STANKO PRVANOVIĆ

MODERNA MATEMATIKA

MNOŽINE (SKUPOVI), RELACIJE, BROJEVI, GEOMETRIJSKI POJMOVI U SVETLOSTI TEORIJE MNOŽINA

Za učitelje i nastavnike osnovne škole (kao i za svakoga koji želi da na elementaran način uđe u savremenu matematiku)

ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA
SOCIJALISTIČKE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD

SADRŽAJ

Strana

Strana

Strana

PREDGOVOR

Nikada se nije toliko isticalo da je matematika prodrla u sve ljudske delatnosti kao danas. I da se u skoroj budućnosti ni individua ni zajednica neće moći dugo održati ako nisu matematički obrazovane.

Ali, da li se danas mlade generacije obrazuju matematički onako kako to savremeni život zahteva? Svuda u svetu, gde se je održalo tradicionalno matematičko obrazovanje, daje se negativan odgovor. Može čovek da uči matematiku 8, 12, 14 godina, ona ga, u većini slučajeva, napušta čim on napusti školsku klupu. Napušta ga zato što ona nije postala sastavni deo njegove kulture. Zašto? Zato što tradicionalna nastava klasične matematike ne učestvuje, ni svojim sadržajima ni svojim metodama, u izgrađivanju kulture većine učenika.

Ogromni napori koji se danas ulažu u matematičko obrazovanje mladih ostaju, za ogromnu većinu učenika, bez rezultata.

Zato se korenita reforma nastave matematike postavlja nužno, neodložno, u svoj svojoj oštrini.

Prvi korak u tom pogledu je prevaspitavanje postojećih nastavnika matematike na svim stupnjevima obrazovanja i, paralelno s tim, reforma obrazovanja novih nastavnih kadrova. Na tome se intenzivno radi u celom kulturnom svetu.

Knjiga koja sledi predstavlja skroman udeo u taj posao kod nas. Namenjena je učiteljima i nastavnicima osnovne škole, učenicima koji se pripremaju za učitelje i nastavnike matematike u osnovnoj školi, vaspitačima predškolskih ustanova, ali i svakom ko želi da na elementaran način uđe u savremenu matematiku.

Prvih deset glava posvećene su množinama, relacijama, funkcijama (kao specijalnim relacijama), genezi prirodnih brojeva i zasnivanju osnovnih geometrijskih pojmova na množinama i relacijama. U sledećih dvanaest glava izgrađuje se ona matematika koja je, prema današnjem shvatanju, neophodna svakome ko izvodi ili će izvoditi nastavu matematike u osnovnoj školi. Naime: izgrađuje se (putem postupnog proširivanja množine prirodnih i racionalnih brojeva) pojam množina realnih brojeva; zasniva se teorija osnovnih operacija u množini prirodnih i množini racionalnih brojeva; izgrađuju se elementarni geometrijski pojmovi (u jednodimenzionalnom, dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom prostoru); uspostavlja se veza između brojeva i geometrijskih objekata. U XXIII glavi dat je kratak pregled nekih pitanja elementarne praktične aritmetike. Glava XXIV posvećena je elementarnoj teoriji relacije ekvipolencije, pomoću koje se posle dokazuje (vrlo kratko i elegantno, direktno ili u obliku zadataka) čitav niz poznatih i novih geometrijskih stavova. U glavi XXV postavljeno je više rekapitulativnih zadataka. Pri tome, nije se išlo za tim da budu zastupljene sve oblasti, nego da se još jednom sagledaju stožerni pojmovi.

Glava XXVI izlaže u najelementarnijem obliku elemente matematičke logike.

Dve bitne karakteristike moderne matematike jesu: ansamblizam i relacionizam. Ansambl znači množina, mnoštvo, skup. Množina je pojam na kome počiva celokupna moderna matematika i kojim je ona skroz prožeta. Relacija je latinska reč. Pojam koji ona označava u savremenoj matematici ne može se kratko definisati, ali, kao i pojam množina, prožima celokupnu modernu matematiku i susrećemo ga skoro na svakoj strani knjige. Ovde ćemo se zadovoljiti jednim upoređenjem: Klasična matematika je „psihologija", a moderna matematika je „sociologija" matematičkih objekata. Dok klasična matematika ispituje samo objekte, savremena matematika proučava odnose, veze među tim objektima. Savremena matematika je, dakle, ansamblistička i relacionistička.

I ako klasična matematika „predstavlja nešto više i od aritmetike, i od algebre, i od geometrije", ako ona predstavlja i školu mišljenja, onda je moderna matematika „isključivo škola mišljenja". Klasična matematika ne stiže do škole mišljenja zato što uči učenika aritmetici, algebri, geometriji, . . . I moderna matematika uči učenika mnogim stvarima klasične matematike, ali njoj je ipak glavna briga mišljenje. Ona izgrađuje mentalne strukture učenika putem matematičkih struktura. „Pronalazak velikih struktura potpuno je promenio i osnovu i potku klasične matematike" (G. Choquet). I zato ona stvarno obrazuje, kultiviše matematički. U tome se sastoji njena vrednost. A njen primarni zadatak je izgrađivanje ljudi kakve zahteva današnji, tim pre sutrašnji život.

I ovaj „udžbenik" moderne matematike, namenjen, u prvom redu, mnogobrojnim učiteljima i nastavnicima koji iskreno žele da reformišu nastavu matematike u svojim školama, zamišljen je kao škola matematičkog mišljenja, jer (to ne treba dokazivati) samo onaj koji ume da misli može i druge (svoje sadašnje i buduće učenike) osposobiti da misle. Uz to on pruža, kako je već rečeno, sva ona matematička znanja kojima treba da vlada onaj koji izvodi, ili će izvoditi, nastavu matematike u osmorazrednoj osnovnoj školi. Ali:

1) Nije se išlo za tim da se činjenice zapamte i algoritmi mehanizuju, nego za pravilnim izgrađivanjem i povezivanjem pojmova u mali broj jedinstvenih opštih ideja koje uzdižu na potrebnu visinu sa koje se jasno vidi šta je što. Jer, najveća boljka tradicionalnog matematičkog obrazovanja bila je i ostala „gomila nepovezanih znanja i tehničkih operacija".

2) Ne zadržavajući se na detaljima, obrađeni su stožerni pojmovi i ključni problemi koji osposobljavaju za prilaženje svim specijalnim slučajevima s kojima se susreće nastavnik svakog razreda osnovne škole.

3) S obzirom na tradicionalno obrazovanje učitelja i nastavnika, zahvaćeni sadržaji obrađuju se kombinacijom induktivne i deduktivne metode. Mnogim činjenicama prilazi se uz pomoć crteža (dijagrama, grafika) ali se mnoge i dokazuju, jer i najnižu stepenicu matematičkog obrazovanja (a ovo nije najniža) karakteriše sposobnost dokazivanja pojedinih tvrđenja.

Uopšte, osnovni cilj postavljen ovom „udžbeniku" jeste: Uzdići sadašnje i buduće nastavnike matematike osnovne škole do onog nivoa koji predstavlja jedan od neophodnih uslova za pravo, istinsko matematičko obrazovanje podmlatka, za njegovo matematičko kultivisanje.

Da li je taj cilj postignut? To će moći da kažu (da potvrde ili negiraju) oni koji budu imali volje i strpljenja da „udžbenik" prouče. U prvom redu oni mnogobrojni školski radnici širom naše zemlje koji su, na ovaj ili onaj način, izrazili želju da osavremenjavaju matematičko obrazovanje podmlatka koji im je poveren. Jedno je, međutim, sigurno: uz pridržavanje svega onoga što je rečeno u predgovoru Uputstva, (str. 409) „udžbenik" će moći da „čita" (čitaj: da proučava) svaki onaj koji je uspešno

(zaista uspešno) završio VI razred osnovne škole, a pogotovu onaj koji je (opet uspešno) završio VIII razred.

Prema mišljenju koje danas vlada u naučnom (matematičkom i pedagoškom) svetu, budući učitelji i nastavnici se najadekvatnije osposobljavaju za izvršavanje zadataka matematičkog obrazovanja sadržajima koji se izlažu u ovoj knjizi. I istovremeno ti sadržaji predstavljaju najbolju osnovu i najsigurniju pripremu za dalje ulaženje u savremenu matematiku.

Akademiku dr Slobodanu Aljančiću koji je bio ljubazan da pregleda veći deo rukopisa i stavio veoma korisne sugestije dugujem duboku zahvalnost.

Zahvalnost dugujem i Zavodu za izdavanje udžbenika Socijalističke Republike Srbije, koji je prihvatio izdavanje knjige i uložio sve da njena oprema bude što bolja.

Birografika - IŠPJŽ u Subotici zadužila je knjigu i grafičkim oblikovanjem i brzim radom.

Srpko Teoharević je knjigu zadužio preciznom tehničkom izradom crteža.

Marta 1970. godine

STANKO PRVANOVIĆ

Napomena. Na crtežima su neka slova „pisana" (ne štampana). Iz tehničkih razloga sva ta slova štampana su velikim kurzivom polucrnim.

PREGLED UPOTREBLJENIH SIMBOLA

$A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ — množine

$a, b, c, \ldots, x, y, z$ — elementi (jedinke)

$A\ \{a, b, c, \ldots\}$ — ekstenzivna definicija množine

$\{x \mid \text{osobina } x\text{-a}\}$ — definicija množine pomoću karakterističnih osobina elemenata

$\varnothing$ ili $\{\ \}$ — prazna množina

$\in$ — pripada (simbol pripadnosti)

$\notin$ — ne pripada (simbol nepripadnosti)

$\subset$ — sadržano (uključeno, simbol inkluzije)

$\not\subset$ — nije sadržano

$\subseteq$ — sadržano ili jednako

$\boldsymbol{P}(A)$ — množina svih delova množine A

$=$ — jednako, odnosno poklapaju se kad je reč o množinama tačaka (glava IV, VII)

$\neq$ — nejednako, odnosno razlikuju se (glava IV)

$\Rightarrow$ — simbol implikacije

$\Leftrightarrow$ — simbol ekvivalencije

$\sim$ — simbol ekvipotencije i simbol ekvivalentnih razlika

$\uparrow$ — simbol ekvipolencije

$\ldots$ — i tako dalje

$\cap$ — presek dveju množina

$\cup$ — unija dveju množina

$\setminus$ — razlika dveju množina

$\forall$ — tj. $\forall x$ za svako, tj. za svako x (univerzalni kvantifikator)

$\exists$ tj. $\exists x$ — postoji bar jedno x (egzistencijalni kvantifikator)

U — osnovna množina (baza)

$\bar{A}$ — dopunska (komplementarna) množina množine A

$\boldsymbol{P}$ — particija množine

(a, b) — uređeni par, a prvi element

(a, a) — identični par

$[ab]$ ili $[AB]$ — duž

$A \times B$ — Dekartov proizvod množina A i B

$A^2 = A \times A$

$\parallel$ — paralelno

$\nparallel$ — nije paralelno

$\perp$ — normalno

$(P), (B), \ldots$ — pravac

$\boldsymbol{R}$ — relacija

$\boldsymbol{R}^{-1}$ — recipročna ili inverzna relacija

$\{(a, a), (b, b), (c, c), \ldots\}$ — identična relacija

$(a, b)^{-1}$ — recipročni uređeni par para (a, b)

$\mid$ — deli

$\nmid$ — ne deli

$\boldsymbol{E}$ — relacija ekvivalencije

mod p — modulo pe

$<$ — ispred, „levo", manje od

$>$ — iza, „desno", veće od

$\leqslant$ — manje ili jednako, nije veće od

$\geqslant$ — veće ili jednako, nije manje od

$[\ ]$ — zatvoren interval

] [— otvoren interval

]] — interval otvoren „sleva“

[[— interval otvoren „zdesna“

$\rightarrow$ — orijentisana prava

(a, b, c) — triplet (tri uređena elementa)

(a, b, c, d) — četiri uređene tačke

K — krug

K_u — množina unutrašnjih tačaka u odnosu na K

K_s — množina spoljašnjih tačaka u odnosu na K

P_p — množina otvorenih polupravâ čiji je zajednički početak p

P'_p — množina zatvorenih polupravâ sa zajedničkim početkom p

o — znak za kompoziciju relacija

$(b, c) \circ (a, b)$ — kompozicija parova (a, b) i (b, c)

$\boldsymbol{S} \circ \boldsymbol{R}$ — er krug es ili $\boldsymbol{S}$ posle $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{J}$ — identična relacija

f — funkcija

$f\colon A \rightarrow B$ — aplikacija A na B

$f\colon A \rightarrow A$ — transformacija

$f(x)$ — slika elementa x ili vrednost funkcije u x

$f(A)$ — slika množine A u B izazvana funkcijom f

1_Π — identična transformacija ravni Π

c_Π — konstantna transformacija ravni Π

$p\colon \Pi \rightarrow P$ — paralelna projekcija

$k(A)$ — kardinalni broj množine A

N — množina $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

N_1 — množina $\{1, 2, 3, \ldots\}$, tj. $N \setminus \{0\}$

$[1, n]$ — početni odsečak (interval) množine N_1

δ — kardinal beskonačne množine

$N, +$ — množina prirodnih brojeva snabdevena operacijom sabiranje

$N, \bullet$ — množina prirodnih brojeva snabdevena operacijom množenje

$a+b$ — (a plus b)

$a-b$ — (oduzimanje broja a od b, a manje b, a minus b)

$\star$ — binarna operacija

M $*$ — množina snabdevena operacijom $*$

$x \cdot y$ — ili xy „iks ipsilon“ (iks pomnoženo ipsilonom)

a^n — n-ti stepen broja a (a na enti)

: — znak deljenja

nzd — najveći zajednički delilac

nzm — najmanji zajednički multiplum (sadržalac)

Z — množina celih brojeva

$Z_0 = Z \setminus \{0\}$

$Z^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$Z^- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$

$(a \sim b)$ — familija razlika = elemnt množine Z

$(a \sim 0)$ — pozitivan broj

$(0 \sim a)$ — negativan broj

$Z, +$ — komutativna grupa

$Z, \bullet$ — ili $Z, \times$ komutativni monoid

$Z, +, \bullet$ — prsten

$\left(\frac{a}{b}\right)$ — racionalan broj

Q — množina racionalnih brojeva

$\varnothing$ — je vezan paralelogramom

$\boldsymbol{S}$ — ima istu sredinu kao

UPOTREBLJENI TERMINI

AFORIZMI

Negujte svoju ljudsku prirodu. Vi niste stvoreni da živite kao stoka, nego da tražite i stičete vrlinu i znanje.

DANTE (Božanstvena komedija, pesma XXVI)

Ne znati nije sramota. Sramota je ne hteti znati.

SOKRAT

Svaki dan u toku kojega vi niste dopunili svoje obrazovanje makar malim, ali, za vas, novim znanjem, smatrajte nepovratno izgubljenim.

K. S. STANISLAVSKI

I živi do starosti i uči do starosti.

KINESKA NARODNA POSLOVICA

Samo dotle može neko obrazovati drugog, dok se i sam obrazuje. Ko je prestao dalje sebe obrazovati, prestao je obrazovati i druge.

DISTERWEG

Žalosnu će ulogu igrati učitelj ako on, pozvan da uči i prosvećuje druge, bude ravnodušan prema svom ličnom obrazovanju.

F. MEHR

Zaboravi što znaš da bi naučio kako treba znati ono što znaš.

PAUL VALÉRY

Matematika stvarno korisna danas — to je moderna matematika.

G. PAPY

Matematika nije dosadna tehnika, korisna samo u nekim slučajevima. Matematika je jedan od osnovnih načina ljudskog mišljenja i zato je neophodan element svake kulture dostojne tog imena.

A. REVUZ

Bez permanentne kulture nastavnika nema kvalitetne nastave.

A. REVUZ

Nastava moderne matematike počinje u zabavištu.

L. FELIX

GLAVA I

MNOŽINE (MNOŠTVA, SKUPOVI)

§ 1.1. MNOŽINA (SKUP)

1. Kaže se, na primer: stado ovaca; čopor vukova; jato ptica; buket cveća; voćnjak; zbor birača; četa vojnika; moj pisaći pribor; posuđe; ove knjige na stolu; cifre; selo; vozila beogradske registracije; spisak učenika; aritmetička pravila; itd.

Ma koja od tih reči (jedna ili više, razdvojenih tačkom i zarezom) označava jednu „množinu". Ali nije svaka „množina" predmet matematičkog ispitivanja. Matematiku interesuju samo *određene, definisane množine*. Koje su množine određene, definisane?

Da bismo odgovorili na to pitanje, uočimo da se svaka od navedenih „množina" sastoji od zasebnih „jedinki" (predmeta, osoba, biljaka, životinja, pojmova). Svaka „jedinka" zove se *element* (ili član) one množine u čiji sastav ulazi.

Množina je određena ako svi oni koji hoće da govore ili misle o njoj znaju koji su njeni elementi.

Ili preciznije: . . . *ako svaki koji hoće da govori, ili misli, o njoj, može utvrditi da li joj određena jedinka pripada ili ne pripada.**

1) Napišite (u svojoj svesci) one od već navedenih primera za koje smatrate da označavaju definisane (određene) množine.

2) Učinite to isto u ovim slučajevima:

(1) učenici I razreda;

(2) saksije cveća naše „tetkice" (čistačice) Mare;

(3) par cipela;

(4) sadašnji učenici I razreda Osnovne škole „Janko Veselinović" u Šapcu;

(5) cipele koje sada nosi čika Steva;

(6) deca naše koleginice Branke;

(7) zadružni voćnjak u selu Slatina; (8) učionice;

(9) učionice u ovoj školskoj zgradi;

(10 odeljenja naše škole;

(11) moj časovnik, sadašnji predsednik Opštinske skupštine Vršac, Avala, Haile Selasije (etiopski car), česma u banji Koviljača;

(12) ivice kvadra; (13) brojevi 0, 1, 2, . . . , 10;

(14) jednakokraki trouglovi; (15) prečnici ove (nacrtane) kružnice;

(16) slova kojima se piše reč Beograd; (17) inteligentni ljudi;

---

* To važi za realni svet i za one pojmove kojima vlada većina čitalaca. Ima, međutim, pojmova za koje još nije utvrđeno kojoj množini (kojem skupu) pripadaju. O takvim pojmovima neće biti reči u ovoj knjizi.

Obratiti pažnju na značenje reči pripada (pripadati). U matematici se ona upotrebljava u smislu činiti, predstavljati deo, a ne u smislu imati, posedovati.

(18) cifre 0, 2, 4, 6, 8;
(19) mlade žene našeg grada (sela);
(20) vaši prijatelji;
(21) visoka stabla na Kalemegdanu;
(22) reke u SFRJ.

2. Kako matematiku interesuju samo definisane (određene) množine, mi ćemo samo njih i nazivati množinama (mnoštvima, skupovima — upotrebljavaju se sva tri termina).

Treba obratiti pažnju na važnu „činjenicu": Opšti pojam (koji se zove) množina (skup) *ne definiše se* (zato što se smatra da svako ima taj pojam, ali i zato što se *mora* poći od nekih pojmova koji se ne definišu pomoću drugih). Zato se i kaže da je množina (skup, mnoštvo) *prvobitni* (početni, polazni) matematički pojam (kao npr. tačka, prava, . . .). Međutim, postoje „prirodne" množine, a „svaki" čovek može da obrazuje („fabrikuje") i stvarno, ali prvenstveno *misaono*, koliko god hoće najraznovrsnijih množina pod uslovom *da se za svaku od njih može odgovoriti sa „da" ili sa „ne" (ne i sa „da" i sa „ne", niti „ni da ni ne") na pitanje: da li je određena jedinka element te množine, ili pripada li ta jedinka toj množini?*

Svaka tako shvaćena množina je (jedan) matematički objekt (jer se aktom mišljenja „mnogo" jedinki sjedinjuju u jednu „celinu"). I savremena matematika ispituje osobine tih objekata, množina, a u prvom redu njihove međusobne relacije, kao i relacije između elemenata dveju množina i jedne iste množine.

3. Važne napomene:

1) Elementi iste množine mogu biti najraznovrsnije jedinke, npr. množina (11) ili, recimo, Pitagora, 43, Hanoj.

2) Delovi elementa nisu elementi te iste množine, na primer: strelice mog časovnika nisu elementi množine (11); časovnik Haila Selasija takođe nije element množine (11); glava psa nije element množine kojoj pas pripada.

3) Množina ne može da sadrži dva ista elementa. Na primer reč *livada* sastoji se, kao množina, od 5 (a ne od 6) elemenata.

4) Često su i elementi množine. Npr. elementi „naša škola" su odeljenja, a svako odeljenje je množina đaka. U tom slučaju imamo množinu množina (skup skupova) i đaci nisu elementi množine „naša škola".

5) Vrlo često se (razumljivo u matematici) kaže „posmatrajmo množine A i B (vidi § 1.3) i ispitajmo" (to i to što se odnosi na same množine ili njihove elemente). Tada A i B nisu posebne, određene, definisane (u već navedenom smislu) množine, ali se pretpostavlja da svaka od njih zadovoljava uslov definisanosti. Naime, A i B su dve različite (u specijalnom slučaju one mogu biti i jednake, vidi § 1.4) množine, *ali svaka od njih stoji umesto ma koje od definisanih množina*. To su *opšte množine* (opšti pojmovi) kojima matematika neprekidno operiše, pomoću kojih ona izgrađuje razne teorije iz kojih se, konačno, ona (matematika) i sastoji.

§ 1.2. KAKO SE DEFINIŠE MNOŽINA

1. Množina se može definisati na dva načina:

I Imenovanjem (nabrajanjem, „inventarisanjem") svih njenih elemenata, na primer:

Milkini đaci Voja, Dragan, Svetlana;
napred pomenute množine (11) i (18; Pitagora, 43, Hanoj.

II Izražavanjem (isticanjem) osobine koja karakteriše sve njene elemente (i samo njih), na primer:

Milkini đaci koji nose naočare; napred imenovane množine (4), (5), (6), . . . , (13, (14), (15), (16).

Prvi način zove se *ekstenzivna definicija*. Drugi način je *definisanje pomoću karakteristične osobine*. (Možemo reći i *opisna definicija* — iako taj naziv nije najadekvatniji.)

Ekstenzivna definicija je bolja, jer tada nema dvoumljenja da li je neka jedinka element date množine ili nije. U slučaju definisanja pomoću karakteristične osobine to nije uvek tako; na primer, stanovnici Beograda na dan 10. X 1969. Tu su potrebna preciziranja: da li uračunati, npr. ljude na specijalizaciji, đake koji stanuju u Beogradu samo dok škole rade, vojnike, itd. Zatim treba tačno odrediti teritoriju jer u sastav grada Beograda ulaze i mnoga naselja, udaljena po više kilometara od grada. Itd.

Drugi način definisanja se češće upotrebljava. Prvo zato što ekstenzivno definisanje nije uvek lako, a često je i nemoguće; na primer, lakše je napisati „slova naše azbuke", nego napisati sva slova. Mogu li se: imenovati svi prečnici date kružnice; napisati svi brojevi? Zatim, baš opisna definicija ima opšti, pojmovni, teorijski značaj.

§ 1.3. PRVI SIMBOLI

1. Vi već znate neke matematičke simbole, na primer: 5, 7, 11, 36, . . . , $=$, $+$, $\times$, . . . Svaki matematički simbol označava jedan pojam ili jednu misao (npr. 5 označava pojam koji se zove pet, $+$ označava, ako se ograničimo na ono što zna učenik II razreda, „dodati" ili „povećati", itd.).

Simbolima se je matematika oduvek služila, jer je pomoću njih izražavanje kratko, precizno i, što je takođe važno, internacionalno. Savremena matematika je, moglo bi se reći, udesetostručila broj simbola. I to s pravom. To uviđa svako koji je koliko-toliko ušao u tu nauku.

Mi ćemo zasad uvesti ove simbole:

(1) $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$

za označavanje množina;

(2) $a, b, c, \ldots, x, y, z$

za označavanje elemenata i uopšte ma kojih jedinki;

(3) $\in$ i $\notin$ za označavanje *pripadnosti* odnosno *nepripadnosti* jedinke množini;

(4) $=$ (jednako) i $\neq$ (nije jednako) koji su poznati, ali ćemo ipak objasniti njihov precizni smisao (§ 1.4);

(5) „velike zagrade" $\{\ \}$.

2. 1) Neko je napisao, na primer:

Gvozden, (njegova supruga) Anđelija i (njihova deca) Dejan, Bojan i Zvezdana;

51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59;

Makedonija, Crna Gora, Srbija, Bosna i Hercegovina, Hrvatska, Slovenija.

On kaže da je zapisao tri množine.

To nije pravilno. Da bi ta zapisivanja označavala množine, mora se pisati ovako:

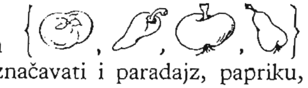
(1) {Gvozden, Anđelija, Dejan, Bojan, Zvezdana};

(2) {51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59}; i slično.

Zagrade { } su, dakle, obavezne. Zarezi takođe.

Pri tome treba imati na umu da, ovako kako je zapisana, množina (1) može označavati: ili definiciju Gvozdenove porodice i tada su njeni elementi lica (osobe), a napisane reči, imena, su nematematički simboli elemenata; ili množinu samih imena, tj. elementi su reči Gvozden, Anđelija, itd. Isto tako u slučaju (2): Ono što je zapisano može označavati množinu *brojeva* (između 50 i 60), tj. elementi su *brojevi*. Ili je to množina napisanih simbola, imena brojeva.

Prema tome, {△, ○, □} je množina čiji su elementi △, ○ i □, a



može biti množina crteža, kako ih vidimo, a može označavati i paradajz, papriku, jabuku i krušku koje je, npr., mali Miša pojeo danas.

Zbog toga, a i kratkoće radi, tim pre radi uopštavanja, množine definisane ekstenzivno označavaju se, najčešće, ovako:

$$\{a, b, c, d\},$$

pri čemu a, b, c, . . . označavaju *ma koje elemente*, one koje mi želimo u datom slučaju. Ali, sve dok ispitujemo jedan problem, *simbol a označava jedan isti element*. To važi za svaki simbol (b, c, . . .).

2) Množine definisane na drugi način (pomoću karakteristične osobine) označavaju se pomoću istih zagrada, razumljivo malo drukčije, na primer:

{x | x je đak mog odeljenja i nosi naočare};

{x | x je samoglasnik našeg jezika};

{y | y je prirodni broj* manji od 13}.

Prvo označava množinu x (iksova) gde (svako) x označava jednog đaka mog odeljenja koji nosi naočare, a čita se kako je napisano: Množina x, x je đak mog odeljenja koji nosi naočare.

I slično u ostalim slučajevima.

Druga od napisanih množina se na prvi način definiše: $\{a, e, i, o, u\}$.

Definišite na taj način prvu i treću.

3) To su definicije, a množine se označavaju velikim slovima A, B, C, . . . Pri tome, definisana množina (posle ćemo videti zašto) označava se, na primer:

$A = \{100, 700, 400, 200, 600, 800, 500, 300, 900\}$;

$C = \{a, b, c, d, e\}$;

$S = \{x | x$ samoglasnik naše azbuke$\}$.

(O znaku „=" govorićemo posle, § 1.4.)

* Kasnije će biti reči o prirodnim brojevima. Zasad: 0, 1, 2, 3, . . . su prirodni brojevi.

Ako se rasuđuje uopšte, slova A, B, C, . . . označavaju ma koje (određene) množine ili čitav niz množina (§ 1.1, t. **3.**5).

4) Napišite na oba načina definiciju množine:

A — prirodnih brojeva između 2 i 10;
B — sedmica (sedam dana koji čine sedmicu);
C — meseca čija imena počinju slovom m;
D — meseca čija imena počinju slovom d;
E — multipluma (sadržalaca) broja 7 manjih od 100 (broj m je multiplum broja a, ako je $m=aq$, gde q označava broj različit od nule; na primer: 36 je multiplum broja 9 jer je $36=9\times 4$; 120 je multiplum broja 8 jer je $120=8\times 15$. I 0 (nula) se može smatrati multiplumom svakog broja, ali tada je i $q=0$);
F — svih činilaca (delilaca) broja 16 [broj d je činilac (delilac, faktor) broja a ako je $a=dq$, gde je q različit od nule; na primer, 7 je činilac broja 84, jer je $84=7\times 12$.];
G — jedinicâ za merenje koje se uče u osnovnoj školi;
H — predmeta koji se sada nalaze na vašem stolu;
K — duginih boja.

5) Napišite definiciju prema karakterističnoj osobini:

$L=\{3, 6, 9, 12, 15\}$; $M=\{123, 132, 213, 312, 321, 231\}$.

3. Neka je **P=**

. Tada pišemo:

∈ **P**, a čitamo: Šargarepa pripada množini P.

∈ **P**, a čitamo: Luk pripada množini P.

∈ **P**(Pročitajte.)

∉ **P** i čitamo: Cvet ne pripada množini P.

Neka a označava ma koju jedinku, a M ma koju množinu. Ako je a element množine M, pišemo $a \in \boldsymbol{M}$. U protivnom $a \notin \boldsymbol{M}$.

Ako, na primer, svoje odeljenje označite sa C, a Steva je učenik tog odeljenja, pišemo $s \in C$.

Gagarin npr. sigurno ne pripada množini C i zato pišemo: $g \notin C$.

Uopšte, *ako je M ma koja množina, u pogledu jedinke x postoje samo dve mogućnosti*: $x \in M$ *ili* $x \notin M$.

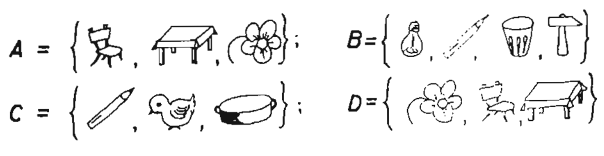
1) Izrazite da svaki od elemenata a, b, c pripada množini $\{a, b, c\}$.

2) Izrazite pomoću uvedenih znakova pripadnost odnosno nepripadnost označenog elementa datoj množini:

$A=\{x | x$ je neparan broj$\}$, 5 A.
$S=\{x | x$ je telo Sunčevog sistema$\}$, x S.
$B=\{y | y$ je broj manji od 199$\}$, 199 B.
$R=\{$rimske cifre$\}$, V R.
$C=\{z | z$ je broj deljiv brojem 11$\}$, 123 C.
$G=\{u | u$ je uzročnik groznice$\}$, s (svila) G.
$D=\{x | x$ je broj deljiv brojem 9$\}$, 80 001 D.
$E=\{c | c$ je arapska cifra$\}$, 23 E.

§ 1.4. JEDNAKE MNOŽINE. JEDNAKOST

1. 1) Posmatrajmo množine:



Množine A i B *nemaju zajedničkih elemenata*. To isto važi za množine A i C. — Množine B i C *imaju zajedničkih elemenata*.

Šta možemo reći za množine A i D? One se sastoje od *istih elemenata*. Slova A i D označavaju, dakle, iste množine, jer redosled elemenata nema nikakav značaj. Za takve množine kažemo da su *jednake* i to zapisujemo ovako: $A=D$.

Množine A i B nisu jednake, tj.: $A \neq B$.

Isto tako: $C \neq B$.

Napišite za A i C.

2) Šta možete reći o množinama:

$P=\{\text{I, V, X, C, D, M}\}$;

$Q=\{\text{cifre kojima su se služili Rimljani}\}$;

$R=\{\text{rimske cifre}\}$.

Izrazite to pismeno.

2. 1) Neka je $E=\{a, b, c, d\}$, $F=\{a, e, d\}$, $G=\{d, b, c, a\}$, $H=\{e, d, a\}$, $K=\{a, d, b, c\}$. Koje su od tih množina jednake i zašto? Koje nisu jednake i zašto? Izrazite to i pomoću simbola $=$, odnosno $\neq$.

2) Neka je $A=\{1, 2, 3\}$, a B neka je množina prostih brojeva* manjih od 5, tj. neka je $B=\{x \mid x \text{ prost broj manji od } 5\}$. Izrazite relaciju između tih množina simbolom.

3) Neka je $C=\{1, 2, 7, 9\}$, $D=\{x \mid x \text{ neparan broj manji od } 10\}$. Zahtev kao u prethodnom slučaju.

4) Neka je: A množina prirodnih brojeva od 1 do zaključno 6; $B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $C=\{x \mid x \text{ je broj tačaka nacrtanih na svakoj strani modela kocke počev od } 1\}$; $D=\{y \mid y \text{ je ostatak deljenja brojem } 6\}$. Koje su od tih množina jednake?

5) Obrazložite da ako je:

$M_1=\{x \mid x \text{ prirodni broj manji od 100, a deljiv istovremeno brojem 2 i brojem } 13\}$, $M_2=\{26, 52, 78\}$, onda je $M_2=M_1$.

3. Simbol „=“ ste već upotrebljavali, na primer:

$$5+8=13, \qquad 28=4\times 7, \qquad 54:2=9\times 3.$$

Šta on označava? $5+8$ je izraz ili, što je isto, *ime* jedne „stvari“, jednog pojma. 13 je takođe izraz, ime jedne „stvari“, jednog pojma. Stavljajući simbol „=“ između ta dva izraza, između ta dva „imena“, mi tvrdimo da oba izraza, oba imena, *označavaju jednu istu „stvar“*, *jedan isti pojam*. Drugim rečima (ako uočimo drugi primer), 28 označava jedan broj (28 je znak, simbol, *ime* toga broja, tog pojma). Znak (simbol) „=“ tvrdi da se ime tog istog broja može napisati i ovako: 4×7.

* Prirodni broj je prost, ako je deljiv samo brojem 1 i samim sobom ili, preciznije, ako ima samo dva delioca. O prostim brojevima govorićemo posebno (glava VIII).

Prema tome, znak, simbol „=“ označava da je *isti pojam* (isti objekt), izražen, označen, imenovan na dva različita načina.

Zato kažemo i pišemo, na primer:

$A=D$ [videti ovaj §, tačka **1.** i t. **2.** 2)];

$H=F$ [videti ovaj §, tačka **2.** 1)];

$A=C$ i $B=D$ [ovaj §, t. **2.** 4)];

$A=D$ čitamo: A jednako D. $E=F$ čitamo . . .

Isto tako (§ **1.**3, t. **2.**3):

A i $\{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$ su dva imena iste množine i (govorimo i pišemo):

$A=\{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900\}$;

S i $\{x \mid x \text{ je samoglasnik}\}$ su dva imena iste množine i zato

$S=\{x \mid x \text{ je samoglasnik}\}$.

Analogno, $a=b$ (a jednako b) označava [prema dogovoru, § 1.3, t. **1.**(2)] dva imena (a i b) iste jedinke, istog elementa.

Suprotno: $A \neq B$ označava dve množine (razne); $a \neq b$ označava dva elementa, uopšte dve jedinke.

Simbol „=“ i ono što je napisano (što stoji) levo i desno od njega čine *jednakost*. Ili: Simbol „=“ zajedno s onim što je napisano levo i desno od njega zove se *jednakost*.

4. Jasno je da dok se vrši određeno rasuđivanje: jedna „stvar“ (jedan pojam) ne može da se „pretvori“ u drugu, što se zapisuje $a=a$; da se (prema značenju simbola „=“) $a=b$ može napisati i ovako $b=a$; da ako je $a=b$ i $b=c$, onda je $a=c$.

Otuda tri važne osobine jednakosti:

	Osobina se zove
$a=a,\quad b=b, \dots,\quad x=x, \dots$ $A=A,\quad B=B, \dots,\quad X=X, \dots$	refleksivnost
Ako je $a=b$, onda je i $b=a$. Ako je $A=B$, onda je i $B=A$.	simetričnost
Ako je $\left.\begin{matrix} a=b \\ b=c \end{matrix}\right\}$, onda je $a=c$. Ako je $\left.\begin{matrix} A=B \\ B=C \end{matrix}\right\}$, onda je $A=C$.	tranzitivnost

§ 1.5. PAR, SINGLETON, PRAZNA MNOŽINA, KONAČNA I BESKONAČNA MNOŽINA

1. Đaci jednog odeljenja pozvani su da se upišu u sledeće sekcije (koje postoje pri školi): sportsku, pozorišnu, muzičku, modelarsku, fotografsku i mladih prirodnjaka. Jedan učenik može se upisati najviše u dve sekcije.

Đaci tog odeljenja čine množinu:

$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, r, s, t, u, v, z\}$.

Posle izvršenog upisa sastavljeni su spiskovi po sekcijama. Ti su spiskovi množine. Najviše ih se opredelilo za sportsku sekciju, naime:

$S = \{b, d, e, f, k, m, o, p, r, s, t, u, z\}$.

I u pozorišnu sekciju ih se dosta upisalo:

$P = \{a, b, c, e, f, k, m, p, s, v\}$.

Manje ih se upisalo u sekciju prirodnjaka (B):

$B = \{a, c, g, h, j, s\}$.

U muzičku sekciju upisale su se samo Olga i Vesna, dakle:

$C = \{o, v\}$. Takva množina zove se *par*.

U modelarsku upisao se samo Tihomir, tj.:

$M = \{t\}$. Takva množina zove se *singleton*.

A u fotografsku sekciju nije se niko upisao i zato pišemo: $F = \{\ \}$.

Za ovu poslednju množinu kažemo da je *prazna*. Pored $\{\ \}$ za njeno označavanje postoji i specijalni znak $\varnothing$.

2. 1) Kako se zove množina čiji su elementi (koju čine): suprug i supruga koji su vam došli danas u goste; tačke koje određuju pravu; pera kojima pišete u ovom trenutku; Zemljini prirodni sateliti; stranica trougla i naspramni ugao; žene koje može da ima Evropljanin; delioci broja 7; delioci ma kog prostog broja; predsednici opštine na čijoj teritoriji živite; vaši đaci koji stanuju u Tokiju; ljudi čija visina iznosi 3 metra; bebe koje progovore mesec dana posle rođenja; neparnih brojeva deljivih brojem 2; prostih brojeva između 14 i 16; kocke čije su neke strane krive površi; kupe sa tri vrha; brojevi deljivi samo jednim brojem?

2) Kako se zove množina: $\{+, -\}$; $\{$da, ne$\}$; $\{a, b\}$; $\{a\}$?

3) Kako se zove množina koju čine brojevi umesto kojih stoji slovo u: (1) $3x = 4x$; (2) $3 + x = 4 + x$?

Treba dobro razlikovati singleton i element. Na primer $\{a\}$ je singleton (množina) a a je element pa pišemo $a \in \{a\}$.

3. Napišite ekstenzivnu definiciju:

(1) množine vaših cipela koje su vam sad na nogama;

(2) množinu tačaka u kojima se seku dve neparalelne prave koje pripadaju istoj ravni;

(3) množinu tačaka u kojima se seku dve paralelne prave;

(4) množinu koju čine vaša motorna kola;

(5) množinu lavova koje čuvate kod svoje kuće.

4. Koje od množina navedenih u § 1.1. pod 2) mogu biti: 1) singletoni; 2) prazne?

Obratite pažnju na: $\varnothing$ je prazna množina, a $\{\varnothing\}$ nije (prazna) nego singleton. Zašto?

5. Zamislite da ređamo jedan za drugim elemente date množine. Ako se taj posao može svršiti, tj. ako se može doći do poslednjeg elementa, množina je *konačna*. U protivnom za množinu kažemo da je *beskonačna*. Na primer:

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1\,000\,000\}$ je konačna množina, a

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

$P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$,

$H = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$,

$D = \{1, 10, 10 \times 10, 10 \times 10 \times 10, \ldots\}$

su beskonačne množine.

Posebnu pažnju skrećemo na množinu N koja se zove *množina prirodnih brojeva*. Na nju ćemo se posebno vratiti (§ 10.3), ali ćemo je i pre toga spominjati. Spominjaćemo i množine P (parnih brojeva) i H (neparnih brojeva).

Umesto P za $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ češće ćemo upotrebljavati $2N = \{0, 2, 4, \ldots\}$.

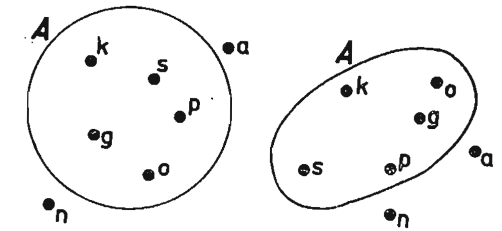
Obratiti pažnju da je svaka od množina, npr.:

(1) (svih) živih ljudi (danas) na Zemlji; (2) (svih) zrnaca peska na Zemlji; (3) molekula vode u jednoj čaši; (4) (svih) molekula na Zemlji; (5) tačaka koje bi jedna mašina vrlo brzo otkucavala, a kucanje bi trajalo tri puta onoliko koliko ima godina otkad postoji Zemlja; . . .

konačna množina.

§ 1.6. GRAFIČKO PRIKAZIVANJE MNOŽINE

1. Lakše se operiše množinama kad se one prikazuju crtežom (grafički). U tu svrhu usvojen je najjednostavniji način: zamišlja se da su svi elementi date množine zagrađeni jednim kanapom, jednom žicom, pa se nacrta taj kanap, ta žica, na primer slika 1.1.



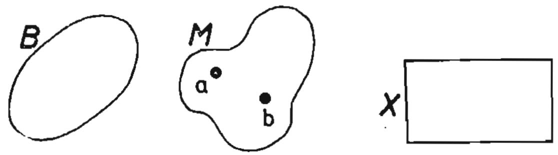
Slika 1.1

Smatram, dakle, da knjiga, sveska, pero, olovka i guma (predmeti koji se nalaze na mom stolu) čine množinu A, zamišljam da su ti predmeti zagrađeni jednim kanapom, nacrtam taj kanap, a elemente množine prikazujem nacrtanim tačkama i pored svake napišem ime (simbol) odgovarajućeg elementa. Na mom stolu se nalaze još nož (n) i šestar (a), ali oni nisu elementi množine A i zato odgovarajuće tačke a i n ne pripadaju oblasti koju određuje nacrtana kriva. Jedan ili drugi crtež (sl. 1.1) predstavlja *dijagram* množine A. On pokazuje da:

$$k \in A, \quad s \in A, \quad g \in A, \quad o \in A, \quad p \in A, \quad a \notin A, \quad n \notin A.$$

Zove se *Venov ili Ojlerov dijagram*.

Ali, prikazivanje elemenata nacrtanim tačkama nije obavezno, iako se to praktikuje kad god je moguće (kad nema mnogo elemenata), jer zamislite da treba prikazati prosvetne radnike jedne opštine, ili jedne republike, tačke jedne prave ili sve prave koje imaju jednu zajedničku tačku. Obavezna je samo kriva linija koja može imati proizvoljan oblik ali koja *ne seče samu sebe* i obavezno je pisati ime množine (A, B, . . . , X, . . .). Pogotovu nije obavezno prikazivanje onih jedinki koje ne pripadaju uočenoj množini; jer ih uvek ima neograničeno mnogo; na primer:



Slika 1.2

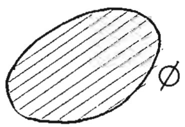
jesu Venovi (Ojlerovi) dijagrami množina B, M i X. U tom slučaju svaka tačka oblasti ograničene krivom (a njih ima neograničeno, beskonačno mnogo) može predstavljati jedan element množine B, odnosno množine M, odnosno množine X. Međutim, kad se elementi prikazuju, odgovarajuće tačke *ne smeju pripadati krivoj liniji, ne smeju biti tačke granice.*

Oblast dijagrama prazne množine se, po pravilu, šrafira crveno (sl. 1.3).

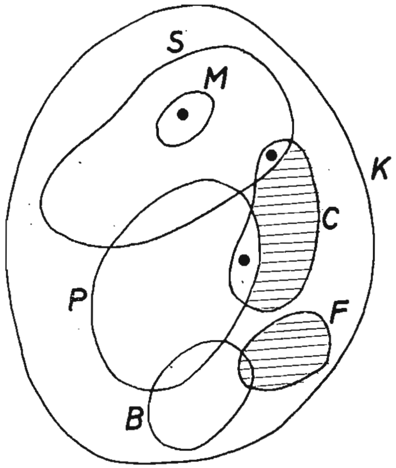
2. Evo, kao primer, kako izgledaju dijagrami množina učenika upisanih u razne sekcije (§ 1.5, t. **1.**): slika 1.4.

Proučite crtež (1.4) i odgovorite na pitanja koja slede, odnosno izvršite ono što se zahteva:

1) Zašto se svi dijagrami nalaze u dijagramu množine K?



Slika 1.3



Slika 1.4

2) Zašto je dijagram množine M u dijagramu množine S?

3) Zašto se dijagrami množine S i P delimično poklapaju?

4) Isto pitanje za dijagrame množina B i P.

5) Pokažite dijagram prazne množine F.

6) Označite (imenujte na crtežu 1.4) elemente množine C. Zašto je jedan deo dijagrama te množine šrafiran?

7) Označite (na crtežu) zajedničke elemente množina: (1) S i P; (2) P i B.

8) Prikažite (tačkama i označite) elemente i, l, n.

3. 1) Nacrtajte dijagram množine $M=\{$prsten na vašem domalom prstu, vaš direktor, avalski toranj, Mesec$\}$. Prikažite na tom dijagramu časovnik vašeg direktora.

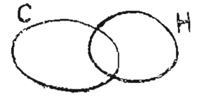
2) Neka je M množina đaka vašeg odeljenja, K množina onih od tih đaka koji sad imaju kecelje na sebi, a L množina onih koji nose naočare. Prikažite te množine Venovim dijagramima.

3) Jedan učenik prikazao je množinu C cveća u prodavnici i množinu H hrizantema u istoj prodavnici ovako (sl. 1.5):

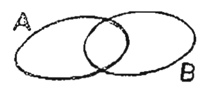
Je li to dobro? Ako nije, kako možete crtež popraviti, a da ništa ne brišete?

4) Pokazan vam je dijagram sl. 1.6 i rečeno vam je $A=B$. Šrafirajte prazne delove (oblasti).

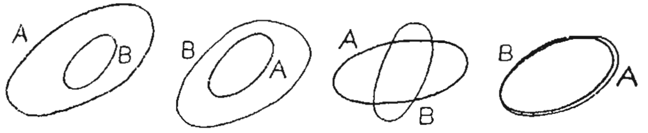
5) Isto za svaki dijagram (sl. 1.7).



Slika 1.5

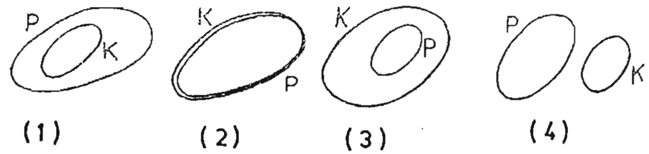


Slika 1.6



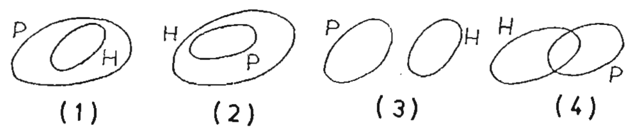
Slika 1.7

6) Neka je K množina kičmenjaka a P množina ptica. Koji je od dijagrama (sl. 1.8) pravilan?



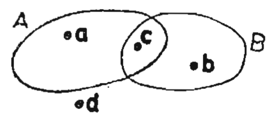
Slika 1.8

7) Neka je P množina parnih, a H množina neparnih brojeva (§ 1.5, t. **5**). Koji od dijagrama (sl. 1.9) pravilno prikazuje te množine?



Slika 1.9

8) Izrazite pomoću znakova $\in$ i $\notin$ pripadnost odnosno nepripadnost prikazanih elemenata (sl. 1.10).



Slika 1.10

§ 1.7. DELOVI (PODMNOŽINE) MNOŽINE

1. 1) Neka je A množina službenika ustanove (škole) u kojoj radite, a B množina službenika te iste ustanove ali koji su mlađi od 30 godina. Šta je onda množina B u odnosu na A? I u običnom životu se kaže da je množina B *deo* množine A. U matematici se taj deo množine zove i *podmnožina*. Prikažite Venovim dijagramima množine A i B.

To se zapisuje ovako:

$$B \subset A,$$

a čita: „B je deo (podmnožina) množine A“ ili „B je uključena, sadržana u A“. A zdesna nalevo: „A sadrži (uključuje) B“.

2) Ranije smo naveli (§ 1.6, t. **3.** 6) primer množina kičmenjaka K i množine ptica P. Šta možete reći za te množine? (Pogledajte i dijagram.) Zato pišemo:

$$P \subset K. \text{ (Pročitajte.)}$$

3) Neka je $P=\{a, b, c\}$ množina prozora, a $S=\{m, n, p, q\}$ množina sijalica u našoj učionici. Šta je: (1) $\{a, c\}$; (2) $\{b\}$; (3) $\{m, q\}$?

Da li je $\{a, c, m\}$ deo množine P? Da li je $\{n, p, c, q\}$ podmnožina množine S?

Množina X zove se deo ili podmnožina množine Y ako, i samo ako, svaki element množine X je element množine Y. Tada kažemo da je množina X sadržana, uključena u Y i to zapisujemo $X \subset Y$, ili $Y \supset X$ (Y sadrži X).

Uključenost, ili sadržavanje, jedne množine u drugu zove se *inkluzija.*

2. 1) Data je množina $S=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Napišite njenu podmnožinu (njen deo) koju čine: (1) prosti brojevi; (2) brojevi deljivi brojem 3; (3) brojevi deljivi brojem 2.

2) Data je množina $T=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Napišite njen deo (podmnožinu) koji (a) čine: (1) parni brojevi; (2) multiplumi broja 3; (3) delioci broja 48; (4) brojevi deljivi brojem 11.

3) Neka je B množina stanovnika grada Beograda, E množina stanovnika Evrope, J množina stanovnika Jugoslavije, Z množina stanovnika na Zemlji. Ja vas, čitaoče, označavam slovom t. Izrazite (simbolima) kojim (od napred navedenih) množina pripada t?

4) Označimo sa D_{12} množinu delilaca broja 12. Da li je tačno: $D_{12} \subset D_{48} \subset D_{240} \subset N$?

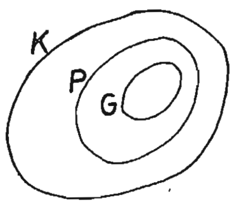
5) Neka je R množina đaka koju čine učenici IV razreda učiteljice Dobrile, a T množina đaka istog odeljenja čija masa iznosi: (1) više od 10 kg; (2) više od 70 kg; (3) između 25 i 35 kg. Prikažite svaki slučaj grafički.

3. 1) Neka je K množina kičmenjaka, P množina ptica, a G množina golubova. Da li je pravilan ovaj dijagram (sl. 1.11) i koju osobinu inkluzije on pokazuje?

Pravilan je i pokazuje da ako su X, Y, Z tri množine i

$$\left.\begin{array}{l}\text{ako je } X \subset Y \\ \text{a } \quad Y \subset Z\end{array}\right\}, \text{ onda je } X \subset Z,$$

to jest *inkluzija je tranzitivna.* (Upor. § 1.4, t. **4.**)



Slika 1.11

I to je jasno, jer $X \subset Y$ označava da svaki element množine X je element množine Y, a $Y \subset Z$ označava da svaki element množine Y je element množine Z. Iz toga sledi da svaki element množine X je element množine Z.

2) Da li je inkluzija refleksivna? Jeste, jer svaki element množine X je element množine X, to jest: $X \subset X$.

Na primer, $X=\{a, b, c\}$ je „deo“ množine $X=\{a, b, c\}$.

Znači, *svaka množina je deo same sebe.*

Zato: Ako je $X \subset Y$, ali Y sadrži i elemente koji nisu elementi množine X, kažemo: X je *pravi* deo (množine) Y. Ako, pak, dopuštamo i mogućnost da je svaki element Y i element X, pišemo $X \subseteq Y$ (X je sadržano ili jednako Y).

Ali, i *prazna množina je deo svake množine,* tj. $\varnothing \subset X$.

Zaista, svaki element prazne množine (koji u stvari ne postoji) je element svake množine X.

Već smo (t. **2.** 5) naveli primer: Množina đaka učiteljice Dobrile čija je masa veća od 70 kg je *deo* (podmnožina) množine R koju čine svi đaci (odeljenja učiteljice Dobrile).

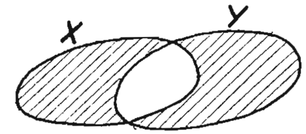
3) Neka je $X \subset Y$ i $Y \subset X$. (Uporedite simetričnost jednakosti: Ako je $X=Y$, onda je $Y=X$.) Šta sledi iz toga? $X \subset Y$ označava, prema definiciji, da svaki element množine X je element množine Y, a $Y \subset X$ označava da svaki element množine Y je element množine X. Dakle,

$$\text{iz } X \subset Y \text{ i } Y \subset X \text{ sledi } X=Y.$$

Ako je množina X deo (podmnožina) množine Y, a Y je deo (podmnožina) množine X, množine X i Y su jednake.

Grafički prikazana ta osobina izgleda ovako (sl. 1.12):

Jer, ako je svaki element množine X element množine Y, onda je „deo“ dijagrama množine X, van množine Y prazan pa ga šrafiramo. Isto kad posmatramo $Y \subset X$.



Slika 1.12

Ta se osobina inkluzije zove *antisimetričnost,* tj. *inkluzija je antisimetrična.*

Iz toga sledi jedna korisna *posledica.* Naime, da bi se pokazalo da su dve množine A i B jednake, treba pokazati: (1) $A \subset B$ i (2) $B \subset A$.

Dakle, ako su X, Y, Z ma koje množine, osobine inkluzije jesu:

$$X \subseteq X \text{ (refleksivnost);}$$

Ako je $X \subset Y$ i $Y \subset Z$, onda je $X \subset Z$ (tranzitivnost);

Ako je $X \subset Y$ i $Y \subset X$, onda je $X=Y$ (antisimetričnost).

Važna primedba:

$A=A$ i $A \subset A$ je ista „stvar“. Međutim, kad je $A=\{a\}$, onda $a \neq \{a\}$, nego $a \in \{a\}$ (§ 1.5, t. **2**). Dakle:

Množina, čak i kad je singleton, nije jednaka jednom svom elementu.

Drugim rečima, *množina i element su dve različite „stvari“, dva različita objekta, dva različita pojma* (§ 1.4).

4. 1) Da li je $\{9, 1, 6\}$ množina arapskih cifara? Nije množina, već deo te množine.

2) $\{9, 1, 6\}$ je množina cifara koje figurišu u napisanom prirodnom broju: 1969; 916; 619; 196; 169. Iz toga je jasno da napisani prirodni broj nije množina cifara.

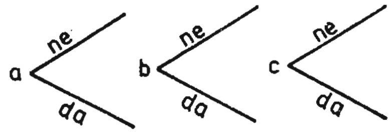
3) Šta je, na „terenu“ Niš, a šta je $\{\text{Niš}\}$?

§ 1.8. MNOŽINA DELOVA (PODMNOŽINA) MNOŽINE

1. 1) Posmatrajmo množinu prozora učionice $A=\{a, b, c\}$.

Prazna množina $\varnothing$ je njen deo	$\varnothing$
Tri njena dela od po 1 elem. — 3 singletona	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
Tri dela od po 2 elem. — 3 para	$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$
Sama množina A (takođe je deo)	$\{a, b, c\}$

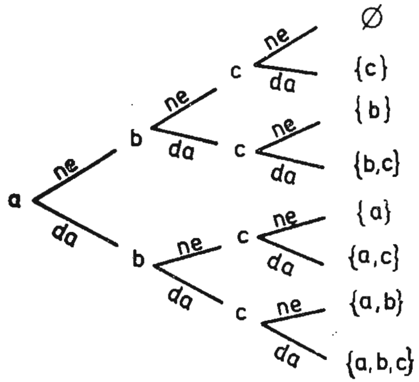
„Zagradimo" i dobijamo dijagram *množine delova (podmnožina) množine A*.



Ta se množina označava ovako $\boldsymbol{P}(A)$.

Drugi način dobivanja njenih elemenata prikazan je crtežom (sl. 13).

Naime, ako je X jedan deo množine A, onda postoje dve mogućnosti: a nije element podmnožine X, a jeste element podmnožine X. Zato iz a „povućemo" dve crte i duž jedne napišemo „ne", a duž druge „da". To isto važi za b i c i zato pođemo od a, idemo duž jedne „grane" i na kraju sastavljamo množinu samo od onih elemenata iz kojih izlazi crta „da".



Slika 1.13

2) Zamislite (svima nama poznatu) porodicu Blagojević koju čine otac, majka, sin i kćerka, tj.:

$$B=\{\text{otac, majka, sin i kćerka}\},$$

ili, kraće:

$$B=\{o, m, s, k\}.$$

Ujutru, u 6 časova nema u sobi za ručavanje nijednog člana te porodice, tj. tamo se nalazi njen deo (podmnožina) $\varnothing$ ili $\{\ \}$.

Oko 7 časova prvi uđe i sedne otac (da doručkuje) $\{o\}$.

Posle toga uđe sin, pa je sad (u sobi za ručavanje) deo . . . . $\{o, s\}$

Ali umesto sina mogle su ući majka ili kćerka, dakle . . . . $\{o, m\}$

ili . . . . $\{o, k\}$.

Isto tako mogla je, umesto oca, da uđe prvo majka, tj. . . . . . . $\{m\}$.

Zatim . . . . $\{m, s\}$

ili . . . . $\{m, k\}$. [Jer smo $\{m, o\}$ već imali.]

Ako je prvo ušao sin, imamo . . . . $\{s\}$.

Zatim . . . . $\{s, k\}$.

Ako je prva ušla kćerka, imamo . . . . $\{k\}$.

Mogli su ući i istovremeno sesti za sto otac, majka i sin . . . . . . $\{o, m, s\}$

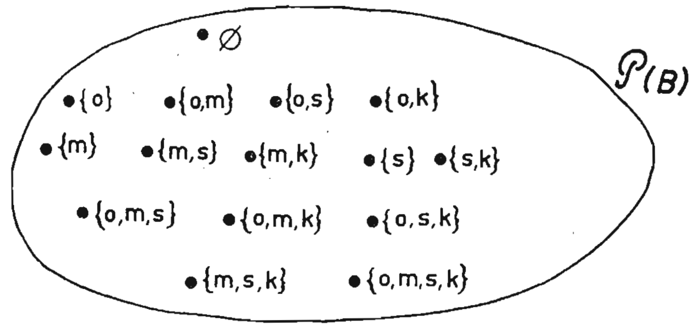
ili . . . . $\{o, m, k\}$

ili . . . . $\{o, s, k,\}$

ili . . . . $\{m, s, k\}$.

Najzad, mogli su svi istovremeno sesti za sto, tj. . . . . $\{o, m, s, k\}$.

Množina*



Slika 1.14

ili u obliku ekstenzivne definicije:

$$\boldsymbol{P}(B)=\Big\{\varnothing,\ \{o\},\ \{o, m\},\ \{o, s\},\ \{o, k\},\ \{m\},\ \{m, s\},\ \{m, k\},\ \{s\},\ \{s, k\},\ \{k\},\ \{o, m, s\},\ \{o, m, k\},\ \{o, s, k\},\ \{m, s, k\},\ \{o, m, s, k\}\Big\}.$$

zove se *množina delova (podmnožina) množine B*.

Kratko može da se čita „*p* od *B*".

Množina podmnožina (delova) date množine se najlakše sastavlja postupkom prikazanim crtežom 1.13. [Sastavite i tako $\boldsymbol{P}(B)$.] Ali *nije* teško ni pisati redom: praznu množinu, sve singletone, sve parove, zatim množine od po 3 elementa, itd. Na primer množina podmnožina (delova) množine $M=\{a, b, c, d\}$ jeste:

$$\boldsymbol{P}(M)=\Big\{\varnothing;\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{a, d\},\ \{b, c\},\ \{b, d\},\ \{c, d\},\ \{a, b, c\},\ \{a, b, d\},\ \{a, c, d\},\ \{b, c, d\},\ \{a, b, c, d\}\Big\}.$$

2. 1) Sastavite množinu delova množine:

$$C=\{a, b\};\qquad D=\{0, 1, 2\};\qquad E=\{1, 2, 3, 4\}.$$

2) Šta su elementi množine delova date množine? To su množine. Prema tome, ako delove (sastavljene na pokazani način) množine X označimo sa $\varnothing$, $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L$, onda je:

$$\boldsymbol{P}(X)=\{\varnothing, A, B, C, D, E, F, G, H, K, L\}.$$

3. 1) Iz koliko elemenata se sastoji množina delova date množine? To zavisi od broja njenih elemenata. Uzmite množine od 0, 1, 2, 3, . . . elemenata i pokušajte da sami pronađete formulu za izračunavanje broja delova ma koje množine.

2) Izračunajte broj elemenata množine $\boldsymbol{P}(X)$ kad se X sastoji od: 6; 8; 10 elemenata.

---

* Na crtežu 1.14 nedostaje deo $\{k\}$.

§ 1.9. VEŽBANJA I ZADACI

1. Nađite, ili sastavite, 7 množina i napišite njihove definicije (bar jednu, a kad god je moguće i obe definicije iste množine).

2. Umesto tri tačke (. . .) stavite znak $\in$ ili $\notin$:

(1) Mira . . . kolektivu moje škole (ustanove).

(2) Mirina desna ruka . . . kolektivu moje škole.

(3) Palac moje desne ruke . . . množini mojih ruku.

(4) 7 . . . $\{6+3,\ 5+0,\ 4+5,\ 8-1,\ 7-1\}$.

(5) 1011 . . . $\{x|x$ je multiplum broja $3\}$.

3. Prazna množina je (jedan) pojam.

Da li je $\{\varnothing\}$ prazna množina? Nije, nego singleton čiji je (jedini) element $\varnothing$. Uostalom $\{\ \}$ je znak za praznu množinu, a $\{\varnothing\}$ je . . .

Ma koji bio element x, uvek $x\notin\varnothing$ (jer $\varnothing$ ne sadrži nijedan element).

Međutim $\varnothing\in\{\varnothing\}$ (§ 1.7. primedba 2.).

Dakle $\varnothing\notin\varnothing$, a $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

Šta pokazuje $\varnothing=\{\ \}=\varnothing$?

Je li tačno $\{\{\ \}\}=\{\varnothing\}$?

Zašto je $\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ par?

4. 1) Ima li jednakih množina među ovima:

$\{g, a, b, c, t\}$, $\{s, a, g, c, b\}$, $\{s, g, m, a, k\}$, $\{a, g, a, m, k\}$, $\{k, m, s, g, a, k\}$?

5. Pročitajte, a zatim napišite ekstenzivnu definiciju date množine [kad to nije moguće napišite 5 prvih elemenata i . . . (3 tačke — simbol za „i tako dalje")]:

$G=\{x|x$ je granična država Jugoslavije$\}$

$H=\{a|a$ je moj bivši profesor matematike$\}$

$A=\{y|y$ je domaći preživar$\}$

$B=\{y|y$ je domaći sisar$\}$ [Je li $A=B$?]

$M=\{x|x$ multiplum broja $7\}$

$P=\{z|z$ paran broj između 17 i $83\}$

6. Napišite množinu čiji su elementi:

(1) 13; (2) 17, 19; (3) brojevi koji ne dele (nisu delioci) broj 32; (4) multiplumi broja 25.

7. Neka div 18 označava množinu delilaca broja 18, tj. div $18=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ ili div $18=\{x\mid x$ je delilac broja $18\}$.

1) Napišite obe definicije množine: div 12; div 20; div 72; div 7; div 29; div 73.

2) Pokažite da je: div $1=\{1\}$; div $0=\{1, 2, 3, \ldots\}$.

8. Umesto . . . stavite $=$ ili $\neq$:

(1) $\{0, 1, 2, 4, 8\}\ldots\{x\mid x$ deli $8\}$;

(2) $\{0, 1, 4, 9, 16\}\ldots\{x\mid x=a\times a\}$ i $a\in\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

(3) $\{5, 27, 37, 121\}\ldots\{11\times 11,\ 5,\ 74:2,\ 3\times 3\times 3\}$;

(4) $\{78, 9, 24, 13\}\ldots\{3\times 8,\ 1+2+3+2+1,\ 65:5,\ 80-2\}$;

(5) $\{8, \varnothing, 38, 51\}\ldots\{76:2,\ 2\times 2\times 2,\ 2+7\times 7\}$.

9. Je li tačno:

(1) $\{x\mid x\neq x\}=\{\ \}=\varnothing$; (2) $\{x\mid x=1$ i $x=2\}=\varnothing$;

(3) $\{1, 2\}=\{x\mid x=1$, ili $x=2\}$; (4) $\{11\}=\{x\mid x=11\}$?

10. 1) Vaš nastavnički kolektiv čine učitelji i nastavnici vaše škole. Neka je to množina K. Šta je množina M koju čine nastavnici matematike. Izrazite to simbolima. Prikažite i Venovim dijagramom.

2) Neka je, u vezi sa prethodnim, A množina učitelja vaše škole. Izrazite simbolima relaciju između A i K. Ima li škola u kojima su množine A i K takve da je $A\subseteq K$?

11. Imenujte bar jednu podmnožinu množine:

(1) $\{x\mid x$ je osobni automobil$\}$; (2) $\{x\mid x$ je sisar$\}$;

(3) $\{x\mid x$ je preživar$\}$; (4) $\{y\mid y$ je naselje$\}$;

(5) $\{z\mid z$ je naša socijalistička republika$\}$.

12. 1) Nacrtajte dijagram množine S čije su podmnožine:

$H=\{x\mid x$ neparan broj$\}$; $C=\{x\mid x$ đak naše škole$\}$;

$F=\{x\mid x$ glavni grad Francuske$\}$; $E=\{a, e, c\}$;

$A=\{x\mid x$ civilni jugoslovenski aerodrom$\}$;

$M=\{y\mid y$ stanovnik Moskve$\}$.

2) Nacrtajte dijagram množine R čije su podmnožine:

$A=\{x\mid x$ stanovnik Beograda stariji od 30 godina$\}$;

$B=\{y\mid y$ stanovnik Beograda koji govori engleski$\}$;

$C=\{z\mid z$ stanovnik Beograda mlađi od 15 godina$\}$;

$D=\{u\mid u$ stanovnik Beograda i učitelj$\}$;

$E=\{v\mid v$ stanovnik Beograda koji ima svoj soliter$\}$.

3) Nacrtajte, na istom crtežu, dijagrame množina N, P, H datih u § 1.5, t. **5.**

13. Napišite sve delove (podmnožine) množine:

(1) {Zagreb, Moskva, Prag};

(2) $\{100, 100000\}$; (3) $\{0\}$; (4) $\{\varnothing\}$; (5) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

(6) $\{x\mid x$ naša socijalistička republika$\}$.

14. Neka je $A=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B=\{5, 7, 9, 11\}$. Napišite podmnožinu (deo) množine A:

(1) čiji su elementi i elementi množine B;

(2) čiji su elementi parni brojevi, a pripadaju i množini B;

(3) čiji su elementi neparni brojevi, a elementi su i množine B;

(4) čiji su elementi manji od 11;

(5) čiji su elementi deljivi brojem 4.

15. Umesto . . . stavite $\in$ ili $\subset$:

(1) $\{1, 2, 8\}\ldots\{0+1, 2+1, 1+1, 23-15\}$;

(2) $\{1\}\ldots\{\{5\}, \{1\}, \{2\}\}$;

(3) $7\ldots\{7\}$; (4) $\{x, y\}\ldots\{y, x\}$.

16. Napišite ekstenzivnu definiciju množine:

(1) $P\{a, b\}$; (2) $P\{a, b, c\}$; (3) $P\{a\}$; (4) $P(\varnothing)$.

17. Ako su A i B množine, onda je:

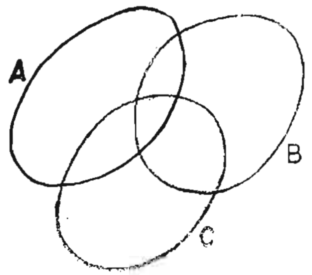
ili $A\subset B$ [A je deo množine B];

ili $A\not\subset B$ [A nije deo množine B]; ili $A=B$.

Ali, ako $A\not\subset B$, onda je jasno da ne mora biti $B\subset A$; na primer: $\{a, b\}\not\subset\{a, c\}\not\subset\{a, b\}$.

18. Napišite bar jednu množinu X koja zadovoljava uslov:

(1) $\{a, b\}\subset X\subset\{a, b, c, d\}$; (2) $\{0, 1, 2\}\subset X\subset\{2, 3, 0, 1, 4\}$.



Slika 1.15

19. Precrtajte svako pogrešno ili besmisleno tvrđenje:

(1) $(3+4)\in\{5, 9, 8, 2\}$;
(2) $3\in\{0, 1, 2, 3\}$;
(3) $\{7\}\subset\{1+3, 3+4, 20:5\}$;
(4) $\{3\}\subset\{1, 2, 3, 4\}$;
(5) $\{3\}\subset\{3, \{3\}, \{3, 4\}\}$;
(6) $\{3\}\in\{\{1\}, 4, 5\ \{3\}\}$.

20. 1) Šrafirajte prazne delove (oblasti) dijagrama 1.15 kad označavaju: A množinu goveda, B množinu preživara, C množinu sisara.

2) Isto kad A označava množinu ptica, B množinu roda, a C množinu vrabaca.

3) Nacrtajte Venove dijagrame sledećih množina:

(1) $A=\text{div } 12$, $B=\text{div } 13$ i $C=\text{div } 35$;

(2) $A=\{2, 3, 7, 13, 41\}$, $B=\{3, 7, 23\}$ i $C=\{2, 23, 31\}$;

(3) A=množina slova reči *brat*, B=množina slova reči *sestra*, C=množina reči *miš*.

§ 1.10. DODATAK: DEFINICIJA, IMPLIKACIJA, EKVIVALENCIJA

1. Pošli smo samo od jednog prvobitnog pojma: množina (skup, mnoštvo). Ostale pojmove smo *definisali*: pomoću pojma *množina* i drugih koje smo ili formirali u svakodnevnom životu ili smo ranije uveli, definisali. Na primer:

(1) Svaka jedinka koja ulazi u sastav date množine zove se element te množine.

„Jedinka" je pojam koji smo (čitalac i autor) formirali u svakodnevnom životu. Mi smo ga ilustrovali primerima (§ 1.1., t. **1**).

„Ulazi u sastav" je takođe pojam za koji pretpostavljamo da je izgrađen pomoću posrednog značenja reči „ulazi" i pojma „sastav".

(2) *Jednakost množina* (i elemenata) je pojam koji smo definisali pomoću prethodno definisanog pojma „element" i pomoću pojma „isti" koji smo morali prethodno formirati u svakodnevnom životu.

(3) Deo (podmnožinu) množine definisali smo pomoću pojmova „svaki" i „zajednički" (element) koje smo morali prethodno izgraditi, formirati.

I tako dalje. Refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, . . . su takođe pojmovi, iako su to osobine drugih pojmova (jednakosti, inkluzije, . . .). Mi smo ih takođe definisali.

Ne treba, dakle, mešati definiciju pojma, njegovo određivanje pomoću drugih pojmova i njegovo „objašnjenje" ili, što se češće primenjuje, navođenje primera koji ga ilustruju. Ono što je podvučeno u § 1.1 nije definicija nego objašnjenje: kad se može smatrati da je jedna množina data, kad se o njoj može govoriti. Iako,

prevedeno na naš jezik, „definisati" znači „određivati (odrediti)", ipak te dve reči nisu sinonimi. „Ekstenzivna definicija" je, na primer, određivanje, imenovanje elemenata koje ćemo smatrati množinom. Definicija pomoću karakteristične osobine je prava definicija (jedne) množine.

2. Inkluzija se definiše:

Množina A je sadržana (uključena) u množini B ako je svaki element množine A element i množine B.

Jednakost množina se takođe definiše:

Množina A je jednaka množini B ako je svaki element množine A element i množine B, a svaki element množine B je i element množine A.

Ali to nisu prave definicije. To su tvrđenja. (Definicija mora da se završi, a ponekad i počinje, nazivom, terminom, a poslednjim dvema rečenicama se nešto tvrdi, a ne naziva.) To se još bolje vidi ako ih „preformulišemo" ovako:

Ako je svaki element množine A element i množine B, onda je A sadržana (uključena) u B.

Ako je svaki element množine A element (i) množine B, a svaki element množine B je element (i) množine A, onda su A i B jednake množine.

U prvom slučaju, dakle, „ide" samo od A ka B, a u drugom „ide" i od A ka B i od B ka A.

Prvo se tvrđenje zove *implikacija*, a drugo *ekvivalencija*.

Simbolički, implikacija se zapisuje $x\in A\Rightarrow x\in B$, (ako x pripada množini A, onda x pripada i množini B. Ili, i kraće i bolje: Iz $x\in A$ *sledi* $x\in B$, a ekvivalencija se zapisuje $x\in A\Leftrightarrow x\in B$. (Pročitajte.)

Ako savremenu matematiku shvatimo kao skup množina, onda su množina definicijâ, množina implikacijâ i množina ekvivalencijâ tri njene važne podmnožine. Zato ćemo s njima (definicijama, implikacijama i ekvivalencijama) stalno „imati posla". Ovde ćemo navesti samo neke primere (iz onoga što je izloženo).

