plus grande, AMB ; mais ils restent inférieurs à une longueur déterminée. Pour le démontrer, il suffit de les comparer au périmètre d'une ligne polygonale quelconque, mais fixe, circonscrite à l'arc AR. Choisissons par exemple pour ligne polygonale circonscrite la ligne APQR. Chaque ligne inscrite est une ligne convexe, qui est enveloppée par la ligne APQR, et qui a les mêmes extrémités A et R; donc (70) son périmètre est moindre que celui de la ligne enveloppante APQR. De ce que les périmètres des lignes inscrites augmentent sans cesse et restent inférieurs au périmètre fixe de la ligne APQR, il résulte que ces périmètres tendent vers une limite.

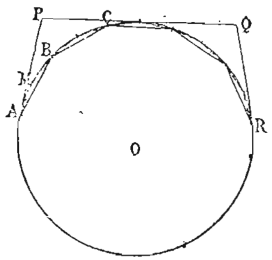


Fig. 288.

Pour montrer que cette limite est indépendante du nombre des côtés de la première ligne polygonale inscrite, à chaque ligne polygonale régulière inscrite ABC...R, nous ferons correspondre une ligne brisée circonscrite AA'B'... R formée par les tangentes menées à l'arc aux points A et R et aux autres sommets de la ligne inscrite (*fig.* 289), et nous ferons d'abord voir que les périmètres de ces lignes circonscrites tendent vers une limite, et que cette limite est la même que celle des périmètres des lignes inscrites. En effet, lorsqu'on double le nombre des côtés, le périmètre de la ligne circonscrite diminue, car à une ligne brisée telle que P'A'Q' on substitue une ligne droite plus courte P'Q'. D'autre part, les périmètres de toutes les lignes

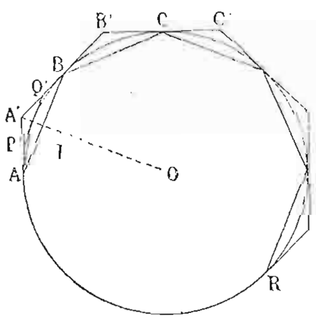


Fig. 289.

circonscrites surpassent le périmètre d'une ligne convexe inscrite ABC... R, puisque les lignes circonscrites l'enveloppent et ont les mêmes extrémités A et R. Les périmètres des lignes circonscrites allant toujours en diminuant, et restant supérieurs au périmètre fixe de la ligne ABC... R, tendent nécessairement vers une limite. Cette limite est la même que celle des périmètres des lignes polygonales inscrites. En effet, considérons deux lignes polygonales correspondantes, l'une inscrite ABC...R, l'autre circonscrite AA'B'C'... R. Soit n le nombre des côtés de la ligne inscrite, le périmètre p de cette ligne est égal à nAB ; le périmètre P de la ligne circonscrite se compose de $n - 1$ côtés égaux à A'B', et de deux côtés égaux chacun à la moitié de A'B', et est ainsi égal à nA'B'. On a donc :

$$\frac{P}{p} = \frac{A'B'}{AB};$$

mais $\frac{A'B'}{AB}$, ou $\frac{AA'}{AI}$, est égal à $\frac{OA}{OI}$; donc on a :

$$\frac{P}{p} = \frac{OA}{OI},$$

d'où

$$P - p = p \times \frac{OA - OI}{OI}.$$

Or, si l'on double indéfiniment le nombre des côtés, p et OI restent finis ; OA — OI qui est moindre que A'I, et *à fortiori* moindre que AA', tend vers zéro ; donc P — p tend vers zéro. Donc la limite des périmètres des lignes circonscrites est la même que celle des périmètres des lignes inscrites correspondantes.

Cela posé, soit L la limite commune des périmètres des lignes polygonales inscrites et des lignes correspondantes circonscrites, quand le nombre des côtés de la première ligne inscrite est n. Soit L' la limite commune des périmètres des lignes polygonales inscrites et des lignes correspondantes circonscrites, quand le nombre des côtés de la première ligne inscrite est un autre nombre n'. La limite L des périmètres des lignes inscrites dans le premier cas est inférieure à tous les périmètres des lignes circonscrites dans le second ; elle est donc inférieure, ou au plus égale à leur limite L' ; donc L ne peut surpasser L'. D'autre part, L est aussi la limite des périmètres des lignes circonscrites dans le premier cas, et, à ce titre, elle est supérieure à tous les périmètres des lignes inscrites dans le second ; elle est donc supérieure ou égale à leur limite L' ; donc L ne peut être moindre que L'. Puisque la limite L ne peut être ni supérieure ni inférieure à la limite L', on a nécessairement $L = L'$.

La même démonstration peut être appliquée lorsqu'il s'agit d'une circonférence au lieu d'un arc. Dans ce cas, à une ligne polygonale régulière inscrite on fait correspondre une ligne polygonale régulière semblable circonscrite.

§ XV. — Rapport de la circonférence au diamètre.

Théorème.

375. *Le rapport de deux circonférences est égal au rapport de leurs rayons.*

Dans deux circonférences inscrivons des polygones réguliers d'un même nombre de côtés ; le rapport des périmètres de ces polygones est égal au rapport des rayons de ces circonférences. Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés des polygones inscrits, les périmètres de ces polygones tendent respectivement vers des limites qui sont les longueurs des deux circonférences ; donc le rapport des deux circonférences est aussi le rapport des rayons.

376. Corollaire I. *Le rapport de deux arcs de cercle semblables est égal au rapport des rayons.*

Soient AB, A'B' (*fig.* 290), deux arcs de cercles semblables, c'est-à-dire tels que les angles au centre AOB, A'O'B' soient égaux. Désignons par R et R' les rayons des deux cercles, et par C et C' leurs circonférences. On a :

$$\frac{\text{arc AB}}{C} = \frac{\text{AOB}}{4^{\text{dr}}}$$

$$\frac{\text{arc A'B'}}{C'} = \frac{\text{A'O'B'}}{4^{\text{dr}}},$$

d'où

$$\frac{\text{arc AB}}{C} = \frac{\text{arc A'B'}}{C'},$$

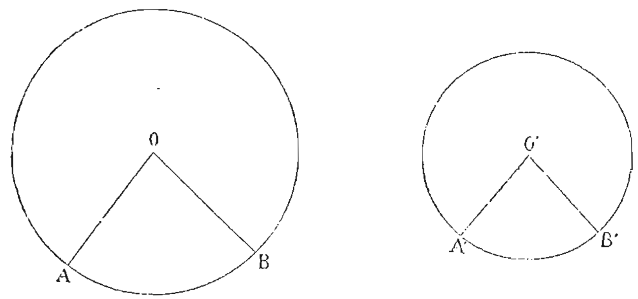


Fig. 290.

d'où encore

$$\frac{\text{acrA B}}{\text{arc A'B'}} = \frac{C}{C'};$$

or

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'};$$

donc

$$\frac{\text{arc A B}}{\text{arc A'B'}} = \frac{R}{R'}.$$

377. Corollaire II. *Le rapport d'une circonférence à son diamètre est un nombre constant.*

En effet, soient C et C' les longueurs de deux circonférences, R et R' leurs rayons ; on a :

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'}$$

et, par suite,

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'};$$

donc le rapport $\frac{C}{2R}$ est constant.

Ce nombre constant est incommensurable ; on le désigne ordinairement par la lettre π. En appelant C la longueur d'une circonférence de rayon R, on a :

$$C = 2\pi R.$$

Si l'on suppose le nombre π connu, la formule précédente permet de calculer la longueur d'une circonférence quand on connaît le rayon, et le rayon quand on connaît la longueur de la circonférence.

378. Dans un cercle de rayon R, la longueur d'un arc d'un degré est égale à $\frac{\pi R}{180}$, par conséquent la longueur d'un arc de n^o est $\frac{n\pi R}{180}$. Si on appelle l la longueur de cet arc, on a

$$l = \frac{n\pi R}{180},$$

formule qui permet de calculer une des trois quantités l, n, R quand on connaît les deux autres.

Problème.

379. *Calculer le rapport de la circonférence au diamètre.*

Pour calculer le rapport

$$\pi = \frac{C}{2R}$$

on peut, ou se donner le rayon R et chercher à déterminer une valeur approchée de C, ou inversement, se donner C et chercher à déterminer une valeur approchée de R. De là deux méthodes différentes : la première est appelée *méthode des périmètres ;* la seconde, *méthode des isopérimètres.*

MÉTHODE DES PÉRIMÈTRES.

380. Si l'on prend pour unité de longueur le diamètre d'un cercle, le rapport de la circonférence au diamètre est le nombre qui mesure la longueur de la circonférence. Le problème revient donc à chercher la longueur d'une circonférence dont le diamètre est égal à 1.

On calcule d'abord le périmètre d'un certain polygone régulier inscrit dans cette circonférence, par exemple le périmètre d'un carré ou d'un hexagone régulier ; puis, à l'aide de la formule du n° 364, on calcule successivement les périmètres des polygones réguliers inscrits d'un nombre de côtés de deux en deux fois plus grand. Ces périmètres augmentent sans cesse et approchent indéfiniment de la circonférence. Si l'on s'arrête après un certain nombre d'opérations, au périmètre p_n d'un polygone régulier inscrit de n côtés, le nombre p_n est une valeur approchée par défaut du nombre π. Pour évaluer l'approximation du résultat obtenu, il suffit de calculer par la formule du n° 366 le périmètre P_n du polygone régulier, du même nombre de côtés, circonscrit au même cercle. La longueur de la circonférence étant, par définition, comprise entre les périmètres p_n et P_n de ces deux polygones, les nombres p_n et P_n représentent, l'un par défaut, l'autre par excès, la longueur de la circonférence avec une erreur moindre que leur différence $P_n - p_n$.

Si l'on fait les calculs en partant de l'hexagone régulier inscrit, le côté de ce polygone étant $\frac{1}{2}$, le périmètre est 3, et on a :

$$\begin{aligned}
p_6^2 &= 9 \\
p_{12}^2 &= 12\left[6 - \sqrt{6^2 - p_6^2}\right] = 9{,}64612\ldots \\
p_{24}^2 &= 24\left[12 - \sqrt{12^2 - p_{12}^2}\right] = 9{,}81531\ldots \\
p_{48}^2 &= 48\left[24 - \sqrt{24^2 - p_{24}^2}\right] = 9{,}85552\ldots \\
p_{96}^2 &= 96\left[48 - \sqrt{48^2 - p_{48}^2}\right] = 9{,}86607\ldots \\
p_{192}^2 &= 192\left[96 - \sqrt{96^2 - p_{96}^2}\right] = 9{,}86871\ldots
\end{aligned}$$

Arrêtons-nous à p_{192} ;

$$p_{192} = \sqrt{9{,}86871\ldots} = 3{,}14145\ldots$$

D'autre part

$$P_{192} = p_{192} \times \frac{192}{\sqrt{192^2 - p_{192}^2}} = 3{,}14194\ldots$$

La différence $P_{192} - p_{192}$ étant égale à 0,00049..., le nombre 3,14145 est une valeur de π approchée, par défaut, à moins d'un demi-millième; et, par conséquent, 3,141 est une valeur de π approchée par défaut, à moins d'un millième.

MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES.

381. Au lieu de se donner le rayon et de calculer la circonférence, on se donne la longueur de la circonférence et on se propose de calculer le rayon. Si l'on prend la circonférence égale à 2, on a $\pi = \frac{1}{R}$, et le problème consiste à trouver le rayon R d'une circonférence dont la longueur est égale à 2, puis à prendre l'inverse de ce rayon.

Imaginons un polygone régulier dont le périmètre est 2, et supposons qu'on ait calculé l'apothème a et le rayon r de ce polygone, c'est-à-dire le rayon d'une circonférence inscrite et le rayon d'une circonférence circonscrite à ce polygone. Ces circonférences sont évidemment l'une plus petite, l'autre plus grande que le périmètre du polygone, et par conséquent a et r sont deux valeurs approchées de R, la première par défaut, la seconde par excès ; et, l'erreur commise en prenant à la place de R soit a, soit r, est moindre que la différence $r - a$. Si maintenant, à l'aide des formules établies au n° 368, nous calculons l'apothème a_1 et le rayon r_1 d'un second polygone régulier de même périmètre et d'un nombre double de côtés, puis l'apothème a_2 et le rayon r_2 d'un troisième polygone régulier de même périmètre et d'un nombre de côtés double du précédent, et ainsi de suite, nous obtiendrons deux séries de valeurs qui s'approchent indéfiniment de R, et finissent par en différer d'aussi peu que l'on veut. En effet, les apothèmes $a, a_1, a_2, \ldots$ vont en augmentant, tout en restant moindres que R, et par conséquent sont des valeurs de plus en plus approchées de R, par défaut ; les rayons $r, r_1, r_2, \ldots$, vont toujours en diminuant, tout en restant plus grands que R, et par conséquent sont des valeurs de plus en plus approchées de R, par excès ; enfin la différence $r_1 - a_1$ est plus petite que $\frac{r-a}{4}$; la différence $r_2 - a_2$, qui est plus petite que $\frac{r_1 - a_1}{4}$, est, à plus forte raison, plus petite que $\frac{r-a}{4^2}$, et ainsi de suite ; de sorte que la différence $r_n - a_n$ est moindre que $\frac{r-a}{4^n}$. Donc, en continuant ainsi, on pourra obtenir deux valeurs approchées de R, l'une par défaut, l'autre par excès, différant entre elles d'une quantité aussi petite que l'on voudra. Il suit de là que, par ce procédé, on pourra calculer R, et par suite $\frac{1}{R}$ ou π, avec telle approximation que l'on voudra.

382. Supposons, par exemple, que l'on parte du carré. Le périmètre étant 2, le côté est $\frac{1}{2}$, et par suite l'apothème a est $\frac{1}{4}$, le rayon r est $\frac{\sqrt{2}}{4}$. On calculera ensuite l'apothème a_1 et le rayon r_1 de l'octogone régulier isopérimètre, avec les formules $a_1 = \frac{a+r}{2}$, et $r_1 = \sqrt{a_1 r}$; puis on calculera l'apothème a_2 et le rayon r_2 du polygone régulier isopérimètre de 16 côtés, et ainsi de suite. En conservant les 6 premières décimales, on obtiendra les résultats suivants :

Nombre des côtés.	Apothèmes.	Rayons.
4	$a = 0{,}250000$	$r = 0{,}353553$
8	$a_1 = 0{,}301777$	$r_1 = 0{,}326641$
16	$a_2 = 0{,}314209$	$r_2 = 0{,}320364$
32	$a_3 = 0{,}317287$	$r_3 = 0{,}318822$
64	$a_4 = 0{,}318054$	$r_4 = 0{,}318438$
128	$a_5 = 0{,}318246$	$r_5 = 0{,}318342$.

La différence $r_5 - a_5$ est 0,000096 ; elle est moindre que

0,0001, et par conséquent le nombre 0,3183, compris entre a_5 et r_5, diffère de R, ou de $\frac{1}{\pi}$, de moins d'un dix-millième. En prenant l'inverse $\frac{1}{0,3183}$, on obtient 3,142 pour la valeur de π, à moins d'un millième.

Si l'on remarque que $a = \frac{1}{4}$ est la moyenne arithmétique entre 0 et $\frac{1}{2}$, et que $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est la moyenne géométrique entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on arrive à la règle suivante donnée par Schwab :

Le nombre $\frac{1}{\pi}$ est la limite vers laquelle tendent les termes de la suite

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad a \quad r \quad a_1 \quad r_1 \ldots$$

dans laquelle les termes, à partir du troisième, se forment en prenant alternativement la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique entre les deux termes qui précèdent le terme à former.

L'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre en valeur absolue que la différence entre ce terme et le précédent.

***383.** Remarque. Si l'on fait usage du théorème du n° 370 la méthode des périmètres conduit aux mêmes calculs que celle des isopérimètres.

Soient, en effet, P et p, P_1 et p_1, P_2 et p_2..., les périmètres des polygones réguliers, de n, $2n$, $4n$,.., côtés, les premiers circonscrits, les seconds inscrits à un cercle de rayon R.

Les termes de la suite

$$\frac{1}{P}, \quad \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{P_1}, \quad \frac{1}{p_1}, \quad \frac{1}{P_2}, \quad \frac{1}{p_2}, \ldots$$

se déduisent les uns des autres de la même façon que les termes de la suite

$$a, \ r, \quad a_1, \ r_1, \quad a_2, \ r_2, \ldots;$$

ils ont pour limite $\frac{1}{C}$, ou $\frac{1}{2\pi R}$, et si l'on prend $R = \frac{1}{2}$, ils ont pour limite $\frac{1}{\pi}$.

Si l'on fait $n = 4$, on a $\frac{1}{P} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{p} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, et par conséquent on retrouve, pour la détermination de $\frac{1}{\pi}$, la règle de Schwab.

384. D'autres méthodes plus expéditives, qui sont du ressort des mathématiques supérieures, ont permis de calculer le nombre π avec une très grande approximation. On a calculé jusqu'à 500 décimales. Les valeurs de π et de $\frac{1}{\pi}$ avec 9 décimales sont :

$$\pi = 3,\ 141\ 592\ 653\ldots$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,\ 318\ 309\ 886\ldots$$

Le premier géomètre qui ait déterminé le rapport de la circonférence au diamètre est Archimède : il a trouvé que ce rapport est compris entre :

$$3 + \frac{10}{71} \quad \text{et} \quad 3 + \frac{10}{70} \quad \text{ou} \quad \frac{22}{7}.$$

La fraction simple $\frac{22}{7}$, qui est égale à 3,1428..., est un peu trop forte, et l'erreur est moindre que deux millièmes. Adrien Métius, géomètre hollandais du seizième siècle, a donné la valeur $\frac{355}{113}$ qui, convertie en décimales, est égale à 3,1415920..., et par conséquent représente le nombre π avec six chiffres décimaux exacts. La composition de cette fraction est facile à retenir : si l'on écrit deux fois de suite les trois premiers nombres impairs, on forme le nombre 11 33 55; les trois premiers chiffres forment le dénominateur 113 du rapport, et les trois derniers forment le numérateur 355.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Paris et Carcassonne sont sur un même méridien ; la latitude de Paris est 48° 50′ 49″ ; la latitude de Carcassonne est 43° 12′ 54″. Quelle est la distance de Paris à Carcassonne ?*

La différence des latitudes étant 5° 37′ 55″, ou 20275″, le problème revient à calculer la longueur d'un arc de méridien terrestre de 20275″. Or, le quart du méridien ayant une longueur de 10 000 000 mètres, un arc d'une seconde du méridien a une longueur égale à $\frac{10\,000\,000^{m}}{90\times60\times60}$, ou $\frac{10\,000^{m}}{324}$, ou $\frac{10^{kilom}}{324}$. Donc un arc de méridien de 20275″ a une longueur égale à $\frac{202\,750^{kil}}{324}$ ou égale à $625^{kil},771$.

II. *Calculer la longueur d'un arc de 23° 42′ 37″ appartenant à une circonférence dont le rayon est 235 millimètres.*

La longueur d'une demi-circonférence dont le rayon est 235^{mil} est $\pi\times235$; la longueur d'un arc d'une seconde, sur cette circonférence, est, en prenant le millimètre pour unité,

$$\frac{\pi\times235}{180\times60\times60}=\frac{\pi\times235}{648\,000}.$$

Donc la longueur d'un arc de 23° 42′ 37″ ou de 85 357″ est égale à $\frac{\pi\times235\times85\,357}{648\,000}$, ou à $\frac{\pi\times20\,058\,895}{648\,000}$.

En effectuant les calculs indiqués, on trouve, pour la longueur de l'arc, 97 millimètres, à un millimètre près.

III. *Calculer, à moins d'un millimètre, le rayon d'une circonférence dont la longueur est $4^{m},627$.*

En appelant R le rayon cherché, on a :

$$2\pi R = 4,627,$$

d'où :

$$R=\frac{4,627}{2\pi}=\frac{2,3135}{\pi}=0^{m},736,$$

à moins d'un millimètre.

IV. *Calculer, à moins d'un millimètre le rayon R d'un cercle tel que, sur ce cercle, un arc de 85° 21′ 42″ ait une longueur égale à $0^{m},452$.*

Un arc de 85° 21′ 42″ vaut 307302″ ; donc on a :

$$\frac{\pi R\times307\,302}{648\,000}=0,452$$

d'où :

$$R=\frac{0,452\times648\,000}{\pi\times307\,302}=\frac{292\,896}{\pi\times307\,302}=0^{m},303,$$

à moins d'un millimètre.

EXERCICES SUR LE LIVRE III.

1. Si par un point quelconque on mène à un cercle deux sécantes rectangulaires, la somme des carrés des segments de ces sécantes compris entre le point donné et les points de rencontre des sécantes avec le cercle est constante.

2. Soient AR et BS les tangentes aux extrémités A et B d'un diamètre d'un cercle, P et Q les points où une tangente quelconque à ce même cercle rencontre les droites AR et BS ; démontrer que le produit AP × BQ est constant.

3. Deux cercles étant tangents extérieurement, la portion d'une tangente commune extérieure, limitée aux points de contact, est moyenne proportionnelle entre les diamètres des deux cercles.

4. Soit ABC un triangle quelconque : 1° avec les trois médianes de ce triangle on peut construire un triangle A′B′C′ ; 2° si avec les trois médianes du triangle A′B′C′ on construit un triangle A″B″C″, ce dernier triangle est semblable au premier.

5. Lieu des points dont le rapport des distances à deux droites données est constant et égal à un rapport donné.

6. Lieu des points d'où deux cercles donnés sont vus sous des angles égaux.

7. Soient deux droites OR, OS, un point A sur OR, un point B sur OS ; on mène une parallèle à AB qui rencontre OR en A′ et OS en B′ ; on demande le lieu décrit par le point de concours des droites AB′, BA′, quand la droite A′B′ se déplace parallèlement à AB.

8. Soient A, B, C, trois points en ligne droite ; on demande le lieu des points de contact des tangentes menées par le point A aux cercles passant par les points B et C.

9. Mener un cercle tangent à deux droites données et à un cercle donné.

10. Trouver sur une droite donnée un point équidistant d'un point donné et d'une droite donnée.

11. Trouver sur une droite donnée un point tel, que la somme ou la différence de ses distances à deux points donnés soit égale à une longueur donnée.

12. Construire un triangle, connaissant deux angles et la somme ou la différence de deux côtés.

13. Construire un triangle isocèle, connaissant l'angle au sommet et la somme de la base et de la hauteur.

14. Construire un triangle isocèle, connaissant le rayon du cercle circonscrit et la somme de la base et de la hauteur.

15. Construire un triangle, connaissant les longueurs des parallèles aux côtés du triangle menées par le centre du cercle inscrit et limitées aux côtés du triangle.

16. Même problème, en remplaçant le centre du cercle inscrit par le centre d'un des cercles exinscrits.

17. Construire un triangle, connaissant les longueurs de deux côtés et la longueur de la bissectrice de l'angle formé par ces deux côtés.

18. Construire un triangle, connaissant un angle, la hauteur et la médiane qui correspondent au côté opposé à cet angle.

19. Quelles conditions doit remplir un quadrilatère ABCD pour que tous les rectangles circonscrits à ce quadrilatère soient semblables à un rectangle donné? — Quand ces conditions sont remplies, quel est le lieu du point de concours des diagonales de ces rectangles?

20. La somme des carrés des côtés d'un triangle est égale à trois fois la somme des carrés des distances du point de concours des médianes aux sommets du triangle.

21. Construire un trapèze, connaissant les longueurs des deux côtés non parallèles et des deux diagonales.

22. Tracer un cercle tel que les tangentes issues de trois points donnés aient des longueurs données.

23. Tracer un cercle qui soit vu de trois points donnés A, B, C, sous des angles donnés α, β, γ.

24. Construire un carré dont les côtés passent par quatre points donnés.

25. Lieu des points d'où deux cercles donnés sont vus sous des angles donnés.

26. Lieu d'un point P tel que la droite MN, qui passe par les pieds M et N des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés d'un angle AOB, soit parallèle à une direction donnée.

27. Lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une direction donnée à tous les cercles qui sont tangents à une droite donnée en un même point de cette droite.

28. Lieu des points de contact des tangentes menées parallèlement à une direction donnée à tous les cercles tangents à deux droites données.

29. Soient deux circonférences tangentes au point A; on mène dans l'une une corde AB, et dans l'autre une corde AC perpendiculaire à AB; on mène la droite BC, et on abaisse du point A une perpendiculaire AM sur BC; lieu du point M quand on fait tourner la corde AB autour du point A.

30. On considère les trois cercles exinscrits à un triangle ABC, et on mène la corde de contact de chacun de ces cercles avec les deux côtés du triangle qu'il touche sur leurs prolongements. Soit A'B'C' le triangle formé par ces trois cordes. Le point A' étant sur les cordes de contact des cercles situés dans les angles B et C, le point B' sur les cordes des contacts des cercles situés dans les angles A et C, et le point C' sur la corde des contacts des cercles situés dans les angles A et B.

1° Évaluer les angles du triangle A'B'C' connaissant les angles du triangle ABC.

2° Démontrer que les droites AA', BB', CC' sont respectivement perpendiculaires aux côtés BC, AC, AB, du triangle ABC.

31. Un triangle rectangle se meut dans un plan de façon que les extrémités de l'hypoténuse glissent sur deux droites rectangulaires : lieu du troisième sommet du triangle.

32. Soit ABC un triangle ; ce triangle se déplace et se déforme en restant semblable à lui-même; le point A reste fixe, le point B décrit une droite donnée, quel est le lieu du point C ?

33. Même problème en remplaçant la droite donnée par une circonférence donnée.

34. Soient O et O', deux circonférences tangentes, A le point de contact. On mène par le point A, dans la première circonférence la corde AB, dans la seconde la corde AB' telle que le rapport $\frac{AB}{AB'}$ soit égal à un rapport donné. On abaisse des points O et O' sur AB et sur AB' des perpendiculaires qui se coupent en M. Lieu du point M quand le point B parcourt la première circonférence.

35. On donne deux cercles qui se coupent au point A (*fig.* 291); par ce point on mène une sécante AB qui rencontre les deux cercles au points B et C; si les deux segments AB et AC de la sécante sont dans le même sens, on prend sur la droite AB, dans le sens AB, une longueur AM égale à la somme des deux segments AB et AC; si les deux segments AB' et AC' sont de sens contraires, on prend sur la sécante AB', dans le sens du plus grand segment, une longueur AM' égale à la différence des segments AB' et AC' : trouver le lieu décrit par le point M quand la sécante AB tourne autour du point A.

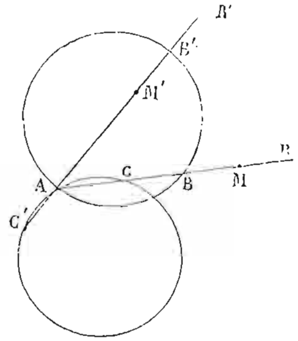


Fig. 291.

36. Même problème lorsqu'on donne un nombre quelconque de cercles se coupant au point A.

37. Étant donnés une circonférence et un point P, on mène par le point P deux sécantes PAA', PBB'; on circonscrit une circonférence au triangle PAB et une circonférence au triangle PA'B'; ces deux circonférences se coupent au point P et en un point M. On demande le lieu décrit par le point M quand l'une des deux sécantes restant fixe, l'autre tourne autour du point P.

38. Soit un triangle isocèle ABC; lieu d'un point situé dans l'angle A opposé à la base BC du triangle, et tel que sa distance à la base BC soit moyenne géométrique entre ses distances aux deux autres côtés du triangle.

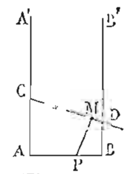


Fig. 292.

39. On donne deux droites AA' et BB' perpendiculaires à la droite AB, et sur AB, entre les points A et B, un point fixe P (*fig.* 292). On prend sur AA' un point quelconque C, et sur BB', un point D tel que le produit $AC \times BD$ soit égal au produit $PA \times PB$: lieu de la projection du point P sur la droite CD quand le point C parcourt la droite AA'. — Le lieu est indépendant de la position du point P sur AB.

40. On donne deux droites parallèles MN et PQ, et sur la première un point A (*fig.* 293). Par le point A on mène une sécante quelconque AB qui rencontre la droite PQ au point B; on mène la perpendiculaire BC à la sécante AB, et au point C, où elle rencontre la droite MN; on fait un angle ACD double de l'angle BAC; enfin on mène la perpendiculaire AI sur CD; lieu du point I (Concours général).

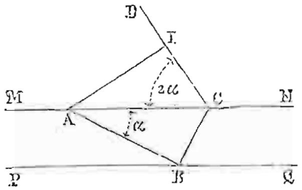


Fig. 293.

41. On donne une circonférence O et un point fixe A; on construit un rectangle ABDC qui a un sommet au point A, et deux sommets B et C sur la circonférence O : on demande le lieu du sommet D.

42. Soit ABCDEF un hexagone régulier (*fig.* 294); par le centre O de cet hexagone on mène une droite quelconque qui rencontre la diagonale AC en P et la diagonale AE en Q; on mène les droites BP et FQ : on demande le lieu décrit par le point de rencontre M de ces droites BP et FQ quand la droite PQ tourne autour du point O.

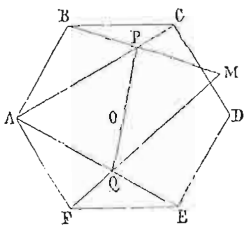


Fig. 294.

43. On donne deux cercles O et O′, et on mène deux cercles O″ et O‴ tangents entre eux, et tangents à la fois aux deux cercles donnés. On demande le lieu du point de contact des cercles O″ et O‴.

44. Soit ABC un triangle isocèle; par le sommet A du triangle on mène une droite quelconque AK extérieure au triangle, et sur cette droite on détermine le point M tel que la somme des distances BM et CM soit la plus petite possible. On demande la ligne décrite par le point M quand la droite AK tourne autour du point A.

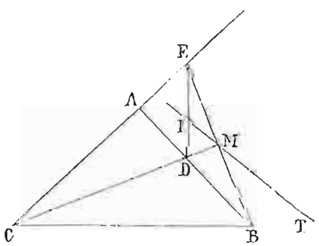


Fig. 295.

45. Soit ABC (*fig.* 295) un triangle isocèle rectangle en A; on mène une droite DE perpendiculaire à l'hypoténuse BC, et l'on joint les sommets B et C aux points E et D où cette droite rencontre les côtés de l'angle droit. Les droites BE et CD ainsi construites se coupent au point M. On demande la ligne décrite par le point M quand la droite DE se déplace en restant perpendiculaire à BC. — On mène la tangente MT au point M à la ligne décrite par le point M; cette tangente rencontre la droite DE en un point I. On demande le lieu du point I quand la droite DE se déplace.

46. On donne deux rectangles, et on demande le lieu des points tels que la somme des carrés des distances de chacun de ces points aux sommets du premier rectangle soit égale à la somme des carrés des distances du même point aux sommets du second.

47. Soit I le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC; on prend les points A′, B′, C′, respectivement symétriques du point I par rapport aux droites BC, CA, AB.

1° Démontrer que les deux triangles ABC, A′B′C′ sont inscrits dans un même cercle;

2° Évaluer les angles du triangle A′B′C′ en supposant connus les angles du triangle ABC;

3° On désigne par M et N les points où la droite AB rencontre les droites B′C′ et C′A′, par P et Q les points où la droite BC rencontre les droites C′A′ et A′B′, enfin par R et S les points où la droite CA rencontre les droites A′B′ et B′C′ : démontrer que les trois droites MQ, NR, PS, passent par un même point.

Dans chaque question on examinera le cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus, et le cas où l'un de ces angles, A par exemple, est obtus.

48. On donne deux droites parallèles RR′ et SS′, et une droite perpendiculaire à ces parallèles qui rencontre RR′ en A et SS′ en B; sur RR′ à partir du point A, on porte une longueur arbitraire AA′, et sur SS′, à partir du point B, et du même côté par rapport à AB, on porte une longueur BB′ telle que le produit des longueurs AA′, BB′ soit égal au carré de AB; on mène les droites AB′ et BA′ et on désigne par M leur point de rencontre; on mène par le point M une perpendiculaire à AB, et on désigne par P et par Q les points où elle rencontre les droites AB, A′B′; enfin on désigne par C le point de rencontre des droites AB, A′B′.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand on fait varier la longueur AA′;

2° Démontrer que le point M est le milieu de PQ;

3° Démontrer que la tangente au point M à la courbe que décrit ce point passe par le point de concours C des droites AB, A′B′.

49. Deux diagonales d'un pentagone régulier dont le point de rencontre n'est pas un sommet du pentagone se partagent mutuellement en moyenne et extrême raison.

50. La somme des distances d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un polygone régulier de m côtés aux côtés de ce polygone est égale à m fois l'apothème du polygone. — Examiner le cas où le point donné est extérieur au polygone.

51. Par le sommet B d'un triangle ABC on mène la bissectrice de l'angle B, la perpendiculaire à la base AC, et une parallèle à cette base; par le point D, milieu de AC, on mène une perpendiculaire à la bissectrice qui rencontre la bissectrice en H, la perpendiculaire à la base en E, la parallèle à la base en F. Démontrer que l'on a :

$$\overline{AD}^2 = DH \times EF.$$

52. Le produit des distances d'un point d'une circonférence à deux côtés opposés d'un quadrilatère inscrit dans cette circonférence est égal au produit des distances du même point aux deux autres côtés du quadrilatère.

53. Soit C un point de la bissectrice OC d'un angle ROR′; du point C comme centre on décrit une circonférence qui coupe les côtés de l'angle aux points A, B, A′, B′. Soit I la projection du point C sur la droite qui joint les points A et B′ situés de part et d'autre de OC, mais non symétriques par rapport à OC. On demande le lieu décrit par le point I quand le rayon du cercle varie.

54. Conservant les mêmes données que dans le problème précédent, on mène les tangentes au cercle aux points A et B′ : soit P leur point de rencontre. On demande le lieu décrit par le point P quand le rayon du cercle varie.

55. Étant donnés les quatre côtés d'un quadrilatère inscriptible, construire ce quadrilatère.

56. Si, sur les trois côtés d'un triangle ABC, extérieurement à ce triangle, on construit les triangles équilatéraux A_1BC, B_1AC, C_1AB, les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont égales, se coupent en un même point O, et les angles qu'elles forment deux à deux sont des angles de 60°. — Si l'on répète sur le triangle $A_1B_1C_1$ les mêmes constructions, on obtient un nouveau triangle $A_2B_2C_2$; les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent au même point O; les quatre points A, O, A_1, A_2 sont en ligne droite; le point A est le milieu de A_1A_2.

57. Construire un triangle, connaissant les sommets A′, B′, C′, des triangles équilatéraux A′BC, B′AC, C′AB construits sur les côtés du triangle, en dehors du triangle.

58. On donne un cercle S, un triangle inscrit ABC, et deux points P et P′ sur la circonférence du cercle. On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées des points P et P′ sur les trois côtés du triangle sont respectivement sur deux droites D et D′.

1° Démontrer que le point de rencontre M des droites D et D′ décrit un cercle S′, quand le sommet C du triangle se meut sur la circonférence du cercle S, les points A, B, P, P′ restant fixes.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S′, les points A et B restant fixes, et les points P et P′ se déplaçant sur la circonférence S de telle sorte que l'arc PP′ conserve une longueur constante.

59. Soit un triangle équilatéral ABC; démontrer que le lieu des points M tels que

$$MA = MB + MC$$

est le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde BC dans le cercle circonscrit au triangle ABC.

60. Appliquer les formules du n° 336 à la résolution des problèmes suivants :

Du côté connu R de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, déduire les côtés des polygones réguliers de 12, puis de 24 côtés inscrits dans le même cercle.

Des côtés connus $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$, des décagones réguliers inscrits dans un cercle de rayon R, déduire les côtés des pentagones réguliers inscrits dans le même cercle, et les côtés des polygones réguliers de 20 côtés inscrits dans le même cercle.

61. On donne sur un cercle O deux points A, A′, et on considère tous les couples de deux cercles C et C′ tangents entre eux et tangents au cercle O, le premier en A, le second en A′. On demande le lieu du centre d'homothétie directe et le lieu du centre d'homothétie inverse des deux cercles C et C′ d'un même couple. (Concours général, 1884, *math. élém.*)

62. On donne trois points O, A, B, non en ligne droite. On porte sur les droites AO, BO, à partir des points A et B, et du même côté de AB, les longueurs AC, BD égales à h. On porte aussi, sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB, des longueurs AC′, BD′, égales à h'.

1° Démontrer que la perpendiculaire à CD, en son milieu, passe par un point fixe ω, quand h varie. Démontrer de même que la perpendiculaire à C′D′, en son milieu, passe par un point fixe ω', quand h' varie.

2° Construire la droite CD, connaissant sa longueur. — Même question pour la droite C′D′.

3° Démontrer qu'à une droite CD correspond une droite C′D′ parallèle à CD, et une seule. Déterminer ce système de deux droites parallèles de façon qu'elles soient égales entre elles (Concours général, 1885, *math. élém.*).

63. Cercle des neuf points. Dans tout triangle, les milieux des trois côtés, les pieds des hauteurs, et les milieux des droites qui joignent les sommets au point de concours des trois hauteurs sont neuf points situés sur un cercle. — Le centre de ce cercle est au milieu de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs. — Le rayon de ce cercle est la moitié du rayon du cercle circonscrit.

64. Soient O′, O″, O‴ les centres des trois cercles exinscrits à un triangle ABC, le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle des neuf points du triangle O′ O″ O‴.

65. Soient O, O′, O″, O‴, les centres des quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle : les milieux des six distances de ces points pris deux à deux sont situés sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.

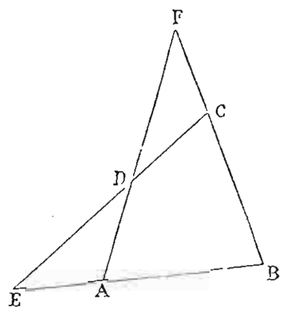


Fig. 296.

66. Soit un quadrilatère ABCD (*fig.* 296), et soient E le point de concours des côtés opposés AB et CD, F le point de concours des côtés opposés AD et BC; on peut considérer dans la figure les quatre triangles ABF, BCE, ADE, DCF.

1° Les centres des cercles circonscrits à ces quatre triangles sont sur une même circonférence.

2° Parmi les quatre triangles considérés, il en est trois qui ont un côté sur le côté AB du quadrilatère ou sur son prolongement. Si, dans chacun de ces triangles, on mène la droite qui joint le sommet opposé au côté placé sur la droite AB au centre du cercle circonscrit à ce triangle, on forme trois droites qui concourent en un même point I.

3° Si l'on répète les mêmes constructions en prenant successivement les trois autres côtés BC, CD, DA du quadrilatère, on construit trois nouveaux points analogues aux points I. Les quatre points ainsi obtenus sont sur une même circonférence, et cette circonférence est aussi celle qui contient les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles ABF, BCE, ADE et DCF.

COMPLÉMENT DU LIVRE III.

§ I. Convention sur le signe d'un segment de droite. — § II. Transversales. — § III. Puissance d'un point par rapport à un cercle. — Axe radical de deux cercles. — Centre radical de trois cercles. — § IV. Division harmonique. — Faisceaux harmoniques. — Pôle et polaire par rapport à un cercle. — Figures polaires réciproques. — § V. Figures inverses ou transformées par rayons vecteurs réciproques. — Applications. — Exemples de théorèmes établis par la considération de figures inverses.

§ I. Convention sur le signe d'un segment de droite.

385. La distance qui sépare deux points A et B peut être considérée comme parcourue soit par un mobile qui va de A vers B, soit par un mobile qui va de B vers A ; cette distance est appelée *segment de droite*, et l'on distingue les deux cas l'un de l'autre en écrivant, segment AB quand le mobile va de A vers B, et segment BA, quand le mobile va de B vers A. Le point A est l'*origine* du segment AB, le point B en est l'*extrémité*.

Lorsqu'on a à considérer sur une droite indéfinie plusieurs segments, on convient de mettre le signe + devant le nombre qui mesure la longueur de tout segment parcouru dans un sens déterminé, et le signe — devant le nombre qui est la mesure de tout segment parcouru en sens contraire. Le nombre, positif ou négatif, ainsi obtenu est ce que nous appellerons la mesure du segment ; et nous dirons, par extension, qu'un segment est lui-même positif, ou négatif, selon que sa mesure est un nombre positif, ou un nombre négatif.

Pour éviter toute confusion, nous représentons par AB le nombre absolu qui est la mesure de la distance des deux points A et B, et par $\overline{AB}$ le nombre, positif ou négatif, qui est la mesure du segment AB.

Convenons par exemple de mettre le signe + devant le nombre qui mesure tout segment de la droite X'X parcourue dans le sens X'X. Si la distance des deux points A et B de cette droite est 5 mètres, et si le sens AB est le même que le sens X'X, nous écrirons :

$$AB = 5 \qquad \overline{AB} = +5 \qquad \overline{BA} = -5.$$

Dans tous les cas, quelle que soit la disposition des points A et B sur la droite, et quelle que soit la distance qui les sépare, nous aurons :

$$AB = BA \qquad \text{et} \qquad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

386. Comme conséquence de ces conventions, nous remarquerons que, M étant un point quelconque de la droite indéfinie qui passe par les deux points A et B, on a toujours :

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}.$$

En effet, supposons d'abord AB dans le sens X'X, de sorte que

$$AB = \overline{AB}.$$

Il y a trois cas à distinguer selon que le point M est entre A et B, ou sur BX, ou sur AX' (*fig.* 297).

Fig. 297.

1° Le point M est entre A et B, soit en M_1 ; on a :

$$AB = AM_1 + M_1B;$$

or, dans ce cas :

$$AB = \overline{AB} \qquad AM_1 = \overline{AM_1} \qquad M_1B = \overline{M_1B},$$

donc :

$$\overline{AB} = \overline{AM_1} + \overline{M_1B}.$$

2° Le point M est sur BX, soit en M_2 ; on a :

$$AB = AM_2 - M_2B;$$

or, dans ce cas :

$$AB = \overline{AB}, \qquad AM_2 = \overline{AM_2}, \qquad -M_2B = \overline{M_2B},$$

donc :

$$\overline{AB} = \overline{AM_2} + \overline{M_2B}.$$

3° Le point M est sur AX', soit en M_3 ; on a :

$$AB = -AM_3 + M_3B;$$

or, dans ce cas :

$$AB = \overline{AB}, \qquad -AM_3 = \overline{AM_3}, \qquad M_3B = \overline{M_3B},$$

donc :

$$\overline{AB} = \overline{AM_3} + \overline{M_3B}.$$

Si, au contraire, le sens AB est opposé au sens X'X, on a :

$$AB = -\overline{AB},$$

et, en examinant de la même façon les trois cas qui peuvent se présenter, on verra que l'on a toujours :

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}.$$

387. Cette remarque permet de regarder un segment quelconque $\overline{AB}$ d'une droite comme la différence de deux segments ayant tous deux pour origine un même point quelconque O pris sur cette droite, et pour extrémité l'un le point B, l'autre le point A.

On a, en effet, quelle que soit la position du point O pris sur la droite qui passe par les points A et B :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB};$$

or :

$$\overline{AO} = -\overline{OA},$$

donc :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

388. Si l'on tient compte de cette convention sur le signe de chaque segment d'une droite, il faut modifier comme il suit le théorème du n° 229 :

Sur la droite indéfinie qui passe par deux points A *et* B, *il y a un point* M *tel que le rapport* $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ *soit égal à un rapport donné* λ, *et il n'y en a qu'un. Ce point est entre* A *et* B *si* λ *est négatif ; il est en dehors de la portion* AB *de la droite indéfinie si* λ *est positif ; sur le prolongement dans le sens* AB *si* λ *est plus grand que* 1, *et sur le prolongement dans le sens* BA *si* λ *est plus petit que* 1.

Les théorèmes des nos 275 et 276 peuvent être réunis en un seul. Si D est la projection du sommet C du triangle ABC sur AB, que l'angle A soit aigu ou obtus, on a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AD},$$

car les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ sont de même signe quand l'angle A est aigu, et de signes contraires quand l'angle A est obtus.

§ II. Transversales.

389. On appelle *transversale* une droite qui coupe les trois côtés d'un triangle supposés prolongés indéfiniment. Désignons par A', B', C', les points de rencontre d'une transversale avec les côtés BC, AC, AB, d'un triangle ABC ; chacun de ces points sera pris pour origine de deux segments terminés aux sommets du triangle situés sur le même côté. Ces deux segments seront de signes contraires ou de même signe, selon que le point de rencontre du côté et de la transversale est sur le côté même ou sur son prolongement. Il en résulte que le rapport des deux segments d'un même côté est négatif dans le premier cas, positif dans le second.

Théorème.

390. *Les six segments déterminés sur les côtés d'un triangle* ABC *par une transversale qui rencontre les côtés du triangle aux points* A', B', C' (*fig.* 298), *sont liés par la relation :*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Les points de rencontre d'une transversale avec les côtés d'un triangle sont, ou tous les trois sur les prolongements des côtés, ou deux sur les côtés mêmes et un sur un côté prolongé. Donc les trois rapports considérés sont, ou tous trois positifs, ou deux négatifs et un

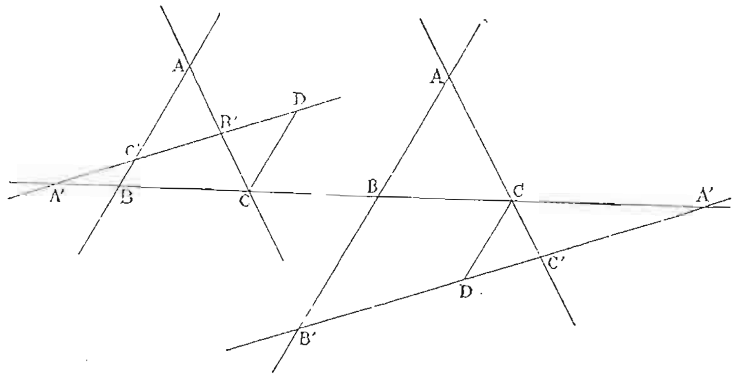


Fig. 298.

positif ; dans un cas comme dans l'autre, le produit des trois rapports est positif. Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit donc de démontrer que le produit des valeurs absolues des trois rapports est égal à 1, c'est-à-dire que l'on a, entre les nombres absolus qui mesurent les longueurs des segments, la relation :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

A cet effet, menons par le point C une parallèle à AB, et soit D le point où elle rencontre la transversale. Les triangles A'BC', A'CD étant semblables, ainsi que les triangles AB'C', CB'D, on a les relations :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{CD}$$

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CD}{C'A}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'B}{CD} \times \frac{CD}{C'A} = \frac{C'B}{C'A},$$

d'où enfin

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

391. Remarque. Il est bon de remarquer la loi de formation du produit constant

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}};$$

les deux segments qui entrent dans un même rapport appartiennent au même côté du triangle, et chacun a pour origine le point de rencontre de ce côté avec la transversale. On prend un quelconque de ces rapports pour premier facteur du produit, et on compose les autres de façon que la même lettre soit à la fois la seconde lettre du dénominateur d'un facteur et du numérateur du facteur suivant. Si, par exemple, on prend pour premier facteur du produit le rapport $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$, on écrira la relation comme il suit :

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = 1.$$

392. Réciproquement. *Si trois points* A', B', C', *pris sur les côtés* BC, AC, AB *du triangle* ABC, *ou sur leurs prolongements, sont tels que l'on a la relation*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1,$$

les trois points A', B', C' *sont en ligne droite.*

En effet, soit A'_1 le point où la droite B'C' coupe le côté BC ou son prolongement. On a, d'après le théorème précédent :

$$\frac{\overline{A'_1B}}{\overline{A'_1C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1;$$

or, par hypothèse, on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1,$$

et, de la comparaison de ces deux égalités on déduit :

$$\frac{\overline{A'_1B}}{\overline{A'_1C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}},$$

ce qui prouve (388) que le point A'_1 se confond avec le point A'. Donc les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

Application. Ce théorème permet de démontrer que dans certaines figures trois points sont en ligne droite.

Comme premier exemple, nous démontrerons le théorème suivant :

Théorème.

393. *Soient* A', B', C' *les points de rencontre des côtés* BC, AC, AB *du triangle* ABC *avec la bissectrice de l'angle extérieur en* A, *la bissectrice de l'angle* B, *et la bissectrice de l'angle* C : *les trois points* A', B', C' *sont en ligne droite* (*fig.* 299).

Il suffit de démontrer que l'on a :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

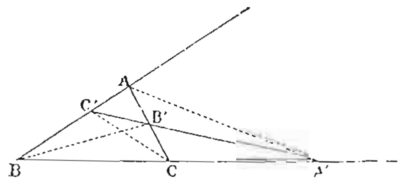


Fig. 299.

Le point A' étant sur le prolongement d'un côté, et les points B' et C' sur les côtés mêmes, le premier rapport est positif, les deux suivants négatifs, donc le produit est positif. Il suffit donc de démontrer que la valeur absolue de ce produit est égale à 1, c'est-à-dire qu'entre les nombres absolus qui sont les mesures des six segments, on a la relation :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Or, on a :

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}$$
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{AB}$$
$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AC}{BC}$$

ou, en multipliant membre à membre et en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB \times BC \times AC}{AC \times AB \times BC} = 1.$$

Comme second exemple, nous démontrerons, sur l'hexagone inscrit dans un cercle, le théorème suivant dû à Pascal :

Théorème.

394. *Étant donné un hexagone* ABCDEF, *convexe ou non convexe, inscrit dans un cercle, si, supposant le contour de cet hexagone parcouru par un mobile dans un sens déterminé, on numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *les côtés consécutifs, dans l'ordre où ils sont parcourus, les points de concours des droites* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6, *sont en ligne droite* (*fig.* 300).

Soit ABCDEF l'hexagone donné, AB le côté 1, BC le côté 2, et ainsi de suite. Pour démontrer le théorème de Pascal, considérons le triangle GHK formé par les côtés non consécutifs, 1, 3, 5, et appliquons trois fois successivement le théorème (390) à ce triangle, en le consi-

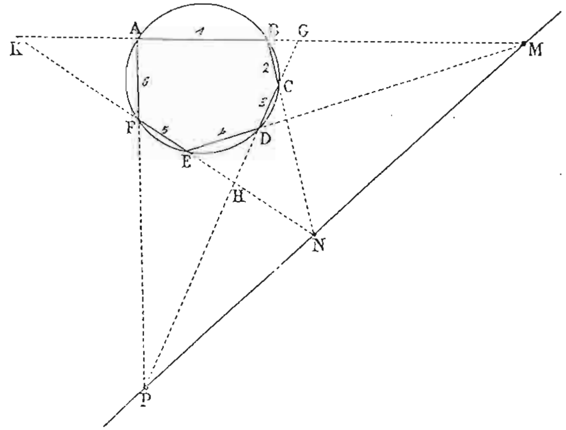


Fig. 300.

dérant comme coupé par chacune des transversales 2, 4 et 6. Nous aurons les trois relations :

$$\frac{\overline{NH}}{\overline{NK}}\cdot\frac{\overline{BK}}{\overline{BG}}\cdot\frac{\overline{CG}}{\overline{CH}}=1$$

$$\frac{\overline{MK}}{\overline{MG}}\cdot\frac{\overline{DG}}{\overline{DH}}\cdot\frac{\overline{EH}}{\overline{EK}}=1$$

$$\frac{\overline{PG}}{\overline{PH}}\cdot\frac{\overline{FH}}{\overline{FK}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{AG}}=1$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\overline{NH}}{\overline{NK}}\cdot\frac{\overline{MK}}{\overline{MG}}\cdot\frac{\overline{PG}}{\overline{PH}}\cdot\frac{\overline{BK}}{\overline{BG}}\cdot\frac{\overline{CG}}{\overline{CH}}\cdot\frac{\overline{DG}}{\overline{DH}}\cdot\frac{\overline{EH}}{\overline{EK}}\cdot\frac{\overline{FH}}{\overline{FK}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{AG}}=1;$$

or, on a (292) :

$$\overline{CG}\,.\,\overline{DG}=\overline{BG}\,.\,\overline{AG}$$
$$\overline{EH}\,.\,\overline{FH}=\overline{CH}\,.\,\overline{DH}$$
$$\overline{BK}\,.\,\overline{AK}=\overline{EK}\,.\,\overline{FK};$$

donc l'égalité précédente se réduit à l'égalité :

$$\frac{\overline{NH}}{\overline{NK}}\cdot\frac{\overline{MK}}{\overline{MG}}\cdot\frac{\overline{PG}}{\overline{PH}}=1,$$

laquelle exprime que les points M, N, P, pris sur les côtés du triangle GHK sont en ligne droite.

Il faut remarquer que la démonstration ne suppose pas que l'hexagone soit convexe.

Théorème.

395. *Les droites menées d'un point aux trois sommets d'un triangle*

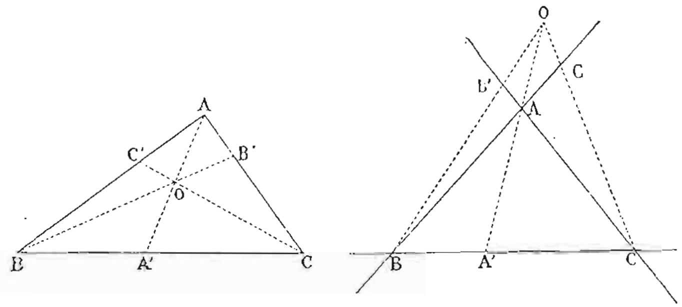


Fig. 301.

(*fig.* 301) *rencontrent les trois côtés du triangle ou leurs prolongements, en des points* A′, B′, C′, *tels que l'on a la relation*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1.$$

En effet, en appliquant le théorème précédent au triangle ABA′ coupé par la transversale COC′, on a :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}}\times\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$$

et, en appliquant le même théorème au triangle A'AC coupé par la transversale BOB', on a :

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = 1.$$

En multipliant membre à membre ces deux relations, et en supprimant les facteurs communs, on a :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} \times \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

ou enfin, en remplaçant $\overline{CB}$ par $-\overline{BC}$, $\overline{BA'}$ par $-\overline{A'B}$, $\overline{CA'}$ par $-\overline{A'C}$,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

396. Réciproquement. *Si trois points* A', B', C' *pris sur les côtés d'un triangle, ou sur leurs prolongements, sont tels que la relation*

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

est vérifiée, les trois droites AA', BB', CC', *concourent en un même point.*

Soit en effet O le point de concours des deux droites BB' et CC', menons la droite OA, et soit A'_1 le point où elle rencontre le côté BC. On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{\overline{A'_1B}}{\overline{A'_1C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

et, par hypothèse,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Or, de la comparaison de ces deux égalités il résulte l'égalité

$$\frac{\overline{A'_1B}}{\overline{A'_1C}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}},$$

laquelle prouve (388) que le point A'_1 se confond avec le point A'. Donc la droite AA' passe par le point de concours des droites BB' et CC'.

397. Cette réciproque permet de démontrer que dans certaines figures trois droites sont concourantes.

Exemple. Les trois droites menées de chaque sommet d'un triangle

au point de contact du côté opposé avec un cercle tangent aux trois côtés du triangle concourent en un même point.

Soient A', B', C' les points de contact d'un cercle tangent aux côtés BC, AC, AB, du triangle ABC (*fig.* 300); pour démontrer que les droites AA', BB', CC' sont concourantes, il suffit de démontrer que l'on a la relation :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Or, si le cercle est inscrit, les trois points A', B', C' sont sur les côtés mêmes du triangle, et par conséquent les trois rapports sont négatifs; leur produit est négatif. Si le cercle est exinscrit, un des points de contact est sur un côté même, et les deux autres sur des

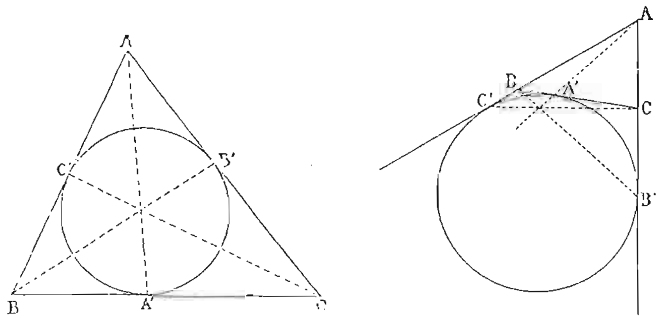


Fig 302.

côtés prolongés; un rapport est négatif, deux sont positifs, le produit des trois est négatif. Il suffit donc, dans un cas comme dans l'autre, de démontrer que l'on a :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Or, cette relation est évidente, puisque l'on a :

$$A'B = C'B \qquad B'C = A'C \qquad C'A = B'A.$$

On peut de même se servir de cette proposition, pour démontrer à nouveau les théorèmes des nos 132, 133, 136.

§ III. Puissance d'un point par rapport a un cercle. — Axe radical de deux cercles. — Centre radical de trois cercles.

398. On appelle *puissance* d'un point A par rapport à un cercle O le produit constant des segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, d'une sécante quelconque menée par le point A, qui ont pour origine le point A et pour extrémités les points B et C où la sécante rencontre la circonférence (*fig.* 303). Les deux segments AB, AC sont de même sens si le point A est extérieur au cercle, ils sont de sens contraires si le point A est intérieur au cercle; par conséquent, quel que soit le sens choisi pour le sens des segments positifs sur la sécante considérée, les segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ sont de même signe quand le point A est extérieur, et de signes contraires quand ce point est intérieur au cercle. Donc, la *puissance* $\overline{AB} \times \overline{AC}$ du point A, par rapport au cercle O, est positive ou négative selon que ce point est extérieur ou intérieur au cercle.

Si le point A est sur la circonférence du cercle, l'un des deux segments est nul, la puissance du point est nulle.

Soit d la distance AO du point A au centre du cercle, et r le rayon

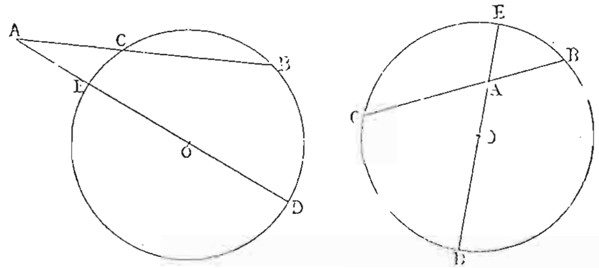


Fig. 303.

du cercle; la puissance du point A par rapport au cercle est $d^2 - r^2$. En effet menons le diamètre passant par le point A, et soit D l'extrémité de ce diamètre situé sur le prolongement de AO, E l'autre extrémité. La puissance du point A, par rapport au cercle O, est

$$\overline{AD} \times \overline{AE}$$

ou (386)

$$(\overline{AO} + \overline{OD})\ (\overline{AO} + \overline{OE})$$

ou, en remarquant que $\overline{OE} = - \overline{OD}$,

$$(\overline{AO} + \overline{OD})\ (\overline{AO} - \overline{OD});$$

or, si nous convenons de compter, sur la droite AO, les segments positivement dans le sens AO, et négativement en sens contraire, nous aurons :

$$\overline{AO} = d, \qquad \overline{OD} = r$$

et, par suite,

$$(\overline{AO} + \overline{OD})\ (\overline{AO} - \overline{OD}) = (d + r)\ (d - r) = d^2 - r^2.$$

Cette démonstration s'applique, que le point soit extérieur, ou qu'il soit intérieur au cercle.

On voit par là que tous les points situés sur la circonférence d'un cercle de rayon d, concentrique au cercle O, ont la même puissance, $d^2 - r^2$. Cette puissance augmente si d augmente, et diminue si d diminue; donc *le lieu des points qui, par rapport au cercle* O, *ont une même puissance donnée, est la circonférence d'un cercle concentrique au cercle* O. Cette puissance donnée peut prendre toutes les valeurs de $-r^2$ à $+\infty$.

Théorème.

399. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles est une droite perpendiculaire à la ligne des centres. Cette droite est appelée axe radical des deux cercles.*

En effet, soient r et r' les rayons des deux cercles, et soient d et d'

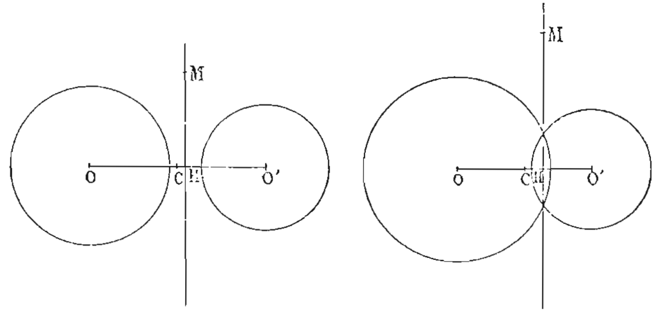


Fig. 304.

les distances d'un point M aux centres de ces cercles (*fig.* 304). Le puissances du point M, par rapport aux deux cercles, sont respectivement $d^2 - r^2$, et $d'^2 - r'^2$. La condition nécessaire et suffisante pour que le point M soit un point du lieu est que l'on ait

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$$

ou

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2.$$

Donc le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux cercles est aussi le lieu des points tels que la différence des carrés des distances de chacun d'eux aux centres des deux cercles soit constante et égale à la différence des carrés des rayons de ces cercles. Or on sait (285) que ce dernier lieu est une perpendiculaire à la ligne des centres.

Soit C le milieu de OO', et soit r le plus grand des deux rayons, l'axe radical rencontre la ligne des centres sur le prolongement de OC, en un point H tel que (285)

$$CH = \frac{r^2 - r'^2}{2OO'}.$$

400. Il suit de là que, quel que soit celui des deux rayons r et r' qui est positivement le plus grand, le point H est à une distance du point O, comptée dans le sens OO' et négativement dans le sens contraire, et donnée par la formule

$$OH=\frac{OO'}{2}+\frac{r^2-r'^2}{2OO'}.$$

Si les deux cercles sont concentriques, la distance OH est infinie, et l'axe radical est rejeté à l'infini.

401. Remarque I. Si les cercles se coupent, chaque point commun aux deux cercles est de puissance nulle par rapport à chaque cercle, et par conséquent appartient au lieu. Donc l'axe radical de deux cercles qui se coupent est la droite qui passe par les points communs à ces cercles.

Si les cercles sont tangents, l'axe radical est la tangente commune (*fig.* 305).

Si les deux cercles n'ont aucun point commun, l'axe radical ne rencontre aucun des deux cercles; car, tout point de l'un des cercles

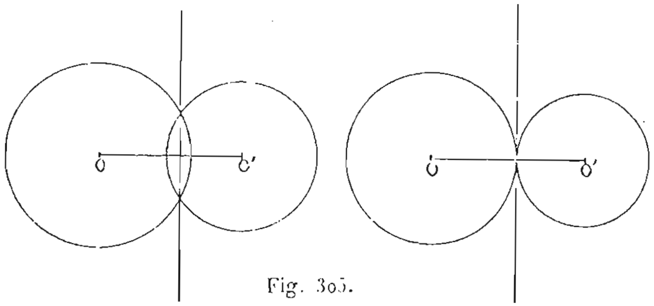


Fig. 305.

a une puissance nulle par rapport à ce cercle, et une puissance différente de zéro par rapport à l'autre.

Si l'un des cercles est intérieur à l'autre, le point H, où l'axe radical coupe la ligne des centres, est sur le prolongement de la ligne des centres dans le sens suivi par un mobile allant du centre du plus grand cercle au centre du plus petit.

Si les deux cercles sont extérieurs, le point H est entre les deux cercles. En effet, on sait déjà (400) qu'il est, par rapport au milieu C de la droite OO', du côté du plus petit cercle O', et qu'il ne peut pas être à l'intérieur ni du cercle O, ni du cercle O'. Il suffit donc de démontrer que CH est moindre que CO', c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{r^2-r'^2}{2OO'}<\frac{OO'}{2}$$

ou

$$\overline{OO'}^2>r^2-r'^2,$$

inégalité évidente, puisque OO' est plus grand que $r+r'$.

402. Remarque II. Soient A et A' les points de contact d'une tangente commune aux deux cercles (*fig.* 306) et soit I le milieu de AA'; ce point a même puissance, $\overline{IA}^2=\overline{IA'}^2$, par rapport aux deux cercles, et par conséquent appartient à leur axe radical. On peut donc construire l'axe radical de deux cercles qui ne se rencontrent pas en joignant les milieux de deux tangentes communes à ces cercles.

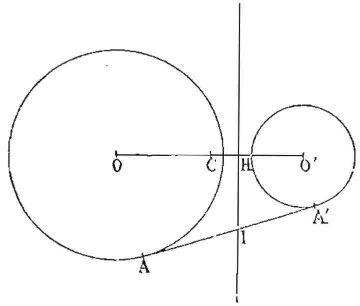


Fig. 306.

403. Remarque III. Si, sur la tangente en un point quelconque A du premier cercle, et sur la tangente en un point quelconque A' du second cercle, on porte des longueurs égales AB, A'B', les cercles décrits de O et de O' comme centres, avec OB, et O'B' pour rayons (*fig.* 307), ont même axe radical que les cercles donnés.

En effet, on a :

$$\overline{OB}^2=r^2+\overline{AB}^2$$
$$\overline{O'B'}^2=r'^2+\overline{AB}^2,$$

d'où

$$\overline{OB}^2-\overline{O'B'}^2=r^2-r'^2.$$

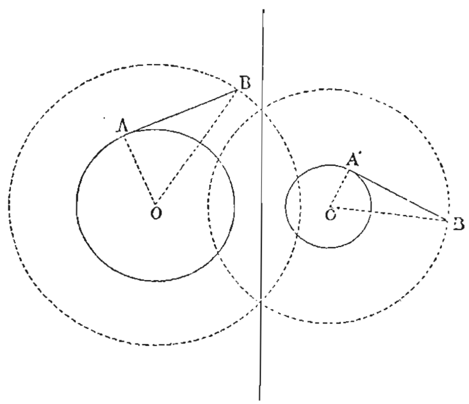


Fig. 307.

On peut toujours choisir la longueur AB telle que les seconds cercles se coupent, et par conséquent ramener ainsi la recherche de l'axe radical de deux cercles qui ne se coupent pas à la recherche de l'axe radical de deux cercles qui se coupent.

Théorème.

404. *Les axes radicaux de trois cercles considérés deux à deux sont trois droites concourantes. Le point de concours est appelé centre radical des trois cercles.*

Soient O, O', O'' les trois cercles considérés, I le point de concours de l'axe radical des cercles O, O', et des cercles O, O'' (*fig.* 308). Le point I a même puissance par rapport aux cercles O et O', et aussi par rapport aux cercles O et O''; donc il a même puissance par rapport aux cercles O' et O'', et par suite il appartient aussi à l'axe radical de ces deux cercles. Donc les trois axes radicaux concourent au point I.

Si les centres des trois cercles sont en ligne droite, les trois axes radicaux sont perpendiculaires à cette droite, et par conséquent sont parallèles.

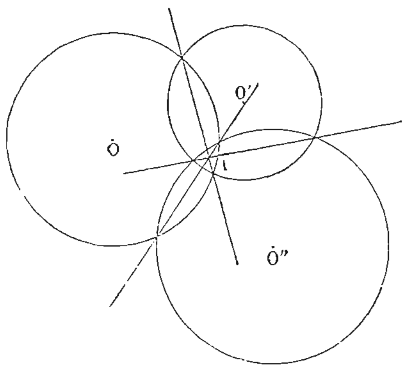


Fig. 308.

Si l'axe radical des cercles O et O' se confond avec l'axe radical des cercles O et O'', il se confond aussi avec l'axe radical des cercles O' et O''. Car tout point du premier axe radical a même puissance par rapport aux cercles O et O', même puissance par rapport aux cercles O et O'', et par conséquent même puissance par rapport aux cercles O' et O''.

405. Remarque I. Ce théorème permet de construire très facilement l'axe radical de deux cercles O et O' qui ne se coupent pas. Il suffit de mener un cercle O'' qui coupe à la fois les cercles O, et O', et, par le point de concours de la corde commune aux cercles O, O'' et de la corde commune aux cercles O' et O'', de mener une perpendiculaire à la ligne des centres des cercles O et O'.

406. Remarque II. Ce théorème permet encore de présenter plus simplement que nous ne l'avons fait au n° 317 la solution du problème :

Mener par deux points donnés A et B un cercle tangent à un cercle donné O.

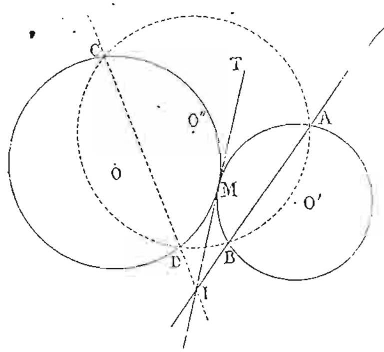


Fig. 309.

Supposons le problème résolu; soit O' un cercle tangent au cercle O et passant par A et par B (*fig.* 309); soit M le point de contact et soit I le point où la tangente commune MT aux cercles O et O' en M rencontre AB. Tout revient évidemment à déterminer la position du point I sur AB. Or, menons un cercle quelconque O'' passant par A et par B, et coupant le cercle O ; soient C et D les points de rencontre. L'axe radical des cercles O et O' est la droite MI ; l'axe radical des cercles O et O'' est la droite AB ; l'axe radical des cercles O et O'' est la droite CD. Ces trois axes sont concourants ; donc le point I, point de concours de AB et de MT, est sur la droite CD.

§ IV. Division harmonique. — Faisceaux harmoniques. — Pole et polaire par rapport a un cercle. — Figures polaires réciproques.

Division harmonique. — Faisceaux harmoniques.

407. On dit qu'un segment de droite AB est *divisé harmoniquement* par les points C et D lorsqu'on a la relation (1) :

$$(1) \qquad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Les points C et D sont dits *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B (*fig.* 310).

408. Il faut remarquer que si les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, réciproquement les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D. En effet, de la relation (1) on déduit

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} = -\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$$

ou encore, en remplaçant les segments $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DB}$, par les segments égaux $-\overline{AC}$, $-\overline{AD}$, $-\overline{BC}$, $-\overline{BD}$,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

et cette dernière relation exprime que les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D.

409. La relation (1) prend une forme remarquable quand on prend

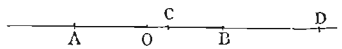


Fig. 310.

pour origine des segments le milieu de deux des points conjugués. Soit O le milieu de AB, la relation (1) peut être écrite comme il suit :

$$\frac{\overline{OA} - \overline{OC}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = -\frac{\overline{OA} - \overline{OD}}{\overline{OB} - \overline{OD}}$$

ou

$$(\overline{OA} - \overline{OC})\,(\overline{OB} - \overline{OD}) = -(\overline{OB} - \overline{OC})\,(\overline{OA} - \overline{OD})$$

ou, en remplaçant $\overline{OB}$ par $-\overline{OA}$, et en changeant les signes,

$$(\overline{OA} - \overline{OC})\,(\overline{OA} + \overline{OD}) = -(\overline{OA} + \overline{OC})\,(\overline{OA} - \overline{OD})$$

ou enfin, en effectuant les produits et en réduisant

$$(2) \qquad \overline{OC} \times \overline{OD} = \overline{OA}^2$$

410. De ce que le produit $\overline{OC} \times \overline{OD}$ est positif, il résulte que les points conjugués C et D sont toujours d'un même côté par rapport au milieu O de AB.

De ce que ce produit est constant, il résulte que si l'un des deux facteurs diminue, l'autre augmente, et que si l'un diminue jusqu'à zéro, l'autre augmente jusqu'à l'infini. Si donc le point C se déplaçant sur la droite AB se rapproche du point O, le conjugué D s'en éloigne, et si le point C vient se confondre avec le point O, le conjugué D s'éloigne à l'infini.

411. Remarquons encore que deux points conjugués C et D sont généralement distincts; pour qu'ils se confondent, il faut que l'on ait $\overline{OC}=\overline{OD}$, et, par conséquent,

$$\overline{OC}^2=\overline{OA}^2,$$

d'où

$$\overline{OC}=\pm\overline{OA},$$

c'est-à-dire qu'il faut que le point C soit l'un ou l'autre des points A et B.

412. Dans le cas limité où, sur la droite donnée, les points A et B sont confondus, si C et D désignent toujours deux points conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, le point intérieur C se confond avec les points A et B, et le point D est complètement indéterminé sur la droite; car dans la relation

$$\overline{OC}\times\overline{OD}=\overline{OA}^2$$

$\overline{OC}$ et OA sont nuls, et par suite, OD est arbitraire

413. La relation (1) prend encore une forme remarquable quand on prend pour origine commune des segments un des quatre points A, B, C, D. Si, par exemple, on prend le point A pour origine commune des segments, on écrira cette relation comme il suit :

$$\frac{-\overline{AC}}{\overline{AB}-\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}-\overline{AD}}$$

ou

$$\overline{AC}\times(\overline{AB}-\overline{AD})=-\overline{AD}(\overline{AB}-\overline{AC})$$

ou

$$\overline{AC}\times\overline{AB}+\overline{AD}\times\overline{AB}=2\overline{AC}\times\overline{AD}$$

ou enfin, en divisant les deux membres par $\overline{AB}\times\overline{AC}\times\overline{AD}$,

$$(2)\qquad \frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}=\frac{2}{\overline{AB}}.$$

414. Il est très facile de construire le conjugué harmonique d'un point C d'une droite AB, par rapport aux deux points A et B (*fig.* 311).

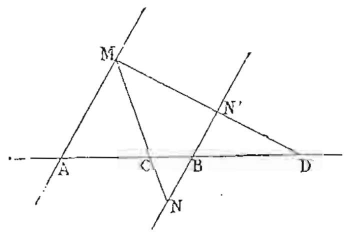


Fig. 311.

On mène par A et par B deux parallèles, de direction quelconque, puis une droite quelconque par le point C; soient M et N les points où cette droite rencontre les deux parallèles. On prend, sur la parallèle à AM menée par B, $\overline{BN'}=-\overline{BN}$; on mène la droite MN'; et on la prolonge jusqu'au point D où elle rencontre la droite AB. Le point D est le conjugué harmonique du point C par rapport aux points A et B. On a en effet :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{BN'}}$$

d'où, $\overline{BN}$ étant égal à $-\overline{BN'}$,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

415. On peut encore employer la construction suivante : sur AB comme diamètre (*fig.* 312), on décrit une circonférence; par le point C on mène une sécante quelconque qui rencontre la circonférence en M et N; on joint le point M au point N' symétrique de N par rapport à AB. Le point D où la droite MN' rencontre la droite AB est le conjugué harmonique de C, par rapport aux points A et B. En effet, les arcs BN, BN' étant égaux, la droite MB est la bissectrice de l'un des angles formés par les droites MN, MN'; la droite MA, perpendiculaire à MB, est bissectrice de l'autre angle formé par les mêmes droites. Donc les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D, et, par suite, les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B.

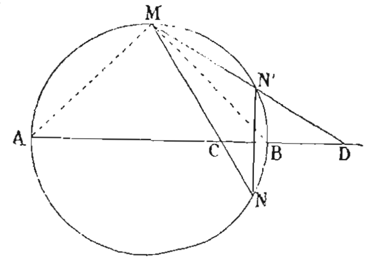


Fig. 312.

Théorème.

416. *Quatre points* A, B, C, D *d'une droite* L *étant tels que les points* C *et* D *sont conjugués harmoniquement par rapport aux points* A *et* B, *si l'on joint ces quatre points à un même point* O, *toute transversale* L' *rencontre les droites* OA, OB, OC, OD *en des points* A', B', C', D', *tels que les deux derniers sont conjugués harmoniquement par rapport aux deux premiers* (*fig.* 313).

Pour le démontrer, menons par le point B une parallèle à OA; soient E et F les points où elle rencontre OC et OD.

On a évidemment :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{BE}}$$

et

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BF}};$$

comme, par hypothèse,

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

on a aussi

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{BE}} = -\frac{\overline{AO}}{\overline{BF}},$$

d'où

$$\overline{BE} = -\overline{BF}.$$

Si par le point B′ on mène une parallèle à OA, et si on désigne par

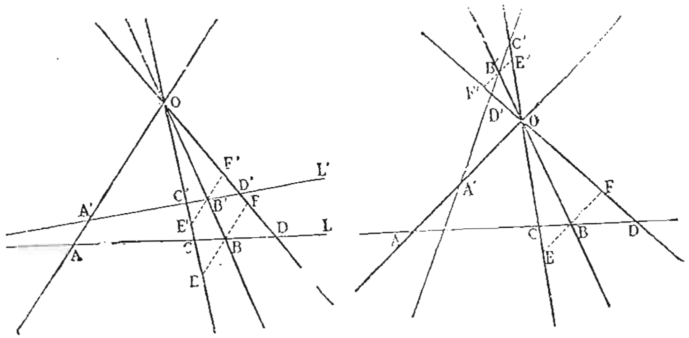


Fig. 313.

E′ et F′ les points où cette droite rencontre OC et OD, on aura de même

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{B'E'}},$$

et

$$\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{A'O'}}{\overline{B'F'}}.$$

Or, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{B'E'}}{\overline{B'F'}}$; et, comme $\overline{BE} = -\overline{BF}$, il en résulte que $\overline{B'E'} = -\overline{B'F'}$;

donc les rapports $\frac{\overline{A'O}}{\overline{B'E'}}$, $\frac{\overline{A'O}}{\overline{B'F'}}$ sont égaux et de signes contraires; donc

enfin on a

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = -\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}$$

et les points C′ et D′ sont conjugués par rapport aux points A′ et B′.

417. L'ensemble des quatre droites OA, OB et OC, OD forme ce

que l'on nomme un *faisceau harmonique*, les droites OA, OB sont deux *rayons* du faisceau, les droites OC et OD sont deux autres rayons conjugués par rapport aux premiers. Réciproquement OA, OB sont deux rayons conjugués par rapport aux rayons OC, OD.

418. Remarque I. On a vu, dans le cours de la démonstration précédente, que si, par un point B d'un rayon d'un faisceau harmonique, on mène une parallèle au rayon OA conjugué du rayon OB, cette droite rencontre les rayons conjugués OC et OD en des points E et F tels que $\overline{BE} = -\overline{BF}$, c'est-à-dire tels que B est le milieu de EF. Cela montre que le théorème général s'applique encore quand la transversale est parallèle à un des rayons du faisceau, car le milieu B de EF est, par rapport aux points E et F, conjugué du point rejeté à l'infini où la droite EBF rencontre OA (411). De cette propriété d'une transversale parallèle à l'un des rayons d'un faisceau harmonique résulte un moyen simple de construire le rayon conjugué d'un rayon OC, par rapport à deux rayons OA, OB (*fig.* 313). On mène, par un point B de OB, une parallèle à OA, qui rencontre OC en E; on prend sur cette parallèle $\overline{BF} = -\overline{BE}$, et on mène la droite OF. Cette droite est le rayon conjugué de OC, par rapport aux rayons OA, OB.

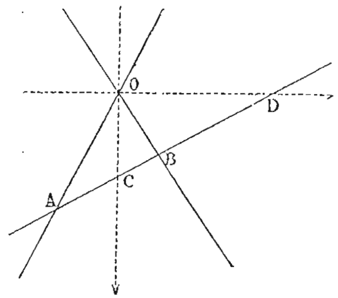


Fig. 314.

419. Remarque II. Les bissectrices des angles formés par deux droites qui se coupent forment avec celles-ci un faisceau harmonique dont les bissectrices sont deux rayons conjugués. Car si l'on mène une transversale quelconque coupant les droites données en A et en B (*fig.* 314), les bissectrices des angles qu'elles forment, en C et en D, on a (236)

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

Théorème.

420. *Le lieu du conjugué harmonique d'un point P par rapport aux points de rencontre d'une sécante quelconque menée par P avec deux droites fixes OR, OS, est la droite OQ conjuguée de OP, par rapport aux droites OR, OS* (*fig.* 315).

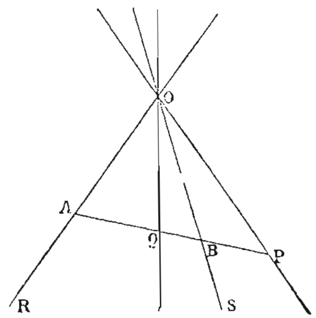


Fig. 315

En effet, soit Q le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A et B où une sécante menée par P rencontre les droites OR, OS; les quatre droites OR, OS et OP, OQ forment un faisceau harmonique.

Donc, toute transversale est divisée harmoniquement par ces quatre droites; cela a lieu en particulier pour les transversales menées par le point P, et, sur chacune d'elles, le conjugué du point P est situé sur la droite OQ.

421. La droite OQ, lieu du conjugué du point P par rapport aux points de rencontre de toute sécante menée par P avec les droites OR, OS, est appelée *polaire* du point P par rapport aux droites OR, OS, et le point P est appelé *pôle* de la droite OQ.

La droite OQ étant la polaire du point P, tous les points de la droite OQ ont pour polaire la droite OQ; et, réciproquement, tous les points de la droite OQ ont pour polaire la droite OP.

422. COROLLAIRE I. *Soient* OR, OS *deux droites,* PAB *une sécante qui les coupe en* A *et en* B ; *si, par le point* P, *on mène une sécante fixe mobile qui coupe les droites* OR *et* OS *en* A' *et en* B', *le lieu du point de rencontre* M *des droites* AB', BA', *quand la sécante mobile tourne autour du point* P, *est la polaire du point* P *par rapport aux droites* OR, OS (*fig.* 316).

En effet, soit Q le conjugué harmonique de P par rapport à A et B, soit Q' le conjugué harmonique de P par rapport à A' et B'; la droite

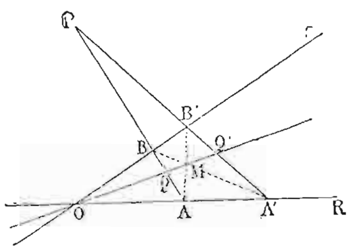


Fig. 316.

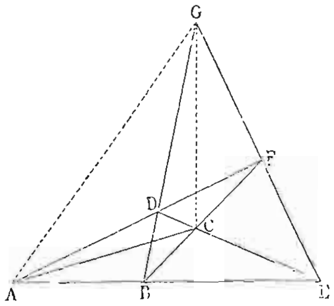


Fig. 317.

QQ' est la polaire du point P par rapport aux droites OR et OS; et par conséquent elle passe par O ; cette droite est aussi la polaire du point P par rapport aux droites MA, MB, et pour cette raison elle passe par M. Donc la droite QQ' se confond avec la droite OM. Donc le lieu du point M est la polaire de P par rapport aux droites OR, OS. Il importe de remarquer que ce lieu reste le même quel que soit la direction de la sécante fixe PAB.

423. De là résulte un nouveau moyen simple de construire le conjugué harmonique d'un rayon OP, par rapport à deux rayons OR, OS. On mène, par un point P du rayon donné, deux sécantes PAB, PA'B'; on mène les droites AB', BA', et on joint leur point de rencontre M au point O. La droite OM est le rayon demandé.

424. COROLLAIRE II. *Dans un quadrilatère complet chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.*

On appelle *quadrilatère complet* la figure formée en prolongeant

les côtés opposés AB et CD, AD et BC, d'un quadrilatère ordinaire jusqu'en leurs points de rencontre E et F (*fig.* 317).

Les six points A, B, C, D, E, F sont les sommets du quadrilatère complet; les trois droites AC, BD, EF sont les diagonales.

Pour reconnaître que la diagonale AC est divisée harmoniquement par les deux autres, il suffit d'observer que les quatre droites GA et GC, GB et GE, forment un faisceau harmonique.

Pareillement pour reconnaître que la diagonale BD, ou la diagonale EF est divisée harmoniquement par les deux autres, il suffit d'observer que les quatre droites AB et AD, AC et AG forment un faisceau harmonique.

POLE ET POLAIRE PAR RAPPORT A UN CERCLE.

Théorème.

425. *Le lieu géométrique du conjugué harmonique d'un point* P *par rapport aux points de rencontre d'une sécante quelconque menée par* P *avec un cercle est une droite perpendiculaire au diamètre qui passe par le point* P.

Soient A et B (*fig.* 318) les points de rencontre du cercle avec le

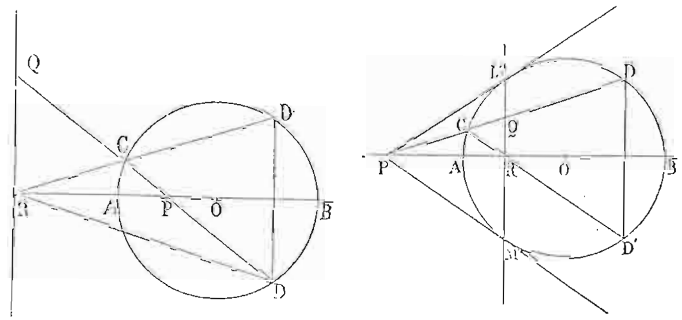


Fig. 318.

diamètre qui passe par P ; C et D les point de rencontre du cercle avec une sécante quelconque menée par P, R le conjugué de P par rapport à A et B, Q le conjugué de P par rapport à C et D. Il faut montrer que la droite RQ est perpendiculaire à AB.

Le point R, point conjugué de P par rapport aux points A et B, est, comme on l'a vu (415), le point de rencontre de AB avec la droite qui joint le point C au point D' symétrique de D par rapport à AB. Or, puisque, sur la droite CD, Q est conjugué de P, les droites RC et RD, RP et RQ, forment un faisceau harmonique; la droite RP est bissectrice de l'un des angles formé par les droites RC, RD; donc la droite RQ est bissectrice de l'autre angle formé par les mêmes droites, et par suite elle est perpendiculaire à RP, c'est-à-dire au diamètre qui passe par le point P.

426. On dit que, par rapport au cercle O, la droite RQ est la *polaire* du point P, et que le point P est le *pôle* de la droite RQ.

Le point R étant le conjugué de P par rapport aux points A et B, extrémités du diamètre qui passe par P, on a :

$$\overline{OP} \times \overline{OR} = \overline{OA}^2.$$

Si le point P est intérieur au cercle, le point R lui est extérieur, et la polaire du point P ne rencontre pas le cercle. Dans ce cas, quand la sécante menée par le point P tourne autour de ce point, le conjugué Q parcourt la polaire tout entière.

Si le point P est extérieur au cercle, le point R lui est intérieur; la polaire coupe le cercle en deux points symétriques par rapport au diamètre qui passe par le point P. Ces points sont les points de contact M et M' des tangentes au cercle menées par le point P; car si la sécante menée par le point P prend la direction de la tangente PM, les points C et D viennent se confondre avec le point M, et le point Q, qui est situé entre C et D, vient aussi se confondre avec le point M. Donc le point M est sur la polaire du point P; il en est de même du point M'. Lorsque la sécante menée par le point P tourne autour de ce point, le point Q ne parcourt que la portion MM' de la polaire qui est comprise dans le cercle.

Si le point P est sur la circonférence du cercle, le conjugué Q du point P, sur une sécante quelconque menée par le point P, se confond avec le point P (411); mais, sur la tangente au cercle au point P, le conjugué Q du point P est un point quelconque de la tangente (412), et, pour cette raison, la polaire du point P est la tangente au cercle au point P.

Théorème.

427. *Le pôle de toute droite passant par un point* P *est sur la polaire* HH' *de ce point; et, réciproquement, la polaire de tout point de la droite* HH' *passe par le pôle* P *de cette droite* (*fig.* 319).

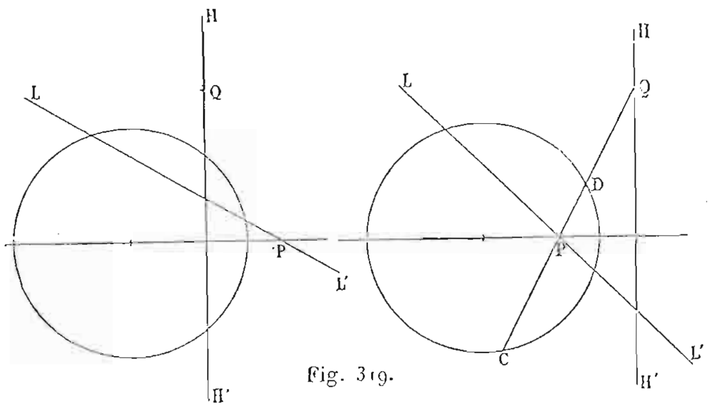


Fig. 319.

Soit LL' une droite quelconque menée par le point P, et soit Q le

pôle de LL'. Le point Q est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points C et D où la droite PQ rencontre le cercle.

D'autre part, le point de rencontre de la polaire HH' du point P avec la droite PQ est aussi le conjugué du point P par rapport aux points C et D, et par conséquent ce point n'est autre que le point Q. Donc le pôle Q de toute droite LL' menée par P est sur la polaire de ce point.

Réciproquement. Soit Q un point de la droite HH', et soit LL' la polaire du point Q. Soient C et D les points de rencontre de la droite PQ avec le cercle. Le point P est le conjugué du point Q par rapport aux points C et D, parce que Q est sur la polaire du point P; d'autre part, le point de rencontre de la droite PQ avec la polaire LL' du point Q est aussi le conjugué de Q par rapport aux points C et D, et par conséquent se confond avec le point P. Donc la polaire LL' du point Q passe par le point P.

428. Remarque. Il suit de là que la droite qui joint les pôles de deux droites quelconques passant par un point est la polaire de ce point; et, réciproquement, que le point d'intersection des polaires de deux points quelconques d'une droite est le pôle de cette droite.

429. Corollaire I. *Si par un point* P *on mène une sécante à un cercle, et si on mène les tangentes au cercle aux points* C *et* D *où il est coupé par cette sécante, le point de concours* T *de ces tangentes est sur la polaire du point* P (*fig.* 320).

En effet le point T est le pôle de droite CD, et, par suite, il est sur la polaire du point P de cette droite CD

Si le point P est intérieur au cercle, quand la sécante PCD tourne

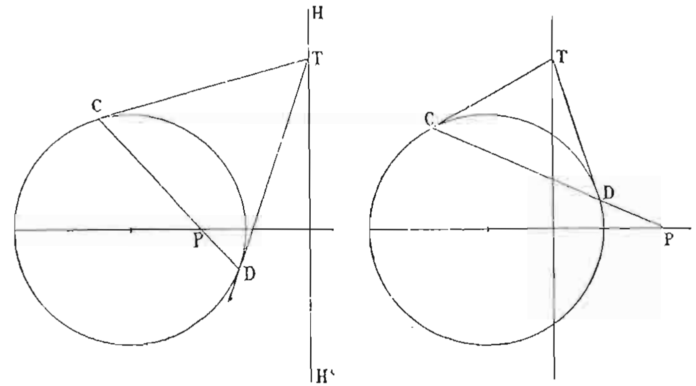


Fig. 320.

autour du point P, le point T parcourt la polaire du point P tout entière. Si le point P est extérieur au cercle, quand la sécante PCD tourne autour du point P, le point T parcourt seulement les portions de la polaire de P extérieures au cercle.

430. Corollaire II. *Si par un point* P *on mène à un cercle deux sécantes quelconques* PCD, PC'D', *qui coupent le cercle aux points* C *et* D, C' *et* D', *le point de concours des droites* CD', DC', *et le point de concours des droites* CC', DD' *sont tous deux sur la polaire du point* P *par rapport au cercle* (*fig.* 321).

En effet, soit Q le conjugué de P par rapport aux points C et D, et soit Q' le conjugué de P par rapport aux points C' et D'. La droite QQ' est à la fois la polaire du point P par rapport au cercle, par rapport aux droites CD', DC', et par rapport aux droites

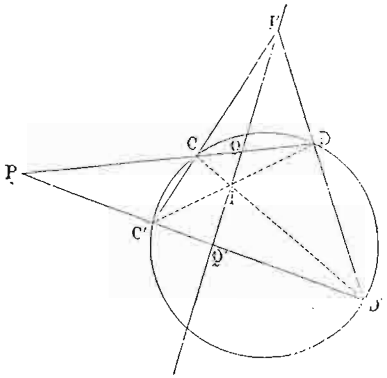


Fig. 321.

CC', DD'. Or la polaire de P par rapport aux droites CD', DC' passe par le point de concours I de ces droites; de même la polaire de P par rapport aux droites CC', DD' passe par le point de concours I' de ces droites. Donc la polaire du point P par rapport au cercle est la droite II'. De là un moyen de construire, avec la règle seule, la polaire d'un point par rapport à un cercle.

FIGURES POLAIRES RÉCIPROQUES.

431. Soit un polygone ABCDEF, et soit, dans le plan de ce polygone, un cercle O; construisons un second polygone A'B'C'D'E'F' tel que chaque sommet de ce polygone soit, par rapport au cercle O, le pôle d'un côté du premier, savoir :

A'	pôle de	AB
B'	....	BC
C'	....	CD
D'	....	DE
E'	....	EF
F'	....	FA.

Réciproquement, chaque sommet du premier sera le pôle d'un côté du second, savoir :

B	pôle de	A'B'
C	....	B'C'
D	....	C'D'
E	....	D'E'
F	....	E'F'
A	....	F'A'

en vertu de la remarque (428).

De sorte que le premier polygone peut être construit avec le second comme le second a été construit avec le premier. Ces deux polygones sont appelés des *figures polaires réciproques*, par rapport au cercle O; le cercle O est alors appelé *cercle directeur*.

En particulier, si l'un des polygones est inscrit dans le cercle O, l'autre est le polygone circonscrit formé par les tangentes au cercle aux sommets du premier polygone.

432. Deux figures étant polaires réciproques, à un certain nombre de points en ligne droite dans l'une correspond dans l'autre un même nombre de droites qui concourent en un même point, pôle de la droite. Et, réciproquement, à un certain nombre de droites concourantes dans l'une des figures correspond dans l'autre un même nombre de points qui sont sur une même droite, la polaire du point de concours des droites de la première figure.

Par suite, à un théorème concernant, dans une figure, soit des points qui doivent être en ligne droite, soit des droites qui doivent être concourantes, correspond un autre théorème concernant, dans une figure polaire réciproque de la première, des droites qui doivent être concourantes, ou des points qui doivent être en ligne droite. Chacun des deux théorèmes est dit *corrélatif* de l'autre, et dès que l'un des deux est démontré, l'autre en peut être déduit comme une conséquence nécessaire.

433. Par exemple, du théorème de Pascal concernant un hexagone inscrit dans un cercle (394) :

Étant donné un hexagone, convexe ou non convexe, inscrit dans un cercle, si, supposant le contour de l'hexagone parcouru dans un sens déterminé par un mobile, on numérote 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les côtés consécutifs, dans l'ordre où ils sont parcourus, les trois points de concours des droites* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6, *sont en ligne droite*;

On déduit immédiatement le théorème corrélatif suivant dû à Brianchon.

Étant donné un hexagone, convexe ou non convexe, circonscrit à un cercle, si, supposant l'hexagone parcouru par un mobile, dans un sens déterminé, on numérote (1), (2), (3), (4), (5), (6) *les sommets consécu-*

tifs, les trois droites (2) (4), (2) (5), (3) (6), *sont concourantes* (*fig.* 322).

En effet, si l'on prend pour cercle directeur le cercle inscrit dans l'hexagone considéré, la figure polaire réciproque de cet hexagone est l'hexagone inscrit qui a pour sommets les points de contact des côtés de l'autre avec le cercle. Or, dans cette seconde figure le

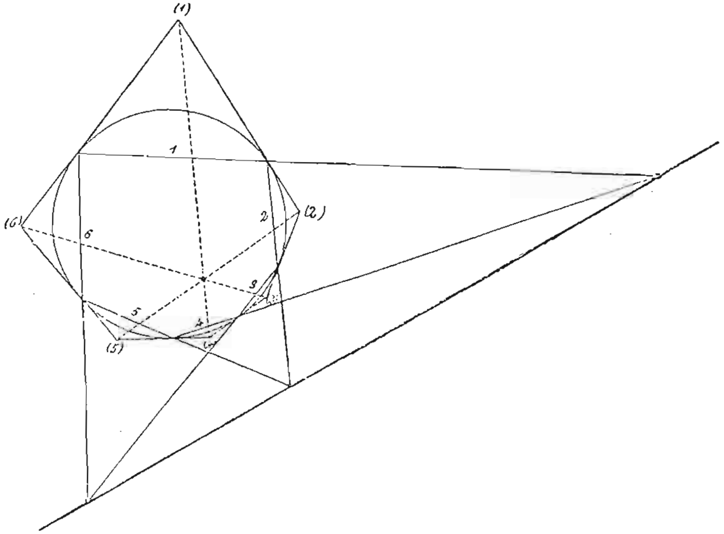


Fig. 322.

points de concours des côtés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, sont respectement les pôles des droites (1) (4), (2) (5), (3) (6), de la première. Les trois points sont sur une même droite, donc les trois droites correspondantes sont concourantes.

434. Le théorème de Pascal subsistant, quelque petit que soit un des côtés de l'hexagone inscrit, on peut supposer que deux sommets consécutifs de l'hexagone se confondent en un seul, la direction du côté ainsi réduit à zéro est celle de la tangente au point où deux sommets de l'hexagone sont venus se confondre.

On peut ainsi déduire, du théorème de Pascal, des théorèmes concernant un pentagone, un quadrilatère, un triangle, inscrits dans un cercle, et de chacun de ces théorèmes déduire un théorème corrélatif concernant un pentagone, un quadrilatère, un triangle, circonscrits à un cercle. On obtient ainsi les théorèmes suivants :

435. I. *Étant donné un pentagone, convexe ou non convexe, inscrit dans un cercle, si l'on mène la tangente en un des sommets du pentagone, et si, supposant le contour du polygone parcouru par un mobile, dans un sens déterminé, on numérote* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les côtés et la tangente*

considérée comme un côté, dans l'ordre où ils sont parcourus par le mobile, les points de concours des droites 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6, *sont en ligne droite* (*fig.* 323).

Théorème corrélatif. *Étant donné un pentagone, convexe ou non convexe, circonscrit à un cercle, si, supposant le contour du pentagone*

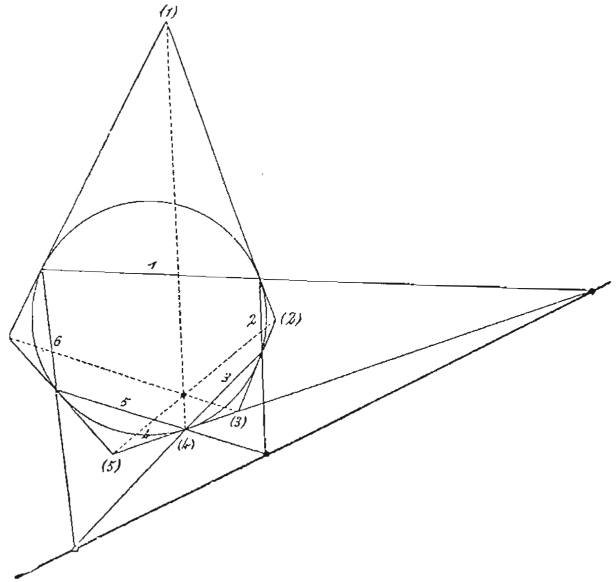


Fig. 323.

parcouru par un mobile dans un sens déterminé, on numérote (1), (2), (3), (4), (5), (6), *suivant l'ordre dans lequel ils sont rencontrés, les sommets du pentagone, et le point de contact d'un des côtés avec le cercle, les droites* (1) (4), (2) (5), (3) (6), *sont concourantes.*

436. II. *Étant donné un quadrilatère, convexe ou non convexe, inscrit dans un cercle, si on adjoint aux côtés du quadrilatère les tangentes en deux quelconques des sommets et si on numérote comme ci-dessus les côtés de l'hexagone ainsi formé, les points de concours des côtés* 1 *et* 4, 2 *et* 5, 3 *et* 6, *sont en ligne droite.*

Si, en particulier, on considère successivement les tangentes en deux couples de sommets non consécutifs, et si on applique le théorème précédent à chacun de ces couples, on est conduit au théorème suivant :

Dans un quadrilatère, convexe ou non convexe, inscrit dans un cercle, les deux points de concours de deux côtés non consécutifs, et les deux *points de concours des tangentes en deux sommets non consécutifs, sont quatre points en ligne droite* (*fig.* 324).

Théorèmes corrélatifs. *Dans un quadrilatère, convexe ou non convexe,*

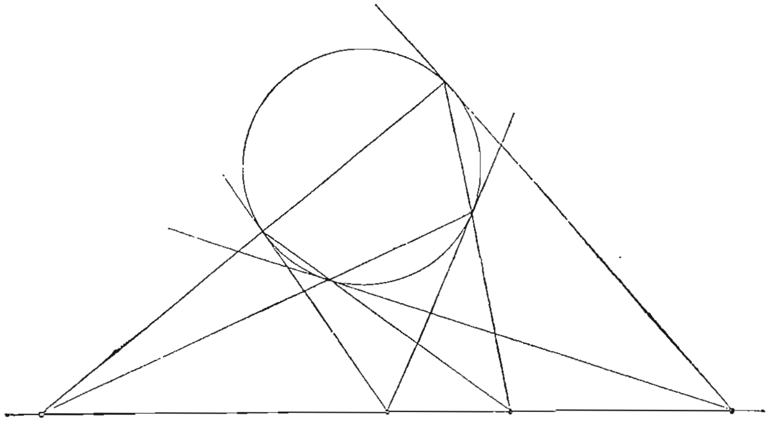


Fig. 324.

circonscrit à un cercle, si on adjoint aux sommets du quadrilatère les points de contact de deux quelconques des côtés, et si on numérote comme ci-dessus les sommets de l'hexagone ainsi formé, les trois droites (1) (4), (2) (5), (3) (6), *sont concourantes.*

Dans un quadrilatère, convexe ou non convexe, circonscrit à un cercle, les deux droites qui joignent deux sommets non consécutifs, et les deux droites qui joignent les points de contact de deux côtés non consécutifs, sont quatre droites concourantes (*fig.* 325).

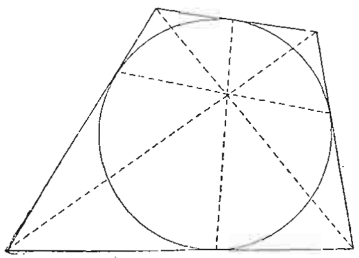


Fig. 325

437. III. *Dans un triangle inscrit à un cercle, les points de concours de chaque côté du triangle et de la tangente au cercle au sommet opposé à ce côté, sont trois points en ligne droite* (*fig.* 326).

Théorème corrélatif. *Dans un triangle circonscrit à un cercle, les droites qui joignent un sommet du triangle au point de contact du côté*

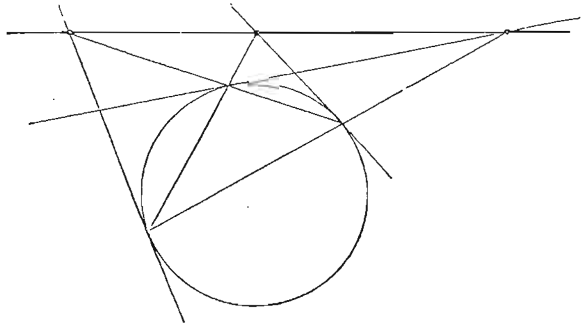


Fig. 326.

opposé, sont trois droites concourantes (*fig.* 327); c'est le théorème démontré directement au n° 398.

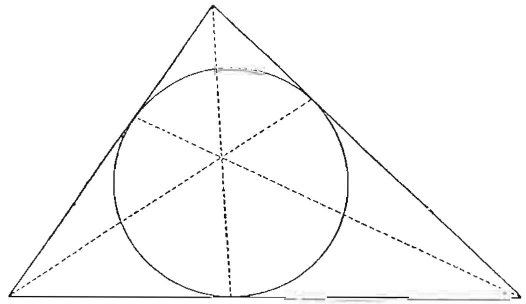


Fig. 327.

438. Remarque. Les trois théorèmes établis comme théorèmes corrélatifs des conséquences du théorème de Pascal, peuvent être déduits eux-mêmes du théorème de Brianchon. Il suffit de supposer que deux côtés consécutifs d'un hexagone inscrit se placent en ligne droite sur une même tangente au cercle, le point de concours de ces côtés venant se confondre avec le point de contact de cette tangente.

§ V. Figures inverses ou transformées par rayons vecteurs réciproques. — Applications. — Exemples de théorèmes établis par la considération de figures inverses.

439. Soit, dans un plan, un système de points A, B, C,..... formant une figure F, et un point O; si, sur les rayons OA, OB, OC,..... on prend les points A', B', C',..... tels que les produits

$$OA.OA', \qquad OB.OB', \qquad OC.OC',$$

soient tous égaux à une constante λ, ces points A′, B′, C′..., forment une nouvelle figure F′ que l'on dit *inverse* de la première, ou encore *transformée* de la première *par rayons vecteurs réciproques* (*fig.* 328).

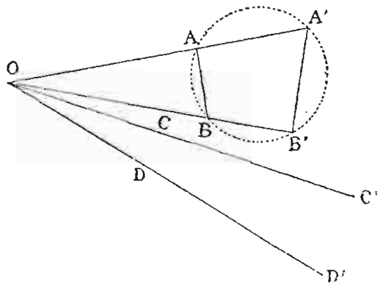


Fig. 328.

Le point O est l'*origine*, la constante λ est la puissance de l'inversion.

Deux rayons vecteurs correspondants OA, OA′ sont de même sens, ou de sens contraire, selon que la puissance λ est positive ou négative.

A une figure formée de points isolés correspond une figure formée de points isolés; à une ligne continue correspond, comme figure inverse, une ligne continue.

440. Deux figures inverses, F, F′ sont *réciproques*, car F est formée avec F′ comme F′ est formée avec F.

441. Soient A et B deux points d'une figure F, A′ et B′ les points correspondants d'une figure F′ inverse de F, l'origine étant O et la puissance λ. On sait que les triangles OAB, OA′B′ sont semblables, et que les quatre points A, B, A′, B′ sont sur un même cercle. Il est utile de connaître la relation qui lie les longueurs des cordes AB, A′B′.

De la similitude des triangles OAB, OA′B′, il résulte que l'on a

$$\frac{OA}{OB'}=\frac{OB}{OA'}=\frac{BA}{A'B'},$$

d'où

$$AB=A'B'.\frac{OA}{OB'}.$$

Or, on a par hypothèse,

$$OA.OA'=OB.OB'=\lambda;$$

donc, en remplaçant OA par $\frac{\lambda}{OA'}$, on a

$$AB=A'B'\times\frac{\lambda}{OA'.OB'}.$$

On aurait de même

$$A'B'=AB.\frac{\lambda}{OA.OB}.$$

Cette relation fondamentale peut être énoncée comme il suit :

442. *La longueur de la corde qui joint deux points d'une figure est égale à la longueur de la corde qui joint les points correspondants d'une figure inverse multipliée par le rapport de la puissance d'inversion au produit des rayons vecteurs terminés aux extrémités de cette seconde corde.*

Théorème.

443. *Les tangentes à deux lignes inverses en deux points correspondants font avec le rayon vecteur qui passe par ces points deux angles intérieurs d'un même côté égaux.*

Soient A, B deux points de la ligne S, et A′, B′ les points correspondants d'une ligne S′ inverse de S par rapport à l'origine O (*fig.* 329). Les angles OAB, OB′A′ sont égaux. Or si le rayon OBB′ vient s'appliquer sur le rayon OAA′, les cordes AB, A′B′ viennent se placer respectivement sur les tangentes TAR, T′A′R′, en A et en A′; l'angle OAB devient l'angle OAR, l'angle OB′A′ devient l'angle OA′T′, donc les angles OAR, OA′T′ sont égaux. Comme d'ailleurs OAR = TAA′, les angles TAA′, T′A′A, intérieurs d'un même côté par rapport aux tangentes AT, A′T′, et à la droite OAA′, sont égaux.

444. Corollaire. L'angle de deux lignes U et V qui se rencontrent en un point A est égal à l'angle des deux lignes U′, V′, inverses des précédentes qui se rencontrent au point A′ correspondant du point A (*fig.* 330).

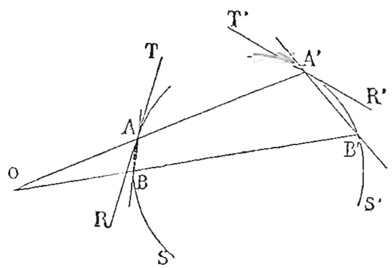


Fig. 329.

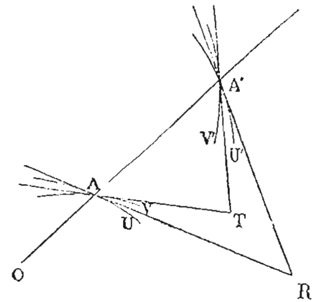


Fig. 330.

On appelle angle de deux courbes U et V en un point A, commun à ces lignes, l'angle des tangentes AR, AT′, à ces lignes en ce point.

Les angles TAR, TA′R sont égaux comme différences d'angles égaux :

$$TAA'=TA'A,\qquad RAA'=RA'A.$$

Théorème.

445. *Si deux figures F′, F″ sont inverses d'une figure F, par rapport à une même origine O, les puissances d'inversion étant λ' et λ'', les figure*

F', F'' sont homothétiques; le centre d'homothétie est le point O; le rapport d'homothétie de F' à F'' est $\frac{\lambda'}{\lambda''}$; l'homothétie est d'ailleurs directe, ou inverse, selon que λ' et λ'' sont de même signe, ou de signes contraires.

En effet, soient A un point quelconque de F, A' le point correspondant de F' et A'' le point correspondant de F''. Les trois droites OA, OA', OA'' ont la même direction, et on a

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OA}' = \lambda'$$

$$\mathrm{OA}.\mathrm{OA}'' = \lambda'',$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OA}'}{\mathrm{OA}''} = \frac{\lambda'}{\lambda''}$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème.

446. *La figure inverse d'un cercle passant par l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre mené par l'origine.*

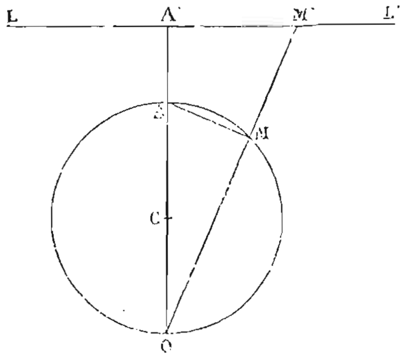


Fig. 331.

Soient C le cercle donné, O l'origine prise sur ce cercle, λ la puissance (*fig.* 331).

Soient A l'extrémité du diamètre qui passe par O, M un point quelconque du cercle, et A', M' les points correspondants de la figure inverse.

Les triangles OAM, OM'A sont semblables, et l'angle OA'M' est égal à l'angle droit OMA. Donc le lieu du point M', c'est-à-dire la figure inverse du cercle, avec le point O pour origine et λ pour puissance, est la droite LL' perpendiculaire au diamètre OA au point A'.

Deux figures inverses sont réciproques; donc :

447. Réciproquement. *La figure inverse d'une droite LL', par rapport à une origine O en dehors de cette droite, est un cercle passant par O, et dont le diamètre qui passe par ce point est perpendiculaire à la droite LL'.*

La figure inverse d'une droite, par rapport à un point de cette droite pris pour origine, est évidemment cette droite elle-même.

Théorème.

448. *La figure inverse d'un cercle qui ne passe pas par l'origine est un cercle.*

Soit C le cercle donné, O l'origine; appelons ρ la puissance du point O par rapport au cercle C (*fig.* 332).

La figure inverse du cercle C, d'origine O et de puissance ρ, est le cercle C lui-même, car toute sécante menée par le point O coupe le cercle en deux points M et N tels que l'on a

$$\mathrm{OM}.\mathrm{ON} = \rho.$$

La figure inverse du cercle C, d'origine O et de puissance λ, est une ligne homothétique du cercle C; c'est donc un cercle C'. Le centre d'homothétie est le point O, le rapport d'homothétie du cercle C au cercle C' est $\frac{\lambda}{\rho}$, et l'homothétie est directe, ou inverse, selon que ce rapport est positif, ou négatif.

Si l'on désigne par ρ' la puissance du point O par rapport au cercle C', le rapport d'homothétie du cercle C' au cercle C est $\frac{\lambda}{\rho'}$; or ce rapport est l'inverse du rapport d'homothétie $\frac{\lambda}{\rho}$ du cercle C au cercle C', donc on a :

$$\frac{\lambda}{\rho'} = \frac{\rho}{\lambda}$$

ou

$$\lambda^2 = \rho\rho'.$$

449. Remarque. Soient C et C' deux cercles quelconques, O un des deux centres d'homothétie des deux cercles. Les deux cercles sont à

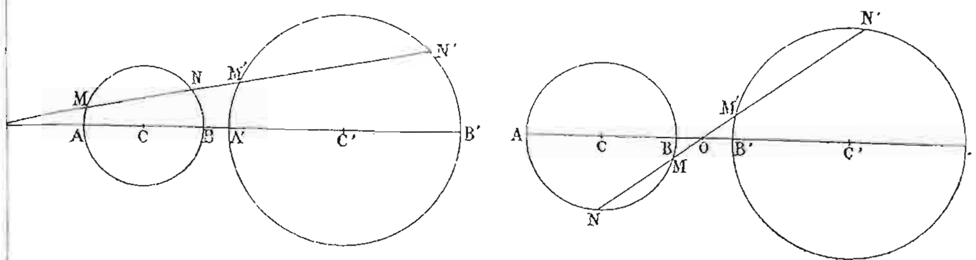


Fig. 332.

la fois homothétiques par rapport au centre d'homothétie O, et inverses par rapport à l'origine d'inversion O. Soient, sur la ligne des centres, puis sur une sécante quelconque, les couples de points A et A', B et B', puis M et M', N et N' qui se correspondent dans l'homothétie : ce sont des couples de points *homologues*. Les couples de points qui se correspondent dans l'inversion sur les mêmes droites, sont A et B', B et A', puis M et N', N et M' : les points de chacun de ces couples sont dits *antihomologues*. On a les relations

$$OM.ON' = ON.OM' = OA.OB' = OB.OA'.$$

Une corde du cercle C et une corde du cercle C' sont dites antihomologues quand les extrémités de l'une sont antihomologues des extrémités de l'autre.

450. Corollaire I. *Deux cordes antihomologues se coupent sur l'axe radical des deux cercles.*

Soit en effet MP, N'Q', deux cordes antihomologues dans les cercles C et C' inverses par rapport à l'origine O, et R le point de concours de ces cordes (*fig.* 333), on a :

$$OM.ON' = OP.OQ';$$

donc les points M, P, N', Q', sont sur un cercle; donc aussi on a :

$$RM.RP = RN'.RQ'$$

et le point R, qui a même puissance par rapport aux cercles C et C', est sur l'axe radical de ces cercles.

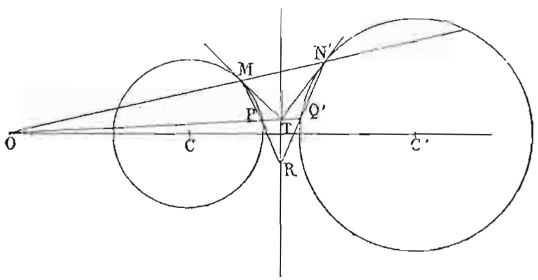


Fig. 333.

Si la droite OPQ' tournant autour de O vient s'appliquer sur OMN', les sécantes MP, N'Q' viennent se placer sur les tangentes MT, N'T aux deux cercles aux points antihomologues M, N'. Donc :

451. Corollaire II. *Les tangentes à deux cercles en deux points antihomologues se coupent sur l'axe radical de ces cercles.*

APPLICATIONS.

Problème.

452. *Mener par un point donné un cercle tangent à deux cercles donnés.*

Nous remarquerons d'abord que si un cercle Ω (*fig.* 334), touche un cercle C en M, et un cercle C' en M', la droite MM' passe par l'un des centres d'homothétie des cercles C et C', car M est un centre d'homothétie des cercles Ω et C, M' est un centre d'homothétie des cercles Ω et C'.

Si le cercle Ω est tangent extérieurement à chacun des cercles C et C', ou est tangent intérieurement à chacun de ces cercles, les points M et M' sont des centres d'homothétie de même espèce, et, par suite, MM' passe par le centre d'homothétie *directe* des cercles C et C'. Au contraire, si le cercle Ω est tangent intérieurement à l'un des cercles C et C' et extérieurement à l'autre, M et M' sont des centres d'homothétie d'espèces différentes, et MM' passe par le centre d'homothétie *inverse* des cercles C et C'.

Cela posé, proposons-nous de mener par le point P un cercle tangent aux deux cercles C et C'. Imaginons d'abord un cercle Ω remplissant ces conditions, et tel que les deux contacts soient de même espèce; soient M et M' les points de contact, la droite MM' passe par le centre O d'homothétie *directe* des deux cercles C et C'. Appelons Q le second point de rencontre de la droite OP avec le cercle Ω. On a :

$$OP.OQ = OM.OM' = OA.OB'.$$

Les longueurs OA, OB' étant connues, on peut déterminer le point Q. Cela fait, le problème est ramené à celui-ci : mener par deux

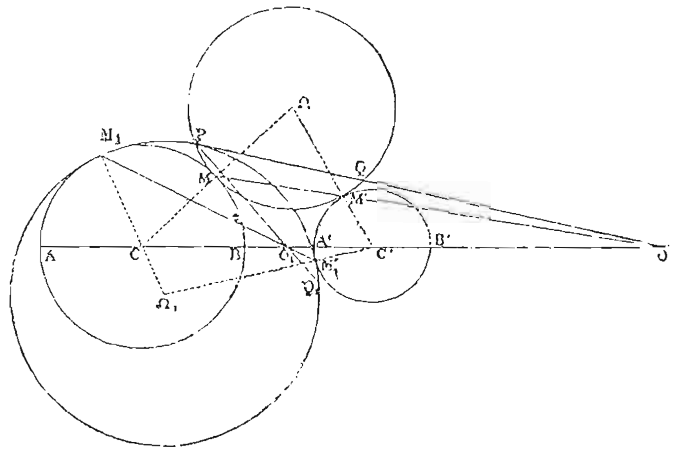


Fig. 334.

points P et Q, un cercle tangent à un cercle donné, problème traité n° 317, et qui admet généralement deux solutions.

Imaginons un cercle Ω_1 remplissant encore les conditions demandées, mais tel que les deux contacts soient d'espèces différentes. Soient M_1, M_1' les points de contact; la droite M_1M_1' passe par le centre O_1

d'homothétie *inverse* des cercles C et C'. Appelons Q_1 le second point de rencontre de la droite O_1P avec le cercle Ω_1, on a :

$$O_1P.O_1Q_1 = OM_1.OM'_1 = O_1A.O_1A',$$

et comme les longueurs O_1A, O_1A' sont connues, on peut déterminer le point Q_1, et le problème est encore ramené au problème du nº 317.