1) Simetričnost (osobina jednakosti) je jedna implikacija i izražava se:

$$\left.\begin{array}{r} a=b\Rightarrow b=a \\ \text{ili}\qquad A=B\Rightarrow B=A \end{array}\right\}\begin{array}{l} \text{Iz . . . sledi . . .} \\ \text{Ili: Ako je . . . , onda . . .} \end{array}$$

2) Tranzitivnost (jednakosti i inkluzije) je takođe implikacija:

$$\left.\begin{array}{l} (a=b \text{ i } b=c)\Rightarrow a=c \\ (A\subset B \text{ i } B\subset C)\Rightarrow A\subset C \end{array}\right\}\ \text{Pročitajte.}$$

Sledi li, obrnuto, iz $A\subset C$ ono što stoji na levoj strani ($B\subset C$ i $A\subset B$)? Zato strelica i nije dvosmerna.

3) Antisimetričnost (inkluzije i jednakosti):

$$(A\subset B \text{ i } B\subset A)\Rightarrow A=B;$$
$$(a=b \text{ i } b=a)\Rightarrow a=b.$$

4) Neka je X jedna množina.

Šta označava $Y\subset X$? A šta označava $Y\in \boldsymbol{P}(X)$?

Te dve formule označavaju istu „stvar" (§ 1.8), jer samo ako je Y deo množine X, onda je Y element množine $\boldsymbol{P}(X)$, množine (svih) delova množine X

i *obrnuto*: Ako je Y element množine $P(X)$, onda Y je deo (podmnožina) množine X. Imamo, dakle, ekvivalenciju koju kratko izražavamo:

(1) $$Y \subset X \Leftrightarrow Y \in P(X).$$

Čitamo kako je rečeno, ili kraće:

Iz $Y \subset X$ (Y sadržano u X) sledi $Y \in P(X)$. I obrnuto: iz $Y \in P(X)$ sledi $Y \subset X$.

Ili, još kraće i najčešće: $Y \subset X$ ako, i samo ako, $Y \in P(X)$.

Isto tako, rekli smo (uveli smo konvenciju, § 1.7) da je i množina deo same sebe, što se kratko izražava:

(2) $$X \in P(X).$$

Na osnovu toga u množini podmnožina imamo:

tranzitivnost pripadnosti:

(3) $$[X \in P(Y) \text{ i } Y \in P(Z)] \Rightarrow [X \in P(Z)];$$

antisimetričnost pripadnosti:

(4) $$[X \in P(Y) \text{ i } Y \in P(X)] \Rightarrow (X = Y);$$

pripadnost prazne množine:

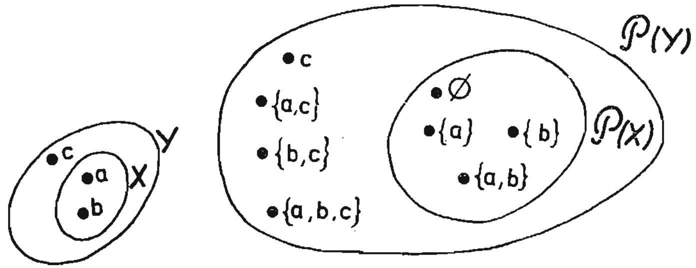
(5) $$\varnothing \in P(X).$$

Najzad, jedna važna implikacija jeste i:

(6) $$X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y),$$

tj.: *ako je X deo množine Y, onda je i množina delova množine X deo množine delova množine Y.*

Ona je prikazana (ne dokazana) dijagramom (sl. 1.16):



Slika 1.16

5) Navedimo još jedan primer ekvivalencije:

a je prost broj $\Leftrightarrow$ div a je jedan par [§ 1.5].

Sleva nadesno: Broj je prost ako, i samo ako, ima dva delioca.
Zdesna nalevo: Ako broj ima samo dva delioca, on je prost.
Kraće: a je prost broj ako, i samo ako, ima dva delioca.

Rezime

Matematički objekt: najopštiji naziv za sve ono čime matematika operiše ili što ona ispituje.

1. *Množina*

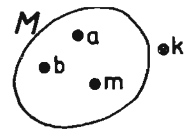
1) Množina (skup, mnoštvo) je jedan od prvobitnih pojmova (prvobitnih objekata) koji se ne definiše.

2) Ako treba da se govori o jednoj množini, ona se mora odrediti, definisati. Definiše se:

ekstenzivno, npr. $A\{a, b, c, d\}$;
opisno, npr. $B = \{x \mid x$ je domaća životinja$\}$.

3) Venov dijagram množine M

$a \in M, \quad k \notin M.$



Slika 1.17

4) Prazna množina $\varnothing = \{\ \}$.
5) Singleton $\{a\}$, par $\{a, b\}$.
6) Konačna množina: $\{a, b, c, \ldots, k\}$.
7) Beskonačna množina: $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$.
8) Množina delova date množine M: $P(M) = \{D \mid D \subset M\}$.

2. *Jednakost*

1) Ma koja dva izraza (ili dva simbola) koji označavaju isti objekt.

2) Svaka jednakost je:

refleksivna $\quad a = a$;
simetrična $\quad$ iz $a = b$ sledi $b = a$;
tranzitivna $\quad$ iz $a = b$, $b = c$ sledi $a = c$.

Poslednje dve osobine izražavaju se kraće:

$$a = b \Rightarrow b = a; \qquad (a = b \text{ i } b = c) \Rightarrow a = c.$$

3. *Inkluzija*

1) Množina A je deo ili podmnožina množine M ako su svi elementi množine A elementi množine M. Tada se kaže da je A sadržana (uključena) u M i to se zapisuje, npr. $A = \{a, b, c\} \subset M = \{a, b, c, d\}$.

Konvencije $\varnothing \subset M$ i $M \subset M$.

2) Svaka inkluzija je:

refleksivna $\quad A \subset A$;
tranzitivna $\quad$ iz $A \subset B$ i $B \subset C$ sledi $A \subset C$;
antisimetrična iz $A \subset B$ i $B \subset A$ sledi $A = B$.

Poslednje dve osobine izražavaju se kraće:

$$(A \subset B \text{ i } B \subset C) \Rightarrow A \subset C; \qquad (A \subset B \text{ i } B \subset A) \Rightarrow A = B.$$

Jednakost i inkluzija su dve (matematičke) *relacije*.

GLAVA II

OPERACIJE NAD MNOŽINAMA

Ako se na bilo koji način učini da dvama objektima odgovara treći, kažemo da je nad tim dvama objektima izvršena *operacija*.

To je najopštija definicija *binarne** operacije.

Poznato je, npr., da se objektima (koji se imenuju, zapisuju) 2 i 8 može učiniti da odgovara (može se dodeliti) objekt: 10; 16; 6; 4. U svakom od tih slučajeva je nad 2 i 8 izvršena jedna operacija.

Uopšte, sva tri objekta (dva nad kojima se vrši operacija i treći — rezultat operacije) su iste prirode. U ovoj glavi će biti reči o operacijama nad množinama čiji su rezultati ponovo množine.

§ 2.1. PRESEK, UNIJA, RAZLIKA DVEJU MNOŽINA

1) Neka je A množina automobila registrovanih u Jugoslaviji, a B množina automobila marke „moskvič". Ima li među elementima množine A „moskviča"? (Ima.) Ima li „moskviča" koji nisu elementi množine A? (Sigurno, u SSSR, u Bugarskoj, itd.) Znači, množine A i B imaju neke *zajedničke* elemente. Te (zajedničke) elemente možemo posmatrati kao jednu (zasebnu) množinu:

(1) {automobili marke „moskvič" registrovani u Jugoslaviji}.

Osim te, možemo posmatrati i druge množine:

(2) {automobili registrovani u Jugoslaviji, a koji *nisu* marke „moskvič"};

(3) {automobili marke „moskvič", a koji *nisu* registrovani u Jugoslaviji};

(4) {automobili registrovani u Jugoslaviji i automobili marke „moskvič"}.

Množina (1) zove se *presek* množina A i B, kratko se označava ovako:

$A \cap B$, a čita: „A presek B".

Množina (2) zove se *razlika* množina A i B, označava se:

$A \setminus B$, a čita: „A manje B".

Množina (3) zove se *razlika* množina B i A, označava se:

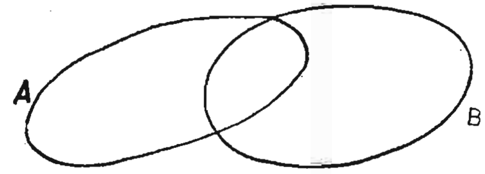
$B \setminus A$, a čita: „B manje A".

Množina (4) zove se *unija* množina A i B, označava se:

$A \cup B$, a čita: „A unija B".

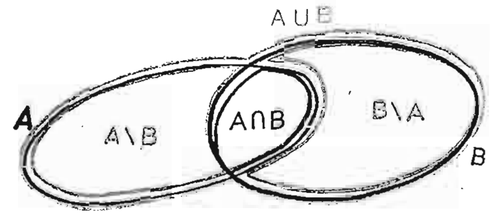
* bi (od bis) = dva. Uporedi bicikl. *Binarna operacija* zato što se vrši nad dva objekta.

Na slici 2.1 prikazani su Venovi dijagrami množina A i B.



Slika 2.1

A na slici 2.2 prikazane su i sve napred spomenute množine:



Slika 2.2

Presek je množina dobijena primenom određene operacije nad dvema množinama. Ta se operacija sastoji u izdvajanju zajedničkih elemenata dveju datih množina [i sastavljanju od njih nove (treće) množine]. Da ne bismo povećali broj termina i samu operaciju nazvaćemo *presekom*.

Unija je množina dobijena primenom određene operacije nad dvema množinama. Ta operacija sastoji se u sastavljanju nove množine od elemenata koji pripadaju *bar (najmanje)* jednoj od dveju datih množina. I sama operacija zove se *unija*.

Razlika je množina dobijena . . . (Dovršite.) Prema tome:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}; \qquad A \setminus B = \{x \mid x \in A, \text{ a } x \notin B\};$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ ili } x \in B\}; \qquad B \setminus A = \{x \mid x \notin A, \text{ a } x \in B\}.$$

Obratiti pažnju na „i", „ili", „a" (x ne . . .).

2) Da biste proverili kako ste shvatili navedene operacije, uzmite da je $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a, c, e, f, g\}$ i napišite množinu (njenu ekstenzivnu definiciju):

$E \cap F =$ $\qquad$ $E \setminus F =$

$E \cup F =$ $\qquad$ $F \setminus E =$

3) Unija može praviti izvesne teškoće (iako prividne). Neka je:

$$C = \{a, b, c\}, \quad D = \{b, c, d\}, \quad G = \{d, e, f, g, h\}, \quad K = \{h\}.$$

Napišite ekstenzivnu definiciju množine (unije):

$$C \cup D = \ , \quad C \cup G = \ , \quad C \cup K = \ , \quad G \cup K = \ .$$

4) Neka je A množina lala u ovoj prodavnici cveća (koju svi znamo), a B množina žutih cvetova u toj istoj prodavnici.

a) Koji cvetovi čine množinu:

(1) $A \cap B$; (2) $A \cup B$; (3) $A \setminus B$; (4) $B \setminus A$?

b) Šta znači $A \cap B = \varnothing$?

c) Izrazite crtežom i simbolima slučaj: (1) sve lale (u prodavnici) su žute; (2) svi žuti cvetovi (u prodavnici) su lale.

5) Napišite množinu:

(1) $\{x \mid x$ je multiplum broja $2\} \cup \{y \mid y$ je multiplum broja $5\} =$

(2) $\{x \mid x$ je multiplum broja $2\} \cap \{y \mid y$ je multiplum broja $5\} =$

(3) $\{x \mid x$ je multiplum broja $3\} \cap \{y \mid y$ je multiplum broja $10\} =$

§ 2.2. OSOBINE PRESEKA MNOŽINA

Ispitajmo bliže operaciju *presek*.

1. Pre svega rešite primere:

1) Neka je A množina automobila izrađenih u Nemačkoj, a B množina automobila koji nose registraciju BG (Beograd). Šta je tada $A \cap B$?

2) $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{x \mid x$ je paran broj$\}$
$S = \{0, 7, 14, 21, \ldots\} = \{y \mid y$ je multiplum broja $7\}$
$P \cap S =$

3) $E = \{x \mid x$ je član našeg kolektiva$\}$
$F = \{y \mid y$ je stablo koje raste u čika-Siminom dvorištu$\}$
$E \cap F =$

2. 1) Venov dijagram očigledno pokazuje da je za ma koje dve množine X i Y:

$$\boxed{X \cap Y = Y \cap X.}$$

(Nacrtajte, pored onih koje smo već imali, i druge dijagrame, pa proverite.) Ta se činjenica izražava rečima:
Presek dveju množina je komutativan (osobina komutativnosti preseka).

2) Isto tako, Venov dijagram pokazuje da je:

$$\boxed{X \cap X = X}$$

ili, opštije, ako je: $X = Y$,
onda je: $X \cap Y = X = Y$.

Presek dveju jednakih množina je ma koja od njih. Ili: *Rezultat primene preseka na jednu množinu je ta ista množina.*

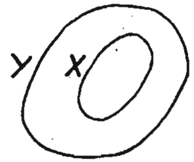
3) Dovršite i obrazložite $X \cap \varnothing =$
Prema tome, a s obzirom na komutativnost:

$$\boxed{X \cap \varnothing = \varnothing \cap X = \varnothing.}$$

Ako je jedna od množina prazna, presek „isprazni" i onu drugu.

4) Šta možete reći o preseku množina prikazanih dijagramom 2.3?

Dakle: $\boxed{\text{ako je } X \subset Y, \text{ onda je } X \cap Y = X.}$



Slika 2.3

Ako je X podmnožina množine Y, njihov presek je množina X.

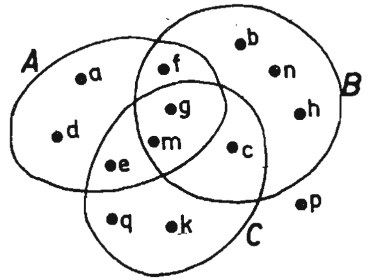
Ako je $Y \subset X$, onda je $X \cap Y =$ (Dovršite.)

3. Pripada li (sl. 2.4) element e množini A, množini B, množini C?

Odgovor: da, ne, da. Odgovorite tako za svaki element na sl. 2.4.

Koji su zajednički elementi množina A, B, C? Oni čine presek tih triju množina i to se zapisuje ovako:

$$A \cap B \cap C = \{g, m\}.$$



Slika 2.4

Kako se određuje taj presek? Odredi se prvo presek $A \cap B = \{f, g, m\}$. Zatim se određuje presek tog preseka i množine C, tj.:

$$\{f, g, m\} \cap C = \{g, m\}.$$

Znači:

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C,$$

gde zagrade označavaju da je izvršen, ili da treba izvršiti, prvo presek $A \cap B$. Međutim, nije teško proveriti da je i:

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = \{g, m\},$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = \{g, m\},$$

tj. da je: $\boxed{X \cap Y \cap Z = (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Z) \cap Y.}$

Presek triju množina određuje se tako što se određuje presek ma koje dve, a zatim presek tog preseka i preostale množine. To se kratko izražava rečima:

Presek množina je asocijativan (osobina asocijativnosti preseka).

Jasno je da asocijativnost preseka važi i za više od tri množine, jer se određuje: presek ma koje tri, a zatim presek tog preseka i četvrte, presek ma koje četiri, a zatim presek tog preseka i pete, i tako dalje.

4. $A = \{$Zaječar, Sisak, Novi Sad, Bitolj$\}$

$B = \{$Cetinje, Niš, Sisak, Zaječar, Bitolj$\}$

$C = \{$Vukovar, Zaječar, Split, Sisak, Bitolj, Mostar$\}$

(1) $A \cap (B \cap C) =$ (2) $(A \cap C) \cap B =$

5. 1) $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$
$B=\{x \mid x \text{ neparan broj manji od } 16\}$
$C=\{3, 6, 9, 12, 15\}$
$D=\{4, 8, 12\}$

(1) $(A \cap C) \cap D=$ (2) $B \cap (C \cap D)=$ (3) $(A \cap D) \cap C=$

2) Šta prikazuje dijagram 6 (1) Uputstava? Postoji li presek množina prikazanih crtežima 6 (2) i 6 (3) Uputstava?

§ 2.3. OSOBINE UNIJE MNOŽINA

1. Podsetite se prvo definicije (§ 2.1):

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \quad \text{ili} \quad x \in B\}$$

rešite primere:

1) Neka je U množina građana Jugoslavije, $A \subset U$ množina radio-pretplatnika, $B \subset U$ množina pretplatnika televizije. Šta je $A \cup B$?

2) $P=\{x \mid x \text{ paran broj}\}$
$H=\{y \mid y \text{ neparan broj}\}$ $P \cup H=$

3) $E=\{x \mid x \text{ multiplum broja } 3\}$
$F=\{y \mid y \text{ multiplum broja } 5\}$ $E \cup F=$

4) $G=\{x \mid x \text{ jugoslovenski brodar}\}$
$K=\{y \mid y \text{ kapetan jugoslovenskog broda}\}$ $G \cup K=$

2. 1) Venov dijagram ma kojih množina X i Y pokazuje da je:

$$\boxed{X \cup Y = Y \cup X.}$$

(Nacrtajte, pored prethodnih, još neke dijagrame i proverite to.)

Ta se osobina izražava rečima:
Unija dveju množina je komutativna (osobina komutativnosti unije).

2) Nacrtajte Venov dijagram ma koje množine X i dovršite:

$$\boxed{X \cup X=\qquad}$$

Iskažite činjenicu rečima.

3) Dovršite $X \cup \varnothing=$

Posmatrajte, recimo, primer $A=\{$Šid, Leskovac, Vranje$\}$.
Obrazložite.

A kako je $\varnothing \cup X=$, to je $\boxed{\qquad\qquad}$.

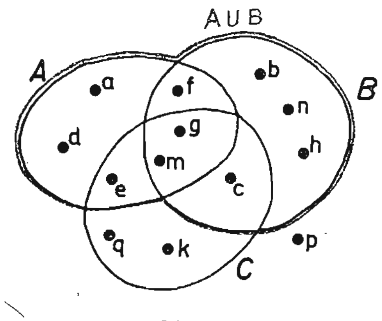
Iskažite činjenicu rečima. Još bolje se to izražava ovako:
Za operaciju unija prazna množina je neutralni element.

4) Napišite uniju množina za slučaj prikazan dijagramom 2.3.

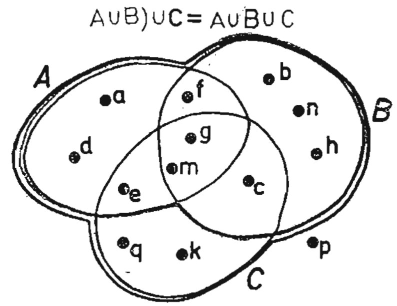
Znači, *ako je X podmnožina množine Y, njihova unija je Y.*

Ako je $X \subset Y$, onda je $X \cup Y=$, a $X \cap Y=$.

3. Kako ćemo odrediti uniju množina A, B, C (sl. 2.4) koja se zapisuje $A \cup B \cup C$?



Slika 2.6



Slika 2.7

Odredimo prvo uniju $A \cup B$ (sl. 2.6). Zatim uniju množine $(A \cup B)$ i množine C (sl. 2.7). Dobijamo:

$$A \cup B=\{a, d, e, m, g, f, b, n, h, c\}$$
$$(A \cup B) \cup C=\{a, d, e, m, g, f, b, n, h, c\} \cup \{e, m, g, c, k, q\}$$
$$=\{a, d, e, m, g, f, b, n, h, c, k, q\}.$$

Odredite sad najpre $(B \cup C)$, a zatim $A \cup (B \cup C)$.

Dobijate opet $\{a, d, e, m, g, f, n, h, c, k, q\}$, gde samo redosled elemenata može biti drukčiji, ali to nema nikakav značaj. Znači:

$$(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)=A \cup B \cup C,$$

što uostalom i crtež, ako ste ga dobro napravili, pokazuje.

Odredite (samo grafički) $A \cup C$, a zatim $(A \cup C) \cup B$. Šta dobijate?

Dakle, ma koje bile množine X, Y, Z,

uvek je: $\boxed{(X \cup Y) \cup Z=X \cup (Y \cup Z)=(X \cup Z) \cup Y=X \cup Y \cup Z,}$

što se rečima izražava:

Unija množina je asocijativna (asocijativnost unije).

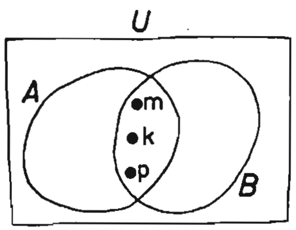
4. 1) $A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (1) $A \cup C \cup D=$
$B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (2) $A \cup B=$
$C=\{3, 6, 9, 12\}$
$D=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (3) $A \cup B \cup C=$

2) $A = \{$Adis Abeba, Kairo, Ohrid$\}$
$B = \{$Bagdad, Titograd, Ohrid, Dubrovnik$\}$
$C = \{$Pariz, Adis Abeba, Bagdad, Maribor$\}$
$D = \{$Titograd, Dubrovnik, Solun, Banja Luka, Split$\}$
(1) $A \cup B \cup C \cup D =$ (2) $B \cup D \cup A \cup C =$ (3) $(A \cup C) \cup (B \cup D) =$

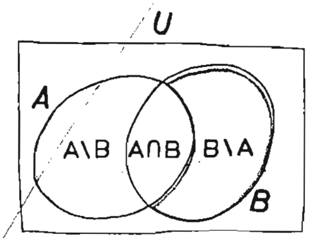
5. $A = \{x \mid x$ nastavnik biologije naše škole$\}$
$B = \{y \mid y$ nastavnik srpskohrvatskog jezika naše škole$\}$
$C = \{z \mid z$ nastavnik ruskog jezika naše škole$\}$
Šta predstavlja množina $C \cup A \cup B$?

§ 2.4. OSOBINE RAZLIKE MNOŽINA

1. 1) Označimo sa U množinu đaka II r. gimnazije u Kikindi školske 1969/70. godine. Neka je A množina đaka tog razreda koji uče („privatno") violinu, a B množina đaka istog razreda koji uče klavir. U najopštijem slučaju dijagram izgleda ovako (sl. 2.8):



Slika 2.8



Slika 2.9

Šta možemo reći o elementima k, m, p? Koji su to đaci? Prema definiciji (§ 2.1) đaci pomenutog II r. *koji uče violinu, a ne klavir, čine množinu* koja se zove *razlika* množina A i B i označava se $A \setminus B$ (sl. 2.9).

Napišite rečima šta označava množina $B \setminus A$.

2) $P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $T = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$.
$P \setminus T =$ $T \setminus P =$

2. 1) Da li je razlika (dveju) množina komutativna? (Odgovorite: *da* ili *ne*, a zatim pogledajte Venov dijagram, sl. 2.9.) Dakle, ma koje bile množine X i Y:

$$\boxed{X \setminus Y \neq Y \setminus X.}$$

Razlika množina nije komutativna.

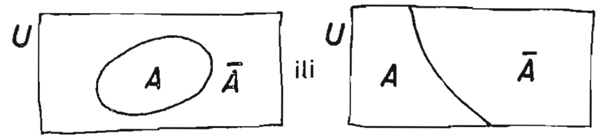
2) Dovršite: $X \setminus \varnothing =$; $\varnothing \setminus X =$
(Ako ne možete (!), nacrtajte dijagram.)
3) Dovršite: $X \setminus X =$
4) Neka je $X \cap Y = \varnothing$ (Šta to znači?) Tada je: $X \setminus Y =$ i $Y \setminus X =$

3. Videli smo da su $\cap$ i $\cup$ asocijativne operacije. Šta mislite o $(X \setminus Y) \setminus Z$? Da li je operacija $\setminus$ asocijativna? Bez obzira na odgovor koji ste dali, pokušajte da ga dobijete crtanjem Venovih dijagrama.

Operacija $\setminus$ *nije asocijativna* (neasocijativnost razlike).

§ 2.5. DOPUNSKE MNOŽINE. OSNOVNA MNOŽINA (BAZA)

1. 1) Neka je U množina koju su činili đaci I_2 Osnovne škole „Vera Radosavljević" u Negotinu, školske 1968/69. godine. Neka je A množina đaka tog (I_2) odeljenja koji nose naočare. A je, znači, podmnožina (deo) množine U. Ali čim su date množine U i A, data je još jedna množina: ona koju čine đaci pomenutog odeljenja, a koji ne nose naočare. Nacrtajte dijagrame tih triju množina.



Slika 2.10

Takvi delovi A (učenika koji nose naočare) i $\bar{A}$ (učenika tog istog odeljenja koji ne nose naočare) iste množine zovu se *dopunske (komplementarne) množine*. Svaka od njih je *dopuna (komplement)* one druge u odnosu na U:

deo $\bar{A}$ množine U	je dopuna (komplement) →	dela A množine U
osobina „ne nositi naočare"	je suprotna →	osobini „nositi naočare"

2) Neka je T množina trouglova:

deo J množine T	je komplement (dopuna) →	dela $\bar{J}$ množine T
osobina „jednakokrak"	je suprotna	osobini „nejednakokrak"

Nacrtajte dijagram.

Dopunske množine, određuju, dakle, dve suprotne osobine.

2. Dopunske množine su delovi (podmnožine) jedne iste množine. Ta množina zove se *osnovna množina* ili, kratko, *osnova* (baza). (V. ranije.)

Osnovna množina je vrlo važan matematički pojam (objekt), jer, uopšte, da bismo mogli sastaviti, definisati jednu množinu, moramo znati odakle, iz koje ćemo množine odabrati one elemente koji imaju jednu određenu osobinu. Kako ćemo sastaviti množinu: đaka koji nose naočare, đaka koji igraju tenis, crvenih olovaka, cigli čije su dimenzije određene, . . . ako ne znamo iz koje ćemo množine đaka odabrati one koji igraju tenis (nose naočare), iz koje ćemo množine odabrati crvene olovke, . . . jer, najčešće, ne možemo da uzmemo u obzir sve đake sveta; sve olovke ili cigle koje sada postoje na Zemlji. Kažemo „najčešće", jer osnovna množina (baza) može biti, na primer: {zvezde (ili još opštije nebeska tela)}, {biljke}, {kičmenjaci}, {škole (u Jugoslaviji)}, {pesme}, {pojmovi}, itd.

Sa osnovnim množinama smo se već susretali iako to nismo spominjali (npr. sl. 2.8, sl. 2.9 i posebno sl. 1.4). A šta je množina delova date množine (§ 1.8)?

1) Imenujte osnovnu množinu množine:

(1) {SR Srbija, SR Slovenija};

(2) {Merkur, Venera, Zemlja};

(3) {Velika Britanija, Belgija, Holandija, Norveška, Švedska};

(4) {2,5; 0,75; 31,58; 0,01; 0,001}; (5) {najlon, perlon}.

2) Gde god se govori o množinama koje imaju zajedničke elemente, mora biti definisana i osnovna množina.

Ali dopunske množine treba izdvojiti iz svih drugih množina uključenih u zajedničku osnovnu množinu (bazu). One čine par. Pri tome se može dogoditi ovo:

$$X \cup \overline{X} = U, \qquad X \cap \overline{X} = \varnothing .$$

Tada dopunske množine iscrpljuju osnovnu množinu. Ali, uopšte, u jednoj osnovnoj množini može biti definisano više parova komplementarnih množina.

3. Jesu li komplementarne navedene dve množine i ako jesu, koja je (njihova) osnovna množina:

(1) $P=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$,	$H=\{1, 3, 5, 7\}$;
(2) $C=$ {pravougli trouglovi},	$D=$ {nepravougli trouglovi};
(3) $E=$ {pravougli trouglovi},	$F=$ {oštrougli trouglovi};
(4) $G=$ {preživari},	$K=$ {ptice};
(5) $L=$ {sisari},	$M=$ {kičmenjaci nesisari}.

4. Neka M označava množinu Mišinih klikera. Neka A označava množinu koju čine Mišini stakleni klikeri, a B množinu njegovih crnih klikera. Napišite rečima („običnim jezikom") množinu:

$$\overline{A};\ \overline{B};\ A \cup \overline{B};\ \overline{A} \cap B;\ \overline{A} \cup \overline{B};\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

5. Neka je osnovna množina:

$U = \{x \mid x$ je svaki prirodni broj od 1 do zaključno $20\}$;

$A = \{1, 2, 5, 7, 9, 11, 12\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13\}$.

Napišite ekstenzivnu definiciju množine:

$$\overline{A};\ \overline{B};\ A \cup \overline{B};\ \overline{A} \cap B;\ \overline{A} \cup \overline{B};\ \overline{A} \cap \overline{B}.$$

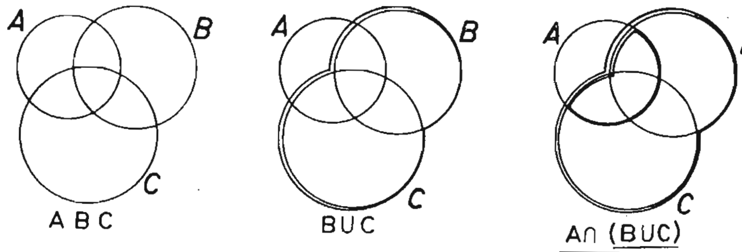
§ 2.6. ISTOVREMENE OPERACIJE (DISTRIBUTIVNOST I ANTIDISTRIBUTIVNOST)*

1. Dosad smo vršili samo jednu operaciju (nad dvema množinama ili više množina). Posmatrajmo sad izraz $A \cap (B \cup C)$.

On označava da treba izvršiti dve operacije: uniju množina B i C i presek te unije i množine A. U konkretnom slučaju (kad su sve tri množine date) obe operacije se mogu lako izvršiti. Međutim, ovde nas interesuje da li je konačni rezultat, konačna množina jednaka množini koja se dobija ovako:

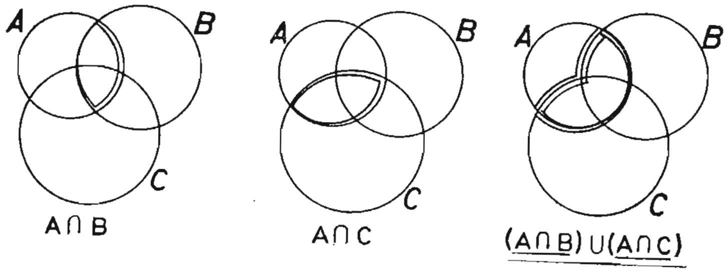
$$(A \cap B) \cup (A \cap C),$$

tj. da li se dobija jednaka (ista) množina ako se izvrši unija preseka A i B i preseka A i C?



Slika 2.11

Venovi dijagrami, koji su nam dosad mnogo pomogli, pomoći će nam i sada. Dijagrami na slici 2.11 pokazuju kako su izvršene operacije $A \cap (B \cup C)$. Dijagrami na sl. 2.12 pokazuju kako su izvršene operacije $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.



Slika 2.12

Rezultat je: $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).}$

On se izražava rečima:

Operacija $\cap$ *(presek) je distributivna u odnosu na operaciju* $\cup$ *(uniju).*

* Antidistributivnost (t. **3**) može se izostaviti pri prvom čitanju.

2. 1) Na sličan način može se pokazati da je:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

tj. *operacija $\cup$ (unija) je distributivna u odnosu na operaciju $\cap$ (presek).*

Ako ste i sami nacrtali prethodne dijagrame (2.11 i 2.12), tj. ako ste i sami pokazali distributivnost preseka u odnosu na uniju, poslednju jednakost (distributivnost unije u odnosu na presek) ćete vrlo lako pokazati. Pokušajte.

2) Neka je: $A=\{0, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 6, 7, 9, 10\}$, $C=\{0, 6, 7, 11, 13\}$.

Pokažite da je:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C); \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

3) Po sebi se razume (i ne treba smetnuti s uma) da je, na osnovu komutativnosti:

$$A\cap(B\cup C)=(B\cup C)\cap A, \qquad A\cup(B\cap C)=(B\cap C)\cup A,$$

pa je: $(B\cup C)\cap A=(B\cap A)\cup(C\cap A), \qquad (B\cap C)\cup A=$

3. Da li je (analogno prethodnom):

(1) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
(2) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$?

Posmatrajmo prvo primer: $A=\{1, 2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 6, 7\}$, $C=\{1, 5, 7, 9, 13\}$

$$A\setminus(B\cup C)=\{1, 2, 4, 6\}\setminus\{2, 3, 6, 7\}\cup\{1, 5, 7, 9, 13\}$$
$$=\{1, 2, 4, 6\}\setminus\{2, 3, 6, 7, 1, 5, 9, 13\}=\{4\}.$$

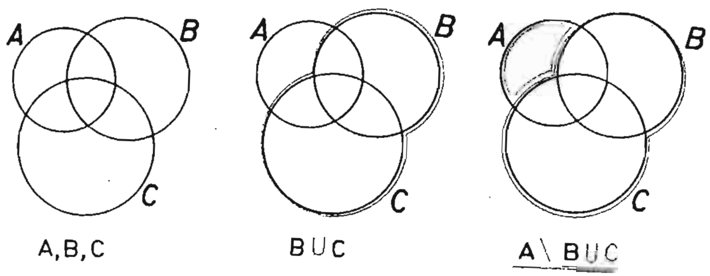
Sad izračunajmo:

$$(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\{1, 4\}\cup\{2, 4, 6\}=\{1, 2, 4, 6\}.$$

Dakle, primer pokazuje da (1) *nije* jednakost. Pokažite na tom primeru da ni (2) nije jednakost. A jedan (kontra) primer je u matematici dovoljan.

1) Pokažimo Venovim dijagramima da je:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$



Slika 2.13

2) Pokažite sami (Venovim dijagramima) da je:

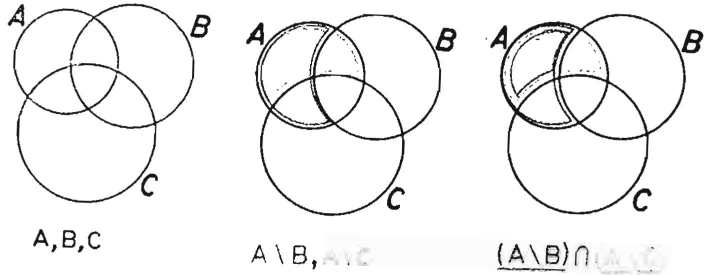
$$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

Znači, razlika „pretvara" $\cup$(uniju) u $\cap$(presek) i obrnuto ($\cap$ u $\cup$). Ta se činjenica izražava rečima:

Razlika je antidistributivna u odnosu na uniju i presek.

Proverite to na prethodnom primeru (ili drugom koji ćete sami izabrati). Proverite i na primeru:

$E=\{$Moskva, Varšava, Prag, Beograd$\}$
$F=\{$Prag, Sofija, Bukurešt$\}$
$G=\{$Varšava, Prag, Beograd, Budimpešta$\}$.

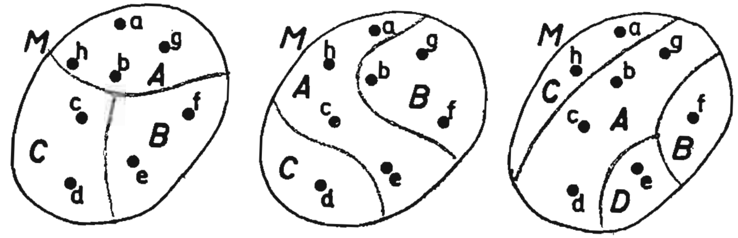


Slika 2.14

Dakle, *operacije $\cup$ i $\cap$ su distributivne, a operacija $\setminus$ je antidistributivna.*

§ 2.7. RASTAVLJANJE (PARTICIJA) MNOŽINE

1. Pogledajte dijagrame 2.15 i 2.16. Oni prikazuju istu množinu M. Kažemo da je na slici 2.15 množina M *rastavljena*, da je *izvršena njena particija*, a da na



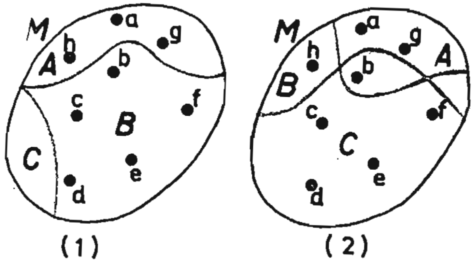
Slika 2.15

sl. 2.16 *nije rastavljena*. Koji uslovi moraju biti ispunjeni pa da množina bude rastavljena?

Iz crteža vidimo dva uslova:

(1) Nijedan od delova (nijedna podmnožina) ne sme biti prazna.

(2) Ma koja dva dela nemaju zajedničke elemente. (Kaže se: ma koja dva dela moraju biti *disjunktivne* množine.)



Slika 2.16

Treći uslov je:

(3) Unija svih delova mora biti sama (data) množina. Na primer, u slučaju:

$$A=\{a, h, c\}, \quad B=\{b, g, f\}, \quad C=\{d\}$$

množina M nije rastavljena, jer $A\cup B\cup C\neq M$. Zašto?

Zato što množina $A\cup B\cup C$ ne sadrži element e.

Simbolima se rastavljanje (particija) izražava ovako:

$\boldsymbol{P}=\{A, B, C\}$ je particija množine M, ako je:

(1) $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $C\neq\varnothing$;
(2) $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\varnothing$;
(3) $A\cup B\cup C=M$.

Prema tome, *množina* $\boldsymbol{P}$ *delova množine* M *koji nisu prazni i koji nemaju zajedničke elemente zove se particija množine* M.

Particija množine je jedna *klasifikacija* elemenata te množine: ona klasifikacija koja zadovoljava prethodna tri uslova.*

2. Primeri i kontraprimeri particije:

1) Neka J označava množinu stanovnika Jugoslavije, a A, B, C, D, E, F neka su množine stanovnika pojedinih socijalističkih republika. Šta predstavlja množina $\{A, B, C, D, E, F\}$?

2) Neka je P množina parnih, a H množina neparnih prirodnih brojeva. Šta je $\{P, H\}$?

3) Neka je $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{3, 4, 5\}$, $D=\{8\}$. Je li $\{B, C, D\}$ particija množine A?

4) Neka je P množina sadržalaca broja 2, T množina sadržalaca broja 3. Je li $\{P, T\}$ particija množine N?

5) Neka je G množina đaka III godine Učiteljske škole u Aleksincu 1969/70. godine. Neka A označava podmnožinu množine G koju čine đaci upisani u grupu za književnost, B podmnožinu množine G — đaci upisani u grupu za psihološka ispitivanja dece, C podmnožinu množine G — đaci koji nisu upisani ni u jednu od prethodnih grupa. Neka je $A\cup B\cup C=G$, $G\setminus C=A\cup B$, $A\cap C=B\cap C=\varnothing$.

Da li je $\boldsymbol{P}$ $\{A, B, C\}$ particija množine G, ako je:

(1) $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $C=\varnothing$, $A\cap B\neq\varnothing$;
(2) $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $C\neq\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$;
(3) $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, $C\neq\varnothing$, $A\cap B\neq\varnothing$?

Kontraprimer se u matematici zove primer koji pokazuje da bar jedan od uslova jedne teoreme ili čitave teorije nije zadovoljen. U tom slučaju „pada" i dotična teorema, odnosno teorija.

* Particija se koristi i na stupnju osnovnog matematičkog obrazovanja.

§ 2.8. VEŽBANJA I ZADACI

1. $A=\{x \mid x$ je broj između 0 i 11$\}$ $\quad C=\{2, 5, 7, 9, 10\}$.
$B=\{y \mid y$ neparan broj manji od 10$\}$ $\quad D=\{2, 6, 8, 10\}$.

„Izračunajte", tj. napišite definiciju množine: $A\cap B$; $A\cap C$; $A\cap D$; $D\cap B$; $A\cup A$; $(A\cap B)\cap C$; $A\cup C$; $C\cup A$; $(A\cap D)\cap(B\cup D)$.

2. Neka je T množina trouglova, A množina jednakostraničnih (trouglova), B množina jednakokrakih, C množina pravouglih, D množina tupouglih trouglova. Svi trouglovi pripadaju istoj ravni.

1) Napišite sve relacije koje postoje između spomenutih množina.

2) „Izračunajte": $A\cap C$; $A\cap D$; $C\cap D$; $T\cap B$; $T\cup B$; $B\setminus T$.

3) Napišite rečima: $B\cap D$; $D\cup B$; $T\setminus B$.

3. „Izračunajte", tj. napišite množinu:

(1) div 40$\cap$div 56= $\quad$ (4) div 512$\cup$div 729=
(2) div 19$\cap$div 47= $\quad$ (5) div 72$\setminus$div 52=
(3) div 1000$\cap$div 625= $\quad$ (6) div 1000$\cup$div 625=

(7) $2N\cup 4N$, gde $2N$ predstavlja skup (množinu) multipluma (sadržalaca) broja 2 i analogno $4N$. [Videti **3.** (7).]

(8) $13N\cap 13=$ $\quad$ (9) div 17$\cap$div 17= $\quad$ (10) $5N\cap 7N=$
(11) div 13$\setminus$div 13= $\quad$ (12) div 17$\setminus$div 34=

4. Odredite: $A\cap B$, $A\cup B$ i $A\setminus B$ kad je:

(1) $A=\{x \mid x$ je riba$\}$, $\quad B=\{y \mid y$ je sisar$\}$,
(2) $A=\{x \mid x$ paran broj$\}$, $\quad B=8N$ [Vidi **3.** (7)];
(3) $A=\{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $\quad B=\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$;
(4) $A=5N$, $\quad B=8N$;
(5) $A=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, $\quad B=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

5. Prethodni primeri (1) i (5) pokazuju da:

ako je $A\cap B=\varnothing$, onda je $A\setminus B=A$ [§ 2.4, t. **2.4**].

Da li važi obrnuto, tj. da li iz $A\setminus B=A$ sledi $A\cap B=\varnothing$?

Sledi, jer $A\cap B=\varnothing$ znači da A i B nemaju zajedničke elemente. A to isto tvrdi $A\setminus B=A$. (Pokažite i grafički.) Za takve dve činjenice (dva tvrđenja) kažemo da su *ekvivalentne* i simbolima izražavamo (§ 1.10):

$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\setminus B=A \qquad \text{[ekvivalencija]}.$$

Desno okrenuta strelica pokazuje da iz leve jednakosti sledi desna, a levo okrenuta strelica pokazuje da iz desne jednakosti sledi leva. Čita se: $A\cap B=\varnothing$ ekvivalentno je $A\setminus B=A$. Ili: $A\setminus B=A\ldots$ A kako iz $A\cap B=\varnothing$ sledi i $B\setminus A=B$, to je $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow B\setminus A=B$.

Ili, napisano u istom redu:

$$\boxed{A\setminus B=A\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow B\setminus A.}$$

I to važi za ma koje dve množine X i Y koje zadovoljavaju jedan od uslova:

$$X\cap Y=\varnothing, \text{ ili } X\setminus Y=X, \text{ ili } Y\setminus X=Y.$$

Iz svakog od njih slede ostala dva.

6. Neka su X, Y, Z množine.

1) Obrazložite ekvivalencije:

(1) $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$ [§ 2.2, t. 2.4];
(2) $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$ [§ 2.3, t. 2.4];
(3) $X \subset Y \Leftrightarrow X \setminus Y = \varnothing$.

Ili, napisane u istom redu:

$$X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \setminus Y = \varnothing .$$

2) Pokažite grafički ekvivalenciju:

$$X \subset Y \subset Z \Leftrightarrow X \cup Y = Y \cap Z .$$

7. 1) Obrazložite:

(1) ekvivalenciju $X \setminus Y = Y \setminus X \Leftrightarrow X = Y$;
(2) jednakost $(X \cup Y) \setminus Y = X \setminus Y$.

2) Neka je $(A \cup B) \setminus B = A$. Šta zaključujete o množinama A i B?

8. Šta možemo reći o množinama A, B, C ako je $A \cap B \cap C = \varnothing$?

9. Neka su X, Y, Z ma koje množine. Pokažite jednakost:

$$X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$$

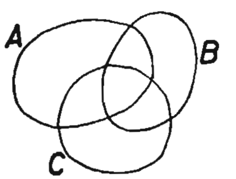
koja izražava da je $\cap$ (presek) distributivan u odnosu na razliku.

10. Pokažite da je:

(1) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$;
(2) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$;
(3) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;
*(4) $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Y) \cap (Y \setminus Z)$;
*(5) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$;
*(6) $(X \setminus Y) \cap Z = (X \cap Z) \setminus (Y \cap Z) = (X \cap Z) \setminus Y$;
*(7) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = (X \cap Y) \setminus Z$.

11. Nacrtajte dijagram (sl. 2.17) i prikažite situacije:

(1) $a \in A, B, C$;
(2) $b \in B, C$ i $b \notin A$;
(3) $c \in C, B$ i $c \notin A$;
(4) $x \in B$ i $x \notin A, C$
(5) $y \in A, B$ i $y \notin C$
(6) $z \notin A, B, C$.



Slika 2.17

12. Nacrtajte isti dijagram (sl. 2.17) u tri primerka i prikažite:

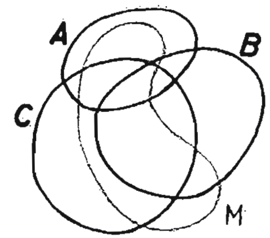
(1) na prvom da je $A \cup B = C$;
(2) na drugom da je $A \cap B = \varnothing$;
(3) na trećem da je $A \neq \varnothing \neq B$.

13. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Koja od sledećih množina predstavlja particiju množine A?

(1) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}, \{7, 8\}\}$;
(2) $\{\{1\}, \{3\}, \{4, 5, 3\}, \{6, 7, 8\}\}$;
(3) $\{\{2, 4\}, \{6, 5, 8\}, \{1, 3, 7\}\}$;
(4) $\{\varnothing, \{5, 6, 8\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{4\}\}$;
(5) $\{\{1, 2\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$.

14. Nacrtajte sl. 2.18 u tri primerka i prikažite:

(1) na prvom da je $M = A \cup B \cup C$;
(2) na drugom da je $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$;
(3) na trećem da je $\{A, B, C\}$ jedna particija množine M.



Slika 2.18

15. 1) Neka je A deo množine M i $A \neq \varnothing$. Da li je $\{A, \bar{A}\}$ particija množine M?

2) Neka je: T množina trouglova, A množina jednakokrakih trouglova, B množina pravouglih trouglova. Nacrtajte dijagram množine T, a zatim dijagrame: $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cap \bar{B}$; $A \cup \bar{B}$; $\bar{A} \cap B$; $\bar{A} \cup \bar{B}$.

3) Neka su $a, b, c, \ldots,$ pojedini trouglovi. Prikažite tačke: $a \in A \cap \bar{B}$; $b \in \bar{A} \cap B$; $c \in A \cup \bar{B}$; $d \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Iskažite to i rečima.

§ 2.9. DODATAK: SIMBOLIZIRANJE NEKIH ČINJENICA I DEFINICIJA

1. Činjenica iskazana u § 2.2, tačka 2, pod 4 kraće se zapisuje:

$$X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X.$$

To je implikacija (§ 1.10), jer iz onoga što je izraženo levo sledi (obavezno) ono što je izraženo desno, a obrnuto ne sledi. To jest iz $X \cap Y = X$ ne sledi obavezno $X \subset Y$, jer može biti i $X = Y$.

Dovršite $B \subset A \Rightarrow A \cap B =$

2. Iskažite rečima: $X \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow x \in X$ a $x \notin Y$.

Tu ekvivalenciju bi trebalo još preciznije zapisati, jer treba reći „za svako $x \in X \Rightarrow x \notin Y$", a to se zapisuje ovako:

$$X \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow \forall x\colon x \in X \Rightarrow x \notin Y.$$

Dakle, simbol $\forall$ (izvrnuto slovo A) označava „za svako".

3. Definicija inkluzije: $X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in Y$ (tj: ako $x \in X$, onda $x \in Y$).

4. Definicija jednakosti: $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Leftrightarrow x \in Y)$.

5. Definicija unije: $x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X$ ili $x \in Y)$.

6. Definicija razlika množina: $x \in (X \setminus Y) \Leftrightarrow (x \in X$ a $x \notin Y)$.

7. Definicija komplementarne množine (§ 2.5) izražava se ovako:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (x \in U \text{ a } x \notin A).$$

Rezime

1. Operacije nad množinama:

(1) presek $X \cap Y$, $x \in X$ i $x \in Y$;
(2) unija $X \cup Y$, $x \in X$ ili $x \in Y$;
(3) razlika $X \setminus Y$, $x \in X$ a $x \notin Y$.

2. Osobine operacija:

(1) komutativnost $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$;

(2) asocijativnost $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;

(3) distributivnost $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,
$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;

specijalno

(4) $X \cap X = X$, $X \cup X = X$, $X \setminus X = \varnothing$;

(5) $X \cap \varnothing = \varnothing \cap X = \varnothing$, $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$,
$X \setminus \varnothing = X$, $\varnothing \setminus X = \varnothing$.

3. Inkluzija

(1) $X \subset Y \Rightarrow X \cap Y = X$;

(2) $X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y$; (3) $X \subset Y \Rightarrow Y \setminus X = \overline{X}$.

4. Antidistributivnost razlike:

(1) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

(2) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

Ali, za razliku važi i (videti § 2.8, t. **10**):

(3) $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus (X \cap Z)$;

(4) $(X \cap Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cap (Y \setminus Z)$;

(5) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

5. $\boldsymbol{P} = \{X, Y, Z\}$ je particija množine M ako je:

(1) $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, $Z \neq \varnothing$;

(2) $X \cap Y = X \cap Z = Y \cap Z = \varnothing$;

(3) $X \cup Y \cup Z = M$.

GLAVA III

PROIZVOD MNOŽINA

§ 3.1. UREĐENI PAROVI

1. 1) Neka su Aca, Borka, Voja, Gordana imena, a Marković, Nikolić, Petrović prezimena. Aca Marković je ime i prezime jednog lica. Aca Nikolić je ime i prezime drugog lica. Sastavite tako sva moguća „lica" od navedenih imena i prezimena.

2) Neka je $A = \{a, b, c\}$ množina od tri leve cipele, $B = \{s, t, u, v\}$ množina od četiri desne cipele. Pod uslovom da su sve cipele iste vrste (muške odnosno ženske), istog oblika („fazona"), iste boje i iste „veličine" (istog broja), da se dakle razlikuju samo po etiketi (a, b, c, s, t, u, v), koja je (privremeno, radi razlikovanja) prilepljena na svaku, sastavite moguće parove cipela. (Prvo sastavite, pa posle čitajte uputstva.)

2. (a, s), (a, t), ..., (b, s), ..., (c, v) su parovi (§ 1.5), ali ne „obični", nego *uređeni parovi* (jer su to parovi cipela, pa se leva cipela ne može obući na desnu nogu i obrnuto).

Uređeni par se, kao i „obični" par, sastoji od dva elementa, ali:

(1) Svaki element ima tačno određen rang. On je ili *prvi* ili *drugi* član.

(2) Oba elementa mogu biti i identična, što je kod para („običnog") nemoguće (§ 1.1, t. **3.** 3).

Uređeni par čiji je x prvi, y drugi element zapisuje se ovako (x, y). Znači, umesto simbola $\{\ \}$ upotrebljava se $(\ )$, tj.

$\{x, y\}$ je par, a (x, y) je uređeni par.

Bitno je:

Ako je $a \neq b$, onda $\underbrace{(a, b) \neq (b, a),}_{\text{pa su to dva uređena para}}$ $\underbrace{\{a, b\} = \{b, a\}}_{\text{jedan isti par}}$

Dva uređena para su jednaka samo ako su im elementi istog ranga jednaki, što se simbolima izražava ovako:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \text{ i } b = d).$$

Napisana ekvivalencija znači (§ 1.10): iz $(a, b) = (c, d)$ sledi $a = c$, $b = d$. I obrnuto, iz $a = c$, $b = d$ sledi $(a, b) = (c, d)$.

U praksi, a i u drugim naukama, često se nailazi na uređene parove, na primer:

(1) Konji koji zajedno vuku kola čine . . .

(2) Par rukavica je . . .

(3) Neka je V množina vrhova označenih na određenoj vojničkoj karti znakom $\triangle$, a K množina mernih brojeva visina tih vrhova. Tada, ako $x \in V$, $y \in K$, svaki par (x, y) je uređen par (i zove se *kota*).

(4) Neka $x \in N$, a $y \in N \setminus 0$. Šta je (x, y)?

Uređeni par nije, dakle, množina (skup) u onom smislu kako je rečeno u glavi I.

§ 3.2. DEKARTOV PROIZVOD DVEJU MNOŽINA

1. Posmatrajmo svaki par cipela koji smo ranije sastavili (§ 3.1) kao element jedne nove množine. Ta se množina zove *Dekartov proizvod** ili, kratko, *proizvod* množina A i B. Dakle, ako proizvod množina A i B označimo ovako $A \times B$, pišemo: $A \times B = \{(a, s), (a, t), (a, u), (a, v), (b, s), (b, t), (b, u), (b, v), (c, s), (c, t), (c, u), (c, v)\}$.

Uopšte, $X \times Y = \{(x, y)\, x \in X \text{ i } y \in Y\}$ je (formalizovana) definicija proizvoda množina (Dekartovog proizvoda).

Proizvod $X \times Y$ je, prema tome, *množina uređenih parova* pri čemu prvi element svakog para pripada množini X, a drugi element množini Y. $X \times Y$ se čita: X krst Y.

2. Izvršimo proizvod $B \times A$:

$$B \times A = \{(s, a), (s, b), (s, c), (t, a), (t, b), (t, c), (u, a), (u, b), (u, c), (v, a), (v, b), (v, c)\}.$$

Kako $(a, s) \neq (s, a)$, $(a, t) \neq (t, a)$, . . . , $A \times B \neq B \times A$ tj. *Dekartov proizvod nije komutativan.*

3. 1) Sledeće dve šeme pokazuju kako se lako sastavljaju svi uređeni parovi (elementi) proizvoda $A \times B$:

(1)

$$a \begin{cases} s \to (a, s) \\ t \to (a, t) \\ u \to (a, u) \\ v \to (a, v) \end{cases} \qquad b \begin{cases} s \to (b, s) \\ t \to (b, t) \\ u \to (b, u) \\ v \to (b, v) \end{cases} \qquad c \begin{cases} s \to (c, s) \\ t \to (c, t) \\ u \to (c, u) \\ v \to (c, v). \end{cases}$$

(2)

$\times$	s	t	u	v
a	(a, s)	(a, t)	(a, u)	(a, v)
b	(b, s)	(b, t)	(b, u)	(b, v)
c	(c, s)	(c, t)	(c, u)	(c, v)

2) Neka je $E = \{e, f, g, h, k\}$, $F = \{p, q\}$. Napišite ekstenzivnu definiciju množine $E \times F$.

Napisali ste *graf* Dekartova proizvoda $E \times F$.

* René Descartes (1596–1650) je poznati francuski matematičar. On nije definisao proizvod množina, ali Dekartov koordinatni sistem je u suštini proizvod množina.

4. 1) Jedan „praktični" primer. „Putnik" objavljuje da organizuje izlete iz Beograda (b), Subotice (s) i Zagreba (z) u Dubrovnik (d) i Opatiju (o). Znači, imamo polaznu množinu $P = \{b, s, z\}$ i dolaznu $D = \{d, o\}$. Šta su organizovani izleti? Uređeni parovi množine:

$$\{(b, d), (b, o), (s, d), (s, o), (z, d), (z, o)\}.$$

A to je, po definiciji, proizvod $P \times D$.

2) Drugi praktični primer: U sali za igranje nalaze se Borko, Dejan, Mladen i Nikola, tj. množina igrača $M_1 = \{\text{Borko, Dejan, Mladen, Nikola}\}$, i Anica, Gordana, Emilija, Snežana, tj. množina igračica $M_2 = \{\text{Anica, Gordana, Emilija, Snežana}\}$. Odlučili su da svaki igrač igra sa svakom igračicom. Množina parova je $M_1 \times M_2$. Napišite je.

3) Napišite ekstenzivnu definiciju množine:

(1) $\{1, 2, 3\} \times \{5, 4, 7, 8, 9\}$;

(2) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$; (3) $\{a, b, c\} \times \{b, c, u, v\}$.

5. Neka je $E = \{a, b, c, d\}$. Množina:

$$\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), \ldots, (d, c), (d, d)\}$$

koja se najsigurnije dobija iz šeme (2):

$\times$	a	b	c	d
a	(a, a)	(a, b)	(b, c)	(a, d)
b	(b, a)	(b, b)	. . .	. . .
c				
d				

(Dovršite šemu.)

zove se proizvod množina E i E i označava se $E \times E$.

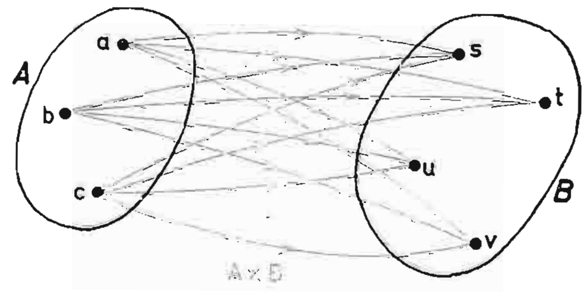
Taj proizvod (od 16 uređenih parova) ne treba mešati sa množinom od 6 delova množine E:

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}.$$

Često se $E \times E$ označava ovako E^2.

§ 3.3. SAGITALNA ŠEMA DEKARTOVA PROIZVODA

1) Posmatrajmo ponovo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{s, t, u, v\}$. Nacrtajmo Venove dijagrame tih množina i povežimo članove svakog uređenog para jednim (nacrtanim) delom krive linije (tj. nacrtanim lukom). Da ne bi bilo zabune oko ranga (koji je prvi, a koji je drugi) članova (uređenog para), nacrtajmo, na jednom mestu luka, glavu strelice okrenutu od prvog člana ka drugom. Tako dobijamo sl. 3.1.



Slika 3.1

Taj se crtež zove sagitalna šema proizvoda* $A \times B$.

Zašto je svaki element množine A povezan sa svakim elementom množine B? (Videti šeme § 3.2, t. **3.**)

2) Nacrtajte sagitalnu šemu proizvoda $B \times A$.

3) Nacrtajte sagitalnu šemu proizvoda (3) prethodnog paragrafa, tj. $\{a, b, c\} \times \{b, c, u, v\}$.

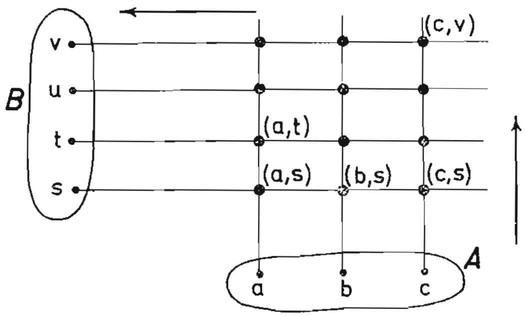
4) Nacrtajte sagitalnu šemu proizvoda $E \times E$ (§ 3.2, t. **5**).

5) Isto kad je proizvod (2): $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

§ 3.4. MREŽA DEKARTOVA PROIZVODA

1) Prikažimo, sad, proizvod $A \times B$ drukčije.

U tu svrhu uzmite kariranu hartiju, „zadebljajte" četiri njene linije koje „idu" sleva nadesno i tri linije koje „idu odozdo naviše". Neka svaka linija sleva nadesno „izlazi" iz jednog elementa (jedne tačke) množine B. Neka svaka linija „odozdo naviše" „izlazi" iz jednog elementa množine A. Dobijate crtež sl. 3.2.



Slika 3.2

Šta su preseci spomenutih linija? Parovi (elementi) proizvoda $A \times B$. Uostalom, okrenite knjigu tako da desna ivica njene strane (a na kojoj je sl. § 3.2) bude „donja" (a leva da bude „gornja"), pa ćete imati šemu (2) (§ 3.2, tačka **3**), šemu gde umesto zapisanih parova stoje nacrtane tačke. Mi smo napisali pored nekih od tih tačaka odgovarajuće parove, ali to nije obavezno, jer ako od ma koje od tih tačaka pođemo „naniže" i na levu stranu, odmah nalazimo koji uređeni par, odnosno koji element proizvoda predstavlja ona. To je *mreža Dekartova proizvoda* ili *Dekartov proizvod prikazan u obliku mreže.*

Napomena. Dijagram množine A može da se nacrta s leve strane (a dijagram množine B s „donje" strane) i tada mreža predstavlja „višu šematizaciju" šeme (2) [§ 3.2, t. **3**]. Mi smo mrežu prikazali baš tako zbog Dekartova koordinatnog sistema koji se uvodi kasnije, a koji i nije ništa drugo nego Dekartov proizvod (najčešće za slučaj kad su obe množine, koje se množe, beskonačne).

2) Prikažite u obliku mreže i sve druge proizvode koje ste prikazali u prethodnom paragrafu.

* Upotrebljava se i termin *graf proizvoda*, ali ćemo ga mi, kao što smo već učinili na jednom mestu, rezervisati za jedan drugi pojam. Reč *sagitalni* potiče od latinske reči sagitta = strela,

§ 3.5. NEKE OSOBINE DEKARTOVA PROIZVODA

1. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{m, n\}$. Izračunajmo $(A \cap B) \times C$. Dobijamo:

$$(A \cap B) \times C = \{c, d\} \times \{m, n\} = \{(c, m), (c, n), (d, m), (d, n)\}.$$

Taj isti proizvod dobijamo i ovako:

$$(A \times C) \cap (B \times C) = \{(a, m), (a, n), (b, m), (b, n), (c, m), (c, n), (d, m), (d, n)\} \cap \{(c, m), (c, n), (d, m), (d, n), (e, m), (e, n)\} = \{(c, m), (c, n), (d, m), (d, n)\}.$$

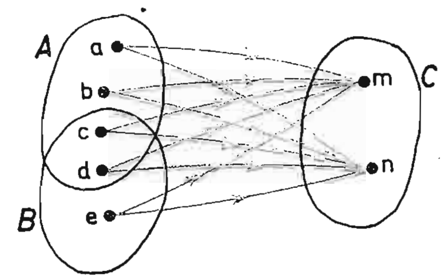
Iz sagitalne šeme se to takođe vidi (sl. 3.3).

Proizvod preseka $(A \cap B)$ i množine C čine strelice: $c \to m$, $c \to n$, $d \to m$, $d \to n$, a to su zajedničke strelice proizvoda $A \times C$ i proizvoda $B \times C$.

Dakle:

$$\boxed{(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)}$$

tj. *Dekartov proizvod je distributivan u odnosu na presek množina.*



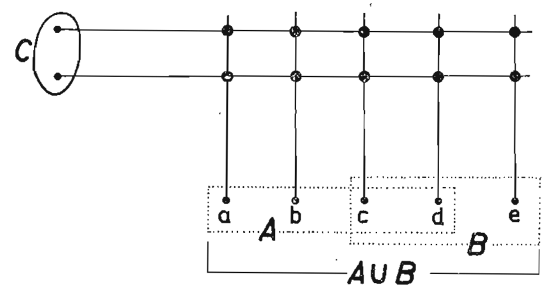
Slika 3.3

2. Da li je $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$?

Proverite izračunavanjem leve i desne strane.

To pokazuje sagitalna šema (sl. 3.3).

Još bolje se to vidi iz mreže (sl. 3.4):



Slika 3.4

Znači: $\boxed{(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)}$

tj. *Dekartov proizvod je distributivan u odnosu na uniju množina.*

3. Pokažite distributivnost proizvoda u odnosu na razliku:

$$\boxed{(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).}$$

4. Prikažite računski i grafički formule:

(1) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

(2) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

(3) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

§ 3.6. VEŽBANJA I ZADACI

1. Neka je $E = \{a, b, c\}$, $F = \{m, n\}$. Napišite ekstenzivnu definiciju i prikažite pomoću strelica i mreže: proizvod: (1) $E \times F$; (2) $F \times E$; (3) E^2; (4) $F \times F$; (5) $(E \cup F) \times F$.

2. Data je množina $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Napišite ekstenzivnu definiciju množine C^2 i prikažite njenu sagitalnu šemu i njenu mrežu.

3. Neka je $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Prikažite sagitalnu šemu i mrežu svake od sledećih množina:

(1) $(A \times A) \cup (B \times B)$;	(4) $(A \times B) \cup (B \times A)$;
(2) $A^2 \cap B^2$;	(5) $(A \times B) \cap (B \times A)$;
(3) $C \times (A \cap B)$;	(6) $(C \setminus A) \times (C \setminus B)$.

4. Šta možemo reći o $A \times B$ ako je $A = \varnothing$ ili $B = \varnothing$? Tada, ili strelice nemaju odakle da polaze, ili nemaju gde da dolaze, pa je $A \times B = \varnothing$. Obrnuto, šta možemo zaključiti iz $A \times B = \varnothing$? Da je ili $A = \varnothing$ ili $B = \varnothing$.

***5.** Proverite da je:

(1) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

(2) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Rezime

1. 1) Par $\{a, b\} = \{b, a\}$ je množina (skup).

2) Uređeni par: $(a, b) \neq (b, a)$ nije množina nego element.

3) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c$ i $b = d)$.

2. 1) Dekartov proizvod množina X i Y: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X$ i $y \in Y\}$. To je, dakle, množina čiji su elementi uređeni parovi.

2) Dekartov proizvod prikazuje se pomoću strelica (sagitalna šema) i u obliku mreže.

3) Specijalan Dekartov proizvod: $X \times X = X^2$.

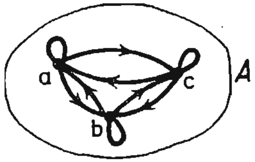
3. 1) Dekartov proizvod nije komutativan.

2) Dekartov proizvod je distributivan u odnosu:

na $\cap$ $\quad (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

na $\cup$ $\quad (X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

na $\setminus$ $\quad (X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z)$.



Slika 3.5

GLAVA IV

PRVI GEOMETRIJSKI POJMOVI

§ 4.1. UVOD

U ovoj glavi ćemo, koristeći ono što je napred izneseno (uglavnom u I i II glavi), izgraditi prve geometrijske pojmove.

Izvor geometrijskih pojmova je realni svet. Posmatrajući razne predmete oko sebe, čovek, još kao dete (određenog uzrasta, najčešće samoniklo, spontano, kako se to u psihologiji kaže), počinje da uočava ono što je zajedničko, što je bitno, što se ne menja od jednog predmeta do drugog. Na primer, posmatrajući razne gumene, kožne, čelične, staklene, drvene . . . kuglice, on izgrađuje pojam koji se zove l o p t a. Taj pojam nije ni gumen, ni drven, ni staklen, ni čeličan, ni siv, ni crven, ni veliki, ni mali. Određeni oblik, koji se razlikuje od svih drugih oblika, je ono što karakteriše pojam koji se zove l o p t a. Na sličan način formira čovek (dete) i druge oblike.

„Malo" i „veliko" su takođe pojmovi (iako relativni) koji se rano izgrađuju. Uz njihovu pomoć kod čoveka se razvija, za formiranje prostornih pojmova, vrlo važna sposobnost misaonog smanjivanja i povećavanja. Na primer, posmatrajući kugle i kuglice, zrna graška, sočiva, zrnca prašine osvetljena svetlosnim zracima (koji prodiru u tamnu sobu kroz manji otvor), čovek (dete) postaje sposoban (pogotovu ako se podstiče u tom pogledu) da zamisli neograničeno malu „lopticu", tj. „lopticu" koja se ne može ubosti ma kako tankim vrhom igle, „lopticu" koja stvarno ne postoji u realnom svetu, a koja se zove *tačka.*

Kad se toj sposobnosti pridruži, još važnija, sposobnost izdvajanja od fizičkih predmeta onoga što samostalno ne postoji, čovek izgrađuje nove pojmove. Na primer, posmatrajući ivicu daske, kuće, . . . , ivicu savijene hartije, savijenog lima (prvobitno ivicu, potoka, reke), . . . , čovek postaje sposoban da ivicu izdvoji od predmeta i da je zamisli kao samostalnu „tvorevinu", a to je ono što se zove *linija* (prava ili kriva); dovoljan je samo jedan podsticaj pa da, na osnovu svakodnevnog iskustva (u prvom redu ljuštenja, guljenja raznih predmeta), čovek zamisli kao samostalnu „stvar" ono što ima svaki predmet, a što se faktički ne može izdvojiti od predmeta, ono što se zove *površ* (ravna ili kriva).

Tačka, linija, površ su samo neki geometrijski pojmovi, samo neke geometrijske figure, jer pomoću njih čovek stvara, konstruiše (misaono razume se) raznovrsne geometrijske figure (koje, posle, u mnogo slučajeva realizuje u fizičkom svetu i veoma korisno primenjuje, tj. stvara materijalnu kulturu).

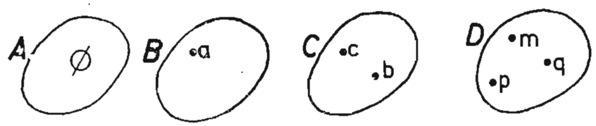
§ 4.2. TAČKE I GEOMETRIJSKE FIGURE

Prema prethodnom, tačka nije nešto „što je tako malo da se ne može videti ili opipati“. Ima vrlo mnogo vrlo malih predmeta koje čovek ne može videti „golim“ okom ili opipati, npr. bakterije. Ima još manjih predmeta, čestica, koji se ne mogu videti ni najsavršenijim mikroskopom, npr. virusi, protoni, elektroni, . . . Ali to nisu tačke (geometrijske), nego fizički predmeti, fizička tela.

Pri svemu tome:

1) S jedne strane, ne samo da je dopušteno nego je veoma celishodno da se tačke prikazuju vidljivo i to: (1) grafički, kružićima (većim nego što su, npr., interpunkcijske tačke) ili pomoću dve kratke nacrtane linije (crta); (2) pomoću materijalnih malih „loptica“. U svakom slučaju to su *modeli* tačaka (a ne same tačke).

Množine tačaka prikazujemo, kao i svaku drugu množinu, Venovim dijagramima:



Slika 4.1

A je prazna množina $\varnothing$ ili $\{\ \}$, B je singleton $\{a\}$, C je par $\{b, c\}$, $D = \{m, p, q\}$.

Treba primetiti: (1) da tačke označavamo malim slovima, jer su one elementi; (2) da dve *razne* tačke nemaju ničeg zajedničkog između sebe. Apsurdno bi bilo reći, na primer, „da se dve tačke dodiruju“. Međutim, može se dogoditi da se dve tačke „*poklapaju*“. Prema tome, ako je $a=b$, onda se i singletoni $\{a\}$ i $\{b\}$ „poklapaju“.

2) S druge strane, svaka linija (prava ili kriva, ograničena ili neograničena), kao i svaka površ (ravna ili kriva, ograničena ili neograničena), sastoji se od tačaka. Drugim rečima, svaka linija, svaka površ i uopšte svaka geometrijska figura je jedna množina čiji su elementi tačke (geometrijske).

Zato i uzimamo, smatramo da je tačkama (geometrijskim) ispunjen sav prostor i da smo uvek u stanju da od njih sastavimo koju god hoćemo množinu, tj. da konstruišemo koju god hoćemo geometrijsku figuru.

Jedan primer: Zamislite tačke „u kojima se nalaze“ ovoga momenta vrhovi pisaljki (olovki, pera) svih vaših đaka. To je množina:

$$\{x \mid x \text{ je vrh olovke jednog mog đaka u ovom trenutku}\}.$$

§ 4.3. RAVAN I PRAVA

1. „Posmatrajmo“ one tačke koje čine stranu (stranu a ne list, koji je materijalan) sveske na kojoj piše vaša učenica Vera. Te tačke čine (kad sveska nije savijena) ravnu površ. Postoje manje i veće ravne površi od te, na primer: strana jednog lista moje beležnice (mog notesa), strana jednog lista bloka na kojoj crta Voja, strana prozorskog okna, školske table, poda, zida, . . . No nezavisno od toga, mi možemo (§ 4.1) „povećati“ ma koju od tih površi. Možemo je povećati koliko god hoćemo,

neograničeno. Zato kažemo da: tačke koje čine stranu sveske na kojoj piše Vera pripadaju jednoj *ravni*; tačke koje čine stranu bloka na kojoj crta Voja pripadaju drugoj *ravni*; tačke koje čine jednu stranu prozorskog okna pripadaju trećoj ravni; tačke koje čine drugu stranu prozorskog okna pripadaju četvrtoj *ravni*; i tako dalje.

Međutim, sve te ravni razlikuju se samo po položaju i ni po čemu drugom. I ako ja hoću da sastavim jednu određenu množinu, tj. jednu (geometrijsku) figuru od nekih tačaka jedne od tih ravni, onda je sasvim svejedno kojoj ravni pripadaju te tačke. Bitno je da (sve) one pripadaju istoj ravni, a ne baš kojoj. I zato ćemo, bilo koju (od neograničeno mnogo) ravan označavati slovom Π (veliko pi) i „posmatraćemo“ (zasad) samo figure čiji elementi pripadaju ravni Π. Takve se figure zovu *ravne figure*.

Prema tome:

1) Ma o kojim tačkama a, b, c, . . . govorili, uvek će (zasad) biti

$$a\in\Pi, \quad b\in\Pi, \quad c\in\Pi, \ldots$$

A list hartije, karton, tabla na čijoj jednoj strani crtamo (prikazujemo) tačke, i uopšte figure, predstavlja materijalizovanu ravan, *model ravni*.

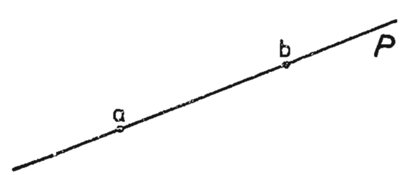
2) Dve tačke a i b:

(1) mogu biti različite, tj. $\bullet a$, $\bullet b$, $a \neq b$;

(2) mogu se poklapati, tj. $a \bullet b$, $a = b$.

2. „Izdvojte“ (§ 4.1) pravu ivicu od predmeta i zamislite je koliko god hoćete dugačku. Zategnite tanak konac i neograničeno ga „istanjujte“ i „produžite“. Ako ste, u oba slučaja, uspeli, vi ste obrazovali pojam koji se zove *prava*.

Nacrtajte na listu hartije dve tačke. Imate materijalizovanu ravan (model ravni) i dve materijalizovane tačke (modele dveju tačaka). Savijte list tako da dobijete ivicu kojoj pripadaju nacrtane tačke, a zatim ispravite list. Šta sad imate? (Materijalizovanu pravu liniju.) Zamislite da ste sve to učinili sa ravni. Šta u tom slučaju dobijate? *(Pravu koja pripada* ravni Π.)* Slika 4.2 je *model* prave koja pripada ravni.



Slika 4.2

Prava je množina tačaka i zato ćemo prave označavati velikim slovima. Na sl. 4.2 je: $P \subset \Pi$, $a \in P$, $b \in P$.

I zato je prava *sadržana (uključena)** u ravni.

§ 4.4. PRVOBITNI POJMOVI I PRVOBITNA TVRĐENJA

1. Videli smo kako čovek formira neke geometrijske pojmove (tačka, linija, površ, ravan, prava). Na sličan način formiraju se ili se mogu formirati i drugi geometrijski pojmovi. Međutim, tako formirani pojmovi nisu uvek jasni, nisu uvek

* Ravan se posmatra dvojako: (1) kao množina tačaka; (2) kao množina pravih. U slučaju (1) prava je množina tačaka pa je *sadržana (uključena)* u ravni (inkluzija). U slučaju (2) prava je *element ravni* i zato *pripada* ravni.

potpuni, neretko su slabo povezani između sebe, a nisu svi ni od interesa za izgrađivanje nauke. Zato su naučnici ispitujući razne pojmove, geometrijske figure, davno došli na misao: Poći od nekoliko *prvobitnih pojmova*, a sve ostale koji su od značaja odrediti, definisati pomoću prvobitnih i prethodno definisanih.

Tačka, prava i ravan su tri prvobitna pojma savremene nauke (razumljivo ne jedini).

Prema tome, sve ono što je rečeno u prethodnim paragrafima nisu definicije nego opisivanja šta se podrazumeva pod terminima: tačka, prava, ravan.

2. Naučnici su, u toku vekova, otkrili mnoge osobine geometrijskih pojmova, geometrijskih figura. Iskazane ili napisane te se osobine zovu *i tvrđenja.*

Ali, tvrđenje nema vrednosti ako se ne može obrazložiti, dokazati njegova tačnost, istinitost. Kao pojmovna, geometrijska (uopšte matematička) tvrđenja se ne mogu dokazati eksperimentalno nego logički. A to znači: tačnost, istinitost jednog tvrđenja izvodi se iz tačnosti, istinitosti prethodnih. Međutim, jasno je da se tako, unazad, ne može ići neograničeno. Zato nauka uzima, prihvata neka tvrđenja bez dokaza. Takva polazna tvrđenja zovu se *prvobitna tvrđenja* ili *aksiomi.*

Tvrđenja koja se dokazuju na osnovu aksioma i prethodno dokazanih tvrđenja zovu se *teoreme.*

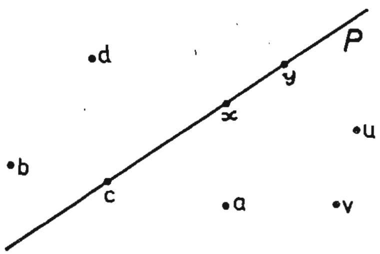
Definisanje pojmova pomoću prvobitnih i prethodno definisanih pojmova i dokazivanje teorema pomoću aksioma i prethodno dokazanih teorema zove se *deduktivna metoda,* koja se podjednako primenjuje i pri izgrađivanju matematičkih teorija, disciplina i pri uvođenju u njih.

3. U naučnim traktatima prvo se iskažu, napišu, formulišu svi aksiomi, a zatim se ređaju definicije i teoreme. U udžbenicima je celishodnije da se aksiomi postupno uvode, pa ćemo i mi zasad uvesti samo tri (koji preciziraju bitne osobine prvobitnih pojmova):*

Aksiom Π *1.* — *Ravan je beskonačna množina tačaka.*

Aksiom Π *2.* — *Svaka prava je beskonačna (prâva) podmnožina ravni.*

Aksiom Π *3.* — *Svaki par (neuređen) tačaka je uključen (sadržan) u jednoj, i samo jednoj, pravi.*



Slika 4.3

Crtež (sl. 4.3) ilustruje aksiom Π *2*, tj. osim tačaka koje pripadaju pravi P ravan sadrži i druge tačke.

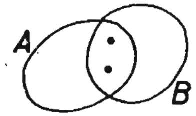
Aksiom Π *3* tvrdi da dve tačke pripadaju samo jednoj pravi (a tri tačke mogu, ali ne moraju pripadati istoj pravi). Drugim rečima, ma koje dve tačke posmatrali, one uvek određuju pravu. Za tri i više tačaka treba obavezno obrazložiti da pripadaju ili ne pripadaju istoj pravi.

Tri tačke ili više tačaka koje pripadaju istoj pravi zovu se *kolinearne tačke.*

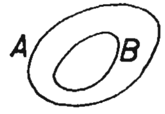
Sledeći primeri (zadaci) predstavljaju neke posledice aksioma Π *3.*

* Treba istaći da aksiomi nisu jednom za uvek utvrđeni, jer oni nisu apsolutne ili večite istine, kako se ponekad shvata (iako se teži tome da se za aksiom uzme „očigledna istina"). Aksiomi se često upoređuju sa pravilima igre. Zato od izbora aksioma zavisi i izgrađivanje i izlaganje određene matematičke discipline.

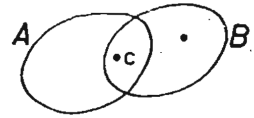
4. Neka A i B označavaju prave. Šta pokazuju ovi dijagrami:



Slika 4.4



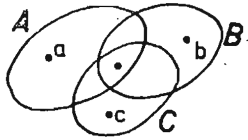
Slika 4.5



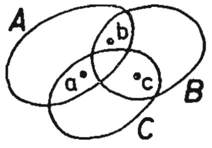
Slika 4.6

Nacrtajte svaki put prave A i B u ravni Π, tj. u svojoj svesci.

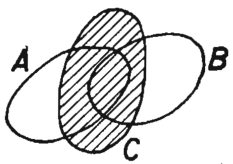
5. Neka A, B, C označavaju prave. Šta pokazuju ovi dijagrami:



Slika 4.7



Slika 4.8



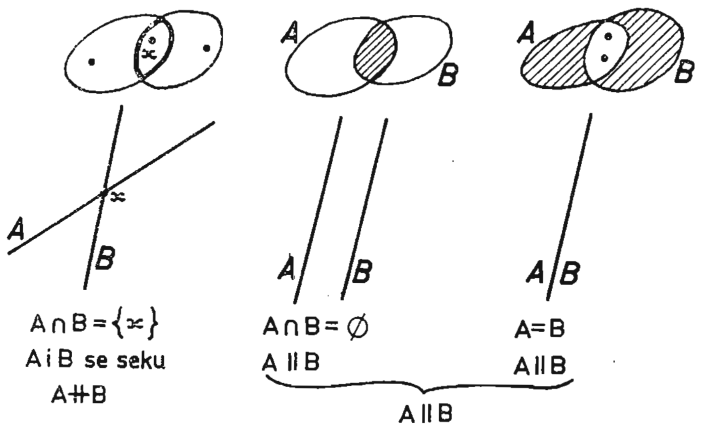
Slika 4.9

Ono što je u 4.9 šrafirano treba smatrati crvenim. (Mi smo iz tehničkih razloga šrafirali crno.) Nacrtajte svaki put prave A, B, C u ravni.

§ 4.5. MEĐUSOBNI POLOŽAJ DVE PRAVE

1. Prema tački **4.** prethodnog paragrafa dve prave ravni mogu se nalaziti samo u jednom od ova tri međusobna položaja: (vidi sl. 4.10).

Možemo, dakle, da iskažemo jednu teoremu i dve definicije.



Slika 4.10

Teorema 1. — *Presek dve prave je singleton ili prazan.*

Obrazloženje (dokaz): Presek dve prave ne može biti par (dve prave se ne mogu seći u dve tačke), jer ako bi se to dogodilo, onda bi to bila (aksiom 3) jedna prava.

Definicija 1. — *Za dve prave kažemo da se seku ako je njihov presek singleton.*

Definicija 2. — *Za dve prave koje se ne seku kažemo da su paralelne.*

Iz tih definicija sledi: $A\|A$, $B\|B$, . . . , $X\|X$, . . . tj. *svaka je prava paralelna samoj sebi.*

Prema definiciji 1, dve prave se seku samo ako je njihov presek singleton, a prema definiciji 2 ako se prave ne seku, one su paralelne. Kako prava ne može seći samu sebe, ona je paralelna samoj sebi.

Paralelne prave se (tehnički) konstruišu pomoću lenjira i trougaonika.*

2. Pročitajte i recite šta znači:

$$A \text{ seče } B \Leftrightarrow B \text{ seče } A.$$

3. Ako je prava A paralelna sa B, onda je B paralelna sa A, tj. $A\|B \Rightarrow B\|A$.

Zaista: $A\|B \Rightarrow (A=B \text{ ili } A\cap B=\varnothing)$

$\Rightarrow (B=A \text{ ili } B\cap A=\varnothing)$

$\Rightarrow B\|A$.

4. 1) Neka A i B označavaju prave i neka je $A \nparallel B$. Nacrtajte prave A i B, a zatim obojte zeleno:

(1) $\Pi\setminus(A\cup B)$; (2) $\Pi\setminus(A\cap B)$.

2) Isto što i pod 1) kad je $A\|B$.

5. 1) Koje tačke čine množinu $A\cup(\Pi\setminus B)$?

2) Koje tačke čine množinu $A\cap(\Pi\setminus B)$?

§ 4.6. JOŠ NEKE TEOREME KOJE NEPOSREDNO SLEDE IZ UVEDENIH AKSIOMA

1. Neka su date dve razne tačke a i b ravni Π. Možemo li tvrditi da ravan Π sadrži treću tačku koja nije kolinearna sa a i b? Ako možemo, zašto možemo? Ako ne možemo, zašto ne možemo?

Možemo, jer na osnovu [Π 3]** a i b su sadržane u jednoj pravi P („tačke a i b određuju jednu, i samo jednu, pravu P"), a na osnovu [Π 2], ravan Π sadrži i tačke koje ne pripadaju pravi P. Time smo dokazali:

Teorema 2. — *Ravan Π sadrži bar (najmanje) tri nekolinearne tačke.*

Napomena. Pravu koja sadrži tačke a i b označavamo i ovako ab.

Iz teoreme 2 slede (neposredno) dve posledice:

* Vidi autorov priručnik „*Matematika u III i IV r. osnovne škole*".

** Na taj način pišemo, kratko, aksiom 3.

Prva posledica. — *Ako je data prava P ravni Π, uvek se može naći tačka $t\in\Pi$, $t\notin P$.*

Jer $\Pi\setminus P\neq\varnothing$ (na osnovu [Π 2]), a to znači da postoji tačka $t\in\Pi\setminus P$ (tj. uvek se može naći tačka t koja pripada ravni Π, a ne pripada pravi P).

Druga posledica. — *Ako je data tačka $t\in\Pi$, uvek se može naći prava $P\subset\Pi$, tako da $t\notin P$.*

Zaista, na osnovu teoreme 2, svakoj tački t ravni Π odgovaraju dve tačke a i b ravni Π takve da t ne pripada pravi $ab=P$.

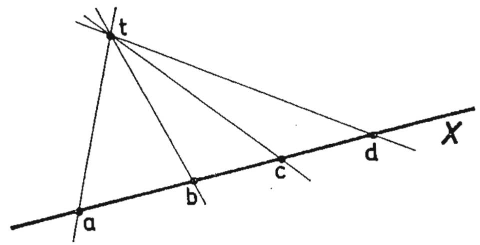
Skraćen, simbolima izražen, dokaz izgleda ovako:

Uslov	Dokazati da postoji
$t\in\Pi$	$P\subset\Pi$, $t\notin P$.

Dokaz: Ako $t\in\Pi$, onda (teor. 2) postoje $a\neq b$, $ab\in\Pi$, $t\notin ab=P$.

2. Neka je data tačka $t\in\Pi$. Koliko pravâ ravni Π sadrži tačku t (tj. koliko prava „prolazi kroz" t)?

Rasuđujemo ovako: Na osnovu druge posledice, postoji prava $X\subset\Pi$, $t\notin X$. Na osnovu [Π 2], prava X sadrži beskonačno mnogo tačaka a, b, c, ... Prave ta, tb, tc, . . . su različite. Dakle:



Slika 4.11

Teorema 3. — *Svaka tačka pripada beskonačnoj množini pravâ ravni Π.*

Ili: *Svaka tačka ravni Π sadrži beskonačno mnogo pravâ ravni Π.*

Teorema 4. — *Prave ravni Π obrazuju beskonačnu množinu.* Dokažite. — Tu množinu označavaćemo sa $\boldsymbol{D}$.

§ 4.7. POLURAVNI

1. Ma koja prava $P\subset\Pi$ određuje tri množine tačaka ravni Π: prva je sama prava P; drugu čine sve tačke b, d, . . . (sl. 4.3); treću čine tačke a, u, v, . . . (sl. 4.3).*

Svaka od dve poslednje množine zove se *poluravan*, a prava P zove se *ivica* (svake) *poluravni*.

Ali, kojoj od dveju poluravni pripada ivica (prave P)? Ili, možda, pripada obema? Ili nijednoj?

Da ne bi bilo neodređenosti u tom pogledu, mi ćemo uvesti definicije:

Definicija 3. — *Poluravan je* **zatvorena** *ako sadrži i pravu (ivicu) P.*

Definicija 4. — *Poluravan je* **otvorena,** *ako ne sadrži ivicu (P).*

* Zasad se oslanjamo na intuitivnost. Međutim, na osnovu [Π 2], ravan sadrži i tačke koje nisu tačke prave P. A šta bi značila pretpostavka da s jedne strane te prave nema tačaka?

2. Označimo tako definisane otvorene poluravni respektivno sa Π_1 i Π_2. Tada je lako proveriti da je:

$\Pi_1 \cup P=$ zatvorena poluravan; $\Pi_2 \cup P=$ zatvorena poluravan;

$$\Pi \setminus P = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

3. Teorema 5. — *Množine Π_1, Π_2, P definišu (jednu) particiju ravni Π.*

Pročitajte ponovo § 2.7 i dokažite tu teoremu.

§ 4.8. POLUPRAVA I DUŽ

1. Uočite (nacrtajte) ma koju pravu P i jednu njenu tačku p. Tačka p određuje tri podmnožine množine P: jedna je singleton $\{p\}$, a svaka od ostale dve zove se *poluprava* prave P. Tačka p je *početak* svake poluprave prave P.

Da ne bi bilo dvoumljenja da li početak pripada ili ne pripada polupravama, uvodimo definicije:

Definicija 5. — *Poluprava je zatvorena ako sadrži početak.*

Definicija 6. — *Poluprava je otvorena ako joj početak ne pripada (ako ne sadrži početak).*

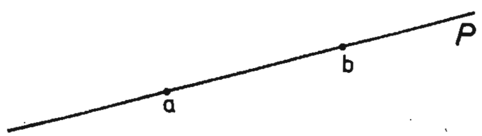
2. Označimo respektivno sa P_1 i P_2 otvorene poluprave prave P. Tada je:

$P_1 \cup p$ = zatvorena poluprava;
$P_2 \cup p$ = zatvorena poluprava;
$P \setminus \{p\} = P_1 \cup P_2$.

Teorema 6. — *Množine P_1, p i P_2 definišu (jednu) particiju prave P.* — Dokažite.

3. Izražavajući se opisno i „konkretno" kažemo da poluprava „izlazi" iz svog početka.

Dve razne tačke, a i b, prave određuju četiri poluprave: dve čiji je početak a (koje „izlaze" iz a) i dve čiji je početak b (sl. 4.12).



Slika 4.12

Uočite onu zatvorenu polupravu koja izlazi iz a, a kojoj pripada tačka b. Uočite onu polupravu koja izlazi iz b a kojoj pripada tačka a. Pokažite njihove zajedničke tačke. Te zajedničke tačke čine *presek* uočene dve poluprave. Taj presek zove se *duž*. Dakle:

Definicija 7. — *Presek dve poluprave iste prave zove se duž.*

Ako se poslužimo pojmom između,* definiciju 7 možemo iskazati i ovako:

Deo (podmnožina) prave koji se sastoji od dve tačke prave a i b i svih tačaka prave između a i b zove se duž.

* Pojam *između* se, pri strogom zasnivanju matematike, definiše. Ovde se oslanjamo na onaj koji čovek stiče u svakodnevnom životu.

Duž ćemo, zasad, označavati kao i pravu ab, ali ćemo uvek biti dužni da naglasimo *prava ab*, odnosno *duž ab*.

Tačke a i b zovu se *krajnje tačke* duži ili *krajevi* duži ab. Sve ostale tačke su *unutrašnje* tačke duži ab.

§ 4.9. PERPENDIKULARNE („NORMALNE") PRAVE

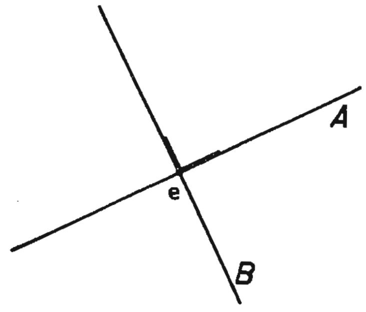
1. Savijte list hartije da dobijete ivicu (§ 4.2, t. 2). Ne ispravljajući ga, savijte još jednom tako da jedan deo ivice (dobijene pri prvom savijanju) poklopi drugi deo, pritisnite dobro da dobijete novu ivicu (dvostruko savijenog lista) i ispravite (rasklopite) list. Obe se ivice seku i nalaze u međusobnom položaju prikazanim crtežom 4.12.

Za tako dobijene prave A i B ravni Π kažemo da su međusobno *„normalne"* (bolje *perpendikularne*), ili da se nalaze u *normalnom međusobnom (perpendikularnom) položaju* i kratko zapisujemo:

$$A \perp B \text{ ili } B \perp A.$$

Normalnost (perpendikularnost) označava se na crtežima znakom $\llcorner$.

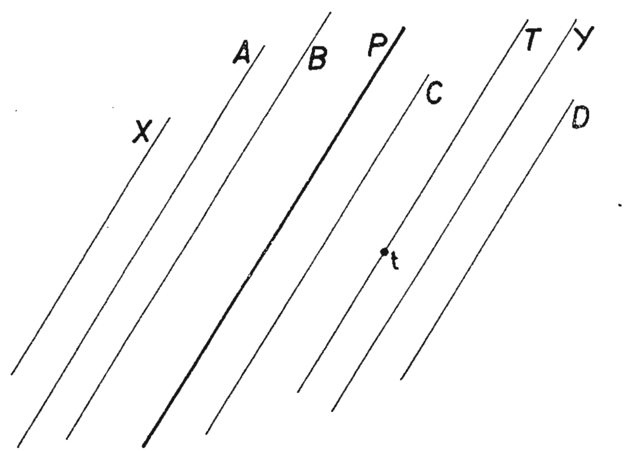
(Normalne) perpendikularne prave konstruišu se (tehnički) pomoću lenjira i trougaonika.*



Slika 4.13

§ 4.10. PRAVAC

1. 1) Nacrtajte pravu P ravni Π (na „novoj" strani sveske). „Nacrtajte": $A \parallel P$; $B \parallel P$; $C \parallel P$. Koliko takvih prava možete „nacrtati"? Možete li ih sve nacrtati?



Slika 4.14

* Videti već spomenuti autorov priručnik.

Ta beskonačna množina pravih zove se *pravac prave P* i označavaćemo je ovako (P).

Definicija 8. — *(Beskonačna) množina pravâ (ravni Π) paralelnih istoj pravi zove se pravac.*

2. Označite bilo koju tačku $t \in \Pi$. Koliko pravâ (P) (pravca prave P) sadrži tačku t? Otuda:

Aksiom Π 4. — Ako $P \subset \Pi$ i $t \in \Pi$, $t \notin P$, postoji samo jedna prava $P' \subset \Pi$ takva da $t \in P'$ i $P' \| P$. (Čuveni aksiom paralelnosti.*)

3. Prema definiciji 8, pravac je množina pravâ, dakle množina nepraznih množina (skup skupova). A prema aksiomu Π 4, tačka ravni Π pripada jednoj, i samo jednoj, od tih podmnožina, od tih pravâ. To znači da pravac jedne prave ispunjava sve uslove jedne particije ravni (§ 2.7). Time je dokazana:

Teorema 7. — *Svaki pravac je jedna particija ravni***

4. Na osnovu definicije 8, ma koje dve prave (ma koja dva elementa) datog pravca jesu paralelne. Otuda:

Teorema 8. — *Sve prave jednog pravca jesu (međusobno) paralelne.*

Teorema 9. — $A \| B$ i $B \| C \Rightarrow A \| C$.

Iskažite teoremu 9 rečima i dokažite je.

Teorema 10. — $A \| B \nparallel C \Rightarrow A \nparallel C$.

Iskažite tu teoremu rečima. Njen dokaz izgleda ovako:

Uslovi su $A \| B$, $B \nparallel C$. Može li, pod tim uslovima, biti $A \| C$? Ako bismo to dopustili, onda bi (teor. 9) bilo i $B \| C$, a to nije. (Vidi uslove.) Dakle, ne možemo dopustiti $A \| C$, tj. mora biti $A \nparallel C$.

5. Pročitajte i obrazložite:

(1) $A \| G \Leftrightarrow A \in (G)$; (2) $A \in (G) \Leftrightarrow G \in (A)$; (3) $A \| G \Leftrightarrow (A) = (G)$.

6. Neka su A i B prave. „Nacrtajte" ih tako da je $A \perp B$. Zatim „nacrtajte" nekoliko elemenata pravca (A) i nekoliko elemenata pravca (B).

1) Uočite: jedan, ma koji element množine (A); jedan, ma koji element množine (B). U kom se međusobnom položaju nalaze ti elementi? Važi li to za ma koja dva elementa od kojih jedan pripada (A), drugi (B)?

Zato kažemo: *Pravci (A) i (B) su (međusobno) (normalni) perpendikularni.*

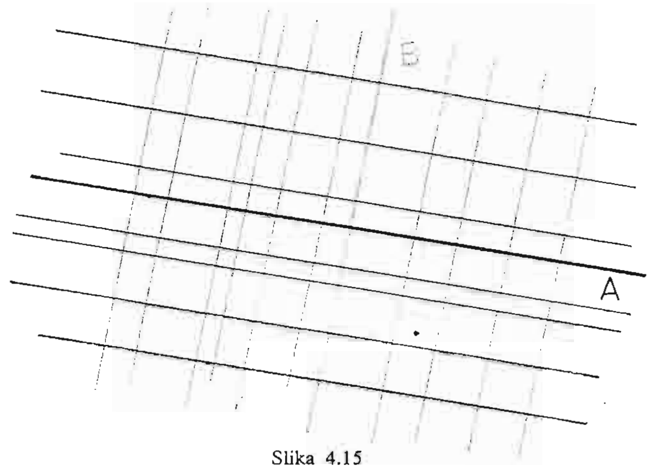
2) Nacrtajte ma koji pravac (P). Postoji li pravac perpendikularan (normalan) na (P)? „Nacrtajte" pravac $(P') \perp (P)$. Ima li svaki pravac svoj perpendikularni pravac? Zato uvodimo

* O kome se mnogo raspravljalo i predstavlja „izvor" drugih takozvanih neeuklidskih geometrija.

** Ta se teorema može uzeti kao aksiom Π 4. Tada se mora obrazložiti (§ 2.7): da se dva elementa pravca ne seku; da je unija svih elemenata pravca ravan Π; da pravac ne može biti prazan. Smatramo da je formulacija aksioma Π 4 u prethodnom obliku upotrebljivija.

Aksiom Π 5. — Svakom pravcu (P) odgovara jedan, i samo jedan, (normalan) perpendikularan pravac (P').

Svaka prava $X \in (P)$ je perpendikularna na svakoj pravi $X' \in (P')$, tj. $X \perp X'$ (ili $X' \perp X$).



Slika 4.15

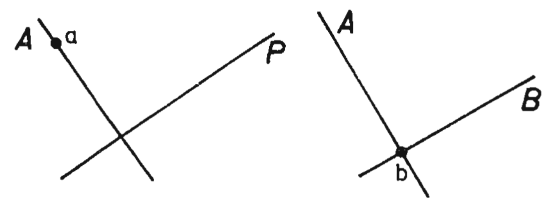
7. Nacrtajte pravu X. Šta je množina pravâ perpendikularnih na X? Pravac (X') perpendikularan na pravcu (X). To se može reći ovako:

Sve prave perpendikularne na istoj pravi obrazuju pravac (tj. paralelne su).

Ali (teor. 7), svaki pravac je jedna particijacija ravni, tj. svaka tačka $t \in \Pi$ pripada jednoj, i samo jednoj, pravi pravca (X') (normalnog na X). Možete li sad odgovoriti na pitanje: Koliko ima prava koje sadrže tačku t a perpendikularne su na pravi X? Otuda:

Teorema 11. — *Za svaku tačku $t \in \Pi$ i svaku pravu $X \subset \Pi$ postoji jedna, i samo jedna, prava X' takva da je $t \in X' \perp X$.*

Ili, drukčije: *Ako su date jedna prava i jedna tačka, postoji jedna, i samo jedna, prava koja sadrži datu tačku a perpendikularna je na datoj pravi* (sl. 4.16).



Slika 4.16

8. Prikažite crtežom, iskažite rečima i dokažite svaku od sledećih implikacija (teorema):

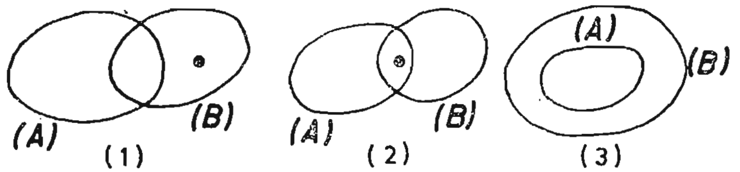
(1) $C \| A \perp B \| D \Rightarrow C \perp D$;

(2) $A \perp B \| D \Rightarrow A \perp D$; $C \| A \perp B \Rightarrow C \perp B$;

(3) $A \perp C$, $B \perp C \Rightarrow A \| B$; (4) $A \perp B \perp C \Rightarrow A \| C$; (5) $A \perp B \perp C \perp D \Rightarrow A \perp D$.

§ 4.11. VEŽBANJA I ZADACI

1. „Nacrtajte" prave A i B u slučajevima:



Slika 4.17

2. Ako je $A \nparallel B$, onda je $(A) \cap (B) = \varnothing$. Pročitajte, dokažite i izrazite simbolima.

3. Svaka prava pripada jednom, i samo jednom, pravcu. Zašto?

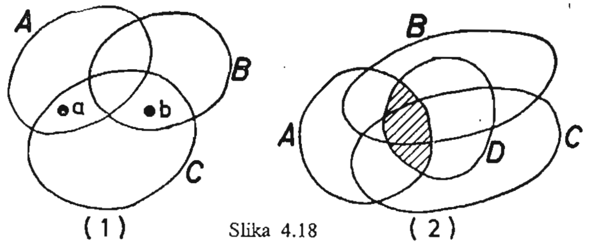
4. Neka su X i Y prave i $t \in \Pi$. Neka $t \in X' \| X$ i $t \in Y' \| Y$. Tada je $X' \cap Y = \{y\}$ i $Y' \cap X = \{x\}$. Obrazložite i prikažite crtežom.

5. Neka je $A \perp B \| C \| D \perp E \perp F \perp G \| H \| K \perp L$.

Dovršite popunjavanje tabele:

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
A	$\|$				$\|$					$\perp$
B								$\perp$		
C					$\perp$					
D			$\|$				$\perp$			
E		$\perp$			$\|$				$\|$	
F				$\|$						$\|$
G	$\perp$					$\perp$			$\|$	
H			$\perp$				$\perp$			$\perp$
K										
L				$\|$			$\perp$			$\|$

6. a, $b \in \Pi$, A, B, C, D su prave. Nacrtajte te tačke i te prave kad njihovi dijagrami izgledaju ovako:



Slika 4.18

Ono što je šrafirano treba zamisliti šrafirano crveno, tj. praznom množinom.

7. 1) Prave A, B, C sadržane su u ravni Π. Koliko zajedničkih tačaka mogu one imati? Prikažite svaki slučaj crtanjem A, B, C i njihovih (Venovih) dijagrama.

2) Pokažite da, u zavisnosti od međusobnog položaja, prethodne tri prave određuju, respektivno, 4, 6 ili 7 oblasti ravni (kad se, razume se, apstrahuju zajedničke tačke datih pravâ).

3) Definišu li te tri prave particiju ravni Π i kad?

8. 1) Koliko pravâ mogu odrediti 4 (razne) tačke (ravni Π)?

2) Koliko oblasti (ravni Π) određuju prave u svakom od prethodnih slučajeva (izuzimajući tačke koje pripadaju pravama).

9. Neka prave A, B, C imaju jednu zajedničku tačku s. Šta predstavlja: (1) $(A \cap B) \cap C$; (2) $(A \cup B) \cap C$; (3) $(A \cap B) \cup C$?

10. Neka su P_1 i P_2 dve poluprave prave P sa zajedničkim početkom a. Neka je P_3 otvorena poluprava koja izlazi iz a, a sadržana je u P_1. Neka je P_4 otvorena poluprava sa početkom a sadržana u P_2. Proverite da je:

(1) $P_1 \cap P_2 = \{a\}$; (4) $P_3 \cup P_4 = P \setminus \{a\}$;
(2) $P_1 \cup P_1 = P$; (5) $\{P_1, P_4\}$ je particija prave P;
(3) $P_3 \cap P_4 = \varnothing$; (6) $\{P_2, P_3\}$ je . . .

11. Isto kao u t. **10.** Dovršite:

(1) $P_1 \cap P_4 =$ (3) $P \setminus P_1 =$ (5) $P \setminus P_3 =$
(2) $P_1 \cup P_4 =$ (4) $P \setminus P_2 =$ (6) $P \setminus P_4 =$

12. Obrazložite tvrđenja (kad su sve figure o kojima se govori sadržane u Π):

1) Množina zatvorenih polupravâ sa zajedničkim početkom a nije particija ravni Π.
2) Množine otvorenih polupravâ sa (zajedničkim) početkom a nije particija ravni Π.
3) Množina koju čine $\{a\}$ i otvorene poluprave sa početkom a je particija ravni Π.

Rezime

1. 1) Tačka, prava i ravan su prvobitni pojmovi u geometriji. Oni se opisuju trima aksiomima Π 1, Π 2, i Π 3.

2) Tri i više tačaka koje pripadaju istoj pravi zovu se kolinearne tačke.

2. 1) Ravan sadrži bar tri nekolinearne tačke.

2) Tačka pripada beskonačnoj množini pravâ.

3) Prave ravni (Π) čine beskonačnu množinu.

3. Dve tačke mogu biti razne („različite") ili se poklapaju: $a \neq b$; $a = b$.

4. 1) Dve prave mogu:

(1) da nemaju zajedničkih tačaka;
(2) da imaju jednu zajedničku tačku;
(3) da su im sve tačke zajedničke.

U slučaju (1) prave su paralelne.
U slučaju (2) prave se seku.
U slučaju (3) prave se poklapaju (ali i tada kažemo da su paralelne).

Ali prave su množine (tačaka) i zato se ono što prethodi izražava ovako:

$$\text{Ili je } A \neq B \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \begin{cases} A \cap B = \{x\} \; . \; . \; . \; A \nparallel B \\ A \cap B = \varnothing \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$
$$\text{Ili je } A = B \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \Big\} \; A \| B.$$

2) $A \| B \Leftrightarrow B \| A$; $A \| B$, $B \| C \Rightarrow A \| C$. Za svaku pravu je $A \| A$.

3) Kad je $A \cap B = \{x\}$, može biti $A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$.

5. 1) Prava P ravni Π određuje dve poluravni Π_1 i Π_2.

2) Poluravan može biti zatvorena ili otvorena.

3) Π_1, P, Π_2 je jedna particija ravni Π.

6. 1) Tačka p prave P određuje dve poluprave P_1 i P_2.

2) Poluprava može biti zatvorena ili otvorena.

3) $\{P_1, p, P_2\}$ je jedna particija prave P.

7. 1) Sve prave ravni Π paralelne jednoj pravi $P \subset \Pi$ čine pravac (P).

2) Svaka tačka $t \in \Pi$ pripada samo jednoj pravi pravca (P).

3) Aksiom Π 4 o jedinoj pravi koja sadrži datu tačku a paralelna je datoj pravi.

8. 1) Ako je $P \perp P'$, onda je $(P) \perp (P')$.

2) Aksiom Π 5 o jedinom pravcu perpendikularnom na datom pravcu.

3) Datu tačku sadrži samo jedna prava perpendikularna na datoj pravi.

GLAVA V

RELACIJE*

„Množine su — rekao je jedan veliki matematičar — neiscrpno gorivo matematičke mašine. Relacije su njen motor."

„Kad bi se proučavanje množina — rekao je drugi veliki matematičar — ograničilo na njihovo opisivanje, posmatranih nezavisno jedne od drugih, ne uzimajući u obzir relacije koje postoje među njima, to bi se proučavanje svelo na nezanimljivu anatomiju. Relacije uvode jednu vrstu fiziologije množina" (što je ne samo zanimljivije nego se neuporedivo više koristi, primenjuje u raznim oblastima života, rada, raznih nauka).

§ 5.1. ŠTA JE RELACIJA?

1. 1) U § 3.1, t. **1.** 2 pretpostavili smo da se cipele ne razlikuju i zato smo sastavili množinu uređenih parova:

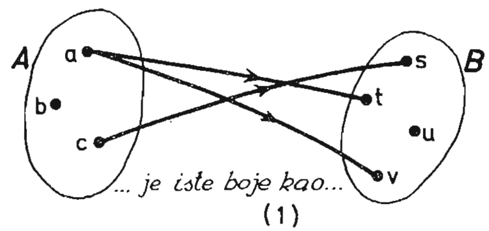
$$\{(a, s), (a, t), (a, u), (a, v), (b, s), (b, t), (b, u), (b, v), (c, s), (c, t), (c, u), (c, v)\} = A \times B$$

koja se zove proizvod množina A i B.

Međutim, izuzev fabričkog magacina i velikih prodavnica, teško se mogu naći takve množine cipela. Uzmimo, na primer, da se cipele razlikuju po boji. To je već dovoljno da se od svake leve i svake desne ne može sastaviti par cipela. Tada samo neki elementi proizvoda $A \times B$ dolaze u obzir, na primer:

$$\{(a, t), (a, v), (c, s)\}.$$

Grafički, sagitalno prikazana ta množina izgleda ovako:



Slika 5.1(1)

* Pre nego što pristupi ovoj glavi, čitalac (koji prvi put dolazi u dodir sa savremenom matematikom) treba da ponovo pročita glavu III.

Svaka strelica *polazi* od elementa množine A, *dolazi* u element množine B i zamenjuje, u ovom slučaju, reči: „je iste boje kao" (a je iste boje kao t, a je iste boje kao v, c je iste boje kao s). Iz elementa b ne polazi nijedna strelica jer među elementima množine B nema nijednog takve boje kao što je boja elementa b. U element u ne dolazi nijedna strelica zato što se on razlikuje (po boji) od svih elemenata množine A.

2) U jednoj porodici ima četvoro dece: Veselin, Brankica, Danica i Miloš. Na početku letnjeg raspusta otac im je doneo sedam knjiga da čitaju, koje se mogu označiti ovako I, II, III, IV, V, VI, VII. Imamo, dakle, dve množine: množinu E dece i množinu F knjiga. Pred početak školske godine otac je hteo da vidi šta je koje dete pročitalo. Ima raznih mogućnosti. Pretpostavimo da je otac zapisao:

Veselin je pročitao II, IV i VI knjigu.

Brankica je pročitala IV i VI knjigu.

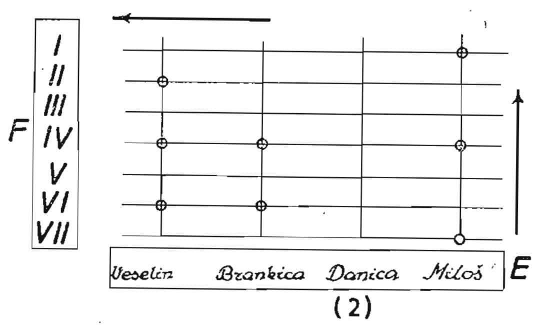
Danica nije pročitala nijednu knjigu.

Miloš je pročitao I, IV i VII knjigu.

U svakoj od tih rečenica podmet (subjekt) je element množine E, predmet (objekt) je element množine F, a prirok je svuda isti „je pročitao(la)".

Prikažite to sagitalno (kao na sl. 5.1, tj. tako da svaka strelica koja izlazi iz jednog elementa množine E i ulazi u element množine F označava „je pročitao(la)").

U obliku mreže Dekartovog proizvoda to izgleda ovako:



Slika 5.1(2)

Dakle, deo proizvoda $E \times F$, određen predikatom (prirokom) „je pročitao(la)" glasi:

$$\{(v, \mathrm{II}), (v, \mathrm{IV}), (v, \mathrm{VI}), (b, \mathrm{IV}), (b, \mathrm{VI}), (m, \mathrm{I}), (m, \mathrm{IV}), (m, \mathrm{VII})\}.$$

3) Posmatrajmo množine $C = \{2, 4, 6, 8\}$ i $D = \{1, 3, 5, 7\}$ gde su elementi brojevi. Proizvod tih množina sastoji se od 16 elemenata, 16 uređenih parova:

$$C \times D = \{(2, 1), (2, 3), \ldots, (8, 5), (8, 7)\}.$$

Uzmimo u obzir samo one od tih parova za koje možemo reći „prvi član je manji od drugog". Oni čine množinu:

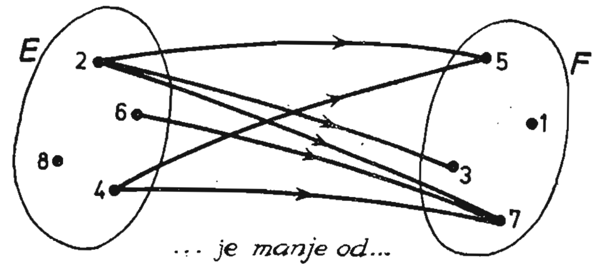
$$\{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7)\}.$$

Prikazana u obliku Dekartova proizvoda (u obliku a ne kao Dekartov proizvod) ona izgleda ovako:

	1	3	5	7
2		*	*	*
4			*	*
6				*
8				

gde zvezdica stoji umesto odgovarajućeg para, npr. (2, 3), . . . , (6, 7). Ostala mesta su prazna. Sagitalno prikazana ta ista množina izgleda kao na sl. 5.2.

4) Neka je M množina đaka mlađih razreda Osnovne škole „Maksim Gorki" u Beogradu (ove godine). Neka je S množina đaka starijih razreda iste škole. Nacrtajte crtež čije strelice polaze iz M (dolaze u S), a koje označavaju „. . . ima brata ili sestru . . ."



Slika 5.2

2. Uopšte, ako se za članove nekih uređenih parova proizvoda $X \times Y$ (dveju množina X i Y) može iskazati jedno isto tvrđenje, onda se to tvrđenje zove *relacija* između elemenata množine X i elemenata množine Y. To se kratko izražava:

Postoji relacija $\boldsymbol{R}$ od X ka Y, gde $\boldsymbol{R}$ stoji umesto odgovarajućeg tvrđenja („je iste boje kao", „je pročitao", „ima sestru", . . .).

Relacija $\boldsymbol{R}$ između ma koja dva elementa $x \in X$ i $y \in Y$ označava se kratko ovako:

$$x\boldsymbol{R}y.$$

Znači, umesto reći, na primer:

c je iste boje kao s, pišemo $c\boldsymbol{R}s$;

b je pročitala IV, pišemo $b\boldsymbol{R}\mathrm{IV}$;

a ima (za) sestru p, pišemo $a\boldsymbol{R}p$; itd.

Napišemo li sve one parove (x, y) proizvoda $X \times Y$, za koje važi $x\boldsymbol{R}y$, dobijamo *graf* relacije. Prema tome:

$$\boldsymbol{R} = \{(a, t), (a, v), (c, s)\}$$

je graf relacije, „. . . je iste boje kao . . ." od A ka B;

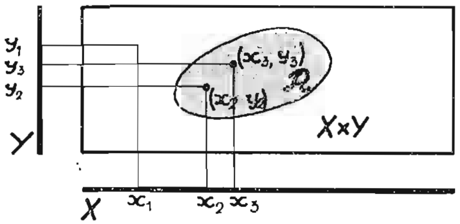
$$\boldsymbol{R} = \{(v, \mathrm{II}), (v, \mathrm{IV}), (v, \mathrm{VI}), (b, \mathrm{IV}), (b, \mathrm{VI}), (m, \mathrm{I}), (m, \mathrm{IV}), (m, \mathrm{VII})\}$$

je graf relacije „. . . je pročitao(la). . .“ od E ka F.

$$\boldsymbol{R} = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 7), (6, 7)\}$$

je graf relacije, „. . . je manji od . . .“ od C ka D; itd.

Graf relacije je, znači, deo (podmnožina) datog proizvoda dveju množina. Grafičke šeme tih relacija (npr. sl. 5.1(1), 5.1(2), 5.2, one koje ste sami napravili, itd.) su samo konkretizacije grafova (navedenih) relacija a ne sami grafovi. Svaka strelica sagitalne konkretizacije zamenjuje, kako je već rečeno, predikat rečenice kojom se izražava misao, tvrđenje. Zato ona „izlazi“ iz elementa „polazne“ množine (ili subjekta) i ulazi u element „dolazne“ množine (u predmet).



Slika 5.3

Ako se graf relacije sastoji od vrlo mnogo elemenata, on se konkretizuje ovako (sl. 5.3).

To jest proizvod $X \times Y$ prikazuje se svima tačkama ograničene jednim pravougaonikom. Jedan deo te oblasti prikazuje elemente grafa relacije, a množine X i Y prikazuju se dužima respektivno podudarne stranicama pravougaonika. — To je u stvari mreža 5.1(2) kad je broj elemenata proizvoda $X \times Y$, pa dakle i broj elemenata grafa relacije vrlo veliki (čak i neograničen).

3. I u životu i u naukama ima vrlo mnogo relacija između pojedinih objekata, na primer: [Umesto tri tačke (. . .) stavlja se ime objekta ili sam objekt.]

. . . je godišnji odmor proveo u . . .
. . . posećuje istu školu kao . . .
. . . poručio je . . . (da pojede, da popije)
. . . igra sa . . . (igra u dvoje)
. . . dopisuje se sa . . .
. . . je majka od . . .
. . . izdržava . . .
. . . je mlađi od . . .
. . . ima oca . . .
. . . je podmnožina množine . . .
. . . je veći od . . .
. . . je jednak . . .
. . . je delilac broja . . .
. . . je paralelna sa . . .
. . . je perpendikularna na . . .

i tako dalje, i tako dalje (sve relacije se ne mogu nabrojati).

Ali da bi se o jednoj relaciji moglo govoriti u matematičkom smislu, nužno je:

(1) odrediti (polaznu) množinu X i (dolaznu) množinu Y (vrlo često je $Y = X$, kao što ćemo videti u § 5.3);

(2) napraviti proizvod $X \times Y$;

(3) za svaki element proizvoda $X \times Y$ odgovoriti na pitanje: zadovoljava li on određenu relaciju R?

Odgovor na to pitanje mora biti ili *da*, ili *ne* (nikako: „i da i ne“, „možda“, „izgleda“, „verovatno“ i sl.).

Rezultat svega toga je određena množina $\boldsymbol{R}$, u stvari podmnožina množine $X \times Y$ koja se, kako je već rečeno, zove graf relacije $\boldsymbol{R}$ (a samim tim i komplementarna množina u odnosu na $X \times Y$). Prema tome:

Definisati relaciju $\boldsymbol{R}$ od množine X ka množini Y znači definisati takvu podmnožinu $\boldsymbol{R}$ množine $X \times Y$, tj. $\boldsymbol{R} \subset X \times Y$, da je:

$$(x, y) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow x\boldsymbol{R}y.$$

Samim tim definiše se i komplementarna množina množine (u odnosu na $X \times Y$).

Radi lakšeg shvatanja često se govori očigledno, „konkretno“:

Relacija je množina strelica (npr. crteži 5.1, 5.2, onaj koji ste vi napravili pod 2) *čiji su počeci određeni elementi polazne množine* (koju uopšte označavamo sa X), *a krajevi* (su im) *određeni elementi dolazne množine* (koju uopšte označavamo sa Y) [jer svaka strelica zamenjuje predikat rečenice koja izražava relaciju].

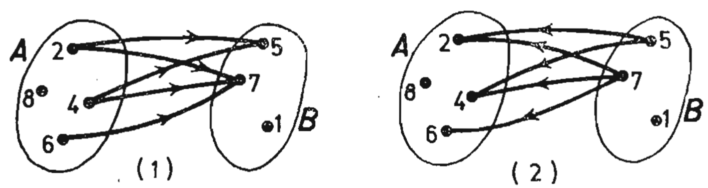
Za $x\boldsymbol{R}y$ kažemo: x je u relaciji $\boldsymbol{R}$ sa y; ili x i y nalaze se u relaciji $\boldsymbol{R}$; ili x je kongruentan y (ipsilonu) po *modulu* $\boldsymbol{R}$; ili, kraće, x kongruentan y *modulo* $\boldsymbol{R}$.

Svi navedeni primeri su *binarne relacije* jer se svaki put vezuju dva elementa. To se vidi i iz formulisane opšte definicije.

§ 5.2. RECIPROČNA (INVERZNA, OBRNUTA) RELACIJA DATE RELACIJE

1) Crtež 5.4(1) je sagitalni prikaz relacije, „. . . je manji od . . .“ od A ka B, a čiji je graf:

$$\boldsymbol{R} = \{(2, 5), (2, 7), (4, 5), (4, 7), (6, 7)\}.$$



Slika 5.4

Nacrtajte ga i vi, a zatim nacrtajte zelene strelice čiji su počeci elementi množine B a krajevi — elementi množine A. Dobijate crtež 5.4(2). On prikazuje relaciju „. . . je veći od . . .“ (od B ka A). Njen graf je:

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \{(5, 2), (5, 4), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}.$$

$\boldsymbol{R}^{-1}$ je *recipročna relacija* relacije $\boldsymbol{R}$. I obrnuto: $\boldsymbol{R}$ je recipročna relacija relacije $\boldsymbol{R}^{-1}$.

(To je skraćeno izražavanje. Trebalo bi: Relacija čiji je graf $\boldsymbol{R}^{-1}$ je recipročna relacija relacije čiji je graf $\boldsymbol{R}$, i obrnuto.)

Uopšte, ako je jedna relacija $\boldsymbol{R}$ definisana ekvivalencijom:

$$x\boldsymbol{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{R} \; (x \in X, \; y \in Y),$$

recipročna relacija $\boldsymbol{R}^{-1}$ definiše se ovako:

$$y\boldsymbol{R}^{-1}x \Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{R} \; (x \in X, \; y \in Y).$$

Članovi svakog uređenog para (svakog elementa množine $\boldsymbol{R}$) menjaju, dakle, uzajamno rang, pa možemo napisati:

$(a, b)^{-1} = (b, a)$, $(a, a)^{-1} = (a, a)$, (a, a) je *identični par*;

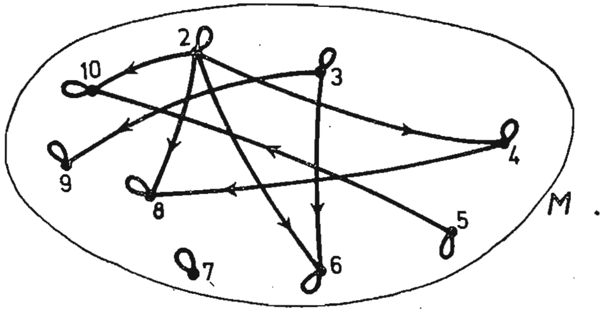
$(a, b)^{-1} = (b, a)$ je *recipročni uređeni par* uređenog para (a, b).

2) Neka je $E = \{a, b, c, d, e\}$ množina odraslih prisutnih na proslavi jednog rođendana, a $F = \{m, n, p, q\}$ množina dece prisutnih na toj proslavi. Prikažite sagitalno (pomoću strelica) relaciju „... ima kao dete...“, ili, što je isto „... je roditelj...“. Zatim prikažite recipročnu relaciju „... je dete (od)...“.

§ 5.3. RELACIJE U JEDNOJ MNOŽINI

Kako se vrlo često posmatra proizvod $X \times X$, prirodno je da se često pojavljuju i relacije od X ka X, tj. relacije u jednoj istoj množini.

1) Šta prikazuje, na primer, crtež:



Slika 5.5

Prikazuje relaciju „... je delilac broja...“ u množini:

$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Broj 2, na primer, je delilac broja 4, broja 6, broja 8, broja 10 i, razumljivo, broja 2 (samog sebe). Zato iz tačke 2 polazi 5 strelica. Jedna od njih se vraća u istu tačku. Takvu strelicu smo (§ 3.3. Uputstva) nazvali alkom (u nedostatku drugog zgodnijeg termina). Broj 5 je delilac broja 10 i samog sebe. Broj 7 je samo svoj sopstveni delilac.

Svaki broj je delilac samog sebe i zato u svakoj tački sagitalne šeme relacije „... je delilac...“ postoji alka.

Proizvod $M \times M$ ima $9 \cdot 9 = 81$ element (uređeni par). Od toga samo oni prikazani crtežom 5.5 čine množinu $\boldsymbol{R}$, tj.

$$\boldsymbol{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), \ldots\}.$$

Dovršite taj graf.

Dakle i ovde je: $\boldsymbol{R} \subset M \times M$.

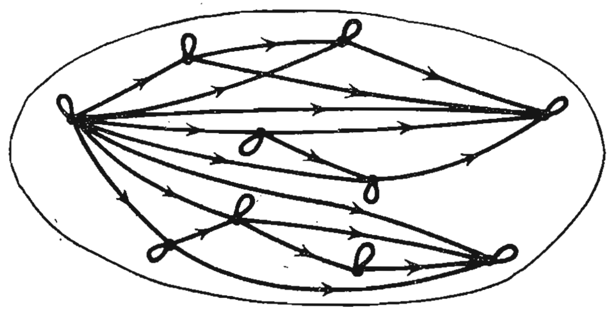
Svaki element $(2, 2)$, $(3, 3)$, ..., uopšte (a, a), je rekli smo (§ 5.2) *identični par*.

Nacrtajte i vi 5.5, a zatim na istom crtežu prikažite recipročnu relaciju, tj. „... je deljiv brojem...“ ili, što je isto, „... je multiplum broja...“.

2) Sinonim relacije „... je delilac broja...“ jeste „... deli...“ i kratko se označava crtom $|$. Naime $a \mid b$ (a deli b) ako postoji prirodni broj q takav da je $b = aq$. (O tome će još biti reči.) Prikažite sagitalno relaciju $|$ („... deli...“) u: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 15, 25, 900\}$.

Zatim prikažite, na istom crtežu, relaciju „... je multiplum...“.

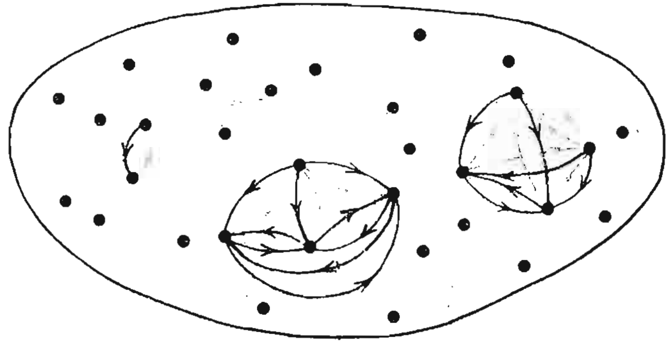
3) Napišite pored nacrtanih tačaka odgovarajuće brojeve tako da crtež 5.6 prikazuje relacije $|$:



Slika 5.6

4) Napišite graf relacije $|$ u: $\{1, 2, 3, 5, 7, 6, 350, 0\}$.

5) Crtež 5.7 prikazuje relaciju „... ima kao brata ili sestru...“ u datoj množini. Zelena strelica označava „... ima kao brata...“ a crvena „... ima kao sestru...“ Označite na crtežu slovom m tačke koje označavaju dečake, a slovom $ž$ tačke koje označavaju devojčice.



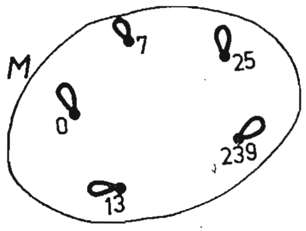
Slika 5.7

§ 5.4. OSOBINE NEKIH RELACIJA IZMEĐU ELEMENATA JEDNE MNOŽINE

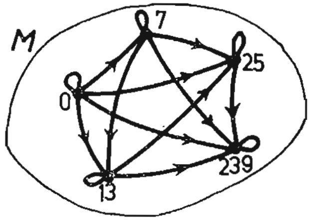
1. Refleksivnost. — Napišite graf relacije „. . . je jednak . . .“ u množini $\{0, 7, 13, 25, 239\}$.

Napisali ste $\boldsymbol{R} = \{(0, 0), (7, 7), (13, 13), (25, 25), (239, 239)\}$.

Svi elementi (uređeni parovi) su, dakle, *identični*.



Slika 5.8



Slika 5.9

Napišite u istoj množini relaciju „. . . je manji ili jednak . . .“

$\boldsymbol{R} = \{(0, 0), (0, 7), (0, 13), (0, 25), (0, 239), (7, 7), (7, 13), \ldots\}$

Šta prikazuje crtež 5.9? On sadrži (pored ostalih) iste identične parove koje sadrži i 5.8.

Za svaku takvu relaciju kažemo da je *refleksivna.*

Definicija 1. — *Ako u svakoj tački sagitalne šeme ima alke, relacija je refleksivna* (u datoj množini M).

Specijalan slučaj refleksivne relacije je kad su svi njeni elementi identični (kad se njena sagitalna šema sastoji samo od alki). Tada se ona zove *identična relacija* (sl. 5.8).

1) Neka je A jedna porodica (dakle množina), a B množina radnika jednog preduzeća. U kojoj je od tih množina relacija „x izdržava y“ refleksivna?

2) Neka je M množina đaka iste škole. Neka $x\boldsymbol{R}y$ označava: „x ide u isti razred kao y“. Je li $x\boldsymbol{R}y$ refleksivna u M?

3) Označimo množinu svih pravih ravni Π. Pokažite da u množini $\boldsymbol{D}$ relacija „x je paralelna sa y“ jeste refleksivna.

4) Data je prava P ravni Π. Ona određuje dve poluravni. Neka $x\boldsymbol{R}y$ označava: x pripada istoj otvorenoj poluravni kao y. Šta možete tvrditi za $x\boldsymbol{R}y$ u istoj otvorenoj poluravni koju određuje P?

2. 1) **Antirefleksivnost** — Napišite graf relacije „. . . je manji od . . .“ u množini $\{0, 1, 3, 5, 7\}$.

$\boldsymbol{R} = \{(0, 1), (0, 3), (0, 5), (0, 7), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\}$.

Prikažite to sagitalnom šemom.

Definicija 2. — *Ako sagitalna šema nema* (ne sadrži) *nijednu alku, relacija je antirefleksivna u* M (tj. u datoj množini).

2) Neka je M:

(1) množina stanovnika jednog grada a $x\boldsymbol{R}y$ označava „x je stariji od y“;

(2) množina žena a $x\boldsymbol{R}y$ označava „x ima kao sestru y“;

(3) množina tačaka ravni Π, a $x\boldsymbol{R}y$ označava „x je (nalazi se) ispred y“.

Što možete reći u pogledu refleksivnosti ili antirefleksivnosti o relaciji: pod (1); pod (2); pod (3)?

3. 1) Šta možete reći o relaciji:

$$\boldsymbol{R} = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (5, 5)\} \text{ u } \{2, 3, 5\}$$

u pogledu refleleksivnosti ili antirefleksivnosti?

2) Izmerene su mase dece. Branka ima 27 kg, Ljubica 29 kg, Gordana 27 kg, Divna 29 kg, Mira 27 kg, Nada 28 kg. Napišite relaciju „. . . ima masu kao . . .“ u množini $\{b, g, m\}$. Da li je ona refleksivna?

3) Aca je navršio 10 godina, Cvetko je navršio 12 godina, Dobrica je navršio 15 godina. Napišite relaciju „. . . je mlađi od . . .“ Šta možete reći o toj relaciji?

4) Šta možete reći o relaciji $A \times B$ prikazanoj crtežom 18 Uputstva?

5) Nacrtajte sagitalne šeme onih od prethodnih relacija koje su refleksivne.

4. Tranzitivnost. — 1) Porodica koja stanuje u susednom stanu (do mene) sastoji se od muža, žene i njihove troje dece. Danas su se izmerili i njihove mase iznose 72 kg, 63 kg, 28 kg, 20 kg, 14 kg. Napišite graf relacije „. . . ima veću masu od . . .“ u množini $M = \{72, 63, 28, 20, 14)$

$\boldsymbol{R} = \{(72, 63), (72, 28), (72, 20), (72, 14), (63, 28), (63, 20), (63, 14), (28, 20), (28, 14), (20, 14)\}$.

Nacrtajte njenu sagitalnu šemu i posmatrajte:

Jedna strelica polazi iz 72 i dolazi u 63.
Druga strelica polazi iz 63 i dolazi u 28.
Treća strelica polazi iz 72 i dolazi u 28.
Jedna strelica polazi iz 63 i dolazi u 20.
Druga strelica polazi iz 20 i dolazi u 14.
Treća strelica polazi iz 63 i dolazi u 14.

Produžite tako i dovršite. Možete li naći ma koje tri tačke („triplet“) koje ne zadovoljavaju taj uslov.

Simbolima to zapisujemo, na primer:

$(28, 20)$ i $(20, 14) \Rightarrow (28, 14)$.

Ta se osobina zove tranzitivnost relacije.

Definicija 3. — *Relacija je tranzitivna tada i samo tada ako kad god postoje uređeni parovi* (x, y) *i* (y, z) *postoji i uređeni par* (x, z).

Slika 5.10

Ili: *Neka je* $\boldsymbol{R}$ *ma koja binarna relacija u množini* M. *Ako* $x \in M$, $y \in M$, $z \in M$ *i ako iz* $x\boldsymbol{R}y$ *i* $y\boldsymbol{R}z$ *uvek sledi* $x\boldsymbol{R}z$, *relacija* $\boldsymbol{R}$ *je tranzitivna.*

2) Neka je data množina $M=\{a, b, c, d\}$ gde su elementi ljudi. Napišite graf relacije „. . . ima kao otac . . .“ u M. Nacrtajte i njenu sagitalnu šemu. Je li ta relacija tranzitivna?

3) Neka je M množina svih đaka jedne škole a xRy označava: „. . . ide u isti razred kao . . .“ Da li je ona tranzitivna u M?

4) Šta je $\Pi \setminus P$? (Množina tačaka ravni koje ne pripadaju pravi P.) Relacija xRy označava “. . . je tačka iste poluravni . . .„ Je li R tranzitivna u $\Pi \setminus P$?

5) Je li relacija „. . . je paralelna sa . . .“ u Π tranzitivna? A relacija „. . . je perpendikularna na . . .“?

6) Je li relacija „. . . je jednaka . . .“ tranzitivna?

7) Dovrši i prikaži crtežom:

(1) *Ako je aRb i bRa, onda je . . .*

(2) *Ako je aRb i bRb, onda je . . .*

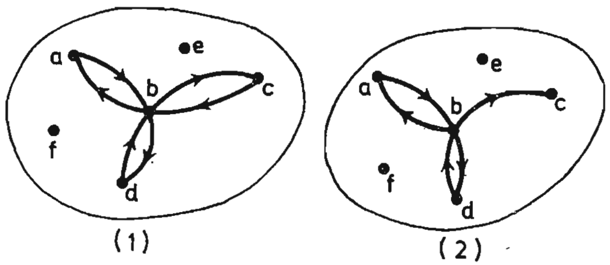
(3) *Ako je aRa i aRb, onda je . . .*

(4) *Ako je aRa i aRa, onda je . . .*

8) Da li je relacija $x+y=7$ u množini N (prirodnih brojeva) tranzitivna?

5. Simetričnost. — 1) Andra voli Borku. To je jedna relacija: ***aRb***. Da li Borka voli Andru, tj. da li važi i ***bRa***? Iz toga što Andra voli Borku, nikako ne sledi da i Borka voli Andru.

2) Svaki od sledeća dva crteža definiše jednu relaciju. U čemu je razlika između crteža?



Slika 5.11

Za relaciju (1) kažemo da je *simetrična*. Relacija (2) nije simetrična.

3) Zamislite množinu devojčica i relaciju u njoj „. . . ima kao sestru . . .“ Da li je ta relacija simetrična? Napišite definiciju simetrične relacije.

4) Je li relacija $\parallel$ u množini D (pravih) simetrična?

5) Da li je relacija $\perp$ u množini D simetrična?

6. Antisimetričnost. — 1) U čemu je razlika između relacija prikazanih crtežima 5.12 str. 81.

Zamislite množinu svih ljudi vaše opštine iznad 18 godina i u njoj relaciju „. . . je otac . . .“. Ako je (a, b) jedan par (element) te relacije, da li je i (b, a) njen element?

Relacija „. . . je otac . . .“ je *antisimetrična*. Crtež 5.12 (1) prikazuje antisimetričnu relaciju, a relacija prikazana crtežom (2) nije antisimetrična, jer sadrži i recipročni par (d, a) para (a, d).

Napišite definiciju antisimetrične relacije.

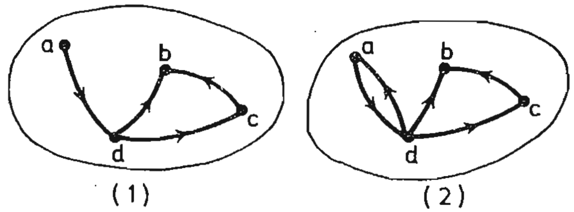
2) Šta možete reći o relacijama „. . . je manji od . . .“, „. . . je mlađi od . . .“, „. . . je teži od . . .“ u pogledu simetričnosti i antisimetričnosti?

3) Šta možete reći o relaciji “. . . deli . . .“ (|) u množini prirodnih brojeva?

4) Na mom stolu je množina knjiga K. Da li je relacija „. . . leži na . . .“ simetrična u K?

5) Šta možete reći o relaciji:

$$R=\{(a, b), (c, d), (p, q), (b, a), (q, p)\}?$$



Slika 5.12

Neka je R ma koja binarna relacija u množini M. Na osnovu svega prethodnog možemo reći:

(1) *Ako za svako $x \in M$ važi $x\boldsymbol{R}x$, $\boldsymbol{R}$ je refleksivna relacija.*

(2) *Ako ni za jedno $x \in M$ nije $x\boldsymbol{R}x$, $\boldsymbol{R}$ je antirefleksivna relacija.*

(3) *Ako za neke elemente $x \in M$ važi $x\boldsymbol{R}x$, a za druge elemente $y \in M$ nije $y\boldsymbol{R}y$, tj. ako $\boldsymbol{R}$ sadrži neke (ali ne sve) identične parove, relacija nije ni refleksivna ni antirefleksivna.*

(4) *Ako $x, y, z \in M$ i ako iz $x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}z$ uvek sledi $y\boldsymbol{R}z$, $\boldsymbol{R}$ je tranzitivna relacija.*

(5) *Ako $x, y \in M$ i ako iz $x\boldsymbol{R}y$ sledi $y\boldsymbol{R}x$, $\boldsymbol{R}$ je simetrična relacija.*

(6) *Ako $x, y \in M$ i ako iz $x\boldsymbol{R}y$ nikad ne sledi $y\boldsymbol{R}x$, tj. ako ne sadrži nijedan recipročni par $y\boldsymbol{R}x$, $\boldsymbol{R}$ je antisimetrična relacija.*

(7) *Ako $x, y \in M$ i ako $\boldsymbol{R}$ sadrži neke (ali ne sve) recipročne parove, $\boldsymbol{R}$ nije ni simetrična, ni antisimetrična relacija.*

§ 5.5. VEŽBANJA I ZADACI

1. Pokažite rasuđivanjem i crtanjem (ili bar samo crtanjem) ove činjenice:

1) R je refleksivna, ako je i R^{-1} refleksivna.

2) R je tranzitivna, ako je i R^{-1} tranzitivna.

3) R je simetrična, ako je i R^{-1} simetrična.

4) R je antisimetrična, ako je i R^{-1} antisimetrična.

2. Aca, Bora, Cvetko, Duško i Mile čine množinu $M=\{a, b, c, d, m\}$ dobrih drugova.

1) Nacrtajte sagitalnu šemu i mrežu množine M^2.

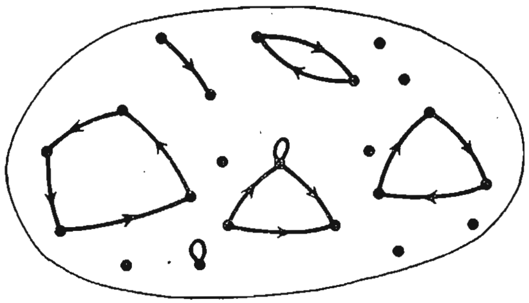
2) Ako svaki od njih pokazuje redom one drugove čija imena slede, prema abecedi, za njegovim, dobija se relacija u množini M: „. . . pokazuje redom drugove čija imena, u spisku sastavljenom abecednim redom, slede posle njegovog . . .“ Napišite graf te relacije i, nezavisno od toga (tj. ne gledajući graf), nacrtajte njenu sagitalnu šemu i njenu mrežu pa uporedite, tj. proverite da li ste sve tačno napisali i pravilno prikazali. U stvari, pokažite strelicu šeme i tačku mreže koje odgovaraju uočenom paru grafa.

3) Imenujte sve osobine te relacije.

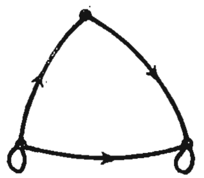
3. Učitelj (nastavnik) je zadao u jednom odeljenju ovaj zadatak: Gledaj svog prisutnog druga (drugaricu) čije prezime počinje slovom kojim počinje tvoje ime. Vi nacrtajte sagitalnu šemu te relacije u množini koju čine đaci vašeg odeljenja.

Konstruišite i mrežu te relacije.

4. U jednom odeljenju, jednog školskog časa, relacija „. . . gleda druga (drugaricu) čije ime počinje slovom kojim počinje njegovo (njeno) ime . . ." izgledala je ovako:



Slika 5.13



Slika 5.14

Napišite ime i prezime svakog đaka iz čije tačke (koja ga predstavlja u datoj množini) izlazi, odnosno u nju ulazi, strelica.

5. Crtež 5.14 prikazuje jednu relaciju, ali je nedovršen. Dovršite ga i navedite osobine te relacije.

6. 1) Nacrtajte (Venov) dijagram množine od dvadesetak vama poznatih lica i u njoj prikažite relaciju „ . . ima za oca . . ."

2) Nacrtajte dijagram množine stanovnika sela u kome stanujete (ili kuće u kojoj stanujete, ili onih koje čine vaše poznato susedstvo), pa u njoj prikažite relaciju: x je supruga y. Koje su karakteristike te relacije?

7. 1) Neka množinu E čine dečaci: Aca, Bojan, Dejan, Gavra, Kosta, Miloš, Nenad, Pero, Ratko, Srećko, Trajko. Neka su braća: Aca, Gavra i Ratko; Bojan i Dejan; Nenad i Trajko. (1) Nacrtajte sagitalnu šemu relacije $\boldsymbol{R}$ „. . . ima za brata . . ." u E. (2) Koje osobine ima ta relacija? (3) Šta možete reći o $\boldsymbol{R}^{-1}$?

2) Zamislite da su se prethodnim dečacima priključile devojčice: Cveta, Ema, Fadila, Ivanka, Zlata, Ruža, Vida, da su Cveta i Ruža sestre, da je Vida Kostina sestra, a Ivanka Dejanova. (1) Nacrtajte sagitalnu šemu relacije $\boldsymbol{R}$ „. . . ima za brata . . ." u F koju čine imenovani dečaci i devojčice. (2) Nacrtajte recipročnu relaciju u F. Šta možete reći o $\boldsymbol{R}^{-1}$ u tom slučaju?

3) Posmatrajte relaciju „. . . ima za brata ili sestru . . ." u F i recopročnu relaciju. Nacrtajte njihove sagitalne šeme.

8. Svaka od sledećih relacija definisana je u određenoj množini ljudi i žena. Pokažite (potcrtajte) onu koja je simetrična:

x je pisao(la) y;	x je majka y;
x je sused y;	x je sestra y;
x je kćerka y;	x je pogledala y;
x je gledala predstavu sa y;	x je telefonirao y;
x ima istu visinu kao y;	x izdržava y.

9. U množini N (prirodnih brojeva) definisane su relacije:

$$R_1=\{(1, 5), (3, 7), (9, 13), (27, 31), (81, 85)\}$$
$$R_2=\{(0, 1), (2, 5), (6, 37), (10, 101), (13, 170)\}.$$

1) Iskažite svaku od tih relacija rečima i navedite njene osobine.

2) Napišite grafove R^-_1 i R^-_2, iskažite ih rečima i navedite njihove osobine.

10. Neka je $\boldsymbol{R}=\{(1, 2), ((5, 25), (7, 42), (9, 36), (6, 24), (3, 39)\}$. Sve ostalo kao u prethodnoj tački.

11. Koje osobine ima relacija $\parallel$ u $\boldsymbol{D}$?

12. Koje osobine ima relacija $\perp$ u $\boldsymbol{D}$?

13. Koje osobine ima relacija | u N?

14. Koje osobine ima relacija $\subset$?

15. Koje osobine ima relacija $=$?

16. Koje osobine ima relacija: „x je manje ili jednako y"?

17. Koje osobine ima relacija „x voli y"?

18. Je li relacija „. . . voli . . ." tranzitivna?

19. Znate da je $\boldsymbol{R}$ tranzitivna i da $(a, b) \in \boldsymbol{R}$, $(b, c)=\boldsymbol{R}$, . . . , $(k, l) \in \boldsymbol{R}$. Nacrtajte njenu šemu.

20. Recipročna relacija relacije:

„x je delilac y" je „y je multiplum x";
„x je manji od y" je ________________ ;
„x je sused y" je ________________ ;
„x je jednak y" je ________________ ;
„x ima kao majku y" je ________________ ;
„x je teži od y" je ________________ .

21. Označimo sa:

$\boldsymbol{O}$ relaciju „. . . ima kao oca . . ."
$\boldsymbol{M}$ relaciju „. . . ima kao majku . . ."
$\boldsymbol{S}$ relaciju „. . . ima kao sina . . ."
$\boldsymbol{K}$ relaciju „. . . ima kao kćerku . . ."

Svaka relacija je (§ 5.1) množina uređenih parova. Pokažite da je:

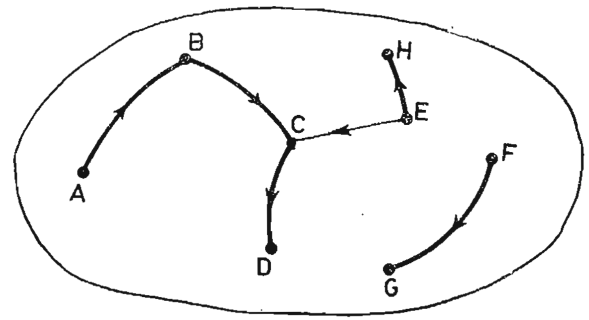
1) $\boldsymbol{O}\cap\boldsymbol{M}=\varnothing$, $\boldsymbol{O}\cap\boldsymbol{S}=\varnothing$, $\boldsymbol{O}\cap\boldsymbol{K}=\varnothing$, $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{S}=\varnothing$, . . .

2) $\boldsymbol{O}\cap\boldsymbol{O}^{-1}=\varnothing$, $\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{M}^{-1}=\varnothing$, . . .

3) $\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{M}$ označava „. . . ima kao oca ili kao majku . . ." Pokažite da:

$$(\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{M})^{-1}=\boldsymbol{S}\cup\boldsymbol{K};\ \boldsymbol{S}\subset(\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{M})^{-1}.$$

22. Neka je $M_p=\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ množina pravih u Π. Na sledećem crtežu svaka crna strelica označava „. . . je paralelna sa . . ." Ali sagitalna šema nije završena. Završite je.