453. On peut donc, en général, mener par un point donné, deux couples de cercles tangents à deux cercles donnés : pour les cercles d'un des couples les deux contacts sont de même espèce, pour les cercles de l'autre couple, les contacts sont d'espèces différentes.

Problème.

454. *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés* C, C' C''.

Soit Ω un cercle tangent intérieurement aux trois cercles donnés, aux points M, M', M'' ; et soit Ω_1 un cercle tangent extérieurement à ces cercles, aux points M_1, M'_1, M''_1 (*fig.* 335).

En vertu de la remarque sur laquelle repose la solution du problème précédent.

1º Les droites MM', $M_1M'_1$, passent par le centre O'' d'homothétie

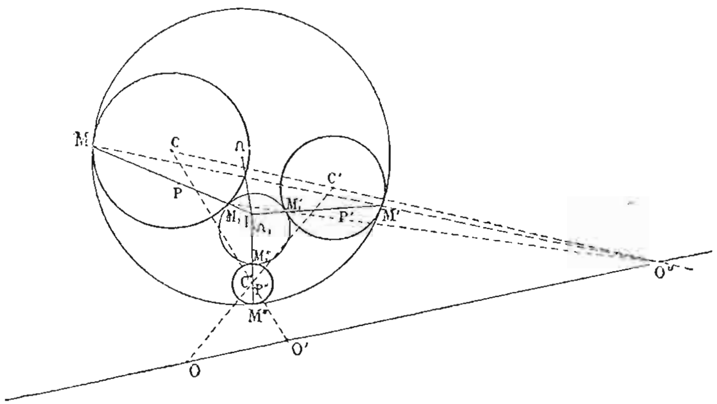


Fig. 335.

directe des cercles C et C' ; les droites MM'', $M_1M''_1$ passent par le centre O' d'homothétie directe des cercles C et C'' ; les droites M'M'', $M'_1M''_1$ passent par le centre O d'homothétie directe des cercles C' et C''.

On sait d'ailleurs (335) que les trois points O, O', O'' sont en ligne droite.

2º Les droites MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$ passent toutes les trois par le centre I d'homothétie inverse des cercles Ω, Ω_1.

Ce point I est d'ailleurs le centre radical des trois cercles donnés C, C', C''.

En effet, les cordes MM_1, $M'M'_1$ sont des cordes antihomologues des cercles C et C' considérés comme inverses par rapport à l'origine O'', donc leur point de concours I est sur l'axe radical de ces deux cercles. On voit de même que le point de concours I des cordes MM_1, $M''M''_1$ est sur l'axe radical des cercles C et C''. Donc I est le centre radical des trois cercles donnés. Ce point étant connu, on connaît un point de chacune des trois cordes MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$.

Reste à trouver un autre point sur chacune de ces cordes. On y arrive en remarquant que l'axe d'homothétie OO'O'' des trois cercles C, C', C'', se confond avec l'axe radical des cercles Ω, Ω_1. En effet, les cordes MM', $M_1M'_1$ sont antihomologues dans les cercles Ω, Ω_1, considérés comme inverses par rapport à l'origine I, donc leur point d'intersection O'' est sur l'axe radical de ces deux cercles. Les points O et O' appartiennent au même axe radical pour la même raison.

Or, les tangentes au cercle C aux points M, M_1, se coupent sur l'axe radical OO'O'' des cercles Ω, Ω_1 ; donc le pôle P de la droite OO'O'' par rapport au cercle C est un point de la corde MM_1. Pour la même raison, le pôle P' de la droite OO'O'' par rapport au cercle C' est un point de la corde $M'M'_1$, et le pôle P'' de la même droite par rapport au cercle C'' est un point de la corde $M''M''_1$.

De là résulte pour la détermination des cercles Ω et Ω_1 la construction suivante :

On prend l'axe d'homothétie OO'O'' des trois cercles C, C', C'' et les pôles P, P', P'', de cette droite par rapport aux trois cercles. On joint les points P, P', P'', au centre radical I des trois cercles. Soient M, M_1, les points de rencontre de IP avec le cercle C ; et soient M', M'_1, les points de rencontre de IP' avec le cercle C' ; on dispose les lettres M' et M'_1 de sorte que M' soit sur O''M, et M'_1 sur $O''M_1$. Soient enfin M'', M''_1 les points de rencontre de IP'' avec le cercle C'' ; on dispose les lettres M'', M''_1 de façon que M'' soit sur OM'_1, et M'' sur $O'M_1$.

Le cercle Ω est le cercle qui passe par les trois points M, M', M'' ; le cercle Ω_1 est le cercle qui passe par les trois points M_1, M'_1, M''_1.

455. On peut concevoir deux cercles Ω, Ω_1 tels que le premier soit tangent intérieurement aux cercles C et C' et extérieurement au cercle C'', tandis que le second est tangent extérieurement aux cercles C et C', et intérieurement au cercle C''. On construira ces deux cercles comme les précédents, en remplaçant l'axe d'homothétie directe des trois cercles par l'axe d'homothétie inverse O_1 O'_1 O''. On obtiendrait deux autres couples de cercles tangents aux trois cercles en séparant de même successivement des deux autres le cercle C', puis le cercle C. De sorte que le problème admet en général huit solutions.

Cette solution remarquable par son élégance et sa simplicité est due au géomètre Gergonne.

EXEMPLES DE THÉORÈMES ÉTABLIS PAR LA CONSIDÉRATION DE FIGURES INVERSES.

456. La transformation d'une figure en une autre par rayons vecteurs réciproques permet de déduire d'une propriété connue de la première figure une propriété correspondante de la seconde, et donne ainsi le moyen d'établir un certain nombre de théorèmes. Nous allons en donner quelques exemples.

457. I. Considérons un triangle ABC (*fig.* 336).

1° La somme des angles vaut deux droits ;

2° Les trois bissectrices se coupent en un même point ;

3° Les trois hauteurs se coupent en un même point.

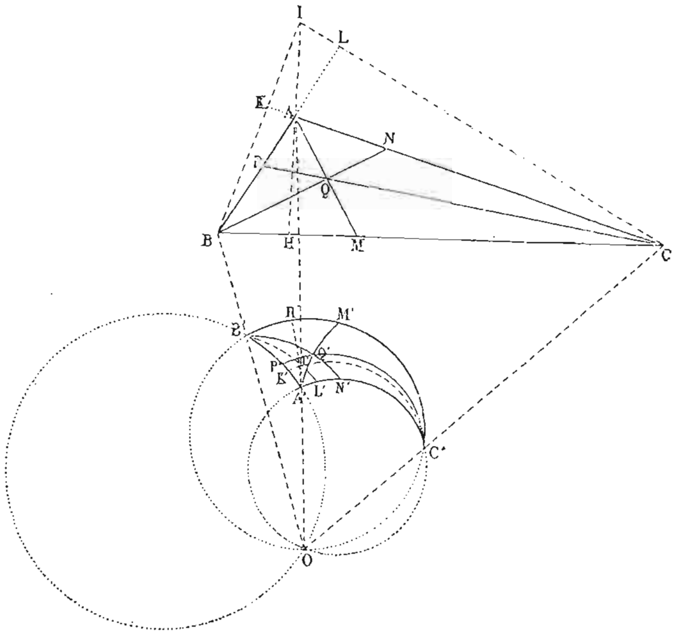


Fig. 336.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine un point O quelconque non situé sur une des droites de la figure donnée.

La figure inverse du triangle ABC est un triangle curviligne A'B'C' dont les côtés sont des arcs de cercle qui se coupent au point O.

Comme les angles correspondants, dans deux figures inverses, sont égaux (444), la figure inverse de la bissectrice de l'angle A est un arc de cercle passant par A' et par O, et divisant l'angle A' en deux parties

égales; et la figure inverse de la hauteur du triangle ABC passant par A est un arc de cercle passant par A' et par O et coupant à angle droit le côté B'C'.

De là résultent les théorèmes suivants :

Dans un triangle curviligne A'B'C' *formé par trois arcs de cercle qui ont un point commun* O :

1° *La somme des angles* A', B', C' *vaut deux droits.*

2° *Si par chaque sommet du triangle* A', B', C' *et par le point* O *on mène un arc de cercle qui partage en deux parties égales l'angle du triangle en ce sommet, on obtient trois arcs de cercle qui ont un second point commun.*

3° *Si par chaque sommet du triangle* A'B'C', *et par le point* O, *on mène un arc de cercle qui coupe à angle droit le côté opposé du triangle, on obtient trois arcs de cercle qui ont un second point commun.*

458. II. Soit un quadrilatère inscriptible convexe, OABC (*fig.* 337). Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant le point O pour origine, et λ pour puissance, les points A', B', C' qui correspondent aux points A, B, C sont en ligne droite, et disposés dans l'ordre A', B', C'. On a donc :

$$A'C' = A'B' + B'C'.$$

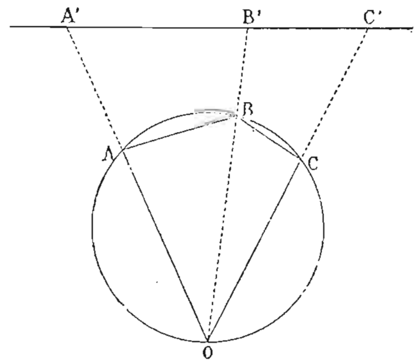


Fig. 337.

D'autre part, on sait que l'on a :

$$A'C' = AC \times \frac{\lambda}{OA.OC}$$

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda}{OA.OB}$$

$$B'C' = BC \times \frac{\lambda}{OB.OC},$$

d'où, en substituant dans la relation précédente et en supprimant le facteur commun λ,

$$\frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB}{OA.OB} + \frac{BC}{OB.OC},$$

relation que l'on peut écrire, en chassant les dénominateurs,

$$AC \times OB = AB \times OC + BC \times OA,$$

ce qui donne le théorème de Ptolémée, déjà démontré n° 288.

Dans un quadrilatère inscriptible, convexe, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

459. III. Réciproquement, soit OABC (*fig.* 336), un quadrilatère convexe tel que l'on ait :

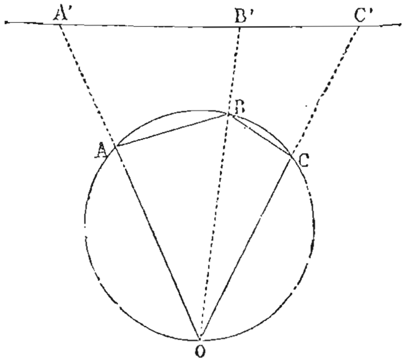


Fig. 338.

$$AC.OB = AB.OC + BC.OA,$$

relation que l'on peut écrire :

$$\frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB}{OA.OB} + \frac{BC}{OB.OC}.$$

Si l'on transforme la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant O pour origine, et si l'on désigne par B', A', C' les points qui correspondent aux points A, B, C, la relation devient :

$$A'C' = A'B' + B'C'$$

et elle exprime que les points A', B', C' sont sur une droite. On en conclut que les points A, B, C sont sur un cercle passant par O, d'où la réciproque du théorème de Ptolémée :

460. *Si dans un quadrilatère convexe, le produit des diagonales est égal à la somme des côtés opposés, le quadrilatère est inscriptible.*

EXERCICES.

1. Une transversale coupe les côtés d'un triangle ABC aux points A',B',C'; on prend A'' conjugué harmonique de A' par rapport aux points B et C, B'' conjugué harmonique de B' par rapport aux points A et C, C'' conjugué harmonique de C' par rapport aux points A et B. Démontrer que les trois droites AA'', BB'', CC'', sont concourantes.

2. Trois rayons lumineux AO, BO, CO, issus des sommets d'un triangle ABC, tombent au point O sur une même droite, de direction quelconque, et se réfléchissent; les rayons réfléchis rencontrent, le premier le côté BC du triangle ABC en A', le second le côté AC en B', le troisième le côté AB en C'; démontrer que les trois points A', B', C' sont en ligne droite.

3. Soit un quadrilatère ABCD dont les côtés opposés se rencontrent aux points E et F. On mène une transversale quelconque; elle rencontre la diagonale AC en M, la diagonale BD en N, et la droite EF en P; on prend M' conjugué harmonique de M par rapport à A et C, N' conjugué harmonique de N par rapport à B et D, P' conjugué harmonique de P par rapport à E et F. Démontrer que les trois points M,' N', P' sont en ligne droite.

4. Soit un triangle ABC dont les côtés AB, AC sont égaux. On prend sur la droite BC un point quelconque P, et, sur AC, un point Q tel que l'on ait

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}};$$

soit M le point de concours des droites AP et BQ. On demande le lieu décrit par le point M quand le point P se meut sur la droite BC.

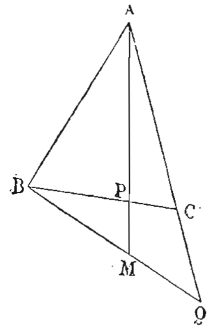


Fig. 338 *bis*.

5. On dit que deux cercles se coupent *orthogonalement* quand les tangentes à ces cercles, en chaque point commun, sont perpendiculaires. Trouver le lieu des centres des cercles qui coupent orthogonalement deux cercles donnés.

6. Par deux points donnés mener un cercle, de rayon donné, qui coupe orthogonalement un cercle donné.

7. Par deux points donnés mener un cercle qui coupe orthogonalement un cercle donné.

8. Par un point donné mener un cercle qui coupe orthogonalement deux cercles donnés.

9. Mener un cercle qui coupe orthogonalement trois cercles donnés.

10. Lieu des points tels que la somme de leurs puissances par rapport à deux cercles qui se coupent orthogonalement soit nulle.

11. Un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle est tel que le pôle de la diagonale AC, par rapport au cercle, est situé sur la diagonale BD; démontrer que, dans ce quadrilatère, le produit de deux côtés opposés est égal au produit des deux autres côtés.

12. Soit un triangle ABC, et un point O quelconque. La polaire du point O par rapport aux côtés de l'angle A rencontre BC en A'; la polaire du point O par rapport aux côtés de l'angle B rencontre AC en B'; la polaire du point O par rapport aux côtés de l'angle C rencontre AB en C'. Démontrer que les trois points A', B', C', sont en ligne droite.

13. Soient C et C' deux cercles et LL' leur axe radical; soit C'_1 le cercle symétrique du cercle C' par rapport à LL'. Démontrer :

1° Que la droite LL' est l'axe radical des cercles C et C'_1;

2° Que si le cercle C' est extérieur au cercle C, l'un des cercles C, C'_1 est intérieur à l'autre.

14. Un quatrilatère étant inscrit dans un cercle, les polaires d'un point quelconque par rapport au cercle, et par rapport à deux côtés opposés du quadrilatère sont trois droites concourantes.

15. Si trois cercles ont même axe radical, les polaires d'un point quelconque de cet axe par rapport aux trois cercles sont des droites concourantes.

16. Soit O le point de concours des médianes d'un triangle, et soit I le point de concours des hauteurs; le cercle des neuf points du triangle, le cercle décrit sur OI comme diamètre et le cercle circonscrit au triangle ont même axe radical.

17. Soit O le centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, O' le centre du cercle exinscrit dans l'angle A du triangle; on inscrit dans l'angle A deux cercles tels que les cordes de contact avec les côtés de l'angle A passent l'une par le point O, l'autre par le point O'. Démontrer que ces deux cercles sont tangents au cercle circonscrit au triangle ABC, le premier intérieurement, le second extérieurement.

18. Une figure est composée de deux cercles C et C'; on prend une figure inverse par rapport à une origine quelconque, et une puissance d'inversion quelconque. Démontrer que le rapport du carré de la longueur d'une tangente commune au produit des deux rayons est le même dans les deux figures.

19. Si trois points A, B, C sont en ligne droite, O étant un point quelconque, démontrer qu'on a la relation :

$$\overline{OA}^2.\overline{BC} + \overline{OB}^2.\overline{CA} + \overline{OC}^2.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0.$$

En déduire, par la considération des figures inverses, le théorème du n° 290 :

Le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscriptible est égal au rapport de la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la première diagonale à la somme des produits des côtés qui aboutissent aux extrémités de la seconde.

20. Un cercle de rayon nul est un point, un cercle de rayon infini est une droite. Que devient l'axe radical de deux cercles quand un rayon devient nul, quand les deux rayons deviennent nuls, quand un des rayons devient infini, quand les deux rayons deviennent infinis, quand un rayon devient nul et l'autre infini.

21. Mêmes questions relativement aux centres de similitude de deux cercles.

22. Appliquer la méthode de Gergonne pour la résolution du problème : *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés*, à la résolution des problèmes suivants :

Mener par un point donné un cercle tangent à deux cercles donnés.

Mener un cercle tangent à une droite et à deux cercles donnés.

Mener un cercle tangent à deux droites et à un cercle donnés.

Mener par un point donné un cercle tangent à un cercle et à une droite donnés.

Mener par deux points donnés un cercle tangent à un cercle donné.

Mener par deux points donnés un cercle tangent à une droite donnée.

23. Soient deux cercles O et O' situés dans un même plan, et soit LL' leur axe radical. Démontrer que la portion de tangente MT au cercle O' comprise entre un point M du cercle O et le point de contact T est toujours moyenne proportionnelle entre la distance du point M à l'axe radical LL' et le double de la distance du centre du cercle O' au même axe radical.

24. Étant donnés deux cercles dans un même plan, trouver dans leur plan un point qui ait même polaire par rapport aux deux cercles. Condition pour que le problème soit possible.

25. Étant donnés deux cercles dans un même plan trouver un pôle d'inversion et une puissance d'inversion tels que les figures inverses des deux cercles donnés soient deux cercles concentriques. Condition de possibilité.

LIVRE IV

MESURE DES AIRES.

§ I. Aire d'un polygone. — § II. Relations entre le carré construit sur le côté d'un triangle opposé à un angle droit, aigu, ou obtus, et les carrés construits sur les deux autres côtés. — § III. Rapport des aires de deux polygones semblables. — § IV. Problèmes de construction relatifs aux aires. — § V. Aire du cercle. — Applications numériques.

§ I. Aire d'un polygone.

461. Définitions. — On appelle *aire*, ou *superficie*, l'étendue d'une portion limitée de surface.

On prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur. L'unité principale de longueur étant le *mètre*, l'unité principale de surface est le *mètre carré*.

On emploie aussi comme unités de longueur les multiples du mètre, *décamètre*, *hectomètre*, *kilomètre*, *myriamètre*, et les sous-multiples, *décimètre*, *centimètre*, *millimètre ;* à ces différentes unités de longueur correspondent pour unités d'aire le *décamètre carré*, l'*hectomètre carré*, le *kilomètre carré*, le *myriamètre carré*, et le *décimètre carré*, le *centimètre carré*, le *millimètre carré*.

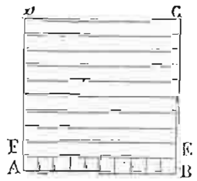


Fig. 339.

Le mètre carré contient 100 décimètres carrés. En effet, soit ABCD (*fig.* 339) un carré dont chaque côté est égal à un mètre, ou à 10 décimètres; partageons le côté AD en 10 décimètres, et par les points de division menons des perpendiculaires à AD. Le carré est ainsi décomposé en 10 rectangles égaux au rectangle ABEF. Partageons de même le côté AB en 10 décimètres, et menons par les points de division des perpendiculaires à AB; le rectangle ABEF est ainsi décomposé en 10 carrés ayant chacun 1 décimètre de côté, et contient par conséquent 10 décimètres carrés. Donc le carré ABCD contient 10 rectangles valant chacun 10 décimètres carrés, et par conséquent contient 10×10, ou 100 décimètres carrés. De même, le décamètre carré vaut 100 mètres carrés, l'hectomètre carré vaut 100 décamètres carrés, etc.

Voici le tableau des différentes unités de surface, évaluées en mètres carrés :

Myriamètre carré.	100 000 000^{mq}.
Kilomètre carré.	1 000 000
Hectomètre carré.	10 000
Décamètre carré.	100
MÈTRE CARRÉ.	1
Décimètre carré.	0,01
Centimètre carré.	0,00 01
Millimètre carré.	0,00 00 01

462. Le mot surface appliqué à une figure plane rappelle à la fois la forme et l'étendue de cette figure, tandis que par le mot *aire* on désigne seulement son étendue. Quand deux surfaces sont superposables, on dit qu'elles sont *égales;* quand deux surfaces ont même étendue ou même aire, on dit qu'elles sont *équivalentes*. Deux surfaces qui sont égales sont toujours équivalentes, mais deux surfaces équivalentes peuvent ne pas être égales; ainsi, les surfaces d'un triangle et d'un carré ne sont jamais égales, mais elles peuvent être équivalentes.

463. On appelle *base* d'un parallélogramme la longueur d'un de ses côtés choisi arbitrairement, et on appelle *hauteur* du parallélogramme la longueur de la perpendiculaire commune au côté pris pour base et au côté opposé.

Dans un rectangle, la base et la hauteur sont deux côtés consécutifs du rectangle, on les nomme les *dimensions* du rectangle.

Dans un triangle, la *base* est la longueur de l'un des côtés choisi arbitrairement, la *hauteur* correspondante est la distance à ce côté du sommet qui lui est opposé.

Théorème.

464. *Le rapport des aires de deux rectangles qui ont même base est égal au rapport de leurs hauteurs.*

Remarquons d'abord que deux rectangles qui ont même base et même hauteur sont égaux ; cela est évident, car les deux rectangles sont superposables. Cela posé, soient ABCD, ABEF deux rectangles ayant même base AB, et pour hauteur l'un AD, l'autre AF (*fig.* 340).

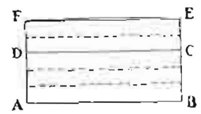


Fig. 340.

Supposons d'abord que les hauteurs AD et AF aient une commune mesure, et que cette commune mesure soit, par exemple, contenue 3 fois dans AD et 5 fois dans AF : le rapport de AD à AF est $\frac{3}{5}$. Si, par les points de division de AF nous menons des parallèles à AB, le rectangle ABCD se trouve partagé en 3 rectangles égaux, et le rectangle ABEF en 5 rectangles égaux aux précédents. Donc, le rapport des aires des deux rectangles est, comme le rapport de leurs hauteurs, égal à $\frac{3}{5}$.

En second lieu, supposons que les deux hauteurs n'aient pas de commune mesure. Partageons AD en un nombre quelconque n de parties égales, et supposons que la hauteur AF soit supérieure à m de ces parties et inférieure à $m+1$. Les valeurs approchées du rapport de AD à AF, par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{n}$ sont $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$. Or, si par les points de division de AD et de AF, nous menons des parallèles à AB, nous partageons le rectangle ABCD en n rectangles égaux, et nous voyons que le rectangle ABEF est supérieur à m rectangles égaux à ceux-ci, et inférieur à $m+1$. Donc, les valeurs approchées, par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des aires des deux rectangles sont aussi les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$. Cela étant, quel que soit n, on en conclut (17) que le rapport des aires des deux rectangles et le rapport de leurs hauteurs sont égaux.

465. REMARQUE. Comme on peut échanger la base et la hauteur d'un rectangle, on peut dire que le *rapport des aires de deux rectangles qui ont même hauteur est égal au rapport de leurs bases.*

Théorème.

466. *Le rapport des aires de deux rectangles quelconques est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.*

Soient ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 341), deux rectangles; désignons par R, R' les aires de ces rectangles, par b, h, et par b', h', la base et la hauteur du premier, et la base et la hauteur du second. Comparons-les à un troisième rectangle $A_1B_1C_1D_1$ ayant même base b' que le second, et même hauteur h que le premier, et désignons par R_1 l'aire de ce troisième rectangle.

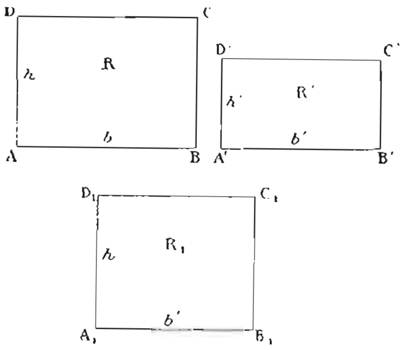


Fig. 341.

Les aires des rectangles ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ qui ont même hauteur h sont proportionnelles aux bases b et b', et on a :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{b}{b'}.$$

Les aires des rectangles R' et R_1 qui ont même base b' sont proportionnelles aux hauteurs h' et h, et on a :

$$\frac{R'}{R_1} = \frac{h'}{h}.$$

On en conclut (18)

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} : \frac{h'}{h} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'}.$$

Théorème.

467. *L'aire d'un rectangle a pour mesure le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur.*

Nous avons dit que l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur. Supposons que le rectangle A'B'C'D' du théorème précédent soit ce carré (*fig.* 342); on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'}.$$

Or, le rapport $\frac{R}{R'}$ est alors la *mesure* de l'aire du rectangle ABCD; les dimensions b' et h' du carré A'B'C'D' étant respectivement égales à l'unité de longueur, les nombres $\frac{b}{b'}$ et $\frac{h}{h'}$ sont les nombres qui mesurent la base et la hauteur du rectangle ABCD. Donc le théorème est démontré.

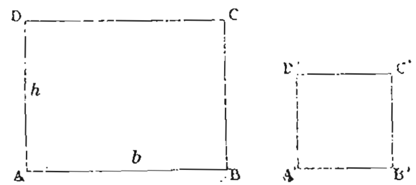


Fig. 342.

Si l'on désigne par R le nombre qui mesure l'aire du rectangle, par b et par h les nombres qui mesurent les longueurs de sa base et de sa hauteur, on a :

$$R = b.h.$$

Pour abréger le discours, on dit d'une façon incorrecte mais rapide : *l'aire d'un rectangle est égale au produit de la base par la hauteur.*

Il est sous-entendu que la base et la hauteur sont mesurées avec la même unité de longueur, et que l'on prend pour unité de surface le carré construit sur cette unité de longueur.

468. COROLLAIRE. Un *carré* étant un rectangle dont les côtés sont égaux, l'aire d'un carré a pour mesure le carré du nombre qui est la mesure de son côté.

Nous retrouvons ainsi que l'aire d'un carré qui a 10 mètres de côté est 100 mètres carrés.

Théorème.

469. *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit le parallélogramme ABCD (*fig.* 343); menons les perpendiculaires AF et BE au côté AB pris pour base du parallélogramme.

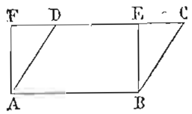


Fig. 343.

Les triangles AFD et BEC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux, savoir : les angles FAD et EBC égaux parce qu'ils ont les côtés parallèles et de même sens, les côtés AD et BC égaux comme côtés opposés d'un parallélogramme, enfin AF et BE égaux pour la même raison.

Or, si du quadrilatère ABCF on retranche le triangle ADF, on obtient le parallélogramme ABCD; si de la même surface on retranche le triangle BCE, on obtient le rectangle ABEF; donc le parallélogramme ABCD et le rectangle ABEF sont équivalents. L'aire du rectangle étant égale à $AB \times AF$, l'aire du parallélogramme ABCD est aussi égale à $AB \times AF$, c'est-à-dire au produit de sa base par sa hauteur.

470. Corollaire I. *Deux parallélogrammes qui ont même base et même hauteur sont équivalents.*

471. Corollaire II. *Deux parallélogrammes qui ont même base sont entre eux comme leurs hauteurs.*

Théorème.

472. *L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

Soit le triangle ABC (*fig.* 344); menons par le point C la parallèle CD à AB, et par le point B la parallèle BD à AC. Nous formons ainsi un parallélogramme ABCD qui a même base AB et même hauteur CI que le triangle.

Or les triangles ABC et BCD, qui ont un côté égal adjacent à

deux angles égaux chacun à chacun, étant égaux, le triangle ABC est la moitié du parallélogramme ABCD. L'aire du parallélogramme est $AB \times CI$; donc l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\,AB \times CI$, c'est-à-dire à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

473. Corollaire I. *Deux triangles qui ont même base et même hauteur sont équivalents.*

Il suit de là que : *si l'on déplace le sommet C d'un triangle ABC sur une droite CC′ parallèle à AB (fig. 345), on ne change pas l'aire du triangle.*

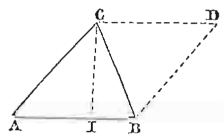


Fig. 344.

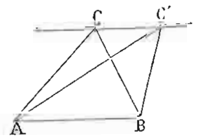


Fig. 345.

474. Corollaire II. *Deux triangles qui ont même base sont entre eux comme leurs hauteurs. — Deux triangles qui ont même hauteur sont entre eux comme leurs bases.*

Théorème.

475. *L'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

Soit le trapèze ABCD (*fig.* 346), dont les bases sont les côtés parallèles AB et CD; la hauteur est la distance DI des deux bases.

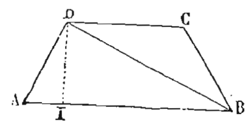


Fig. 346.

Décomposons le trapèze en deux triangles en menant la diagonale BD; l'aire du trapèze est la somme des aires de ces deux triangles. L'aire du triangle ABD est $\frac{1}{2}\,AB \times DI$, et l'aire du triangle BDC est $\frac{1}{2}\,DC \times DI$; donc l'aire du trapèze est

$$\tfrac{1}{2}\,AB \times DI + \tfrac{1}{2}\,DC \times DI$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\,(AB + DC) \times DI,$$

c'est-à-dire le produit de la demi-somme des bases par la hauteur.

476. Remarque. *La demi-somme des bases d'un trapèze est égale à la ligne qui joint les milieux des côtés non parallèles.*

En effet (*fig.* 347), par le milieu E de AD menons la parallèle EF à AB; cette ligne passe par le milieu G de DB, et, par suite, par le milieu F de BC; EG est la moitié de AB, car les triangles DLG, DAB sont semblables, et le rapport de EG à AB est égal au rapport de DE à DA, lequel est

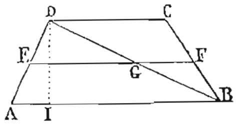


Fig. 347.

par hypothèse égal à $\frac{1}{2}$; de même GF est la moitié de DC. Donc EF est la moitié de la somme AB + DC des bases du trapèze.

Problème.

477. *Mesurer la surface d'un polygone.*

Pour mesurer la surface d'un polygone ABCDE (*fig.* 348), on le décompose en triangles; on évalue les aires de ces triangles,

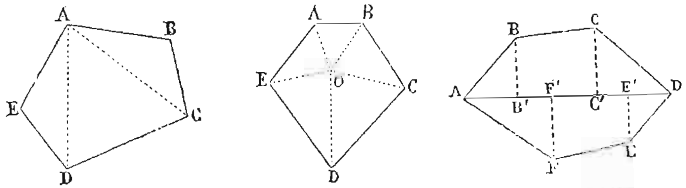


Fig. 348. Fig. 349. Fig. 350.

et on en fait la somme. Cette somme est l'aire du polygone. Pour effectuer la décomposition d'un polygone en triangles, on mène des diagonales d'un sommet A du polygone à tous les autres, et on obtient ainsi autant de triangles que le polygone a de côtés moins deux; ou bien encore, on prend un point O dans l'intérieur du polygone, et on joint ce point à tous les sommets du polygone (*fig.* 349); on a ainsi autant de triangles que le polygone a de côtés.

Lorsqu'il s'agit d'évaluer la surface d'un polygone tracé sur le terrain, il est plus avantageux d'opérer autrement. On mène la plus grande diagonale AD du polygone (*fig.* 350), et de tous les sommets du polygone on abaisse des perpendiculaires sur la diagonale AD; on décompose ainsi le polygone en triangles rectangles et en trapèzes. Les hauteurs de ces triangles et de

ces trapèzes sont toutes dirigées suivant AD, et les bases sont les perpendiculaires abaissées des sommets du polygone sur AD, de sorte que, pour le calcul des aires partielles, il suffit de mesurer les longueurs de ces perpendiculaires et des segments qu'elles déterminent sur AD. L'aire du polygone est ainsi la somme de

$$\frac{1}{2}BB' \times AB' + \frac{1}{2}(BB' + CC') \times B'C' + \frac{1}{2}CC' \times C'D$$

$$+ \frac{1}{2}FF' \times AF' + \frac{1}{2}(FF' + EE') \times F'E' + \frac{1}{2}EE' \times E'D.$$

Problème.

478. *Former un triangle équivalent à un polygone donné.*

Proposons-nous d'abord de transformer un polygone en un autre polygone équivalent et ayant un côté de moins.

Soit le polygone ABCDEF (*fig.* 351); considérons le triangle ABC formés par deux côtes consécutifs AB, BC, et par la diagonale AC. Si nous menons par le point B la parallèle BG à AC, cette ligne rencontre le côté CD du polygone en un point G, et le triangle AGC est équivalent au triangle ABC (472). Nous n'altérerons donc pas la surface du polygone pro-

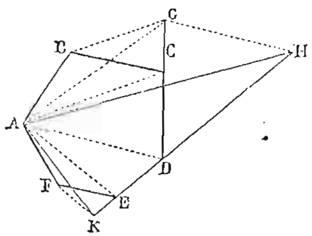


Fig. 351.

posé en remplaçant le triangle ABC par le triangle AGC; d'ailleurs, comme le côté CG de ce triangle est sur le prolongement du côté CD du polygone proposé, nous aurons ainsi transformé le polygone proposé, ABCDEF, en un polygone AGDEF qui lui est équivalent, et qui a un côté de moins.

En opérant de même sur ce nouveau polygone, nous le transformerons en un autre polygone équivalent ayant encore un côté de moins; et, en continuant ainsi de proche en proche, nous arriverons à un triangle AHK équivalent au polygone proposé.

479. Applications numériques. I. *Calculer, à moins d'un décimètre carré, l'aire d'un triangle équilatéral dont le côté est égal à* $3^m,25$.

Désignons par a le côté d'un triangle équilatéral ABC, et par S l'aire de ce triangle (*fig.* 352). On a :

$$S = \frac{1}{2} BC \times AD;$$

or,

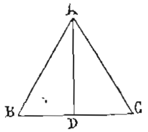


Fig. 352.

$$AD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Donc

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouve pour la surface cherchée, à un décimètre carré près, $4^{mq},58$.

II. *Calculer l'aire du trapèze* ABCD *dans lequel l'angle* A *est droit, connaissant la base* AB *égale à* 12^m *et les côtés non parallèles* AD *et* BC *égaux, le premier à* 4^m, *le second à* 7^m (*fig.* 353).

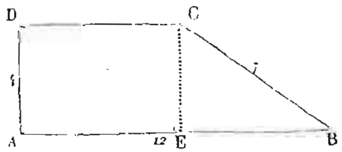


Fig. 353.

Le côté AD est la hauteur du trapèze ; il reste à calculer la seconde base DC. A cet effet, abaissons du point C la perpendiculaire CE sur AB. On a :

$$DC = AE = AB - BE.$$

D'autre part, dans le triangle rectangle CEB, on a

$$\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2.$$

Or

$$BC = 7^m, \quad CE = AD = 4^m,$$

donc

$$\overline{BE}^2 = 49 - 16 = 33;$$

d'où

$$BE = \sqrt{33} = 5^m,7445$$

et

$$CD = 12^m - 5^m,7445 = 6,2555.$$

La surface S est donnée par la formule

$$S = \frac{AB + DC}{2} \times AD = \frac{12 + 6,2555}{2} \times 4 = 36^{mq},5110$$

à un centimètre carré près.

§ II. Relations entre le carré construit sur le coté d'un triangle opposé a un angle droit, aigu, ou obtus, et les carrés construits sur les deux autres cotés.

480. Si l'on prend pour unité d'aire le carré construit sur l'unité de longueur employée, le carré du nombre qui mesure la longueur d'une droite est l'aire du carré construit sur cette droite, et le produit des nombres qui mesurent les longueurs de deux droites est l'aire du rectangle construit sur ces deux droites. Ceci permet de donner une interprétation nouvelle aux relations établies nos 266 et suivants, entre les nombres qui mesurent les côtés d'un triangle et certains segments de ces côtés. Ainsi, par exemple, de ce que *le carré d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal au produit de l'hypoténuse par la projection de ce côté sur l'hypoténuse,* il résulte que *le carré construit sur un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse entière et la projection de ce côté sur l'hypoténuse.* De même, de ce que *le carré d'un côté d'un triangle opposé à un angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés du triangle moins deux fois le produit de l'un de ces autres côtés par la projection de l'autre sur lui,* il résulte que *le carré construit sur un côté d'un triangle, opposé à un angle aigu, équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle construit sur l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur lui.*

Ces interprétations sont parfaitement légitimes, et les théorèmes nouveaux qu'on en déduit sont ainsi rigoureusement démontrés. Toutefois il est bon d'établir directement, ainsi que nous allons le faire, que les surfaces considérées sont équivalentes, sans avoir recours aux relations numériques établies précédemment.

Théorème.

481. *Dans un triangle rectangle : 1° le carré construit sur un côté de l'angle droit équivaut au rectangle construit sur l'hypoténuse et la projection de ce côté sur l'hypoténuse; 2° le carré construit sur l'hypoténuse équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés; 3° le rapport des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit est égal au rapport des projections de ces côtés sur l'hypoténuse.*

Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 354); sur chaque côté du triangle, extérieurement au triangle, construisons un carré; du sommet de l'angle droit abaissons la perpendiculaire AD sur l'hypoténuse, et prolongeons cette ligne jusqu'au point M où elle rencontre le côté FE du carré construit sur l'hypoténuse.

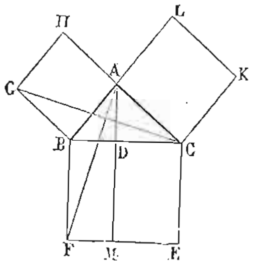


Fig. 354.

1° Le carré ABGH, construit sur le côté AB de l'angle droit, équivaut au rectangle BDMF, construit sur la ligne BF égale à l'hypoténuse BC et sur la projection BD du côté AB sur l'hypoténuse. En effet, menons les droites GC et AF; les triangles GBC et ABF sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles GBC et ABF égaux comme étant tous deux la somme d'un angle droit et de l'angle ABC, les côtés BG et AB égaux comme côtés du même carré, les côtés BC et BF égaux pour la même raison. Or le triangle GBC, qui a pour base BG et pour hauteur la distance des parallèles AC et BG, c'est-à-dire AB, équivaut à la moitié du carré ABGH; de même le triangle ABF, qui a pour base BF et pour hauteur la distance des parallèles AD et BF, c'est-à-dire BD, équivaut à la moitié du rectangle BDMF. Donc le carré ABGH équivaut au rectangle BDMF.

On verrait de même que le carré ACKL équivaut au rectangle CDME.

2° Le carré BCEF, construit sur l'hypoténuse, équivaut à la somme des carrés ABGH et ACKL construits sur les deux côtés de l'angle droit. En effet, le carré BCEF est la somme des rectangles, BDMF et CDME, et ces rectangles sont respectivement équivalents aux carrés construits sur AB et sur AC.

3° Le rapport des carrés construits sur AB et sur AC est égal au rapport des projections BD et DC de ces côtés sur l'hypoténuse. En effet, ces carrés sont respectivement équivalents aux rectangles BDMF, CDME, et ces rectangles, ayant même hauteur BF, sont entre eux comme leurs bases BD et DC (464).

Théorème.

482. *Dans un triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle aigu équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle construit sur l'un de ces deux côtés et la projection de l'autre sur lui.*

Soit, dans le triangle ABC (*fig.* 355), le côté BC opposé à un angle aigu, A. Sur les trois côtés du triangle extérieurement au triangle, construisons les carrés BCDE, ACFG, ABHK; menons les trois hauteurs AA′, BB′, CC′ du triangle, et prolongeons ces droites jusqu'aux points M, N, P, où elles rencontrent les côtés des carrés opposés aux côtés du triangle. L'angle A étant aigu, les deux angles B et C peuvent être aigus

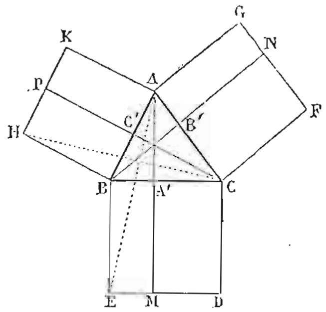


Fig. 355.

tous deux, ou l'un aigu et l'autre obtus. Supposons d'abord les angles B et C aigus tous deux (*fig.* 355). Alors le point A′ tombe entre B et C, le point B′ entre A et C, et le point C′ entre A et B. Considérons les rectangles BA′ME et BC′PH construits, le premier sur le côté BC et la projection BA′ de BA sur BC, le second sur AB et la projection BC′ de BC sur AB; ces deux rectangles sont équivalents. En effet, le premier, BA′ME, est double du triangle ABE, qui a même base et même hauteur; le second, BC'PH, est double du triangle HBC, qui a même base et même hauteur; et les triangles ABE et HBC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. On verrait de même que les deux rectangles CA'MD, CB'NF, équivalents, ainsi que les rectangles AB'NG et AC'PK. Or le carré fait sur BC équivaut à la somme des rectangles BA'ME et CA'MD, ou des rectangles BC'PH et CB'NF respectivement équivalents aux précédents. Le rectangle BC'PH équivaut au carré fait sur AB, moins le rectangle AC'PK; de même, le rectangle CB'NF équivaut au carré fait sur AC, moins le rectangle AB'NG; les rectangles AC'PK et AB'NG sont équivalents. Donc le carré fait sur BC équivaut à la somme des carrés faits sur les côtés AB et AC, moins deux fois l'un ou l'autre des deux rectangles AC'PK, AB'NG construits sur l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur lui.

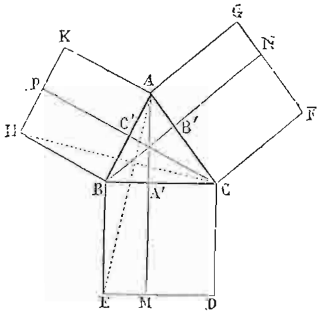


Fig. 355 *bis*.

Supposons maintenant l'un des angles B ou C obtus, C par exemple (*fig.* 356). Alors le point A tombe sur le prolongement de BC, le point B', tombe sur le prolongement de AC, et le point C' entre A et B. On a toujours le rectangle BA'ME équivalent à BC'PH, le rectangle CA'MD équivalent à CB'NF, et le rectangle AB'NG équivalent AC'PK.

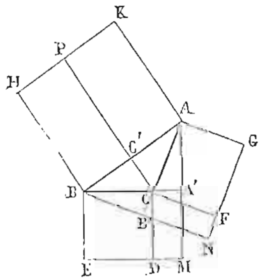


Fig. 356.

De la somme des carrés construits sur AB et sur AC retranchons deux fois le rectangle AC'PK, construit sur le côté AB et sur la projection AC' du côté AC sur AB, ou, ce qui revient au même, retranchons le rectangle AC'PK, et le rectangle équivalent AB'NG; la surface restante équivaut au rectangle BC'PH moins le rectangle CB'NF, ou, ce qui revient au même, au rectangle BA'ME moins le rectangle CA'MD, ou enfin au carré

BCDE fait sur BC. Donc, dans ce cas encore, le carré fait sur BC, côté opposé à un angle aigu, équivaut à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés, moins deux fois le rectangle construit sur l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur lui.

Théorème.

483. *Dans un triangle, le carré construit sur un côté opposé à un angle obtus équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, plus deux fois le rectangle construit sur l'un de ces côtés et la projection de l'autre sur lui.*

Soit (*fig.* 357) le côté BC opposé à un angle obtus A. Si nous effectuons les mêmes constructions que dans le numéro précédent, le point A' tombe entre B et C; mais les points B' et C' tombent, le premier sur le prolongement de CA, le second sur le prolongement de BA. D'ailleurs on a toujours le rectangle BA'MD équivalent à BC'PH, le rectangle CA'ME équivalent à CB'NF, et le rectangle AB'NG équivalent à AC'PK. Or le carré BCED, construit sur BC, équivaut à la somme des rectangles BA'MD et CA'ME, ou des rectangles BC'PH et CB'NF, ou encore à la somme des carrés construits sur AB et sur AC augmentée de la somme des deux rectangles équivalents AC'PK et AB'NG. Donc le carré construit sur le côté BC, opposé à un angle obtus, équivaut à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés, plus deux fois l'un ou l'autre des deux rectangles équivalents AC'PK et AB'NG construits sur l'un des deux côtés AB ou AC et la projection de l'autre sur lui.

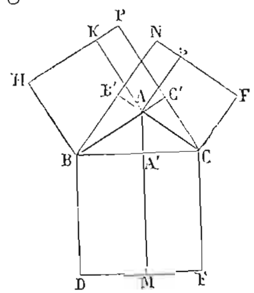


Fig. 357.

§ III. Rapport des aires de deux polygones semblables.

Théorème.

484. *Le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au rapport des carrés des côtés homologues.*

Soient deux triangles semblables ABC, A'B'C' (*fig.* 358), et dans ces triangles soient les hauteurs AD et A'D' qui correspondent aux côtés homologues BC et B'C'. L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AD ; l'aire du triangle A'B'C' est $\frac{1}{2}$ B'C' $\times$ A'D' ; donc le rapport des aires des deux triangles est $\frac{BC \times AD}{B'C' \times A'D'}$, ou le produit des rapports $\frac{BC}{B'C'}$ et $\frac{AD}{A'D'}$. Or les triangles rectangles ADB et A'D'B', qui ont un angle aigu égal, B = B', sont semblables, et le rapport $\frac{AD}{A'D'}$ est égal à $\frac{AB}{A'B'}$, ou à $\frac{BC}{B'C'}$.

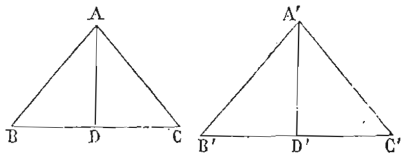


Fig. 358.

Donc le rapport des aires des deux triangles est $\frac{BC}{B'C'} \times \frac{BC}{B'C'}$ ou $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$.

Théorème.

485. *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal au rapport des carrés des côtés homologues.*

Soient les deux polygones semblables ABCDEF et A'B'C'D'E'F' (*fig.* 359). Décomposons ces deux polygones en un même nombre de triangles semblables ABC et A'B'C', ACD et A'C'D'... etc. Le rapport des aires des triangles ABC et A'B'C' est $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$, le rapport des aires des triangles ACD et A'C'D' est $\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}$, ou $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ et ainsi de suite : de sorte que le rapport des aires de

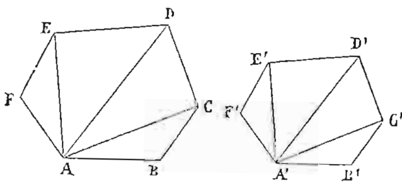


Fig. 359.

deux triangles semblables, appartenant, l'un au premier polygone, l'autre au second, est $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$. Donc, le rapport $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$ est égal au rapport de la somme des triangles du premier polygone à la somme des triangles du second polygone, c'est-à-dire au rapport des aires des deux polygones.

§ IV. Problèmes de construction relatifs aux aires.

Problème.

486. *Construire un carré équivalent à la somme ou à la différence de deux carrés donnés.*

Soient a et b les côtés des deux carrés donnés, x le côté du carré demandé. Dans le premier cas on a

$$x^2 = a^2 + b^2;$$

x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont a et b sont les deux côtés de l'angle droit (*fig.* 360).

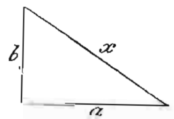


Fig 360.

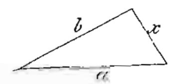


Fig. 361.

Dans le second cas on a

$$x^2 = a^2 - b^2;$$

x est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est a, et dont l'autre côté de l'angle droit est b (*fig.* 361).

Problème.

487. *Étant donnés deux polygones semblables, construire un troisième polygone semblable aux deux polygones donnés, et équivalent à leur somme ou à leur différence.*

Ce problème se ramène facilement au problème précédent. Soient, en effet, A et B les aires des deux polygones donnés, a et b deux côtés homologues de ces polygones, X l'aire du polygone cherché, et x le côté de ce polygone homologue aux côtés a et b des polygones donnés. Les trois polygones étant semblables, on a :

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{X}{x^2}$$

et par suite

$$\frac{X}{x^2}=\frac{A+B}{a^2+b^2}=\frac{A-B}{a^2-b^2}.$$

Dans le premier cas, X devant être égal à A + B, on a

$$x^2=a^2+b^2.$$

Dans le second cas, X devant être égal à A — B, on a

$$x^2=a^2-b^2.$$

D'ailleurs, connaissant le côté x du polygone cherché, homologue au côté a du polygone A, on construira le polygone demandé comme il a été expliqué au n° 260.

Problème.

488. *Construire un carré tel que le rapport de son aire à l'aire d'un carré donné soit égal au rapport de deux lignes données.*

Soient a le côté du carré donné, m et n les deux longueurs données, x le côté du carré cherché ; on a

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{m}{n}.$$

La construction de la longueur x peut se faire, comme au n° 302, en remarquant que cette longueur est moyenne proportionnelle entre les longueurs a et $\frac{m}{n}a$. On peut encore la construire comme il suit :

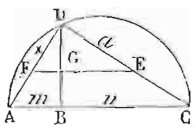


Fig. 362.

Sur une droite indéfinie, prenons AB $=m$, BC $=n$ (*fig.* 362), et, sur AC comme diamètre, décrivons une demi-circonférence. Au point B élevons la perpendiculaire BD

à AC, et soit D le point où cette perpendiculaire rencontre la circonférence. Menons les droites DA et DC. Le triangle ADC étant rectangle en D, on a (268)

$$\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2}=\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}.$$

Prenons sur DC, à partir du point D, une longueur DE égale à a, et par le point E menons la parallèle EF à AB ; DF est le côté x du carré demandé. On a, en effet,

$$\frac{DF}{DE}=\frac{DA}{DC}$$

ou, en appelant x la longueur DF,

$$\frac{x}{a}=\frac{DA}{DC};$$

d'où enfin

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\overline{DA}^2}{\overline{DC}^2}=\frac{m}{n}.$$

489. Remarque. Si le rapport des aires des deux carrés est donné en nombre, par exemple si ce rapport doit être égal à $\frac{2}{5}$, on prend, sur une ligne indéfinie, une longueur AB contenant deux fois une unité arbitraire, et une longueur BC contenant cinq fois la même unité, puis on achève la construction comme précédemment.

Problème.

490. *Construire un rectangle équivalent à un carré donné et dont les deux côtés aient leur somme ou leur différence égale à une longueur donnée.*

Le problème revient à construire deux longueurs connaissant leur moyenne proportionnelle et leur somme ou leur différence; il a été résolu n° 310 et n° 311.

§ V. Aire du cercle. — Applications numériques.

Théorème.

491. *L'aire d'un polygone régulier est égale au produit du périmètre du polygone par la moitié de l'apothème.*

Soit par exemple l'octogone régulier ABCDEFGH (*fig.* 363). Joignons le centre O du polygone à tous les sommets ; nous décomposons ainsi le polygone en huit triangles égaux au triangle AOB. L'aire du triangle AOB étant le produit du côté AB par la moitié du rayon OI du cercle inscrit, l'aire du polygone est 8 fois le produit $AB \times \frac{OI}{2}$, c'est-à-dire le périmètre, 8AB, multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

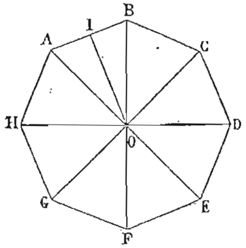


Fig. 363.

Théorème.

492. *L'aire du cercle est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon.*

On appelle aire d'un cercle la limite vers laquelle tend l'aire d'un polygone régulier inscrit dans ce cercle, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de ce polygone.

Soient P le périmètre d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, OI le rayon du cercle inscrit dans ce polygone (*fig.* 364) ; l'aire du polygone est

$$P \times \frac{1}{2}\,OI.$$

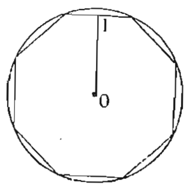


Fig. 364.

Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone, le périmètre P du polygone tend vers une limite qui est ce que l'on appelle la longueur de la circonférence ; de son côté le rayon OI du cercle inscrit dans le

polygone tend vers le rayon R du cercle ; de sorte que l'aire du polygone régulier inscrit, quand on double indéfiniment le nombre de ses côtés, tend vers une limite qui est

$$\text{Circonférence R} \times \frac{1}{2}\,R.$$

C'est cette limite que l'on nomme aire du cercle ; on a donc

$$\text{Cercle R} = \text{Circonférence R} \times \frac{1}{2}\,R;$$

or,

$$\text{Circonférence R} = 2\,\pi\,R\,;$$

donc

$$\text{Cercle R} = 2\pi R \times \frac{1}{2}\,R = \pi R^2.$$

On obtient donc l'aire d'un cercle en multipliant le carré du rayon par le nombre π.

493. Corollaire. *Les aires de deux cercles sont proportionnelles aux carrés des rayons.*

Soient R et R′ les rayons de deux cercles, on a

$$\text{Cercle R} = \pi R^2$$
$$\text{Cercle R}' = \pi R'^2$$

donc

$$\frac{\text{Cercle R}}{\text{Cercle R}'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Théorème.

494. *L'aire d'un secteur circulaire est égale au produit de l'arc du secteur par la moitié du rayon.*

On appelle *secteur* circulaire la portion d'un cercle comprise entre deux rayons. On appelle aire d'un secteur circulaire AOB (*fig.* 365) la limite vers laquelle tend l'aire du polygone limité par les rayons OA, OB, et par une ligne polygonale régulière inscrite dans l'arc AB, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne. Or, on démontre, comme au n° 490, que l'aire de ce polygone est égale au produit de la longueur de la ligne polygonale régulière inscrite dans l'arc AB par la moitié de son apothème. Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne, sa longueur tend vers une limite qui est la longueur de l'arc AB, son apothème tend vers le rayon du cercle. Donc l'aire du secteur AOB est égale au produit de la longueur de l'arc AB par la moitié du rayon du cercle.

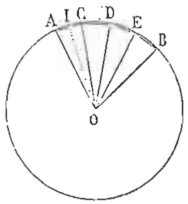


Fig. 365.

495. Remarque. Le rapport des aires de deux secteurs AOB, A′OB′ appartenant à un même cercle, est égal au rapport des arcs de ces secteurs.

On a, en effet

$$\text{Sect. AOB} = \tfrac{1}{2}\,\text{R} \times \text{arc AB}$$
$$\text{Sect. A'OB'} = \tfrac{1}{2}\,\text{R} \times \text{arc A'B'}$$

d'où

$$\frac{\text{Sect. AOB}}{\text{Sect. A'OB'}} = \frac{\text{arc AB}}{\text{arc A'B'}}.$$

Il suit encore de là que le rapport de l'aire d'un secteur à l'aire du cercle est égal au rapport de l'arc du secteur à la circonférence du cercle. Par conséquent pour évaluer la surface d'un secteur, il suffit de multiplier la surface du cercle par le rapport de l'arc du secteur à la circonférence du cercle.

Exemple : Dans un cercle de rayon R, la surface d'un secteur dont l'arc est de 30° est égale à $\frac{30}{360} \times \pi R^2$, ou à $\frac{1}{12}\pi R^2$.

Théorème.

496. *L'aire d'un segment de cercle* AMB, *moindre qu'un demi-cercle, a pour mesure le produit de la moitié du rayon par l'excès de l'arc* AMB *sur la moitié de la corde qui sous-tend un arc double de l'arc* AMB.

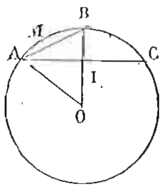


Fig. 366.

L'aire du segment AMB (*fig.* 366) équivaut à l'excès de l'aire du secteur OAMB sur l'aire du triangle OAB. Or, soit AMC un arc double de l'arc AMB; le rayon OB est perpendiculaire à la corde AC et la partage en deux parties égales. L'aire du sec-

teur OAMB a pour mesure $\frac{\text{R}}{2} \times \text{arc AMB}$; l'aire du triangle OAB a pour mesure $\frac{\text{R}}{2} \times \text{AI}$; donc on a

$$\text{Aire du segment AMB} = \frac{\text{R}}{2} \times \text{arc AMB} - \frac{\text{R}}{2} \times \text{AI},$$

ou, AI étant la moitié de AC,

$$\text{Aire du segment AMB} = \frac{\text{R}}{2}\left(\text{arc AMB} - \frac{\text{AC}}{2}\right).$$

Applications numériques.

I. *Calculer l'aire d'un cercle dont la circonférence est égale à 2 mètres.*

On a

$$\text{Circonférence R} = 2\pi \text{R}$$

d'où

$$\text{R} = \frac{\text{Circonf. R}}{2\pi}.$$

D'autre part,

$$\text{Cercle R} = \pi \text{R}$$

ou, en remplaçant R par $\frac{\text{Circonf. R}}{2\pi}$,

$$\text{Cercle R} = \pi\left(\frac{\text{Circonf. R}}{2\pi}\right)^2 \times \pi\,\frac{(\text{Circonf. R})^2}{4\pi^2}$$

$$\text{Cercle R} = \left(\frac{\text{Circonf. R}}{2}\right)^2 \times \frac{1}{\pi}.$$

Donc, en faisant circonf. R = 2, on a pour l'aire demandée

$$\text{Cercle R} = \frac{1}{\pi} = 0^{\text{mq}},3183$$

à moins de 1 centimètre carré.

II. *Calculer, dans un cercle dont le rayon est 2 mètres, l'aire d'un segment compris entre un arc de 60° et sa corde.*

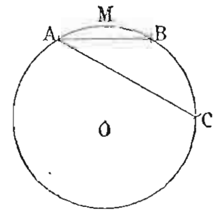


Fig. 367.

Désignons d'abord par R le rayon du cercle. L'arc AMB qui est le sixième de la circonférence est $\frac{2\pi \text{R}}{6}$; la corde qui sous-tend un arc AMB est égale au côté du triangle équilatéral inscrit, ou à $\text{R}\sqrt{3}$. Donc (496), l'aire demandée est

$$\frac{R}{2}\left(\frac{2\pi R}{6}-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{R^2}{12}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right).$$

En faisant $R=2$, on a pour l'aire demandée

$$\frac{1}{3}\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$$

ou, en effectuant les calculs indiqués, $0^{mq},3624$, à 1 cent. carré près.

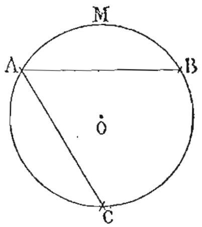


Fig. 368.

III. *Calculer, à moins de* $0^m,01$, *le rayon d'un cercle tel que le segment correspondant à un arc de* $120°$ *soit équivalent à 1 mètre carré.*

Désignons par R le rayon du cercle, et par S la surface du segment AMB correspondant à un arc de $120°$ (*fig.* 368).

L'arc AMB, qui est le tiers de la circonférence, est égal à $\frac{2\pi R}{3}$; la corde AC qui sous-tend un arc double de l'arc ANB, c'est-à-dire un arc de $240°$, sous-tend aussi un arc de $360° - 240° = 120°$, et, par conséquent, est égal au côté $R\sqrt{3}$ du triangle équilatéral inscrit dans le cercle. Donc on a

$$S=\frac{R}{2}\left(\frac{2\pi R}{3}-\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{R^2}{12}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)$$

d'où

$$R^2=\frac{12S}{4\pi-3\sqrt{3}}$$

et

$$R=\sqrt{\frac{12S}{4\pi-3\sqrt{3}}}.$$

Si l'on fait $S=1$, on a

$$R=\sqrt{\frac{12}{4\pi-3\sqrt{3}}}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouve pour le rayon $1^m,27$, à moins de $0^m,01$.

EXERCICES SUR LE LIVRE IV.

Théorèmes et problèmes.

1. Soit un triangle ABC dans lequel l'angle A est droit et l'angle B égal à 60° (*fig.* 369). On construit, en dehors du triangle : 1° sur l'hypoténuse BC un carré BCDE, 2° sur le côté AB le triangle équilatéral ABF, 3° sur le côté AC le triangle équilatéral ACG ; on mène les droites EF et FG.

Évaluer l'aire du quadrilatère EDGF en supposant l'hypoténuse BC du triangle égale à a. Appliquer la formule en supposant a égale à 5^m.

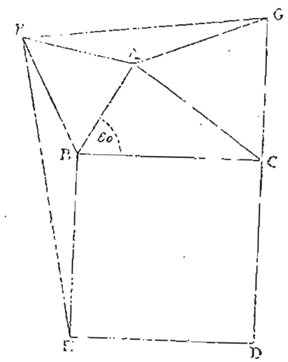


Fig. 369.

2. Calculer l'aire d'un trapèze rectangle dans lequel un des angles est de 60°, connaissant : soit les bases parallèles, soit l'une des bases et la hauteur, soit l'une des bases et le côté oblique aux bases.

3. Parmi tous les triangles que l'on peut former avec deux côtés donnés, quel est celui qui a la plus grande surface?

4. Parmi tous les triangles qui ont même base AB, et leur sommet sur une circonférence passant par les points A et B, quel est celui qui a la plus grande surface?

5. Parmi tous les rectangles inscrits dans un cercle, quel est celui qui a la plus grande surface?

6. Soit R le rayon d'un cercle, calculer l'aire du triangle équilatéral, de l'hexagone régulier, du dodécagone régulier, du carré, de l'octogone régulier, inscrits dans ce cercle.

7. Partager un triangle en deux parties proportionnelles à deux nombres donnés par une droite menée par l'un des sommets.

8. Si les angles A et A' des triangles ABC, A'B'C' sont égaux ou supplémentaires, le rapport des surfaces des triangles est égal au rapport du produit des côtés qui comprennent l'angle A au produit des côtés qui comprennent l'angle A'.

9. Par un point situé sur un côté d'un triangle, mener une droite qui partage le triangle en deux parties proportionnelles à des nombres donnés.

10. Partager un triangle en trois parties proportionnelles à des nombres donnés par trois droites menées d'un même point aux trois sommets.

11. Partager un trapèze en deux parties proportionnelles à des nombres donnés par une droite parallèle aux bases du trapèze.

12. Deux quadrilatères qui ont leurs diagonales respectivement égales et faisant le même angle sont équivalents.

13. Des relations algébriques

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=a^2+b^2+2ab\\(a-b)^2&=a^2+b^2-2ab\end{aligned}$$

et du théorème concernant l'aire d'un rectangle, on conclut que le carré construit sur la somme ou sur la différence de deux droites équivaut au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, plus ou moins deux fois le rectangle construit sur ces deux droites.

Vérifier ce fait géométriquement, sans avoir recours aux relations algébriques.

14. Calculer la surface d'un triangle équilatéral dont la hauteur est h.

15. Soient AB et CD deux diamètres rectangulaires d'un cercle O; du point C comme centre, avec CA pour rayon, on décrit un arc de cercle AMB; calculer l'aire de la surface comprise entre les deux arcs de cercle ADB et AMB.

16. Soit un demi-cercle AMB (*fig.* 370); d'un point M quelconque de la circonférence on abaisse MP perpendiculaire sur le diamètre AB, et, sur

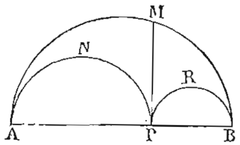


Fig. 370.

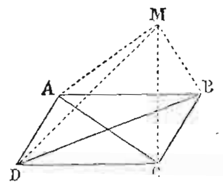


Fig. 371.

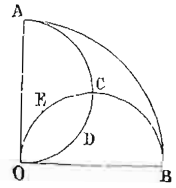


Fig. 372.

AP et PB comme diamètres, on décrit les demi-cercles ANP et PRB; démontrer que la surface comprise entre la demi-circonférence AMB et les demi-circonférences ANP et PRB équivaut au cercle décrit sur MP comme diamètre.

17. Calculer la portion de surface d'un demi-cercle comprise entre deux cordes parallèles AB et CD, l'une égale au rayon, l'autre égale au côté du triangle équilatéral inscrit.

18. Étant donné deux cercles qui se coupent aux deux points A et -par le point A on mène une sécante quelconque qui coupe les deux circonférences en C et D. Démontrer que l'aire du triangle BCD, dont deux côtés sont curvilignes, est proportionnelle au carré du côté rectiligne CD, (Concours général.)

19. Soit un parallélogramme ABCD (*fig.* 371) dont les diagonales sont AC et BD : lieu des points M tels que la somme ou la différence des surfaces des triangles MAC et MBD soit constante, et équivalente à la surface d'un carré donné.

20. Sur les deux rayons OA, OB d'un quadrant pris pour diamètre (*fig.* 372) on décrit deux demi-circonférences ODCA, OECB qui se coupent au point C; démontrer : 1° que les trois points A, C, B sont en ligne droite; 2° que l'aire de la figure ODCEO équivaut à l'aire de la figure ABC; 3° que l'aire OACEO est égale à $\frac{R^2}{4}$.

21. On donne un hexagone régulier dont le côté est a; on prolonge les côtés, dans le même sens, d'une longueur égale à ma; on joint les extrémités de ces côtés ainsi prolongés, et l'on demande de prouver que la figure ainsi formée est un hexagone régulier, et que l'aire de ce nouvel hexagone est égale à l'aire du premier multiplié par

$$^2 + m + 1.$$

22. Si dans un cercle on inscrit une corde AB de longueur constante $a + b$, un point M de cette corde tel que les segments AM et MB sont respectivement égaux à a et à b, décrit une ligne telle que la surface comprise entre cette ligne et le cercle donné est équivalente à πab.

LIVRE V

DROITES ET PLANS.

§ I. Détermination d'un plan. — § II. Droite perpendiculaire à un plan. — § III. Parallélisme des droites et des plans : droites parallèles, droite parallèle à un plan, plans parallèles. — § IV. Angle de deux plans. — § V. Plans perpendiculaires. — § VI. Angle d'une droite et d'un plan. — § VII. Plus courte distance de deux droites. — § VIII. Angles trièdres et angles polyèdres trièdres supplémentaires. Cas d'égalité des trièdres. Analogies et différences entre les propriétés des angles trièdres et les propriétés des triangles rectilignes.

§ I. Détermination d'un plan.

497. Définition. Un plan est une surface telle qu'il suffit qu'une droite ait deux points sur cette surface pour y être contenue tout entière.

Une pareille surface est indéfinie; comme on n'en peut figurer qu'une portion limitée, on représente ordinairement un plan par un parallélogramme tracé sur la surface; mais il faut toujours concevoir que la surface ainsi représentée n'est pas limitée au contour de ce parallélogramme, et qu'elle s'étend aussi indéfiniment à l'extérieur.

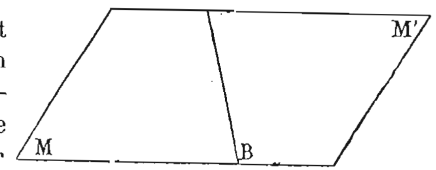


Fig. 373.

Une droite AB située dans un plan MM' (*fig.* 373) partage ce plan en deux régions séparées par cette droite; chacune de ces régions ABM, ABM' forme ce qu'on nomme un *demi-plan*.

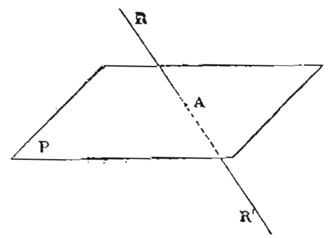


Fig. 374.

De la définition du plan il résulte que si une droite RR' (*fig.* 374), qui n'est pas dans un plan P, rencontre ce plan, elle ne le rencontre qu'en un seul point. Soit A ce point : une portion AR de la droite se trouve d'un côté du plan, et l'autre AR′ de l'autre côté.

Le point A, où la droite RR′ perce le plan P, est appelé *pied* de la droite par rapport au plan.

Théorème.

498. *Par une droite et par un point extérieur on peut faire passer un plan et un seul.*

Soient une droite AB et un point C en dehors de cette droite (*fig.* 375). Imaginons un plan quelconque P passant par la droite AB; puis, faisons tourner ce plan autour de la droite AB; nous pourrons toujours l'amener dans une position P_1, telle qu'il contienne le point C. Si la rotation continue, le plan cesse d'abord de contenir le point C; s'il est ensuite ramené dans une position P_2 telle qu'il contienne à nouveau le point C, le plan P_2 coïncide avec le plan P_1.

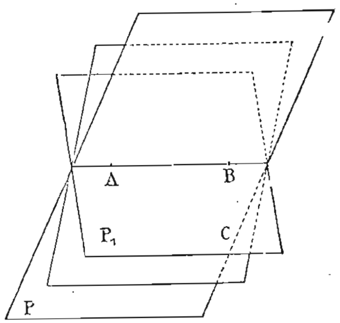


Fig. 375.

Soient en effet P_1, P_2 deux plans contenant la droite AB et le point C, et soit un point M situé dans le plan P_1; je dis que ce point M est aussi dans le plan P_2 (*fig.* 376). Joignons le point C à un point quelconque D de la droite AB; la droite CD, qui a les deux points C et D dans les deux plans, est tout entière dans ces deux plans. Par le point M, menons dans le plan P_1 une droite qui ne soit parallèle ni à AB ni à CD; elle rencontrera l'une et l'autre de ces droites situées dans le plan P_1; soient E et F les points de rencontre. La droite MEF, qui a les deux points E et F situés dans le plan P_2, y est tout entière; donc le point M est dans le plan P_2. Tout point de l'un des plans étant aussi sur l'autre, les deux plans coïncident.

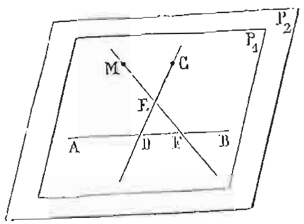


Fig. 376.

499. Corollaire I. *Un plan peut encore être déterminé d'une des trois manières suivantes : 1° par trois points non en ligne droite; 2° par deux droites qui se coupent; 3° par deux droites parallèles.*

1° Soient trois points A, B, C, non en ligne droite. La droite AB et le point C déterminent un plan P, et ce plan contient les trois points donnés. Réciproquement, d'ailleurs, tout plan passant par les trois points donnés contient la droite AB et le point C, et, par conséquent, coïncide avec le plan P.

2° Soient OA, OB deux droites qui se coupent (*fig.* 377). Prenons sur OB un point quelconque B; la droite OA et le point B déterminent un plan P, et ce plan contient les deux droites OA et OB. Réciproquement, d'ailleurs, tout plan contenant les droites OA et OB contient la droite OA et le point B, et, par conséquent, coïncide avec le plan P.

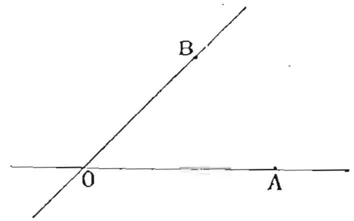


Fig 377.

3° Soient AB, CD, deux droites parallèles (*fig.* 378). Par définition, ces deux droites sont dans un même plan. Ce plan est d'ailleurs bien déterminé, puisqu'il contient la droite AB, et un point C pris arbitrairement sur CD.

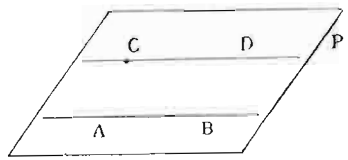


Fig. 378.

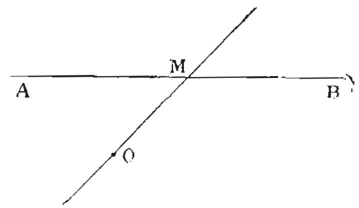


Fig. 379.

500. Génération du plan par une droite. On peut concevoir plusieurs modes de génération d'un plan par une ligne droite.

1° Une droite OM mobile autour d'un point fixe O, et assujettie à rencontrer une droite fixe AB qui ne contient pas le point O, engendre un plan (*fig.* 379). En effet, cette droite mobile est toujours tout entière dans le plan déterminé par la droite AB et le point O, et, en tournant d'une manière continue autour du point O, elle vient passer successivement par tous les points de ce plan.

2° Une droite mobile AB, qui se déplace parallèlement à elle-même et rencontre, dans toutes ses positions, une droite fixe CD (*fig.* 380), engendre un plan. En effet, considérons la droite mobile dans deux positions AB et A'B'. Les droites parallèles AB et A'B' déterminent un plan; ce plan contient la droite CD, puisqu'il contient les deux points O et O' où cette droite est rencontrée par AB et par A'B'; il contient la droite AB, et, par conséquent, il coïncide avec le plan des deux droites AB et CD. La droite mobile restant toujours dans le plan des droites AB et CD et, venant d'ailleurs passer successivement par tous les points du plan, engendre ce plan.

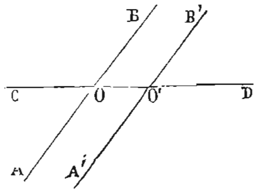


Fig. 380.

501. Remarque. Si deux droites AB, CD se coupent, ou sont

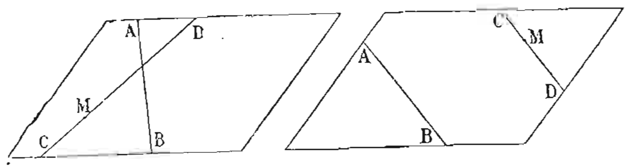


Fig. 381.

parallèles (*fig.* 381), elles déterminent un plan. Dans ce cas, si par l'une des deux droites, AB, et par un point quelconque M de l'autre, on fait passer un plan P, ce plan contient la seconde droite tout entière. Mais il peut arriver que deux droites AB, CD soient telles que si par AB et par un point M pris sur CD on fait passer un plan P, ce plan ne contienne pas la droite CD (*fig.* 382); dans ce cas, aucun autre plan mené par AB ne contient la droite CD. En effet, si un plan Q mené

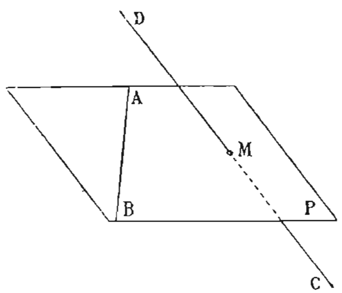


Fig. 382.

par AB contenait la droite CD, il contiendrait le point M de cette droite, et par suite se confondrait avec le plan P, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que le plan P ne contient pas la droite CD. On dit alors que les deux droites AB et CD *ne sont pas dans un même plan.*

Théorème.

502. *Si deux plans distincts ont un point commun, le lieu des points communs à ces deux plans est une droite.*

Soient P et Q deux plans distincts ayant un point commun A; montrons d'abord que ces deux plans ont une droite commune passant par ce point. A cet effet, menons par le point A (*fig.* 383), dans le plan Q, deux droites indéfinies R'AR, S'AS; supposons les portions AR, AS de ces droites d'un côté du plan P, et les portions AR', AS' de l'autre côté de ce plan. Prenons sur AR un point quelconque B, et sur AS' un point quelconque C; la droite BC, qui joint deux points situés de part et d'autre du plan P, rencontre nécessairement ce plan en un certain point D. D'autre part, la droite BC, qui a deux de ses points dans le plan Q, y est tout entière; donc le point D est aussi dans le plan Q.

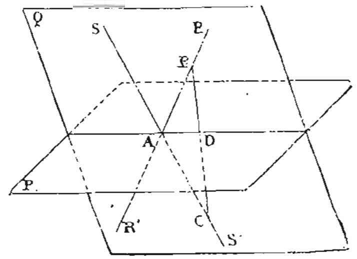


Fig. 383.

Les points A et D se trouvant ainsi à la fois dans le plan P et dans le plan Q, la droite AD, menée par ces deux points, est à la fois située tout entière dans ces deux plans.

Les plans P et Q ont en commun tous les points de la droite AD; ils n'ont d'ailleurs aucun point commun en dehors de cette droite, sans quoi ils coïncideraient; donc le théorème est démontré.

§ II. Droite perpendiculaire a un plan.

503. Définition. — On dit qu'une droite est *perpendiculaire à un plan* lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites que l'on peut mener par son pied, dans ce plan. On dit aussi, dans ce cas, que le plan est *perpendiculaire à la droite*. Une droite oblique à une droite menée par son pied, dans le plan, est dite *oblique* au plan.

Il n'est pas évident, *à priori*, qu'on puisse mener une droite telle qu'elle soit perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par son pied. La possibilité de ce fait résulte des théorèmes suivants.

Théorème.

504. *Une droite perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan est perpendiculaire à toutes les droites qui passent par son pied dans ce plan, et, par conséquent, est perpendiculaire à ce plan.*

Remarquons d'abord que, dans l'espace, une droite AB peut être perpendiculaire à autant de droites qu'on voudra, passant toutes par le point B. En effet, dans un plan quelconque P passant par AB (*fig.* 384), menons la perpendiculaire BC à AB; opérons de même dans d'autres plans P′, P″, etc., passant par AB, la droite AB sera perpendiculaire à toutes les droites BC, BC′, BC″, etc., ainsi obtenues.

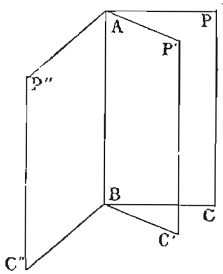


Fig. 384.

Cela posé, soit une droite AB perpendiculaire à deux droites BC et BD du plan P, qui passent par le pied B de la droite AB, c'est-à-dire par le point où la droite AB rencontre le plan P, (*fig.* 385); je dis que la droite AB est perpendiculaire à toute autre droite, BE par exemple, menée par son pied dans le plan P. Pour le démontrer, je mène dans le plan une droite quelconque rencontrant les droites BC, BD, BE aux points C, D, E; je prolonge la droite AB, de l'autre côté du plan P, d'une longueur BA′ égale à AB, et je mène les droites AC, AD, AE, et les droites

A′C, A′D, A′E. Les droites CA et CA′ sont égales comme obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire menée du point C à la droite AA′; les droites DA et DA′ sont égales pour la même raison. Il en résulte que les deux triangles CDA et CDA′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Si donc je fais tourner le triangle CDA′ autour du côté CD pour l'appliquer sur le triangle égal CDA, le côté CA′ vient s'appliquer sur le côté égal CA, et le point A′ vient se placer en A. Comme le point E du côté CD est resté fixe, la droite EA′ vient coïncider avec EA, et, par conséquent, est égale à la droite EA. Le triangle AEA′ étant isocèle, la droite BE, qui joint le milieu de la base au sommet, est perpendiculaire sur la base. Donc, la droite AB est perpendiculaire sur la droite BE.

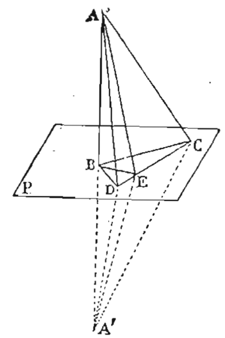


Fig. 385.

La droite AB, étant perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans le plan, est perpendiculaire à ce plan,

Théorème.

505. *Toutes les perpendiculaires menées à une droite par un point de cette droite sont dans un même plan perpendiculaire à cette droite.*

Par la droite AB (*fig.* 386) faisons passer deux plans quelconques P et P′, et, dans ces plans, menons les perpendiculaires BC et BC′ à la droite AB au point B. Ces perpendiculaires déterminent un plan Q; et la droite AB, perpendiculaire à deux droites situées dans le plan Q et passant par son pied, est perpendiculaire à ce plan.

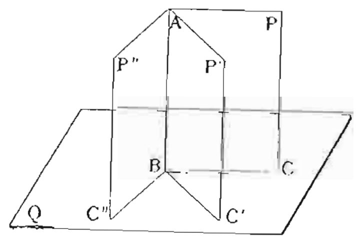


Fig. 386

Soit maintenant un autre plan quelconque P″ mené par AB. Ce plan coupe le plan Q suivant une ligne droite BC″; et la droite AB, perpendiculaire au plan Q, est perpendiculaire à la droite BC″ qui passe par son pied dans ce plan. Donc, si on élève au point B une perpendiculaire à la droite AB, dans le plan P″, cette perpendiculaire se confond avec la droite BC″ et, par conséquent, elle est située dans le plan Q.

506. Corollaire. *Une droite qui tourne autour d'un point* B *d'une droite* AB, *en restant perpendiculaire à cette droite, engendre un plan perpendiculaire à cette droite.*

Théorème.

507. *Par un point donné* O *on peut mener un plan perpendiculaire à une droite donnée* AB, *et on n'en peut mener qu'un.*

1° Supposons d'abord le point O sur la droite donnée AB (*fig.* 387). Menons par la droite AB deux plans quelconques P et P′, et dans ces plans, au point O, menons les perpendiculaires OC et OC′ à la droite AB. Les deux droites OC et OC′ déterminent un plan perpendiculaire à la droite AB et passant par le point O.

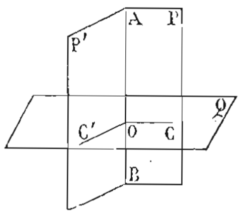


Fig. 387.

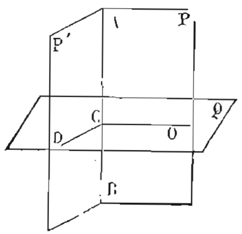


Fig. 388.

Concevons maintenant un plan Q perpendiculaire à AB et passant par le point O. Ce plan coupe le plan P suivant une droite qui, située dans le plan P, passe par le point O et est perpendiculaire à AB, c'est-à-dire suivant la droite OC. Il coupe de même le plan P′ suivant OC′; donc tout plan mené par le point O perpendiculairement à la droite AB passe par les droites OC et OC′, et, par conséquent, se confond avec le plan de ces deux droites.

2° Supposons le point O en dehors de la droite AB (*fig.* 388). Dans le plan P, déterminé par la droite AB et par le point O, menons la perpendiculaire OC à AB; dans un autre plan quelconque P′ passant par AB, menons au point C la perpendiculaire CD à AB; les deux droites OC et CD, perpendiculaires à

AB au point C, déterminent un plan perpendiculaire à AB, et ce plan passe par le point O.

Concevons maintenant un plan Q perpendiculaire à AB et passant par le point O. Ce plan coupe le plan P suivant une droite qui passe par le point O et est perpendiculaire à AB, c'est-à-dire suivant OC. Donc tout plan perpendiculaire à AB, mené par le point O, passe par le point C de la droite AB; il se confond, par conséquent, avec le plan mené perpendiculairement à la droite AB par le point C de cette droite.

Théorème.

508. *Par un point* A *on peut mener une droite perpendiculaire au plan* P, *et on n'en peut mener qu'une.*

1° Supposons le point A dans le plan P (*fig.* 389). Par ce point menons dans le plan P deux droites rectangulaires AB, AC; puis, dans un plan quelconque Q contenant la droite AB, menons la droite AD perpendiculaire à AB; enfin, dans le plan CAD, menons la droite AE perpendiculaire à AC. La droite AE ainsi construite est perpendiculaire au plan P. En effet,

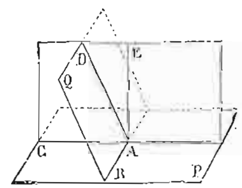


Fig. 389.

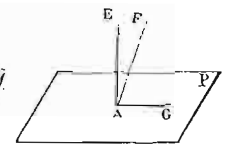


Fig. 390.

le plan CAD contenant deux droites AC et AD perpendiculaires à la droite AB, est perpendiculaire à cette droite au point A, et la droite AE, qui est dans ce plan, est perpendiculaire à la droite AB. D'autre part, par construction, la droite AE est aussi perpendiculaire à la droite AC. Donc la droite AE, perpendiculaire aux deux droites AB et AC passant par le point A et situées dans le plan P, est perpendiculaire à ce plan.

Si la droite AE est perpendiculaire au plan P, toute autre droite AF menée par le point A (*fig.* 390) est oblique à ce plan. En effet, le plan des droites AE et AF coupe le plan P suivant une droite AG. La droite AE, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à la droite AG qui passe par son pied, et est dans le plan EAF; comme d'ailleurs on ne peut mener dans ce plan EAF qu'une perpendiculaire à AG au point A, la droite AF est oblique à la droite AG, et par suite elle est oblique au plan P.

2° Soit le point A en dehors du plan P. Traçons dans ce plan une droite quelconque BC (*fig.* 391), et menons du point A, dans le plan ABC, la droite AD perpendiculaire à BC; dans le plan P, menons par le point D la droite DE perpendiculaire à BC; enfin, du point A, menons la droite AI perpendiculaire à DE. La droite AI ainsi construite est perpendiculaire au plan P.

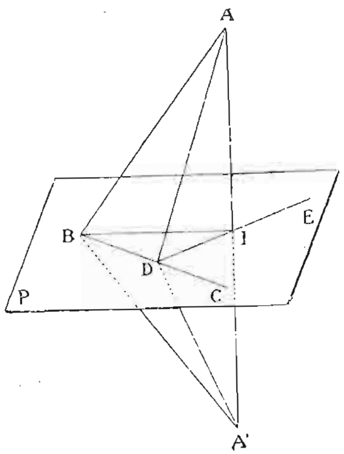


Fig. 391.

Pour le démontrer, nous allons faire voir qu'elle est perpendiculaire à une droite quelconque IB menée par le point I dans le plan P. A cet effet, prolongeons AI d'une longueur IA' égale à AI, et menons les droites AD, AB, A'D et A'B. La droite BC, étant, par construction, perpendiculaire aux deux droites DE et DA, est perpendiculaire au plan de ces droites, et par suite est perpendiculaire à la droite DA' située dans ce plan. Les deux triangles ADB, A'DB sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles ADB, A'DB égaux comme droits, le côté DB commun, et les côtés DA et DA' égaux parce que le point D est situé sur la perpendiculaire à AA' en son milieu. Donc les côtés AB et BA' sont égaux. Le triangle ABA' étant isocèle, la base AIA' est perpendiculaire sur la droite IB qui joint le milieu de la base au sommet.

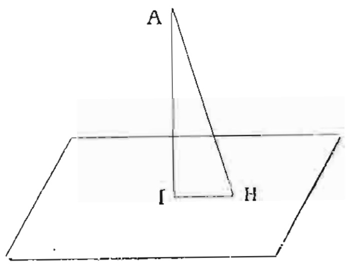


Fig. 392.

Si la droite AI est perpendiculaire au plan P, toute autre droite AH (*fig.* 392) menée par le point A est oblique à ce plan.

En effet, le plan des deux droites AI et AH coupe le plan P suivant la droite IH; la droite AI, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à la droite IH qui passe par son pied et est située dans le plan P; comme d'ailleurs on ne peut mener par le point A, dans le plan AIH, qu'une perpendiculaire à IH, la droite AH est oblique sur la droite IH, et par suite elle est oblique au plan P.

Théorème.

509. *Si d'un point* A *on mène à un plan* P *une perpendiculaire* AB *et diverses obliques* AC, AD, *etc.* :

1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques dont les pieds sont également éloignés du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques, celle dont le pied est le plus éloigné du pied de la perpendiculaire est la plus grande.*

1° La perpendiculaire AB est plus petite qu'une oblique AC (*fig.* 393); car dans le plan ABC, la droite AB est perpendiculaire à BC et la droite AC est oblique sur la même droite.

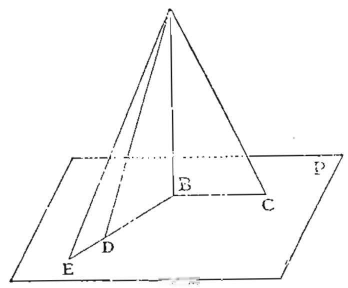


Fig. 393.

2° Deux obliques AC, AD, dont les pieds C et D sont à égale distance du pied B de la perpendiculaire, sont égales; car les triangles ABC, et ABD, rectangles en B, ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, et par conséquent sont égaux.

3° Des deux obliques AE et AC, l'oblique AE, dont le pied est le plus éloigné du point B, est la plus grande. Prenons en effet, sur BE, la longueur BD égale à BC; les obliques AD et AC sont égales. Or, dans le plan ABE, les droites AE et AD sont des obliques à la droite BE, et l'oblique AE dont le pied est le plus éloigné du pied de la perpendiculaire est la plus grande. On a donc AE $>$ AD, ou AE $>$ AC.

510. Remarque. On appelle *distance* d'un point à un plan la distance de ce point au point du plan qui en est le plus rapproché. — La distance d'un point à un plan est donc la distance du point au pied de la perpendiculaire menée de ce point au plan.

511. Corollaire. *Les pieds de deux obliques égales menées d'un point à un plan sont à égale distance du pied de la perpendiculaire menée de ce point au plan.*

Il en résulte que le lieu des pieds des obliques égales AC, AC', AC''..., etc., menées d'un point A à un plan P, est une circonférence dont le centre est le pied B de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan (*fig.* 394).

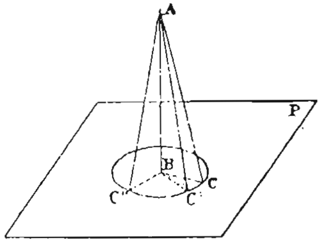


Fig. 394.

On peut déduire de là un nouveau moyen d'abaisser d'un point A une perpendiculaire sur un plan P. Il suffit de prendre dans le plan P trois points C, C', C'', à égale distance du point A, de déterminer le centre B du cercle qui passe par ces trois points, et de mener la droite AB.

Théorème.

512. *Si, par le pied* B *d'une droite* AB *perpendiculaire à un plan* P, *on mène une perpendiculaire* BC *à une droite quelconque* DE *tracée dans le plan* P, *et si l'on joint par une droite le point* C *à un point quelconque* A *de la droite* AB, *la droite* AC *ainsi obtenue est perpendiculaire à la droite* DE.

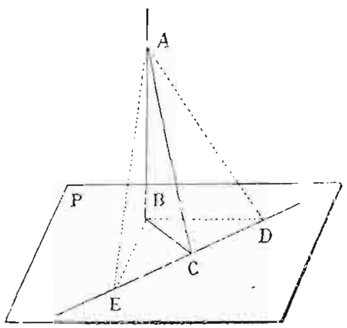


Fig. 395.

En effet, prenons sur la droite DE, de part et d'autre du point C, deux longueurs égales CD, CE, et menons les droites BE, BD, AE et AD (*fig.* 395). Dans le plan P les obliques BD et BE, dont les pieds sont également éloignés

du pied C de la perpendiculaire BC, sont égales ; dans l'espace, les obliques AD et AE, dont les pieds sont également éloignés du pied B de la perpendiculaire AB au plan P, sont égales. Donc le triangle ADE est isocèle, et la droite AC, qui joint le sommet au milieu de la base, est perpendiculaire sur cette base DE.

Ce théorème est souvent désigné sous le nom de *théorème des trois perpendiculaires*.

§ III. Parallélisme des droites et des plans.

Droites parallèles.

513. Définition. On appelle droites parallèles deux droites qui, *situées dans un même plan*, ne se rencontrent pas, à quelque distance qu'on les prolonge.

Dans la géométrie de l'espace, pour démontrer que deux droites sont parallèles, il ne suffit pas, comme dans la géométrie plane, de prouver qu'elles n'ont pas de point commun, il faut encore prouver qu'elles sont dans un même plan.

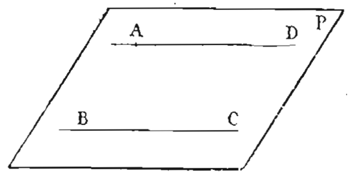


Fig. 396.

514. Remarque. Dans l'espace comme dans un plan, on peut par un point A pris en dehors d'une droite BC, mener une parallèle à cette droite, et on n'en peut mener qu'une. En effet (*fig.* 396), le point A et la droite BC déterminent un plan P, et on sait que, dans ce plan P, on peut mener par A une parallèle AD à BC, et une seule. D'autre part toute parallèle à BC, menée dans l'espace par le point A, détermine avec BC un plan qui n'est autre que le plan P ; donc elle se confond avec la droite AD.

Théorème.

515. *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

Soient AB, CD deux droites perpendiculaires à un même plan P (*fig.* 397). On voit d'abord que ces droites ne peuvent se rencontrer, puisque d'un point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à un plan (508). Reste à montrer qu'elles sont dans un même plan. Soient A et C les points où les droites données rencontrent le plan P; la droite AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à AC. Menons, dans le plan P, la droite CE perpendiculaire à AC, et joignons le point C à un point quelconque B de la droite AB. La droite CB ainsi obtenue, est, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, perpendiculaire à CE. Les droites CA et CB étant toutes deux perpendiculaires à CE déterminent le plan perpendiculaire à cette droite au point C, et la droite AB est située dans ce plan. D'autre part la droite CD, perpendiculaire au plan P, est aussi perpendiculaire à CE, donc (505) elle est aussi dans le plan perpendiculaire à CE au point C. Les droites AB et CD sont donc dans un même plan.

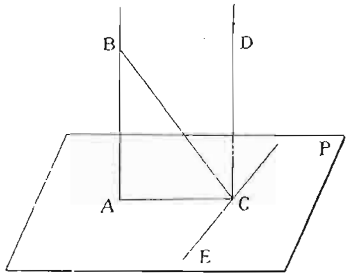


Fig. 397.

Elles ne se rencontrent pas, et elles sont dans un même plan, donc elles sont parallèles.

Théorème.

516. *Une droite* AB *étant perpendiculaire à un plan* P, *toute droite* CD *parallèle à* AB *est aussi perpendiculaire au plan* P (*fig.* 398).

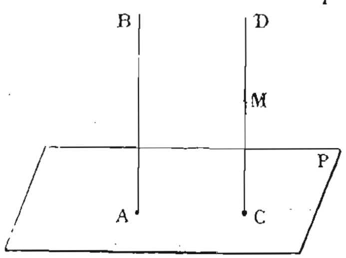


Fig. 398.

En effet, la perpendiculaire au plan P menée par un point quelconque M de la droite CD est, d'après le théorème précédent, parallèle à AB; or par ce point M on ne peut mener qu'une parallèle à AB, et cette parallèle est la droite CD. Donc CD est perpendiculaire au plan P.

Théorème.

517. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles.*

Soient AB et CD deux droites parallèles à la droite EF (*fig.* 399); ces droites sont parallèles. En effet, menons un plan P perpendiculaire à EF. La droite AB, parallèle à EF, est perpendiculaire au plan P (516); il en est de même pour la droite CD; et les deux droites AB et CD, perpendiculaires à un même plan, sont parallèles (515).

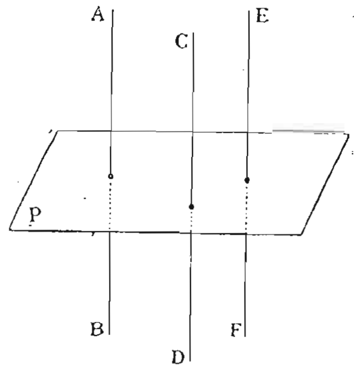


Fig. 399.

DROITE PARALLÈLE
A UN PLAN.

518. Définition. On dit qu'une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle ne rencontre pas le plan à quelque distance qu'on prolonge la droite et le plan.

Le théorème suivant montre qu'une droite peut être parallèle à un plan.

Théorème.

519. *Une droite parallèle à une droite située dans un plan est parallèle à ce plan.*

Fig. 400.

Soit la droite AB parallèle à la droite CD située dans le plan P (*fig.* 400). La droite AB étant tout entière dans le plan déterminé par les droites parallèles AB et CD, plan qui rencontre le plan P suivant la droite CD, ne pourrait rencontrer le plan P qu'en un point de la droite CD. Or la droite AB, parallèle à CD, ne rencontre pas CD; donc elle ne rencontre pas non plus le plan P, et, par conséquent, elle est parallèle à ce plan.

Théorème.

520. *Une droite* AB *étant parallèle au plan* P, *si un plan mené par* AB *coupe le plan* P *suivant une droite* CD, *cette droite* CD *est parallèle à* AB (*fig.* 401).

En effet la droite AB, parallèle au plan P, ne rencontre pas la droite CD, qui est tout entière située dans le plan P ; d'ailleurs les droites AB et CD sont dans un même plan ; donc elles sont parallèles.

521. Corollaire. *Tous les points d'une droite parallèle à un plan sont équidistants de ce plan.*

Soient M, M′ deux points quelconques d'une droite AB paral-

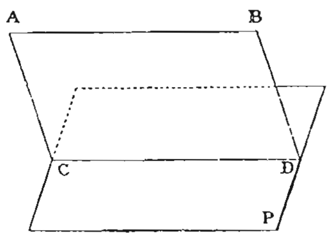


Fig. 401.

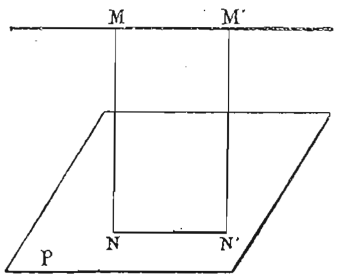


Fig. 402.

lèle au plan P (*fig.* 402). Les perpendiculaires MN, M′N′ menées des points M et M′ au plan P sont parallèles, et par conséquent dans un même plan. Ce plan coupe le plan P suivant une droite NN′ parallèle à AB, et la figure MNN′M′ est un parallélogramme. Donc les distances MN, M′N′ sont égales.

Théorème.

522. *Une droite* AB *étant parallèle à un plan* P, *si, par un point* C *du plan* P, *on mène la droite* CD *parallèle à* AB, *cette droite* CD *est située dans le plan* P (*fig.* 403).

En effet, si par la droite AB et par le point C on fait passer un plan, ce plan coupe le plan P suivant une droite parallèle à AB, qui doit se confondre avec la droite CD, puisqu'on ne peut mener par le point C qu'une parallèle à AB. Donc la droite CD est située dans le plan P.

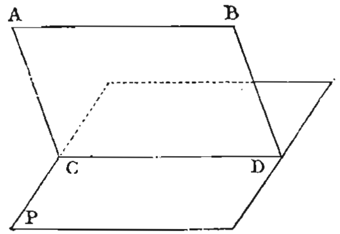


Fig. 403.

523. Corollaire. *Une droite parallèle à deux plans qui se coupent est parallèle à leur intersection.*

Soit la droite CD parallèle aux plans P et Q qui se coupent suivant la droite AB (*fig.* 404) : AB est parallèle à CD.

En effet, si par un point quelconque A de l'intersection des deux plans on mène une droite parallèle à CD, cette droite, d'après le théorème précédent, est à la fois située dans les deux plans P et Q, et, par conséquent, elle se confond avec la droite d'intersection AB. Donc les droites AB et CD sont parallèles.

524. Remarque I. Par un point donné O on peut mener un plan

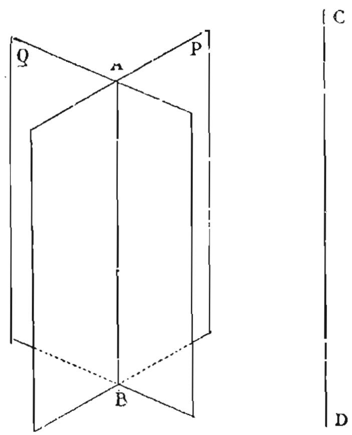


Fig. 404.

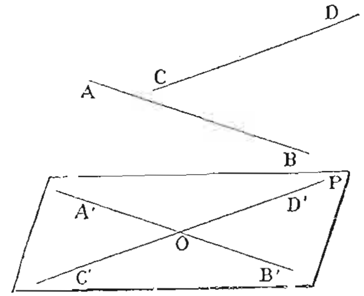


Fig. 405.

parallèle à deux droites données AB et CD (*fig.* 405). En effet, si par le point O on mène les droites A′B′ et C′D′ parallèles aux droites données, le plan des droites A′B′ et C′D′ est parallèle aux droites données, et il passe par le point O. D'ailleurs tout plan parallèle aux droites AB et CD, qui passe par le point O, doit contenir (522) les droites A′B′ et C′D′ ; donc le plan de ces deux droites satisfait seul aux conditions demandées.

Toutefois, si les deux droites AB et CD étaient parallèles, les droites A′B′ et C′D′ seraient confondues en une seule, et tout plan passant par cette droite serait parallèle aux deux droites données.

525. Remarque II. Par une droite donnée CD on peut mener un plan parallèle à une autre droite donnée AB. En effet, si par un point quelconque E de la droite CD (*fig.* 406), on mène la droite EF parallèle à AB, cette droite EF et la droite CD déterminent un plan parallèle à AB (519). D'ailleurs tout plan qui passe par CD et est parallèle à AB doit contenir la parallèle EF à AB menée par le point E ; donc le plan des deux droites CD et EF est le seul qui satisfasse aux conditions demandées.

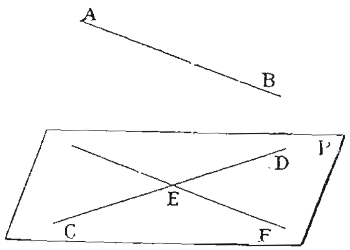


Fig. 406.

Toutefois, si les droites données étaient parallèles, la droite EF se confondrait avec la droite CD, et tout plan passant par CD serait parallèle à la droite AB.

PLANS PARALLÈLES.

526. Définition. On dit que deux plans sont parallèles quand ils ne se rencontrent pas. Le théorème suivant montre que deux plans peuvent être parallèles.

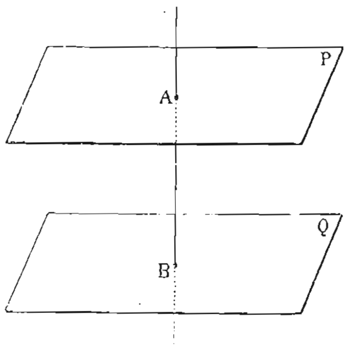


Fig. 407.

Théorème.

527. *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

Soient deux plans P et Q perpendiculaires à une même droite AB (*fig.* 407) ; ces plans ne peuvent se rencontrer, puisque d'un point on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à une droite ; donc ils sont parallèles.

Théorème.

528. *Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.*

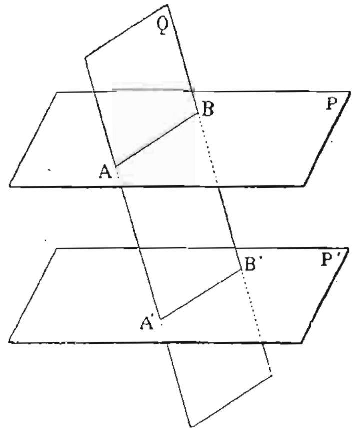


Fig. 408.

Soient P et P′ deux plans parallèles (*fig.* 408), AB et A′B′, les intersections de ces deux plans par un plan quelconque Q ; les droites AB et A′B′ situées l'une dans le plan P, l'autre dans le plan P′, ne peuvent se rencontrer, puisque ces plans sont parallèles ; d'ailleurs ces droites sont dans un même plan Q ; donc elles sont parallèles.

Théorème.

529. *Le lieu des droites menées par un point* A, *parallèlement à un plan est un plan parallèle au plan* P.

Soit AR (*fig.* 409) une droite passant par le point A et parallèle au plan P. Menons la droite AB perpendiculaire au plan P ; le plan des deux droites AR et AB coupe le plan P suivant une droite BS parallèle à AR (520). Or la droite AB perpendiculaire au plan P est perpendiculaire à la droite BS, et par suite elle est aussi perpendiculaire à la droite AR parallèle à BS. Donc, la droite AR est dans le plan perpendiculaire à AB mené par le point A, plan qui est parallèle au plan P (527). Réciproquement d'ailleurs, toute droite menée par A dans le plan perpendiculaire à AB en A, plan qui est parallèle au plan P, ne rencontre pas ce plan P, et, par suite, lui est parallèle. Donc enfin le lieu des droites telles que AR, menées par le point A

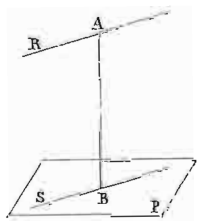


Fig. 409.

parallèlement au plan P, est un plan parallèle au plan P.

530. Corollaire. *Par un point A on peut mener un plan parallèle à un plan* P, *et on n'en peut mener qu'un.*

En effet, soit la droite AB (*fig.* 410) perpendiculaire au plan P; si l'on mène par le point A le plan Q perpendiculaire à AB, le plan Q est parallèle au plan P.

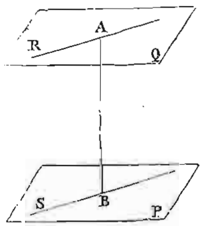


Fig. 410.

D'autre part imaginons un plan Q' passant par A et parallèle au plan P. Tout plan mené par AB coupe les plans parallèles Q' et P suivant des droites parallèles AR et BS. La droite BS étant perpendiculaire à AB, la droite AR est aussi perpendiculaire à AB, et, par conséquent, cette droite est située dans le plan Q. Puisque tout plan mené par AB coupe les plans Q' et Q suivant une même droite, le plan Q' coïncide avec le plan Q.

Théorème.

531. *Deux plans* P *et* Q *étant parallèles, toute droite* AB *perpendiculaire au plan* P *est aussi perpendiculaire au plan* Q.

En effet, menons dans le plan Q une droite quelconque BC par le pied B de la droite AB (*fig.* 411). Le plan des deux droites AB et BC coupe le plan P suivant une droite AD parallèle à BC. Or la droite AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à la droite AD qui passe par son pied dans ce plan, et, par suite, à la droite BC parallèle à AD. La droite AB étant perpendiculaire à toute droite du plan Q, qui passe par son pied, est perpendiculaire à ce plan.

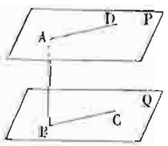


Fig. 411.

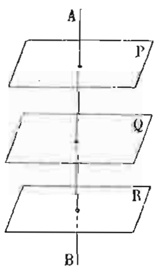


Fig. 412.

532. Corollaire. *Deux plans parallèles à un troisième sont parallèles.*

Soient P et Q deux plans parallèles à un même plan R (*fig.* 412); ces plans sont parallèles. En effet, prenons une droite AB

perpendiculaire au plan R; cette droite est perpendiculaire aux plans P et Q parallèles au plan R (531). Les plans P et Q perpendiculaires à une même droite AB sont parallèles (527).

Théorème.

533. *Lorsque deux angles non situés dans un même plan ont les côtés respectivement parallèles,* 1° *ces angles sont égaux ou supplémentaires;* 2° *les plans de ces angles sont parallèles.*

1° Soient (*fig.* 413) deux angles AOB, A'O'B', non situés dans un même plan, et ayant les côtés respectivement parallèles, et de même sens. Prenons OA = O'A', et OB = O'B'; menons les droites OO', AA', BB', AB, A'B'. Le quadrilatère OAA'O', dans lequel les côtés opposés OA et O'A' sont égaux et parallèles, est un parallélogramme, et les côtés opposés OO' et AA' sont égaux et parallèles. De même le quadrilatère OBB'O' est un parallélogramme, et les côtés OO' et BB' sont égaux, et parallèles. Il suit de là que les côtés AA' et BB' égaux et parallèles à OO', sont égaux et parallèles. Par conséquent, le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme, et les côtés opposés AB et A'B' sont égaux. Donc les triangles OAB, O'A'B', qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et l'angle AOB est égal à l'angle A'O'B'.

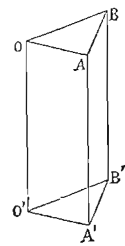


Fig. 413.

Les droites OA et OB forment quatre angles qui sont deux à deux égaux ou supplémentaires. L'un de ces quatre angles étant égal à l'angle A'O'B', l'un quelconque des angles formés par ces droites est égal à l'angle A'O'B', ou est son supplément.

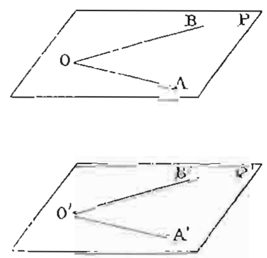


Fig. 414.

2° Soient P et P' (*fig.* 414), les plans des angles AOB, A'O'B'; les droites O'A', O'B' parallèles aux droites O'A', O'B' parallèles au plan P de ces droites; par conséquent, elles déterminent un plan P' parallèle au plan P.

534. Corollaire. *Étant données deux droites* AB, CD *non situées dans le même plan, si par la première on mène un plan parallèle à la seconde, et par la seconde un plan parallèle à la première, les deux plans ainsi construits sont parallèles.*

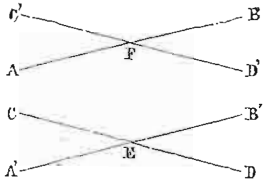


Fig. 415.

En effet, par un point E de CD (*fig.* 415), menons la droite A'B' parallèle à AB, le plan des droites CD, A'B' est parallèle à AB (519); de même, par un point F de AB, menons la droite C'D' parallèle à CD, le plan des droites AB, C'D', est parallèle à CD. Les deux plans ainsi déterminés sont parallèles, puisque ce sont les plans de deux angles qui ont les côtés respectivement parallèles.

535. Définition. On appelle *angles de deux droites qui ne se rencontrent pas* les angles formés par des parallèles à ces droites menées par un point de l'espace. Ces angles, d'après le théorème précédent, sont les mêmes quel que soit le point de l'espace par lequel on mène les parallèles aux droites données.

On dit que deux droites, qu'elles se rencontrent ou qu'elles ne se rencontrent pas, sont perpendiculaires quand les angles de ces droites sont des angles droits.

D'après cela :

536. *Une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire non seulement aux droites du plan menées par son pied, mais à toutes les droites du plan.*

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites du plan non parallèles entre elles.

Théorème.

537. *Deux plans parallèles interceptent sur deux droites parallèles des segments égaux.*

Soient AB et CD (*fig.* 416) les segments interceptés par deux plans parallèles P et Q sur deux droites parallèles AB, CD;

ces segments sont égaux, car les droites AC, BD, intersections de deux plans parallèles, P et Q, par le plan de deux parallèles AB, CD, sont parallèles, et la figure ABCD est un parallélogramme.

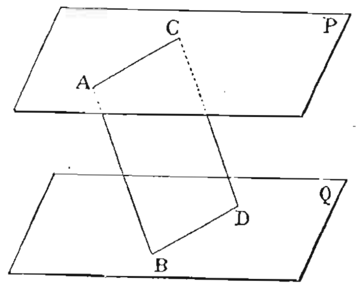


Fig. 416.

538. Corollaire. *Deux plans parallèles sont partout également distants.*

Théorème.

539. *Trois plans parallèles interceptent sur deux droites des segments proportionnels.*

Soient AB et BC, DE et EF, les segments interceptés sur les deux droites AC et DF par trois plans parallèles P, Q et R (*fig.* 417); je dis que l'on a :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

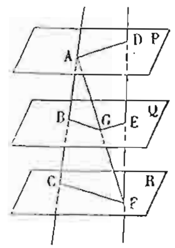


Fig. 417.

En effet, menons la droite AF, et soit G le point où elle rencontre le plan Q; menons les droites BG, CF, AD, et GE. Les droites BG et CF, intersections de deux plans parallèles par un troisième, étant parallèles, on a :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GF};$$

d'autre part, les droites GE et AD étant aussi parallèles, on a de même

$$\frac{AG}{GF} = \frac{DE}{EF};$$

donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

540. Corollaire. *Si l'on prend sur une droite* U *trois points*

A, B, C, *et sur une droite* V *trois points* D, E, F, *tels que l'on ait*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

et que de plus, les segments DE *et* EF *soient de même sens, ou de sens opposés, suivant que les segments* AB *et* BC *sont de même sens, ou de sens opposés, les trois droites* AD, BE, CF, *sont parallèles à un même plan* (*fig.* 418).

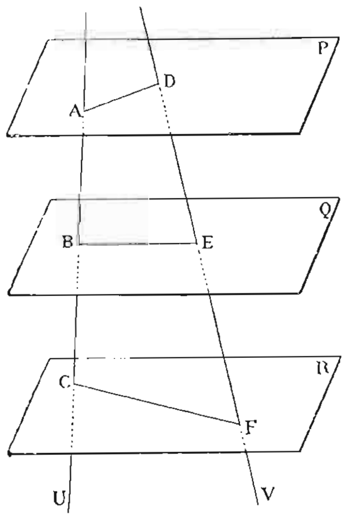


Fig. 418.

En effet, menons par AD un plan P parallèle à BE, et par BE un plan Q parallèle à AD; les deux plans P et Q sont parallèles (534). Si par le point C nous menons un plan R parallèle aux deux précédents, ce plan rencontrera la droite V en un point F′ tel que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF'};$$

donc EF′ = EF. De plus, les segments DE et EF′ seront, comme les segments DE et EF, de même sens ou de sens opposés, selon que les segments AB et BC sont de même sens ou de sens opposés. Donc les deux segments EF′ et EF sont égaux et de même sens, et par suite F′ coïncide avec F. Il en résulte que la droite CF est dans le plan R. Les trois droites AD, BE, CF, étant situées dans trois plans parallèles sont parallèles à un plan parallèle à ceux-ci.

541. Remarque. Du théorème et du corollaire qui précèdent, il résulte que :

Si une droite mobile glisse sur deux droites fixes, et reste parallèle à un plan fixe, le rapport des segments interceptés sur les droites fixes par la droite mobile, dans deux quelconques de ses positions, est constant.

Réciproquement. *Si une droite mobile glisse sur deux droites fixes de telle façon que le rapport des segments interceptés sur les deux droites fixes par la droite mobile dans deux quelconques de ses positions soit constant, la droite mobile reste parallèle à un plan.*

§ IV. Angle de deux plans.

542. Définitions. On appelle *angle dièdre* la figure formée par deux demi-plans ABP et ABQ contenant une droite commune AB et limités tous deux par cette droite. La droite AB est l'*arête* du dièdre, les demi-plans ABP, ABQ, en sont les *faces* (*fig.* 419).

On désigne un angle dièdre isolé par deux lettres placées sur l'arête; ainsi l'angle dièdre formé par les demi-plans P et Q est le dièdre dont l'arête est AB. Si plusieurs dièdres ont la même arête, on désigne chacun de ces dièdres par quatre lettres prises, deux sur l'arête et une sur chaque face; on met les deux lettres de l'arête entre les deux autres. Ainsi (*fig.* 420) l'angle dièdre des demi-plans P et Q est l'angle dièdre PABQ; l'angle dièdre des demi-plans P et Q′ est l'angle dièdre PABQ′.

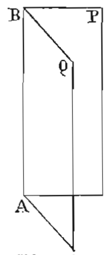


Fig. 419.

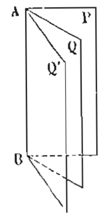


Fig. 420.

On dit que deux dièdres sont *égaux* quand ils sont superposables.

Si les demi-plans ABP, ABQ, ABR, ABS (*fig.* 421) limités par la même droite AB, sont disposés de telle façon qu'un demi-plan mobile, d'abord appliqué sur le demi-plan ABP, et tournant autour de la droite AB, dans un sens déterminé, vienne successivement coïncider avec les demi-plans ABQ, ABR, ABS, on dit que l'angle dièdre PABR est la *somme* des angles dièdres PABQ, QABR, que l'angle dièdre PABS est la *somme* des angles dièdres PABQ, QABR, RABS, et ainsi de suite, et on écrit :

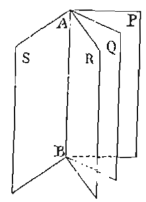


Fig. 421.

$$PABR = PABQ + QABR$$
$$PABS = PABQ + QABR + RABS,$$

etc.

Un angle dièdre égal à la somme de deux angles dièdres est dit *plus grand* que chacun d'eux.

Si un angle dièdre PABL est la somme de m angles dièdres égaux à PABQ, on dit que l'angle dièdre PABL est égal à m fois l'angle PABQ, et que l'angle PABQ est la m^{me} partie de l'angle PABL, et on écrit :

$$PABL = m . PABQ \qquad PABQ = \frac{1}{m} PABL.$$

Si un angle PABL est égal à m fois la n^{me} partie d'un angle PABQ, on écrit :

$$PABL = \frac{m}{n} PABQ.$$

543. On appelle *angles dièdres adjacents* deux angles dièdres

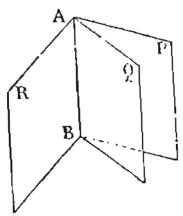


Fig. 422.

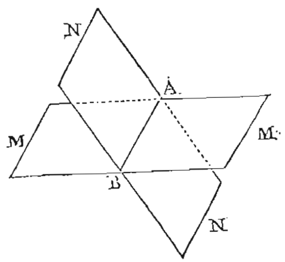


Fig. 423.

qui ont même arête, une face commune, et sont situés de part et d'autre de cette face commune. Tels sont les angles dièdres PABQ, QABR, qui ont même arête AB, une face commune ABQ, et sont situés de part et d'autre de cette face (*fig.* 422).

544. On appelle *angles dièdres opposés par l'arête*, deux dièdres tels que chaque face de l'un soit le prolongement d'une face de l'autre, de l'autre côté de l'arête ; tels sont les dièdres MABN, M'ABN' (*fig.* 423).

545. Un demi-plan P qui coupe un plan MN suivant une droite AB forme avec le plan MN, d'un même côté de ce plan, deux angles dièdres adjacents PABM, PABN : si ces angles

dièdres sont inégaux, et c'est le cas général, le demi-plan P est dit *oblique* au plan Q (*fig.* 424) ; s'ils sont égaux, le demi-plan Pest dit *perpendiculaire* au plan Q (*fig.* 425).

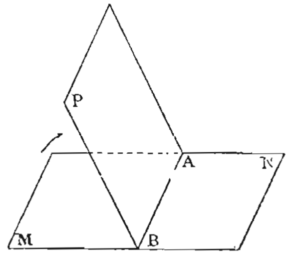


Fig. 424.

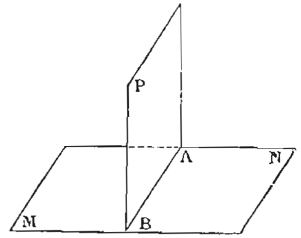


Fig. 425.

546. On dit qu'un angle dièdre est *droit* quand une de ses faces est perpendiculaire à l'autre.

Théorème.

547. *Par une droite* AB *située dans un plan* MN *on peut mener, d'un côté de ce plan, un plan perpendiculaire à ce plan, et on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 426).

Supposons qu'un demi-plan P, passant par la droite AB, soit d'abord appliqué sur la région ABM du plan MN, puis tourne autour de AB, dans le sens indiqué par la flèche, jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer snr la région ABN du plan MN. L'angle dièdre PABM, d'abord nul, augmente sans cesse, tandis que l'angle adjacent PABN diminue sans cesse, jusqu'à devenir nul. L'angle dièdre PABM, d'abord inférieur à l'angle PABN, s'en rapproche de plus en plus, lui devient égal, puis

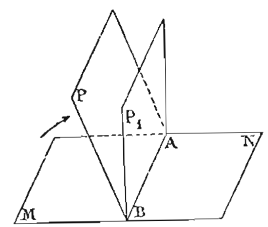


Fig. 426.

supérieur, et s'en écarte de plus en plus. Il y a donc, parmi les positions intermédiaires du demi-plan P, une position particulière P_1, et une seule, pour laquelle les angles P_1ABM,

P_1ABN sont égaux, c'est-à-dire pour laquelle le demi-plan P_1 est perpendiculaire au plan MN.

548. Corollaire. *Tous les angles droits sont égaux.*

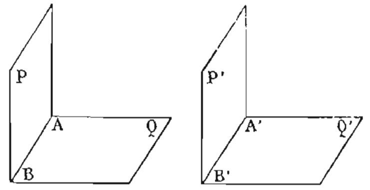


Fig. 427.