Slika 5.15

23. Je li tačno: (1) $\perp^{-1} = \perp$; (2) $\|^{-1} = \|$; (3) $\| \cap \perp = \varnothing$?

24. 1) Za svaku pravu P je $\|\{P\} = (P)$.

2) $A \perp B \Rightarrow \| \{A\} = \perp \{B\}$
$\Rightarrow \| \{B\} = \perp \{A\}$.

25. Šta znači, preveden na matematički jezik, aforizam: „Prijatelji naših prijatelja su naši prijatelji"? Je li to matematičko tvrđenje?

Rezime

1. Ako se od proizvoda $X \times Y$ odaberu oni uređeni parovi za koje se može tvrditi nešto što je zajedničko, dobija se množina koja se zove *relacija* od X ka Y:

$$\boldsymbol{R} \subset X \times Y, \quad (x, y) \in \boldsymbol{R} \Leftrightarrow x \, \boldsymbol{R} \, y, \quad (x \in X, \quad y \in Y).$$

2. Ako se svaki par $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ zameni obrnutim, *recipročnim parom* (y, x), $[(y, x) = (x, y)^{-1}]$, dobija se relacija od Y ka X. Ona se zove *recipročna* (inverzna) *relacija* relacije $\boldsymbol{R}$:

$$y \, \boldsymbol{R}^{-1} x \Leftrightarrow (x, y) \in \boldsymbol{R}, \quad (x \in X, \quad y \in Y).$$

3. U „specijalnom", ali vrlo važnom, slučaju kad je $Y = X$, relacija $\boldsymbol{R}$ je definisana u jednoj (istoj) množini X: od X ka X.

Tada je: $\boldsymbol{R} \subset X^2$.

4. (x, x) je identični par: $(x, x)^{-1} = (x, x)$.

Ako se relacija sastoji samo od identičnih parova, na primer:

$$\boldsymbol{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), \ldots\},$$

ona se zove *identična relacija*.

5. Osobine relacije $\boldsymbol{R}$ u množini* X:

(1) refleksivnost:** $\forall x \in X$: $(x, x) \in \boldsymbol{R}$;

(2) antirefleksivnost: $\forall x \in X$: $(x, x) \notin \boldsymbol{R}$;

(3) simetričnost: $\forall x, y \in X$: $(x, y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y, x) \in \boldsymbol{R}$;

(4) antisimetričnost: $\forall x, y \in X$: $(x, y) \in \boldsymbol{R}$, a $(y, x) \notin \boldsymbol{R}$;

(5) tranzitivnost: $\forall x, y, z \in X$: $(x, y) \in \boldsymbol{R}$ i $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in \boldsymbol{R}$.

* Videti i kraj § 5.4.

** Simbol $\forall$ (izvrnuto slovo A) uveli smo ranije. On se stavlja ispred elemenata (jedan ili više) i označava (čita se): „za svaki (za svako)", na primer:

$\forall \; x \in A =$ za svako x koje pripada A;

$\forall \; a, b, c =$ za svako a, svako b, svako c.

GLAVA VI

RELACIJE EKVIVALENCIJE

Prethodna napomena. — Tri vrste relacija, naime relacije ekvivalencije, relacije reda i funkcionalne relacije imaju fundamentalni značaj za izgrađivanje savremene matematike. Ova i sledeće dve glave posvećene su tim relacijama. One će nam omogućiti da i neke poznate sadržaje klasične matematike vidimo u jednoj novoj svetlosti.

§ 6.1. KLASIRANJE, KLASE I PARTICIJA

U svakodnevnom životu se često čuju reči klasiranje i klase. U naukama takođe. Ali pojmovi koje označavaju te reči u matematici su ne samo precizniji nego i malo drukčiji. To pogotovu važi za reč klasa, koja u „običnom" životu (pa i u nekim društvenim naukama) označava razne „stvari".

1. Šta u matematici znači klasirati i šta označava reč klasa?

Da bismo odgovorili na ta pitanja, pođimo od nekoliko primera:

1) Devojčica Snežana nabrala je razno cveće i pravi bukete: od belog cveća, od plavog cveća, itd.

Botaničar može od tog istog cveća da pravi bukete prema vrstama biljaka od kojih pojedini cvetovi potiču. U botanici se biljke različito razvrstavaju. Za nas ovde je, možda, najrazumljivije: cveće koje potiče od jednogodišnjih biljaka; cveće koje potiče od dvogodišnjih biljaka i cveće od višegodišnjih biljaka.

2) Ako damo učeniku hartijice (kartončiće) raznog oblika i različito obojenih, on će ih, na naš zahtev, razvrstati po obliku (kružni, kvadratni, pravougaoni, trougaoni, . . . čak i kad ne zna za te reči) ili po boji.

3) Kad se knjiga, ili jedan njen deo (tabak), odštampa, slagač (grafički radnik) raspoređuje slova, iz kojih je knjiga bila složena, u slagački sanduk; sva slova „a" stavlja u jednu pregradu slagačkog sanduka, sva slova „b" u drugu pregradu, itd.

U svakom od navedenih slučajeva imamo (jednu) datu množinu: C (cvetova), H (hartijica), S (slova). I u svakodnevnom životu (i radu) kažemo da Snežana i botaničar klasiraju nabrano cveće, elemente množine C (prema raznim osobinama, ali to nije bitno), da učenik klasira hartijice, elemente množine H, da radnik klasira slova, elemente množine S. Međutim, Snežana klasira *matematički*:

(a) ako pri uzimanju jednog cveta, jednog elementa množine C, kaže ili pomisli „ovaj cvet je iste boje kao ovaj" (ili „kao ovi", prema tome da li je na određeno mesto, u određeni buket, stavila samo jedan ili više cvetova, ali to, što se tiče gramatike, nije ovde ni od kakvog značaja) i stavlja ga na određeno mesto;

(b) ako ne pogreši (pa stavi, npr., žuti cvet među plave);

(c) ako rasporedi sve cvetove, koje je nabrala, na pojedina mesta, u pojedine gomilice od kojih će svezati bukete (ako, npr., ne baci ili ne uništi neki cvet zato što ne zna gde da ga stavi).

Sve te uslove mora da ispunjava i botaničar, pa da i njegovo klasiranje bude matematičko.

Učenik klasira matematički hartijice ako govori (glasno ili u sebi) „ova hartijica ima isti oblik kao ova" i ako ispunjava ostale navedene uslove (b) i (c).

Isto tako, slagač ne sme da izmeša slova i ne sme da ostavi neraspoređena, neklasirana slova (jer se posle, pri slaganju druge knjige, ne mogu upotrebiti). Inače, i on mora, za vreme klasiranja, da uočava i zaključuje: „ovo je slovo kao ovo (kao ova)" jer „ovo je slovo a", „ovo je m", „ovo je k", . . . ne znači ništa drugo nego „ovo (slovo) je kao ovo (slovo)".

2. Ako je klasirala matematički i ako je napravila buket B (belih cvetova), buket P (plavih), buket E (žutih) i buket F (crvenih), Snežana je izvršila *particiju* množina C, jer (§ 2.7):

(1) množine B, P, E, F nisu prazne;

(2) množine B, P, E, F uzete dve i dve nemaju zajedničkih elemenata (svaki beli cvet je samo element množine B, a ne i neke druge množine);

(3) sve množine B, P, E, F zajedno ne sadrže ni više ni manje elemenata nego što ih je bilo u C, tj. $B \cup P \cup E \cup F = C$.

Tako dobijene množine B, P, E, F zovu se *klase*, a za Snežanu kažemo da je *klasirala množinu* C. I pišemo (§ 2.7): $\boldsymbol{P}(C) = \{B, P, E, F\}$.

Ako devojčica nije morala da pogreši [u ničemu što je navedeno pod (a), (b), (c)], botaničaru se to moglo dogoditi, na primer: nije mogao tačno da odredi da li se neki cvet, element množine C, razvio na jednogodišnjoj ili dvogodišnjoj biljci pa kaže: „ovo može da bude i jednogodišnja i dvogodišnja biljka" (ili, stvarno, ta biljka može, pod određenim uslovima, da bude i jednogodišnja i dvogodišnja). Ili je prosto izostavio neki cvet, jer ne zna koliki je vek biljke na kojoj se razvio. Ako nisu nastupili ti slučajevi, botaničar je *klasirao množinu* C i njegova particija glasi: $\boldsymbol{P}(C) = \{J, D, V\}$, gde je očigledno koje množine označavaju slova J, D i V. Te množine, podmnožine množine C, zovu se *klase* (botaničareve) *particije*.

Na sličan način, učenik je, klasirajući matematički, dobio particiju množine H: $\boldsymbol{P}(H) = \{K, G, P, T, R\}$, gde je K klasa kružnih hartijica, G klasa kvadratnih, P klasa hartijica u obliku trapeza, ... A slagač: $\boldsymbol{P}(S) = \{A, B, C, \ldots, Z, \check{Z}\}$.

Dakle, *klasirati elemente množine M znači izvršiti particiju te množine*.

Elementi particije zovu se ***klase*** *te particije*.

Važna napomena. — Da bi se element a množine M mogao klasirati, *nužno je* da se on ne menja u toku klasiranja, da ostane ono što jeste, ukratko da ostane *identičan samom sebi*. To se izražava i ovako:

Klasiranje pretpostavlja egzistenciju relacije čiji graf sadrži uređeni par (x, x), gde x označava ma koji element date množine.

Ili drukčije: *Klasirati znači definisati* (u datoj množini) *relaciju čija je nužna osobina refleksivnost*.

1. 1) Na osnovu čega, ili pomoću čega je Snežana izvršila particiju množine C? Na osnovu, ili pomoću relacije „. . . je iste boje kao . . ."

A botaničar? Na osnovu ili pomoću relacije „. . . živi koliko i . . ." (ili „ovo je cvet biljke koja živi koliko i biljka koja daje ovaj cvet").

Na isti način učenik je klasirao elemente množine H, izvršio particiju množine H, pomoću relacije „. . . je istog oblika kao . . ." A rezultat primene relacije „. . . ovo je slovo . . .", ili, „ovo je isto slovo kao ovo", je particija $\boldsymbol{P}(S) = \{A, B, \ldots, \check{Z}\}$.

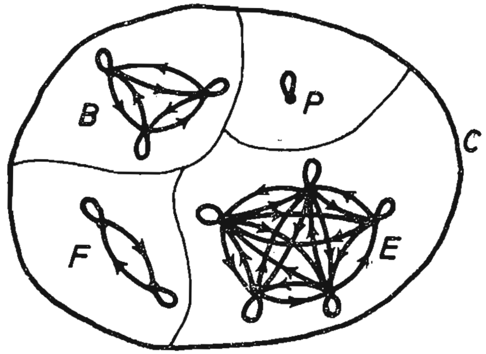
2) Da li sve te relacije imaju iste osobine i koje?

Relacija „. . . je iste boje kao . . ." je refleksivna, jer nijedan element x množine C ne može da menja boju, bez obzira ko i kad klasira, dakle x je iste boje kao x, pa je (x, x) element relacije.

Ta relacija je simetrična, jer ako „x je iste boje kao y", onda i „y je iste boje kao x", pa ako je (x, y) element relacije, onda je i (y, x) njen element.

Relacija „. . . je iste boje kao . . ." je i tranzitivna: očigledno iz (x, y) i (y, z) sledi (x, z).

Slika 6.1 je sagitalna šema jednog od mogućih slučajeva particije množine C.



Slika 6.1

Relacija „. . . živi koliko i . . ." je takođe refleksivna, simetrična i tranzitivna. Prikažite jedan od mogućih slučajeva particije $\boldsymbol{P}(H) = \{J, D, V\}$.

Prikažite da su i relacije „. . . je istog oblika kao . . ." i „ovo je isto slovo kao ovo" refleksivne, simetrične i tranzitivne.

Definicija 1. — *Svaka relacija koja je istovremeno refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se relacija ekvivalencije.*

Šta možete reći o relaciji:

„. . . ide u isto odeljenje sa . . ." u množini svih đaka iste škole;

„. . . ima iste roditelje . . ." kao u množini dece jedne ulice?

Navedeni primeri pokazuju da *svaka relacija ekvivalencije u jednoj množini proizvodi jednu particiju te množine*.

2. S druge strane, *svaka particija jedne množine uvodi jednu relaciju ekvivalencije u tu množini.*

Zaista, posmatrajmo, na primer, množinu:

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m\},$$

njenu particiju $P(X)=\{A, B, C, D, E\}$, gde je, npr., $A=\{a\}$, $B=\{b, c\}$, $C=\{d, e, f\}$, $D=\{g, h, k, l\}$, $E=\{l, m\}$ i ispitajmo koje osobine ima relacija:

$\boldsymbol{R}=$„... je element iste klase (particije $\boldsymbol{P}$) kao ...“

1) Ako element a pripada klasi A, tj. ako $a \in A$, onda $(a, a) \in \boldsymbol{R}$ i relacija $\boldsymbol{R}$ je refleksivna.

2) Ako b, $c \in B$, onda i c, $b \in B$, pa iz $(b, c) \in \boldsymbol{R}$ sledi da $(\Rightarrow)$ i $(c, b) \in \boldsymbol{R}$, što znači da je relacija $\boldsymbol{R}$ simetrična.

3) Ona je tranzitivna, jer ako d, $e \in C$ i $e, f \in C$, onda i $d, f \in C$, tj. $\{(d, e) \in \boldsymbol{R}$ i $(e, f) \in \boldsymbol{R}\} \Rightarrow (d, f) \in \boldsymbol{R}$.

To se jasno vidi iz već navedenog primera: „... ide u isto odeljenje sa ...“ Zaista, svi ekvivalentni* đaci su elementi istog odeljenja, pa se množina M (svih đaka iste škole) deli na odeljenja od kojih nijedno nije prazno, koja nemaju zajedničke đake (jer jedan đak ne može da istovremeno pripada dvama odeljenjima) i koja obuhvataju sve đake škole.

Relacija „... je element iste klase kao ...“ je, dakle, relacija ekvivalencije. (Pokazuje li to crtež 6.1?)

Znači: (t. **1**) $\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ je ma koja relacija ekvivalencije)

(t. **2**) $\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{P}$,

to jest:

Svaka particija množine uvodi (izaziva) jednu relaciju ekvivalencije u toj množini, a svaka relacija ekvivalencije u toj množini definiše (proizvodi) jednu particiju te množine.

Kratko se to izražava ovako:

$$\boxed{\text{(jedna) particija} \Leftrightarrow \text{(jedna) relacija ekvivalencije}}$$

ili, kraće: $\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{E}$,

gde, kao što je poznato, $\Leftrightarrow$ označava istovremeno i $\Rightarrow$ i $\Leftarrow$.

Relacija ekvivalencije vrši particiju množine M u klase $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Te klase čine množinu koja se zove *množina-količnik* (kvocijent) množine M *u odnosu na relaciju* ekvivalencije (modulo $\boldsymbol{E}$).

§ 6.3. PRIMERI I KONTRAPRIMERI

1. Relacija $\boldsymbol{R}$ „x stanuje u istoj ulici u kojoj stanuje y“, u množini stanovnika S određenog grada, je relacija ekvivalencije i definiše particiju množine S, pri čemu su klase ulice grada.

Zaista:

(1) $\boldsymbol{R}$ je refleksivna, jer Mladen, npr., stanuje u istoj ulici u kojoj stanuje taj isti Mladen, tj. $x \in S$: $(x, x) \in \boldsymbol{R}$.

[Za svako x koje pripada množini S, (x, x) je element relacije $\boldsymbol{R}$, što, prema definiciji 1, § 5.4, znači da je $\boldsymbol{R}$ refleksivna relacija.]

* „a ekvivalentno b“ označava $a=b$ kad se (a i b) posmatraju u odnosu na jednu određenu osobinu.

(2) Ako Mladen stanuje u ulici u kojoj stanuje Vida, onda Vida stanuje u ulici u kojoj stanuje Mladen, tj.:

$$\forall x, y \in S: (x, y) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (y, x) \in \boldsymbol{R},$$

pa je $\boldsymbol{R}$ simetrična relacija.

(3) Ako Mladen stanuje u ulici u kojoj stanuje Vida, a Vida stanuje u ulici u kojoj stanuje Bora, onda ..., tj.:

$$\forall x, y, z \in S: (x, y) \in \boldsymbol{R} \text{ i } (y, z) \in \boldsymbol{R} \Rightarrow (x, z) \in \boldsymbol{R},$$

pa je $\boldsymbol{R}$ tranzitivna relacija.

2. Relacija „x je telefonirao y“ u množini koju čine stanovnici određenog grada nije relacija ekvivalencije, jer nije nužno (obavezno) tranzitivna.

3. Svaka jednakost, posebno jednakost u množini N (prirodnih brojeva) je relacija ekvivalencije, na primer:

$13=13$ [refleksivnost]

$13-7=18-12 \Rightarrow 18-12=13-7$ [simetričnost*]

$(13-7=15-9,\ 15-9=30:5) \Rightarrow (13-7=30:5)$ [tranzitivnost].

Uopšte (u množini N) je:

$\forall x$: $x=x$ [refleksivnost]

$\forall x, y$: $x=y \Rightarrow y=x$ [simetričnost]

$\forall x, y, z$: $(x=y,\ y=z) \Rightarrow x=z$ [tranzitivnost].

4. 1) Relacija „x je manji od y“ u množini N nije relacija ekvivalencije, jer nije simetrična. Naime, ako je x manji od y, onda y nije manji od x.

2) Da li je relacija „x je veći od y“ relacija ekvivalencije?

5. Particije u množini N. — 1) Podelite svaki prirodni broj brojem 3:

$0:3=0$ i ostatak 0; $3:3=1$ i ostatak 0;

$1:3=0$ i ostatak 1; $4:3=1$ i ostatak 1;

$2:3=0$ i ostatak 2; $5:3=1$ i ostatak 2; itd.

Ostatak deljenja ma kojeg prirodnog broja brojem 3 može, dakle, biti samo 0, 1 ili 2. To znači da sve prirodne brojeve možemo raspodeliti u tri „kese“:

U prvu, A, stavljamo sve brojeve koji podeljeni brojem 3 daju ostatak 0, u drugu, B, sve brojeve koji podeljeni brojem 3 daju ostatak **1**, u C stavljamo ...

Ima li brojeva, elemenata množine N, koji ne pripadaju bar jednoj od tih „kesa“, bar jednoj od tih podmnožina?

N	0,	3,	6,	9,	12,	15, ...	A
	1,	4,	7,	10,	13,	16, ...	B
	2,	5,	8,	11,	14,	17, ...	C

Slika 6.2

Postoje li brojevi, elementi množine N, koji pripadaju dvema od tih podmnožina? Znači, podmnožine A, B, C zadovoljavaju sve uslove jedne particije mno-

* Jer $13-7=18-12$ znači (§ 1.4) da $13-7$ i $18-12$ označavaju jedan isti objekt, jedan isti broj.

žine N. Podmnožine A, B, C su klase te particije. Kako su one dobijene? Zato se i zovu *klase ostataka po modulu 3* ili („kraće") *klase ostataka modulo 3* i označavaju se na razne načine, npr. ovako: $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, to jest:

$$\bar{0}=\{0, 3, 6, \ldots\}, \qquad \bar{1}=\{1, 4, 7, \ldots\}, \qquad \bar{2}=\{2, 5, 8, \ldots\}.$$

Znači $\qquad \boldsymbol{P}=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

Relacija „pripada klasi ostataka modulo 3" je jedna relacija ekvivalencije u N.

Ako je označimo sa E, onda je $P \Leftrightarrow E$.

Zaista iz particije $P=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ sledi (§ 6.2) relacija E, i obrnuto.

2) Šta je $P=\{\bar{0}, \bar{1}\}$. Iskažite odgovarajuću relaciju u N.

3) Napišite particiju množine N modulo 5 i odgovarajuću relaciju ekvivalencije.

4) Napišite particiju množine N modulo 7 i odgovarajuću relaciju ekvivalencije.

5) Ranije je rečeno da se relacija između dva objekta x i y označava $x\boldsymbol{R}y$, a čita: *x kongruentno y po modulu* $\boldsymbol{R}$ ili *x kongruentno y modulo* $\boldsymbol{R}$. Za brojeve 2 i 5 kažemo da su kongruentni modulo 3, zato što je ostatak deljenja svakog od njih brojem 3 isti (broj 2) i umesto $5\boldsymbol{R}2$ često se piše $5\equiv 2 \pmod 3$.

(1) Pročitajte i recite šta znači:

$13\equiv 4 \pmod 3$; $\quad 243\equiv 8 \pmod 5$; $\quad 19\equiv 12 \pmod 7$.

(2) Koje brojeve zamenjuje a u:

$7\equiv a \pmod 2$; $\quad 15\equiv a \pmod 4$; $\quad 23\equiv a \pmod 8$.

(3) Odredite modul kongruencije u:

$7\equiv 2 \pmod x$; $\quad 73\equiv 37 \pmod x$; $\quad 600\equiv 19 \pmod x$.

6. 1) Data je množina $A=\{a, b, c, d, e\}$ i njena particija: $\boldsymbol{P}=\{\{a, c\}, \{b\}, \{d, e\}\}$. Koju relaciju uvodi ta particija u A?

Elementi te relacije jesu:

$$(a, a), (c, c), (a, c), (c, a), (b, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d),$$

pa je $\boldsymbol{R}=\{(a, a), (c, c), (a, c), (c, a), (b, b), (d, d), (e, e), (d, e), (e, d)\}$.

Prikažite grafički relaciju $\boldsymbol{R}$ i particiju $\boldsymbol{P}$.

2) Data je množina $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i relacija ekvivalencije:

$$\boldsymbol{R}=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (2, 5), (5, 2)\}.$$

Koju particiju množine A definiše ta relacija?

To se vidi po elementima $(1, 3)$ i $(3, 1)$, $(2, 5)$ i $(5, 2)$. Dakle $\{1, 3\}$ i $\{2, 5\}$. Ali 4 ne može izostati (§ 2.7) i zato je tražena particija $\boldsymbol{P}=\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4\}\}$. Prikažite njenu šemu.

7. Relacija „. . . je $\|$ sa . . ." je relacija ekvivalencije. To sledi iz svega što je rečeno u prvih pet tačaka § 4.10. Međutim, može se i proveriti da je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna:

(1) Za svaku pravu A je $A\|A$, tj. $\forall A \in \boldsymbol{D}: A\|A$.

(2) Ma koje bile dve prave A i B, iz $A\|B$ sledi $B\|A$, tj.

$$\forall A, B \in \boldsymbol{D}: \ A\|B \Rightarrow B\|A, \text{ jer je } A\cap B=\varnothing, \ B\cap A=\varnothing.$$

(3) Ako je $A\|B$, $B\|C$, onda je $A\|C$, tj.:

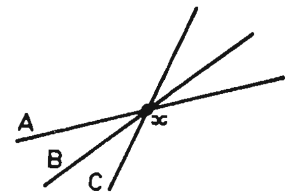
$$\forall A, B, C \in \boldsymbol{D}: \ (A\|B \text{ i } B\|C) \Rightarrow A\|C,$$

jer simetričnost dopušta da se $B\|C$ zameni sa $C\|B$ pa dakle i $(A\|B$ i $B\|C)$ sa $(A\|B$ i $C\|B)$, a tada $A, C \in (B)$ odakle je $A\|C$.

8. Relacija „. . . je $\perp$ na . . ." nije relacija ekvivalencije u množini $\boldsymbol{D}$ (pravih). Zašto?

9. Posmatrajmo tačku $x \in \Pi$. Koliko pravâ ravni Π sadrži tačku x? (§ 4.6 teorema 3).

Neka je to množina $\{A, B, C, \ldots\}$. Svaka od tih pravâ definiše pravac. Znači, možemo posmatrati množinu (A), (B), (C), . . . , tj. beskonačno mnogo pravaca ravni Π.



Slika 6.3

(1) Nijedan od tih pravaca nije prazan, tj. $(A)\neq\varnothing$, $(B)\neq\varnothing$, . . .

(2) Imaju li oni zajedničkih elemenata? Potvrdan odgovor na to pitanje značio bi da jedna prava pripada dvama pravcima, na primer da prava X pripada i pravcu (K) i pravcu (L), što je nemoguće ako je $(K)\neq(L)$. Znači, $(A) \cap (B) = \varnothing$, $(B) \cap (C) = \varnothing$, . . .

(3) $(A) \cup (B) \cup (C) \cup \ldots = \boldsymbol{D}$.

Dakle, (A), (B), (C), . . . su klase particije množine $\boldsymbol{D}$. Otuda:

Teorema. — *Množina pravaca ravni Π je particija pravâ ravni.*

Kako glasi odgovarajuća relacija ekvivalencije?

Primedba. Treba dobro razlikovati:

pravac (A) koji predstavlja particiju pravâ ravni Π i $\{(A), (B), (C), \ldots\}$ koja predstavlja particiju pravâ ravni Π.

U prvom slučaju svaka prava paralelna sa X je klasa pravca (X).

U drugom slučaju, svaki pravac (A), (B), . . . je klasa particije množine $\boldsymbol{D}$ pravâ ravni Π. Množina $\{(A), (B), \ldots\}$ pokriva, dakle, ravan Π beskonačno puta. Njene se klase dobijaju pomoću prava kojima pripada jedna tačka x (kako je ranije pokazano).

§ 6.4. VEŽBANJA I ZADACI

1. Relacija „. . . ima iste roditelje kao . . ." je jedna relacija ekvivalencije.

2. U datoj množini žena relacija „. . . ide kod istog frizera kao . . ." je relacija ekvivalencije. Pokažite to.

3. Relacija („x deli y") nije relacija ekvivalencije. Zašto?

4. Relacije:
(1) „. . . završava se istom cifrom kao . . ."
(2) „. . . ima isti zbir jednocifrenih brojeva kojima je zapisan kao . . ."

u množini N (prirodnih brojeva zapisanih u dekadnom sistemu brojanja) su relacije ekvivalencije. Iz koliko klasa se sastoji particija koju određuje relacija (1)?

5. 1) Relacija „pripada klasi ostataka modulo 5" definiše u množini N jednu particiju. Napišite klase te particije.

2) Dve klase particije „pripada klasi ostataka modulo 8" jesu: $\{3, 11, 19, 27, \ldots\}$ i $\{5, 13, 21, \ldots\}$. Napišite ostale.

6. Jedna fabrika automobila objavila je da će proizvoditi modele od: 600 cm³, 750 cm³, 900 cm³, 1 000 cm³, 1 300 cm³. Definišite particiju množine tih modela i (iskažite) odgovarajuću relaciju ekvivalencije.

7. Nacrtajte Venove dijagrame množina A, B, C u najopštijem slučaju. Znajući da je $\{A, B\}$ jedna particija množine C, šrafirajte (crveno) prazne oblasti dijagrama.

8. Nacrtajte sedam puta Venove dijagrame množina A i B u najopštijem slučaju. Neka svaki od sledećih slučajeva predstavlja jednu particiju množine $A \cup B$:

(1) $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$; (3) $A \cap B$, $B \setminus A$; (5) $A \cap B$;

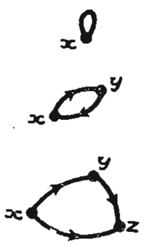
(2) $A \cap B$, $A \setminus B$; (4) $A \setminus B$, $B \setminus A$; (6) $A \setminus B$; (7) $B \setminus A$.

Šrafirajte, u svakom od tih slučajeva, prazne oblasti.

9. Neka je M množina koju čine đaci vašeg razreda (odeljenja). Da li je „x je rođen istog meseca kao y" relacija ekvivalencije? Ako jeste, koji je najveći mogući broj klasa particije koju ona definiše u M? Koji je najmanji broj tih klasa?

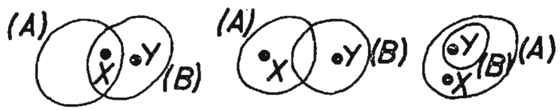
10. Napišite jednu relaciju ekvivalencije u množini $M = \{a, b, c, d, e\}$ i particiju množine M koju ona definiše (proizvodi).

11. Data je množina $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i njena particija $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$. Napišite relaciju koja definiše (proizvodi) tu particiju. Prikažite relaciju u obliku mreže. Koje geometrijske osobine ima ta mreža?



12. X, Y, Z označavaju prave $X \in (Z)$, $Z \in (Y)$. Šta možete reći o X i Y?

13. Nacrtajte prave X i Y u svakom od slučajeva:



Slika 6.4

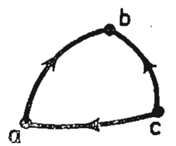
14. Crtež 6.5 prikazuje relaciju „. . . je manji od . . ." u množini $M = \{a, b, c\}$. Napišite najmanji i najveći element. Zašto ta relacija nije ekvivalencija?

15. Recite to isto za elemente množine $E = \{a, b, c, d\}$ između kojih postoji relacija čija je sagitalna šema 6.6.

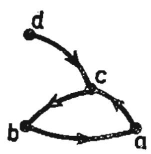
16. Obrazložite implikacije:

(1) $A \| B \Rightarrow A \in (B)$;

(2) $A \in (B) \Rightarrow B \in (A)$.



Slika 6.5



Slika 6.6

17. Neka je $(A) \cap (B) = \varnothing$. Šta možete reći o međusobnom položaju pravâ $X \in (A)$ i $Y \in (B)$?

Rezime

1. Jedna relacija je relacija ekvivalencije u množini M, ako je:

(1) refleksivna, tj. $\forall x \in M: x\boldsymbol{R}x$;

(2) simetrična, tj. $\forall x, y \in M$: $x\boldsymbol{R}y \Rightarrow yRx$;

(3) tranzitivna, tj. $\forall x, y, z \in M$: $(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}z) \Rightarrow x\boldsymbol{R}z$.

2. Osnovna osobina:

Svaka relacija ekvivalencije proizvodi particiju množine i svaka particija uvodi relaciju ekvivalencije, tj.:

relacija ekvivalencije $\Leftrightarrow$ particija ($\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$).

3. 1) (A) je jedna particija ravni Π.

2) $\{(A), (B), (C), \ldots\}$ je particija množine $\boldsymbol{D}$.

GLAVA VII

RELACIJE PORETKA (REDA)

Svaki „zna" šta je „red" (i šta je „nered") u datoj množini (stvari, objekata). Ali pojam „red" nije, uopšte uzev, ni određen a kamoli precizno definisan. Evo najpre (kao uvod) jedan opšti pogled.

Svaka relacija koja uvodi red (poredak) između elemenata date množine treba da precizira koji je od dva elementa, a i b, „ispred" onog drugog. Ako to učini, odmah je jasno:

(1) da nijedan element ne može biti ispred samog sebe, pa relacija *nije refleksivna*;

(2) da ako je a ispred b, onda b ne može da bude ispred a (nego posle a), pa relacija *nije simetrična*;

(3) ako je a ispred b, b ispred c, onda je a ispred c, pa je relacija *tranzitivna*.

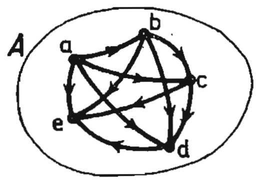
Znači, antirefleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost su osobine relacije „x je ispred y". Te osobine imaju i mnoge druge relacije (takozvanog) *striktnog poretka (reda)*. Ali postoji i poredak (red) koji nije striktan.

U ovoj glavi upoznaćemo se bliže sa raznim relacijama (striktnog i nestriktnog) reda (poretka) i njihovim primenama.

Samo, pre svega treba naglasiti da i ovde, u svim razmatranjima, važi napomena na kraju § 6.1. Nezavisno od relacija koje ćemo posmatrati, svaki element ostaje, za sve vreme razmatranja, identičan samom sebi.

§ 7.1. PRIMERI I DEFINICIJE

1. 1) Posmatrajmo množinu $A=\{a, b, c, d, e\}$ i relaciju u njoj čija je sagitalna šema sl. 7.1, a radi preglednosti dajemo i njenu tabelu:



Slika 7.1

	a	b	c	d	e
a		*	*	*	*
b			*	*	*
c				*	*
d					*
e					

Svaka strelica šeme, svaka zvezdica tabele označava element (x, y) te relacije. Kako bi mogla da glasi ta relacija? (Pokušajte da sami odgovorite.)

Sagitalna šema i tabela pokazuju da je ta relacija: *antirefleksivna* (nema alki u šemi, nema identičnih parova u tabeli); *antisimetrična* [ako je (x, y) jedan njen par, (y, x) nije], *tranzitivna* [kad god su (x, y) i (y, z) parovi relacije i (x, z) je njen par].

Ako je A množina ljudi pred šalterom, relacija čiju smo šemu nacrtali i tabelu sastavili glasi „x je ispred y". Imenujte u tom slučaju početni i poslednji element.

Tako izgledaju sagitalna šema i tabela mnogih relacija, na primer:

. . . niži od . . .	(i inverzna „ . . . viši od . . .");
. . . teži od . . .	(i inverzna . . . recite sami);
. . . manji od . . .	(i inverzna . . .);
. . . topliji od . . .	(i inverzna . . .).

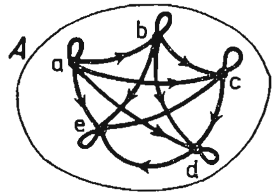
i tako dalje.

Zamislite da je A množina predškolske dece koja stanuju u istoj kući. Može li relacija da glasi (pored već navedenih) i: „x je mlađi od y"; „x je mršaviji od y"; . . . ?

Kako glasi relacija ako je A spisak imena sastavljen abecednim redom?

Napišite graf relacije prikazane šemom i tabelom.

2) Neka u istoj množini A postoji relacija čije su šema i tabela:



Slika 7.2

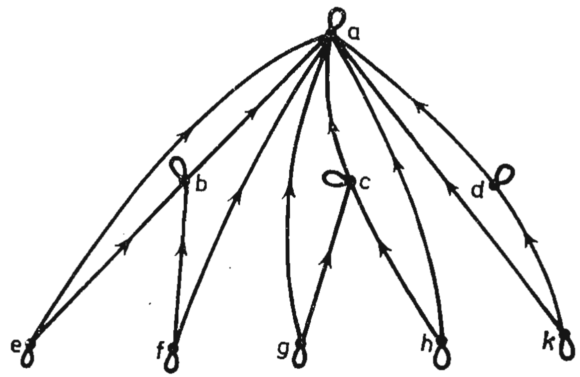
	a	b	c	d	e
a	*	*	*	*	*
b		*	*	*	*
c			*	*	*
d				*	*
e					*

Koje su njene osobine? Ona je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Navedite neki primer.

Ako je A već spomenuta množina predškolske dece (ili množina drveća koje raste u našem dvorištu), relacija glasi: „x je niži (od y) ili koliko i y"; „x je mlađi (od y) ili vršnjak sa y"; . . .

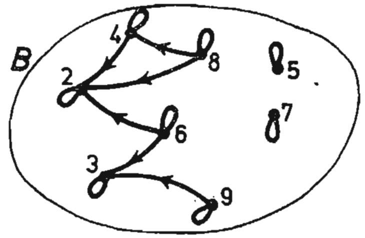
3) Neka je $L=\{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ množina lekara jedne bolnice. Neka je a upravnik, b, c, d neka su šefovi triju odeljenja bolnice, a ostali su samo lekari. Jedna sagitalna šema relacije „x sluša y" u množini L izgleda ovako:



Slika 7.3

a tabela:

	a	b	c	d	e	f	g	h	k
a	*								
b	*	*							
c	*		*						
d	*			*					
e	*	*			*				
f	*	*				*			
g	*		*				*		
h	*		*					*	
k	*			*					*



Slika 7.4

Jer: (1) Prirodno je da svaki lekar, bez obzira na svoj položaj, sluša pre svega samog sebe. Otuda alka u svakoj tački šeme, svi identični parovi (x, x) su elementi relacije.

(2) Lekari jednog odeljenja moraju slušati prvo šefa svog odeljenja, a samim tim i upravnika. Ali se oni između sebe ne moraju slušati. Isto tako, šefovi odeljenja nisu jedan drugom pretpostavljeni.

(3) Upravnik ne sluša ni šefove odeljenja, ni ostale lekare.

Koje su osobine te relacije?

Da li je svaki par sastavljen od elemenata množine M element relacije „. . . sluša . . .“?

4) Sagitalna šema relacije „x je multiplum y“ u množini $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ prikazana je crtežom 7.4.

Relacija je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Ali svaki par nije njen element, na primer $(5, 2)$, $(8, 5)$, $(7, 6)$, $(9, 6)$, . . . nisu elementi relacije „. . . je multiplum . . .“ u množini B.

2. Svaki od navedenih primera je jedna *relacija poretka (reda)* (jer svaka uvodi neki poredak, red, u datoj množini). Ali sve te relacije nemaju iste osobine. Koje osobine ima svaka (od navedenih) relacija?

Antisimetričnost i tranzitivnost jesu dve karakteristične osobine (svake) relacije poretka (reda).

Refleksivnost nije. Osim toga, treći i četvrti primer pokazuju da ako su x i y ma koja dva elementa date množine, uređeni par (x, y), ili (y, x), nije uvek element relacije reda. Otuda tri vrste poretka i tri vrste relacije poretka (reda):

relacije striktnog reda (sl. 7.1)
relacije parcijalnog reda (sl. 7.3 i 7.4)
i relacije totalnog reda (sl. 7.2).

Osim refleksivne, antisimetrične i tranzitivne osobine, relacija totalnog reda ima, dakle, i osobinu *koneksije* koja se uvodi sledećom definicijom:

Definicija 1. — *Relacija reda u množini M, čija su dva elementa x i y, ima osobinu koneksije ako uvek sadrži ili par (x, y) ili par (y, x), tj. ako je ili $x\boldsymbol{R}y$, ili $y\boldsymbol{R}x$. Za takvu relaciju kažemo da je koneksna.*

Prema tome:

Definicija 2. — *Ako je relacija, u množini M, antisimetrična, tranzitivna i antirefleksivna, ona se zove relacija striktnog poretka (reda).*

Definicija 3. — *Ako je relacija, u množini M, antisimetrična, tranzitivna i refleksivna, ona se zove relacija parcijalnog poretka (reda).*

Definicija 4. — *Ako je relacija, u množini M, antisimterična, tranzitivna, refleksivna i koneksna, ona se zove relacija totalnog poretka (reda).*

Simbolima se:

relacija striktnog reda označava se najčešće znakom $<$ (čita se „manji od“), odnosno inverznim znakom $>$ („veći od“);

relacija parcijalnog, ili totalnog, reda označava se znakom $\leqslant$ („manje ili jednako“), odnosno inverznim znakom $\geqslant$ („veće ili jednako“).

(Znak $\leqslant$ se često čita: *nije veće* a znak $\geqslant$ *nije manje.*)

Pomoću tih simbola prethodne definicije izražavaju se ovako:

1) $\forall x \in M$: $x<x$ ne stoji [antirefleksivnost]
$\forall x, y \in M$: ako je $x<y$, onda nije (ne stoji) $y<x$, i obrnuto [antisimetričnost]
$\forall x, y, z \in M$: $(x<y$, i $y<z) \Rightarrow x<z$ [tranzitivnost];

2) $\forall x \in M$: $x \leqslant x$ [refleksivnost]
$\forall x, y \in M$: $x \leqslant y$ (stoji, tačno), $y \leqslant x$ (ne stoji), ili: $(x \leqslant y$ i $y \leqslant x) \Rightarrow x=y$ [antisimetričnost]
$\forall x, y, z \in M$: $(x \leqslant y$ i $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ [tranzitivnost];

3) sve kao pod 2) i još: $\forall x, y \in M$: $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$ [koneksija].

U opštem obliku iste definicije se izražavaju:

1) $\forall x \in M$: $(x, x) \notin \boldsymbol{R}$ [antirefleksivnost]
$\forall x, y \in M$: $(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}x) \Rightarrow x=y$ [antisimetričnost]
$\forall x, y, z \in M$: $(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}z) \Rightarrow x\,\boldsymbol{R}\,z$ [tranzitivnost];

2) $\forall x \in M$: $(x, x) \in \boldsymbol{R}$ [refleksivnost]
$\forall x, y \in M$: $(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}x) \Rightarrow x=y$ [antisimetričnost]
$\forall x, y, z \in M$: $(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}z) \Rightarrow x\boldsymbol{R}z$ [tranzitivnost];

3) Kao pod 2) i još $\forall x, y \in M$: $x\boldsymbol{R}y$ ili $y\boldsymbol{R}x$ [koneksija].

[$(x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}x) \Rightarrow x=y$ označava da postoji ili $x\boldsymbol{R}y$ ili $y\boldsymbol{R}x$. Ako obe postoje, onda je $x=y$, pa to nisu dva elementa množine M.]

3. 1) Relacija $\leqslant$ (je manje ili jednako) u množini N (prirodnih brojeva) je relacija totalnog poretka (reda).

Zaista (dokaz):

(1) $\forall x \in N$: $x \leqslant x$ [refleksivnost];
(2) $\forall x, y, \in N$: $(x \leqslant y$ i $y \leqslant x) \Rightarrow x=y$ [antisimetričnost];

(3) $\forall x, y, z \in N$: $(x \leqslant y$ i $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ [tranzitivnost];
(4) $\forall x, y \in N$: $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$ [koneksija].

Ili, prevedeno na „obični" jezik:

(1) Svaki broj množine N *nije veći* od samog sebe (refleksivnost).

(2) Za svaka dva prirodna broja x i y: ili *x nije veći od y*, ili *y nije veći od x*. Oba tvrđenja mogu biti tačna (mogu istovremeno egzistirati) samo ako je $x=y$ (antisimetričnost relacije).

(3) Za svaka tri prirodna broja x, y, z: iz x nije veći od y, i y nije veći od z sledi x nije veći od z (tranzitivnost).

(4) Ako su x i y prirodni brojevi, uvek je ili $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$ (koneksija).

2) Neka je data množina $A = \{a, b, c\}$. Da li je u množini $P(A)$ njenih delova (§ 1.8) relacija „. . . je uključena (sadržana) u . . ." (§ 1.7) totalnog reda? Nije, jer je, na primer:

	$\{a\} \subset \{a\}$	[refleksivnost],
	$\{b, c\} \subset \{a, b, c\}$ a $\{a, b, c\} \not\subset \{b, c\}$	[antisimetričnost],
iz	$\{a \subset \{a, b\}$ i $\{a, b\} \subset \{a, b, c\} \Rightarrow \{a\} \subset \{a, b, c\}$	[tranzitivnost],
ali	$\{b, c\} \not\subset \{c, a\}$ i $\{c, a\} \not\subset \{b, c\}$	[nema koneksije].

3) Definiše li relacija $|$ (x deli y) u množini $\{1, 2, 3, 12, 84$ i $68\}$ poredak? Je li taj poredak totalan?

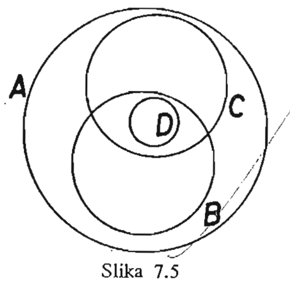
4) Je li relacija $|$ u N relacija totalnog poretka (reda)?

5) Neka je M množina množinâ A, B, C, D (sl. 7.5). U množini M definisana je relacija $\subset$. Neka je E množina prirodnih brojeva

$A = 24$, $B = 6$
$C = 8$, $D = 2$

U množini E definisana je relacija $|$.

Jesu li to relacija totalnog reda?



Slika 7.5

§ 7.2. UREĐENA MNOŽINA

1) Sve ono što je rečeno o relacijama poretka (reda) može se „konkretno" i „pojednostavljeno" formulisati ovako:

Za množinu M kažemo da je *uređena* ako između ma kojih njenih elemenata x, y, z postoji relacija koja ima ove osobine:

(1) x je ispred $y \Rightarrow y$ nije ispred x [antisimetričnost].
[Iz x je ispred y sledi y nije ispred x.]

(2) $x \neq y \Rightarrow x$ je ispred y ili y je ispred x [koneksija].
[Ako su x i y dva razna elementa, onda je ili x ispred y ili y ispred x.]

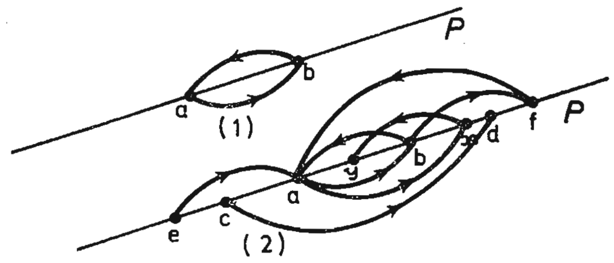
(3) x je ispred y i y je ispred $z \Rightarrow x$ je ispred z [tranzitivnost].

2) Ako je x ispred y, kažemo da je y *sledbenik* x (iksa), a x je *prethodnik* y (ipsilona). Ako je x ispred y, a y ispred z, kažemo da se y nalazi *između* x i z.

3) (1) Uredite đake svog odeljenja tako da množina koju oni čine bude uređena.
(2) Šta predstavlja spisak učenika jednog odeljenja?
(3) Šta predstavlja $\{a, b, c, č, \ldots, z, ž\}$.
(4) Šta je rečnik?
(5) Šta je $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100\}$?

§ 7.3. ORIJENTISANA PRAVA

1. Dve razne tačke, a i b, prave P određuju dva uređena para: (a, b) i (b, a). Kao i uvek, svaki od tih parova možemo (grafički) prikazati strelicom čiji je početak u prvom članu a kraj u drugom članu para [sl. 7.6(1)].



Slika 7.6

Očigledno je da se parovi (a, b) i (b, a) prikazuju strelicama *suprotnih smerova*. Isto tako, očigledno je [sl. 7.6(2)] da svaki drugi uređeni par prave P ima isti smer kao jedan, i samo jedan, od parova (a, b) ili (b, a); na primer (c, d), (e, a), (b, f) imaju smer para (a, b), a par (x, y), (f, a), . . .

Prema tome, za (svaku) pravu P „vezana su" dva (suprotna) smera. Ili, (svaka) prava P određuje dva (suprotna) smera.

Definicija 1. — *Orijentisati pravu znači dogovoriti se da se jedan od dva smera (koje ona određuje) zove pozitivni smer.*

Tada se onaj drugi (suprotni) smer zove negativni smer.

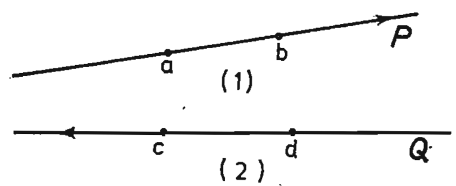
Da bi se izbeglo (suvišno i neprecizno) opisivanje i uprostilo grafičko prikazivanje, prava se orijentiše stavljanjem jedne strelice:

Time je označeno da je u slučaju (1) uređeni par (a, b) *pozitivan* i to se kratko zapisuje ovako

$$\boxed{a < b}$$

a čita (se) na razne načine:

a prethodi b; a je ispred b; a je niži od b; a je manji od b.



Slika 7.7

Ponekad i: a je levo od b (iako to nije, strogo uzev, matematičko izražavanje).

$a < b$ je ekvivalentno sa $b > a$, tj. $a < b \Leftrightarrow b > a$.

$b>a$ čita se, takođe, na razne načine:

b sledi za a; b je iza a; b je viši od a; b je veći od a.

A katkad i: b je desno od a.

U slučaju sl. 7.7(2) je (d, c) pozitivni par, tj. $\boxed{d<c}$, pa se čita kako je već rečeno.

Isto tako je $d<c \Leftrightarrow c>d$.

2. 1) Ako su a i b dve razne tačke prave P, tj. ako $a, b \in P$ i $a<b$, *orijentisana prava ab* znači: *prava orijentisana tako da je $a<b$*.

2) Neka su, uopšte, x i y dve razne tačke prave P. Tada je moguć jedan, i samo jedan, od ova tri slučaja:

$$x<y, \qquad x=y, \qquad y<x.$$

Ranije smo rekli šta označavaju $x<y$ i $y<x$. A šta označava $x=y$? Prema § 1.4 to je slučaj kada se tačke x i y poklapaju, kada to nisu dve razne tačke.

Dakle, ako nije $x<y$, onda je: ili $x=y$ ili $y<x$, što se ujedno zapisuje

$$\boxed{y \leqslant x},$$

a čita: „*y ne sledi posle x*" ili „*y nije veći od x*" ili „*y je manji ili jednak x*" (a ponekad i „y nije desno od x").

Zdesna nalevo se, pak, čita: „*x ne prethodi y*", ili „*x nije manji od y*", ili „*x je veći ili jednak y*" (ili „x nije levo od y").

Simbolima:

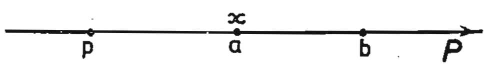
$$y \leqslant x \Leftrightarrow x \geqslant y \Leftrightarrow (x>y \text{ ili } x=y)$$

$$y>x \Leftrightarrow x<y \Leftrightarrow (x<y \text{ i } x \neq y).$$

Treba uočiti da se, na osnovu recipročnih (inverznih) relacija, može napisati:

$$(\leqslant)^{-1} = \geqslant.$$

3) Napišite sve relacije između označenih tačaka prave P:



Slika 7.8

4) Pročitajte i objasnite: $(x \leqslant a \text{ i } x \geqslant a) \Rightarrow a=x$.

5) (1) Gde je tačka x ako je $a<x$ i $x<b$?

To se ujedno zapisuje: $\qquad a<x<b$,

a čita: x je *između a i b*.

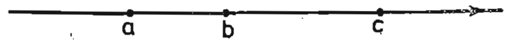
(2) Šta označava: $\qquad a \leqslant x<b$,

šta označava: $\qquad a<x \leqslant b$,

a šta označava: $\qquad a \leqslant x \leqslant b$?

3. Time smo uveli red (poredak) u množinu koja se zove orijentisana prava. Naime, možemo dokazati teoremu:

Relacija $\leqslant$ definisana na orijentisanoj pravi $ab=P$ je jedan totalni poredak (red).



Slika 7.9

Zaista, pod uslovom da je $a<b$ pozitivni smer, relacija $\leqslant$ je (sl. 7.9):

(1) refleksivna $\qquad \forall a \in P$: $a \leqslant a$;

(2) antisimetrična $\qquad \forall a, b \in P$: $(a \leqslant b \text{ i } b \leqslant a) \Rightarrow a=b$;

(3) tranzitivna $\qquad \forall a, b, c \in P$: $(a \leqslant b \text{ i } b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;

(4) ima osobinu koneksije $\quad \forall a, b, \in P$: $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$.

A to su (sve) osobine relacije totalnog reda.

Možemo li tu teoremu dokazati ako uzmemo obrnuti smer orijentacije, tj. $b<a$? Na potpuno isti način. Dakle, orijentacija je stvar dogovora, konvencije i zato uvodimo:

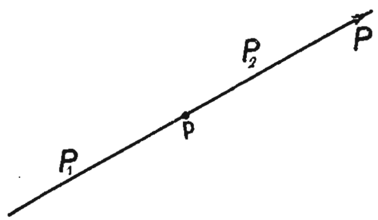
Aksiom Π 6. — Na svakoj pravi postoje dva obrnuta totalna poretka. Prava je orijentisana ako je odlučeno (dogovoreno) da za dve njene razne tačke a i b bude $a<b$. (Aksiom poretka, reda.)

Dopunsko „objašnjenje": Već smo videli da postoji, ili možemo učiniti da u svakoj množini postoji jedna relacija poretka (striktnog, parcijalnog ili totalnog). Kako je prava beskonačna množina tačaka, odluka (dogovor) da za dve njene (razne) tačke bude $a<b$ uvodi u tu beskonačnu množinu (kaže se „na pravi") totalni red.

„Zar nije za pravu dovoljno ono što je rečeno u § 7.2?" Tek nas totalni red obezbeđuje od svih nepreciznosti.

§ 7.4. POLUPRAVE

1. Uočimo proizvoljnu tačku p orijentisane prave P.



Slika 7.10

Definicija 2. — Na osnovu onoga što je rečeno u § 4.8 i § 7.3 *definišemo*:

(1) *otvorene poluprave P_1 i P_2* ovako:

$$P_1 = \{x \in P \mid x<p\}, \quad P_2 = \{x \in P \mid x>p\};$$

(2) *zatvorene poluprave* ovako:

$$P_1 = \{x \in P \mid x \leqslant p\}, \quad P_2 = \{x \in P \mid x \geqslant p\}.$$

To jest (iskazano govornim jezikom):

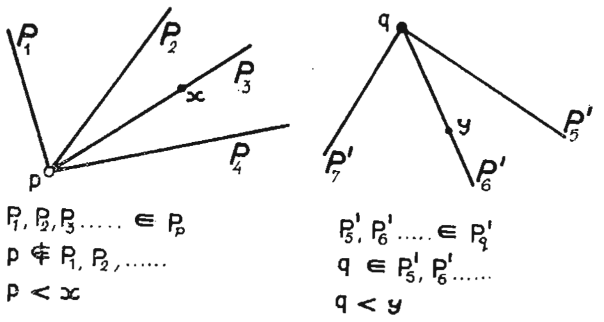
(1) (Sve) tačke prave P koje se nalaze ispred p (manje od p) čine otvorenu polupravu P_1. (Sve) tačke ... čine otvorenu polupravu P_2.

(2) Sve tačke prave P ispred p i tačka p (sve tačke koje nisu veće od p) čine zatvorenu polupravu P_1. Sve tačke ... čine zatvorenu polupravu P_2.

2. Označimo sa:

P_p množinu otvorenih polupravâ sa početkom p,

P'_p množinu zatvorenih polupravâ sa početkom q, i dogovorimo se da otvoreni početak označimo malom kružnicom a zatvoreni malim krugom.



Slika 7.11

Otvorena poluprava P_3 kojoj pripada tačka x označava se i ovako:

$[px$ kad je $p<x$, $\quad xp]$ kad je $p>x$.

Zatvorena poluprava P'_6 kojoj pripada tačka y označava se i ovako:

$[qy$ kad je $q<y$, $\quad yq]$ kad je $q>y$.

Obratiti pažnju na te simbole: početak je uvek uz zagradu.

3. Da li je tačno ovo što sledi:

1) Particija prave P: $\{P_1, \{p\}, P_2\}$; $\{P_1, P_2\}$; $\{P'_1, P'_2\}$.

2) Particija ravni Π: $\{\{p\}, \{P_p\}\}$.

3) $P_1 \cap P_2 = \varnothing$; $\quad P_1 \cup P_2 = P \setminus \{p\}$; $\quad P'_1 \cap P'_2 = \{p\}$; $\quad P'_1 \cup P'_2 = P$.

4) Množina zatvorenih polupravâ čiji je početak a nije particija ravni Π. Zašto?

5) Množina otvorenih polupravâ čiji je početak a nije particija ravni Π. Zašto?

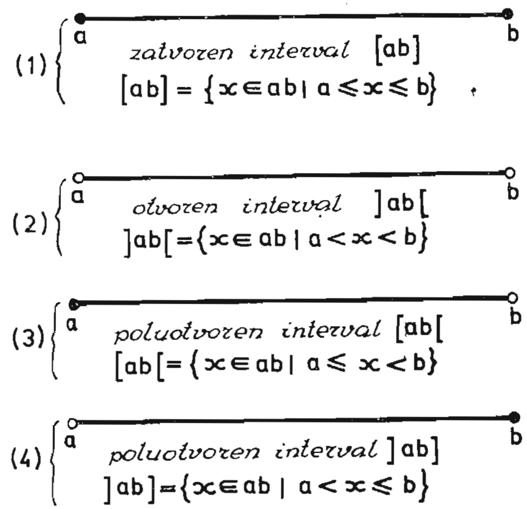
4. Definicija 3. — *Dve poluprave su paralelne ako su delovi paralelnih pravâ.*

Prikažite crtežom: (1) $ba[\parallel[cd$; $\quad$ (2) $qp]\parallel[rs$; $\quad$ (3) $A_1\parallel A_2$.

5. Definicija 4. — *Dve poluprave su perpendikularne ako su delovi perpendinularnih pravâ.*

Prikažite crtežom: (1) $]ab\perp]ac$; $\quad$ (2) $ba[\perp bc]$; $\quad$ (3) $ab[\perp[cd$.

1. Pod uslovom da je prava orijentisana ovako $a<b$, definišimo četiri vrste intervala.



Slika 7.12

2. Interval se u nekim slučajevima zove *duž* (§ 4.8). Međutim, ta dva pojma se ne mogu identifikovati. Da bi duž postala interval, moramo uvesti uslov $a<b$ ili $b<a$, tj. orijentisana duž. Zato, u simbolu $[ab]$ ili $[ab[$ itd., a i b ne mogu uzajamno zameniti mesta, tj.:

$[ab]$ i $[ba]$ su dva intervala, a ab i ba je jedna ista duž.

Krajnje tačke duži su parovi, a krajnje tačke intervala su uređeni parovi.

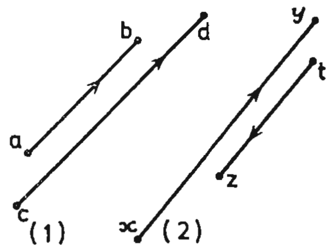
1) Kad moramo reći da su dve duži: (1) paralelne; (2) perpendikularne?

2) Prikažite crtežom dve paralelne duži.

3) Prikažite crtežom dve perpendinularne duži.

4) Dva intervala ne mogu biti samo paralelna nego *paralelna u istom smeru* [sl. 7.13(1)] ili *paralelna u suprotnom smeru* [sl. 7.13(2)].

Često se kaže: *uređeni parovi paralelni u istom smeru; uređeni parovi paralelni u suprotnom smeru.* (Videti § 24.1.)



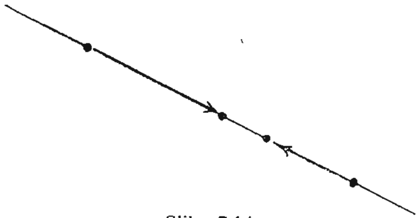
Slika 7.13

5) Prikažite crtežom razne uređene parove: (1) kad su paralelni u istom smeru; (2) kad su paralelni u suprotnom smeru; (3) kad su perpendikularni.

3. Šta je: (1) $[aa]$; $\quad$ (2) $]aa[$?

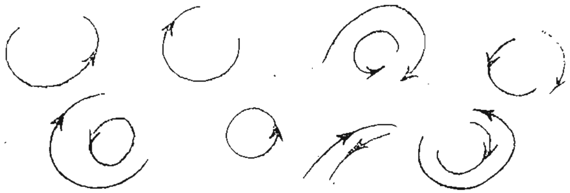
§ 7.6. ORIJENTACIJA RAVNI

1. 1) Pravu smo orijentisali uređenim parom njenih tačaka (tj. strelicom):



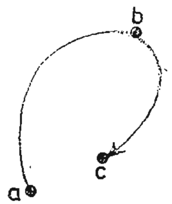
Slika 7.14

Možemo li ravan da orijentišemo strelicom?

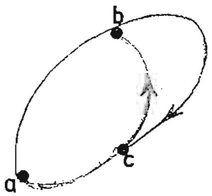


Slika 7.15

Dve tačke određuju pravu. Možemo li pomoću tri nekolinearne tačke da orijentišemo ravan? Možemo, jer strelica kojoj pripadaju te (tri) tačke može da počne u prvoj i da se završi u trećoj ili obrnuto. (sl. 7.16).



Slika 7.16



Slika 7.17

Dakle, tri tačke (triplet) određuju dva smera ravni (sl. 7.17): jedan je (a, b, c), drugi je (a, c, b).

2) Napišite sve triplete koji određuju isti smer ravni kao: (1) triplet (a, b, c); (2) (a, c, b).

Ta razmatranja nas prisiljavaju da uvedemo:

Aksiom Π 7. — Ravan ima dva smera. Ma koje tri nekolinearne tačke određuju jedan od smerova ravni.

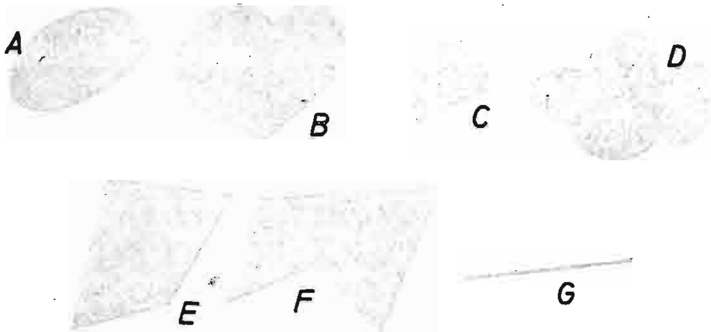
Ako su a, b, c nekolinearne tačke, onda tripleti (a, b, c), (b, c, a) i (c, a, b) određuju jedan (isti) smer ravni, a tripleti (a, c, b), (c, b, a) i (b, a, c) određuju suprotni smer ravni.

2. 1) Šta možete reći za smerove koje određuju strelice časovnika pri svom kretanju?
2) Šta možete reći za smer koji određuju strelice časovnika i smer kojim se odšrafljuje (vadi) zavrtanj?

3. 1) Stavite ruke na sto. Krajevi palca, kažiprsta i domalog prsta svake ruke određuju jedan triplet. Određuju li ta dva tripleta iste smerove?
2) Šta možete reći za smerove koje određuju ruke plivača?

§ 7.7. KONVEKSNE MNOŽINE

1. Svaki od sledećih crteža predstavlja jedan deo ravni, tj. jednu (određenu) množinu tačaka ravni.



Slika 7.18

Za A, C, E, G kažemo da su *konveksne* množine. Množine B, D, F *nisu konveksne*.

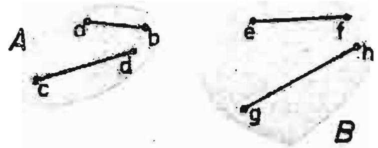
Po čemu se poznaju konveksne množine? Kako ih možemo definisati?

Zadržimo se na množinama A i B (sl. 7.19).

Tačke a, b, c, d pripadaju množini A.

Tačke e, f, g, h pripadaju množini B.

Posmatrajte $[ab]$ i A, $[ef]$ i B;
$[cd]$ i A, $[gh]$ i B.



Slika 7.19

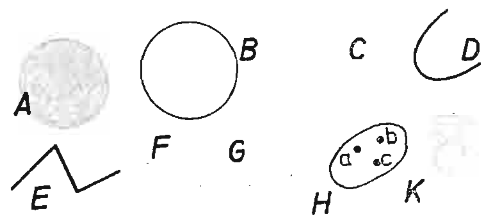
Na osnovu toga definišemo:

Definicija 4. — *Ako su x i y dve ma koje tačke podmnožine M ravni Π i ako zatvorena duž $[xy]$ pripada toj podmnožini, onda je ona (ta podmnožina ravni Π) konveksna množina.*

Izražena simbolima: $M\ (\subset \Pi)$ je konveksna $\Leftrightarrow\ \forall\, x, y \in M\colon\ [xy] \subset M$.

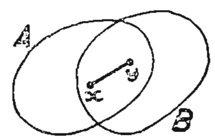
2. Koja je od množina prikazanih slikom 7.20 konveksna?

3. Prikažite 10 najraznovrsnijih konveksnih i 10 najraznovrsnijih nekonveksnih množina.



Slika 7.20

4. Posmatrajte presek dveju konveksnih množina. Da li je on konveksan? Dokažite svoje tvrđenje (sl. 7.21).

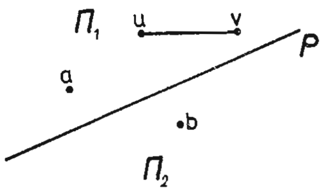


Slika 7.21

Teorema. — *Presek dveju konveksnih množina je konveksna množina,* tj. (simbolima): *A, B konveksne* $\Rightarrow$ $A \cap B$ *konveksan.*

5. 1) Nacrtajte proizvoljnu pravu P. Ona određuje dve poluravni Π_1 i Π_2 (§ 4.7) čija je ivica P.

Označite ma koje dve tačke u, v koje pripadaju jednoj od tih poluravni. Šta možete reći za duž $[uv]$? (Ona je sadržana u poluravni, npr. Π_1). Znači, svaka duž čiji krajevi pripadaju jednoj otvorenoj poluravni sadržana je u toj poluravni. Kako možete izraziti tu činjenicu?



Slika 7.22

Svaka otvorena poluravan je konveksna.

Isto tako: *Svaka zatvorena poluravan je konveksna.*

2) Označite sad tačke a i b tako da $a \in \Pi_1$, $b \in \Pi_2$.

Tada kažemo da P *razdvaja* a i b. Šta moramo reći za $]ab[$ i P?

Prava P seče otvorenu duž $]ab[$, tj. $P \cap]ab[$ je singleton.

Zamislite sad dve tačke x i y ravni Π takve da neka prava P seče $]xy[$. Kakav je u tom slučaju položaj tačaka x i y u odnosu na P. (P razdvaja x, y.) Ta razmatranja navode nas da uvedemo:

Aksiom Π 8. — Svaka otvorena ili zatvorena poluravan je konveksna.

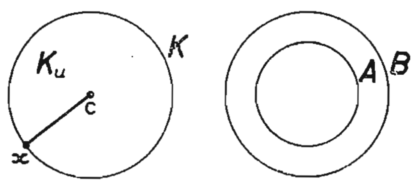
Ako, i samo ako, prava P razdvaja tačke x, y, ona seče duž $]xy[$.

§ 7.8 NEKE GEOMETRIJSKE MNOŽINE TAČAKA (FIGURE)

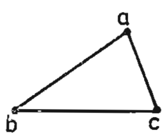
1. 1) Ako ubodemo iglu šestara u tačku c ravni Π i pisaljku šestara obrćemo oko igle kao oko stožera (što znači da se kraci šestara, za sve vreme obrtanja, niti približuju, niti udaljuju) pisaljka crta krivu liniju koja se zove *krug* ili (kružnica) K, čiji je centar c*.

Krug (kružnica) K je beskonačna množina tačaka. On deli ravan Π u dve oblasti (dve podmnožine): K_u koju čine *unutrašnje tačke* (u odnosu na K) i K_s koju čine *spoljašnje tačke* (u odnosu na K).

Množina K_u zove se *otvoren disk* centra c i označavaćemo ga ovako $]K_u[$. Krug K je *ivica* ili *granica* diska.



Slika 7.23



Slika 7.24

* Polazimo, dakle, od eksperimenta. Kasnije ćemo pojam krug (kružnica) uvesti definicijom. U pogledu terminologije u zadnje vreme se *kružnica* i *krug* zamenjuju, respektivno, sa *krug* i *disk*. (Čitati dalje.)

Ako disk sadrži i ivicu, on je *zatvoren* i označava se $[K_u]$. Dakle: $[K_u] =]K_u[\cup K$.

Množina K_s je zatvorena ili otvorena, prema tome da li sadrži ili ne sadrži K. U prvom slučaju označava se $[K_s]$ a u drugom $]K_s[$.

Dakle: $[K_s] = \Pi \setminus]K_u[$.

2) Duž $[cx]$ gde je x ma koja tačka kruga K zove se poluprečnik kruga i diska. U specijalnom slučaju, kad je $x = c$, K se svodi na tačku c. Tada kažemo da je K krug poluprečnika nula.

3) Konstrukciju kruga (pod 1), a s obzirom na prethodno (pod 2) izražavamo ovako: *Svi poluprečnici datog kruga su kongruentni.* (Vidi prethodnu fusnotu.)

4) Isto tako, *za dve ili više duži koje mogu biti poluprečnici istog kruga, bez obzira da li su one delovi iste prave ili raznih pravih, paralelnih ili neparalelnih, kažemo da su kongruentne duži.*

Da li su dve nacrtane duži kongruentne ili ne, proverava se šestarom*.

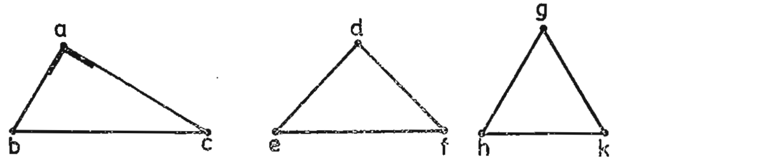
5) Dva ili više krugova istog centra zovu se *koncentrični krugovi.* Beskonačna množina tačaka čije su granice dva koncentrična kruga zove se *kružni prsten* (sl. 7.23). On može biti *otvoren* $]K[$ (kad ne sadrži granice, tj. koncentrične krugove) ili *zatvoren* $[K]$ (kad sadrži te krugove).

2. 1) Tri tačke uzete (posmatrane) jednim određenim redom zovu se triplet (§ 7.7).

Triplet (a, b, c) nekolinearnih tačaka određuje figuru koja se zove *trougao* (sl. 7.24). Tačke a, b, c jesu *uzastopna* (konsekutivna) *temena* trougla. Zatvoreni intervali (duži) $[ab]$, $[bc]$, $[ca]$ jesu *zatvorene stranice* trougla.

Ako teme ne pripada stranici, onda se ono nalazi *naspram stranice*, a ona se nalazi *naspram temena*; na primer (sl. 7.24) c i $]ab[$ su jedno naspram drugog.

2) Ako su dve stranice trougla međusobno perpendikularne, on se zove *pravougli trougao* $[(a, b, c)$, sl. 7.25$]$.

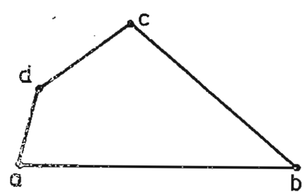


Slika 7.25

3) Ako su dve stranice trougla (posmatrane kao duži) kongruentne, on se zove *jednakokraki trougao* [npr. (d, e, f)]. Ako su sve stranice trougla kongruentne, on se zove *jednakostranični trougao* [npr. (g, h, k)].

(O konstrukciji raznih vrsta trouglova biće kasnije reči.)

3. 1) Četiri tačke $a, b, c, d \in \Pi$, posmatrane određenim redom, npr. (a, b, c, d), od kojih ma koje tri nisu kolinearne, određuju množinu tačaka (figuru) koja se zove četvorougao (sl. 7.26).



Slika 7.26

* Autorov priručnik „*Matematika u IV razredu osnovne škole*“.

Tačke a, b, c, d su *temena* četvorougla. Posmatrana redom a, b, c, d su *uzastopna (konsekutivna)* temena.

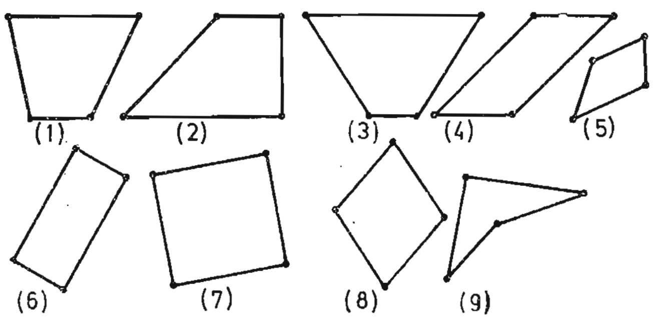
Zatvoreni intervali $[ab]$, $[bc]$, $[cd]$, $[da]$ su *zatvorene stranice* četvorougla. Dve stranice (četvorougla) koje imaju zajedničko teme zovu se *uzastopne* (konsekutivne) stranice. Dve stranice koje nemaju zajedničko teme zovu se *naspramne stranice* četvorougla.

Na primer (sl. 7.26): $[ab]$ i $[cd]$, $[da]$ i $[bc]$ su naspramne a $[ab]$ i $[bc]$, $[bc]$ i $[cd]$, ... su uzastopne stranice.

Ako se stranice četvorougla posmatraju kao duži, one su opet naspramne ili uzastopne, ali se (§ 7.5, t. **2**) ne vodi računa o redu temena; na primer da i bc ili ad i bc su naspramne stranice.

2) S obzirom na međusobni položaj stranica, specijalni četvorouglovi jesu:

(1) *trapez* — samo dve naspramne stranice su paralelne [crteži (1), (2), (3), (5), sl. 7.27, su neki modeli trapeza];



Slika 7.27

(2) *pravougli trapez* — jedna stranica perpendikularna na dvema paralelnim stranicama, npr. model (2);

(3) *paralelogram* — naspramne stranice su paralelne [crteži (4), (6), (7), (8) su neki modeli paralelograma];

(4) *pravougli paralelogram* ili *pravougaonik* — uzastopne stranice perpendikularne, npr. modeli (6) i (7).

3) Ako posmatramo stranice četvorougla kao duži, specijalni četvorougli jesu:

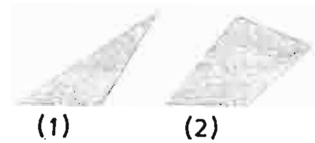
(1) *jednakokraki trapez* — neparalelne stranice kongruentne, npr. model (3);

(2) *jednakostranični paralelogrami* — sve stranice kongruentne: *kvadrat* [prikazan crtežom (7)] i *romb* [prikazan crtežom (8)].

4. Svaki trougao i svaki četvorougao određuju, kao i svaki krug, dve podmnožine, dve oblasti ravni Π: *unutrašnja oblast* i *spoljašnja oblast*.

Unutrašnja oblast trougla T_u zove se ponekad „*otvoren trougao*" [sl. 7.28(1)]. Unutrašnja oblast četvorougla Q_u zove se ponekad „otvoren četvorougao" [sl. 7.28(2)].