Soient deux angles dièdres droits PABQ, P'A'B'Q' (*fig.* 427).

Portons le dièdre droit P'A'B'Q' sur le dièdre droit PABQ de façon que la face Q' se place sur la face Q, que l'arête A'B' coïncide avec l'arête AB et que le demi-plan P' soit, par rapport au plan Q, du même côté que le demi-plan P. Le demi-plan P' perpendiculaire au plan Q' se place sur le seul demi-plan perpendiculaire au plan Q que l'on peut mener à ce demi-plan par la droite AB du même côté que le demi-plan P par rapport au même plan Q; il se place donc sur le demi-plan P. Les faces du second dièdre coïncident ainsi avec les faces du premier. Donc les deux dièdres droits donnés sont égaux.

549. Tous les angles dièdres droits étant égaux, l'angle *dièdre droit* est un type invariable auquel on peut comparer les autres angles dièdres.

On dit qu'un angle est *aigu* ou *obtus* selon qu'il est plus petit, ou plus grand qu'un dièdre droit.

On dit que deux dièdres sont *complémentaires* quand leur somme vaut un dièdre droit, *supplémentaires* quand leur somme vaut deux dièdres droits.

550. Remarque. La démonstration du théorème précédent et de son corollaire est tout à fait semblable à celle donnée en géométrie plane aux nos 30 et 31.

De même pour les deux théorèmes suivants, il suffit de reproduire les démonstrations des théorèmes correspondants de la géométrie plane. Nous nous bornerons à indiquer les numéros à consulter.

Théorème.

551. *Quand deux angles dièdres adjacents ont leurs faces extérieures sur un même plan, leur somme est égale à deux dièdres droits* (Voir n° 34).

552. Corollaire I. *La somme des angles dièdres* MABP, PABQ, QABR... VABN (*fig.* 428), *formés autour d'une même arête* AB *située dans le plan* MN, *et occupant tout l'espace situé*

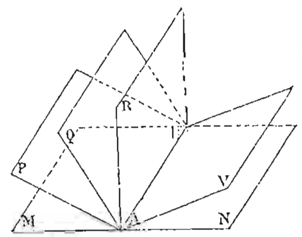


Fig. 428.

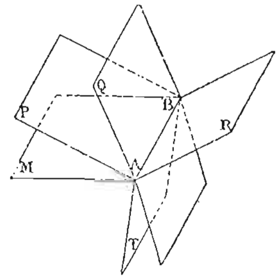


Fig. 429.

d'un même côté de ce plan MN, *sans que deux de ces angles dièdres occupent une même partie de l'espace, vaut deux dièdres droits* (Voir n° 35).

553. Corollaire II. *La somme des angles dièdres* MABP, PABQ, QABR,..... TABM (*fig.* 426), *formés autour d'une arête, et occupant tout l'espace, sans que deux de ces angles dièdres occupent une même portion de l'espace, vaut quatre dièdres droits* (Voir n° 36).

554. *Si deux angles dièdres adjacents sont supplémentaires, leurs faces extérieures sont dans un même plan* (Voir n° 37). (Réciproque du théorème précédent.)

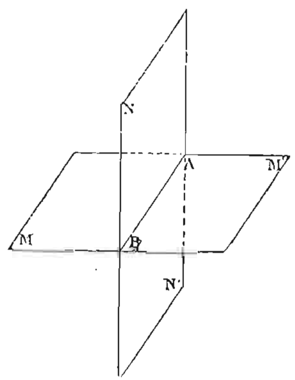


Fig. 430.

555. Corollaire. *Les deux demi-plans* ABN, ABN', *perpendiculaires à un plan* MM' *que l'on peut mener, de part et d'autre de ce plan, par une droite* AB *située dans ce plan, appartiennent à un même plan indéfini* NABN' (*fig.* 430).

Le plan indéfini NABN', dont les deux régions séparées par

AB, sont des demi-plans perpendiculaires au plan MM′ est dit *un plan perpendiculaire* au plan MM′. Par une droite AB située dans le plan MM′ on peut mener un plan indéfini perpendiculaire au plan MM′, et on n'en peut mener qu'un.

Si le plan indéfini NABN′ est perpendiculaire au plan MM′, réciproquement le plan MABM′ est perpendiculaire au plan NABN′, car chacune des régions ABM, ABM′, est un demi-plan perpendiculaire au plan NABN′.

On exprime le fait que chacun des deux plans est perpendiculaire à l'autre en disant que *les deux plans sont perpendiculaires.*

Théorème.

556. *Deux angles dièdres opposées par l'arête sont égaux* (Voir n° 38).

557. Remarque. Deux plans MM′, NN′, qui se coupent, forment quatre angles dièdres (*fig.* 437) ; deux quelconques

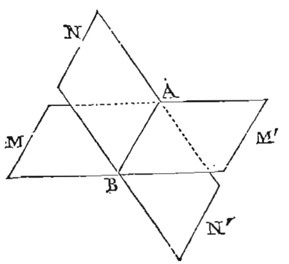


Fig. 431.

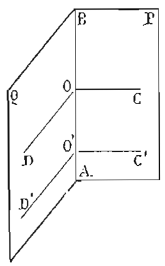


Fig. 432.

de ces angles sont ou égaux comme opposés par l'arête, ou supplémentaires comme dièdres adjacents dont les faces extérieures sont sur un même plan. Il en résulte que si l'un des quatre angles dièdres est droit, les quatre dièdres sont droits.

558. Définition. On appelle *angle plan* d'un angle dièdre PABQ (*fig* 431), l'angle COD formé par les perpendiculaires OC et OD à l'arête AB, menées par un point O de cette ligne dans les deux faces du dièdre.

559. *L'angle plan* d'un dièdre étant ainsi défini, il importe d'établir les trois faits suivants :

1° *La grandeur de l'angle plan d'un dièdre est la même quel que soit le point de l'arête que l'on prend pour son sommet.*

Car, si l'on considère deux angles plans quelconques COD, C′O′D′ du dièdre PABQ, ces angles sont égaux comme ayant les côtés respectivement parallèles et de même sens.

2° *Les angles plans de deux dièdres égaux sont égaux.*

Cela résulte de ce que les dièdres égaux sont superposables.

3° *Deux angles dièdres qui ont des angles plans égaux sont égaux.*

Soient, en effet, deux dièdres CABD et C′A′B′D′ (*fig.* 433), dont les angles plans, CAD et C′A′D′, sont égaux. Transportons le dièdre C′A′B′D′, de façon que l'angle plan C′A′D′ de ce dièdre vienne coïncider avec l'angle plan égal CAD du dièdre CABD ; la droite A′B′, perpendiculaire aux droites A′C′ et A′D′, est perpendiculaire au plan de ces droites, et vient coïncider avec la perpendiculaire au plan des droites AC et AD, menée par le point A, c'est-à-dire avec la droite AB. Il en résulte que les deux dièdres coïncident, et, par conséquent, sont égaux.

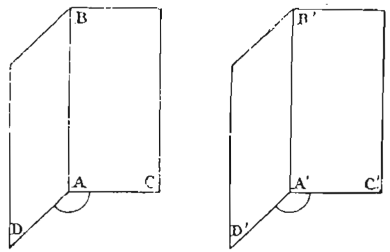


Fig. 433.

De l'ensemble de ces trois faits, il résulte que la grandeur d'un angle dièdre est déterminée par la grandeur de son angle plan.

Théorème.

560. *L'angle plan d'un angle dièdre droit est un angle droit, et réciproquement.*

Soit un angle dièdre droit MABP (*fig.* 434) ; prolongeons la face M au delà de l'arête AB, nous aurons un second dièdre droit NABP adjacent au premier. Par un point O, pris sur l'arête AB, menons, dans le plan MN et dans le plan P, les droites COD et OE perpendiculaires à AB. Les angles COE, DOE sont les angles plans des deux dièdres égaux MABP, NABP, donc ils sont égaux. Or, ces angles égaux COE, DOE sont supplémentaires, parce qu'ils sont adjacents et ont leurs côtés extérieurs en ligne droite ; donc ils sont droits.

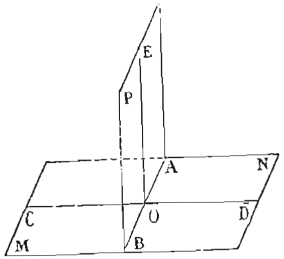


Fig. 434.

Réciproquement soit un dièdre MABP dont l'angle plan COE est droit. Si nous prolongeons la face M et la droite CO au delà de l'arête AB, nous formons un second dièdre NABP et son angle plan DOE. Or, COE étant droit, l'angle DOE est droit aussi. Les dièdres MABP, NABP ont des angles plans égaux, donc ils sont égaux ; ils sont d'ailleurs supplémentaires ; donc le dièdre MABP est droit.

Théorème.

561. *Le rapport de deux angles dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.*

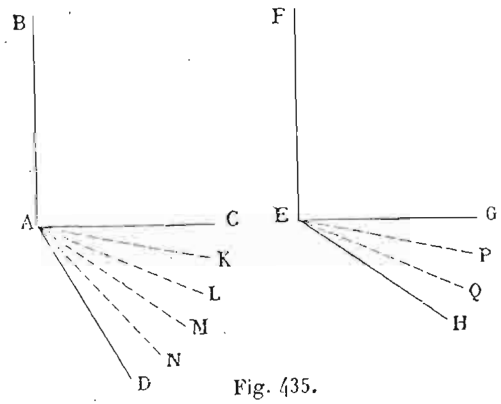


Fig. 435.

Soient les deux angles dièdres CABD, GEFH (*fig.* 435), dont les angles plans sont les angles CAD, GEH. Supposons d'abord que ces angles plans aient une commune mesure, CAK, contenue, par exemple, 5 fois dans le premier et 3 fois dans le second ; le rapport des angles plans CAD, GEH est alors égal à $\frac{5}{3}$. Imaginons que l'on ait mené les demi-

droites AK, AL, AM, AN et EP, EQ qui partagent les deux angles plans, l'un en 5, l'autre en 3 angles égaux à l'angle CAK.

Si par l'arête AB et par les demi-droites AK, AL, AM, AN, nous menons les demi-plans BAK, BAL, BAM, BAN, nous partageons le dièdre CABD en cinq dièdres qui ont respectivement pour angles plans les angles égaux CAK, KAL, LAM, MAN, NAD, et qui, par conséquent sont égaux. De même, si par l'arête EF et par les demi-droites EP, EQ, nous menons les demi-plans FEP, FEQ nous partageons le dièdre GEFH en trois dièdres qui ont respectivement pour angles plans les angles égaux GEP, PEQ, QEH, et qui, par conséquent sont égaux. Ces trois derniers dièdres sont d'ailleurs égaux aux cinq premiers parce que les angles plans de tous ces dièdres sont égaux. Donc les deux dièdres CABD, GEFH contiennent le premier cinq dièdres le second trois dièdres égaux au dièdre CABK, donc le rapport de ces deux dièdres est $\frac{5}{3}$ comme le rapport de leurs angles plans.

En second lieu, supposons que les angles plans CAD, GEH n'aient pas de commune mesure. Partageons l'angle plan GEH en un certain nombre de parties égales, par exemple, en n parties égales, et supposons que l'angle plan CAD soit supérieur à m de ces parties et inférieur $m+1$. Les valeurs approchées, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des angles plans CAD, GEH, sont les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$. Menons encore par l'arête AB et par les demi-droites qui partagent l'angle CAO des demi-plans situés dans le dièdre CABD, puis par l'arête EF et par les demi-droites qui partagent l'angle EFH des demi-plans situés dans le dièdre GEFH. L'angle dièdre GEFH est ainsi partagé en n angles dièdres égaux, et l'angle dièdre CABD en $m+1$, angles dièdres dont m angles dièdres égaux aux précédents, et un plus petit que les autres ; de sorte que l'angle dièdre CABD est supérieur à m des angles dièdres considérés et inférieur à $m+1$. Les nombres $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont donc les valeurs approchées, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport de l'angle dièdre CABD à l'angle dièdre GEFH, comme ils sont les valeurs approchées, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des angles plans CAD, GEH. Cela étant quel que soit n, on en conclut encore (17) que le rapport des deux dièdres est égal au rapport de leurs angles plans.

562. Remarque. Le rapport de deux angles dièdres étant égal au rapport de leurs angles plans, si l'on convient de prendre, pour unité d'angle dièdre, le dièdre qui correspond à l'angle plan choisi pour unité d'angle plan, la *mesure* d'un angle dièdre est égale à la *mesure* de son angle plan.

Si, par exemple, on prend pour unité d'angle plan l'angle d'un degré, et pour unité d'angle dièdre le dièdre dont l'angle plan est égal à 1°; un angle dièdre, dont l'angle plan est 17° 28′ 47″, est un angle dièdre de 17° 28′ 47″.

§ V. Plans perpendiculaires.

Théorème.

563. *Lorsqu'une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *tout plan* Q, *mené par la droite* AB, *est perpendiculaire au plan* P (*fig.* 436).

Soit DC l'intersection des plans P et Q (*fig.* 436); menons, dans le plan P, par le point B, la perpendiculaire BE à DC. La droite AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire aux droites BC et BE du plan P, qui passent par son pied. L'angle ABE, dont les côtés sont des perpendiculaires à la droite DC, menées par le point B dans les deux plans P et Q, est l'angle plan du dièdre de ces deux plans. Cet angle ABE étant droit, les plans P et Q forment un angle dièdre droit, et, par conséquent, sont perpendiculaires.

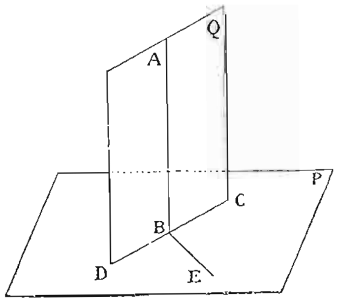


Fig. 436.

Théorème.

564. *Deux plans étant perpendiculaires, si dans l'un on mène une perpendiculaire à l'intersection des deux plans, cette droite est perpendiculaire à l'autre plan.*

Soient deux plans P et Q perpendiculaires, et soit, dans le plan Q, la droite AB perpendiculaire à l'intersection DC des deux plans : je dis que la droite AB est perpendiculaire au plan P (*fig.* 437).

En effet, si par le point B je mène, dans le plan P, la droite BE perpendiculaire à BC, l'angle ABE est l'angle plan du dièdre formé par les plans P et Q; ces plans étant perpendiculaires, l'angle ABE est droit. Donc la droite AB, perpendiculaire aux droites BC et BE, est perpendiculaire au plan P qui contient ces droites.

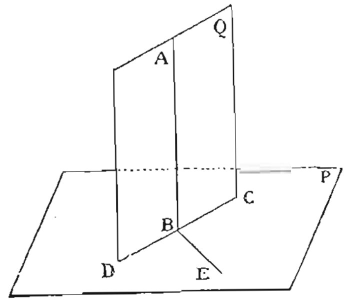


Fig. 437.

Théorème.

565. *Deux plans étant perpendiculaires, si, par un point de l'un on mène une perpendiculaire à l'autre, cette droite est située dans le premier plan.*

Soient P et Q deux plans perpendiculaires, et un point A pris dans le plan Q (*fig.* 438). Si, du point A, on mène la droite AB perpendiculaire à l'intersection BC des deux plans, la droite AB est perpendiculaire au plan P (564). Donc la perpendiculaire au plan P, menée par le point A, se confond avec la droite AB, et est, par conséquent, située dans le plan Q.

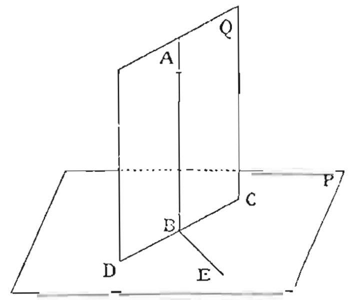


Fig. 438.

566. Corollaire I. *Un plan perpendiculaire à deux plans qui se coupent est perpendiculaire à leur intersection.*

Soit (*fig.* 439) le plan P perpendiculaire aux plans Q et R qui se coupent suivant AB. Si, par un point quelconque A de l'intersection des deux plans, on mène une perpendiculaire au plan P, cette perpendiculaire qui, d'après le théorème précédent, est située dans chacun des deux plans Q et R, se confond avec la droite d'intersection AB de ces deux plans.

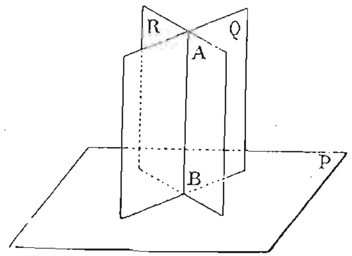


Fig. 439.

567. Corollaire II. *Par une droite quelconque* AB (*fig.* 440), *on peut mener un plan perpendiculaire à un plan* P, *et généralement on n'en peut mener qu'un.*

En effet, si par un point quelconque A de la droite AB on mène la perpendiculaire AC au plan P, le plan des droites AB et AC est perpendiculaire au plan P. D'ailleurs tout plan mené par AB perpendiculairement au plan P contient la perpendiculaire AC menée du point A au plan P, et, par conséquent, se confond avec le plan des droites AB et AC.

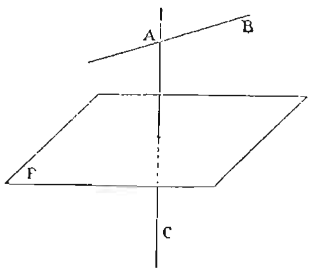


Fig. 440.

La démonstration s'applique quelle que soit la situation de la droite AB par rapport au plan P, pourvu toutefois qu'elle ne lui soit pas perpendiculaire.

Si la droite AB était perpendiculaire au plan P, la droite AC se confondrait avec la droite AB, et tout plan mené par la droite AB serait perpendiculaire au plan P.

§ VI. Angle d'une droite et d'un plan.

568. Définitions. On appelle *projection* d'un point A sur un plan P le pied *a* de la perpendiculaire A*a* abaissée du point A sur le plan P.

On appelle *projection* d'une ligne sur un plan le lieu des projections des points de cette ligne sur ce plan.

Théorème.

569. *La projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite.*

Soient (*fig.* 441) une droite AB et un plan P. Par un point A de la droite AB menons la perpendiculaire A*a* au plan P; le plan des droites AB et A*a* est perpendiculaire au plan P, et coupe ce plan suivant une certaine droite *am*. La perpendiculaire B*b* au plan P, menée par un point quelconque B de la droite AB, est tout entière dans le plan AB*a*, et par conséquent a son pied *b* sur l'intersection *am* du plan AB*a* et du plan P. Donc la droite *am* est la projection de AB sur le plan P.

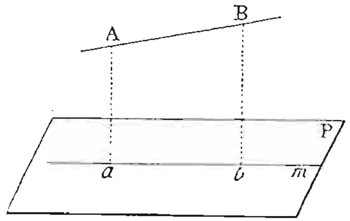


Fig. 441.

Théorème.

570. *De toutes les droites qu'on peut mener dans un plan* P *par le pied* B *d'une oblique* AB *à ce plan, celle qui fait avec la droite* AB *le plus petit angle est la projection de la droite* AB *sur le plan* P.

En effet, soit C (*fig.* 442) la projection sur le plan P d'un point A de l'oblique AB; BC est la projection de la droite BA. Menons par le point B, dans le plan P, une droite quelconque BD, et prenons la longueur BD égale à BC. Les triangles ABC et ABD ont deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : AB côté commun, et BC égal à BD; les troisièmes côtés sont inégaux, car la perpendiculaire AC est plus petite que l'oblique AD. Donc (74) l'angle ABC est plus petit que l'angle ABD.

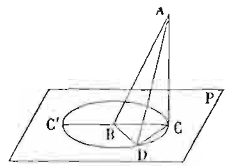


Fig. 442.

571. Remarque. Si l'on fait tourner la droite BD dans le plan, de façon à l'amener de la direction BC à la direction opposée BC', l'angle ABD augmente sans cesse. En effet, du point B comme centre, avec BC pour rayon, traçons dans le plan une circonférence, et concevons que le point D parcoure l'arc CDC′. Dans le triangle ABD les deux côtés AB et BD ne varient pas; mais, à mesure que le point D s'éloigne du point C sur l'arc CDC′ la corde CD augmente, et par suite l'oblique AD au plan P, dont le pied s'écarte de plus en plus du pied de la perpendiculaire AC, augmente aussi; donc enfin l'angle ABD, opposé au côté AD, augmente. Si, après avoir pris la direction BC′ opposée à BC, la droite BD continue à se mouvoir dans le même sens, l'angle ABD reprend, en ordre inverse, les mêmes valeurs. Donc l'angle ABD est *minimun* quand la droite BD coïncide avec la projection BC de BA, et *maximun* quand BD coïncide avec le prolongement BC′ de la projection BC.

572. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* le plus petit angle formé par cette droite avec une droite menée par son pied dans le plan. L'angle d'une droite et d'un plan est donc l'angle formé par la droite avec sa projection sur le plan.

Théorème.

573. *De toutes les droites menées par un point* A *dans un plan* Q, *celle qui fait avec un plan* P *le plus grand angle possible est perpendiculaire à l'intersection* MN *des plans* P *et* Q (*fig.* 443).

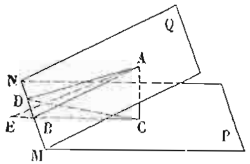


Fig. 443.

En effet, soit AC perpendiculaire au plan P; par le pied C de AC menons CB perpendiculaire à MN, et joignons le pied B de cette perpendiculaire au point A; la droite AB est perpendiculaire à MN, d'après le théorème des trois perpendiculaires. Par le point A menons, dans le plan Q, une autre droite quelconque AD. La projection de AB sur le plan P est CB, et l'angle de la droite AB avec le plan P est l'angle ABC. De même la projection de la droite AD sur le plan P est CD, et l'angle de la droite AD avec le plan P est l'angle ADC. Il faut démontrer que l'angle ABC est plus grand que l'angle ADC. Faisons tourner le triangle rectangle ACD autour du côté AC pour l'amener dans le plan du triangle ACB. Le côté CD prend la direction CB, et, comme l'oblique CD est plus grande que la perpendiculaire CB, le point D vient se placer sur le prolongement de CB, en un point E. Or l'angle ABC, extérieur au triangle ABE, est égal à la somme des deux angles AEB et BAE; il est donc plus grand que l'angle AEB, c'est-à-dire plus grand que l'angle ADC.

Si l'on fait tourner la droite autour du point A dans le plan Q, à mesure que l'angle BAD augmente de 0 à 90°, le point D s'éloignant de B, l'oblique CD augmente, et par suite l'angle ADC va toujours en diminuant. Quand l'angle BAD devient égal à 90°, la droite devient parallèle à MN et, par suite, parallèle au plan P, et l'angle qu'elle fait avec le plan P se réduit à zéro. Si la droite continue à tourner dans le même sens, l'angle qu'elle fait avec le plan augmente à partir de 0° et reprend, en sens inverse, les mêmes valeurs.

§ VII. Plus courte distance de deux droites.

Problème.

574. *Mener une droite qui rencontre deux droites données, non situées dans le même plan, et leur soit perpendiculaire.*

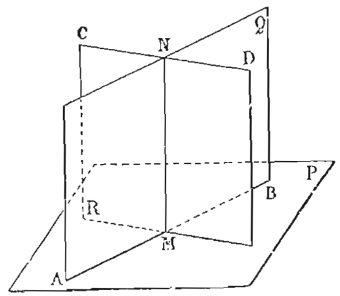


Fig. 444.

Soient AB, CD, les deux droites données (*fig.* 444). Par l'une, AB par exemple, menons un plan P parallèle à l'autre CD. Toute droite perpendiculaire aux deux droites données est perpendiculaire à deux droites non parallèles du plan P, à la droite RB, et à une parallèle à CD menée dans ce plan; donc toute droite perpendiculaire aux deux droites données est perpendiculaire au plan P; sa direction est ainsi bien déterminée. Le lieu géométrique des droites qui, étant perpendiculaires aux deux droites données, rencontrent la droite AB, est le plan Q mené par AB perpendiculairement au plan P. Le lieu géométrique des droites qui étant perpendiculaires aux deux droites données rencontrent CD est le plan R mené par CD perpendiculairement au plan P. L'intersection MN de ces deux plans rencontre les deux droites et leur est perpendiculaire; cette droite est d'ailleurs la seule qui remplisse ces conditions; c'est donc la droite demandée.

575. On peut encore trouver autrement la direction de la perpendiculaire commune aux deux droites données. Soit U un plan perpendiculaire à AB, et soit V un plan perpendiculaire à CD (*fig.* 445); toute droite perpendiculaire à AB est parallèle au plan U, toute droite perpendiculaire à CD est parallèle au plan V; donc toute perpendiculaire aux deux droites AB et CD est parallèle aux deux plans U et V, et par conséquent est parallèle à leur intersection XY; la direction est donc ainsi bien déterminée. Le lieu des perpendiculaires aux deux droites, qui rencontrent AB, est le plan ABR parallèle à XY mené par AB; le lieu des perpendiculaires aux deux droites qui rencontrent CD est le plan CDS parallèle à XY mené par CD; l'intersection MN de ces deux derniers plans est la droite, perpendiculaire aux deux droites, qui rencontre ces deux droites.

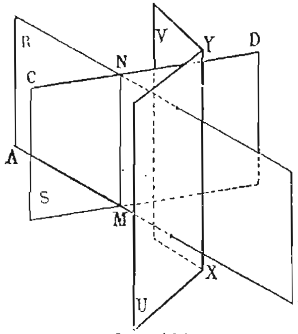


Fig. 445.

La droite MN qui est perpendiculaire aux deux droites AB, CD, et qui les rencontre, est appelée la *perpendiculaire commune* à ces deux droites.

576. Corollaire. — *La plus courte distance de deux droites,* AB, CD, *non situées dans un même plan, est la portion* MN *de la perpendiculaire commune à ces droites comprise entre ces droites.*

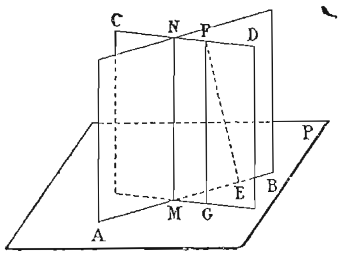


Fig. 446.

En effet, prenons deux points quelconques E et F l'un sur AB, l'autre sur CD (*fig.* 446). Si du point F nous menons la perpendiculaire FG sur le plan P, les droites NM et FG sont égales (521). Or la droite FG perpendiculaire au plan P est moindre que l'oblique FE. Donc la portion MN de la perpendiculaire commune aux deux droites comprise entre ces droites est la plus courte distance de ces deux droites.

577. Remarque. Pour obtenir la grandeur de la plus courte distance des deux droites, il suffit de mener par chacune un plan parallèle à l'autre, et de prendre la distance de ces deux plans parallèles.

§ VIII. Angles trièdres et angles polyèdres. Trièdres supplémentaires. Cas d'égalité des trièdres. Analogies et différences entre les propriétés des angles trièdres et les propriétés des triangles rectilignes.

ANGLES TRIÈDRES ET ANGLES POLYÈDRES.

578. Définitions. On appelle angle *trièdre* la figure formée par trois plans ASB, BSC, CSA (*fig.* 447) qui se coupent en un point S, et dont on ne considère que les parties limitées par les droites SA, SB, SC, suivant lesquelles ces plans se coupent deux à deux, ces droites étant elles-mêmes limitées d'un côté au point S. Le point S est le *sommet*, les demi-droites SA, SB, SC, sont les *arêtes;* les angles plans ASB, BSC, CSA, sont les *faces* de l'angle trièdre.

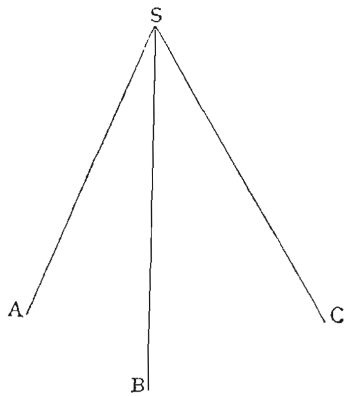


Fig. 447.

On appelle, en général, angle *solide*, ou angle *polyèdre*, la figure formée par plusieurs plans qui se coupent en un même point et sont limités à leurs droites d'intersection, ces droites d'intersection étant elles-mêmes limitées d'un côté à leur point commun. Un angle solide ne peut avoir moins de trois faces.

579. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* quand toutes ses arêtes sont situées d'un même côté par rapport au plan de l'une quelconque de ses faces.

Théorème.

580. *Dans un triangle trièdre une face quelconque est moindre que la somme des deux autres.*

Soit, dans le trièdre SABC (*fig.* 448), ASB la plus grande des trois faces. Il suffit de démontrer que cette face est moindre que la somme des deux autres. Dans l'angle ASB, qui est plus grand que ASC, menons une demi-droite SD faisant avec SA un angle ASD égal à ASC; dans le plan de cet angle menons encore une droite quelconque AB qui rencontre les droites SA, SB et SD aux points A, B et D. Prenons sur SC une longueur SC égale à SD, et menons les droites AC et BC. Les triangles ASC et ASD sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. et par conséquent AC est égal à AD. Or, le côté AB du triangle ABC étant plus petit que la somme des deux autres AC et BC, il en résulte que DB est plus petit que BC. Les triangles BSD et BSC ont deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : SB côté commun, et SD égal à SC; le troisième côté BD du premier triangle étant moindre que le troisième côté BC du second triangle, l'angle BSD opposé à BD est moindre que l'angle BSC opposé à BC. En ajoutant d'une part l'angle ASD, de l'autre l'angle égal ASC, on en conclut que la face ASB est moindre que la somme des deux autres, ASC + CSB.

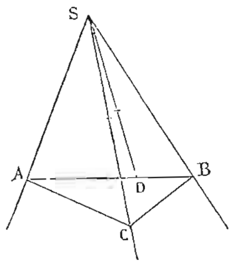


Fig. 448.

Théorème.

581. *La somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits.*

Soit ABCDE (*fig.* 449) un polygone convexe obtenu en coupant l'angle polyèdre convexe SABCDE par un plan qui rencontre toutes ses arêtes, et soit O un point pris dans l'intérieur de ce polygone. Joignons ce point O aux sommets du polygone, nous aurons deux séries de triangles, en nombre

égal, ayant pour base les côtés du polygone, et, pour sommets, les uns le point O, les autres le point S. La somme des angles des triangles de la première série est égale à la somme des angles des triangles de la seconde. Or, en appliquant le théorème précédent aux angles trièdres qui ont pour sommets respectifs les points A, B, C, D, E, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} EAB &< EAS + BAS \\ ABC &< ABS + CBS \\ BCD &< BCS + DCS \\ CDE &< CDS + EDS \\ DEA &< DES + AES \end{aligned}$$

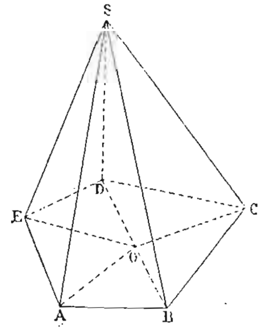


Fig. 449.

et, en ajoutant membre à membre ces inégalités, on voit que la somme des angles à la base des triangles qui ont O pour sommet est moindre que la somme des angles à la base des triangles qui ont S pour sommet. Par compensation, la somme des angles au sommet assemblés autour du point S est moindre que la somme des angles au sommet assemblés autour du point O. Or, cette dernière somme vaut quatre angles droits; donc le théorème est démontré.

582. Remarque. Il résulte de ce théorème et du précédent qu'il est impossible de construire un angle trièdre ayant pour faces trois angles donnés, si ces angles ne satisfont pas aux deux conditions suivantes :

1° *La somme des trois angles doit être comprise entre zéro et quatre angles droits.*

2° *Le plus grand angle doit être plus petit que la somme des deux autres.*

Nous démontrerons plus loin que ces conditions nécessaires sont suffisantes.

583. Angles polyèdres symétriques. — Si l'on prolonge en sens inverse les arêtes d'un angle polyèdre, on forme un nouvel angle polyèdre que l'on dit *symétrique* du premier. Ces deux angles polyèdres sont composés des mêmes éléments, car les faces du premier angle polyèdre sont respectivement égales aux faces du second, comme angles opposés par le sommet; les angles dièdres du premier angle polyèdre sont respectivement égaux aux angles dièdres du second, comme angles dièdres formés par deux mêmes plans et opposés par l'arête.

Mais, bien que composés des mêmes éléments, deux angles polyèdres symétriques ne sont pas superposables. Considérons, par exemple, les deux trièdres symétriques SABC, SA'B'C' (*fig.* 450), et cherchons à placer le second sur le premier en faisant coïncider les faces égales ASB, A'SB'. Pour amener la face A'SB' à coïncider avec la face égale ASB, il faut amener SA' sur SA et SB' sur SB, ou, inversement, SA' sur SB et SB' sur SA. Pour obtenir ces résultats, nous pouvons opérer des deux façons suivantes :

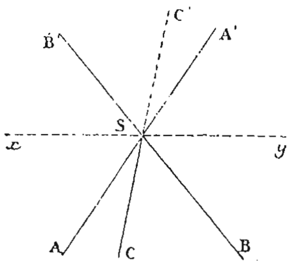


Fig. 450.

1° Faisons tourner la figure de 180° autour d'une perpendiculaire au plan ASB menée par le point S. Alors SA' vient sur SA, SB' sur SB; mais, tandis que l'arête SC est en avant du plan ASB, l'arête SC' reste en arrière de ce plan ; de sorte que les deux trièdres SABC, SA'B'C', situés de part et d'autre du plan SAB, ne coïncident pas.

2° Faisons tourner la figure de 180° autour de la bissectrice xy de l'angle ASB'; alors SB' tombe sur SA, SA' sur SB, et l'arête SC' vient se placer du même côté que l'arête SC par rapport au plan ASB. Mais, comme le dièdre qui a pour arête SB' n'est généralement pas égal au dièdre qui a pour arête SA, la face B'SA' du second trièdre coïncidant avec la face ASB du premier, la face B'SC' du second ne coïncide pas avec la face ASC du premier, et par conséquent l'arête SC' du second trièdre ne coïncide pas avec l'arête SC du premier.

Donc, en général, deux trièdres symétriques ne sont pas superposables. Remarquons toutefois que, si les angles dièdres SA et SB du trièdre SABC sont égaux, le dièdre SB' égal au dièdre SB coïncide avec le dièdre SA, quand, par le second mode de rotation, la face B'SA' est amenée sur la face ASB; le dièdre SA' coïncide de même avec le dièdre SB, et l'arête SC' située à la fois dans les deux faces SBC, SAC, coïncide avec

l'arête SC, intersection de ces deux faces. Il en résulte que, *dans le cas particulier, où un angle trièdre a deux dièdres égaux, et dans ce cas seulement, ce trièdre est superposable au trièdre symétrique.*

584. Si deux angles trièdres symétriques, bien que composés des mêmes éléments, ne sont pas, en général, superposables, cela tient à ce que, dans ces deux angles trièdres, les éléments égaux ont une disposition inverse. Pour nous en rendre compte, imaginons un observateur placé sur l'arête SA, la tête en S, les pieds en A, et regardant dans l'intérieur de l'angle trièdre SABC, et un second observateur placé de même sur l'arête SA' qui correspond à l'arête SA, la tête en S, les pieds en A' et regardant dans l'intérieur de l'angle trièdre SA'B'C' symétrique du premier. L'observateur placé sur l'arête SA a à sa *gauche* la face ASB, tandis que l'observateur placé sur SA' a à sa *droite* la face A'SB' égale à la face ASB. Il en est de même quelles que soient les arêtes correspondantes des deux angles trièdres symétriques suivant lesquelles nous placerons les deux observateurs.

La même observation est applicable à deux angles polyèdres symétriques, quel que soit le nombre de faces.

Théorème.

585. *Si, dans un trièdre, deux angles dièdres sont égaux, les faces opposées sont égales.*

Soit SABC (*fig.* 451) un trièdre dans lequel les dièdres SA et SB sont égaux. Ce trièdre est superposable au trièdre symétrique SA'B'C'; donc la face ASC est égale à la face B'SC' et, par suite, à la face BSC.

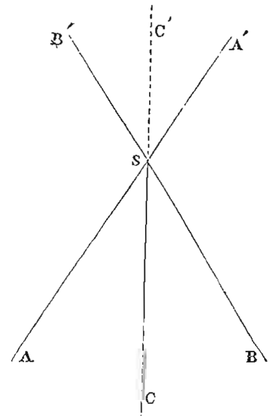


Fig. 451.

Théorème.

586. *Si, dans un trièdre, deux dièdres sont inégaux, les faces* *opposées à ces dièdres sont inégales; au plus grand dièdre est opposée la plus grande face.*

Soit dans le trièdre SABC le dièdre SA plus grand que le dièdre SB (*fig.* 452). Nous pouvons mener dans le dièdre BSAC, par l'arête SA, un plan SAD faisant avec la face ASB un angle dièdre égal à l'angle dièdre SB. Soit SD la trace de ce plan sur le plan BSC. Pour rendre la figure plus intelligible, coupons le trièdre donné par un plan quelconque ABC, rencontrant les trois arêtes d'un même côté du sommet, et figurons les traces de ce plan sur les faces du trièdre et sur le plan auxiliaire ASD. Dans le trièdre SABD, les dièdres qui ont pour arête SA et SB étant égaux, les faces BSD et ASD, opposées à ces dièdres, sont égales. Or, dans le trièdre SACD, on a :

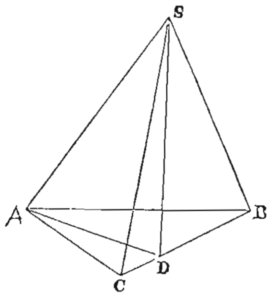


Fig. 452.

$$ASC < ASD + CSD$$

ou, en remplaçant ASD par la face égale BSD,

$$ASC < BSD + CSD$$

ou

$$ASC < BSC.$$

587. Remarque. Ce théorème et le précédent étant deux propositions contraires, les réciproques sont vraies.

Donc :

Si dans un trièdre deux faces sont égales, les dièdres opposés à ces faces sont égaux.

Si dans un trièdre deux faces sont inégales, les dièdres opposés à ces faces sont inégaux; à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.

TRIÈDRES SUPPLÉMENTAIRES.

588. Définition. Soit un trièdre SABC (*fig.* 453). Par le point S menons les demi-droites SA′, SB′, SC′, respectivement perpendiculaires aux trois faces BSC, ASC, ASB du trièdre, et prenons ces demi-droites de façon que chacune soit, par rapport à la face à laquelle elle est perpendiculaire, du côté de la troisième arête du trièdre. Ainsi la demi-droite SA′, perpendiculaire à la face BSC, est prise, par rapport au plan BSC, du même côté que l'arête SA. Les trois droites SA′, SB′, SC′, ainsi menées ne sont pas dans un même plan; en effet, si elles étaient dans un même plan P, les plans SBC, SAC, SAB, perpendiculaires à ces droites seraient perpendiculaires à ce plan, et, par suite ils contiendraient tous les trois la perpendiculaire menée par le point S au plan P, et, dès lors ces plans ne seraient pas les faces d'un trièdre Les trois droites SA′, SB′, SC′, n'étant pas dans un même plan, sont les arêtes d'un trièdre et ce trièdre est appelé le *trièdre supplémentaire* du trièdre SABC.

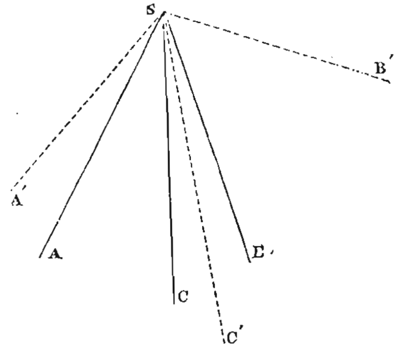


Fig. 453.

Théorème.

589. *Si un angle trièdre* SA′B′C′ *est supplémentaire d'un angle trièdre* SABC, *réciproquement le trièdre* SABC *est supplémentaire du trièdre* SA′B′C′.

Pour faciliter la démonstration de ce théorème nous ferons les remarques suivantes :

Si d'un point d'un plan, on mène d'un même côté de ce plan une perpendiculaire et une oblique au plan, ces deux demi-droites forment entre elles un angle aigu.

Et, réciproquement, si d'un point d'un plan on mène deux demi-droites, dont l'une est perpendiculaire au plan, formant entre elles un angle aigu, ces demi-droites sont d'un même côté du plan.

Soient OA et OB (*fig.* 454), deux demi-droites menées du point O d'un plan P, d'un même côté de ce plan, OA perpendiculaire, OB oblique au plan. Le plan de ces deux droites coupe le plan P suivant une droite CD. La droite OA est perpendiculaire et la droite OB est oblique à la droite CD. Ces demi-droites étant d'un même côté par rapport à CD, OB tombe dans l'un des angles droits que la demi-droite OA forme avec CD. Donc l'angle AOB est aigu.

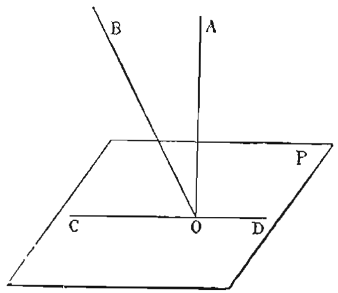


Fig. 454.

Réciproquement, soit la demi-droite OA perpendiculaire au plan P, et l'angle AOB aigu. Le plan de l'angle AOB coupe le plan P suivant une droite CD; OA est perpendiculaire à CD, et comme l'angle AOB est aigu, les demi-droites OA et OB sont d'un même côté par rapport à CD. Il en résulte qu'elles sont aussi d'un même côté par rapport au plan P.

Cela posé, soit SA'B'C' le trièdre supplémentaire du trièdre SABC (*fig.* 455); il faut démontrer que réciproquement SABC est le trièdre supplémentaire du trièdre SA'B'C'.

L'arête SA est perpendiculaire au plan B'SC' ~~A'SB'~~, car cette droite est l'intersection de deux plans BSA, CSA respectivement perpendiculaires aux droites SC', SB', et par suite perpendiculaires au plan B'SC' qui contient ces deux droites.

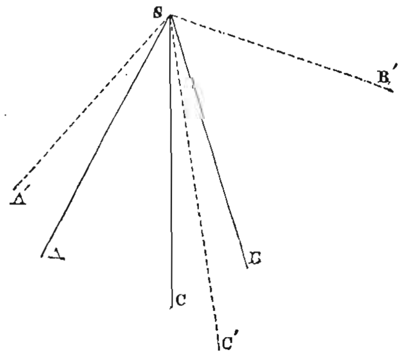


Fig. 455.

De plus, la demi-droite SA' perpendiculaire au plan BSC étant, par rapport à ce plan, du même côté que l'arête SA, l'angle ASA' est un angle aigu, et par suite la demi-droite SA perpendiculaire au plan B'SC' est, par rapport à ce plan, du même côté que l'arête SA'. On verrait de même que SB est perpendiculaire au plan A'SC' et est située, par rapport à ce plan, du même côté que SB', et enfin que SC est perpendiculaire au plan A'SB' et est située, par rapport à ce plan, du même côté que SC.

Deux dièdres SABC, SA'B'C', tels que chacun est le trièdre supplémentaire de l'autre, sont aussi appelés, pour cette raison, *trièdres réciproques*.

Théorème.

590. *Si deux angles trièdres sont supplémentaires, chaque face de l'un est le supplément du dièdre de l'autre trièdre qui a son arête perpendiculaire à cette face.*

Pour faciliter la démonstration de ce théorème, faisons les remarques suivantes:

1° *Dans le plan d'un angle* AOB, *si on mène les droites* OA' *et* OB' *telles que* OA' *soit perpendiculaire à* OB *et soit située, par rapport à* OB, *du même côté que* OA, *et que* OB' *soit perpendiculaire à* OA *et soit située, par rapport à* OA, *du même côté que* OB, *les angles* AOB, A'OB', *sont supplémentaires* (*fig.* 456).

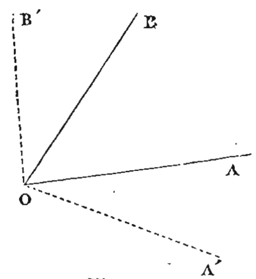


Fig. 456.

On sait déjà (101) que ces angles ayant les côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. Reste à démontrer que, par suite des directions données aux côtés OA' et OB' par cette construction, les angles sont nécessairement supplémentaires. Il suffit pour cela de montrer qu'ils sont de natures différentes. Or, si l'angle AOB est aigu (*fig.* 456), les angles droits AOB', BOA' étant plus grands que l'angle AOB, les côtés OA' et OB' tombent en dehors de l'angle AOB, et par suite l'angle A'OB', composé de l'angle droit AOB' et de l'angle AOA', est un angle obtus. Si, au contraire, l'angle AOB est obtus (*fig.* 457), les angles droits AOB',

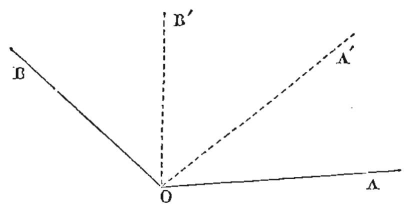


Fig. 457.

BOA′ étant moindres que l'angle obtus AOB, les côtés OA′ et OB′ tombent dans l'intérieur de l'angle AOB, et l'angle A′OB′, composé de l'angle droit AOB′ moins l'angle AOA′, est un angle aigu.

2° *Par un point* O *de l'arête* OC *d'un dièdre* AOCB *si on mène les droites* OA′ *et* OB′ *respectivement perpendiculaires aux faces du dièdre, et si on dirige ces droites de telle sorte que la droite* OA′, *qui est perpendiculaire à la face* BOC, *soit, par rapport à cette face, du même côté que la face* AOC, *et que la droite* OB′, *qui est perpendiculaire à la face* AOC, *soit, par rapport à cette face, du même côté que la face* BOC, *l'angle*

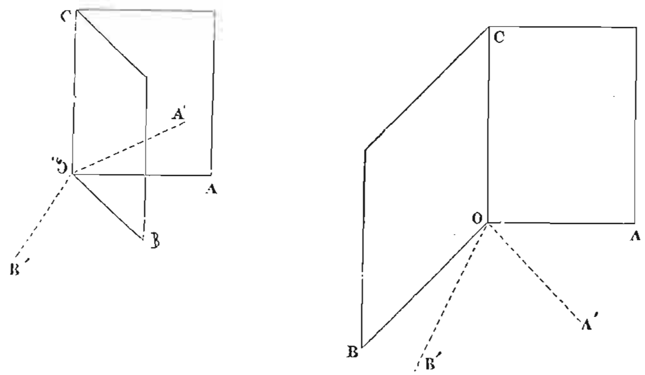


Fig. 458.

A′OB′ *est le supplément de l'angle plan* AOB *du dièdre donné* (*fig.* 458).

En effet les droites OA′ et OB′, perpendiculaires aux faces du dièdre, sont perpendiculaires à l'arête OC, et par suite elles sont situées dans le plan AOB qui est le plan mené par le point O perpendiculairement à l'arête. Dans ce plan les angles AOB, A′OB′ présentent la disposition précédente : donc ils sont supplémentaires.

Cela posé, soient SABC, SA′B′C′ deux trièdres supplémentaires (*fig.* 459). Considérons l'un quelconque des angles dièdres du premier trièdre, par exemple celui dont l'arête est SA, et la face B′SC′ du second trièdre dont le plan est perpendiculaire à l'arête SA.

Par construction, la droite SB′ est perpendiculaire au plan ASC et est située, par rapport à ce plan, du même côté que l'arête SB, c'est-à-dire du même côté que la face ASB ; de même la droite SC′ est perpendiculaire au plan ASB et est située, par rapport à ce plan, du même côté que l'arête SC, c'est-à-dire du même côté que la face ASC. Donc les droites SB′ et SC′ offrent, par rapport au dièdre BSAC, la disposition précédente, et par conséquent l'angle B′SC′ est le supplément de l'angle plan du dièdre dont l'arête est SA. Par abréviation, on dit que la face C′SB′ est le supplément du dièdre SA.

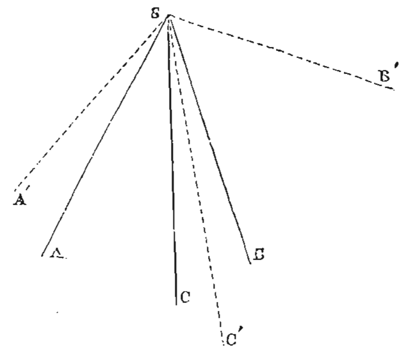


Fig. 459.

De ce que les trièdres sont *réciproques*, c'est-à-dire de ce que le premier trièdre peut être construit avec le second comme le second est construit avec le premier, il résulte que les faces du premier trièdre sont aussi les suppléments des angles dièdres du second.

591. Remarque. Appelons A, B, C, les angles dièdres d'un trièdre, ou plutôt les angles plans de ces dièdres, et a, b, c, les faces du même trièdre ; appelons de même A′, B′, C′, a', b', c', les angles dièdres et les faces du trièdre supplémentaire.

Entre les éléments des deux trièdres on a les relations suivantes :

$$A' = 2^{dr} - a, \qquad B' = 2^{dr} - b, \qquad C' = 2^{dr} - c,$$

et

$$a' = 2^{dr} - A, \qquad b' = 2^{dr} - B, \qquad c' = 2^{dr} - C,$$

Si les éléments d'un trièdre quelconque satisfont nécessairement à une certaine condition, les éléments du trièdre supplémentaire doivent satisfaire à cette même condition. En écrivant ce fait, et en remplaçant les éléments du second trièdre par leur valeur en fonction des éléments du premier trièdre, on trouve une nouvelle condition que doivent aussi vérifier les éléments du premier trièdre, et à une propriété des éléments d'un trièdre on en fait ainsi correspondre une autre que l'on dit *corrélative* de la première. C'est ainsi que les deux théorèmes suivants se déduisent des deux propositions énoncées au n° 582. C'est encore par la considération des trièdres supplémentaires que le théorème du n° 595 se déduit du théorème précédent, et que deux des quatre propositions contenues dans le théorème du n° 597 se déduisent des deux autres.

Théorème.

592. *Dans un trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux angles droits et six droits.*

Cette proposition est corrélative de celle-ci :

Dans tout trièdre, la somme des faces est comprise entre zéro et quatre angles droits (582).

En effet, soient a, b, c, les faces d'un trièdre, et A, B, C, les angles dièdres ; appelons a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire, on a :

$$0 < a' + b' + c' < 4^{dr};$$

et, en remplaçant a', b', c' par leurs valeurs en fonction des angles dièdres A, B, C, du premier trièdre, on a :

$$0 < 2^{dr} - A + 2^{dr} - B + 2^{dr} - C < 4^{dr},$$

ou

$$6^{dr} > A + B + C > 2^{dr}.$$

Donc le théorème est démontré.

Théorème.

593. *Dans tout trièdre, le plus petit angle dièdre augmenté de deux angles droits surpasse la somme des deux autres.*

Cette proposition est corrélative de celle-ci :

Dans un trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres (580).

En effet, soient a', b', c', les faces du trièdre supplémentaire

du trièdre considéré, et soit a' la plus grande face, on a :

$$a' < b' + c',$$

ou, en remplaçant a', b' et c' par leurs valeurs en fonctions de A, B et C,

$$2^{dr} - A < 2^{dr} - B + 2^{dr} - C,$$

ou

$$A + 2^{dr} > B + C.$$

Or a', ou $2^{dr} - A$, étant la plus grande face du second trièdre, A est le plus petit angle dièdre du trièdre donné. Donc, le théorème est démontré.

Théorème.

594. *Avec trois faces données, on peut construire un angle trièdre et son symétrique, si la plus grande face est moindre que la somme des deux autres, et si la somme des trois faces est comprise entre zéro et quatre angles droits.*

Nous avons déjà vu (582) que les deux conditions énoncées ci-dessus sont nécessaires ; il faut prouver qu'elles sont suffisantes.

Soient AOB la plus grande face, AOC_1 et BOC_2 les deux autres rabattues sur le plan de la première (*fig.* 460), extérieurement à l'angle AOB. Du point O comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une circonférence. Sur l'arc AB, prenons l'arc AC'_1 égal à AC_1, et l'arc BC'_2 égal à BC_2. Menons les cordes $C_1C'_1$ et $C_2C'_2$; la première est perpendiculaire au rayon OA qui partage l'arc $C_1AC'_1$ en deux parties égales ; la seconde

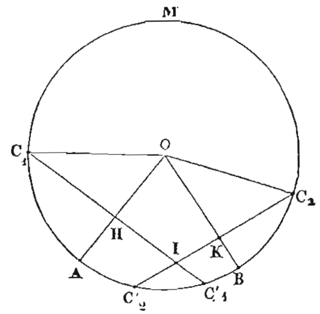


Fig. 460.

est perpendiculaire au rayon OB qui partage l'arc $C_2BC'_2$ en deux parties égales. Je remarque d'abord que ces deux cordes se coupent dans l'intérieur du cercle. En effet, l'arc AB étant plus grand que chacun des arcs AC_1 et BC_2, et plus petit que leur somme, le point C'_1 est situé sur l'arc AB entre les points A et B, et le point C'_2 est situé sur l'arc AC'_1 entre les points A et C'_1. D'autre part, la somme des faces étant moindre que quatre angles droits, la somme des arcs C_1A, AB et BC_2 est moindre qu'une circonférence, et le point C_2 est situé sur l'arc BMC_1 entre les points B et C_1. Donc enfin, les points C_2 et C'_2 sont situés de part et d'autre de la corde $C_1C'_1$, et, par conséquent, la corde $C_2C'_2$ coupe la corde $C_1C'_1$ en un certain point I situé entre C_1 et C'_1.

Cela posé, imaginons qu'on fasse tourner la face AOC_1, autour de OA. Le point C_1 décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à OA, et dont le centre est le point de rencontre H de OA et de $C_1C'_1$. Imaginons de même que l'on fasse tourner la face BOC_2 autour de OB ; le point C_2 décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à OB, et dont le centre est au point de rencontre K de OB et de $C_2C'_2$. Les plans de ces deux circonférences, tous deux perpendiculaires au plan AOB, se coupent suivant la perpendiculaire au plan AOB passant par le point I. La première circonférence rencontre cette perpendiculaire, car le rayon HC_1 est plus grand que HI. Appelons C et C' les points de rencontre; ces points sont symétriques par rapport au point I. On voit de même que la seconde circonférence coupe aussi cette perpendiculaire en deux points D et D' symétriques par rapport au point I. Or, ces points sont les mêmes que les points C et C'; en effet, dans les triangles rectangles OIC et OID, le côté OI est commun, les hypoténuses OC et OD égales à OC_1 et OC_2 sont égales, donc les triangles sont égaux, et IC est égal à ID. La droite OC détermine, avec les droites OA et OB, un trièdre dont les faces sont égales aux faces données; la droite OC' forme avec OA et avec OB un second trièdre qui remplit les mêmes conditions. Ces deux trièdres ne sont pas égaux, parce que les parties du second ont une disposition inverse à celle des parties égales dans le premier; mais le second est égal au symétrique du premier. On dit encore, sans avoir égard à la position de ces trièdres dans l'espace, qu'ils sont symétriques.

Théorème corrélatif.

595. *Avec trois angles dièdres donnés, on peut construire un trièdre et son symétrique, si la somme des trois dièdres est comprise entre deux droits et six droits, et si le plus petit dièdre augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres.*

On sait déjà que les conditions énoncées sont nécessaires, il faut démontrer qu'elles sont suffisantes.

Soient A, B, C, les dièdres donnés, A étant le plus petit. On a par hypothèse :

$$6^{dr} > A + B + B > 2^{dr}$$

et

$$A + 2^{dr} > B + C.$$

Cherchons d'abord à construire un trièdre dont les faces seraient les suppléments des angles dièdres donnés.

Désignons par a', b', c', ces faces; on a :

$$a' + A = 2^{dr}, \quad b' + B = 2^{dr}, \quad c' + C = 2^{dr}.$$

Or, des inégalités

$$6^{dr} > A + B + C > 2^{dr},$$

en remplaçant A, B, C, par $2^{dr} - a'$ $2^{dr} - b'$, $2^{dr} - c'$, on déduit :

$$6^{dr} > 2^{dr} - a' + 2^{dr} - b' + 2^{dr} - c' > 2^{dr},$$

ou

$$0 < a' + b' + c' < 4^{dr},$$

De l'inégalité

$$A + 2^{dr} > B + C,$$

on déduit de même :

$$2^{dr} - a' + 2^{dr} > 2^{dr} - b' + 2^{dr} - c',$$

ou

$$a' < b' + c'.$$

A étant le plus petit des dièdres donnés, a' est la plus grande des faces supplémentaires de ces dièdres. Donc les faces a' b', c', sont telles, que leur somme est comprise entre zéro et 4 droits, et que la plus grande est plus petite que la somme des deux autres. On peut donc, avec ces trois faces, construire deux trièdres symétriques. En prenant les trièdres supplémentaires de ces deux trièdres, on obtient deux trièdres symétriques qui ont pour angles dièdres les trois angles donnés.

CAS D'ÉGALITÉ DES TRIÈDRES.

596. On distingue dans un trièdre six éléments : trois angles dièdres et trois faces. Quand deux angles trièdres sont égaux, c'est-à-dire superposables, les six éléments de l'un sont égaux aux six éléments de l'autre, et les éléments égaux ont la même disposition dans les deux trièdres.

Deux trièdres sont égaux dès qu'ils ont trois éléments égaux, disposés dans le même ordre, pourvu que les éléments forment l'un des groupes compris dans l'énoncé du théorème suivant.

Théorème.

597. *Deux trièdres sont égaux :*

1° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, et disposées de la même façon ;*

2° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, et disposés de la même façon ;*

3° *Lorsqu'ils ont les trois faces égales chacune à chacune et disposées de la même façon ;*

4° *Lorsqu'ils ont les trois angles dièdres égaux, chacun à chacun, et disposés de la même façon.*

1° Soient deux trièdres SABC et S'A'B'C' dans lesquels les dièdres SA et S'A' sont égaux, la face ASB égale la face A'S'B', et la face ASC égale la face A'S'C' (*fig.* 461). Supposons de plus que la disposition des parties égales soit la même dans les deux trièdres, c'est-à-dire supposons qu'un observateur placé sur SA, les pieds en A, la tête en S, et regardant l'intérieur de ce trièdre, ait à sa droite la face ASB, et qu'un observateur placé de même sur S'A', les pieds en A', la tête en S', et regardant l'intérieur du trièdre, ait à sa droite la face A'S'B' égale à la face ASB. Si l'on porte le trièdre S'A'B'C'

sur le trièdre SABC de façon que la face A'S'B' coïncide avec la face ASB, S'A', sur SA, S'B' sur SB, le plan de la face A'S'C' se place sur le plan de la face ASC, parce que le dièdre S'A' est égal au dièdre SA, et parce que les parties égales ont la même disposition. Comme d'ailleurs la face A'S'C' est égale

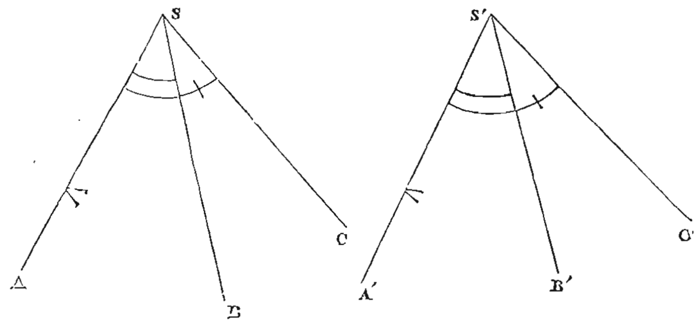


Fig. 461.

à la face ASC, l'arête S'C' coïncide avec l'arête SC. Donc, les deux trièdres coïncident, et par conséquent, sont égaux.

2° Le second cas est corrélatif du premier. Car si les trièdres SABC et S'A'B'C' ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, et si de plus la disposition des parties égales est la même dans ces deux trièdres, les trièdres supplémentaires sont égaux comme ayant un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et disposées de la même façon. Donc les trièdres proposés sont égaux.

On peut d'ailleurs, dans ce cas, démontrer l'égalité des deux trièdres, en procédant par voie de superposition, comme dans le cas précédent.

3° Soient les deux trièdres SABC S'A'B'C' dans lesquels les faces ASB et A'S'B', ASC et A'S'C', BSC et B'S'C' sont égales chacune à chacune, et disposées de la même façon.

Nous allons démontrer que ces deux trièdres sont superposables. A cet effet, prenons sur les arêtes des deux trièdres les longueurs égales SA, SB, SC, S'A', S'B', S'C', (*fig.* 462). Les deux triangles ASB, A'S'B', qui ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, sont égaux ; et, par conséquent, AB est égal à A'B'. On voit de même que BC est égal B'C', et que AC est égal à A'C'. Il suit de là que les deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun. Les longueurs SA, SB, SC étant égales, le pied O de la perpendiculaire abaissée du point S sur le plan ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; de même, le pied O' de la perpendiculaire abaissée du point S' sur le plan A'B'C' est le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'. Comme les deux triangles sont égaux, les cercles circonscrits sont égaux, et OA est égal à O'A'. Les triangles rectangles SOA, S'O'A', qui ont l'hypoténuse égale et un côté égal, sont égaux; et, par suite, SO est égal à S'O'.

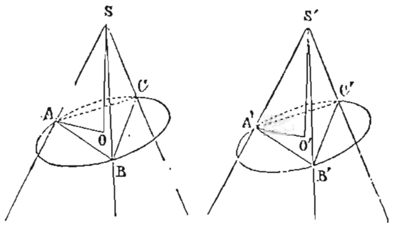


Fig. 462.

Cela posé, déplaçons le trièdre S'A'B'C', de façon à amener S'O' sur SO, S' en S, et O' en O; le plan A'B'C' perpendiculaire à S'O' coïncide avec le plan ABC perpendiculaire à SO. Faisons tourner le trièdre S'A'B'C' autour de SO, de façon à amener O'A' sur OA. Comme les faces égales des deux trièdres sont disposées de la même façon, les deux triangles égaux A'B'C' sont aussi disposés de la même façon par rapport aux points O et O', et lorsque O'A' coïncide avec OA, le triangle A'B'C' coïncide avec le triangle ABC. Alors les deux trièdres coïncident; donc ils sont égaux.

4° Le quatrième cas est corrélatif du troisième, car si deux trièdres ont les angles dièdres égaux chacun à chacun, et disposés de la même façon, les trièdres supplémentaires sont égaux comme ayant les faces égales chacune à chacune et disposées de la même façon; donc, les trièdres donnés sont aussi égaux.

598. Remarque. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que dans les trièdres considérés, la disposition des parties égales est la même. S'il n'en est pas ainsi, les parties de l'un ont la même disposition que les parties égales dans le symétrique de l'autre, et, par suite, l'un des trièdres est égal au symétrique de l'autre.

Théorème.

599. *Si deux angles trièdres ont deux faces égales chacune à chacune comprenant des angles dièdres inégaux, les troisièmes faces sont inégales, et celle qui est opposée au plus petit dièdre est la plus petite.*

Soient les trièdres SABC, TDEF (*fig.* 463), dans lesquels on a:

$$\text{ASB} = \text{DTE}, \quad \text{ASC} = \text{DTF}, \quad \text{dièdre SA} < \text{dièdre TD}$$

Supposons, pour fixer les idées, que les faces égales chacune à chacune sont disposées de la même façon dans les deux trièdres.

Transportons le trièdre SABC de façon que la face ASB coïncide avec la face égale DTE, l'arête SA avec l'arête TD, l'arête SB avec l'arête TE, et que le trièdre SABC soit, par rapport à la face TDE, du même côté que le trièdre TDEF. L'angle dièdre SA étant moindre que l'angle dièdre TD, la face ASC tombera dans l'angle dièdre TD, et le trièdre SABC occupera la position TDEG.

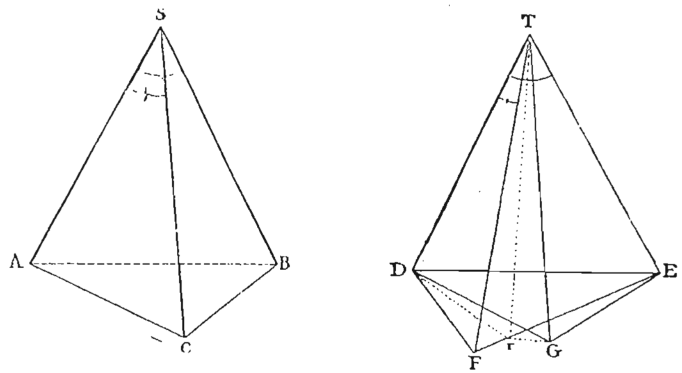


Fig. 463

Pour rendre la figure plus intelligible, nous coupons les deux trièdres qui ont T pour sommet par un plan qui rencontre toutes les arêtes d'un même côté du sommet et nous figurons les sections DEF, DEG faites dans les deux trièdres par ce plan. Menons le plan bissecteur du dièdre TDGE; ce plan coupe la face ETF suivant la droite TI située dans l'angle ETF Les deux trièdres TDIG, TDIF, qui ont un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, mais disposées en ordre inverse, sont tels que l'un est égal au symétrique de l'autre. Donc les troisièmes faces ITG, ITF sont égales. Or, dans le trièdre TEGI on a :

$$ETG < ETI + ITG$$

ou, en remplaçant ITG par l'angle égal ITF,

$$ETG < ETI + ITF,$$

ou

$$ETG < ETF;$$

et, comme ETG est égal à BSC, on a enfin

$$BSC < ETF.$$

Nous avons supposé que dans les deux trièdres les faces égales chacune à chacune sont disposées de la même façon; s'il en est autrement, on peut remplacer l'un des trièdres par son symétrique et répéter la même démonstration.

600. Remarque. Si, laissant fixes les grandeurs de deux faces d'un trièdre, on fait varier l'angle dièdre compris entre ces faces, la grandeur de la face opposée varie : elle augmente ou diminue, selon que le dièdre augmente ou diminue.

601. Corollaire. *Réciproquement, si deux trièdres ont deux faces égales chacune à chacune, et si les troisièmes faces sont inégales, les dièdres opposés aux faces inégales sont inégaux, le dièdre opposé à la plus petite face est le plus petit.*

Soient SABC, TDEF deux dièdres tels que l'on ait

$$ASB = TDE, \quad ASC = TDF, \quad BSC < ETF.$$

L'angle dièdre SA ne peut être égal au dièdre TD, sans quoi les faces BSC, ETF seraient égales; l'angle dièdre SA ne peut non plus surpasser le dièdre TD, sans quoi la face BSC surpasserait la face EDF; donc le dièdre SA est plus petit que le dièdre TD.

ANALOGIES ET DIFFÉRENCES ENTRE LES PROPRIÉTÉS DES ANGLES TRIÈDRES ET LES PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES RECTILIGNES.

602. Si l'on compare un triangle rectiligne et un trièdre en faisant correspondre aux côtés du triangle les faces du trièdre, et aux angles du triangle les angles dièdres du trièdre, on trouve, entre les propriétés des triangles rectilignes et celles des trièdres, des analogies et des différences qu'il est bon de signaler. Ainsi, dans un triangle, le plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres, et dans un trièdre, la plus grande face est moindre que la somme des deux autres. Mais, tandis que la somme des angles d'un triangle est constante et égale à deux droits, la somme des angles dièdres d'un trièdre peut varier entre deux droits et six droits. La somme des côtés d'un triangle peut varier de zéro à l'infini, tandis que la somme des faces d'un trièdre ne peut varier que de zéro à quatre angles droits. Enfin, aux trois cas d'égalité des triangles correspondent les trois premiers cas d'égalité des trièdres; mais tandis que deux trièdres qui ont les angles dièdres égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre sont égaux, deux triangles qui ont les trois angles égaux chacun à chacun, sont seulement semblables.

EXERCICES SUR LE LIVRE V.

1. Si une droite qui rencontre un plan fait avec trois droites qui passent par son pied dans ce plan des angles égaux, elle est perpendiculaire au plan.

2. Lieu des points de l'espace équidistants de deux points donnés.

3. Lieu des points de l'espace équidistants de trois points donnés.

4. Lieu des points d'un plan équidistants de deux points non situés dans ce plan.

5. Lieu des points de l'espace équidistants de deux plans.

6. Lieu des points de l'espace équidistants de trois plans qui se coupent en un même point.

7. Lieu des points de l'espace équidistants de deux droites qui se coupent.

8. Lieu des projections d'un point donné sur les plans qui passent par une droite donnée.

9. Lieu des projections d'un point donné sur les droites menées par un point donné dans un plan donné.

10. Si par chaque arête d'un trièdre on mène un plan perpendiculaire à la face opposée, les trois plans que l'on obtient ainsi se coupent suivant une ligne droite.

11. Si par chaque arête d'un trièdre et par la bissectrice de l'angle de la face opposée on fait passer un plan, les trois plans que l'on obtient ainsi se coupent suivant une même droite.

12. Si par la bissectrice de l'angle de chaque face d'un trièdre on mène un plan perpendiculaire à cette face, les trois plans que l'on obtient ainsi se coupent suivant une même droite.

13. Si par le sommet d'un angle trièdre on mène dans chacune des faces une droite perpendiculaire à l'arête opposée à cette face, les trois droites que l'on obtient ainsi sont situées dans un même plan.

14. Lieu des points de concours des médianes des triangles obtenus en coupant un angle trièdre donné par des plans parallèles à un plan donné.

15. On donne un triangle ABC et une droite L non située dans le plan de ce triangle; on prend sur cette droite un point D quelconque, on le joint aux points B et C, et on forme ainsi le quadrilatère DABC dont les côtés ne sont pas généralement dans un même plan.

1° Démontrer que le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère DABC est un parallélogramme.

2° Suivre les variations de l'aire de ce parallélogramme quand le point D se meut sur la droite L.

3° Déterminer la position que doit occuper le point D sur la droite L pour que le parallélogramme soit un rectangle, un losange.

4° Dans quel cas le parallélogramme peut-il être un carré? (Concours général, philosophie.)

16. Étant donnés un angle solide à quatre faces SABCD et un point O, mener par le point O un plan qui coupe les faces de l'angle solide suivant un parallélogramme.

17. Mener un plan qui coupe les faces d'un angle trièdre trirectangle suivant un triangle égal à un triangle donné.

18. Étant donnés un point O et deux droites RR′,SS′ non situées dans un même plan, on peut mener par le point O une droite qui rencontre les droites RR′,SS′ et on n'en peut mener qu'une.

19. Étant donnés un point O, une droite RR′ et un plan P, on peut mener par le point O une droite parallèle au plan P, rencontrant la droite RR′, et on n'en peut mener qu'une.

20. Étant données trois droites RR′,SS′,TT′, telles que deux quelconques ne sont pas dans un même plan, on peut mener une droite qui rencontre les deux premières et qui soit parallèle à la troisième, et on n'en peut mener qu'une.

21. Lieu du milieu d'une droite de longueur donnée dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires fixes, non situées dans un même plan.

22. Soient A,B,C,D, quatre points non situés dans un même plan, si l'on mène les droites AB,BC,CD,DA, on forme une figure que l'on appelle *quadrilatère gauche;* les quatre points A,B,C,D, sont les sommets du quadrilatère gauche; les droites AB,BC,CD,DA, en sont les côtés, et les droites AC, BD, en sont les diagonales. Les droites qui joignent les milieux

des côtés non consécutifs, et la droite qui joint les milieux des diagonales, se coupent en un même point et sont partagées en ce point en deux parties égales.

23. On donne deux droites AB et CD non situées dans un même plan, et un plan P; une droite mobile glisse sur les droites AB,CD, et reste parallèle au plan P; sur cette droite mobile, on prend les deux points M et M′, tels que le rapport de leurs distances aux points de rencontre de la droite mobile avec les droites fixes soit constant et égal à un rapport donné. Lieu de chacun de ces points.

24. Soient trois droites R, R′, R″ parallèles à un même plan; on peut mener un nombre infini de droites qui rencontrent ces trois droites. Démontrer que ces dernières droites sont toutes parallèles à un même plan.

25. Si un plan P coupe les côtés AB,BC,CD,DA, d'un quadrilatère gauche aux points E,F,G,H, on a la relation :

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{GC}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{HD}}{\overline{HA}} = 1,$$

26. Réciproquement, si l'on prend sur les côtés AB,BC,CD,DA, d'un quadrilatère gauche les points E,F,G,H, tels que l'on ait :

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{GC}}{\overline{GD}} \times \frac{\overline{HD}}{\overline{HA}} = 1,$$

ces quatre points sont sur un même plan.

27. Si quatre plans passant par une même droite coupent une droite en des points qui forment une division harmonique, ces quatre plans déterminent sur toute autre droite qui les rencontre des points qui forment une division harmonique. Le faisceau de ces quatre plans est appelé *faisceau harmonique* (Concours général, classe de philosophie, 1884.)

LIVRE VI.

POLYÈDRES.

§ I. Définitions : Polyèdres, Prismes, Parallélépipèdes. — § II. Propriétés d'un Parallélépipède. — § III. Volume d'un prisme. — § IV. Pyramides : volume d'une pyramide, d'un tronc de pyramide, d'un tronc de prisme à base triangulaire. — § V. De la symétrie. — § VI. Polyèdres semblables. — § VII. Figures homothétiques dans l'espace.

§ I. Définitions : polyèdres, prismes, parallélépipèdes.

603. Polyèdres. — Un *polyèdre* est un solide limité de toutes parts par des plans. Les polygones formés par les intersections des plans qui limitent un polyèdre sont les *faces* du polyèdre, les côtés de ces polygones sont les *arêtes*, les angles solides formés par les faces sont les *angles solides*, et les sommets de ces angles sont les *sommets* du polyèdre. On appelle *diagonale* une droite qui unit deux sommets non situés dans la même face.

On dit qu'un polyèdre est *convexe* lorsqu'il est situé tout entier d'un même côté par rapport au plan de l'une quelconque de ses faces.

Quand le nombre des faces d'un polyèdre est 4, 5, 6, etc., on dit que le polyèdre est un *tétraèdre*, un *pentaèdre*, un *hexaèdre*, etc. Le nombre des faces d'un polyèdre est au moins quatre, car il faut au moins quatre plans pour limiter un solide.

604. Prismes. — On appelle *prisme* un polyèdre dont les faces se composent de deux polygones égaux ayant les côtés respectivement parallèles, et de parallélogrammes.

On peut former un prisme de la manière suivante : soit un polygone quelconque ABCDE (*fig.* 464) ; par le sommet A, on

mène une droite quelconque AA′ non située dans le plan du polygone, et par les autres sommets on mène les droites BB′, CC′, DD′, EE′, égales et parallèles à AA′ du même côté que AA′ par rapport au plan du polygone ABCDE ; enfin on mène les droites A′B′, B′C′, C′D′, D′E′ et E′A′. Le quadrilatère ABA′B′ dont les côtés AA′ et BB′ sont égaux et parallèles, est un parallélogramme ; il en est de même des quadrilatères BCB′C′, CDC′D′, etc. Il reste à montrer que la figure A′B′C′D′E′ est un polygone plan égal au polygone ABCDE, et que ses côtés sont parallèles aux côtés de ce polygone. D'abord la figure A′B′C′D′E′ est plane ; car, si par le point A′ on mène un plan parallèle au plan du polygone donné, ce plan passe par les points B′, C′, D′ et E′, puisque deux plans parallèles interceptent des longueurs égales sur des droites parallèles. De plus les deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′ ont les côtés respectivement égaux, comme côtés opposés dans un parallélogramme, et les angles respectivement égaux, comme ayant les côtés parallèles et de même sens. Le solide ABCDE A′B′C′D′E′, compris entre deux polygones égaux qui ont les côtés parallèles et des parallélogrammes, est un prisme.

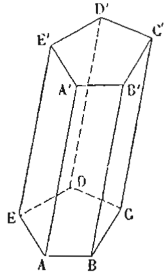


Fig. 464.

Les polygones égaux ABCDE, A′B′C′D′E′ sont les *bases* du prisme ; les parallélogrammes ABB′A′, BCC′B′, etc., sont les *faces latérales ;* les côtés AA′, BB′, CC′, etc., des faces latérales non situés dans les plans des bases sont les *arêtes latérales.*

La *hauteur* du prisme est la distance des bases parallèles.

Un prisme est dit *triangulaire, quadrangulaire*, etc., quand ses bases sont des triangles, des quadrilatères, etc.

On dit qu'un prisme est *droit*, ou *oblique*, selon que ses arêtes latérales sont perpendiculaires, ou obliques, aux plans des deux bases.

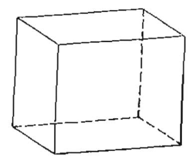


Fig. 465.

605. Parallélépipèdes. — On appelle *parallélépipède* un prisme dont les bases sont des parallélogrammes (*fig.* 465).

606. On dit qu'un parallélépipède est *droit* quand les arétes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases; il est oblique dans le cas contraire.

607. On dit qu'un parallélépipède *droit* est *rectangle*, quand les deux bases sont des rectangles.

Les six faces d'un parallélépipède sont des parallélogrammes; si le parallélépipède est droit, les quatre faces latérales sont des rectangles; si le parallélépipède est rectangle, les six faces sont des rectangles.

608. On appelle *cube* un parallélépipède rectangle dont les faces sont des carrés.

609. Pour déterminer un parallélépipède, il suffit de donner l'angle trièdre formé par les arêtes du parallélépipède issues d'un de ces sommets et les longueurs de ses arêtes. Supposons qu'on donne, par exemple (*fig.* 466), le trièdre OABC, et les longueurs des arêtes OA, OB, OC, d'un parallélépipède; si, sur OA et sur OB, on construit le parallélogramme OADB; puis, si par les points A, B, D on mène les droites AE, BF, DG parallèles à OC et égales à la longueur OC, on forme le prisme OADBCEGF (604); et, comme les bases parallèles OADB, EGFC sont des parallélogrammes, ce prisme est un parallélépipède.

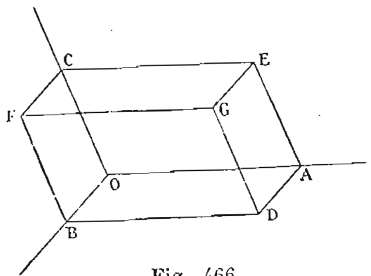


Fig. 466.

610. Si le parallélépipède est *rectangle*, chaque angle trièdre formé par les trois arêtes issues de l'un de ses sommets est *trirectangle;* dès lors, pour déterminer un parallélépipède rectangle, il suffit de donner les longueurs OA, OB, OC, des arêtes issues de l'un de ses sommets (*fig.* 467). Ces trois longueurs sont appelées les trois *dimensions* du parallélépipède rectangle.

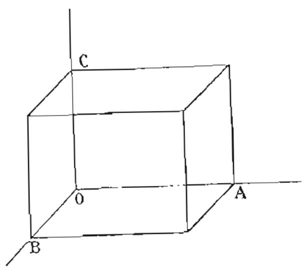


Fig. 467.

611. Pour déterminer un *cube*, il suffit de donner la longueur d'une de ses arêtes.

§ II. Propriétés d'un parallélépipède.

Théorème.

612. *Dans un parallélépipède deux faces opposées quelconques sont égales et parallèles.*

Soit (*fig.* 468) le parallélépipède ABCD A'B'C'D'. Les bases ABCD, A'B'C'D' sont égales et parallèles par définition. Prenons deux faces opposées quelconques ABB'A', DCC'D'; les côtés AB et DC sont égaux et parallèles comme côtés opposés d'un parallélogramme; les côtés BB' et CC' sont égaux et parallèles pour la même raison. Il en résulte que les angles ABB' et DCC' sont égaux et ont leurs plans parallèles, et, par suite, que les faces opposées ABB'A', DCC'D' sont égales et ont leurs côtés parallèles.

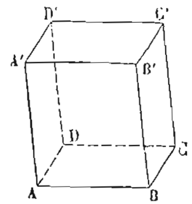


Fig. 468.

613. Remarque I. Il suit de là qu'un *parallélépipède est un prisme auquel on peut donner pour bases deux faces opposées quelconques du solide.*

Si le parallélépipède est *droit*, sans être *rectangle*, il pourra être considéré comme un prisme *droit*, ou comme un prisme *oblique*, selon les faces choisies pour servir de bases; mais un parallélépipède *rectangle* sera toujours considéré comme un prisme *droit*, quelles que soient les faces prises pour bases.

614. Soient *a, b, c,* les trois dimensions d'un parallélépipède rectangle. On peut prendre pour l'une des bases une quelconque des faces, c'est-à-dire un rectangle dont les dimensions sont ou *a* et *b*, ou *a* et *c*, ou *b* et *c;* la hauteur correspondante est celle des trois dimensions qui n'appartient pas au rectangle choisi pour base.

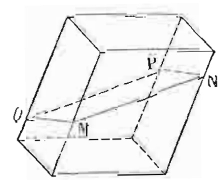


Fig. 469.

615. Remarque II. *Toute section plane* MNPQ *fait dans un parallélépipède par un plan qui rencontre deux faces opposées, est un parallélogramme* (*fig.* 469). En effet, les côtés MN et PQ sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et il en est même des côtés MQ et NP.

Théorème.

616. *Les quatre diagonales d'un parallélépipède se coupent mutuellement en deux parties égales.*

Soient en effet AC′ et DB′ deux quelconques des quatre diagonales du parallélépipède ABCD A′B′C′D′ (*fig.* 470). Ces lignes sont les diagonales du quadrilatère ADC′B′, lequel est un parallélogramme, parce que les côtés opposés AD et B′C′ sont égaux et parallèles; donc les diagonales AC, et DB′ se coupent mutuellement en deux parties égales. Les deux autres diagonales BD′ et CD′ partagent de même la diagonale AC′ en deux parties egales; donc, les quatre diagonales se coupent en un même point qui est le milieu de chacune d'elles.

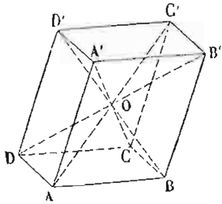


Fig. 470.

617. Remarque I. *Si le parallélépipède est droit, les diagonales se partagent en deux couples tels que les diagonales du même couple sont égales.*

Soient ABCD, A′B′C′D′ les bases d'un parallélépipède droit (*fig.* 471). Les parallélogrammes AA′C′C, BB′D′D sont des rectangles, et, par conséquent, on :

$$AC' = CA' \quad \text{et} \quad BD' = BD'.$$

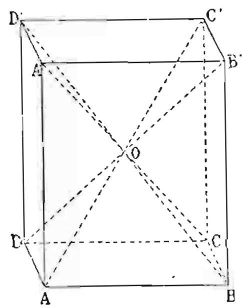


Fig. 471.

618. Remarque II. *Si le parallélépipède est rectangle, les quatre diagonales sont égales.*

En effet, on a comme ci-dessus :

$$AC' = CA' \quad \text{et} \quad BD' = DB',$$

parce que le parallélépipède est droit par rapport aux bases ABCD, A′B′C′D′ ; de plus on a :

$$DB' = AC',$$

parce que le parallélépipède est aussi droit par rapport aux bases ABB′A′, DCC′D′.

619. Remarque III. *Dans un parallélépipède rectangle, le carré d'une diagonale est égal à la somme des carrés des trois dimensions du parallélépipède.*

On a en effet (*fig.* 472) dans le triangle rectangle ACC′.

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2$$

et, dans le triangle rectangle ABC,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

d'où

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CC'}^2.$$

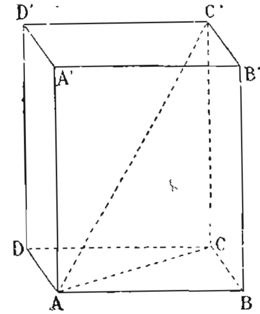


Fig. 472.

En désignant par a, b, c, les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle, par d la longueur d'une quelconque de ses diagonales, on a donc :

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

§ III. Volume d'un prisme.

620. Unité de volume. — Mesurer un volume, c'est le comparer à un volume pris pour unité, et chercher combien de fois le volume donné contient le volume pris pour unité, ou une partie aliquote de ce volume.

On prend pour unité de volume le cube construit sur l'unité de longueur. L'unité principale de longueur étant le *mètre*, l'unité principale de volume est le *mètre cube*. Aux unités secondaires de longueur, le *décimètre*, le *centimètre*, etc., correspondent les unités secondaires de volume, le *décimètre cube*, le *centimètre cube*, etc.

Un mètre cube contient 1000 décimètres cubes.

En effet, partageons la hauteur AA′ du mètre cube ABCDA′B′C′D′ en dix décimètres (*fig.* 473), et par les points de division menons des plans parallèles au plan de la base ABCD. Nous partageons ainsi le solide en dix parallélépipèdes rectangles égaux, car ayant des bases égales et des hauteurs égales, ils sont évidemment superposables. Considérons le parallélépipède ABCDMNPQ ; la base ABCD est un mètre carré et contient 100 décimètres carrés, la hauteur AM est un décimètre; sur chaque décimètre carré de la base repose un décimètre cube, et par conséquent le parallélépipède ABCDMNPQ contient 100 décimètres cubes. Donc le mètre cube ABCDA'B'C'D' contient 100×10, ou 1000 décimètres cubes.

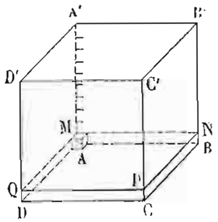


Fig. 473.

Le décimètre cube contient de même 1000 centimètres cubes, et le centimètre cube contient 1000 millimètres cubes.

621. On dit que les volumes de deux solides sont *équivalents* quand ils contiennent le même nombre de mètres cubes, de décimètres cubes, etc.

VOLUME D'UN PRISME DROIT.

Théorème.

622. *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont même base est égal au rapport de leurs hauteurs.*

Soient ABCDEFGH ABCDKLMN deux parallélépipèdes rectangles qui ont même base ABCD, et pour hauteur l'un AE, l'autre AK, (*fig.* 474).

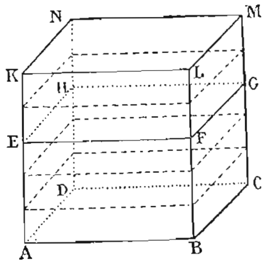


Fig. 474.

Supposons d'abord que les hauteurs AE et AK aient une commune mesure, et que cette commune mesure soit, par exemple, contenue 3 fois dans AE 5 fois dans AK ; le rapport des hauteurs AE et AK est $\frac{3}{5}$.

Si, par les points de division de AK on mène des plans parallèles au plan ABCD, on partage les parallélépipèdes rectangles

donnés en parallélépipèdes rectangles qui sont égaux, puisqu'ils ont des bases égales et des hauteurs égales. Or, le parallélépipède ABCDEFGH contient trois de ces parallélépipèdes égaux, le parallélépipède ABCDKLMN en contient 5 ; donc le rapport des volumes des deux parallélépipèdes est, comme le rapport de leurs hauteurs, égal à $\frac{3}{5}$.

Si les hauteurs AE, AK n'ont pas de commune mesure, on partage AK en un certain nombre n de parties égales, et on cherche combien la hauteur AE contient de ces parties. Supposons qu'elle soit supérieure à m de ces parties et inférieure à $m+1$; les valeurs approchées par défaut et par excès, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport de AE à AK, sont $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$. Or, si par les points de division de AK et de AE on mène des plans parallèles au plan ABCD, on partage le parallélépipède rectangle ABCDKLMN en n parallélépipèdes égaux, et on reconnaît que le parallélépipède ABCDEFGH est supérieur à m parallélépipèdes égaux à ceux-ci, et inférieur à $m+1$. Donc les valeurs approchées, à moins de $\frac{1}{n}$, du rapport des volumes des deux parallélépipèdes sont aussi $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$. Cela étant quel que soit n, on en conclut que le rapport des volumes des deux parallélépipèdes et le rapport de leurs hauteurs sont égaux (17).

623. Remarque. On peut prendre pour base d'un parallélépipède rectangle une quelconque des faces; les côtés du rectangle choisi pour base sont deux des trois dimensions du parallélépipède, et la hauteur correspondante est la troisième dimension (614). D'après cela, le théorème précédent peut encore être énoncé ainsi :

Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles qui ont deux dimensions communes est égal au rapport des troisièmes dimensions.

Théorème.

624. *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rec-*

tangles qui ont même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

Désignons par P et par P′ les volumes de deux parallélépipèdes rectangles, par B et par B′ les aires de leurs bases, par a, b, et a', b' les dimensions de ces bases, et par c la hauteur commune des deux parallélépipèdes (*fig.* 475). Concevons un troisième parallélépipède de volume P_1, ayant pour dimensions a', b et c.

Si nous comparons les deux parallélépipèdes P et P_1, nous voyons qu'ils ont deux dimensions communes b et c; leurs volumes sont proportionnels aux troisièmes dimensions a et a', et l'on a :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{a'}.$$

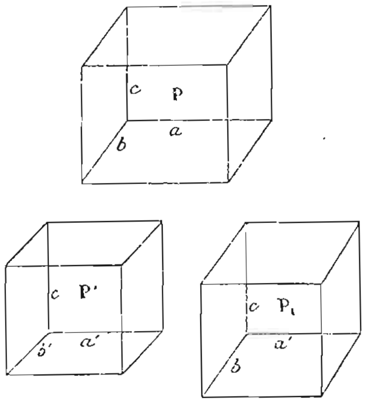


Fig. 475.

De même les parallélépipèdes rectangles P′ et P_1 ont deux dimensions communes, a' et c; leurs volumes sont proportionnels aux troisièmes dimensions b' et b, et l'on a :

$$\frac{P'}{P_1} = \frac{b'}{b}.$$

De ces deux égalités on déduit (18)

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} : \frac{b'}{b} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}.$$

Or, on sait (465) que le produit $\frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'}$ est égal au rapport des aires B et B′ des rectangles dont les dimensions sont a, b et a', b'. Donc on a :

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'}.$$

Théorème.

625. *Le rapport des volumes de deux parallélépipèdes rectangles est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.*

Désignons par P et P′ les volumes de deux parallélépipèdes rectangles, par a, b, c, les trois dimensions du premier et par a', b', c', les trois dimensions du second. Prenons pour base du premier le rectangle dont les dimensions sont a et b, et pour base du second le rectangle dont les dimensions sont a' et b', et désignons par B et par B′ les aires de ces bases; les hauteurs des parallélépipèdes sont alors c et c'. Il faut démontrer que l'on a :

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'} \times \frac{c}{c'}.$$

Concevons à cet effet un troisième parallélépipède rectangle, de volume P_1, ayant même hauteur c que le premier parallélépipède, et ayant pour base un rectangle de dimensions a', b', égal à la base du second (*fig.* 476).

Les deux parallélépipèdes rectangles P et P_1, qui ont même hauteur c, sont entre eux comme leurs bases B et B′, et l'on a :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{B}{B'}$$

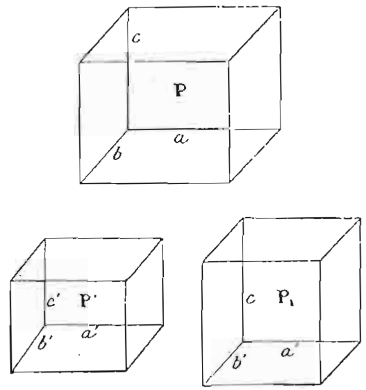


Fig. 476.

les deux parallélépipèdes rectangles P′ et P_1, qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs c', c; et l'on a :

$$\frac{P'}{P_1} = \frac{c'}{c}.$$

De ces deux égalités on déduit (18),

$$\frac{P}{P'}=\frac{B}{B'}:\frac{c'}{c}=\frac{B}{B'}\times\frac{c}{c'}$$

et le théorème est démontré.

Théorème.

626. *Le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

Nous avons dit que l'on prend pour unité de surface le carré construit sur l'unité de longueur, et, pour unité de volume, le cube construit sur l'unité de longueur.

Supposons que le parallélépipède P′ du théorème précédent soit le cube construit sur l'unité de longueur.

Le rapport $\frac{P}{P'}$ est alors la mesure du volume du parallélépipède rectangle P; le rapport $\frac{B}{B'}$ est la mesure de l'aire de sa base; le rapport $\frac{c}{c'}$ est la mesure de sa hauteur. Or, comme on a :

$$\frac{P}{P'}=\frac{B}{B'}\times\frac{c}{c'},$$

la mesure du volume de ce parallélépipède rectangle est bien le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

627. Si l'on désigne par a, b, c, les nombres qui mesurent les trois dimensions, par B le nombre qui mesure l'aire de la base, et par P le nombre qui mesure le volume, on a .

$$P=B\times c \quad \text{et} \quad B=a\times b,$$

d'où :

$$P=a\times b\times c.$$

On peut donc dire aussi que le *volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions.*

628. COROLLAIRE. *Le volume d'un cube a pour mesure le cube du nombre qui est la mesure de son côté.*

On retrouve ainsi ce fait, qui a été démontré directement, qu'un mètre cube, c'est-à-dire un cube dont le côté contient 10 décimètres, contient lui-même 10^3 ou 1000 décimètres cubes.

Théorème.

629. *Un parallélépipède droit équivaut à un parallélépipède rectangle de base équivalente et de même hauteur.*

Soit le parallélépipède droit ABCDA′B′C′D′ (*fig.* 477); formons le parallélépipède rectangle ABEFA′B′E′F′, qui a même hauteur AA′ et dont la base ABEF équivaut à la base ABCD du prisme droit. Ces deux solides sont équivalents. En effet les prismes droits triangulaires ADFA′D′F′ et BCDB′C′D′, qui ont des bases égales ADF et BCE et même hauteur AA′, sont égaux, car on peut les faire coïncider.

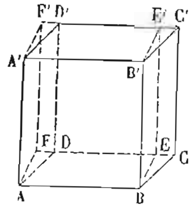


Fig. 477.

Or, si du solide ABCFA′B′C′F′ on retranche le prisme ADFA′D′F′, ou le prisme égal BCEB′C′E′, on obtient comme reste le parallélépipède droit ou le parallélépipède rectangle. Donc ces deux parallélépipèdes sont équivalents.

630. COROLLAIRE. *Le volume d'un parallélépipède droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

En effet, le parallélépipède rectangle ABEFA′B′E′F′ ayant pour mesure le produit de l'aire de sa base ABEF par sa hauteur AA′, le parallélépipède droit équivalent a aussi pour mesure ABEF × AA′, ou ABCD × AA′, puisque la base ABEF est équivalente à la base ABCD.

Théorème.

631. *Le volume d'un prisme droit a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

Considérons d'abord un prisme droit triangulaire ABCA′B′C′

(*fig.* 478). Formons le parallélépipède droit ABCDA′B′C′D′, qui a pour base le parallélogramme construit sur AB et BC, et pour hauteur la hauteur AA′ du prisme. Ce parallélépipède est double du prisme triangulaire, car il est égal à la somme des deux prismes ABCA′B′C′ et ACDA′C′D′, lesquels sont deux prismes droits égaux comme ayant les bases égales et la même hauteur. Or le volume du parallélépipède droit ABCDA′B′C′D′ a pour mesure le produit de sa base ABCD par sa hauteur AA′; par conséquent le prisme triangulaire, qui en est la moitié, a pour mesure $\frac{1}{2}$ ABCD $\times$ A′A′, ou ABC $\times$ AA′, c'est-à-dire le produit de sa base par sa hauteur.

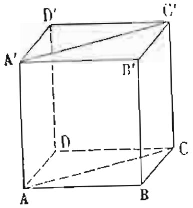


Fig. 478.

Considérons maintenant un prisme droit à base quelconque ABCDEA′B′C′D′E′ (*fig.* 479). Décomposons la base en triangles par les diagonales issues du sommet A, et le prisme en prismes triangulaires par des plans menés par l'arête AA′ et par les diagonales AC et AD du polygone de base. Le prisme droit ABCDEA′B′C′D′E′ est la somme des prismes triangulaires ABCA′B′C′, ACDA′C′D′, etc., et, par conséquent, son volume a pour mesure

$$(\text{ABC} + \text{ACD} + \text{ADE}) \times \text{AA}'$$

ou

$$\text{ABCDE} \times \text{AA}',$$

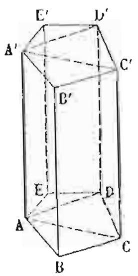


Fig. 479.

c'est-à-dire le produit de l'aire de la base par la hauteur

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Calculer le volume et la surface d'un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont 5 décimètres, 23 centimètres, et 145 millimètres.*

Évaluons d'abord les trois dimensions avec une même unité de longueur, le décimètre par exemple; nous prendrons dès lors pour unité de surface le décimètre carré, et pour unité

de volume le décimètre cube. Les trois dimensions sont :

$$5^{\text{déc.}},\quad 2^{\text{déc.}},3 \quad \text{et} \quad 1^{\text{déc.}},45.$$

La mesure du volume, en décimètres cubes, est le produit

$$5 \times 2,3 \times 1,45 = 16,675\ ;$$

le volume est donc 16 décimètres cubes, 675 centimètres cubes.

La surface se compose de 6 rectangles deux à deux égaux ; sa mesure, en décimètres carrés, est :

$$2(5 \times 2,3 + 5 \times 1,45 + 2,3 \times 1,45) = 44,17.$$

La surface du parallélépipède est donc 44 décimètres carrés, 17 centimètres carrés.

II. *On verse dans une cuve qui a la forme d'un parallélépipède rectangle 25 kilogr. de mercure. Le fond de la cuve est un rectangle de 22 centimètres de long sur 147 millimètres de large; le poids d'un centimètre cube de mercure est de* $13^{\text{gr}},6$. *Quelle est la hauteur du mercure dans la cuve ?*

Mesurons toutes les longueurs avec la même unité, le décimètre, par exemple; nous prendrons dès lors pour unité de surface le décimètre carré, pour unité de volume le décimètre cube, et pour unité de poids le kilogramme.

Le poids d'un centimètre cube de mercure étant $13^{\text{gr}},6$, le poids d'un décimètre cube est $13^{\text{k}},6$; le poids du mercure versé étant 25^{k}, le volume de ce mercure est, en décimètres cubes,

$$\frac{25}{13,6} = 1,8342.$$

Or, la surface du fond de la cuve est, en décimètres carrés,

$$2,2 \times 1,47 = 3,234.$$

La mesure du volume est le produit des nombres qui mesurent cette surface et la hauteur, donc la mesure de la hauteur est le quotient des nombres qui mesurent le volume et la surface de base, c'est-à-dire

$$\frac{1,8342}{3,234} = 0,56\ldots$$

La hauteur du mercure dans la cuve est $0^{déc},56$ à moins d'un millimètre.

VOLUME D'UN PRISME OBLIQUE.

Théorème.

632. *Les sections faites dans un prisme par deux plans parallèles sont des polygones égaux.*

Soient (*fig.* 480), dans le prisme ABCDEA′B′C′D′E′, les sections MNPQR, M′N′P′Q′R′ faites par des plans parallèles; les côtés MN et M′N′ sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième; ils sont égaux comme côté parallèles compris entre parallèles. Il en est de même des côtés NP, N′P′, des côtés PQ, P′Q′, etc. Donc les deux polygones MNPQR, M′N′P′Q′R′ ont les côtés respectivement égaux et parallèles. Il en résulte que ces polygones ont aussi les angles égaux, et par conséquent sont égaux.

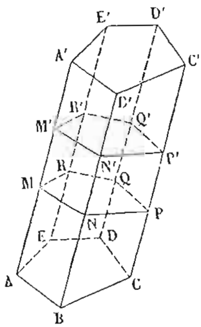


Fig. 480.

633. Remarque. Le solide MNPQRM′N′P′Q′R′, compris entre les faces latérales d'un prisme et les sections faites dans le prisme par deux plans parallèles, est un prisme.

On peut concevoir les faces latérales du prisme et les arêtes latérales prolongées indéfiniment en dehors des bases du prisme, et considérer des plans sécants qui rencontrent les arêtes du prisme ou leurs prolongements. Les sections faites par deux plans parallèles sont toujours des polygones égaux, et le solide limité par ces polygones et par les faces du premier prisme, prolongées s'il est nécessaire, est toujours un prisme.

On appelle *section droite* d'un prisme une section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes latérales du prisme.

Théorème.

634. *Un prisme oblique équivaut à un prisme droit qui a pour base la section droite du prisme oblique et pour hauteur une des arêtes latérales de ce prisme oblique.*

Soit le prisme oblique ABCDEA′B′C′D′E′ (*fig.* 481). Par un point M pris sur le prolongement de l'arête AA′ menons la section droite MNPQR, et supposons, ce qui est toujours possible, que le point M a été choisi de façon que la section droite MNPQR ne rencontre aucune des bases du prisme oblique. Prenons à partir du point A′, sur l'arête AA′, et dans le sens AM, une longueur A′M′ égale à AM, et par le point M′ menons une seconde section droite M′N′P′Q′R′. Le solide MNPQRM′N′P′Q′R′ est un prisme droit; sa base est une section droite du prisme oblique, et sa hauteur MM′ est égale à l'arête AA′ du prisme oblique, car les longueurs AA′ et MM′ sont les restes obtenus en retranchant la longueur MA′ des longueurs AM et A′M′ égales par construction. Il s'agit de démontrer que ce prisme droit équivaut au prisme oblique ABCDEA′B′C′D′E′.

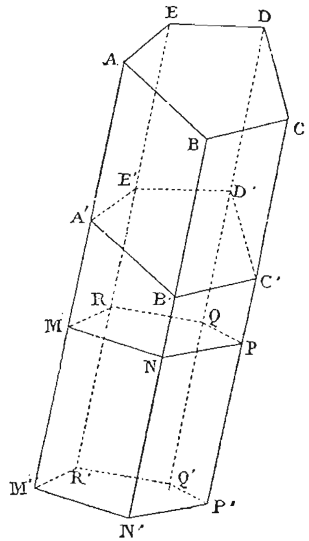


Fig. 481.

Considérons les deux solides

MNPQR ABCDE, M′N′P′Q′R′ A′B′C′D′E′;

portons le premier sur le second, et faisons coïncider la face MNPQR avec la face égale M′N′P′Q′R′. Les arêtes MA, NB, etc., perpendiculaires au plan MNPQR, se placent sur les arêtes M′A′, N′B′, etc., perpendiculaires au plan M′N′P′Q′R′. L'arête MA étant égale à M′A′, le point A coïncide avec le point A′; l'arête NB est aussi égale à N′B′, car les arêtes BB′ et NN′ respectivement égales aux arêtes égales AA′ et MM′, sont égales, et les longueurs NB et N′B′ sont les sommes obtenues en ajoutant aux longueurs égales BB′ et NN′ la partie commune NB′; il en résulte que le point B vient aussi se placer sur le point B′; on verrait de même que les autres sommets C, D, E, coïncident avec les sommets C′, D′, E′; donc les deux solides MNPQRABCDE et M′N′P′Q′R′A′B′C′D′E′ sont égaux. Or, si du solide total ABDDEM'N'P'Q'R' on retranche le premier ou le second de ces deux solides égaux, on obtient comme restes le prisme droit ou le prisme oblique. Donc ces deux prismes sont équivalents.

Ce théorème conduit à une première expression du volume d'un prisme oblique, à savoir : *le produit de l'aire de la section droite par l'arête.* Nous donnerons plus loin une autre expression du même volume plus commode à appliquer.

Théorème.

635. *Le volume d'un parallélépipède quelconque a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

Soit un parallélépipède quelconque ABCD A'B'C'D' (*fig.* 482), ce parallélépipède est un prisme oblique qui équivaut à un prisme droit ayant pour base la section droite MNN'M', faite par un plan perpendiculaire à l'arête AB, et pour hauteur l'arête AB. La section droite MNN'M' est un parallélogramme ; donc le parallélépipède ABCDA'B'C'D' équivaut à un parallélépipède droit qui a pour base le parallélogramme MNN'M' et pour hauteur AB. Le volume de ce parallélépipède droit a pour mesure le produit de la surface de la base MNN'M' par la hauteur AB. Soit M'I perpendiculaire à MN, le volume du parallélépipède proposé a pour mesure

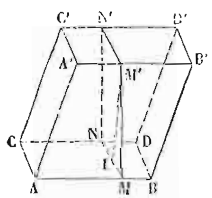


Fig. 482.

$$MN \times M'I \times AB, \text{ ou } AB \times MN \times M'I.$$

Or $AB \times MN$ est l'aire de la base ABCD, car l'arête AB perpendiculaire au plan MNM'N' est perpendiculaire à la droite MN qui passe par son pied dans le plan; M'I est la hauteur du parallélépipède, car le plan ABCD, qui contient la droite AB perpendiculaire au plan MNM'N', est perpendiculaire à ce plan (563), et la droite M'I, menée dans le plan MNN'M' perpendiculairement à la droite d'intersection MN des deux plans, est perpendiculaire au plan ABCD. Donc le volume du

parallélépipède a pour mesure le produit de l'aire de la base par la hauteur correspondante.

636. Corollaire. *Deux parallélépipèdes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents.*

Théorème.

637. *Le volume d'un prisme quelconque a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur.*

Considérons d'abord un prisme triangulaire ABCA'B'C', (*fig.* 483). Formons le parallélépipède qui a pour base le parallélogramme ABCD construit sur AB et sur AC, et pour arêtes latérales, des droites égales et parallèles à AA'. Ce parallélépipède est double du prisme. En effet, soit MNPQ une section droite faite dans ce parallélépipède par un plan perpendiculaire à AA'; les deux prismes triangulaires ABCA'B'C' et BCDB'C'D' dont se compose le parallélépipède, sont respectivement équivalents à deux prismes triangulaires droits qui auraient pour bases l'un le triangle MNP, l'autre le triangle NPQ, et pour hauteur commune AA'. Or, les triangles MNP et NPQ étant égaux, ces prismes droits sont égaux ; par suite, les deux prismes obliques ABCA'B'C' et BCDB'C'D' sont équivalents, et le parallélépipède ABCDA'B'C'D' est le double du prisme ABCA'B'C'.

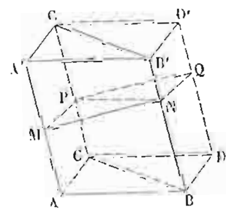


Fig. 483.

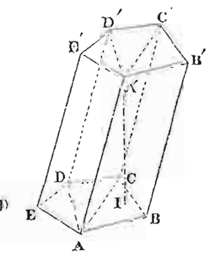


Fig. 484.

Le volume du parallélépipède a pour mesure le produit de la surface ABCD par la hauteur ; donc le volume du prisme a pour mesure le produit de la moitié de la surface ABCD par la hauteur, ou le produit de la surface de la base ABC par la hauteur.

Soit maintenant un prisme quelconque ABCDEA'B'C'D'E' (*fig.* 484). Décomposons le polygone de base en triangles par des diagonales issues du sommet A, et le prisme en prismes triangulaires par des plans menés par l'arête AA' et par les diagonales AC, AD. Le prisme donné est la somme des prismes triangulaires ABCA'B'C', ACDA'C'D', etc., qui ont tous même hauteur A'I, et par conséquent, le volume du prisme donné a pour mesure

$$(ABC+ACD+ADE)\times A'I$$

ou

$$ABCDE\times A'I.$$

638. COROLLAIRE. *Deux prismes qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalents.*

APPLICATION NUMÉRIQUE.

Une barre de fer ayant la forme d'un prisme oblique pèse 5 kilogrammes; la section droite est un hexagone régulier dont le côté a 3 centimètres. On demande la longueur de l'arête du prisme, sachant que le poids d'un centimètre cube de fer est $7^{gr},7$.

Le poids de la barre étant 5^k, ou 5000 grammes, et le poids d'un centimètre cube de fer étant $7^{gr},7$, le volume de la barre de fer est, en centimètres cubes,

$$\frac{5000}{7,7}=649,35.$$

Ce volume est le produit de la section droite par la longueur de l'arête; donc la longueur de l'arête est, en centimètres, le quotient du nombre de centimètres cubes contenus dans le volume par le nombre de centimètres carrés contenus dans l'aire de la section droite. Or, cette aire est :

$$6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la longueur de l'arête, en centimètres, est :

$$649,35:\frac{27\sqrt{3}}{2}=\frac{649,35\times 2}{27\sqrt{3}}=27,7.$$

La longueur de l'arête est $27^{cent},7$, à un millimètre près.

§ IV. PYRAMIDES; VOLUME D'UNE PYRAMIDE, D'UN TRONC DE PYRAMIDE, D'UN TRONC DE PRISME A BASE TRIANGULAIRE.

639. DÉFINITIONS. On appelle *pyramide* un solide compris entre les faces d'un angle polyèdre et un plan qui rencontre toutes ces faces. Le sommet de l'angle polyèdre est le *sommet* de la pyramide, la face opposée est la *base;* la distance du sommet à la base est la *hauteur* de la pyramide (*fig.* 485).

On dit qu'une pyramide est *triangulaire, quadrangulaire, pentagonale*, etc., selon que la base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone.

On dit qu'une pyramide est *régulière*, si la base est un polygone régulier est si la droite qui joint le sommet de la pyramide au centre du polygone de base est perdiculaire au plan de la base.

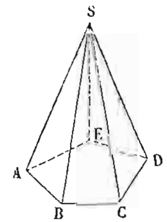


Fig. 485.

On appelle *tronc de pyramide* la portion du volume d'une pyramide comprise entre le plan de la base et un plan parallèle à la base. La distance des deux plans parallèles est la *hauteur* du tronc.

Théorème.

640. *Toute section faite dans une pyramide par un plan parallèle au plan de la base est un polygone semblable au polygone de base.*

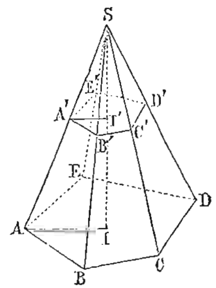


Fig. 486.

Soit A'B'C'D'E' une section faite dans la pyramide SABCDE (*fig.* 486) par un plan parallèle au plan de la base. On voit d'abord que les deux polygones ABCDE et A'B'C'D'E' ont les côtés parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, et on en conclut que les deux polygones ont les angles égaux chacun à chacun. De plus, du parallélisme des droites AB et A'B' il résulte que le rapport $\frac{AB}{A'B'}$ est égal au rapport $\frac{SB}{SB'}$, qui, lui-même, à cause du parallélisme des côtés BC et B'C', est égal au rapport $\frac{BC}{B'C'}$; on a donc :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{SB}{SB'}=\frac{BC}{B'C'}=\text{etc.}$$

641. Remarque. Soient SI et SI′ les distances du sommet S aux plans des deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′. Le plan SAI rencontrant les plans de ces polygones suivant les droites parallèles AI et A′I′, le rapport $\frac{SI}{SI'}$ est égal au rapport $\frac{SA}{SA'}$; le rapport de similitude $\frac{AB}{A'B'}$ des deux polygones ABCDE, A′B′C′D′E′ est égal à $\frac{SA}{SA'}$ ou à $\frac{SI}{SI'}$. Donc *le rapport des surfaces des deux polygones est égal au rapport des carrés des distances du sommet de la pyramide aux plans de ces polygones* (484).

Théorème.

642. *Si dans deux pyramides* SABCD, S′A′B′C′D′ *qui ont même hauteur, on fait des sections* MNPQ, M′N′P′Q′ *par des plans parallèles aux bases et situés à la même distance des sommets, les surfaces des sections sont proportionnelles aux bases des deux pyramides.*

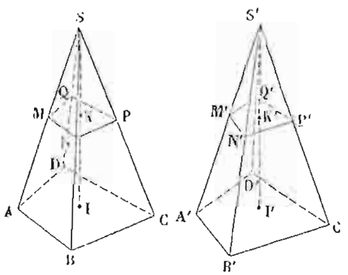


Fig. 487.

En effet, soient (*fig.* 487) SI, SK, les distances du sommet S aux plans des polygones ABCD, MNPQ, et S′I′, S′K′, les distances du sommet S′ aux plans des polygones A′B′C′D′, M′N′P′Q′. On a, d'après la remarque précédente :

$$\frac{MNPQ}{ABCD} = \frac{\overline{SK}^2}{\overline{SI}^2}$$

$$\frac{M'N'P'Q'}{A'B'C'D'} = \frac{\overline{S'K'}^2}{\overline{S'I'}^2}$$

et comme, par hypothèse,

$$SK = S'K' \quad \text{et} \quad SI = S'I',$$

$$\frac{MNPQ}{ABCD} = \frac{M'N'P'Q'}{A'B'C'D'}.$$

643. Corollaire. *Si deux pyramides* SABCD, S′A′B′C′D′ *ont même hauteur et des bases équivalentes, les sections* MNPQ, M′N′P′Q′ *faites dans les deux pyramides par des plans parallèles aux bases, à la même distance des sommets, sont équivalentes.*

Théorème

644. *Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalentes.*

Soient (*fig.* 488) deux pyramydes triangulaires SABC, S′A′B′C′ qui ont même hauteur et des bases équivalentes. Supposons les bases ABC, A′B′C′ dans un même plan ; les sommets S et S′ seront à la même distance de ce plan. Partageons l'arête SA

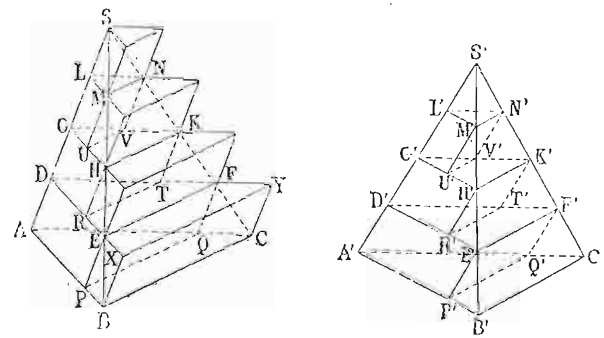


Fig. 488.

en un certain nombre de parties égales, en 4 parties par exemple, et par les points de division menons des plans parallèles au plan commun des bases des pyramides. Ces plans (643) déterminent dans les deux pyramides des sections équivalentes, DEF et D′E′F′, GHK et G′H′K′, LMN et L′M′N′. Inscrivons dans la première pyramide des prismes triangulaires DEFAPQ, GHKDRT, LMNGUV, qui ont pour bases les sections DEF, GHK, LMN, et dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à DA ; de même, dans la seconde pyramide inscrivons les prismes triangulaires D′E′F′A′P′Q′, G′H′K′D′R′T′, L′M′N′G′U′V′, qui ont pour bases les sections D′E′F′, G′H′K′, L′M′N′, et dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à D′A′. Les prismes inscrits dans la première pyramide sont respectivement équivalents aux prismes inscrits dans la seconde, comme ayant des bases équivalentes et même hauteur. Par conséquent, quel que soit le nombre des prismes inscrits dans les deux pyramides, la somme des prismes inscrits dans la première équivaut à la somme des prismes inscrits dans la seconde.

Cela posé, nous allons montrer que si l'on augmente indéfiniment le nombre des divisions de l'arête SA partagée en parties égales, la somme des prismes inscrits dans chaque pyramide a pour limite le volume de cette pyramide.

Considérons par exemple les prismes inscrits dans la pyramide SABC. Circonscrivons à cette pyramide des prismes ayant respectivement pour bases les triangles ABC, DEF, GHK, LMN, et des arêtes latérales égales et parallèles à AD ; le nombre de ces prismes surpasse d'une unité le nombre des prismes inscrits. Le volume de la pyramide est compris entre la somme des prismes inscrits et la somme des prismes circonscrits, et par conséquent la différence entre le volume de la pyramide et la somme des volumes des prismes inscrits est moindre que la différence entre la somme des volumes des prismes circonscrits et la somme des volumes des prismes inscrits. Or, comparons les prismes circonscrits aux prismes inscrits, en allant du sommet de la pyramide vers la base ; le premier prisme circonscrit, celui qui a pour base LMN et pour arête LS, est égal au premier prisme inscrit GUVLMN ; le second prisme circonscrit est égal au second prisme inscrit, et ainsi de suite, et l'avant-dernier prisme circonscrit est égal au dernier prisme inscrit. Il en résulte que l'excès de la somme des prismes circonscrits sur la somme des prismes inscrits est le dernier prisme circonscrit ABCDXY. L'excès du volume de la pyramide sur la somme des volumes des prismes inscrits est donc moindre que le prisme ABCDXY. La hauteur de ce dernier prisme est inférieure à l'arête AD, elle tend évidemment vers zéro quand le nombre des prismes inscrits croît indéfiniment, et par suite le volume de ce prisme tend lui-même vers zéro, dans les mêmes circonstances. On en conclut que l'excès du volume de la pyramide sur la somme des prismes inscrits a pour limite zéro, ou, en d'autres termes, que le volume de la pyramide est la limite de la somme des prismes inscrits, quand le nombre de ces prismes augmente indéfiniment.

Il en est de même pour l'autre pyramide.

Les sommes des prismes inscrits dans les deux pyramides sont égales entre elles, quel que soit le nombre de ces prismes, et ces sommes ont respectivement pour limites les volumes des deux pyramides quand le nombre des prismes augmente indéfiniment ; donc les deux pyramides sont équivalentes.

Théorème.

645. *Le volume d'une pyramide a pour mesure le tiers du produit de la base par la hauteur.*

1° Soit d'abord une pyramide triangulaire SABC (*fig.* 489) ; conduisons un prisme triangulaire ABCDSE de même base et de même hauteur en prenant pour base du prisme la base ABC de la pyramide et pour arêtes latérales des droites égales et parallèles à l'une quelconque SB des arêtes de la pyramide. Le volume de ce prisme est le triple de celui de la pyramide. En effet, le prisme ABCDSE se compose de la pyramide proposée SABC et de la pyramide quadrangulaire SACED ; cette pyramide quadrangulaire est la somme des deux pyramides triangulaires SADE, SACE, qui, ayant même base et même hauteur, sont équivalentes. Or, la pyramide SADE peut être regardée comme ayant pour base DSE et pour sommet le point A, par conséquent elle équivaut à la pyramide proposée SABC, ces deux pyramides ayant des bases égales et même hauteur. Le prisme est donc la somme de trois pyramides équivalentes à la pyramide SABC.

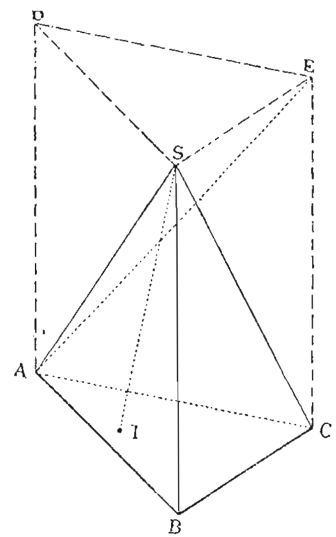


Fig. 489.