Pedagoški je celishodno da se T_u zove *oblast* trougla, a Q_u — *oblast* četvorougla. Ili: oblast ograničena trouglom, odnosno četvorouglom.



Slika 7.28

Može se reći da svaki (dati) trougao, četvorougao definiše tri podmnožine ravni Π: (1) množina koju čine tačke trougla, odnosno četvorougla; (2) oblast T_u, odnosno oblast Q_u; (3) T_s odnosno Q_s. Je li to jedna particija ravni?

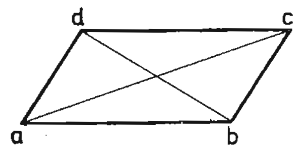
Da li je Q_u uvek konveksna množina? [Videti sl. 7.27(9).] Je li T_u uvek konveksna množina?

5. 1) Kako bismo mogli nazvati uniju: $[ab[\cup[bc[\cup[cd[\cup[da[$ kad (a, b, c, d) određuje četvorougao?

2) Napišite obim trougla (a, b, c).

6. Zatvoreni intervali $[ac]$ i $[bd]$ četvorougla (sl. 7.26) zovu se *dijagonale* četvorougla. Nacrtajte ih.

Crtež 7.29 prikazuje jedan paralelogram. Prave ab i cd su množine koje nemaju zajedničkih elemenata. Prave bc i ad takođe. Na osnovu aksioma Π 7 može se dokazati da je $]ac[\cap]bd[$ singleton. Međutim, taj je dokaz vrlo delikatan. Zato ćemo aksiom Π 7 dopuniti ovako:



Slika 7.29

Dopuna aksioma Π 7: Dijagonale paralelograma se seku.

Isto tako, *dijagonale konveksnog četvorougla se seku.*

7. Nacrtajte trougao čija su temena a, b, c. Nacrtajte pravu P koja seče, na primer, stranicu $]bc[$ (što znači da P ne sadrži ni teme b, ni teme c), a ne sadrži teme a. Nacrtajte razne prave P koje zadovoljavaju taj uslov. Šta vidite? Možete li to dokazati?

Dokaz:

Kako P seče $]bc[$, P razdvaja tačke b i c.
Neka, na primer, $b \in \Pi_1$, $c \in \Pi_2$.
Kako $a \notin P$, moguća su samo dva slučaja:

ili $a \in \Pi_1$	ili $a \in \Pi_2$
U tom slučaju $a \in \Pi_1$, $c \in \Pi_2$, tj. P razdvaja a i c, pa na osnovu aksioma Π 7, P seče $]ac[$.	

Desnu stranu popunite sami. Dakle:

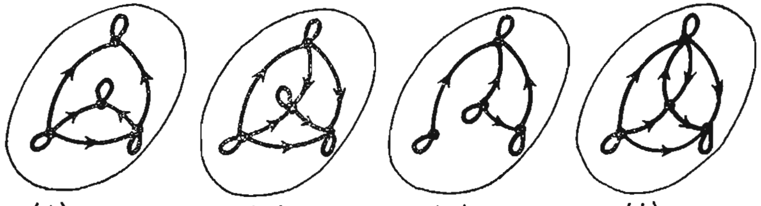
Ako prava ne sadrži nijedno teme trougla i ako seče jednu njegovu stranicu, ona seče još jednu stranicu (teorema Paša).

Simbolima se ona izražava:

$$(a, b, c, \notin P \text{ i } P \text{ seče }]bc[) \Rightarrow (P \text{ seče }]ba[\text{ ili }]ac[).$$

§ 7.9. VEŽBANJA I ZADACI

1. Koja od sledećih sagitalnih šema definiše relaciju poretka reda (i koju)? Obrazložite (svoj) odgovor (potvrdni ili odrečni).

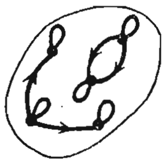


(1) (2) (3) (4)

Slika 7.30

2. Popravite crtež 7.31 tako da on bude sagitalna šema jedne relacije reda (poretka).

3. Sastavite 3 množine od po 7 elemenata i u svakoj definišite jednu relaciju striktnog i jednu relaciju totalnog poretka.



Slika 7.31

4. 1) Nacrtajte, u množini,

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

sagitalnu šemu relacije:

$$R=\{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 6), (6, 6), (6, 7), (8, 9), (10, 9), (11, 9), (11, 12)\}.$$

2) Dopunite je tako da ona bude relacija parcijalnog reda.

5. Učenik je počeo da crta sagitalnu šemu relacije parcijalnog reda u $\{1, 2, 3, \ldots 10\}$ i nacrtao je strelice: $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(6, 5)$, $(6, 4)$, $(5, 7)$, $(7, 9)$, $(7, 8)$, $(8, 9)$. Prikažite crnim strelicama to što je učenik nacrtao i, ako nije završio, završite (crvenim strelicama). Ako nešto nije dobro, ispravite.

6. 1) Nacrtajte sagitalnu šemu relacije:

$R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ u množini $M=\{1, 2, 3, 4\}$. Zatim nacrtajte crvenim strelicama relaciju R^{-1}.

2) Stavite potrebni simbol između $(R\cup R^{-1})$ i $(M\times M)$.

7. Data je množina $M=\{1, 2, 3, 4\}$ i relacija $R=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (4, 3), (4, 1), (1, 3), (4, 2)\}$.

1) To je relacija poretka. Koja?

2) Nacrtajte njenu sagitalnu šemu.

3) Nacrtajte crvenim strelicama R^{-1} i napišite potrebni simbol između $(R\cup R^{-1})$ i $(M\times M)$.

8. Koja relacija poretka postoji u množini N?

9. Neka su P_1 i P_2 dve poluprave čiji je presek prazan. Nacrtajte te poluprave (u ravni Π).

10. Nacrtajte proizvoljnu pravu P i prikažite poluprave:

$$ba],\quad]ba,\quad]ab,\quad [ab$$

kad $a, b\in P$, $a\neq b$.

11. Nacrtajte nekolinearne tačke $a, b, c\subset \Pi$ i odredite rezultat operacije:

(1) $]ab\cap[ac$; (2) $ab]\cap ac]$; (3) $[ab\cap[ac$; (4) $ab]\cap[ac$.

12. Neka su P_1 i P_2 zatvorene poluprave, podmnožine prave P sa početkom a. Neka su P_3 i P_4 otvorene poluprave sadržane respektivno u P_1 i P_2 (tj. P_3 je sadržana u P_1 a P_4 u P_2). Dovršite, tj. napišite rezultat operacije:

(1) $P_1\cap P_2=$	(5) $P_1\cap P_4=$	(9) $P_3\subset$	(13) $P\setminus P_3=$
(2) $P_1\cup P_2=$	(6) $P_1\cup P_4=$	(10) $P_4\subset$	(14) $P\setminus P_4=$
(3) $P_3\cap P_4=$	(7) $\{P_1, P_4\}=$	(11) $P\setminus P_1=$	
(4) $P_3\cup P_4=$	(8) $\{P_2, P_3\}=$	(12) $P\setminus P_2=$	

13. Duž (interval) $[aa]$ je $\|$ svakoj pravi.

14. Neka $a, b\in P$, $a\neq b$. Dovršite i prikažite množinu (svaku posebnim crtežom):

(1) $[ab\cap ab]=$	(4) $]ab\cap]ab[=$	(7) $]ab[\cap]ab[=$
(2) $]ab\cap ab[=$	(5) $[ab]\cap]ab]=$	(8) $]ab[\cap[ab[=$
(3) $[ab\cap ab[=$	(6) $[ab]\cap[ab[=$	

15. 1) Prema crtežu (sl. 7.32) popunite znakom $<$, $>$, ili $\geqslant$ prazno mesto (između svaka dva slova):

$x\ \ x;\quad x\ \ a;\quad a\ \ x;\quad b\ \ a;\quad x\ \ b;\quad b\ \ b.$

2) Možemo li govoriti o: (1) polupravi $ba[$; (2) intervalu $[bx]$? Obrazložite.

3) Možemo li pisati: $]ax[\|]xb[$; $[ab]\|[xb]$?

4) Neka je prava P osnovna množina (baza, § 2.5). Dovršite:

(1) $]ax]\cap[xb]=$

(2) $]ax[\cap[ab]=$

(3) $]xb\cap[ax=$

(4) $P\setminus[ab]=$

Slika 7.32

5) Napišite particiju množine $[ab]$.

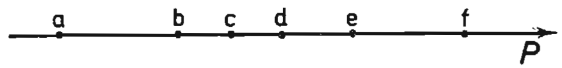
16. 1) Presek više (konačnog broja) otvorenih intervala je otvoren interval ili prazan.

2) Presek više (konačnog broja) zatvorenih intervala je zatvoren interval ili prazan.

3) Šta je unija (konačnog broja) otvorenih intervala od kojih ma koja dva imaju i zajedničke elemente?

4) Šta je unija više zatvorenih intervala od kojih ma koja dva imaju i zajedničke elemente?

17. Prava



Slika 7.33

sadrži množine:

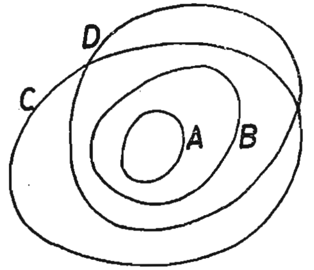
$A=\{x\mid\in[ab]\}$,	$C=\{x\mid x\in[af[\}$,	$E=\{x\mid x\in[be]\}$
$B=\{x\mid x\in[ad[\}$,	$D=\{x\mid x\in[af]\}$,	$F=\{x\mid x\in[cd]$.

1) Neka je $M=\{A, B, C, D, E, F\}$. Napišite $M\times M$.

2) Nacrtajte sagitalnu šemu relacije $\subset$ (inkluzija) u $M\times M$.

3) Je li to relacija reda? Ako jeste, kojeg i zašto?

18. Isto kad je $M=\{A, B, C, D\}$ (sl. 7.34).



Slika 7.34

19. 1) Je li prava konveksna množina?

2) Jesu li singletoni konveksne množine?

3) Je li par $\{a, b\}$ konveksna množina?

4) Je li prazna množina konveksna?

5) Je li $\{a, b, c\}$ konveksna množina?

6) Je li prava bez jedne tačke konveksna?

7) Je li disk iz kojeg je izvučen centar konveksan?

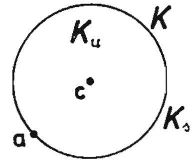
8) Ima li figura u obliku velikog slova A konveksnih delova?

20. 1) Između svaka dva simbola (umesto . . .) stavite onaj od znakova, $\in$, $\notin$, $\subset$ ili $\not\subset$ koji pokazuje relaciju množina označenih simbolima (sl. 7.35):

$c \ldots]K_u[$; $\quad c \ldots K$; $\quad c \ldots K_s$; $\quad c \ldots \Pi$;

$a \ldots]K_u[$; $\quad a \ldots [K_u]$; $\quad a \ldots]K_s[$;

$[K_u] \ldots \Pi$; $\quad]K_u[\ldots [K_u]$; $\quad [K_u] \ldots [K_s]$.



Slika 7.35

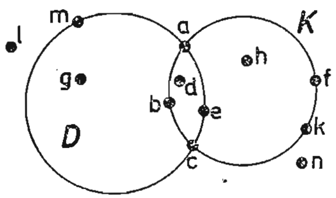
2) Isto u sledećim implikacijama:

$x \in \Pi$ i $\{x\} \cap K = \{x\} \Rightarrow x \ldots K$;

$y \in \Pi$ i $\{y\} \cap K = \varnothing \Rightarrow y \ldots K$.

3) Neka je K_u osnovna množina (baza). Imenujte množine: (1) $]\overline{K}_u[$; (2) $\{\bar{c}\}$; (3) $\overline{K}$; (4) $[\overline{K}_u]$.

21. Crtež 7.36 prikazuje jedan zatvoren disk D i jedan krug K. Nacrtajte Venov dijagram tih množina i označite tačke $a, b, c, \ldots, m, n$.



Slika 7.36

22. Označimo (crtež 7.23 desno) sa: $]A_u[$ otvoreni disk čija je granica A, $[B_u]$ zatvoreni disk čija je granica B, $]B_s[$ otvorenu spoljašnju oblast kruga B, K_p) kružni prsten određen krugovima A i B. Dovršite:

(1) $[B_u] \setminus]A_u[= \ldots$;

(2) $]B_u[\setminus [A_u] = \ldots$;

(3) $\{]A_u[, A,]K_p[, B,]B_s[\} =$

23. Neka je a centar kruga A, b centar kruga B. Sve ostalo kao u prethodnom zadatku.

1) $a=b$, $x \in A$ i $x \in]B_u[$. Dovršite: (1) $A \cap B =$; (2) $]A_u[\cap]B_u[=$; (3) $]A_u[\cup]B_u[=$; (4) $[A_u] \setminus]B_u[=$; (5) $]\overline{A}_u[\setminus]B_s[=$.

2) $a \neq b$, $A \cap B = \varnothing$. Nacrtajte dva moguća slučaja, umesto tačaka stavite potrebni znak, a ostalo dovršite:

(1) $[A_u] \ldots [B_u]$; (2) $[A_u] \cap [B_u] =$; (3) $[A_u] \cup [B_u] =$.

3) $a=b$, $A \cap B = \{x, y\}$. Nacrtajte taj slučaj, a zatim šrafirajte: plavo množinu $E =]A_u[\cap]B_u[$, zeleno $F = (]A_u[\cup [B_u]) \setminus E$.

24. Neka je c centar kruga K. Neka je $\{K_1, K_2, K_3, \ldots\}$ beskonačna množina krugova koncentričnih sa K i sadržanih u $]K_u[$. Neka su $[K]$, $[K_1]$, $[K_2]$, . . . odgovarajući zatvoreni, a $]K[$, $]K_1[$, $]K_3[$, . . . odgovarajući otvoreni diskovi.

1) Množina $\{K_1, K_2, K_3, \ldots\}$ sadrži c. Zašto?

2) Napišite rezultat:

(1) $[K] \cap [K_1] \cap [K_2] \cap \ldots =$

(2) $[K] \cup [K_1] \cup [K_2] \cup \ldots =$

3) Neka je $[K]$ osnovna množina (baza). Prikažite: (1) $]\overline{K}[$; (2) $]K_1[\cup]K_2[\cup]K_2[\cup \ldots$

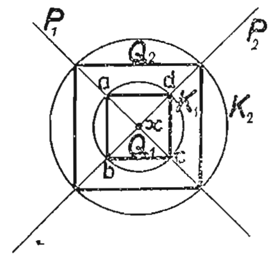
25. „Nacrtajte" pravougaonik; trapez; romb. Nacrtajte otvoren: pravougaonik; trapez; romb.

26. Na crtežu 7.37 je $P_1 \perp P_2$, a $K_1, K_2, K_3 \ldots$ su krugovi.

1) $P_1 \cap P_2 = \ldots$ $\qquad$ 2) $K_1 \cap (P_1 \cup P_2) = \ldots$

3) Rezultat pod 2) je $\{a, b, c, d\}$. Te 4 tačke određuju kvadrat Q_1. Tačka x je centar tog kvadrata. Koliko se može nacrtati krugova K, pa prema tome i odgovarajućih kvadrata Q? A koliko uopšte ima tih krugova i odgovarajućih kvadrata? Jedan od krugova je $\{x\}$. Šta je odgovarajući kvadrat? Takođe $\{x\}$. To je *kvadrat čija je stranica nula.*

4) Označimo beskonačnu množinu krugova sa $\boldsymbol{K}$ a beskonačnu množinu odgovarajućih kvadrata sa $\boldsymbol{Q}$. Šta je tada $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{Q}$?



Slika 7.37

27. Označimo sa: U množinu četvorouglova, T množinu trapeza, P množinu paralelograma, P_r množinu pravougaonika, Q množinu kvadrata, R množinu rombova, T_r množinu trouglova, T_p množinu pravouglih trouglova, T_k množinu jednakokrakih trouglova, T_s množinu jednakostraničnih trouglova.

1) Stavite znak $\subset$ ili $\not\subset$ između svaka dva uzastopna simbola:

(1) $Q \quad P_r \quad P \quad T \quad U$;

(2) $Q \quad R \quad P \quad T \quad U$; $\qquad$ (3) $T_p \quad T_k \quad T_s$;

(4) $T_p \quad T_k \quad T_s$; $\qquad$ (5) $P_r \quad R$.

2) Nacrtajte Venov dijagram svakog od prethodnih slučajeva [tj. Venov dijagram koji prikazuje (1), Venov dijagram koji prikazuje (2), . . .].

28. 1) „Izračunajte" (tj. napišite rezultat operacije): $R \cap P_r$; $U \cap P$; $Q \cap P_r$; $Q \cap P$; $T_r \cup T_k$; $T_r \cup T_s$; $T_k \cap T_s$; $P \cup P_r$; $P_r \setminus Q$; $T_r \setminus T_s$; $U \setminus P$; $T_k \setminus T_s$.

2) Napišite karakterističnu osobinu svakog elementa množine:

(1) $T_k \setminus T_p$; (2) $P_r \cap R$; (3) $T_k \cap T_p$; (4) $P \setminus (P_r \cup R)$; (5) $T_p \cap T_s$.

Rezime

1. 1) Osnovne osobine svake relacije reda jesu: antisimetričnost [par, element (x, y) isključuje (y, x)] i tranzitivnost.

2) Relacija striktnog reda je, pored toga, i antirefleksivna, a relacije parcijalnog i totalnog reda su i refleksivne.

3) Relacija totalnog reda ima i četvrtu osobinu, *koneksiju*: ako su x i y ma koji elementi date množine, onda je obavezno jedan od parova (x, y) ili (y, x) element relacije. Drugim rečima, između svaka dva elementa obavezno postoji relacija reda. (To govori i sama reč totalni.)

2. 1) Prava $P=ab$ orijentiše se konvencijom: smer od a ka b uzima se za pozitivni i to se označava $a<b$. Suprotni smer, tj. od b ka a je negativni (smer).

2) Ravan se orijentiše pomoću tri nekolinearne tačke a, b, c: (a, b, c) je jedan smer, (a, c, b) je drugi (suprotni) smer.

3) Znači, dok u većini množina postoji neki „prirodni" red, u množinama (koje se zovu) prava i ravan taj se red uvodi aksiomima $\Pi\,6$ (§ 7.3) i $\Pi\,7$ (§ 7.6).

3. 1) Množina M je konveksna ako je za svaka dva njena elementa x, y duž $[x\ y]$ sadržana u M, tj. $\forall x, y \in M : [x\ y] \subset M$.

2) Od jednostavnih geometrijskih figura konveksne su: prava, poluravan, disk i oblast trougla. Međutim, i mnoge druge figure mogu da budu konveksne, na primer oblast prostog četvorougla, prostog mnogougla itd.

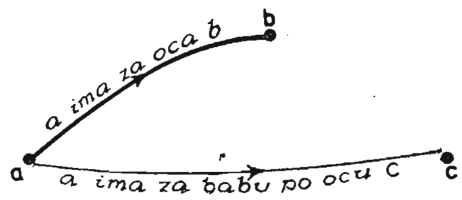
GLAVA VIII

SLOŽENE RELACIJE (KOMPOZICIJE)*

§ 8.1. PRIMERI I DEFINICIJA

1. Steva je Zoranov otac, a Ruža je Stevina majka. Šta je Ruža Zoranu? — Mladen je Jelin otac, a Kata je Mladenova majka. Šta je Kata Jeli?

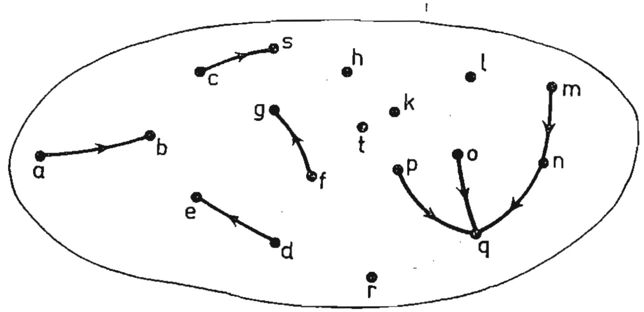
Prvu relaciju prikazujemo šemom (sl. 8.1):



Slika 8.1

Nacrtajte sagitalnu šemu „druge" relacije.

Ako, dakle, posmatramo u datoj množini ljudi relaciju „... ima za oca ..." (***O***) i relaciju „... ima za majku ... " (***M***), može se dogoditi da u toj množini postoji i relacija „... ima za babu po ocu ..." (***B***). Na crtežu 8.2 crne strelice prikazuju relaciju ***O***, zelene prikazuju relaciju ***M***. Prikažite crvenim strelicama relaciju ***B***.



Slika 8.2

Relacija ***B*** je sastavljena od relacija ***O*** i ***M***. Ona se zove *složena relacija* ili *kompozicija relacija* ***O*** i ***M*** i označava se ovako

$$\boldsymbol{O} \circ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{B},$$

* Pri *prvom* čitanju ta se glava može izostaviti („preskočiti"). Ali samo pri prvom i samo ako čitalac nailazi na teškoće, jer je njen sadržaj neophodan.

a čita: $\boldsymbol{M}$ krug $\boldsymbol{O}$ („em krug o"). Dakle, čita se *zdesna nalevo*. Mi ćemo je čitati i „relacija o posle relacije em". $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}\circ\boldsymbol{M}$.

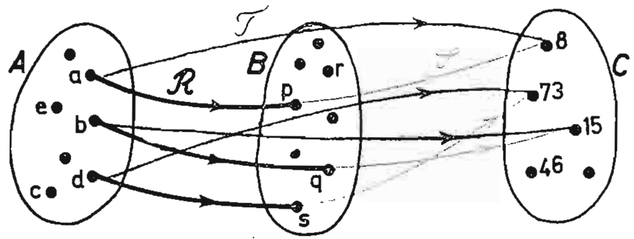
2. Posmatrajte množinu A koju čine đaci vašeg razreda, množinu B koju čine roditelji vaših đaka i množinu C koju čine kuće odnosno stanovi mesta (ili ulice) u kome (u kojoj) se nalazi vaša škola. Sigurno je da većina vaših đaka ima roditelje i da neki roditelji stanuju u mestu gde se nalazi (vaša) škola. Tada, ako đak x ima roditelje y, onda se to, kao što je poznato, zapisuje $x\boldsymbol{R}y$, ili, što je isto, uređeni par $(x, y)\in\boldsymbol{R}$, gde je $\boldsymbol{R}=$„... ima za roditelje..." pa je $\boldsymbol{R}\subset A\times B$ (od A ka B).

Ako roditelji y stanuju u kući z, onda imamo:

$y\boldsymbol{S}z$ ili $(y, z)\in\boldsymbol{S}\subset B\times C$ (od B ka C), gde je $\boldsymbol{S}=$„... stanuju u (kući broj)...", a samim tim i

$x\boldsymbol{T}z$ ili $(x, z)\in\boldsymbol{T}\subset A\times C$ (od A ka C), gde $\boldsymbol{T}=$„đak ... stanuje u (kući broj)..."

Relacija $\boldsymbol{T}$ je složena relacija, kompozicija relacija $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{S}$ i piše se $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}$ (sl. 8.3).



Slika 8.3

Ili simbolima:

$$(x\in A,\quad y\in B,\quad x\boldsymbol{R}y \text{ i } y\boldsymbol{S}z)\Leftrightarrow(x\boldsymbol{T}z).$$

Sagitalna šema prikazuje samo neke parove, elemente relacije $\boldsymbol{R}$, relacije $\boldsymbol{S}$, relacije $\boldsymbol{T}$.

Đak $x\,(x\in A)$ ima za roditelje $y\,(y\in B)$, piše se, dakle, ovako:

$$x\boldsymbol{R}y, \text{ ili } y=\boldsymbol{R}(x).$$

Druga formula se čita i „y su roditelji od x".

Roditelji y imaju stan $z\,(z\subset C)$, piše se:

$$y\boldsymbol{S}z \text{ ili } z=\boldsymbol{S}(y),$$

što se (ono drugo) čita i „z je stan (roditelja) y".

Prema tome, možemo pisati:

$$z=S(y)=S(R(x))=\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}(x),$$

što čitamo: *z je relacija S od y*, ili *relacija S od R od x*, ili $\boldsymbol{R}$ *krug S* (tj. S posle R) ili *T od x*.

Da bi, dakle, postojala složena relacija, moraju postojati parovi (x, y) i (y, z). Zajednički član tih parova y iščezava.

Početak strelice složene relacije $\boldsymbol{S}\circ\boldsymbol{R}$ je početak strelice relacije $\boldsymbol{R}$, a kraj se poklapa sa krajem strelice relacije $\boldsymbol{S}$.

3. Koju relaciju prikazuje strelica čiji je početak u d a kraj u g, sl. 8.2? Prikažite na tom crtežu relaciju „... ima za dedu po majci..."

§ 8.2. SPECIJALNI SLUČAJEVI

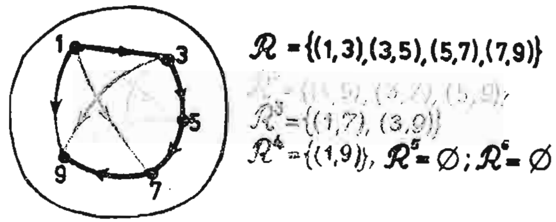
1) Posmatrajte množinu koju čine ljudi u vašem selu, ili vašoj opštini, i u njoj relaciju $\boldsymbol{M}=$„... ima za majku..." Polazeći od te relacije, može se konstruisati složena relacija:

(1) $\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}=$„..." Iskažite je (pismeno) sami.

(2) $\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}=$„..." Iskažite je.

(3) $\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}=$„..." Iskažite je.

U (1) je relacija $\boldsymbol{M}$ sastavljena od same sebe i umesto $\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{M}$ često se piše $\boldsymbol{M}^2$, a čita: $\boldsymbol{M}$ složena dvaput.



Slika 8.4

U (2) je relacija $\boldsymbol{M}$ sastavljena triput od same sebe i kratko se piše $\boldsymbol{M}^3$. — I tako dalje.

Prikažite pomoću strelica te relacije.

2) Šema 8.4 prikazuje drugi primer specijalnih složenih relacija.

§ 8.3. OSOBINE SLOŽENIH RELACIJA

1. Može li biti $\quad\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\circ\boldsymbol{M}$?

Videli smo da je:

$\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{O}=$„$x$ ima za babu po ocu z",

$\boldsymbol{O}\circ\boldsymbol{M}=$„$x$ ima za dedu po majci v".

Dakle: $\quad\boldsymbol{M}\circ\boldsymbol{O}\neq\boldsymbol{O}\circ\boldsymbol{M}$,

to jest: *Složena relacija nije komutativna.*

2. 1) Posmatrajmo: množinu A stanovnika muškog pola u našem selu (gradu, opštini), množinu F stanovnika ženskog pola u našem selu (gradu), množinu T tašta (u istom mestu) i relacije $\boldsymbol{F}=$„... ima za ženu..." (od A ka F) i $\boldsymbol{M}=$„... ima za majku..." (od F ka T).

U tom slučaju je:

$M \circ F =$ „. . . ima za taštu . . .“;

$F^{-1} =$ „. . . ima za muža . . .“ (recipročna, inverzna relacija relacije F od F ka A);

$M^{-1} =$ „. . . ima za kćerku . . .“ (od T ka F);

$F^{-1} \circ M^{-1} =$ „. . . ima za zeta . . .“ (od T ka A);

$(M \circ F)^{-1} =$ „. . . ima za zeta . . .“

Dakle: $$(M \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ M^{-1},$$

to jest: *Inverzna (recipročna) relacija složene relacije dveju relacija jednaka je složenoj relaciji inverznih relacija tih relacija uzetih obrnutim redom.*

*2) Tu osobinu možemo pokazati i ovim primerom. Neka je $A = B = C \subset N$ (N je množina prirodnih brojeva). I neka je:

$R =$ „. . . ima kao kvadrat . . .“ (od A ka B),

to jest: $xRy \Leftrightarrow y = x^2$ [npr. $7R49$];

$S =$ „. . . ima kao trostruki . . .“ (od B ka C),

to jest: $ySz \Leftrightarrow z = 3y$ [npr. $49S147$].

Tada je složena relacija $S \circ R$ definisana ekvivalencijom

$$xS \circ Rz \Leftrightarrow \text{bar jedan } y \in N \setminus (xRy \text{ i } ySz)$$

[ako je $xS \circ Ry$, postoji bar jedan prirodni broj takav da je . . .]

ili izraženo algebarski: $(y = x^2)$ i $(z = 3y) \Rightarrow z = 3x^2$.

Inverzne relacije jesu: $yR^{-1}x \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

[jer R^{-1} označava „. . . ima za kvadratni koren . . .“],

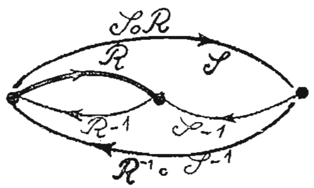
$$zS^{-1}y \Leftrightarrow y = \frac{z}{3}$$

[$S^{-1} =$ „. . . ima za trećinu . . .“ od C ka B.

Prema tome je:

$$x = \sqrt{y} = \sqrt{\frac{z}{3}} \Leftrightarrow zR^{-1} \circ S^{-1}x,$$

što i potvrđuje iskazanu osobinu.



Slika 8.5

3) Grafički je ta osobina očigledna (sl. 8.5).

3. 1) Uzmimo opet relacije:

$O =$ „. . . ima za oca . . .“, $M =$ „. . . ima za majku . . .“

$O \circ M =$ „. . . ima za dedu po majci . . .“

$M \circ O =$ „. . . ima za babu po ocu . . .“.

Kako glasi relacija $M \circ (O \circ M)$, a kako $(M \circ O) \circ M$?

Nacrtajte sagitalnu šemu pa ćete videti da kraj prve strelice označava *majka (mog) dede po majci* a kraj druge — *mamina baba po ocu.*

A to je ista žena i zato je $M \circ (O \circ M) = (M \circ O) \circ M$.

2) Uzmimo prvi primer prethodne tačke dodajući množinu D dečaka i relaciju O („. . . ima za oca . . .“):

(1) $M \circ F =$ „. . . ima za taštu . . .“

(2) $(M \circ F) \circ O$ $\begin{cases} = \text{„. . . ima za taštu svog oca . . .“} \\ = \text{„. . . ima za babu po majci . . .“} \end{cases}$

(3) $F \circ O$ $\begin{cases} = \text{„. . . ima za suprugu svog oca . . .“} \\ = \text{„. . . ima za majku . . .“} \end{cases}$

(4) $M \circ (F \circ O)$ $\begin{cases} = \text{„. . . ima za majku svoje majke . . .“} \\ = \text{„. . . ima za babu po majci . . .“} \end{cases}$

Iz (2) i (4) sledi $(M \circ F) \circ O = M \circ (F \circ O)$.

Oba primera [1) i 2)] pokazuju:

Sastavljanje složene relacije je asocijativna operacija. Ili: *Kompozicija relacija je asocijativna.*

3) Pokažite tu osobinu i pomoću strelica.

4. Posmatrajte bilo koju identičnu relaciju, npr.: $J = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ i ma koju relaciju: $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}$.

Pokažite grafički da je $R \circ J = J \circ R = R$.

Identična relacija ne menja drugu relaciju (pri kompoziciji). Zato se identična relacija zove i *neutralna relacija.*

§ 8.4. KOMPOZICIJA RELACIJA PARALELNOSTI I PERPENDIKULARNOSTI

1) U § 4.9 utvrdili smo:

(1) teorema **9**: $A \parallel B$ i $B \parallel C \Rightarrow A \parallel C$;

(2) tačka **8** (3): $A \perp C$ i $B \perp C \Rightarrow A \parallel B$;

(3) tačka **8** (2): $A \perp B$ i $B \parallel C \Rightarrow A \perp C$.

Očigledno, to su kompozicije relacija paralelnosti i perpendikularnosti, pa se:

(1) izražava $\parallel \circ \parallel = \parallel$; (2) izražava $\perp \circ \perp = \parallel$; (3) izražava $\perp \circ \parallel = \perp$.

Treba primetiti da je kompozicija $\perp$ i $\parallel$ komutativna, tj. $\perp \circ \parallel = \parallel \circ \perp$. Zato se kaže (§ 8.3 t. **1**) da kompozicija relacija „nije komutativna“ (nekomutativna), jer kad ne bi bilo izuzetaka, reklo bi se *antikomutativna.*

2) Prethodne kompozicije mogu se napisati u obliku (Kelijeve) tabele:

$\circ$	$\parallel$	$\perp$
$\parallel$	$\parallel$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\parallel$

3) Na osnovu te tabele i asocijativnosti (§ 8.3 t. **3**) je, npr.:

$\parallel^3 = \parallel \circ \parallel \circ \parallel = \parallel$

$\perp^3 = \perp \circ \perp \circ \perp = \perp$

$\perp^5 = \perp \circ \perp \circ \perp \circ \perp \circ \perp = \perp$

$\perp^6 = \perp \circ \perp \circ \perp \circ \perp \circ \perp \circ \perp = \parallel$

$\perp^3 \circ \perp^5 = \perp \circ \parallel = \perp$

Uopšte je:

(1) $\|^n = \|$, ma koji bio broj $n \in N \setminus \{0\}$.

(2) $\perp^{2n} = \|$, gde je $2n$ ma koji paran broj.

(3) $\perp^{2n+1} = \perp$, jer je $2n+1$ neparan broj.

(4) $\perp^n \circ \|^m = \perp^n$, $\forall\, n, m \in N \setminus \{0\}$.

Objašnjenje: $\perp^5$ znači $A \perp B$, $B \perp C$, $C \perp D$, $D \perp E$, $E \perp F$ ili, kraće, $A \perp B \perp C \perp D \perp E \perp F$.

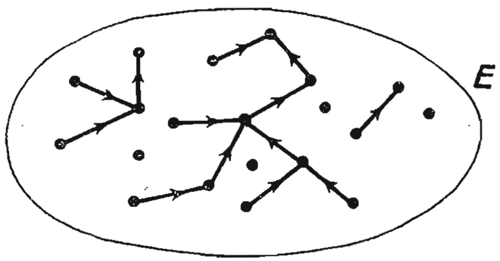
§ 8.5. VEŽBANJA I ZADACI

1. Iskažite, tj. napišite rečima, relacije:

(1) $(M \circ O)^{-1}$; (2) $(O \circ M)^{-1}$; (3) $(M \circ M)^{-1}$; (4) $(O \circ O)^{-1}$.

2. Isto: (1) $(O \circ O) \circ O$; (2) $O \circ (O \circ O)$; (3) $(M \circ M) \circ M$; (4) $M \circ (M \circ M)$; (5) $(O \circ O) \circ M$; (6) $(M \circ O) \circ O$; (7) $(M \circ M) \circ O$; (8) $O \circ (M \circ M)$; (9) $(O \circ M) \circ O$.

3. Slika 8.6 predstavlja sagitalnu šemu relacije *majka*. Označite je sa M i nacrtajte sagitalnu šemu relacije: (1) M^2; (2) M^3; (3) M^4; (4) M^5 (za svaku relaciju upotrebite pisaljku druge boje).



Slika 8.6

4. U množini $A = \{a, b, c\}$ date su relacije:

$$R = \{(a, b), (b, a), (c, c)\} \text{ i } S = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}.$$

Nacrtajte pomoću strelica $S \circ R$ i $R \circ S$ (R crnom, S zelenom, a kompozicije crvenom pisaljkom).

5. U množini $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ data je relacija $R = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$. Izračunajte R^2 i R^3. Nacrtajte njihove šeme. (Možete i obrnuto: prvo šeme pa posle grafove.)

6. U $\{7, 12, 14, 49\}$ data je relacija $<$. Izračunajte $<^2$ i $<^3$. Nacrtajte i šeme.

7. U $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ data je relacija:

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, g)\}.$$

Napišite R^{-1} i izračunajte $R^{-1} \circ R$.

8. U $\{a, b, c, d, e\}$ data je $C = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$. Nacrtajte njenu sagitalnu šemu, a zatim i šemu relacije: C^2; C^3; C^4; C^5; C^6.

9. Pokažite da je: $(M^{-1})^3 = (M^3)^{-1}$. Izračunajte M^{-9}.

10. $\perp^3 \circ \|^2 \circ \perp^5 \circ \|^8 \circ \perp^7 \circ \|^7 =$

11. 1) Neka je $A \| B$, $B \perp C$, $C \| D$, $D \| E$, $E \perp F$, $F \perp G$, $G \perp H$, $H \| K$, $K \| X$, $X \| Y$, $Y \| Z$. Nacrtajte neposredno u ravni Π (tj. na listu hartije) prave: (1) A i D; (2) A i Z; (3) C i Y.

2) Neka je $A \perp B \perp C \perp D$. Sastavite odgovarajuću Kelijevu tabelu.

12. Neka je (a, b, c, d) četvorougao. Njegova konsekutivna temena definisana su cikličkom relacijom $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$. Uvedimo relacije:

R = teme ... zamenjuje se konsekutivnim temenom ...

S = teme ... zamenjuje se naspramnim temenom ...

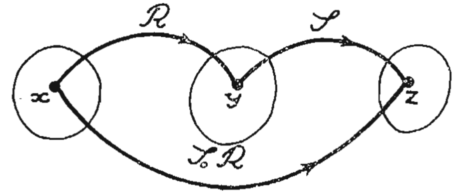
Pokažite grafički da je $S \circ R = R \circ S$.

Rezime

1. 1) Kompozicija dveju relacija je operacija kojom se iz dve relacije dobija treća. Rezultat je *složena* relacija datih relacija:

$$(y, z) \circ (x, y) = (x, z).$$

2) $S \circ R$ prvo R pa posle S („er krug es").



Slika 8.7

2. Osobine: (1) $S \circ R \neq R \circ S$;

(2) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T = R \circ S \circ T$;

(3) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;

(4) $C \circ C^{-1} = J$.

3. Kompoziciju paralelnosti i normalnosti daje Kelijeva tabela:

$\circ$	$\|$	$\perp$
$\|$	$\|$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\|$

GLAVA IX

FUNKCIJE

§ 9.1. PRIMERI, DEFINICIJE, SIMBOLI

1. 1) Crtež 8.6 predstavlja sagitalnu šemu relacije „. . . ima za majku . . ." u datoj množini E osoba.

Koliko strelica polazi iz jedne određene tačke? Zašto? Može li jedno lice da ima više majki?

Iz nekih tačaka ne polazi strelica. Zašto? (Majka one osobe koju predstavlja takva tačka nije element množine E.)

2) Nacrtajte sagitalnu šemu relacije:

(1) „. . . ima za oca . . ." u množini B;

(2) „. . . ima za dedu po ocu . . ." u množini D;

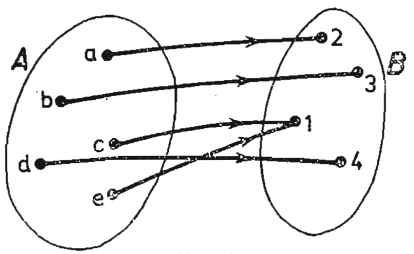
(3) cikličku relaciju u množini $C=\{a, b, c, d\}$.

3) Šta predstavlja crtež 9.1?

To je sagitalna šema relacije:

$$R=\{(a, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 4), (e, 1)\}$$

od A ka B.*



Slika 9.1

4) Množinu država: Bugarska, Jugoslavija, Mađarska, Poljska, Sovjetski Savez, Turska možemo zapisati ovako: $Z=\{\beta, \iota, \mu, \pi, \sigma, \tau\}$.

Množinu gradova: Ankara, Beograd, Crikvenica, Dubrovnik, Edinburg, Foča, Grac, Hanoj, Kazan, Lenjingrad, Moskva, Nirnberg, Pešta, Rim, Sofija, Teheran, Upsala, Varšava, možemo zapisati ovako:

$$G=\{a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n, p, r, s, t, u, v\}.$$

Nacrtajte sagitalnu šemu relacije „. . . ima za glavni grad . . ." od množine Z ka množini G.

5) Neka je E množina učenika vašeg odeljenja, a F množina ulica u kojima stanuju ti učenici. Napišite graf a zatim nacrtajte sagitalnu šemu (ili obrnuto, prvo šemu pa graf) relacije: „. . . stanuje u . . ." od E ka F.

6) Neka je K množina svih žena koje rade u istoj školi (ustanovi), a M množina muškaraca koji stanuju u istom mestu. Napišite graf i nacrtajte šemu relacije „. . . ima za muža . . ." od K ka M.

---

* Posle ćemo to preciznije reći.

Šta je karakteristično za sve navedene relacije?

Iz svake *polazne* tačke *izlazi najviše jedna strelica.*

To je karakteristično. Da li strelica dolazi u element iste množine [primeri pod 1) i 2)] ili u element druge množine [primeri 3), 4) i 5)] i da li u dolaznu tačku dolazi jedna ili više strelica — zasad nije bitno.

Svaka takva relacija zove se *funkcija.*

Definicija. — *Ako iz svake polazne tačke sagitalne šeme polazi najviše jedna strelica, relacija se zove funkcija.*

2. Funkcija se označava najčešće slovom f i to ovako (sl. 9.1):

$2=f(a)$ [Čitaj: f (ef) od a.]
$4=f(d)$ [Čitaj: f od d.]
$1=f(c)$ [Čitaj: f od c.]

Ili (sl. 41, Uputstva):

$b=f(\iota)$ [Čitaj: f (ef) od ι.]
$a=f(\tau)$ [Čitaj: f od τ (tau).]
$m=f(\sigma)$ [Čitaj: f od σ (sigma).]

Na sličan način piše se (sl. 41, Uputstva):

$$f(Z)=\{f(x) \mid x \in Z\},$$

što čitamo: f od Z jednako množini čiji su elementi $f(x)$, pri čemu x pripada množini Z (tj., u navedenom primeru, x je jedna od nabrojanih država).

Isto tako (sl. 9.1): $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$.

Ali, i svako drugo slovo se može upotrebiti, npr. g, h, r, s, . . . , samo se u zagradi uvek mora napisati odgovarajući objekt: $g(x)$, $h(y)$, $h(M)$, . . .

3. Uopšte, ako su A i B dve množine (pri čemu je vrlo često $A=B$), množina $A\times B$ dobiva se na način pokazan u § 3.2, t. **2** i **3** ($A\times B$ je, dakle, množina uređenih parova. Prvi član svakog od tih parova je element množine A, drugi član je element množine B.) „Svaka" podmnožina („svaki" deo) množine $A\times B$ zove se relacija od *polazne* množine A ka *dolaznoj* množini B. *Ona od tih relacija koja ne sadrži dva para (ili više parova) sa istim prvim članom zove se funkcija.*

Drugim rečima (definicija na kraju t. **1**), *ako iz svakog elementa polazne množine izlazi najviše jedna strelica, relacija se zove funkcija.*

Prema ovom poslednjem, funkcija je ono što označava svaka strelica ako iz jedne tačke izlazi samo jedna strelica.

Ali se može dogoditi:

(1) da je *svaki element* polazne množine A prvi član jednog elementa relacije, tj. da iz svakog elementa množine A izlazi jedna strelica [primeri 3), 4) i 5)];

(2) da su neki elementi polazne množine slobodni, tj. da iz nekih elemenata, tačaka polazne množine ne izlazi strelica [primeri 1), 2) i 6)].

U slučaju (2) relacija se zove *funkcija od množine A ka množini B* ili, kratko, *funkcija.*

U slučaju (1) relacija se zove *funkcija množine A u množini B* ili *aplikacija množine A na množinu B.*

Sve tačke polazne množine iz kojih polazi po jedna strelica čine *definicionu množinu* funkcije. U slučaju (2) kaže se da funkcija *nije definisana* za one elemente množine A koji se ne pojavljuju kao članovi parova grafa funkcije, tj. za one elemente iz kojih polazi nula strelica.

Mi ćemo ispitivati uglavnom funkcije (1), tj. aplikacije [primeri 3), 4), 5)]. Tada se najčešće piše:

$$f: A \to B.$$

Množina A zove se i oblast funkcije f, a kraj strelice, tj. element u kome se ona završava, zove se *slika* elementa iz kojeg strelica polazi (izlazi).

Slike svih elemenata A (u slučaju aplikacije) čine *sliku množine* A u množini B (npr. $\{a, b, m, p, s, v\}$, sl. 41, Uputstava, je slika množine Z u G). Zato se i kaže: Množina A se preslikava na množinu B. (Aplikacija množine A na množinu B je *preslikavanje* množine A na množinu B.)

4. Da li je relacija $\boldsymbol{O}^{-1}$ u množini koju čine ljudi naše opštine, republike, recipročna relacija relacije $\boldsymbol{O}$ „. . . ima za oca . . .“, funkcija i zašto?

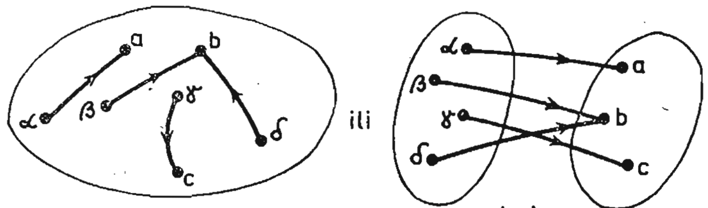
5. *Relacija* $\boldsymbol{R}$ *je funkcija tada, i samo tada, ako slika* $\boldsymbol{R}(x)$ *ma kog elementa* x *je singleton ili prazna množina.*

§ 9.2. VREDNOST FUNKCIJE

1) Prema prethodnom (svaka) *funkcija je množina uređenih parova*, na primer:

$$f = \{(\alpha, a), (\beta, b), (\gamma, c), (\delta, b)\},$$

čija je sagitalna šema:

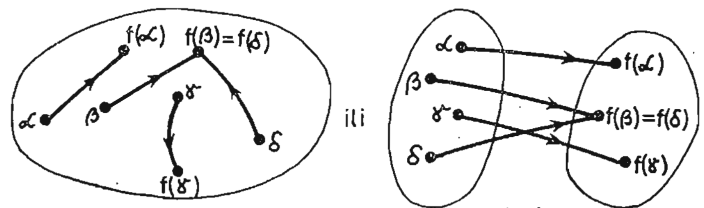


(1) Slika 9.2 (2)

Rekli smo da se, u ovom slučaju, a piše i ovako $f(\alpha)$, tj.: $a = f(\alpha)$.

Isto tako je: $b = f(\beta) = f(\delta)$, $c = f(\gamma)$.

Zato se crtež 9.2 može zameniti ovim:



(1) Slika 9.3 (2)

Objekt $f(\alpha)$ zove se *vrednost funkcije* f *u tački* α (ili za element α). To je u stvari a.

Objekt $f(\beta)$ zove se *vrednost funkcije* f u tački β (ili vrednost funkcije f za element β). I tako dalje.

Prema tome, možemo napisati:

$$f = \{(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)), (\gamma, f(\gamma)), (\delta, f(\delta))\}.$$

2) Ako ma koji polazni element funkcije f označimo slovom x, onda $f(x)$ *je vrednost funkcije* f *u tački* x (za element x).

Ako slovom y označimo vrednost funkcije f u tački x, onda je $y = f(x)$, gde je x ma koji polazni element, a y odgovarajući dolazni element (y je kraj strelice čiji je početak x).

3) Neka f označava funkciju „. . . ima za glavni grad . . .“

(1) Dovršite: f(Austrija) = ; f(Japan) = ;
f(Engleska) = ; f(Rumunija) = .

(2) Rim, Pariz, Kairo, Adis Abeba su vrednosti funkcije f. Napišite to.

4) Relacija h = „. . . nalazi se u (državi) . . .“ definiše funkciju u svakom gradu, tj. u svakoj tački koja označava grad, u svakom elementu množine gradova G. Napišite tu funkciju za Zagreb, Milano, Lenjingrad, Njujork, Novi Sad, Brisel, Volgorod, Firencu, Split, Odesu, Tuluzu, Harkov, Čikago, Teheran.

Nacrtajte i sagitalnu šemu.

5) Označimo sa f funkciju: $x \to x+5$, $x \in N$.

(1) Izračunajte: $f(3)$; $f(17)$; $f(995)$; $f(100000)$.

(2) Šta je slika nule?

(3) Na koji broj preslikava f broj: 1; 13; 90; 0?

(4) Koji broj preslikava f na: 8; 41; 5; 99?

(5) $f(a) = 73$. Izračunajte a.

(6) Neka je p prirodni broj. Izračunajte: $f(p+3)$; $f(3p)$.

6) Neka g označava funkciju „. . . ima za trostruki . . .“

(1) Šta je slika broja 7 u toj funkciji?

(2) Izračunajte broj čija je slika 18.

(3) $g(u) = 111$. Izračunajte u.

(4) Na koji broj preslikava g nulu?

(5) Dato je: $g(x) = x$. Šta je x?

7) Funkcija s označava: $w \to z \cdot z$, $z \in N$ $(\cdot = \times)$.

(1) Izračunajte: $s(5)$; $s(11)$; $s(1)$; $s(0)$.

(2) Šta se preslikava u: 16; 49; 100?

(3) Izračunajte $s(2u)$. (4) $s(7x) =$

(5) $s(a) = 81$. Izračunajte a.

§ 9.3. VAŽNE DOPUNSKE NAPOMENE

1. Iz definicije funkcije neposredno sledi:

$$(x, y_1) \in f \text{ i } (x, y_2) \in f \Rightarrow y_2 = y_1.$$

Iskažite rečima tu implikaciju (teoremu) i obrazložite je.

2. Obratite pažnju na ono što je rečeno pod 1) i 2) prethodnog §. Na osnovu toga svaki uređeni par funkcije može se zapisati u obliku $(x, f(x))$. $f(x)$ se čita „ef od iks“, a kaže se i: funkcija f preslikava x na $f(x)$.

Ako je reč o aplikaciji množine A na množinu B (§ 9.1, t. **3**), onda, kako je već rečeno (§ 9.1, t. **2**), $f(A)$ označava *množinu slika* elemenata množine A. Množina $f(A)$ je deo množine B, tj. $f(A) \subset B$. Šeme 9.2 i 9.3 pokazuju da može biti i $f(A) = B$. Taj slučaj se često pojavljuje i mi ćemo ga posebno ispitati.

3. Šta je $f(A)$ kad je A singleton?

4. Šta je $f(A)$ kad je A prazna množina?

5. Šta označava: (1) $f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$;

(2) $f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y = f(x)\}$;

(3) $f = \{(x, y) \mid x \in N,\ y = f(x)\}$?

6. Ako su vrednosti funkcije u tačkama množine A ponovo elementi množine A, funkcija se zove i *transformacija množine* A. Prema tome:

f: $A \to A$ može se izraziti na tri načina:

f: $A \to A$ je funkcija množine A u A;

f: $A \to A$ je aplikacija množine A na A;

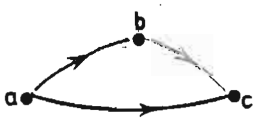
f: $A \to A$ je transformacija množine A.

§ 9.4. KOMPOZICIJA FUNKCIJA

1. Ako je f funkcija množine A u B, a g funkcija množine B u C, onda je $g \circ f$ funkcija množine A u C.

Drugim rečima, ako su f i g funkcije, onda i $g \circ f$ je funkcija.

Grafički se to prikazuje ovako (sl 9.4):



Slika 9.4

Kompozicija funkcija ima sve osobine kompozicije relacija, pa $g \circ f$ označava da treba primeniti f, a zatim na dobijeni rezultat g. Prema tome je:

$$b = f(a), \quad c = g(b), \quad c = g(f(a)), \quad c = (g \circ f)(a).$$

Takve formule smo već imali (§ 8.1).

2. Neka je f funkcija „. . . ima kao dvostruki . . .“, što označavamo i ovako $f: x \to 2x$. Neka je g funkcija $g: y \to y+5$.

1) Izračunajte:

(1) $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(8)$, $f(13)$, $g(4)$, $g(10)$, $g(7)$;

(2) $(g \circ f)(2)$; $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(5)$.

2) Dovršite:

(1) $f \circ f$: $x \to \ldots$ (3) $g \circ g$: $x \to \ldots$

(2) $f \circ f \circ f$: $x \to \ldots$ (4) $f \circ g \circ g \circ f \circ g$: $x \to \ldots$

3. Date su funkcije:

$$f: x \to x \circ x = x^2, \quad g: x \to x+5, \quad h: x \to 2x.$$

Tada je $g \circ f$: $x \to x^2+5$; $f \circ g = (x+5)^2$; $h \circ f = 2x^2$.

1) Napišite: $f \circ h$; $h \circ g$; $g \circ h$; $h \circ g \circ f$; $f \circ g \circ h$; $h \circ f \circ g \circ h \circ f \circ g$.

2) Izračunajte vrednosti tih funkcija u (ili za) 0, 1, 2, 3, 5.

§ 9.5. SPECIJALNE FUNKCIJE

1. 1) Funkcija se zove *aplikacija* množine A na množinu B (§ 9.1), ako iz svake tačke množine A polazi strelica, tj. ako se definiciona množina poklapa sa polaznom množinom.

Jedan lep primer aplikacije jeste:

Zamislimo da jedan čovek šeta po parking-placu i određuje marku svakog parkiranog automobila. Time je definisana funkcija f: „. . . ima za marku . . .“ (ili . . . je marke . . .), jer svaki automobil nosi samo jednu marku („zastava“, „fiat“, „taunus“, . . .).

Ta funkcija definisana je u množini P parkiranih automobila. (P je oblast, domen funkcije f.) Svi drugi članovi uređenih parova, tj. svi krajevi strelica, pripadaju množini M koju čine sve automobilske marke. Dakle, iz *svakog elementa* množine P polazi strelica čiji je kraj u množini M, a to je funkcija množine P u množini M ili *aplikacija* P *na* M, i to se kratko označava: f: $P \to M$.

Nacrtajte sagitalnu šemu.

2) U prodavnici ima raznih artikala; oni čine množinu A. Svakom artiklu je određena cena c u dinarima. Je li to aplikacija? Šta je tu množina B? Šta je $c(a)$, $c(b)$, $c(p)$?

3) Funkcija $x \to x+7$ je aplikacija f u množini N, tj. f: $N \to N$, jer ma koji prirodni broj uočili, uvek postoji prirodni broj veći od njega za 7.

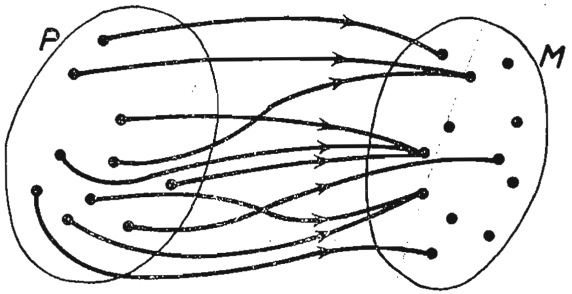
(1) Izračunajte: $f(0)$, $f(73)$, $f(1)$, $f(99)$, $f(1\,000)$.

(2) Je li f^{-1} funkcija? Jeste, ali ona nije definisana za svaki prirodni broj. Zaista $f^{-1} = x \to x-7$ [jer je sad data $f(x)$ pa se traži x, npr. $f(x)=13$, $x=6$, a $f(x)=3$ ne određuje x (zasad)].

Prema tome da li je f^{-1} aplikacija?

(3) Neka je f: $x \to \{7, 8, 9, 10, \ldots\}$. Tada je f^{-1}: $\{7, 8, 9, 10, \ldots\} \to$ $\to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pa je f^{-1} aplikacija.

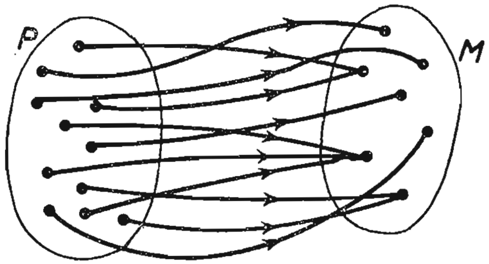
2. 1) Sagitalna šema aplikacije definisane u parking-placu izgleda ovako:



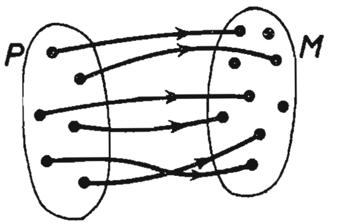
Slika 9.5

(1) Iskažite rečima (napišite) kakva je situacija u parking-placu.

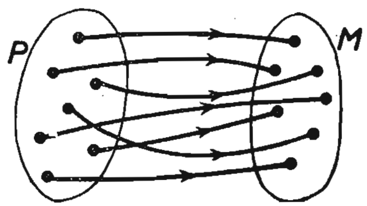
Ali, moguće su i ove situacije:



Slika 9.6



Slika 9.7



Slika 9.8

(2) Izrazite rečima (napišite) svaku od tih mogućnosti.

2) Svaki od crteža 9.6, 9.7 (ili 9.5), 9.8 je sagitalna šema jedne specijalne aplikacije:

Aplikacija prikazana šemom 9.6 zove se *aplikacija na* (P na M).

Aplikacija prikazana šemom 9.7 zove se *aplikacija u* (P u M).

Aplikacija prikazana šemom 9.8 zove se *obostrana aplikacija ili biżekcija.*

Prema tome:

Definicija 1. — *Aplikacija* f: $A \to B$ *zove se aplikacija* A *na* B *tada, i samo tada, kad u svaku tačku dolazne množine* B *dolazi najmanje jedna strelica.*

Definicija 2. — *Aplikacija* f: $A \to B$ *zove se aplikacija* A *u* B *tada, i samo tada, kad u svaku tačku množine* B *dolazi najviše jedna strelica.*

Definicija 3. — *Aplikacija* f: $A \to B$ *zove se obostrana ili biżekcija tada, i samo tada, ako u svaku tačku množine* B *dolazi jedna, i samo jedna strelica.*

Najčešće i najviše se primenjuje bižekcija. Zato ćemo je definisati i ovako:

Definicija 4. — *Relacija* f *je bižekcija* f: $A \to B$ *ako:*

(1) *sve strelice relacije polaze iz* A *i dolaze u* B;

(2) *iz svake tačke množine* A *polazi jedna, i samo jedna, strelica relacije* f;

(3) *u svaku tačku množine* B *dolazi jedna, i samo jedna, strelica relacije* f.

U slučaju bižekcije $A \to B$ kažemo i da između elemenata množina A i B postoji *uzajamna jednoznačna* ili *biunivoka korespondencija* = svakom elementu množine A odgovara element množine B i obrnuto (svakom elementu množine B odgovara element množine A) [sl. 9.8(1)].

$$A=\{a,\ b,\ c\} \quad \text{ili} \quad A=\{a,\ b,\ c\}$$
$$B=\{\bigcirc,\square,\triangle\} \qquad\quad B=\{\square,\triangle,\bigcirc\}$$

Slika 9.8(1)

3. 1) Četvoro igraju sa 52 karte. Ima li tu aplikacije, kad, u kom momentu i koje je vrste? Koja je množina polazna a koja je dolazna?

2) Šta je relacija „... ima kao kvadrat ..." u množini N (prirodnih brojeva)?

3) Neka je N_k množina kvadrata prirodnih brojeva, tj. $N_k=\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$. Kako se zove $N \to N_k$?

4) Neka je K množina koju čine đaci vašeg razreda, a P množina njihovih prezimena. Posmatrajte funkciju f koja preslikava svakog đaka na njegovo prezime.

(1) Kad je f: $K \to P$ bižekcija? Može li da ta aplikacija bude: K na P; K u P?

(2) Neka je t jedan od đaka. Šta je $f(t)$?

(3) Šta je f^{-1}: $P \to K$?

(Vidi i § 9.7, t. **5.**)

5) Neka je K množina đaka vašeg razreda, a P množina prezimena đaka vaše škole. Koje je vrste aplikacija p: $K \to P$; $x \to p(x)$?

Može li ona da bude bižekcija?

6) Posmatrajmo relaciju f: „... ima za ženu ..." od množine M oženjenih ljudi u Jugoslaviji ka množini F udatih žena u Jugoslaviji. Da li je f aplikacija i zašto? Ako jeste, koji je njen posebni naziv?

7) Šta je: f: $N \to 2N$: $x \to 2x$?

8) Neka je $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{7\}$. Kako se zove:

$$h\colon\ A \to A \times B,\ \text{tj.}\ A \to A \times 7\colon\ x \to (x, 7)?$$

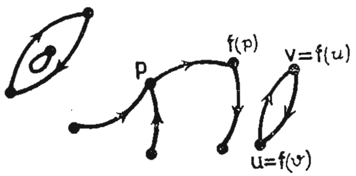
4. *Neka je* f *bižekcija* $A \to B$, *a* g *bižekcija* $B \to C$. *Šta je* $g \circ f$?

§ 9.6. NEKE TRANSFORMACIJE RAVNI Π

1. Rekli smo (§ 9.3) da se aplikacija $A \to A$ zove i transformacija množine A. Otuda:

Definicija. — *Transformacija ravni Π je aplikacija $\Pi \to \Pi$.*

Znači, ako je f ma koja transformacija ravni Π, iz svake tačke ravni Π izlazi jedna, i samo jedna, strelica. A kako je ravan beskonačna množina tačaka, nije moguće nacrtati sve tačke pa, dakle, ni sve strelice. Sagitalna šema 9.9 prikazuje samo nekoliko strelica transformacije f ravni Π



Slika 9.9

2. 1) Neka $c \in \Pi$. Ako iz svake tačke ravni Π izlazi strelica koja dolazi (ulazi) u tačku c, imamo *konstantnu* transformaciju ravni Π (sl. 9.10).

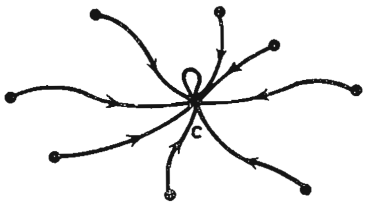
Simbolima se to izražava: $c_\Pi : \Pi \to \Pi : x \to c$.

Tačka c je, dakle, slika svake tačke ravni:

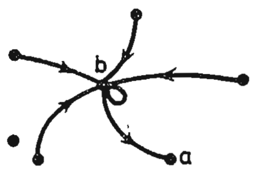
$$\forall x \in \Pi : c_\Pi(x) = c,$$

pa je ta transformacija jedna *aplikacija na*.

2) Neka su a i b dve tačke ravni, tj. $a, b \in \Pi$. Neka su a_Π i b_Π dve konstantne transformacije ravni Π. Šta je $a_\Pi \circ b_\Pi$?



Slika 9.10



Slika 9.11

Napisana kompozicija znači da treba izvršiti prvo transformaciju b_Π (sl. 9.11), pa na nju primeniti a_Π. Međutim, kako svaka strelica transformacije b_Π ulazi u b, a $a_\Pi(b) = a$, to je $a_\Pi \circ b_\Pi = a$.

To jest, $\forall x : (a_\Pi \circ b_\Pi)(x) = a_\Pi(b_\Pi(x)) = a_\Pi(b) = a$.

Kompozicija dveju konstantnih transformacija je, dakle, druga transformacija.

3) Neka $a \in \Pi$ i neka je D neprazni deo ravni Π. Šta je slika dela D u transformaciji a_Π?

3. 1) Ako se svaka tačka ravni Π transformiše u samu sebe, imamo *identičnu transformaciju* (sl. 9.12).

Slika 9.12

Ona se najčešće označava sa 1_Π, dakle:

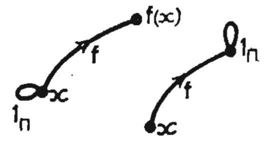
$$\forall x \in \Pi : 1_\Pi(x) = x. \text{ Ili: } 1_\Pi : \Pi \to \Pi : x \to x.$$

Identična transformacija je jedna bižekcija.

2) Neka je f ma kakva transformacija ravni Π. Šta je $f \circ 1_\Pi$, a šta je $1_\Pi \circ f$?

Sagitalne šeme (sl. 9.13) pokazuju da je $f \circ 1_\Pi = 1_\Pi \circ f = f$.

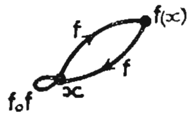
3) Ako je $f \circ f = 1_\Pi$, onda je $f = f^{-1}$. Zaista: f je ma koja transformacija ravni. $f \circ f$ može biti identična transformacija samo ako je f takva da se njena strelica vraća u istu tačku (sl. 9.14), tj. ako je $f = f^{-1}$.



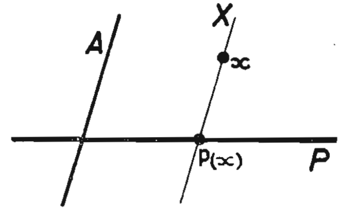
Slika 9.13

4. 1) Ako su P i A dve prave koje se seku, onda, na osnovu aksioma Euklida, svaka tačka x ravni Π pripada jednoj, i samo jednoj, pravi $X \| A$.

Kako A seče P, to i X seče P. Tačka u kojoj X seče P zove se *paralelna projekcija tačke x na P za pravac (A)* i označava se $p(x)$.



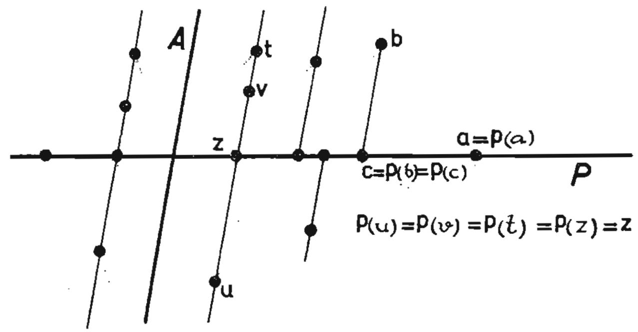
Slika 9.14



Slika 9.15

Dakle, $P \cap X = \{p(x)\}$.

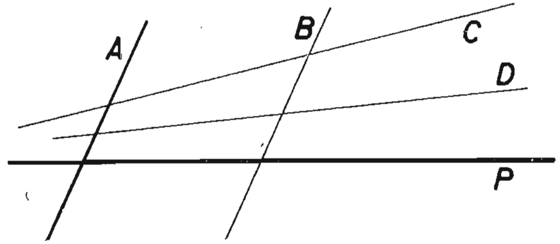
Time je definisana jedna transformacija ravni Π. Ona se zove paralelna projekcija:



Slika 9.16

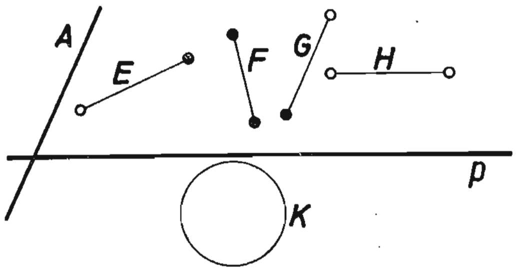
Paralelnu projekciju ravni Π na P za pravac (A) označavaćemo sa p.

2) Zašto je $p \circ p = p$?
3) Odredite slike pravih A, B, C, D, E u paralelnoj projekciji p.



Slika 9.17

4) Odredite slike duži E, F, G, H i kružnice K u transformaciji p.



Slika 9.18

5. Uočite duž $[ab]$ prave P i odredite najveći deo ravni koji se, transformacijom p, transformiše u $[ab]$.

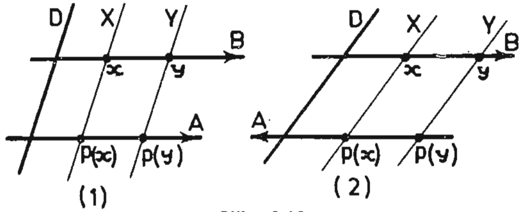
6. Posmatrajmo dve ma koje orijentisane prave A i B koje seku pravu D neka je p paralelna projekcija na A za pravac (D).

Moramo razlikovati dva slučaja: $A \| B$ i $A \nparallel B$.

U slučaju $A \| B$ „nacrtajmo" dve proizvoljne prave $X, Y \| D$. Neka je $X \cap B = \{x\}$, $Y \cap B = \{y\}$, $X \cap A = \{p(x)\}$, $Y \cap A = \{p(y)\}$. Moguća su dva podslučaja:

(1) $x < y \Rightarrow p(x) < p(y)$.

(2) $x < y \Rightarrow p(y) < p(x)$.



Slika 9.19

I zato kažemo: U podslučaju (1) projekcija je *rastuća*, tj. *poredak (red) ostaje nepromenjen*. U podslučaju (2) projekcija je *opadajuća*, tj. *poredak (red) se izvrne*.

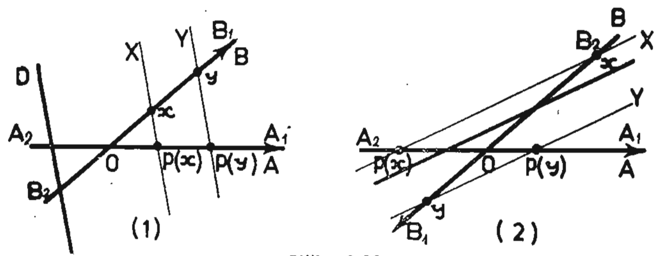
Za prave A i B kažemo da su: u (1) *istog smera* (isto orijentisane), u (2) *suprotnog smera* (suprotno orijentisane).

U slučaju $A \nparallel B$ neka je $A \cap B = \{o\}$. Tačka o određuje zatvorene polu-prave A_1, A_2 prave A i B_1, B_2 prave B. Orijentišimo A i B kao A_1 i B_1 i nacrtajmo proizvoljne prave $X, Y \| D$.

I ovde moramo razlikovati dva podslučaja.

(1) $x < y \Rightarrow p(x) < p(y)$; projekcija je *rastuća*, tj. red ostaje nepromenjen.

(2) $x < y \Rightarrow p(y) < p(x)$; projekcija je *opadajuća*, red je *izvrnut*.



Sliika 9.20

Na osnovu tih intuitivnih rezultata uvodimo:

Aksiom Π 10. — Ako orijentisane prave A i B seku pravu D, paralelna projekcija prave B na A za pravac (D) je rastuća, tj. zadržava poredak (red):

$$\forall\, x, y \in B,\ x < y \Rightarrow p(x) < p(y),$$

ili opadajuća, tj. menja poredak (red):

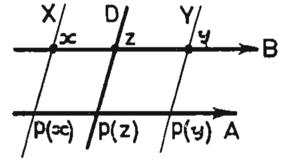
$$\forall\, x, y \in B,\ x < y \Rightarrow p(y) < p(x).$$

7. 1) Sada možemo da rigorozno definišemo pojam *poluravan* (koji smo ranije intuitivno uveli).

Neka su prave A i B paralelne i orijentisane u istom smeru i neka je D njihova sečica. Ako zadržimo prethodne simbole, imamo (sl. 9.21):

$$x < z < y \Rightarrow p(x) < p(z) < p(y),$$

što kraće zapisujemo $x < D < y$,



Slika 9.21

pa možemo uvesti sledeću *definiciju*:

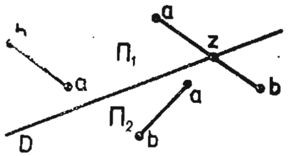
Prava D deli ravan Π na dva dela:

$$\Pi_1 = \{x \in \Pi \mid x < D\}, \qquad \Pi_2 = \{y \in \Pi_2 \mid y > D\}$$

koji se zovu poluravni.

Simbole možemo čitati: Π_1 je množina tačaka ravni Π „levo" od D, a Π_2 je množina tačaka ravni Π „desno" od D, Podsetimo da se D zove *ivica* poluravni Π_1 i Π_2; $D \cup \Pi_1$ i $D \cup \Pi_2$ su *zatvorene poluravni*, a $\{\Pi_1, D, \Pi_2\}$ je jedna *particija* ravni Π.

2) Duž $[ab]$ može da se nalazi, u odnosu na ivicu poluravni, u tri položaja (sl. 9.22):



Slika 9.22

$\left.\begin{array}{l}(1)\ a, b \in \Pi_1 \Rightarrow [ab] \subset \Pi_1;\\ (2)\ a, b \in \Pi_2 \Rightarrow [ab] \subset \Pi_2;\end{array}\right]$ Tačke a i b nalaze se sa iste strane prave D.

(3) $a \in \Pi_1$, $b \in \Pi_2 \Rightarrow]ab[\cap D = \{z\}$. Tačke a i b nalaze se s raznih strana prave D; ili D razdvaja a i b.

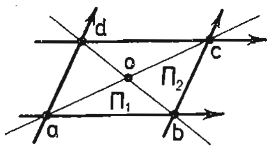
To pokazuje da su poluravni konveksne množine. Otuda dva aksioma:

Aksiom Π 11. — Svaka (otvorena ili zatvorena) poluravan je konveksna množina.

Aksiom Π 12. — Otvoreni interval $]ab[$ seče pravu D tada i samo tada ako se a i b nalaze s raznih strana prave D.