Le volume du prisme triangulaire ABCDSE a pour mesure le produit de la base par la hauteur :

$$ABC \times SI ;$$

donc le volume de la pyramide, qui est le tiers du volume du prisme, a pour mesure

$$\frac{1}{3}\,ABC \times SI;$$

2° Soit maintenant une pyramide à base polygonale SABCDE (*fig.* 490). Décomposons le polygone de base en triangles par des diagonales menées du sommet A, et décomposons la pyramide SABCDE en pyramides triangulaires SABC, SACD, SADE, par des plans menés par l'arête SA et par les diagonales AC et AD. Ces pyramides triangulaires ont toutes pour hauteur la hauteur SI de la pyramide proposée; le volume de chacune d'elles a pour mesure le tiers du produit de sa base par la hauteur SI; donc le volume de la pyramide SABCDE a pour mesure :

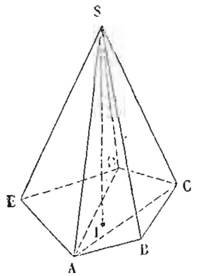


Fig. 490.

$$\frac{1}{3}\,(ABC + ACD + ADE) \times SI$$

ou

$$\frac{1}{3}\,ABCDE \times SI,$$

c'est-à-dire le tiers du produit de la base par la hauteur.

646. Corollaire I. *Deux pyramides qui ont des bases équivalentes et même hauteur sont équivalentes.*

On déduit de là un moyen simple pour transformer une pyramide à base quelconque en une pyramide triangulaire équivalente. Il suffit de former un triangle équivalent au polygone de base de la pyramide proposée, et de prendre ce triangle pour base d'une pyramide de même hauteur que la pyramide proposée.

647. Corollaire II. *Deux pyramides qui ont des bases équivalentes sont proportionnelles à leurs hauteurs. — Deux pyramides qui ont même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.*

648. Remarque. Sachant mesurer le volume d'une pyramide à base quelconque, on sait par cela même mesurer le volume d'un polyèdre convexe quelconque. En effet, on pourra toujours décomposer un polyèdre en un certain nombre de pyramides; si, par exemple, on prend dans l'intérieur du polyèdre un point quelconque et si l'on joint ce point à tous les sommets

du polyèdre, le polyèdre se trouvera décomposé en pyramides qui auront toutes ce point pour sommet et pour bases les diverses faces du polyèdre. On mesurera le volume de chacune de ces pyramides, et il suffira de faire la somme de ces volumes pour avoir le volume du polyèdre.

Les théorèmes qui suivent permettent de mesurer plus simplement le volume de certains polyèdres de forme particulière.

Théorème.

649. *Le volume d'un tronc de pyramide équivaut à la somme des volumes de trois pyramides qui ont pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases l'une la base inférieure du tronc, l'autre la base supérieure, la troisième une moyenne géométrique entre ces deux bases.*

1° Soit d'abord un tronc de pyramide triangulaire ABC A'B'C' (*fig.* 491). Par le plan B'AC partageons le tronc de pyramide en deux pyramides : la pyramide triangulaire B'ABC et la pyramide quadrangulaire B'AA'C'C. La pyramide triangulaire B'ABC a pour hauteur la hauteur du tronc et pour base la base inférieure ABC du tronc. Par le plan B'AC' partageons la pyramide quadrangulaire B'AA'C'C en deux pyramides triangulaire B'AA'C' et B'ABC'; la première B'AA'C' peut être considérée comme ayant pour sommet le point A et pour base A'B'C', c'est-à-dire comme ayant pour hauteur la hauteur du tronc, et pour base la base supérieure du tronc. Reste la troisième pyramide B'ACC'. Par le point B' menons la parallèle B'D à la droite CC', et soit D le point où cette ligne, située dans le plan BCB'C', rencontre BC; la droite B'D, parallèle à la

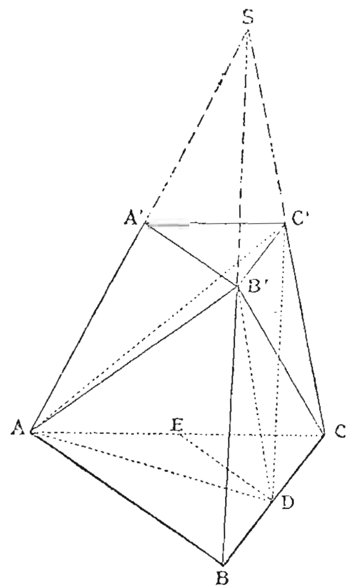


Fig. 491.

droite CC′, est parallèle au plan de la base ACC′, et par conséquent la pyramide B′ACC′ équivaut à la pyramide DACC′ qui a même base et même hauteur. Cette dernière pyramide DACC′ peut être regardée comme ayant pour sommet le point C′ et pour base ADC; la hauteur de cette pyramide est encore la hauteur du tronc; il reste à démontrer que la base ADC est moyenne géométrique entre les deux bases du tronc. Menons DE parallèle à AB; le triangle CDE est égal au triangle C′B′A′, car ces triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : $DC = B'C'$, $DCE = B'C'A'$ et $CDE = C'B'A'$. Or les triangles ABC et ADC, qui ont même sommet A et leurs bases sur la droite DC, ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases; on a donc :

$$\frac{ABC}{ADC} = \frac{BC}{DC}.$$

De même les triangles ADC et CDE, qui ont même sommet D et leurs bases sur la droite AC, ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases ; on a donc aussi :

$$\frac{ADC}{CDE} = \frac{AC}{CE}.$$

Mais, à cause du parallélisme des droites AB et DE, on a :

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE};$$

donc

$$\frac{ABC}{ADC} = \frac{ADC}{CDE}.$$

Le triangle ADC est moyen proportionnel entre les triangles ABC et CDE, ou entre ABC et A′B′C′, et la troisième pyramide remplit les conditions de l'énoncé.

Soient h la hauteur du tronc de pyramide, b et b' les surfaces des deux bases; le volume du tronc a pour mesure :

$$\frac{h}{3}\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right).$$

2° Soit (*fig.* 492) un tronc de pyramide à base polygonale ABCDA′B′C′D′E′ appartenant à la pyramide SABCDE.

Dans le plan de la base prenons un triangle FGH équivalent au polygone ABCDE, et prenons un point T à une distance de ce plan égale à la hauteur de la pyramide SABCDE. La pyramide TFGH équivaut à la pyramide SABCDE; le plan A′B′C′D′E′ détermine dans la pyramide TFGH une section F′G′H′ équivalente à la section A′B′C′D′E′, et les pyramides TF′G′H′ et SA′B′C′D′E sont équivalentes. Donc le tronc de pyramide triangulaire FGHF′G′H′ équivaut au tronc de pyramide proposé, et, comme les deux troncs ont même hauteur et des bases équivalentes, le théorème démontré pour le tronc de pyramide triangulaire s'applique au tronc de pyramide à base polygonale.

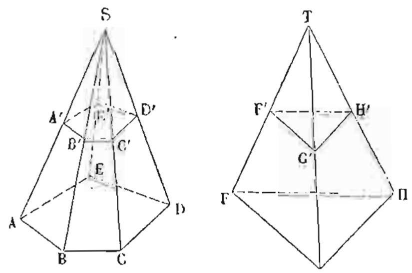


Fig. 492.

650. Si l'on désigne par B et par B′ les aires des bases d'un tronc de pyramide à bases quelconques, par H sa hauteur, et par V son volume, on a :

$$(1) \qquad V = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right).$$

651. REMARQUE I. Au lieu de donner les aires B et B′ des deux bases, on peut donner l'aire B de l'une des bases, et le rapport de similitude λ de la seconde base à la première.

On a :

$$\frac{B'}{B} = \lambda^2,$$

et, en remplaçant dans la relation (1) B′ par $B\lambda^2$, on a la relation (1)′

$$(1)' \qquad V = \frac{H}{3} B\left(1 + \lambda + \lambda^2\right).$$

652. REMARQUE II. On peut aussi trouver la mesure du volume d'un tronc de pyramide en considérant ce solide comme la différence de deux pyramides.

Soient B, B′ les aires des deux bases du tronc, h et h' les distances du sommet de la pyramide aux plans des deux bases et H la hauteur du tronc.

Le volume V du tronc de pyramide est la différence des volumes $\frac{1}{3}Bh$, $\frac{1}{3}B'h'$, des deux pyramides. On a donc :

$$(2) \qquad V = \frac{1}{3}\left(Bh - B'h'\right).$$

D'autre part on a :

$$H = h - h'$$

et

$$\frac{B}{h^2} = \frac{B'}{h'^2}.$$

Ces relations permettent de transformer, par un calcul algébrique, l'expression $\frac{1}{3}\left(Bh - B'h'\right)$ en l'expression $\frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$ trouvée comme mesure du même ovlume par des considérations géométriques.

En effet, de la relation

$$\frac{B}{h^2} = \frac{B'}{h'^2}$$

on déduit :

$$\frac{B}{h^2} = \frac{B'}{h'^2} = \frac{Bh - B'h'}{h^3 - h'^3} = \frac{B + B' + \sqrt{BB'}}{h^2 + h'^2 + hh'},$$

d'où :

$$Bh - B'h' = \left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)\frac{h^3 - h'^3}{h^2 + h'^2 + hh'}.$$

Or on a vu en algèbre que le quotient $\frac{h^3 - h'^3}{h^2 + hh' + h'^2}$ est égal à $h - h'$, différence qui est H.

Donc, enfin :

$$\frac{1}{3}\left(Bh - B'h'\right) = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$$

653. Remarque III. Le tronc de pyramide, tel que nous

l'avons considéré, est le solide compris entre les faces d'un angle polyèdre et deux plans parallèles coupant les arêtes du polyèdre d'un même côté par rapport au sommet (*fig.* 493). On peut aussi considérer le solide compris entre les faces d'un angle polyèdre et deux plans parallèles tels que l'un rencontre les arêtes d'un même côté par rapport au sommet, l'autre de l'autre côté (*fig.* 494). On donne à ce solide le nom de *tronc de pyramide de seconde espèce*. Son volume est la somme de deux pyramides, tandis que le volume du tronc de pyramide ordinaire, ou de *première espèce*, est la différence de deux pyramides.

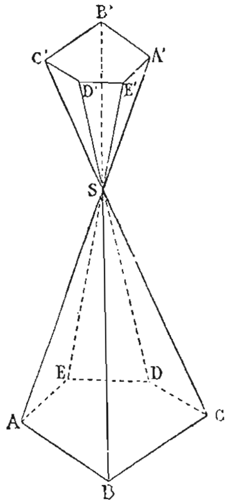


Fig. 493.

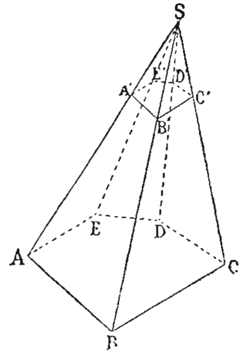


Fig. 494.

Si l'on conserve les mêmes notations que ci-dessus, le volume V de ce tronc de pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3}\left(Bh + B'h'\right)$$

et on a les relations :

$$H = h + h'$$
$$\frac{B}{h^2} = \frac{B'}{h'^2}.$$

De la dernière on déduit :

$$\frac{B}{h^2} = \frac{B'}{h'^2} = \frac{Bh + B'h'}{h^3 + h'^3} = \frac{B + B - \sqrt{BB'}}{h^2 + h'^2 - hh'},$$

d'où :

$$Bh + B'h' = \left(B + B' - \sqrt{BB'}\right)\frac{h^3 + h'^3}{h^2 + h'^2 - hh'}.$$

Or, on a vu en algèbre que le quotient $\frac{h^3+h'^3}{h^2-hh'+h'^2}$ est égal à $h+h'$, somme qui est égale à H.

Donc enfin, la mesure du volume du tronc de pyramide de seconde espèce est donnée par la formule (2) :

$$(2) \qquad V=\frac{H}{3}\left(B+B'-\sqrt{BB'}\right).$$

On passe de la formule (1) à la formule (2) en changeant $\sqrt{BB'}$ en $-\sqrt{BB'}$.

Si l'on désigne par λ le rapport de similitude de la seconde base à la première, la formule (2) devient (2)' :

$$(2)' \qquad V=\frac{H}{3}B\left(1-\lambda+\lambda^2\right).$$

On passe de la formule (1)' à la formule (2)' en changeant λ en $-\lambda$.

Théorème.

654. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaires équivaut à la somme des volumes de trois pyramides qui auraient pour base commune l'une des bases du tronc, et pour sommets les sommets de l'autre base.*

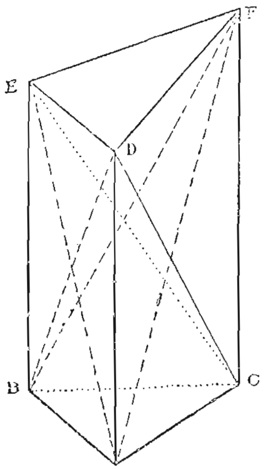


Fig. 495.

On appelle *tronc de prisme*, une portion de prisme comprise entre l'une des bases du prisme et un plan non parallèle au plan de cette base qui coupe toutes les arêtes du prisme d'un même côté de ce plan.

Soit le tronc de prisme triangulaire ABCDEF (*fig.* 595); il équivaut à la somme de trois pyramides qui auraient pour base commune ABC, et pour sommets, l'une D, l'autre E et la troisième F. En effet, par le plan DBC, décomposons le tronc de prisme en deux pyramides, l'une triangulaire DABC, l'autre quadrangulaire DBEFC ; la pyramide triangulaire DABC a pour

base ABC, et pour sommet le point D. Par le plan DEC, partageons la pyramide quadrangulaire DBEFC en deux pyramides triangulaires, DBEC et DEFC ; la première DBEC équivaut à la pyramide ABEC, qui a même base et même hauteur, et celle-ci peut être regardée comme ayant pour base BAC, et pour sommet le point E. Reste la pyramide DEFC ; elle équivaut à la pyramide AEFC, qui a même base et même hauteur ; cette pyramide AEFC, que l'on peut regarder comme ayant pour sommet le point E, et pour base le triangle ACF, équivaut à la pyramide BACF, qui a même base et même hauteur, et celle-ci peut être regardée comme ayant pour base ABC, et pour sommet le point F. Le tronc de prisme ABCDEF équivaut donc à la somme de trois pyramides qui remplissent les conditions de l'énoncé.

655. Remarque. Si la base ABC du tronc était une section droite, les arêtes AD, BE, CF seraient les hauteurs des trois pyramides, et le volume du tronc de prisme aurait pour mesure

$$\frac{1}{3}ABC\times(AD+BE+CF).$$

656. Corollaire. *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire a aussi pour mesure le produit de l'aire de la section droite par le tiers de la somme des trois arêtes.*

En effet, soit MNP une section droite du tronc de prisme ABCDEF (*fig.* 496), le volume du tronc est la différence des volumes des troncs MNPDEF, MNPABC ; le premier a pour mesure

$$\frac{1}{3}MNP(MD+NE+PF);$$

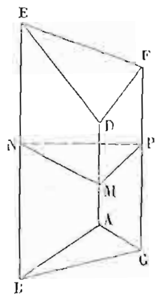


Fig. 496.

le second a pour mesure :

$$\frac{1}{3}MNP(MA+NB+PC);$$

donc le volume du tronc de prisme ABCDEF a pour mesure

$$\frac{1}{3}MNP(AD+BE+CF).$$

Problème.

657. *Calculer le volume d'un tronc de prisme quadrangulaire* ABCDA'B'C'D', *dont deux faces latérales sont des rectangles qui ont leurs côtés respectivement parallèles.*

Soient ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 497) les faces rectangles du tronc de prisme, AB parallèle à A'B', et AD parallèle A'D'. Appelons a et b les dimensions AB et AD du rectangle ABCD, a' et b' les dimensions A'B' et A'D' du rectangle A'B'C'D'; et soit h la distance des plans de ces rectangles. Par le plan DCA'B', partageons le tronc de prisme considéré en deux troncs de prismes triangulaires et faisons une section droite MNM'N'. Le tronc de prisme ADA'BCC' a pour mesure :

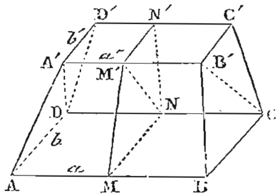


Fig. 497.

$$\frac{1}{3}\text{MNM}'\,(\text{AB}+\text{DC}+\text{A'B'}),$$

ou

$$\frac{1}{3}\text{MNM}'\,(2a+a');$$

le tronc de prisme A'DD'B'CC' a pour mesure :

$$\frac{1}{3}\text{M'N'N}\,(\text{A'B'}+\text{D'C'}+\text{DC}),$$

ou

$$\frac{1}{3}\text{M'N'N}\,(2a'+a).$$

Or le triangle MNM' ayant pour base MN, ou b, et pour hauteur la perpendiculaire abaissée du point M' sur MF, c'est-à-dire la distance h des plans des rectangles, l'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}bh$; de même, l'aire du triangle M'NN' est $\frac{1}{2}b'h$; et le volume V du solide proposé est donné par la formule :

$$\text{V}=\frac{1}{6}bh(2a+a')+\frac{1}{6}b'h(2a'+a),$$

ou,

$$(1)\qquad \text{V}=\frac{h}{6}\Big[b(2a+a')+b'(2a'+a)\Big].$$

658. Remarque. Si les rectangles ABCD, A'B'C'D' sont semblables, les arêtes AA', BB', CC' et DD' concourent en un même point, et le solide considéré est un tronc de pyramide à base rectangulaire. Soit en effet O le point de rencontre des arêtes AA' et BB' situées dans le plan ABA'B'; l'arête CC' rencontre l'arête BB' en un point tel, que le rapport de ses distances aux points B et B' est égal à $\frac{\text{BC}}{\text{B'C'}}$, ou à $\frac{\text{AB}}{\text{A'B'}}$, ou à $\frac{\text{OB}}{\text{OB'}}$; donc l'arête CC' rencontre l'arête BB' au point O. On verrait de même que l'arête DD' vient aussi passer au point O.

Le solide étant un tronc de pyramide, son volume V est donné par la formule

$$(2)\qquad \text{V}=\frac{h}{3}\left(ab+a'b'+\sqrt{aba'b'}\right).$$

Or, dans ce cas, les formules (1) et (2) sont équivalentes; car, si on représente par λ les rapports égaux $\frac{a'}{a}$ et $\frac{b'}{b}$, et si l'on remplace dans ces deux formules a' par λa et b' par λb, on obtient, dans les deux cas, la même formule :

$$\text{V}=\frac{h}{3}(1+\lambda+\lambda^2)\,ab.$$

Si les deux rectangles ABCD, A'B'C'D' sont égaux, le solide est un parallélipipède dont le volume est abh. C'est bien là encore le résultat donné par la formule (1), si on y fait $a=a'$, et $b=b'$.

Théorème.

659. *Le volume d'un polyèdre compris entre deux bases qui sont des polygones situés dans des plans parallèles et des faces latérales qui sont des trapèzes ou des triangles a pour mesure le produit*

$$\frac{\text{H}}{6}\left(\text{B}+\text{B}'+4\,\text{B}''\right)$$

dans lequel H *désigne la distance des plans des bases*, B, B' *les* *aires des deux bases, et* B″ *l'aire de la section faite dans le polyèdre par un plan équidistant des plans des deux bases.*

Soient ABC..., A′B′C′..., les deux bases, A″B″C″..., et la section équidistante des deux bases (*fig.* 498). Dans le plan de cette section, à l'intérieur du polygone A″B″C″..., prenons un point O quelconque, et joignons ce point O aux divers sommets du polyèdre. Le polyèdre est la somme de pyramides qui ont pour sommet commun le point O, et pour bases respectives les bases du polyèdre et ses faces latérales.

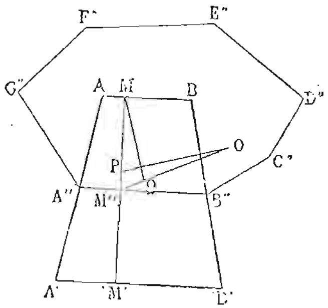


Fig. 498.

Les pyramides qui ont pour base les bases du polyèdre ont pour hauteur $\frac{H}{2}$; elles ont pour volume :

$$\frac{H}{6}\times B \quad \text{et} \quad \frac{H}{6}\times B'.$$

Considérons l'une quelconque des pyramides qui ont pour base une des faces latérales du polyèdre, par exemple le trapèze ABB′A′. Soit OP la perpendiculaire abaissée du point O sur cette face. Le volume de la pyramide OABB′A′ a pour mesure le produit de l'aire du trapèze ABB′A′ par $\frac{1}{3}$ OP. Or, soit MM″M′ la perpendiculaire aux côtés parallèles AB, A′B′ menée par le point P ; l'aire du trapèze ABB′A′ est A″B″ × MM′. Le volume de la pyramide considérée a donc pour mesure :

$$\frac{1}{3}A''B''\times MM'\times OP$$

ou, en remplaçant MM′ par 2MM″,

$$\frac{2}{3}A''B''\times MM''\times OP.$$

Soit MQ perpendiculaire à OM″. Les deux produits MM″ × OP et OM″ × MQ qui représentent tous les deux le double de l'aire du triangle OMM″, sont égaux ; le volume de la pyramide est

donc aussi

$$\frac{2}{3}A''B''\times OM''\times MQ.$$

Or, le plan OMM″ qui contient deux droites non parallèles MM″, OP, perpendiculaires à A″B″, est perpendiculaire à cette droite, il en résulte d'abord que OM″ est perpendiculaire à A″B″, de sorte que le produit

$$A''B''\times OM''$$

est le double de l'aire du triangle OA″B″. D'autre part, le plan A″B″C″ qui contient une droite A″B″ perpendiculaire au plan OMM″, est perpendiculaire à ce plan, et, par suite, la droite MQ, située dans le plan OMM″ et perpendiculaire à l'intersection OM″ de plans perpendiculaires OMM″, A″B″C″, est perpendiculaire à ce dernier plan. MQ est donc la moitié de la hauteur H. Le volume de la pyramide est donc

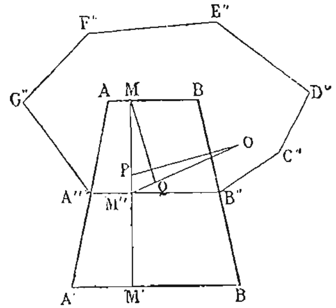


Fig. 498 *bis*.

$$\frac{2}{3}\times 2\,\text{surf. }OA''B''\times\frac{H}{2},$$

ou

$$\frac{H}{6}\times 4\,\text{surf. }OA''B''.$$

Si la face latérale considérée était un triangle au lieu d'un trapèze, on arriverait, en opérant de même, au même résultat. La somme des volumes des pyramides qui ont pour bases les faces latérales du polyèdre a pour mesure le produit de $\frac{H}{6}$ par quatre fois la somme des triangles OA″B″, OB″C″, etc., ou

$$\frac{H}{6}\times 4B''.$$

Donc enfin, le volume V du polyèdre est donné par la formule

$$V=\frac{H}{6}B+\frac{H}{6}B'+\frac{H}{6}.4B''$$

ou

$$V = \frac{H}{6}\left(B + B' + 4B''\right).$$

660. Remarque. La formule précédente comprend, comme cas particulier, les formules trouvées pour le volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles, et pour le volume du polyèdre considéré n° 657.

Appliquons-la par exemple au volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

Si nous désignons par h, h', h'' les distances du sommet de la pyramide aux deux bases du tronc et à la section équidistante de ces bases, on a :

$$\frac{\sqrt{B''}}{h''} = \frac{\sqrt{B}}{h} = \frac{\sqrt{B'}}{h'} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{h + h'},$$

d'où

$$\sqrt{B''} = \frac{h''}{h + h'}\left(\sqrt{B} + \sqrt{B'}\right),$$

et, en remarquant que $\frac{h''}{h+h'}$ est égale à $\frac{1}{2}$:

$$\sqrt{B''} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{B} + \sqrt{B'}\right);$$

et, en élevant au carré :

$$B'' = \frac{1}{4}\left(B + B' + 2\sqrt{BB'}\right).$$

En substituant dans la formule

$$V = \frac{H}{6}\left(B + B' + 4B''\right),$$

on a :

$$V = \frac{H}{6}\left(2B + 2B' + 2\sqrt{BB'}\right),$$

ou

$$V = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right),$$

ce qui est la formule du n° 650.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Une pyramide régulière a pour base un hexagone régulier dont le côté est 14 centimètres, la distance du sommet de la pyramide à l'un des sommets de la base est 23 centimètres : calculer le volume et la surface totale de la pyramide (fig 499).*

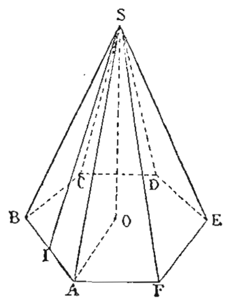


Fig. 499.

L'aire de la base de la pyramide est

$$6.14^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 294\sqrt{3} = 509,22270\ldots$$

La hauteur SO de la pyramide est le côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse SA est 23 centimètres, et dont l'autre côté OA est égal à 14 centimètres, elle est donc égale à

$$\sqrt{23^2 - 14^2} = \sqrt{333}.$$

Le volume, en centimètres cubes, est

$$\frac{1}{3} \times 294\sqrt{3} \times \sqrt{333} = 98\sqrt{999} = 3097,483$$

à moins d'un millimètre cube.

La surface latérale se compose de 6 triangles isocèles, égaux au triangle SAB. La base AB est de 14 centimètres; la hauteur SI est un côté de l'angle droit du triangle rectangle SIA, dans lequel l'hypoténuse SA est égale à 23 centimètres, et le côté AI égal à $\frac{14}{2}$, ou à 7 centimètres, cette hauteur est donc égale à :

$$\sqrt{23^2 - 7^2} = \sqrt{480} = 91,208902\ldots,$$

L'aire du triangle SAB est égale à :

$$7 \times 21,908902\ldots = 153^{cq.}362314\ldots,$$

La surface totale de la pyramide est

$$6 \times 153,362314\ldots + 509,22270\ldots = 1420^{cq.}3966.$$

à moins d'un millimètre carré.

II. *Une pyramide dont la hauteur est 25 centimètres a pour base un carré dont le côté est 13 centimètres; on coupe la pyramide par un plan parallèle au plan de la base et distant du sommet de 10 centimètres. Calculer le volume du tronc de pyramide ainsi formé.*

La hauteur du tronc est 25 — 10 centimètres, ou 15 centimètres. L'aire de l'une des bases est 13^2 ou 169 centimètres carrés. Le rapport de l'aire de l'autre base à l'aire de celle-ci est égal au carré du rapport des distances du sommet de la pyramide aux plans de ces bases, c'est-à-dire égal à $\left(\frac{10}{25}\right)^2$ ou à $\frac{4}{25}$.

Donc l'aire de la seconde base est :

$$169 \times \frac{4}{25} = 27,04.$$

Donc le volume du tronc, en centimètres cubes, est :

$$5\left(169 + 27,04 + \sqrt{169 \times 27,04}\right) = 1318,200\ldots$$

à moins d'un millimètre cube.

III. *On donne un hexagone régulier* ABCDEF *dont le côté est égal à* a *et une droite* GH *de longueur* b, *parallèle au côté* AB *de l'hexagone et à une distance du plan de cet hexagone égal à* h. *Déterminer le volume compris entre l'hexagone, les trapèzes* ABHG, EDHG, *et les triangles* BCH, CDH, EFG, FAG. *Faire le calcul en supposant* a = 3 *cent.*, b = 2 *cent.*, h = 4 *cent.* (*fig.* 500).

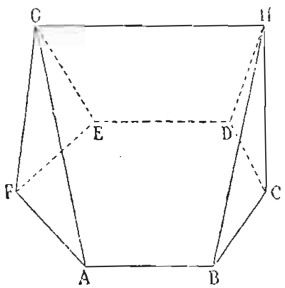


Fig. 500.

Le volume cherché est la somme du tronc de prisme triangulaire AEG BDH, et des deux pyramides GAEF, HBCD.

L'aire de la section droite du tronc du prisme $a\sqrt{3}\cdot\frac{h}{2}$; le tiers de la somme des arêtes latérales est $\frac{2a+b}{3}$; donc le volume du tronc de prisme est

$$\frac{a(2a+b)h\sqrt{3}}{6}.$$

Les deux pyramides ayant des bases égales, AEF, BDC, et même hauteur, sont équivalentes; l'aire de chaque base est $a\sqrt{3}\times\frac{a}{4}$; la hauteur de chaque pyramide est h; donc le volume de chaque pyramide est $a\sqrt{3}\times\frac{a}{4}\times\frac{h}{3}$, ou $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$. Le volume du solide considéré est

$$\frac{a(2a+b)h\sqrt{3}}{6} + \frac{a^2h\sqrt{3}}{6},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{a(3a+b)h\sqrt{3}}{6}.$$

Si on fait $a = 3$ cent., $b = 2$ cent., $h = 4$ cent.; on a pour le volume évalué en centimètres cubes :

$$\frac{3.\ 11.\ 4.\sqrt{3}}{6} = 22\sqrt{3} = 25,105\ldots$$

Le volume est 25 centimètres cubes, 105 millimètres cubes, à un millimètre cube près.

§ V. De la symétrie.

661. Symétrie par rapport a un axe. On dit que deux points A et A′ sont *symétriques par rapport à un axe* LL′ quand l'axe LL′ est perpendiculaire à la droite AA′, et la partage en deux parties égales (*fig.* 501).

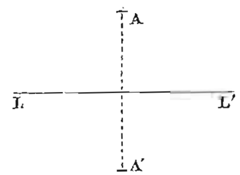


Fig. 501.

On dit que deux figures sont symétriques par rapport à un axe, quand à chaque point de l'une correspond un point de l'autre symétrique au premier par rapport à l'axe.

Deux figures symétriques par rapport à un axe sont superposables. On voit, en effet, que si l'on fait tourner la première figure de 180° autour de l'axe, on l'amène à coïncider avec la seconde.

Il n'y a pas lieu de comparer les éléments de deux figures symétriques par rapport à un axe. Les deux figures sont identiques.

662. Symétrie par rapport a un point. On dit que deux points A et A′ *sont symétriques par rapport à un point* O quand le point O est le milieu de la droite AA′ (*fig.* 502).

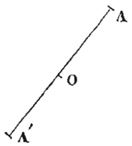


Fig. 502.

On dit que deux figures sont symétriques par rapport à un point O, quand à chaque point de l'une correspond un point de l'autre, symétrique au premier par rapport au point O. Le point O est appelé *centre de symétrie*.

663. Symétrie par rapport a un plan. On dit que deux points A et A′ sont *symétriques par rapport à un plan* P, quand le plan P est perpendiculaire à la droite AA′ et la partage en deux parties égales (*fig.* 503).

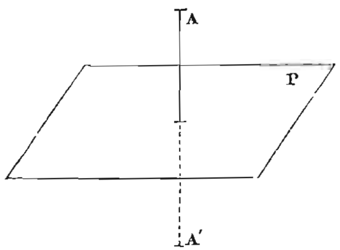


Fig. 503.

On dit que deux figures sont symétriques, par rapport à un plan P, quand à chaque point de l'une correspond un point de l'autre symétrique au premier par rapport au plan P. Le plan P est appelé *plan de symétrie*.

Théorème.

664. *Deux figures* F′ *et* F″, *symétriques à une même figure* F, *par rapport à deux points différents* O′ *et* O″, *sont superposables.*

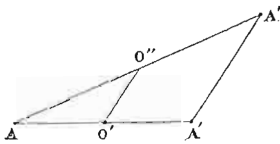


Fig. 504.

Soit A un point quelconque de la figure F, et soient A′ et A″ les points correspondants des figures F′ et F″ (*fig.* 504). Menons les droites O′O″ et A′A″. Les points O′ et O″ étant les milieux de AA′ et de AA″, la droite A′A″ est parallèle

à O′O″, et égale au double de O′O″, Donc, si l'on transporte la figure F′ de façon que chacun de ses points décrive une droite parallèle à O′O″, et égale à deux fois O′O″, on amène la figure F′ à coïncider avec la figure F″. Donc, enfin, ces figures sont superposables.

665. Remarque. Soient A, B deux points quelconques de la figure F, et soient A′, B′ les points correspondants de la figure F′, et A″, B″ les points correspondants de la figure F″ (*fig.* 505); les deux droites A′B′, A″B″ sont égales et parallèles à AB et de sens contraire à AB; elles sont donc égales, parallèles et de même sens; de là le corollaire suivant :

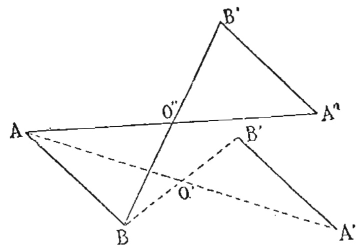


Fig. 505.

666. Corollaire. *Toutes les figures que l'on obtient en prenant les symétriques d'une même figure par rapport à des centres différents sont non seulement superposables, mais* orientées de la même façon, *c'est-à-dire telles que les droites, qui dans ces figures joignent des points correspondants, sont égales, parallèles et de même sens.*

Théorème.

667. *Deux figures symétriques à une troisième, l'une par rapport à un plan, l'autre par rapport à un point de ce plan, sont deux figures superposables.*

Soit F′ la figure symétrique d'une figure F par rapport à un plan P, et soit F″ la figure symétrique de la même figure F par rapport à un point O du plan P. Nous allons montrer que si l'on fait tourner la figure F″ de 180° autour de la perpendiculaire NON′ menée au plan P par le point O, cette figure viendra coïncider avec la figure F′ (*fig.* 506).

Soit en effet A un point quelconque de la figure F, et soit A″ le point symétrique à A de la figure F″. Lorsque la figure F″ tourne de 180° autour de la droite NN′, le point A″ décrit une demi-circonférence dont le plan est perpendiculaire à NN′, dont le centre est le pied I de la perpendiculaire abaissée du point A″ sur NN′, et dont le rayon est IA″. Le point A″ vient ainsi se placer en un point A′ que l'on obtient en prolongeant la perpendiculaire A″I d'une longeur égale à elle-même. Menons la droite AA′. Les triangles OA″I et AA″A′, qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables. Donc, la droite AA′ est parallèle à NN′, et par conséquent est

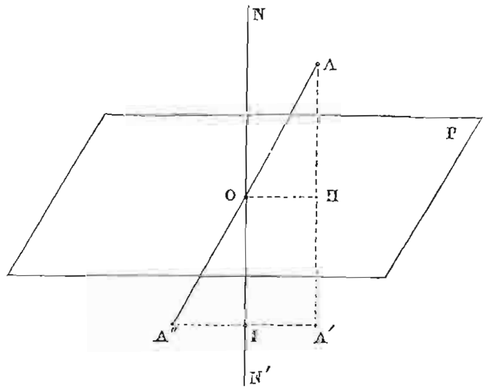


Fig. 506.

perpendiculaire au plan P. Enfin, l'intersection OH du plan AA″A′ et du plan P étant parallèle à A″A′, le point H est le milieu de AA′; donc, le point A′ est symétrique au point A par rapport au plan P. Chaque point de la figure F″ venant ainsi se placer en un point de la figure F′, les deux figures sont superposables.

668. Corollaire I. *Deux figures* F′, F″ *symétriques d'une même figure* F, *la première par rapport à un point* O *quelconque, la seconde par rapport à un plan* P *quelconque, sont superposables.*

Soit en effet F‴ la figure symétrique de la figure F par rapport à un point O′ pris dans le plan P. Les figures F″ et F‴ sont superposables en vertu du théorème (667); les figures F′ et F‴ sont superposables en vertu du théorème (664); donc les figures F′ et F″ toutes deux superposables à la figure F‴ sont elles-mêmes superposables.

669. Corollaire II. *Deux figures* F′, F″ *symétriques à une figure* F *par rapport à deux plans différents sont superposables.*

En effet, soit F‴ une figure symétrique à la figure F par rapport à un point quelconque; les deux figures F′ et F″, en vertu du corollaire précédent, sont toutes deux superposables à la figure F‴, donc elles sont superposables.

670. Remarque. Des deux théorèmes qui précèdent et des corollaires du dernier, il résulte que toutes les figures symétriques d'une même figure, soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan, sont des figures superposables, qui ne diffèrent que par leur situation dans l'espace. De sorte que, au point de vue de la forme et de la grandeur, *il n'y a qu'une figure symétrique d'une figure donnée*. Dans ce qui suit, nous appellerons indistinctement *figures symétriques* deux figures qui sont symétriques, soit par rapport à un point, soit par rapport à un plan.

Pour démontrer une propriété de deux *figures symétriques*, nous pourrons toujours choisir celui des deux modes de symétrie qui paraîtra le plus propre à mettre en évidence cette propriété, et prendre ensuite tel centre, ou tel plan de symétrie que nous voudrons.

Théorème.

671. *La figure symétrique d'une figure plane est une figure plane égale à la première.*

Cette propriété est évidente si l'on prend la figure symétrique de la figure donnée par rapport à un plan, et si l'on prend pour plan de symétrie le plan même de la figure donnée.

672. En particulier, la figure symétrique d'une portion de droite est une portion de droite égale; la figure symétrique d'un angle est un angle égal.

673. Corollaire I. *Dans le mode de symétrie par rapport à un point, deux portions de droite symétriques sont égales, parallèles et de sens contraires.*

674. Corollaire II. *Dans le mode de symétrie par rapport à un plan, deux portions de droite symétriques sont égales, également inclinées sur le plan, et, en général, les droites prolongées coupent le plan en un même point. Si l'une des droites est parallèle au plan de symétrie, les deux droites sont parallèles.*

Théorème.

675. I. *La figure symétrique d'un plan est un plan.*
II. *La figure symétrique d'un dièdre est un dièdre égal.*

I. En effet, si l'on prend pour centre de symétrie un point quelconque du plan, à tout point du plan correspond un autre point du plan.

On rend encore le théorème évident en prenant la figure symétrique du plan par rapport au plan lui-même : alors chaque point du plan se correspond à lui-même.

II. Le fait est évident si l'on prend la figure symétrique du dièdre par rapport à un point de l'arête, car alors cette figure est un dièdre opposé au premier par l'arête.

676. Corollaire I. *Dans le mode de symétrie par rapport à un point, deux plans symétriques sont parallèles.*

Car à deux droites de l'un correspondent deux droites parallèles dans l'autre.

677. Corollaire II. *Dans le mode de symétrie par rapport à un plan, deux plans symétriques ou rencontrent le plan de symétrie suivant la même droite et sont également inclinés sur ce plan, ou sont parallèles au plan de symétrie.*

Car la droite d'intersection de l'un des plans avec le plan de symétrie se correspond à elle-même dans l'autre, et l'angle dièdre formé par l'un des plans et le plan de symétrie est le symétrique de l'angle dièdre formé par l'autre avec le plan de symétrie.

Théorème.

678. *La figure symétrique d'un angle polyèdre est un angle polyèdre; les angles dièdres correspondants sont égaux; les faces correspondantes sont égales; mais les parties égales sont inversement disposées, ce qui fait qu'en général ces deux angles polyèdres ne sont pas superposables.*

Construisons en effet la figure symétrique de l'angle polyè-

dre SABCDDE par rapport au sommet S de cet angle (*fig.* 507); nous formerons l'angle polyèdre SA'B'C'D'E', et les relations énoncées dans ce théorème entre les éléments des deux angles polyèdres sont celles qui ont été établies au n° 583.

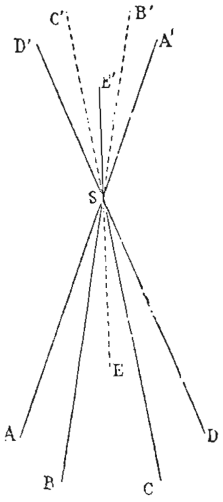


Fig. 507.

Théorème.

679. *La figure symétrique d'un polyèdre est un nouveau polyèdre tel que : 1° les faces correspondantes sont égales; 2° les angles dièdres correspondants sont égaux; 3° les angles polyèdres correspondants ont les faces égales et les dièdres égaux, mais, en général, ne sont pas superposables, parce que les parties égales sont inversement disposées dans les deux angles polyèdres.*

Ce sont des conséquences des théorèmes des n^{os} 671, 675, 678.

680. En général, deux polyèdres symétriques ne sont pas superposables, parce qu'en général deux angles polyèdres symétriques ne sont pas superposables.

Toutefois, si un polyèdre admet soit un centre de symétrie, soit un plan de symétrie, la figure symétrique de ce polyèdre par rapport au centre ou par rapport au plan de symétrie coïncide avec le polyèdre lui-même, et, dans ce cas, tout polyèdre symétrique au polyèdre donné est superposable à ce polyèdre.

Exemples. Un parallélépipède est une figure symétrique par rapport au point de concours des diagonales; donc deux parallélépipèdes symétriques sont superposables.

Un prisme droit est une figure symétrique par rapport au plan perpendiculaire à une arête en son milieu; donc la figure symétrique d'un prisme droit est un prisme droit superposable au premier.

Théorème.

681. *Deux polyèdres symétriques sont équivalents.*

Considérons d'abord deux tétraèdres symétriques, et plaçons-les de façon qu'ils soient symétriques par rapport au plan de l'une des faces de l'un des tétraèdres (*fig.* 508). Cette face ABC se correspond à elle-même; le sommet S' correspond au sommet S, et est symétrique de ce point par rapport au plan ABC. Donc, les deux tétraèdres sont équivalents comme ayant même base et même hauteur.

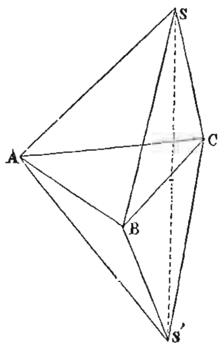


Fig. 508.

Deux polyèdres symétriques peuvent toujours être décomposés en un même nombre de tétraèdres symétriques; donc, deux polyèdres symétriques sont équivalents.

682. Remarque. Si par deux arêtes opposées AC' et CA' d'un parallélépipède ABCD A'B'C'D' (*fig.* 509), on mène un plan, on décompose le parallélépipède en deux prismes équivalents (637). Il est bon d'observer que ces deux prismes sont symétriques. En effet, les diagonales AA', BB', CC' et DD' se coupent en un même point O, et se partagent en ce point en deux parties égales. Donc, les points A', B', C', D', sont respectivement symétriques aux points A, B, C, D, par rapport au point O; et, par conséquent, les prismes ABCC'D'A' et A'B'C'CDA sont symétriques par rapport au point O.

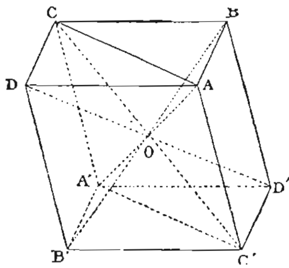


Fig. 509.

En général, ces prismes symétriques ne sont pas superposables. Toutefois, si le parallélépipède est droit, les prismes sont égaux (631) : cela tient à ce qu'un prisme droit a un plan de symétrie.

§ VI. Polyèdres semblables.

683. Définition. On dit que deux polyèdres sont *semblables* lorsqu'ils sont compris sous un même nombre de faces semblables chacune à chacune, et que les angles polyèdres formés par les faces semblables sont égaux.

Deux éléments qui se correspondent dans deux polyèdres semblables sont appelés *homologues*.

Dans deux polyèdres semblables, les angles dièdres homologues sont égaux et disposés dans le même ordre. Cela résulte de ce que les angles solides homologues sont égaux.

Dans deux polyèdres semblables, les arêtes homologues sont proportionnelles. Prenons, en effet, deux faces homologues, elles sont semblables, et les arêtes homologues de ces faces semblables sont proportionnelles. Comme d'ailleurs deux faces adjacentes ont une arête commune, le rapport de deux arêtes homologues est le même pour toutes les faces.

Le fait qu'il y a des polyèdres semblables à un polyèdre donné n'est pas évident *a priori*. Ce fait sera démontré, pour une pyramide, par le théorème suivant, puis, pour un polyèdre quelconque, par les théorèmes des n^{os} 688 et 689.

Théorème.

684. *En coupant une pyramide* SABCDE *par un plan parallèle à sa base et du même côté que la base par rapport au sommet, on détermine une seconde pyramide* SA'B'C'D'E' *semblable à la première* (*fig.* 510).

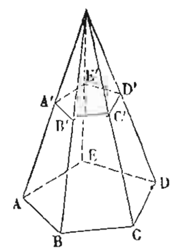


Fig. 510.

Le plan A'B'C' étant parallèle au plan de la base, la face A'B'C'D'E' est semblable à la face ABCDE (640); les droites A'B', B'C', C'D',... sont respectivement parallèles aux droites AB, BC, CD,... et par suite les faces SA'B', SB'C',... sont semblables aux faces SAB, SBC,..; donc, les deux pyramides sont comprises sous des faces semblables. L'angle polyèdre S est commun aux deux pyramides. Les angles trièdres, qui ont pour sommets A′ et A, ont leurs faces égales chacune à chacune, et les angles dièdres égaux chacun à chacun; de plus, la disposition des éléments dans l'un

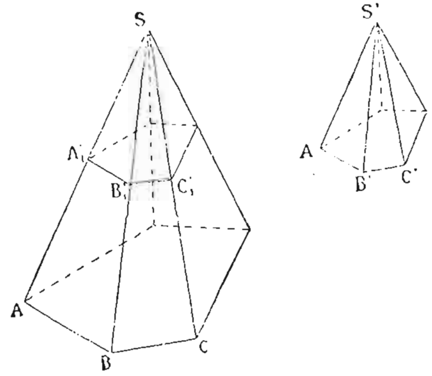


Fig. 511.

de ces trièdres est la même que celle des éléments égaux dans l'autre; donc ces trièdres sont superposables et par conséquent égaux. Il en est de même des trièdres B′ et B, des trièdres C′ et C, etc. Donc, les deux pyramides sont comprises sous des faces semblables, et ont les angles polyèdres homologues égaux et par conséquent sont semblables.

685. RÉCIPROQUEMENT. Si, deux pyramides SABC...L, S′A′B′C′...L′ étant semblables, on porte l'angle polyèdre du sommet S′ sur l'angle homologue égal S, de façon que chaque arête de l'angle polyèdre S′ se place sur l'arête homologue de l'angle polyèdre S, la face A′B′C′...L′ viendra se placer en $A'_1B'_1C'_1...L'_1$ parallèlement à la face ABC...L.

On a, en effet, par hypothèse

$$\frac{S'A'}{SA}=\frac{S'B'}{SB}=\frac{S'C'}{SC}=\dots\dots$$

et, par suite, on a

$$\frac{SA'_1}{SA}=\frac{SB'_1}{SB}=\frac{SC'_1}{SC}=\dots.$$

On en conclut que les droites $A'_1B'_1$, $B'_1C'_1$ sont respectivement parallèles aux droites AB, BC, et, par suite, que le plan $A'_1B'_1C'_1$ est parallèle au plan ABC.

686. Du théorème et de la réciproque, il résulte que pour former toutes les pyramides semblables à une pyramide donnée SABC...L, il suffit de mener un plan parallèle au plan de la base de cette pyramide et de faire mouvoir ce plan de façon que, passant d'abord par le sommet S, il s'en éloigne indéfiniment, en restant toujours, par rapport à ce sommet, du même côté que le plan de la base de la pyramide donnée.

Si le plan sécant était, par rapport au sommet S, du côté où n'est pas la base de la pyramide AS, on formerait des pyramides qui, en général, ne seraient pas semblables à la pyramide donnée, mais qui seraient semblables à une pyramide symétrique de celle-ci.

Théorème.

687. *Deux pyramides triangulaires qui ont un angle dièdre égal compris entre deux faces semblables et disposées dans le même ordre sont semblables.*

Soient les deux pyramides SABC, S′A′B′C′, dans lesquelles le dièdre SA est égal au dièdre S′A′, la face SAB semblable à

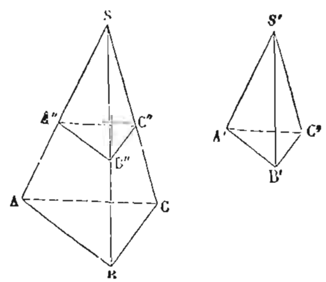


Fig. 512.

S′A′B′, et la face SAC semblable à S′A′C′, ces deux faces étant d'ailleurs disposées dans le même ordre (*fig.* 512) : ces deux pyramides sont semblables. En effet, transportons la pyramide S'A'B'C', et appliquons la face A'S'B' sur la face semblable ASB, S'A' sur SA″, et S'B' sur SB″. Le dièdre S'A' étant égal au dièdre SA, la face A'S'C' vient se placer dans le plan ASC, et comme l'angle A'S'C' est égal à l'angle ASC, l'arête S'C' se place en SC″ sur SC. La pyramide S'A'B'C' coïncide ainsi avec la pyramide SA″B″C″. Or, à cause de la similitude des faces SAB et S'A'B', l'angle SAB est égal à l'angle S'A'B' et par suite à l'angle SA″B″, et A″B″, est parallèle à AB ; de même, de la similitude des faces SAC, S'A'C', il résulte que A″C″ est parallèle à AC. Les côtés de l'angle C″A″B″ étant parallèles aux côtés de l'angle CAB, le plan C″A″B″ est parallèle au plan CAB, et la pyramide SA″B″C″, ou la pyramide égale S'A'B'C', est semblable à la pyramide SABC.

Théorème

688. *Deux polyèdres composés d'un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même façon sont semblables.*

Il importe d'abord d'expliquer ce que l'on entend par deux polyèdres P et P' composés de tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même façon.

Les tétraèdres qui composent un polyèdre sont tels que chacun a une face commune avec au moins l'un des autres, Soient, parmi les tétraèdres qui composent le polyèdre P, deux tétraèdres quelconques R et S ayant une face commune MNP (*fig.* 213), et soient, parmi les tétraèdres qui composent le polyèdre P', les tétraèdres R' et S' respectivemeut semblables aux tétraèdres R et S.

On entend que les tétraèdres R' et S' ont aussi une face commune M'N'P', que les faces MNP, M'N'P' sont homologues à la fois dans les tétraèdres R et R' et dans les tétraèdres S et S', et que si un côté de la face MNP et un côté de la face M'N'P' sont homolognes dans les tétraèdres R et R', ces côtés sont aussi homologues dans les tétraèdres S et S'. Enfin on

suppose que les tétraèdres R' et S' sont tous deux de part et d'autre de leur face commune, ou d'un même côté de cette

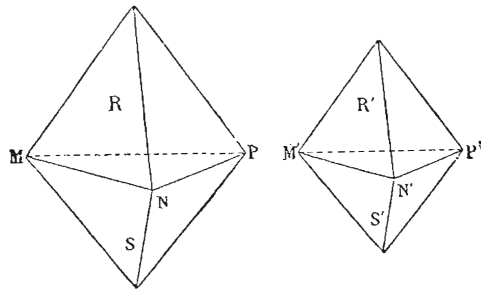


Fig. 513.

face, selon que les tétraèdres R et S sont de part et d'autre de leur face commune, ou d'un même côté de cette face.

Cela posé, soient R, S, T, U....., les tétraèdres qui composent le polyèdre P, chacun de ces tétraèdres ayant une face commune avec au moins un des autres ; nous supposerons, pour fixer les idées, que deux quelconques des tétraèdres qui ont une face commune sont de part et d'autre de cette face.

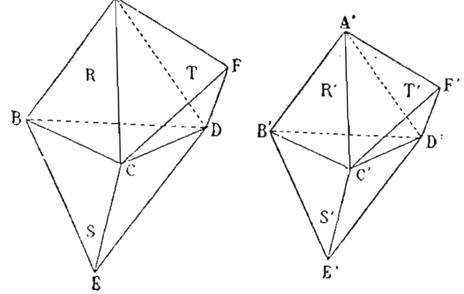


Fig. 514.

Soient R', S', T', U'...., les tétraèdres, semblables aux précédents et disposés de la même façon, qui composent le polyèdre P' (*fig.* 514). Considérons d'abord les polyèdres P_2,

P'_2 composés, le premier des deux tétraèdres R et S, le second des deux tétraèdres R′ et S′.

Ces deux polyèdres ont les angles solides égaux chacun à chacun. Pour les angles solides dont les sommets sont A et A′, comme pour ceux dont les sommets sont E et E′, cette égalité fait partie de l'hypothèse. Considérons un angle solide dont le sommet B appartient à la face commune des tétraèdres R et S, et l'angle solide correspondant de sommet B′; par hypothèse les angles trièdres B′D′C′A′, B′D′C′E′ situés de part et d'autre de leur face commune B′D′C′ sont respectivement égaux aux angles trièdres BDCA, BDCE, situés aussi de part et d'autre de leur face commune BDC; de plus, les angles dièdres des deux premiers trièdres qui ont pour arête B′C′ sont respectivement égaux aux dièdres des deux autres qui ont pour arête

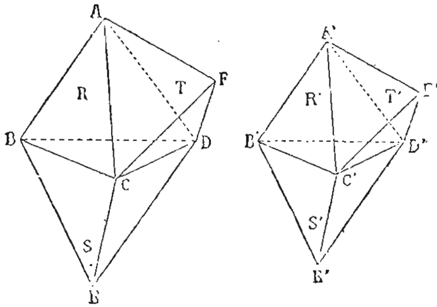


Fig. 514.

commune BC; donc, si l'on porte le trièdre B′C′D′A′ sur le trièdre BCDA, le trièdre B′C′D′E′ coïncide avec le trièdre égal BCDE, et par suite les angles solides B et B′ des polyèdres sont égaux.

Quant aux faces des deux polyèdres P_2 et P'_2, elles sont semblables, ou comme faces homologues de tétraèdes semblables, ou comme polygones composés de triangles semblables disposés de la même façon. Si, par exemple, la face ABC du trièdre R forme une face du polyèdre P_2, la face A′B′C′ du tétraèdre R′ forme une face semblable du polyèdre P'_2. Si la face ABC du tétraèdre R et la face BCE dn tétraèdre S sont dans un même plan et forment une face ABEC du polyèdre P_2,

les faces correspondantes A′B′C′, B′C′E′, des tétraèdres R′,S′, sont aussi dans un même plan, parce que les dièdres d'arête B′C′ sont respectivement égaux aux dièdres d'arête BC, et ont la même disposition par rapport à la face commune; dans ce plan, elles forment une face du polyèdre P'_2 semblable à la face ABEC du polyèdre P_2.

Donc, les polyèdres P_2, P'_2 sont semblables. La démonstration se ferait de la même façon si les tétraèdes R et S étaient du même côté par rapport à leur face commune.

On démontrera de la même façon la similitude des polyèdres P_3, P'_3, composés l'un avec le polyèdre P_2 et le tétraèdre T, l'autre avec le polyèdre P'_2 et le tétraèdre T′, et ainsi de suite. Donc les polyèdres donnés P et P′ sont semblables.

Théorème.

689. *Deux polyèdres semblables peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même façon.*

Soient deux polyèdres semblables ABCD... et A′B′C′D′... (*fig.* 515). Prenons deux sommets homologues A et A′ puis

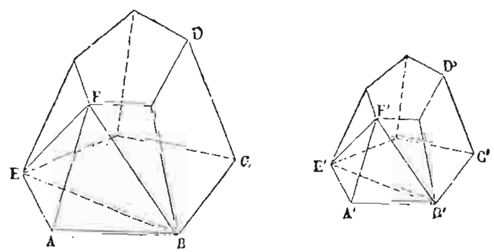


Fig. 515.

trois arêtes AB, AE, AF, de l'angle polyèdre qui a pour sommet A, et les arêtes homologues A′B′, A′E′, A′F′, du second polyèdre; les deux tétraèdres ABEF, A′B′E′F′, sont semblables, comme ayant un dièdre égal, AB = A′B′, compris entre deux faces semblables et disposées dans le même ordre, ABE semblable à A′B′E′, et ABF semblable à A′B′F′. Si nous détachons ces deux tétraèdres des deux polyèdres, les polyèdres restants sont encore semblables. En effet, la face nouvelle BEF est semblable à B'E'F', à cause de la similitude des tétraèdres enlevés ; les autres faces sont semblables, ou par hypothèse, ou parce qu'elles sont des portions correspondantes de polygones semblables décomposés en triangles semblables. Les angles solides homologues sont égaux, les uns C et C', D et D', etc., par hypothèse, les autres B et B', E et E', F et F' comme formés en détachant d'angles polyèdres égaux des angles polyèdres égaux disposés de la même façon. En opérant sur ces nouveaux polyèdres comme sur les premiers, on peut en détacher deux tétraèdres semblables, et les polyèdres restants sont encores semblables ; en continuant ainsi, on arrivera nécessairement après un nombre limité d'opérations, à deux tétraèdres semblables, et les polyèdres auront été décomposés en un même nombre de tétraèdres semblables chacun à chacun et disposés de la même façon.

690. Remarque. Le théorème 688 donne le moyen de construire un polyèdre semblable à un polyèdre donné et tel que le côté homologue à un côté déterminé du polyèdre donné ait une longueur donnée l. Le théorème 689 montre que le polyèdre ainsi construit est le seul polyèdre satisfaisant aux conditions énoncées.

En faisant croître l de zéro à l'infini on obtiendra tous les polyèdres semblables au polyèdre donné.

Théorème.

691. *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au rapport des cubes des arêtes homologues.*

Soient d'abord deux tétraèdres semblables SABC, S'A'B'C' dont les bases sont ABC et A'B'C', et les hauteurs SI et S'I' (*fig.* 516). En appelant V et V' les volumes de ces pyramides on a :

$$V = \frac{1}{3} ABC \times SI$$

$$V' = \frac{1}{3} A'B'C' \times S'I'$$

d'où

$$\frac{V}{V'} = \frac{ABC}{A'B'B'} \times \frac{SI}{S'I'};$$

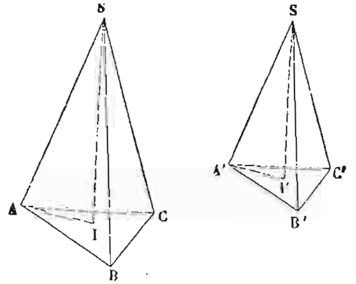


Fig. 516.

or :

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AS}^2}{\overline{S'A'}^2};$$

les triangles SAI, S'A'I' étant semblables, on a encore;

$$\frac{SI}{S'I'} = \frac{SA}{S'A'};$$

donc :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\overline{SA}^2}{\overline{S'A'}^2} \times \frac{SA}{S'A'} = \frac{\overline{SA}^3}{\overline{S'A'}^3}$$

Considérons maintenant deux polyèdres semblables (*fig.* 517). Ces polyèdres peuvent être décomposés en un même nombre

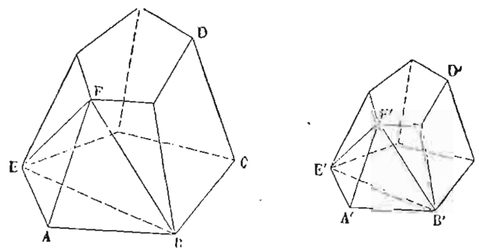


Fig. 517.

de tétraèdres semblables chacun à chacun ; soient T, T_1, T_2,.... les tétraèdres dont se compose le premier polyèdre, et T',

T'_1, T'_2,.... les tétraèdres respectivement semblables aux précédents dont se compose le second polyèdre. On a :

$$\frac{\overline{AB}^3}{\overline{A'B'}^3}=\frac{T}{T'}=\frac{T_1}{T'_1}=\frac{T_2}{T'_2}=\ldots$$
$$=\frac{T+T_1+T_2+\ldots.}{T'+T'_1+T'_2+\ldots}$$

Or $T+T_1+T_2+\ldots.$ est le volume du premier polyèdre, $T'+T'_1+T'_2+\ldots$ est le volume du second; donc le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au rapport des cubes des arêtes homologues.

Application. Si le rapport des arêtes homologues de deux polyèdres semblables est $\frac{1}{10}$, les rapport des volumes est $\frac{1}{1000}$. Les unités de longueur, *mètre*, *décimètre*, *centimètre*, *millimètre*, étant de dix en dix fois plus petites, les unités de volume correspondantes, c'est-à-dire le mètre cube, le décimètre cube, le centimètre cube, le millimètre cube, sont de 1000 en 1000 fois plus petites.

APPLICATION NUMÉRIQUE.

Soit une pyramide SABCD *dont la base* ABCD *contient* $3^{mq},2457$ *et dont la hauteur* SI *est égale à* $1^m,45$; *on la coupe par un plan* A'B'C'D' *parallèle au plan de la base, et tel, que le volume du tronc de pyramide* ABCDA'B'C'D' *équivaut à* 1 *mètre cube. On demande la distance du plan* A'B'C'D' *au sommet de la pyramide* (*fig.* 518).

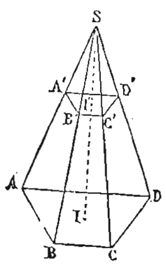


Fig. 518.

Appelons V le volume de la pyramide SABCD et h sa hauteur; appelons de même V' le volume de la pyramide SA'B'C'D' et h' sa hauteur. Les deux pyramides étant semblables, on a :

$$\frac{V'}{V}=\frac{h'^3}{h^3};$$

donc :

$$h'=h\sqrt[3]{\frac{V'}{V}}.$$

Dans le cas considéré,

$$V=\frac{1}{3}\times 3,2457\times 1,45=1,568755,$$

$$V'=V-1=0,568755;$$

et

$$h'=1^m,45\times\sqrt[3]{\frac{568755}{1568755}}.$$

On trouve, en effectuant les calculs indiqués, $h'=0^m,034$, à moins d'un millimètre.

§ VII. Figures homothétiques dans l'espace.

692. Définitions. Soient un point O et une figure F situés d'une manière quelconque dans l'espace; si, sur les droites OA, OB, OC, ... qui vont du point O aux différents points de la figure F, on prend les points A', B', C', ... tels que l'on ait :

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}\quad\ldots.=\lambda,$$

on forme une nouvelle figure que l'on dit *homothétique* à la première (*fig.* 519). Le point O est le *centre* d'homothétie; le rapport constant λ est le *rapport d'homothétie*. Comme dans la géométrie plane, les points correspondants A et A', B et B', etc., sont dits *homologues;* les droites OA et OA', OB et OB', OC et OC', etc., qui vont du centre d'homothétie à deux points homologues, sont des *rayons homologues*. La droite qui joint deux points quelconques de la figure F et la droite qui joint les points homologues de ceux-ci dans la figure F' sont dites *droites homologues*.

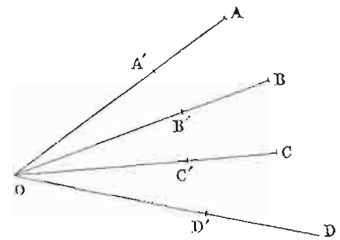


Fig. 519.

On dit encore que l'homothétie est *directe* ou *inverse*, suivan que dans les deux figures les rayons homologues sont de même sens ou de sens opposés.

693. La définition des figures homothétiques est la même pour les figures situées d'une façon quelconque dans l'espace que pour les figures situées dans un même plan. Mais il importe de remarquer que, tandis que, dans un même plan, deux figures inversement homothétiques dont le rapport est 1 sont égales, dans l'espace, deux figures inversement homothétiques dont le rapport est 1 sont deux figures *symétriques* par rapport au centre d'homothétie, et, par conséquent, en général, *ces deux figures ne sont pas superposables* (*fig.* 520).

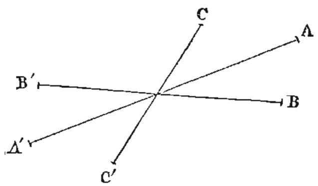


Fig. 520.

Théorème.

694. *La droite qui joint deux points d'un système de points et la droite qui joint les points homologues de ces points dans un système homothétique au premier, sont deux droites parallèles, et le rapport de leurs longueurs est égal au rapport d'homothétie des deux systèmes.*

Si une droite passe par le centre d'homothétie, toute droite homothétique à cette droite coïncide avec elle, quel que soit le rapport d'homothétie.

695. RÉCIPROQUEMENT, *si deux droites homothétiques coïncident, elles passent par le centre d'homothétie, à moins toutefois que le rapport d'homothétie ne soit égal à l'unité, auquel cas, deux droites directement homothétiques coïncident, quel que soit le centre d'homothétie.*

696. COROLLAIRE. I. *Une figure homothétique à une droite est une droite parallèle à la première.*

697. COROLLAIRE II. *L'angle de deux droites d'une figure est égal à l'angle des droites homologues d'une figure homothétique.*

698. COROLLAIRE III. *Les tangentes à deux courbes homothétiques en des points homologues sont parallèles.*

Ce théorème et ses corollaires ont été établis pour les figures planes n° 321 et suivantes; les démonstrations qui en ont été données s'appliquent sans modification aux figures de l'espace.

Théorème.

699. *Une figure homothétique à un plan est un plan parallèle à ce plan.*

En effet, à une droite AB (*fig.* 521) correspond une droite parallèle A'B'; si la droite AB tourne autour du point A et engendre un plan P, la droite A'B' tourne autour du point A' homologue du point A et engendre un plan P' parallèle au plan P.

700. REMARQUE. Si un plan contient le centre d'homothétie, tout plan homothétique à ce plan coïncide avec lui, quel que soit le rapport d'homothétie.

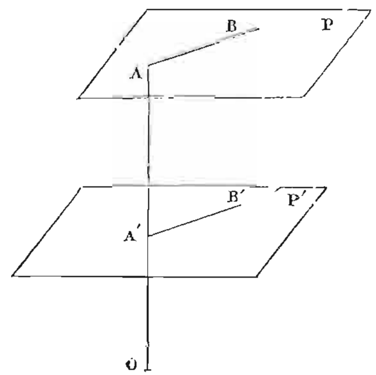


Fig. 521.

Réciproquement, si deux plans homothétiques coïncident, ils contiennent le centre d'homothétie, à moins toutefois que le rapport d'homothétie ne soit égal à l'unité, auquel cas, deux plans *directement* homothétiques coïncident, quel que soit le centre d'homothétie.

701. COROLLAIRE I. *Deux polygones homothétiques sont semblables.*

702. COROLLAIRE II. *Deux figures étant homothétiques, à un angle dièdre de l'une correspond un angle dièdre égal dans l'autre.*

703. COROLLAIRE. III. *Deux figures étant homothétiques, à un angle polyèdre de l'une correspond dans l'autre un angle polyèdre égal si l'homothétie est directe, un angle polyèdre symétrique si l'homothétie est inverse.*

704. COROLLAIRE III. *Une figure homothétique à un polyèdre est un polyèdre.*

Deux polyèdres directement homothétiques sont semblables.

Deux polyèdres inversement homothétiques en général, ne sont pas semblables; l'un est semblable au symétrique de l'autre.

Théorème.

705. *Si deux systèmes de points* A, B, C,.... *et* A′ B′ C′.... *sont tels que les droites menées d'un point* I *aux points* A, B, C,.... *du premier système, et les droites menées d'un point* I′ *aux points* A′ B′, C′.... *du second système, sont deux à deux parallèles et de même sens, ou deux à deux parallèles et de sens contraires, et si le rapport de deux quelconques de ces droites parallèles est constant, les deux systèmes sont homothétiques. L'homothétie est directe, ou inverse, selon que les droites parallèles sont de même sens, ou de sens contraires.*

Ce théorème a été démontré (326) dans le cas où tous les points considérés sont dans *un* même plan. La démonstration donnée dans ce cas particulier s'applique sans aucune modification au cas général.

Remarquons encore, comme dans le cas de deux figures situées dans un même plan, que si les droites I A, I′A′, étant de même sens, le rapport constant est égale à 1, les droites II′, AA′, BB′, etc., au lieu de concourir en un même point O, sont parallèles. Dans ce cas, les deux figures sont égales et placées de telle façon qu'à toute portion de droite de l'une correspond une portion de droite de l'autre égale, parallèle et de même sens. On dit encore que les deux figures sont directement homothétiques, mais que le centre d'homothétie est rejeté à l'infini. Le mode de construction d'une figure homothétique à une autre qui résulte de ce théorème est ainsi plus général que le premier.

Théorème.

706. *Si une figure* F *a un centre de symétrie* C, *toute figure* F′ *homothétique à la figure* F *a aussi un centre de symétrie* C′. *Les deux figures* F *et* F′ *sont à la fois directement et inversement homothétiques, et les deux rapports d'homothétie directe et inverse sont égaux. Si* O *et* O′ *sont les deux centres d'homothétie directe et inverse, on a la relation :*

$$\frac{OC'}{OC}=\frac{O'C'}{O'C}=\lambda$$

λ étant le rapport d'homothétie.

Soit, en effet (*fig.* 522), une figure F qui a un centre de symétrie C. Prenons la figure F′ directement homothétique à la figure F par rapport au centre O, λ étant le rapport d'homothétie. A un point quelconque M de la figure F correspond, dans cette même figure, un point M_1, symétrique de M par rapport au point C.

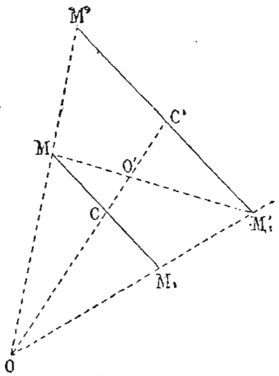


Fig. 522.

Les points de la figure F′ homologues des points M et M_1 sont deux points M′, M'_1, tels que l'on a :

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{OM'_1}{OM_1}=\lambda.$$

Les droites MM_1, $M'M'_1$ sont parallèles, et la droite OC qui, dans le triangle OMM_1, joint le sommet O au milieu de la base, rencontre $M'M'_1$ en son milieu C′. Ce point C′ de la droite OC est d'ailleurs indépendant de la position du point M sur la figure F. En effet, le rapport $\frac{OC'}{OC}$ est constant, car on a :

$$\frac{OC'}{OC}=\frac{OM'}{CM}=\lambda.$$

Donc les points de la figure F′ sont deux à deux symétriques par rapport au point C′, qui est ainsi centre de symétrie de cette figure.

Les droites $C'M'_1$, CM étant parallèles et de sens contraires, et le rapport $\frac{C'M'_1}{CM}$, étant constant et égal à λ, les figures F′ et F sont aussi inversement homothétiques, et le rapport d'homothétie inverse est λ, comme le rapport d'homothétie directe.

Enfin le centre d'homothétie inverse est le point de rencontre O′ de MM'_1 et de CC′, et on a :

$$\frac{O'C'}{O'C}=\frac{C'M'_1}{CM}=\lambda.$$

Comme le rapport $\frac{OC'}{OC}$ est aussi égal à λ, on a

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O'C'}{O'C}$$

et les points O et O' sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et C'.

Théorème.

707. *Deux polyèdres semblables peuvent toujours être placés de façon à être directement homothétiques.*

Soient d'abord deux tétraèdres semblables ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 523). Si l'on fait coïncider les angles solides égaux A

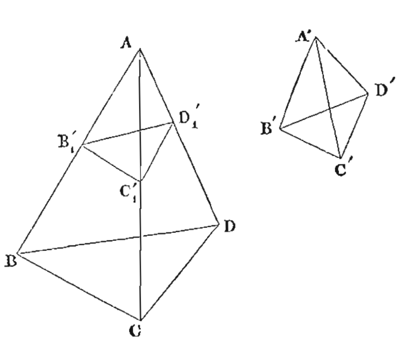


Fig. 523.

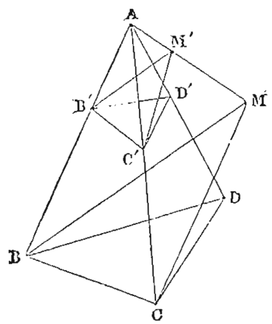


Fig. 524.

et A' les arêtes B'C', C'D', D'B' se placent parallèlement aux arêtes BC, CD et DB, et les deux tétraèdres sont directement homothétiques, A étant le centre d'homothétie.

Soient maintenant deux polyèdres semblables P et P'. On sait qu'ils peuvent être décomposés en un même nombre de tétraèdes semblables chacun à chacun et disposés de la même façon.

Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres semblables appartenant à ces deux polyèdres. Plaçons le second de ces deux polyèdres de façon que l'angle solide A'B'C'D' coïncide avec l'angle ABCD (*fig.* 524). Les deux polyèdres seront devenus directement homothétiques, et le point A sera le centre d'homothétie.

En effet, soit M un sommet quelconque du premier polyèdre, M' le sommet homologue du second. Il suffit de démontrer que l'arête AM' se place sur AM, et que $\frac{AM'}{AM} = \frac{AB'}{AB}$. Or les tétraèdres MABC et M'A'B'C' sont semblables et disposés de la même façon par rapport aux tétraèdres ABCD, A'B'C'D'; donc les angles solides ABCM, AB'C'M' sont égaux et disposés de la même façon par rapport à l'angle solide ABCD. Comme les arêtes AB' et AC' sont dirigées suivant les arêtes AB et AC, l'arête AM' est dirigée sur AM. Enfin les triangles ABM, AB'M' sont semblables; donc le rapport $\frac{AM'}{AM}$ est égal au rapport $\frac{AB'}{AB}$.

708. Définition des figures semblables. — Deux polyèdres directement homothétiques étant semblables (704), et deux polyèdres semblables pouvant toujours être placés de manière à être directement homothétiques, on appelle, en général, *figures semblables* deux figures telles, qu'elles peuvent être placées de manière à être directement homothétiques.

Théorème.

709. *Si deux figures* F', F'' *sont homothétiques à une figure* F, *elles sont homothétiques entre elles, et le rapport d'homothétie de* F' *à* F'' *est le quotient du rapport d'homothétie de* F' *à* F, *par le rapport d'homothétie de* F'' *à* F.

Les figures F' *et* F'' *sont directement, ou inversement homothétiques, selon qu'elles sont homothétiques de la même façon, ou de façons différentes, à la figure* F.

710. Corollaire I. *Si le rapport d'homothétie des figures* F' *et* F *est égal au rapport d'homothétie des figures* F'' *et* F, *les figures* F' *et* F'' *sont égales, ou symétriques, selon que les figures* F' *et* F'' *sont homothétiques de la même façon, ou de façons différentes, à la figure* F.

711. Corollaire II. *Avec un même point pris pour centre d'homothétie, et en faisant varier le rapport de zéro à l'infini, on peut construire des figures égales à toutes les figures directement, ou inversement, homothétiques à une même figure* F, et *par suite égales à toutes les figures semblables soit à la figure* F, *soit à la figure symétrique.*

Pour démontrer ces propositions, il suffit de répéter les raisonnements faits pour démontrer les propositions analogues en géométrie plane (n° 331 et suivants).

712. Corollaire III. *Si trois figures sont homothétiques, l'homothétie est directe ou dans les trois couples que forment ces figures prises deux à deux, ou dans un seulement.*

713. Corollaire VI. *Si quatre figures sont homothétiques deux à deux, l'homothétie est directe ou dans les six couples que forment ces figures prises deux à deux, ou dans trois, ou dans deux.*

Ces deux corollaires sont des conséquences de la deuxième partie du théorème.

Théorème.

714. *Lorsque trois figures sont deux à deux homothétiques, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite. Cette droite est appelée axe d'homothétie.*

Même démonstration qu'en géométrie plane (n° 334).

715. Corollaire. *Lorsque trois figures à centre sont homothétiques, on sait qu'elles sont à la fois directement et inversement homothétiques. Les trois centres d'homothétie directe sont en ligne droite, et deux centres d'homothétie inverse sont en ligne droite avec le centre d'homothétie directe qui correspond au troisième centre d'homothétie inverse.*

Pour le démontrer, il suffit de répéter le raisonnement fait (n° 335) dans le cas particulier où les trois figures sont trois cercles situés dans un même plan.

Les trois figures ont ainsi quatre axes d'homothétie, celui qui contient les trois centres d'homothétie directe est appelé *axe d'homothétie directe*. Chacun des trois autres est appelé *axe d'homothétie inverse*.

Théorème.

716. *Si quatre figures sont deux à deux homothétiques, les six centres d'homothétie de ces figures, prises deux à deux, sont dans un même plan. Ce plan est appelé plan d'homothétie des quatre figures.*

Soient F_1, F_2, F_3, F_4, quatre figures homothétiques; appelons

$$O_{1\cdot2} \quad O_{1\cdot3} \quad O_{1\cdot4} \quad O_{2\cdot3} \quad O_{2\cdot4} \quad O_{3\cdot4}$$

les centres d'homothétie des couples

$$(F_1,F_2)\ (F_1,F_3)\ (F_1,F_4)\ (F_2,F_3)\ (F_2,F_4)\ (F_3,F_4).$$

Soit P le plan des centres $O_{1\cdot2}$, $O_{1\cdot3}$, $O_{1\cdot4}$.

Si nous considérons ce plan comme appartenant à la figure F_2, il a pour homologue dans la figure F_1 le plan P lui-même, puisqu'il contient le centre d'homothétie $O_{1\cdot2}$ des figures F_1 et F_2; de même si nous considérons le plan P comme appartenant à la figure F_3, il a encore pour homologue dans la figure F_1 le plan P lui-même, puisqu'il contient le centre d'homothétie $O_{1\cdot3}$ des figures F_1 et F_3.

D'après cela, le plan P est aussi homologue à lui-même dans les deux figures F_2 et F_3; donc il contient le centre d'homothétie $O_{2\cdot3}$ de ces deux figures. On démontrerait de même qu'il contient les centres d'homothétie $O_{2\cdot4}$, $O_{3\cdot4}$ des figures F_2 et F_4, F_3 et F_4.

717. Remarque I. En laissant successivement de côté chacune des quatre figures, on forme quatre groupes différents de ces figures prises trois à trois. Dans chacun de ces groupes les trois centres d'homothétie sont sur un même axe d'homothétie. Donc les quatre figures ont quatre axes d'homothétie. Ces axes sont les côtés d'un quadrilatère complet, dont les six centres d'homothétie sont les sommets (*fig.* 526).

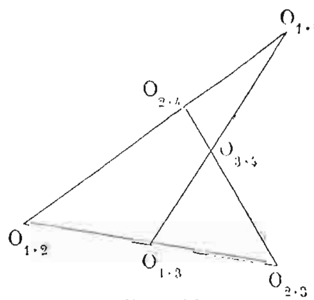


Fig. 255.

Chaque centre appartient à deux axes différents.

718. Remarque II. Si l'homothétie est directe dans les six couples que forment les quatre figures prises deux à deux, les axes d'homothétie sont tous les quatre des axes d'homothétie directe, et le plan qui les contient est appelé plan *d'homothétie directe*.

Si l'homothétie est directe dans trois couples et inverse dans les autres, un des axes d'homothétie est axe d'homothétie directe, les trois autres sont des axes d'homothétie inverse, et le plan est dit *plan d'homothétie directe et inverse*.

Si l'homothétie est directe dans deux couples seulement, inverse dans les autres, les quatre axes d'homothétie sont axes d'homothétie inverse, et leur plan est dit *plan d'homothétie inverse*.

719. REMARQUE III. Lorsque quatre figures à centre sont deux à deux homothétiques, chaque groupe de trois figures a quatre axes d'homothétie, un d'homothétie directe, trois d'homothétie inverse. Donc les quatre figures ont seize axes d'homothétie, dont quatre d'homothétie directe et douze d'homothétie inverse. Ces seize axes d'homothétie sont situés quatre par quatre dans huit plans d'homothétie distincts. En effet, les quatre figures qui sont à la fois directement et inversement homothétiques peuvent être considérées comme formant :

1° Un système de six couples où l'homothétie est directe;

2° Quatre systèmes différents comprenant chacun trois couples où l'homothétie est directe et trois couples où elle est inverse ;

3° Trois systèmes différents comprenant chacun deux couples où l'homothétie est directe, et quatre couples où elle est inverse.

Les quatre axes du premier système sont dans un *plan d'homothétie directe*.

Les quatre axes de chacun des quatre systèmes suivants sont dans un *plan d'homothétie directe et inverse*.

Les quatre axes de chacun des trois derniers systèmes sont dans un *plan d'homothétie inverse*.

De sorte que si quatre figures à centres sont deux à deux homothétiques, il y a :

1° Un plan *d'homothétie directe* contenant les quatre axes d'homothétie directe ;

2° Quatre *plans d'homothétie directe et inverse*, contenant chacun un axe d'homothétie directe et les trois axes d'homothétie inverse. Chacun des axes d'homothétie inverse est déterminé par un centre de l'axe d'homothétie directe et par les centres d'homothétie inverse qui correspondent aux deux autres centres du même axe d'homothétie directe;

3° Trois *plans d'homothétie inverse*, contenant chacun quatre axes d'homothétie inverse. Dans chacun de ces plans deux axes passent par le centre d'homothétie directe de deux des figures, et les deux autres par le centre d'homothétie directe des deux autres figures

EXERCICES SUR LE LIVRE VI.

1. On donne trois droites A,B,C, situées d'une façon quelconque dans l'espace; construire un parallélépipède tel qu'il ait une arête sur chacune de ces droites.

2. On donne trois droites A,B,C, situées d'une façon quelconque dans l'espace et deux longueurs *a* et *b*; construire un parallélépipède tel qu'il ait une arête de longueur *a* située sur la droite A, une arête de longueur *b* située sur la droite B et deux arêtes parallèles à la droite C.

3. On donne deux droites A,B, non situées dans un même plan, et on demande :

1° Le lieu des centres des parallélépipèdes qui ont une arête sur chacune de ces deux droites;

° Le lieu des centres des parallélépipèdes qui ayant une arête sur la droite A, une arête sur la droite B, ont en outre deux arêtes parallèles à une troisième droite C, et dont les bases qui ont l'une une arête sur A, l'autre une arête sur B, sont des losanges.

4. Si, dans un parallélépipède, les diagonales sont égales, le parallélépipède est rectangle.

5. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se coupent mutuellement en deux parties égales.

6. Si on mène à chaque arête d'un tétraèdre, par son milieu, un plan perpendiculaire, on obtient six plans qui passent par un même point.

7. Les six plans bissecteurs des angles dièdres d'un tétraèdre passent par un même point.

8. Si l'on joint chaque sommet d'un tétraèdre au point de concours des médianes de la face opposée, on obtient quatre droites qui se coupent en un même point. Ce point partage chacune de ces droites en deux parties qui sont entre elles dans le rapport de 3 à 1.

9. Les perpendiculaires menées aux quatre faces d'un tétraèdre par les centres des cercles circonscrits à chacune de ces faces se coupent en un même point.

10. Par un point pris à l'intérieur de la base d'une pyramide régulière on élève une perpendiculaire au plan de cette base; cette perpendiculaire rencontre toutes les faces latérales de la pyramide prolongées au besoin. Démontrer que la somme des distances de ces points de rencontre au plan de la base est constante.

11. Étant donné un tétraèdre dont toutes les arêtes sont égales, on abaisse de l'un des sommets une perpendidulaire sur la face opposée, et on joint le milieu de cette perpendiculaire aux trois autres sommets. Démontrer que les trois lignes de jonction ainsi obtenue sont les arêtes d'un trièdre trirectangle. (Concours général, Seconde, 1870.)

12. Un tétraèdre SABC est coupé par un plan mobile parallèle à ABC; la section est un triangle A'B'C'; on demande le lieu du point de concours P des plans AB'C', BA'C', CA'B'. (Concours général, Philosophie, 1878.)

13. On a deux pyramides égales, à bases carrées et dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux. On les assemble en faisant coïncider leurs bases, et l'on coupe le polyèdre qui résulte de cet assemblage par un plan mené par le milieu d'une arête parallèlement à l'une des faces qui aboutissent à l'une ou à l'autre extrémité de cette arête. On demande la forme de la section plane ainsi obtenue. (Concours général, Seconde, 1866.)

14. Le plan bissecteur d'un dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée à celle du dièdre en deux segments proportionnels aux aires des faces adjacentes du dièdre.

15. Si l'on coupe un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées de ce tétraèdre, la section est un parallélogramme. Déterminer la position du plan sécant de façon que l'aire de la section soit la plus grande possible.

16. Par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre on fait passer un plan; démontrer que l'aire de la section faite par ce plan dans le tétraèdre est la plus grande possible quand ce plan est parallèle aux deux autres arêtes du tétraèdre.

17. Couper un cube par un plan tel que la section soit un hexagone régulier.

18. Calculer le volume d'un tétraèdre SABC dans lequel les trois arêtes SA, SB, SC, sont égales à une même longueur, l, et les arêtes BC, AC, AB, respectivement égales aux longueurs a, b, c.

19. Calculer la surface latérale et le volume d'un octaèdre qui a pour sommets les centres des faces d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont a, b, c.

20. On donne un angle trièdre, et, dans l'une des faces de cet angle trièdre, une droite; mener par cette droite un plan qui détermine avec l'angle trièdre un tétraèdre de volume donné.

21. Si l'angle trièdre S du tétraèdre SABC est égal à l'angle trièdre S' du tétraèdre S'A'B'C', les volumes des deux tétraèdres sont proportionnels aux produits $SA \times SB \times SC$, $S'A' \times S'B' \times S'C'$.

22. Si dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont rectangulaires, dans deux des trois couples d'arêtes opposées, les deux arêtes opposées sont aussi rectangulaires dans le troisième couple.

23. Si dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont rectangulaires les quatre hauteurs du tétraèdre et les perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont six droites qui se coupent en un même point.

24. On donne trois droites parallèles AA', BB', CC'; sur la première, on porte une longueur donnée MN, sur la seconde, on prend un point quelconque P, sur la troisième un point quelconque Q. Démontrer que le volume du tétraèdre qui a pour sommets les points M, N, P, Q, reste constant quand on déplace arbitrairement la longueur MN et les points P et Q sur les parallèles données.

25. On donne deux droites AB et CD non situées dans un même plan; sur la première, on porte une longueur donnée MN; sur la seconde, on porte une autre longueur donnée PQ. Démontrer que le volume du tétraèdre MNPQ reste constant quand on déplace arbitrairement les longueurs MN et PQ sur les droites données.

26. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces ASB, ASC, et BSC, prises pour bases, trois prismes triangulaires quelconques. Soit O le point de rencontre des plans des bases supérieures de ces trois prismes; sur la quatrième face ABC, on construit un quatrième prisme triangulaire, dont les arêtes latérales sont égales et parallèles à la droite qui joint le point O au point S. On demande de démontrer que le quatrième prisme est équivalent à la somme des trois premiers. (Concours général.)

27. Soit un tétraèdre OABC tel que les trois angles AOB, BOC, AOC, sont droits; démontrer :

1° Que l'aire du triangle AOB est moyenne proportionnelle entre l'aire du triangle ABC et l'aire de la projection du triangle AOB sur le plan ABC;

2° Que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces;

3° Que la somme des carrés des inverses des longueurs OA, OB, OC est égale au carré de l'inverse de la distance du point O au plan ABC

28. Le plan conduit par une arête d'un tétraèdre et par le milieu de l'arête opposée partage le tétraèdre en deux tétraèdres équivalents.

29. Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre partage ce tétraèdre en deux volumes équivalents.

30. Le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de l'aire d'une face latérale par la distance du plan de cette face à l'arête opposée.

31. Le volume d'un tétraèdre équivaut au sixième du volume d'un prisme qui aurait pour base un parallélogramme dont les côtés sont égaux et parallèles à deux arêtes opposées du tétraèdre, et pour hauteur la plus courte distance de ces arêtes.

32. On donne deux cercles situés dans des plans parallèles, et tels que la droite qui passe par les centres des cercles est perpendiculaire à leurs plans. Soit AB un diamètre du premier, soit A'B' un diamètre du second. Comment doivent être dirigés ces diamètres pour que le volume du tétraèdre ABA'B' soit le plus grand possible?

33. Soit un angle trièdre tirectangle SABC : on prend sur les arêtes de ce trièdre les distances SA $= a$, SB $= b$, SC $= c$, et, par les trois points A,B,C, on fait passer un plan. On demande de calculer le volume de la pyramide SABC ainsi formée.

34. Par chaque sommet d'un tétraèdre on mène un plan parallèle à la face opposée, on forme ainsi un nouveau tétraèdre ; on demande le rapport des surfaces, et le rapport des volumes des deux tétraèdres.

35. Une pyramide dont la hauteur est $1^m,25$ a pour base un hexagone régulier dont le côté est $0^m,45$; on mène un plan parallèle à la base tel que la section faite par ce plan dans la pyramide ait une aire égale à 525 centimètres carrés ; déterminer la distance de ce plan au sommet de la pyramide.

36. Une pyramide dont la hauteur est $1^m,74$, a pour base un hexagone régulier dont le côté est $0^m,65$; déterminer la distance au sommet d'un plan parallèle à la base tel que le volume du tronc de pyramide ainsi formé soit équivalent à 184 décimètres cubes.

37. Un tronc de pyramide dont le volume est V, et dont la hauteur est h, a pour bases deux hexagones réguliers; le côté de l'un des hexagones est a, calculer le côté de l'autre. — Appliquer, en supposant $V = 1645$ centimètres cubes, $h = 43$ centimètres, et $a = 34$ centimètres.

38. Un tronc de pyramide dont le volume est V a pour bases deux hexagones réguliers dont les côtés sont a et b; calculer la hauteur. — Appliquer, en supposant $V = 1465$ centimètres cubes, $a = 23$ centimètres, et $b = 17$ centimètres.

39. Étant donné un tronc de pyramide à bases triangulaires, mener, par l'une des arêtes de l'une des bases, un plan qui partage le tronc de pyramide en deux parties équivalentes.

40. Par une arête de la petite base d'un tronc de pyramide à bases carrées, mener un plan qui partage le volume du tronc en deux parties équivalentees.

41. Mener par une des arêtes latérales d'un tronc de prisme triangulaire un plan qui partage son volume en deux parties équivalentes. (Concours général, Seconde, 1868.)

42. Déterminer dans l'intérieur d'un tétraèdre un point tel que les quatre tétraèdres qui ont pour sommet commun ce point, et pour bases respectives les faces du tétraèdre donné, soient équivalents.

43. Démontrer que le volume d'un tronc de prisme dont les bases sont des parallélogrammes a pour mesure le produit de la section droite par le quart de la somme des arêtes latérales.

COMPLÉMENT DU LIVRE VI.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES POLYÈDRES.

Théorème d'Euler.

720. *Dans tout polyèdre convexe, le nombre* A *des arêtes, le nombre* S *des sommets et le nombre* F *des faces sont liés par la relation*

$$A + 2 = S + F.$$

Considérons d'abord, au lieu d'une surface polyédrale *fermée*, une surface polyédrale *ouverte*, limitée par une ligne polygonale plane ou gauche. Nous montrerons que si l'on désigne par A′, S′, F′ les nombres d'arêtes, de sommets, de faces de cette surface ouverte, on a entre ces trois nombres la relation (α) :

$$(\alpha) \qquad A' + 1 = S' + F'.$$

Cette dernière relation est évidemment vérifiée dans le cas où la surface considérée n'a qu'une seule face, car alors $F' = 1$, et $A' = S'$. Pour démontrer qu'elle est vérifiée, quel que soit F′, il suffira de faire voir que si elle est vraie pour une surface polyédrale ouverte P′, d'un certain nombre de faces, elle est encore vraie pour une nouvelle surface ouverte P″ formée avec la première en y ajoutant une face. Or, si à la surface ouverte P′, pour laquelle la relation (α) est supposée vérifiée, on ajoute une face de n côtés qui ne ferme pas la surface polyédrale, cette face a avec la surface polyédrale un nombre de côtés communs inférieur à n ; soit p ce nombre; $p+1$ sommets de la face nouvelle appartiennent à la surface P′; de sorte que lorsqu'on passe de la surface P′ à la surface P″, le nombre A′ des arêtes augmente de $n-p$, le nombre S′ des sommets augmente de $n-p-1$, et le nombre F′ des faces augmente d'une unité. Il en résulte que, dans ces conditions, les deux membres de la relation (α) augmentent de $n-p$ unités, et, par conséquent, la relation subsiste. Donc cette relation est vérifiée pour toute surface polyédrale ouverte.

Cela posé, si la surface polyédrale ouverte P′ est celle qu'on obtient en supprimant une des faces du polyèdre convexe donné P, pour cette surface P′, on a

$$A' + 1 = S' + F';$$

or, dans ce cas,

$$A' = A, \quad S' = S, \quad F' = F - 1,$$

donc, entre A, S, F, on a la relation

$$(1) \qquad A+2=S+F.$$

721. Corollaire I. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, la somme des angles des faces d'un polyèdre convexe est égale à* $4(S-2)$.

En effet, soient $n_1, n_2, n_3, \ldots n_F$ les nombres des côtés des F faces du polyèdre; la somme des angles de ces faces est

$$2(n_1-2)+2(n_2-2)+2(n_3-2)+\ldots\ldots+2(n_F-2),$$

ou

$$2(n_1+n_2+n_3\ldots\ldots+n_F)-4F.$$

Or, la somme $n_1+n_2\ldots\ldots+n_F$ du nombre des côtés de toutes les faces est le double du nombre des arêtes, ou 2A, parce que chaque arête est un côté de deux faces distinctes. Donc la somme des angles des faces du polyèdre est

$$4A-4F$$

ou, en vertu du théorème d'Euler,

$$4(S-2).$$

722. Remarque. Si, dans un polyèdre, on désigne par f_p le nombre des faces de p côtés, et par s_p le nombre des sommets d'où partent p arêtes, on a évidemment les quatre relations suivantes :

$$(2) \qquad F=f_3+f_4+f_5+f_6+\ldots$$
$$(3) \qquad 2A=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6\ldots$$
$$(4) \qquad S=s_3+s_4+s_5+s_6+\ldots$$
$$(5) \qquad 2A=3s_3+4s_4+5s_5+6s_6+\ldots$$

En éliminant A et F entre les relations (1), (2), (3), on obtient la relation (6) :

$$(6) \qquad 2S=4+f_3+2f_4+3f_5\ldots,$$

et, en éliminant A et S entre les relations (1), (4), (5), on obtient la relation (7) :

$$(7) \qquad 2F=4+s_3+2s_4+3s_5+\ldots$$

La comparaison des relations (4), (5) montre que dans tout polyèdre convexe on a :

$$(8) \qquad 2A \geqslant 3S,$$

et la comparaison des relations (2) et (3) montre que dans tout polyèdre convexe on a :

$$(9) \qquad 2A \geqslant 3F.$$

Ces inégalités sont d'ailleurs évidentes à priori, attendu que chaque face a au moins trois côtés, et chaque angle polyèdre au moins trois arêtes.

Ces relations et les inégalités (8) et (9) conduisent aux corollaires suivants :

723. Corollaire II. *Dans un polyèdre convexe, il y a toujours : 1° au moins une face dont le nombre des côtés ne surpasse pas 5; 2° au moins un angle polyèdre dont le nombre des arêtes ne surpasse pas 5.*

1° En effet, de l'inégalité (8)

$$2A \geqslant 3S,$$

et des égalités (3) et (6)

$$(3) \qquad 2A=3f_3+4f_4+5f_5+6f_6+\ldots$$
$$(6) \qquad 2S=4+f_3+2f_4+3f_5+\ldots$$

on déduit :

$$6f_3+8f_4+10f_5+12f_6+\ldots \geqslant 12+3f_3+6f_4+9f_5+12f_6+\ldots,$$

ou, en réduisant,

$$3f_3+2f_4+f_5 \geqslant 12+f_7+2f_8+\ldots$$

Le nombre $3f_3+2f_4+f_5$ devant être supérieur ou égal à 12, l'un au moins des nombres f_3, f_4, f_5, n'est pas nul. Donc, dans tout polyèdre convexe, il y a au moins une face dont le nombre des côtés ne surpasse pas 5.

2° De l'inégalité (9)

$$(9) \qquad 2A \geqslant 3F,$$

et des égalités (5) et (7)

$$(5) \qquad 2A=3s_3+4s_4+5s_5+\ldots$$
$$(7) \qquad 2F=4+s_3+2s_4+3s_5+\ldots$$

on déduit :

$$6s_3+8s_4+10s_5+12s_6\ldots \geqslant 12+3s_3+6s_4+9s_5+12s_6+\ldots,$$

ou, en réduisant :

$$3s_3+2s_4+s_5 \geqslant 12+s_7+2s_8+\ldots$$

Le nombre $3s_3+2s_4+s_5$ devant être supérieur ou égal à 12, l'un au moins des trois nombres s_3, s_4, s_5, n'est pas nul. Donc, dans tout polyèdre convexe, il y a au moins un angle polyèdre dont le nombre des arêtes ne surpasse pas 5.

724. Corollaire III. *Dans tout polyèdre convexe, il y a au moins ou une face triangulaire, ou un angle trièdre.*

En effet, de la relation (1) que l'on peut écrire :

$$(1) \qquad 4A + 8 = 4S + 4F$$

et des relations (3), (5), (6), (7)

$$(3) \qquad 2A = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$$
$$(5) \qquad 2A = 3s_3 + 4s_4 + 5s_5 + \ldots$$
$$(6) \qquad 2S = 4 + f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots$$
$$(7) \qquad 2F = 4 + s_3 + 2s_4 + 3s_5 + \ldots$$

on déduit, en remplaçant 4A par la somme des valeurs de 2A données par les relations (3) et (5) :

$$8 + 3(f_3 + s_3) + 4(f_4 + s_4) + 5(f_5 + s_5) + \ldots$$
$$= 16 + 2(f_3 + s_3) + 4(f_4 + s_4) + 6(f_5 + s_5) + \ldots$$

ou, en réduisant,

$$f_3 + s_3 = 8 + f_5 + s_5 + 2(f_6 + s_6) + \ldots$$

Le nombre $f_3 + s_3$ devant être supérieur ou égal à 8, l'un au moins des nombres f_3 et s_3 n'est pas nul.

Théorème.

725. *Il ne peut y avoir plus de cinq espèces de polyèdres tels que toutes les faces du polyèdre aient un même nombre de côtés, et tous les angles polyèdres un même nombre d'arêtes.*

En effet, imaginons un polyèdre de cette espèce ; soit n le nombre des côtés de chaque face, soit p le nombre des arêtes de chaque angle polyèdre ; on a, en conservant les mêmes notations que dans le théorème d'Euler :

$$2A = pS = nF$$

et on sait que les nombres A, S, F, sont liés par la relation

$$A + 2 = S + F.$$

Si, entre ces trois relations, on élimine A et S, on a :

$$F = \frac{4p}{2(n+p) - np}.$$

Le nombre F est nécessairement entier et positif. Or, le nombre n ne peut être inférieur à 3, et on sait (723) qu'il ne peut surpasser 5 ; on ne doit donc essayer de lui donner que les valeurs 3, 4 et 5.

1° Si l'on fait $n = 3$, on a :

$$F = \frac{4p}{6 - p}$$

Cette formule montre que le nombre p ne peut surpasser 5, ce que l'on savait déjà (723) ; comme il ne peut être inférieur à 3, on ne peut essayer pour le nombre p que les valeurs 3, 4 et 5.

pour.... $p = 3$ on a.... $F = 4$
.... $p = 4$ .... $F = 8$
.... $p = 5$ .... $F = 20$

Ce qui donne, pour $n = 3$, trois espèces non impossibles *à priori* de polyèdres de la nature de ceux dont il est ici question, savoir le polyèdre à 4 faces ou *tétraèdre*, le polyèdre à 8 faces ou l'*octaèdre*, et le polyèdre à 20 faces ou l'*icosaèdre*.

2° Si l'on fait $n = 4$ on a :

$$F = \frac{2p}{4 - p}.$$

Dans ce cas, p ne peut prendre que la valeur 3 ; et pour $p = 3$, on a :

$$F = 6 ;$$

on n'a donc, dans ce cas, qu'une espèce de polyèdre non impossible *à priori*, le polyèdre à 6 faces, c'est-à-dire l'*hexaèdre*.

3° Si l'on fait $n = 5$, on a :

$$F = \frac{4p}{10 - 3p} ;$$

la seule valeur que l'on puisse donner à p est 3, et pour cette valeur, on a $F = 12$.

On n'a donc, dans ce cas, qu'une espèce de polyèdre non impossible *à priori*, le polyèdre à 12 faces, que l'on nomme *dodécaèdre*.

Le tableau suivant résume les solutions non impossibles, et fait connaître les valeurs correspondantes des nombres n, p, F, S, A.

	p	F	S	A	NOM DU POLYÈDRE.
3	3	4	4	6	Tétraèdre.
3	4	8	6	12	Octaèdre.
3	5	20	12	30	Icosaèdre.
4	3	6	8	12	Hexaèdre.
5	3	12	20	30	Dodécaèdre.

726. Définition. On appelle *polyèdre régulier* un polyèdre dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux entre eux, et dont tous les angles solides sont égaux entre eux.

Il résulte du théorème précédent qu'il ne peut y avoir plus de *cinq* espèces de polyèdres réguliers. Mais il y a lieu de démontrer qu'il y en a réellement cinq espèces, car le fait n'est pas évident *à priori*.

Pour construire un *tétraèdre* régulier, on prend un triangle équilatéral ABC (*fig.* 526), et, par le centre O de ce triangle, on mène la droite OD perpendiculaire au plan du triangle; puis, sur cette droite, on prend un point D tel que la longueur DA soit égale à AB, ce qui est possible, puisque OA est moindre que AB. Le tétraèdre DABC est régulier. En effet, ses faces sont des triangles équilatéraux égaux, et deux quelconques de ses angles solides sont égaux comme ayant leur faces égales, chacune à chacune, et de plus égales entre elles.

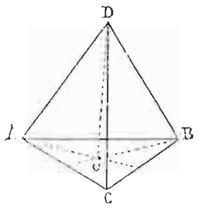


Fig. 526.

L'*hexaèdre* régulier n'est autre chose que le cube que l'on sait déjà construire.

Pour construire un *octaèdre* régulier, on prend un carré ABCD, (*fig.* 527), et par le centre O de ce carré on mène la perpendiculaire au plan de ce carré; sur cette droite, on prend, de part et d'autre du point O, les longueurs OE, OF égales à OA. Le solide EABCDF est un octaèdre régulier. On voit immédiatement que les faces sont huit triangles équilatéraux égaux. Comparons deux quelconques des angles solides, par exemple ceux qui ont pour sommets, l'un le point A, l'autre le point E; ils sont égaux. En effet, la figure EBFD est un carré égal au carré ABCD, et les pyramides régulières AEBFD, EABCD, qui ont des bases égales et des hauteurs égales sont superposables; donc les angles solides A et E sont égaux. Donc le solide est un octaèdre régulier.

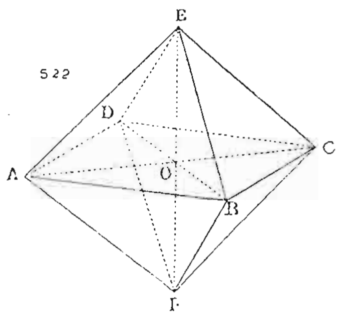


Fig. 527.

On peut aussi construire directement un *dodécaèdre* régulier et un *icosaèdre* régulier connaissant la longueur d'une arête; mais la possibilité de chacune de ces constructions est un peu plus difficile à établir que celle des précédentes. Nous reprendrons, dans le complément du livre VII, la question de la construction des polyèdres réguliers en la rattachant à l'étude des figures tracées sur la sphère, et nous donnerons alors un autre mode de construction applicable à chacune des cinq espèces de polyèdres réguliers.

Théorème de Legendre.

727. *Le nombre des données nécessaires pour déterminer en grandeur un polyèdre convexe, lorsqu'on connaît le nombre de ses faces, le nombre des côtés de chaque face, et de quelle façon ces faces sont assemblées autour de chaque sommet, est égal au nombre des arêtes de ce polyèdre.*

Supposons d'abord que l'on ne connaisse que le nombre S des sommets du polyèdre.

Si l'on considère les S sommets comme formant un système de S points; on pourra déterminer, en grandeur, le système de ces S points au moyen de 3S — 6 quantités données. Prenons en effet au hasard trois de ces points, le triangle formé par ces trois points pourra être déterminé en grandeur au moyen de trois données. Cela fait, considérons ce triangle comme fixé dans l'espace; pour déterminer la position de chacun des S — 3 autres sommets, il faudra employer trois données : on pourra, par exemple, donner les distances de chacun de ces sommets aux sommets du triangle déjà fixé. Nous aurons ainsi employé un nombre de données égal à

$$3 + 3\,(S - 3)$$

ou à

$$3\,S - 6.$$

Mais si, comme le suppose l'énoncé du théorème, on connaît le nombre des faces du polyèdre, le nombre des côtés de chaque face, et la façon dont les faces sont assemblées autour de chaque sommet, le nombre des données nécessaires pour déterminer la grandeur du polyèdre se réduit. En effet, si une face a plus de trois sommets, après que l'on a fixé la position de trois sommets de cette face, le plan de cette face se trouve fixé, et dès lors, pour déterminer la position de chacun des autres sommets de cette face, il suffit de deux données au lieu de trois. Il y aura donc, pour fixer les n sommets d'une face, une réduction de n — 3 unités dans le nombre des données nécessaires. Cela posé, soient

$$n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots\ n_F$$

les nombres des côtés des F faces; le nombre des données nécessaires sera réduit d'un nombre d'unités égal à

$$n_1 - 3 + n_2 - 3 + \ldots + n_F - 3,$$

ou à

$$2A - 3F.$$

Donc, au lieu de 3S — 6 données, il en faudra seulement

$$3S - 6 - 2A + 3F,$$

ou

$$3\,(S + F) - 6 - 2A.$$

Or, d'après le théorème d'Euler, S + F est égal à A + 2; donc enfin le nombre des données nécessaire et suffisant est

$$3A + 6 - 6 - 2A = A.$$

728. Remarque. Un polyèdre dont le nombre des arêtes est A pourra toujours être déterminé à l'aide d'un nombre A de grandeurs données, pourvu que ces grandeurs soient convenablement choisies, et que l'on donne en outre, dans chaque cas, relativement à la disposition des éléments du polyèdre, les indications nécessaires pour éviter toute ambiguïté. Par exemple, pour déterminer un tétraèdre, on pourra donner les longueurs des six arêtes; toutefois, pour que l'on ne puisse, avec ces six longueurs données, construire qu'un tétraèdre égal au tétraèdre proposé, on devra distinguer les quatre sommets du tétraèdre par des lettres différentes, A,B,C,D, donner séparément la longueur AB, la longueur AC, etc., puis indiquer si, pour un observateur placé dans le tétraèdre, les pieds contre la face ABC, et à l'intérieur du triangle ABC, le mouvement d'un mobile qui va de A en B sur AB paraît se faire de *gauche à droite*, ou de *droite à gauche*. On pourrait de même, avec des indications complémentaires analogues, déterminer un hexaèdre à faces triangulaires en donnant les longueurs de ses 9 arêtes.

Mais il est facile de comprendre qu'on ne peut pas toujours déterminer, en grandeur, un polyèdre d'espèce quelconque, même avec des indications complémentaires, en donnant les longueurs de toutes ses arêtes. Si, par exemple, le polyèdre était un prisme dont la base a n côtés, le nombre total des arêtes serait $3n$, savoir : n arêtes appartenant à l'une des bases, n arêtes égales à celles-ci appartenant à l'autre base, et n arêtes latérales égales entre elles. Le polyèdre ne serait pas déterminé par les longueurs de ces arêtes. En effet on pourrait d'abord, sans changer les longueurs des arêtes, faire varier $n-3$ des éléments du polygone de base, attendu qu'il faut $2n-3$ éléments pour déterminer ce polygone de n côtés, et qu'on n'en connaît que n; on pourrait aussi faire varier les deux angles que fait une des arêtes latérales avec les deux côtés du polygone de base qu'elle rencontre; en tout on pourrait donc faire varier $n-1$ éléments du polyèdre, sans changer les longueurs de ses arêtes; il manquerait donc $n-1$ conditions pour que ce polyèdre fut déterminé. Pour déterminer un polyèdre avec un nombre de données égal au nombre de ses arêtes, il faut dans certains cas faire entrer parmi les données des grandeurs autres que des longueurs d'arêtes.

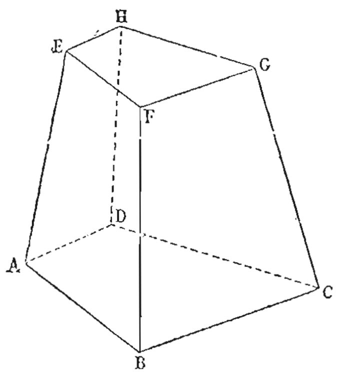


Fig. 528.

Cherchons par exemple à déterminer, avec 12 grandeurs données, un hexaèdre ABCDEFGH (*fig.* 528), dont les six faces sont des quadrilatères, polyèdre qui a 12 arêtes, et qui pourrait, dans certains cas être un prisme. On pourra se donner les côtés AB, BC, CD, CA, et la diagonale AC de la face ABCD, ce qui détermine cette face; puis les distances des points A,B,C, au sommet E, avec l'indication nécessaire pour savoir de quel côté doit être le point E par rapport à la face ABCD; on aura ainsi fixé le point E. On donnera ensuite les distances EF et BF qui fixent la position du point F dans le plan EAB, les distances FG et CG qui fixent la position du point G dans le plan FBC; la condition que le polyèdre est convexe fait que les points F et G sont ainsi fixés sans ambiguïté. Cela fait, la position du point H sera aussi déterminée, car ce point doit être dans les trois plans déjà déterminés, EAD, EFG, GCD. Le nombre des grandeurs ainsi employées pour la détermination de ce polyèdre est bien 12, comme le nombre des arêtes du polyèdre.

729. Corollaire II. *Le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux polyedres qui ont chacun A arêtes soient égaux est égal à* A.

730. Corollaire II. *Le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux polyèdres qui ont chacun* A *arêtes soient semblables est* $A-1$.

En effet, pour que deux polyèdres semblables soient égaux, il faut et il suffit que leur rapport de similitude soit égal à 1. Le nombre des conditions qui entraîne la similitude de deux polyèdres est donc inférieur d'une unité à celui des conditions qui entraînent l'égalité.

EXERCICES.

1. Calculer le volume d'un tétraèdre régulier dont l'arête est a.

2. Calculer le volume d'un octaèdre régulier dont l'arête est a; vérifier que ce volume est quadruple de celui d'un tétraèdre régulier de même arête.

3. Dans un polyèdre convexe, le nombre des faces qui ont un nombre impair de côtés est pair, et le nombre des angles solides qui ont un nombre impair d'arêtes est pair.

4. Dans un polyèdre dont les faces sont toutes triangulaires et dont les angles solides ont les uns 5 faces, les autres 6 faces; le nombre s_6 des angles solides à 6 faces peut être quelconque, mais le nombre s_5 des angles solides à 5 faces est toujours égal à 12, et on a :

$$S = 12s_6, \quad F = 20 + 2s_6, \quad A = 30 + 3s_6.$$

5. Si l'on décompose un polyèdre convexe en n autres polyèdres convexes, et si l'on désigne par S,F,A, les nombres totaux de sommets, de faces, d'arêtes de ces n polyèdres et du polyèdre donné, on a la relation :

$$A + n + 1 = S + F.$$

LIVRE VII

LES CORPS RONDS.

§ I. Notions sur les surfaces de révolution, les surfaces cylindriques, les surfaces coniques. — § II. Cylindre droit à base circulaire : surface latérale, développement, volume. — § III. Cône droit à base circulaire : surface latérale, développement, volume. — § IV. Sphère : sections planes, grands et petits cercles, pôles d'un cercle. — § V. Plan tangent à la sphère. — § VI. Positions relatives de deux sphères. — § VII. Plans tangents communs à deux sphères, à trois sphères. — § VIII. Triangles sphériques. — § IX. Aire de la sphère. — § X. Volume de la sphère.

§ I. Notions sur les surfaces de révolution, les surfaces cylindriques, les surfaces coniques.

SURFACES DE RÉVOLUTION.

731. On appelle surface de révolution, la surface engendrée par une ligne de forme invariable AMB (*fig.* 529), qui tourne autour d'une droite fixe LL' à laquelle on la suppose invariablement liée. La ligne mobile AMB est appelée *génératrice* de la surface, et la droite fixe LL' est appelée *axe*.

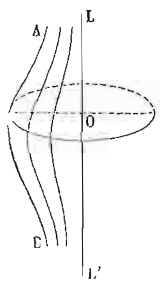


Fig. 529.

Soit M un point quelconque de la génératrice et soit O le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe LL'. Pendant le mouvement de la génératrice, la droite OM reste perpendiculaire à l'axe LL' et conserve la même grandeur ; donc le point M décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la droite LL', et dont le centre est sur cette droite.

Il suit de là que tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface de révolution suivant une circonférence dont le centre est sur l'axe. Les cercles ainsi obtenus sont appelés les *parallèles* de la surface.

732. De la propriété des sections faites dans une surface de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe il résulte,

pour cette surface, le second mode de génération suivant :

Une surface de révolution peut être engendrée par une circonférence dont le plan se meut en restant perpendiculaire à l'axe, dont le centre est sur cet axe, et qui est assujettie à rencontrer une certaine ligne tracée sur la surface, par exemple la ligne AMB. La circonférence mobile est alors la *génératrice* de la surface ; la ligne fixe AMB est dite une *directrice*.

733. On appelle plan *méridien* d'une surface de révolution tout plan mené par l'axe, et on appelle *méridienne* la ligne d'intersection de la surface et du plan méridien.

734. Dans le premier mode de génération d'une surface on peut prendre pour génératrice une méridienne en la supposant invariablement liée à l'axe. En tournant autour de l'axe, cette génératrice vient coïncider successivement avec toutes les méridiennes de la surface ; donc, *toutes les méridiennes de la surface sont égales*.

735. Nous considérerons en particulier les trois cas suivants : la méridienne est une droite parallèle à l'axe, la méridienne est une droite qui rencontre l'axe, la méridienne est une demi-circonférence dont le centre est sur l'axe.

La surface engendrée est, dans le premier cas, une *surface cylindrique de révolution ;* dans le second cas, *une surface conique de révolution ;* dans le troisième cas, une *sphère*.

SURFACES CYLINDRIQUES.

736. On appelle *surface cylindrique* une surface engendrée par une droite AA' qui se déplace en restant parallèle à une direction donnée, et qui est assujettie à rencontrer toujours une ligne donnée MN (*fig.* 530). La droite mobile AA' est appelée *génératrice*, la ligne fixe MN est appelée *directrice*.

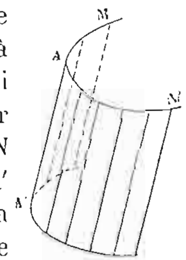


Fig. 530.

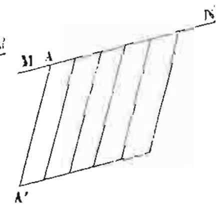


Fig. 531.

737. Dans le cas tout particulier où la directrice est une droite, la surface cylindrique se réduit à un plan (*fig.* 531).

Théorème.

738. *Les sections faites dans une surface cylindrique par deux plans parallèles sont des lignes superposables.*

En effet, soient S et S′ les lignes d'intersection d'une surface cylindrique par deux plans parallèles P et P′. Prenons sur la ligne S trois points quelconques A, B, C, et sur la ligne S′ prenons les points A′, B′, C′, où les génératrices du cylindre qui passent par les points A, B, C, rencontrent la ligne S′ (*fig.* 532).

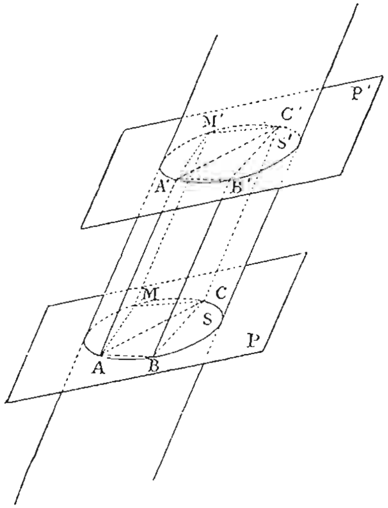


Fig. 532.

Les droites AB et A′B′, AC et A′C′, BC et B′C′ étant respectivement égales, comme parallèles comprises entre parallèles, les deux triangles ABC, A′B′C′ sont égaux. On peut donc transporter la courbe S de façon que les points A, B, C de cette courbe viennent s'appliquer sur les points A′, B′, C′ de la courbe S′. Cela fait, le plan P de la courbe S coïncide avec le plan P′ de la courbe S′. Je dis que tout autre point, M par exemple, de la courbe S coïncide avec un point de la courbe S′. En effet, soit M′ le point où la génératrice du cylindre qui passe par M rencontre la courbe S′. Les droites AM et A′M′, CM et C′M′, AC et A′C′, sont respectivement égales comme parallèles comprises entre parallèles, donc les triangles ACM, A′C′M′ sont égaux. De plus, comme la droite MM′ est parallèle au plan des droites AC, A′C′, les triangles égaux ACM, A′C′M′ sont disposés de la même façon par rapport aux triangles ABC, A′B′C′. Donc quand le triangle ABC coïncide avec le triangle A′B′C′, le triangle ACM coïncide avec le triangle A′C′M′, et, par suite, le point M coïncide avec le point M′.

Théorème.

739. *Le plan déterminé par une génératrice* GG′ *d'une surface cylindrique et par la tangente* MT *à une courbe quelconque* MNP *tracée sur cette surface, au point* M, *où la courbe rencontre la génératrice, contient aussi la tangente* M′T′ *à une autre courbe quelconque* M′N′P′ *tracée sur la surface cylindrique, au point* M′ *où cette courbe rencontre la génératrice* GG′ (*fig.* 533).

En effet, soit N un point de la courbe MNP voisin du point M, et soit N′ le point où la génératrice du cylindre qui passe par N rencontre la courbe M′N′P′. Les deux génératrices MM′, NN′ sont dans un même plan, et ce plan contient les cordes MN, M′N′. Faisons tourner ce plan M′MN N′ autour de la génératrice MM′ de façon que le point N se déplaçant sur la courbe MNP vienne se confondre avec le point M ; la corde MN viendra se

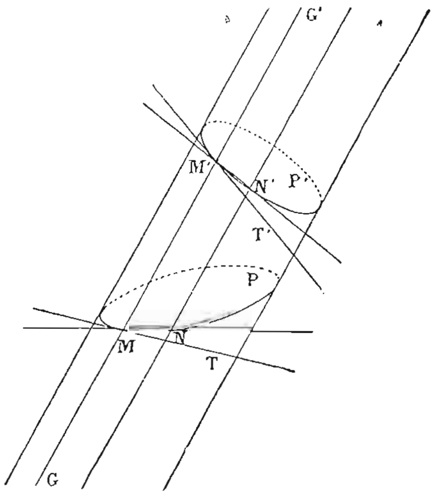


Fig. 533.

confondre avec la tangente MT, et le plan M′MN′N viendra se confondre avec le plan M′MT. En même temps la droite NN′ viendra sur la droite MM′, de sorte que le point N′ qui se déplace sur la courbe M′N′P′ viendra se confondre avec le point M′, et la corde M′N′ viendra se placer sur la tangente M′T′. Donc le plan déterminé par la génératrice M′M et par la tangente MT contient aussi la tangente M′T′.