8. Neka tačke a, b, c, d određuju paralelogram (sl. 9.23). Orijentišimo prave ab i dc, npr. $a<b$, $c>d$, i prave ad i bc, npr. $a<d$, $b<c$. Tada prava bd određuje dve otvorene poluravni Π_1 i Π_2. Na osnovu prethodne tačke **7.** I je:

$$a<b,\ a>d \Rightarrow a<bd \Rightarrow a \in \Pi_1;$$
$$c>b,\ c>d \Rightarrow dc>bd \Rightarrow c \in \Pi_2.$$



Slika 9.23

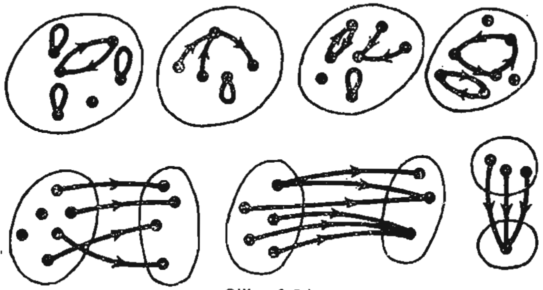
Znači, prava bd razdvaja a i c, pa (na osnovu aksioma Π 10) dijagonala $]ac[$ seče bd, tj. $]ac[\cap]bd[= \{o\}$. Dakle:

Teorema. — *Dijagonale paralelograma se seku.*

§ 9.7. VEŽBANJA I ZADACI

1. Neka je S množina naših socijalističkih republika, G množina naših gradova. Da li je f „. . . ima za glavni grad . . ." funkcija i koje je njeno posebno ime. Nacrtajte sagitalnu šemu. Napišite jednakosti: f (SR Makedonija) = ; f (SR Crna Gora) = ; itd.

2. Koja od sledećih sagitalnih šema definiše funkciju i zašto?


Slika 9.24

3. Nacrtajte sagitalnu šemu i odredite definicionu množinu i množinu slika funkcije:.

(1) $f = \{(0, 1), (1, 1), (2, 0)\}$; (2) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$;
(3) $f = \{(x, y) \mid x \in N,\ y = x^2 + 1\}$; (4) $f = \{(x, y) \mid x \in N,\ y = x + 1)\}$;
(5) $f = \{(x, y) \mid x \in N \setminus \{0\},\ y = x^2 - 1\}$.

4. Neka je H množina ljudskih bića. Da li je funkcija i koja:

(1) relacija „. . . ima za majku . . .";
(2) relacija „. . . ima za sestru . . ."?

5. Neka je I množina imena učenika vašeg odeljenja, a P imena njihovih prezimena. Da li je f: $I \times P$ funkcija? A f^{-1}? Obrazložite i jedno i drugo.

6. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Sastavite B tako da bude g: $A \to B$, ali da i g^{-1} bude aplikacija,

7. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nacrtajte sagitalnu šemu transformacije $A \to A$ tako da i f^{-1} bude transformacija. Napišite graf $f = \{. . .\}$ i graf $f^{-1} = \{. . .\}$.

8. 1) Neka je f: $N \to N$: $x \to x^2$.
Nacrtajte sagitalnu šemu funkcije f za $x \leqslant 10$ i napiite graf $f = \{. . .\}$.
2) Neka je g: $N \to N$: $y \to y \cdot y \cdot y$ (tj. y^3). Dalje kao pod 1).
3) Neka je f: $N \to N$: $x \to x^2$; g: $N \to N$: $y \to y^3$;* h: $N \to N$: $z \to z^2 + 2z$.
Rešite jednakosti: (1) $f(x) = 400$; (2) $g(y) = 512$; (3) $f(x) = 900$; (4) $g(y) = 729$; (5) $f(x) = 169$; (6) $g(y) = 27\,000$; (7) $f(x) = 10\,000$; (8) $g(y) = 343\,000$; (9) $g(y) = 125\,000$; (10) $g(y) = 1\,000\,000$; (11) $h(z) = 0$; (12) $h(z) = 35$; (13) $h(z) = 8$; (14) $h(z) = 63$; (15) $h(z) = 99$.

9. 1) Neka je f: $N \to N$: $x \to 7x$. Izračunajte: $f(2)$; $f\{3\}$; $f\{3, 4\}$; fN; $f2N$.
Odgovori: $f(2) = 7 \cdot 2 = 14$; $f\{3\} = \{7 \cdot 3\} = \{21\}$; $f\{3, 4\} = \{21, 28\}$; $fN = 7N = \{7, 14, 21, . . .\}$; $f2N = \{14, 28, 42, . . .\}$.
2) Šta možete reći o f^{-1}?

10. Neka je g: $N \to N$: $x \to 6x + 7$. Izračunajte: $g(0)$; $g\{3\}$; $g\{2, 3, 5\}$; gN.

11. Neka je h: $N \to N$: $x \to x + 1$. Šta je $h(2N)$?

12. 1) U svima sledećim relacijama polazna množina je $\{0, 1, 2, 3\}$. Nacrtajte njihove sagitalne šeme i odredite koja je (od tih relacija) funkcija:

$f = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0)\}$; $g = \{(0, 3), (1, 0), (2, 1), (3, 2)\}$;
$h = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1), (3, 0)\}$; $s = \{(1, 0), (0, 1), (1, 2), (0, 3)\}$.

2) $f \cup s$; $g \cap h$; $f \cap h$.

13. Da li su uvek $f \cup g$ i $f \cap g$ funkcije, ako su f i g funkcije? Sastavite primere.

14. 1) Relacija t „. . . ima za trostruki . . ." je aplikacija t: $N \to N$.
2) Je li ona bižekcija? A t: $N \to 3N$: $x \to 3x$?
3) Definišite t^{-1}: $3N \to N$.
4) Uopšte, šta je h: $N \to kN$ ($k = 1, 2, 3, . . .$) u $N \to N$?

15. 1) Imenujte ove specijalne aplikacije:

f: $N \to 2N$: $x \to 2x$; g: $2N \to N6$: $x \to 3x$.

2) Šta je $g \circ f$: $N \to 6N$: $x \to$ (Dovršite.)

16. Date su bižekcije:

$\left.\begin{array}{l} g\colon N \to 2N\colon x \to 2x \\ h\colon N \to 4N\colon x \to 4x \end{array}\right\}$ Izračunajte $g \circ h \circ h \circ g$.

17. Neka je $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $f = \{(a, c), (c, b), (b, d), (d, a), (e, c)\}$. Da li je f funkcija i ako jeste koje je njeno specijalno ime?

18. Neka je $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i f: $x \to f(x)=x-1$, $x \neq 1$, $f(1)=5$.

Nacrtajte sagitalnu šemu f. Šta možete reći o njoj, a šta o f^{-1}?

19. 1) Neka $n \in N$. Označimo sa $u(n)$ cifru jedinica broja n napisanog u dekadnom sistemu brojanja. Kako se zove funkcija

$$u: N \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

2) $u^{-1} \circ u\,\{7\}=7, 17, 27, 37, \ldots, 547, \ldots=10N+7$.

20. Neka je f: $N \to N$: $x \to x+5$; g: $N \to N$: $x \to 5x$.

Izračunajte: $f(g(0))$; $f(g(2))$; $f(g(100))$; $(f \circ g)(5)$; $(f \circ g)(3)$; $(g \circ f)(7)$; $f(g(a))$; $g(f(a))$.

21. Data su dva zatvorena intervala (dve duži) $[ab]$ i $[cd]$. Definišite bižekciju između njihovih tačaka.

Rezime

1. 1) Relacija f je funkcija množine A ka množini B, ako iz svakog elementa množine A izlazi najviše jedna strelica koja dolazi u B.

2) Inverzna (recipročna) relacija f^{-1} nije uvek funkcija.

3) $f=\{(x, y) \mid x \in A,\ y=f(x)\}$ je graf funkcije definisane u množini A

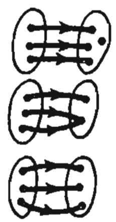
2. 1) Funkcija f zove se aplikacija množine A na množinu B, ako iz svakog elementa množine A izlazi strelica koja dolazi u B.

2) U slučaju aplikacije:

$f(A)=$ slika množine A „izazvana" funkcijom f.

$f(A)=\{f(a) \mid a \in A\}$; $\quad f(A) \subset B$ ili $f(A) \subseteq B$.

3. Funkcija { aplikacija { A u B / A na B / bižekcija



Slika 9.25

4. Osobine:

1) $f^{-1} \circ f$ je identična relacija = ekvivalencija u A.

2) Kompozicija dveju funkcija: $g \circ f(x)=g(f(x))$.

3) Kompozicija dveju bižekcija je bižekcija.

5. 1) Transformacija množine A je aplikacija množine A u A.

2) Transformacija ravni Π:

(1) konstantna c_Π: $\forall x \in \Pi$: $c_\Pi(x)=c$;

(2) identična 1_Π: $\forall x \in \Pi$: $1_\Pi(x)=x$;

(3) paralelna projekcija p: $\Pi \to P$: $x \to p(x)$.

Dodatak 1

RELACIJE I FUNKCIJE

1. 1) Par $\{a, b\}=\{b, a\}$ je množina (skup).

2) Uređeni par $(a, b) \neq (b, a)$ nije množina; a i b zovu se članovi uređenog para.

3) $(a, b)=(c, d)$ samo ako je $a=c$, $b=d$.

2. 1) Neka su date množine: $E=\{a, b, c, d, e\}$, $F=\{p, q, r\}$.

Od njihovih elemenata se na određeni način (§ 3.2, t. **3**) mogu sastaviti uređeni parovi:

$$\begin{matrix} (a, p), & (a, q), & (a, r) \\ (b, p), & (b, q), & (b, r) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (e, p), & (e, q), & (e, r). \end{matrix}$$

Množina svih tih (uređenih) parova, tj.:

$$\{(a, p), (a, q), (a, r), (b, p), (b, q), (b, r), (c, p), (c, q), (c, r), (d, p), (d, q), (d, r), (e, p), (e, q), (e, r)\},$$

zove se proizvod (Dekartov) množina E i F i kratko se označava $E \times F$ („e krst ef").

Elementi proizvoda dveju množina su, dakle, uređeni parovi elemenata tih množina.

2) Svaki deo, svaka podmnožina proizvoda $E \times F$ zove se relacija od E ka F, na primer:

$$\boldsymbol{R}_1=\{(a, q), (b, p), (b, r), (c, q), (d, q), (d, r), (e, r)\}$$

je jedna relacija od E ka F;

$$\boldsymbol{R}_2=\{(a, p), (a, r), (c, r), (d, p), (d, r), (e, p)\}$$

je druga relacija od E ka F;

$$\boldsymbol{R}_3=\{(b, q), (c, p), (c, r), (d, q), (e, q)\}$$

je treća relacija od E ka F; i tako dalje.

Ali, da li je baš „svaki deo" proizvoda $E \times F$ jedna relacija od E ka F? „Teorijski" da. U stvari, da bi neki elementi, neki uređeni parovi proizvoda $E \times F$, činili određenu relaciju, nužno je da se o svaka dva člana tih (uređenih) parova može iskazati jedna ista misao, jedno isto tvrđenje, nužno je, gramatički rečeno, da su svi članovi tih parova vezani istim predikatom (prirokom), na primer:

a je pročitao p	b je telefonirao q
b je pročitao q	c je telefonirao p
b je pročitao r	. . . .
. . . .	

Znači, (a, p) je element relacije $\boldsymbol{R}_1$, ako je a pročitao p, što se kratko izražava

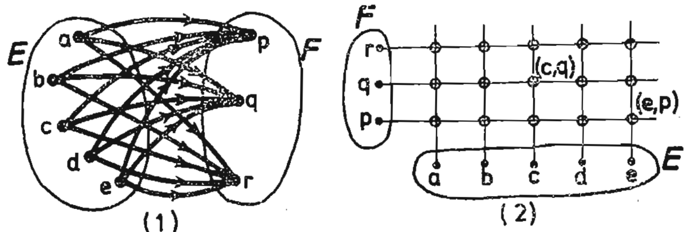
$$(a, p) \in \boldsymbol{R}_1, \text{ ako } a\boldsymbol{R}_1 p.$$

3) Svaka relacija od E ka F u kojoj se određeni element množine E javlja najviše jedanput (kao prvi član uređenog para) zove se funkcija, na primer:

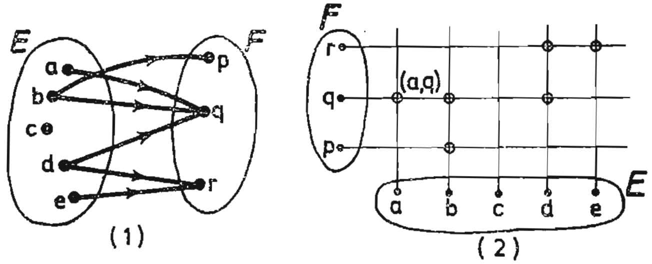
$$\{(a, q), (b, p), (c, r), (e, p)\}$$

je jedna funkcija od E ka F.

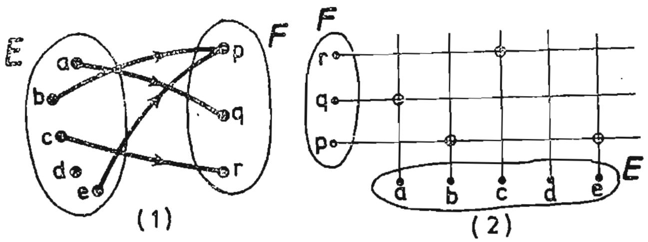
4) Sve što je već rečeno pokazuju i crteži:



Slika 9.26



Slika 9.27



Slika 9.28

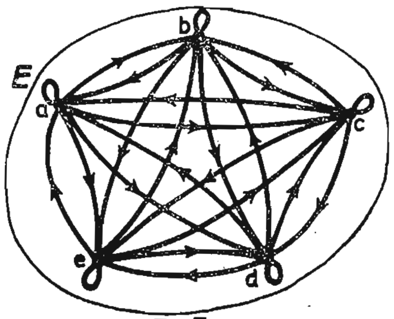
Crtež 9.26(1) predstavlja sagitalnu šemu proizvoda $E \times F$, a 9.26(2) je mreža tog proizvoda.

Šta predstavljaju crteži 9.27, a šta crteži 9.28?

3. 1) Ako je $E=F$, proizvod $E \times E$ glasi:

$$E^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d), (d, e), (e, a), (e, b), (e, c), (e, d), (e, e)\}.$$

Zato njegova sagitalna šema izgleda ovako (sl. 9.29):



Slika 9.29

Prikažite i mrežu tog proizvoda.

2) Napišite graf jedne relacije u E i nacrtajte njenu sagitalnu šemu i njenu mrežu.

3) Napišite graf jedne funkcije u E i nacrtajte njenu sagitalnu šemu i njenu mrežu.

4. 1) Posmatrajmo opštiji slučaj:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_8\}.$$

Ekstenzivni Dekartov proizvod tih množina glasi:

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \ldots, (a_1, b_8) \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \ldots, (a_2, b_8) \\ & (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_3, b_8) \\ & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ & (a_{10}, b_1), (a_{10}, b_2), (a_{10}, b_3), \ldots, (a_{10}, b_8)\} \end{aligned}$$

Napisan „u kondenzovanom" obliku (II način § 1.2) taj proizvod izgleda ovako:

$$A \times B = \{(a_i, b_k) \mid a_i \in A,\ b_k \in B\},\quad i = 1, 2, \ldots, 10,\quad k = 1, 2, 3, \ldots, 8.$$

Nacrtajte sagitalnu šemu proizvoda $A \times B$.

2) Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$. Napišite $A \times B$ u ekstenzivnom i kondenzovanom obliku. Zamislite sagitalnu šemu i mrežu tog proizvoda.

3) Neka su X i Y ma koje (konačne ili beskonačne) množine. Šta predstavlja:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}?$$

(1) Neka su X i Y beskonačne množine. Zamislite prvo sagitalnu šemu, a zatim mrežu proizvoda $X \times Y$.

(2) Neka su X i Y dve međusobno perpendikularne poluprave sa zajedničkim početkom o. Zamislite „mrežu" proizvoda $X \times Y$. Šta ona predstavlja?

4) Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_9\}$. Napišite ekstenzivnu definiciju množine $A \times A = A^2$.

5) Neka je X neograničena množina. Šta je mreža proizvoda X^2?

***5.** 1) Napišite graf jedne relacije dobijene iz:

$$\{(a_i, b_k) \mid a_i \in A, \quad b_k \in B\}, \quad i=1, 2, \ldots, 10, \quad k=1, 2, \ldots, 8$$

i nacrtajte njenu sagitalnu šemu.

2) Napišite ekstenzivno jednu funkciju od A ka B, $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$, .

3) Neka su X i Y dve međusobno perpendikularne poluprave sa zajedničkim početkom o. Nacrtajte ih i prikažite „mrežu“: (1) jedne relacije od X ka Y; (2) jedne funkcije od X ka Y.

6. Navedite kad je relacija:

(1) refleksivna, antirefleksivna, nerefleksivna;
(2) simetrična, antisimetrična, nesimetrična;
(3) tranzitivna.

7. 1) Tri najvažnije relacije jesu:

(1) relacije poretka (reda); (2) relacije ekvivalencije; (3) funkcije.

2) Koje osobine ima relacija poretka (reda)?

3) Kad za jednu relaciju kažemo da je relacija ekvivalencije?

8. 1) Koja je razlika između aplikacije i funkcije?

2) Imenujte i definišite tri vrste aplikacija.

3) Šta je transformacija?

Dodatak 2

VEŽBANJA I ZADACI IZ PRVIH DEVET GLAVA

1. Napišite rezultujuću množinu:

(1) $\{a, b, c\} \cup \{p, q\}$; (4) $\{a, b, c\} \cap \{d, a, e, b\}$;
(2) $\{4, 16\} \cup \{1, 9, 25\}$; (5) $\{0\} \cap \{1, 2, 0, 3\}$;
(3) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \cup \{\ \}$; (6) $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \cap \varnothing$.

2. U sledećim primerima $x \in N$. Napišite rezultat:

(1) $\{x \mid x<1\} \cup \{x \mid x>3\}$; (4) $\{x \mid x>4\} \cup \{x \mid x<6\}$;
(2) $\{x \mid x<1\} \cap \{x \mid x>3\}$; (5) $\{x \mid x>4\} \cap \{x \mid x<6\}$;
(3) $\{x \mid x<1\} \setminus \{x \mid x>3\}$; (6) $\{x \mid x>4\} \setminus \{x \mid x<6\}$;
(7) $\{x \mid x$ je mulitplum broja $2\} \cup \{x \mid x \subset 5N\}$;
(8) $\{x \mid x \in 2N\} \cap \{x \mid x \in 5N\}$.

3. Kad je: (1) $A \cup B = A$; (2) $A \cap B = B$?

4. Recite (napišite) sve što možete o množinama A i B kad je:

(1) $A=\{x \mid x \in 5N\}$, $B=\{\ \}$; (3) $A=\{81, 111\}$, $B=3N$;
(2) $A=\{0, 5, 7, 9\}$, $B=\{70, 95\}$;
(4) $A=\{x \mid x$ je trougao$\}$, $B=\{x \mid x$ je pravougaonik$\}$.

5. 1) Nacrtajte osnovnu množinu (bazu) množina:

(1) $A=\{$ljubičica, lala, božur$\}$
$B=\{$šljiva, jabuka, dunja, breskva$)$;
(2) $A=\{$gimnazija, viša komercijalna škola, filozofski fakultet$\}$
$B=\{$osnovna škola, milicionerska škola$\}$;
(3) $A=\{$pisaljke našeg odeljenja$\}$
$B=\{$pisaljka, hartija, penkalo jednog učenika našeg odeljenja$\}$.

6. Neka je osnovna množina $U=\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ i neka su $A=\{0, 1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. Napišite ekstenzivno množine: $\bar{A}$; $\bar{B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A \cap B}$.

7. Neka je osnovna množina N.

$A=\{x \mid x$ je dvocifreni broj$\}$, $\bar{A}= \ldots$
$B=\{x \mid x$ je paran broj$\}$, $\bar{B}= \ldots$
$C=\{x \mid x \in 4N\}$, $\bar{C}= \ldots$

8. 1) $A \cap \bar{B} = \varnothing$. Šta možete reći o A i B?

2) Neka su A i B podmnožine množine U. Obrazložite da ako je:
(1) $B \subseteq A$, onda je $\bar{B} \subseteq \bar{A}$; (2) $\bar{B} \subseteq \bar{A}$, onda je $B \subseteq A$.

3) Neka je $U=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $A=\{1, 3, 4, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 8\}$.
Proverite: (1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; (2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
Pokažite, Venovim dijagramima, da to važi uopšte.

4) Neka je G množina (svih) govedâ, L množina svega onog što može da leti, P množina ptica.
(1) Dovršite govornim jezikom $P \cup G \cap L = \ldots$
(2) Šta bi značilo tvrđenje $G \cap L \neq \varnothing$?
Prikažite te množine Venovim dijagramima.

9. Napišite množine: div 4; div 150; div 0.

10. 1) Neka je $A \neq B$. Pokažite Venovim dijagramom sve moguće međusobne relacije množina A i B. 2) Isto kad je $A \neq B \neq C$.

11. Da li je $A \times B = B \times A$? Zašto?

12. Ovo, što sledi, je graf jedne relacije:

$$\boldsymbol{R}=\{(3, 1), (12, 4), (15, \quad), (3a, \quad), (\quad, 2b), (21a, \quad)\}.$$

1) Iskažite rečima tu relaciju.
2) Popunite prazna mesta kad $a, b \in N$.

13. 1) Koje osobine ima relacija „ . . . je ded . . . “ ?
2) Koje osobine ima relacija „ . . . je zaova . . .“?
3) Je li $=$ relacija ekvivalencije?
4) Je li $\subset$ relacija ekvivalencije?
5) Koje osobine ima relacija $\neq$?

14. U množini $M=\{a, b, c\}$ data je relacija $\{(a, a), (a, b,) (b, c), (b, b)\}$.

1) Je li ona refleksivna? Dopunite je tako da bude refleksivna.

2) Da li je ta relacija antirefleksivna? Ispravite je tako da bude antirefleksivna.

15. 1) U množini $M=\{a, b, c, d\}$ data je relacija

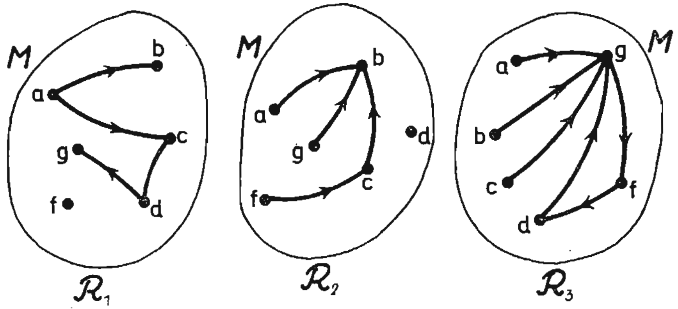
$$\{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (b, b), (d, c)\}.$$

Je li ona simetrična. Popravite je tako da bude simetrična.

2) Sastavite relaciju u toj istoj množini koja nije ni refleksivna, ni antirefleksivna, ni simetrična, ni antisimetrična.

16. Napišite klase množine N: (1) modulo (4); (2) modulo (5); (3) modulo 6; (4) modulo 7; (5) modulo 9.

17. U množini $M=\{a, b, c, d, f, g\}$ definisane su relacije:



Slika 9.30

Koja jeste (nije) funkcija i zašto?

18. 1) U množini $E=\{2, 3, 5, 25, 16, 27\}$ data je relacija $a\boldsymbol{R}b$ koja znači: „a nije jednako b i a je multiplum broja b“.

Nacrtajte sagitalnu šemu. Je li ta relacija funkcija.

2) Isto kad je množina $F=\{2, 3, 5, 25, 16, 27, 90\}$.

19. 1) Data je relacija $U=\{(a, h), (d, k), (m, h)\}$ od $A=\{a, m, e, d\}$ ka $B=\{g, k, h, p, q\}$. Nacrtajte njenu sagitalnu šemu i njenu mrežu. Je li ona funkcija?

2) Isto kad je relacija $V=\{(a, h), (d, k), (m, h), (d, h)\}$.

3) Šta je (pod 1): $u(a)$; $u(m)$; $u(c)$?

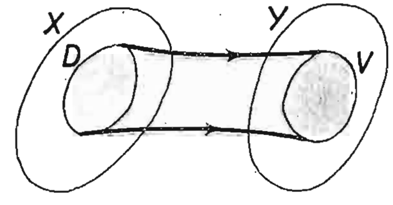
4) Sastavite funkciju definisanu u množini opština naše zemlje, a čije se vrednosti nalaze u N.

5) Sastavite funkciju definisanu u množini (naših) opština, a čije se vrednosti nalaze u množini (naših) socijalističkih republika.

20. 1) Pročitajte: (1) $f\colon A \to B$; (2) $g\colon N \to N$.

2) Šta znači: (1) $f\colon a \to b$; (2) $g\colon x \to 2x+3$?

21. 1) Neka je $f\colon X \to Y$. Svi elementi $x \in X$ koji imaju svoje slike, svoje vrednosti u Y, čine *definicionu množinu* D funkcije f, a sve njihove vrednosti $y \in Y$ čine *množinu vrednosti* V funkcije f. Grafički prikazano to izgleda ovako (sl. 9.31):



Slika 9.31

2) Napišite D i V u slučaju **19.** 1). Prikažite to i crtežom.

3) Neka je A množina koju čini nastavno osoblje vaše škole, a $B=\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$. Je li relacija „. . . navršio je godina . . .“ funkcija od A ka B? Prikažite je sagitalnom šemom.

4) Data je množina $E=\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i u njoj relacija „. . . ima za polovinu . . .“ Je li ta relacija funkcija? Proverite pomoću sagitalne šeme. Nacrtajte u toj šemi dijagrame množina D i V.

5) Sastavite sami sličan primer.

22. 1) Šta je, prema prethodnom i § 9.5, aplikacija? Izrazite simbolima definiciju aplikacije.

2) Neka je u N data funkcija $f\colon n \to 14-2n$. Odredite definicionu množinu D. — Modificirajte polaznu množinu tako da $f\colon n \to 14-2n$ bude aplikacija.

3) Neka je E množina učenika I razreda jedne osnovne škole koji prvog školskog dana (septembra meseca) čekaju pred školskim vratima. Neka je F množina odraslih koji su doveli te učenike. Pod kojim je uslovom relacija „. . . je dete (sin, kćerka) . . .“ funkcija od E ka F? Ako je taj uslov ispunjen, može li ta funkcija biti aplikacija i kad?

4) Neka je M množina đaka jednog odeljenja koji polaze na ekskurziju, S množina sedišta u autobusu. Nijedan đak ne može da zauzme više od jednog sedišta. Da li je relacija „. . . zauzima sedište . . .“ od M ka S funkcija? U kom je slučaju ona aplikacija?

5) Prethodni autobus, čija je množina sedišta S, krenuo je sa množinom učenika M. Nijedan đak ne stoji (tj. svi sede). Dakle funkcija od M ka S je aplikacija. U kom slučaju je ta aplikacija:

(1) u; (2) na; (3) bižekcija?

23. 1) Neka A označava množinu od deset romanopisaca, a B množinu od deset romana. Može li relacija „. . . je pisac . . .“ od A ka B da bude bižekcija. Napišite graf jedne takve bižekcije.

2) $E=\{a, b, c, d\}$, $F=\{u, v, x, y\}$. Napišite grafove svih mogućih bižekcija množine E ka F.

3) Neka je $M=\{a, b, c\}$. Napišite grafove svih mogućih bižekcija M ka M. Nacrtajte i njihove sagitalne šeme.

24. 1) Neka je $M=\{a, b, c, d, e\}$. Napišite graf i nacrtajte sagitalnu šemu bižekcije koja čini da svakom elementu x odgovara taj isti element x.

2) Dovršite (u prethodnom slučaju) $f(a)=\ldots$; $f(b)=\ldots$; $\ldots f(e)=\ldots$

3) Neka je M određena množina mačaka. Kako bi glasila jedna identična transformacija u M?

25. 1) Zamislite množinu od šest žena i u njoj dve relacije:

S: „... ima za sestru ...“ i K: „... ima za kćerku ...“.

Neka je Dara S Ruža i Ruža K Snežana.

Kako glasi relacija od Dare ka Snežani? Kako glasi relacija od Snežane ka Dari?

Zora K Lucija i Lucija S Tanja. Koja relacija vezuje Zoru i Tanju? A Tanju i Zoru?

2) Izrazite rečima relacije: $K \circ S$; $S \circ K$; $K \circ K$; $S \circ S$.

3) Neka je M množina ljudi oba pola. Posmatrajte u M relacije

S: „... ima za sestru ...“ i B: „... ima za dete ...“.

Izrazite rečima relacije: $B \circ S$; $S \circ B$; $B \circ B$; $S \circ S$.

4) Neka su u N definisane funkcije h: $n \to 2n$, k: $p \to p+3$.

(1) Odredite njihove definicione množine.

(2) Nacrtajte šemu funkcije $k \circ h$.

(3) Neka je $f = k \circ h$. Izračunajte: $f(8)$; $f(10)$; $f(13)$.

(4) Da li je $h \circ k$ i $k \circ h$ ista funkcija?

5) Neka je u N definisana funkcija g: $q \to 4q-9$.

Odredite definicionu množinu D.

Neka su (kao napred): h: $n \to 2n$, k: $p \to p+3$.

Dovršite: $g \circ h$: a ...; $g \circ k$: x ...; $h \circ g$: b ...; $k \circ g$: y ...; } Proverite kad je $a=5$, $b=10$, $x=1$, $y=7$.

GLAVA X

KARDINALNI BROJEVI I PRIRODNI BROJEVI

§ 10.1. EKVIPOTENTNE MNOŽINE. EKVIPOTENCIJA

1. 1) Aplikacija „... zauzima sedište ...“ množine M školske dece na množinu S sedišta u autobusu (dodatak 2, glave IX, t. **22.** 5) može biti aplikacija *na*, aplikacija *u* ili *bižekcija*.

Nacrtajte sagitalnu šemu svake od tih aplikacija.

U slučaju bižekcije za množine M i S kažemo da su *ekvipotentne*.

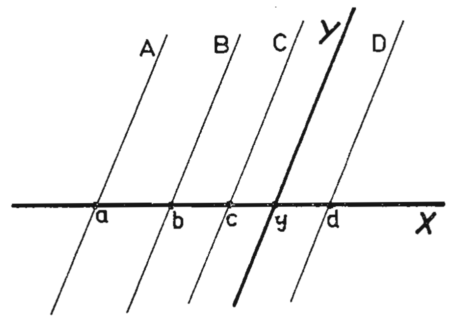
Uopšte, *ako između množina A i B postoji bižekcija, i samo u tom slučaju, za A i B kažemo da su ekvipotentne množine.*

Zato se umesto termina bižekcija često upotrebljava i termin *ekvipotencija*. Ekvipotencija je, dakle, takva relacija između množina A i B da svakom elementu množine A odgovara (jedan i samo jedan) element množine B i obrnuto (svakom elementu množine B odgovara jedan, i samo jedan, element množine A).

Drugim rečima, između elemenata ekvipotentnih množina postoji *jednoznačna obostrana (biunivoka) korespondencija*. Ekvipotencija množina A i B označava se, kratko, ovako $A \sim B$.

2) Pored mnogobrojnih primera iz svakodnevnog života (podsetite se da): između dva zatvorena intervala $[ab]$ i $[cd]$ uvek postoji relacija ekvipotencije (§ 9.7, t. **22**), tj. dva zatvorena intervala (dve duži) uvek su ekvipotentne množine: $[ab] \sim [cd]$.

Isto tako, lako je pokazati (slika 10.1) bižekciju $(Y) \to X$, tj. ekvipotenciju $(Y) \sim X$, jer svakoj pravi pravca (Y) odgovara tačka prave X, i obrnuto.



Slika 10.1

2. *Relacija ekvipotencije je (jedna) relacija ekvivalencije.*

Zaista:*

(1) Ekvipotencija je *refleksivna* relacija, tj. svaka množina je ekvipotentna samoj sebi, jer svaki element množine A odgovara samom sebi: $A \to A$,

* Videti i Uputstva.

$A \sim A$.* Uostalom, prema definiciji, ako je $A = B$, onda je $A \sim B$, pa je tim pre $A \sim A$.

(2) Ekvipotencija je *simetrična relacija*, tj. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,

jer
$$A \to B \Leftrightarrow A \sim B,$$
$$B \to A \Leftrightarrow B \sim A,$$
a kako, na osnovu definicije bižekcije, $A \to B$ povlači $B \to A$,

to iz $A \sim B$ sledi $B \sim A$.

(3) Ekvipotencija je *tranzitna relacija*, tj.
$$(A \sim B \text{ i } B \sim C) \Rightarrow A \sim C.$$
(Iz ekvipotencije množina A i B, B i C sledi ekvipotencija A i C.)

Jer:
$$A \to B \Leftrightarrow A \sim B,$$
$$B \to C \Leftrightarrow B \sim C,$$
i kako iz f: $A \to B$ i g: $B \to C$ sledi gof: $A \to C$, to je $A \sim C$.

3. Neka su date množine A, B, C koje zadovoljavaju uslove:

(1) $A \sim B$ i (2) $A \cap C = \varnothing = B \cap C$.

Šta, pod tim uslovima, možemo tvrditi o množinama $A \cup C$ i $B \cup C$?**

§ 10.2. KARDINALNI BROJEVI

1. Umesto *„množine A i B su ekvipotentne"* kaže se i: *„množine A i B imaju isti kardinalni broj"* (ponekad i samo: „... imaju isti kardinal"), ili *„množine A i B imaju isti broj elemenata"*. To su tri sinonima, tri ekvivalentna iskaza (tvrđenja).

Međutim, sami po sebi, drugi i treći iskaz ne kazuju mnogo. Moramo se na njima zadržati.

2. U § 1.5, t. **5** rečeno je, opisno i neprecizno, za koju se množinu kaže da je *konačna*. Na žalost, ni ovde ne možemo dati preciznu definiciju konačne množine. Moramo se zadovoljiti intuitivnim uviđanjem, da elemente svake konačne množine možemo, stvarno ili misaono, staviti jedan do drugog tako da je jedan početni, *početni element*, a jedan poslednji, *poslednji element*.

Početni element i poslednji element zovu se *krajnji* elementi, a svi ostali su „srednji" elementi konačne množine.

„Očigledno je" da i svaka podmnožina (svaki deo) konačne množine je konačna množina.

Ako svaki element prikažemo tačkom, dijagram konačne množine i njenih delova izgleda ovako:

Slika 10.2

* Treba ponovo izvršiti zahteve t. 24, dodatka 2. Identična transformacija (§ 9.6, t. **3**) je jedna bižekcija.

** Videti i Uputstva. To je veoma važna činjenica.

3. 1) Označimo sa $\mathfrak{M}$ množinu *svih* konačnih množina. Ekvipotencija (kao i svaka relacija ekvivalencije, § 6.1 i 6.2) rastavlja množinu $\mathfrak{M}$, vrši particiju (§ 2.7) te množine, u *klase ekvipotentnih množina*.

Svaka klasa ekvipotentnih množina sastoji se od najraznovrsnijih množina. Ono što je svima njima zajedničko, ono po čemu ih i stavljamo u istu klasu, ono čime se svaka od njih razlikuje od množine ma koje druge klase, zove se *kardinal* ili *kardinalni broj*.

Klasa ekvipotentnih množina i kardinalni broj (kardinal) su skoro sinonimi.

2) Klase ekvipotentnih množina možemo da uredimo i „prikažemo" ovako:

Svaka množina ekvipotentna praznoj množini je prazna množina. U stvari, postoji samo jedna prazna množina $\varnothing$; klasa praznih množina sastoji se samo od jedne množine, od jednog elementa.

Svi singletoni su ekvipotentne množine. Jedan od njih je:
$$\{0\},$$
tj. množina čiji je element 0.*

Svi parovi su ekvipotentne množine. Jedan od njih je:
$$\{0, 1\},$$
tj. množina čiji su elementi 0 i 1.*

Klasa ekvipotentnih množina od kojih je jedna:
$$\{0, 1, 2\},$$
tj. množina čiji su elementi 0, 1 i 2. (Prethodna napomena.)

Klasa ekvipotentnih množina od kojih je jedna:
$$\{0, 1, 2, 3\},$$
tj. množina čiji su elementi 0, 1, 2 i 3.*

Ako tako produžimo, možemo sastaviti množine:
$$\{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\ldots\ldots \text{(itd.)}$$
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 17\}$$
$$\ldots \text{(itd.)}$$

Svaku od tih množina možemo smatrati predstavnikom ili zastupnikom odgovarajuće klase, jer pomoću svake od njih možemo odrediti sve množine one klase kojoj ona pripada (čiji je ona predstavnik).

Zato ih možemo nazvati *standardnim množinama*. I zato, ako su A, B, C, ... množine klase čiji je predstavnik, npr. $\{0, 1, 2, 3\}$, onda je:
$$A \sim \{0, 1, 2, 3\}$$
$$B \sim \{0, 1, 2, 3\}$$
$$\ldots$$

* Čitalac koji zna da je to cifra 0 može čitati: Množina čiji je element cifra 0. Ali ovde ne pretpostavljamo poznavanje cifara. Ovde je 0 jedan element i ništa više.

3) Prema tome, *svaka množina ima kardinalni broj (kardinal)* i to se kratko označava ovako, na primer, $k(A)$, $k(B)$, . . .

Znači $k(A)=k(B)= \ldots k(\{0, 1, 2, 3\})$,

$k(A) \neq k(G)$, ako je npr. $G \sim \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$.

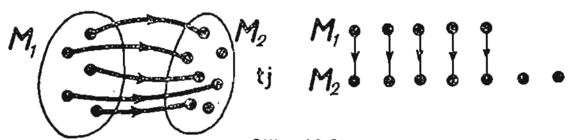
4. Uočimo dve važne činjenice:

$$(1)\quad \begin{cases} \{0\}=\varnothing \cup \{0\} \\ \{0, 1\}=\{0\} \cup \{1\} \\ \{0, 1, 2\}=\{0, 1\} \cup \{2\} \\ \{0, 1, 2, 3\}=\{0, 1, 2\} \cup \{3\} \\ \ldots \text{(i tako dalje)} \end{cases}$$

$$(2)\quad \varnothing \subset \{0\} \subset \{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 3\} \subset \ldots$$

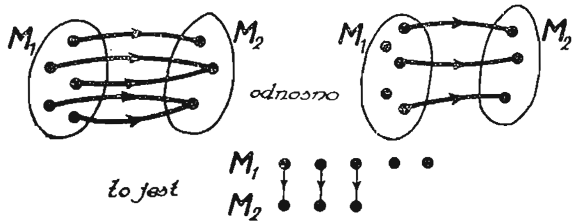
5. 1) Ako množine M_1 i M_2 nisu ekvipotentne, onda je:

ili



Slika 10.3

ili



Slika 10.4

U prvom slučaju (prikazan crtežom 10.3) imamo aplikaciju *u* ili, što je isto, *množina M_1 je ekvipotentna podmnožini množine M_2*. (Potencija množine M_1 je niža od potencije množine M_2.)

U drugom slučaju (sl. 10.4) imamo aplikaciju *na* ili, što se na isto svodi, *podmnožina množine M_1 je ekvipotentna množini M_2*. (Potencija množine M_1 je viša od potencije množine M_2.)

2) Sporazumimo se da govorimo da je u prvom slučaju (sl. 10.3) kardinal (kardinalni broj) *množine M_1 manji od kardinala množine M_2* i da to zapisujemo ovako: $k(M_1)<k(M_2)$.

To znači da uvodimo:

Aksiom. — *Ako je množina X ekvipotentna podmnožini (delu) množine Y, onda je kardinalni broj množine X manji od kardinalnog broja množine Y, tj.* $k(X)<k(Y)$.

U obrnutom slučaju (sl. 10.4) je $k(M_1)>k(M_2)$.

3) Na osnovu toga kardinalni broj prave podmnožine (pravog dela) manji je od kardinalnog broja množine, pa iz činjenice (2) [tačka **4.**] sledi:

$$(3)\quad k(\varnothing)<k(\{0\})<k(\{0, 1\})<k(\{0, 1, 2\})< \ldots,$$

tj. *množina kardinalnih brojeva je uređena* (§ 7.2).

§ 10.3. PRIRODNI BROJEVI

1. Kardinal (kardinalni broj) prazne množine zove se *nula* i zapisuje se ovako:

$$\mathbf{0}, \text{ tj. } 0=k(\varnothing).$$

Kardinalni broj singletona zove se *jedan* i zapisuje se ovako:

$$\mathbf{1}, \text{ pa je npr. } 1=k(\{0\}).$$

Kardinalni broj parova (svakog para) zove se *dva* i zapisuje se ovako:

$$\mathbf{2}, \text{ pa je npr. } 2=k(\{0, 1\}).$$

Napišimo sve to pregledno i produžimo, pa imamo:

$$\begin{gathered} \mathbf{0}=k(\varnothing) \\ \mathbf{1}=k(\{0\}) \\ \mathbf{2}=k(\{0, 1\}) \\ \mathbf{3}=k(\{0, 1, 2\}) \\ \ldots \\ \mathbf{19}=k(\{0, 1, 2, \ldots, 18\}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 237=k(\{0, 1, 2, \ldots, 236\}) \\ \ldots \\ 5000=k(\{0, 1, 2, \ldots, 4999\}) \\ \ldots \\ 1\,000\,000\,000=k(\{0, 1, 2, \ldots, 999\,999\,999\}). \\ \ldots \end{gathered}$$

Tako definisani brojevi 0, 1, 2, 3, 4, . . . zovu se *prirodni brojevi*.

Prema tome:

Prirodni brojevi se definišu kao kardinalni brojevi (konačnih) množina. — Pod prirodnim brojem podrazumeva se kardinalni broj (konačne) množine.

2. Iz svega prethodnog (uključujući i § 10.2) sledi da su prirodni brojevi elementi jedne specijalne (i vrlo važne) množine:

$$N=\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

čije su osobine:

(1) *Ima početak (broj 0), a nema kraja (nema poslednji element).*

(2) *Svaki element ima tačno određenog (neposrednog) sledbenika, tj. za svakim prirodnim brojem sledi tačno određeni drugi prirodni broj.*

(3) *Svaki element, osim početnog, ima tačno određenog (neposrednog) prethodnika, tj. svaki prirodni broj, osim 0, ima tačno određenog prethodnika.*

Uopšte, *svaka množina M koja sadrži nulu i koja, ako sadrži prirodni broj* $n \neq 0$ *sadrži i neposredni sledbenik broja n, sadrži sve prirodne brojeve.*

Usled navedenih osobina, množina N zove se i niz prirodnih brojeva i zapisuje ovako: $0, 1, 2, 3, \ldots$

3. Rezime §§ 10.2 i 10.3:

1) Ma koje konačne množine mogu se zapisati ovako:

$$\varnothing, \ \{a_1\}, \ \{a_1, a_2\}, \ (a_1 \neq a_2), \ \{a_1, a_2, a_3\}, \ (a_1 \neq a_2 \neq a_3), \ldots$$

2) Njima odgovaraju kardinalni brojevi:

$$k(\varnothing), \ k(\{a_1\}), \ k_2(\{a_1, a_2\}), \ k\,(\{a_1, a_2, a_3\}), \ldots$$

koji se kraće pišu ovako: 0, 1, 2, 3, . . . i zovu prirodni brojevi.

3) Prirodni broj m' je neposredni sledbenik prirodnog broja m tada, i samo tada, kad je $m = k(M)$, $m' = k(M' \cup a)$, $a \notin M$.

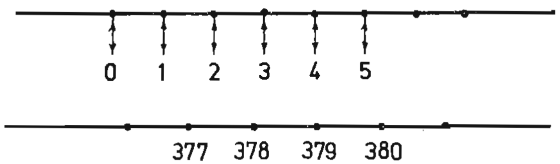
4) Množina koja sadrži 0, i koja kad god sadrži m sadrži i m', sadrži sve prirodne brojeve. Ta se množina zove *množina prirodnih brojeva* i zapisuje ovako:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

5) Primetimo da se prirodni brojevi ne definišu izolovano, nego kao elementi množine N. To se bolje vidi iz sledećeg § 10.4.

4. Često se posmatra množina $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\} = N \setminus 0$.

5. Najčešći i najkorisniji model prirodnih brojeva je nacrtana prava linija na kojoj je označeno da dvema njenim tačkama odgovaraju dva uzastopna prirodna broja (sl. 10.5):



Slika 10.5

Naime, samim tim što se dvema proizvoljnim tačkama nacrtane prave pridružuju dva uzastopna prirodna broja, prava se orijentiše (§ 7.3) i određuje konstrukcija tačaka koje odgovaraju ostalim brojevima, jer su sva odstojanja uzastopnih tačaka podudarna*.

Prava se najčešće crta tako da bude paralelna pravi koju određuju zenice posmatrača i orijentiše sleva nadesno, ali to nije obavezno.

§ 10.4. BROJEVI I CIFRE. BROJANJE. BESKONAČNA MNOŽINA

1. Prema prethodnom, svaki broj je jedna osobina, jedna apstrakcija, jedan pojam. Treba dobro razlikovati (taj) *pojam* i njegovo *ime* [koje se u raznim jezicima izražava raznim rečima, na primer: pet, пять (ruski), pięć (poljski), cinq (francuski), fünf (nemački), five (engleski), . . .]. Internacionalno *ime* broja je jedan znak, jedna

* Na sl. 10.5 je mala tehnička greška u tom pogledu.

figura, jedna cifra (odnosno više cifara poređanih na tačno utvrđeni način). Treba, znači, razlikovati, npr.: broj (pojam) 4 i cifru 4

kao što razlikujemo dečka Ivicu i njegovo ime Ivica.

Treba razlikovati broj 735 i njegovo ime 735.

Broj 735 je osobina svih množina ekvipotentnih standardnoj množini:

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots 734\}$$

ili, što je isto, tačno određeni element množine N, dakle pojam, a sedam stotina trideset pet, ili, kratko, 735, je *ime* toga pojma, toga broja.

2. 1) Množina $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ je prvi najvažniji i najpristupačniji primer *beskonačne množine* (nema poslednjeg elementa).

A množina $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$?

Iako se izbegavaju negativne definicije, ovde se mora reći: Svaka množina koja nije konačna zove se beskonačna množina.

2) Neka su a i b elementi množine N, tj. $a, b \in N$. Šta je $[a, b]$?

To je (§ 7.5) zatvoreni interval množine N, tj. množina koju čine a, b i svi (prirodni) brojevi koji slede posle a a prethode b. Zato se $[a, b]$ može zapisati ovako: $a \leqslant x \leqslant b$.

Na primer: $[3, 8] = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Napišite tako: $[7, 17]$; $[1, 13]$; $[25, 31]$; $[50, 51]$.

Ako $a, b \in N$, interval $[a, b]$ zove se i *odsečak množine N*.

3) Neka $a, b \in N_1$. Šta je $[a, b]$?

Ako je $a = 1$, odsečak $[1, b]$ zove se *početni odsečak* množine N_1.

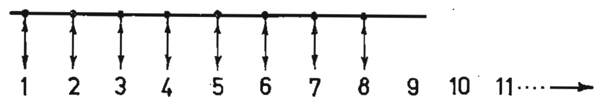
Početni odsečak množine N_1 označava se najčešće ovako $[1, n]$, gde je n ma koji prirodni broj, na primer:

$$[1, 7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}; \qquad [1, 53] = \{1, 2, 3, \ldots, 52, 53\}.$$

Njegov početni ili *najmanji* element je **1**, a krajnji ili *najveći* element je n. Prema tome:

Početni odsečak $[1, n]$ *množine* N_1 *je konačna množina.*

3. 1) Svaka konačna množina A ekvipotentna je jednom početnom odsečku $[1, n]$ množine N_1, to jest svakom elementu množine A odgovara jedan, i samo jedan, prirodni broj početnog odsečka $[1, n]$. Taj se broj zove *redni broj* i označava *rang* elementa date množine:



Slika 10.6

(Na prikazanom dijagramu je $A \sim [1, 8]$.)

Pridruživanje rednog broja svakom elementu date množine zove *se numerisanje* elemenata te množine.

Jasno je da su dve (konačne) množine ekvipotentne tada, i samo tada, ako su njihovi poslednji elementi *istog ranga*, tj. ako njihovim poslednjim elementima odgovara isti prirodni broj, koji se u ovom slučaju zove *završni broj* date množine.

Određivanje završnog broja date množine zove se brojanje elemenata te množine.

2) Završni broj date množine, tj. rang poslednjeg elementa, ne zavisi od toga koji su brojevi početnog intervala $[1, n]$ pridruženi pojedinim elementima; na primer, ako je data množina $C=\{a, b, c\}$, onda je:

$a\ b\ c$	$a\ c\ b$	$b\ a\ c$	$b\ c\ a$	$c\ a\ b$	$c\ b\ a$
1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3	1 2 3

Svaki od tih poredaka zove se jedna *permutacija* elemenata množine C.

Prema tome, ako je jedna permutacija elemenata konačne množine M ekvipotentna intervalu $[1, n]$ i svaka druga permutacija elemenata množine M ekvipotentna je intervalu (početnom odsečku) $[1, n]$.

Završni broj (rang poslednjeg elementa) ma koje permutacije konačne množine M zove se kardinalni broj množine M, ili broj elemenata množine M.

Znači, da se izbroje elementi konačne množine treba: (1) urediti njene elemente; (2) numerisati ih; (3) pročitati ili napisati završni broj i to je traženi kardinalni broj.

3) Ako, dakle, pođemo od množine N kao date, možemo reći:

(1) Prirodni broj je element množine N.

(2) Kardinalni broj je prirodni broj n početnog odsečka (intervala) $[1, n]$ množine N_1.

(3) Množina je konačna ako joj je kardinal prirodni broj.

(4) Svaka množina koja nije konačna zove se beskonačna množina.

(5) Ravan Π je beskonačna množina tačaka.

(6) Svaka prava je (jedna) beskonačna množina tačaka.

(7) Ako su p i q razne tačke, $[pq]$ je beskonačna ograničena množina tačaka.

(8) $\boldsymbol{D}$ je beskonačna množina pravâ.

(9) Ako je P prava, pravac (P) je beskonačna množina pravâ.

(10) Ako je x proizvoljna tačka, sve prave $\boldsymbol{D}_x$ koje sadrže x čine beskonačnu množinu pravâ.

4) Šta možete reći o množinama:

(1) $2N=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; (2) $H=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$;

(3) $N\cap 3N$; $7N\cap N$; (4) $\Pi\setminus P$?

5) Navedite i sami primere beskonačnih množina.

§ 10.5. VEŽBANJA I ZADACI

1. Da li je:

(1) $k(\{1, 2, \ldots, 1000000000\})=k(\{0, 1, 2, \ldots, 1000000000\})$;

(2) $k(\{1\})=1$; (3) $k(\{\varnothing\})=1$; (4) $2=k(\{1, 2\})$.

(5) $8=k(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})$?

2. Date su množine A i B. Izračunajte kardinalni broj množine $A\setminus B$ u slučaju: (1) $A\supset B$; (2) $A\subset B$; (3) $A\cap B=\varnothing$.

3. 1) Ma koje bile dve prave ravni Π, one imaju isti kardinalni broj. Obrazložite.

2) Iz prethodnog sledi da i svaka beskonačna množina ima „kardinalni broj". Taj broj, koji ćemo označiti sa δ (delta), nije prirodni broj, nego *transfinitni*. Znači $\delta=k\ \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Dovršite:

(1) $k(13N)=$ (2) $k\,(973\,568N)=$

(3) $k(777\,777\,777N)=$ (4) $k\,(\{2, 3, 4, \ldots\})=$

(5) $k(\{1\,000\,000\,000,\ 1\,000\,000\,001,\ 1\,000\,000\,002, \ldots\})=$

3) Obrazložite da sve poluprave imaju isti kardinal.

4. Neka je data kružnica K čiji je centar c i množina P_c polupravâ čiji je početak c. Pokažite da je $k(P_c)=k(K)$.

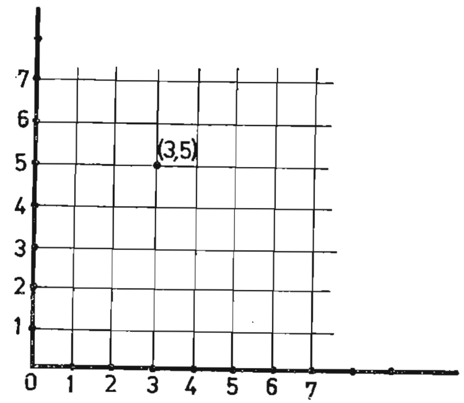
5. Ranije smo pokazali da su dve duži uvek ekvipotentne. Sad pokažite da su otvorena duž i prava ekvipotentne.

6. 1) Izračunajte: $k(\text{div } 75)$; $k(\text{div } 273)$; $k(\text{div } 250)$; $k(\text{div } 7)$; $k(\text{div } 31)$; $k(\text{div } p)$, gde je p prost broj.

2) Izračunajte: $k(\text{div } 250\cup\text{div } 200)$; $k(\text{div } 250\cap\text{div } 200)$.

3) Izračunajte kardinalni broj:

(1) unije div 24 i div 56;
(2) preseka div 24 i div 56;
(3) unije div 144 i div 45;
(4) preseka div 45 i div 144;
(5) unije div 6 i div 91;
(6) preseka div 91 i div 65;
(7) unije div 14 i div 15;
(8) preseka div 14 i div 15.



Slika 10.7

7. Crtež 10.7 prikazuje deo mreže proizvoda $N\times N$. Svakom paru prirodnih brojeva (x, y) odgovara tačka i obrnuto.

1) Prikažite (crtajući sve tačke određene množine pisaljkom iste boje) množinu tačaka koje prikazuju:

(1) jednakost $x=y$;
(2) nejednakost $x<y$;
(3) nejednakost u širem smislu $x\leqslant y$.

2) Osnovna množina je ista: tačke mreže $N\times N$. Pokažite i iskažite relaciju koja karakteriše komplementarnu množinu svake množine navedene pod 1).

8. 1) Data je množina $E=\{a, b, c, d\}$. Sastavite sve permutacije njenih elemenata.

2) Izračunajte, na osnovu prethodnog, broj permutacija elemenata množine:

(1) $F=\{a, b, c, d, e\}$; (2) $G=\{a, b, c, d, e, f\}$.

9. $N\sim N_1$, $N\sim N\setminus\{0, 1\}$, uopšte $N\sim N\setminus\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Kako se to obrazlaže?

Rezime

1. 1) Svaka bižekcija (tj. svaka obostrana jednoznačna korespondencija) definiše ekvipotenciju polazne i dolazne množine.

2) Sve ekvipotentne množine čine klasu ekvipotentnih množina.

3) Ako se sastavi množina-predstavnik svake klase, dobijaju se standardne množine koje se mogu urediti tako da se svaka razlikuje od prethodne samo jednim elementom. Standardne množine čine, dakle, niz uređenih množina od kojih je svaka uključena u onu koja neposredno sledi, pa dakle i u svaku sledeću.

2. 1) Uređena množina koja ima početni i poslednji element zove se konačna množina.

2) Zajednička osobina svih ekvipotentnih konačnih množina (svih množina iste klase) zove se kardinal ili kardinalni broj. Uopšte, ekvipotentne množine i „množine imaju isti kardinalni broj" su sinonimi.

3) Kardinalni brojevi se mogu urediti kao odgovarajuće standardne množine.

3. 1) Prirodni brojevi su elementi uređene množine kardinalnih brojeva.

2) Prirodni brojevi su elementi specijalne množine (prirodnih brojeva) koja ima ove osobine:

(1) ima početni element (broj 0), a nema poslednji element;

(2) svaki element ima tačno određeni neposredni sledbenik;

(3) svaki element, osim početnog, jeste neposredni sledbenik tačno određenog elementa (prirodnog broja).

3) $N_1 = N \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

4) Između dva prirodna broja a i b postoji relacija $a < b$, ali i $a \leqslant b$ (§ 7.1, t. **3**).

4. 1) Ako su a i b prirodni brojevi, onda se $[a, b]$ ili $a \leqslant x \leqslant b$ zove odsečak (interval) množine prirodnih brojeva.

2) $[1, b]$ ili $[1, n]$ zove se početni odsečak množine N_1.

3) Ako je A množina i ako je $A \sim [1, n]$, onda je $k(A) = n$, tj. n je kardinalni broj množine A.

4) Operacija kojom se određuje $k(A) = n$ zove se brojanje elemenata množine A.

5. 1) Ako je (§ 10.1, t. **3**):

$k(A) = k(B)$ i $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, onda je $k(A \cup C) = k(B \cup C)$.

2) Ako je (§ 10.5, t. **2**):

(1) $B \subset A$, onda je $k(A \setminus B) = k(A) - k(B)$;

(2) $A \subset B$, onda je $k(A \setminus B) = k(\varnothing) = 0$;

(3) $A \cap B = \varnothing$, onda je $k(A \setminus B) = k(A)$.

GLAVA XI

SABIRANJE PRIRODNIH BROJEVA

§ 11.1. DEFINICIJE

1. 1) Neka su A i B konačne množine. Uvek postoji (§ 2.1) konačna množina $A \cup B$.

Svaka konačna množina ima (§§ 10.1, i 10.2) svoj kardinalni broj. Dakle, date su tri množine A, B, $A \cup B$ i njihovi kardinalni brojevi $k(A)$, $k(B)$, $k(A \cup B)$.

Možemo li nešto reći o tim brojevima i šta? Odgovor zavisi od relacije koja postoji među množinama A i B. Zaista, ako je, npr.:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\}, \\ B = \{a, b, c, d\}, \\ k(A) = 4,\ k(B) = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(onda je) } k(A \cup B) = k(\{a, b, c, d\}) = 4;$$

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\}, \\ B = \{a, b, c, p\}, \\ k(A) = 4,\ k(B) = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow k(A \cup B) = k(\{a, b, c, d, p\}) = 5;$$

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\}, \\ B = \{a, b, q, p\}, \\ k(A) = 4,\ k(B) = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow k(A \cup B) = k(\{a, b, c, d, p, q\}) = 6;$$

$$(4)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\}, \\ B = \{a, r, q, p\}, \\ k(A) = 4,\ k(B) = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow k(A \cup B) = k(\{a, b, c, d, p, q, r\}) = 7;$$

$$(5)\quad \left.\begin{array}{l} A = \{a, b, c, d\}, \\ B = \{s, r, q, p\}, \\ k(A) = 5,\ k(B) = 4, \end{array}\right\} \Rightarrow k(A \cup B) = k(\{a, b, c, d, p, q, r, s\}) = 8.$$

Isto tako iz:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \{u_1, u_2\}, \\ M_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \\ k(M_1) = 2, \quad k(M_2) = 5, \end{array}\right\} \Rightarrow k(M_1 \cup M_2) = 7.$$

U ovom slučaju broj 7 zove se *zbir* brojeva 2 i 5, što se zapisuje ovako:

$$2 + 5 = 7.$$

U slučaju (5) broj 8 je *zbir* brojeva 4 i 4, što se zapisuje ovako:

$$4+4=8.$$

Znači:

> Ako je $X \cap Y = \varnothing$, onda je $k(X \cup Y) = k(X)+k(Y)$.
>
> To jest, ako je $k(X)=x$, $k(Y)=y$ i $X \cap Y = \varnothing$,
>
> onda je $k(X \cup Y)=x+y$.

Ako množine X i Y nemaju zajedničkih elemenata (ako su disjunktivne), kardinalni broj njihove unije zove se zbir njihovih kardinalnih brojeva.

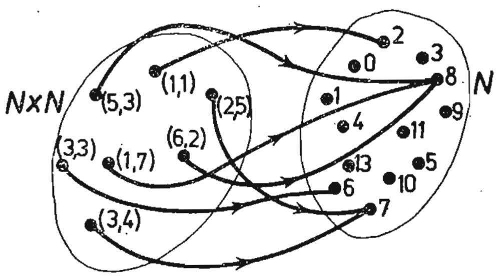
2) Izračunavanje zbira dva broja zove se *sabiranje* i, prema prethodnom, ono je vezano za uniju dveju množina. Naime, ako su data dva broja a i b i želimo da izračunamo njihov zbir $a+b$, možemo postupiti ovako:

(1) Sastavimo množinu A od a elemenata bez obzira na njihovu prirodu (što znači da oni mogu biti veoma raznovrsni, npr. $A=\{$konj, bombona, Dunav$\}$, ali, razume se, to ne isključuje istovrsnost elemenata).

(2) Sastavimo množinu B od b elemenata koji, takođe, mogu biti najraznovrsniji, pod jednim jedinim uslovom: da nijedan od elemenata množine B nije istovremeno i element množine A (uslov koji se izražava ovako $A \cap B = \varnothing$).

(3) Sastavimo uniju množina A i B i izbrojmo elemente te unije.

2. Tako je sabirao čovek u davnoj prošlosti, a tako i dete formira pojam sabiranje. Današnji čovek, međutim, zna da neposredno izračuna zbir dva prirodna broja (a postoje i mašine za to izračunavanje). Zato (za današnjeg čoveka) *sabiranje je funkcija (sl. 11.1) koja svakom određenom paru (x, y) prirodnih brojeva pridružuje prirodni broj $x+y$ koji se zove zbir brojeva x i y.*



Slika 11.1

Svaki od brojeva x i y zove se *član* (ili sabirak) označenog zbira $x+y$, koji se, uopšte, čita: x plus y.

Simbolima se sabiranje označava ovako (§§ 9.3, 9.4, 9.5):

$$s\colon N \times N \to N\colon (x, y) \to (x+y).$$

3. Sabiranje se može definisati i ovako (§§ 10.3 i 10.4).

1) U množini N označimo proizvoljan broj a:

$$N=\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, a, \ldots\}.$$

Označimo sa N_a množinu koju čine svi prirodni brojevi veći od a i njene elemente numerišimo na sledeći način:

element ranga 0 je sâm broj a, označimo ga sa

$a+0$ i čitajmo a plus 0;

element ranga 1, neposredni sledbenik elementa a, označimoo sa

$a+1$ i čitajmo a plus 1;

element ranga 2, neposredni sledbenik elementa $a+1$, označimo sa

$a+2$ i čitajmo a plus 2.

I tako dalje.

U tako numerisanoj množini N_a označimo element ranga b sa $a+b$ (a plus b): $\quad N_a=\{a, a+1, a+2, a+3, \ldots, a+b, \ldots\}$.

Taj broj $a+b$ zove se *zbir* brojeva a i b datih tim redom [tj. zbir uređenog para (a, b)].

Prema tome, a s obzirom da je $N_a \sim N$ (da su te množine ekvipotentne, § 10.4, t. **9**):

$$\begin{aligned} N&=\{0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad b, \ldots\} \\ N_a&=\{a, a+1, a+2, \ldots, a+b, \ldots\} \end{aligned}$$

element množine N_a koji odgovara elementu b množine N zove se zbir brojeva a i b, datih tim redom [zbir uređenog para (a, b)].

2) Posmatrajmo, sad, ma koju osnovnu množinu (§ 2.5) M i izvesne njene uređene parove. Definisati *operaciju* u M znači *učiniti da svakom od tih parova odgovara* (tj. *pridružiti svakom od tih parova*) element množine M koji se zove *rezultat* te operacije.

U specijalnom slučaju, korespondirati, pridružiti uređenom paru prirodnih brojeva a i b prirodni broj s, zbir brojeva a i b, znači definisati operaciju koja se zove *sabiranje* u množini N. Otuda:

Sabiranje prirodnih brojeva je operacija koja svakom uređenom paru prirodnih brojeva a i b pridružuje (korespondira) jedinstven zbir s:

$$\overbrace{\underbrace{a+b}_{\substack{\text{označeni zbir, } a \text{ i } b \\ \text{su njegovi sabirci} \\ \text{(članovi)}}} = \underbrace{s}_{\text{izvršeni zbir}}}^{\text{sabiranje}}$$

4. $k(\{0\})+k(\{0\}) \neq k(\{0\}) \cup \{0\})$. Zašto?

5. 1) Neka je $k(A)=18$, $k(B)=24$, $k(A \cup B)=35$. Izračunajte: $k(A \cap B)$; $k(A \setminus B)$; $k(B \setminus A)$.

2) Isto (što i pod 1) kad je $k(A)=15$, $k(B)=4$, $k(A \cup B)=15$.

3) Isto kad je $k(A)=27$, $k(B)=46$, $k(A \cup B)=73$.

6. 1) Neka jedan učenik napiše imena 6 učenika-ca vašeg odeljenja. On je sastavio množinu A. Neka drugi napiše imena 8 učenika-ca vašeg odeljenja. On je sastavio množinu B. Oni ne pokazuju svoje množine. Možete li nešto sigurno reći o $k(A \cup B)$ i zašto? Šta možete reći o broju elemenata množine $A \cup B$?

2) U školi ima 228 đaka. Od njih je 45 upisano u literarnu sekciju, a 28 u matematičku. Šta možete reći o broju učenika koji nisu članovi nijedne od pomenutih sekcija?

7. Svaki đak mog odeljenja je upisan ili u muzičku ili u sportsku sekciju. U muzičkoj sekciji ima 13, u sportskoj 24, a troje su učlanjeni u obe sekcije. Izračunajte broj đaka mog odeljenja.

8. Neka je $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{a, c, e, f\}$, $C=\{a, d, f, g, h\}$. Izračunajte kardinalni broj množine:

(1) $A \times B$;
(2) $A \setminus C$;
(3) $A \times (B \cup C)$;
(4) $(A \cup C) \times (B \cap C)$;
(5) $(A \cap C) \times (B \cup C)$;
(6) $(A \cap C) \times (B \cap C)$;
(7) $(A \cup C) \times (B \cup C)$;
(8) $(A \cup B) \times (A \cup C)$.

§ 11.2. NEKE NEPOSREDNE POSLEDICE DEFINICIJA

1. Iz definicije neposredno sledi:

(1) Zbir dva prirodna broja uvek postoji.

(2) Zbir dva prirodna broja je jedinstven, tj. $a+b$ jeste ili s ili s' (a ne i s i s').

(3) Zbir dva prirodna broja je prirodni broj.

Činjenica (1) izražava *egzistenciju* zbira. Činjenica (2) izražava njegovu *jedinstvenost*. Činjenica (3) se može formulisati:

Sabiranje u N je interna (unutrašnja) operacija i kratko se označava $N, +$.

2. *Mreža* (u stvari početak mreže) proizvoda $N \times N$ u slučaju sabiranja izgleda kako je pokazano na 159. strani.

Prema mrežama koje ste ranije sastavljali, ova je okrenuta za 180° oko prve „horizontalne" linije. To je, u ovom slučaju, zgodnije. Ponekad se zove „tablica sabiranja".

Nije teško videti da su „horizontalne" linije množine

$$N, N_1, N_2, N_3, \ldots, N_a, \ldots$$

3. *Neutralni element sabiranja.* — 1) Neka je A ma koja konačna množina.

Dovršite: $A \cup \varnothing =$; $\varnothing \cup A =$ (§ 2.3).

Iz toga sledi $[k(A)=a]$: $a+0=k(A \cup \varnothing)=k(A)$.

Dakle, $a+0=0+a, \quad a \in N.$

Zato kažemo da je broj 0 *neutralni element sabiranja.*

2) To možemo da pokažemo i ovako (§ 11.1, t. **3**):

Ako je $a=0$, N_a se poklapa sa N, pa je rang broja b u N sâm broj b, dakle

$$0+b=b.$$

Ako je $b=0$, broj $a+0$ je element ranga 0 u N_a, pa je sâm broj a, dakle

$$a+0=a.$$

Otuda:

Teorema 1. — *Ako je jedan od sabiraka (članova sabiranja) nula, zbir je jednak drugom sabirku (članu).*

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		b
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0+b
1	1	2	3	1+3	5	6	7	8	9	10	11		1+b
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		2+b
3	3	4	5	6	7	8	3+6	10	11	12	13		3+b
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		4+b
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		5+b
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		6+b
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		7+b
8	8	9	10	11	12	8+5	14	15	16	17	18		8+b
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		9+b
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		10+b
							x+7						
												u+v	
a	a+0	a+1	a+2	a+3	a+4	a+5	a+6	a+7	a+8	a+9	a+10		a+b

4. *Broj 1 i sabiranje.* — 1) Ako je A ma koja konačna množina i ako je $k(A)=a$, onda je $k(A \cup \{0\})=a+1$.

2) Ako je (§ 11.1, t. **3**) $a=1$, množina N_a poklapa se sa N_1. Međutim, $N_1=N \setminus \{0\}$, tj. N_1 izvodi se iz N zamenjujući svaki element b, množine N elementom koji neposredno sledi:

$$N=\{0, 1, 2, 3, \ldots, \quad b, \ldots\}$$
$$N_1=\{1, 2, 3, 4, \ldots, 1+b, \ldots\},$$

pa je, dakle, $1+b$ *(neposredni) sledbenik broja b.*

Ako je $b=1$, broj $a+1$ je element ranga 1 u N_a, tj. *(neposredni) sledbenik broja a.*

Znači:

Teorema 2. — *Ako je jedan od sabiraka (članova sabiranja) 1, zbir je neposredni sledbenik drugog sabirka* (u množini N).

Drugim rečima, od jednog prirodnog broja prelazi se na njegov (neposredni) sledbenik tako što mu se dodaje 1.

5. *Sabiranje više brojeva, sabiraka.* — 1) Sabiranje

$$a+b+c+d,$$

gde su a, b, c, d prirodni brojevi, vrši se ovako:

$$\begin{aligned} a+b&=p \\ p+c&=q \\ q+d&=s. \end{aligned}$$

§ 11.3. OSOBINE SABIRANJA

1. Neka je $A \cap B = \varnothing$, $k(A)=a$, $k(B)=b$.

Iz $\quad A \cup B = B \cup A \quad$ (§ 2.3)

i $\quad k(A \cup B) = a+b, \quad k(B \cup A) = b+a \quad$ (§ 11.1)

sledi $\quad a+b=b+a$, to jest:

Teorema 3. — *Sabiranje prirodnih brojeva je komutativna operacija.*

2. 1) Neka je $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$,

to jest $\quad (A \cup B) \cap C = \varnothing, \quad A \cap (B \cup C) = \varnothing$, i $k(A)=a$, $k(B)=b$, $k(C)=c$.

Tada je: $k((A \cup B) \cup C) = (a+b)+c, \quad k(A \cup (B \cup C)) = a+b(b+c)$.

A kako je $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad$ (§ 2.3),

iz prethodnog sledi $(a+b)+c=a+(b+c)$, to jest:

Teorema 4. — *Sabiranje prirodnih brojeva je asocijativna operacija.*

2) U § 2.3, t. **3** pokazano je $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$. Iz toga i prethodnog sledi $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$.

3. 1) Posmatrajmo sabiranje više brojeva $a+b+c+d+e+f=s$.

Na osnovu § 11.2, t. **5** ono se može izvršiti ovako:

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=q \\ q+e+f&=s. \end{aligned}$$

Međutim, $\quad q+e+f=q+(e+f)=s \quad$ [t. **2**].

Znači, umesto datog sabiranja možemo napisati:

$$a+b+c+d+(e+f)=s.$$

To isto važi za ma koja dva uzastopna sabirka, tj.:

$$a+b+(c+d)+e+f=s$$
$$a+(b+c)+d+e+f=s, \quad \text{itd.},$$

jer su c i d poslednji sabirci zbira $a+b+c+d=r$, a za $a+b+c$ je to već dokazano (t. **2**).

Teorema 5. — *Pri sabiranju više brojeva (članova) moguće je, ne menjajući krajnji rezultat, dva ma koja uzastopna sabirka zameniti njihovim izvršenim zbirom.* I obrnuto.

2) Na osnovu te teoreme možemo pisati sukcesivno:

$$a+b+(c+d)+e+f=s, \qquad a+b+(c+d+e)+f=s, \qquad a+b+(c+d+e+f)=s,$$

jer smatramo $c+d$ izvršenim zbirom pa ga možemo zameniti zbirom $[(c+d)+e]=(c+d+e)$, itd. Očigledno je da se postupak može primeniti na ma koji broj sabirka, pa imamo:

Teorema 6. — *Pri sabiranju više brojeva moguće je, ne menjajući krajnji rezultat, zameniti više uzastopnih sabiraka njihovim izvršenim zbirom.*

Time je *uopštena (generalisana) asocijativnost sabiranja.*

4. 1) Posmatrajmo ponovo sabiranje više brojeva

$$a+b+c+d+e+f=s.$$

Na osnovu prethodnog (asocijativnosti), to sabiranje možemo napisati ovako: $\quad a+b+(c+d)+e+f=s.$

Zatim, na osnovu komutativnosti (t. **1**), $\quad a+b+(d+c)+e+f=s,$

i najzad, $\quad a+b+d+c+e+f=s,$

jer, na osnovu asocijativnosti, zagrade se mogu izostaviti.

Poslednje sabiranje razlikuje se od datog samo time što su članovi (sabirci) c i d promenili mesta. Otuda:

Teorema 7. — *Pri sabiranju više brojeva moguće je, ne menjajući krajnji rezultat, promeniti mesto* (permutovati, § 10.4, t. **3**) *dva uzastopna sabirka.*

2) Jasno je da se, na osnovu te teoreme, mogu zameniti mesta članova c i e, b i d, zatim c i f, a i d, itd. Dakle:

Teorema 8. — *Pri sabiranju više sabiraka krajnji rezultat ne zavisi od reda sabiraka (članova).*

Time je *uopštena (generalisana) komutativnost sabiranja.*

Na osnovu toga i generalisane asocijativnosti, a pod uslovom da a, b, c, d, p, q, x, y, z označavaju prirodne brojeve, možemo napisati:

$$\begin{aligned} &a+b+c+d+p+q+x+y+z, \\ &=a+x+p+z+b+y+c+q+d \\ &=z+d+x+a+p+c+b+q+y= \ldots \end{aligned}$$

Napomena 1. — Kako su asocijativnost i komutativnost sabiranja više brojeva (sabiraka) dokazane samo na osnovu:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{i} \quad a+b=b+a,$$

možemo naslutiti (predvideti) da se teoreme 6 i 8 mogu primeniti ne samo na sabiranje nego i na sve druge operacije koje su asocijativne i komutativne.