740. Ce plan, qui contient une génératrice GG′ d'une surface cylindrique et toutes les tangentes aux courbes tracées sur cette surface aux points où ces courbes rencontrent la génératrice GG′, est appelé *plan tangent à la surface cylindrique* le long de cette génératrice.

741. Définitions. On appelle *cylindre* le volume limité par une surface cylindrique et par deux plans parallèles, non parallèles aux génératrices de la surface (*fig.* 534). La portion de la surface cylindrique comprise entre les deux plans parallèles est appelée *surface latérale* du cylindre. Les surfaces planes limitées par les lignes d'intersection de la surface cylindrique et des plans parallèles sont les *bases* du cylindre : elles sont égales.

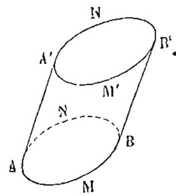


Fig. 534.

La distance des deux bases est la *hauteur* du cylindre.

742. On dit qu'un prisme est *inscrit* dans un cylindre quand les bases du prisme sont des polygones inscrits dans les bases du cylindre ; les arêtes du prisme inscrit dans un cylindre sont nécessairement des génératrices du cylindre.

743. On dit qu'un cylindre est *droit* ou *oblique* selon que ses génératrices sont perpendiculaires aux plans des bases ou qu'elles sont obliques par rapport à ces plans.

744. Si la base d'un cylindre droit est un cercle, le cylindre est appelé *cylindre droit à base circulaire*.

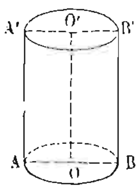


Fig. 535.

745. Un cylindre droit à base circulaire peut être considéré comme engendré par un rectangle OAA′O′ qui tourne autour d'un de ses côtés, OO′, (*fig.* 535).

Dans ce mouvement, le côté AA′, parallèle à l'axe de rotation OO′, engendre la surface latérale du cylindre, et les côtés OA, O′A′, engendrent les bases du cylindre. Pour cette raison, le cylindre droit à base circulaire est aussi appelé *cylindre de révolution*.

Théorème.

746. *Le plan tangent à un cylindre de révolution le long d'une génératrice* MM′ *est perpendiculaire au plan méridien* OMM′O′ *qui contient cette génératrice.*

En effet, soit MT la tangente au cercle de base au point M (*fig.* 536), la droite MT est perpendiculaire au rayon OM du cercle de base ; elle est perpendiculaire à la droite OO′ parce que OO′ est perpendiculaire au plan du cercle de base ; donc MT est perpendiculaire au plan méridien. Le plan tangent au cylindre le long de la génératrice MM′ contient la droite MT ; donc il est perpendiculaire au plan méridien OO′MM′.

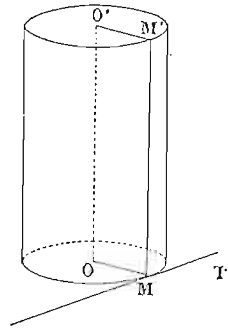


Fig. 536.

SURFACES CONIQUES.

747. On appelle *surface conique* une surface engendrée par une droite SG qui tourne autour d'un point fixe S et qui est assujettie à rencontrer une ligne fixe MN (*fig.* 537).

La droite mobile SG est appelée *génératrice*, la ligne fixe MN

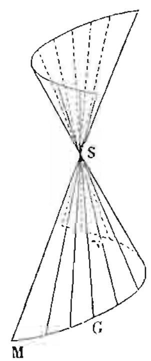


Fig. 537.

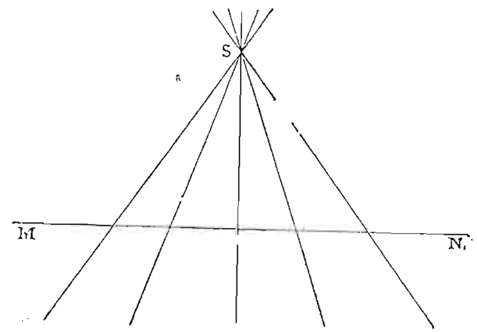


Fig. 538.

est appelée *directrice* ; le point S est le *sommet* de la surface.

Dans le cas tout particulier où la directrice MN est une droite ne passant pas par S, la surface conique se réduit à un plan (*fig.* 538).

Théorème.

748. *Les sections faites par deux plans parallèles dans une surface conique sont des lignes homothétiques; le sommet est le centre d'homothétie.*

Soient en effet A et A′ les points où une génératrice SG rencontre les courbes d'intersection d'une surface conique et de deux plans parallèles P, P′ (*fig.* 539). Soient M, M′ les points où une autre génératrice quelconque rencontre les mêmes courbes. Les droites AM, A′M′, intersections de deux plans parallèles par un troisième, sont parallèles, et on a :

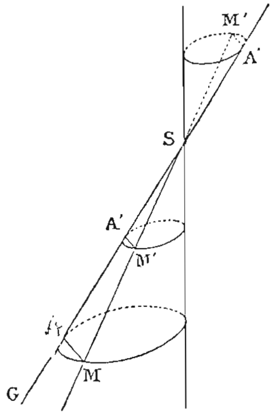


Fig. 539.

$$\frac{SM}{SM'} = \frac{SA}{SA'}.$$

Donc les courbes sont homothétiques; S est le centre d'homothétie et $\frac{SA}{SA'}$ est le rapport d'homothétie.

749. Selon que le point S est dans la région de l'espace comprise entre les deux plans parallèles, ou qu'il est en dehors de cette région, l'homothétie est inverse, ou directe.

Théorème.

750. *Le plan déterminé par une génératrice* SG *d'une surface conique et par la tangente* MT *à une courbe quelconque* MN *tracée sur cette surface, au point* M *où cette courbe rencontre la génératrice, contient aussi la tangente* M′T′ *à une autre courbe quelconque tracée sur la surface au point M′ où cette courbe rencontre la génératrice* SG (*fig.* 540).

Même démonstration que pour le théorème analogue concernant une surface cylindrique (739).

Le plan qui contient une génératrice SG d'une surface conique et toutes les tangentes aux courbes tracées sur cette surface aux points où ces courbes rencontrent la génératrice SG est appelé *plan tangent* à la surface conique, le long de cette génératrice.

751. Définitions. On appelle *cône* le volume limité par une surface conique et par un plan qui rencontre toutes les génératrices du cône d'un même côté par rapport au sommet (*fig.* 541). La portion de ce plan contenue dans la surface conique est la *base du cône*. La portion de la surface conique limitée par le plan de base et par le sommet est la *surface latérale* du cône. La distance du sommet au plan de base est la *hauteur* du cône.

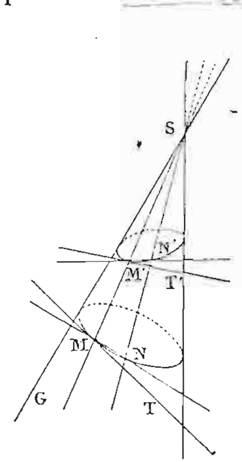


Fig. 540.

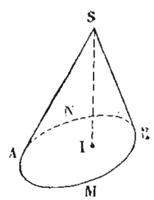


Fig. 541.

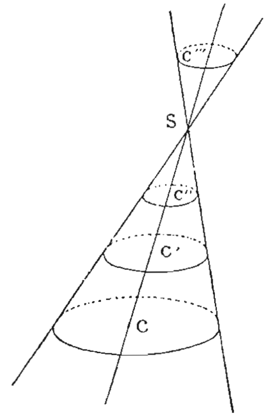


Fig. 542.

752. On dit qu'une pyramide est *inscrite* dans un cône quand, le sommet de la pyramide coïncidant avec le sommet du cône, la base de la pyramide est un polygone inscrit dans la base du cône. Les arêtes latérales d'une pyramide inscrite dans un cône sont des génératrices du cône.

753. Si la base du cône est un cercle (*fig.* 542), les sections faites par des plans parallèles au plan de la base sont des cercles, puisque ce sont des lignes homothétiques au cercle de base. Les centres de ces cercles sont sur une droite passant par le sommet du cône, car ces centres sont des points homologues dans des figures homothétiques, et le sommet du cône est le centre d'homothétie de ces figures.

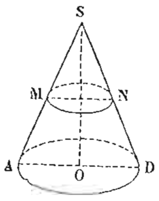


Fig. 543.

754. Si la base du cône étant un cercle, la droite qui joint le sommet du cône au centre du cercle de base est perpendiculaire au plan de la base, le cône est appelé *cône droit à base circulaire* (*fig*. 543).

755. Un cône droit à base circulaire peut être considéré comme engendré par un triangle rectangle SOA qui tourne autour d'un des côtés SO de l'angle droit (*fig*. 543); dans ce mouvement l'hypoténuse SA du triangle engendre la surface latérale du cône, et le côté OA engendre la surface de la base. Pour cette raison, le cône droit à base circulaire est aussi appelé *cône de révolution*.

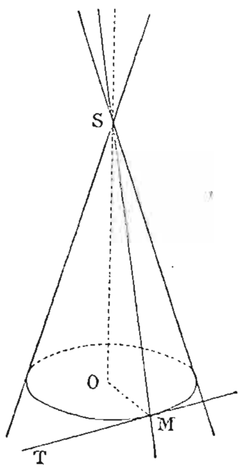


Fig. 544.

Théorème.

756. *Le plan tangent à un cône de révolution le long d'une génératrice* SM *est perpendiculaire au plan méridien qui contient cette génératrice* (*fig*. 544).

Même démonstration que pour le théorème analogue concernant le cylindre de révolution (746).

II. Cylindre droit a base circulaire : surface latérale, développement, volume.

Aire de la surface latérale d'un cylindre.

757. La surface latérale d'un cylindre étant courbe ne peut

être comparée à l'unité d'aire qui est une portion de surface plane ; il est donc nécessaire de définir ce que l'on entend par aire de la surface latérale d'un cylindre.

On appelle aire de la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'un prisme droit à base régulière inscrit dans ce cylindre lorsqu'on double indéfiniment le nombre des côtés de la base.

Le théorème suivant montre que cette limite existe, et en donne l'expression.

Théorème.

758. *L'aire de la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire a pour mesure le produit de la circonférence de base par la hauteur.*

Inscrivons dans le cylindre droit à base circulaire ADA'D' (*fig*. 545) le prisme droit à base régulière ABCDEF A'B'C'D'E'F'. La surface latérale de ce prisme se compose des rectangles égaux ABA'B', BCB'C', etc. ; son aire a pour expression

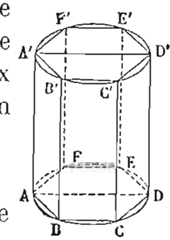


Fig. 545.

$$(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \times AA'$$

c'est-à-dire le produit du périmètre du polygone de base par la hauteur du cylindre.

Or, imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, le périmètre de ce polygone tend vers une limite qui est la longueur de la circonférence de base ; la hauteur reste toujours égale à la hauteur du cylindre ; donc l'aire de la surface latérale du prisme régulier inscrit, quand on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, tend vers une limite qui a pour mesure le produit de la circonférence de base par la hauteur.

C'est cette limite que nous avons appelée aire de la surface latérale du cylindre. Donc le théorème est démontré.

759. Si l'on appelle r le rayon de la base, h la hauteur et s la surface latérale du cylindre, on a :

$$s = 2\pi r h.$$

760. La surface totale S du cylindre se compose de la surface latérale $2\pi rh$, plus la somme des surfaces des bases $2\pi r^2$; on a donc :

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

ou bien

$$S = 2\pi r(r + h).$$

761. REMARQUE. La surface latérale d'un prisme droit peut être développée sur un plan et recouvre alors un rectangle dont la base est le périmètre du polygone de base, et dont la hauteur est la hauteur du prisme. Imaginons, en effet, le prisme ABCDEF A'B'C'D'E'F' (*fig.* 546) ouvert selon l'arête AA', et faisons tourner la face ABA'B' autour de l'arête BB', de manière à l'amener sur le plan de la face suivante BC B'C'; les côtés BA et B'A', perpendiculaires à BB', restent perpendiculaires à cette droite et viennent se placer sur les prolongements des côtés CB et C'B' perpendiculaires à BB'. Faisons de même tourner le plan de la face BCB'C' autour de l'arête CC', de manière à l'appliquer sur le plan de la face suivante CDC'D' ; en continuant ainsi, nous amènerons toute la surface latérale du prisme dans le plan de la dernière face FAF'A', et cette surface formera alors un rectangle ayant pour base

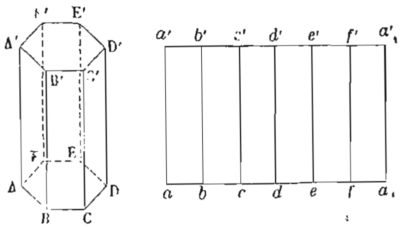


Fig. 546.

$$AB + BC + CD + DE + EF + FA,$$

c'est-à-dire le périmètre de la base du prisme, et pour hauteur la hauteur AA' du prisme.

De même la surface latérale d'un cylindre droit ADA'D' (*fig.* 547), limite de la surface latérale d'un prisme inscrit à base régulière, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de la base, peut être dévelop-

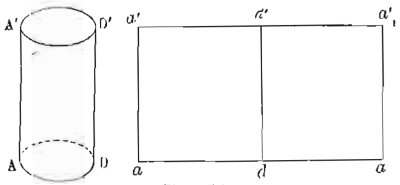


Fig. 547.

pée sur un plan. Elle recouvre alors un rectangle $ada_1a_1'd'a'$ dont la base est égale à la longueur de la circonférence de base, et dont la hauteur est la hauteur du cylindre.

VOLUME D'UN CYLINDRE.

762. *On appelle volume d'un cylindre droit à base circulaire la limite vers laquelle tend le volume d'un prisme inscrit, à base régulière, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de la base.*

Le théorème suivant montre que cette limite existe et en donne l'expression.

Théorème.

763. *Le volume d'un cylindre droit à base circulaire a pour mesure le produit de l'aire de la base par la hauteur du cylindre*

Inscrivons dans le cylindre un prisme à base régulière (*fig.* 548). Le volume de ce prisme a pour mesure le produit de l'aire de sa base par sa hauteur. Si l'on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, l'aire de cette base a pour limite l'aire du cercle de base du cylindre ; la hauteur du prisme est toujours la hauteur du cylindre. Donc le volume du prisme inscrit, quand on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base, tend vers une limite qui a pour mesure le produit de l'aire de la base du cylindre par la hauteur.

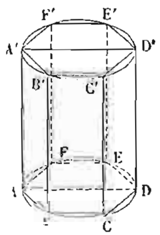


Fig. 548.

C'est cette limite que nous avons appelée volume du cylindre ; donc le théorème est démontré.

764. Si l'on appelle r le rayon du cercle de base, h la hauteur, et V le volume du cylindre, on a :

$$V = \pi r^2 h.$$

Théorème.

765. *Si deux cylindres droits à bases circulaires sont semblables, les surfaces latérales et les surfaces totales sont propor-*

tionnelles aux carrés des rayons; les volumes sont proportionnels aux cubes des rayons.

On dit que deux cylindres droits à bases circulaires sont semblables quand les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, c'est-à-dire quand les cylindres sont engendrés par des rectangles semblables.

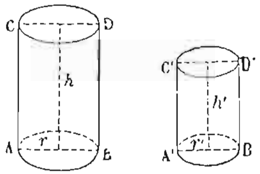


Fig. 549.

Soient deux cylindres semblables ABCD, A'B'C'D' (*fig.* 549); appelons r et r' les rayons des bases de ces deux cylindres, h et h' les deux hauteurs, s et s' les surfaces latérales, S et S' les surfaces totales, V et V' les volumes. Les cylindres étant semblables, on a :

$$\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{r+h}{r'+h'};$$

or, on a :

$$s = 2\pi rh, \qquad s' = 2\pi r'h',$$

donc

$$\frac{s}{s'} = \frac{r\,h}{r'h'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

De même,

$$S = 2\pi r(r+h), \qquad S' = 2\pi r'(r'+h'),$$

donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{r\;(r+h)}{r'\;(r'+h')} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Enfin,

$$V = \pi r^2 h, \qquad V' = \pi r'^2 h',$$

donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Calculer les dimensions et la surface d'une plaque de tôle pouvant servir à la confection d'un tuyau cylindrique de 25 centimètres de diamètre et de 83 centimètres de hauteur.*

La circonférence de base du cylindre est, en centimètres, $\pi \times 25$, ou 78,53; la plaque de tôle est donc un rectangle dont les côtés ont $78^c,53$ et 83 cent. La surface de cette plaque, qui est aussi la surface latérale du cylindre, est, en centimètres carrés, $\pi \times 25 \times 83$, ou $6518^{cq},58$ à moins de 1 millimètre carré.

II. *Quelle est la hauteur d'un cylindre dont le diamètre est 16 centimètres, et dont la surface totale est 1546 cent. carrés ?*

Dans la formule

$$S = 2\pi r(r+h),$$

on remplace S par 1546, r par 8, et on a :

$$\pi \times 16 \times (8+h) = 1546$$

d'où

$$8+h = \frac{1546}{\pi \times 16} = 30{,}7;$$

donc la hauteur demandée est égale à 30,7 — 8, ou à $22^c,7$.

III. *Calculer les dimensions du litre employé pour mesurer les liquides, sachant que ce litre est un cylindre droit à base circulaire dont le volume est 1 décimètre cube et dans lequel le diamètre de la base est la moitié de la hauteur* (*fig.* 550).

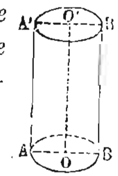


Fig. 550.

Le décimètre étant pris pour unité, on a :

$$\pi\,\overline{OA}^2 \times OO' = 1.$$

Soit r le rayon de la base :

$$OA = r, \qquad OO' = 4r;$$

donc

$$4\pi r^3 = 1$$

et

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{4\pi}}.$$

En effectuant les calculs indiqués, soit directement, soit en employant les logarithmes, on trouve :

$$r = 0^{dm},4301576.$$

A moins d'un millième de millimètre, le rayon de la base est $43^{mm},016$, et la hauteur $172^{mm},063$.

IV. *Quel est le poids d'un tuyau de fer formant un cylindre creux dont le diamètre intérieur est 17 cent., le diamètre extérieur 18 cent., et la longueur 74 cent.; le poids d'un centimètre cube de fer étant* $7^{gr},7$?

Le volume du fer est la différence des volumes de deux cylindres qui ont même hauteur, 74 cent., et dont les rayons de bases sont $8^c,5$ et 9 cent.; il est donc, en centimètres cubes,

$$\pi\,(9^2 - 8,5^2) \times 74 = 2034,\ 186.$$

Le poids d'un centimètre cube de fer étant $7^{gr},7$, le poids du tuyau est, en grammes, $2034,186 \times 7,7$ ou $15663,232$, ou encore $15^k,663$ à un gramme près.

§ III. Cône droit a base circulaire : surface latérale, développement, volume.

766. On sait (752) qu'une pyramide est *inscrite* dans un cône quand, le sommet de la pyramide coïncidant avec le sommet du cône, la base de la pyramide est un polygone inscrit dans la base du cône (*fig.* 551).

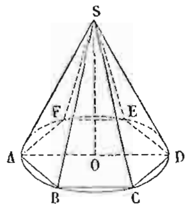


Fig. 551.

Si l'on inscrit dans un *cône droit à base circulaire* une pyramide à base régulière, le centre O du polygone de base coïncide avec le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet de la pyramide sur le plan de la base, et par conséquent la pyramide est régulière.

Aire de la surface latérale d'un cône.

767. La surface latérale d'un cône étant courbe ne peut être comparée à l'unité d'aire, qui est une portion de surface plane; il est nécessaire de définir ce qu'on entend par aire de la surface latérale d'un cône.

On appelle aire de la surface latérale d'un cône droit, à base circulaire, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite, quand on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base.

Le théorème suivant montre que cette limite existe, et en donne l'expression.

Théorème.

768. *L'aire de la surface latérale d'un cône droit, à base circulaire, a pour mesure le produit de la circonférence de base par la moitié de l'arête du cône.*

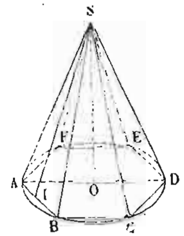


Fig. 552.

Inscrivons dans le cône droit à base circulaire SAD (*fig.* 552) la pyramide régulière SABCDEF. La surface latérale de cette pyramide se compose des triangles isocèles égaux SAB, SBC, SCD, etc. Soit SI l'apothème de la pyramide, c'est-à-dire la perpendiculaire menée du point S sur AB. L'aire de la surface latérale de la pyramide a pour expression

$$(\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DE} + \mathrm{EF} + \mathrm{FA}) \times \frac{1}{2}\mathrm{SI},$$

ou le produit du périmètre du polygone de base par la moitié de l'apothème SI de la pyramide.

Or, imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés du polygone de base de la pyramide inscrite, le périmètre de ce polygone tend vers une limite qui est la longueur de la circonférence de base du cône; l'apothème SI de la pyramide tend vers une limite qui est l'arête SA du cône; donc, l'aire de la surface latérale de la pyramide tend vers une limite qui a pour mesure le produit de la circonférence de base par la moitié de l'arête du cône. C'est cette limite que nous avons appelée aire de la surface latérale du cône : donc le théorème est démontré.

769. Soient r le rayon de la base, c l'arête du cône, s la surface latérale, on a :

$$s = \pi r c.$$

770. La surface totale S du cône se compose de la surface latérale πrc, plus la surface de la base πr^2, on a donc

$$\mathrm{S} = \pi r c + \pi r^2, \quad \text{ou} \quad \mathrm{S} = \pi r\,(r + c).$$

771. Remarque I. La circonférence de la section MN faite dans le cône, par un plan parallèle à la base, et à une distance du sommet égale à la moitié de la hauteur (*fig.* 553), est égale à la moitié de la circonférence de base; donc on peut encore dire que *la surface latérale du cône a pour mesure le produit de l'arête du cône par la circonférence d'une section parallèle à la base et équidistante de la base et du sommet.*

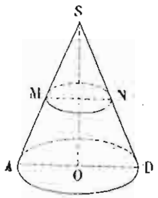


Fig. 553.

772. Remarque II. La surface latérale de la pyramide régulière SABCDEF (*fig.* 554) peut être appliquée sur un plan, et recouvre alors un secteur polygonal régulier $sabcdefa_1$ dont le rayon sa est égal à l'arête SA de la pyramide, et dont le périmètre $ab+bc+cd+de+ef+fa_1$ est égal au périmètre AB + BC + CD + DE + EF + FA de la base de la pyramide.

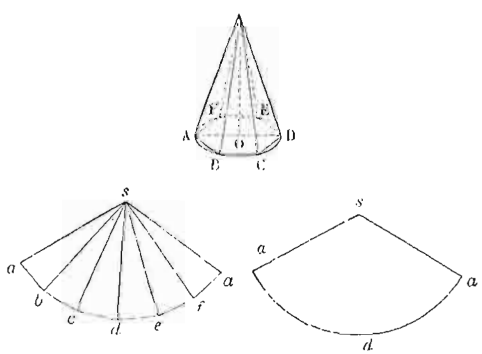


Fig. 554.

De même la surface latérale du cône droit à base circulaire, limite vers laquelle tend la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de la base, peut être appliquée sur un plan, et recouvre alors un secteur circulaire $sada_1$, dont le rayon sa est égal à l'arête SA du cône, et dont l'arc ada_1 est égal à la longueur de la circonférence de la base.

TRONC DE CÔNE : SURFACE LATÉRALE, DÉVELOPPEMENT.

773. Définition. On appelle tronc de cône à bases parallèles le solide obtenu en retranchant d'un cône SAD un cône SA'D', dont la base A'D' est parallèle à la base AD (*fig.* 502).

Théorème.

774. *La surface latérale d'un tronc de cône, droit, à bases parallèles, a pour mesure le produit de la demi-somme des circonférences des bases par l'arête.*

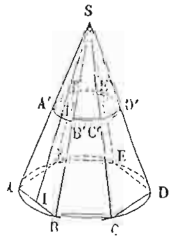


Fig. 555.

Inscrivons encore dans le cône SAD (*fig.* 555) une pyramide régulière SABCDEF, et considérons le tronc de pyramide régulière ABCDEF A'B'C'D'E'F' inscrit dans le tronc de cône. Les surfaces latérales des cônes SAD, SA'D' étant les limites vers lesquelles tendent les surfaces latérales des pyramides régulière SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', inscrites dans ces cônes, quand on double indéfiniment le nombre des faces de ces pyramides, la surface latérale du tronc de cône ADA'D', différence des surfaces latérales des deux cônes, est la limite de la surface latérale du tronc de pyramide, différence des surfaces latérales des deux pyramides. Or, la surface latérale du tronc de pyramide se compose des trapèzes égaux ABA'B', BCB'C', etc. Soit SI'I la perpendiculaire menée du point S aux côtés parallèles AB, A'B'; l'aire de la surface latérale du tronc de pyramide a pour expression

$$\frac{1}{2}(AB+BC+CD+\ldots\ldots+A'B'+B'C'+C'D'+\ldots\ldots)\times II',$$

c'est-à-dire la demi-somme des périmètres des polygones des bases multipliée par II'. Quand on double indéfiniment le nombre des faces du tronc de pyramide, les périmètres des polygones inscrits dans les bases du tronc de cône se confondent, à la limite, avec les circonférences de ces bases, la hauteur II' des trapèzes égaux se confond avec l'arête AA' du tronc de cone : donc l'aire de la surface latérale du tronc de cône a pour expression le produit de la demi-somme des circonférences des bases par l'arête du tronc.

775. Soient r et r' les rayons des circonférences de bases, l l'arête du tronc de cône, et s la surface latérale, on a :

$$s = \pi(r + r')\,l.$$

776. La surface totale S du tronc de cône se compose de surface latérale $\pi\,(r+r')l$, plus la somme des surfaces des deux bases $\pi r^2 + \pi r'^2$; on a donc

$$S = \pi[r^2 + r'^2 + (r + r')l].$$

777. Si l'on coupe le tronc de cône par un plan MN équidistant des deux bases (*fig.* 556), la section est une circonfé-

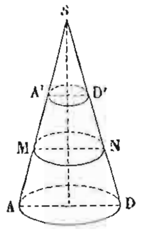


Fig. 556.

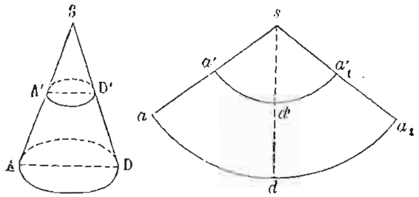


Fig. 557.

rence égale à la demi-somme des circulaires des deux bases. On peut donc dire encore que *la surface latérale d'un tronc de cône a pour mesure le produit de la circonférence d'une section équidistante des bases par l'arête du tronc.*

778. Si l'on développe la surface du cône SAD sur un plan (*fig.* 557), la surface latérale du cône SAD recouvre le secteur circulaire $sada_1$; la surface latérale du cône SA'D' recouvre le secteur circulaire $sa'd'a'_1$, t, par conséquent, la surface du tronc de cône recouvre le *trapèze circulaire* $aa_1a_1'a'$

779. Remarque. La formule

$$S = \pi(r - r')l$$

peut aussi être établie en considérant la surface latérale

du tronc de cône ADA'D' comme la différence des surfaces latérales des cônes SAD, SA'D'. Soient c et c' les arêtes SA, SA', on a :

$$S = \pi(rc - r'c');$$

or, les triangles SOA, SO'A' étant semblables, on a :

$$\frac{r}{c} = \frac{r'}{c'}$$

d'où :

$$\frac{r}{c} = \frac{r'}{c'} = \frac{rc - r'c'}{c^2 - c'^2} = \frac{r + r'}{c + c'};$$

donc

$$rc - r'c' = (r + r')\frac{c^2 - c'^2}{c + c'} = (r + r')(c - c');$$

or,

$$c - c' = l;$$

donc enfin

$$S = \pi(r - r')\,l.$$

VOLUME D'UN CÔNE.

780. *On appelle volume d'un cône droit, à base circulaire, la limite vers laquelle tend le volume d'une pyramide régulière inscrite dans le cône lorsqu'on double indéfiniment le nombre des faces latérales de cette pyramide.*

Le théorème suivant montre que cette limite existe et en donne l'expression.

Théorème.

781. *Le volume d'un cône droit, à base circulaire, a pour mesure le produit de l'aire de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Concevons une pyramide régulière inscrite dans le cône (*fig.* 558) ; le volume de cette pyramide a pour mesure le produit de l'aire du polygone de base par le tiers de sa hauteur.

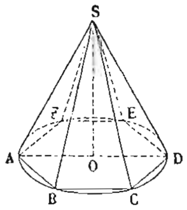


Fig. 558.

Si l'on double indéfiniment le nombre des faces latérales de cette pyramide, l'aire du polygone de base tend vers une limite qui est l'aire de la base du cône ; la hauteur est toujours égale à la hauteur du cône. Donc le volume de la pyramide inscrite a une limite, et cette limite a pour mesure le produit de l'aire de la base du cône par le tiers de la hauteur du cône. Or, cette limite est ce qu'on appelle le volume du cône ; donc le théorème est démontré.

782. Soient r le rayon de la base, h la hauteur, V le volume du cône ; on a :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Théorème.

783. *Si deux cônes droits à base circulaire sont semblables, les surfaces latérales et les surfaces totales de ces cônes sont proportionnelles aux carrés des rayons des bases ; les volumes sont proportionnels aux cubes de ces rayons.*

On dit que deux cônes droits à base circulaire sont semblables, quand les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, c'est-à-dire quand les cônes sont engendrés par des triangles rectangles semblables.

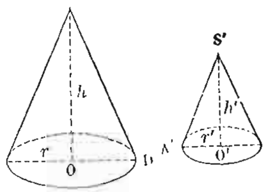


Fig. 559.

Soient deux cônes droits à base circulaire semblables SAD, S'A'D' (*fig.* 559) ; appelons r et r' les rayons des bases, c et c' les arêtes, h et h' les hauteurs, s et s' les surfaces latérales, S et S' les surfaces totales, et V et V' les volumes de ces cônes. Les cônes étant semblables, on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'},$$

et, par suite,

$$\frac{r}{r'} = \frac{r+c}{r'+c'}.$$

Or on sait que

$$s = \pi r c, \qquad s' = \pi r' c' ;$$

donc

$$\frac{s}{s'} = \frac{r\,c}{r'c'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

De même,

$$S = \pi r(r+c), \qquad S' = \pi r'(r'+c'),$$

d'où

$$\frac{S}{S'} = \frac{r\,(r+c)}{r'(r'+c')} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

Enfin,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h' ;$$

donc

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = \frac{r^3}{r'^3}.$$

VOLUME DU TRONC DE CÔNE.

Théorème.

784. *Le volume d'un tronc de cône à bases parallèles équivaut à la somme des volumes de trois cônes, qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et pour bases, l'un la base inférieure, l'autre la base supérieure, le troisième une moyenne géométrique entre les deux bases du tronc.*

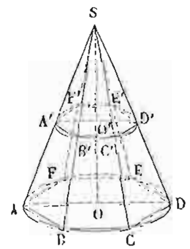


Fig. 560.

En effet, soit le tronc de cône à bases parallèles ADA'D' (*fig.* 555) ; inscrivons dans le cône SAD la pyramide régulière SABCDEF, et considérons le tronc de pyramide régulière ABCDEF A'B'C'D'E'F' inscrit dans le tronc de cône. Les volumes des cônes SAD et SA'D' étant les limites vers lesquelles tendent les volumes des pyramides régulières inscrites SABCDEF, et SA'B'C'D'E'F' quand on double indéfiniment le nombre des faces de ces pyramides, le volume du tronc de cône ADA'D', différence des deux cônes, est la limite du volume du tronc de pyramide ABCDEF A'B'C'D'E'F', différence des deux pyramides.

Or soit H la hauteur OO'; soient b, b' les aires des bases du tronc de pyramide considéré, et v son volume. On a (650)

$$v=\left(b+b'+\sqrt{bb'}\right)\frac{H}{3}.$$

Quand on double indéfiniment le nombre des faces du tronc de pyramide, la hauteur H ne change pas, les aires b, b' des bases tendent respectivement vers les aires B et B' des bases du tronc de cône, le volume v tend vers le volume V du tronc de cône; donc on a :

$$V=\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right)\frac{H}{3},$$

et le théorème est démontré.

Si l'on appelle r, r' les rayons des bases du tronc de cône, on a

$$V=\pi\left(r^2+r'^2+rr'\right)\frac{H}{3}.$$

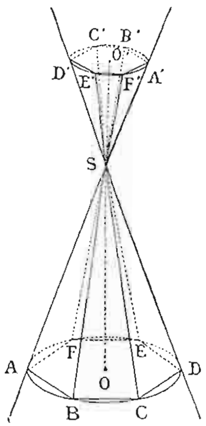


Fig. 561.

785. On appelle *tronc de cône de deuxième espèce* le solide compris entre une surface conique de révolution et deux plans perpendiculaires à l'axe coupant cet axe en des points situés de part et d'autre par rapport au sommet (*fig.* 561).

Le volume V de ce solide est la limite vers laquelle tend le volume d'un tronc de pyramide de deuxième espèce, inscrit dans le tronc de cône, lorsqu'on double indéfiniment le nombre de ses faces. Or, soit H la hauteur OO', soient b, b' les aires des bases du tronc de pyramide de seconde espèce, v son volume, on a (653)

$$v=\left(b+b'-\sqrt{bb'}\right)\frac{H}{3},$$

et, à la limite

$$V=\left(B+B'-\sqrt{BB'}\right)\frac{H}{3},$$

en appelant B et B' les aires des bases de ce tronc de cône.

Si l'on désigne par r, r', les rayons des deux bases, on a

$$V=\pi\left(r^2+r'^2-rr'\right)\frac{H}{3}.$$

On voit que pour passer de l'expression du volume d'un tronc de cône de première espèce à l'expression du volume d'un tronc de cône de deuxième espèce, il suffit de changer le signe de l'un des rayons des bases.

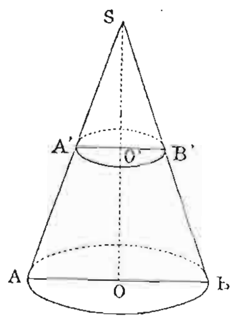


Fig. 562

786. Remarque. De même que l'on a pu trouver l'expression du volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles en le considérant comme la différence des volumes de deux pyramides (652), on peut évaluer le volume d'un tronc de cône à bases parallèles en le considérant comme la différence des volumes de deux cônes. Soient r et r' les rayons OA et O'A', h et h' les hauteurs SO et SO' des deux cônes SAB, SA'B', et H la hauteur du tronc (*fig.* 562). Le volume V du tronc de cône est la différence

$$\frac{1}{3}\pi\left(r^2h-r'^2h'\right).$$

Or les triangles SOA, SO'A' étant semblables, on a

$$\frac{r}{h}=\frac{r'}{h'}$$

d'où

$$\frac{r^2}{h^2}=\frac{r'^2}{h'^2}=\frac{r^2h-r'^2h'}{h^3-h'^3}=\frac{r^2+r'^2+rr'}{h^2+h'^2+hh'};$$

donc

$$r^2h-r'^2h'=\left(r^2+r'^2+rr'\right)\frac{h^3-h'^3}{h^2+h'^2+hh'}.$$

Or le quotient $\dfrac{h^3 - h'^3}{h^2 + hh' + h'^2}$ est égal à $h - h'$, ou à H ; donc enfin

$$V = \frac{\pi}{3}\left(r^2h - r'^2h'\right) = \pi\left(r^2 + r'^2 + rr'\right)\frac{H}{3}.$$

On obtiendrait, par un calcul analogue, le volume d'un tronc de cône de seconde espèce, en le considérant comme la somme des volumes de deux cônes.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Calculer la surface latérale d'un cône droit à base circulaire, dont le rayon de base est 15 cent., et la hauteur 32 cent.*

L'arête du cône est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont, en centimètres, 32 et 15 ; elle est donc, en centimètres,

$$\sqrt{32^2 + 15^2} = \sqrt{1249} = 35,34.$$

La surface latérale, en centimètres carrés, est

$$\pi . 15 \times 35,34$$

ou, 1665 centimètres carrés, à un centimètre carré près.

II. *L'intérieur d'un verre à pied (fig. 563) a la forme d'un cône droit à base circulaire, l'angle au sommet du cône est 60° ; on verse dans ce verre 345 grammes de mercure ; calculer la hauteur à laquelle s'élève le mercure au-dessus du fond du vase, la densité du mercure étant 13,596.*

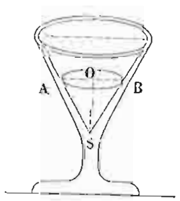


Fig. 563.

Soit D la densité du mercure, P le poids du mercure versé, et V son volume.

On a :

$$V = \frac{P}{D}.$$

D'autre part

$$V = \frac{1}{3}\pi\overline{OA}^2 \times OS.$$

Soit $x = OS$; comme le triangle ABS est équilatéral, on a :

$$x^2 = \overline{OS}^2 = 3\overline{OA}^2 ;$$

donc,

$$V = \frac{1}{9}\pi x^3,$$

d'où

$$x^3 = \frac{9V}{\pi} = \frac{9P}{\pi \times D},$$

d'où

$$x = \sqrt[3]{\frac{9P}{\pi \times D}}.$$

Appliquons au cas où $P = 345$ grammes, et $D = 13,596$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{9P}{\pi \times D}} = \sqrt[3]{\frac{3105}{3,1416 \times 13,596}}.$$

En effectuant les calculs indiqués, on trouve :

$$x = 4,1735.$$

Le mercure s'élève à une hauteur de $4^c,17$ au-dessus du fond du verre.

III. *Calculer la surface latérale et le volume d'un tronc de cône dont les rayons des bases sont 27 cent. et 18 cent., et dont la longueur de l'arête est 21 centimètres.*

La surface latérale de ce tronc de cône est, en centimètres,

$$\pi(27 + 18) \times 21 = 2968,812$$

ou 2968 cent. carrés, à moins d'un cent. carré.

La hauteur du tronc de cône est un côté d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est 21 cent., et l'autre côté 27 − 18, ou 9 cent. ; elle est donc égale à $\sqrt{21^2 - 9^2}$, ou à 18,973.

Le volume du tronc de cône est

$$\frac{1}{3}\pi\, 18,973\,(27^2 + 18^2 + 27 \times 18),$$

ou 30577 cent. cubes, à moins de 1 cent. cube.

§ IV. Sphère : sections planes, grands et petits cercles, pôles d'un cercle.

787. Définitions. On appelle *sphère* un solide limité par une surface dont tous les points sont à égale distance d'un point intérieur appelé *centre*.

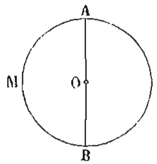


Fig. 564.

Une sphère peut être engendrée par la révolution d'un demi-cercle AMB tournant autour d'un diamètre AB (*fig.* 564). Dans ce mouvement, la demi-circonférence engendre la surface de la sphère.

Toute droite allant du centre à la surface de la sphère est appelée *rayon*. On appelle *diamètre* toute droite passant par le centre de la sphère et terminée de part et d'autre à la surface de la sphère.

Théorème.

788. *Toute section plane d'une sphère est un cercle dont le centre est situé sur le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de la section.*

Soient AMBN une section plane de la sphère O, PP′ le diamètre perpendiculaire au plan sécant, et I le point de rencontre de ce diamètre et du plan sécant (*fig.* 565). Prenons, sur la section, un point quelconque M. Dans le triangle rectangle OIM, le côté OI est la distance du centre de la sphère au plan sécant; l'hypoténuse OM est un rayon de la sphère, et ne varie pas quand on déplace le point M sur la section; donc le triangle OIM conserve une grandeur invariable; par suite, IM est constant, et la section AMBN est un cercle qui a le point I pour centre et IM pour rayon.

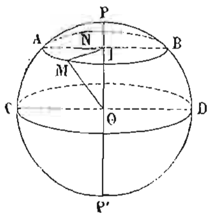


Fig. 565.

789. Remarque. Soient R le rayon de la sphère, d la distance OI du centre de la sphère au plan sécant, r le rayon de la section.

On a

$$r^2 = R^2 - d^2.$$

Quand $d = 0$, c'est-à-dire quand le plan sécant passe par le centre de la sphère, $r = R$; le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. On dit alors que la section est un *grand cercle*.

Quand d est différent de o, c'est-à-dire quand le plan sécant ne passe pas par le centre, r est moindre que R; on dit que la section est un *petit cercle*.

Imaginons que le plan sécant s'éloigne du centre de la sphère, en restant perpendiculaire au diamètre PP′; le centre de la section reste toujours sur le diamètre PP′; d croît de o à R, et le rayon de la section diminue de R à o.

790. *Une droite ne peut rencontrer une sphère en plus de deux points.* En effet, les points communs à la droite et à la sphère sont les points communs à la droite et au cercle d'intersection de la sphère avec un plan quelconque mené par la droite; or, on sait qu'une droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points.

791. *Par trois points* A, B, C, *pris sur une sphère* (*fig.* 566), *on peut faire passer un cercle et un seul.* En effet, ces trois points, non en ligne droite, déterminent un plan, et ce plan coupe la sphère suivant un cercle passant par ces trois points.

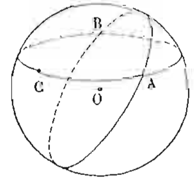


Fig. 566.

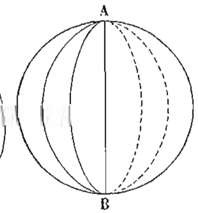


Fig. 567.

792. *Par deux points* A *et* B, *pris sur la surface de la sphère, on peut faire passer un grand cercle* (*fig.* 563), *et, généralement, on n'en peut faire passer qu'un.* En effet, en général, les deux points A et B et le centre O de la sphère déterminent un plan, et ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle passant par les points A et B. Toutefois, si les deux points donnés sont les extrémités d'un diamètre de la sphère (*fig.* 567), tout plan passant par ces points passe par le centre de la sphère, et, par conséquent, coupe la sphère suivant un grand cercle passant par les points donnés.

793. *Deux grands cercles se coupent en deux points diamétra-*

lement opposés, car les plans de ces cercles passent par le centre de la sphère et, par conséquent, se coupent suivant un diamètre.

794. Définition. On appelle *pôle* d'un cercle tracé sur la sphère l'une des extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan de ce cercle.

Tout cercle tracé sur la sphère a deux pôles.

Tous les cercles d'une sphère parallèles à un même plan ont pour pôles les extrémités du diamètre perpendiculaire à ce plan.

Théorème.

795. *Le pôle* P *d'un cercle* AMB *tracé sur la sphère est équidistant de tous les points du cercle* (*fig.* 568).

En effet, les obliques PM, PM', etc., menées du point P aux points M, M', etc., du cercle, sont égales parce que leurs pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire PI.

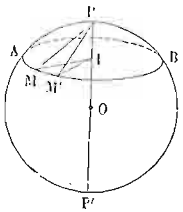


Fig. 568.

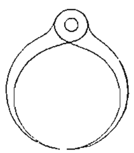


Fig. 569.

Il en résulte qu'avec un compas on peut tracer des cercles sur la sphère, comme sur un plan. Pour tracer le cercle AMB, par exemple, il suffit de prendre une ouverture de compas égale à PM, de maintenir une pointe de compas au point P, et de faire glisser l'autre sur la surface de la sphère. Pour tracer un grand cercle, il faut prendre une ouverture de compas égale à la corde qui sous-tend un arc de 90° sur un grand cercle.

On emploie, pour tracer des cercles sur la sphère, un compas à branches recourbées, dit *compas d'épaisseur* (*fig.* 569).

Problème.

796. *Trouver le rayon d'une sphère solide.*

1re Solution. D'un point P pris pour pôle (*fig.* 570), avec une ouverture de compas arbitraire, on trace un cercle sur la

sphère; sur ce cercle on marque trois points quelconques A, B et C. On mesure avec un compas d'épaisseur les distances BA, BC et AC. Avec ces trois longueurs, on construit, sur le papier, un triangle égal au triangle ABC, et à ce triangle on circonscrit un cercle; ce cercle est évidemment égal au petit cercle tracé sur la sphère. Cela fait, considérons le grand cercle de la sphère dont le plan passe par le diamètre PP' et par le point A, et menons les droites PA et P'A. Dans le triangle rectangle PAP', on connaît le côté PA de l'angle droit et la perpendiculaire AI menée du sommet sur l'hypoténuse; on construit sur le papier un triangle rectangle *pia* égal du triangle PIA, on mène au point *a* la perpendiculaire *ap'* au côté *pa*, cette droite rencontre *pi* au point *p'* et *pp'* est égal à PP', c'est-à-dire au diamètre de la sphère.

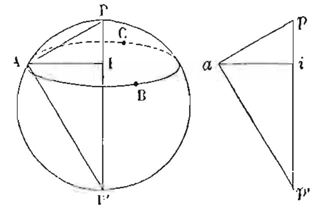


Fig. 570.

2e Solution. On prend sur la sphère deux points quelconques A et B (*fig.* 571); du point A et du point B comme pôles, avec la même ouverture de compas, on trace sur la sphère deux arcs de cercle qui se coupent en un point M équidistant des points A et B; on détermine de même deux autres points M' et M'' équidistants de A et de B. Les trois points M, M', M'', équidistants de A et de B, déterminent un plan qui est le lieu des points équidistants de A et de B, et qui, par conséquent, passe par le centre de la sphère. Donc les trois points M, M', M'', appartiennent à une circonférence de grand cercle. Avec un compas d'épaisseur, on mesure les distances MM', M'M'', MM'', et, avec ces trois longueurs on construit sur le papier un triangle : le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est le rayon de la sphère.

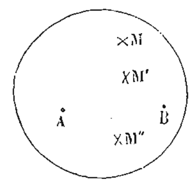


Fig. 571.

797. Application. Tracé d'un grand cercle sur la sphère. Connaissant le rayon de la sphère, on peut faire sur un plan un cercle égal à un grand cercle de la sphère et prendre la longueur de la corde qui sous-tend un arc égal au quart de ce cercle. Pour tracer sur la sphére le grand cercle qui a pour pôle un point A de la sphère, il suffira d'ouvrir un compas de façon que la distance des pointes soit égale à la longueur de cette corde, de placer une des pointes du compas au point A, et de faire mouvoir l'autre sur la sphère ; la pointe libre décrira le grand cercle demandé.

Problème.

798. *Tracer sur une sphère le grand cercle qui passe par deux points donnés* A *et* B (*fig.* 572).

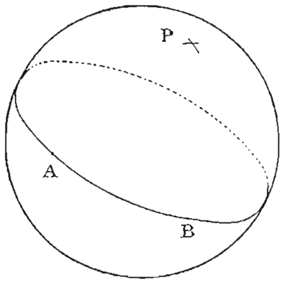


Fig. 572.

On trace sur la sphère le grand cercle qui a le point A pour pôle, et le grand cercle qui a le point B pour pôle ; soit P un de leurs points de rencontre. Les longueurs PA et PB étant toutes deux égales à la corde qui sous-tend le quart d'un grand cercle, le point P est un pôle du grand cercle qui passe par les points A et B. Le grand cercle tracé du point P pris pour pôle est donc le cercle demandé.

Problème.

799. *Tracer sur une sphère le cercle qui passe par trois points donnés* A, B, C, (*fig.* 573).

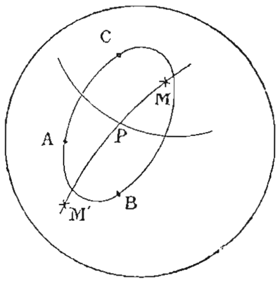


Fig. 573.

Tout revient à trouver l'un des pôles du cercle demandé, c'est-à-dire un point de la sphère qui soit équidistant des trois points donnés. Or, de ce que le lieu des points de l'espace équidistants de deux points donnés A et B est un plan R, on déduit que le lieu des points de la sphère équidistants de deux points donnés A et B sur la sphère est un cercle, intersection du plan R et de la sphère, et que ce cercle est un grand cercle, car le

plan R contient le centre de la sphère qui est un point équidistant des deux points A et B.

Cela étant, si des points A et B comme pôles, avec une même ouverture de compas, on trace deux cercles sur la sphère, et si M et M' sont les points communs à ces cercles, le lieu des points de la sphère équidistants des points A et B est le grand cercle qui passe par les deux points M et M'. On détermine de la même façon le grand cercle, lieu des points de la sphère équidistants des points A et C, et les points de rencontre P, P' de ces deux grands cercles seront les pôles du cercle demandé.

Si du point P comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la distance PA, on trace un cercle sur la sphère, ce cercle sera le cercle demandé.

§ V. Plan tangent a la sphère.

800. Définition. On dit qu'un plan est *tangent* à une sphère lorsqu'il n'a qu'un point commun avec la sphère.

Le fait qu'un plan peut n'avoir qu'un point commun avec une sphère, et par suite lui être tangent, n'est pas évident *a priori*, la possibilité de ce fait est démontrée par le théorème suivant.

Théorème.

801. *Un plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon d'une sphère est tangent à cette sphère* (*fig.* 574).

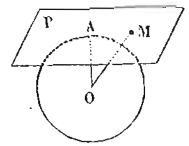


Fig. 574.

Soit, en effet, le plan P perpendiculaire à l'extrémité A du rayon OA ; prenons sur ce plan un point quelconque M autre que le point A. L'oblique OM étant plus grande que la perpendiculaire OA, le point M est en dehors de la sphère. Donc, le plan P, perpendiculaire à l'extrémité du rayon OA, n'a que le point A commun avec la sphère, et, par conséquent, est tangent à la sphère en ce point.

802. Réciproquement. *Un plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact.*

En effet, soit un plan P tangent à la sphère O au point A. Ce plan ne peut pénétrer dans l'intérieur de la sphère, sans quoi il rencontrerait la surface de la sphère en d'autres points que le point A. Tout point du plan P, autre que A, est donc extérieur à la sphère, et par conséquent est à une distance du centre supérieure à OA; donc OA est la plus courte distance du point O au plan P, et la droite OA est perpendiculaire à ce plan.

803. Corollaire. *Le plan tangent en un point* A *d'une sphère contient la tangente* AT *en ce point à toute courbe* AS *menée par ce point sur la sphère* (*fig.* 575).

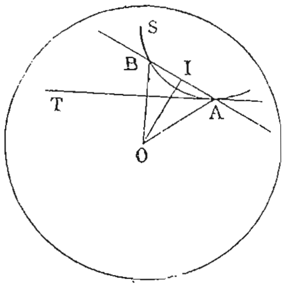


Fig. 575.

Prenons en effet sur la courbe AS un point quelconque B; le triangle AOB étant isocèle, la droite qui joint le point O au milieu I de AB est perpendiculaire sur AB. Faisons tourner la corde AB autour du point A jusqu'à ce que le point B vienne se confondre avec le point A, la sécante AB vient alors se placer sur la tangente AT, le point I, milieu de AB, vient en A, et OI vient sur OA. Donc la tangente AT est perpendiculaire à OA, et par suite elle est dans le plan perpendiculaire à OA au point A, c'est-à-dire dans le plan tangent à la sphère en A.

804. Définition. On dit qu'une droite est *tangente* à une sphère lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette sphère.

Le fait qu'une droite peut n'avoir qu'un point commun avec une sphère résulte du théorème suivant.

Théorème.

805. *Une droite* AT *perpendiculaire à l'extrémité* A *d'un rayon d'une sphère est tangente à la sphère.*

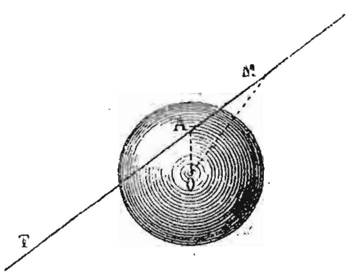


Fig. 576.

En effet tout point M de la droite AT, autre que A, est en dehors de la sphère, car l'oblique OM est plus grande que la perpendiculaire OA (*fig.* 576).

806. Réciproquement. *Toute tangente* AR *à une sphère en un point* A *de cette surface est perpendiculaire au rayon* OA.

En effet, la droite AT, qui n'a avec la surface de la sphère qu'un seul point commun A, ne peut pénétrer dans l'intérieur de la sphère, sans quoi cette droite prolongée rencontrerait nécessairement la surface en un second point. Dès lors tout point M de AT, autre que A, est en dehors de la sphère, et OA est moindre que OM. Le point A, étant, de tous les points de la droite AT, le plus rapproché du point O, est le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur AT.

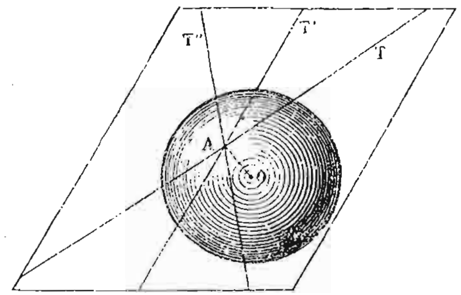


Fig. 577.

807. Corollaire I. *Le lieu des tangentes à une sphère, en un point* A *de cette surface, est le plan tangent à la sphère en ce point* (*fig.* 577).

Car le lieu de ces tangentes est le plan perpendiculaire au rayon OA mené par le point A.

808. Corollaire II. *Le lieu des tangentes menées à une sphère par un point extérieur* A *est un cône droit à base circulaire.*

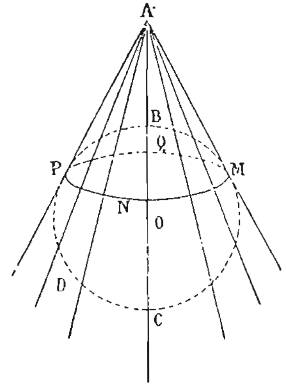


Fig. 578

Par le point A et par le centre O de la sphère, faisons passer un plan R (*fig.* 578). Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle BDC. Les tangentes menées par le point A à la sphère, dans le plan R, sont évidemment les tangentes menées par le point A au cercle BDC. Soit AM, l'une de ces tangentes. Si nous faisons tourner le plan R autour de AO, la demi-circonférence BMC engendre la surface de la sphère, et la droite AM engendre le lieu des tangentes à la sphère menées par le point A. Or cette droite engendre un cône droit à base circulaire dont le sommet est le point A, et dont la base est le cercle décrit par le point M.

En chaque point N du cercle MNP la sphère et le cône ont le même plan tangent. En effet, le plan tangent en N à la sphère contient les tangentes en N au cercle MNP et au cercle BNC; le plan tangent en N au cône contient aussi ces droites, donc les deux plans sont confondus.

On dit que le cône AMNP est *circonscrit* à la sphère et que la sphère est *inscrite* dans le cône. Le cercle MNP est le *cercle de contact* des deux surfaces.

809. Corollaire III. Par un point A donné hors d'une sphère on peut mener à cette sphère un nombre infini de plans tangents. Ces plans sont les plans tangents au cône qui a le point A pour sommet et qui est circonscrit à la sphère; les points de contact sont les points de contact du cône et de la sphère.

810. Corollaire IV. *Le lieu des tangentes à une sphère parallèles à un diamètre* BC *de la sphère est un cylindre de révolution dont les génératrices sont parallèles à* BC *et dont la base est le grand cercle* MNP *de la sphère dont le plan est perpendiculaire à* BC (*fig.* 579).

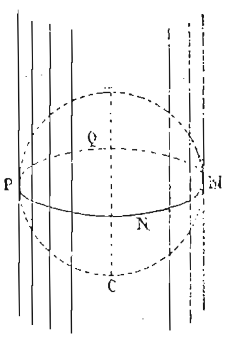


Fig. 579.

Même démonstration que pour le corollaire II. — En chaque point du cercle MNP, la sphère et le cylindre ont même plan tangent. On dit que le cylindre est *circonscrit* à la sphère, et que la sphère est *inscrite* dans le cylindre : le cercle MNP est le cercle de contact des deux surfaces.

811. Corollaire V. On peut mener à une sphère un nombre infini de plans tangents parallèles à une droite donnée ; ces plans sont les plans tangents au cylindre qui est circonscrit à la sphère et qui a ses génératrices parallèles à la direction donnée. Les points de contact sont les points de contact de la sphère et du cylindre.

Problème.

812. *Mener à une sphère* O *un plan tangent par une droite donnée* (*fig.* 580).

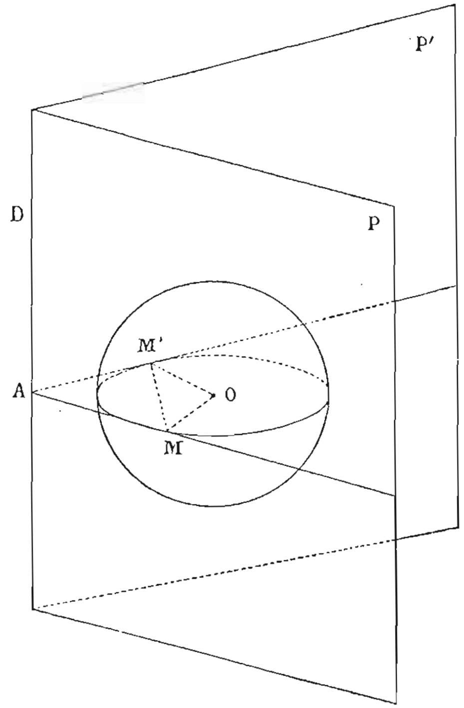


Fig. 580.

Supposons le problème résolu : soit P un plan tangent à la sphère O contenant la droite D, et soit M le point de contact.

La droite OM est perpendiculaire au plan P et, par suite, à la droite D, située dans ce plan. On peut donc mener par OM un plan Q perpendiculaire à la droite D : soit A le point de rencontre de ce plan et de la droite D. La droite AM, intersection du plan tangent P et du plan Q, est tangente au point M, au cercle d'intersection du plan Q et de la sphère. D'où la construction suivante : on mène par le centre O de la sphère un plan Q perpendiculaire à la droite D, et, par le point de rencontre A de ce plan et de la droite D, on mène une tangente au cercle d'intersection de la sphère et du plan Q. Si M est le point de contact, le plan de la droite D et du point M est tangent à la sphère en M.

Si la droite D ne rencontre pas la sphère, le point A est extérieur au grand cercle situé dans le plan Q; par ce point on peut mener deux tangentes AM, AM' à ce cercle, donc, par la droite on peut mener deux plans P, P′, tangents à la sphère. La corde des contacts MM′ est perpendiculaire à la droite D, car elle est dans un plan perpendiculaire à cette droite.

Si la droite D est tangente à la sphère, le point A est le point de contact de la droite et de la sphère ; les deux plans tangents, menés à la sphère par la droite, se confondent avec le plan tangent en A. Enfin si la droite D coupe la sphère en deux points, le point A, milieu de ces deux points, est dans la sphère, et, par suite, est dans le grand cercle situé dans le plan Q ; le problème est impossible, ce qui d'ailleurs est évident *a priori*.

§ VI. Positions relatives de deux sphères.

Théorème.

813. *Quand deux sphères se coupent, la ligne d'intersection est une circonférence dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres des deux sphères, et dont le centre est sur cette même ligne.*

En effet, soient O et O′ deux sphères qui se coupent (*fig.* 581) ; menons par la ligne des centres un plan qui rencontre les deux sphères suivant les grands cercles AMB, A′MB′. Soient M et M′ les points communs à ces deux cercles. Si l'on fait tourner le plan des deux cercles autour de OO′, le demi-cercle AMB engendre la sphère O, le demi-cercle A′MB′ engendre la sphère O′ ; et les points M et M′, communs aux deux cercles, engendrent une même circonférence dont le plan est perpendiculaire à OO′ et dont le centre est sur OO′. Cette circonférence engendrée par les points M et M′ est évidemment la ligne d'intersection des deux sphères.

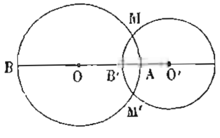


Fig. 581.

814. Si les grands cercles suivant lesquels un plan mené par la ligne des centres coupe les sphères sont tangents (*fig.* 582), la ligne d'intersection des deux sphères se réduit au point de

contact de ces deux cercles. On dit alors que les deux sphères sont tangentes, le point de contact est sur la ligne des centres,

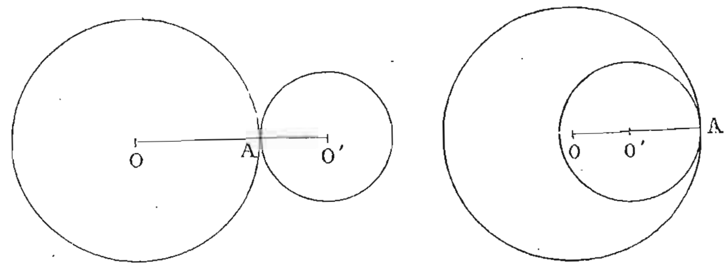


Fig. 582.

et, en ce point, les deux sphères ont le même plan tangent.

815. Deux sphères dans l'espace, comme deux circonférences dans un plan, peuvent occuper l'une par rapport à l'autre cinq positions.

Soient R et R′ les rayons des deux sphères, D la distance des centres.

Si les sphères sont extérieures, on a :		$D > R + R'$;
—	tangentes extérieurement, on a :	$D = R + R'$;
—	sécantes, on a simultanément :	$\begin{cases} D < R + R' ; \\ D > R - R' ; \end{cases}$
—	tangentes intérieurement, on a :	$D = R - R'$;
Si la sphère R′ est intérieure à la sphère R, on a :		$D < R - R'$;

Théorème.

816. *Deux sphères sont deux figures qui sont à la fois directement et inversement homothétiques.*

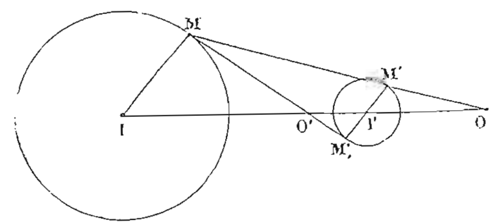


Fig. 583.

En effet, soient deux sphères O et O′, (*fig.* 583) ; deux rayons parallèles quelconques de même sens tels que OM et O′M′, ou de sens contraires tels que OM et $O'M'_1$, sont dans un rapport constant, donc (806) les figures sont à la fois directement et inversement homothétiques. Le centre d'homothétie directe est le point D où la ligne des centres rencontre la droite MM'; le centre d'homothétie inverse est le point I où la ligne des centres rencontre la droite MM'_1.

817. Remarque. Quatre sphères étant des figures à centre, deux à deux homothétiques, ces figures, ainsi qu'il a été expliqué au n° 619, ont seize axes d'homothétie, dont quatre d'homothétie directe et douze d'homothétie inverse, et ses seize axes d'homothétie sont situés quatre par quatre dans huit plans d'homothétie distincts.

§ VII. Plans tangents communs a deux sphères, a trois sphères.

Théorème.

818. *Tout plan tangent commun à deux sphères passe par l'un des centres d'homothétie de ces sphères.*

Soit P un plan tangent commun à deux sphères de centres O et O' (*fig.* 584), et soient A et A' les points de contact; les

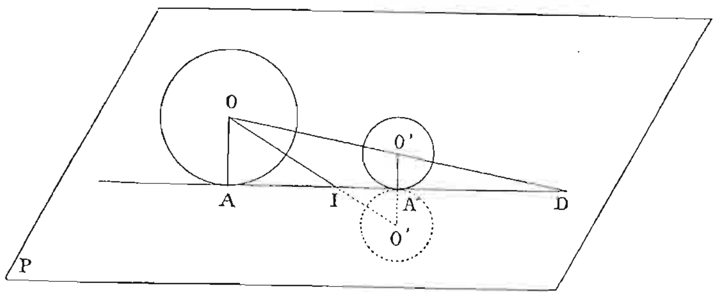


Fig. 584.

droites OA, O'A' perpendiculaires au plan P sont parallèles, donc OA, O'A' sont deux rayons homologues, et la droite AA' passe par le centre d'homothétie; le plan P qui contient cette droite passe aussi par ce point.

Si les deux sphères sont d'un même côté par rapport au plan tangent, les rayons OA, O'A' sont de même sens, et c'est par le centre D d'homothétie directe que passe le plan tangent.

Si les deux sphères sont de part et d'autre du plan tangent, les rayons OA, O'A' sont de sens contraires, et c'est par le centre I d'homothétie inverse que passe le plan tangent

819. Réciproquement. *Si un plan P est tangent à l'une des deux sphères* O et O', *et s'il passe par l'un des centres d'homothétie de ces sphères, il est tangent à l'autre.*

Supposons le plan P tangent à la sphère O au point A, et passant par le centre D d'homothétie des deux sphères. Menons O'A', perpendiculaire au plan P. Les trois points D, A, A', projections des points D, O, O', de la droite des centres sur le plan P, sont en ligne droite, et on a :

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{DO}{DO'}.$$

Le rapport $\frac{DO}{DO'}$ est égal au rapport des rayons; OA est le rayon de la sphère O; donc O'A' est égal au rayon de la sphère O'. Le plan P perpendiculaire au rayon O'A', à son extrémité A', est tangent à la sphère O' en A.

Même démonstration si le plan P passe par le centre I d'homothétie inverse.

Le plan P laisse les deux sphères d'un même côté, ou de côtés différents, selon qu'il passe par le centre d'homothétie directe ou par le centre d'homothétie inverse des deux sphères.

820. Les plans tangents à l'une des sphères menés par le point D sont les plans tangents au cône circonscrit à la même sphère, ayant le point D comme sommet; d'autre part les plans tangents menés par le point D à l'une des sphères sont tangents à l'autre. Donc les cônes circonscrits aux deux sphères, qui ont le point D comme sommet, ne forment qu'un seul cône, circonscrit à la fois aux deux sphères.

Pour la même raison, les cônes circonscrits aux deux sphères, qui ont le point I comme sommet, ne forment qu'un seul cône, circonscrit à la fois aux deux sphères.

Si les sphères sont extérieures, les points D et I sont tous deux extérieurs aux sphères, et il y a deux cônes circonscrits. Si les sphères sont tangentes extérieurement, le point I est le point de contact; le cône de sommet D subsiste, mais le cône de sommet I se réduit à un plan, qui est le plan tangent commun aux deux sphères. Si les deux sphères sont sécantes, le point D est toujours extérieur aux deux sphères, mais le point I est intérieur à chacune, il n'y a plus qu'un cône circonscrit aux deux sphères, celui de sommet D. Si les deux sphères sont tangentes intérieurement, le point D est le point de contact, le cône de sommet D se réduit à un plan, qui est le plan tangent commun aux deux sphères; quant au point I il est intérieur aux deux sphères, et, par conséquent, le cône circonscrit de sommet I fait défaut. Enfin si l'une des sphères est intérieure à l'autre, les deux points D et I sont tous deux à l'intérieur de chacune des sphères, et il n'y a pas de cône circonscrit aux deux sphères.

Théorème

821. *Un plan tangent commun à trois sphères passe par l'un des axes d'homothétie de ces trois sphères.*

Soit un plan P tangent à trois sphères O, O′, O″, tel que les trois sphères soient d'un même côté de ce plan. D'après le théorème précédent, le plan P passe par le centre D d'homotétie directe des sphères O′ et O″, par le centre D′ d'homothétie directe des sphères O et O″, en enfin par le centre D″ d'homothétie directe des sphères O et O′. Il passe donc par l'axe d'homothétie directe DD′D″ de ces trois sphères.

Soit un plan Q tangent aux mêmes sphères, tel que les sphères O′ et O″ soient d'un côté du plan, et la sphère O de l'autre côté. D'après le théorème précédent, ce plan passe par le centre D d'homothétie directe des sphères O′ et O″, par le centre I′ d'homothétie inverse des sphères O et O″, et enfin par le centre I″ d'homothétie inverse des sphères O et O′; il passe donc par l'axe d'homothétie inverse DI′I″ de ces trois sphères.

822. Réciproquement. *Tout plan qui passe par l'un des axes d'homothétie de trois sphères, et qui est tangent à l'une, est tangent aux deux autres.*

Soit P un plan qui passe par l'axe d'homothétie directe DD′D″

des trois sphères O, O′, O″, et qui est tangent à la sphère O

Ce plan P passant par le centre D″ d'homothétie directe des sphères O et O′, et étant tangent à la première, est tangent à la seconde; il laisse les deux sphères d'un même côté. De même, ce plan passant par le centre D′ d'homothétie directe des sphères O et O″, et étant tangent à la première, est tangent à la seconde; il laisse les deux sphères d'un même côté. Donc, le plan P est tangent aux trois sphères et les laisse d'un même côté.

Soit Q un plan qui passe par l'un des axes d'homothétie inverse des trois sphères, par exemple DI′I″, et qui est tangent à l'une de ces sphères, par exemple à la sphère O.

Ce plan passant par le centre d'homothétie inverse I″, des sphères O et O′, et étant tangent à la première, est tangent à la seconde; les deux sphères sont de part et d'autre de ce plan. De même, le plan P passant par le centre I′ d'homothétie inverse des sphères O et O″, et étant tangent à la première, est tangent à la seconde; les deux sphères sont de part et d'autre de ce plan. Donc, le plan Q est tangent aux trois sphères O, O′, O″; la première est d'un côté du plan, les deux autres sont de l'autre côté.

823. De là résulte le moyen de mener un plan tangent commun à trois sphères. Il suffit de mener à l'une d'elles un plan tangent par l'un des axes d'homothétie des trois sphères.

Par l'axe d'homothétie directe on peut, en général, mener deux plans tangents à l'une des sphères; chacun de ces plans sera tangent aux deux autres et les trois sphères seront d'un même côté de ce plan.

Par chaque axe d'homothétie inverse on pourra de même, en général, mener deux plans tangents à l'une de ces sphères; ce plan sera tangent aux deux autres, et une des trois sphères sera seule d'un côté du plan, les autres de l'autre; les deux sphères qui seront d'un même côté sont celles dont le centre d'homothétie directe est sur l'axe d'homothétie employé.

824. Comme il y a un axe d'homothétie directe et trois axes d'homothétie inverse, on voit qu'en général on peut mener à trois sphères huit plans tangents communs, parmi lesquels deux seulement laissent les trois sphères d'un même côté.

§ VIII. Triangles sphériques.

ANGLES DE DEUX GRANDS CERCLES.

825. Définition. On appelle, en général, *angle de deux lignes* tracées sur une sphère l'angle formé par les tangentes à ces lignes au point où elles se rencontrent. En particulier, l'angle de deux arcs de grand cercle AB, AC, tracés sur une sphère, est l'angle RAS des tangentes AR, AS à ces arcs au point A (*fig.* 585). Or, ces tangentes étant perpendiculaires au rayon OA, et situées l'une dans le plan OAB, l'autre dans le plan OAC, l'angle RAS est l'angle plan de l'angle dièdre formé par les plans des deux grands cercles.

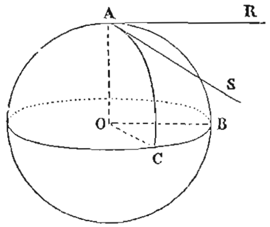


Fig. 585.

Si du point A comme pôle, avec une ouverture de compas égale à la corde d'un quadrant, on décrit sur la sphère l'arc de grand cercle BC, cet arc est dans le plan mené par le centre perpendiculairement à OA. Il a même mesure que l'angle BOC, qui est égal à l'angle RAS, et, par conséquent, il a même mesure que l'angle des arcs AB et AC.

Donc, *l'angle de deux arcs de grands cercles a même mesure que l'arc de grand cercle décrit du sommet de l'angle pris pour pôle et compris entre les côtés de l'angle.*

826. Deux lignes qui se coupent en un point A sur une sphère forment en ce point quatre angles, deux à deux opposés par le sommet, deux à deux adjacents; les angles opposés par le sommet sont égaux, les angles adjacents sont supplémentaires. Si l'un des quatre angles est droit, les quatre angles sont droits, et les deux lignes sont dites *perpendiculaires*.

827. Deux grands cercles se coupent en deux points diamétralement opposés; les quatre angles formés en l'un de ces points sont respectivement égaux aux quatre angles formés en l'autre point.

Théorème.

828. *Pour que deux grands cercles soient perpendiculaires, il faut et il suffit que chacun d'eux contienne les pôles de l'autre.*

En effet, soient AMA′, ANA′, deux grands cercles perpendiculaires (*fig.* 586), et soit P l'un des pôles du cercle AMA′; les plans des cercles sont perpendiculaires et la droite OP, qui passe par un point de l'intersection de ces plans et qui est perpendiculaire à l'un d'eux, est située dans l'autre; donc le point P est sur le grand cercle ANA′.

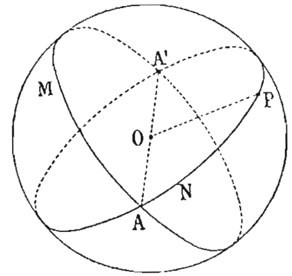


Fig. 586.

Réciproquement, soit P l'un des pôles d'un grand cercle AMA′, le plan de tout grand cercle passant par le point P contient la droite OP perpendiculaire au plan AMA′, et, par conséquent, est perpendiculaire au plan AMA′; donc tout grand cercle passant par l'un des pôles d'un autre grand cercle est perpendiculaire à ce grand cercle.

TRIANGLES ET POLYGONES SPHÉRIQUES.

829. Définitions. On appelle *triangle sphérique* une portion ABC (*fig.* 587) de la surface de la sphère limitée par trois arcs de grands cercles AB, BC, CA, moindres chacun qu'une demi-circonférence. Les points A, B, C, sont les *sommets* du triangle. Les arcs AB, BC, CA, respectivement moindres qu'une demi-circonférence sont les *côtés*, et les angles CAB, ABC, BCA, qu'ils forment entre eux sont les *angles* du triangle sphérique.

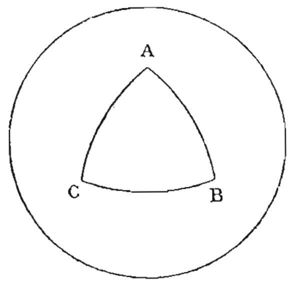


Fig. 587.

830. Plus généralement, on appelle *polyone sphérique* une portion ABCDE (*fig.* 588) de la surface de la sphère limitée par les arcs de grands cercles AB, BC, CD,....., etc. Les points A, B, C,..... sont les sommets du polygone sphérique. Les arcs AB, BC, CD,..... sont les côtés, et les angles EAB, ABC, BCD.... qu'ils forment entre eux sont les angles de ce polygone sphérique.

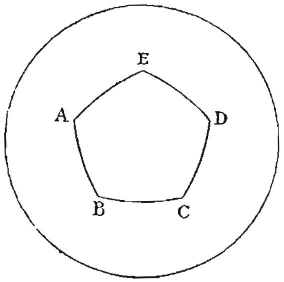


Fig. 588.

On suppose, en général, chaque côté d'un polygone sphérique moindre qu'une demi-circonférence; toutefois, on pourrait aussi considérer des polygones sphériques ne remplissant pas cette condition.

831. On dit qu'un polygone sphérique est *convexe* lorsqu'il est tout entier dans l'un des deux hémisphères limités par un quelconque de ses côtés prolongé de façon à former la circonférence d'un grand cercle. Tel est le polygone ABCDE (*fig.* 589).

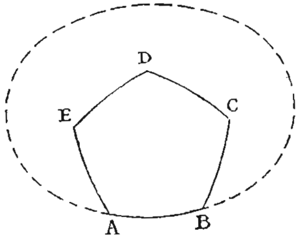


Fig. 589.

Un polygone sphérique convexe ne peut être rencontré en plus de deux points par un arc de grand cercle (45).

Théorème.

832. *Si un polygone sphérique est convexe, chacun de ses côtés est moindre qu'une demi-circonférence.*

Car, si un côté AB d'un polygone sphérique supposé convexe surpassait une demi-circonférence (*fig.* 590), on pourrait prendre sur ce côté, entre A et B, un point M tel que l'arc AM soit égal à une demi-circonférence, et la circonférence de grand cercle à laquelle appartient le côté AE passerait par ce point M. Dès lors, les deux portions AM et MB du côté AMB du polygone sphérique seraient l'une dans l'un des hémisphères limités par le grand

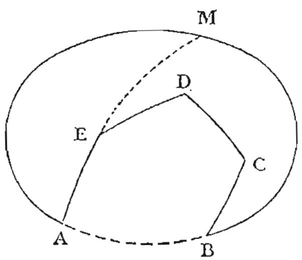


Fig. 590.

cercle AE, l'autre dans l'autre, et, par conséquent, le polygone sphérique ne serait pas convexe.

833. Pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés la réciproque n'est pas vraie, le polygone n'est pas nécessairement convexe quand chaque côté est moindre qu'une demi-circonférence ; mais nous allons montrer que cette réciproque est vraie pour un polygone sphérique de trois côtés, c'est-à-dire pour un triangle.

834. *Un triangle sphérique* ABC *est un polygone convexe* (*fig.* 591).

Prolongeons un quelconque des côtés du triangle, AB par exemple; les points A′ et B′ où le grand cercle AB rencontre les grands cercles auxquels appartiennent les deux autres côtés du triangle, sont diamétralement opposés aux points A et B. Le grand cercle ABA′B′ partage la sphère en deux hémisphères; chacun des arcs AC, BC, moindre qu'une demi-circonférence, est tout entier dans celui des deux hémisphères qui contient le point C; donc le triangle est tout entier dans un même hémisphère limité par un quelconque de ses côtés prolongé de façon à former la circonférence d'un grand cercle.

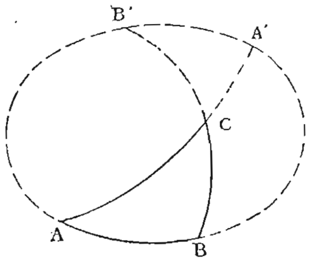


Fig. 591.

835. Si l'on joint le centre O de la sphère aux sommets A, B, C, D,... d'un polygone sphérique on fait correspondre à ce polygone sphérique un angle polyèdre OABCD..... (*fig.* 592).

Les angles des faces de l'angle polyèdre, AOB, BOC, COD..., ont même mesure que les côtés correspondants AB, BC, CD,.....du polygone, et les angles dièdres de l'angle polyèdre dont les arêtes sont OA, OB, OC,.... ont la même mesure que les angles correspondants EAB, ABC, BCD,.... du polygone sphérique.

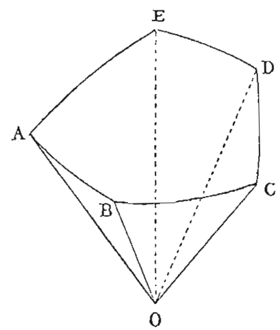


Fig. 592.

836. Si le polygone sphérique est convexe, l'angle polyèdre est aussi convexe, car le plan du côté AB, par exemple, coïncide avec le plan de la face AOB de l'angle polyèdre, et si le polygone sphérique est tout entier dans l'un des hémisphères limités par le côté AB prolongé, les arêtes de l'angle polyèdre sont toutes d'un même côté par rapport au plan de la face AOB.

837. Réciproquement, à un angle polyèdre convexe dont le sommet est au centre de la sphère, correspond sur la sphère un polygone convexe.

838. Il suit de là qu'à toute propriété des angles polyèdres correspond une propriété des polygones sphériques.

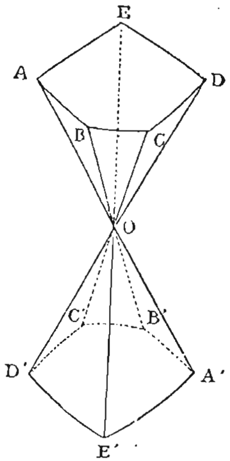


Fig. 593.

Ainsi, de ce que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits, il résulte que :

839. *Dans tout polygone sphérique convexe, la somme des côtés est moindre qu'une circonférence de grand cercle.*

840. A deux angles polyèdres symétriques OABCDE, OA'B'C'D'E', correspondent des polygones sphériques symétriques, ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 593). Des propriétés connues des angles polyèdres symétriques, il résulte *que deux polygones sphériques symétriques ont leurs éléments égaux chacun à chacun, mais, en général, ne sont pas superposables ; la disposition des éléments dans l'un des polygones est inverse de la disposition des éléments égaux à ceux-ci dans l'autre polygone sphérique.*

841. En particulier, les propriétés des trièdres peuvent être transportées aux triangles sphériques, il suffit de remplacer les mots *trièdre*, *faces*, *angles dièdres* par les mots *triangle sphérique*, *côtés*, *angles*. Nous mettons en regard les propriétés correspondantes des trièdres et des triangles sphériques.

TRIÈDRES.	TRIANGLES SPHÉRIQUES.
I. *Dans un trièdre, une face quelconque est moindre que la somme des deux autres, et la somme des trois faces est comprise entre zéro et quatre angles droits.*	I. *Dans un triangle sphérique, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres, et la somme des trois côtés est comprise entre zéro et une circonférence de grand cercle.*
Etant donnés trois angles, on peut construire deux trièdres symétriques qui aient ces angles pour faces, pourvu que le plus grand angle soit moindre que la somme des deux autres, et que la somme des trois angles soit comprise entre zéro et quatre droits.	*Etant donnés trois arcs de grand cercle, on peut construire deux triangles sphériques symétriques qui aient ces trois arcs pour côtés, pourvu que le plus grand arc soit moindre que la somme des deux autres, et que la somme des trois arcs soit comprise entre zéro et une circonférence de grand cercle.*
II. *Dans un trièdre, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits, et le plus petit angle dièdre augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres.*	II. *Dans un triangle sphérique, la somme des angles dièdres est comprise entre deux droits et six droits, et le plus petit angle augmenté de deux droits surpasse la somme des deux autres.*
Etant donnés trois angles dièdres, on peut construire deux trièdres symétriques qui aient leurs angles dièdres égaux à ces angles dièdres, pourvu que la somme des trois dièdres donnés soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit, augmenté de deux droits, surpasse la somme des deux autres.	*Etant donnés trois angles, on peut construire deux triangles sphériques symétriques qui aient leurs angles égaux à ces angles, pourvu que la somme des trois angles donnés soit comprise entre deux droits et six droits, et que le plus petit angle, augmenté de deux droits, surpasse la somme des deux autres.*
III. *Si dans un trièdre deux*	III. *Si dans un triangle sphé-*

faces sont égales, les angles dièdres opposés sont égaux, et le trièdre est superposable à son symétrique.

Si dans un trièdre deux faces sont inégales, les angles dièdres opposés sont inégaux : à la plus grande face est opposé le plus grand dièdre.

Les réciproques sont vraies.

IV. *Deux trièdres ont leurs six éléments égaux chacun à chacun :*

1° *Lorsqu'ils ont une face égale adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun.*

2° *Lorsqu'ils ont un angle dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune.*

3° *Lorsqu'ils ont les trois faces égales chacune à chacune.*

4° *Lorsqu'ils ont les trois dièdres égaux chacun à chacun.*

Les deux trièdres sont égaux, ou symétriques, selon que la disposition des trois éléments considérés dans l'un des trièdres est semblable, ou inverse, à la disposition des éléments égaux à ceux-ci dans l'autre trièdre.

V. *Si deux angles trièdres ont deux faces égales chacune à chacune, comprenant des angles dièdres inégaux, les troisièmes faces sont inégales, et celle qui est opposée au plus petit dièdre est la plus petite.*

Si, laissant fixes les grandeurs de deux faces d'un trièdre, on fait varier l'angle compris entre ces deux faces, la grandeur de la face opposée varie ; elle augmente, ou diminue, selon que l'angle dièdre augmente ou diminue.

Réciproquement, si deux trièdres ont deux faces égales chacune à chacune, et si les troisièmes faces sont inégales, les dièdres opposés aux faces inégales sont inégaux ; le dièdre opposé à la plus petite face est le plus petit.

rique deux côtés sont égaux, les angles opposés sont égaux, et le triangle sphérique est superposable à son symétrique.

Si dans un triangle sphérique deux côtés sont inégaux, les angles opposés sont inégaux : au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

Les réciproques sont vraies.

IV. *Deux triangles sphériques appartenant à une même sphère, ou à deux sphères égales, ont leurs six éléments égaux chacun à chacun :*

1° *Lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

2° *Lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*

3° *Lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

4° *Lorsqu'ils ont les trois angles égaux chacun à chacun.*

Les deux triangles sphériques sont égaux, ou symétriques, selon que la disposition des trois éléments considérés dans l'un des triangles est semblable, ou inverse, à la disposition des éléments égaux à ceux-ci dans l'autre triangle.

V. *Si deux triangles sphériques, appartenant à une même sphère ou à des sphères égales, ont deux côtés égaux chacun à chacun, comprenant des angles inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux, et celui qui est opposé au plus petit angle est le plus petit.*

Si, laissant fixes les grandeurs de deux côtés d'un triangle tracé sur une sphère, on fait varier l'angle compris entre ces deux côtés, la grandeur du côté opposé varie ; elle augmente, ou diminue, selon que l'angle augmente, ou diminue.

Réciproquement, si deux triangles sphériques, appartenant à la même sphère ou à des sphères égales, ont deux côtés égaux chacun à chacun, et si les troisièmes côtés sont inégaux, les angles opposés aux côtés inégaux sont inégaux ; l'angle opposé au plus petit côté est le plus petit.

TRIANGLES SUPPLÉMENTAIRES DITS AUSSI TRIANGLES POLAIRES.

842. On dit qu'un arc de grand cercle MN et un angle A d'un triangle sphérique sont *supplémentaires* quand la somme de l'arc MN et de l'arc de grand cercle qui a même mesure que l'angle A est égale à une demi-circonférence de grand cercle.

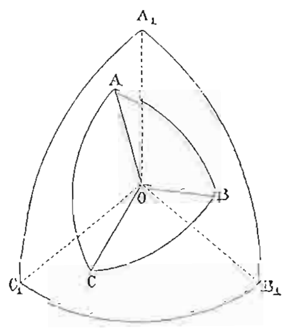


Fig. 594.

Cela étant, si l'on construit, d'après la règle du n° 588, deux trièdres supplémentaires $OABC$, $OA_1B_1C_1$ (*fig.* 594), ayant pour sommet commun le centre O d'une sphère, à ces trièdres correspondent sur la sphère deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, tels que les côtés de l'un sont supplémentaires des angles de l'autre ; pour cette raison, ces deux triangles sont appelés *triangles supplémentaires*.

843. De ce que l'arête OA_1 du second trièdre est perpendiculaire au plan de la face OBC du premier, et est située par rapport à ce plan du même côté que OA, il résulte que le point A_1 est le pôle de l'arc de grand cercle BC, situé sur celui des hémisphères limités par ce grand cercle qui contient le point A. Pour la même raison, B_1 est le pôle de l'arc de grand cercle AC, situé sur celui des hémisphères limités par ce grand cercle qui contient le point B. Enfin C_1 est le pôle de l'arc de grand cercle AB, situé sur celui des hémisphères limités par ce grand cercle qui contient par le point C.

Comme les deux trièdres sont des figures réciproques, les deux triangles sphériques sont aussi des figures réciproques, et, par suite, un sommet A, par exemple, du triangle ABC est le pôle de l'arc du grand cercle B_1C_1 situé sur celui des hémisphères limités par ce grand cercle qui contient le point A_1.

844. En raison de cette propriété, deux triangles supplémentaires ABC, $A_1B_1C_1$, sont aussi appelés *triangles polaires*. (Voir, dans le complément du VII^e livre, l'étude directe des triangles polaires.)

§ IX. Aire de la sphère.

Théorème.

845. *L'aire de la surface engendrée par une ligne polygonale régulière qui tourne autour d'un axe mené par son centre, dans son plan, et tel que la ligne polygonale est tout entière d'un même côté de cet axe, a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans la ligne polygonale par la projection de la ligne polygonale sur l'axe.*

Soit (*fig.* 595) une ligne polygonale régulière ABCDE que l'on fait tourner autour d'un axe RR' mené par son centre O, dans son plan, de façon que la ligne polygonale entière est d'un même côté de cet axe. La surface engendrée par cette ligne est la somme des surfaces engendrées par les côtés AB, BC, CD, DE.

Soit AB un côté non parallèle à l'axe RR' et ayant ses extrémités en dehors de l'axe; la surface engendrée par le côté AB est la surface latérale d'un tronc de cône à bases parallèles ; elle a pour mesure le produit de la circonférence de rayon Ii, équidistante des deux bases, par l'arête AB :

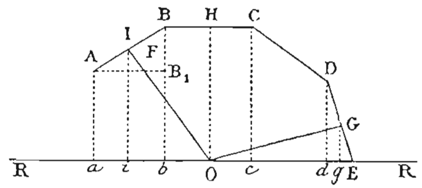


Fig. 595.

$$\text{Surf. } AB = 2\pi Ii \times AB.$$

Or menons AB_1 parallèle à l'axe RR', et comparons les deux triangles rectangles ABB_1, OIi; ces deux triangles ont les côtés respectivement perpendiculaires, donc ils sont semblables, et l'on a

$$\frac{AB}{OI} = \frac{AB_1}{Ii}$$

et, comme

$$AB_1 = ab,$$

on a :

$$\frac{AB}{OI} = \frac{ab}{Ii},$$

d'où

$$AB \times Ii = OI \times ab.$$

Donc

$$\text{Surf. } AB = 2\pi OI \times ab.$$

L'aire de la surface engendrée par le côté AB est égale au produit de la circonférence inscrite dans la ligne polygonale, $2\pi OI$, par la projection ab de ce côté sur l'axe. — Il en est de même, quelle que soit la position du côté considéré.

En effet, soit d'abord un côté BC parallèle à l'axe RR' ; la surface engendrée par le côté BC est la surface latérale d'un cylindre ; elle a pour mesure la circonférence OI multipliée par la hauteur; donc

$$\text{Surf. } BC = 2\pi OI \times bc.$$

Soit, enfin, un côté DE dont l'extrémité E est située sur l'axe RR'. La surface engendrée par ce côté est la surface latérale d'un cône droit à base circulaire ; elle a pour mesure la circonférence de rayon Gg, équidistante du sommet et de la base, multipliée par l'arête DE :

$$\text{Surf. DE} = 2\pi Gg \times DE.$$

Or les triangles rectangles DEd et OGg, dont les côtés sont respectivement perpendiculaires, sont semblables, et l'on a

$$\frac{DE}{OG} = \frac{dE}{Gg},$$

d'où

$$DE \times Gg = OG \times dE;$$

donc

$$\text{Surf. DE} = 2\pi OG = dE.$$

La surface engendrée par chaque élément de la ligne polygonale ayant pour mesure le produit de la circonférence inscrite, $2\pi OI$, par la projection de cet élément sur l'axe, la surface engendrée par la ligne polygonale ABCDE a pour mesure le produit de la circonférence inscrite, $2\pi OI$, par la projection aE de cette ligne sur l'axe.

846. Définition. On appelle *zone* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles. Ces plans coupent la surface de la sphère suivant les cercles que l'on nomme *bases* de la zone. La distance de ces deux plans est la *hauteur* de la zone. Si l'un des plans est tangent à la sphère, la zone n'a qu'une base; la hauteur est alors la distance du pôle le plus voisin du cercle de base au plan de ce cercle.

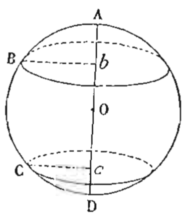


Fig. 596.

Si l'on fait tourner une demi-circonférence ABCD autour d'un diamètre AD, cette demi-circonférence engendre la surface de la sphère; un arc BC de la circonférence engendre la zone limitée par les cercles décrits par les points B et C (*fig.* 596). La hauteur de la zone est la projection bc de la corde BC sur l'axe de rotation AD. Si l'une des extrémités de l'arc est sur l'axe, l'un des cercles de base se réduit à un point ; ainsi l'arc AB, en tournant autour de AD, engendre une zone à une base dont la hauteur est Ab.

847. Aire d'une zone. La surface d'une zone étant courbe ne peut être comparée à l'unité d'aire qui est une portion de surface plane; il est nécessaire de définir ce qu'on entend par aire d'une zone.

On appelle aire de la zone engendrée par l'arc BC, *en tournant autour du diamètre* AD, *la limite vers laquelle tend l'aire de la surface engendrée par une portion de ligne polygonale regulière inscrite dans l'arc* BC, *quand on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne polygonale.*

Le théorème suivant montre que cette limite existe, et en donne l'expression.

Théorème.

848. *L'aire d'une zone a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur de la zone.*

Considérons la zone engendrée par l'arc de cercle BC, en tournant autour du diamètre AD (*fig.* 597). Dans l'arc BC inscrivons une ligne brisée régulière BEFC. La surface engendrée par la ligne BEEC a pour mesure le produit de la circonférence inscrite dans cette ligne, $2\pi OI$, par la projection bc de cette ligne sur l'axe

$$\text{Surf. BEFC} = 2\pi OI \times bc.$$

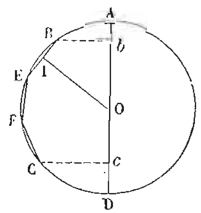


Fig. 597.

Or, imaginons que l'on double indéfiniment le nombre des côtés de la ligne polygonale régulière inscrite dans l'arc BC; la circonférence inscrite dans cette ligne polygonale régulière se confond, à la limite, avec la circonférence du cercle ABCD ; la projection de la ligne polygonale sur AD est toujours bc ; donc l'aire de la surface engendrée par la ligne polygonale régulière inscrite, quand on double indéfiniment le nombre des côtés de cette ligne, tend vers une limite qui a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle de la sphère par la hauteur de la zone. Cette limite est ce que nous avons appelé l'aire de la zone ; donc le théorème est démontré.

849. Appelons R le rayon de la sphère, h la hauteur de la zone BC, on a

$$\text{Surf. zone BC} = 2\pi Rh.$$

850. Corollaire. *Les aires de deux zones d'une même sphère sont proportionnelles aux hauteurs de ces zones.*

Soient R le rayon de la sphère, h et h' les hauteurs des deux zones, S et S' les aires de ces zones, on a

$$S = 2\pi R h \qquad S' = 2\pi R h';$$

donc

$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}.$$

Théorème.

851. *L'aire d'une sphère a pour mesure le produit de la circonférence d'un grand cercle par le diamètre.*

En effet, prenons un arc ABCD égal à une demi-circonférence (*fig.* 598); la zone engendrée par cet arc en tournant autour du diamètre AD est la surface de la sphère, la hauteur de cette zone est le diamètre AD; donc l'aire de la sphère est égale à la circonférence d'un grand cercle multipliée par le diamètre.

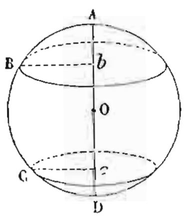


Fig. 598.

Soit R le rayon d'une sphère,

$$\text{Surf. sphère } R = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2.$$

852. Corollaire I. *La surface d'une sphère équivaut à quatre fois la surface d'un grand cercle.*

853. Corollaire II. *Les surfaces de deux sphères sont proportionnelles aux carrés des rayons des sphères.*

Soient R et R' les deux rayons, on a

$$\text{Surf. sphère } R = 4\pi R^2$$
$$\text{Surf. sphère } R' = 4\pi R'^2;$$

donc

$$\frac{\text{Surf. sphère } R}{\text{Surf. sphère } R'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

§ X. Volume de la sphère.

Théorème.

854. *Le volume engendré par un triangle* ABC, *en tournant autour d'un axe* AR *mené dans son plan, par un des sommets* A *du triangle, extérieurement à ce triangle, a pour mesure le produit de la surface engendrée par le côté* BC, *opposé au sommet fixe, par le tiers de la perpendiculaire* AI *abaissée du sommet fixe sur ce côté* (*fig.* 599).

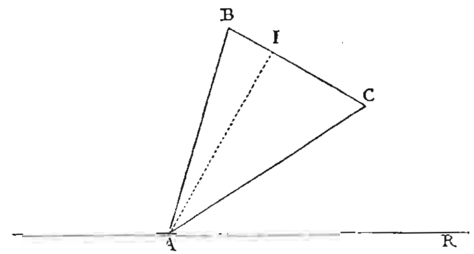


Fig. 599.

1° Considérons d'abord le cas où l'axe de rotation AR coïncide avec l'un des côtés AC du triangle. Abaissons du sommet B la perpendiculaire BD sur l'axe AC. Supposons que le pied D de la perpendiculaire tombe entre A et C (*fig.* 600); le volume engendré par le triangle ABC, en tournant autour de l'axe AC, est la somme des volumes des cônes engendrés par les deux triangles rectangles ABD et BDC;

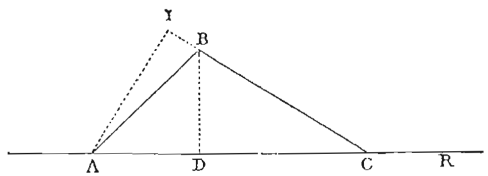


Fig. 600.

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. ABD} + \text{vol. CBD}.$$

Or

$$\text{Volume ABD} = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AD \qquad \text{Volume CBD} = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times DC,$$

donc

$$\text{Volume ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times (AD + DC) = \frac{1}{3}\pi\overline{BD}^2 \times AC.$$

Mais le produit BD × AC, qui représente le double de la surface du triangle ABC, est égal au produit $AI \times BC$ qui représente aussi le double de la même surface ; donc on peut encore écrire

$$\text{Volume } ABC = \frac{1}{3}\pi DB \times BC \times AI.$$

D'autre part, la surface engendrée par le côté BC, en tournant autour de AC, est la surface latérale d'un cône ; elle a pour mesure la circonférence de base, $2\pi BD$, multipliée par la moitié de l'arête BC ; on a donc

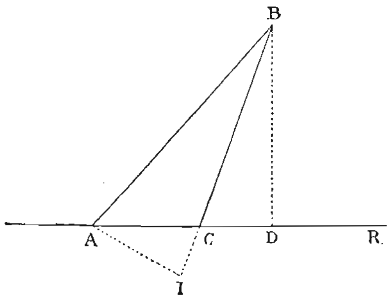


Fig. 601.

$$\text{Surf. } BC = \pi BD \times BC ;$$

et enfin,

$$\text{Volume } ABC = \text{Surf. } BC \times \frac{1}{3} AI.$$

Si le pied D de la perpendiculaire BD tombe sur le prolongement de AC (*fig.* 601), on a

$$\text{Volume } ABC = \text{volume } ABD - \text{volume } CBD.$$

Or

$$\text{Volume } ABD = \frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times AD, \quad \text{Volume } CBD = \frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times DC,$$

donc

$$\text{Volume } ABC = \frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times (AD - CD) = \frac{1}{3}\pi \overline{BD}^2 \times AC,$$

et on continue le raisonnement comme ci-dessus.

2° Supposons en second lieu que l'axe AD ne coïncide pas avec le côté AC, et ne lui soit pas parallèle (*fig.* 602). On peut, dans ce cas, considérer le volume engendré par le triangle ABC comme la différence des volumes engendrés par les triangles ABC et ACD, en tournant autour de l'axe AR :

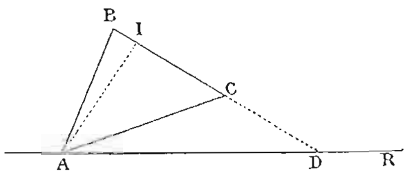


Fig. 602.

$$\text{Volume } ABC = \text{volume } ABD - \text{volume } ACD.$$

Or

$$\text{Volume } ABD = \frac{1}{3} AI \times \text{surf. } BD$$

$$\text{Volume } ACD = \frac{1}{3} AI \times \text{surf. } CD ;$$

donc

$$\text{Volume } ABC = \frac{1}{3} AI \times (\text{surf. } BD - \text{surf. } CD) = \frac{1}{3} AI \times \text{surf. } BC.$$

3° Considérons enfin le cas où l'axe AR est parallèle au côté BC (*fig.* 603). Le raisonnement précédent n'est plus applicable ; menons alors, du sommet A, la perpendiculaire AI sur le côté BC. Le point I peut tomber entre B et C, ou sur le prolongement de BC. Supposons que le pied I de la perpendiculaire tombe entre B et C. Le volume engendré par le triangle ABC, en tournant autour de AR, est égal au cylindre engendré par le rectangle DBCE, moins la somme des cônes engendrés par les triangles rectangles ABD, ACE.

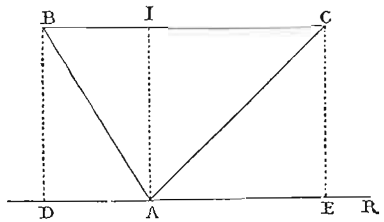


Fig. 603.

$$\text{Vol. } ABC = \text{vol. } DBCE - \text{vol. } ABD - \text{vol. } ACE.$$

Or

$$\text{Vol. } DBCE = \pi \overline{AI}^2 \times BC$$

$$\text{Vol. } ABD = \frac{1}{3}\pi \overline{AI}^2 \times AD$$

$$\text{Vol. } ACE = \frac{1}{3}\pi \overline{AI}^2 \times AE,$$

donc

$$\text{Vol. } ABC = \frac{1}{3}\pi \overline{AI}^2 (3BC - AD - AE).$$

Or

$$BC = AD + AE ;$$

donc

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2 \times 2\text{BC}.$$

D'autre part, la surface engendrée par BC est la surface d'un cylindre; elle a pour mesure la circonférence de base, $2\pi\text{AI}$, multipliée par la hauteur BC.

$$\text{Surf. BC} = 2\pi\text{AI} \times \text{BC}.$$

$$\text{Vol. ABC} = \text{surf. BC} \times \frac{1}{3}\text{AI}.$$

Enfin, si le pied de la perpendiculaire AI tombe sur le prolongement de BC (*fig.* 604), on a

$$\text{Vol. ABC} = \text{vol. DBCE} + \text{vol. ABD} - \text{vol. ACE}.$$

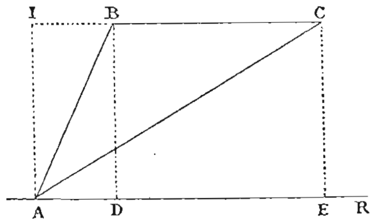


Fig. 604.

Or

$$\text{Vol. DBCE} = \pi\overline{\text{AI}}^2 \times \text{BC}$$

$$\text{Vol. ABD} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2 \times \text{AD};$$

$$\text{Vol. ACE} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2 \times \text{AE};$$

donc

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2(3\text{BC} + \text{AD} - \text{AE}).$$

Or

$$\text{BC} + \text{AD} = \text{AE};$$

donc

$$\text{Vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{AI}}^2 \times 2\text{BC} = \frac{1}{3}\text{AI} \times \text{surf. BC}.$$

855. Corollaire. *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier* OABCD, *en tournant autour d'un axe mené par son centre, dans son plan, extérieurement au secteur, a pour mesure le produit de la surface engendrée par la ligne polygonale régulière* ABCD, *qui limite le secteur, par le tiers de rayon* OI *du cercle inscrit dans cette ligne polygonale* (*fig.* 605).

En effet

$$\text{Vol. OABCD} = \text{vol. OAB} + \text{vol. OBC} + \text{vol. OCD}.$$

Or, on a

$$\text{Vol. OAB} = \frac{1}{3}\text{OI} \times \text{surf. AB}$$

$$\text{Vol. OBC} = \frac{1}{3}\text{OI} \times \text{surf. BC}$$

$$\text{Vol. OCD} = \frac{1}{3}\text{OI} \times \text{surf. CD};$$

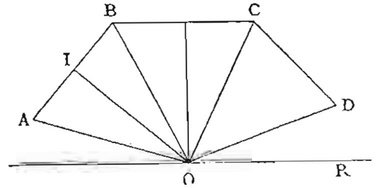


Fig. 605.

donc

$$\text{Vol. OABCD} = \frac{1}{3}\text{OI} \times (\text{surf. AB} + \text{surf. BC} + \text{surf. CD})$$

ou

$$\text{Vol. OABC} = \frac{1}{3}\text{OI} \times \text{surf. ABCD}.$$

856. Définition. *On appelle volume engendré par un secteur circulaire* OBC, *en tournant autour d'un diamètre* AD, *extérieur à ce secteur* (*fig.* 606), *la limite vers laquelle tend le volume engendré par un secteur polygonal régulier* OBEFC *inscrit dans le secteur circulaire, en tournant autour de* AD, *quand on double indéfiniment le nombre des triangles du secteur.*

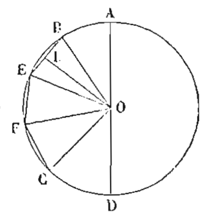


Fig. 606.

Le théorème suivant montre que cette limite existe et en donne l'expression.

Théorème.

857. *Le volume engendré par un secteur circulaire* OBC (*fig.* 606), *en tournant autour d'un diamètre* AD, *extérieur à ce secteur, a pour mesure le produit de la surface de la zone qui limite ce volume par le tiers du rayon* OA.

En effet, le volume engendré par un secteur polygonal régulier OBEFC, inscrit dans le secteur circulaire, a pour mesure le produit de la surface engendrée par la ligne polygonale BEFC par le tiers du rayon OI du cercle inscrit dans cette ligne. Or, quand on double indéfiniment le nombre des triangles du secteur, la surface engendrée par la ligne polygonale BEFC a pour limite la surface de la zone engendrée par l'arc BC ; le rayon OI du cercle inscrit dans la ligne polygonale a pour limite le rayon de la sphère. Donc, la mesure du volume engendré par le secteur polygonal a pour limite le produit de l'aire de la zone par le tiers du rayon de la sphère, et le théorème est démontré.

Soit R le rayon de la sphère, et soit h la hauteur de la zone engendrée par BC ; on a

$$\text{Vol. OBC} = \frac{1}{3}\,\text{R} \times \text{surf. BC.}$$

$$\text{Surf. BC} = 2\pi\text{R}h,$$

donc

$$\text{Vol. OBC} = \frac{2}{3}\pi\text{R}^2 \times h.$$

Théorème.

858. *Le volume d'une sphère a pour mesure le produit de la surface de la sphère par le tiers du rayon.*

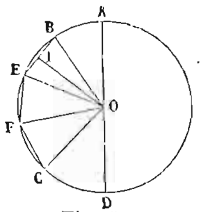


Fig. 607.

En effet, si nous prenons un secteur circulaire ABCD (*fig.* 607) égal à un demi-cercle, le volume engendré par ce secteur circulaire, en tournant autour du diamètre AD, a pour mesure la surface de la zone engendrée par l'arc ABCD, c'est-à-dire la surface de la sphère, multipliée par le tiers du rayon.

$$\text{Vol. sph. R} = \text{Surf. sph. R} \times \frac{1}{3}\,\text{R},$$

$$\text{Surf. sph. R} = 4\pi\text{R}^2,$$

$$\text{Vol. sph. R} = 4\pi\text{R}^2 \times \frac{1}{3}\,\text{R} = \frac{4}{3}\pi\text{R}^3.$$

859. REMARQUE. Si l'on appelle D le diamètre d'une sphère, on a

$$\text{R}^3 = \frac{\text{D}^3}{8}$$

et par conséquent

$$\text{Vol. sph.} = \frac{1}{6}\pi\text{D}^3.$$

860. COROLLAIRE. *Les volumes de deux sphères sont proportionnels aux cubes des rayons de ces sphères.*

Soient R et R' les rayons des deux sphères, V et V' leurs volumes, on a :

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi\,\text{R}^3$$

$$\text{V}' = \frac{4}{3}\pi\text{R}'^3$$

donc

$$\frac{\text{V}}{\text{V}'} = \frac{\text{R}^3}{\text{R}'^3}.$$

Théorème.

861. *Le volume engendré par un segment de cercle* AMB, *en tournant autour d'un diamètre* PP', *extérieur à ce segment (fig. 607), équivaut au sixième d'un cylindre qui aurait pour rayon de base la corde* AB, *et pour hauteur la projection* ab *de cette corde sur le diamètre* PP'.

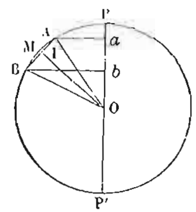


Fig. 608.

En effet, le volume engendré par le segment de cercle AMB, en tournant autour du diamètre PP', est la différence des volumes engendrés par le secteur OAMB et par le triangle OAB.

$$\text{Vol. AMB} = \text{vol. OAMB} - \text{vol. OAB.}$$

Or

$$\text{Vol. OAMB} = \frac{2}{3}\pi\text{R}^2 \times ab,$$

$$\text{Vol. OAB} = \frac{1}{3}\,\text{OI} \times \text{surf. AB}, \qquad \text{et surf. AB} = 2\pi\text{OI} \times ab;$$

donc

$$\text{Vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi\text{R}^2 \times ab - \frac{2}{3}\pi\overline{\text{OI}}^2 \times ab = \frac{2}{3}\pi ab(\text{R}^2 - \overline{\text{OI}}^2).$$

Or, dans le triangle rectangle OAI, on a

$$\overline{AI}^2 = R^2 - \overline{OI}^2$$

donc

$$\text{Vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi ab \times \overline{AI}^2 = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 \times ab.$$

862. Définition. On appelle *segment sphérique* la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans sécants parallèles AA′, BB′ (*fig.* 606). Les cercles d'intersection de la sphère et de ces deux plans parallèles sont les bases du segment sphérique. — La distance ab des deux bases est la hauteur du segment. Quand le plan d'une des bases est tangent à la sphère, cette base se réduit à un point, et on dit que le segment est un segment sphérique à une base.

Théorème.

863. *Le volume d'un segment sphérique équivaut au volume d'une sphère qui aurait pour diamètre la hauteur du segment, plus la demi-somme des volumes de deux cylindres qui auraient pour hauteur commune la hauteur du segment et pour bases respectives les bases du segment sphérique.*

Soit PP′ le diamètre de la sphère perpendiculaire aux plans des bases du segment sphérique AA′BB′ (*fig.* 609). Le volume V du segment sphérique peut être engendré en faisant tourner la surface aAMBb autour du diamètre PP′ ; il se compose donc du volume engendré par le segment de cercle AMB, et du volume du tronc de cône engendré par le trapèze aABb.

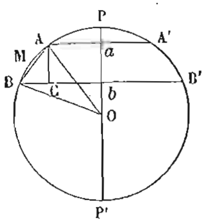


Fig. 609.

$$V = \text{vol. AMB} + \text{vol. } a\text{BA}b.$$

Or

$$\text{Vol. AMB} = \frac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 b \times a$$

$$\text{Vol. } a\text{AB}b = \frac{1}{3}\pi\left(\overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2 + Aa \times Bb\right) \times ab,$$

donc

$$(1) \qquad V = \frac{1}{6}\pi ab(\overline{AB}^2 + 2\overline{Aa}^2 + 2\overline{Bb}^2 + 2Aa \times Bb).$$

Abaissons du point A la perpendiculaire AC sur Bb,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{BC}^2.$$

Or

$$BC = Bb - Aa$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{Bb}^2 + \overline{Aa}^2 - 2Aa \times Bb;$$

donc

$$\overline{AB}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{Bb}^2 + \overline{Aa}^2 - 2Aa \times Bb.$$

En mettant cette valeur à la place de $\overline{AB}^2$ dans l'égalité (1), on a

$$V = \frac{1}{6}\pi ab\,(\overline{ab}^2 + 3\overline{Aa}^2 + 3\overline{Bb}^2)$$

ou enfin

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{ab}^3 + \frac{1}{2}\pi(\overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2) \times ab.$$

864. Le théorème s'applique encore quand l'une des bases est réduite à un point; le volume du segment sphérique PAA′ est

$$\frac{1}{6}\pi\overline{Pa}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{Aa}^2 \times Pa.$$

En désignant par r le rayon de base Aa, et par h la hauteur Pa du segment à une base, le volume V de ce segment est donné par la formule

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r^2).$$

865. On peut écrire cette formule sous une autre forme : on a, en désignant par R le rayon de la sphère,

$$r^2 = h(2R - h)$$

d'où, en remplaçant r^2 par $h(2R - h)$ dans la formule précédente, on a

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h).$$

APPLICATIONS NUMÉRIQUES.

I. *Dans une sphère dont le rayon est* $2^m,425$, *mener un plan sécant* AB, *tel que le rapport de la zone* PAB, *à la surface du cône* OAB *qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle* AB, *soit égal à* $\frac{1}{4}$ (*fig.* 610).

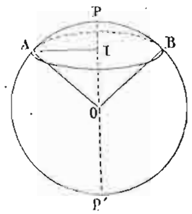


Fig. 610.

Désignons d'abord par R le rayon de la sphère, et par m le rapport donné ; appelons x la distance OI du centre de la sphère au plan sécant ; on a

$$\text{Surf. de la zone PAB} = 2\pi R \times (R - x)$$

$$\text{Surf. du cône OAB} = \pi R\sqrt{R^2 - x^2};$$

donc

$$m = \frac{2(R-x)}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\sqrt{\frac{R-x}{R+x}}$$

d'où

$$\frac{R-x}{R+x} = \frac{m^2}{4},$$

et, d'après un théorème d'arithmétique, on tire de là

$$\frac{2x}{2R} = \frac{4-m^2}{4+m^2}$$

ou

$$x = R\frac{4-m^2}{4+m^2}.$$

Tant que m est moindre que 2, la valeur de x est positive et moindre que R, et le problème admet évidemment une solution.

Si $m = 2$, la valeur de x est nulle, ce qui indique que la zone devient une demi-sphère, et que le cône se réduit à un grand cercle ; la surface de la demi-sphère est bien en effet le double de la surface d'un grand cercle.

Si m est plus grand que 2, la valeur de x est négative ; cette

valeur négative de x indique qu'aucune zone moindre qu'une demi-sphère ne satisfait à la question proposée. Mais, si l'on porte la valeur absolue trouvée pour x sur OP′, en sens contraire de OP, on obtient une zone plus grande qu'une demi-sphère, qui satisfait à la condition demandée. On voit, en effet, que si l'on met le problème en équation dans cette nouvelle hypothèse, on obtient une seconde équation qui ne diffère de la première qu'en ce que x y est changée en $-x$.

Appliquons la formule trouvée en supposant

$$R = 2^m,425, \qquad \text{et } m = \frac{1}{4},$$

$$x = 2,425 \times \frac{4\times 16 - 1}{4\times 16 + 1} = 2,425 \times \frac{63}{65} = 2,350.$$

La distance OI est alors $2^m,350$.

II. *Calculer le volume qu'engendre un hexagone régulier* ABCDEF, *en tournant autour d'un de ses côtés* AB; *le côté de l'hexagone étan égal à* $0^m,423$ (*fig.* 611).

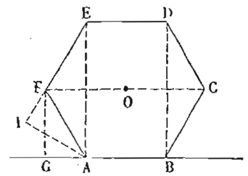


Fig. 611.

Désignons d'abord par a le côté de l'hexagone régulier. Le volume V se compose du volume du cylindre engendré par le rectangle ABDE, plus les volumes engendrés par les triangles AEF et BCD.

$$\text{Vol ABDE} = \pi\overline{AE}^2 \times AB.$$

Or, AE, côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon a, est égal à $a\sqrt{3}$ (349). Donc

$$\text{Vol. ABDE} = 3\pi a^3.$$

Les volumes engendrés par les triangles AFE et BCD sont évidemment égaux. Or, soit I le pied de la perpendiculaire menée du point A sur EF, on a

$$\text{Vol. AEF} = \frac{1}{3}\text{AI} \times \text{surf. EF}$$

et on a

$$\text{AI} = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Surf. EF} = \pi(\text{AE} + \text{FG}) \times \text{EF} = \pi\left(a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \times a = \frac{3}{2}\pi a^2\sqrt{3},$$

d'où

$$\text{Vol. AEF} = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

Donc enfin

$$\text{V} = \text{Vol. ABEF} + 2\ \text{Vol. AEF} = \frac{9}{2}\pi a^3. \qquad (1)$$

On peut encore écrire

$$\text{V} = 3\,\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times 2\pi\,\frac{a\sqrt{3}}{2},$$

c'est-à-dire que le volume engendré par un hexagone régulier, en tournant autour d'un de ses côtés, a pour mesure le produit de la surface de l'hexagone par la circonférence que décrit le centre de cet hexagone.

Appliquons la formule (1), en supposant $a = 0^{\text{m}},423$.

$$\text{V} = 4,5.\pi \times 0,423^3 = 1,070002.$$

III. *Calculer le rayon d'une sphère circonscrite à un cube dont le côté est un mètre.*

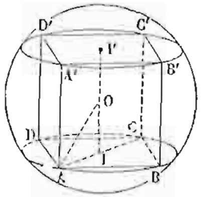


Fig. 612.

Désignons par a le côté du cube ABCDA'B'C'D', et par r le rayon de la sphère circonscrite (*fig.* 612).

Soit I le centre de la face ABCD du cube, et soit I' le centre de la face opposée; le point O, milieu de II', est équidistant des huit sommets du cube, et par conséquent, la sphère qui a le point O pour centre, et OA pour rayon, est circonscrite au cube.

Donc

$$\text{OA} = r, \qquad \text{OA} = \frac{a}{2};$$

or, dans le triangle rectangle OAI, on a

$$\overline{\text{OI}}^2 = \overline{\text{AI}}^2 + \overline{\text{OI}}^2$$

et, dans le triangle ACB,

$$\overline{\text{AC}}^2 = 4\overline{\text{AI}}^2 = 2a^2,$$

d'où

$$\overline{\text{AI}}^2 = \frac{a^2}{2};$$

donc

$$r^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

et

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Si le cube proposé a un mètre de côté, $a = 1$, et

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0^{\text{m}},866.$$

IV. *Une boule de fer creuse, dont le rayon extérieur est* $0^{\text{m}},154$, *flotte sur l'eau quand elle y est plongée jusqu'à son centre; calculer l'épaisseur de cette boule, en supposant la densité du fer égale à* 7,7.

Appelons r le rayon extérieur de la boule, x le rayon intérieur, d la densité du métal. Le volume du métal qui forme la boule est

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - x^3),$$

et son poids est

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - x^3)\,d.$$

D'autre part, le volume d'eau déplacée, moitié du volume de la boule, est

$$\frac{2}{3}\pi r^3,$$

et, par suite, le poids de l'eau déplacée est aussi représenté par le nombre

$$\frac{2}{3}\pi r^3.$$

En vertu du principe d'Archimède, le poids de la boule est égal au poids de l'eau déplacée quand la boule flotte; donc

$$\frac{4}{3}\pi(r^3-x^3)d=\frac{2}{3}\pi r^3;$$

d'où

$$x^3=r^3\left(1-\frac{1}{2d}\right),$$

et

$$x=r\sqrt[3]{1-\frac{1}{2d}}.$$

Appliquons cette formule en supposant $r=0^m,154$, et $d=7,7$

$$x=0,154\sqrt[3]{\frac{7,2}{7,7}}.$$

$$\text{Log}.\,x=\log.\,0,154+\frac{1}{3}\log.\,7,2-\frac{1}{3}\log.\,7,7.$$

$$\begin{aligned}\text{Log}.\,0,154&=\bar{1},1875207\\ \frac{1}{3}\log.\;7,2&=0,2857775\\ -\frac{1}{3}\log.\;7,7&=\bar{1},7045031\\ \hline \text{Log}.\,x&=\bar{1},1778013\\ x&=0^m,15059;\end{aligned}$$

donc, l'épaisseur de la boule est égale à $0^m,154-0^m,15059$, c'est-à-dire à $0^m,00341$.

EXERCICES SUR LE LIVRE VII.

1. Le volume d'un tronc de cône équivaut à la somme des volumes d'un cylindre et d'un cône ayant tous deux pour hauteur la hauteur du tronc de cône, et ayant pour bases, le cylindre un cercle de rayon égal à la demi-somme des rayons des bases, le cône un cercle de rayon égal à la demi-différence des rayons des bases.

2. Si l'arête latérale d'un tronc de cône est égale à la somme des rayons des bases : 1° la hauteur du tronc de cône est égale au double de la moyenne géométrique des rayons; 2° le volume du tronc de cône a pour mesure la surface totale multipliée par le sixième de la hauteur.

3. Soient une sphère et un cylindre circonscrit à la sphère : on mène deux plans parallèles au plan du cercle de contact : démontrer que l'aire de la zone comprise entre les deux plans est égale à l'aire de la surface du cylindre comprise entre les deux mêmes plans.

4. L'aire d'une zone à une base est égale à l'aire d'un cercle de rayon égal à la corde qui sous-tend l'arc de cercle qui engendre cette zone.

5. Si dans une demi-circonférence on inscrit une ligne polygonale régulière, et si l'on circonscrit à cette demi-circonférence une ligne polygonale régulière ayant ses côtés parallèles à ceux de la ligne polygonale inscrite; la surface engendrée par la demi-circonférence, en tournant autour du diamètre, est moyenne proportionnelle entre les surfaces engendrées par les lignes polygonales inscrites et circonscrites en tournant autour du même diamètre.

6. Le volume engendré par un triangle qui tourne autour d'une droite menée par un de ses sommets, dans son plan, extérieurement au triangle, a pour mesure le produit de la surface du triangle par la circonférence que décrit le point de concours des médianes du triangle.

7. Les volumes engendrés par un parallélogramme en tournant successivement autour de deux côtés adjacents sont inversement proportionnels aux longueurs de ces côtés.

8. Si l'on désigne par A, B, C, les volumes engendrés par un triangle rectangle en tournant successivement autour de l'hypoténuse a, autour du côté b, et autour du côté c, démontrer que l'on a la relation

$$\frac{1}{A^2}=\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}.$$

9. Le rapport du volume d'un cylindre circonscrit à une sphère au volume de la sphère est égal au rapport de la surface totale du cylindre à la surface de la sphère.

10. Le rapport du volume d'un cône circonscrit à une sphère au volume de cette sphère est le même que le rapport de la surface totale de ce cône à la surface de la sphère.

11. Soient SA, SB, deux tangentes menées du point S à un cercle O, A et B les points de contact, et C le pied de la perpendiculaire abaissée du point B sur le diamètre qui passe par le point A (*fig.* 613). On fait tourner la figure autour de AC : démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne SAMB, dont les côtés sont les tangentes SA, SB, et l'arc AMB, équivaut au volume engendré par le triangle SAC.

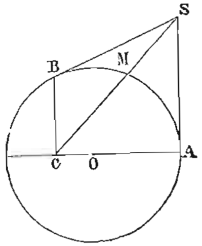


Fig. 613.

12. Soient O et O′ (*fig.* 614) deux cercles tangents extérieurement, I le point de contact de ces cercles, AA′ une tangente commune à ces cercles, et AMA′ un arc de cercle qui passe par les points A, A′ où la tangente touche les cercles, et qui a son centre sur OO′. On fait tourner la figure autour de OO′ : démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne AIA′, dont les côtés sont les arcs IA, IA, et la tangente commune AA′, équivaut à la moitié du volume engendré par le segment de cercle AMA′.

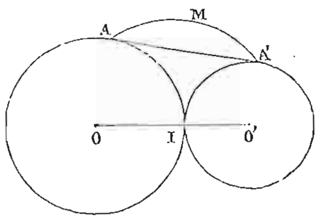


Fig. 614.

13. On circonscrit à un cercle un hexagone régulier ABCDEF : on mène le diamètre FC et les diagonales AC et BF, qui se coupent en un point I, sur le rayon OH perpendiculaire à FC (O est le centre du polygone). Si on fait tourner la figure autour de FC comme axe, les triangles FIC, AIB engendrent des cônes. On demande l'expression de leurs surfaces et celle de leurs volumes en fonction du rayon du cercle (Concours général).

14. D'un point O, pris sur le prolongement du rayon CA d'un cercle donné, menez une tangente OT; si la figure fait une révolution autour de CO, la tangente OT décrit la surface convexe d'un cône et l'arc AT celle d'une zone. On demande à quelle distance CO du centre C il faut prendre le point O, pour que la première surface soit à la seconde dans un rapport donné, comme par exemple dans le rapport de 3 à 2 (Concours général).

15. Calculer le rapport des volumes d'un tétraèdre régulier et de la sphère inscrite dans ce tétraèdre.

16. Calculer le volume engendré par un triangle équilatéral qui tourne autour d'un axe mené par l'un de ses sommets, parallèlement au côté opposé.

17. Soit ABC un triangle équilatéral dont le côté est égal à a; on prolonge la base BC d'une longueur $CD = a$, on mène la droite DE perpendiculaire à la base BC; puis on suppose que le triangle fait une révolution autour de l'axe DE; calculer le volume ainsi engendré.

18. Sait BAC un triangle équilatéral dont le côté est a; sur le côté BC on construit, extérieurement au triangle, le carré BCDE, et l'on fait tourner le pentagone ABEDC autour de AB; calculer le volume ainsi engendré.

19. Soit un carré ABCD, dont le côté est a; on mène par le sommet A une perpendiculaire AR à la diagonale AC, et l'on fait tourner le carré autour de l'axe AR. On demande de calculer : 1° la surface engendrée par le périmètre du carré; 2° le volume engendré par la surface du carré.

20. Soit un hexagone régulier ABCDEF dont le côte est a; on mène par le sommet A une perpendiculaire AR au rayon OA, et on fait tourner l'hexagone autour de l'axe AR. On demande de calculer : 1° la surface engendrée par le périmètre de l'hexagone; 2° le volume engendré par la surface de l'hexagone.

21. Soit un hexagone régulier ABCDEF, dont le côté est a; on prolonge le côté AB d'une longueur BG égale à AB, on élève au point G une perpendiculaire GR à la droite AB, et l'on fait tourner l'hexagone autour de l'axe GR. Calculer : 1° la surface engendrée par le périmètre de l'hexagone; 2° le volume engendré par la surface de cet hexagone.

22. Soit TT′ la tangente en un point A à un cercle donné OA. On mène dans le cercle un diamètre BC, et on abaisse des points B et C les perpendiculaires BB′, CC′ sur la tangente TT′. Déterminer la position du diamètre BC de façon que la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze BB′C′C en tournant autour de la tangente TT′ soit dans un rapport donné avec la surface du cercle OA. — Examiner dans quelle condition le problème est possible.

23. On donne dans un plan un quadrilatère ABCD, et l'on demande le lieu des points S tels que la pyramide quadrangulaire SABCD puisse être coupée par un plan suivant un rectangle.

24. Une droite AB de longueur donnée tourne autour de son milieu O, supposé fixe, de façon que les rapports $\frac{AC}{AC}$, $\frac{BC}{BD}$ des distances de ses extrémités A et B à deux points fixes C et D soient toujours égaux entre eux : trouver le lieu engendré par cette droite AB.

COMPLÉMENT DU LIVRE VII.

§ I. Sphère passant par quatre points. — Sphères tangentes à quatre plans. — § II. Longueur d'un arc de courbe, plane ou gauche. — Aire d'une portion de plan limitée par une courbe. — Applications. — § III. Plus court chemin sur la sphère. — § IV. Construction et propriétés des triangles sphériques polaires. — § VI. Positions relatives de deux cercles sur une sphère. — Problèmes sur les cercles tangents tracés sur une sphère. — § VII. Aire d'un polygone sphérique. — § VIII. Polyèdres réguliers. — Leur construction ramenée à la décomposition de la surface de la sphère en polygones réguliers. — § IX. Puissance d'un point par rapport à une sphère. — Plan radical de deux sphères. Axe radical de trois sphères. — Centre radical de quatre sphères. — § X. Pôle et plan polaire par rapport à une sphère. — § XI. Figures inverses dans l'espace. — Applications.

§ I. Sphère passant par quatre points. — Sphères tangentes a quatre plans.

Problème.

866. *Mener une sphère passant par quatre points donnés.*

Supposons que les quatre points soient les sommets d'un tétraèdre ABCD (*fig.* 615). Pour qu'une sphère passe par ces quatre points, il faut et il suffit que son centre soit équidistant des quatre points, et que son rayon soit égal à la distance de son centre à l'un des points. Le problème revient donc à trouver un point équidistant des quatre points. Or le lieu des points équidistants de deux points étant le plan perpendiculaire au milieu de la droite qui passe par ces points, un point équidistant des quatre points A, B, C, doit être dans chacun des trois plans menés perpendiculairement à chacune des arêtes AB, AB, AD, par son milieu. Ces trois plans se coupent en un point unique O. En effet, s'il en était autrement, il y aurait au moins une direction de droite parallèle à ces trois plans, et les trois droites AB, AC, AD, qui sont perpendiculaires à ces trois plans seraient perpendiculaires à cette direction de droite; comme d'ailleurs elles passent par un même

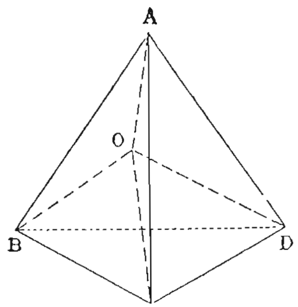


Fig. 615.

point A, elles seraient dans le plan mené par ce point A perpendiculairement à cette direction de droite; elles ne seraient donc pas les arêtes d'un angle trièdre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le point de concours O des trois plans en question est d'ailleurs équidistant des quatre points, A B, C, D; donc, par ces quatre points on peut faire passer une sphère et une seule.

867. Si les quatre points ne sont pas les sommets d'un tétraèdre, ils sont dans un même plan. Une sphère qui passerait par les quatre points donnés couperait le plan de ces points suivant un cercle sur lequel devraient se trouver les quatre points. Donc, en général, quand les quatre points sont dans un même plan le problème proposé est impossible. Si les quatre points donnés sont sur un cercle, il y a une infinité de sphères passant par ces quatre points, et le lieu des centres de ces sphères est la perpendiculaire menée, par le centre du cercle sur lequel sont ces points, au plan de ce cercle.

Problème.

868. *Mener une sphère tangente à quatre plans donnés.*

Pour qu'une sphère soit tangente à ces quatre plans il faut et il suffit que son centre soit équidistant des quatre plans, et que son rayon soit égal à la distance de son centre à l'un des plans. Le problème revient donc à trouver un point équidistant des quatre plans donnés.

Supposons que les plans donnés soient les faces d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ (*fig.* 616).

On a vu (87) que le lieu des points équidistants de deux droites qui se coupent, dans le plan de ces droites, est l'ensemble des bissectrices des angles formés par ces droites. On voit de même sans peine que le lieu des points de l'espace équidistants de deux plans qui se coupent est l'ensemble des deux plans bissecteurs des dièdres formés par ces plans. Cela étant, le lieu des points équidistants des trois faces du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ qui forment les faces du trièdre dont le sommet est A_1 se compose de quatre droites qui sont les intersections de l'ensemble des deux plans bissecteurs des dièdres qui ont pour arête commune A_1A_2 et de l'ensemble des deux plans bissecteurs des dièdres qui ont pour arête commune A_1A_3. Les plans bissecteurs des dièdres du premier couple coupent les plans bissecteurs des dièdres du second couple suivant quatre droites qui passent par le point A_1. Une de ces droites, celle qui est l'intersection du plan bissecteur du dièdre $A_3A_1A_2A_4$ et du plan bissecteur du dièdre $A_2A_1A_3A_4$, pénètre dans l'intérieur du trièdre de sommet A_1 ; chacune des trois autres est extérieure à ce trièdre. Pour qu'un point soit équidistant des quatre faces du tétraèdre, il faut et il suffit qu'il soit sur l'une de ces quatre droites et sur le lieu des points équidistants de la quatrième face $A_2A_3A_4$ du tétraèdre et de l'une des faces qui passent par le sommet A_1, par exemple de la face $A_1A_2A_3$; or ce lieu est l'ensemble des plans bissecteurs des

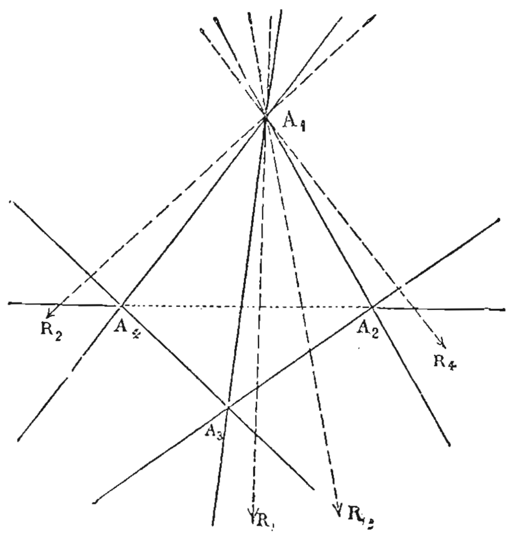


Fig. 616.

dièdres formés par les faces $A_2A_3A_4$, $A_2A_3A_1$. Chacun de ces deux plans coupe, en général, l'ensemble des quatre droites issues de A_1 en quatre points, et par conséquent le problème admet, en général, huit solutions. Mais il peut arriver que l'un des plans bissecteurs soit parallèle à l'une des quatre droites, et par conséquent, le nombre des solutions, qui ne peut pas dépasser huit, peut se réduire à un nombre moindre.

869. Pour faciliter la discussion de ce problème nous nous servirons, pour déterminer un point équidistant des quatre faces d'un tétraèdre, d'une relation très simple entre les distances d'un point de l'espace aux quatre faces du tétraèdre et les aires de ces faces.

Appelons S_1, S_2, S_3, S_4, les aires des faces du tétraèdre respectivement opposées aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, de sorte que S_n représente, en général, l'aire de la face opposée au sommet A_n.

Appelons P_n le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point M de l'espace sur la face opposée au sommet A_n, et convenons de représenter la mesure de la distance MP_n par $+d_n$, ou par $-d_n$, selon que les points M et A_n sont d'un même côté, ou de côtés différents, par rapport à la face opposée au sommet A_n.

Quelle que soit la position du point M dans l'espace, les quatre nombres, positifs ou négatifs, d_1, d_2, d_3, d_4, ainsi définis, sont liés par la relation suivante :

$$S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4 = 3V \tag{1}$$

dans laquelle V représente le volume du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

Afin de distinguer les régions dans lesquelles l'espace est partagé par les plans donnés, mettons la lettre $a_{n.p}$ sur le prolongement de l'arête A_nA_p prolongée dans le sens A_nA_p, et la lettre $a_{p.n}$ sur le pro-

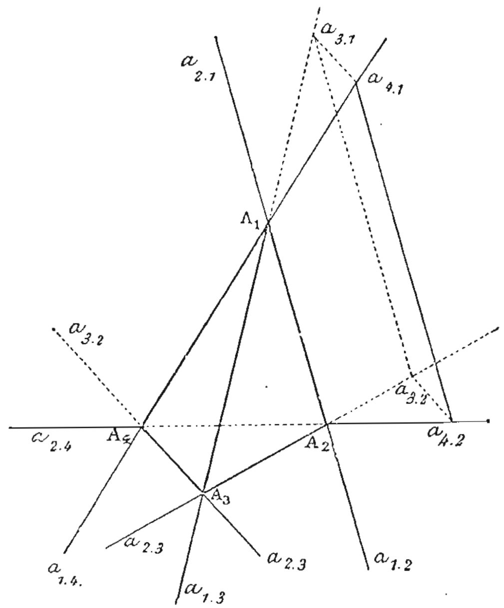


Fig. 617.

longement de la même arête prolongée dans le sens A_pA_n (*fig.* 617). Les quatre plans partagent l'espace en quinze régions distinctes, lesquelles sont de quatre espèces différentes, savoir :

1° La région comprise dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

2° La région comprise dans le trièdre $A_1a_{2.1}a_{3.1}a_{4.1}$, c'est-à-dire dans le trièdre symétrique du trièdre A_1 du tétraèdre. A chaque trièdre du tétraèdre correspond un trièdre symétrique, de sorte qu'il y a quatre régions de l'espèce *trièdre* (*fig.* 617 et *fig.* 619).

3° La région obtenue en retranchant de l'espace compris entre les faces du trièdre A_1 l'espace compris dans le tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, c'est-à-dire l'espace indéfini $A_2A_3A_4$, $a_{1.2}a_{1.3}a_{1.4}$ que nous appellerons *trièdre tronqué* (*fig* 617 et *fig.* 620).

A chaque face du tétraèdre correspond une région de cette espèce, de sorte qu'il y a quatre régions de l'espèce *trièdre tronqué*.

4° Enfin la région illimitée $A_1A_2a_{3.1}a_{4.1}a_{3.2}a_{4.2}$ comprise entre les faces du dièdre d'arête A_1A_2 opposé au dièdre de même arête dans le tétraèdre et entre les plans $A_3A_4A_1$, $A_3A_4A_2$, déterminés par l'arête A_3A_4 opposée à l'arête A_1A_2, et par chacune des extrémités de cette dernière arête. Cette région est appelée un *comble;* l'arête A_1A_2 est le *faîte* du comble, les lignes $A_1a_{3.1}$, $A_1a_{4.1}$, $A_2a_{4.2}$, $A_2a_{3.2}$, en sont les arêtes. Pour rendre plus sensible la forme du comble dont A_1A_2 est l'arête de faîte, on a coupé ces quatre faces par un plan parallèle à l'arête A_1A_2 et à l'arête opposée A_3A_4 ; la section est un parallélogramme. A chaque arête du tétraèdre correspond un comble, de sorte qu'il y a six régions de l'espèce *comble* (*fig.* 621).

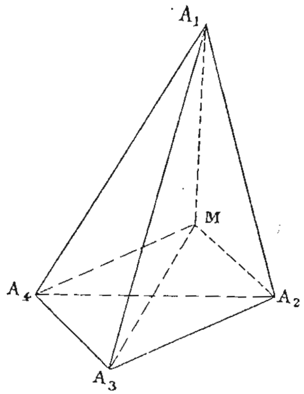


Fig. 618.

En résumé, les quatre plans partagent l'espace en quinze régions comprenant un *tétraèdre*, quatre *trièdres*, quatre *trièdres tronqués* et six *combles*.

870. Pour établir la formule (1) il y aura à examiner quatre cas, suivant l'espèce de région de l'espace dans laquelle se trouve le point M.

1° *Le point M est dans le tétraèdre* (*fig.* 618).

Dans ce cas, le volume du tétraèdre est la somme des volumes de quatre tétraèdres qui ont pour sommet le point M et, pour bases respectives, les faces du tétraedre donné. On a donc

$$V = MA_2A_3A_4 + MA_1A_3A_4 + MA_1A_2A_4 + MA_1A_2A_3\,;$$

d'autre part, dans ce cas,

$$MP_1 = d_1,\quad MP_2 = d_2,\quad MP_3 = d_3,\quad MP_4 = d_4,$$

donc on a

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4.$$

2° *Le point M est dans un trièdre symétrique de l'un des trièdres du tétraèdre, par exemple, dans le trièdre $A_1a_{2.1}a_{3.1}a_{4.1}$* (*fig.* 619).

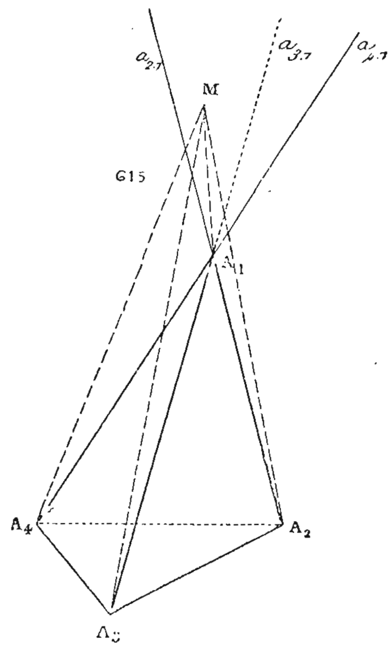


Fig. 619.

Dans ce cas

$$V = MA_2A_3A_4 - MA_1A_3A_4 - MA_1A_2A_4 - MA_1A_2A_3,$$

et d'autre part on a

$$MP_1 = d_1,\quad MP_2 = -d_2,\quad MP_3 = -d_3,\quad MP_4 = -d_4,$$

ce qui donne

$$3V = S_1d_1 - S_2(-d_2) - S_3(-d)_3 - S_4(-d_4),$$

ou

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4.$$

3° *Le point M est dans une des régions de l'espèce trièdre tronqué par exemple dans la région* $A_2A_3A_4a_{1.2}a_{1.3}a_{1.4}$ (*fig.* 620).

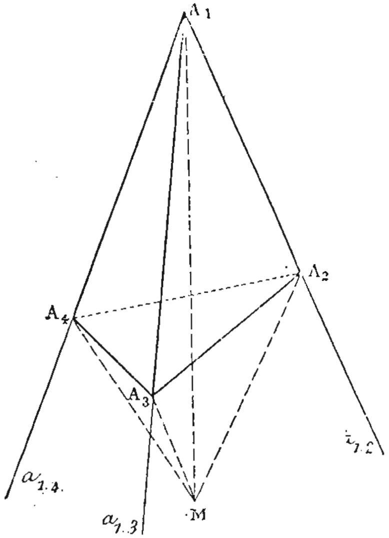


Fig. 620.

On a, dans ce cas,

$$V = -MA_2A_3A_4 + MA_1A_3A_4 + MA_1A_2A_4 + MA_1A_2A_3,$$

et

$$MP_1 = -d_1, \quad MP_2 = d_2, \quad MP_3 = d_3, \quad MP_4 = d_4,$$

d'où

$$3V = -S_1(-d_1) + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4,$$

ou

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4.$$

4° *Le point M est dans une région de l'espèce comble, par exemple dans le comble qui correspond à l'arête* A_1A_2 (*fig.* 621).

Pour engendrer la portion de l'espace comprise dans ce comble, faisons tourner un plan autour de l'arête A_3A_4 opposée à l'autre A_1A_2 du comble, de façon que le point d'intersection I de ce plan avec l'autre A_1A_2 aille du point A_1 au point A_2 et, dans ce plan mobile, considérons seulement la partie qui est dans l'angle $a_{3.i}I\,a_{4.i}$, opposé par le sommet à l'angle A_3IA_4; cette partie du plan mobile engendrera la portion de l'espace comprise dans le comble considéré (*fig.* 621). Cela posé, soit M un point pris dans ce comble. Le plan A_3A_4M coupe l'arête A_1A_2 en un point I situé entre A_1 et A_2, et le point M est dans l'angle opposé par le sommet à l'angle A_3IA_4. Donc le point I est dans l'intérieur du triangle A_3A_4M, et, par suite, le point A_2 est dans le trièdre tronqué relatif au sommet A_1 du tétraèdre $A_1A_3A_4M$. On a donc :

$$A_1A_3A_4M = -A_2A_3A_4M + A_2A_1A_3M + A_2A_1A_4M + A_2A_1A_4A_3$$

ou, en désignant toujours par V le volume du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$.

$$V = MA_1A_3A_4 + MA_2A_3A_4 - MA_1A_2A_4 - MA_1A_2A_3,$$

et

$$MP_1 = d_1, \quad MP_2 = d_2, \quad MP_3 = -d_3, \quad MP_4 = -d_4,$$

on en déduit

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 - S_3(-d_3) - S_4(-d_4),$$

ou encore

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4.$$

871. Réciproquement, si quatre nombres d_1, d_2, d_3, d_4, vérifient la relation (1), il y a un point M, et un seul, dont les distances aux quatre faces du tétraèdre, eu égard aux conventions sur les signes, sont mesurées par ces nombres. En effet, menons un plan Q_1, parallèle à la face $A_2A_3A_4$, du même côté de cette face que le point A_1, ou du côté opposé, selon que d_1 est positif ou négatif, et à une distance de cette face mesurée par la valeur absolue de d_1; puis menons de même les plans Q_2 et Q_3 parallèles aux faces opposées aux sommets A_2 et A_3. Ces trois plans se coupent en un certain point M. Soit d'_4 le nombre, positif ou négatif, qui mesure la distance de ce point à la face $A_1A_2A_3$. On aura, d'après ce qui précède,

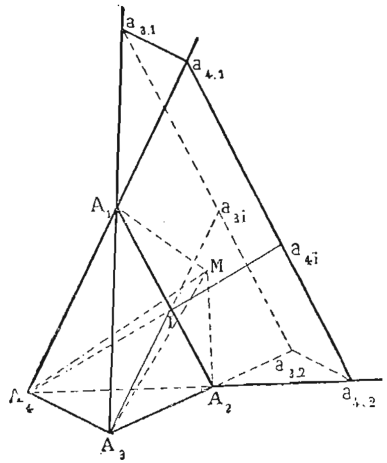


Fig. 621.

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d'_4;$$

mais, par hypothèse, on a

$$3V = S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4;$$

donc $d'_4 = d_4$. Les distances du point M aux quatre faces du tétraèdre sont bien mesurées par les nombres d_1, d_2, d_3 d_4.

D'ailleurs, tout point qui jouit de cette propriété doit être à la fois dans les trois plans Q_1, Q_2, Q_3, lesquels n'ont qu'un point commun, le point M : donc le point M est le seul point de l'espace jouissant de la propriété énoncée.

872. Cherchons maintenant à quelle condition un point de l'espace situé dans une région de l'une des quatre espèces signalées plus haut peut être centre d'une sphère tangente aux quatre faces du tétraèdre.

1° Pour qu'un point situé dans le tétraèdre soit le centre d'une sphère de rayon R tangente aux quatre faces du tétraèdre, il faut et il suffit que, pour ce point, on ait

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = R;$$

et, si l'on fait ces hypothèses dans la formule (1), on a pour déterminer R la formule

$$R = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}.$$

Donc il y a une sphère, et une seule, tangente aux quatre plans et ayant son centre dans le tétraèdre. Cette sphère est dite *inscrite* dans le tétraèdre.

2° Pour qu'un point situé dans une région de l'espèce *trièdre*, par exemple, dans le trièdre $A_1 a_{2.1} a_{3.1} a_{4.1}$, soit centre d'une sphère de rayon R tangente aux quatre plans, il faut et il suffit que, pour ce point, on ait

$$d_1 = R, \qquad d_2 = d_3 = d_4 = -R;$$

et si l'on fait ces hypothèses dans la formule (1), on a, pour déterminer R, la formule

$$R = \frac{3V}{S_1 - S_2 - S_3 - S_4}.$$

Or, dans un tétraèdre, une face quelconque étant toujours moindre que la somme des trois autres, l'expression $\dfrac{3V}{S_1 - S_2 - S_3 - S_4}$ est négative : donc le problème est impossible. Il n'y a pas de sphère tangente aux quatre plans et ayant son centre dans le trièdre symétrique de l'un des trièdres du tétraèdre. Cette impossibilité est d'ailleurs évidente *a priori*.

3° Pour qu'un point situé dans une région de l'espèce *trièdre tronqué*, par exemple, dans la région $A_2 A_3 A_4 a_{1.2} a_{1.3} a_{1.4}$, soit centre d'une sphère de rayon R_1 tangente aux quatre plans, il faut et il suffit que, pour ce point, on ait

$$d_1 = -R_1, \qquad d_2 = d_3 = d_4 = R_1,$$

et, en portant ces hypothèses dans la formule (1), on a, pour déterminer R_1, la formule

$$R_1 = \frac{3V}{S_2 + S_3 + S_4 - S_1}.$$

Cette expression étant positive, il y a une sphère, et une seule, satisfaisant aux conditions demandées. Cette sphère est dite *exinscrite au tétraèdre;* elle est située dans le trièdre A_1. Il y a de même une sphère exinscrite au tétraèdre située dans chacun de ses autres angles trièdres, de sorte qu'il y a quatre sphères exinscrites au tétraèdre.

4° Enfin, pour qu'un point situé dans un *comble*, par exemple dans le comble qui correspond à l'arête A_1A_2, soit le centre d'une sphère de rayon $R_{1.2}$ tangente aux quatre plans donnés, il faut et il suffit que pour ce point on ait

$$d_1 = R_{1.2}, \qquad d_2 = R_{1.2}, \qquad d_3 = -R_{1.2}, \qquad d_4 = -R_{1.2},$$

et si l'on fait ces hypothèses dans la formule (1), on a pour déterminer $R_{1.2}$ la formule

$$R_{1.2} = \frac{3V}{S_1 + S_2 - S_3 - S_4}.$$

Si l'on cherche de même le rayon $R_{3.4}$ d'une sphère tangente aux quatre plans, et située dans le comble correspondant à l'arête A_3A_4 opposée à l'arête A_1A_2, on aura

$$R_{3.4} = \frac{3V}{S_3 + S_4 - S_1 - S_2}.$$

Si, et c'est le cas général, les sommes $S_1 + S_2$, $S_3 + S_4$ sont différentes, une des valeurs $R_{1.2}$, $R_{3.4}$, est positive et l'autre est négative; donc, des deux combles correspondants aux deux arêtes opposées, il y en a un, et un seul, dans lequel est une sphère tangente aux quatre plans.

Comme il y a trois couples d'arêtes opposées dans le tétraèdre (A_1A_2, A_3A_4), (A_1A_3, A_2A_4), (A_1A_4, A_2A_3), on voit qu'il y a, en général, trois sphères tangentes aux quatre plans dont chacune est dans un comble.

873. Mais si la somme S_1+S_2 est égale à la somme S_3+S_4, les valeurs de $R_{1.2}$ et de $R_{3.4}$ étant infinies, la sphère correspondant au couple des combles d'arêtes A_1A_2, A_3A_4, n'existe plus. Le même fait se produit pour tout couple de combles, tel que la somme des faces qui contiennent l'arête de l'un des combles est égale à la somme des faces qui contiennent l'arête de l'autre.

Pour que l'on ait en même temps

$$S_1+S_2=S_3+S_4$$
$$S_1+S_3=S_2+S_4,$$

c'est-à-dire pour que les sphères manquent à la fois dans le couple de combles correspondants aux arêtes A_1A_2, A_3A_4, et dans le couple de combles correspondants aux arêtes A_1A_3, A_2A_4, il faut que l'on ait

$$S_2-S_3=S_3-S_2,$$

d'où

$$S_2=S_3$$

et, par suite, en vertu de la première relation,

$$S_1=S_5,$$

c'est-à-dire que les faces qui comprennent une quelconque des deux arêtes non considérées A_2A_3, A_1A_4 soient équivalentes.

Enfin, pour que les sphères manquent à la fois dans les trois couples de combles qui correspondent à deux arêtes opposées, il faut que l'on ait à la fois les trois relations

$$S_1+S_2=S_2+S_4$$
$$S_1+S_3=S_2+S_4$$
$$S_1+S_4=S_2+S_3.$$

Des deux premières, on déduit

$$S_1=S_4 \qquad S_2=S_3;$$

de la seconde et de la troisième on déduit

$$S_3=S_4 \qquad S_1=S_2;$$

ce qui donne

$$S_1=S_2=S_3=S_4.$$

La condition pour que les sphères tangentes aux quatre plans et

situées dans des combles manquent toutes les trois est que les quatre faces du tétraèdre soient équivalentes.

874. En résumé, le nombre des sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre est au moins cinq, et au plus huit. Il comprend toujours une sphère inscrite, quatre sphères exinscrites dont une dans chaque trièdre; il peut comprendre en outre zéro, ou une, ou deux, ou trois sphères situées dans les combles, deux de ces sphères ne pouvant pas être dans deux combles dont les arêtes de faîte sont des arêtes opposées du tétraèdre.

875. Si les quatre plans donnés ne sont pas les faces d'un tétraèdre, divers cas peuvent se présenter; nous allons examiner les principaux.

1° *Trois des quatre plans donnés sont parallèles à une même droite et forment une surface prismatique, le quatrième plan coupe les arêtes de cette surface.*

Pour rattacher ce cas particulier au cas général on peut imaginer que trois des sommets, A_2, A_3, A_4, du tétraèdre considéré ci-dessus restant fixes, l'autre sommet A_1 s'éloigne à l'infini dans la direction A_2A_1, d'un côté ou de l'autre du plan $A_2A_3A_4$ (*fig.* 622). La surface du trièdre de sommet A_1 se transforme ainsi en une surface prismatique triangulaire Σ, dont les arêtes sont coupées par le quatrième plan aux points A_2, A_3, A_4. Le lieu des points équidistants des plans des faces de la surface Σ se compose de quatre droites RR', $R_2R'_2$, $R_3R'_3$, $R_4R'_4$, parallèles aux arêtes de la surface prismatique. La droite RR' est dans l'intérieur de la surface Σ, les trois autres sont à l'extérieur, la droite $R_2R'_2$ est dans l'angle dièdre $A_3A_2A_1A_4$, la droite $R_3R'_3$ dans le dièdre $A_2A_3A_1A_4$, la droite $R_4R'_4$ dans le dièdre $A_2A_4A_1A_3$. Les points équidistants des quatre plans donnés sont les points de rencontre de ces quatre

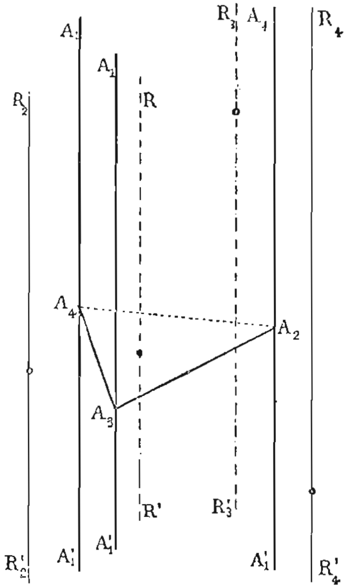


Fig. 622.

droites avec le lieu des points équidistants du plan $A_2A_3A_4$ et du plan d'une des faces de la surface Σ, par exemple du plan de la face $A_3A_4A_1$. Or, ce lieu se compose des deux plans bissecteurs des dièdres $A_2A_3A_4A_1$, $A_2A_3A_4A'_1$; et, comme aucun de ces plans n'est parallèle à la direction A_2A_1, chacun d'eux rencontre chacune des quatre droites. Donc il y a huit points équidistants des quatre plans donnés, et, par suite, il y a huit sphères tangentes à ces quatre plans.

Considérons les deux sphères dont le centre est sur la droite RR'; ces sphères sont à l'intérieur de la surface Σ, de part et d'autre du plan $A_2A_3A_4$. Elles sont égales. En effet, les plans des faces de la surface Σ étant parallèles à la droite A_2A_1, les points de contact de ces plans avec l'une des deux sphères sont sur un plan qui passe par le centre de cette sphère et qui est perpendiculaire à A_2A_1. Or, ce plan coupe les faces de la surface Σ suivant un triangle qui est une section droite de cette surface, et la sphère suivant un grand cercle qui est inscrit dans ce triangle. Donc le rayon de chacune des deux sphères considérées est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle formé par une section droite de la surface Σ.

On verrait de même que le rayon de chacune des deux sphères qui ont leur centre sur l'une des autres droites, R_2R_2' par exemple, est égal à l'un des rayons des cercles exinscrits au triangle formé par une section droite de la surface Σ.

Donc, les huit sphères tangentes aux quatre plans donnés forment quatre couples tels que les sphères d'un même couple ont leurs centres sur une parallèle à A_2A_1, sont de part et d'autre du plan $A_2A_3A_4$, et sont égales. Les rayons des sphères sont égaux aux rayons des quatre cercles tangents aux côtés du triangle formé par une section droite de la surface Σ; et les points de contact de ces sphères avec le plan $A_2A_3A_4$ sont les points de rencontre de ce plan avec les parallèles aux arêtes de la surface Σ menées par les centres des quatre cercles tangents aux côtés d'une section droite de cette surface.

2° *Les quatre plans donnés sont parallèles à une même droite et forment une surface prismatique quadrangulaire.*

Le problème est généralement impossible, car si une sphère est tangente aux quatre plans, la section droite de la surface prismatique par un plan mené par le centre de la sphère est un ensemble de quatre droites qui sont tangentes au cercle d'intersection de leur plan et de la sphère. Or, en général, il n'y a pas de cercle tangent à quatre droites. Toutefois, la section droite de la surface prismatique pourrait être telle qu'il y eût un, et même deux cercles tangents à ces quatre droites; dans ce cas, il y aurait une ou deux séries de sphères, en nombre infini, tangentes aux quatre plans. Les sphères d'une même série seraient égales, et le lieu des centres de ces sphères serait une droite parallèle aux arêtes de la surface prismatique.

Ce cas comprend, comme cas particulier, celui où les plans donnés formeraient deux couples de plans parallèles. Dans ce dernier cas, le problème est encore impossible en général; pour qu'il fût possible,

il faudrait que le parallélogramme que forme la section droite de la surface prismatique fût un losange; il y aurait alors une série de sphères égales tangentes aux quatre plans, et il n'y en aurait qu'une.

3° *Trois des plans donnés forment un trièdre et le quatrième est parallèle à l'un des trois premiers.*

Pour rattacher ce cas au cas général, imaginons que les sommets A^1, A_2, du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ restant fixes, les sommets A_3, A_4, s'éloignent à l'infini le premier sur l'arête A_1A_3, le second sur l'arête A_1A_4; trois des plans donnés forment un trièdre qui a pour sommet le point A_1, et le quatrième, $A_2A_3A_4$, est parallèle au plan $A_1A_3A_4$ (*fig.* 623). Le lieu des points équidistants des trois plans qui se coupent au point A_1 est l'ensemble de quatre droites qui se coupent au point A_1, et dont aucune n'est parallèle au plan $A_1A_3A_4$.

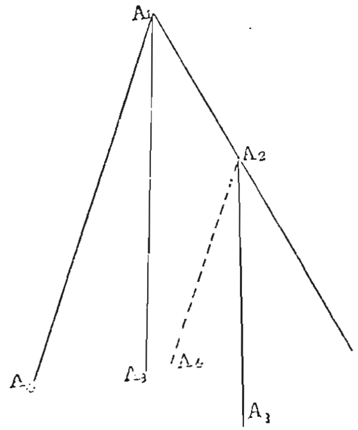


Fig. 623.

Les deux plans $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, étant parallèles, le lieu des points équidistants de ces plans se réduit à un seul plan parallèle à ces deux plans, et ce plan rencontre en un point chacune des quatre droites du lieu précédent. Or les points cherchés sont les points communs à ces deux lieux; donc, dans ce cas, le problème admet quatre solutions.

4° *Trois des plans sont parallèles.*

Le problème est impossible.

§ II. Longueur d'un arc de courbe, plane ou gauche. — Aire d'une portion de plan limitée par une courbe. — Applications.

Lemme.

876. *Étant donné un nombre K aussi petit que l'on veut, on peut assigner un angle θ assez petit pour que si une droite fait avec un axe un angle moindre que θ, la différence entre une portion PQ de cette droite et sa projection orthogonale pq sur l'axe soit moindre que $\frac{1}{2}pq.K^2$.*

En effet, soit R le point où la parallèle à l'axe menée par le point P rencontre le plan perpendiculaire à l'axe mené par le point Q (*fig.* 623 *bis*). Dans le triangle rectangle PQR, on a

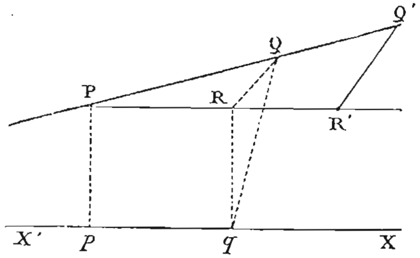


Fig. 623 *bis*.

$$\overline{PQ}^2 - \overline{PR}^2 = \overline{QR}^2$$

d'où

$$PQ - PR = \frac{\overline{QR}^2}{PQ + PR}$$

et, comme PQ est supérieur à QR,

$$PQ - PR < \frac{\overline{QR}^2}{2PR},$$

ou, en remplaçant PR par la longueur égale pq, et $\frac{\overline{QR}^2}{2PR}$ par le rapport égal $\frac{1}{2}PR\left(\frac{QR}{PR}\right)^2$,

$$PQ - pq < \frac{1}{2}PR\left(\frac{QR}{PR}\right)^2.$$

Prenons sur PR une longueur fixe PR', et menons par R' la droite R'Q' parallèle à RQ; le rapport $\frac{QR}{PR}$, quelles que soient les dimensions du triangle PQR, est égal au rapport $\frac{Q'R'}{PR'}$. Or, si l'angle P diminue et tend vers zéro, le côté Q'R' diminue et tend vers zéro, et, comme PR' ne varie pas, le rapport $\frac{Q'R'}{PR'}$, ou son égal $\frac{QR}{PR}$, diminue et tend vers zéro.

Donc on peut assigner un angle θ assez petit pour que, pour toute valeur de l'angle QPR inférieure à θ, le rapport $\frac{QR}{PR}$ soit moindre que le nombre donné K, quelque petit que soit ce nombre. Alors on aura bien

$$PQ - pq < \frac{1}{2}pq.K^2.$$

LONGUEUR D'UN ARC DE COURBE, PLANE OU GAUCHE.

877. *On appelle longueur d'un arc de courbe, plane ou gauche, la limite vers laquelle tendent les périmètres d'une suite illimitée de lignes polygonales inscrites dans cet arc, formées d'après une loi quelconque, mais telle que les côtés de la* n^{me} *ligne tendent tous vers zéro, quand* n *augmente indéfiniment. On suppose, en outre, que les lignes inscrites sont convexes si la courbe est plane, et que les lignes inscrites ont pour projections sur trois plans rectangulaires des lignes convexes si la courbe est gauche.*

Pour justifier cette définition, il faut montrer que cette limite existe, et qu'elle est la même quelle que soit la loi de formation des lignes inscrites, pourvu que les conditions énoncées soient remplies.

Nous décomposerons, s'il est nécessaire, la courbe considérée en plusieurs parties, et nous supposerons que la portion AB de la courbe dont on veut définir la longueur est un arc qui jouit des propriétés suivantes :

On peut concevoir une longueur α assez petite pour que, si l'on inscrit dans l'arc AB une corde quelconque MN de longueur moindre que α :

1° Tous les points de l'arc MN se projettent orthogonalement sur MN entre les points M et N (*fig.* 624);

2° Toute corde PQ inscrite dans l'arc MN fait avec la corde MN un angle aigu moindre qu'un angle donné θ, aussi petit que l'on veut.

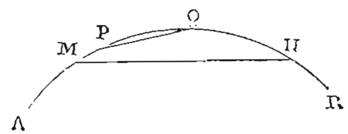


Fig. 624.

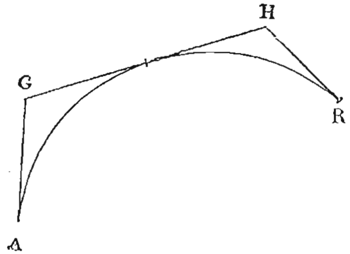


Fig. 625.

Remarquons d'abord qu'il est possible d'assigner une longueur L supérieure à tous les périmètres des lignes inscrites dans l'arc de courbe AB. En effet, si la courbe est plane, il suffira de prendre L égale au périmètre d'une ligne polygonale circonscrite à l'arc telle que, par exemple, la ligne AGHB (*fig.* 625) formée par les tangentes aux extrémités de l'arc et par une tangente GH en un point de l'arc; car chaque ligne inscrite étant supposée convexe a un périmètre moindre que celui de la ligne AGHB qui a les mêmes extrémités et qui enveloppe la ligne inscrite. Si la courbe est gauche, on la projettera sur trois plans rectangulaires, et on déterminera une longueur L telle que le périmètre de toute ligne convexe inscrite dans l'une quelconque des trois projections soit moindre que $\frac{1}{3}$ L.

Dès lors, comme la longueur d'une portion de droite est inférieure ou égale à la somme de ses projections sur trois plans rectangulaires, le périmètre de toute ligne inscrite dans l'arc AR sera moindre que la somme des projections de cette ligne sur les trois plans, et par conséquent moindre que L.

Cela posé, concevons d'abord une première suite illimitée de lignes polygonales inscrites dans l'arc AR d'après une loi particulière telle que les sommets de chaque ligne fassent partie des sommets de la ligne suivante. Soient

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots \quad P_n, \ldots$$

les périmètres de ces lignes. Ces périmètres vont en augmentant ; ils sont tous inférieurs à une longueur donnée L ; donc ils tendent vers une limite.

Supposons en outre la loi de formation de ces lignes polygonales telle que, quand n augmente indéfiniment, chaque côté de la n^{me} ligne polygnale tende vers zéro, et soit P la limite vers laquelle tend P_n dans ce cas.

Il reste à démontrer que, si l'on imagine des lignes polygonales inscrites dans l'arc AR, formées suivant une loi quelconque satisfaisant aux conditions énoncées sans que les sommets d'une de ces lignes fassent nécessairement partie des sommets de la ligne inscrite suivante, les périmètres de ces lignes ont pour limite P ; ce qui veut dire qu'étant donnée une longueur ε, aussi petite que l'on voudra, on peut toujours assigner une longuenr α, assez petite pour que le périmètre Q de toute ligne polygonale inscrite, dont chaque côté est moindre que α, diffère de P d'une quantité moindre que ε.

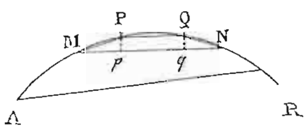


Fig. 626.

A cet effet, nous comparerons d'abord les périmètres R, R', de deux lignes polygonales inscrites quelconques, mais telles que tous les sommets de la première fassent partie des sommets de la seconde, et nous montrerons que l'on peut choisir une longueur α assez petite pour que, si tous les côtés des deux lignes polygonales considérées sont moindres que α, on a

$$R' - R < \frac{1}{2} L.K^2,$$

K étant un nombre donné aussi petit que l'on veut.

En effet à un côté MN de la ligne de périmètre R correspond dans l'autre ligne polygonale une ligne brisée qui a les mêmes extrémités ; soit par exemple la ligne MPQN (*fig.* 626), et soient p et q les projections orthogonales des points P et Q sur MN. Le nombre K

étant donné, aussi petit que l'on veut, on a pu (876) prendre α assez petit pour que l'on ait

$$MP - Mp < \frac{1}{2} Mp.K^2$$

$$PQ - pq < \frac{1}{2} pq.K^2$$

$$QN - qN < \frac{1}{2} qN.K^2,$$

d'où

$$MP + PQ + QN - MN < \frac{1}{2} MN.K^2.$$

En comparant de même chaque côté de la première ligne à la ligne brisée qui lui correspond dans la seconde, et en ajoutant membre à membre les inégalités ainsi obtenues, on aura

$$R' - R < \frac{1}{2} R.K^2,$$

et, comme R est moindre que L, on aura *a fortiori*

$$R' - R < \frac{1}{2} L.K^2.$$

Ceci posé, revenons à la comparaison du périmètre d'une ligne inscrite quelconque, dont chaque côté est moindre que α, et de la limite P des périmètres P_1, P_2, P_3, ... P_n, ... de la première suite considérée. Si nous prenons n assez grand pour que tous les côtés de la ligne P_n soient moindres que α, nous aurons, quel que soit n',

$$0 < P_{n+n'} - P_n < \frac{1}{2} L.K^2,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad 0 < P - P_n < \frac{1}{2} L.K^2.$$

Soit Q le périmètre d'une ligne polygonale inscrite dont chaque côté est moindre que α ; considérons la figure formée par les sommets de la ligne de périmètre P_n et les sommets de la ligne de périmètre Q, et soit Q' le périmètre de la ligne formée en joignant tous ces sommets, dans l'ordre où ils sont sur la courbe. D'après ce qui précède, on a

$$0 < Q' - P_n < \frac{1}{2} L.K^2$$

$$0 < Q' - Q < \frac{1}{2} L.K^2,$$

et on en conclut l'inégalité (2)

$$(2) \qquad \text{Val. abs.} (P_n - Q) < \frac{1}{2} L.K^2.$$

La différence $P_n - Q$ peut être positive ou négative; si elle est positive, les inégalités (1) et (2) donnent

$$0 < P - P_n < \frac{1}{2} L.K^2$$

$$0 < P_n - Q < \frac{1}{2} L.K^2,$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$0 < P - Q < L.K^2.$$

Si la différence $P_n - Q$ est négative, les inégalités (1) et (2) donnent

$$0 < P - P_n < \frac{1}{2} L.K^2$$

$$0 < Q - P_n < \frac{1}{2} L.K^2,$$

et on en conclut

$$\text{Val. abs.}\ (P - Q) < \frac{1}{2} L.K^2;$$

de sorte que, dans tous les cas, on a

$$\text{Val. abs.}\ (P - Q) < L.K^2.$$

Or, nous avons dit que K peut être pris aussi petit que l'on voudra; on peut le choisir de façon que $\frac{1}{2} L.K^2$ soit moindre que la longueur donnée ε, et alors on aura

$$\text{Val. abs.}\ (P - Q) < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

AIRE D'UNE PORTION DE PLAN LIMITÉE PAR UNE COURBE.

878. *On appelle aire de la portion de plan limitée par un arc de courbe convexe AR et par la corde qui le sous-tend (fig. 623), la limite vers laquelle tendent les aires limitées par cette corde et par une suite de lignes polygonales convexes, inscrites dans l'arc, et formées suivant une loi quelconque, mais telle que les côtés de la* n^{me} *ligne tendent tous vers zéro quand n augmente indéfiniment.*

Pour justifier cette définition, il faut démontrer que la limite indiquée existe et qu'elle est la même quelle que soit la loi de formation des lignes polygonales inscrites.

Nous supposerons, comme au n° 876, l'arc AR tel que l'on peut assigner une longueur α assez petite pour que si l'on inscrit dans l'arc une corde quelconque MN de longueur moindre que α (*fig.* 627), tout point P de l'arc MN se projette orthogonalement sur MN en un point p situé entre M et N, et pour que le rapport $\frac{Pp}{Mp}$ soit moindre qu'un nombre K choisi arbitrairement, aussi petit que l'on veut. Cela

étant, on peut encore choisir α assez petit pour que la distance Pp soit moindre qu'une longueur donnée ω aussi petite que l'on veut, car on a

$$Pp = \frac{Pp}{Mp} Mp < Mp.K < \alpha.K,$$

et il suffit de prendre α tel que αK soit moindre que ω pour que l'on ait

$$Pp < \omega.$$

Cela posé, l'aire limitée par une corde MN moindre que α, et par une ligne brisée inscrite dans l'arc que sous-tend MN, sera moindre que celle d'un rectangle de base MN et de hauteur ω, donc moindre que $MN.\omega$. De sorte que, si l'on désigne par R et par R' les périmètres de deux lignes polygonales inscrites dans l'arc AR, telles que tous les sommets de la première fassent partie des sommets de la seconde et que tout côté de chacune de ces lignes soit moindre que α, on aura

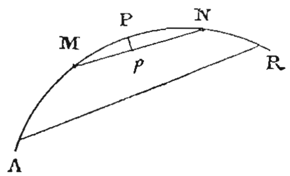


Fig. 627.

$$\text{aire}\ R' - \text{aire}\ R < R.\omega$$

et, *a fortiori*, en désignant par L une longueur supérieure aux périmètres de toutes les lignes inscrites,

$$\text{aire}\ R' - \text{aire}\ R < L.\omega.$$

Ces remarques faites, la démonstration se termine comme celle relative à la longueur d'un arc de courbe. Soient

$$P_1, P_2, \ldots\ldots \qquad P_n, \ldots\ldots$$

les périmètres d'une première suite de lignes inscrites telles que les sommets de chaque ligne se trouve parmi les sommets de la ligne suivante. Les aires limitées par la corde AR et par ces lignes polygonales vont en augmentant; elles restent toutes inférieures à une aire déterminée, par exemple à celle qui est limitée par la corde AR et par la ligne brisée AGHR circonscrite à l'arc (*fig.* 625 *bis*); donc elles tendent vers une limite.

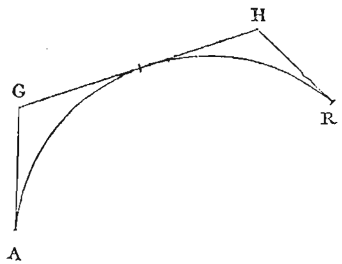


Fig. 625 *bis*.

Supposons la loi de formation de ces lignes polygonales telle que les côtés de la n^{me} ligne tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, et soit, dans cette hypothèse, « aire P » la limite des aires considérées.

Il reste à démontrer que si l'on imagine des lignes polygonales convexes inscrites dans l'arc AR, avec la seule condition que les côtés de ces lignes tendent vers zéro, les aires limitées par la corde AR et par ces lignes auront pour limite « aire P » ; ce qui veut dire qu'étant donnée une quantité ε aussi petite que l'on voudra, on peut assigner une longueur α assez petite pour que l'aire Q, limitée par la corde AR et par une ligne de périmètre Q dont chaque côté est moindre que α, diffère de l'aire P d'une quantité moindre que ε. Il suffira de répéter mot pour mot le raisonnement fait lorsqu'il s'agissait de la longueur d'un arc de courbe. On arrivera aux inégalités

$$0 < \text{aire } P - \text{aire } P_n < L.\omega$$
$$\text{Val. abs. } (\text{aire } P_n - \text{aire } Q) < L.\omega$$

d'où l'on déduira l'inégalité

$$\text{Val. abs. } (\text{aire } P - \text{aire } Q) < 2L.\omega;$$

or, comme la longueur ω peut être prise aussi petite que l'on veut, on peut la choisir telle que l'on ait

$$2L\omega < \varepsilon,$$

et on aura

$$\text{Val. abs. } (\text{aire } P - \text{aire } Q) < \varepsilon,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

879. *On appelle aire de la portion de plan limitée par une courbe fermée, convexe, la limite vers laquelle tendent les aires limitées par une suite de polygones convexes inscrits dans la courbe et formés suivant une loi quelconque, mais telle que les côtés du* n^{me} *polygone tendent tous vers zéro quand n augmente indéfiniment.*

La justification de cette définition se fait absolument comme celle de la précédente.

880. Si la portion de plan est limitée par une courbe fermée, non convexe, on pourra inscrire dans cette courbe un polygone tel que l'arc sous-tendu par chacun de ses côtés soit convexe; de cette façon, l'aire de chaque segment limité par un côté du polygone et par l'arc qu'il sous-tend sera définie. L'aire de la portion de plan limitée par la courbe fermée, non convexe, sera l'aire du polygone inscrit, augmentée de la somme des segments extérieurs à ce polygone, et diminuée de la somme des segments qui lui sont intérieurs (1).

APPLICATIONS.

881. AIRE DE LA SURFACE LATÉRALE D'UN CYLINDRE OBLIQUE. — *On appelle aire de la surface latérale d'un cylindre oblique dont les bases parallèles sont des courbes fermées, la limite vers laquelle tendent les aires des surfaces latérales d'une suite de prismes inscrits dans le cylindre suivant une loi quelconque, mais telle que les polygones de bases sont convexes et que les côtés de ces polygones tendent tous vers zéro.*

(1) Le mode de démonstration que nous avons employé pour justifier la définition de la longueur d'un arc de courbe, plane ou gauche, et la définition de l'aire d'une portion de plan limitée par une courbe, nous a été indiqué par M. Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure.

Cette limite est indépendante de la loi de formation des prismes inscrits, et elle est égale au produit de la longueur l de l'arête du cylindre par la longueur P de la section droite du cylindre, c'est-à-dire de la courbe d'intersection du cylindre par un plan perpendiculaire aux arêtes.

Soit en effet, P_n le périmètre de la section droite de l'un des prismes inscrits (*fig.* 628); l'aire de la surface latérale de ce prisme est $P_n \times l$. Or, lorsque les côtés du polygone de base du prisme inscrit tendent vers zéro, il en est de même des côtés du polygone de section droite, et le périmètre P_n de ce polygone tend vers une limite qui est la longueur P de la section droite du cylindre. Donc l'aire de la surface latérale du prisme inscrit tend vers la limite $P \times l$, ce qui démontre la proposition énoncée.

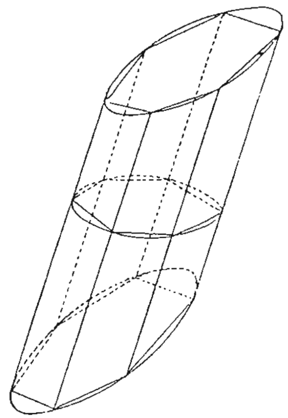


Fig. 628.

882. AIRE D'UNE PORTION DE LA SURFACE LATÉRALE D'UN CONE OBLIQUE. — Considérons la portion de surface latérale d'un cône oblique limitée au sommet du cône et à l'insertion S du cône, et d'une sphère de rayon R, qui a pour centre le sommet O du cône. Nous appellerons *aire de cette surface latérale la limite vers laquelle tendent les surfaces latérales de pyramides qui ont pour sommet le sommet du cône, et pour bases des lignes polygonales gauches inscrites dans la ligne S d'après une loi quelconque, mais telle que les côtés de ces lignes tendent tous vers zéro.*

Cette limite est indépendante de la loi de formation des lignes inscrites, et elle est égale à $\frac{1}{2}P \times R$, *P étant la longueur de la ligne S.*

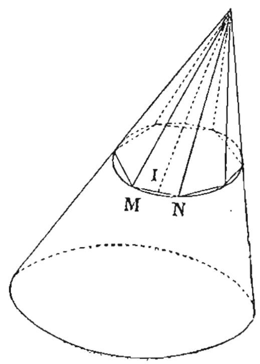


Fig. 629.

Soit MN un des côtés quelconques d'une ligne inscrite dans la ligne S, OI la perpendiculaire abaissée du sommet O du cône sur MN (*fig.* 629); OI est inférieur ou égal à R, et on peut supposer MN assez petit pour que la différence R — OI soit moindre qu'une longueur donnée ε, aussi petite que l'on voudra. L'aire du triangle OMN sera comprise entre $\frac{1}{2}MN(R-\varepsilon)$ et $\frac{1}{2}MN \times R$. Si l'on désigne par P_n le périmètre de la ligne inscrite dans la ligne S, l'aire de la surface latérale de la pyramide sera comprise entre

$$\frac{1}{2}P_n \times (R - \varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}P_n \times R.$$

Or, P_n ayant pour limite P, les deux aires ont pour limite $\frac{1}{2}P \times R$, et, par suite, l'aire de la surface latérale de la pyramide qui est comprise entre ces deux aires a aussi pour limite

$$\frac{1}{2}P \times R.$$

883. Volume d'un cylindre oblique. — *On appelle volume d'un cylindre oblique la limite vers laquelle tendent les volumes d'une suite de prismes inscrits quand les côtés des polygones de bases de ces prismes tendent tous vers zéro.*

Cette limite est indépendante de la loi de formation des polygones de base et elle est égale au produit de l'aire de la base par la hauteur du cylindre.

Soit en effet h la hauteur du cylindre, et B_n l'aire de la base d'un prisme inscrit; le volume de ce prisme est

$$B_n \times h.$$

Or l'aire du polygone de base, quand les côtés de ce polygone tendent tous vers zéro, tend vers une limite bien définie B qui est l'aire de la base du cylindre; donc le volume du prisme inscrit a pour limite

$$B \times h.$$

884. Volume d'un cone oblique. — *On appelle volume d'un cône oblique la limite vers laquelle tendent les volumes d'une suite de pyramides inscrites formées d'après une loi quelconque, mais telle que les côtés des polygones de base tendent tous vers zéro.*

On démontrera, comme ci-dessus, que *cette limite est indépendante de la loi de formation des polygones de base, et qu'elle est égale au produit de l'aire de la base du cône par le tiers de la hauteur du cône.*

§ III. Plus court chemin sur la sphère.

Théorème.

885. *De toutes les lignes que l'on peut tracer sur la surface d'une sphère entre deux points de cette surface, la plus courte est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui passe par ces deux points.*

Pour démontrer ce théorème nous ferons les deux remarques suivantes :

1° Soit P le pôle d'un cercle MN tracé sur la sphère et soient A et B deux points quelconques de ce cercle (*fig.* 630) : la ligne la plus courte, sur la sphère, entre le point P et le point A, est superposable à la ligne la plus courte, sur la sphère, entre le point P et le point B.

Cela résulte de ce que si l'on fait tourner la sphère autour du diamètre PP', de façon à amener le point A sur le point B, la surface de la sphère ne cesse de coïncider avec elle-même, et par conséquent, la ligne la plus courte entre P et A vient s'appliquer sur la ligne la plus courte entre P et B.

2° Le cercle MN partage la sphère en deux *calottes sphériques*, celle qui contient le point P, et celle qui contient le point diamétralement opposé P'. Des arcs de grand cercle qui vont du point P à deux points différents A et B du cercle sont égaux.

L'arc de grand cercle qui va du point P à un point de l'arc MN est

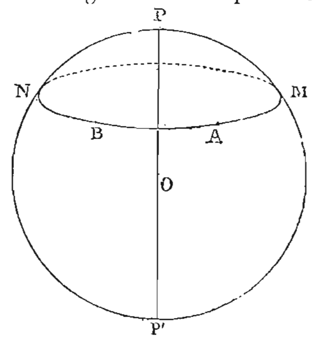


Fig. 630.

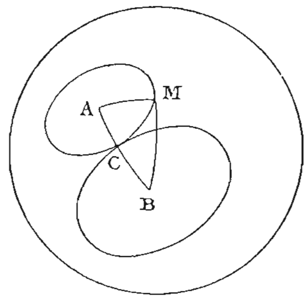


Fig. 631.

supérieur à l'arc de grand cercle qui joint le point P à un point quelconque de la calotte PMN, tandis qu'il est inférieur à l'arc de grand cercle qui joint le point P à un point quelconque de la calotte P'MN. Réciproquement un point est dans la calotte PMN, ou dans la calotte P'MN, selon que l'arc de grand cercle qui joint le point P à ce point est inférieur ou supérieur à l'arc de grand cercle qui joint le point P à un point quelconque du cercle MN.

Cela posé, soient A et B deux points quelconques de la surface de la sphère, et soit ACB l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui passe par ces deux points (*fig.* 631); nous allons montrer que tout point C de cet arc est un point de la ligne la plus courte, sur la sphère, entre les points A et B. A cet effet, du point A pour pôle, avec une ouverture de compas égale à AC, traçons un cercle sur la sphère, puis, du point B comme pôle, avec une ouverture de compas égale à BC, traçons un second cercle sur la sphère. Les calottes ACM, BCM, ainsi déterminées sont telles que, sauf le point C, tout point de l'une est en dehors de l'autre. Soit en effet un point quelconque M sur le cercle dont le pôle est A. Menons les arcs de grand cercle AM, BM, moindres tous deux qu'une demi-circonférence; l'arc de grand cercle ACB étant aussi, par hypothèse, moindre qu'une demi-circonférence, la figure ABM est un triangle sphérique. Dans ce triangle sphérique ABM, le côté AB est plus petit que la somme des deux autres; or l'arc AC est égal à l'arc AM, donc BC est moindre que BM; donc le point M est en dehors de la calotte limitée par le cercle dont le pôle est B.

Cela étant, une ligne tracée sur la sphère, et ne passant pas par le point C, ne peut être la ligne la plus courte entre A et B. En effet, toute ligne qui va de A à B, sans passer par le point C (*fig.* 632), rencontre nécessairement les cercles qui limitent les calottes l'un en un point D, l'autre en un point E différents de C. Or la ligne la plus courte entre A et B, et passant par ces points D et E, se compose de la ligne la plus courte entre A et D, de la ligne la plus courte entre B et E, et en plus de la ligne la plus courte entre D et E. Or les deux premières de ces trois lignes sont égales l'une à la ligne la plus courte entre A et C, l'autre à la ligne la plus courte entre B et C; donc la plus courte des lignes entre A et B qui passe par D et par E surpasse la plus courte des lignes entre A et B qui passe par C. Donc enfin la ligne la plus courte entre A et B, sur la sphère, passe nécessairement par le point C. Comme le point C est un quelconque des points de l'arc de grand cercle AB, moindre qu'une demi-circonférence, la ligne la plus courte entre A et B coïncide avec cet arc.

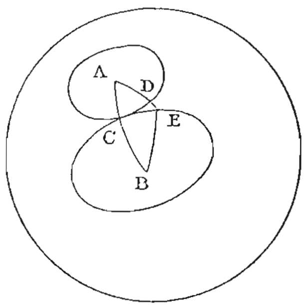


Fig. 632.

886. Si les points A et B sont diamétralement opposés, les cercles décrits des points A et B comme pôles, avec les ouvertures de compas égales à AC et à BC, se confondent, et le raisonnement n'est plus applicable. Si C est un point quelconque de la sphère, la ligne la plus courte menée entre A et B, en passant par le point C, se compose des arcs de grand cercle AC et CB, c'est-à-dire du demi-grand cercle ACB. Il y a donc, dans ce cas, sur la sphère, une infinité de lignes de même longueur, et de longueur moindre que toutes les autres, ce sont les demi-grands cercles qui passent par ces points.

Théorème.

887. *Tout grand cercle passant par les pôles d'un cercle C tracé sur la sphère est perpendiculaire à ce cercle, et réciproquement, tout grand cercle perpendiculaire à un cercle C tracé sur la sphère passe par les pôles de ce cercle.*

Ce théorème a été démontré (828) pour le cas où le cercle C est

un grand cercle; il faut montrer qu'il est encore vrai quand ce cercle est un petit cercle. Soit PAP' un grand cercle passant par les pôles P et P' du cercle C (*fig.* 633). La tangente AT au cercle C au point A est perpendiculaire au rayon OA parce qu'elle est dans le plan tangent à la sphère au point A; elle est perpendiculaire à la droite PP' parce qu'elle est dans le plan du cercle C qui est perpendiculaire à la droite PP'; donc elle est perpendiculaire au plan des droites PP' et OA, c'est-à-dire au plan du grand cercle PAP'. La droite AT étant perpendiculaire au plan du grand cercle PAP' est perpendiculaire à la tangente AR à ce cercle au point A; donc l'angle TAR des deux cercles est un angle droit.

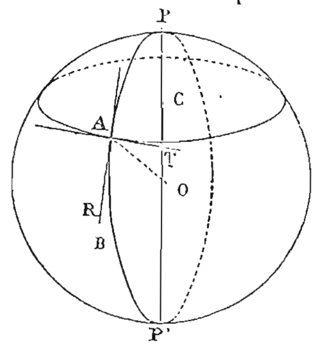


Fig. 633.

888. Réciproquement. Soit AB un grand cercle perpendiculaire au cercle C au point A, ce cercle passe par les pôles P et P' du cercle C. En effet, le plan du grand cercle AB contient la droite AO qui est perpendiculaire à la tangente AT au cercle C en A; il contient aussi la tangente AR au cercle AB en A, laquelle est aussi, par hypothèse, perpendiculaire à AT; donc ce plan est perpendiculaire à la droite AT, et, par suite aussi, perpendiculaire au plan du cercle C qui contient la droite AT. Le plan du grand cercle AB est perpendiculaire au plan du cercle C; il passe par le point O, donc il contient la droite PP' qui est la perpendiculaire au plan du cercle C menée par O. Donc enfin le cercle AB passe par les pôles P et P' du cercle C.

889. Corollaire. *Par un point M de la sphère on peut mener un grand cercle perpendiculaire à un petit cercle C, et, en général, on n'en peut mener qu'un* (*fig.* 634).

En effet, le plan du grand cercle demandé passe par le point M et par les points P et P', pôles du cercle C, il est parfaitement déterminé. — Si le point M était l'un des pôles du cercle C, il y aurait indétermination. Tous les grands cercles passant par le point M seraient perpendiculaires au cercle C.

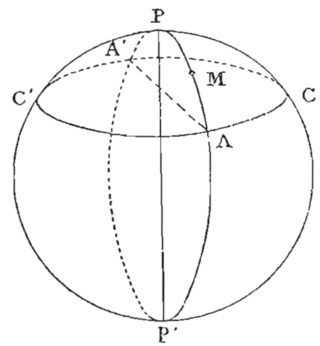


Fig. 634.

890. Remarque. Soient A et A' les points où le grand cercle mené par le point M perpendiculairement au cercle C coupe ce petit cercle; les arcs MA et MPA' sont deux arcs de grand cercle menés du point M perpendiculairement au cercle C. Ce sont les seuls arcs de grand cercle jouissant de cette propriété ; l'un est moindre que l'arc de grand cercle qui va du pôle du cercle C à ce cercle, l'autre est plus grand. Les points A et A' sont les extrémités d'un diamètre du cercle C ; donc d'un point M on peut mener un arc de grand cercle *normal* à un *demi*-cercle, et on n'en peut mener qu'un.

Théorème.

891. *Si d'un point M situé sur une sphère, on mène à un cercle C de la sphère les deux arcs de grand cercle MA, MA' perpendiculaires à ce cercle, et des arcs de grand cercle obliques au cercle C (fig. 635) :*

1° *Le plus petit MA des deux arcs MA et MA' est plus petit que tout arc oblique ;*

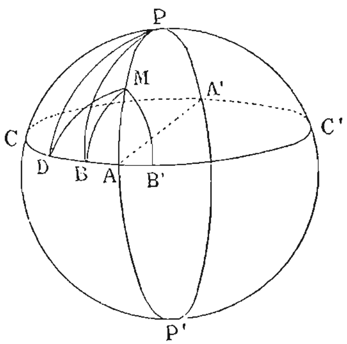


Fig. 635.

2° *Deux arcs obliques MB, MB' dont les pieds B et B' sont équidistants du pied A de l'arc MA sont égaux ;*

3° *La longueur d'un arc oblique est d'autant plus grande que son pied est plus éloigné du pied A de l'arc MA.*

1° L'arc MA, le plus petit des arcs MA, MA' est plus petit que tout arc oblique MB.

En effet, soit P le pôle du cercle C situé dans celle des deux calottes limitées par ce cercle qui contient le point M ; menons l'arc de grand cercle PB.

Dans le triangle sphérique PMB, on a

$$PM + MB > PB.$$

Or PB est égal à PA, qui est lui-même égal à PM + MA ; donc on a

$$PM + MB > PM + MA$$

d'où

$$MB > MA.$$

2° Les arcs de grand cercle obliques MB, MB' dont les pieds sont équidistants du pied A de l'arc MA sont égaux.

En effet, le plan du grand cercle PAP' est un plan de symétrie par rapport au petit cercle ; les arcs AB, AB' étant égaux, les points B et B' sont symétriques par rapport au plan PAP'. Il en résulte que les cordes MB, MB', sont symétriques par rapport au même plan et par suite égales ; donc les arcs de grand cercle MB, MB' sont égaux.

3° Prenons sur le cercle C un point D tel que l'arc AD soit plus grand que l'arc AB, et comparons les deux triangles PMB et PMD : les côtés PM et PB du premier triangle sont respectivement égaux aux côtés PM et PD du second ; l'angle MPB compris entre les côtés du premier triangle est inférieur à l'angle MPD compris entre les côtés du second ; donc (841) le troisième côté MB du premier triangle est inférieur au troisième côté MD du second.

892. La longueur d'un arc du grand cercle oblique est donc d'autant plus grande que son pied est plus éloigné du pied A de l'arc AM.

Si le point B, partant du point A, parcourt le cercle CC' dans le sens ACA' (*fig.* 636), l'arc de grand cercle MB part de la grandeur MA, croît jusqu'à la grandeur MPA' qu'il atteint quand le point B arrive en A', puis décroît de la grandeur MPA' à la grandeur MA qu'il atteint quand le point B, ayant parcouru tout le cercle, est revenu en A. De tous les arcs de grand cercle menés du point M au cercle CC', l'arc MA est le plus petit, et l'arc MPA' est le plus grand.

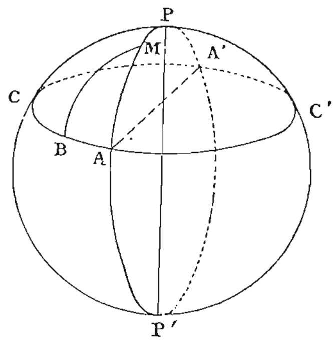


Fig. 636.

893. De ce que l'arc MA est le plus petit des arcs de grand cercle menés du point M au cercle CC', et de ce que, de toutes les lignes menées entre deux points sur la sphère, la plus courte est l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui passe par ces points, il résulte que l'arc de grand cercle MA est la ligne la plus courte que l'on puisse mener, sur la sphère, du point M au cercle CC'.

Pour cette raison, on appelle *distance sphérique* d'un point d'une sphère à un cercle de cette sphère la longueur du plus petit des deux arcs de grand cercle menés de ce point perpendiculairement à ce cercle.

De l'ensemble de ces propositions il résulte que les réciproques sont vraies.

894. Corollaire I. *Le lieu des points d'une sphère équidistants de deux points de cette sphère est l'arc de grand cercle perpendiculaire au milieu de l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points.*

895. Corollaire II. *Deux triangles sphériques rectangles sont égaux ou symétriques, lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté égal, et aussi lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle adjacent à l'hypoténuse égal.*

896. Corollaire III. *Dans un triangle sphérique rectangle, le nombre des côtés obtus est 0 ou 2.*

Pour abréger le discours on dit qu'un arc de grand cercle est *aigu* ou *obtus*, selon qu'il est inférieur ou supérieur au quart de ce cercle, et correspond ainsi à un angle au centre aigu ou obtus.

Considérons sur une sphère tous les triangles rectangles qui ont un côté commun AB, A étant le sommet de l'angle droit de ces triangles (*fig.* 637). Dans ces triangles le sommet C opposé au côté AB est sur le grand cercle APA' perpendiculaire en A au cercle AB. A deux positions du point C, symétriques par rapport au diamètre AA', correspondent des triangles rectangles symétriques qui ont leurs éléments égaux chacun à chacun; donc il suffit d'examiner les triangles obtenus en faisant parcourir au point C la moitié APA' du cercle. Soit P le milieu de l'arc APA', P est un pôle du cercle AB, et les arcs de grand cercle AP, PA', PB, sont tous trois égaux à un quadrant.

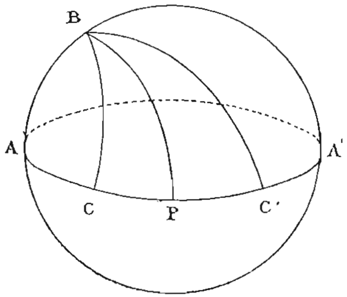


Fig. 637.

Cela posé, supposons le côté AB aigu; quand le point C est entre A et P, les côtés AC et BC du triangle ABC sont tous deux aigus, car AC est moindre que le quadrant PA, et BC moindre que le quadrant BP. Au contraire, quand le point C est entre P et A', en C' par exemple, les côtés AC' et BC' sont tous deux obtus, car le premier surpasse le quadrant AP, et le second surpasse le quadrant BP. Donc tous les triangles rectangles qui ont un côté aigu, AB, ont ou les deux autres côtés aigus, ou les deux autres côtés obtus.

Considérons de même tous les triangles rectangles qui ont un côté commun obtus, et, pour employer la même figure, prenons pour ce côté obtus commun l'arc de grand cercle A'B. Le sommet C opposé à ce côté est toujours sur le grand cercle A'PA, et il suffit d'examiner les triangles obtenus en faisant parcourir au point C le demi-cercle A'PA. Si ce point C est entre A' et P, en C', le côté A'C' est aigu et le côté BC' obtus; si ce point C est entre P et A, en C, le côté CA' est obtus et le côté BC aigu; de sorte que, le côté A'B étant obtus, des deux autres côtés l'un est aigu et l'autre obtus.

Donc, dans tout triangle rectangle le nombre des côtés obtus est 0 ou 2.

897. Corollaire IV. *Dans un triangle sphérique rectangle un côté de l'angle droit et l'angle opposé sont de même nature, c'est-à-dire, ou tous deux aigus, ou tous deux obtus.*

Considérons encore (*fig.* 633) les triangles rectangles qui ont un côté de l'angle droit commun, AB, aigu. Au côté aigu AC, du triangle ABC, est opposé un angle aigu ABC; au côté obtus AC' du triangle ABC' est opposé un angle obtus ABC'. De même considérons les triangles rectangles qui ont un côté commun, A'B, obtus. Au côté aigu A'C' du triangle A'BC' est opposé l'angle aigu A'BC'; au côté obtus A'C du triangle A'BC est opposé l'angle obtus A'BC. Donc dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit et l'angle opposé sont de même nature.

898. Si un côté AB de l'angle droit est égal à un quadrant, l'angle opposé C est droit, et le triangle est *birectangle*. Si les deux côtés AB, AC de l'angle droit A sont tous deux égaux à un quadrant, les deux autres angles du triangle sont droits, et le triangle est *trirectangle*. Dans ce cas le troisième côté BC du triangle est aussi égal à un quadrant.

§ IV. Construction et propriétés des triangles polaires.

Problème.

899. *Tracer sur une sphère le triangle polaire d'un triangle* ABC.

On a vu (844) que l'on appelle triangle polaire d'un triangle ABC (*fig.* 638) un triangle A'B'C', tel que chaque sommet du second triangle est pôle d'un côté du premier, et est, par rapport à ce côté, dans l'hémisphère qui contient le sommet opposé à ce côté; ainsi, le sommet A', par exemple, doit être celui des pôles du côté BC qui est situé, par rapport au côté BC, dans l'hémisphère contenant le sommet A.

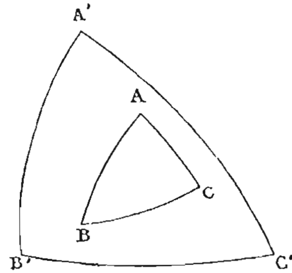


Fig. 638.

Cela posé, pour tracer le triangle A'B'C', des points B et C comme pôles, on décrit deux grands cercles; ces cercles se coupent en deux points, pôles de l'arc BC; on prend pour A' celui de ces deux points qui, par rapport au grand cercle BC, est dans l'hémisphère contenant le point A. On décrit, du point A comme pôle, un troisième grand cercle; il coupe le grand cercle qui a B pour pôle en deux points, pôles de l'arc AB, et on prend pour C' celui de ces points qui, par rapport au grand cercle AB, est dans l'hémisphère contenant C; le même grand cercle coupe le grand cercle de pôle C en deux points qui sont les pôles de l'arc AC; on prend pour B' celui de ces points qui, par rapport au grand cercle AC, est dans l'hémisphère contenant le point B. Le triangle A'B'C', ainsi formé, est le triangle polaire du triangle ABC.

Théorème.

900. *Si le triangle* A'B'C' *est le triangle polaire du triangle* ABC, *réciproquement le triangle* ABC *est le triangle polaire du triangle* A'B'C' (*fig.* 639).

Ce fait a été établi n° 843 comme conséquence de ce que les trièdres OABC, OA'B'C', qui ont pour sommet commun le centre de la sphère, sont deux figures réciproques. Nous allons le démontrer directement. A cet effet, nous nous appuierons sur la remarque suivante :

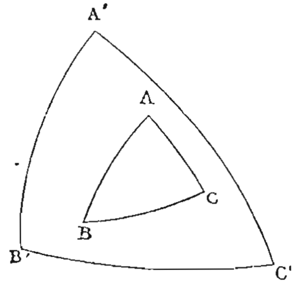


Fig. 639.

L'arc de grand cercle qui joint le pôle A d'un grand cercle MN à un point B quelconque, pris sur celui des hémisphères limités par le grand cercle MN qui contient le point A, est moindre qu'un quadrant. Et, réciproquement, si l'arc de grand cercle qui joint le pôle A du grand cercle MN à un point B est moindre qu'un quadrant, les deux points A et B sont sur un même hémisphère limité par le grand cercle MN.

Cela posé, prenons, par exemple, le sommet A du triangle ABC, il faut démontrer que ce point est pôle de l'arc B'C' et qu'il est sur celui des hémisphères limités pour le grand cercle B'C' qui contient le point A'. Or B étant pôle du grand cercle AC, l'arc de grand cercle AB' est égal à un quadrant; de même C' étant pôle du grand cercle AB, l'arc de grand cercle AC' est égal à un quadrant; donc le point A est pôle du côté B'C'. De plus, par hypothèse, A' pôle du grand cercle BC, et le sommet A sont sur un même hémisphère limité par le grand cercle BC; donc l'arc de grand cercle AA' est moindre qu'un quadrant. D'autre part, A est pôle du côté B'C', l'arc de grand cercle AA' est moindre qu'un quadrant; donc le point A est sur celui des hémisphères limités par le grand cercle B'C' qui contient le point A.

Théorème.

901. *Deux triangles polaires* ABC, A'B'C' *sont tels que la somme d'un côté de l'un et de l'arc de grand cercle qui a même mesure que l'angle correspondant de l'autre est égale à une demi-circonférence de grand cercle, par exemple la somme du côté* B'C' *et de l'arc de grand cercle qui a même mesure que l'angle* A *est égale à une demi-circonférence de grand cercle.*

Ce théorème a été établi (n° 842) par la considération des trièdres supplémentaires OABC, OA'B'C'. Nous allons le démontrer directement.

Soient D et E les points de rencontre du grand cercle B'C' avec les côtés AB, AC, prolongés s'il est nécessaire, le premier dans le sens AB, le second dans le sens AC. L'arc DE est l'arc de grand cercle qui a même mesure que l'angle A; les arcs C'D et B'E sont tous deux égaux à un quadrant.

Il y a deux cas à distinguer selon que le côté B'C' du triangle sphérique A'B'C', côté qui est toujours moindre qu'une demi-circonférence, est supérieur ou inférieur à un quadrant.

Si le côté B'C' est supérieur à un quadrant, et par conséquent supérieur à chacun des arcs B'E, C'D (*fig.* 640), les points E et D sont tous les deux sur ce côté B'C'; et, comme ce côté B'C' est moindre que la somme B'E + C'D qui est égale à une demi-circonférence, le point E est situé, sur le côté B'C', entre les points C' et D. Cela étant, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} B'C' &= B'E + EC' \\ DE &= DC' - EC' \end{aligned}$$

d'où

$$B'C' + DE = B'E + DC' = \frac{1}{2} \text{ circonf.}$$

Si le côté B'C' du triangle A'B'C' est inférieur à un quadrant, et par conséquent inférieur à chacun des arcs B'E, C'D (*fig.* 641), les points E et D sont sur le prolongement du côté B'C', c'est-à-dire sur

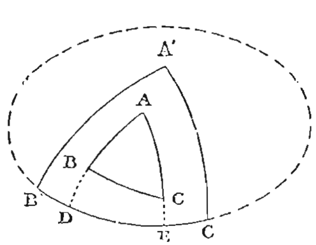


Fig. 640.

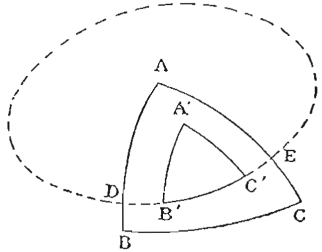


Fig. 641.

celui des deux arcs de grand cercle terminés aux points B' et C' qui est plus grand qu'une demi-circonférence, et, sur cet arc, le point E est situé entre C' et B'. Cela étant, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} B'C' &= B'E - EC' \\ DE &= DC' + EC' \end{aligned}$$

d'où

$$B'C' + DE = B'E + DC' = \frac{1}{2} \text{ circonf.}$$

902. Soient A, B, C, les arcs de grand cercle qui ont mêmes mesures que les angles d'un triangle sphérique ABC, et a, b, c, les côtés de ce triangle, et soient A', B', C', a', c', b, les éléments correspondants du triangle, polaire A'B'C' du triangle ABC; si l'on désigne par q le quart d'un grand cercle de la sphère sur laquelle les deux triangles sont tracés, on a

$$A' = 2q - a, \quad B' = 2q - b, \quad C' = 2q - c$$
$$a' = 2q - A, \quad b' = 2q - B, \quad c' = 2q - C.$$

§ V. Problème sur la construction des triangles sphériques.

903. On peut se proposer de construire un triangle sphérique, connaissant trois de ses six éléments; de là six problèmes différents, selon qu'on prend pour données :

Les trois côtés, ou les trois angles;

Deux côtés et l'angle compris, ou deux angles et le côté adjacent;

Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, ou deux angles et le côté opposé à l'un d'eux.

Ces six problèmes forment trois groupes, tels que, par la considération des triangles polaires, on peut ramener à un les deux problèmes d'un même groupe.

Problème.

904. *Construire un triangle sphérique, connaissant les trois côtés* a,b,c.

Chacun des arcs donnés est supposé moindre qu'une demi-circonférence $2q$. Soit a le plus grand de ces trois arcs. On sait déjà (841) que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait un triangle sphérique avec ces arcs pour côtés, c'est que l'on ait

$$a < b+c \quad \text{et} \quad o < a+b+c < 4q.$$

En donnant le moyen de construire le triangle demandé, nous montrerons à nouveau que ces deux conditions sont suffisantes.

Sur un grand cercle de la sphère, prenons, à la suite les uns des autres, les arcs DB, BC, CE, respectivement égaux à c,a,b, (*fig* 642); puis, du point B comme pôle, avec un rayon sphérique égal à BD, décrivons un cercle qui coupe le grand cercle DBC en D, et en un second point D' situé entre B et C, puisque, par hypothèse, l'arc BD, ou c, est moindre que l'arc BC, ou a. De même, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à CE, décrivons un cercle qui coupe le grand cercle BCE en E, et en un second point E' situé aussi entre B et C, puisque, par hypothèse, l'arc CE, ou b, est moindre que l'arc BC, ou a. Si nous tenons compte de ce que, par hypothèse, on a

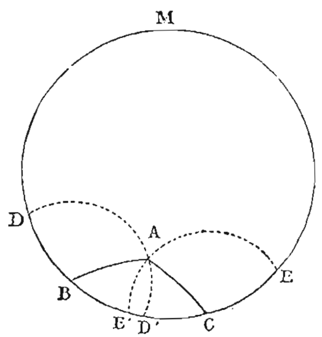


Fig. 642.

$$a < b+c,$$

nous remarquons encore que le point E' est situé entre B et D'. Donc le point E' est dans celle des calottes limitées par le cercle DD' qui contient le pôle B de ce cercle. D'autre part, si nous tenons compte de l'hypothèse,

$$a+b+c < 4q,$$

nous voyons qu'un mobile qui, partant du point D, parcourrait successivement sur le grand cercle DBC, dans le sens DBC, les arcs c, a, b, arriverait au point E après avoir dépassé le point C, et avant d'être revenu au point de départ D; donc le point E est situé sur la portion CMD du grand cercle DBC. Ce point est donc en dehors de celle des calottes limitées par le cercle DD', qui contient le pôle B de ce cercle. Le cercle EE', ayant un point sur chacune des deux calottes sphériques limitées par le cercle DD', coupe nécessairement ce cercle en deux points symétriques par rapport au plan du grand cercle CBD. Soient A et A' ces points.

Si l'on mène les arcs de grand cercle AB et AC, A'B et A'C, moindres chacun qu'une demi-circonférence, on forme deux triangles sphériques symétriques qui ont pour côtés les arcs donnés a,b,c.

905. Problème corrélatif. *Construire un triangle sphérique connaissant les trois angles.*

Désignons par A,B,C, les arcs de grand cercle qui ont mêmes mesures que les angles donnés, A étant le plus petit de ces angles. Construisons d'abord les deux triangles sphériques symétriques, qui ont pour côtés les arcs

$$2q - A, \quad 2q - B, \quad 2q - C;$$

puis, prenons les triangles polaires de ces triangles. Nous obtiendrons ainsi deux triangles sphériques symétriques, dont les angles ont mêmes mesures que les arcs de grand cercle A, B, C.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire les premiers triangles, et par suite les seconds, sont

$$2q - A < 2q - B + 2q - C$$

et

$$o < 2q - A + 2q - B + 2q - C < 4q$$

ou

$$A + 2q > B + C$$

et

$$6q > A + B + C > 2q.$$

Si on compare les angles donnés à l'angle droit, on dira, comme au n° 841, que les conditions nécessaires et suffisantes sont que le plus petit angle donné, augmenté de deux droits, soit plus grand que la somme des deux autres, et que la somme des trois angles soit comprise entre deux droits et six droits.

Problème.

906. *Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés* b,c, *et l'angle compris* A.

On trace sur la sphère deux grands cercles faisant un angle égal à l'angle donné. A cet effet, sur un grand cercle on prend un arc PQ, égal à l'arc de grand cercle qui a même mesure que l'angle donné (*fig.* 643), puis on décrit les deux grands cercles qui ont l'un le point Q, l'autre le point P pour pôle ; ces grands cercles font un angle égal à l'angle donné, car leurs plans sont perpendiculaires aux rayons OP, OQ, dont l'angle est égal à cet angle donné. En portant, à partir du point A, sur l'un des cercles un arc AB égal à c, et sur l'autre un arc AC égal à b, et en menant l'arc du grand cercle BC, on obtient un triangle ABC qui satisfait aux conditions de l'énoncé. En échangeant les cercles sur lesquels on porte les arcs b et c, on obtiendra un second triangle AB'C', symétrique au premier, qui satisfait également aux conditions de l'énoncé. Le problème est toujours possible. Si $b = c$, les deux triangles symétriques obtenus sont égaux.

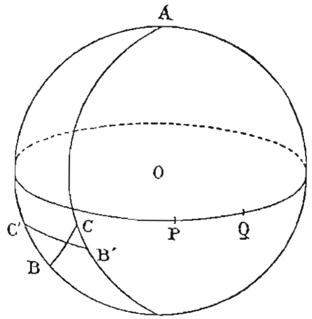


Fig. 643.

907. Problème corrélatif. *Construire un triangle sphérique, connaissant deux angles* B, C, *et le côté adjacent* a.

On construira d'abord un triangle, connaissant deux côtés $2q - B$, $2q - C$, et l'angle compris $2q - a$. On obtiendra deux triangles symétriques. Les triangles polaires de ceux-ci sont deux triangles symétriques qui satisfont aux conditions de l'énoncé.

Problème.

908. *Construire un triangle sphérique, connaissant deux côtés* a,b, *et l'angle* A *opposé au côté* a.

On prend d'abord deux grands cercles AMA', ANA', faisant entre eux un angle égal à l'angle A (*fig.* 644); sur l'un d'eux on prend à partir du sommet A un arc AC égal à b, et, du point C comme pôle, avec un rayon sphérique égal à a, on décrit un cercle. Si ce cercle rencontre le grand cercle AMA' en un point B situé sur le demi-cercle AMA', le triangle sphérique ABC satisfait aux conditions de l'énoncé.

909. Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que le cercle décrit du point C comme pôle, avec a pour rayon sphérique, rencontre le demi-cercle AMA'; à chaque point de rencontre de ce

cercle et du demi-cercle AMA' correspond une solution. Pour faire la discussion, nous distinguerons deux cas, selon que l'angle A est aigu ou obtus.

Cas où l'angle A est aigu. Soit CD l'arc de grand cercle mené par le point C perpendiculairement au demi-cercle AMA'. L'arc CD est le plus petit arc de grand cercle mené du point C au grand cercle AMA'; donc, pour que le cercle décrit du point C comme pôle, avec a pour rayon sphérique, rencontre le grand cercle AMA', il faut que a soit supérieur à CD. Cette condition remplie, le cercle de pôle C rencontrera en deux points le *demi-cercle* AMA' si a est à la fois inférieur aux arcs CA et CA', c'est-à-dire à b et à $2q - b$; il ne le rencontrera qu'en un point si a est compris entre b et $2q - b$; il ne le rencontrera pas si a est supérieur à la fois à b et à $2q - b$.

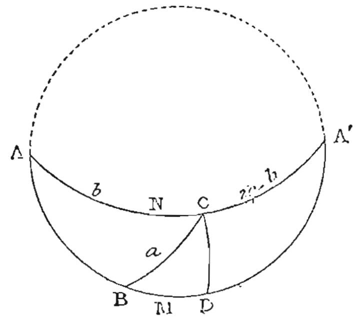


Fig. 644.

Donc, dans le cas où A est aigu, la discussion présente les résultats suivants :

$$a > \mathrm{CD} \begin{cases} a \text{ inférieur à } b \text{ et à } 2q - b \ldots\ldots\ldots & 2 \text{ sol.} \\ a \text{ compris entre } b \text{ et } 2q - b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ sol.} \\ a \text{ supérieur à } b \text{ et à } 2q - b \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ sol.} \end{cases}$$
$$a < \mathrm{CD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \text{ sol.}$$

Cas où A est obtus. Soit encore CD l'arc de grand cercle mené par le point C perpendiculairement au *demi*-grand cercle AMA' (*fig.* 645); dans ce cas, l'arc de grand cercle CD est le plus grand des arcs de grand cercle menés du point C au grand cercle AMA', et si le point B s'éloigne de D, soit sur le demi-cercle DAD', soit sur le demi-cercle DA'D', l'arc de grand cercle va en diminuant, et diminue de CD à CD'.

Il en résulte que, pour que le cercle décrit du point C comme pôle, avec a pour rayon sphérique, rencontre le grand cercle AMA', il faut que a soit moindre que CD. Cette condition remplie, le cercle de pôle C rencontre en deux points le *demi*-grand cercle AMA' si a

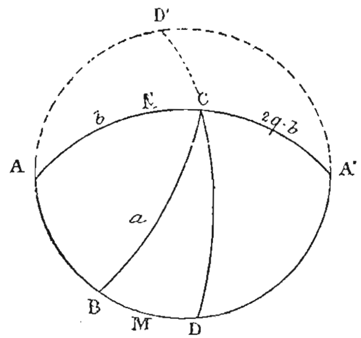


Fig. 645.

est supérieur à b et à $2q-b$, et il y a deux solutions ; il ne le rencontre qu'en un point si a est compris entre b et $2q-b$, et il y a une seule solution ; il ne le rencontre pas si a est moindre que b et que $2q-b$, et il n'y a pas de solution.

Donc, dans le cas de A obtus, les résultats de la discussion sont les suivants :

$$a < \mathrm{CD} \left\{ \begin{array}{ll} a \text{ supérieur à } b \text{ et à } 2q-b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ sol.} \\ a \text{ compris entre } b \text{ et } 2q-b \ldots\ldots\ldots & 1 \text{ sol.} \\ a \text{ inférieur à } b \text{ et à } 2q-b \ldots\ldots\ldots & 0 \text{ sol.} \end{array} \right.$$

$$a > \mathrm{CD} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 0 \text{ sol.}$$

910. Remarque. Quand A et a sont de natures différentes, le problème ne peut avoir plus d'une solution. Soit par exemple A aigu et a obtus. Dans ce cas, CD qui est de même nature que A est aigu ; donc la condition de possibilité $a > \mathrm{CD}$ est vérifiée. Des deux arcs b et $2q-b$ l'un est aigu, l'autre obtus : donc a, qui est obtus, ne peut être inférieur aux deux arcs b et $2q-b$, et par suite il ne peut y avoir deux solutions. Il y en a une si a est compris entre b et $2q-b$; il n'y en a pas si a surpasse le plus grand de ces arcs.

Soit, au contraire, A obtus et a aigu. Alors CD, qui est de même nature que A, est obtus, et la condition de possibilité $a < \mathrm{CD}$ se trouve nécessairement remplie. Des deux arcs b et $2q-b$, l'un est aigu, l'autre obtus, et a qui est supposé aigu ne peut être supérieur à ces deux arcs ; donc il ne peut y avoir deux solutions. Il y en a une si a est compris entre b et $2q-b$; il n'y en a pas si a est moindre que b et que $2q-b$.

Quand A et a sont de même nature, le nombre des solutions peut être 0, 1, ou 2.

911. Problème corrélatif. *Construire un triangle sphérique, connaissant deux angles* A *et* B, *et le côté opposé à l'angle* A.

On construira d'abord un triangle sphérique, connaissant deux côtés $2q-\mathrm{A}$, $2q-\mathrm{B}$, et l'angle $2q-a$ opposé au premier côté. Si le triangle A'B'C' satisfait à ces dernières conditions, le triangle ABC, polaire du triangle A'B'C', satisfera aux conditions de l'énoncé.

§ VI. Positions relatives de deux cercles sur une sphère. — Problèmes sur les cercles tangents tracés sur une sphère.

Théorème.

912. *Quand deux cercles* C, C', *tracés sur une sphère, ont un point commun* M, *non situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles* P *et* Q, *ils ont un second point commun* M', *symétrique au point* M *par rapport au plan du grand cercle* PQ (*fig.* 646).

Cela résulte de ce que le plan du grand cercle PQ passant par les pôles, plan qui est perpendiculaire aux plans des deux cercles (887), et qui passe par le centre de la sphère, est un plan de symétrie pour chacun des deux cercles.

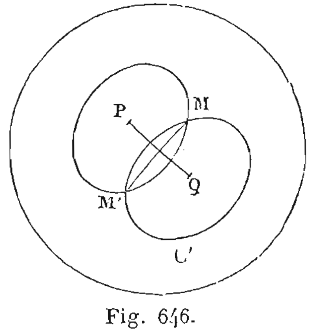


Fig. 646.

913. Corollaire I. *Le grand cercle qui passe par les pôles de deux cercles d'une sphère, qui se coupent en deux points* M *et* M', *est perpendiculaire à tous les cercles de la sphère qui passent par ces deux points, et partage l'arc* MM' *de chacun de ces cercles en deux parties égales.*

Cela résulte de ce que les pôles des deux cercles sont deux points équidistants des points M et M' (893).

914. Corollaire II. *Si deux cercles tracés sur une sphère ont un point commun* A *situé sur le grand cercle qui passe par leurs pôles, ces deux cercles n'ont pas d'autre point commun. On dit alors que ces deux cercles sont tangents ; le point commun* A *est le point de contact. Les tangentes, en ce point, aux deux cercles sont confondues.*

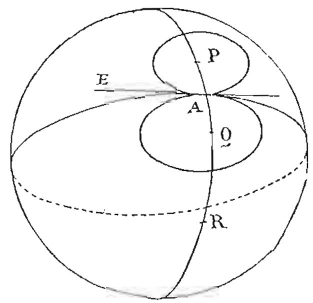


Fig. 647.

En effet, la tangente en A au cercle de pôle P (*fig.* 647) est l'intersection du plan de ce cercle et du plan tangent à la sphère en A ; ces deux plans sont perpendiculaires au plan du grand cercle PA ; donc la tangente est la perpendiculaire, au point A, au plan du grand cercle PA. De même la tangente en A au cercle de pôle Q est la perpendiculaire au point A au plan du grand cercle QA. Les plans des grands cercles PA et QA sont confondus, donc les tangentes aux deux cercles au point A sont confondues.

915. Corollaire III. *Le grand cercle mené par le point de contact de deux cercles tangents sur une sphère, perpendiculairement au grand cercle qui passe par les pôles de ces cercles, est tangent à ces deux cercles.*

En effet, le pôle R de ce cercle est sur le grand cercle qui passe par les pôles des deux cercles.

916. Un petit cercle tracé sur une sphère la partage en deux calottes inégales. Tout point de la surface de la sphère, qui est sur la plus petite de ces deux calottes, est dit *intérieur* au petit cercle, tandis que tout point de la surface de la sphère qui est sur la plus grande calotte est dit *extérieur* au petit cercle.

On dit que deux cercles tracés sur la sphère sont *extérieurs* quand tous les points de chacun sont extérieurs à l'autre.

On dit que deux cercles tracés sur la sphère sont *l'un intérieur à l'autre,* quand tous les points de l'un des cercles étant intérieurs à l'autre, tous les points de l'autre sont extérieurs au premier.

Deux cercles tracés sur une sphère étant tangents, on dit qu'ils sont *tangents extérieurement* ou *tangents intérieurement,* selon que tout point de chacun des deux cercles, sauf le point de contact, est extérieur à l'autre, ou que les points de l'un des deux cercles, sauf le point de contact, sont intérieurs à l'autre.

917. Deux cercles étant tracés sur une sphère, convenons de prendre pour pôle de chacun de ces cercles le pôle situé sur la plus petite des calottes qu'il limite; appelons r et r' les rayons sphériques de ces cercles, rayons qui sont moindres qu'un quadrant, et d l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence qui passe par les deux pôles. On démontrera, comme en géométrie plane, les propositions suivantes :

1° *Si deux cercles tracés sur une sphère sont extérieurs, on a :*

$$d > r + r';$$

2° *Si deux cercles tracés sur une sphère sont tangents extérieurement, on a :*

$$d = r + r';$$

3° *Si deux cercles tracés sur une sphère sont sécants, on a :*

$$d < r + r' \quad \text{et} \quad d > r - r'$$

en supposant $r > r'$;

4° *Si deux cercles tracés sur une sphère sont tangents intérieurement, on a :*

$$d = r - r';$$

5° *Si le cercle de rayon r' est intérieur au cercle de rayon r,*

$$d < r - r'.$$

Les réciproques sont vraies :

1° *Si l'on a*

$$d > r + r',$$

les deux cercles sont extérieurs.

2° *Si l'on a*

$$d = r + r',$$

les deux cercles sont tangents extérieurement.

3° *Si l'on a à la fois*

$$d < r + r' \quad \text{et} \quad d > r - r',$$

les deux cercles sont sécants.

4° *Si l'on a*

$$d = r - r',$$

les deux cercles sont tangents intérieurement.

5° *Si l'on a*

$$d < r - r',$$

le cercle de rayon r' est intérieur au cercle de rayon r.

918. Remarque I. De la troisième proposition, et de sa réciproque, il résulte que, *pour que deux cercles se coupent, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités*

$$d < r + r', \quad d > r - r',$$

r étant supposé plus grand que r'.

On peut dire encore que, pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que les arcs d, r, r', soient les côtés d'un triangle sphérique. Pour cela il faut d'abord

$$d + r + r' < 4q,$$

condition qui est toujours remplie, puisqu'on suppose d moindre que $2q$, et r et r' moindres que q; il faut en outre que le plus grand des trois arcs soit moindre que la somme des deux autres. Si l'on ignore quel est le plus grand des trois arcs, pour être certain que cette condition est remplie on écrira que chacun des arcs est moindre que la somme des deux autres.

919. Remarque II. Tandis que chacune des inégalités

$$d > r + r' \qquad d < r - r'$$

exclut pour les cercles quatre situations relatives, et, par suite, détermine la situation relative des deux cercles, chacune des inégalités

$$d < r + r' \qquad d > r - r'$$

n'exclut, pour les cercles, que deux situations relatives, et, par suite, en laisse trois possibles.

L'inégalité

$$d < r + r'$$

indique que les cercles ne sont ni extérieurs ni tangents extérieurement.

L'inégalité

$$d > r - r'$$

indique que les cercles ne sont ni l'un intérieur à l'autre, ni tangents intérieurement.

Problème.

920. *Par un point donné sur la sphère, mener un grand cercle tangent à un petit cercle donné.*

Soit r le rayon sphérique du cercle donné, et soit P le pôle de ce cercle le plus rapproché du cercle (*fig.* 648) ; soit A le point donné, et soit d l'arc de grand cercle AP moindre qu'une demi-circonférence. Supposons le problème résolu, soit B le point de contact d'un grand cercle tangent au cercle donné, et passant par le point A ; soit Q le pôle de ce grand cercle situé dans celui des hémisphères limités par ce grand cercle qui ne contient pas le petit cercle donné. Tout revient à trouver ce point Q. Or, l'arc de grand cercle AQ est égal à q, l'arc de grand cercle PQ est égal à $q+r$, donc le point Q est à l'intersection de deux cercles tracés sur la sphère, l'un du point A comme pôle avec q pour rayon sphérique, l'autre du point P comme pôle avec $q+r$ pour rayon sphérique. Pour que ces deux cercles se coupent, il faut et il suffit que les arcs

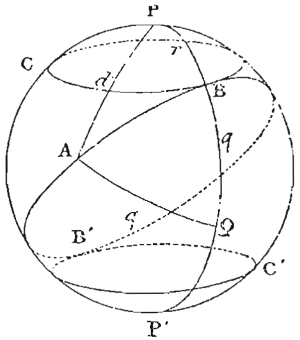


Fig. 648.

$$d, \qquad q, \qquad q+r$$

soient les côtés d'un triangle.

Comme l'arc q est moindre que l'arc $q+r$, les conditions de possibilité sont les suivantes :

$$d+q+q+r<4q \qquad \text{ou} \qquad d<2q-r$$
$$d<q+q+r \qquad \text{ou} \qquad d<2q+r$$
$$q+r<d+q \qquad \text{ou} \qquad r<d.$$

Si la première inégalité est vérifiée, la seconde est vérifiée *a fortiori* ; donc les conditions de possibilité se réduisent à la première et à la troisième inégalité. Ces deux inégalités, que l'on peut écrire ainsi

$$r<d<2q-r,$$

signifient que le point A doit être sur la zone comprise entre le cercle donné et un cercle symétrique à celui-ci par rapport au centre de la sphère.

Si cette condition est remplie, les cercles se coupent en deux points Q, Q', symétriques par rapport au plan du grand cercle AP, et le problème admet deux solutions.

921. Remarque. Un grand cercle tangent à un petit cercle C est aussi tangent au petit cercle C' symétrique au premier par rapport

au centre de la sphère, et les points de contact du grand cercle avec les deux petits cercles sont symétriques par rapport au centre de la sphère. Cela résulte de ce que le centre de la sphère étant un centre de symétrie pour le grand cercle, et un centre de symétrie pour la figure formée des deux petits cercles C et C', à tout point commun au grand cercle et au cercle C correspond un point, symétrique à celui-ci par rapport au centre de la sphère, commun au grand cercle et au petit cercle C'.

Problème.

922. *Mener un grand cercle tangent à deux petits cercles.*

Soient r et r' les rayons sphériques des deux cercles donnés, et soit d la plus courte distance sur la sphère entre les points P et P'. P et P' les pôles les plus rapprochés de chacun de ces cercles. Supposons le problème résolu. Deux cas peuvent se présenter : ou les deux cercles donnés sont dans un même hémisphère limité par le grand cercle tangent, ou ils sont l'un dans un hémisphère, l'autre dans l'autre. Considérons d'abord le premier cas. Soient A et A' les points de contact du grand cercle avec les petits cercles (*fig.* 649), et soit Q le pôle du grand cercle tangent situé dans l'hémisphère qui contient les deux petits cercles. Tout revient à déterminer la position du point Q. Or, l'arc de grand cercle PQ est égal à $q-r$, l'arc de grand cercle P'Q est égal à $q-r'$; donc le point Q est à l'intersection de deux cercles tracés sur la sphère, l'un du point P comme pôle avec $q-r$ pour rayon sphérique, l'autre du point P' comme pôle avec $q-r'$ pour rayon sphérique. Pour que ces deux cercles se coupent, il faut et il suffit que les arcs

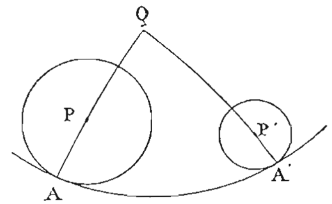


Fig. 649.

$$d, \qquad q-r, \qquad q-r'$$

soient les côtés d'un triangle sphérique. Comme la somme de ces trois arcs est moindre que $4q$, et comme l'arc $q-r'$ est plus grand que l'arc $q-r$, les conditions de possibilité sont

$$(1) \qquad d<2q-r-r',$$

et

$$q-r'<d+q-r,$$

ou

$$(2) \qquad d>r-r'.$$

L'inégalité (2) exprime que les cercles donnés sont tels que le cercle r' n'est ni intérieur au cercle r ni tangent intérieurement à ce cercle, ou, en d'autres termes, que le cercle r' n'est pas tout entier sur la calotte PMM' limitée par le cercle r (*fig.* 650).

L'inégalité (1) peut être écrite

$$2q - d > r + r'.$$

Considérons le cercle $M_1M'_1$ symétrique du cercle r, et soit P_1 son pôle le plus voisin; l'arc de grand cercle, moindre que $2q$, qui joint le point P_1 au point H' est $2q - d$, donc l'égalité (1) exprime que le cercle r' et le cercle $M_1M'_1$ symétrique du cercle r sont extérieurs ou, en d'autres termes, que le cercle r' n'a aucun point sur la calotte $P_1M_1M'_1$ symétrique de la calotte PMM'.

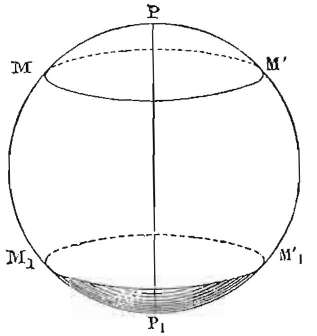


Fig. 650.

Les deux conditions (1) et (2) expriment donc *que le plus petit des deux cercles donnés n'est pas tout entier sur la calotte limitée par le plus grand, et qu'il n'a aucun point sur la calotte symétrique à cette dernière.*

Si ces conditions sont remplies, les cercles construits se coupent en deux points Q, Q' symétriques par rapport au plan du grand cercle PP', et, par suite, il y a deux grands cercles, symétriques par rapport à ce plan, qui satisfont aux conditions demandées.

Si le cercle r' est tangent intérieurement au cercle r, ou tangent extérieurement à son symétrique, les points de rencontre Q et Q' des cercles construits se confondent en un point situé sur le grand cercle PP', et, par suite, les deux grands cercles tangents se confondent en un grand cercle perpendiculaire au grand cercle PP'.

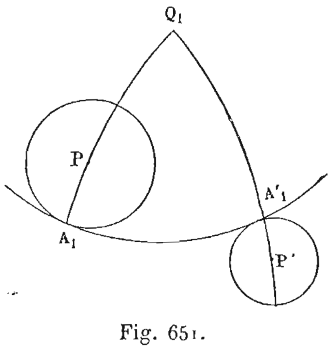


Fig. 651.

En second lieu, supposons un grand cercle tangent aux cercles donnés tel que ces cercles ne soient pas dans un même hémisphère limité par ce grand cercle (*fig.* 651). Soient A_1, A'_1, les points de contact, et soit Q_1 le pôle du grand cercle situé dans l'hémisphère qui contient le cercle r. Le point Q_1 est à l'intersection de deux cercles tracés sur la sphère, l'un du point P pour pôle, avec $q - r$ pour rayon sphérique, l'autre du point P' pour pôle, avec $q + r'$ pour rayon sphérique. Pour que ces deux cercles se coupent, il faut et il suffit que les trois arcs

$$d, \qquad q - r, \qquad q - r'$$

soient les côtés d'un triangle sphérique. Écrivons d'abord que la somme des trois arcs est moindre que $4q$, nous aurons

$$d + q - r + q + r' < 4q,$$

ou

$$(1) \qquad d < 2q + r - r'.$$

Le second arc étant moindre que le troisième est plus petit que la somme des deux autres, de sorte que nous n'avons plus à écrire que les deux conditions

$$d < q - r + q + r'$$
$$q + r' < d + q - r,$$

ou

$$(2) \qquad d < 2q - (r - r')$$
$$(3) \qquad d > r + r'.$$

Comme r est supposé plus grand que r', si l'inégalité (2) est vérifiée, l'inégalité (1) sera vérifiée *à fortiori*. Les conditions de possibilité sont donc exprimées par les deux inégalités (2) et (3).

L'inégalité (3) exprime que les cercles r et r' sont extérieurs, ou, en d'autres termes, que le cercle r' n'a aucun point sur la calotte PMM', limitée par le cercle r (*fig.* 652).

L'inégalité (2) que l'on peut écrire

$$2q - d > r - r',$$

exprime que le cercle r' n'est ni intérieur, ni tangent intérieurement au cercle symétrique du cercle r, ou, en d'autres termes, que le cercle r' n'est pas tout entier sur la calotte $P_1M_1M'_1$, symétrique de la calotte PMM' limitée par le cercle r.

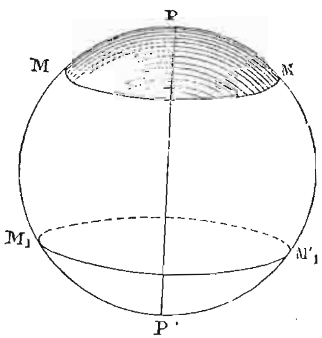


Fig. 652.

De sorte que les conditions (2) et (3) expriment que le *plus petit des deux cercles n'a aucun point sur la calotte limitée par le plus grand, et qu'il n'est pas tout entier sur la calotte symétrique à cette dernière.*

Si ces conditions sont remplies, les deux cercles construits se coupent en deux points Q_1, Q'_1, symétriques par rapport au plan du grand cercle PP', et par conséquent il y a deux grands cercles, symétriques par rapport à ce plan, qui satisfont aux conditions demandées.

Ces deux grands cercles se confondent en un seul perpendiculaire au grand cercle PP' quand le cercle r' est tangent extérieurement au cercle r, ou tangent intérieurement à son symétrique, car alors les points Q_1 et Q'_1 se confondent en un point situé sur le grand cercle PP'.

De la comparaison des conditions de possibilité des solutions de première et de seconde espèce, il résulte que, *pour que le problème admette quatre solutions, il faut et il suffit que le plus petit des deux cercles soit tout entier sur la zone comprise entre le plus grand des deux cercles et son symétrique par rapport au centre de la sphère.*

§ VII. Aire d'un polygone sphérique.

Théorème.

923. *Deux triangles sphériques symétriques ont des surfaces équivalentes.*

On sait que deux triangles sphériques symétriques, bien qu'ils aient toujours les éléments égaux chacun à chacun, ne sont pas, en général, superposables; mais que, si l'un des triangles est isocèle, il est superposable à son symétrique.

Cela posé, soient ABC, A'B'C' deux triangles sphériques symétriques (*fig.* 653); soient P le pôle le plus voisin du cercle qui passe par les trois points A,B,C; le point diamétralement opposé, P', sera le pôle le plus voisin du cercle passant par les trois points A', B', C'.

Les arcs de grand cercle PA, PB, PC, P'A', P'B', P'C', sont égaux, et par suite les triangles symétriques PAB, PAC, PBC sont respectivement égaux à leurs symétriques P'A'B', P'A'C', P'B'C', parce qu'ils sont isocèles. Supposons le point P à l'intérieur du triangle ABC, la droite OP est dans le trièdre OABC; la droite OP', prolongement de PO, est dans le trièdre OA'B'C' symétrique du précédent, donc le point P' est dans l'intérieur du triangle ABC. Dans ce cas, la surface du triangle ABC est la somme des surfaces des triangles PAB, PAC, PBC, et la surface du triangle A'B'C' est la somme des surfaces des triangles P'A'B', P'A'C', P'B'C', qui sont respectivement égaux aux précédents; donc les surfaces des deux triangles ABC, A'B'C' sont équivalentes.

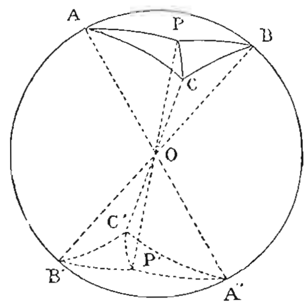


Fig. 653.

Si nous supposons le point P en dehors du triangle ABC, par exemple dans l'angle A, on verra de même par la considération des deux trièdres symétriques OABC, OA'B'C', que le point P' est

en dehors du triangle A'B'C', et dans l'angle A'. Dans ce cas, la surface du triangle ABC est l'excès de la somme des surfaces des triangles PAB, PAC sur le triangle PBC, et la surface du triangle A'B'C' est l'excès de la somme des triangles P'A'B', P'A'C' sur le triangle P'B'C'; comme ces derniers triangles sont respectivement égaux aux précédents, on en conclut encore que les surfaces des deux triangles ABC, A'B'C' sont équivalentes.

924. Remarque. Il est bon d'observer que si deux triangles symétriques, isocèles, sont superposables, ce ne sont pas les côtés qui se correspondent comme symétriques qu'il faut placer l'un sur l'autre pour faire coïncider les deux triangles. Par exemple, pour faire coïncider le triangle isocèle P'A'B' avec le triangle symétrique PAB, il faut placer le côté P'A' sur le côté PB, le côté P'B' sur le côté PA; le côté A'B' tombe ainsi sur le côté symétrique AB, mais le point A' tombe en B et le point B' en A. La figure 654 a été ombrée de façon à montrer comment il faudrait disposer les trois parties P'A'B', P'A'C', P'B'C' du triangle A'B'C' sur les parties égales du triangle ABC, pour recouvrir avec elles le triangle ABC.

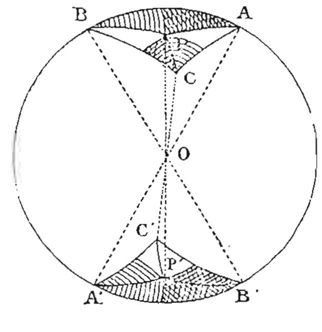


Fig. 654.

Théorème.

925. *Deux fuseaux d'une même sphère sont proportionnels à leurs angles.*

On appelle *fuseau* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux demi-grands cercles. L'angle de ces demi-grands cercles est l'angle du fuseau. Soit le fuseau PAP'BP (*fig.* 655); si l'on mène le grand cercle dont le plan est perpendiculaire à PP', l'arc AB de ce grand cercle, compris entre les demi-grands cercles PAP', PBP', a même mesure que l'angle du fuseau.

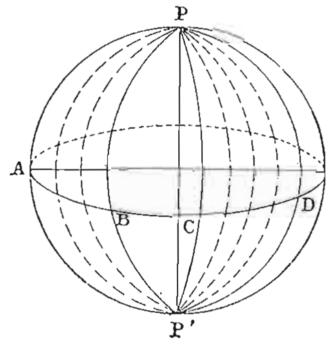


Fig. 655.

Il est évident que, sur une même sphère, deux fuseaux qui ont des angles égaux sont superposables. Soient PAP'BP, PCP'DP deux fuseaux quelconques d'une même sphère. Supposons que les arcs AB, CD, qui ont mêmes mesures que les angles de ces fuseaux, aient une commune mesure, comprise par exemple trois fois dans l'arc AB, et quatre fois dans l'arc CD. Le rapport des angles des deux fuseaux est $\frac{3}{4}$. Si par PP' et par les points de division des arcs AB et CD on fait passer des demi-grands cercles, on partage le fuseau PAP'BP en rois fuseaux égaux, et le fuseau PCP'DP en quatre fuseaux égaux aux précédents; donc le rapport des deux fuseaux est $\frac{3}{4}$, comme le rapport de leurs angles.

Si les arcs AB et CD n'ont pas de commune mesure, on achève le raisonnement comme dans toutes les questions analogues.

926. Remarque. Si l'on mène trois grands cercles rectangulaires deux à deux, on partage la surface de la sphère en huit triangles trirectangles égaux entre eux (*fig.* 656). L'aire d'un triangle trirectangle est donc le huitième de la sphère. Un fuseau ABA'CA, dont l'angle est droit, est la somme de deux triangles trirectangles ABC, A'BC; son aire est le quart de l'aire de la sphère.