Napomena 2. — Nije teško izvesti generalisanu asocijativnost i generalisanu komutativnost i iz generalisane asocijativnosti i generalisane komutativnosti unije (§ 2.3, t. **4**). Izvedite.

5. 1) Neka je $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$, $a=k(A)$, $b=k(B)$, $c=k(C)$.

Tada (§ 10.1, t. **3**) iz $a=b$ sledi $a+c=b+c$

to jest $\qquad \forall\, a, b, c \in N\colon\ a=b \Rightarrow a+c=b+c.$

Otuda (neposredna posledica § 10.1, t. **3**):

Teorema 9. — *Ako se obema stranama jednakosti između prirodnih brojeva doda isti broj, ponovo se dobija jednakost.*

Najčešće se ta teorema izražava kratko:

Svakoj strani jednakosti može se dodati isti broj.

2) Neka je $\qquad a=b$ i $c=d$

Na osnovu prethodne teoreme: $a=b \Rightarrow a+c=b+c,$

$$c=d \Rightarrow b+c=b+d,$$

pa iz tranzitivnosti relacije $=$ sledi $\ a+c=b+d,$

tj. $\qquad \forall\, a, b, c \in N\colon\ (a=b \text{ i } c=d) \Rightarrow a+c=b+d.$

Znači:

Teorema 10. — *Ako su date dve jednakosti, između prirodnih brojeva, sabiranjem njihovih levih i desnih strana ponovo se dobija jednakost.*

3) Prethodne činjenice možemo da pokažemo (i proširimo) i ovako:

U množini $N_a=\{a, a+1, a+2, \ldots, a+x \ldots\}$ je, po definiciji, broj $a+x$ ranga x, a broj $a+x'$ je ranga x'.

Da bi brojevi $a+x$ i $a+x'$ bili jednaki, nužno je i dovoljno da oni budu istog ranga, u N_a, tj. da je $x=x'$. Otuda ekvivalencija:

$$a+x=a+x' \Leftrightarrow x=x'.$$

Da bi broj $a+x$ bio manji od $a+x'$, nužno je i dovoljno da, u N_a, rang x bude niži od ranga x'. Dakle, još jedna ekvivalencija:

$$a+x<a+x' \Leftrightarrow x<x'.$$

Ako skupimo obe ekvivalencije, dobijamo opet ekvivalenciju:

$$a+x \leqslant a+x' \Leftrightarrow x \leqslant x'.$$

Otuda:

Teorema 11. — *Ako je data jednakost ili nejednakost između prirodnih brojeva, moguće je od obeju strana ukloniti ili obema stranama dodati isti broj.*

Iz tako formulisane teoreme neposredno slede ove važne posledice (gde a, b, c, a', b', c' označavaju prirodne brojeve):

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} a=a' \\ b=b' \\ c=c' \end{array}\right\} \Rightarrow a+b+c=a'+b'+c',$$

jer ako se u zbiru $a+b+c$ neki član x zameni jednakim članom x', zbir se ne menja (to tvrdi teor. 11), pa je moguće sabirati sve leve i sve desne strane više jednakosti.

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} a<a' \\ b<b' \\ c<c' \end{array}\right\} \Rightarrow a+b+c<a'+b'+c',$$

jer ako se u zbiru $a+b+c$ neki član x zameni većim članom x', onda zbir postaje veći, pa je moguće sabirati sve leve i sve desne strane više nejednakosti (u striktnom smislu).

Ako skupimo ujedno (1) i (2), dobijamo:

$$(3) \qquad \left.\begin{array}{l} a\leqslant a' \\ b\leqslant b' \\ c\leqslant c' \end{array}\right\} \Rightarrow a+b+c\leqslant a'+b'+c'.$$

§ 11.4. SABIRANJE I POREDAK (RED)

Poslednje implikacije prethodnog paragrafa izražavaju relacije reda koje proizlaze iz operacije sabiranja. One se mogu izvesti i iz ovih relacija:

$$(1) \ \left\{\begin{array}{l} a\leqslant a+b \\ b\leqslant a+b \end{array}\right. \qquad (2)\ a\leqslant b \Leftrightarrow b=a+c$$

$$(3)\ a\leqslant b \Rightarrow a+c\leqslant b+c$$

koje su značajne i same po sebi, pa ih treba obrazložiti.

1. Pre svega, ako su a i b dva prirodna broja, zašto ne pišemo $a<a+b$, nego $a\leqslant a+b$?

Zato što može biti $b=0$, pa je tada $a=a+0$. I slično u $b\leqslant a+b$.

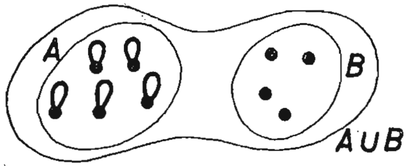
Svaka od tih formula izražava činjenicu:

Sabirak je manji od zbira ili najviše jednak zbiru.

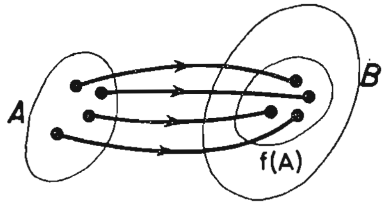
Iako izgleda očigledna, tu činjenicu treba obrazložiti. U tu svrhu posmatrajmo množine A i B koje zadovoljavaju uslove:

$$a=k(A), \quad b=k(B), \quad A\cap B=\varnothing.$$

Tada je $a+b=k(A\cup B)$, pa dokazati $a\leqslant a+b$ znači dokazati $k(A)\leqslant k(A\cup B)$. Ovo, pak, znači da postoji aplikacija $A\to A\cup B$ ili, što je isto, da postoji bižekcija množine A i dela množine $A\cup B$ (sl. 11.2).



Slika 11.2



Slika 11.3

2. Neka je $A\cap B=\varnothing$ i $k(A)\leqslant k(B)$, $k(A)=a$, $k(B)=b$.

Tada postoji aplikacija u $f\colon A\to B$

ili, što je isto, bižekcija $f\colon A\to f(A)$ (sl. 11.3).

Znači, postoji množina $C=B\setminus f(A)$,

odakle je: $B=(f(A))\cup C)$ i $(f(A))\cap C)=\varnothing$,

pa imamo: $b=k(B)=k(f(A))+k(C)=k(A)+k(C)$,

tj. $b=a+c$, gde je $c=k(C)$.

Otuda:

Teorema 12. — *Ako a i b označavaju prirodne brojeve,* $a\leqslant b\Leftrightarrow$ *postoji broj c takav da je* $b=a+c$.

3. Pokažimo: $a\leqslant b\Rightarrow a+c\leqslant b+c$.

Na osnovu prethodne teoreme $a\leqslant b\Leftrightarrow b+x$. Odatle je

$$b+c=a+x+c,\quad \text{tj.}\quad b+c=(a+c)+x,$$

i konačno (teor. 12) $a+c\leqslant b+c$ [Teor. 11.].

4. Ako primenimo metodu kojom smo dokazali teor. 10, imamo:

$$(1)\ \begin{matrix} a\leqslant b\Rightarrow a+c\leqslant b+c \\ c\leqslant d\Rightarrow c+b\leqslant d+b, \end{matrix}\quad \begin{bmatrix}\text{Prethodna} \\ \text{teorema, tj. t. } \mathbf{3}.\end{bmatrix}$$

tj. (komut. sab.) (2) $c\leqslant d\Rightarrow b+c\leqslant b+d$,

tj. [tranzitivnost (1) i (2)] $a+c\leqslant b+d$.

Dakle: $a\leqslant b$ i $c\leqslant d\Rightarrow a+c\leqslant b+d$, što nije ništa drugo nego posledica (3), § 11.3.

§ 11.5. VEŽBANJA I ZADACI

1. Sima (učenik sa sela koga svi poznajemo) sastavio je množinu (od životinja koje on ima u dvorištu):

$$E=\{\text{pas, mačka, krava, konj, petao}\}.$$

Njegov brat je od životinja u istom dvorištu sastavio množinu:

$$F=\{\text{ćuran, vo, pas, svinja, konj}\}.$$

Dovršite: $E\cup F=\ldots$; $k(E)=\ldots$; $k(F)=\ldots$; $k(E\cup F)=\ldots$

Zašto $k(E\cup F)\neq k(E)+k(F)$?

2. Neka su množine A i B sastavljene od moje odeće i drugih mojih stvari i neka je:

$$A=\{\text{šešir, kaput, novčanik}\}$$
$$A\cup B=\{\text{šešir, kaput, džemper, novčanik}\}.$$

Sastavite množinu B tako da je $A\cap B=\varnothing$.

3. Sastavite množine tako da je:
(1) $k(A\cup B)=k(B)+k(A)$;
(2) $k(C\cup D)<k(C)+k(D)$;
(3) $k(E\cup F)>k(E)+k(F)$;
(4) $k((A\cup B)\cap C)=k(A)+k(B)+k(C)$;
(5) $k(M_1\times M_2)=k(M_1)+k(M_2)$.

4. Izračunajte na više načina:
(1) $17+23+3$;
(2) $320+170+180$;
(3) $36+59+24+31$;
(4) $192+68+102+208$;
(5) $4+13+24+27+96+6+58+26+50+2$.

5. Je li tačno $(a+b)+(c+d)=(a+c)+(b+d)=(b+c)+(a+d)$ i zašto?

6. Dovršite: (1) $(m_1\leqslant m_2$ i $n_1\leqslant n_2)\Rightarrow m_2+n_2\ldots m_1+n_1$.
(2) $(100>70$ i $1\,000>300)\Rightarrow(100+1\,000)\ldots(70+300)$.

7. Napravite što veću mrežu (tablicu) sabiranja.

1) Nacrtajte polupravu koja izlazi iz nule a koja sadrži npr. brojeve 4 i 8. Ona se zove *dijagonala* mreže. Koji uređeni parovi sabiranja daju brojeve (zbirove) mreže (tablice) „kroz" koje prolazi dijagonala? Napišite njihov opšti oblik.

2) Uočite brojeve $7+3$ i $3+7$, uopšte $x+y$ i $y+x$. Oni su *simetrični* u odnosu na dijagonalu. Objasnite to bliže.

3) Uočite sve brojeve mreže do $x+x$, na primer do $7+7$. Svi oni pripadaju unutrašnjosti kvadrata čije dve „stranice" čine brojevi 7, 8, . . . , 14. Izračunajte zbir „stupca" 0 (stupca koji počinje nulom), „stupca" 1 i „stupca" 2 i pronađite postupak za izračunavanje zbira svakog sledećeg „stupca". Obrazložite tu činjenicu. Uopštite, tj. obrazložite da to važi za „stupce" i redove ma kojeg kvadrata.

4) Uočite red 3 (red koji počinje brojem 3) i red 8. Izračunajte zbir brojeva (3, 2), tj. 5, i (8, 4), tj. 12, a zatim (8, 2) i (3, 4). Šta primećujete? Nađite i druge. Važi li to za ma koje dva reda? Uopštite.

8. Neka a, b, c označavaju prirodne brojeve.
1) Koja relacija postoji između a i b, ako je $a=b+c$?
2) Je li tačno: (1) $a>a$; (2) $(a>b$ i $b>c)\Rightarrow a>c$?

Rezime

1. Definicije sabiranja:

1) Ako je $x=k(X)$, $y=k(Y)$, $X\cap Y=\varnothing$, zbir $x+y=k(X\cap Y)$. Izračunavanje zbira $x+y$ zove se sabiranje.

2) Sabiranje je funkcija koja svakom uređenom paru prirodnih brojeva pridružuje (korespondira) prirodni broj, tj.

$s: N \times N \to N$; $(x, y) \to x+y$, koji se zove zbir brojeva x i y.

3) Zbir $a+b$ je element množine N_a koji odgovara elementu b množine N_a. Operacija koja svakom uređenom paru (a, b) prirodnih brojeva pridružuje njihov zbir $a+b$ zove se sabiranje.

4) $a+b+c+d+e=\{[(a+b)+c]+d\}e$.

2. Osobine sabiranja:

(1) komutativnost $x+y=y+x$ i generalisana komutativnost;
(2) asocijativnost $(x+y)+z=x+(y+z)$ i generalisana asocijativnost;
(3) neutralni element $a+0=0$;
(4) $a=b \Rightarrow a+c=b+c$;
(5) $(a=b$ i $c=d) \Rightarrow a+c=b+d$.

3. Sabiranje i poredak (red):

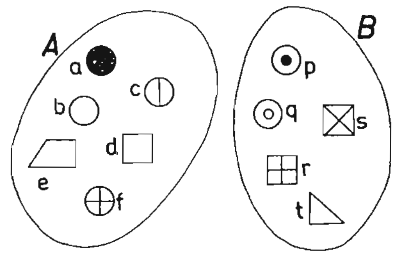
(1) $a \leqslant b+c$; (2) $a \leqslant b \Rightarrow a+b \leqslant b+c$;
(3) $(a \leqslant b$ i $c \leqslant d) \Rightarrow a+c \leqslant b+d$.

GLAVA XII

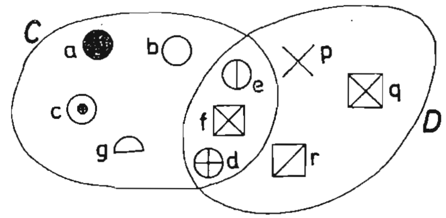
ODUZIMANJE PRIRODNIH BROJEVA

§ 12.1. DEFINICIJE

1. Prema crtežima:



Slika 12.1



Slika 12.2

dovršite (§§ 2.1 i 2.4)

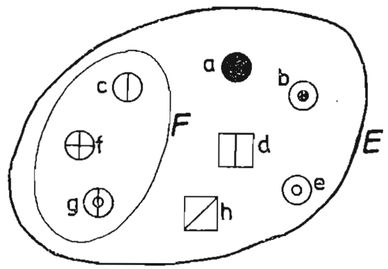
$A \setminus B=$; $C \setminus D=$;
$E \setminus F=\{a, b, c, d, e, f, g, h\} \setminus \{c, f, g\}=$

Na osnovu znanja stečenih u I r. osnovne škole lako izračunavamo:

$k(A)-k(B)=1$, $k(C)-k(D)=1$,
$k(E)-k(F)=5$.

Iz toga i prethodnog sledi da je samo u trećem slučaju:

$k(E) \setminus k(F)=k(E)-k(F)$.



Slika 12.3

Zato definišemo:

Kardinalni broj razlike množine i njene podmnožine zove se razlika kardinalnih brojeva množine i podmnožine.

2. Neka su a i b dva data (poznata) prirodna broja. Postoji li takav prirodni broj x da je $b+x=a$?

Ako postoji, onda je (§ 11.1) $b+x$ broj množine:

$$N_b=\{b, b+1, b+2, \dots, b+x, \dots\}$$

koji odgovara broju x ekvipotentne množine:

$$N=\{0, 1, 2, \dots, x, \dots\}.$$

Iz toga sledi:

(1) da broj $b+x$ može biti jednak broju a samo ako $a \in N_b$, tj. ako je $a \geqslant b$;

(2) ako je taj uslov (1) zadovoljen, broj x odgovara jednom, i samo jednom, broju d množine N, tj. d je jedini prirodni broj takav da je $b+d=a$.

Taj se broj (d) zove *razlika* brojeva a i b i zapisuje se:

$a-b$ (a manje b, ili a minus b);

na primer: $8-5=3$; $79-69=10$; $6-6=0$.

Otuda:

Teorema i definicija. — *Ako prirodni brojevi a i b zadovoljavaju uslov $a \geqslant b$, postoji jedan, i samo jedan, prirodni broj d takav da je $b+d=a$. Taj se broj zove razlika brojeva a i b i zapisuje $a-b$.*

Drugim rečima: Ako su a i b prirodni brojevi i ako je $a \geqslant b$, postoji jedan, i samo jedan, prirodni broj $a-b$ takav da je $b+(a-b)=a$.

Ako je d razlika brojeva a i b, kaže se i: *a veći od b za d* ili *b manji od a za d*. Zato se:

$a+b$ čita i *povećati broj a za broj b*.

$a-b$ čita i *smanjiti broj a za broj b*.

Izračunavanje razlike datih brojeva a i b zove se oduzimanje.

Oduzimanje je operacija koja svakom uređenom paru prirodnih brojeva a i b, koji zadovoljavaju uslov $a \geqslant b$, pridružuje njihovu razliku d.

Broj a se zove umanjenik, a broj b se zove umanjilac:

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{a}^{\text{umanjenik}} - \overbrace{b}^{\text{umanjilac}}}_{\text{članovi oduzimanja}} = \underbrace{d}_{\text{razlika}}}_{\text{oduzimanje}}$$

§ 12.2. NEPOSREDNE POSLEDICE DEFINICIJA

1. 1) Oduzimanje se može izraziti i ekvivalencijom

$$b+d=a \Leftrightarrow d=a-b, \quad a \geqslant b.$$

Ona pokazuje da se oduzimanje pojavljuje kao određivanje jednog sabirka d kad su dati zbir a i drugi sabirak b. Ta se činjenica izražava rečima:

Oduzimanje je obrnuta (inverzna) operacija sabiranju.

To se vidi i iz prve definicije (§ 12.1, t. **1**) jer: Zbir dva broja je (§ 11.1, t. **1**) kardinal dveju disjunktivnih množina, a razlika dva broja je kardinal jedne od tih množina kad su date ona druga i njihova unija. Dakle, ako je $a=b+d$, onda je $a-b=d$ ili $a-d=b$; na primer: $7+5=12$, $12-7=5$, $12-5=7$.

2) Posebnu pažnju zaslužuje pisanje u obliku:

$$(b+d)-b=d, \quad (b+d)-d=b$$

i isto tako $(a-b)+b=a$,

jer te jednakosti izražavaju „uzajamno poništavanje" sabiranja i oduzimanja.

2. Sastavite „mrežu" (tablicu) oduzimanja. Do koje poluprave ona postoji?

3. *Broj nula i oduzimanje.* — Kad je razlika dva prirodna broja a i b nula? Kad je $a=b$, jer je tada $a=b-0$. Prema tome, kad je $a=0$ i $b=0$.

Dakle: $a-b=0$, kad je $a=b$; $0-0=0$.

Dovršite $a-0=$ (kad $a \neq 0$).

4. *Broj 1 i oduzimaje.* — U slučaju $a=1$ može biti:

$b=1$ i tada je $d=$

Ako je $b=0$, jednakost $1+d=a$ pokazuje da je a neposredni sledbenik (u N) broja d (što se vidi i iz $d=a-1$).

Znači, da su dva prirodna broja m i n uzastopna, može se zapisati: ili $n=m+1$, ili $n-1=m$, ili $n-m=1$.

5. 1) Iz $a-b=d$ sledi (definicija) $a=d+b$.

Dalje je (§ 11.4, t. **3** i **4** ili teor. 10) $a+n=d+b+n$,

to jest (§ 11.3, t. **2**) $a+n=d+(b+n)$,

tj. (definicija oduzimanja) $\underline{(a+n)-(b+n)=d}$.

2) Iz $a-b=d$

sledi $a=d+b$,

a odatle [§ 11.3, teor. 11, tj. posledica (1)] $(a-n)=d+b-n$,

to jest (definicija oduzimanja) $\underline{(a-n)-(b-n)=d}$.

Šta pokazuju date i dobijene jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} a-b&=d \\ (a+n)-(b+d)&=d \\ (a-n)-(b-n)&=\mathrm{d} \end{aligned}\right\} \text{Iskažite (napišite) rečima te činjenice.}$$

§ 12.3. ARITMETIČKI POLINOMI. SABIRANJE I ODUZIMANJE ZBIROVA I RAZLIKA

1. Sabiranje brojeva a i b zapisuje se: $a+b$.

Oduzimanje broja c od broja $a+b$ zapisuje se: $a+b-c$.

Oduzimanje broja d od broja $a+b-c$ zapisuje se: $a+b-c-d$.

Dodavanje broja e broju $a+b-c-d$ (ili, što je isto, § 12.1, t. **2**, povećavanje broja $a+b-c-d$ za broj e) zapisuje se: $a+b-c-d+e$; to se zove *aritmetički polinom*.

Označeni niz sabiranja i oduzimanja zove se aritmetički polinom.

Aritmetički polinom sastoji se, dakle, od „sabiraka" (članova ispred kojih je znak $+$) i „umanjilaca" (članova ispred kojih je znak $-$).

Neka je $a+b-c-d+e=r.$

Broj r zove se *rezultat* ili *„vrednost"* (napisanog) aritmetičkog polinoma; na primer: $7-5+6-3-2=3.$

2. 1) Neka je data razlika $x=a-(b+c),$

koju treba izračunati. Pod kojim uslovima je to moguće? Samo ako je $a \geqslant (b+c)$, tj. $a>b$, $a>c$.

Na osnovu § 12.2, t. **5** je: $x=(a-b)-[(b+c)-b],$

to jest (§ 12.2, t. **1, 2**): $x=a-b-c.$

Dakle: $a-(b+c)=(a-b)-c.$

Teorema 1. — *Zbir $b+c$ može se oduzeti od a i tako što se od a prvo oduzme b, a od dobijene razlike (oduzme se) c.*

2) Treba izračunati razliku: $x=a-(b-c).$

Kad je to moguće?

Datu jednakost možemo napisati ovako (na osnovu čega?):

$$x=(a+c)-(b-c)+c$$

to jest (obrazložite): $x=(a+c)-b.$

Dakle: $a-(b-c)=(a+c)-b.$

Teorema 2. — *Razlika $b-c$ može se oduzeti od a (i) tako što se umanjenik (b) oduzme, a (dobijenom rezultatu) umanjilac (c) dodaje.*

3) Kako ćemo izračunati zbir: $x=a+(b-c)$?

Na osnovu § 11.4, t. **3** i **4** je: $x+c=a+(b-c)+c.$

Dalje je (na osnovu čega?): $x+c=a+b,$

to jest (definicija . . .): $x=(a+b)-c.$

Znači: $a+(b-c)=(a+b)-c.$

Teorema 3. — *Razlika $b-c$ može se dodati broju a (i) tako što se umanjenik dodaje a (od dobijenog rezultata) umanjilac oduzme.*

3. Pomoću tri prirodna broja a, b, c mogu se sastaviti polinomi:

$$t=a+b+c, \quad u=a-b-c, \quad v=a+b-c, \quad w=a-b+c,$$

pod uslovom, razumljivo, da se oduzimanja mogu izvršiti, tj. da brojevi u, v, w postoje.

Broj u se može izračunati oduzimanjem zbira $b+c$ od a (prethodna t. pod 1), tj. $u=a-b-c=a-(b+c).$

Broj v se može izračunati oduzimanjem broja c od zbira $a+b$, tj.

$$v=a+b-c=(a+b)-c.$$

Broj w se može smatrati zbirom broja c i broja $a-b$, tj. $w=c+(a-b)$, a na osnovu teor. 3 $w=(c+a)-b$.

Dobijeni rezultati pokazuju da se svaki od već napisanih polinoma može napisati kao *razlika čiji je umanjenik zbir svih sabiraka a umanjilac zbir svih umanjilaca*, to jest:

$$t=s-s', \text{ gde je } s=a+b+c, \quad s'=0,$$
$$u=s-s', \text{ gde je } s=a, \quad s'=b+c$$
$$v=s-s', \text{ gde je } s=a+b, \quad s'=c$$
$$w=s-s', \text{ gde je } s=a+c, \quad s'=b.$$

4. Prethodna osobina važi za polinom od 3 člana. Dopustimo da ona važi za polinom od p članova, tj.:

$$r=\underbrace{a-b+c+d-e-f-g}_{p \text{ članova}}=s-s',$$

gde je $s=a+c+d, \quad s'=b+e+f+g,$

i dodajmo tom polinomu nov član h.

Ako je h „sabirak", novi polinom glasi: $y=s-s'+h=(s+h)-s'$.

Ako je h „umanjilac", novi polinom glasi: $z=s-s'-h=s-(s'+h)$.

Dakle, i novi polinom, koji ima $q=p+1$ članova, javlja se u obliku razlike čiji je umanjenik zbir svih „sabiraka" a umanjilac zbir svih „umanjilaca". Otuda:

Teorema 4. — *Rezultat („vrednost") polinoma može se izračunati tako što se od zbira svih „sabiraka" oduzme zbir svih „umanjilaca".*

Takvo se izračunavanje zove *svođenje* polinoma. Očigledno je da svođenje polinoma ne zavisi od reda članova, tj.:

$$a-b+c+d-e-f-g=a+c-b-e-q+d-f$$
$$=d-e+a-g+c-f-b= \ldots$$

Izračunajte: $3-8-17+40-20+57-3.$

5. Kako se sabiraju i oduzimaju polinomi?

Neka su dati polinomi: $p=a-b+c$, $q=d-e-f+g-h$.

1) Izračunajmo $p+q$. Pišemo:

$$p+q=p+(d-e-f+g-h)$$
$$=p+(s-s'), \text{ gde je: } s=d+g$$
$$s'=e+f+h.$$

to jest: $p+q=p+s-s'$

$=p+d+g-e-f-h,$

ili: $=p+d-e-f+g-h$ (nezavisno od reda).

Teorema 5. — *Polinom se dodaje tako što svaki njegov „sabirak" ostaje sabirak, svaki njegov „umanjilac" ostaje „umanjilac".*

2) Izračunajmo $p-q$.

$$p-q=p-(d-e-f+g-h),$$

tj.: $=p-(s-s'),$

tj. (teor. 2): $=p-s+s',$

tj.: $=p-(d+g)+(e+f+h),$

tj. (teor. 1): $=p-d-g+e+f+h.$

Znači: $p-(d-e-f+g-h)=p-d+e+f-g+h.$

Teorema 6. — *Polinom se oduzima tako što se svaki njegov „sabirak" oduzima, a svaki „umanjilac" dodaje* (tj. nad svakim članom se vrši inverzna operacija od one koja je označena).

3) Na osnovu prethodne dve teoreme pišemo:

$$a+(b-c-d+e+f-h)=a+b-c-d+e+f-h$$
$$a-(b-c-d+e+f-h)=a-b+c+d-e-f+h.$$

I obrnuto: $a+b-c-d+e+f-h=a+b-c+(-d+e+f-h)$
$=a+b-c-(d-e-f+h)$
$=a-(-b+c+d-e-f+h).$

Na primer: $5-13+7-4-9+30=5+(7-13-4-9+30)$
$=5-(13-7+4+9-30).$

6. Da li:

(1) $a,\ b,\ c\in N$ i $c\leqslant a$: $a=b\Rightarrow a-c=b-c$?

(2) $a,\ b,\ c,\ d\in N$ i $c\leqslant a,\ d\leqslant b$: $(a=b,\ c=d)\Rightarrow a-c=b-d$?

(3) $a,\ b,\ c\in N$ i $c<a,\ c<b$: $a<b\Rightarrow a-c<b-c$?

§ 12.4. VEŽBANJA I ZADACI

1. $C=\{$Negotin, Zaječar, Niš, Leskovac, Valjevo$\}$.

$D=\{$Kragujevac, Kraljevo, Čačak, Titovo Užice$\}$.

$E=\{$Šabac, Ruma, Novi Sad, Niš, Kraljevo$\}$.

$F=\{$Zaječar, Valjevo, Niš$\}$.

$H=\{$Zagreb, Sarajevo, Dubrovnik, Vukovar, Sisak$\}$.

$G=\{$Zrenjanin, Beograd, Titovo Užice, Titograd, Kragujevac, Bihać, Kraljevo, Čačak$\}$.

$K=\{$Ruma, Niš, Kraljevo, Šabac$\}$.

Neka X i Y, $X\neq Y$, označavaju ma koje dve od tih množina. Napišite sve slučajeve kad je:

(1) $k(X\cup Y)=k(X)+k(Y)$; (2) $k(X\setminus Y)=k(X)-k(Y)$.

2. 1) Neka je $k(A)=13$, $k(B)=17$, $k(A\cup B)=25$. Izračunajte: $k(A\cap B)$; $k(A\setminus B)$; $k(B\setminus A)$.

2) Neka je $k(A)=19$, $k(B)=5$, $k(B\cup A)=19$. Izračunajte: $k(A\cap B)$; $k(A\setminus B)$; $k(B\setminus A)$.

3) Neka je $k(A)=31$, $k(B)=29$, $k(A\cup B)=60$. Izračunajte $k(A\cap B)$; $k(A\setminus B)$; $k(B\setminus A)$.

U kojim slučajevima je $k(A\setminus B)=k(A)-k(B)$?

3. U školi koju svi znamo ima 215 đaka. Svaki je obavezno upisan bar u jednu od tri sekcije: sportsku, muzičku, pozorišnu.

153 đaka upisana su samo u po jednu sekciju. Od njih je upisano u sportsku sekciju 75 a u muzičku 38. 25 đaka upisana su u sve tri sekcije. U sportskoj sekciji ima 130 đaka. Među njima ima podjednako glumaca i muzičara.

Izračunajte broj članova muzičke sekcije i broj članova pozorišne sekcije.

4. Izračunajte nepoznati broj u $a=b+d$, kad je: (1) $a=20$, $b=17$; (2) $a=5$, $d=3$; (3) $a=333$, $b=333$; (4) $a=10$, $d=10$; (5) $a=101$, $d=101$.

5. 1) Neka je $x+y=7$. Umesto kojih prirodnih brojeva stoje slova x i y?

Jedan odgovor (jedno rešenje) jeste: $x=0$, $y=7$, što zapisujemo ovako (0, 7). Još neka rešenja jesu: (1, 6), (2, 5), ...

Napišite sva rešenja date jednakosti.

2) Neka x i y označavaju prirodne brojeve. Napišite sva rešenja svake od sledećih jednakosti:

(1) $x+y=5$; (3) $x+y=3$; (5) $x+y=1$;
(2) $x+y=4$; (4) $x+y=2$; (6) $x+y=0$.

3) Izbrojte sva rešenja svake jednakosti.

4) Uopšte, kako se određuju sva rešenja jednakosti $x+y=n$ $(n\in N)$ i koliko ih ima?

5) Svako od rešenja jednakosti pod 2) i 4) je uređen par, prirodnih brojeva. Konstruišite mrežu proizvoda $N\times N$ i označite sva rešenja svake jednakosti. Kojoj liniji pripadaju sva rešenja određene jednakosti?

6. 1) Koje prirodne brojeve zamenjuju slova x i y u slučaju: $x+y<6$?

2) Odredite množinu tačaka (x, y) u $N\times N$ kad x i y zadovoljavaju napisanu nejednakost.

3) Isto kad je nejednakost $x+y=n\in N$.

7. Sva rešenja jednakosti $x+y+z=5$ možete dobiti stavljajući redom umesto z brojeve 0, 1, 2, 3, 4, 5 i rešavajući u svakom od tih slučajeva jednakost $x+y=n$. Prema tome, treba naći sva rešenja jednakosti $x+y=5$, $x+y=4$ itd. Jedno rešenje jednakosti $x+y+z=5$ je, dakle, [0, 5, 0], drugo je [2, 2, 1]. Nađite sva rešenja i izbrojte ih.

8. 1) Dat je niz brojeva 13, 11, 8, 6, 5, 3, 1. Stavite:

$$s_1=13,\ s_2=13-11,\ s_3=13-11+8,\ s_4=13-11+8-6, \text{ itd.}$$

Proverite:

(1) da se svaki broj niza $s_1, s_2, s_3, \ldots$, počev od trećeg, nalazi između prethodna dva;

(2) da je svaki broj niza $s_1, s_3, s_5, \ldots$, počev od drugog, manji od prethodnog;

(3) da je svaki broj niza $s_2, s_4, s_6, \ldots$, počev od drugog, veći od prethodnog.

2) Napisani niz 13, 11, 8, ... zadovoljava samo jedan uslov: svaki sledeći broj je manji od prethodnog. Napišite i sami takve nizove i proverite prethodne činjenice.

Rezime

1. 1) Ako je $B\subseteq A$, onda je $k(A\setminus B)=k(A)-k(B)$. I taj se broj zove razlika kardinala množine A i množine B.

2) Ako su a i b prirodni brojevi i ako je $a\geqslant b$, uvek postoji jedan jedini prirodni broj d takav da je $b+d=a$. Taj se broj zove razlika brojeva a i b.

3) Operacija koja svakom uređenom paru $a\geqslant b$ prirodnih brojeva pridružuje njihovu razliku zove se oduzimanje.

2. 1) Oduzimanje nije ni komutativno ni asocijativno.

2) $a-b=d \Rightarrow (a \pm n)-(b \pm n)=d$. 3) $a-0=a$, $0-0=0$.

3. 1) Niz označenih sabiranja i oduzimanja, pod uslovom da se oduzimanja mogu izvršiti, zove se aritmetički polinom.

2) Sabiranje i oduzimanje polinoma vrši se na osnovu tri formule:

$$a+(b-c)=a+b-c, \quad a-(b+c)=a-b-c, \quad a-(b-c)=a-b+c.$$

3) Ako je s zbir svih članova datog polinoma koji se dodaju (svih „sabiraka") a s' zbir svih onih članova koji se oduzimaju (svih „umanjilaca"), $s-s'=r$ zove se rezultat izvršenih operacija ili „vrednost" datog polinoma.

GLAVA XIII

MNOŽENJE PRIRODNIH BROJEVA

§ 13.1. DEFINICIJE

1. 1) Neka je $A=\{a, b, c\}$, $B=\{m, n, p, q, r\}$. Nacrtajte sagitalnu šemu (§ 3.3) proizvoda $A \times B$ i izbrojte strelice.

Napišite graf proizvoda $A \times B$ (§ 3.2):

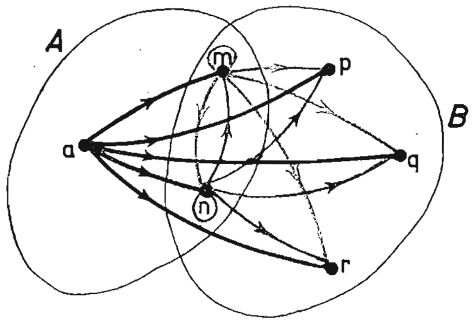
$A \times B=\{(a, m), (a, n), \ldots, (a, r), (b, m), \ldots, (b, r), (c, m), \ldots, (c, r)\}$ i izbrojte njegove parove (elemente).

Broj strelica je 15, jer iz svakog elementa množine A izlazi 5 strelica (za svaki dolazni element jedna), tj. $5+5+5=15$.

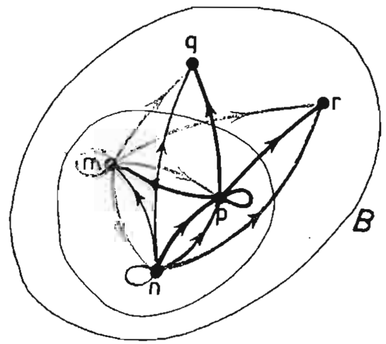
Broj uređenih parova elemenata grafa množine $A \times B$ ne može biti drugi, jer svaka strelica označava jedan par.

2) Da li je uvek tako? Uzmite slučajeve kad množine imaju zajedničke elemente, npr.:

$A=\{a, m, n\}$, $B=\{m, n, p, q, r\}$; $\quad A=\{m, n, p\}$, $B=\{m, n, p, q, r\}$.



Slika 13.1



Slika 13.2

To je razumljivo, jer je $\{m, n, p\} \times \{m, n, p, q, r\}=\{(m, m), (m, n) \ldots\}$.

Štaviše (§ 3.2): $\{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}=(a, a), (a, b), \ldots (d, a) \ldots, (d, d)\}$.

Neka su A i B konačne množine. *Kardinalni broj množine $A \times B$, tj. broj uređenih parova (elemenata, strelica) množine $A \times B$, zove se proizvod kardinalnih brojeva množina A i B i simbolima se označava ovako*: $k(A) \cdot k(B)$.

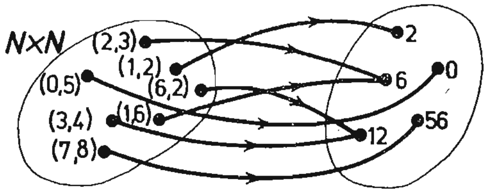
Znači: $k(A \times B)=k(A) \cdot k(B)$.

Prema toj definiciji, proizvod dva broja *uvek postoji* i *jedinstven je*, tj. proizvod je *određen*.

Izračunavanje proizvoda (kardinalnog broja dveju konačnih množina zove se množenje tih brojeva.

Množenje je operacija koja svakom paru prirodnih brojeva pridružuje njihov proizvod. Ili (opštije):

Množenje je funkcija koja svakom uređenom paru (x, y) prirodnih brojeva pridružuje prirodni broj koji se zove proizvod brojeva x i y.



Slika 13.3

Taj se proizvod označava $x \cdot y$ ili xy a čita „y puta x".

Simbolima:

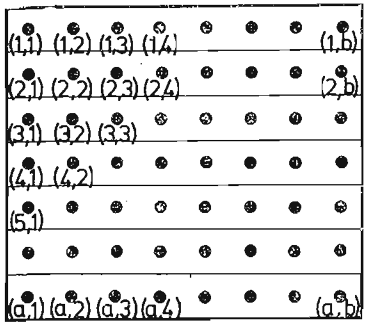
$$f: N \times N \to N: \ (x, y) \to x \cdot y.$$

2. Prema prethodnom, za izračunavanje proizvoda $a \cdot b$ (ili ab) prirodnih brojeva a i b treba sastaviti množine A i B tako da je $k(A)=a$, $k(B)=b$, jer je $a \cdot b = k(A \times B)$.

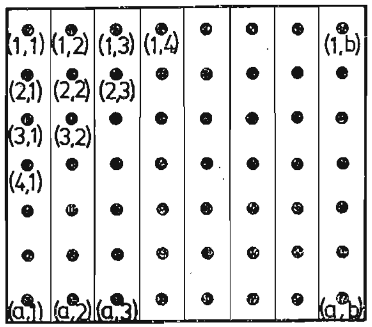
Kako je $a=k(\{1, 2, 3, \ldots, a\})$, $b=k(\{1, 2, 3, \ldots, b\})$ imamo (§ 3.2):

$$a \cdot b = k(\{1, 2, \ldots, a\} \times \{1, 2, \ldots, b\}) = k \begin{pmatrix} \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, b) \\ (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, b) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a, 1), (a, 2), \ldots, (a, b)\} \end{pmatrix}$$

To znači da se množina $\{1, 2, \ldots, a\} \times \{1, 2, \ldots, b\}$ može prikazati ovako:



Slika 13.4



Slika 13.5

A to nije ništa drugo nego particija (§ 2.7) množine $\{1, 2, \ldots, a\} \times \{1, 2, \ldots, b\}$ na a delova. Kardinalni broj svakog dela je b, dakle:

$$a \cdot b = \underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a \text{ sabiraka}}$$

Međutim, crtež 13.5 prikazuje particiju iste množine na b delova. Kardinalni broj svakog dela je a, dakle $a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{a \text{ sabiraka}}.$

Na primer:

$$5 \cdot 3 = \left.\begin{matrix} \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5) \\ (3, 1), (3, 2) \ (3, 3), (3, 4), (3, 5)\} \end{matrix}\right] \text{ to jest } 5 \cdot 3 = 5+5+5;$$

$$3 \cdot 5 = \left.\begin{matrix} \{(1, 1), (2, 1), (3, 1) \\ (1, 2), (2, 2), (3, 2) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3)\} \end{matrix}\right] \text{ to jest } 3 \cdot 5 = 3+3+3+3+3.$$

Prema tome, *množenje dva prirodna broja svodi se na sabiranje jednakih sabiraka*:

$$a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b \text{ sabiraka}} = \underbrace{b+b+\ldots+b}_{a \text{ sabirarka}}$$

3. Ako paru (a, b) prirodnih brojeva množenje korespondira broj p, tj. ako je $a \cdot b = p$, onda se brojevi a i b zovu *činioci*, $a \cdot b$ ili ab zove se *označeni proizvod*, a p je *izračunati proizvod*.

4. Već je napomenuto da je proizvod dva ma koja prirodna broja određen prirodni broj. To sledi i iz poslednje definicije: Množenje je sabiranje jednakih sabiraka. Ta se činjenica izražava i rečima: *Množenje u N je interna (unutrašnja) operacija*. Ili: *Množina N je zatvorena u odnosu na množenje*.

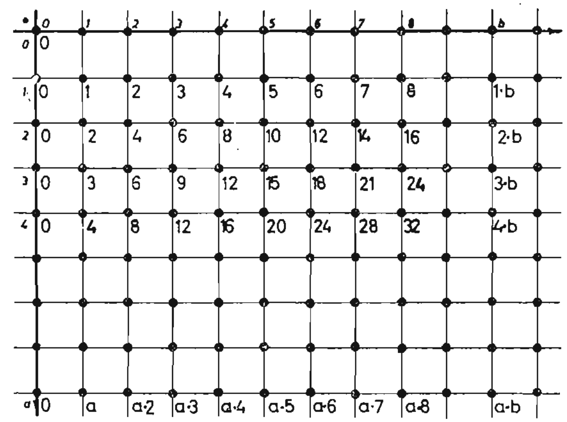
5. Ako se izvrši: množenje $ab=m$,
zatim množenje $mc=n$
i najzad, množenje $nd=p$,

onda se p zove proizvod brojeva a, b, c, d i to zapisuje $abcd=p$.

Na primer: $7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 = \{[(7 \cdot 2) \cdot 4] \cdot 5\} \cdot 3$
$= \{[14 \cdot 4] \cdot 5\} \cdot 3 = \{56 \cdot 5\} \cdot 3 = 280 \cdot 3 = 840.$

§ 13.2. NEPOSREDNE POSLEDICE DEFINICIJA

1. Početak mreže proizvoda $N \times N$ izgleda ovako:



2. *Broj 0 i množenje.* — 1) Neka je $a=k(A)$.

Tada je: $$0\cdot a=k(\varnothing)\cdot k(A)=k(\varnothing\times A)=k(\varnothing)=0;$$
$$a\cdot 0=k(A)\cdot k(\varnothing)=k(A\times\varnothing)=k(\varnothing)=0.$$

Dakle: $0\cdot a=0=a\cdot 0$, to jest:

Teorema 1. — *Ako je jedan činilac 0, proizvod je nula.*

Simbolima se ta teorema izražava: $\boxed{a\in N:\ 0\cdot a=a\cdot 0=0.}$

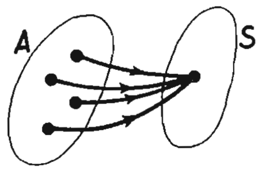
Na primer: $0\cdot 13=13\cdot 0=0$; $9999\cdot 0=0$.

2) Jasno je: $0\cdot 0=0$.

3) Ako je $ab=0$, bar jedan činilac je nula, tj.

$$\forall\, a, b\in N:\ ab=0\Rightarrow(a=0,\ b=0;\ a\ldots).$$

3. *Broj 1 i množenje.* — 1) Proizvod svakog singletona S i ma koje množine A je ekvipotentan množini A, tj. $S\times A\sim A\sim A\times S$ (sl. 13.6).



Slika 13.6

Znači,

$$1\cdot a=k(S)\cdot k(A)=k(S\times A)=k(A)=a$$
$$a\cdot 1=k(A)k(S)=\ldots\qquad =a.$$

Teorema 2. — *Ako je jedan činilac 1, proizvod je jednak drugom činiocu.*

Simbolima: $\boxed{a\in N:\ 1\cdot a=a\cdot 1=a.}$

Broj 1 je neutralni element množenja.

2) Šta možete reći o x ako je $ax=a$? $ax=a\Rightarrow x=1$.
Potvrđuje li to mreža $N\times N$?

3) Šta možete reći o a i b ako je $ab=1$? $ab=1\Rightarrow a=b=1$.
Potvrđuje li to mreža $N\times N$?

§ 13.3. OSOBINE MNOŽENJA

1. Dekartov proizvod nije komutativan (§ 3.2, t. **2**), a proizvod prirodnih brojeva jeste, tj.:

$$A\times B\neq B\times A,\quad\text{a}\quad k(A)\cdot k(B)=k(B)\cdot k(A).$$

Zaista, svakoj strelici (svakom paru) proizvoda $A\times B$ odgovara strelica proizvoda $B\times A$, jer se $B\times A$ dobija iz $A\times B$ obrtanjem smera svake strelice, tj. postoji biżekcija $A\times B\to B\times A$, ili, što je isto, $A\times B\sim B\times A$ (sl. 13.7).

Drugo obrazloženje: Ako su a i b prirodni brojevi, onda je (§ 13.1, t. **3**):

$$ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ sabiraka}}=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ sabiraka}},$$
$$ba=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ sabiraka}}=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ sabiraka}}.$$

Dakle: $\boxed{a,\ b\in N:\ ab=ba}$, to jest:

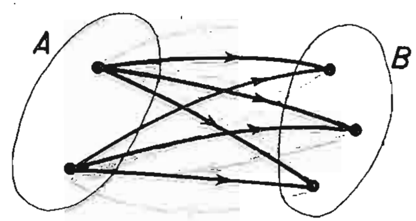
Teorema 3. — *Množenje prirodnih brojeva je komutativna operacija.*

Napomena. U školskoj terminologiji usvojeno je da se govori:

Pomnožiti broj a brojem b, ili (sinonim) *povećati broj a b puta*, i da se to zapisuje $a\cdot b$ (tj. ab).

Usvojeno je, takođe, da se, u tom slučaju (dakle u ab), broj a zove *množenik*, a broj b *množilac*.

Sve je to pedagoški opravdano na izvesnom stupnju* i učenik treba da vodi računa (naročito kad su brojevi imenovani) da je:



$A\times B\neq B\times A$, $k(A)\cdot k(B)=k(B)\cdot k(A)$

Slika 13.7

$$ab=\underbrace{a+a+a+\ldots+a}_{b\text{ sabiraka}},\quad\text{a}\quad ba=\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a\text{ sabiraka}}.$$

Posle dokazane komutativnosti množenja (i posebno kad je reč o prirodnim, dakle neimenovanim brojevima) terba govoriti: *Pomnožiti brojeve a i b*, a (napisano) ab ili ba čitati *proizvod brojeva a i b*.

2. Lako možete pokazati da je $(a\cdot b)\cdot 0=a\cdot(b\cdot 0)$ [§ 13.2, t. **2**, 1)].

Pokažite da je: $(a\cdot 0)\cdot c=a\cdot(0\cdot c)$, $(0\cdot b)\cdot c=0\cdot(b\cdot c)$.

Te tri jednakosti pokazuju da ako je jedan od brojeva a, b, c nula, onda je

$$(ab)c=a(bc).^{**}$$

Da li to važi i kad su sva tri broja različita od nule?

Dokažimo da važi:

Neka su a, b, c tri prirodna broja različita od nule. Tada je (§ 13.1, t. **2**):

$$ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\text{ sabiraka}}=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a\text{ sabiraka}}$$

---

* Videti autorovu *Metodiku savremenog matematičkog obrazovanja*.

** Usvojeno je da se znak množenja ($\cdot$ ili $\times$) izostavi kad god se umesto brojeva pišu slova. Toga ćemo se i mi pridržavati, pa ćemo, na primer, umesto:

$(a\cdot b)\cdot c$	pisati	$(ab)c$,
$(a+b)\cdot c$	pisati	$(a+b)c$,
$(a+b)\cdot(c+d)$	pisati	$(a+b)(c+d)$
$a\cdot m+b\cdot m+c\cdot n$	pisati	$am+bm+cn$, itd.

$$(ab)c=\underbrace{ab+ab+\ldots+ab}_{c\ \text{sabiraka}\ ab}$$

$$=\underbrace{\underbrace{(b+b+\ldots+b)}_{a\ \text{sabiraka}}+\underbrace{(b+b+\ldots+b)}_{a\ \text{sabiraka}}+\ldots+\underbrace{(b+b+\ldots+b)}_{a\ \text{sabiraka}}}_{c\ \text{puta po}\ (b+b+\ldots+b)}$$

$$=\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{ac\ \text{sabiraka}};$$

$$a(bc)=\underbrace{bc+bc+\ldots+bc}_{a\ \text{sabiraka}\ bc}$$

$$=\underbrace{\underbrace{b+b+\ldots+b}_{c\ \text{sabiraka}}+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{c\ \text{sabiraka}}+\ldots+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{c\ \text{sabiraka}}}_{a\ \text{puta po}\ (b+b+\ldots+b)}$$

$$=\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{ac\ \text{sabiraka}}.$$

Dakle: $\boxed{\forall\, a,\ b,\ c\in N\colon\ (ab)c=a(bc)}$, to jest:

Teorema 4. — *Množenje prirodnih brojeva je asocijativna operacija.*

3. Pokažite, na osnovu prethodne teoreme, metodom primenjenom u § 11.2, t. **3**, da za proizvod $abcde=p$ važi:

Teorema 5. — *Pri množenju više brojeva moguće je, ne menjajući krajnji rezultat, zameniti više činilaca njihovim izračunatim proizvodom.*

4. Na osnovu $(ab)c=a(bc)$ i $ab=ba$ pokažite, metodom primenjenom u § 11.3, t. **4**, da za proizvod $abcde=p$ važi:

Teorema 6. — *Konačni rezultat množenja više brojeva ne zavisi od reda činilaca*, tj. $abcde=acedb=abdce=\ldots$

5. 1) Neka su A, B, C tri množine takve da je:

$$k(A)=a,\quad k(B)=b,\quad k(C)=c;\qquad A\cap B=\varnothing,\quad A\cap C=\varnothing,\quad B\cap C=\varnothing.$$

U § 3.5 pokazali smo da je $(A\cup B)\times C=A\times C\cup B\times C$.

To znači da je $k\left((A\cup B)\times C\right)=k\,(A\times C\cup B\times C)$.

A kako su, prema uslovu, date množine disjunktivne, imamo:

$$k(A\cup B)=a+b,\quad k((A\cup B)\times C)=(a+b)c,$$
$$k\left((A\times C)\cup(B\times C)\right)=ac+bc,$$

pa je
$$(a+b)c=ac+bc.$$

S obzirom na komutativnost množenja poslednju jednakost možemo napisati i u obliku $c(a+b)=ca+cb$.

Ali, u oba slučaja reč je o istoj osobini množenja, koja se zove *distributivnost množenja u odnosu na sabiranje*. Otuda:

Teorema 7. — *Množenje prirodnih brojeva je distributivna operacija u odnosu na sabiranje prirodnih brojeva.*

Simbolima: $\boxed{\forall\, a,\ b,\ c\in N\colon\ (a+b)c=ac+bc.}$

2) Distributivnost množenja u odnosu na sabiranje može se pokazati i ovako:

$$(a+b)c=\underbrace{(a+b)+(a+b)+\ldots+(a+b)}_{c\ \text{sabiraka}\ (a+b)}$$

$$=a+b+a+b+\ldots+a+b \qquad [§\ 11.3,\ \text{t.}\ \mathbf{3}]$$

$$=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{c\ \text{sabiraka}}+\underbrace{b+b+\ldots+b}_{c\ \text{sabiraka}}=ac+bc.$$

3) Razlika $a-b$ je broj x takav da je $a=b+x$. Na osnovu prethodnog (distributivnosti) je:

$$ac=(b+x)c=bc+xc,$$

tj.: $\qquad ac=bc+xc,$

tj. (def. oduzimanja): $\qquad xc=ac-bc,$

tj. $(x=a-b)$: $\qquad \boxed{(a-b)c=ac-bc,}$

ili: $\qquad \boxed{c(a-b)=ca-cb,}$

to jest:

Teorema 8. — *Množenje prirodnih brojeva je distributivna operacija u odnosu na oduzimanje.*

6. 1) Neka je dat zbir:

$$a+b+c+d+e.$$

od n sabiraka. Na osnovu asocijativnosti sabiranja možemo ga napisati u obliku dva sabirka: $\qquad (a+b+c+d)+e.$

Zato, a na osnovu distributivnosti množenja, je:

$$(a+b+c+d+e)\,m=(a+b+c+d)m+em.$$

I isto tako: $\qquad =(a+b+c)m+dm+em,$

$$=(a+b)m+cm+dm+em$$

to jest: $\qquad (a+b+c+d+e)m=(am+bm+cm+dm+em).$

Time je distributivnost množenja generalisana:

Teorema 9. — *Zbir od više sabiraka može se pomnožiti brojem tako što se pomnoži svaki sabirak, pa se dobiveni proizvodi saberu.*

2) Kako ćemo pomnožiti dva zbira, na primer $(a+b+c)(m+n)$?

$$\begin{aligned}(a+b+c)(m+n)&=(a+b+c)p\\ &=ap+bp+cp \qquad [m+n=p]\\ &=a(m+n)+\ldots\\ &=am+an+bm+bn+cm+cn.\end{aligned}$$

3) $(a-b+c-d-e)m=(a+c)-(b+d+e)m=$

$$\begin{aligned}&=am+cm-bm-dm-em,\\ &=am-bm+cm-dm-em,\end{aligned}$$

pod uslovom da postoji broj $r=a-b+c-d-e$.

Znači:

Teorema 10. — *Proizvod aritmetičkog polinoma i broja m je aritmetički polinom čiji su članovi proizvodi članova datog polinoma i broja m. Svaki od tih proizvoda jeste: sabirak, ako je član datog polinoma sabirak; umanjilac, ako je član datog polinoma umanjilac.*

§ 13.4. MNOŽENJE I POREDAK (RED)

1. 1) Neka množine A, B, C zadovoljavaju uslove $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $k(A)=k(B)$. Da li je $(A\times C)\sim(B\times C)$?

Uzmimo primer:

$$B=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \qquad B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}, \qquad C=\{p, q, r\}$$

Tada je
$$\begin{aligned}A\times C=\{&(a_1, p), (a_2, p), (a_3, p), (a_4, p), (a_5, p)\\ &(a_1, q), (a_2, q), (a_3, q), (a_4, q), (a_5, q)\\ &(a_1, r), (a_2, r), (a_3, r), (a_4, r), (a_5, r)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B\times C=\{&(b_1, p), (b_2, p), (b_3, p), (b_4, p), (b_5, p)\\ &(b_1, q), \ldots\ldots\ldots\ldots (b_5, q)\\ &(b_1, r), \ldots\ldots\ldots\ldots (b_5, r)\},\end{aligned}$$

pa, očigledno, elementu (a_3, p) odgovara element (b_3, p).

Uopšte:
$$\left.\begin{aligned}(a_ip)&\to(b_ip)\\ (a_iq)&\to(b_iq)\\ (a_ir)&\to(b_ir)\end{aligned}\right\}\ i=1, 2, 3, 4, 5,$$

što znači da postoji bižekcija:

$$A\times C\to B\times C, \text{ tj. } (A\times C)\sim(B\times C), \text{ tj. } k(A\times C)=k(B\times C).$$

Tako se rasuđuje i kad se konačne množine A, B, C sastoje od ma koliko elemenata. Stoga, ako je $k(A)=a$, $k(B)=b$, $k(C)=c$,

i ako je: $\qquad a=b$, onda je $ac=bc$,

to jest:

Teorema 11. — *Ako se jednakost prirodnih brojeva pomnoži prirodnim brojem koji nije nula, dobija se jednakost.*

Simbolima: $\forall a, b, c\in N$ i $c\neq 0$: $a=b\Rightarrow ac=bc$.

A da li iz $ac=bc$ sledi $a=b$?

2) Neka je $a=b$, $c=d$. Dokažite: $ac=bd$.

Dakle:

Teorema 12. — *Ako su date dve jednakosti prirodnih brojeva, proizvod njihovih levih strana jednak je proizvodu njihovih desnih strana.*

Simbolima: $\forall a, b, c, d\in N$: $(a=b$ i $c=d)\Rightarrow ac=bd$.

3) Da li se to može uopštiti, tj.:

$$\begin{bmatrix} a=a'\\ b=b'\\ b=c'\\ \ldots\end{bmatrix}\Rightarrow abc\ldots=a'b'c'\ldots?$$

2. 1) Neka je $a<b$, $c\neq 0$. Šta možemo reći o ac i bc?

Iz $a<b$ sledi $\qquad a=b+x, \qquad x\in N,$

pa je (t. **1** ovog § i § 13.3, t. **5**) $\qquad ac=bc+cx,$

što pokazuje da je $\qquad ac<bc.$

Dakle:

Teorema 13. — *Ako se nejednakost prirodnih brojeva pomnoži prirodnim brojem, koji nije nula, dobija se nejednakost istog smera.*

Simbolima: $\forall a, b, c\in N$ i $c\neq 0$: $\ a<b\Rightarrow ac<bc$.

$\forall p, q, r\in N$ i $r\neq 0$: $\ p>q\Rightarrow pr>qr$.

2) Neka je: $\qquad a<b$ i $c<d$.

Pokažite: $\qquad ac<bd$.

3) Pokažite uopšte:

$$\begin{bmatrix} a<a'\\ b<b'\\ c<c'\\ \ldots\end{bmatrix}\Rightarrow abc\ldots<a'b'c'\ldots$$

3. Sve činjenice ovog paragrafa skupljaju se u jednu:

$$\begin{bmatrix} a\leqslant a'\\ b\leqslant b'\\ c\leqslant c'\\ \ldots\end{bmatrix}\Rightarrow abc\ldots\leqslant a'b'c'\ldots$$

Ona izražava da je relacija reda $\leqslant$ kompatibilna (saglasna) sa operacijom množenja.

§ 13.5. MNOŽENJE JEDNAKIH BROJEVA

1. 1) Kad su činioci jednaki brojevi, množenje se zapisuje kraće:

$7 \cdot 7$ zapisuje se 7^2, tj. $7 \cdot 7 = 7^2$;
$43 \cdot 43$ zapisuje se 43^2, tj. $43 \cdot 43 = 43^2$;
$5 \cdot 5 \cdot 5$ zapisuje se 5^3, tj. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$.

Uopšte: $aa = a^2$, čita se a *na* 2 (ili a „na kvadrat");
$aaa = a^3$, čita se a *na* 3 (a na treći ili a „na kub");
$aaaa = a^4$, čita se a *na* 4 (a na četvrti);
. . . .
$aaa \ldots a = a^n$, čita se a *na* n (a *na enti*).

Množenje jednakih brojeva (činilaca) zove se i *stepenovanje*. Činilac a koji se ponavlja zove se *osnova* stepenovanja, a broj n, koji pokazuje koliko se puta osnova ponavlja kao činilac, zove se *izložilac* (eksponent) stepenovanja. Broj a^n zove se enti stepen broja a.

2) Razumljivo je da $a = a^1$ (što se po pravilu ne piše).

3) Ako $n \in N$, $1^n = 1$ (npr. $1^{37} = 1$).

4) Ako $n \in N_1$, $0^n = 0$.

5) $a \geqslant 1$, $a^0 = 1$ (npr. $17^0 = 1$, $1000^0 = 1$).

6) 0^0 nema smisla (nije definisano).

To su usvojene definicije.

2. Kako se izračunava $a^m \cdot a^n$?

1) Ako je $m \geqslant 2$ i $n \geqslant 2$ onda je, po definiciji:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aaa \ldots a \cdot aaa \ldots a}_{(m+n)\ \text{činilaca}} = a^{m+n}.$$

2) Ako je $n = 0$, $a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m$.

3) Ako je $n = 1$, $a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$.

Slučaj 2) opravdava definiciju 5).

Dakle, uvek je: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^m a^n a^p = a^{m+n+p}$.

3. Kako se izračunava $a^n b^n$?

1) Neka je prvo $n \geqslant 2$. Tada je:

$$\begin{aligned} a^n b^n &= \overbrace{aa \ldots a}^{n\ \text{činilaca}} \cdot \overbrace{bb \ldots b}^{n\ \text{činilaca}} \\ &= ababab \ldots ab && \text{[komut. množenja]} \\ &= \underbrace{(ab)\,(ab)\,(ab) \ldots (ab)}_{n\ \text{činilaca}\ (ab)} && \text{[asocijat. množenja]} \\ &= (ab)^n. \end{aligned}$$

2) Ako je $n = 0$, $a^0 b^0 = (ab)^0 = 1$.

3) Ako je $n = 1$, $a^1 b^1 = (ab)^1 = ab$.

Dakle, uvek je: $a^n b^n = (ab)^n$; $a^n b^n c^n = (abc)^n$.

4. Neka je dato da se izračuna $(a^m)^n$.

1) U slučaju $n \geqslant 2$ je, po definiciji:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m a^m \ldots a^m}_{n\ \text{činilaca}} = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

2) Iz toga se neposredno vidi da stepenovanje nije ni komutativna operacija (npr. $2^3 = 8$, a $3^2 = 9$), ni asocijativna operacija (npr. $(2^3)^2 = 8^2 = 64$, a $2^{(3^2)} = 2^9 = 512$).

3) Ako je $n = 0$, $(a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0 = 1$.

4) Ako je $n = 1$, $(a^m)^1 = a^{m \cdot 1} = a^m$.

5. 1) Iz onoga što prethodi ovom paragrafu i iz onoga što je navedeno u prethodnim paragrafima ove glave, a pod uslovom $a \geqslant 2$, slede ekvivalencije:

(1) $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$;
(2) $a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$;
(3) $a^m \leqslant a^n \Leftrightarrow m \leqslant n$.

2) Isto tako ako je $n > 1$, imamo (§ 13.4):

(1) u slučaju (2) u slučaju (3) u slučaju

$$\text{n jednakosti}\left\{\begin{array}{l} a=b \\ a=b \\ a=b \\ a=b \\ \ldots \\ a=b \\ \hline a^n=b^n \end{array}\right. \qquad \text{n nejednakosti}\left\{\begin{array}{l} a<b \\ a<b \\ a<b \\ a<b \\ \ldots \\ a<b \\ \hline a^n<b^n \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}\text{n nejednakosti} \\ \text{u širem smislu}\end{array}\left\{\begin{array}{l} a\leqslant b \\ a\leqslant b \\ a\leqslant b \\ a\leqslant b \\ \ldots \\ a\leqslant b \\ \hline a^n\leqslant b^n \end{array}\right.$$

Odatle, pod uslovom $n \geqslant 1$, slede još tri ekvivalencije:

(4) $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$; (5) $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$; (6) $a^n \leqslant b^n \Leftrightarrow a \leqslant b$.

§ 13.6. VEŽBANJA I ZADACI

1. Koliko se dvoslovnih reči, bez obzira da li one imaju smisla ili ne, može napisati pomoću naših slova, npr.:

aa, *ab*, . . . *lj*, . . . *zz*.

2. Koliko ima, u dekadnom sistemu brojanja: (1) dvocifrenih brojeva; (2) trocifrenih brojeva; (3) četvorocifrenih brojeva?

3. Napravite što veću mrežu („tablicu") množenja.

1) Napišite opšti oblik proizvoda kojima odgovaraju tačke dijagonale (mreže, tablice).

2) Uočite simetrične tačke u odnosu na dijagonalu. Napišite opšti oblik proizvoda kojima odgovaraju simetrične tačke. Šta dokazuju ti proizvodi?

3) Neka su a, a', b, b' četiri prirodna broja. Neka su a i a' počeci („nosioci") ma kojih redova tablice (mreže), a b i b' počeci ma kojih „stubaca" (kolona). Označite tačke ab, $a'b'$, ab', $a'b$.

(1) Šta određuju te četiri tačke?

(2) Izračunajte proizvode $aba'b'$ i $ab'a'b$ na razne načine. Koje se osobine množenja tu ispoljavaju?

4. 1) Izračunajte (mentalno tj. „usmeno") na više načina:

(1) $2 \cdot 7 \cdot 5=$ (2) $25 \cdot 9 \cdot 4=$ (3) $8 \cdot 10 \cdot 125=$
(4) $4 \cdot 7 \cdot 25=$ (5) $11 \cdot 250 \cdot 9 \cdot 4=$
(6) $2 \cdot 125 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3=$ (7) $15 \cdot 125 \cdot 6 \cdot 8=$

5. Izračunajte mentalno:

(1) $13 \cdot 4+13 \cdot 6=$
(2) $12 \cdot 67-67 \cdot 11=$
(3) $540 \cdot 29+29 \cdot 460=$
(4) $103 \cdot 303-3 \cdot 303=$
(5) $378 \cdot 78+22 \cdot 378=$
(6) $7 \cdot 934-5 \cdot 934+8 \cdot 934-10 \cdot 934=$
(7) $999 \cdot 555+555-8 \cdot 125+6000=$

6. Izračunajte zbir:

(1) prvih n brojeva množine N_1;
(2) prvih n parnih brojeva množine N_1;
(3) prvih n neparnih prirodnih brojeva.

7. Izračunajte:

(1) $(a+b)(c+d)$; (2) $(a+b)(c-d)$;
(3) $(a-b)(c+d)$; (4) $(m-n)(p-q)$;
(5) $(1+a)(1+b)$; (6) $(1-a)(1+b)$;
(7) $(a+b)(a+b)$; (8) $(1+a)(1+a)$;
(9) $(a-1)(a-1)$; (10) $(1-a)(1+a)$.

8. 1) Prethodni proizvod (8) koji u obliku formule glasi:

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

možemo koristiti pri izračunavanju kvadrata prirodnih brojeva, npr.:

iz: $3 \cdot 3=3^2=9$
sledi: $4^2=(3+1)^2=9+6+1=16$;
$5^2=(4+1)^2=16+8+1=25$;
$6^2=(5+1)^2=25+10+1=36$.

Još lakše koristimo tu formulu, ako uzmemo u obzir da je $2n+1=n(n+1)$, na primer:

$10^2=100$;
$11^2=100+10+11=100+21=121$;
$12^2=121+11+12=121+23=144$;
... (Produžite).

2) $25^2=625$. Izračunajte 26^2.

$63^2=3969$. Izračunajte 64^2, 65^2, $66^2, \dots, 70^2$.

Zatim 70^2, $71^2, \dots, 80^2$.

3) Izračunajte 10^2, 100^2, 1000^2, a zatim 101^2 i 1001^2.

9. Izračunajte (a zatim proverite stavljajući umesto svakog slova jedan broj od 1 do 10):

(1) $(a+b+c)(p+q)=$ (5) $(1+x)(1+2x)=$
(2) $(n+v+w)(x+y+z)=$ (6) $(1+x)(1+2x)(1+3x)=$
(3) $(1+a+b)(1+p+q)=$ (7) $(2x-1)(2x-1)=$
(4) $(a+b+c)(a+b+c)=$ (8) $(3x-1)(3x-1)=$

10. 1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.
2) $(2x+3y+5z)^2=$
3) $(a+b-c)^2=$

11. Prikažite grafički množinu rešenja jednačine:

$$(x+y-2)(x+y-3)(x+y-8)(x+y-9)=0.$$

12. Niz brojeva:

$$0, a, 2a, 3a, \dots, ba, \dots$$

zove se *aritmetički niz* ili *aritmetička progresija*,

a niz: $$1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$$

geometrijska progresija.

1) Napišite dva primera aritmetičke i dva primera geometrijske progresije.

2) U čemu se razlikuju ma koja dva uzastopna člana aritmetičke progresije, a u čemu se razlikuju dva uzastopna člana geometrijske progresije? Kako se, npr., iz k-tog člana dobija $(k+1)$-vi član: aritmetičke progresije; geometrijske progresije.

3) Može li prvi član geometrijske progresije da bude 0 i zašto?

13. 1) Neka a, b, $c \in N$. Može se definisati operacija $*$ (koju označavamo zvezdicom): $a * b=ab+a+b$, na primer: $3 * 7=3 \cdot 7+3+7=31$.

Napravite mrežu (tablicu) te operacije uzimajući $0 \leqslant a \leqslant 9$, i $0 \leqslant b \leqslant 9$, tj. neka je operacija $*$ definisana u $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Je li ta operacija komutativna? Ima li neutralnog elementa?

2) Isto kad je $a * b=a^2+b$. 3) Isto kad je $a * b=a+3b$.

§ 13.7. DODATAK

1. Sabiranje i množenje su *binarne* operacije u N jer svakom uređenom paru $a, b \in N$ pridružuju element $c \in N$.

Tu se uopšte piše $a * b=c$,

a množina N snabdevena tom operacijom označava se $N, *$.

2. Posmatrajmo ma koju množinu M i u njoj definisanu binarnu operaciju $*$, dakle $M, *$.

1) Ako je $a * b=c$ za $\forall\, a, b, c \in M$, kažemo da je $M, *$ *grupoid* i da je operacija $*$ unutrašnja (interna).

2) Ako je $M, *$ grupoid i ako je, uz to, još:

$(a * b) * c=a * (b * c)$ za $\forall\, a, b, c \in M$, onda je M,

semi-grupa, a operacija $*$ je asocijativna.

3) Ako je $M, *$ *semi-grupa* i uz to postoji bar jedan element $n \in M$ takav da je $a \in M$, $a*n=a=n*a$, onda se $M, *$ zove *monoid*, tj. operacija $*$ dopušta jedan neutralni element.

Grupoid, semi-grupa i monoid jesu (zovu se) *strukture*.

4) Ako je u strukturi $M, * \ \forall a, b \in M$: $a*b=b*a$, struktura je komutativna.

Prema ranije utvrđenim osobinama, možemo reći:

$N, +$ je komutativni monoid. $\quad N, \bullet$ je komutativni monoid.

Rezime

1. 1) Ako je $a=k(A)$, $b=k(B)$, onda je $ab=k(A)\cdot k(B)$.

2) $f: N \times N \to N$: $\quad (a, b) \to ab$.

3) $\forall a, b \in N$, $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$: $\quad ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b \text{ sabiraka}}=\underbrace{b+b+\ldots+b}_{a \text{ sabiraka}}$.

4) $a=1$, $ab=b$; $b=1$, $ab=a$. Broj 1 je neutralni element množenja.

5) $a=0$ ili $b=0$, $ab=0$. Nula je apsorbujući (uništavajući) element množenja.

6) $abcde=\{[(ab)c]d\}e$.

7) $a=b=c=d=\ldots=k$, $\underbrace{abc\ldots k}_{n \text{ činilaca}}=a^n$.

8) $a=1$, $n \in N_1$: $a^n=1$, tj. $1\cdot 1\cdot 1\ldots=1^n=1$.

9) $n \in N_1$: $0^n=0$ (tj. $0\cdot 0\cdot 0\ldots=0$).

10) $a \in N_1$: $a^0=1$.

2. 1) $ab=ba$; $abcd=bdac=dcab=\ldots$

2) $(ab)c=a(bc)$; $abcde=(abc)(de)=(ae)(bcd)=\ldots$

3) $(a+b)c=ac+bc$; $c(a+b)=ac+bc$; $(a-b)c=c(a-b)=ac-bc$;

$$(a-b+c)m=am-bm+cm.$$

4) Stepenovanje nije ni komutativna ni asocijativna operacija.

3. 1) $(a=b \text{ i } c\neq 0) \Rightarrow ac=bc$; $\quad$ 2) $(a<b \text{ i } c\neq 0) \Rightarrow ac<bc$;

$(a=b \text{ i } c=d) \Rightarrow ac=bd$. $\quad (a<b \text{ i } c<d) \Rightarrow ac<bd$.

3) $a \in N$, $n \geqslant 1$: $\quad a^n \leqslant b^n \Rightarrow a \leqslant b$.

4. Vrste strukture $M, *$:

1) Grupoid, ako $\forall a, b \in M$: $a*b \in M$.

2) Semi-grupa, ako je $M, *$ grupoid i ako je $*$ asocijativna operacija.

3) Monoid, ako je $M, *$ semi-grupa koja ima neutralni element, tj. ako postoji bar jedan element e takav da je:

$$e \in M: \quad a*e=a=e*a.$$

5. 1) Grupoid, semi-grupa i monoid su strukture.

2) Struktura je komutativna ako je za svako

$$a, b \in M, \text{ tj. } \forall a, b \in M: \quad ab=ba.$$

3) $N, +$ i $N, \bullet$ su komutativni monoidi.

GLAVA XIV

DELJENJE PRIRODNIH BROJEVA

§ 14.1. DEFINICIJE

1. Neka su a i b prirodni brojevi (tj. $a, b \in N$).

Da li postoji prirodni broj q takav da je $a=bq$?

Iz I razreda osnovne škole znamo da odgovor na to pitanje nije uvek potvrdan. Na primer, u slučaju 15 i 3, takav broj postoji jer je $15=3\cdot 5$, a u slučaju 15 i 2, 15 i 4, 15 i 7, itd. takav broj ne postoji.

Definicija. — *Ako su a i b prirodni brojevi i ako postoji takav prirodni broj q da je $a=bq$, kažemo da b deli a i to se označava ovako $b \mid a$.*

U tom slučaju broj b se zove *delilac* broja a, broj a se zove *multiplum* broja b, a q je *količnik deljenja broja a brojem b*.

„b deli a" i „a multiplum broja b" su, dakle, sinonimi.

Simbolima: $\forall a, b \in N$: $b \mid a \Rightarrow \exists q \in N$: $\quad a=bq$.

Simbol $\exists$ (okrenuto slovo E) označava: Postoji bar jedan element (koji u ovom slučaju pripada množini N).

2. Posmatrajmo broj $a \in N$ i množinu (niz):

$$N_b=\{0, b, b\cdot 2, b\cdot 3, b\cdot 4, \ldots\}.$$

Postoje dve mogućnosti:

(1) ili $a \in N_b$ i tada je $a=bq$, tj. $b \mid a$;

(2) ili $a \notin N_b$, tj. $b \nmid a$ (b ne deli a).