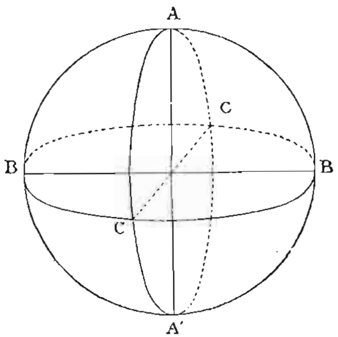


Fig. 656.

927. Corollaire. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, la mesure de l'aire d'un fuseau est le double du nombre qui est la mesure de son angle.*

Soient en effet A et A' les nombres qui mesurent les angles de deux fuseaux, on a

$$\frac{\text{fus. A}}{\text{fus. A}'} = \frac{A}{A'}.$$

Faisons $A' = 1$; le fus.A' corespondant à son angle droit; son aire est double de celle du triangle trirectangle, elle est mesurée par le nombre 2, et on a

$$\frac{\text{fus. A}}{2} = \frac{A}{1},$$

ou

$$\text{fus.A} = A.$$

Théorème.

928. *Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, et pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle construit sur la sphère considérée, la mesure de l'aire d'un triangle sphérique est l'excès sur 2 de la somme des nombres qui mesurent ses angles.*

Soit le triangle sphérique ABC dont les angles sont mesurés par les nombres A, B, C, (*fig.* 657). Complétons les grands cercles auxquels appartiennent les côtés du triangle sphérique, et soient A',B',C', les points diamétralement opposés aux points A,B,C. On voit, sur la figure, que la somme des triangles ABC,BCA' est le fuseau A, que la somme des triangles ABC, ACB' est le fuseau B; le triangle A'B'C étant équivalent au triangle symétrique ABC', la somme des deux triangles ABC, A'B'C équivaut à la somme des triangles ABC, ABC', c'est-à-dire au fuseau C. De sorte que l'on a

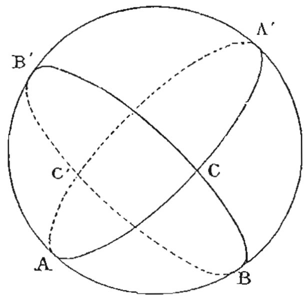


Fig. 657.

$$\begin{aligned} ABC + BCA' &= \text{fus.A} \\ ABC + ACB' &= \text{fus.B} \\ ABC + A'B'C &= \text{fus.C}. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre, nous aurons d'une part deux fois le triangle ABC, plus la somme des quatre triangles ABC, BCA', ACB', A'B'C, laquelle somme est la surface de l'hémisphère limité par le grand cercle ABA'B'; de l'autre part, nous aurons la somme des trois fuseaux, Donc on a

$$2ABC + \frac{1}{2}\text{sph.} = \text{fus. A} + \text{fus. B} + \text{fus. C}.$$

Or, avec nos hypothèses sur l'unité d'aire et sur l'unité d'angle, l'aire de la demi-sphère est mesurée par le nombre 4, les aires des trois fuseaux sont mesurées par les trois nombres 2A, 2B, 2C; donc, si l'on désigne par S la mesure de la surface du triangle, on a

$$2S + 4 = 2A + 2B + 2C,$$

d'où

$$S = A + B + C - 2.$$

929. Corollaire. *Si l'on prend pour unité d'aire l'aire du triangle trirectangle, et pour unité d'angle l'angle droit, la mesure de l'aire d'un polygone sphérique convexe de n côtés est la somme des nombres qui mesurent les angles du polygone, moins le nombre 2 (n — 2).*

Il suffit pour le démontrer de décomposer le polygone en triangles sphériques par des arcs de grand cercle menés de l'un des sommets A du polygone à tous les sommets du polygone non situés sur les côtés de l'angle A, et de remarquer d'une part que l'aire du polygone est la somme des aires des $n-2$ triangles, et, d'autre part, que la somme des angles de ces $n-2$ triangles est égale à la somme des angles du polygone.

930. Remarque. Soit R le rayon de la sphère évalué en mètres; S_1 l'aire du triangle sphérique évaluée en mètres carrés; A_1, B_1, C_1 les angles du triangle évalués en degrés. Si l'on observe que l'aire du triangle tirectangle, c'est-à-dire le huitième de l'aire de la sphère, est mesurée par le nombre $\frac{1}{2}\pi R^2$, on aura

$$S=\frac{S_1}{\frac{1}{2}\pi R^2},\quad A=\frac{A_1}{90},\quad B=\frac{B_1}{90},\quad C=\frac{C_1}{90},$$

et, en substituant dans la relation précédente,

$$\frac{S_1}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\frac{A_1+B_1+C_1}{90}-2=\frac{A_1+B_1+C_1-180}{90}$$

d'où

$$S_1=\frac{A_1+B_1+C_1-180}{180}.\pi R^2.$$

Application. Évaluer en mètres carrés l'aire d'un triangle sphérique dont les angles sont 95°, 84°, 65°, et qui est tracé sur une sphère dont le rayon est $1^m,5$. On a

$$S_1=\frac{95+84+65-180}{180}.\pi.1,5^2$$

ou $2^{mq},5132$, à 1 centimètre carré près.

Théorème.

931. *Le lieu du sommet C d'un triangle sphérique ABC, tel que la base AB restant fixe, la différence entre la somme des angles à la base et l'angle au sommet soit constante, se compose de deux arcs de cercle symétriques par rapport au plan du grand cercle AB passant par les points A et B.*

Supposons la différence A+B—C positive et égale à K. Soit C un point du lieu (*fig.* 658); traçons le cercle qui passe par les trois points A,B,C, et soit P le pôle le plus voisin de ce cercle. Menons les arcs de grand cercle PA, PB, PC : ils sont égaux. Appelons α chacun des angles à la base du triangle isocèle PBC, β chacun des angles

à la base du triangle isocèle PAC, γ chacun des angles à la base du triangle PAB (1).

Deux cas peuvent se présenter : ou le point P est à l'intérieur du triangle ABC (*fig.* 658), ou il est à l'extérieur (*fig.* 659). Dans le premier cas, on a

$$K=A+B-C=\gamma+\beta+\gamma+\alpha-\alpha-\beta=2\gamma;$$

dans le second cas on a

$$K=A+B-C=\gamma+\beta+\gamma-\alpha-\beta+\alpha=2\gamma;$$

d'où, dans les deux cas,

$$\gamma=\frac{K}{2}.$$

La différence K étant donnée, déterminons un point P, intersec-

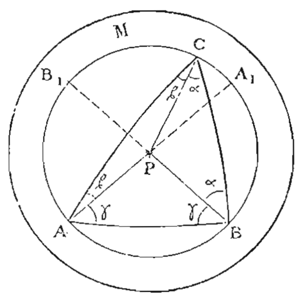


Fig. 658.

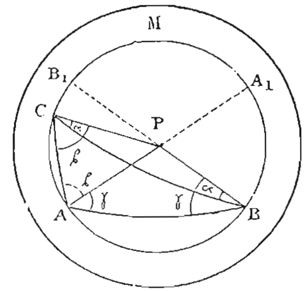


Fig. 659.

tion de deux grands cercles faisant avec l'arc AB, d'un même côté de AB, des angles égaux à $\frac{K}{2}$. Si le point C se déplace sur la sphère de façon que la différence $A+B-C$ reste constante et égale à K, ce point doit se mouvoir ou sur le cercle décrit du point P comme pôle avec PA pour rayon, ou sur un cercle symétrique à celui-ci par rapport au plan du grand cercle AB.

932. Reste à savoir si, réciproquement, la différence $A+B-C$ reste constante quand le point C parcourt un de ces cercles tout entier. Le cercle de pôle P et de rayon sphérique PA est partagé par le grand cercle AB en deux parties, l'une AMB située dans l'hémi-

(1) Les figures 658, 659, 660, sont des projections orthogonales sur le plan du grand cercle de la phère qui a pour pôle le point P; c'est pourquoi, dans ces figures, les arcs de grand cercle PA, PB, PC, sont représentés par des droites.

sphère qui contient le point P, l'autre dans l'autre hémisphère. La première partie est elle-même divisée en trois par les points A_1 et B_1, où les grands cercles AP, BP prolongés rencontrent le cercle de rayon sphérique PA. Le pôle P est dans l'intérieur du triangle ABC quand le point C est sur l'arc $B_1 A_1$, il est en dehors du triangle quand le point C est sur l'arc AB_1, ou sur l'arc A_1B; dans un cas comme dans l'autre on vérifie, comme ci-dessus, que la différence $A+B-C$ est constante et égale à K. Mais si le point C se meut sur la partie du cercle située dans celui des hémisphères limités par le grand cercle AB où n'est pas le point P (*fig.* 660), on a

$$A+B-C=6-\gamma+\alpha-\gamma-\alpha-6=-2\gamma=-K.$$

La différence $A+B-C$, au lieu d'être égale à $+K$, est égale à $-K$.

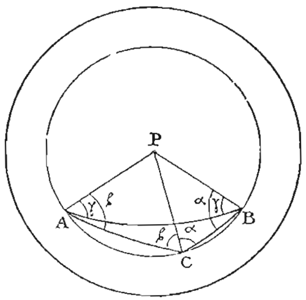


Fig. 660.

Donc le lieu demandé est composé de deux arcs de cercle, symétriques par rapport au plan du grand cercle AB, chacun de ces arcs étant, par rapport au grand cercle AB, dans l'hémisphère qui contient le pôle le plus voisin de cet arc quand la différence donnée est positive, dans l'autre hémisphère quand cette différence est négative.

933. Dans le cas particulier où $K=0$, le point P est sur le grand cercle AB, au milieu de l'arc AB; les deux cercles symétriques par rapport au plan de ce grand cercle sont confondus en un seul, qui est le cercle décrit du milieu de l'arc AB comme pôle et passant par les points A et B. Pour tous les points de ce cercle, la différence $A+B-C$ est nulle.

Théorème.

934. *Le lieu du sommet* C *d'un triangle* ABC *tel que, la base* AB *restant fixe, l'aire du triangle reste constante, se compose de deux arcs de cercle symétriques par rapport au plan du grand cercle* AB, *passant par les points* A' *et* B', *diamétralement opposés aux points* A *et* B. (Théorème de Lexell.)

Soit S la mesure de l'aire constante donnée, C un point du lieu; on a

$$(1)\qquad A+B+C-2=S.$$

Soient A' et B' les points diamétralement opposés aux points A et B (*fig.* 661). Dans le triangle A'B'C, les angles A' et B' sont les

suppléments des angles A et B du triangle ABC, et l'angle C est le même que dans le triangle ABC. On a donc

$$A=2-A',\qquad B=2-B',$$

et la relation (1) devient

$$A'+B'-C=2-S.$$

Les points A' et B' étant fixes, on sait, d'après le théorème précédent, que le lieu du point C se compose de deux arcs de cercle symétriques par rapport au plan du grand cercle AB, passant par les points A' et B', et appartenant à des cercles dont le pôle le plus voisin est déterminé. On sait d'ailleurs lequel des arcs sous-tendus par la corde A'B' il faut prendre sur chaque cercle, selon que la différence $2-S$ est positive, ou négative.

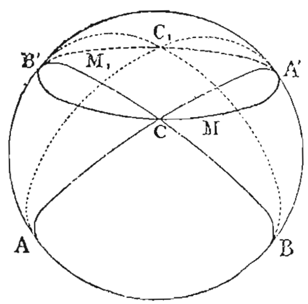


Fig. 661.

935. Soit A'MB' celui des arcs qu'il faut prendre sur l'un des deux cercles pour que, le point C étant sur cet arc, l'aire du triangle ABC soit égale à S, et soit $A'M_1B'$ l'autre arc du même cercle sous-tendu par la corde A'B'. Pour un point C de l'arc A'MB' on a

$$A'+B'-C=2-S,$$

tandis que, pour un point C_1 pris sur l'arc $A'M_1B'$, on a (932)

$$A'+B'-C_1=S-2.$$

Par suite, on a pour l'aire du triangle ABC_1

$$A+B+C_1-2=2-A'+2-B'+C_1-2=2-(B'+A'-C_1)$$
$$=2-S+2=4-S.$$

Si l'on remplace l'aire du triangle ABC_1 par l'aire comprise entre les côtés AA_1, BC_1 de ce triangle et l'arc de grand cercle ANB *plus grand qu'une demi-circonférence*, on a l'aire d'un hémisphère moins l'aire $4-S$, ou $4-(4-S)$, ou S. Donc quand le point C parcourt l'arc A'MB', l'aire du triangle sphérique ABC est égale à S; mais, quand il parcourt l'arc $A'M_1B'$, l'aire du triangle est égale à $4-S$. Le point C étant en C_1, sur l'arc $A'M_1B'$, pour obtenir une aire égale à S, il faudrait remplacer le triangle sphérique ABC_1 par la figure formée par les arcs de grand cercle AC_1, BC_1, moindres qu'une demi-circonférence, et par l'arc de grand cercle AB *plus grand qu'une demi-circonférence*.

§ VIII. Polyèdres réguliers. — Leur construction ramenée a la décomposition de la surface de la sphère en polygones réguliers.

Théorème.

936. *Tout polyèdre régulier peut être inscrit dans une sphère et circonscrit à une autre sphère concentrique à la première.*

Soient C et C′ les centres de deux faces adjacentes du polyèdre régulier, et AB l'arête commune à ces faces (*fig.* 662). Par le point C menons la perpendiculaire CO au plan de la première face; tout point de cette droite est équidistant des sommets de cette face, et en particulier des points A et B; donc la droite est située dans le plan perpendiculaire au milieu D de la droite AB.

Pour la même raison, la perpendiculaire C′O′, menée par C′ au plan de la seconde face, est dans le plan perpendiculaire à la droite AB, en son milieu D. Donc les deux droites CO, C′O′ sont dans un même plan; elles ne sont pas parallèles puisque les plans des faces auxquels elles sont perpendiculaires ne sont ni parallèles ni confondus; donc elles se coupent. Soit O leur point de rencontre. Les triangles rectangles OCD, OC′D ont même hypoténuse OD, et les côtés CD, C′D égaux comme apothèmes de polygones réguliers égaux; donc ils sont égaux, et l'angle ODC est égal à l'angle ODC′. Chacun de ces angles est ainsi la moitié de l'angle CDC′ qui est l'angle plan du dièdre AB. Comme tous les dièdres du polyèdre sont égaux, il suit de là que le triangle OCD a les mêmes dimensions, quelles que soient les deux faces adjacentes considérées. Donc toutes les perpendiculaires aux faces adjacentes à la première, menées par leurs centres respectifs, rencontrent la droite CO au même point O. De même les perpendiculaires aux faces adjacentes à la seconde face, menées par leurs centres respectifs, rencontrent la droite C′O′ au point O, et ainsi de suite, de proche en proche. Donc toutes les perpendiculaires menées à chacune des faces du polyèdre par le centre de cette face se rencontrent en un même point O. Ce point est équidistant de tous les sommets du polyèdre; donc il est le centre d'une sphère à laquelle le polyèdre est inscrit. Ce point O est aussi équidistant de toutes les faces du polyèdre; donc il est aussi le centre d'une sphère à laquelle le polyèdre est circonscrit. Le centre commun des sphères, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un polyèdre régulier, est appelé *centre* de ce polyèdre.

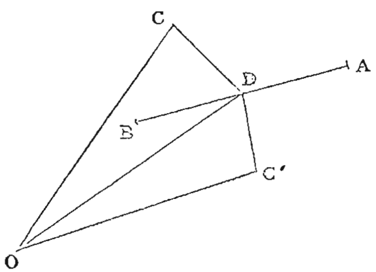


Fig. 662.

Théorème.

937. *Un polyèdre régulier étant inscrit dans une sphère, si l'on trace sur la sphère les arcs de grand cercle sous-tendus par les arêtes du polyèdre, on partage la surface de la sphère en polygones sphériques réguliers, égaux entre eux, et assemblés en même nombre autour de chaque sommet. Réciproquement, si la surface d'une sphère est partagée en un certain nombre de polygones sphériques réguliers, égaux entre eux, assemblés en même nombre autour de chaque sommet, les sommets de ces polygones sont les sommets d'un polyèdre régulier inscrit dans la sphère. Le nombre des faces du polyèdre est égal au nombre des polygones réguliers qui divisent la sphère.*

On appelle *polygone sphérique régulier* un polygone convexe dont tous les côtés sont égaux, et dont tous les angles sont égaux.

Pour démontrer la proposition directe, il suffit de remarquer que si l'on joint le centre d'un polyèdre régulier à tous ses sommets, on décompose le polyèdre en un nombre de pyramides régulières égal au nombre de faces du polyèdre, pyramides qui sont toutes égales entre elles. Les faces latérales de chaque pyramide déterminent sur la sphère un polygone sphérique régulier. Tous ces polygones sont égaux entre eux; et, autour de chaque sommet, il y a un nombre de polygones égal au nombre des faces du polyèdre assemblées autour de chaque sommet.

Pour démontrer la réciproque, il faut d'abord établir que les sommets d'un polygone régulier tracé sur une sphère sont sur un même cercle. Or, soient G,H,K les milieux de trois côtés consécutifs AB, BC, CD, d'un polygone sphérique régulier (*fig.* 663); soit P le point de concours des grands cercles perpendiculaires aux arcs AB et BC, en leurs milieux.

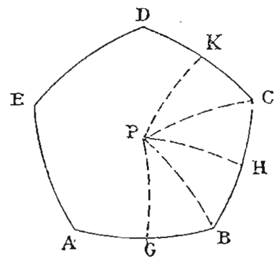


Fig. 663.

Les triangles sphériques rectangles PGB, PHB ont leurs éléments égaux chacun à chacun, puisqu'ils ont même hypoténuse PB, et le côté BG égal au côté BH; donc l'angle PBH est la moitié de l'angle B du polygone régulier. Les triangles rectangles PHB, PHC ont aussi leurs éléments égaux, chacun à chacun, puisqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle PCH est égal à l'angle PBC, et par conséquent à la moitié de l'angle du polygone sphérique. Donc, enfin, les angles PCH, PCD sont égaux. Soit K le milieu de CD, et PK l'arc de grand cercle passant par P et par K. Les triangles PCH, PCK ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; donc ils ont leurs éléments égaux. et l'angle PKC est droit comme l'angle PHC.

Il en résulte que le point P est équidistant des points C et D. On sait déjà qu'il est équidistant des points A, B et C ; donc le cercle décrit du point P comme pôle, avec PA pour rayon sphérique, passe par les quatre points A, B, C, D. On voit ainsi que le cercle qui passe par trois sommets consécutifs du polygone passe par le suivant : on en conclut qu'il passe par tous les sommets du polygone.

Les sommets d'un polygone régulier sphérique étant sur un cercle, et les cordes qui sous-tendent les côtés de ce polygone étant égales, le polygone plan, qui a pour sommets les sommets d'un polygone sphérique régulier, est un polygone régulier. Les pyramides qui ont pour sommet commun le centre de la sphère, et pour bases les polygones plans qui correspondent aux polygones réguliers sphériques, égaux, et assemblés en même nombre autour de chaque sommet, sont des pyramides régulières égales ; le polyèdre considéré, qui est formé par l'ensemble de ces pyramides, est un polyèdre régulier.

Il suit de là que le problème : *inscrire dans une sphère un polyèdre régulier d'espèce déterminée*, est ramené à cet autre problème : *Décomposer la surface de la sphère en polygones réguliers, égaux, assemblés en même nombre autour de chaque sommet, et tels que ces polygones recouvrent exactement la surface de la sphère.*

938. Soit n le nombre des côtés d'un de ces polygones réguliers, et soit p le nombre des polygones assemblés autour d'un même sommet A. L'angle de ce polygone sera égal à $\frac{4}{p}$ car la somme des angles égaux assemblés autour du point A doit être égale à 4 angles droits. Soit P le pôle du cercle qui passe par les sommets d'un de ces polygones, et soit AB un côté de ce polygone. Donc le triangle sphérique PAB, chacun des angles A, B, sera égal à la moitié de l'angle du polygone, c'est-à-dire à $\frac{2}{p}$; et l'angle P sera égal à $\frac{4}{n}$ puisque la somme n de angles égaux à l'angle APB est égale à 4 droits. De sorte que la construction du triangle PAB revient au problème suivant : construire un triangle sphérique connaissant ses trois angles

$$\frac{2}{p}, \quad \frac{2}{p}, \quad \frac{4}{n}.$$

Si ce triangle est possible, on pourra, en plaçant autour du point P, n triangles égaux à ce triangle, former le polygone régulier ABCD.... ; et en assemblant autour du sommet A, p polygones égaux à celui-ci, on recouvrira une certaine partie de la sphère ; il restera à voir si, en continuant de la même façon, on pourra recouvrir exactement la surface entière de la sphère.

Cherchons d'abord à quelles conditions on peut construire un

triangle sphérique PAB, dont les angles soient

$$\frac{2}{p}, \quad \frac{2}{p}, \quad \frac{4}{n}.$$

Il faut d'abord que la somme de ces angles soit comprise entre 2 droits et 6 droits.

La première condition donne

$$(1) \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}.$$

La seconde est vérifiée d'elle-même, car chacun des nombres p et n étant, par la nature du problème, au moins égal à 3, la somme des trois angles donnés est inférieure ou égale à

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3},$$

et, par conséquent, moindre que 6 droits.

Des inégalités

$$p \geqslant 3$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

on déduit

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

ou

$$n<6.$$

Pareillement, des inégalités

$$n \geqslant 3$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

on déduit

$$p<6.$$

Donc les nombres entiers n et p ne peuvent pas prendre d'autres valeurs que les valeurs 3, 4, 5.

939. Il ne suffit pas que le triangle sphérique PAB puisse être construit ; il faut en outre que la surface entière de la sphère puisse être exactement recouverte par un certain nombre F des polygones sphériques formés au moyen de p triangles égaux au triangle PAB assemblés autour d'un même sommet. Or, la somme des angles de chacun de ces polygones étant $\frac{4n}{p}$, la surface de l'un de ces polygones est

$$\frac{4n}{p}-2(n-2);$$

la surface de la sphère, qui est représentée par le nombre 8, doit être égale à la somme des surfaces de F polygones égaux à celui-ci. Donc on doit avoir

$$\left[\frac{4n}{p} - 2(n-2)\right] F = 8,$$

d'où

$$F = \frac{8}{\frac{4n}{p} - 2(n-2)}$$

ou encore

$$F = \frac{2}{n\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right]}.$$

Nous trouvons donc, comme nouvelle condition *nécessaire*, la condition suivante : les valeurs entières données aux nombres p et n doivent être telles que

$$\frac{2}{n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)}$$

soit un nombre positif *entier*.

940. Essayons donc, en donnant à n et à p les valeurs 3, 4, 5, quelles sont les combinaisons pour lesquelles l'expression précédente prend une valeur entière.

Pour $n = 3$, si l'on fait successivement p égal à 3, à 4, à 5, on a les combinaisons suivantes :

$$n = 3 \qquad p = 3 \qquad F = 4$$
$$n = 3 \qquad p = 4 \qquad F = 8$$
$$n = 3 \qquad p = 5 \qquad F = 20.$$

Pour une valeur de n supérieure à 3, on ne doit essayer pour p aucune valeur supérieure à 3, car des inégalités

$$n \geqslant 4$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$

on déduit

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \qquad \text{ou } \frac{1}{p} > \frac{1}{4}, \qquad \text{ou } p < 4.$$

En faisant successivement n égal à 4, et n égal à 5, on trouve encore les deux combinaisons

$$n = 4 \qquad p = 3 \qquad F = 6$$
$$n = 5 \qquad p = 3 \qquad F = 12.$$

Il suit de là que *la décomposition de la sphère en polygones réguliers égaux, dans les conditions demandées, n'est pas possible de plus de cinq manières différentes.*

941. Mais, de ce que des polygones réguliers de n côtés peuvent être construits, assemblés p à p autour d'un point, et recouvrir une portion de la sphère tout autour de ce point ; de ce qu'en outre la surface de la sphère équivaut à F fois la surface d'un de ces polygones, on n'est pas encore en droit d'affirmer que la décomposition demandée est possible, car on peut craindre qu'en assemblant F polygones ainsi construits, on recouvre non pas toute la surface de la phère, mais seulement une portion dont certaine partie serait commune à plusieurs de ces polygones. Il faut donc examiner chaque mode de décomposition, et vérifier qu'en juxtaposant les polygones formés, on recouvre effectivement une fois toute la surface de la sphère. Nous nous bornerons à faire cette vérification dans les seuls cas où elle est intéressante, ceux de $F = 12$, et de $F = 20$.

Décomposition de la surface de la sphère en douze pentagones réguliers égaux, assemblés trois par trois autour de chaque sommet.

942. Après avoir construit, comme il a été expliqué plus haut, un pentagone sphérique régulier $abcde$, dont l'angle au sommet est égal à $\frac{4}{3}$ (*fig.* 664), on construit sur chaque côté, en dehors de ce premier pentagone, un pentagone égal. Deux pentagones consécutifs $abgi'$, $bchj'g$ auront un côté commun bg. On obtiendra ainsi six pentagones qui recouvriront la moitié de la surface de la sphère. Autour du point f sont disposés deux pentagones $fabgi'$, $faejh'$; l'angle $h'fi'$ formé par les côtés fi', fh' est égal à $\frac{4}{3}$ de droit ; on peut donc placer autour du point f un troisième pentagone $fi'd'c'h'$, qui a un côté commun avec chacun des pentagones précédents. On placera de même autour du point g un nouveau pentagone $gi'd'e'j'$, qui aura avec le précédent un côté commun $i'd'$, et ainsi de suite. On aura ainsi placé sur la sphère cinq nouveaux pentagones, en tout onze pentagones, qui n'empiètent pas les uns sur les autres, et qui laissent, comme portion non recouverte de la sphère, la figure $d'e'a'b'c'$, qui est un douzième pentagone régulier égal aux autres,

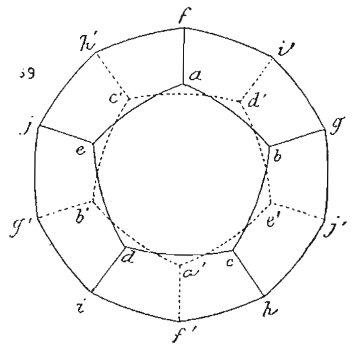


Fig. 664.

car tous ses côtés sont égaux à ab, et ses angles, respectivement égaux à $4-2.\frac{4}{3}$, valent aussi $\frac{4}{3}$ d'angle droit.

Les sommets de ces pentagones sont les sommets d'un dodécaèdre régulier inscrit dans la sphère.

On peut donc, de cette façon, construire un dodécaèdre régulier inscrit dans une sphère donnée.

DÉCOMPOSITION DE LA SURFACE DE LA SPHÈRE EN VINGT TRIANGLES SPHÉRIQUES ÉQUILATÉRAUX, ÉGAUX, ASSEMBLÉS CINQ PAR CINQ AUTOUR DE CHAQUE SOMMET.

943. On construit un triangle sphérique équilatéral abc dont l'angle est égal à $\frac{4}{5}$ d'un droit, et dont la surface est le vingtième de la surface de la sphère (*fig.* 665), puis on assemble autour d'un point a de la sphère cinq de ces triangles. On forme ainsi un pentagone sphérique régulier $bcdef$ dont chaque angle vaut $\frac{8}{5}$ d'un droit. Sur les côtés de ce pentagone, et en dehors de ce pentagone, on place les triangles équilatéraux $be'c$, $cf'd$, ..; on a ainsi placé sur la sphère dix triangles équilatéraux égaux et recouvert la moitié de sa surface. Autour du point b se trouvent réunis quatre triangles dont chaque angle en b vaut $\frac{4}{5}$, l'angle restant libre $d'be'$ vaut $4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$; on peut donc placer dans cet angle un cinquième triangle équilatéral $d'be'$.

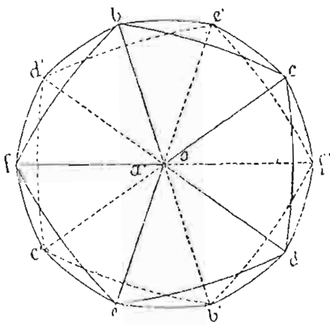


Fig. 665.

On placera de même en c, en d, en e, en f, les triangles équilatéraux $ce'f'$, $df'b'$, $eb'c'$, $fc'd'$, et on aura ainsi placé sur la sphère quinze triangles. Le polygone $b'c'd'e'f'$, formé par les côtés des cinq derniers triangles, respectivement opposés aux sommets b,c,d,e,f, est un pentagone régulier égal au pentagone $bcdef$, car chacun de ses côtés est égal au côté ab des triangles équilatéraux employés, et chacun de ses angles est égal à $\frac{8}{5}$. Il suit de là que la calotte $a'd'c'f'b'c'$, restée libre, peut être recouverte comme la calotte égale $abcdef$, par cinq triangles équilatéraux; ces triangles ont pour sommet commun le point a' diamétralement opposé au point a, et pour bases les côtés du pentagone $b'c'd'e'f'$.

La sphère se trouve donc ainsi décomposée en vingt triangles

équilatéraux égaux, assemblés cinq par cinq autour de chaque sommet. Les sommets de ces triangles sont les sommets d'un *icosaèdre* régulier inscrit dans la sphère.

944. Si l'on désigne par S le nombre des sommets de chaque polyèdre, et par A le nombre des arêtes, les valeurs des nombres n, p, F, S, A, pour les cinq polyèdres réguliers, sont indiquées dans le tableau suivant, qui a déjà été formé au n° 725.

n	p	F	S	A	NOM DU POLYÈDRE.
3	3	4	4	6	Tétraèdre.
3	4	8	6	12	Octaèdre.
3	5	20	12	30	Icosaèdre.
4	3	6	8	12	Hexaèdre.
5	3	12	20	30	Dodécaèdre.

945. REMARQUE. L'*octaèdre* et l'*hexaèdre* sont tels que le nombre des faces de l'un est égal au nombre des sommets de l'autre; même remarque pour l'*icosaèdre* et le *dodécaèdre*.

§ IX. PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE SPHÈRE. — PLAN RADICAL DE DEUX SPHÈRES. — AXE RADICAL DE TROIS SPHÈRES. — CENTRE RADICAL DE QUATRE SPHÈRES.

946. Soit une sphère de centre O, et de rayon r, et soit un point A situé à une distance d du centre O (*fig.* 666); si par le point A on mène une sécante quelconque, ABC, à la sphère, le produit des segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, est le même quelle que soit la direction de la sécante, et il est égal à d^2-r^2. Cela résulte de ce que le plan mené par la sécante ABC et par le centre de la sphère coupe la sphère suivant un cercle de rayon r.

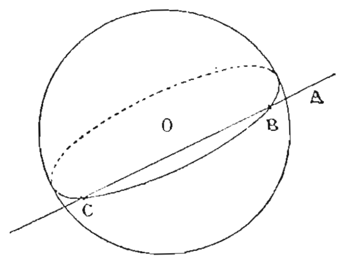


Fig. 666.

947. Ce produit constant

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=d^2-r^2$$

est appelé *puissance* du point A par rapport à la sphère.

La *puissance* du point A par rapport à la sphère est positive, nulle, ou négative, selon que le point A est à l'extérieur de la sphère, sur la sphère, ou à l'intérieur de la sphère.

Théorème.

948. *Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la ligne des centres.*

En effet, dans un plan quelconque mené par la ligne des centres O, O', le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux sphères se confond avec le lieu des points d'égale puissance par rapport aux deux grands cercles des sphères situés dans ce plan. Or ce dernier lieu est la perpendiculaire HL à la droite OO' (401) en un point H tel que

$$OH = \frac{OO'}{2} + \frac{r^2 - r'^2}{2OO'};$$

lorsque le plan tourne autour de OO', cette droite HL engendre le plan perpendiculaire à OO', au point H. Ce plan est appelé le *plan radical* des deux sphères.

949. Remarque I. Si les deux sphères se coupent, leur plan radical est le plan de leur cercle d'intersection.

Si les deux sphères sont tangentes, leur plan radical est leur plan tangent commun en leur point de contact.

Si les sphères sont concentriques, le plan radical est rejeté à l'infini.

950. Remarque II. Le plan radical est aussi le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux sphères des tangentes égales. Si l'on considère un cône circonscrit à la fois aux deux sphères, le plan radical est équidistant des plans des deux cercles de contact.

951. Corollaire I. *Les plans radicaux de trois sphères considérées deux à deux se coupent suivant une même droite que l'on appelle axe radical des trois sphères.*

Cette droite est la perpendiculaire au plan des centres des trois sphères menée par le centre radical des trois cercles suivant lesquels ce plan coupe les sphères.

952. Corollaire II. *Les six plans radicaux de quatre sphères, considérées deux à deux, se coupent en un même point qu'on appelle le centre radical des quatre sphères.*

En effet, l'axe radical de trois des quatre sphères coupe le plan radical de l'une d'elles et de la quatrième en un point qui a même puissance par rapport aux quatre sphères, et qui, pour cette raison, appartient au plan radical de deux quelconques des quatre sphères.

Le centre radical appartient aussi aux quatre axes radicaux des quatre sphères considérées trois à trois.

§ X. Pôle et plan polaire par rapport a une sphère.

Théorème.

953. *Le lieu du conjugué harmonique d'un point* p *par rapport aux points de rencontre d'une sécante quelconque menée par ce point et d'une sphère* O *est un plan* P *perpendiculaire au diamètre de la sphère qui passe par le point* p.

En effet, soit o le centre de la sphère; dans un plan quelconque mené par la droite op (*fig.* 667), le lieu considéré (425) est la perpendiculaire à la droite op, en un point p' tel que

$$\overline{op} \times \overline{op'} = r^2,$$

en appelant r le rayon de la sphère.

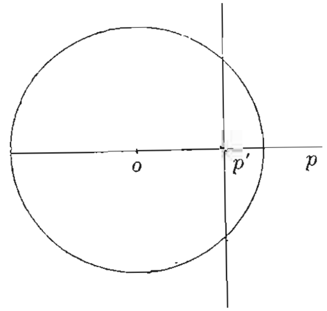


Fig. 667.

Lorsque le plan tourne autour de op, la perpendiculaire à la droite op, en p', engendre le plan P perpendiculaire à op au point p'.

Ce plan est appelé *plan polaire* du point p par rapport à la sphère.

954. Remarque. Si le point p est extérieur à la sphère, le plan polaire coupe la sphère; si le point p est sur la sphère, le plan polaire est le plan tangent à la sphère au point p; si le point p est dans l'intérieur de la sphère, le plan polaire ne rencontre pas la sphère. Si le point p se meut sur un diamètre, à mesure qu'il se rapproche du centre de la sphère, le plan polaire s'en éloigne; quand le point p arrive au centre, le plan polaire s'éloigne à l'infini.

955. Si le point p est extérieur à la sphère, le plan polaire du point p est le plan de contact du cône circonscrit à la sphère qui a le point p pour sommet.

Théorème.

956. *Le pôle de tout plan passant par un point* p *est sur le plan polaire du point* p, *et, réciproquement, le plan polaire de tout point d'un plan passe par le pôle de ce plan.*

Même démonstration qu'au n° 427.

957. Corollaire. *Tout plan passant par une droite* D *a son pôle sur une autre droite* D', *et, réciproquement, tout plan passant par la droite* D' *a son pôle sur la droite* D.

Soient en effet p et q deux points de la droite D (*fig.* 668), P et Q les plans polaires de ces points; tout plan passant par p et par q a son pôle sur chacun des plans P et Q, c'est-à-dire sur la droite d'intersection D' de ces plans.

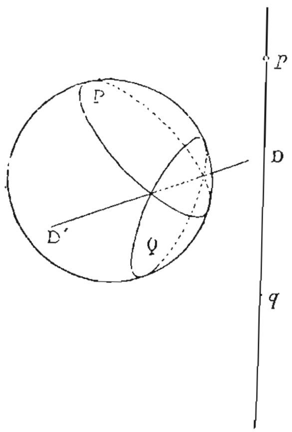


Fig. 668.

Réciproquement : soient p' et q' deux points de la droite D', et P' et Q' les plans polaires de ces points; le plan P' contient le pôle p du plan P, puisque ce plan passe par p'; le plan Q' contient le pôle q du plan Q, puisque ce plan passe par q'; donc l'intersection des plans P' et Q' n'est autre que la droite D qui contient les points p et q. Donc, *tout plan passant par la droite* D' *a son pôle sur la droite* D.

958. On peut encore se rendre compte de ce fait en suivant le mouvement du pôle p' d'un plan P' passant par la droite D, quand ce plan P' tourne autour de la droite D, et fixer les positions relatives des droites D et D'.

Soit d le point où la droite D rencontre le plan MN mené par le centre de la sphère perpendiculairement à la droite D; et soit dl la trace du plan P' sur le plan MN (*fig.* 669). Le pôle du plan P' par

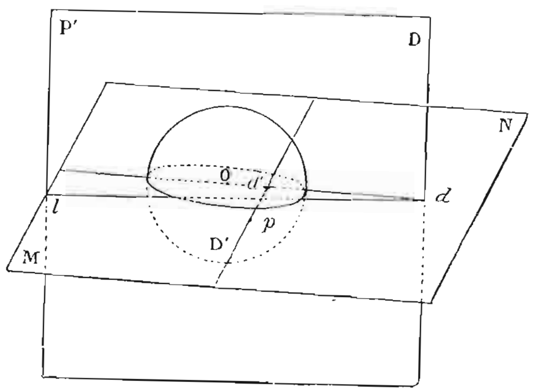


Fig. 669.

rapport à la sphère, se confond avec le pôle de la droite dl par rapport au grand cercle situé dans le plan MN. Quand le plan P' tourne autour de la droite D, le pôle p' de ce plan décrit la polaire D' du point d par rapport au grand cercle dans le plan MN.

Les droites D et D' sont telles que chacune est dans le plan perpendiculaire à l'autre mené par le centre de la sphère; leur perpendiculaire commune dd' passe par le centre de la sphère, et on a

$$od \times od' = r^2.$$

Les deux droites D et D' sont *réciproques*.

959. Des deux droites D et D' l'une est extérieure à la sphère, l'autre la rencontre en deux points. Celle des deux droites qui coupe la sphère est la corde des contacts des plans tangents menés par l'autre à la sphère.

§ XI. Figures inverses dans l'espace. — Applications.

960. La définition d'une figure inverse d'une figure F, par rapport à une origine O, avec une puissance d'inversion donnée λ, dans le cas où la figure F est plane, et où le point O est dans le plan de cette figure (439), s'étend sans aucune modification, au cas où la figure F est quelconque, plane ou gauche, et où le point O est situé d'une façon quelconque dans l'espace.

961. La relation

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda}{OA.OB}$$

entre les longueurs de deux cordes qui se correspondent dans deux figures inverses planes (441) subsiste encore pour deux figures inverses dans l'espace.

Théorème.

962. *Les tangentes* AT, A'T' *à deux lignes inverses* S, S' *en des points correspondants* A *et* A', *et le rayon vecteur* OAA' *qui passe par ces points sont dans un même plan, et les droites* AT, A'T', *forment avec la sécante* OAA' *deux angles intérieurs d'un même côté qui sont égaux* (*fig.* 670).

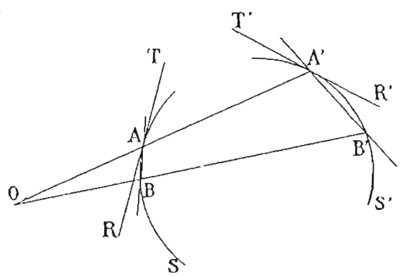


Fig. 670.

On observe que les sécantes AB, A'B' sont dans un même plan, qui est le plan des rayons OAA', OBB', et on achève la démonstration comme au n° 443.

963. Corollaire. *L'angle de deux lignes* U *et* V, *qui se rencontrent en un point* A, *est égal à l'angle des lignes* U', V', *inverses des précédentes, qui se rencontrent au point* A', *point correspondant du point* A.

Soient (*fig.* 671) AR, A'R les tangentes en A et en A' aux lignes U et U', et AT, A'T les tangentes en A et en A' aux lignes V et V'.

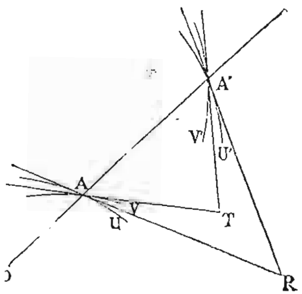


Fig. 671.

Les deux trièdres AA'TR, A'ATR ont un dièdre égal compris entre deux faces égales, chacune à chacune, savoir le dièdre d'arête AA' qui est commun aux deux trièdres, la face A'AT égale à la face AA'T, la face A'AR égale à la face AA'R; donc les troisièmes faces TAR, TA'R, des deux trièdres sont égales.

Théorème.

964. *Si deux figures F', F'' sont inverses d'une figure F, par rapport à une origine O, les puissances d'inversion étant λ' et λ'', les figures F' et F'' sont homothétiques; le centre d'homothétie est le point O; le rapport d'homothétie de F' à F'' est $\frac{\lambda'}{\lambda''}$; l'homothétie est directe, ou inverse, selon que λ' et λ'' sont de même signe, ou de signes contraires.*

Même démonstration qu'au n° 445.

Théorème.

965. *La figure inverse d'une sphère passant par l'origine est un plan perpendiculaire au diamètre qui passe par l'origine.*

Soit OA le diamètre de la sphère passant par l'origine (*fig.* 672).

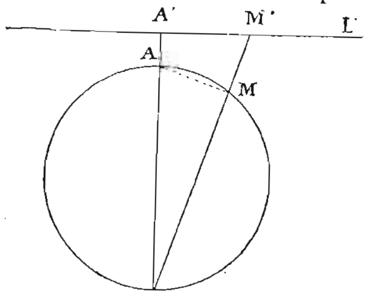


Fig. 672.

Dans un plan mené par OA, la figure inverse du grand cercle OMA, situé dans ce plan, est la perpendiculaire A'M'L' au diamètre OA, au point A', tel que $OA \times OA' = \lambda$, (446). Si le plan mené par OA tourne autour de OA, le grand cercle engendre la sphère, et la droite A'M'L', figure inverse du grand cercle, engendre le plan perpendiculaire à OA au point A'; et ce plan est la figure inverse de la sphère.

Deux figures inverses sont réciproques, donc :

966. Réciproquement. *La figure inverse d'un plan par rapport à une origine non située dans ce plan est une sphère qui passe par l'origine et dont le diamètre, passant par ce point, est perpendiculaire au plan.*

967. *La figure inverse d'un plan, par rapport à un point du plan, est le plan lui-même.*

968. Remarque. Un plan et une sphère peuvent être considérés comme deux figures inverses : on peut prendre pour origine de l'inversion l'une ou l'autre des extrémités du diamètre perpendiculaire au plan. Si l'on désigne par r le rayon de la sphère, et par d la distance du centre au plan, selon que l'on prend pour origine de l'inversion le point de la sphère le plus près, ou le plus loin du plan, la puissance de l'inversion est

$$2r(r-d), \qquad \text{ou} \qquad 2r(r+d);$$

la première est positive, ou négative, selon que le plan coupe ou ne coupe pas la sphère; la seconde est toujours positive.

Un plan tangent à une sphère est la figure inverse, de puissance zéro, par rapport au point de contact, et la figure inverse de la sphère, de puissance $4r^2$, par rapport au point diamétralement opposé au point de contact.

Théorème.

969. *La figure inverse d'une sphère, qui ne passe pas par l'origine, est une sphère. L'origine d'inversion est centre d'homothétie des deux sphères, d'homothétie directe ou d'homothétie inverse, selon que la puissance d'inversion est positive, ou négative.*

Même démonstration qu'au n° 448.

970. Remarque. Deux sphères quelconques peuvent être considérées comme deux figures inverses par rapport à l'un ou à l'autre de leurs centres d'homothétie pris pour origine. Deux points qui se correspondent dans les sphères considérées comme figures inverses sont dits *antihomologues*. Deux cordes de deux sphères sont dites antihomologues quand les extrémités de l'une sont les points antihomologues des extrémités de l'autre.

Mêmes explications qu'au n° 449.

971. Corollaire I. *Deux cordes antihomologues se coupent sur le plan radical des deux sphères.*

972. Corollaire II. *Les plans tangents à deux sphères en deux points antihomologues se coupent sur le plan radical des deux sphères.*

Théorème.

973. *La figure inverse d'un cercle C par rapport à un point o, non situé dans le plan du cercle, est un cercle C'.*

Le plan du cercle C' est parallèle au plan tangent en o à la sphère S qui passe par le cercle C et par le point o.

Le centre du cercle C′ est sur la droite qui joint le point o au pôle du plan du cercle C par rapport à la sphère S.

Soit P le plan du cercle C, et soit S la sphère qui passe par le cercle C et par le point o. Le cercle C étant l'intersection du plan P et de la sphère S, la figure inverse du cercle C, par rapport au point o pris pour origine, avec une puissance donnée quelconque, est l'intersection des figures inverses du plan P et de la sphère S, par rapport à la même origine o, et avec la même puissance. Or, dans ces conditions, la figure inverse du plan P est une sphère S′; la figure inverse de la sphère S est un plan P′; donc la figure inverse du cercle C est un cercle C′, intersection de la sphère S′ et du plan P′

Le plan P′ du cercle C′ est perpendiculaire au diamètre de la sphère S mené par o; donc il est parallèle au plan tangent à la sphère S, au point o.

Il reste à démontrer que le centre du cercle C′ est sur la droite qui joint le point o au pôle p du plan P par rapport à la sphère S. A cet effet, prenons pour plan de figure le plan mené par le point o et par le centre du cercle C perpendiculairement au plan de ce cercle (*fig.* 673). Soit ab la projection du cercle C sur ce plan. Le cercle circonscrit au triangle oab est un grand cercle de la sphère S, et le point de concours p des tangentes aux points a et b est le pôle du plan P par rapport à la sphère S. Par le point p menons la perpendiculaire au diamètre of; soient a'_1 et b'_1 les points où elle rencontre les droites oa, ob. Cette droite $a'_1b'_1$ est la figure inverse du cercle circonscrit au triangle oab pour l'origine o, et pour une puissance égale à $oa \times oa'_1$. Pour cette même puissance, la figure inverse du cercle C serait le cercle C'_1 décrit sur $a'_1b'_1$ comme diamètre, dans le plan perpendiculaire au plan de la figure mené par $a'_1b'_1$. Pour une autre valeur de la puissance, la figure inverse du cercle C est un autre cercle C′ situé sur le cône qui a le point o pour sommet et le cercle C'_1 pour base, et dans un plan parallèle au plan du cercle C'_1. Le centre du cercle C′ est sur la droite qui joint le point o au centre du cercle C'_1, c'est-à-dire au milieu de $a'_1b'_1$. Il reste à démontrer que le milieu de $a'_1b'_1$ est le point p.

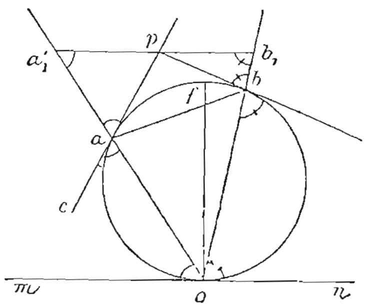


Fig. 673.

Menons la tangente mon au cercle oab, au point o. Les angles pa'_1a, paa'_1 sont égaux, car le premier est égal à l'angle moa, parce que les droites mon, $a'_1pb'_1$ sont parallèles; le second est égal à l'angle oac, qui est lui-même égal à l'angle moa. Donc $pa'_1 = pa$.

On voit de même que les angles pb'_1b, pbb'_1 sont égaux, et, par suite, que l'on a $pb'_1 = pb$. Donc enfin, pa'_1 est égal à pb'_1, et le point p est le milieu de $a'_1b'_1$.

974. Corollaire. *Un cône qui a pour base un cercle C tracé sur une sphère coupe cette sphère suivant un second cercle C′.*

Soit s le sommet du cône, et soit m un point quelconque du cercle C (*fig.* 674). La droite sm rencontre la sphère en un second point m' tel que le produit $sm \times sm'$, égal à la puissance du point s par rapport à la sphère, est constant. Donc, quand le point m parcourt le cercle C, le point m' décrit une figure inverse du cercle C, par rapport à l'origine s, c'est-à-dire un cercle C′. Comme d'ailleurs une génératrice sm du cône ne rencontre la sphère qu'aux deux points m et m', l'ensemble des deux cercles C et C′ forme toute la ligne d'intersection de la sphère et du cône.

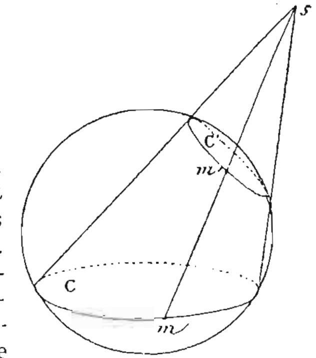


Fig. 674.

APPLICATIONS.

975. Projections stéréographiques. Soit o le pôle d'un cercle MN tracé sur une sphère; on appelle *projection stéréographique* d'un point a de la sphère, sur le plan MN, le point a' où la droite oa rencontre le plan MN (*fig.* 675), et on appelle projection stéréographique d'une ligne tracée sur la sphère le lieu des projections stéréographiques des points de cette ligne.

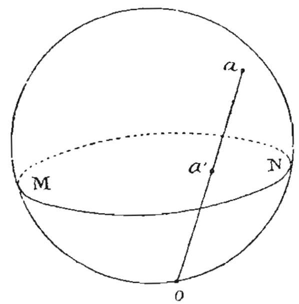


Fig. 675.

Si l'on remarque que la sphère et le plan MN sont deux figures inverses, par rapport à l'origine o (968), et que, par suite, toute figure tracée sur la sphère et sa projection stéréographique sont des figures inverses par rapport à l'origine o, on voit que les projections stéréographiques jouissent des deux propriétés suivantes :

1° *L'angle des deux lignes tracées sur la sphère est égal à l'angle de leurs projections stéréographiques;*

2° *La projection stéréographique d'un cercle C tracé sur la sphère est un cercle dont le centre est sur la droite qui joint le point o au pôle du plan du cercle C par rapport à la sphère.*

On fait usage des projections stéréographiques dans la construction des cartes géographiques appelées planisphères, le plan MN choisi pour plan de projection est ordinairement un plan méridien.

Problème.

976. *Mener une sphère tangente à quatre sphères données*, S, S', S'', S'''.

Remarquons d'abord que si une sphère Ω touche une sphère S en M, et une sphère S' en M', la droite MM' passe par l'un des centres d'homothétie des sphères S et S', car M est un centre d'homothétie des sphères S et Ω, et M' un centre d'homothétie des sphères S' et Ω.

Il est d'ailleurs facile de reconnaître que c'est par le centre d'homothétie directe, ou par le centre d'homothétie inverse, des sphères S et S' que passe la droite MM', selon que la sphère Ω est tangente de la même façon, ou de façons différentes, aux deux sphères S et S'.

Cela posé, concevons une sphère Ω tangente aux sphères données aux points M, M', M'', M''', et enveloppant ces quatre sphères; puis concevons une sphère Ω_1 tangente extérieurement aux mêmes sphères aux points M_1, M'_1, M''_1, M'''_1.

1° Les droites MM', $M_1M'_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S, S'.

Les droites MM'', $M_1M''_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S, S''.

Les droites MM''', $M_1M'''_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S, S'''.

Les droites M'M'', $M'_1M''_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S', S''.

Les droites M'M''', $M'_1M'''_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S', S'''.

Les droites M''M''', $M''_1M'''_1$ passent au centre d'homothétie directe des sphères S'', S'''.

2° Les quatre droites MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$, $M'''M'''_1$ passent par le centre I d'homothétie directe des sphères Ω, Ω_1.

Ce point I est aussi le centre radical des quatre sphères. Car, prenons deux quelconques de ces quatre cordes, par exemple MM_1 et $M'M'_1$, elles sont des cordes antihomologues des sphères S et S' considérées comme inverses par rapport à leur centre d'homothétie directe pris pour origine; donc leur point de rencontre I est situé sur le plan radical des deux sphères S et S'. Le point I devant être sur le plan radical de deux quelconques des quatre sphères, est le centre radical de ces quatre sphères.

On connaît donc un point I appartenant à chacune des quatre cordes MM_1, $M'M'_1$, $M''M''_1$, $M'''M'''_1$. Si l'on peut déterminer un second point de chacune de ces cordes, on aura quatre points de chacune des sphères Ω et Ω_1, et par conséquent ces sphères seront déterminées.

Remarquons que le plan d'homothétie directe des quatre sphères S, S', S'', S''', se confond avec le plan radical des sphères Ω, Ω_1. En effet, les cordes MM', $M_1M'_1$ sont antihomologues dans les sphères Ω, Ω_1, considérées comme inverses par rapport au point I, pris pour origine; donc leur point d'intersection, qui est le centre d'homothétie directe des sphères S et S', est sur le plan radical des sphères Ω, Ω_1. Les autres centres d'homothétie directe des sphères données, prises deux à deux, appartiennent au même plan radical, pour la même raison.

Appelons P le plan d'homothétie directe des quatre sphères, plan qui est aussi le plan radical des sphères Ω, Ω_1. Les plans tangents en M et M_1 à la sphère S se coupent sur le plan radical des sphères Ω, Ω_1, c'est-à-dire sur le plan P; donc, le pôle p du plan P, par rapport à la sphère S, est sur la corde MM_1. Pour la même raison, le pôle p' du même plan P, par rapport à la sphère S', est sur la corde $M'M'_1$; le pôle p'' du plan P, par rapport à la sphère S'', est sur la corde $M''M''_1$; et le pôle p''' du plan P, par rapport à la sphère S''', est sur la corde $M'''M'''_1$. De là résulte, pour la détermination des sphères Ω, Ω_1, la construction suivante :

On prend le plan P d'homothétie directe des quatre sphères, et les pôles p, p', p'', p''' de ce plan P, par rapport aux quatre sphères. On joint les points p, p', p'', p''' au centre radical I des quatre sphères. Soient M, M_1, les points de rencontre de la droite Ip avec la sphère S; soient M', M'_1 les points de rencontre de la droite Ip' avec S', le point M' étant sur la droite qui passe par M et par le centre de similitude directe des sphères S et S'. Soient de même les points M'', M''_1 sur la droite Ip'' et sur la sphère S'', et les points M''', M'''_1 sur la droite Ip''' et sur la sphère S''', les mêmes précautions étant prises pour le choix des lettres à mettre aux deux points de la droite Ip'', et aux deux points de la droite Ip'''.

La sphère Ω est déterminée par les quatre points M, M', M'', M'''; et la sphère Ω_1 est déterminée par les quatre points M_1, M'_1, M''_1, M'''_1.

En remplaçant le plan d'homothétie directe P des quatre sphères par un quelconque des sept autres plans d'homothétie, on obtiendra de même sept autres couples de sphères tangentes aux sphères données.

Le problème admet donc en général seize solutions.

La méthode employée pour résoudre ce problème est l'extension de la méthode donnée par Gergonne pour mener un cercle tangent à trois cercles (454).

977. Corollaire. *Lorsqu'une sphère variable reste tangente, de la même manière, à trois sphères fixes, le point de contact sur chaque sphère fixe décrit un cercle.*

Cette proposition est connue sous le nom de Théorème de Dupuis.

Laissons fixes les trois sphères S, S′, S″, et concevons que la sphère S‴ varie en restant tangente, d'une même manière, aux trois sphères fixes. Le centre radical I des quatre sphères se déplacera sur l'axe radical des sphères S, S′, S″, lequel est une droite perpendiculaire au plan des centres de ces trois sphères. Le plan d'homothétie P des quatre sphères tournera autour de l'un des axes d'homothétie des sphères S, S′, S″, qui est une droite du plan des centres de ces sphères ; le pôle p de ce plan P, par rapport à la sphère S, décrira donc une droite, réciproque de l'axe d'homothétie, perpendiculaire au plan des centres des trois sphères fixes S, S′, S″. Les points I et p se déplaçant chacun sur une perpendiculaire au plan des centres des sphères fixes, la droite Ip reste dans un même plan, et par conséquent le point de contact M de la sphère variable S‴ et de la sphère fixe S, point qui est sur droite Ip, reste dans un plan. Ce point se meut sur la sphère S, et reste dans un plan, donc il décrit un cercle.

EXERCICES.

1. Assigner les limites entre lesquelles peut être comprise la somme des angles d'un polygone sphérique convexe de n côtés.

2. Calculer le rayon d'une sphère, sachant qu'un triangle sphérique tracé sur cette sphère et dont les angles sont 85°25′, 57°54′, 54°79′, a une aire égale à $4^{mq},25$.

3. Calculer les angles d'un triangle sphérique, sachant que ces angles sont proportionnels aux nombres 3, 4, 5, et que l'aire du triangle est le treizième de l'aire de la sphère sur laquelle le triangle est tracé.

4. Si deux triangles sphériques d'une même sphère ont même aire, les triangles polaires ont même périmètre, et réciproquement.

5. Trois plans rectangulaires qui se coupent en un point donné, intérieur à la sphère, coupent la sphère suivant des cercles tels que la somme des aires de ces cercles est constante.

6. Tracer sur une sphère un cercle tangent à un cercle donné et passant par deux points donnés.

7. Lieu des centres des sphères qui coupent deux sphères données suivant des grands cercles.

8. Lieu des centres des sphères qui coupent trois sphères données suivant des grands cercles.

9. Lieu des centres des sphères qui coupent orthogonalement deux sphères données, c'est-à-dire de telle façon qu'en chaque point d'intersection de la sphère variable et d'une des deux sphères fixes, les plans tangents à la sphère variable et à la sphère fixe soient perpendiculaires.

10. Lieu des centres des sphères qui coupent orthogonalement trois sphères données.

11. Déterminer une sphère qui coupe orthogonalement quatre sphères données.

LIVRE VIII

LES SECTIONS CONIQUES ET L'HÉLICE.

Ellipse.

§ I. DÉFINITION DE L'ELLIPSE, AXES, CENTRE, CONSTRUCTION DE LA COURBE.

978. DÉFINITIONS. On appelle *ellipse* le lieu des points d'un plan tels que la somme des distances de chacun de ces points à deux points fixes F, F′, du plan soit constante et égale à une longueur donnée $2a$.

Les deux points fixes F, F′, sont appelés *foyers*; les droites FM, F′M, qui vont des deux foyers à un point M de la courbe sont appelés *rayons vecteurs*.

979. AXES DE SYMÉTRIE. De la définition même de l'ellipse, il résulte que cette ligne a deux axes de symétrie, la droite FF′,

et la perpendiculaire Y′Y à cette droite en son milieu O. Soient en effet M, M′ deux points symétriques par rapport à la droite FF′ (*fig.* 676); on a :

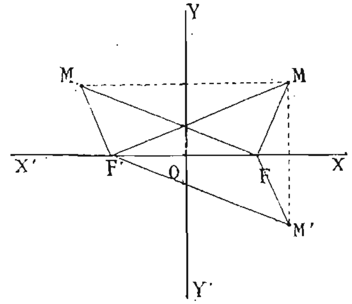


Fig. 676.

$$MF = M'F, \quad \text{et} \quad MF' = M'F',$$

et, par suite,

$$MF + MF' = M'F + M'F';$$

donc, si M est un point de l'ellipse, il en est de même du point M′.

Pareillement, soient M, M_1 deux points symétriques par rapport à Y′Y. Comme les points F et F′ sont aussi symétriques par rapport à Y′Y, on a :

$$MF = M_1F', \quad \text{et} \quad MF' = M_1F,$$

et, par suite,

$$MF + MF' = M_1F' + M_1F;$$

donc, si M est un point de l'ellipse, il en est encore de même du point M_1, symétrique de M par rapport à Y′Y.

Les axes de symétrie de l'ellipse sont appelés *axes* de l'ellipse.

980. CENTRE. Le point O, où se coupent les deux axes, est un *centre* de symétrie de l'ellipse. En effet, soit M un point quelconque de l'ellipse; soit M′ le symétrique de M par rapport à FF′, et soit M'_1 le symétrique de M′ par rapport à Y′Y (*fig.* 677); le point M'_1 est un point de l'ellipse. Il est facile de démontrer que les deux points M et M'_1 sont symétriques par rapport au point O. En effet, soit I le point de rencontre de MM′ avec la droite FF′, et soit H le point de rencontre de $M'M'_1$ avec Y′Y;

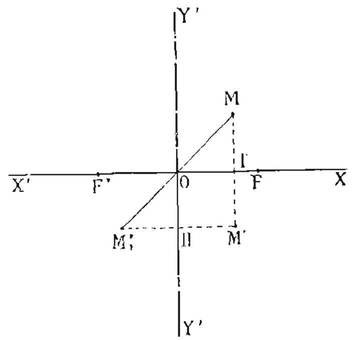


Fig. 677

les triangles OIM, M'_1HO, sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : $OIM = M'_1HO$, $OI = M'_1H$, $MI = OH$; donc $OM = OM'_1$. De plus, l'angle MOI est égal à l'angle OM'_1H, lequel est égal à l'angle M'_1OF'; donc les droites OM et OM'_1 sont dans le prolongement l'une de l'autre. Donc, enfin, les points M et M'_1 sont symétriques par rapport au point O.

Ainsi, à tout point M de l'ellipse correspond un autre point de l'ellipse M'_1, symétrique du premier par rapport au point O. Pour cette raison, le point O est appelé *centre* de l'ellipse.

981. Tracé de l'ellipse d'un mouvement continu. Pour tracer une ellipse d'un mouvement continu, on prend un fil dont la longueur est égale à la somme constante $2a$ des rayons vecteurs, et on fixe les extrémités de ce fil aux foyers F et F'; puis, avec la pointe d'un crayon, on tend le fil, et on fait glisser la pointe du crayon sur le papier en maintenant le fil tendu. Dans chaque position, la somme des distances de la pointe du crayon aux points fixes F et F' est égale à la longueur du fil, $2a$, et, par conséquent, la ligne tracée est une ellipse dont les points F et F' sont les foyers.

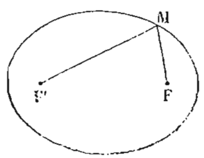


Fig. 678.

On voit que la courbe ainsi tracée est fermée, et a une forme ovale (*fig.* 678).

Si l'on appelle $2c$ la distance FF' des deux foyers, il est évident que l'on doit avoir $2a > 2c$.

CONSTRUCTION DE L'ELLIPSE PAR POINTS, SOMMETS.

982. Premier procédé. On cherche les points de la courbe situés sur un cercle décrit du foyer F comme centre, avec un rayon arbitraire r. Ces points sont les points de rencontre de ce cercle avec un second cercle décrit du foyer F' comme centre, avec un rayon égal à $2a - r$. Examinons entre quelles limites il faut faire varier le rayon r pour obtenir tous les points de l'ellipse.

La distance des centres $2c$ des deux cercles étant, par hypothèse, moindre que la somme $2a$ de leurs rayons, la condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles se rencontrent est que la distance des centres soit supérieure ou égale à la différence des rayons. Or cette différence des rayons est $2a - 2r$, ou $2r - 2a$, selon que r est le plus petit, ou le plus grand des deux rayons. La condition est donc que l'on ait à la fois

$$2a - 2r \leqslant 2c \qquad \text{et} \qquad 2r - 2a \leqslant 2c,$$

ou

$$r \geqslant a - c \qquad \text{et} \qquad r \leqslant a + c,$$

ou encore

$$a - c \leqslant r \leqslant a + c.$$

Les cercles décrits des points F et F' comme centres, avec les rayons r et $2a - r$, se coupent en deux points M et M' symétriques par rapport à FF'; les cercles décrits, avec les mêmes rayons, des points F' et F comme centres, se coupent en des points M_1, M'_1, symétriques aux points M et M' par rapport à Y'Y.

Soient, de part et d'autre du milieu O de FF', sur la droite FF', les points A et A' tels que $OA = OA' = a$ (*fig.* 679). Soit K un point quelconque de la droite FF' compris entre O et F. Les deux couples de cercles décrits des points F et F' comme centres, puis des points F' et F comme centres, avec AK et A'K comme rayons, déterminent par leurs intersections quatre points de l'ellipse. Pour obtenir tous les points de l'ellipse, il faudra faire occuper au point K toutes les positions entre F et O. Quand le point K est en F, les cercles de l'un des couples sont tangents en A, les cercles de l'autre couple sont tangents en A'; quand le point K est en O, les deux couples des cercles n'en font qu'un; les points de rencontre des cercles de ce couple sont sur Y'Y; soient B et B' ces points. Pour toute autre position du point K, les points de rencontre des cercles sont en dehors des axes.

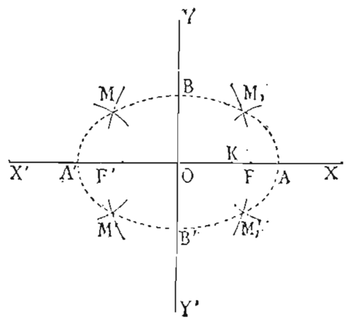


Fig. 679.

983. Sommets. Les points de rencontre de la courbe avec les axes sont appelés *sommets*. L'ellipse a quatre sommets, A et A' sur l'axe FF', B et B' sur l'axe Y'Y. L'axe AA' qui contient les foyers est plus grand que l'axe BB'; car AA' est égal à $2a$, et BB' est moindre que BF + B'F, c'est-à-dire moindre que $2a$. Pour cette raison l'*axe focal* AA' est appelé *grand axe* de l'ellipse, et l'autre, l'axe non focal BB', est appelé *petit axe*. Si l'on appelle $2b$ la longueur du petit axe BB', on a

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

984. Une ellipse peut être définie par ses deux axes AA' et BB'; les foyers F et F' sont les points de rencontre du grand axe AA' et du cercle décrit d'un sommet B du petit axe, avec un rayon égal à la moitié de AA' (*fig.* 680).

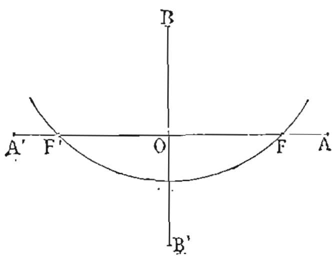


Fig. 680.

985. Second procédé. On cherche les points de l'ellipse situés sur une droite menée par un des foyers; en faisant tourner cette droite de 180° autour de ce foyer, on obtiendra évidemment tous les points de l'ellipse.

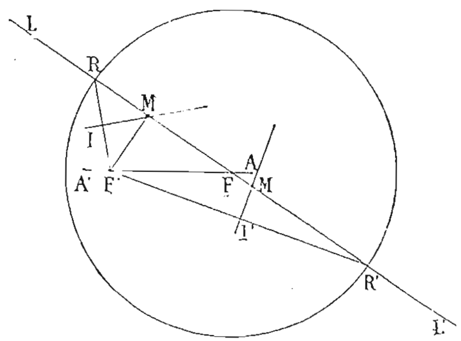


Fig. 681.

Soit FL une droite quelconque menée par le point F, et soit M un point de cette droite situé sur l'ellipse (*fig.* 681). Prolongeons FM d'une longueur MR égale à MF', la longueur FR sera égale à $2a$. On obtient donc le point R en prenant sur FL une longueur FR égale à $2a$; ce point déterminé, comme le point M est équidistant des points F' et R, il suffit, pour obtenir le point M, de

mener la perpendiculaire à la droite F'R par son milieu, et de prendre le point de rencontre de cette perpendiculaire avec la droite FL.

986. Cercle directeur. On appelle *cercle directeur* d'une ellipse un cercle de rayon égal à $2a$ décrit de l'un des foyers comme centre. L'ellipse a deux cercles directeurs. Le lieu décrit par le point R, quand la droite FL tourne autour du foyer R, est le cercle directeur dont le centre est F.

La droite FL rencontre le cercle directeur dont le centre est F, en deux points diamétralement opposés R et R'. Au point R du cercle directeur correspond un point M de l'ellipse situé entre R et F; en effet, dans le triangle FF'R, le côté FF' = $2c$ étant moindre que le côté FR = $2a$, l'angle F'RF est moindre que l'angle RF'F, et, par suite, la perpendiculaire à la droite F'R, en son milieu, rencontre nécessairement la droite FR, et le point de rencontre M est entre R et F. De même au point R' du cercle directeur correspond un point M' de l'ellipse situé entre R' et F. Donc toute droite menée par un foyer de l'ellipse rencontre la courbe en deux points situés de part et d'autre de ce foyer.

987. Remarque. Le point M étant sur le rayon FR, entre F et R, la longueur MR est la plus petite des normales menées du point M au cercle directeur; c'est (169) ce que l'on nomme la *distance* du point M au cercle directeur; cette distance est égale à MF'; donc tout point de l'ellipse est équidistant du foyer F et du cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer. D'autre part, sur une droite quelconque FL menée par le foyer, les points M et M', où cette droite rencontre l'ellipse, sont les seuls points équidistants du foyer F et du cercle directeur; donc:

988. *Une ellipse est le lieu des points équidistants de l'un de ses foyers et du cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer.*

Si l'on remarque qu'un foyer de l'ellipse est à l'intérieur du cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer, on peut énoncer le même fait comme il suit :

989. *Le lieu des points équidistants d'un cercle et d'un point donné à l'intérieur de ce cercle est l'ellipse qui a pour foyers le point donné et le centre du cercle, et dont le grand axe est égal au rayon du cercle.*

990. Excentricité. Le rapport $\frac{c}{a}$ est appelé *excentricité*. Ce rapport peut varier de o à 1. Quand il est nul, les deux foyers sont confondus avec le centre, et la courbe est un cercle. Quand ce rapport est égal à 1, les deux foyers se confondent avec les sommets de l'axe focal, et l'ellipse se réduit à la portion de droite comprise entre ces sommets. Si, a restant fixe, on fait croître $\frac{c}{a}$ de o à 1, l'ellipse, qui est d'abord un cercle, s'aplatit de plus en plus, et finit par se confondre avec la portion de droite AA' (*fig.* 682).

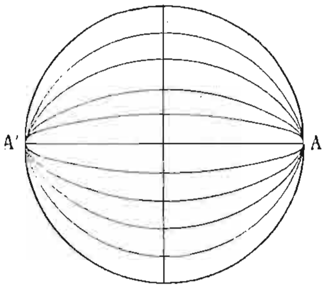


Fig. 682.

Théorème.

991. *La somme des distances d'un point du plan d'une ellipse aux deux foyers de cette ellipse est inférieure, ou supérieure, au grand axe de l'ellipse, selon que le point est dans l'intérieur de la courbe, ou à l'extérieur.*

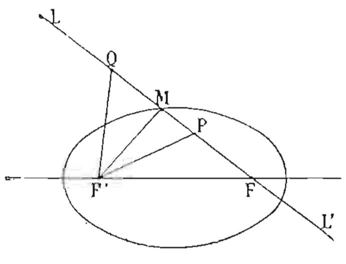


Fig. 683.

En effet, menons par un des foyers, F par exemple, une droite quelconque FL, et soient sur cette droite, d'un même côté par rapport au point F, deux points P et Q, tels que FQ est plus grand que FP (*fig.* 683). Menons les droites PF' et QF'; on a

$$PF' < PQ + QF',$$

et, en ajoutant de part et d'autre PF,

$$PF + PF' < PF + PQ + QF',$$

ou encore

$$PF + PF' < QF + QF'.$$

Cela prouve qu'à mesure qu'un point s'éloigne du point F sur la droite FL, la somme de ses distances aux points F et F' va en augmentant. Quand le point est en F, cette somme est égale à $2c$ et par conséquent est moindre que $2a$; quand le point est sur l'ellipse, en M, cette somme est $2a$, et pour tout point P compris entre F et M elle est moindre que $2a$. Si le point s'éloigne au delà de M, la somme devient, et reste, supérieure à $2a$. Donc le théorème est démontré.

Les deux propositions contenues dans l'énoncé du théorème étant contraires, les réciproques sont vraies. Donc :

992. *Un point est à l'intérieur, ou à l'extérieur, de l'ellipse selon que la somme de ses distances aux deux foyers est inférieure, ou supérieure, à* 2a.

§ II. Intersection d'une droite et d'une ellipse; tangente a l'ellipse.

Problème.

993. *Étant donnés les foyers* F *et* F' *d'une ellipse, et la longueur* 2a *du grand axe, déterminer les points de rencontre de la courbe et d'une droite donnée* LL'.

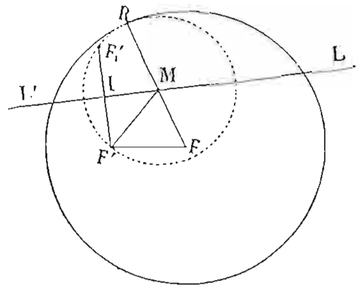


Fig. 684.

Soit M un point de rencontre de l'ellipse et de la droite LL' (*fig.* 684); on a

$$MF + MF' = 2a,$$

et si l'on prolonge FM d'une longueur MR égale à MF', le point R est sur le cercle directeur de centre F de l'ellipse. Si le point R était connu, on obtiendrait le point M en prenant le point de rencontre de la droite FR et de la droite donnée LL'; nous allons chercher à déterminer le point R. A cet effet, nous remarquons que, si du point M comme centre, avec MF' pour rayon, on décrit un cercle, ce cercle est tangent en R au cercle directeur de centre F. Or ce cercle, tangent au cercle directeur, passe par F′ ; il a son centre sur LL′ ; donc il passe aussi par le point F'_1 symétrique du point F′ par rapport à la droite LL′. Donc, déterminer le point R revient à trouver le point de contact d'un cercle mené par deux points connus, F et F'_1, tangentiellement au cercle directeur de centre F.

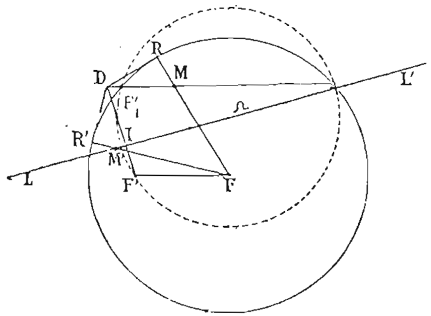


Fig. 685.

On a vu (317) que pour résoudre ce problème, on fait passer par les points F, F'_1, un cercle quelconque Ω, on prend le point de rencontre D de la droite FF'_1 et de la corde commune au cercle Ω et au cercle directeur ; puis, par ce point D on mène au cercle directeur les tangentes DR, DR′. Les points R et R′ sont les points qui satisfont aux conditions demandées (*fig.* 685).

Le point F′ étant à l'intérieur du cercle directeur, on sait (318) que, selon que le point F'_1 est à l'intérieur du cercle directeur,

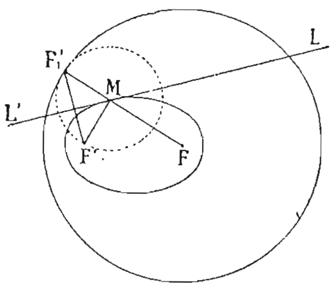


Fig. 686.

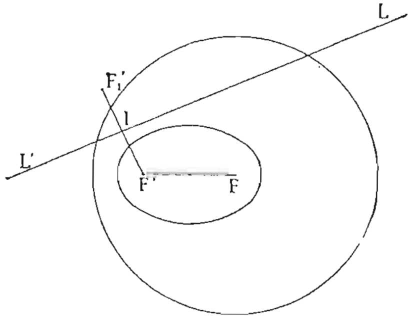


Fig. 687.

ou sur ce cercle, ou à l'extérieur de ce cercle, on obtient ainsi deux points distincts R, R′, ou deux points confondus avec le point F'_1, ou le problème n'a pas de solution. D'ailleurs, à

tout point R ainsi déterminé correspond un point M de la droite LL′ situé sur l'ellipse ; donc :

Selon que le point F'_1 *symétrique du point* F′ *par rapport à la droite* LL′ *est à l'intérieur du cercle directeur de centre* F, *sur ce cercle, ou à l'extérieur de ce cercle, la droite* LL′ *rencontre l'ellipse en deux points distincts* (*fig.* 685), *en deux points confondus en un seul* (*fig.* 686), *ou ne la rencontre pas* (*fig.* 687).

994. On dit qu'une courbe est *convexe* lorsqu'elle ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points. De ce qui précède il résulte *qu'une ellipse est une courbe convexe.*

TANGENTE A L'ELLIPSE.

995. Définition. On appelle tangente à une courbe, en un point M de cette courbe, la position limite vers laquelle tend une sécante qui tourne autour de ce point M jusqu'à ce qu'un second point de rencontre de cette sécante avec la courbe vienne se confondre avec le point M (*fig.* 688).

Cette définition suppose que, lorsqu'une sécante tourne autour d'un point d'une courbe, dans les conditions ci-dessus indiquées, cette sécante tend à se placer dans une position bien déterminée.

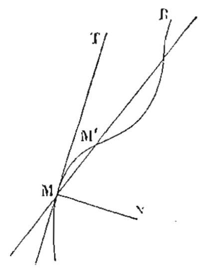


Fig. 688.

Nous avons déjà vu (165) qu'il en est ainsi quand la courbe est un cercle ; mais il n'est pas évident qu'il en soit de même quelle que soit la courbe considérée, et quel que soit le point pris sur cette courbe. Il y aura donc lieu, pour toute courbe nouvelle à étudier, de rechercher si la courbe admet une tangente en chacun de ses points.

996. La perpendiculaire MN à la tangente au point de contact M est appelée *normale* à la courbe en M· le point M est appelé *pied* de la normale.

Théorème.

997. *Les deux parties* MT, MT′ *de la tangente en un point* M *à une ellipse font des angles égaux avec les rayons vecteurs qui vont du point* M *aux deux foyers.*

Soit LL′ une sécante menée par le point M, et soit M′ le second point de rencontre de cette droite avec l'ellipse (*fig.* 689). Faisons tourner la droite LL′ autour du point M de façon que le point M′ se rapproche du point M; le point F'_1, symétrique du point F′ par rapport à la droite LL′, se meut sur le cercle décrit du point M comme centre, avec MF′ pour rayon; il reste à l'intérieur du cercle directeur du centre F tant que le point M′ reste distinct du point M, et il vient se placer sur ce cercle, en R, quand le point M′ vient se confondre avec le point M. La droite LL′, toujours perpendiculaire à la droite $F'F'_1$, en son milieu, et, par conséquent, bissectrice de l'angle $F'MF'_1$, vient donc, quand le point M′ se confond avec le point M, se placer sur la bissectrice de l'angle F′MR. Donc il y a une tangente à la courbe au point M, et cette tangente est la bissectrice de l'angle F′MR. Les rayons vecteurs MF, MF′ sont d'un même côté de cette tangente; et, comme l'angle FMT est égal à l'angle T′MR, qui lui est opposé par le sommet, les angles FMT, F′MT′, formés par les deux rayons vecteurs avec les deux portions MT, MT′, de la tangente, sont égaux.

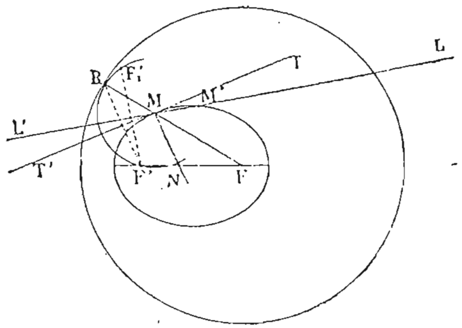


Fig. 689.

998. Corollaire I. *La normale en un point de l'ellipse est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont de ce point aux deux foyers.*

En effet, soit MN la normale à l'ellipse au point M (*fig.* 690); les angles NMF et NMF′ sont égaux comme étant les compléments des angles égaux TMF et T′MF′.

999. Corollaire II. *En un sommet de l'ellipse, la normale coïncide avec l'axe passant par ce sommet, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.*

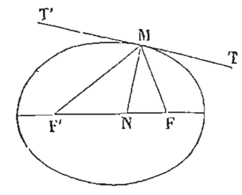


Fig. 690.

1000. Corollaire III. *Tous les points d'une tangente à une ellipse, sauf le point de contact, sont extérieurs à l'ellipse.*

Soit TT′ la tangente à une ellipse en un point M (*fig.* 691); prolongeons le rayon vecteur F′M d'une longueur MR égale à MF. La longueur F′R est égale à MF′ + MF, ou à $2a$. La tangente TT′ bissectrice de l'angle RMF du triangle isocèle RMF est perpendiculaire au milieu I de la base RF de ce triangle. Par conséquent, tout point P de la tangente TT′ est équidistant des points F et R; il en résulte que la somme des distances du point P aux deux foyers, PF + PF′, est égale à PR + PF′ et est, par conséquent, plus grande que F′R, c'est-à-dire plus grande que $2a$. Donc tout point P de la tangente, autre que le point de contact, est extérieur à l'ellipse.

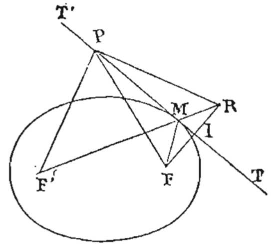


Fig. 691.

1001. Corollaire IV. *Le lieu des projections d'un foyer sur les tangentes à l'ellipse est le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.*

En effet, le point I, projection du point F sur la tangente MT, est, comme on vient de le voir, le milieu de FR (*fig.* 692); donc la droite OI, qui joint le milieu O de FF′ au milieu I de FR, est égale à la moitié de F′R, c'est-à-dire à la moitié du grand axe de l'ellipse. OI étant constant et égal à a, le lieu du point I est le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

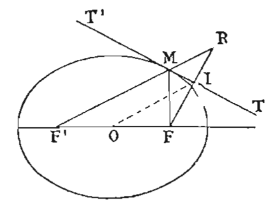


Fig. 692.

Théorème.

1002. *Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une tangente à l'ellipse est constant et égal au carré de la moitié du petit axe.*

Soient I et I′ les pieds des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur une tangente (*fig.* 693); ces points sont sur le cercle décrit sur le grand axe AA′ comme diamètre. Soit I'_1 le point de rencontre du prolongement de IF avec ce cercle; les points I′ et I'_1 sont diamétralement opposés, puisque l'angle $I'II'_1$ est droit. Il en résulte que les triangles OF′I′, OFI'_1 sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Donc F′I′ est égal à FI'_1, et on a

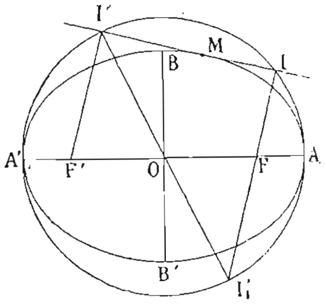


Fig. 693.

$$FI \times F'I' = FI \times FI'_1.$$

Mais le produit $FI \times FI'_1$ est constant, quelle que soit la direction de la droite IFI'_1, et égal à $FA \times FA'$, c'est-à-dire à $(a-c)(a+c)$, ou à a^2-c^2, ou à b^2. Donc, enfin, on a

$$FI \times F'I' = b^2.$$

§ III. Problèmes sur la tangente a l'ellipse.

Problème.

1003. *Mener une tangente à une ellipse en un point* M *de cette ligne.*

On joint le point M aux deux foyers F et F′ (*fig.* 694), et on

mène la bissectrice MT de l'angle FMR formé par l'un des rayons vecteurs MF et par le prolongement MR de l'autre.

Ce procédé ne suppose pas l'ellipse tracée.

1004. Remarque. Le procédé donné au nº 985 pour construire, à l'aide du cercle directeur, autant de points que l'on veut d'une ellipse dont on connaît les foyers et le grand axe, donne en même temps la tangente en chacun des points que l'on détermine. Soient, en effet, F et F′ (*fig.* 695) les deux foyers d'une ellipse dont le grand axe est $2a$. Du point F comme centre, avec $2a$ pour rayon, décrivons le cercle directeur FR, et prenons sur ce cercle un point quelconque R. La perpendiculaire au milieu I de F′R rencontre le rayon FR en un point M qui est un point de l'ellipse; de plus, la droite IM est bissectrice de l'angle RMF′, et, par conséquent, cette droite est tangente à l'ellipse au point M.

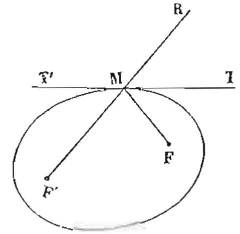


Fig. 694.

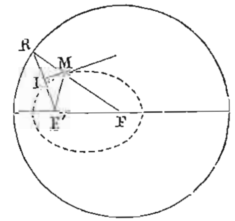


Fig. 695.

Problème.

1005. *Mener à une ellipse une tangente parallèle à une direction donnée.*

Menons le cercle directeur qui a pour centre le foyer F de l'ellipse (*fig.* 696), et du foyer F′ menons une perpendiculaire F′R à la direction donnée LL′. Comme le foyer F′ est à l'intérieur du cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer F, la droite F′R rencontre toujours ce cercle en deux points; soient R et R′ ces deux points.

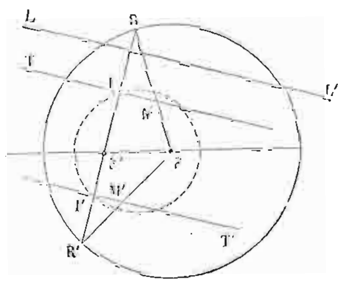


Fig. 696.

Si, par le milieu I de F′R, nous menons la parallèle IT à la droite LL′, cette droite est tangente à l'ellipse, et le point de contact est le point M où elle rencontre le rayon FR. Nous obtiendrons de même une seconde tangente à l'ellipse en menant par le milieu I′ de F′R′ une parallèle à la direction donnée. — Le problème admet toujours deux solutions.

1006. Remarque. Quand deux tangentes à une ellipse sont parallèles, les points de contact sont situés sur un même diamètre. Remarquons d'abord que le quadrilatère MFM′F′ est un parallélogramme (*fig.* 697). En effet, les droites F′M et M′F sont parallèles comme formant avec la sécante RR′ des angles correspondants égaux, savoir, l'angle RF′M égal à l'angle R, parce que MF′ = MR, et l'angle RR′F égal à l'angle R parce que FR′ = FR; on démontrerait de même que les côtés MF et M′F′ sont parallèles. Le quadrilatère MFM′F′ étant un parallélogramme, la diagonale MM′ passe par le milieu de FF′, c'est-à-dire par le centre O de l'ellipse, et les points M et M′ sont diamétralement opposés.

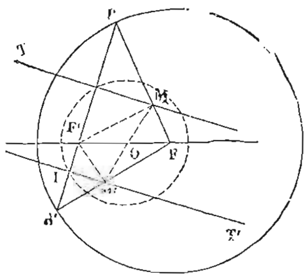


Fig. 697.

Problème.

1007. *Mener une tangente à une ellipse par un point non situé sur l'ellipse.*

Soit P le point donné; supposons le problème résolu, et soit M le point de contact d'une tangente PM menée du point P à l'ellipse donnée (*fig.* 698).

Si nous prolongeons le rayon vecteur FM d'une longueur MR égale à MF′, la point R appartient au cercle directeur qui a le point F pour centre; d'autre part, la tangente PM étant perpendiculaire à la droite F′R, en son milieu, le point P est équidistant des points F et R, et, par conséquent, le point R est aussi sur le cercle décrit du point P comme centre avec PF′ pour rayon.

Traçons donc ces deux cercles, et soient R et R′ leurs points

d'intersection. Nous obtiendrons la tangente PM en abaissant du point P une perpendiculaire sur la droite F′R; quant au point de contact, M, c'est le point d'intersection de la tangente et du rayon FR. En abaissant du point P une perpendiculaire sur la droite F′R′, nous obtiendrons une seconde tangente à l'ellipse issue du point P, et le point de contact M′ sera l'intersection de cette tangente et du rayon FR′ du cercle directeur.

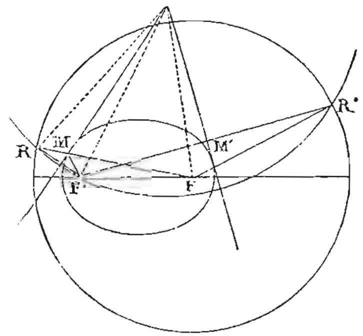


Fig. 698.

1008. Discussion. Nous avons supposé que la cercle décrit du point P comme centre, avec PF′ pour rayon, rencontre en deux points le cercle directeur qui a pour centre le foyer F; examinons s'il en est toujours ainsi. Pour que ces deux cercles se coupent, il faut et il suffit qu'on puisse former un triangle ayant pour côtés la distance des centres PF, et les deux rayons PF′ et $2a$ la condition est donc que l'une des trois longueurs PF, PF′, $2a$, soit moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence. Faisons porter la discussion sur la longueur $2a$ qui est indépendante de la position du point P; pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que l'on ait

$$2a < PF + PF' \qquad (1)$$
$$2a > \text{val. abs.}\,(PF - PF'). \qquad (2)$$

La seconde condition est remplie quelle que soit la position du point P. En effet, si le point P n'est pas sur la droite FF′, les trois points F, F′, P, sont les sommets d'un triangle et on a

$$FF' > \text{val. abs. de}\,(PF - PF');$$

si le point P est sur la droite FF′, on a ou

$$FF' = PF + PF > \text{val. abs de}\,(PF - PF'),$$

ou

$$FF' = \text{val. abs. de}\,(PF - PF'),$$

selon que le point P est entre les points F et F′, ou sur l'un des prolongements de la droite FF′ dans un sens ou dans l'autre.

Donc, quelle que soit la position du point P, on a toujours

$$FF' > \text{val. abs. de } (PF - PF').$$

Comme d'ailleurs $2a$ est plus grand que FF', on a, *à fortiori*, dans tous les cas

$$2a > \text{val. abs. de } (PF - PF').$$

Quant à la première condition, elle est remplie quand le point P est extérieur à l'ellipse, et elle n'est remplie que dans ce cas.

De là, trois cas à distinguer :

1° *Le point* P *est extérieur à l'ellipse.*

Il y a un triangle dont les côtés sont égaux aux longueurs PF, PF', $2a$; les deux cercles décrits des points P et F comme centres, le premier avec le rayon PF', le second avec le rayon $2a$, se coupent en deux points distincts, R, R'; le problème admet deux solutions.

2° *Le point* P *est sur l'ellipse.*

On a

$$2a = PF + PF'.$$

Le triangle dont les côtés sont respectivement égaux à PF, PF', $2a$, se réduit à une portion de droite; les deux cercles considérés sont tangents ; les deux points R et R' se confondent, et le problème n'admet qu'une solution.

3° *Le point* P *est intérieur à l'ellipse.*

On a

$$2a < PF + PF'.$$

Les longueurs PF, PF', $2a$, ne peuvent être les côtés d'un triangle, et, par suite, les deux cercles ne se rencontrent pas; le problème n'admet aucune solution. — Cela, d'ailleurs, était évident, puisque (1000) une tangente à une ellipse ne pénètre pas dans l'intérieur de la courbe.

Théorème.

1009. 1° *Les tangentes* PM, PM', *menées à une ellipse par un point* P, *font des angles égaux* MPF, M'PF' *avec les droites qui vont de ce point aux deux foyers ;* 2° *la droite* FP, *qui va de l'un des foyers au point* P, *est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM, FM', *qui vont de ce foyer aux points de contact* M *et* M' *des tangentes issues du point* P (*fig.* 699).

1° Prolongeons F'M d'une longueur MR égale à MF; F'R est égal à $2a$, et PR est égal à PF. De même, prolongeons FM' d'une longueur M'R' égale à M'F'; FR' est égal à $2a$, et PR' est égal à PF'. Les deux triangles PF'R et PR'F sont égaux, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun, savoir :

$$PR' = PF', \qquad R'F = F'R, \qquad PF = PR.$$

Donc, les angles F'PR et R'PF sont égaux. Si, de ces angles égaux, nous retranchons le même angle F'PF, les angles restants FPR et F'PR' sont égaux, et, par suite, les angles MPF, M'PF', moitiés des angles précédents, sont égaux.

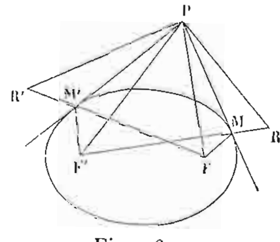


Fig. 699.

2° Dans les triangles égaux F'PR et R'PF, les angles PRF' et PFR' sont égaux ; d'ailleurs, les triangles PRM et PFM, qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun, sont égaux, et l'angle PRM est égal à l'angle PFM. Donc les angles PFM' et PFM sont égaux, et la droite FP est bissectrice de l'angle MFM'.

§ IV. L'ellipse est la projection orthogonale d'un cercle.

Théorème.

***1010.** *La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.*

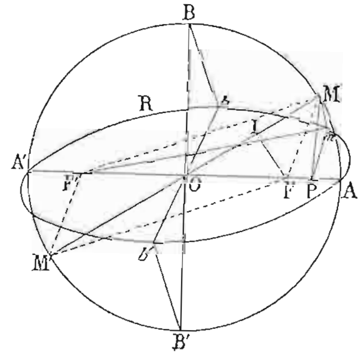


Fig. 700.

Projetons le cercle ABA'B' orthogonalement sur un plan quelconque R mené par le centre O du cercle. Soit (*fig.* 700) AA' la trace du plan R sur le plan du cercle, soit bb' la projection du diamètre BB' perpendiculaire à AA', et soient sur AA' les points F et F' tels que OF = OF' = Bb. La projection du cercle sur le plan R est une ellipse dont les foyers sont les points F et F', et dont le grand axe est AA'. Pour le démontrer, nous prendrons un diamètre quelconque MM′ du cercle, nous abaisserons du point F la perpendiculaire FI sur ce diamètre, et nous ferons voir que les longueurs mF, mF', distances de la projection m du point M sur le plan R aux points F et F′, sont respectivement égales à MI et à M′I, et par suite, que la somme de ces distances est constante et égale au diamètre MM′ du cercle donné.

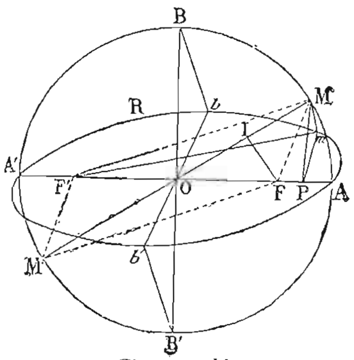


Fig. 700 *bis*.

Soit MP la perpendiculaire menée du point M sur AA′, les triangles rectangles MmP, BbO sont semblables, et on a

$$\frac{Mm}{Bb}=\frac{MP}{OB}$$

De même, les triangles rectangles FIO, MPO, qui ont un angle aigu commun, sont semblables, et on a

$$\frac{FI}{OF}=\frac{MP}{OM};$$

or, $OM=OB$, $OF=Bb$; des égalités précédentes, on déduit

$$FI=Mm.$$

Les triangles rectangles MmF, MIF, ont l'hypoténuse commune MF, et un côté de l'angle droit égal, FI égal à Mm, donc ils sont égaux, et

$$mF=MI.$$

Pour démontrer que mF' est égal à M′I, remarquons que le quadrilatère MFM′F′, dont les diagonales se coupent en parties égales, est un parallélogramme, et, par suite, que MF′ est égal à M′F; les triangles rectangles MmF' et M′FI, qui ont l'hypoténuse égale, MF′ égale à M′F, et un côté de l'angle droit égal, Mm égal à FI, sont égaux, et par conséquent,

$$mF'=M'I.$$

La projection du cercle ABA′B′ sur le plan R étant une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses

points à deux points fixes F et F′ est constante et égale à AA′, cette projection est une ellipse dont les foyers sont les points F et F′, et dont le grand axe est AA′ (1).

* **1011**. Si le plan R se confond avec le plan du cercle, la projection du cercle est égale au cercle lui-même; c'est une ellipse dont les axes sont égaux, et dont les foyers sont confondus avec le centre. Si l'on imagine que le plan R tourne autour de AA′ de façon que l'angle du plan R et du plan du cercle augmente de 0° à 90°, la projection du cercle est une ellipse dont le grand axe est toujours AA′, et dont le petit axe bb' diminue de BB′, ou AA′, jusqu'à zéro; la distance focale FF′ augmente de zéro à AA′. Lorsque le plan R est perpendiculaire au plan du cercle, la projection du cercle se réduit à la portion de droite AA′, que l'on peut regarder comme une ellipse dont le grand axe est AA′, et dont le petit axe est nul; les foyers sont confondus avec les sommets A et A′.

* **1012**. Corollaire I. *Si l'on réduit, dans un rapport donné* λ, *la distance* MP *de chaque point du cercle* ABA′B′ *au diamètre* AA′ (*fig.* 701), *on transforme le cercle en une ellipse* ACA′C′. *Le grand axe de l'ellipse est* AA′, *et le petit axe* CC′ *est égal à* $BB'\times\lambda$.

Pour le démontrer il suffit de remarquer que si l'on fait tourner le plan du cercle autour du diamètre AA′ d'un angle tel que son cosinus soit égal à λ, le cercle, dans cette nouvelle position, se projettera orthogonalement sur le plan de figure suivant la ligne considérée ACA′C′.

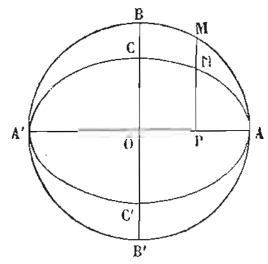


Fig. 701.

* **1013**. Corollaire II. *Lorsqu'une droite* AB *de longueur fixe se déplace de façon que ses extrémités* A *et* B *glissent sur deux droites rectangulaires* OX *et* OY, *tout point* M *de cette droite décrit une ellipse* (*fig.* 702).

En effet, soit AB une position particulière de la droite mobile. Par le point O menons ON parallèle à BA, et par le point M menons MP perpendiculaire à OX.

(1) Cette démonstration est due à M. Courcelles, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

La figure OBDN est un parallélogramme, et par conséquent ON est égal à BM ; donc le point N décrit un cercle qui a pour centre le point O, et pour rayon BM. D'autre part, les triangles MAP et NOP étant semblables, on a

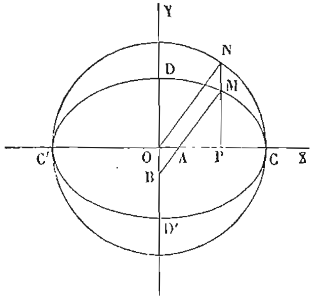


Fig. 702.

$$\frac{MP}{NP} = \frac{MA}{ON},$$

ou

$$\frac{MP}{NP} = \frac{MA}{MB},$$

et, d'après le corollaire précédent, le lieu du point M est une ellipse dont les axes sont situés sur OX et sur OY. Le demi-grand axe OC est égal à BM, et le demi-petit axe OD est égal à AM.

Hyperbole (1).

V. Définition de l'hyperbole, axes, centre, construction de la courbe, sommets.

* **1014**. Définitions. On appelle *hyperbole* le lieu des points d'un plan tels que la différence des distances de chacun de ces points à deux points fixes F et F' soit constante et égale à une longueur donnée $2a$.

Les deux points F et F' sont appelés *foyers;* les droites MF, MF', qui vont d'un point M de la courbe aux deux foyers sont appelés *rayons vecteurs*.

* **1015**. Axes de symétrie. Centre. De la définition même de l'hyperbole il résulte que cette ligne a deux axes de symétrie, la droite FF' et la droite Y'Y perpendiculaire à la droite FF' en son milieu, et que le point de rencontre des axes est un *centre* de symétrie.

(1) L'hyperbole n'est pas exigée pour le baccalauréat ès sciences, mais elle fait partie du programme d'examen d'admission à Saint-Cyr.

(Même démonstration que pour l'ellipse.)

Si l'on appelle $2a$ la distance FF' des deux foyers, il est évident que l'on doit avoir $2c > 2a$.

* **1016**. Tracé de l'hyperbole d'un mouvement continu. Supposons une règle mobile autour de l'un des foyers, F' par exemple (*fig.* 703); sur cette règle prenons un point arbitraire K, et supposons qu'un fil dont la longueur est égale à $F'K - 2a$ ait ses deux extrémités fixées l'une en K et l'autre en F. Si, pendant que la règle tourne autour du point F', on maintient le fil tendu à l'aide de la pointe M d'un crayon appuyée contre la règle, la différence des distances du point M aux points F' et F sera égale à la différence entre la longueur F'K et la longueur totale du fil, $F'K - 2a$, c'est-à-dire égale à $2a$; donc la pointe du crayon décrira un arc de l'hyperbole.

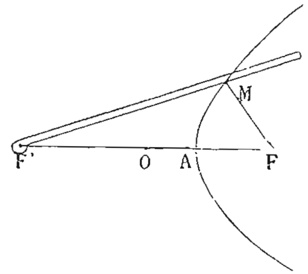


Fig. 703.

En échangeant les foyers, on obtiendra un second arc de l'hyperbole, symétrique au premier par rapport à la droite Y'Y. Mais il est clair que, quelque grande que soit la longueur F'K de la règle, on ne pourra obtenir ainsi qu'une portion de la courbe.

Tracé de l'hyperbole par points, sommets de la courbe.

1017. Premier procédé. On cherche les points de l'hyperbole situés sur un cercle décrit de l'un des foyers comme centre, avec un rayon arbitraire r. Ces points sont les points de rencontre de ce cercle et d'un second cercle décrit de l'autre foyer comme centre, avec un rayon r' tel que la valeur absolue de la différence des rayons r et r' soit égale à $2a$. Supposons que r soit le plus grand des deux rayons, et cherchons entre quelles limites il faut faire varier r pour obtenir tous les points de l'hyperbole.

La distance $2c$ des centres étant plus grande que la différence $2a$ des deux rayons, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles se rencontrent est que la distance des centres soit inférieure ou égale à la somme des deux rayons. Or r étant le plus grand rayon, l'autre est $r - 2a$, la somme des deux est $2r - 2a$; et la condition est

$$2c < 2r - 2a,$$

ou

$$r > c + a.$$

Les cercles décrits des points F et F′ comme centres, avec les rayons r et $r - 2a$, se coupent en deux points M et M′ symétriques par rapport à la droite FF′ (*fig.* 704); les cercles décrits, avec les mêmes rayons, en échangeant les centres, se coupent en des points M_1, M'_1, symétriques des points M et M′ par rapport à OY.

Soient, de part et d'autre du milieu O de FF′, sur la droite FF′, les points A, A′, tels que $OA = OA' = a$. Soit K un point quelconque de la droite FF′, pris sur le prolongement de OF, dans le sens OF; les deux couples de cercles décrits des points F et F′ comme centres, avec A′K et AK pour rayons, déterminent par leur intersection quatre points de l'hyperbole.

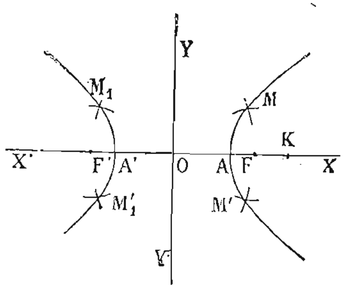


Fig. 704.

Pour obtenir tous les points de l'hyperbole, il faudra faire occuper au point K toutes les positions sur le prolongement de OF, dans le sens OF. On voit ainsi que la courbe se compose de deux branches infinies, l'une symétrique à l'autre par rapport à OY, et situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre par rapport à cette droite. Chacune de ces branches se compose de deux parties symétriques par rapport à OX.

Quand le point K est en F, les cercles de l'un des couples sont tangents en A, et les cercles de l'autre couple sont tangents en A′; pour toute autre position du point K les cercles se coupent en deux points symétriques par rapport à OX. Les points

A et A′ sont donc les seuls points situés sur OX. Il n'y a pas de point de l'hyperbole sur OY; car pour tout point de OY la différence des distances aux deux foyers est nulle.

L'hyperbole n'a donc que deux sommets : les points A et A′.

L'axe focal, c'est-à-dire celui qui contient les foyers, est dit *axe transverse*, parce qu'il rencontre la courbe en deux points; l'autre axe est dit *axe non transverse*.

La longueur de l'axe transverse AA′ est égale à $2a$.

1018. On convient d'appeler longueur de l'axe non transverse une longueur $2b$ telle que $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Soit, sur OY, de part et d'autre du point O, $OB = OB' = b$; on dit que BB′ est l'axe non transverse de l'hyperbole.

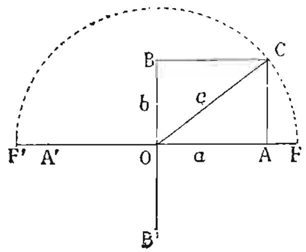


Fig. 705.

Connaissant l'axe transverse AA′ et l'axe non transverse BB′ d'une hyperbole, il est facile d'obtenir les deux foyers; sur les demi-axes OA, OB, on construit un rectangle OACB (*fig.* 705), et sur l'axe transverse, on porte, de part et d'autre du point O, les longueurs OF′, OF, égales à la diagonale OC du rectangle OACB.

1019. Le rapport $\frac{c}{a}$ est appelé *excentricité* de l'hyperbole; il peut varier de 1 à l'infini.

1020. Second procédé. On cherche les points de l'hyperbole situés sur une droite quelconque F′L menée par l'un des foyers; en faisant tourner cette droite de 180° autour de ce foyer, on obtient tous les points de l'hyperbole.

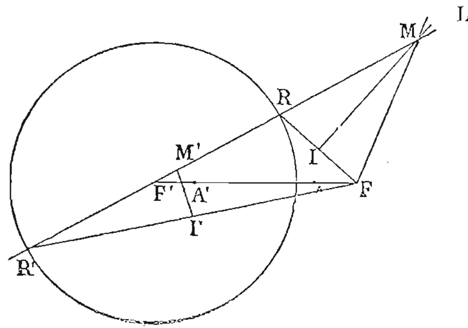


Fig. 706.

Soit M un point de la droite F′L situé sur l'hyperbole (*fig.* 726); si l'on prend sur MF′ une longueur MR égale à MF, la longueur F'R sera égale à $2a$. On obtiendra donc le point R en portant sur la droite F'L une longueur $F'R = 2a$; ce point déterminé, comme le point M est équidistant des points F et R, il suffira pour l'obtenir de mener la perpendiculaire à la droite FR, par son milieu, et de prendre le point de rencontre de cette perpendiculaire avec la droite FL.

1021. Cercle directeur. On appelle *cercle directeur* d'une hyperbole un cercle décrit de l'un des foyers comme centre

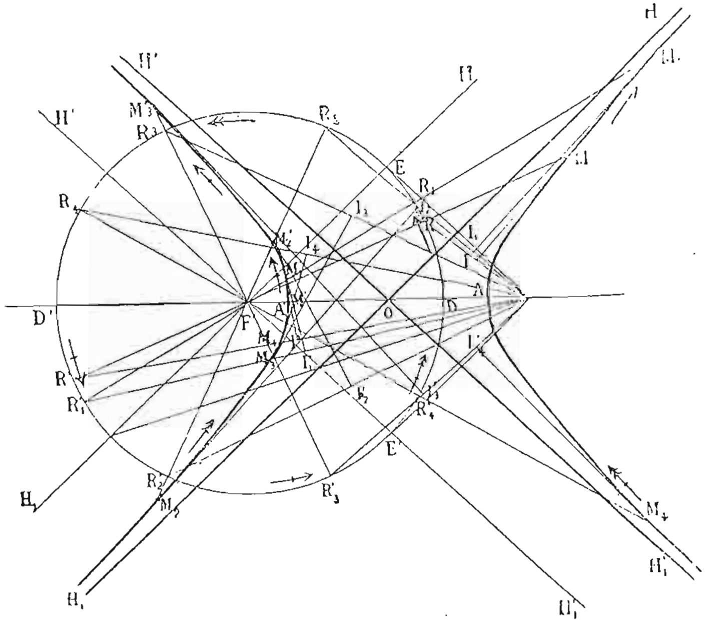


Fig. 707.

avec un rayon égal à l'axe transverse $2a$; l'hyperbole a deux cercles directeurs. Le lieu décrit par le point R, quand la droite F'L tourne autour du point F', est le cercle directeur qui a pour centre le foyer F'. La droite F'L coupe le cercle directeur en deux points diamétralement opposés R, R', à chacun desquels correspond un point sur l'hyperbole.

Soient E et E' les points de contact des tangentes menées du point F au cercle directeur de centre F' (*fig.* 707); si la droite F'L, primitivement dirigée suivant F'F, tourne de 180° autour

du point F', dans le sens indiqué par la flèche, le point R parcourt successivement les arcs DE et ED', et le point R' parcourt les arcs D'E', E'D. Nous allons suivre séparément, dans leur mouvement, les points M et M' de l'hyperbole qui correspondent aux points R et R' du cercle directeur.

Quand le point R décrit l'arc DRR_1E, le point M décrit la branche d'hyperbole AMM_1H; au point D correspond le point A, milieu de FD; à un point R correspond un point M situé sur le prolongement de F'R, dans le sens F'R, car l'angle F'RF est un angle obtus.

Quand le point R arrive en E, la droite F'E et la perpendiculaire à FE, en son milieu, sont parallèles, et, par conséquent, le point de l'hyperbole qui correspond au point E du cercle directeur est rejeté à l'infini.

Si le point R dépasse le point E, l'angle FRF' devient aigu, et la perpendiculaire à FR, en son milieu, rencontre la droite F'R, très loin sur le prolongement de RF'. Quand le point R décrit l'arc ER_2R_3D', le point M décrit la branche d'hyperbole $H_1M_2M_3A'$; aux points R_2, R_3 correspondent les points M_2, M_3; au point D' correspond le point A', milieu de FD'.

Quand le point R' décrit l'arc $D'R'R'_1R'_2R'_3E'$, le point correspondant M' décrit la branche d'hyperbole $A'M'M'_1M'_2M'_3H'$.

Quand le point R' décrit l'arc $E'R'_4D$, le point M' décrit la branche d'hyperbole $H'_1M'_4A$.

1022. Remarque. A tout point M de l'hyperbole correspond un point R du cercle directeur de centre F', tel que $MF = MR$; mais il y a deux cas à distinguer selon la branche à laquelle appartient le point considéré. Pour un point M de la branche qui enveloppe le foyer F (*fig.* 707), le point R est situé entre F' et M, et MR est la plus petite normale menée du point M au cercle directeur. Au contraire, pour un point M' de l'autre branche, le point R' n'est pas entre F' et M', et M'R' est la plus grande des normales menées de M' au cercle directeur. D'ailleurs, sur une droite quelconque menée par F' les points de rencontre de cette droite avec l'hyperbole sont les seuls dont la distance au point F soit égale à la longueur d'une des normales menées du point au cercle directeur, donc :

1023. *Une hyperbole est le lieu des points tels que la distance* *de chacun d'eux à l'un des foyers de cette hyperbole soit égale à l'une des normales menées de ce point au cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer. Cette distance est d'ailleurs égale à la plus petite, ou à la plus grande, des deux normales, selon que le point est sur la branche qui enveloppe le foyer pris pour centre du cercle directeur, ou sur l'autre branche.*

Si l'on remarque qu'un foyer d'une hyperbole est toujours extérieur au cercle directeur qui a l'autre foyer pour centre, on peut énoncer le même fait comme il suit :

1024. *Étant donnés un cercle et un point extérieur au cercle, le lieu des points dont la distance au point est égale à l'une des normales menées de ce point au cercle est l'hyperbole qui a pour foyers le point donné et le centre du cercle, et dont l'axe transverse est égal au rayon du cercle.*

La branche de cette hyperbole qui enveloppe le point donné est le lieu des points équidistants du point et du cercle. L'autre branche est le lieu des points dont la distance au point donné est égale à la plus grande des normales menées du même point au cercle.

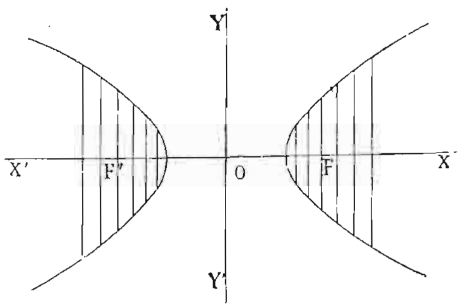


Fig. 708.

1025. DÉFINITION. Une hyperbole partage le plan en trois parties, celle qui est comprise entre les deux branches de la courbe est appelée *région extérieure;* les deux autres parties, celles qui sont ombrées sur la figure 708, forment ce que l'on nomme la *région intérieure.* Le centre est à l'extérieur; chaque foyer est à l'intérieur.

Théorème.

1026. *La différence des distances d'un point du plan d'une hyperbole aux deux foyers est inférieure, ou supérieure, à l'axe transverse de la courbe, selon que le point appartient à la région extérieure, ou à la région intérieure.*

Considérons d'abord les points situés dans l'angle XOY (*fig.* 709). A cet effet menons par F' une droite quelconque F'L, et soit IL la portion de cette droite située dans l'angle XOY. Sur IL prenons deux points quelconques P et Q tels que IQ surpasse IP. On a

$$QF < QP + PF,$$

et, en retranchant les deux membres de cette inégalité de QF', on a

$$QF' - QF > QF' - QP - PF;$$

or, comme le point P est, par hypothèse, entre Q et F', la différence QF' — QP est égale à PF', et on a

$$QF' - QF > PF' - PF.$$

Donc, à mesure qu'un point s'éloigne du point I sur la droite

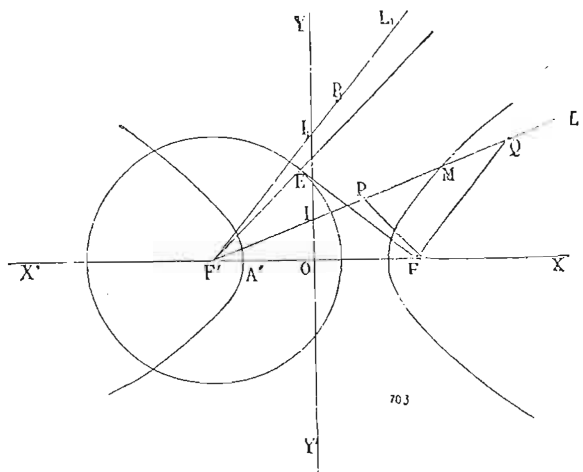


Fig. 709.

IL, la différence de ses distances aux points F' et F va sans cesse en augmentant.

Soit E le point de contact d'une tangente menée par F au cercle directeur de centre F', du même côté que OY par rapport à X'X. Si la droite F'L est dans l'angle FF'E, la portion IL de cette droite rencontre l'hyperbole en un point M; tous les points de la portion IM appartiennent à la région extérieure, tandis que tous les points de la portion ML appartiennent à la région intérieure. Or si un point mobile P va de I en M, sur IM, la différence PF′ — PF croît de o à $2a$, et par conséquent est inférieure à $2a$; si un point mobile Q s'éloigne de M, sur ML, la différence QF′ — QF croît à partir de la valeur $2a$, et par conséquent devient, et reste indéfiniment, supérieure à $2a$.

Si la droite $F'L_1$ n'est pas dans l'angle FF′E, la portion I_1L_1 de cette droite située dans l'angle XOY ne rencontre pas l'hyperbole; tout point P_1 de cette portion de droite appartient à la région extérieure. Or, si le point P_1 s'éloigne du point I_1 sur I_1L_1, la différence $P_1F' - P_1F$, d'abord nulle, augmente sans cesse, mais ne devient pas égale à $2a$; donc elle est toujours inférieure à $2a$.

La droite F′L, en tournant de 90° autour du point F′, viendra passer nécessairement par tous les points de l'angle XOY; donc le théorème est vrai pour tous les points de cet angle.

Comme l'hyperbole est symétrique par rapport à OX et par rapport à OY, de ce que le théorème est vrai pour tous les points de l'angle XOY, il résulte qu'il est vrai pour tous les points du plan.

Les deux propositions contenues dans l'énoncé du théorème étant contraires, les réciproques sont vraies. Donc :

1027. *Un point est à l'extérieur, ou à l'intérieur, d'une hyperbole selon que la différence de ses distances aux deux foyers est inférieure, ou supérieure, à l'axe transverse de cette hyperbole.*

§ VI. Intersection d'une droite et d'une hyperbole asymptotes; tangentes a l'hyperbole.

Problème.

1028. *Étant donnés les foyers F,F′ d'une hyperbole et la longueur $2a$ de l'axe transverse, déterminer les points de rencontre de la courbe et d'une droite donnée LL′.*

La solution de ce problème est la même que celle du problème semblable concernant l'ellipse. Soit en effet M un point commun à la droite LL′ et à l'hyperbole (*fig.* 710); si l'on

prend sur MF′, MR = MF, le point R appartient au cercle directeur de centre F′. Si le point R était connu, il suffirait pour avoir le point M de prendre le point de rencontre des droites F′R et LL′. Or, ce point R est le point de contact d'un cercle tangent au cercle directeur et passant par le point F et par le point F_1 symétrique du point F par rapport à LL′. On détermine donc le point R comme il a été expliqué au n° 317.

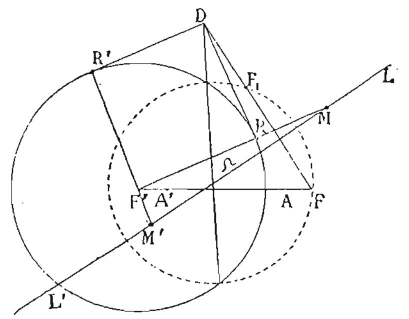


Fig. 710.

Le point F étant extérieur au cercle directeur de centre F′, on sait que, selon que le point F_1 est extérieur au cercle directeur, ou sur ce cercle, ou à l'intérieur de ce cercle, on obtient ainsi deux points distincts R, R′, ou deux points confondus avec le point F_1, ou le problème n'a pas de solution. En général, à un point R ainsi déterminé correspond un point M de la droite LL′; donc :

1029. *En général, selon que le point F_1, symétrique du point F par rapport à LL′, est extérieur au cercle directeur de centre F′, ou sur ce cercle, ou à l'intérieur de ce cercle, la droite LL′ rencontre l'hyperbole en deux points distincts, ou en deux points confondus en un seul, ou ne la rencontre pas.*

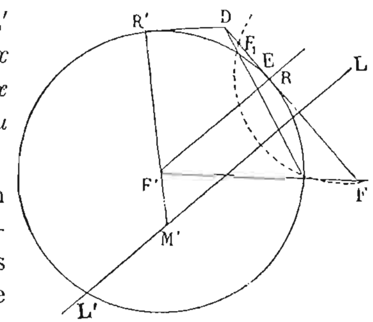


Fig. 711.

1030. Le cas où la direction de la droite LL′ est perpendiculaire à l'une des tangentes menées du point F au cercle directeur de centre F′ mérite d'être examiné à part. Supposons par exemple la droite LL′ perpendiculaire à la tangente FE (*fig.* 711), le point F_1 symétrique de F par rapport à LL′ est alors sur la tangente FE, et l'un des points R et R' se confond avec le point E. Donc un des points de rencontre de la droite LL' avec l'hyperbole se trouve rejeté à l'infini, tandis que l'autre reste à distance finie du point F'. Si le point F_1 se confond avec le point E, c'est-à-dire si la droite LL' est perpendiculaire à la droite FE, en son milieu (*fig.* 712), les deux points R et R' sont confondus avec le point E, et par suite, les deux points de rencontre de la droite LL' avec l'hyperbole sont tous les deux rejetés à l'infini. La perpendiculaire à la droite FE, en son milieu, passe par le milieu O de FF', c'est-à-dire par le centre de la courbe. Donc :

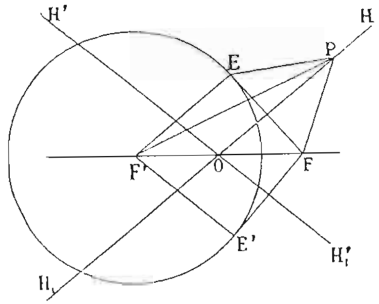


Fig. 712.

1031. *Si par le centre de l'hyperbole on mène les droites* HOH_1, $H'OH_1'$ *perpendiculaires aux tangentes* FE, FE' *menées du point* F *au cercle directeur,*

1° *Toute parallèle à l'une des droites* HOH_1, $H'OH_1'$ *a l'un de ses points de rencontre avec l'hyperbole rejeté à l'infini ;*

2° *Chacune des droites* HOH_1, $H'OH_1'$ *a ses deux points de rencontre avec la courbe rejetés à l'infini.*

Les droites H_1OH, $H_1'OH'$ sont tout entières à l'extérieur de l'hyperbole. Prenons en effet sur l'une d'elles, H_1OH par exemple, un point quelconque P. Ce point est équidistant de F et de E, de sorte que la différence entre PF' et PF est égale à la différence entre PF' et PE. Or cette dernière est moindre que F'E, ou $2a$, donc on a

$$\text{val. abs.}\,(PF' - PF) < 2a,$$

et le point P est extérieur à l'hyperbole.

La branche qui enveloppe le foyer F est tout entière dans l'angle HOH_1', et celle qui enveloppe le foyer F' est dans l'angle H_1OH' opposé au premier par le sommet.

* **1032**. Définition. On dit qu'une droite L'L est asymptote

à une branche infinie de courbe AML (*fig.* 713), si la distance MP d'un point de la courbe à la droite tend vers zéro quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche AML.

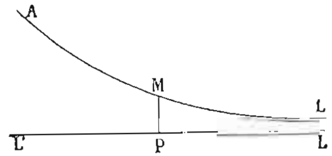


Fig. 713.

Théorème.

* **1033**. *Chacune des perpendiculaires* H_1OH, $H_1'OH'$ *menées par le centre* O *d'une hyperbole aux tangentes* FE, FE', *menées de l'un des foyers au cercle directeur qui a pour centre l'autre foyer, est asymptote à deux demi-branches de l'hyperbole.*

La droite H_1OH *est asymptote aux demi-branches* AMH, $A'M_1H_1$; *la droite* $H_1'OH'$ *est asymptote aux demi-branches* A'M'H', $AM_1'H_1'$ (*fig.* 714).

Prenons par exemple un point quelconque M de la branche AMH, il faut démontrer que la distance MP de ce point à OH tend vers zéro quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche AMH. Soit G le milieu de FE, et soient R, S, J, N les points de rencontre de la demi-droite F'M, prolongée indéfiniment dans le sens F'M, mais limitée au point F', avec le cercle directeur, avec FE, avec OH, et avec la perpendiculaire à la droite FS menée par son milieu K. Le point S est entre F et E; le point J, extérieur à l'hyperbole (1031), est entre F' et M. Quant au point N, on voit qu'il est sur le prolongement de F'S, l'angle F'SF étant obtus ; il en résulte qu'il est plus près de F que de F', car NF = NS < NF' ; de plus, il est à l'intérieur de l'hyperbole, car on a

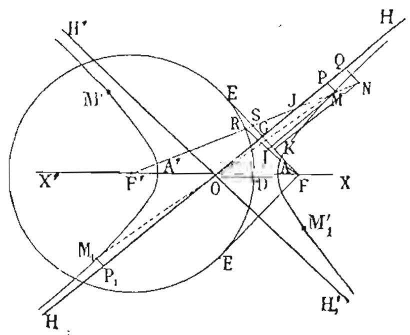


Fig. 714.

$$NF' - NF = NF' - NS = F'S > 2a;$$

donc ce point F est à l'intérieur de la branche qui enveloppe le point F, et, par conséquent, il est sur le prolongement de F'M dans le sens F'M. Le point M étant situé entre J et N, la distance

MP du point M à OH est moindre que la distance NQ du point N à la même droite; et, comme $NQ = KG$, on a $MP < KG$. Or, lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur la branche MH, le point R vient en E, par suite S vient aussi en E, et le point K, milieu de FS, vient se confondre avec le point G, milieu de FE. Donc enfin KG, et par suite MP qui est moindre que KG, tend vers zéro.

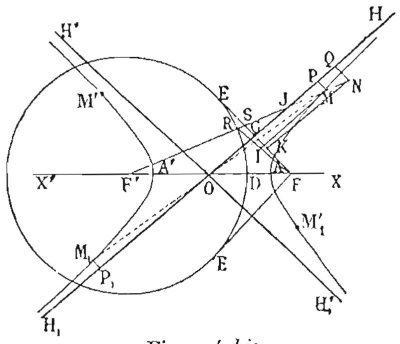


Fig. 714 *bis*.

Si M_1 est le symétrique du point M par rapport au centre O, la distance M_1P_1 de M_1 à OH_1 est égale à la distance MP de M à OH. Donc M_1P_1 tend vers zéro quand le point M_1 s'éloigne à l'infini sur M_1H_1, et la droite H_1OH est asymptote aux deux branches AMH, $A'M_1H_1$. De ce que l'hyperbole est symétrique par rapport à X'X, et de ce que la droite H'OH est symétrique de la droite H_1OH par rapport à la même droite, on conclut que la droite $H'OH'_1$ est asymptote aux deux autres demi-branches de l'hyperbole.

* **1034**. REMARQUE. Soit C le point de rencontre de l'asymptote OH avec le cercle décrit du point O comme centre, avec OF pour rayon (*fig.* 715); si l'on abaisse du point C les perpendiculaires CA et CB sur OX et sur OY, on a $OA = a$, et $OB = b$. En effet, les triangles rectangles OAC, F'EF, qui ont un angle aigu égal, $AOC = FF'E$, sont semblables; l'hypoténuse OC du premier est la moitié de l'hypoténuse FF' du second; donc

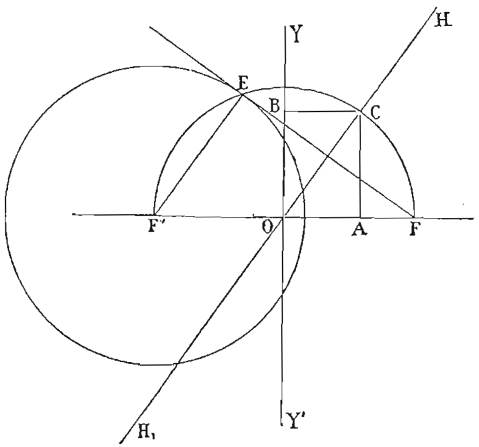


Fig. 715.

OA est la moitié de F'E, ou a, et AC est la moitié de FE. Or, dans le triangle rectangle FEF', on a

$$\overline{FE}^2 = \overline{FF'}^2 - \overline{F'E}^2 = 4c^2 - 4a^2 = 4b^2;$$

donc $FE = 2b$, et AC, ou son égal OB, est égal à b. Il suit de là que l'asymptote OH est la diagonale OC du rectangle construit sur les demi-axes OA, OB. De même l'asymptote OH est la diagonale du rectangle OAC'B' construit sur les demi-axes OA, OB' (*fig.* 716).

On appelle rectangle des axes d'une hyperbole le rectangle $CC'C'_1C_1$ formé en menant par les extrémités de chacun des axes des parallèles à l'autre. Cela étant, on peut dire que les asymptotes d'une hyperbole sont les diagonales du rectangle des axes.

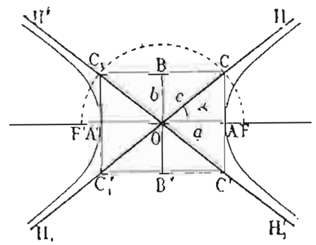


Fig. 716.

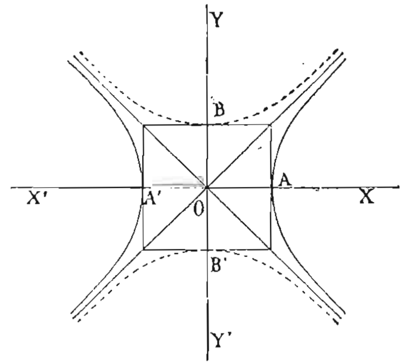


Fig. 717.

Si l'on désigne par 2α l'angle COC' des asymptotes comprenant une branche de la courbe, on a

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}.$$

* **1035**. HYPERBOLES CONJUGUÉES. On dit que deux hyperboles sont conjuguées lorsqu'elles ont mêmes axes, l'axe transverse de l'une étant l'axe non transverse de l'autre (*fig.* 717).

De ce qui précède, il résulte que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes asymptotes.

Théorème.

* **1036**. *La tangente à l'hyperbole est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs qui vont du point de contact aux deux foyers.*

La démonstration est la même que pour l'ellipse (997). Soit LL′ une sécante menée par le point M, et soit M′ le second point de rencontre de cette droite avec l'hyperbole (*fig.* 718). Faisons tourner la droite LL′ autour du point M de façon que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. Le point F_1 symétrique du point F par rapport à LL′ se meut sur le cercle décrit du point M comme centre, avec MF pour rayon. Il est extérieur au cercle directeur de centre F′ tant que le point M′ reste distinct du point M, et il vient se placer sur le cercle directeur, en R, quand le point M′ vient se confondre avec le point M. La droite LL′, bissectrice de l'angle FMF_1, se place, à la limite, sur la bissectrice de l'angle FMR.

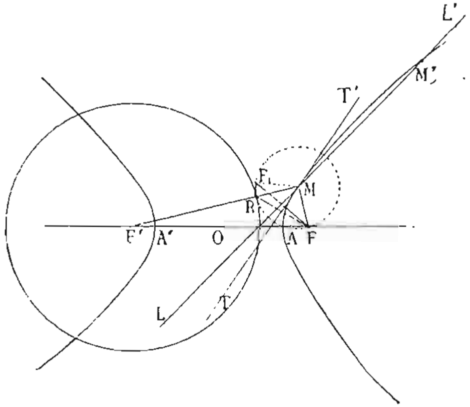


Fig. 718.

Il y a donc une tangente à l'hyperbole au point M, et cette tangente est la bissectrice de l'angle FMR; comme le rayon vecteur MF′ est de même sens que MR, on voit que la tangente au point M est bissectrice de l'angle FMF′ des rayons vecteurs qui vont du point M aux deux foyers.

* **1037**. Corollaire I. *La normale* MN *en un point de l'hyperbole est bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons vecteurs* MF, *et par le prolongement de l'autre dans le sens* F′M.

* **1038**. Corollaire II. *En un sommet de l'hyperbole, la normale coïncide avec l'axe passant par ce sommet, et la tangente est perpendiculaire à cet axe.*

1039. Corollaire III. *Tous les points d'une tangente à une hyperbole, sauf le point de contact, sont extérieurs à l'hyperbole.*

Soit TT′ la tangente à une hyperbole en un point M; prenons sur MF′ une longueur MR égale à MF (*fig.* 719). La longueur F′R est égale à la différence des rayons vecteurs MF′ et MF, c'est-à-dire à $2a$. La tangente TT′ bissectrice de l'angle FMR du triangle isocèle FMR est perpendiculaire à la base FR, en son milieu I. Par conséquent tout point P de la tangente est équidistant des points F et R. Il en résulte que la différence des distances PF′, PF, du point P aux deux foyers est égale à la différence des distances PF′, PR, et est par conséquent moindre que F′R, c'est-à-dire moindre que $2a$. Donc tout point P de la tangente autre que le point de contact est extérieur à l'hyperbole.

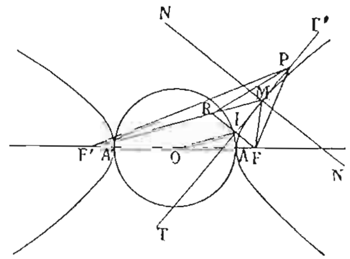


Fig. 719.

* **1040**. Corollaire IV. *Le lieu des projections d'un foyer d'une hyperbole sur les tangentes à cette courbe est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.*

En effet, la projection I du point F sur la tangente MT est, comme on vient de le voir, le milieu de FR (*fig.* 719); le point O étant le milieu de FF′, la droite OI est égale à la moitié de l'axe, c'est-à-dire à la moitié de l'axe transverse. OI étant constant et égal à a, le lieu du point I est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

* **1041**. Corollaire V. *Une ellipse et une hyperbole homofocales, c'est-à-dire qui ont les mêmes foyers, se coupent à angle droit.*

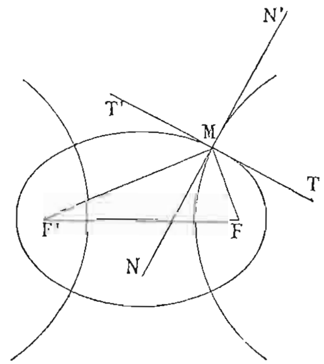


Fig. 720.

En effet, en chaque point commun aux deux courbes, la tangente à l'une est normale à l'autre (*fig.* 720).

Théorème.

* **1042**. *Le produit des distances des foyers d'une hyperbole à une tangente est constant et égal à* c² — a², a *étant le demi-axe transverse, et* c *la demi-distance focale.*

Même démonstration que pour l'ellipse (1002). Soient I, I′, les projections des foyers F, F′, sur une tangente MT à l'hyperbole (*fig.* 721); ces points sont sur le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre. Soit I'_1 le point de rencontre du prolongement de IF avec ce cercle; ce point est diamétralement opposé au point I′, puisque l'angle $I'II'_1$ est droit. On en conclut que les triangles OF′I′, OFI'_1 sont égaux, et, par suite, que F′I′ est égal à FI'_1. On a donc

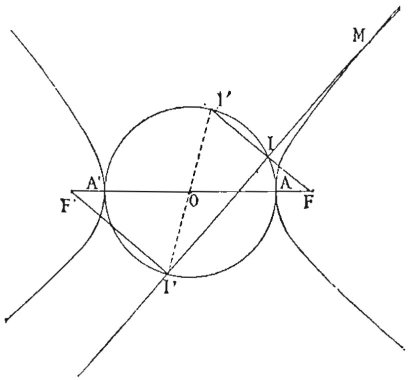


Fig. 721.

$$FI \times F'I' = FI \times FI'_1;$$

mais ce dernier produit est constant, et égal à FA×FA′, ou à $(c-a)(c+a)$, c'est-à-dire à c^2-a^2. Donc le théorème est démontré.

§ VII. Problèmes sur la tangente a l'hyperbole.

Problème.

* **1043**. *Mener une tangente à une hyperbole en un point* M *de cette ligne.*

On joint le point M aux deux foyers, et on mène la bissectrice de l'angle FMF′ formé par ces deux rayons (*fig.* 722).

* **1044**. Remarque I. Le procédé donné au n° 1020 pour construire l'hyperbole par points, à l'aide de l'un des cercles directeurs, donne, en même temps qu'un point de la courbe, la tangente en ce point.

On voit en effet (*fig.* 722) que la perpendiculaire à la droite FR, en son milieu I, est bissectrice de l'angle FMF′, et par conséquent est la tangente à l'hyperbole au point déterminé M.

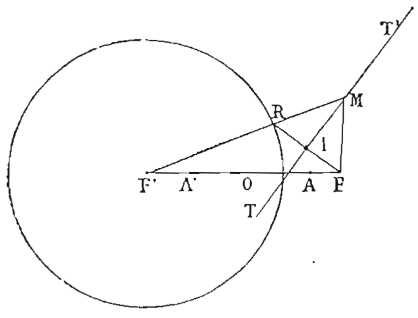


Fig. 722.

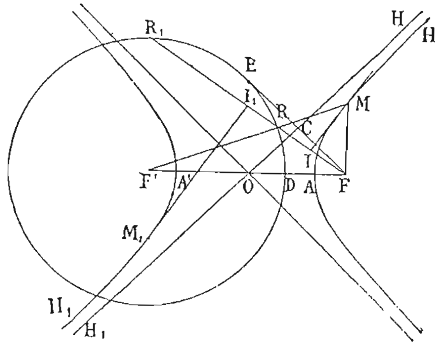


Fig. 723.

***1045**. Remarque II. La tangente en un point M de l'hyperbole se confond avec une des asymptotes quand le point s'éloigne à l'infini sur la courbe.

Soit par exemple un point M sur la branche AMH (*fig.* 723). A ce point correspond un point R du cercle directeur de centre F′ situé sur l'arc DE. La tangente en M est la perpendiculaire à la droite FR, en son milieu I. Lorsque le point M s'éloigne à l'infini sur la branche AMH, le point R vient se confondre avec le point E, et la tangente au point M, qui est la perpendiculaire à FR, en son milieu I, vient se confondre avec la perpendiculaire menée à FE par son milieu, c'est-à-dire avec l'asymptote H_1OH.

La même asymptote est la position limite de la tangente en un point M_1 quand ce point M_1 s'éloigne à l'infini sur la branche $A'M_1H_1$.

Problème.

1046. *Mener à une hyperbole une tangente parallèle à une direction donnée.*

La solution est la même que dans le cas de l'ellipse. Du point F on mène une perpendiculaire à la direction donnée L'L (*fig.* 724); soient R et R' les points où cette perpendiculaire rencontre le cercle directeur de centre F', et soient I le milieu de FR et I' le milieu de FR'. Les tangentes demandées sont les perpendiculaires à la droite FRR', aux points I et I', et les points de contact sont les points M et M' où ces tangentes rencontrent l'une la droite F'R, l'autre la droite F'R'.

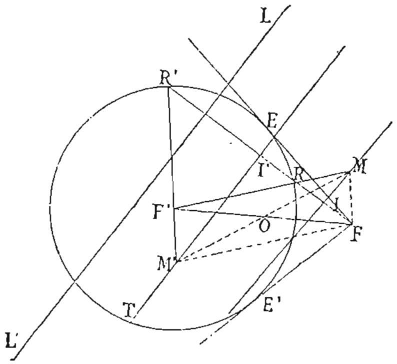


Fig. 724.

On démontrerait, absolument comme dans le cas de l'ellipse, que les points de contact M et M' des tangentes parallèles à une même direction sont des points de l'hyperbole symétrique par rapport au centre.

***1047**. Dans le cas de l'ellipse, le problème est toujours possible et admet deux solutions; il n'en est pas de même dans le cas de l'hyperbole. Dans ce cas, le problème n'est possible qu'autant que la perpendiculaire à la direction donnée, menée par le foyer F, est située dans l'angle EFE'. S'il en est ainsi, le problème admet deux solutions; si cette perpendiculaire se confond avec l'une des tangentes menées du point F au cercle directeur, par exemple avec FE, les deux tangentes à l'hyperbole, parallèles à la direction donnée, se confondent avec l'asymptote perpendiculaire à FE; l'un des points de contact est rejeté à l'infini sur la branche AMH, l'autre sur la branche $A'M_1H_1$.

Si la perpendiculaire à la direction donnée, menée par F, tombe en dehors de l'angle EFE', le problème proposé est impossible.

Problème.

***1048**. *Mener une tangente à une hyperbole par un point non situé sur la courbe.*

La solution est la même que dans le cas de l'ellipse. Soit P le point donné (*fig.* 725); supposons le problème résolu, et soit M le point de contact d'une tangente PM menée du point P à l'hyperbole. Si, sur MF', nous prenons MR = MF, le point R appartient au cercle directeur qui a pour centre F'; d'autre part, la tangente PM étant perpendiculaire à la droite FR, en son milieu, le point P est équidistant des points F et R, et, par conséquent, le point R appartient aussi au cercle décrit du point P comme centre, avec PF pour rayon.

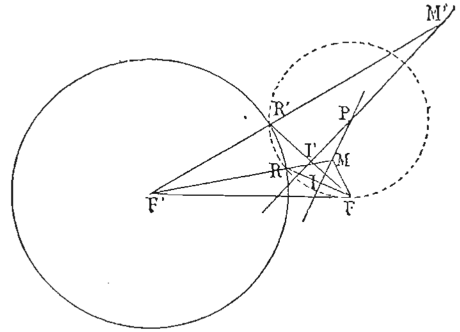


Fig. 725.

Menons donc le cercle directeur de centre F', et le cercle de centre P et de rayon PF, et soient R et R' leurs points de rencontre. Nous obtiendrons la tangente PM en menant du point P une perpendiculaire à la droite FR, et le point de contact M sera le point de rencontre de cette tangente et de la droite F'R. En menant du point P une perpendiculaire à la droite FR', nous obtiendrons une seconde tangente à l'hyperbole issue du point P, et le point de contact M' sera l'intersection de cette tangente et de la droite F'R'.

***1049**. Discussion. — Le problème admet deux solutions, une, ou n'en admet aucune, selon que les deux cercles décrits des points F' et P comme centres, le premier avec le rayon $2a$, le second avec le rayon PF, se coupent, sont tangents, ou ne se rencontrent pas. Pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que l'on puisse former un triangle ayant pour côtés la distance des centres PF', et les deux rayons PF et $2a$, c'est-à-dire que l'une des trois longueurs PF', PF, $2a$, soit moindre que la somme des deux autres et plus grande que leur différence. Faisons porter la discussion sur la longueur $2a$, qui est indépendante de la position du point P ; pour que les deux cercles se coupent, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \qquad 2a < PF + PF'$$
$$(2) \qquad 2a > \text{val. abs.}(PF - PF')$$

La première de ces conditions est remplie quelle que soit la position du point P. En effet, si le point P n'est pas sur la droite FF', les trois points F, F', P, sont les sommets d'un triangle et on a

$$FF' < PF + PF' ;$$

si le point P est sur la droite FF', on a : ou

$$FF' = PF + PF',$$

ou

$$FF' = \text{val. absolue de } (PF - PF') < PF + PF',$$

selon que ce point est entre les points F et F', ou sur le prolongement de la droite FF' dans un sens ou dans l'autre. Donc, quelle que soit la position du point P, on a

$$FF' \leqq PF + PF'.$$

Comme d'ailleurs $2a$ est moindre que FF', on a, *à fortiori*, dans tous les cas,

$$2a < PF + PF'$$

Quant à la seconde condition

$$2a > \text{val. abs. de}(PF - PF),$$

elle est remplie quand le point P est situé à l'extérieur de l'hyperbole, et elle n'est remplie que dans ce cas (1026).

De là trois cas à distinguer.

1° *Le point* P *est à l'extérieur de l'hyperbole.* Il y a un triangle dont les côtés sont égaux aux longueurs PF, PF', $2a$; les deux cercles décrits l'un de P comme centre avec PF pour rayon, l'autre de F' comme centre avec $2a$ pour rayon, se coupent en deux points distincts, R, R' ; le problème admet deux solutions.

2° *Le point* P *est sur l'hyperbole.* On a

$$2a = \text{val. abs. de } (PF - PF').$$

Le triangle dont les côtés sont PF, PF', $2a$, se réduit à une portion de droite ; les deux cercles sont tangents ; les deux points R, R', se confondent, et le problème n'admet qu'une solution.

3° *Le point* P *est intérieur à l'hyperbole.* On a

$$2a < \text{val. abs. de}(PF - PF').$$

Il n'y a pas de triangle ayant pour côtés PF, PF', $2a$, et, par suite, les deux cercles ne se rencontrent pas. Le problème est impossible.

Théorème.

1050. 1° *Les tangentes* PM, PM', *menées d'un point* P *à une hyperbole, font des angles égaux avec les droites* MF, MF', *qui vont de ce point aux deux foyers :* 2° *la droite* FP, *qui va de l'un des foyers au point* P, *est bissectrice de l'un des angles formés par les droites* FM, FM', *qui vont de ce foyer aux points de contact* M *et* M' *des tangentes issues du point* P.

La démonstration est la même que pour l'ellipse, mais il y a lieu de distinguer deux cas. Si les deux points appartiennent à des branches différentes (*fig.* 726), les droites PM, PM', font des angles égaux avec les droites PF, PF', et la droite FP est la bissectrice de l'angle formé par l'un des rayons

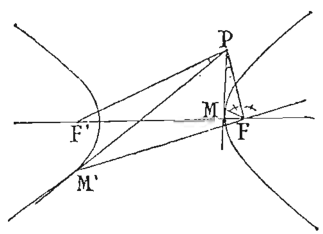


Fig. 726.

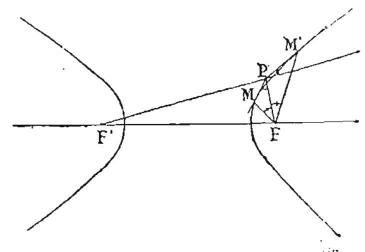


Fig. 727.

vecteurs FM, et par le prolongement de l'autre dans le sens opposé à FM'. Au contraire, si les deux points sont sur la même branche (*fig.* 727), les droites PM, PM', font des angles égaux avec PF, et avec le prolongement de PF' dans le sens opposé à PF' ; et la droite FP est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs FM, FM'.

Parabole.

§ VIII. Définition de la parabole, axe, sommet, construction de la courbe.

1051. Définition. On appelle *parabole* le lieu des points d'un plan équidistants d'un point fixe F appelé *foyer* et d'une droite fixe LL′ appelée *directrice*.

1052. Axe. De cette définition, il résulte que la perpendiculaire FD, abaissée du foyer sur la directrice, est un axe de symétrie de la parabole. Soient, en effet, M et M′ deux points symétriques par rapport à la droite FD (*fig.* 728), et soient MR, M′R′, les perpendiculaires abaissées des points M et M′ sur la directrice LL′; on a

$$MF = M'F \qquad \text{et} \qquad MR = M'R';$$

si donc $MF = MR$, on a aussi $M'F = M'R'$. En d'autres termes, à tout point M de la parabole correspond un autre point M′ de la courbe symétrique au premier par rapport à la droite FD.

La droite FD est appelée *axe* de la parabole.

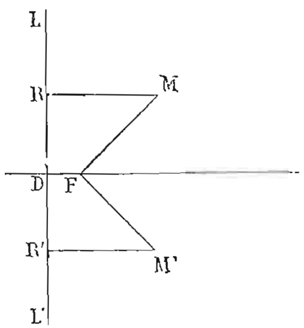


Fig. 728.

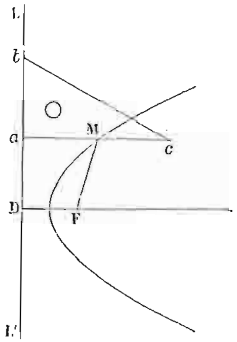


Fig. 729.

La distance d'un point de l'axe à la directrice se confond avec la distance de ce point au point D; il en résulte que le seul point de l'axe équidistant du foyer et de la directrice est le milieu A de FD. L'axe ne rencontre donc la parabole qu'au point A; ce point est appelé *sommet* de la parabole.

1053. Tracé d'un arc de parabole d'un mouvement continu. — On prend une équerre *abc*, et un fil dont la longueur est égale à un côté *ac* de l'angle droit de l'équerre (*fig.* 729).

On attache une extrémité du fil au point F, l'autre au point *c*, on applique l'équerre sur le papier, et on fait glisser le côté *ab* le long de la directrice LL′; puis, avec un crayon, on tend le fil de manière qu'une portion *c*M du fil soit appliquée contre le côté *ac* de l'équerre; la pointe du crayon décrit un arc de parabole. En effet, dans toutes les positions de l'équerre, la longueur du fil, $MF + Mc$, est égale au côté $ac = Ma + Mc$ de l'équerre; donc

$$MF = Ma,$$

et le point M appartient à la parabole qui a pour foyer le point F, et pour directrice la droite LL′.

Mais, quelque grande que soit l'équerre employée, il est clair qu'on n'obtiendra de cette façon qu'une portion de la courbe.

Construction de la parabole par points.

1054. Premier procédé. On cherche les points de la courbe situés sur une parallèle à la directrice; en déplaçant cette droite, on pourra obtenir tous les points de la courbe. Soit F le foyer d'une parabole, et soit LL′ la directrice (*fig.* 730). Par un point P quelconque de l'axe menons la parallèle à la directrice; la distance d'un point quelconque de cette droite à la directrice est égale à PD; donc les points de cette droite qui appartiennent à la parabole sont à une distance du point F égale à PD; ce sont donc les points M, M′ de rencontre de cette droite avec le cercle décrit du point F comme centre avec PD pour rayon. Les points M et M′, ainsi obtenus, sont symétriques par rapport à l'axe.

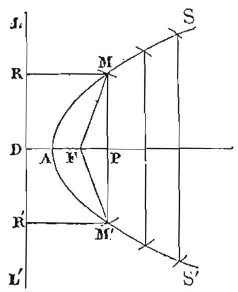


Fig. 730.

Pour que l'arc de cercle, décrit du point F comme centre, avec PD pour rayon, coupe la parallèle à la directrice menée par le point P, il faut et il suffit que PD soit plus grand que FP, c'est-à-dire que le point P soit, par rapport au point A, du même côté que le point F. On obtiendra donc, par ce moyen, autant de points de la parabole que l'on voudra, en déplaçant le point P sur la droite AF, dans le sens AF. Quand le point P est en A, le cercle est tangent à la droite, les deux points de rencontre sont confondus en A; quand le point P s'éloigne indéfiniment du point A, les points correspondants de la parabole, M et M', s'éloignent indéfiniment de l'axe. On voit ainsi que la parabole est formée d'une branche infinie SAS' composée de deux parties AS, AS' symétriques par rapport à l'axe.

1055. SECOND PROCÉDÉ. On cherche les points de la courbe situés sur une parallèle à l'axe. Par un point R de la directrice, menons la droite RK parallèle à l'axe (*fig.* 731), la distance d'un point de cette droite à la directrice étant égale à la distance de ce point au point R, un point commun à cette droite et à la parabole doit être équidistant des points R et F, et, par suite, doit être sur la perpendiculaire au milieu de RF.

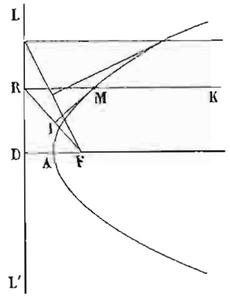


Fig. 731.

On voit donc que la droite RK, parallèle à l'axe, ne rencontre la parabole qu'en un seul point, et que ce point est à l'intersection de la droite RK et d'une perpendiculaire menée à la droite RF par son milieu I. En déplaçant le point R sur la directrice LL', on pourra ainsi obtenir tous les points de la courbe.

Une parabole partage le plan en deux régions; on appelle *région intérieure* celle qui contient le foyer; l'autre est appelée *région extérieure*. La directrice est tout entière dans la région extérieure.

Théorème.

1056. *La distance d'un point du plan d'une parabole au foyer de la courbe est inférieure, ou supérieure, à la distance de ce point à la directrice, selon que le point est dans la région intérieure, ou dans la région extérieure.*

Par un point P de l'axe, situé d'un côté ou de l'autre du point D, menons une parallèle H'H à la directrice, et sur cette ligne prenons un point Q quelconque (*fig.* 732 et 733); si ce point Q s'éloigne du point P, sur la droite H'H, sa distance au point F augmente sans cesse, tandis que sa distance à la directrice reste constante et égale à PD.

Si le point P est sur la portion AX de l'axe située à l'inté-

rieur de la parabole (*fig.* 732), la droite H'H a une portion MM' comprise à l'intérieur de la parabole et deux portions MH, M'H' situées à l'extérieur. Si le point Q s'éloigne du point P sur cette droite, dans le sens PH par exemple, la distance QF, d'abord moindre que PD, reste inférieure à PD jusqu'à ce que le point Q arrive en M sur la parabole; alors elle est égale à PD; puis le point Q continuant à s'éloigner du point P, la distance QF devient et reste supérieure à PD. Il en serait de même si le point Q s'éloignait du point P dans le sens PH'.

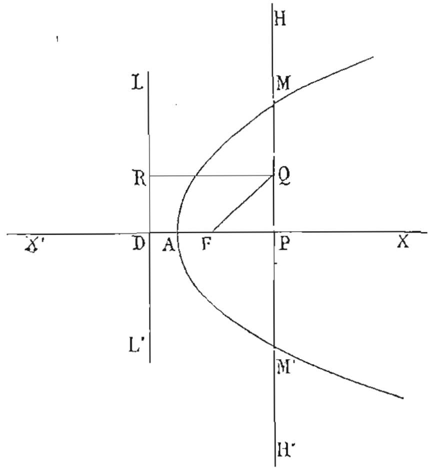


Fig. 732.

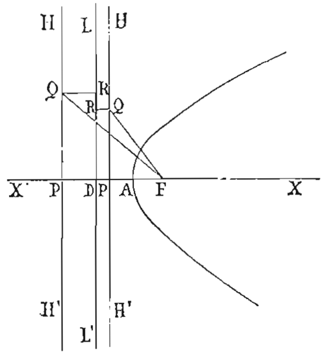


Fig. 733.

Si le point P est sur la portion AX' de l'axe extérieure à la parabole (*fig.* 732), soit entre A et D, soit au delà du point D, la droite HH' appartient tout entière à la région extérieure. La distance FP est supérieure à PD; si donc le point Q s'éloigne du point P, sur H'H, dans le sens PH, ou dans le sens PH', la distance QF augmente à partir d'une valeur supérieure à PD, et, par conséquent, reste indéfiniment supérieure à PD. Donc le théorème est démontré.

Les deux propositions contenues dans ce théorème étant contraires, les réciproques sont vraies. Donc :

1057. *Un point du plan d'une parabole est dans la région intérieure, ou dans la région extérieure, selon que sa distance au foyer est inférieure, ou supérieure, à sa distance à la directrice.*

§ IX. Intersection d'une droite et d'une parabole; tangente a la parabole.

Problème.

1058. *Étant donnés le foyer* F *et la directrice* LL′ *d'une parabole, déterminer les points de rencontre de la courbe et d'une droite donnée* HH′.

Soit M un point commun à la droite HH′ et à la parabole, et soit R le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur la directrice (*fig.* 734). Si le point R était connu, on obtiendrait le point M en prenant le point de rencontre de la droite HH′ et de la perpendiculaire à la directrice menée par R. Nous allons chercher à déterminer le point R. A cet effet, nous remarquons que MF étant égal à MR, si du point M comme centre, avec MF pour rayon, on décrit un cercle, ce cercle est tangent à la directrice au point R; or ce cercle tangent à la directrice passe par F; il a son centre sur HH′; donc il passe aussi par le point F_1 symétrique du point F par rapport à la droite HH′.

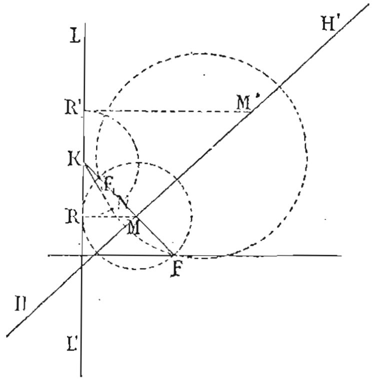


Fig. 734.

Donc, déterminer le point R revient à trouver le point de contact d'un cercle mené par les points connus, F et F_1, tangentiellement à la droite donnée LL′. A cet effet (315), on prend le point d'intersection K de la droite FF_1 avec la droite LL′; par ce point K on mène une tangente KN à un cercle quelconque passant par les points F et F_1; puis, de part et d'autre du point K, on porte sur LL′ les longueurs KR, KR′, égales à KN. Les points R et R′ ainsi obtenus sont les points qui satisfont aux conditions demandées. Selon que le point F_1 est du même côté que le point F par rapport à LL′, ou sur LL′, ou de l'autre côté de LL′, on obtient ainsi deux points distincts, R et R′, ou deux points confondus avec F_1, ou le problème n'a pas de solution. D'ailleurs, à chaque point R ainsi déterminé correspond un point M de la droite HH′ situé sur la parabole. Donc :

1059. *Selon que le point* F_1, *symétrique de* F *par rapport à* HH′, *est du même côté que* F *par rapport à la directrice* LL′, *ou sur la directrice, ou de l'autre côté de la directrice, la droite* HH′ *rencontre la parabole en deux points distincts, en deux points confondus en un seul, ou ne la rencontre pas.*

1060. Il faut considérer à part le cas où la droite HH′ est parallèle à l'axe. Dans ce cas, le point K est rejeté à l'infini; des deux points R, R′, l'un est le point où la droite HH′ coupe la directrice, l'autre est rejeté à l'infini. Donc, *toute parallèle à l'axe ne rencontre la parabole qu'en un point à distance finie.* Ce fait a déjà été établi n° 1055.

1061. Corollaire. *Une parabole est une courbe convexe, car elle ne peut être coupée par une droite en plus de deux points.*

Théorème.

1062. *La tangente* MT *en un point* M *d'une parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur* MF *qui va du point* M *au foyer et par la parallèle* MR *à l'axe menée par le même point* M, *à l'extérieur de la parabole.*

La démonstration est la même que dans le cas de l'ellipse et dans le cas de l'hyperbole.

Soient M et M′ les points de rencontre d'une sécante HH′ avec la parabole, et soit F_1 le symétrique du point F par rapport à HH′ (*fig.* 735), la sécante HH′ est bissectrice de l'angle FMF_1.

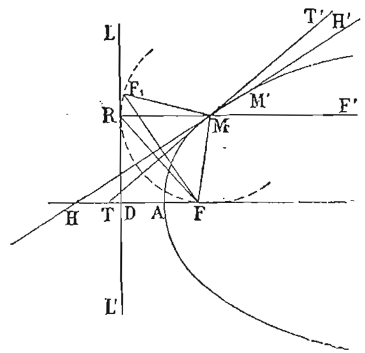


Fig. 735.

Faisons tourner la sécante autour du point M de façon que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. Le point F_1 se meut sur le cercle décrit de M comme centre, avec MF pour rayon, lequel est tangent à la directrice au pied R de la perpendiculaire abaissée du point M sur cette droite. Tant que le point M′ reste distinct du point M, le point F_1 reste distinct du point R; quand le point M′ vient se confondre avec le point M, le point F_1 vient se confondre avec le point R, et la droite HH′, bissectrice de l'angle FMF_1, vient, à la limite, se placer sur la bissectrice de l'angle FMR. Donc il y a une tangente à la parabole au point M, et cette tangente jouit de la propriété énoncée.

On voit aussi que les deux portions MT, MT′ de la tangente en M font des angles égaux TMF, T′MF′ avec le rayon vecteur MF et avec la portion MF′ de la parallèle à l'axe menée par M qui est intérieure à la parabole.

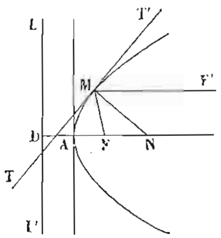


Fig. 736.

1063. Corollaire I. *La normale en un point de la parabole est bissectrice de l'angle formé par le rayon vecteur qui va de ce point au foyer et par la parallèle à l'axe menée par ce point à l'intérieur de la parabole.*

En effet, soit MN la normale à la parabole au point M (*fig.* 736). Les angles NMF et NMF′ sont égaux comme étant les compléments des angles égaux TMF et T′MF′.

1064. Corollaire II. *La normale au sommet de la parabole se confond avec l'axe, et la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.*

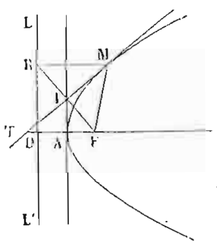


Fig. 737.

1065. Corollaire III. *La tangente* MT *en un point* M *d'une parabole est perpendiculaire au milieu de la droite* FR, *qui joint le foyer* F *de la parabole au pied* R *de la perpendiculaire abaissée du point* M *sur la directrice* (*fig.* 737).

En effet, le triangle RMF étant isocèle, la tangente MT, bissectrice de l'angle au sommet, est perpendiculaire sur la base FR, et la partage en deux parties égales.

1066. Corollaire IV. *Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur les tangentes à cette courbe est la tangente au sommet de la parabole.*

En effet, la projection du foyer F sur la tangente MT est le point I, milieu de FR; et le milieu de FR est situé sur la parallèle à DR menée par le milieu A de DF, c'est-à-dire sur la tangente au sommet de la parabole.

1067. Corollaire V. *Tous les points d'une tangente à une parabole, sauf le point du contact, sont en dehors de la parabole.*

Soit MT la tangente à une parabole au point M (*fig.* 738); sur cette tangente, prenons un point quelconque P, et menons des points M et P les perpendiculaires MR et PH à la directrice; la tangente MT étant perpendiculaire à la droite FR, en son milieu, on a PR = PF; or, l'oblique PR est plus grande que la perpendiculaire PH, donc, la distance PF est plus grande que la distance PH; et le point P, plus éloigné du foyer que de la directrice, est en dehors de la parabole.

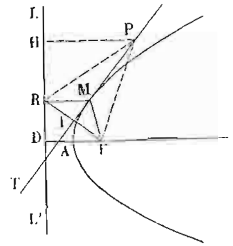


Fig. 738.

1068. *La sous-normale à la parabole est constante et égale à la distance du foyer à la directrice.*

On appelle *sous-normale* de la parabole la projection sur l'axe de la portion de la normale en un point de la courbe qui est comprise entre ce point et l'axe.

Soit PN la sous-normale correspondant à un point M d'une parabole (*fig.* 739); menons la perpendiculaire MR à la directrice, et joignons les points F et R. La droite FR est perpendiculaire à la tangente MT, et, par suite, les deux triangles rectangles MPN et RDF sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, savoir : MP = RD, PMN = DRF, et MPN = RDF; donc PN est égal à DF.

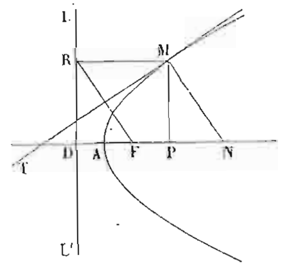


Fig. 739.

1069. La distance FD du foyer à la directrice, longueur qui suffit pour déterminer la grandeur d'une parabole, est appelée *paramètre* de la parabole.

Théorème.

1070. *Le sommet d'une parabole est le milieu de la sous-tangente.*

On appelle *sous-tangente* de la parabole la projection sur l'axe de la portion de la tangente en un point de la courbe qui est comprise entre ce point et l'axe.

Soit TP, la sous-tangente correspondant au point M d'une parabole (*fig.* 740). Dans le triangle TMF, les angles TMF et MTF sont égaux; car l'angle TMF est égal à l'angle RMT, et ce dernier angle est évidemment égal à l'angle MTF. Il en résulte que le triangle TFM est isocèle, et que la perpendiculaire FI, abaissée du sommet sur la base, tombe au milieu de la base. Par conséquent, la perpendiculaire abaissée du point I sur TP partage TP en deux parties égales. Or, cette perpendiculaire est la tangente au sommet A; donc le point A est le milieu de TP.

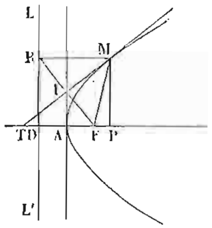


Fig. 740.

Théorème.

1071. *Le carré de la perpendiculaire* MP, *abaissée d'un point* M *d'une parabole sur l'axe, est proportionnel à la distance* AP *du sommet au point* P (*fig.* 741).

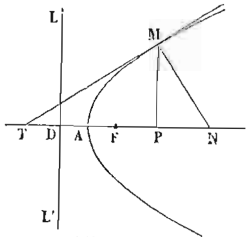


Fig. 741.

En effet, menons au point M la tangente MT et la normale MN; dans le triangle rectangle TMN, on a

$$\overline{MP}^2 = TP \times PN.$$

Or, PN est constant et égal à DF; TP est égal à 2AP, donc on a

$$\overline{MP}^2 = 2DF \times AP.$$

Si l'on appelle p le paramètre DF de la parabole, et si l'on représente par x et y les longueurs AP et MP qui déterminent la position du point M, on a, entre x et y, pour tous les points de la parabole, la relation

$$y^2 = 2px.$$

§ X. Problèmes sur la tangente a la parabole.

Problème.

1072. *Mener une tangente à une parabole par un point* M *de cette ligne*

Les théorèmes qui précèdent donnent plusieurs moyens simples de résoudre ce problème.

1° On mène le rayon vecteur MF et la droite MR perpendiculaire à la directrice; puis on mène la bissectrice de l'angle FMR (*fig.* 742). Cette droite est la tangente au point M.

2° On prend sur l'axe, à partir du point F et dans le sens FD, une longueur FT égale à MF, et on mène la droite TM. Cette droite est la tangente au point M.

3° On mène la perpendiculaire MP à l'axe, et on porte sur l'axe, à partir du point P, dans le sens DF, une longueur PN égale au paramètre DF; la droite MN est la normale au point M. Pour obtenir la tangente, il suffit d'élever au point M une perpendiculaire à la droite MN.

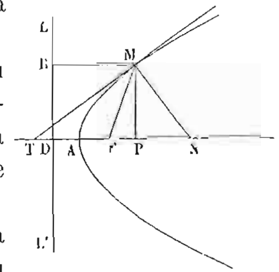


Fig. 742.

Problème.

1073. *Mener à une parabole une tangente parallèle à une droite donnée.*

Abaissons du foyer F (*fig.* 743) une perpendiculaire à la direction donnée HH′, et soient I et R les points de rencontre de cette droite avec la tangente au sommet et avec la directrice; puis par le point I menons une parallèle TIT′ à la direction donnée. Cette droite TIT′ est tangente à la parabole (1065), et le point de contact est le point de rencontre de cette droite et d'une parallèle à l'axe menée par le point R.

Réciproquement, si une parallèle à la direction donnée est tangente à la parabole, la projection du foyer sur cette tangente est le point I où la perpendiculaire à la direction donnée rencontre la tangente au sommet; cette tangente se confond donc avec la droite TIT′.

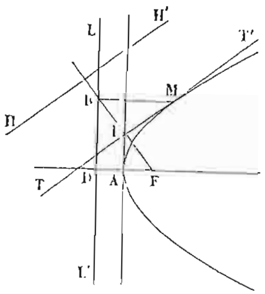


Fig. 743.

On voit ainsi qu'on peut mener à une parabole une tangente parallèle à une direction donnée, et qu'on n'en peut mener qu'une. Toutefois, cette construction suppose que la perpendiculaire à la direction donnée, menée par le foyer, rencontre la directrice, c'est-à-dire que la direction donnée n'est pas parallèle à l'axe de la parabole. Si la direction donnée est parallèle à l'axe, le point I est rejeté à l'infini, et, par suite la tangente elle-même est rejetée à l'infini.

Problème.

1074. *Mener une tangente à une parabole par un point non situé sur la courbe.*

Soit P le point donné, supposons le problème résolu, et soit M le point de contact d'une tangente PM menée du point P à la parabole donnée (*fig.* 744). Menons la perpendiculaire MR à la directrice; le triangle FMR est isocèle, et la tangente PM, bissectrice de l'angle au sommet FMG, est perpendiculaire au milieu de la base RF, et, par conséquent, PR est égale à PF. Du point P comme centre, avec PF pour rayon, décrivons une circonférence, et soient R et R′ les points où cette circonférence rencontre la directrice.

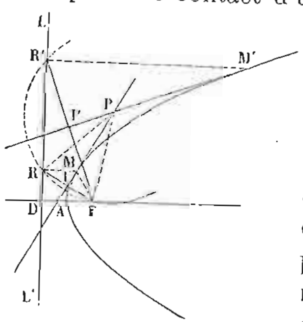


Fig. 744.

Nous obtiendrons la tangente PM en abaissant du point P une perpendiculaire sur la droite FR, et le point de contact M de cette tangente est à l'intersection de cette ligne et d'une parallèle à l'axe menée par le point R.

En abaissant de même du point P une perpendiculaire sur la droite FR′, nous obtiendrons une seconde tangente à la parabole issue du point P, et le point de contact M′ sera à l'intersection de cette tangente et de la parallèle à l'axe menée par le point R′.

1075. Discussion. Nous avons supposé que le cercle décrit du point P comme centre, avec PF pour rayon, rencontre la directrice en deux points; cela a lieu tant que le point P est plus près de la directrice que du foyer, c'est-à-dire, tant que le point P est extérieur à la parabole. Si le point P est sur la parabole, le cercle PF devient tangent à la directrice, les points R et R′ se confondent en un seul, et le problème n'admet plus qu'une solution.

Si le point P est à l'intérieur de la parabole, le cercle PF ne rencontre pas la directrice, et par suite le problème est impossible, ce qui, d'ailleurs, est évident, puisqu'une tangente à une parabole ne pénètre pas à l'intérieur de la courbe.

Théorème.

1076. 1° *Les tangentes* PM *et* PM′, *menées à une parabole par un point* P, *font des angles égaux* MPF, M′PF′ *avec la droite* PF *et avec la parallèle à l'axe* PF′ *menée par le point* P *et dirigée vers la courbe*; 2° *la droite* PF, *qui joint le point* P *au foyer* F, *est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs* FM *et* FM′, *qui vont du foyer au point de contact des tangentes issues du point* P.

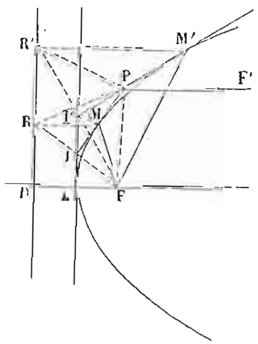


Fig. 745.

1° En effet, soient I et I′ les projections du foyer F sur les tangentes issues du point P (*fig.* 745); ces points sont situés sur la tangente au sommet A de la parabole. Le quadrilatère PFII′ est inscriptible, parce que les angles FIP et FI′P sont droits; par conséquent les angles IPF, II′F sont égaux comme étant inscrits dans un même segment de cercle; d'ailleurs l'angle II′F est égal à l'angle M′PF′, parce que ces deux angles ont les côtés respectivement perpendiculaires. Donc, les angles MPF et M'PF' sont égaux.

2° Soient MR et M'R' les perpendiculaires abaissées des points M et M' sur la directrice. La droite PI étant perpendiculaire sur le milieu de FR, la longueur PF est égale à PR; de même, PI' étant perpendiculaire sur le milieu de FR', la longueur PF est aussi égale à PR'. On en conclut que les triangles PFM et PRM sont égaux, ainsi que les triangles PFM' et PR'M', et, par suite, que les angles PFM et PFM' sont respectivement égaux aux angles PRM et PR'M'. Or, les angles PRM et PR'M' sont égaux, comme compléments des angles égaux PRR' et PR'R; donc, les angles PFM et PFM' sont égaux.

§ XI. Parabole considérée comme limite d'une ellipse ou d'une hyperbole.

Théorème.

1077. *Une parabole peut être considérée comme la courbe limite que l'on obtient si, laissant fixes un foyer et le sommet de l'axe focal le plus voisin de ce foyer, soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, on transforme la courbe en éloignant indéfiniment du foyer fixe le second foyer.*

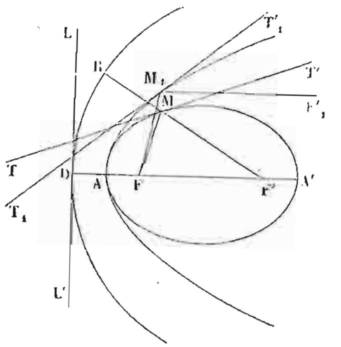


Fig. 746.

Soient d'abord F, F' les foyers d'une ellipse, et A le sommet de l'axe focal le plus rapproché du foyer F. Cette ellipse est le lieu des points équidistants du foyer F et du cercle directeur de centre F'; en particulier, le sommet A de l'ellipse est équidistant du point F et du point D où le cercle directeur de centre F' rencontre le prolongement, dans le sens F'A, de la droite F'A. Prenons, sur le prolongement de FA, AD = AF; puis imaginons que, laissant fixes le foyer F et le sommet A,

on éloigne indéfiniment du foyer F le foyer F', sur AF, dans le sens AF; l'ellipse se déforme. Le cercle directeur de centre F' passe toujours par le point D, et est tangent en ce point à la droite DL, perpendiculaire à AF; quand son centre F' s'éloigne à l'infini, ce cercle se confond avec la droite DL. L'ellipse, qui est le lieu des points équidistants du point F et du cercle directeur de centre F', se confond donc, à la limite, avec le lieu des points équidistants du point F et de la droite DL, c'est-à-dire avec la parabole qui a le point F pour foyer et la droite DL pour directrice.

* En second lieu, soient F, F' les foyers d'une hyperbole et A le sommet de l'axe focal le plus voisin du foyer F (*fig.* 746). La branche de cette hyperbole qui enveloppe le foyer est le lieu des points équidistants du foyer F et du cercle directeur de centre F'; en particulier, le sommet A de l'hyperbole est équidistant du point F et du point D où le cercle directeur de centre F' rencontre la droite F'F, entre F' et F. Si, laissant fixes les points F et A, nous éloignons indéfiniment le foyer F' du foyer F, sur FA, dans le sens FA, l'hyperbole se transforme; celle des deux branches qui enveloppe le foyer fixe F passe toujours par le point A, l'autre disparaît à l'infini. Le cercle directeur de centre F' passe toujours par le point D, et est tangent en ce point à la perpendiculaire DL à la droite AF; quand son centre F' s'éloigne à l'infini, ce cercle se confond avec la droite DL. La branche d'hyperbole qui enveloppe le foyer F est le lieu des points équidistants du point F et du cercle directeur de centre F'; elle se confond donc à la limite avec le lieu des points équidistants du point F et de la droite DL, c'est-à-dire avec la parabole qui a le point F pour foyer et la droite DL pour directrice.

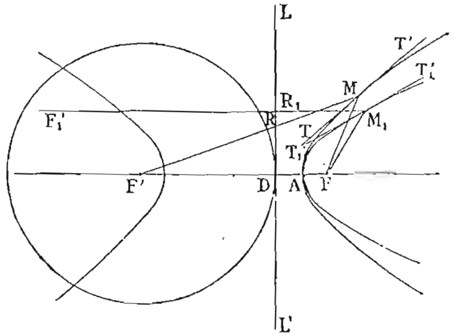


Fig. 747.

Cette manière d'envisager la parabole permet de transporter immédiatement à cette ligne certaines propriétés connues de l'ellipse. Ainsi, de ce que la tangente, en un point M d'une ellipse, fait des angles égaux TMF, T'MF' avec les rayons vecteurs qui vont du point de contact aux deux foyers, on conclut que la tangente, en un point M_1 d'une parabole, fait des angles égaux T_1M_1F, $T'M_1F'_1$ avec le rayon vecteur M_1F et avec la parallèle à l'axe $M_1F'_1$ menée par M_1 à l'intérieur de la parabole; car, si le point F' s'éloigne à l'infini sur la droite AF, dans le sens AF, le rayon vecteur MF' devient la parallèle à l'axe menée par M_1 à l'intérieur de la parabole.

On verrait de même que le théorème du n° 1009, concernant l'ellipse, peut être transporté à la parabole et donner ainsi le théorème du n° 1076.

Sections coniques.

§ XII. Propriété commune a l'ellipse, a l'hyperbole, a la parabole, pouvant servir de définition commune aux trois courbes.

Théorème.

1078. *Le lieu des points d'un plan tels que le rapport des distances de chacun de ces points à un point fixe F et à une droite fixe LL situés dans ce plan soit constant et égal à un nombre donné λ, est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, selon que λ est inférieur, égal, ou supérieur à 1.*

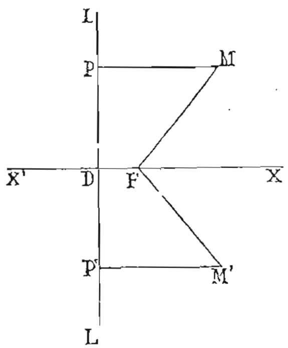


Fig. 748.

Le point F est un foyer de la courbe, la droite LL est appelée directrice.

Si λ est égal à 1, le lieu est évidemment une parabole qui a pour foyer le point F et pour directrice la droite LL.

Supposons λ différent de 1. On voit d'abord que le lieu est symétrique par rapport à la perpendiculaire FD menée du point F

sur la droite LL (*fig.* 748), car si deux points M, M' sont symétriques par rapport à cette droite, les distances MF, M'F sont égales; d'autre part les distances MP, M'P' de ces points à la droite LL sont aussi égales, et on a

$$\frac{MF}{MP}=\frac{M'F}{M'P'};$$

si donc l'un des points M, M', est un point du lieu, l'autre l'est aussi.

Nous distinguerons deux cas suivant que λ est inférieur, ou supérieur à 1.

1° Soit $\lambda < 1$. La distance d'un point de la droite FD à la directrice étant égale à la distance de ce point au point D, les points du lieu situés sur l'axe FD sont les deux points A, A', tels que $\frac{AF}{AD}=\frac{A'F}{A'D}=\lambda$ (*fig.* 749). L'un de ces points A est entre D et F, l'autre A' est sur le prolongement de DF, dans le sens DF. Cherchons les points du lieu situés sur une parallèle HH' à FD. La distance d'un point de HH' à la directrice est égale à la distance de ce point au point P où HH' rencontre LL; donc les points cherchés sont les points de la droite HH', tels que le rapport de leurs distances aux points F et P soit égal à λ. Or, le lieu des points dont le rapport des distances aux points F et P est égal à λ est un cercle dont le centre est sur FP (239). Pour obtenir ce cercle, on prend d'abord sur FP les points tels que le rapport de leurs distances à F et à P soit égal à λ; ces points sont évidemment les points de rencontre N, N', de la droite FP avec les parallèles à

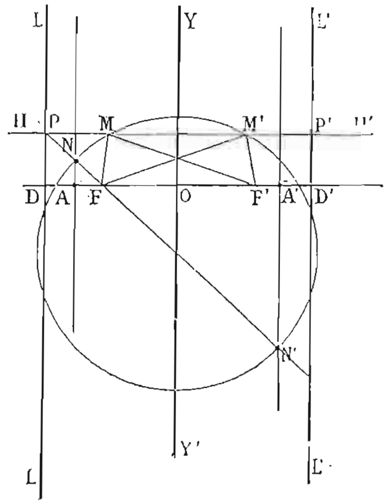


Fig. 749.

la directrice menées par A et par A′; puis, sur NN′ comme diamètre, on décrit un cercle. Les points de rencontre de ce cercle et de HH′ sont les points cherchés sur HH′. Suivant la position de la droite HH′, il peut y en avoir 2, 1, ou 0

Le milieu de NN′ est sur la parallèle à la directrice menée par le milieu O de AA′; donc le cercle décrit sur NN′ comme diamètre a son centre sur la parallèle OY à la directrice menée par le point O; donc les deux points M, M′ du lieu situés sur HH′ sont symétriques par rapport à OY; donc enfin le lieu est symétrique par rapport à OY.

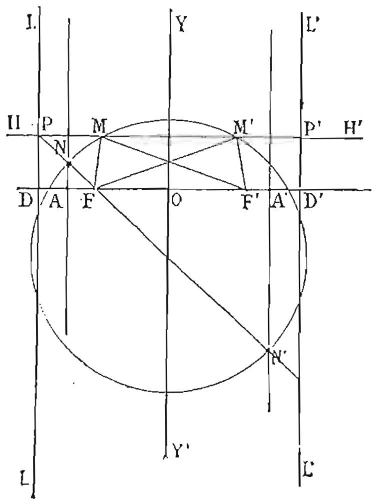


Fig. 749 *bis*.

Le lieu étant symétrique par rapport à OY, si l'on prend le point F′ symétrique du point F par rapport à OY, et la droite D′L′ symétrique de la droite DL par rapport à OY, les distances MF′, MP′ du point M au point F′ et à la droite D′L′ sont respectivement égales à M′F et à M′P, et par conséquent on a

$$\frac{MF'}{MP'} = \frac{M'F}{M'P} = \lambda,$$

ce qui veut dire que le lieu des points considérés est aussi le lieu des points tels que le rapport des distances de chacun d'eux au point F′ et à la droite D′L′ est constant et égal à λ.

Cela posé, il est facile de reconnaître que le lieu considéré est l'ellipse qui a pour foyers les points F et F′, et pour grand axe AA′.

A cet effet nous remarquerons que les points M, M′, sont entre les parallèles DL, D′L′; cela résulte de ce que le point P étant, sur la droite NN′, extérieur à NN′, les points où la droite HH′ rencontre le cercle décrit sur NN′ comme diamètre sont entre les per-

pendiculaires menées à PP′ par les points N et N′, c'est-à-dire entre les parallèles AN, A′N′, et *à fortiori*, entre les parallèles DL, D′L′.

Le point M étant, sur la droite PP′, entre P et P′, la somme MP + MP′ est constante et égale à PP′. Or on a

$$\lambda = \frac{MF}{MP} = \frac{MF'}{MP'} = \frac{MF + MF'}{MP + MP'},$$

et puisque MP + MP′ est constant, la somme MF + MF′ est constante aussi. Donc le lieu du point M est une ellipse qui a pour foyers les points F et F′. Cette somme constante est d'ailleurs égale à AF + AF′, ou à AF + A′F, c'est-à-dire à AA′; donc la longueur du grand axe est AA′.

2° Soit $\lambda > 1$. Il y a encore sur FD deux points du lieu, l'un A est compris entre F et D, l'autre A′ est sur le prolongement de FD, dans le sens FD (*fig.* 750). On obtiendra encore les points du lieu situés sur une droite HH′ parallèle à FD, en joignant le point F au point P où HH′ rencontre LL, en prenant les points N, N′ de rencontre de PF avec les parallèles à la directrice menées par A et par A′, en décrivant sur NN′ comme diamètre un cercle, et en prenant les points de rencontre M et M′ de ce cercle avec HH′. Ces points sont encore symétriques par rapport à la parallèle OY à la directrice menée par le milieu O de AA′. On en conclut, comme dans le cas précédent, que si l'on prend F′ symétrique de F par rapport à OY, et D′L′ symétrique de DL par rapport à OY, le lieu considéré est aussi le lieu des points tels que le

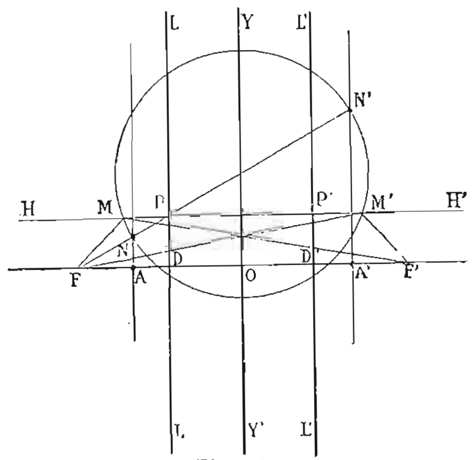


Fig. 750.

rapport des distances de chacun d'eux au point F′ et à la droite D′L′ est constant et égal à λ.

Cela posé, il est facile de reconnaître que le lieu cherché est l'hyperbole qui a les points F et F′ pour foyers, et AA′ pour axe transverse.

A cet effet, remarquons que les points M et M′ sont en dehors de la portion du plan comprise entre les parallèles DL, D′L′. Cela résulte de ce que le point P étant, sur la droite NN′, entre les points N et N′, les points de rencontre de la droite PP′ avec le cercle décrit sur NN′ comme diamètre sont en dehors de la portion du plan limitée par les perpendiculaires à PP′ menées par les points N et N′, c'est-à-dire par les parallèles AN, A′N′, et, *à fortiori*, en dehors de la portion du plan limitée par les parallèles DL, D′L′.

Soit M celui des deux points qui, par rapport à OY, est du même côté que le point F, on a MP′ — MP = PP′. Or, on a

$$\lambda = \frac{MF}{MP} = \frac{MF'}{MP'} = \frac{MP' - MP}{MF' - MF}$$

et la différence MP′ — MP étant constante, la différence MF′ — MF est constante. Donc le lieu du point M est l'une des branches d'une hyperbole qui a les points F et F′ pour foyers. Cette différence constante est d'ailleurs égale à AF′ — AF, ou à A′F — AF, ou à AA′; donc la longueur de l'axe transverse de cette hyperbole est AA′.

On verrait de même que le lieu du point M′ est l'autre branche de la même hyperbole.

* **1079.** On voit donc que l'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont des variétés d'une même ligne que l'on peut définir le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant. Cette ligne est appelée *conique* : la remarque du n° 1088 fera comprendre la raison de cette dénomination.

A chaque foyer d'une conique correspond une directrice. Le

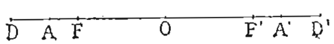


Fig. 751.

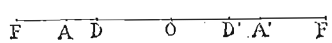


Fig. 752.

rapport constant λ des distances d'un point d'une conique à un

foyer et à la directrice correspondante est égal à l'excentricité de la conique. En effet, dans le cas de l'ellipse (*fig.* 751), on a

$$\lambda = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F - AF}{A'D - AD} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{c}{a};$$

et, dans le cas de l'hyperbole (*fig.* 752),

$$\lambda = \frac{AF}{AD} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{AF + A'F}{AD + A'D} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{c}{a}.$$

Théorème.

* **1080.** *Soient* M, M′ *deux points quelconques d'une conique, la droite qui joint un foyer* F *de cette conique au point* K *de rencontre de la sécante* MM′ *avec la directrice* D, *qui correspond au foyer* F, *est bissectrice de l'un des angles formés par les droites* FM, FM′.

Si les points M, M′, *appartiennent à une même branche de la conique, la droite* FK *est bissectrice de l'angle extérieur en* F *du triangle* MFM′ ; *si les points sont sur deux branches distinctes, la droite* FK *est bissectrice de l'angle* F *du triangle* MFM.′

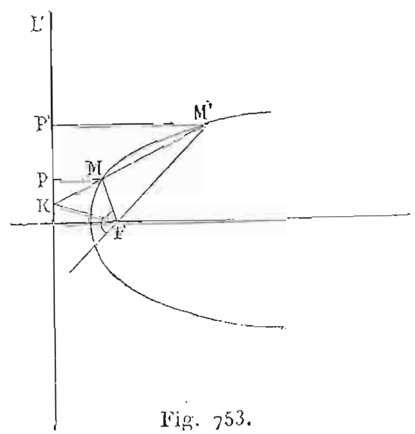


Fig. 753.

Soient P et P′ les projections des points M et M′ sur la directrice D (*fig.* 753 et *fig.* 754) ; on a

$$\frac{MF}{MP} = \frac{M'F}{M'P'};$$

d'où

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{MP}{M'P'};$$

d'autre part, les triangles KMP, KM'P' étant semblables, on a aussi

$$\frac{MP}{M'P'} = \frac{KM}{KM'};$$

donc

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{KM}{KM'},$$

De cette relation il résulte que la droite FK est bissectrice de l'un des angles en F formés par les droites FM, FM

Si la courbe est une ellipse ou une parabole, ou si, la courbe étant une hyperbole, les deux points M, M' sont sur une même branche de cette hyperbole, la portion M'M de la sécante est à l'intérieur de la courbe (*fig.* 749); comme la directrice D est tout entière à l'extérieur, le point K n'est pas sur la portion MM' de la sécante. Donc, dans ce cas, la droite FK n'est pas dans l'intérieur du triangle MFM', et par suite c'est de l'angle extérieur en F qu'elle est bissectrice. Au contraire, si les points M et M' appartiennent l'un à une branche, l'autre à l'autre branche d'une hyperbole (*fig.* 754), la portion MM' de la sécante est à l'intérieur de la courbe, et, comme la directrice D est aussi à l'intérieur, le point K est entre M et M'; dès lors la droite FK est bissectrice de l'angle F du triangle MFM'.

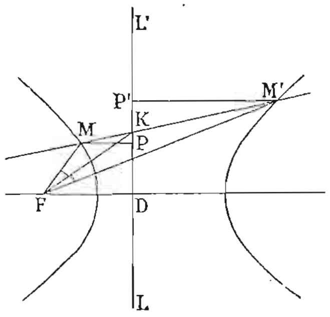


Fig. 754.

Problème.

* **1081**. *Construire une conique qui a pour foyer un point donné* F *et qui passe par trois points donnés* A, B, C.

Concevons d'abord une conique satisfaisant aux conditions de l'énoncé, et telle que les trois points donnés soient sur une

même branche (*fig.* 755). Le point de rencontre de la droite AB et de la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle AFB est un point de la directrice D qui correspond au foyer F. De même, le point de rencontre de la droite AC et de la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle AFC est un second point de la même directrice. Ayant ainsi déterminé deux points de la directrice D, on peut construire cette droite. Le rapport $\frac{AF}{AP}$ des distances du point A au foyer F et à la directrice D est l'excentricité de la conique.

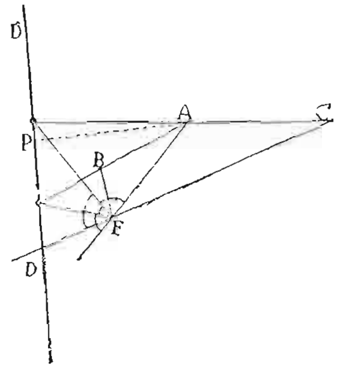


Fig. 755.

Connaissant un foyer, la directrice correspondante, l'excentricité, on déterminera aisément les sommets de l'axe focal et le second foyer. La conique ainsi déterminée sera d'ailleurs une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, selon que le rapport $\frac{AF}{AP}$ sera inférieur, égal, ou supérieur à 1.

On peut encore concevoir une conique satisfaisant aux conditions données et telle que les points A et B par exemple étant sur une branche, le point C soit sur l'autre (*fig.* 756). Le point de rencontre de la droite AB et de la bissectrice de l'angle extérieur en F du triangle AFB est un point de la directrice D qui correspond au foyer F; le point de rencontre de la droite AC et de la bissectrice de l'angle F du triangle AFC est un second point de la même directrice.

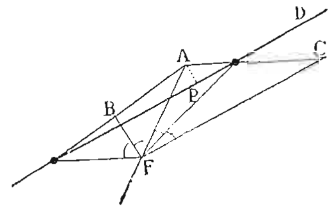


Fig. 756.

On peut donc construire la directrice D. Le rapport $\frac{AF}{AP}$ des distances du point A au foyer F et à la directrice correspondante D est l'excentricité de la conique. La conique, qui est nécessairement une hyperbole, se trouve ainsi déterminée.

En isolant successivement chacun des trois points donnés on trouve ainsi trois hyperboles distinctes.

Il y a donc quatre coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé; l'une d'elles peut être, suivant la disposition des données, une ellipse, une parabole, ou une hyperbole; les trois autres sont des hyperboles.

§ XIII. Sections planes d'un cone de révolution

Théorème.

*** 1082.** *Toute section faite dans un cône de révolution par un plan qui ne contient pas le sommet du cône est, ou une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole.*

Prenons pour plan de figure le plan mené par l'axe du cône perpendiculairement au plan sécant (*fig.* 757); ce plan de figure coupe le cône suivant les deux génératrices USU', VSV', dont les portions SU, SV sont sur une nappe, et les portions SU', SV' sur l'autre nappe; il coupe le plan sécant suivant la droite AA', laquelle coupe les génératrices USU', VSV' aux points A et A'. Inscrivons dans l'angle USV un cercle O tangent à AA', et soient C, C', F, les points de contact de ce cercle et des droites SU, SV, AA'. Si l'on fait tourner le plan de figure autour de l'axe du cône, la droite USU' engendre le cône; le point C engendre un cercle CNC', situé sur le cône; le cercle O engendre une sphère inscrite dans le cône le long du cercle CNC'; cette sphère est tangente au plan sécant au point F, car la droite OF est perpendiculaire au plan sécant. Soit DL la droite d'intersection du plan sécant et du plan du cercle CNC'. Nous allons montrer que le rapport $\frac{MF}{MQ}$

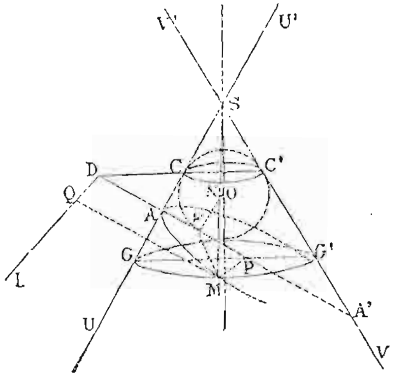


Fig. 757.

des distances d'un point quelconque M de la ligne d'intersection du cône et du plan au point F et à la droite DL est constant.

A cet effet, menons par le point M un plan perpendiculaire à l'axe du cône; ce plan coupe le cône suivant un cercle GMG', et le plan sécant suivant une droite MP perpendiculaire à AA'. Soit N le point de rencontre de la génératrice SM et du cercle CNC'; les deux droites MF et MN étant deux tangentes menées du point M à une même sphère, et F et N étant les points de contact de ces tangentes, on a $MF = MN$. Or, $MN = GC$: donc

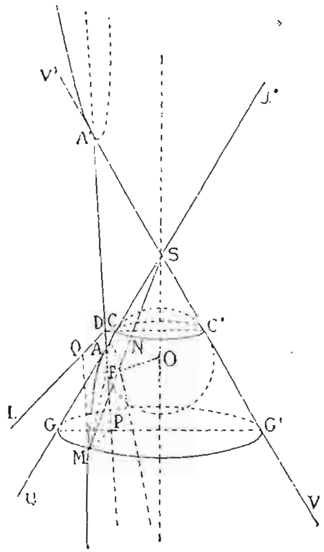


Fig. 758.

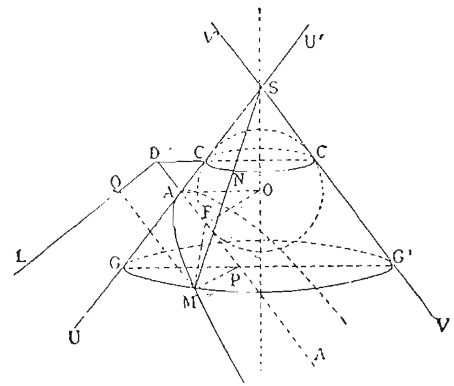


Fig. 759.

$MF = GC$. D'autre part, $MQ = PD$; donc le rapport $\frac{MP}{MQ}$ est égal au rapport $\frac{CG}{PD}$. Mais, de la similitude des triangles AGP, ACD, on déduit

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AG}{AP} = \frac{AC + AG}{AD + AP} = \frac{GC}{PD};$$

donc enfin

$$\frac{MF}{MQ} = \frac{AC}{AD}$$

Le rapport $\frac{AC}{AD}$ est constant. Donc la courbe d'intersection est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, selon que ce rapport est inférieur, égal, ou supérieur à 1.

Si nous supposons le point A sur SU, le rapport $\frac{AC}{AD}$ est inférieur ou supérieur à 1 selon que le point A′ est sur SV, ou sur SV′. En effet, soit d'abord A′ sur SV (*fig.* 757), l'angle D du triangle DC′A′, égal à DC′S — A′, est moindre que l'angle DC′S, lequel est égal à l'angle SCC′, et par suite, à l'angle DCA. L'angle D du triangle DCA étant moindre que l'angle C du même triangle, le rapport $\frac{AC}{AD}$ est moindre que 1.

Soit en second lieu A′ sur SV′ (*fig.* 758); l'angle ADC, égal à la somme des angles DC′A′ et A′, est plus grand que l'angle DC′S, lequel est égal à l'angle SCC′, et, par suite, égal à l'angle D du triangle ACD, le rapport $\frac{AC}{AD}$ est plus grand que 1.

Si la droite AA′ est parallèle à SV (*fig.* 759), les angles D et C du triangle DAC sont égaux, et le rapport $\frac{AC}{AD}$ est égal à 1.

* **1083**. Si les points A, A′ sont une même nappe du cône, le plan sécant coupe toutes les génératrices sur cette nappe ; si les points A, A′ sont l'un sur une nappe, l'autre sur l'autre, le plan sécant coupe à la fois les deux nappes du cône ; si la droite AA′ est parallèle à la génératrice VSV′, le plan sécant est parallèle au plan tangent au cône suivant cette génératrice. Donc :

La section faite dans un cône de révolution par un plan qui ne contient pas le sommet du cône est une ellipse si le plan coupe toutes les génératrices du cône sur une même nappe, une hyperbole s'il coupe les deux nappes du cône, une parabole s'il est parallèle à un plan tangent au cône.

* **1084**. Lorsque la section est une ellipse ou une hyperbole, il est facile de trouver le second foyer, et de vérifier que la somme, ou la différence, des distances d'un point de la courbe aux deux foyers est constante.

Prenons d'abord le cas où la section est une ellipse (*fig.* 760).

Dans le plan de figure, menons le cercle O′ exinscrit au triangle ASA′, et situé dans l'angle S ; soient H, H′, F′, les points de contact de ce cercle et des droites SU, SV, AA′. Quand le plan de figure tourne autour de l'axe du cône, le point H engendre un cercle HKH′ situé sur le cône, et le cercle O′ engendre une sphère inscrite dans le cône le long du cercle HKH′. Soit K le point où la génératrice du cône qui passe par le point M rencontre le cercle HKH′ ; les droites MF′ et MK sont deux tangentes à la sphère engendrée par le cercle O′, issues du même point M ; F′ et K sont les points de contact ; donc MF′ = MK. On a vu déjà que MF = MN ; donc on a

$$MF + MF' = MN + ML = NK.$$

Or NK = CH ; donc la somme MF + MF′ est constante, et la courbe d'intersection est une ellipse dont les points F et F′ sont les foyers. La seconde directrice est l'intersection D′L′ du plan sécant et du plan du cercle HKH′.

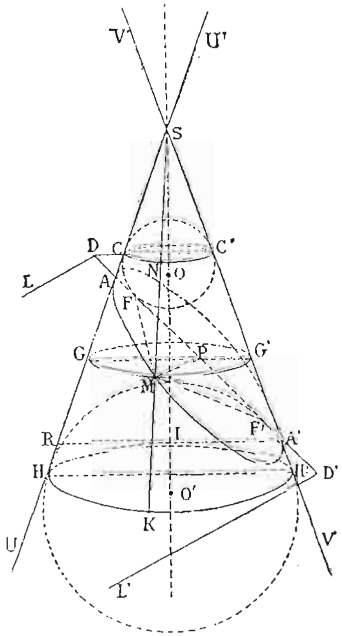


Fig. 760.

La distance focale FF′ est égale à la portion AR de la génératrice SU comprise entre le point A et la perpendiculaire à l'axe du cône menée par A′. On a en effet

$$BR = CH - AC - RH,$$

or

$$CH = AA', \quad AC = AF, \quad RH = A'H' = A'F',$$

donc

$$AR = AA' - AF - A'F' = FF'.$$

Considérons de même le cas de l'hyperbole (*fig.* 761). Inscrivons dans l'angle U′SV′ un cercle O′ tangent à la droite AA′ et soient H H′, F′, les points de contact de ce cercle avec les droites SU′, SV', AA'. Le cercle O' en tournant autour de l'axe du cône engendre encore une sphère inscrite dans le cône suivant le cer-

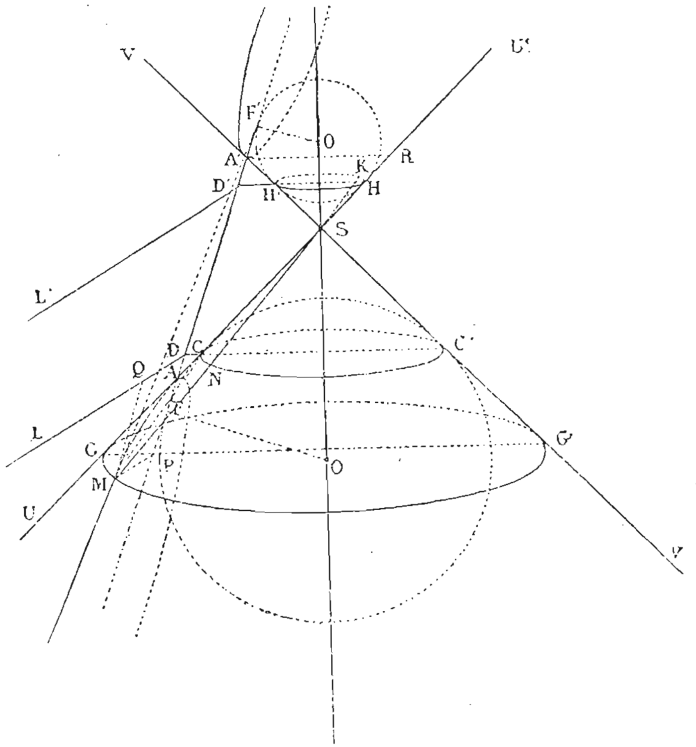


Fig. 761.

cle HKH', et tangente au plan sécant en F'. Soit K le point où la génératrice du cône qui passe par M rencontre le cercle HKH'. On a encore $MF' = MK$, $MF = MN$, d'où

$$MF' - MF = MK - MN.$$

Or, $MK - MN = CH$, et CH est une longueur constante; donc la courbe d'intersection du cône et du plan sécant est une hyperbole dont les foyers sont les points F et F'.

La seconde directrice est la droite D'L', intersection du plan sécant et du plan du cercle HKH'.

On démontrerait, comme dans le cas de l'ellipse, que la distance focale FF' est égale à la portion AR de la génératrice

USU' comprise entre le point A et la perpendiculaire à l'axe du cône menée par A'.

*1085. Remarque I. Les sections faites dans un cône de révolution par des plans parallèles sont des lignes homothétiques; le sommet du cône est le centre d'homothétie.

Si, par le sommet du cône, on mène un plan P' parallèle à un plan sécant P, selon que le plan P' coupe le cône suivant un point, suivant deux droites, ou qu'il est tangent au cône, la section du cône par le plan P est une ellipse, une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites suivant lesquelles le cône est coupé par le plan P', ou une parabole dont l'axe est parallèle à la génératrice suivant laquelle le plan P' est tangent au cône.

*1086. Remarque II. Si l'on imagine que le sommet d'un cône de révolution s'éloigne à l'infini sur l'axe tandis que le cercle de base du cône reste fixe, le cône se transforme en un cylindre de révolution.

On en conclut que toute section faite dans un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux génératrices est une ellipse.

Ce fait peut d'ailleurs être démontré directement; il suffit de répéter mot pour mot ce qui a été dit plus haut dans le cas du cône.

On reconnaîtra sans peine que, dans toute section plane d'un cylindre de révolution, le petit axe est égal au diamètre du cylindre.

On sait que les sections faites dans un cylindre par des plans parallèles sont des courbes égales.

Problème.

1087. *Placer une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

Nous supposerons le problème résolu, et nous prendrons encore pour plan de figure le plan mené par l'axe du cône perpendiculairement au plan sécant.

1° La courbe donnée est une ellipse. Si nous nous reportons à la figure 760, reproduite ici, nous voyons que dans le triangle AA'R nous connaissons deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, savoir : le côté AA' égal au grand axe de l'ellipse donnée, le côté AR égal à la distance focale de cette ellipse, et l'angle ARA' égal au complément du demi-angle au sommet du cône. Comme le côté AA' opposé à l'angle connu est plus grand que le côté adjacent AR, le triangle peut toujours être construit. Ce triangle une fois construit, on élèvera une perpendiculaire IS à A'R en son milieu I. Le cône engendré par la droite SAR en tournant autour de SI est égal au cône donné, et il est coupé par le plan mené par AA' perpendiculairement au plan de figure suivant une ellipse égale à l'ellipse donnée.

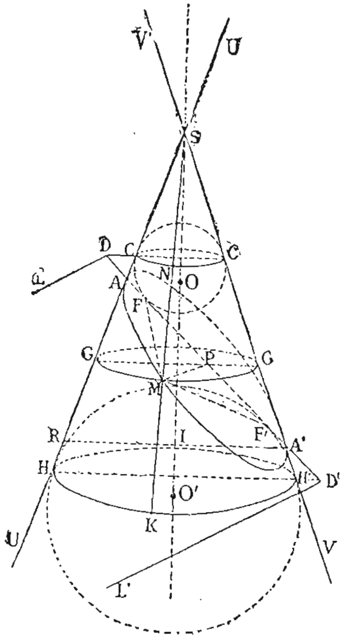


Fig. 760 *bis*.

Donc : *On peut toujours placer sur un cône de révolution donné une ellipse égale à une ellipse donnée.*

2° La courbe donnée est une hyperbole. Si nous nous reportons à la figure 761, reproduite ici, nous voyons que dans le triangle AA'R nous connaissons encore deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, savoir, le côté AA' égal à l'axe transverse de l'hyperbole donnée, le côté AR égal à la distance focale de cette hyperbole, et l'angle ARA' égal au complément de la moitié de l'angle au sommet du cône. Mais, dans ce cas, le côté AA' $= 2a$, opposé à l'angle connu, étant moindre que le côté adjacent A'R $= 2c$, le triangle ne peut être construit qu'autant que AA' est supérieur, ou au moins égal, à la distance du point A à la droite RA', c'est-à-dire, en désignant par 2θ l'angle au sommet du cône, que l'on doit avoir

$$2a > 2c \cos\theta$$

ou

$$\frac{a}{c} > \cos\theta.$$

D'autre part, si l'on désigne par 2α l'angle des asymptotes de l'hyperbole, on a (1034)

$$\cos\alpha = \frac{a}{c};$$

la condition de possibilité est donc que l'on ait

$$\cos\alpha > \cos\theta$$

$$\alpha < \theta,$$

c'est-à-dire que l'angle 2α des asymptotes de l'hyperbole doit

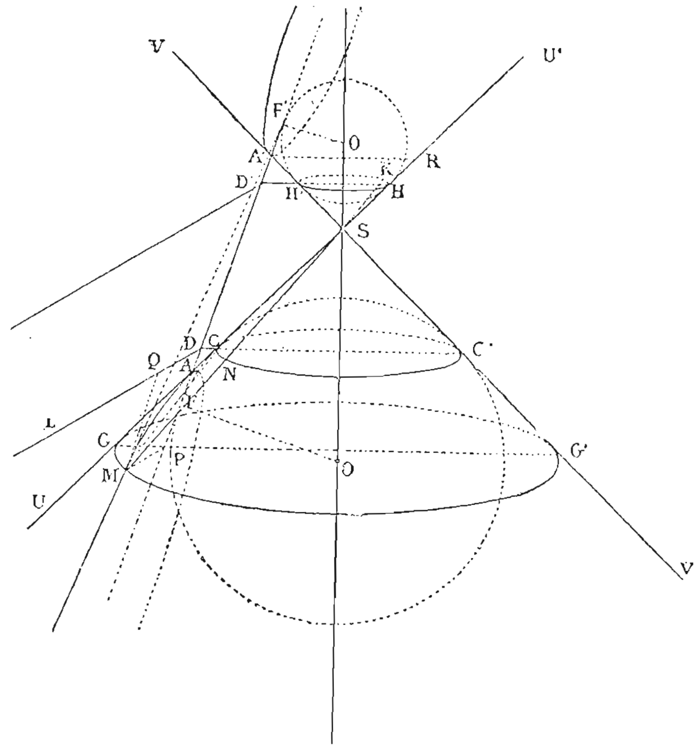


Fig. 761 *bis*.

être inférieur ou égal à l'angle 2θ au sommet du cône.

Si cette condition est remplie, on construira le triangle ARA' ;

on mènera à la droite A′R, par son milieu I, la perpendiculaire IS. Le cône engendré par la droite AS en tournant autour de IS est égal au cône donné, et ce cône est coupé par le plan mené par AA′ perpendiculairement au plan de figure suivant une hyperbole égale à l'hyperbole donnée. Donc :

Pour qu'une hyperbole donnée puisse être placée sur un cône de révolution donné, il faut et il suffit que l'angle des asymptotes de la courbe soit inférieur ou égal à l'angle au sommet du cône.

3° La courbe donnée est une parabole. Si nous nous reportons à la figure 759, reproduite ici, nous remarquons que le centre O du cercle tangent à SU, SV, AA′, est sur la bissectrice de l'angle SAA′. Dans le triangle rectangle AFO, on connaît le côté AF égal au demi-paramètre de la parabole donnée, et l'angle OAF égal au complément du demi-angle au sommet du cône; on peut donc construire ce triangle. Ce triangle construit, on mènera la droite AS faisant avec AO un angle égal à l'angle OAF, et on élèvera au point O la perpendiculaire OS au côté AO. Le cône engendré par la droite SA, en tournant autour de SO, est égal au cône donné, et ce cône est coupé suivant une parabole égale à la parabole donnée par le plan mené par AF perpendiculairement au plan de figure. Donc :

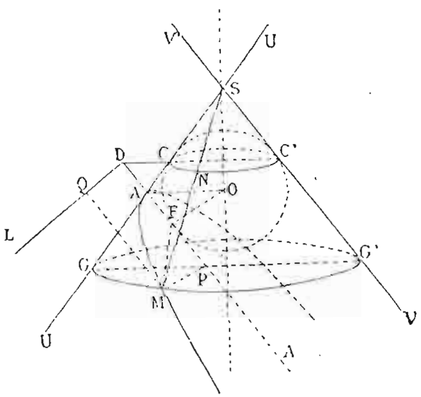


Fig. 759 *bis*.

On peut toujours placer sur un cône de révolution donné une parabole égale à une parabole donnée.

* **1088**. Remarque. De ce qui précède il résulte que toute ellipse, toute hyperbole, toute parabole peut être considérée comme la section d'un cône de révolution par un plan, de là le nom de *section conique*, ou plus simplement *conique*, employé pour désigner une quelconque de ces trois courbes.

§ XIV. Sections antiparallèles a la base d'un cone oblique a base circulaire.

* **1089**. On dit que deux droites AB, CD, inscrites dans un angle ROS sont *antiparallèles* quand l'angle OAB de AB avec RO est égal à l'angle ODC de DC avec SO (*fig*. 762); cette condition remplie, l'angle OBA de BA avec SO est nécessairement égal à l'angle OCD de CD avec RO. Les quatre points A, B, C, D, sont sur un même cercle; car les points A et D, par exemple, sont, d'un même côté par rapport à BC, sur l'arc d'un segment capable de l'angle OAB décrit sur BC. Réciproquement, deux cordes AB, CD, d'un même cercle, inscrites dans l'angle ROS sont antiparallèles, car les angles OAB, ODC sont égaux comme inscrits dans un même segment de cercle.

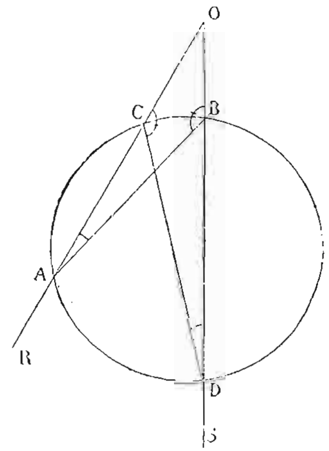


Fig. 762.

Théorème.

* **1090**. *Toute section d'un cône oblique à base circulaire antiparallèle à la base est un cercle.*

Soit S le sommet d'un cône oblique dont la base est un cercle ARB (*fig*. 766); on appelle *plan principal* de ce cône le plan SAB perpendiculaire au plan du cercle de base mené par la droite qui joint le sommet S au centre O du cercle de base, et on dit qu'une *section* est *antiparallèle à la base* quand son plan est perpendiculaire au plan principal du cône et a pour trace sur le plan principal une droite CD antiparallèle à la trace AB du plan du cercle de base sur le plan principal, par rapport à l'angle ASB. Cela posé, il s'agit de démontrer que toute section CMD antiparallèle à la base est un cercle.

Par un point M quelconque de la section menons un plan parallèle au plan du cercle de base. Ce plan coupe le plan principal suivant une droite A′B′ parallèle à AB, le plan de la section antiparallèle suivant une droite MP perpendiculaire aux droites A′B′ et CD, et le cône suivant un cercle dont A′B′ est le diamètre. Dans ce cercle, on a

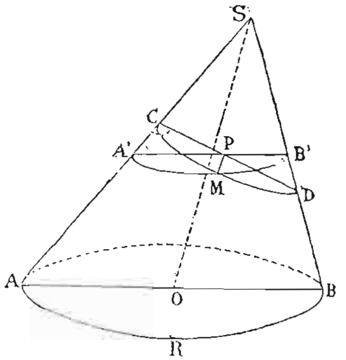


Fig. 763.

$$\overline{MP}^2 = PA' \times PB';$$

d'autre part, les triangles PA′C, PDB′, qui ont les angles égaux chacun à chacun, sont semblables. et on a

$$\frac{PA'}{PD} = \frac{PC}{PB'},$$

d'où

$$PA' \times PB' = PC \times PD;$$

donc

$$\overline{MP}^2 = PC \times PD,$$

ce qui prouve que la courbe CMD est un cercle décrit sur CD comme diamètre.

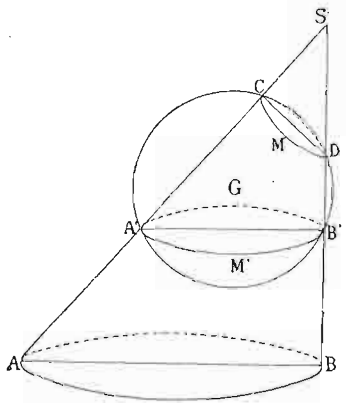


Fig. 764.

* **1091**. Corollaire. *Deux sections planes d'un cône oblique à base circulaire, l'une A′M′B′ parallèle à la base, l'autre CMD antiparallèle à la base, sont sur une même sphère* (*fig.* 764).

En effet, les quatre points A′, B′, C, D sont sur un cercle G, et la sphère qui a pour grand cercle le cercle G est coupée par les plans perpendiculaires au plan principal SAB menés par A′B′ et par CD suivant des

cercles qui ont respectivement A′B′ et CD pour diamètres. Or ces cercles sont les sections A′M′B′ et CMD; donc ces sections sont sur une même sphère.

Hélice.

§ XV. Définition de l'hélice, tangente, projection de l'hélice sur un plan parallèle aux génératrices du cylindre.

1092. Définition. On appelle *hélice* la ligne engendrée sur un cylindre par une droite située dans un plan qu'on enroule sur le cylindre.

Nous avons expliqué (791) comment la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire, AA′B′B, peut être développée sur un plan, et recouvrir un rectangle AA_1B_1B dont la base est égale à la circonférence de base du cylindre, et dont la hauteur est égale à la hauteur du cylindre.

Concevons qu'on enroule sur la surface du cylindre AA′B′B

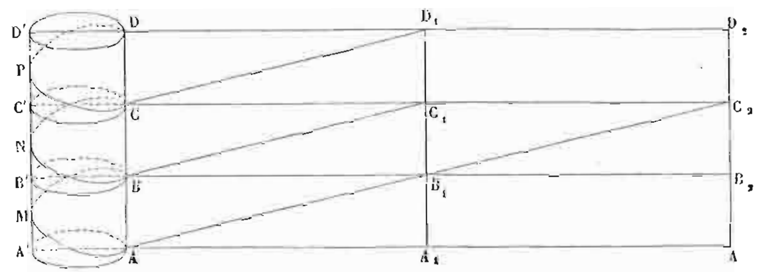


Fig. 765.

(*fig.* 765) le rectangle AA_1B_1B de façon que le côté AB du rectangle coïncide avec la génératrice AB du cylindre; les bases AA_1 et BB_1 du rectangle viennent s'appliquer sur les circonférences des bases AA′A et BB′B du cylindre, et le côté A_1B_1 du rectangle vient s'appliquer sur la génératrice AB; la diagonale AB_1 du rectangle se transforme sur le cylindre en un arc de courbe AMB qui est un arc d'hélice.

Concevons maintenant la surface du cylindre prolongée indéfiniment dans les deux sens, et, dans le plan du rectangle ABB_1A_1, formons les rectangles BCC_1B_1, CDD_1C_1... égaux au rectangle ABB_1A_1. Si nous enroulons sur la surface du cylindre le plan de ces rectangles, les diagonales BC_1, CD_1,.. engendrent sur le cylindre des arcs de courbe BNC, CPD,... évidemment égaux à l'arc AMB. Ces arcs de courbe forment sur la surface indéfinie du cylindre une courbe indéfinie dans les deux sens, qui est une *hélice*.

La portion d'hélice AMB est une *spire;* la portion de génératrice AB, comprise entre deux spires consécutives, est le *pas* de l'hélice.

1093. On peut concevoir l'hélice entière comme engendrée par une droite indéfinie située dans un plan qu'on enroule sur le cylindre; car, si à la suite de AB_1 on prend sur la droite AB_1 des longueurs B_1C_2, C_2D_3,.., égales à AB_1, et si l'on enroule plusieurs fois successivement le plan du rectangle sur le cylindre, au premier tour, la portion AB_1 engendre la spire AMB; au second tour, la portion B_1C_2 engendre la spire BNC; au troisième tour, la portion C_2D_3 engendre la spire CPD, et ainsi de suite.

1094. Remarque. Sur la surface d'un cylindre, le plus court chemin entre deux points A et B est un arc d'hélice. Soit, en effet, AMB le plus court chemin (*fig.* 766); si l'on développe la surface d'un cylindre sur un plan, la ligne AMB se transforme en une ligne plane de même longueur $A_1M_1B_1$, qui, sur le plan, doit être le plus court chemin entre A_1 et B_1. Donc la ligne $A_1M_1B_1$ est droite, et, par suite, la ligne AMB est un arc d'hélice.

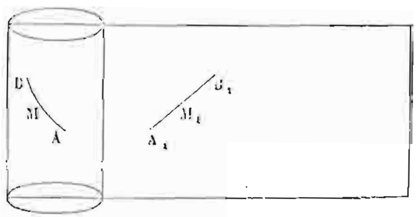


Fig. 766.

Théorème.

1095. *La distance* MP *d'un point* M *d'une hélice au plan de la base* AA' *est proportionnelle à l'arc de cercle* AP.

Prenons sur la base AA_1 du rectangle une longueur AP_1 égale à l'arc de cercle AP, et menons P_1M_1 parallèle à AB (*fig.* 767). Quand on enroule le rectangle sur le cylindre, la

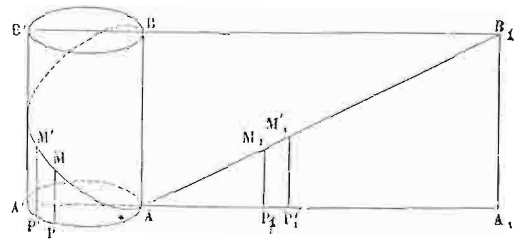


Fig. 767.

portion de droite AP_1 s'applique sur l'arc de cercle AP; la droite P_1M_1, parallèle à AB, vient s'appliquer sur la génératrice du cylindre qui passe par le point P, et le point M_1 vient se placer au point de rencontre M de cette génératrice et de l'hélice; donc M_1P_1 est égal à MP. Or, dans les triangles semblables AM_1P_1, et AA_1B_1, on a

$$\frac{M_1P_1}{AP_1} = \frac{A_1B_1}{AA_1},$$

donc

$$\frac{MP}{\text{arc } AP} = \frac{A_1B_1}{AA_1}.$$

Si l'on appelle r le rayon du cylindre, et h le pas de l'hélice, AA_1 est égal à $2\pi r$, AB est égal à h; et on a

$$\frac{MP}{\text{arc } AP} = \frac{h}{2\pi r},$$

d'où

$$MP = \frac{h}{2\pi r} \times \text{arc } AP.$$

1096. Réciproquement *Si une ligne* AMB *tracée sur un cy-*

lindre est telle que la distance MP, *d'un point* M *de la ligne au plan mené par un point* A *de cette ligne perpendiculairement à l'axe du cylindre, est proportionnelle à l'arc de cercle* AP, *la ligne* AMB *est une hélice.*

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que si l'on développe la surface latérale du cylindre sur un plan, la ligne AMB du cylindre devient sur le plan une ligne droite. Imaginons la surface cylindrique ouverte suivant l'arête AB, et développons la surface latérale du cylindre ABA'B' sur le rectangle ABA_1B_1. Prenons sur la courbe AMB un point quelconque M, et abaissons la perpendiculaire MP sur le plan du cercle AA'; sur AA_1 prenons AP_1 égal à l'arc de cercle A~~M~~P, et sur une perpendiculaire à AA_1 au point P_1, prenons P_1M_1 égal à PM. Lorsque l'on développe le surface latérale du cylindre sur le rectangle AA_1BB_1, la circonférence du cercle AA'A s'applique sur le côté AA_1 du rectangle, l'arc AP recouvre la portion AP_1 de ce côté la droite PM parallèle à AB s'applique sur P_1M_1, et le point M vient en M_1. Prenons sur la courbe AMB un second point quelconque M', et construisons de même le point M'_1 où vient se placer le point M' de la surface du cylindre après le développement.

On a par hypothèse

$$\frac{MP}{M'P'}=\frac{\text{arc } AP}{\text{arc } AP'},$$

et par conséquent, on a aussi

$$\frac{M_1P_1}{M'_1P'_1}=\frac{AP_1}{AP'_1}.$$

Donc les triangles AP_1M_1, et $AP'_1M'_1$, qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont semblables, et l'angle $M'_1AP'_1$ est égal à l'angle M_1AP_1. Il en résulte que le point M'_1 est sur la droite AM_1, et, par conséquent, qu'après le développement du cylindre, tout point de la ligne AMB vient se placer sur la droite AM_1. Donc la ligne AMB est une hélice.

1097. Définition. On appelle *sous-tangente* en un point M la projection PR, sur le plan de la base, de la portion de la tangente au point M qui est comprise entre le point de contact et le plan de la base (*fig.* 768).

Théorème.

1098. *La sous-tangente en un point d'une hélice est égale à la projection* AP *de l'arc d'hélice* AM *sur le cercle de base.*

Considérons l'hélice engendrée par la diagonale AB_1 du rectangle ABA_1B_1, quand on enroule ce rectangle sur le cylindre ABA'B' (*fig.* 768). Menons d'abord la sécante MM' et soit K le

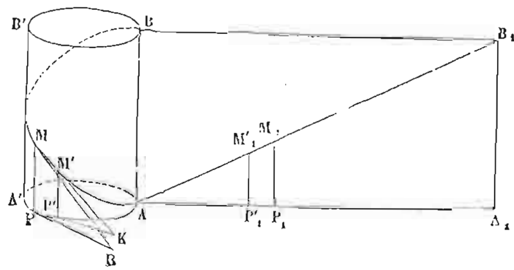


Fig. 768.

point où cette ligne rencontre le plan de la base du cylindre. Prenons sur AA_1 les longueurs AP_1 et AP'_1 égales aux arcs de cercle AP et AP', projections des arcs AM et AM' sur la base; par les points P_1 et P'_1 menons des parallèles à AB. On a : $P_1M_1=PM$, et $P'_1M'_1=P'M'$; or, d'après le théorème précédent,

$$\frac{MP}{\text{arc } AP}=\frac{M'P'}{\text{arc } AP'};$$

ou

$$\frac{MP}{AP_1}=\frac{M'P'}{AP'_1};$$

dans les triangles semblables MPK, M'P'K, on a

$$\frac{MP}{PK}=\frac{M'P'}{P'K},$$

donc

$$\frac{PK}{AP_1}=\frac{P'K}{AP'_1}.$$

Et on déduit de là

$$\frac{PK}{AP_1}=\frac{PK-P'K}{AP_1-AP'_1}=\frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}.$$

Concevons maintenant que la sécante MM′ tourne autour du point M de façon que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M. La projection PP′K de la sécante MM′K vient se placer sur la tangente en P au cercle de base; le rapport $\frac{\text{corde } PP'}{\text{arc } PP'}$ tend vers l'unité, et, par conséquent, le point K vient se placer, sur cette tangente, à une distance PR du point P égale à l'arc AP. Cela prouve d'abord que lorsque le point M′ vient se confondre avec le point M, la sécante MM′ tend à se placer dans une position bien déterminée MR, et, par conséquent, qu'il y a au point M une tangente à l'hélice, et que cette tangente est la droite MR, et, en second lieu, que la sous-tangente PR est égale à l'arc AP.

1099. COROLLAIRE. *La tangente en un point d'une hélice fait un angle constant avec la génératrice du cylindre.*

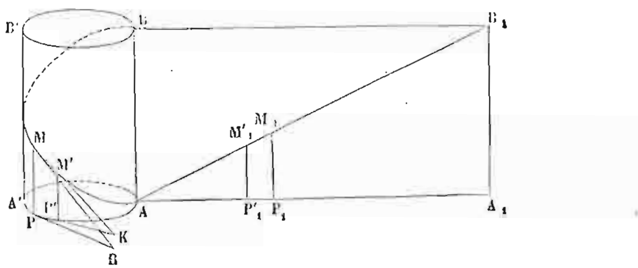


Fig. 769.

En effet, les triangles rectangles MPR et M_1P_1A (*fig.* 769) sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles P et P_1 égaux comme droits, MP égal à M_1P_1, et PR égal à P_1A ; donc l'an-

gle RMP que fait la tangente à l'hélice au point M avec la génératrice du cylindre est égal à l'angle AM_1P_1, ou à l'angle constant AB_1A_1.

Problème.

1100. *Déterminer la projection d'une spire d'hélice sur un plan parallèle aux génératrices du cylindre.*

Prenons pour plan horizontal le plan de la base *abcd* du cylindre, et, pour plan vertical, un plan perpendiculaire au plan horizontal qui coupe ce dernier suivant la droite LT (*fig.* 770). La surface du cylindre se projette tout entière horizontalement sur le cercle *abcd;* verticalement, cette surface se projette entre les perpendiculaires à la ligne de terre menées par les points *a* et *c*.

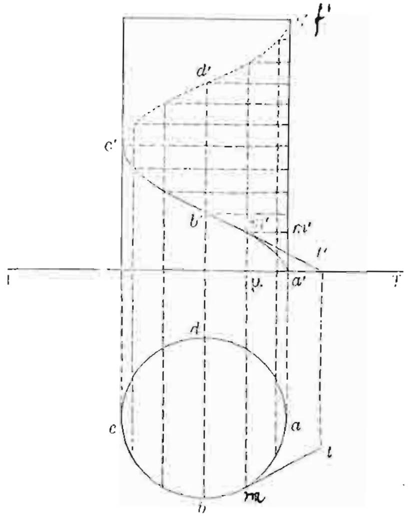


Fig. 770.

Proposons-nous de déterminer un certain nombre de points de la projection verticale d'une spire d'hélice tracée par le point *a* sur le cylindre, et ayant un pas égal à $a'f'$. Soient m, m' les projections d'un point M de cette hélice; la distance du point M au plan horizontal est égale à $m'\mu$, et le rapport de $m'\mu$ à la longueur de l'arc *am* est égal au rapport de $a'f'$ à la longueur de la circonférence de base.

D'après cela, pour obtenir les projections verticales d'un certain nombre de points de la courbe, on partage la circonférence de base *abcd*, et le pas de l'hélice $a'f'$, en un même nombre de parties égales; on prend sur la circonférence de base et sur $a'f'$ des points de division correspondants *m* et m'_1; puis on mène par le point *m* une perpendiculaire à la ligne de terre, et par le point m'_1, une parallèle à la ligne de terre, et on prolonge ces lignes jusqu'à leur point de rencontre m'. Le point m' ainsi obtenu est la projection verticale d'un point de l'hélice dont la projection horizontale est m.

Pour déterminer la tangente à l'hélice au point (m, m'), on prend, sur la tangente au cercle de base au point m, une longueur mt égale à l'arc de cercle am; cette ligne mt est la sous-tangente, et le point t est la trace horizontale de la tangente au point (m, m') de l'hélice. La projection verticale de ce point t est le pied de la perpendiculaire tt' abaissée du point t sur la ligne de terre, et la droite $t'm'$ est la projection verticale de la tangente demandée. Quant à la projection horizontale de la tangente, elle est évidemment située sur la ligne mt.

EXERCICES SUR LE LIVRE VIII.

Construire une conique connaissant :

1. Les foyers et un point;
2. Les foyers et une tangente;
3. Un foyer et trois tangentes;
4. Un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles;
5. Un foyer, un sommet de l'axe focal et une tangente;
6. Un foyer, un sommet de l'axe non focal et une tangente;
7. Les sommets de l'un des axes et un point;
8. Les sommets de l'un des axes et une tangente;
9. Le centre, la longueur de l'axe focal et deux tangentes;
10. Les deux foyers et la direction d'une asymptote;
11. Un foyer, une asymptote et la longueur de l'axe focal;
12. Les deux asymptotes et la longueur de l'axe focal, ou la distance focale;
13. Un foyer, une asymptote, une tangente;
14. Un foyer, la directrice correspondante et une tangente;

Construire une parabole connaissant :

15. Le foyer et deux points;
16. Le foyer et deux tangentes;
17. La directrice et deux points;
18. La directrice et deux tangentes;
19. Le foyer, une tangente et le point de contact;
20. La directrice, une tangente et le point de contact;
21. Deux tangentes et les points de contact;

22. Soit un triangle isocèle ABC, on fait varier la grandeur de l'angle B sans changer la longueur des côtés égaux AB et BC, et, laissant fixes le sommet A, on fait mouvoir le sommet C sur une droite AL. Cela posé, on demande le lieu décrit par un point M du côté BC.

23. Tout point d'un cercle directeur d'une ellipse est un sommet d'un triangle inscrit dans ce cercle directeur et circonscrit à l'ellipse (Concours académique. Poitiers).

24. On sait que la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse (1010). Démontrer que les projections de deux diamètres rectangulaires du cercle sont deux diamètres *conjugués* de l'ellipse, c'est-à-dire deux diamètres tels, que chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

25. Soit un triangle ABC, et soit O le milieu du côté BC. On mène une parallèle DE à la droite OA; soient D le point où elle rencontre la droite AB et E le point où elle rencontre la droite AC; on mène les droites BE, CD; soit M leur point de rencontre. Démontrer que, lorsque la droite DE se transporte parallèlement à OA, le point M décrit une ellipse pour laquelle OA et OB sont deux demi-diamètres conjugués. — Démontrer en outre que la droite qui joint le point M au milieu I de la droite DE est la tangente en M à l'ellipse lieu du point M (Rapprocher ce problème du problème n° 44 du livre III).

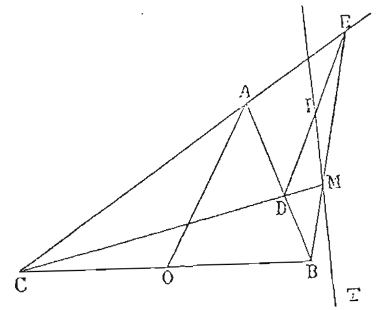


Fig. 771.

26. Dans une ellipse la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

27. Dans une ellipse l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

28. L'aire d'une ellipse dont les deux axes sont a et b est $\pi a\, b$.

29. Soient PM, PM' les tangentes menées d'un point quelconque P à une ellipse, ou à une hyperbole, et soient R et S les points où la corde des contacts MM' et la perpendiculaire à cette corde menée par le point P rencontrent l'axe non focal de la courbe. Démontrer que le cercle décrit sur RS comme diamètre passe par les deux foyers de la courbe.

30. Étant donnée une hyperbole, déterminer deux régions du plan telles que les tangentes à la courbe menées d'un point d'une région aient leurs points de contact sur une même branche, tandis que les tangentes menées d'un point de l'autre région aient leurs points de contact l'un sur une branche, l'autre sur l'autre.

31. Soient I, I' les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers F et F' d'une ellipse sur la tangente en un point quelconque M de cette courbe; démontrer que les droites FI' et F'I se coupent sur la normale à l'ellipse au point M', et que ce point de rencontre est le milieu de la portion de normale comprise entre le point M et l'axe focal. Que devient ce théorème quand on remplace l'ellipse par une hyperbole, ou par une parabole?

32. La portion d'une tangente mobile à une conique comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer de cette conique sous un angle constant.

33. Soient P, P', les points où une tangente à une ellipse, ou à une hyperbole, en un point quelconque de la courbe, rencontre les tangentes aux sommets A, A' de l'axe focal; démontrer que le cercle décrit sur PP' comme diamètre passe par les foyers de la courbe.

34. Conservant les mêmes notations que dans le problème précédent, démontrer que le produit $AP \times A'P'$ est constant.

35. Soient P et P' les points où la tangente à une ellipse, ou à une hyperbole, en un point M de cette courbe, rencontre les tangentes AP, A' P' aux sommets de l'axe focal; démontrer que les droites PF, P'F' se coupent sur la normale à la courbe au point M.

36. Lieu des foyers des paraboles qui ont pour directrice une droite donnée et passent par un point donné.

37. Lieu des foyers de paraboles qui ont pour directrice une droite donnée et sont tangentes à une droite donnée.

38. Lieu des sommets des mêmes paraboles.

39. Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites.

40. Le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice de cette parabole.

41. Lieu des points tels que la corde des contacts des tangentes menées de chacun de ces points à une conique passe par l'un des foyers de cette conique.

42. Soient CD la directrice d'une parabole, A son sommet, MT une tangente quelconque. Du sommet A, on abaisse sur la tangente MT une perpendiculaire AP que l'on prolonge jusqu'à la rencontre de la directrice en Q, et l'on prend sur cette perpendiculaire, à partir du point A, une longueur AR égale à PQ. Trouver le lieu géométrique du point R.

43. Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole.

44. Lieu des sommets des angles droits circonscrits à une ellipse ou à une hyperbole.

45. Lieu des sommets des angles égaux à un angle donné et circonscrits à une parabole.

46. Soit F un foyer d'une ellipse, M un point quelconque de la courbe, MT la tangente en M, et sur cette tangente un point N tel que l'angle MFN soit égal à un angle donné : lieu du point N quand le point M décrit l'ellipse donnée.

47. Même problème en remplaçant l'ellipse par une parabole, ou par une hyperbole.

48. Soient F et F' deux points fixes, P un point situé à égale distance des points F et F'; on considère toutes les ellipses et toutes les hyperboles qui ont pour foyers les points F et F', et par le point P on mène des tangentes à ces courbes. On demande le lieu des points de contact.

Le lieu est le cercle circonscrit au triangle FPF'.

49. Soient encore F et F' deux points fixes, P un point pris sur FF', on considère toutes les ellipses et toutes les hyperboles qui ont pour foyers les points F et F' et par le point P on mène des tangentes à toutes ces courbes. On demande le lieu du point de contact.

Si l'on prend, sur FF', le point Q tel que $\frac{PF}{PF'} = \frac{QF}{QF'}$, le lieu est le cercle décrit sur PQ comme diamètre.

50. On donne un cône de révolution et une sphère inscrite dans ce cône; trouver, sur la sphère, le lieu des points tels que tout plan tangent à la sphère en un de ces points coupe le cône suivant une parabole. Ce lieu trouvé, reconnaître sur quelle portion de la sphère doit être un point pour que le plan tangent à la sphère en ce point coupe le cône soit suivant une ellipse, soit suivant une hyperbole.

51. Lieu des foyers des sections faites dans un cône de révolution par des plans parallèles.

52. Lieu des foyers de toutes les coniques semblables à une ellipse donnée ou à une hyperbole donnée, et situées sur un cône de révolution donné.

53. Lieu des foyers de toutes les paraboles situées sur un cône de révolution donné.

54. On donne un triangle ABC et, dans le plan de ce triangle, on mène la droite LL' perpendiculaire au côté BC, en son milieu; dans le plan perpendiculaire au plan du triangle mené par AC, on construit une conique dont l'axe focal est AC et pour laquelle la distance focale est AB; puis on fait tourner cette conique autour de la droite LL'. On demande quelle est la surface engendrée par cette conique.

55. On donne un triangle ABC dans lequel les côtés AB, AC sont égaux; dans le plan perpendiculaire au plan du triangle mené par BC on construit la parabole qui a pour sommet le point B et pour foyer le milieu de BC; on fait tourner cette parabole autour de la droite AC et on demande quelle est la surface engendrée par cette parabole.

56. On donne un cône de révolution S, et une courbe plane C située sur ce cône; en chaque point M de la courbe C on mène la perpendiculaire au plan tangent au cône suivant la génératrice SM; cette droite rencontre la surface du cône en un second point M'. Lieu du point M'.

57. Soit E une ellipse, et soit H une hyperbole qui a pour sommets les foyers de l'ellipse, et pour foyers les sommets du grand axe de l'ellipse, et dont le plan est perpendiculaire au plan de l'ellipse. Le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'ellipse E est l'hyperbole H; et réciproquement, le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'hyperbole H est l'ellipse E.

58. Soit SAB un cône oblique à base circulaire; un plan antiparallèle au plan du cercle de base coupe ce cône suivant un cercle qui rencontre le cercle de base aux points M et M'. Ce cercle et le cercle de base sont sur une même sphère; soit D la droite d'intersection des plans tangents à cette sphère aux points M et M'. Démontrer que lorsqu'on déplace le plan antiparallèle au plan de la base, la droite D tourne autour d'un point fixe, se meut dans un plan, et engendre une portion limitée de ce plan.

59. On donne une sphère, un plan et un point dans ce plan. Par le point donné on mène dans le plan donné une droite D, et par cette droite D on mène à la sphère deux plans tangents; la corde des contacts est une droite D', et la perpendiculaire commune aux deux droites D et D' est une droite R. On fait tourner la droite D autour du point donné dans le plan donné, et on demande le lieu de la droite D', le lieu de la droite R, et les lieux des points de rencontre de la droite R avec chacune des deux droites D, D'.

60. Si par un point quelconque d'une hélice on mène la perpendiculaire à l'axe du cylindre, cette perpendiculaire est un axe de symétrie de l'hélice.

61. Deux hélices H, H' coïncident ; on prend sur la première deux points quelconques A, B, puis on déplace cette hélice de façon que les points A et B restent sur la seconde hélice : démontrer que dans ces conditions l'hélice mobile H ne cesse pas de coïncider avec l'hélice fixe H'.

62. Deux hélices H, H' coïncident ; on prend sur la première deux points quelconques A et B, et, sur la seconde, on marque le point A' qui coïncide avec le point A et le point B' qui coïncide avec le point B. Cela fait, on enlève l'hélice H, on la retourne bout pour bout, et on la place de façon que son point A vienne sur le point B' et son point B sur le point A' : démontrer que, dans cette nouvelle position, l'hélice H coïncide encore avec l'hélice H'.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

GÉOMÉTRIE PLANE

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

LIVRE PREMIER

LIGNE DROITE.

LIVRE II

CERCLE.

LIVRE III

FIGURES SEMBLABLES.

COMPLÉMENT DU LIVRE III

LIVRE IV

MESURE DES AIRES.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V

DROITES ET PLANS.

LIVRE VI

POLYÈDRES.

COMPLÉMENT DU LIVRE VI

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES POLYÈDRES.

LIVRE VII

LES CORPS RONDS.

COMPLÉMENT DU LIVRE VII

LIVRE VIII

LES SECTIONS CONIQUES ET L'HÉLICE.

(1) L'hyperbole n'est pas exigée pour l'examen du baccalauréat ès sciences, mais elle est comprise dans le programme de l'examen d'admission à Saint-Cyr.

389-91. — CORBEIL. Imprimerie CRÉTÉ.