U slučaju (1) broj a se pojavljuje samo jedanput, tj. *broj q je jedan, i samo jedan.*

U slučaju (2) svi brojevi $0, b, b\cdot 2, b\cdot 3, \ldots$ *manji* od a čine konačnu množinu. Zato ona sadrži *najveći element bq* koji je manji od a, tj. *najveći mulitplum broja b manji od a*. I zato je broj $b\,(q+1)$ *najmanji multiplum broja b veći od a*. Dakle, u slučaju (2) je:

$$bq<a<b(q+1).$$

Operacija koja uređenom paru (a, b), $a, b \in N$, pridružuje $q \in N$ zove se *deljenje* i to:

U slučaju (1), tj. kad $b \mid a$, imamo „tačno deljenje", *deljenje kad je ostatak* 0 *(ili deljenje „sa ostatkom* 0").

U slučaju (2), tj. kad $b \nmid a$, imamo *deljenje kad ostatak nije nula (ili, „deljenje sa ostatkom" koji nije nula).*

3. U slučaju (1) deljenje se zapisuje:

$$a=bq, \text{ ili } a:b=q, \text{ ili } \frac{a}{b}=q.$$

U slučaju (2) deljenje se zapisuje samo na jedan način:

$$a=bq+r, \quad r<b.$$

Brojevi a, b, q, r zovu se: deljenik, delilac, količnik, ostatak.

§ 14.2. DELJENJE KAD JE OSTATAK NULA

1. Iz § 13.2, t. **3** neposredno sledi:

Teorema 1. — *Broj 1 deli svaki prirodni broj*, tj.

$$\forall n \in N: \quad 1 \mid n.$$

Primeri: $7=1 \cdot 7$; $0=1 \cdot 0$.

2. Iz § 13.2, t. **2.** sledi:

Teorema 2. — *Svaki prirodni broj je delilac broja nula (*ili: *svaki prirodni broj deli nulu).*

Jer, $0=n \cdot 0$, za svaki $n \in N$.

Primeri: $0=5 \cdot 0 \Rightarrow 5 \mid 0$; $\quad 0=179 \cdot 0 \Rightarrow 179 \mid 0$; $\quad 0=0 \cdot 0 \Rightarrow 0 \mid 0$.

3. Teorema 3. — *Nula je jedini prirodni broj deljiv nulom*, tj.:

$$(a \in N \text{ i } 0 \mid a) \Rightarrow a=0.$$

Dokaz: Ako $0 \mid a$, postoji $x \in N$ takav da je:

$a=0 \cdot x$, a to znači da je $a=0$. Dakle: $0 \mid 0$.

Ta je teorema vrlo važna, jer:

(1) Reći da broj b deli broj koji pripada množini N_1 isto je što i reći da $b \neq 0$.

(2) Reći da je broj p različit od nule znači reći da je p (eventualni) delilac jednog prirodnog broja (broja množine N).

(3) Teorema 3 dopunjuje, u izvesnom smislu, prethodnu teoremu 2, a i definiciju (§ 14.1, t. **1**).

4. Iz $a=a \cdot 1$ sledi $a \mid a$, to jest:

Teorema 4. — *Relacija „deli" je refleksivna u N.*

Ili, simbolima: $\forall\, a \in N: \quad a \mid a.$

Količnik deljenja prirodnog broja tim istim brojem jeste 1 ($a:a=1$).

5. Teorema 5. — *Relacija „deli" je tranzitivna*, tj. (simbolima):

$$\forall\, a, b, c \in N: \ (b \mid a \text{ i } a \mid c) \Rightarrow b \mid c.$$

Zaista: Kako $b \mid a$, postoji $q \in N$ takav da je $a=bq$.
Kako $a \mid c$, postoji $q' \in N$ takav da je $c=aq'$.
Znači, $c=aq'=bqq'=b\,(qq')$, $(qq') \in N$, pa $b \mid c$.

6. Teorema 6. — *Relacija „deli" je antisimetrična*, to jest:

$$\forall\, a, b \in N: \quad (b \mid a \text{ i } a \mid b) \Rightarrow a=b.$$

Drugim rečima, ako a deli b, b ne deli a.

Zaista: Iz $b \mid a$ sledi $a=bq$, $q \in N$.
Iz $a \mid b$ sledi $b=aq'$, $q' \in N$.

Dakle: $b=aq'=b\,(qq')$, $qq' \in N$,

to jest [§ 13.2, t. **3**] $\quad qq'=1$,

to jest [§ 13.2, t. **3**, 3] $\quad q=q'=1$,

to jest [iz $b=aq'$] $\quad a=b$.

7. Iz teorema 4, 5 i 6 zaključujemo:

Relacija „deli" u množini N je jedna relacija poretka (reda). Taj poredak (red) nije totalan. Zašto?

8. Neka $a \mid b$ i $c \mid d$. Da li $ac \mid bd$?

Deli, jer: iz $a \mid b$ sledi $b=aq$, $q \in N$;
iz $c \mid d$ sledi $d=cq'$, $q' \in N$,

pa je $\quad bd=(aq)(cq')=(ac)(qq')$, $\quad$ [§ 13.3, teor. 5 i 6]

to jest $\quad bd=(ac)(qq')$, $\quad qq' \in N$.

Dakle: $\quad ac \mid bd$.

Na primer: $\quad 2 \mid 4, \quad 3 \mid 9, \quad 6 \mid 36.$

9. Neka je $a:b=q$. Šta biva kad se i deljenik i delilac pomnože istim prirodnim brojem $m \neq 0$?

Iz prethodne teoreme (t. **8**) neposredno sledi:

$$am:bm=q, \text{ ili } \frac{am}{bm}=q.$$

To je, u stvari, specijalan slučaj prethodne tačke. Otuda:

Teorema 7. — (Iskažite je rečima.)

10. Da li je $(a:m):(b:m)=q$?

Zasad ćemo posmatrati samo slučaj kad $m \mid b$, jer tada (teor. 5) i $m \mid a$. U tom slučaju je $(a:m):(b:m)=q$. Da bismo to pokazali, moramo prvo uzeti u obzir činjenice: $(ab):b=a$ i $(a:b)\,b=a$.

Prva je očigledna, jer ako je $(ab):b=q$, onda $ab=bq$, tj. $q=a$.

Ali i druga je „očigledna", jer ako je $(a:b)\,b=p$, onda je $a:b=p:b$, tj. $p=a$.

Nek je sad $a:b=q$ i $(a:m):(b:m)=q'$.

Tada je $a:m=q'\,(b:m)$, tj. $a=q'\,(b:m)\,m=bq'$.

Znači, iz $a:b=q$ je $a=bq$,

a iz $(a:m):(b:m)=q'$ sledi $a=bq'$,

što pokazuje (§ 14.1, t. **2**) da je $q'=q$. Otuda:

Teorema 8. — (Iskažite je.)

11. Iz prethodnog sledi da ako $k \mid abc$, onda je:

$$abc:k=(a:k)\,bc=a\,(b:k)\,c=ab\,(c:k), \text{ tj.:}$$

Teorema 9. — *Proizvod se deli brojem tako što se podeli onaj činilac koji je deljiv pa se tako dobijeni količnik i ostali činioci pomnože.* (Obrazložite.)

Na primer: $(6\cdot 14\cdot 8\cdot 3):7=6\cdot(14:7)\cdot 8\cdot 3=6\cdot 2\cdot 8\cdot 3$.

12. 1) Neka $a, b, c \in N$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, i neka je $a:b=q$, $q:c=q'$. Da li je moguće deliti a neposredno proizvodom bc? Jeste, jer je:

$$a=bq,\quad q=cq',\quad a=bcq', \text{ pa je } a:bc=q'.$$

To važi za deljenje ma kojim proizvodom ako je količnik prirodan broj. Otuda (v. i § 14.3, t. **3**):

Teorema 10. — *Broj a se može deliti proizvodom $bcd\ldots$ i tako što se a podeli činiocem b, dobijeni količnik se deli činiocem c, itd.*, tj.:

$$a:bcd=[(a:b):c]:d.$$

Primer: $210:(2\cdot 3\cdot 7)=(210:2):(3\cdot 7)=(105:3):7=35:7=5$.

Ili: $210:(2\cdot 3\cdot 7)=(210:7):(2\cdot 3)=(30:3):2=10:2=5$.

13. Teorema 11. — *Ako prirodni broj deli dva broja, on deli i njihov zbir.*

Ili: $\forall a, b, c \in N:\ (b \mid a \text{ i } b \mid c) \Rightarrow b \mid (a+c)$.

Dokaz: $b \mid a \Rightarrow a=bq,\quad q \in N,$

$b \mid c \Rightarrow c=bq',\quad q' \in N.$

Odatle sledi: $a+c=bq+bq',$

to jest [glava XIII, teor. 7]: $=b\,(q+q'),\ (q+q') \in N,$

što i dokazuje teoremu.

14. Dokažite **teoremu 12:**

$$\forall a, b, c \in N \text{ i } a \geqslant c:\ (b \mid a \text{ i } b \mid c) \Rightarrow b \mid (a-c).$$

15. Ako $m \mid a$, $m \mid b$, $m \mid c$, $m \mid d$, $m \mid e$, onda je:

$$(a-b+c-d-e):m=a:m-b:m+c:m-d:m-e:m.$$

Teorema 13. — (Iskažite je i obrazložite.)

16. U § 13.4, t. **1** pokazali smo da iz $a=b$ sledi $ac=bc$. Da li, obrnuto, iz $ac=bc$ sledi $a=b$ i zašto? To jest da li $a=b \Leftrightarrow ac=bc$?

§ 14.3. DELJENJE KAD OSTATAK NIJE NULA

1. Ako je $bq<a<b\,(q+1)$, onda je $a=bq+r$.

Šta možemo reći o broju r?

Onda je: $bq+r<b(q+1)$ [jer je $a=bq+r$],

to jest [§ 13.3, teor. 8]: $bq+r<bq+b$,

to jest [§ 12.3, t. **6**]: $r<b$.

Teorema 14. — *Ostatak deljenja je manji od delioca.*

Možemo napisati ekvivalenciju:

$$bq<a<b(q+1) \Leftrightarrow a=bq+r,\quad r<b.$$

2. 1) Ako pomnožimo i deljenik i delilac brojem $m\neq 0$, dobijamo:

$$am=(bm)q+rm,\quad rm<bm.$$

2) Neka su deljenik i delilac multiplumi broja m, a q neka je količnik deljenja.

Tada je $am-bmq=(a-bq)m=$ ostatak,

tj. i on je multiplum broja m. Stavimo $(a-bq)\,m=rm$ (jer je, u stvari, $r=a-bq$)

pa deljenje glasi $am=bmq+rm,\quad rm<bm.$

Podelimo obe strane jednakosti i nejednakosti brojem m (§ 13.4). Dobijamo

$$a=bq+r,\quad r<b.$$

Teorema 15. — *Ako se i deljenik i delilac pomnoži ili podeli (kad su oba deljiva) istim brojem m (koji nije nula), količnik ostaje nepromenjen, a ostatak se množi odnosno deli brojem m.*

Uporedite sa odgovarajućim teoremama prethodnog paragrafa (t. **9.** i **10**).

Primeri: (1) $7:2=3$ i ostatak 1	(2) $30:12=2$ i ostatak 6
$21:6=3$ i ostatak $3=1\cdot 3$	$10:4=2$ i ostatak $2=6:3$
$(7\cdot 4):8=3$ i ostatak $4=1\cdot 4$;	$5:2=2$ i ostatak $1=2:2$.

3. Neka je $bq\leqslant a$ i $a+1\leqslant b\,(q+1)$.

(Time su izražene obe „vrste" deljenja broja a brojem b.)

Neka je q' količnik deljenja broja p brojem c. Tada je

$$cq'\leqslant q \text{ i } q+1\leqslant c\,(q'+1).$$

Nejednakost $bq\leqslant a$ se neće promeniti, ako umesto q stavimo manji, ili najviše jednak, broj cq'. Tako isto možemo u $a+1\leqslant b(q+1)$ staviti $c(q'+1)$ umesto $q+1$. Ako to učinimo, dobićemo:

$$bcq'\leqslant a \text{ i } a+1\leqslant bc\,(q'+1).$$

Te nejednakosti pokazuju da je q' količnik deljenja broja a proizvodom bc, tj. da se broj a može podeliti proizvodom bc i tako što se a podeli brojem b, a tako dobijeni količnik podeli brojem c.

To važi i kad je delilac proizvod više činilaca. Otuda:

Teorema 16. — *Broj a može se deliti proizvodom od više činilaca i tako što se a podeli prvim činiocem, dobijeni količnik podeli drugim činiocem i tako dalje, sve dok se pretposlednji količnik ne podeli poslednjim činiocem.* (Pri tome se na osnovu komutativnosti množenja, ne mora voditi računa o redu činilaca.)

To je generalisana teorema 10.

Ali u praksi treba biti obazriv pri njenoj primeni. Treba znati kako se izračunava konačni ostatak. Da bismo to videli, napišimo uzastopna deljenja (broja a brojem b, broja q brojem c, broja q_1 brojem d, itd.):

$$\begin{aligned} a&=bq+r, & r&<b,\\ q&=cq_1+r_1, & r_1&<c,\\ q_1&=dq_2+r_2 & r_2&<d\\ q_2&=eq_3+r_3, & r_3&<e. \end{aligned}$$

Pomnožimo drugi red brojem b, treći red proizvodom bc, četvrti proizvodom bcd, pa imamo (§ 13.4, teor. 11):

$$\begin{aligned} a&=bq+r, & r&<b,\\ bq&=(bc)q_1+br_1, & br_1&<bc,\\ bcq_1&=(bcd)q_2+bcr_2, & bcr_2&<bcd,\\ bcdq_2&=(bcde)q_3+bcdr_3, & bcdr_3&<bcde. \end{aligned}$$

Ako saberemo posebno prve dve jednakosti i odgovarajuće nejednakosti (§ 11.3, teor. 10, teor. 11 i njene posledice, ili § 11.4), dobijamo:

$$a+bq=bq+(bc)q_1+r+br_1, \qquad r+br_1<b+bc,$$

tj.:

$$a=(bc)q_1+r+br_1, \qquad r+br_1<bc$$

(jer prethodna jednakost sadrži isti broj bq i na levoj i na desnoj strani, pa ga možemo, na osnovu spomenutih činjenica, ukloniti).

Saberimo tako sve jednakosti i uprostimo (tj. uklonimo iz dobijene jednakosti sve ono što ona sadrži i na levoj i na desnoj strani). Rezultat je:

$$a=(bcde)q_3+(r+br_1+bcr_2+bcdr_3)$$

i

$$r+br_1+bcr_2+bcdr_3<bcde.$$

Tako izgleda (na kraju) izvršeno deljenje broja a proizvodom $bcde$. Dakle, količnik je q_3 a ostatak:

$$R=r+br_1+bcr_2+bcdr_3.$$

U glavi XVI ima primera takvih deljenja. Ovde navodimo samo dva.

(1) $47:(2\cdot 3)=$

$47=2\cdot 23+1$

$23=3\cdot 7+2$, ali ostatak datog deljenja nije 2, nego dva puta po 2, zato što smo 47 već podelili na 2, pa imamo na 2 „mesta“ po 23 i pri deljenju na 3 na svako „mesto“ ostaje 2.

Dakle: $$47=(2\cdot 3)\cdot 7+\underbrace{(1+2\cdot 2)}_{\text{ostatak}}$$

(2) $985:(3\cdot 5\cdot 7)=$

$985=3\cdot 328+1$

$328=5\cdot 65+3$

$65=7\cdot 9+2$

$$985=(3\cdot 5\cdot 7)\cdot 9+\underbrace{[1+3\cdot 3+2\cdot(3\cdot 5)]}_{\text{ostatak}}.$$

§ 14.4. VEŽBANJA I ZADACI

1. Pokažite da:

$5\mid 5$ $\quad 12\mid 72$ $\quad 53\mid 530\,053$ $\quad 757\mid 0$

$7\mid 707$ $\quad 18\mid 72$ $\quad 11\mid 111\,111$ $\quad 3\nmid 37.$

2. 1) Zašto:

$5\mid 55$ $\quad 13\mid 260$ $\quad 41\mid 287$ $\quad 35\mid 140$ $\quad a\mid a^3$

$2\mid 100$ $\quad 17\mid 8500$ $\quad 23\nmid 53$ $\quad 125\nmid 200$ $\quad x^2y^2\mid x^2y^2.$

2) Izračunajte:

(1) $(27-450+909):9$; (2) $(300+3\,800-75):25$;

(3) $(24-72-120+360):12=$

3) Izračunajte: $a^5:a^3$; $p^{706}:p^{673}$; $x^7:x^0$.

3. Zašto: (1) $ap\mid(abp^2-a^2mp+ap)$; (4) $(x+y)\mid(x^2-y^2)$;

(2) $(a+b)\mid(a^2+2ab+b^2)$; (5) $(a+3b)\mid(3a+9b)$?

(3) $(m-1)\mid(m^2-2m+1)$;

4. Koje zaključke izvodite iz:

(1) $7\mid 14$ i $5\mid 20$; (4) $(n-1)\mid(n^2-1)$ i $(n+2)\mid(2n+4)$;

(2) $13\mid 65$ i $8\mid 40$; (5) $37\mid 111$ i $11\mid 1111$?

(3) $x^2\mid x^4$ i $ab\mid ab^3x$;

5. Sastavite mrežu (tablicu) deljenja.

6. Oduzimanje je inverzna operacija sabiranju, a deljenje je inverzna operacija množenju. To se vidi i iz definicionih jednakosti: $b+x=a$ i $bx=a$.

1) Objasnite te inverzije malo bliže. Konfrontirajte ih sa inverznim (recipročnim) relacijama.

2) Šta pokazuju jednakosti:

$$(a+b)-b=a \text{ i } (a-b)+b=a; \qquad (ab):b=a \text{ i } (a:b)\,b=a?$$

3) Sabiranje i množenje su *zatvorene* operacije u N, a oduzimanje i deljenje nisu. Zašto?

4) Uloge brojeva 0 i 1 pri oduzimanju i deljenju.

5) Kad se razlike ne menjaju, a kad se količnici ne menjaju?

7. U vezi s prethodnim pronađite u kojim se slučajevima ne menja: (1) zbir; (2) proizvod.

8. Pokušajte da, nezavisno od t. **2,** § 14.1, dokažete da deljenje prirodnog broja a prirodnim brojem $b(a>b)$ određuje jedan jedini količnik q i jedan jedini ostatak r(q i r prirodni brojevi).

9. Neka je q količnik deljenja broja a brojem b.

1) Neka se b ne menja (kaže se: neka je b konstanta). Koji se najveći broj može dodati broju a pa da se količnik q ne menja?

2) Neka je a konstanta. Koji se najveći broj može dodati broju b pa da se q ne menja?

10. Neka je $a>b$. Podelite svaki od tih brojeva njihovom razlikom i uporedite količnike i ostatke tih deljenja.

Rezime

1. Ako $b \mid a$, b se zove delilac broja a, a broj a je multiplum broja b. U tom slučaju postoji broj q takav da je $a=bq$.

2. Ako $b \nmid a$, onda je $bq<a<b(q+1)$, tj. $a=bq+r$, $r<b$.

Taj slučaj je opšti (obuhvata sve ostale):

(1) $a \geqslant b$, $b \neq 0$, $a=bq$, tj. $b \mid a$ [1. tačka];

(2) $a=0$, $b \neq 0$, $q=0$, $r=0$;

(3) $a<b$, $a=b \cdot 0+a$, $r=a$;

(4) $a>b$, $a=bq+r$, $r<b$;

(5) $a=0$, $b=0$, $q=0$, $r=0$.

3. Određivanje broja q i r u slučajevima **1.** i **2**(4) zove se deljenje broja a brojem b.

GLAVA XV

SISTEMI BROJANJA

§ 15.1. OSNOVNI PROBLEM IMENOVANJA BROJEVA

1. U § 10.4 istakli smo oštru razliku između pojma broj i njegovog imena (izgovorenog ili napisanog). U ovoj glavi bliže ćemo se zadržati na imenima prirodnih brojeva, jer je i to vrlo važno. Zaista, brojeva ima neograničeno mnogo. Kako bismo mogli rasuđivati o određenim brojevima (pojmovima) ako ne bismo imali njihova imena. I o svim drugim pojmovima rasuđujemo služeći se njihovim imenima. Imena su reči. Sve reči (svih jezika pa i našeg) pišu se pomoću nekoliko znakova (simbola) koji se zovu slova. Imena prirodnih brojeva pišu se pomoću nekoliko znakova (simbola) koji se zovu cifre. (Napominjemo da će se ovde govoriti o internacionalnim imenima brojeva.)

2. Imena svih prirodnih brojeva mogu se sastaviti pomoću dve cifre, tri cifre, četiri cifre, pet cifara, itd. Kardinalni broj množine cifara (kojima se služimo pri određenom imenovanju brojeva) zove se *osnova brojanja* ili *osnova sistema brojanja* (pri tom imenovanju).

Označimo privremeno tu osnovu slovom x; na primer:

Osnova *binarnog* (dualnog, dvojičnog) sistema je: $x =$ *dva*, a množina cifara kojima se pišu (imenuju) svi prirodni brojevi je $\{0, 1\}$. (Dva je najmanja moguća osnova.)

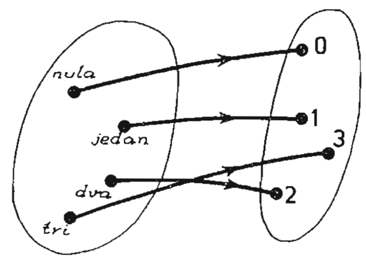
Osnova *petičnog sistema je* $x =$ *pet*, a množina cifara kojima se pišu svi prirodni brojevi je $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Osnova dekadnog sistema brojanja je $x =$ *deset*, a množina cifara kojima se imenuju (pišu) svi prirodni brojevi je

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Osnova *duodecimalnog* sistema je $x =$ *dvanaest*, a množina cifara je

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$.



Slika 15.1

3. Množina cifara, za koju ćemo pretpostaviti da je uređena, i množina prirodnih brojeva *manjih* od osnove x jesu ekvipotentne. Između te dve množine postoji, dakle, bižekcija (§ 9.5): Svaka cifra je funkcija (slika) tačno određenog broja manjeg od x, na primer sl. 15.1.

Neka je y ma koji prirodni broj. Tada:

(1) Ako je $y<x$, zapisujemo (imenujemo) ga jednom cifrom, njegovom slikom.

(2) Ako je $y \geqslant x$, *tražimo takav način zapisivanja (imenovanja) da se iz njega vidi koje operacije treba izvršiti pa da se y dobije iz x i svih prirodnih brojeva manjih od x.*

U tome se sastoji *osnovni problem imenovanja*, zapisivanja prirodnih brojeva.

Napominjemo ponovo da se razlika između broja i njegovog zapisivanja, imenovanja pomoću cifara, mora uvek imati u vidu. Ali, kratkoće radi, dopušteno je, kad nema bojazni od dvosmislenosti, da se kaže „broj 3" umesto „broj koji označava cifra 3". Zato ćemo pisati npr., „zbir cifara broja . . ." umesto „zbir brojeva koje označavaju cifre broja . . .".

§ 15.2. OPŠTI POSTUPAK ZA PISANJE (IMENOVANJE) PRIRODNIH BROJEVA

1. Označimo ma koji prirodni broj slovom y.

(1) Ako je $y<x$, zapisujemo ga jednom cifrom.

Ako je $y \geqslant x$, podelimo ga brojem x:

$$y=xq_1+r_0, \qquad r_0<x.$$

Ostatak deljenja r_0 zapišemo, dakle, jednom odgovarajućom cifrom.

(2) Ako je $q_1<x$, zapišimo ga jednom (odgovarajućom) cifrom i time je završeno pisanje broja y:

$$y=xq_1+r_0.$$

Ako je $q_1 \geqslant x$, podelimo q_1 osnovom x:

$$q_1=xq_2+r_1, \qquad r_1<x,$$

pa ostatak r_1 zapišemo jednom (odgovarajućom) cifrom.

(3) Ako je $q_2<x$, zapišemo ga odgovarajućom cifrom.

Ako je $q_2 \geqslant x$, delimo q_2 osnovom x:

$$q_2=xq_3+r_2, \qquad r_2<x,$$

pa r_2 zapišemo (odgovarajućom) cifrom.

Tako nastavljamo sve dotle dok se ne dobije količnik q_n koji je manji od osnove x. A da li se takav količnik mora dobiti? Mora, jer je x najmanje 2, pa su uzastopni količnici sve manji, tj.:

$$q_1>q_2>q_3>\ldots>q_{n-1}>q_n$$

i sledeći količnik je $q_{n+1}=0$, tj. $q_n=x\cdot 0+r_n$, $r_n<x$.

Znači, dobijamo jednakosti:

$$\begin{aligned} y&=xq_1+r_0, & r_0&<x,\\ q_1&=xq_2+r_1, & r_1&<x,\\ q_2&=xq_3+r_2, & r_2&<x,\\ &\ldots\ldots \text{ itd.} & &\ldots\\ q_{n-1}&=xq_n+r_{n-1}, & r_{n-1}&<x,\\ q_n&=0+r_n, & r_n&<x. \end{aligned}$$

Iz njih se pisanje broja y može dobiti postupkom pokazanim u § 14.3, t. **3**, pri čemu pomnožimo drugu brojem x, treću stepenom x^2, četvrtu stepenom x^3, itd. Saberemo tako dobijene jednakosti i uprostimo.

Ali je možda lakše, u ovom slučaju, da primenimo postupak pokazan u Uputstvima (isti § 14.3, t. **3**). Zadržavajući se na $n=5$, pišemo:

$$\begin{aligned} y&=xq_1+r_0, & r_0&<x,\\ q_1&=xq_2+r_1, & r_1&<x,\\ q_2&=xq_3+r_2, & r_2&<x,\\ q_3&=xq_4+r_3, & r_3&<x,\\ q_4&=xq_5+r_4, & r_4&<x,\\ q_5&=\qquad r_5. \end{aligned}$$

Umesto q_1 u prvoj jednakosti stavimo desnu stranu druge jednakosti:

$$y=x(xq_2+r_1)+r_0=x^2q_2+xr_2+r_0.$$

U ovoj jednakosti stavimo umesto q_2 desnu stranu treće jednakosti:

$$y=x^2(xq_3+r_2)+xr_1+r_0=x^3q_3+x^2r_2+xr_1+r_0.$$

Ovde zamenimo q_3 desnom stranom četvrte jednakosti:

$$y=x^3(xq_4+r_3)+x^2r_2+xr_1+r_0=x^4q_4+x^3r_3+x^2r_2+xr_1+r_0;$$

q_4 u ovoj jednakosti smenimo desnom stranom pete jednakosti:

$$y=x^4(xq_5+r_4)+x^3r_3+x^2r_2+xr_1+r_0$$

tj.:

$$y=x^5q_5+x^4r_4+x^3r_3+x^2r_2+xr_1+r_0,$$

tj. ($q_5=r_5$ šeste jednakosti):

$$y=x^5r_5+x^4r_4+x^3r_3+x^2r_2+xr_1+r_0.$$

Uopšte (kad je $q_n<x$):

$$y=x^nr_n+x^{n-1}r_{n-1}+\ldots+x^3r_3+x^2r_2+xr_1+r_0.$$

Šta su tu $r_0, r_1, \ldots, r_n$? Uzastopni ostaci, tj. brojevi manji od osnove x, pa ih zapisujemo ciframa odgovarajuće množine $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Znači, prirodni broj y napisan je u obliku jednog *polinoma n-tog stepena u odnosu na osnovu brojanja x.*

Brojevi $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ zovu se *koeficijenti* polinoma. Od njih samo r_n (koeficijent uz x^n) ne može da bude nula (tj. ostali mogu i pojedini i svi ukupno). r_n može da bude 1 ili veći, ali najviše $x-1$.

Dakle, svaki izraz oblika:

$$x^nr_n+x^{n-1}r_{n-1}+x^{n-2}r_{n-2}+\ldots+x^3r_3+x^2r_2xr_1+r_0$$

gde x označava određeni broj, predstavlja ime (zapisano) jednog prirodnog broja. On pokazuje kako se pomoću stepenovanja (ponovljenog množenja) osnove sistema brojanja i sabiranja piše određeni prirodni broj. Otuda:

Teorema 1. — *Svaki prirodni broj y može se izraziti jednim polinomom u odnosu na osnovu sistema brojanja x. Koeficijenti su brojevi manji od x.*

Na primer:

1) $$3x^4+2x^3+x^2+5x+2$$

je ime jednog prirodnog broja u sistemu čija osnova nije manja od 6. (Zašto? Zato što je najveći koeficijent 5, a koeficijent mora biti manji od osnove.)

Ako je $x=7$, onda je to broj: $3\cdot 7^4+2\cdot 7^3+7^2+5\cdot 7+2$.
Ako je $x=9$, onda je to broj: $3\cdot 9^4+2\cdot 9^3+9^2+5\cdot 9+2$.
Ako je $x=10$, onda je to broj: $3\cdot 10^4+2\cdot 10^3+10^2+5\cdot 10+2$.

2) Šta je x^5+2x^3+x?

To je prirodni broj u sistemu čija osnova nije manja od 3. Koeficijenti r_4, r_2 i r_0 su nule, tj. on bi se mogao napisati ovako:

$$x^5+0\cdot x^4+2x^3+0\cdot x^2+x+0,$$

ali je nula neutralni element sabiranja pa se izostavlja.

2. Prema prethodnom, svaki prirodni broj izražava se tačno određenim polinomom. Taj se polinom može „stegnuti" ovako:

$$y=\overline{r_n r_{n-1}\ldots r_2 r_1 r_0}.$$

U tom slučaju kažemo da je prirodni broj napisan *pomoću cifara* (r_0, r_1, $r_2, \ldots, r_n$) ili na *pozicioni način*, jer, svaka cifra označava *broj* $r_k\cdot x^k$, *gde je k redni broj mesta računajući zdesna*; na primer, ako je $k=3$, cifra r_3 označava broj $r_3\cdot x^3$. Ako je $x=10$, cifra r_3 označava broj $r_3\cdot 10^3$, pa ako je $r_3=5$, onda r_3 označava broj $5\cdot 10^3=5\cdot 1\,000=5\,000$.

Ako je $x=2$, r_3 označava $r_3\cdot 2^3$. Koja cifra može u tom slučaju da stoji umesto r_3? (Samo 0 ili 1.) Dakle, ako je $r_3=1$, onda je $r_3\cdot 2^3=8$, a ako je $r_3=0$, onda je $r_3\cdot 2^3=0$.

Otuda u pisanju broja pomoću cifara (na pozicioni način) cifra nula se ne sme izostaviti.

U stvari (kažemo):

r_0 označava broj jedinica I reda (tj. broj $r_0\cdot x^0$);
r_1 označava broj jedinica II reda (tj. broj $r_1\cdot x$),
r_2 označava broj jedinica III reda (tj. broj $r_2\cdot x^2$),
r_3 označava broj jedinica IV reda (tj. broj $r_3\cdot 10^3$),
. . . . itd. . . . .

Na primer, kad je osnova 10:

jedinica prvog reda je	$1(=10^0)$
jedinica drugog reda je	$10(=10^1)$
jedinica trećeg reda je	$100(=10^2)$
. . . .	. . . . . .

Kad je osnova 5:

jedinica prvog reda je	$1(=5^0)$
jedinica drugog reda je	$5(=5^1)$
jedinica trećeg reda je	$25(=5^2)$
jedinica četvrtog reda je	$125(=5^3)$
. . . .	. . . . . .

Kad je osnova 2:

jedinica prvog reda je	$1(=2^0)$
jedinica drugog reda je	$2(=2^1)$
jedinica trećeg reda je	$4(=2^2)$
jedinica četvrtog reda je	$8(=2^3)$
. . . .	. . . . . .

Obrnuti primeri:

u binarnom (dvojičnom) sistemu:

$y=101$ je ciframa napisan broj $y=x^2+0\cdot x+1=$četiri+jedan
$y=1\,110$ je ciframa napisan broj $y=x^3+x^2+x+0=$osam+četiri+dva;

u dekadnom sistemu brojanja:

$y=374$ je ciframa napisan broj $y=3\cdot x^2+7\cdot x+4=$tri stotine+sedamdeset+četiri
$y=5010$ je ciframa napisan broj $y=5\cdot 10^3+10=$pet hiljada+deset

u dvanaestičnom sistemu:

$y=1\alpha$ je ciframa napisan broj $y=x+\alpha=$dvanaest+deset.

3. 1) Šta je x^n? Taj se izraz (stepen osnove sistema brojanja) može smatrati polinomom čiji su koeficijenti redom: 1, 0, 0, 0, . . . Naime:

$$x=1\cdot x+0$$
$$x^2=1\cdot x^2+0\cdot x+0$$
$$x^3=1\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0$$
. . . itd. . . . .

Uopšte:

$$x^n=\underbrace{1\cdot x^n+0\cdot x^{n-1}+0\cdot x^{n-2}\ 0\ldots+0\cdot x^2+0\cdot x+0}_{n \text{ sabiraka (članova)}}$$

Prema tome, nezavisno od sistema brojanja je:

$x^n=100\ldots 0$ (n nula)

ili $10^n=100\ldots 0$ (n nula)

Ali: u binarnom sistemu se 10 čita *dva*;
u trojičnom sistemu se 10 čita *tri*;
u sedmičnom sistemu se 10 čita *sedam*;
u devetičnom sistemu se 10 čita *devet*;
samo u dekadnom sistemu se 10 čita *deset*.

2) Pročitajte 100: u dvojičnom sistemu . . .
u petičnom sistemu . . .
u osmičnom sistemu . . .
u dekadnom sistemu . . .

3) Pročitajte 1000: u dvojičnom sistemu . . .
u trojičnom sistemu . . .
u dekadnom sistemu . . .
u šestičnom sistemu . . .

§ 15.3. UPOREĐIVANJE BROJEVA

1. Neka su dati brojevi $y=\overline{r_3r_2r_1r_0}$ u sistemu čija je osnova x i x^4. Koji je veći od njih? Napišimo broj y u obliku polinoma:

(1) $$y=r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0$$

Kako najveća od cifara $r_3, r_2 \ldots$ može da bude najviše $x-1$, to kad svaku od cifara zamenimo sa $x-1$, prethodna jednakost postaje

(2) $y\leqslant(x-1)x^3+(x-1)x^2+(x-1)x+x-1$, jer samo kad bi bilo $r_3=r_2=r_1=r_0$, bila bi jednakost [a ovako je desna strana jednakosti (1) povećana]. (Na primer, ako je $y=2x^3+x^2+3x+1$, onda je $y\leqslant 3x^3+3x^2+3x+1$.)

Na osnovu distributivnosti, (2) možemo napisati ovako (vidi i primer):

(3) $y\leqslant(x-1)(x^3+x^2+x+1)$,

tj. posle množenja $y\leqslant x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1$,

tj. (§ 12.3) $y\leqslant x^4+(x^3-x^3)+(x^2-x^2)+(x-x)-1$,

tj. $y\leqslant x^4-1$, tj. $y<x^4$.

Analogno se dokazuje da ako je y napisan sa n cifara, onda je:

$$y<x^n.$$

S druge strane, najmanji broj y napisan sa n cifara jeste onaj čije su cifre $r_{n-1}=1$, $r_{n-2}=0$, $r_{n-3}=0, \ldots, r_0=0$, a to nije ništa drugo nego broj x^{n-1}.

Znači:

Teorema 2. — *Ako je broj y napisan sa n cifara (u bilo kom sistemu x), on je manji od x^n, a najviše jednak broju x^{n-1}, tj.:*

$$x^{n-1}\leqslant y<x^n.$$

Na primer: $10^2<365_{10}<10^3$;
$7^2<365_7<7^3$;
$2^3<1\,101_2<2^4$.

2. Neka je
$$\left.\begin{array}{l} y=\overline{r_nr_{n-1}\ldots r_2r_1r_0} \\ z=\overline{u_pu_{p-1}\ldots u_2u_1u_0}\end{array}\right\}\; n>p.$$

Koji je od njih veći?

Možemo ih napisati ovako:

$$y=r_nx^n+\overline{r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_2r_1r_0}$$
$$z=u_px^p+\overline{u_{p-1}\ldots u_2u_1u_0}.$$

Odatle se vidi da je $y\geqslant x^n$, tj. najmanje jednak broju x^n, a kako je $n>p$, to je broj cifara broja z najviše jednak broju n, što prema prethodnoj teoremi znači da je $z<x^n$. Dakle:

$$y\geqslant x^n>z$$

to jest:

Teorema 3. — *Od dva prirodna broja veći je onaj koji je napisan sa više cifara.*

3. Uporedimo brojeve:

$$y=\overline{r_nr_{n-1}\ldots r_2r_1r_0} \text{ i } z=\overline{u_nu_{n-1}\ldots u_2u_1u_0},$$

od kojih je svaki napisan sa $(n+1)$ cifara.

(1) Napišimo ih u obliku:

$$y=r_nx^n+\overline{r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_1r_0}$$
$$z=u_nx^n+\overline{u_{n-1}u_{n-2}\ldots u_1u_0}.$$

Ako je $u_n<r_n$ i od oba broja oduzmemo u_nx^n, dobijamo druga dva broja:

$$y'=(r_n-u_n)x^n+\overline{r_{n-1}r_{n-2}\ldots r_1r_0},$$
$$z'=\overline{u_{n-1}u_{n-2}\ldots u_1u_0}.$$

Odatle se vidi da je y' napisan sa više cifara nego z', pa je (teor. 3):

$$y'>z', \text{ tj. (§ 12.3) } y>z.$$

Znači: Od dva broja napisana podjednakim brojem cifara veći je onaj čija je (§ 15.1, napomena pri kraju) prva cifra (sleva) veća.

Na primer, bez obzira u kom su sistemu čija je osnova veća od 3:

30 120>23 321.

(2) Pretpostavimo da je

$$r_n=u_n,\; r_{n-1}=u_{n-1}, \ldots, r_p=u_p,$$

a da je

$$r_{p-1}>u_{p-1}.$$

Tada date brojeve možemo napisati ovako:

$$y=\overline{r_nr_{n-1}\ldots r_p}\cdot x^p+\overline{r_{p-1}r_{p-2}\ldots r_2r_1r_0},$$
$$z=\overline{u_nu_{n-1}\ldots u_p}\cdot x^p+\overline{u_{p-1}u_{p-2}\ldots u_2u_1u_0}.$$

Njihovi prvi članovi su jednaki pa ih možemo izostaviti, čime dobijamo druga dva broja:

$$y'=\overline{r_{p-1}r_{p-2}\ldots r_2r_1r_0},$$
$$z'=\overline{u_{p-1}u_{p-2}\ldots u_2u_1u_0},$$

koje upoređujemo (kao napred) prema prvim ciframa. Ako je $r_{p-1}>u_{p-1}$, onda je $y'>z'$, pa, dakle, i $y>z$.

Na primer:

314<340	u svakom sistemu $x>4$;
235 102>233 534	u svakom sistemu $x>5$;
203 131<203 231	u svakom sistemu $x>3$.

$$\begin{array}{ll} y= & 3\;\;1\;\;6\;\;1 \quad\;\; 5\;\;4 \quad\;\; 7\;\;3\;\;5 \\ z= & \underbrace{3\;\;1\;\;6\;\;1}_{\substack{\text{odgovarajuće}\\ \text{jednake}\\ \text{cifre}}} \quad \underbrace{7\;\;0}_{\substack{5<7\\ \text{dakle}\\ y<z}} \quad \underbrace{1\;\;2\;\;3}_{\substack{\text{cifre koje ne}\\ \text{utiču na upo-}\\ \text{ređivanje}}} \end{array}$$

Prema tome:

Teorema 4. — *Ako su prirodni brojevi y i z napisani istim brojem cifara, upoređuju se odgovarajuće cifre, tj. cifre istog ranga počev sleva. Prvi par nejednakih cifara istog ranga pokazuje da je veći onaj broj čija je cifra veća.*

1) Uredite množinu sledećih brojeva počev od najvećeg:
1650, 4215, 3061, 6004, 5245.

2) Uredite počev od najmanjeg:
200002, 101111, 120222, 220111.

§ 15.4. DELJENJE BROJA STEPENOM OSNOVE SISTEMA BROJANJA

1. Neka je dat broj $y=\overline{r_5r_4r_3r_2r_1r_0}$. U obliku polinoma, kad je osnova brojanja x, on izgleda:

$$y=r_5x^5+r_4x^4+r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0.$$

Na osnovu § 14.2, t. **12.** 2 i distributivnosti, taj polinom možemo napisati, na primer u obliku:

(1) $y=(r_5x+r_4)x^4+r_3x^3+r_2x^2+r_1x+r_0$,

ili (2) $y=(r_5x^2+r_4x+r_3)x^3+r_2x^2+r_1x+r_0$,

ili (3) $y=(r_5x^3+r_4x^2+r_3x+r_2)x^2+r_1x+r_0$.

Kraće se ti oblici mogu napisati:

(1′) $y=\overline{r_5r_4}x^4+\overline{r_3r_2r_1r_0}$, gde je (§ 15.3) $\overline{r_3r_2r_1r_0}<x^4$,

(2′) $y=\overline{r_5r_4r_3}x^3+\overline{r_2r_1r_0}$, gde je (§ 15.3) $\overline{r_2r_1r_0}<x^3$,

(3′) $y=\overline{r_5r_4r_3r_2}x^2+\overline{r_1r_0}$, gde je $\overline{r_2r_0}<x^2$.

Odatle je očigledno da:

(1′) predstavlja *deljenje broja y brojem* x^4 (na osnovu komutativnosti tu jednakost možemo napisati u obliku:

$$y=x^4\ \underbrace{\overline{r_5r_4}}_{\text{količnik}}+\underbrace{\overline{r_3r_2r_1r_0}}_{\text{ostatak}};$$

(2′) predstavlja deljenje broja y brojem x^3, pa je $r_5r_4r_3$ količnik, a $r_2r_1r_0$ je ostatak; i tako dalje.

Uopšte, svaki prirodni broj:

$$y=\overline{r_nr_{n-1}\ldots r_pr_{p-1}\ldots r_2r_1r_0}$$

može se napisati u obliku deljenja brojem x^p:

$$y=\overline{r_nr_{n-1}\ldots r_p}\cdot x^p+\overline{r_{p-1}r_{p-2}\ldots r_1r_0},$$

čiji je količnik prvi činilac prvog sabirka deo broja napisan sa $n-p+1$ cifara, a ostatak je drugi sabirak napisan sa poslednjih p cifara $[n-p+1+p=(n+1)$ cifara sa koliko je napisan dati broj $y]$.

2. Primeri:

1) $735642=7356\cdot 10^2+42$, ili $735642:100=7356$ i ost. 42
$=73\cdot 10^4+5642$, ili $735642:10000=73$ i ost. 5642
$=7\cdot 10^5+35642$, ili ....

2) $101110100=101110\cdot 10^3+100$; $101110100:1000=\ldots$
$=10111\cdot x^4+100$; $101110100:10000=\ldots$

Primer 1) je u sistemu čija je osnova $x>7$. Primer 2) je u dvojičnom sistemu $(x=2)$, ali se može posmatrati i u svakom drugom sistemu čija je osnova veća od 2, jer je (§ 15.2, t. **3**):

10=deset u sistemu	$x=10$;	10=devet u sistemu	$x=9$, itd.;
10=dva u sistemu	$x=2$;	1000=hiljadu u sistemu	$x=10$;
10=pet u sistemu	$x=5$;	$1000=8^3$ u sistemu	$x=8$.

Prirodni broj napisan pomoću cifara deli se stepenom osnove x^p tako što se izdvoji, počev zdesna, p cifara i to je ostatak, a ostali „deo“ broja jeste količnik.

3) Podelite (osnovu pišemo dole kao indeks):

(1) 30020_4 brojevima 4^2, 4^4 i 4^3;
(2) 150233050_5 brojevima 5^3, 5^6 i 5^5;
(3) 102200111_3 brojevima 3^4, 3^7, 3^5 i 3^8;
(4) 654321000_7 brojevima 7, 7^4 i 7^9;
(5) 893_{10} brojevima 10, 100 i 1000;
(6) 71645_8 brojevima 8^4 i 8^5;
(7) 110000000 brojevima 10, 10^5 i 10^8.

§ 15.5. RAZNI SISTEMI BROJANJA

Iz prethodnog se vidi da, osim 0 i 1, svaki prirodni broj može da bude osnova brojanja. Broj *deset* nema (osim naše čvrste navike koja se stiče prvih školskih godina, a i u svakodnevnom životu) posebna preimućstva u tom pogledu. Štaviše, u zadnje vreme se u nauci i njenim primenama pojavljuju neke nepodesnosti dekadnog sistema brojanja, pa se ozbiljno govori o „tiraniji broja deset“ i o potrebi da se od samog početka deca uvode u razne sisteme brojanja.

Ipak, pošto se dekadni sistem vrlo dugo održava u istoriji kulturnog čovečanstva pa je postao svakodnevni „jezik“ ogromne većine ljudi na Zemlji, pošto se on održava, a verovatno će se još dugo održavati, i u školi i u svakodnevnom životu, mi ćemo se, i u ovom paragrafu i u sledećim glavama, dosta zadržavati na njemu. Ali ćemo, paralelno, ispitati i druge sisteme brojanja, posebno dvojični koji danas sve više prodire i u nauku i u tehniku.

Za svakog onog ko treba učenike da obrazuje matematički od posebnog je interesa ono što je zajedničko, ono što je matematičko u svim sistemima brojanja (njihova zajednička teorija, prelaz iz jednog sistema u drugi, analogija operacija u raznim sistemima, ...) i mi ćemo, koliko je u ovakvoj knjizi moguće, na tome insistirati.

1. 1) Ako brojimo tako što deset predmeta koje brojimo stavimo u jednu kesu, zatim deset takvih kesa stavimo u veću kesu, pa deset većih kesa stavimo u još veću kesu, itd. kažemo da je *osnova* brojanja *deset*, a sam način brojanja zove se *dekadni* ili *desetični sistem* brojanja.

Ako pet predmeta stavimo u jednu kesu, pa pet kesa stavimo u veću kesu, pa pet većih kesa stavimo u još veću kesu i tako produžimo (sve dok ima predmeta za brojanje), onda je *osnova* brojanja *pet*, a način ili sistem brojanja zove se *petični*.

Ako umesto deset ili pet stavljamo sedam predmeta u kesu, pa sedam kesa u veću kesu, itd., *osnova* brojanja je *sedam*, a sistem brojanja zove se sedmični.

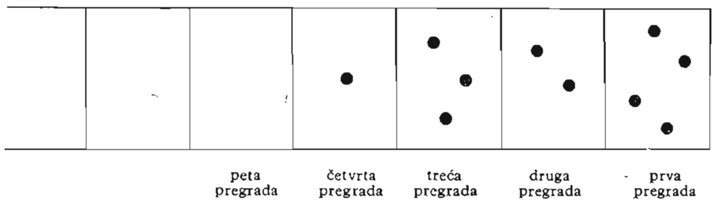
Na sličan način možemo da brojimo „po dva", „po tri", „po četiri", „po šest", itd., pa sistem brojanja može biti dvojični, trojični, itd.

2) Za pisanje (imenovanje) svih prirodnih brojeva potrebna je određena množina cifara:

u dvojičnom sistemu $\{0, 1\}$; u trojičnom sistemu $\{0, 1, 2\}$;

u devetičnom $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; u desetičnom $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

u dvanaestičnom $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$.



Slika 15.2

3) Kako je moguće sa malim i vrlo malim brojem cifara zapisati ogromno mnogo brojeva, teorijski sve prirodne brojeve? Odgovor daje ranije (u ovoj glavi) izložena teorija. Priđimo joj ovde elementarnije.

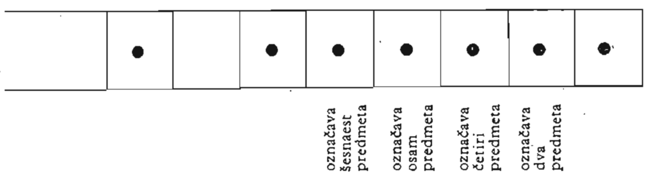
Najveći pronalazak koji je omogućio ne samo pisanje, imenovanje svakog prirodnog broja nego i razvoj aritmetike jeste *pozicioni način* („sistem") pisanja brojeva ili *abak* — kako se zvala sprava koja je u davnoj prošlosti predstavljala njegovu materijalizaciju (sl. 15.2).

Abak je niz, pravolinijski poređanih, pregrada i dogovor:

Svaki znak (nekada stvarni predmet) u prvoj pregradi označava *jedan* predmet.

Zatim:

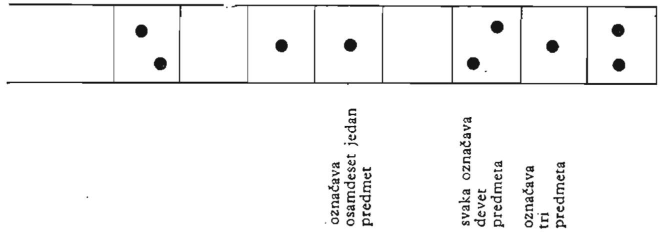
(1) Svaki znak (tačka npr.) druge pregrade označava *dva puta više* predmeta. Svaki znak treće pregrade označava *dva puta više* predmeta nego svaki znak druge pregrade. Svaki znak četvrte pregrade označava *dva puta više* predmeta nego svaki znak treće pregrade, i tako dalje. To je *dvojični sistem* brojanja (osnove dva):



Slika 15.3

(2) Ili:

Svaki znak (tačka) u drugoj pregradi označava tri predmeta, tj. *tri puta više* nego svaki znak u prvoj pregradi. — Svaki znak u trećoj pregradi označava *tri puta više* predmeta, nego onaj u drugoj, tj. devet predmeta. — Svaki znak u četvrtoj pregradi označava tri puta više nego, svaki u trećoj zagradi, tj. dvadeset sedam predmeta, i tako dalje. To je sistem brojanja čija je osnova tri:



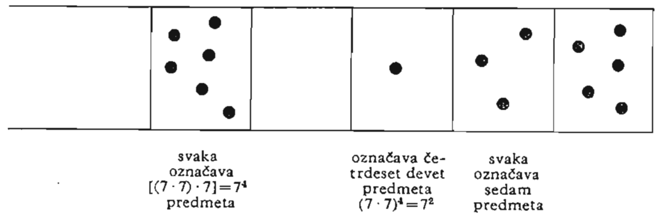
Slika 15.4

(3) Ili:

Svaki znak u drugoj pregradi označava sedam predmeta.

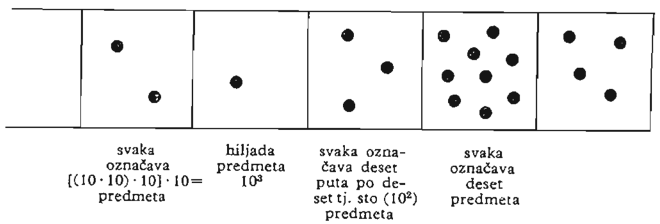
Svaki znak u trećoj pregradi označava *sedam puta više* nego znak u drugoj, tj. *četrdeset devet* predmeta.

Svaki znak u četvrtoj pregradi označava *sedam puta više* nego znak u trećoj, tj. trista četrdeset tri predmeta, i tako dalje. To je sedmični sistem brojanja (osnova sedam):



Slika 15.5

(4) Abak dekadnog sistema brojanja izgleda ovako:



Slika 15.6

4) (1) Zašto u svakoj pregradi:

abaka dvojičnog sistema može biti *najviše jedan* predmet, jedan znak (jedna tačka);

abaka trojičnog sistema može biti najviše dva predmeta, dva znaka (dve tačke);

abaka sistema čija je osnova četiri može biti najviše tri znaka (tri tačke)?

(2) Koliko najviše znakova može da sadrži pregrada abaka: petičnog, osmičnog, šestičnog, desetičnog (dekadnog) sistema brojanja?

5) „Savremeni abak" razlikuje se od abaka u davnašnja vremena, time što se: umesto stavljanja jednog predmeta, crtanja jednog znaka, jedne tačke, piše se cifra 1 u odgovarajućoj pregradi; umesto crtanja dve tačke piše se cifra 2 u odgovarajućoj pregradi; . . . ; umesto crtanja šest tačaka, piše se cifra 6 u odgovarajućoj pregradi; . . . ; u svakoj praznoj pregradi piše se cifra 0:

		1	1	1	0	1	1	0

(1)

	1	2	2	1	0	0	1	2

(2)

2	1	0	1	2	4	2	3	0

(3)

	6	5	0	0	7	0	9	3

(4)

Slika 15.7

Crtež (1) je „savremeni abak" dvojičnog sistema. Zašto? Crtež (2) je „savremeni abak" trojičnog sistema, ali i svakog drugog sistema čija je osnova veća od 3. Zašto? Može li crtež (3) da bude abak osmičnog sistema i zašto? Može li crtež (4) da bude abak petičnog, dvojičnog, devetičnog sistema i zašto?

6) Koliko predmeta (jedinica) označava:

(1) cifra 1 u šestoj pregradi crteža (1)?

(2) cifra 1 u petoj pregradi crteža (2) ako on prikazuje abak: trojičnog, šestičnog, devetičnog, sedmičnog sistema?

(3) cifra 2 u šestoj pregradi crteža (2) u svakom od već navedenih slučajeva?

(4) cifra 4 na crtežu (3) ako on prikazuje abak, petičnog, osmičnog, desetičnog sistema?

(5) cifra 5 na crtežu (4)?

7) Koliko predmeta, uopšte, jedinica označava cifra 0: u četvrtoj pregradi crteža (1); u prvoj pregradi crteža (1) i (3); u sedmoj pregradi crteža (3); u trećoj pregradi crteža (4)?

8) Ako izostavimo pregrade, dobijamo napisane brojeve na pozicioni način:

sl. 15.7 (1)	$1\,110\,110_2$
sl. 15.7 (2)	$12\,210\,012_3$
sl. 15.7 (3)	$210\,124\,230_5$
sl. 15.7 (4)	$65\,007\,093_{10}$

Napisani u obliku polinoma ti brojevi izgledaju:

$$1\,110\,110_2=2^6+2^5+2^4+0\cdot 2^3+2^2+2+0$$

ili obrnutim redom $=2+2^2+2^4+2^5+2^6;$

$$12\,210\,012_3=3^7+2\cdot 3^6+2\cdot 3^5+3^4+3+2$$

ili obrnutim redom $=2+3+3^4+2\cdot 3^5+2\cdot 3^6+3^7;$

$$210\,124\,230_5=0+3\cdot 5+2\cdot 5^2+4\cdot 5^3+2\cdot 5^4+5^5+5^7+2\cdot 5^8;$$

$$65\,007\,093_{10}=3+9\cdot 10+7\cdot 10^3+5\cdot 10^6+6\cdot 10^7.$$

9) Uopšte, prirodni brojevi napisani u obliku polinoma u raznim sistemima, počev od dvojičnog, izgledaju ovako:

$a=2^n+2^{n-1}+\ldots+2^2+2+r_0,\ r_0=0$ ili $1;$

$b=3^n r_n+3^{n-1}r_{n-1}+\ldots+3^2r_2+3r_1+r_0,\ r_n, r_{n-1},\ldots,r_0=0,1$ ili $2;$

$c=4^n r_n+4_{n-1}r_{n-1}+\ldots+4^2r_2+4r_1+r_0,\ r_n,r_{n-1},\ldots,r_0=0,\ 1,\ 2,$ ili $3;$

$d=5^n r_n+5^{n-1}r_{n-1}+\ldots+5r_1+r_0,\ r_n,\ldots r_1,r_0=0,\ 1,\ 2,\ 3$ ili $4;$ ... itd. ...

Napišite zaključno sa dekadnim sistemom.

10) Ma koji prirodni broj y, u ma kom sistemu brojanja, napisan u obliku polinoma izgleda (kao što smo već videli) ovako:

$$y=r_n x^n+r_{n-1}x^{n-1}+\ldots r_2x^2+r_1x+r_0,$$

(gde x označava osnovu sistema brojanja, a $r_n, r_{n-1},\ldots, r_2, r_1, r_0$ su koeficijenti, tj. 0, 1, 2, . . . , a napisan na pozicioni način:

$$y=\overline{r_n r_{n-1}\ldots r_2 r_1 r_0},$$

pri čemu se u svakom konkretnom slučaju osnova sistema piše dole (kao indeks), na primer:

$$2305_7,\quad 101_2,\quad 17\,365_8,\quad 873_{10},$$

11) Napišite u obliku polinoma:

$253_6;\quad 253_7;\quad 253_8;\quad 253_{10};$

$3\,023_4;\quad 3\,023_8;\quad 3\,023_{10};\quad 3\,203_5;$

$111\,001_2;\quad 111\,001_7;\quad 27\,536_{10};\quad 27\,536_9;$

$102\,012\,111_3;\quad 102\,012\,111_{10};\quad 222\,220_3;$

$444444;\quad 444\,444_5;\quad 444\,444_8.$

Kad osnova nije označena, podrazumevaćemo da je 10.

12) Napišite na pozicioni način:

(1) $3^5+2\cdot3^4+3+1$; (2) $5\cdot6^4+2\cdot6^3+3\cdot6+5$;
(3) $8+5\cdot10+3\cdot10^2+7\cdot10^5$; (4) $3+4\cdot7+6\cdot7^3$;
(5) $2+2^5$; (6) $3+2\cdot4^3$; (7) $7+8\cdot9^3$;
(8) $1+10+10^2+10^3+10^8$; (9) $1+8+8^2+8^3+8^4$.

2. Može li se broj napisan u jednom sistemu napisati u drugom sistemu?

Neka je, npr., $a=265_7$. Tada je [t. **1**, 8), 9) i 10)]:

$a=2\cdot7^2+6\cdot7+5=2\cdot49+6\cdot7+5=145_{10}$.

1) Napišite u dekadnom sistemu:

$b=11_2$; $c=1111_2$; $d=12345_6$; $e=131_8$;
$f=26055_7$; $g=201100_3$; $h=131_4$; $k=8000_9$.

2) Neka je $a=238_{10}$. Kako ćemo napisati broj a u sistemu čija je osnova 5? Tačno prema § 15.2:

delimo 238 brojem 5: $238=5\cdot47+3$, $r_0=3$,
delimo 47 brojem 5: $47=5\cdot9+2$, $r_1=2$,
delimo 9 brojem 5: $9=5\cdot1+4$, $r_2=4$,
Poslednji količnik je jedan, zato: $r_3=1$.

Dakle: $238_{10}=1423_5$.

Napišite:

$b=5866_{10}$ u sistemu čija je osnova 8;
$c=900_{10}$ u sistemu čija je osnova 7;
$c=900_{10}$ u sistemu čija je osnova 4;
$d=1000_{10}$ u sistemu čija je osnova manja od 10.

3) Napišite: 2 u dvojičnom sistemu;
3 u trojičnom sistemu;
4 u sistemu čija je osnova 4;
. . . .
9 u sistemu čija je osnova 9.

4) Napišite 65_7 u sistemu čija je osnova 3.

5) Napišite 203100_4 u sistemu čija je osnova 8.

3. Kad je: $14=13$; $12=11$; $14=15$? Sastavite i sami takve primere.

4. Neka su nosioci redova brojevi od nule do šesnaest, a nosioci stubaca osnove brojanja dva, tri, . . . , dvanaest:

	dva	tri	četiri	pet	šest	sedam	osam	devet	deset
nula	0	0	0				0		0
jedan	1	1	1			1			
dva	10	2	2				2		2
tri	2	10	3	3				3	
četiri	100	11	10	4					
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

1) Dovršite crtanje tabele i u svakom okviru napišite odgovarajući broj (napisan na početku reda) u odgovarajućem sistemu (čija je osnova napisana na početku stupca).

2) Na osnovu tabele odgovorite:

(1) Kako se piše jedanaest u osmičnom sistemu brojanja?

(2) U kojim je sistemima jedanaest dvocifreni broj?

(3) U kom je sistemu brojanja $11=102$?

3) Pokažite pravu liniju duž koje se nalaze brojevi 20. Kako to objašnjavate? Pokažite i objasnite i druge značajne prave linije.

5. 1) Napišite *neposredno* (tj. ne posredstvom dekadnog sistema) u binarnom (dvojičnom) sistemu sve prirodne brojeve od nule do sto.

2) Napišite u binarnom sistemu 317 i 273859.

3) Brojevi 1, 10, $10^2, \ldots, 10^n$ zovu se, u dekadnom sistemu brojanja, dekadne jedinice.

(1) Napišite 1, 10, $10^2, \ldots, 10^6$ u binarnom sistemu.

(2) Napišite brojeve binarnog sistema 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, . . . u dekadnom sistemu.

(3) Napišite u dekadnom sistemu brojeve koji se u binarnom sistemu pišu 111, 11100 0111, 1010 1010, 100 0001, 11 1101.

4) (1) Prikažite na abaku $1001\ 1100\ 1101_2$.

(2) Pomerite svaku tačku u susednu levu pregradu i napišite tako dobijeni broj.

5) Na osnovu „liste" brojeva koje ste napisali pod 1) proverite: $56=7\cdot8$; $48=3\cdot16$.

Rezime

1. 1) Za pisanje prirodnih brojeva u sistemu brojanja čija je osnova x potrebno je i dovoljno $(x-1)$ znakova koji se zovu cifre.

2) Potrebne cifre za pisanje brojeva u dekadnom sistemu čine množinu:

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$

a u binarnom: $\{0,1\}$.

Nula je jedina nevrednosna cifra.

2. 1) Svaki prirodni broj zapisuje se u obliku polinoma:

$$y=r_nx^n+r_{n-1}x^{n-1}+\ldots+r_1x+r_0,$$

i samo pomoću cifara, na pozicioni način:

$$y=\overline{r_nr_{n-1}, \ldots, r_2r_1r_0},$$

gde x označava osnovu sistema, a $r_n, r_{n-1}, \ldots, r_2, r_1, r_0$ su cifre. Crta iznad stavlja se stoga da bi se to izražavanje razlikovalo od množenja (proizvoda) $r_n r_{n-1} \ldots r_2 r_1 r_0$.

2) U $\overline{r_n r_{n-1} \ldots r_2 r_1 r_0}$

svaka cifra označava x puta veći broj od iste cifre koja neposredno sledi (x puta manji broj od iste cifre koja neposredno prethodi).

3. 1) Brojevi napisani na pozicioni način upoređuju se tako što se upoređuju cifre istog ranga počev sleva (upoređuju se u stvari brojevi koje te cifre označavaju, kraj § 15.1).

2) $$x^{n-1} \leqslant y < x^n.$$

3) Ma koji prirodni broj napisan na pozicioni način deli se brojem x^p (stepenom osnove brojanja) tako što se izdvoji njegovih p cifara zdesna i to je ostatak, a ostali „deo" je količnik.

GLAVA XVI

TEHNIKA ARITMETIČKIH OPERACIJA

U glavama XI—XIV izložena je teorija aritmetičkih operacija. U ovoj glavi pokazaćemo kako se dolazi do praktičnih pravila tih operacija, tj. kako se sabiraju, oduzimaju, množe i dele brojevi napisani pomoću cifara, na pozicioni način.

Ali izvođenje tih pravila je opet teorija. Videćemo da su ta pravila opšta, tj. da su nezavisna od sistema brojanja, da se, dakle, mogu primeniti u svakom sistemu, ali mi ćemo se, iz praktičnih razloga, zadržati, uglavnom, na dekadnom i binarnom sistemu brojanja.

Za stvarno izračunavanje zbira, razlike, proizvoda nužno je i dovoljno znati *samo* zbir, razliku i proizvod brojeva manjih od osnove sistema. A to daju ranije navedene tablice („mreže").

§ 16.1. SABIRANJE. ODUZIMANJE. MNOŽENJE

1. Sabiranje. Neka su a i b prirodni brojevi čiji zbir $s=a+b$ treba izračunati.

Moramo razlikovati dva slučaja:

1) *Zbir dve cifre* istog ranga (bez obzira koji je to rang) manji je od osnove sistema brojanja.* — Neka je, na primer, $a=1352$, $b=3213$. Napišimo te brojeve u obliku polinoma:

$$a=1x^3+3x^2+5x+2$$
$$b=3x^3+2x^2+x+3$$

i saberimo primenjujući asocijativnost sabiranja na članove istog stepena osnove:

$$a+b=(x^3+3x^3)+(3x^2+2x^2)+(5x+x)+(2+3).$$

Sad primenimo distributivnost:

$$s=(1+3)x^3+(3+2)x^2+(5+1)x+(2+3),$$

to jest: $$s=4x^3+5x^2+6x+5. \quad \text{Dakle: } s=4565.$$

Slovo x označava osnovu ma kojeg sistema. Ako je x deset, pišemo:

$$a=10^3+3\cdot 10^2+5\cdot 10+2, \qquad b=3\cdot 10^3+2\cdot 10^2+10+3,$$

$$a+b=s=(1+3)\cdot 10^3+(3+2)\cdot 10^2+(5+1)\cdot 10+5$$
$$=4\cdot 10^3+5\cdot 10^2+6\cdot 10+5=4565_{10}.$$

* Napomena na kraju § 15.1.

Ako je x=sedam, pišemo:

$$a=7^3+3\cdot 7^2+5\cdot 7+2,$$
$$b=3\cdot 7^3+2\cdot 7^2+5\cdot 7+3,$$
$$s=(1+3)\cdot 7^3+(3+2)\cdot 7^2+(5+1)\cdot 7+(2+3)$$
$$=4\cdot 7^3+5\cdot 7^2+6\cdot 7+5=4565_7.$$

Ako je x = osam, pišemo analogno i $s=4565_8$.

U praksi se sabirci mogu napisati jedan ispod drugog, ali, radi lakše primene asocijativnosti (i distributivnosti), tako da cifre istog ranga budu u istom „stupcu" (u istoj koloni), na primer:

$$\begin{array}{r} 1552 \\ +4217 \\ \hline 5769 \end{array} \quad \text{ili, npr.:} \quad \begin{array}{r} 342 \\ +7156 \\ \hline 7498. \end{array}$$

Ili, u sistemu čija je osnova 6, npr.:

$$\begin{array}{r} 32_6 \\ 513_6 \\ \hline 545_6. \end{array}$$

2) *Zbir dve cifre istog ranga je jednak osnovi ili je veći od nje.*

(1) Neka je, na primer, u dekadnom sistemu:

$$a=2643 \qquad b=764.$$

Tada imamo:

$$a=2x^3+6x^2+4x+2,$$
$$b=\quad 7x^2+6x+4.$$

Sabiramo te polinome primenjujući odmah asocijativnost sabiranja i distributivnost množenja:

$$a+b=2x^3+(6+7)\,x^2+(4+6)\,x+(2+4),$$

to jest $\qquad =2x^2+13x^2+10x+6.$

Ako je osnova deset, jedan je koeficijent veći od osnove, a drugi je jednak osnovi. Napišemo ih ovako $13=x+3$, $10=x+0$, pa imamo:

$$a+b=2x^3+(x+3)\,x^2+(x+0)\,x+6$$

to jest $\qquad =2x^3+x^3+3x^2+x^2+0\cdot x+0$ [distributivnost],

to jest $\qquad =(2+1)\,x^3+(3+1)\,x^2+0\cdot x+6$ [asocijat. i distrib.],

to jest $\qquad =3x^3+4x^2+0\cdot x+6$. Dakle: $a+b=s=3406$.

Ako je x = osam, pišemo $13=x+5$, $10=x+2$, pa imamo:

$$a+b=2x^3+(x+5)\,x^2+(x+2)\,x+6$$
$$=2x^3+x^3+5x^2+x^2+2x+6$$
$$=3x^3+6x^2+2x+6=3626_8.$$

Kad je zbir nekih cifara istog ranga veći od osnove ili jednak osnovi, osnova se *prenosi* u zbir cifara susednog levog ranga. Samo posle takvog prenosa svi koeficijenti postaju manji od osnove, pa se zbir dobijen u obliku polinoma može napisati na pozicioni način:

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 6 & 4 & 2 \\ + & 7 & 6 & 4 \\ \hline 3 & 13 & 10 & 6 \end{array} = 2\ 14\ 06=3\ 406 \qquad \begin{array}{rrrr} 2 & 6 & 4 & 2_8 \\ + & 7 & 6 & 4_8 \\ \hline (2 & 13 & 10 & 6)_8 \end{array} = 3\ 626_8.$$

U praksi se računa kratko (kad je osnova deset): $2+4=6$; $4+6=10$, 0 jedinica drugog ranga, drugog reda (zdesna) i 1 jedinica trećeg ranga; $6+7+1=14$ jedinica trećeg ranga (reda)=4 jedinice trećeg ranga i 1 jedinica četvrtog ranga.

Još kraće: $2+4=6$ (pišemo);
$4+6=10$, 0 (pišemo), 1 (prenos);
$1+7+6=14$, 4 (pišemo), 1 (prenos); $1+2=3$.

(2)
$$\begin{array}{rrrr} 3 & 2 & 3 & 1_4 \\ + & 2 & 3 & 2_4 \\ \hline 3 & 4 & 6 & 3 \end{array} = 3\ 5\ 2\ 3=(3+1)123=10123_4$$

jer je: $6=12_4$, $(4+1)_4=11$, $3+1=4=10_4$.

Kratko računamo: $1+2=3$ (pišemo);
$3+3=6$, 2 (pišemo), 1 (prenos);
$1+2+2=5$, 1 (pišemo), 1 (prenos);
$1+3=4$, 10 (pišemo).

(3) Izračunajmo:

$$\begin{array}{r} 10111011_2 \\ +101101_2 \\ \hline 11101000_2 \end{array}$$

$1+1=2=10_2$, 0 i 1 (prenos);
$1+0+1=2=10_2$, 0 i 1 (prenos);
$1+1+0=2$, 0 i 1 (prenos);
$1+1+1=3=11$, 1 i 1 (prenos);
itd.

(4) Izračunajte u binarnom sistemu:

$$\begin{array}{r} 111111111 \\ +\qquad 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111111111111 \\ +\quad 1111000 \\ \hline \end{array}$$

3) *Više sabiraka.* — (1) Neka je $a=3735$, $b=384$, $c=4064$. Tada je:

$$a=3x^3+7x^2+3x+5$$
$$b=\quad 3x^2+8x+4$$
$$c=4x^3+0x^2+6x+4,$$

pa je: $\qquad a+b+c=(3+4)x^3+(7+3+0)x^2+(3+8+6)x+(5+4+4),$

to jest $\qquad =7x^3+10x^2+17x+13,$

to jest $\qquad =7x^3+(x+0)x^2+(x+7)x+x+3,$

to jest $\qquad =7x^3+x^3+0\cdot x^2+x^2+7x+x+3,$

to jest $\qquad =(7+1)x^3+(0+1)x^2+(7+1)x+3,$

to jest $\qquad =8x^3+x^2+8x+3, \qquad a+b+c=8183.$

Izvršite to sabiranje i neposrednije:

(2)
$$\begin{array}{r} 3601_7 \\ 543_7 \\ +5265_7 \\ \hline 13042_7 \end{array}$$

$5+3+1=9=12_7$, 2 (pišemo), 1 (prenosimo);
$1+6+4=11=14_7$, 4 (pišemo), 1 (prenosimo);
$1+2+5+6=14=20$, 0 (pišemo), 2 (prenosimo);
$2+5+3=10=13_7$, 3 (pišemo sve i sabiranje je završeno).

(3) Izračunajte zbir:

$$503_6+41342_6+205431_6+44_6.$$

2. Oduzimanje. — Neka je $a>b$. Da bismo izračunali njihovu razliku $d=a-b$, moramo razlikovati dva slučaja:

1) *Svaka cifra broja a je veća od cifre istog ranga broja b, ili najviše jednaka toj cifri.*

Neka je, npr., $a=5734$, $b=3421$.

Tada je: $a=5x^3+7x^2+3x+4$

$b=3x^3+4x^2+2x+1$

$d=5x^3+7x^2+3x+4-(3x^3+4x^2+2x+1)$,

tj. (gl. XII, teor. 6) $=5x^3+7x^2+3x+4-3x^3+4x^2+2x-1$,

tj. (§ 12.3, kraj t. **4**) $=5x^3-3x^3+7x^2-4x^2+3x-2x+4-1$,

tj. (asoc.) $=(5-3)x^3+(7-4)x^2+(3-2)x+3$,

tj. $=2x^3+3x^2+x+3$, pa je $d=a-b=2313$.

U praksi se računanje može napisati ovako:

$$\begin{array}{r} 5734 \\ -3421 \\ \hline 2313 \end{array}$$

Oduzimamo svaku cifru umanjioca od odgovarajuće cifre (od cifre istog ranga) umanjenika.

2) *Jedna ili više cifara umanjioca su veće od odgovarajućih cifara umanjenika.*

(1) Neka je, npr., $a=2536$, $b=352$.

Da izračunamo njihovu razliku $d=a-b$.

Napišemo date brojeve u obliku polinoma:

$$a=2x^3+5x^2+3x+6$$
$$b=3x^2+5x+2.$$

Jasno je da se ne može oduzeti $5x$ od $3x$. Ali, razlika $a-b$ se neće promeniti (§ 12.2, t. **5**), ako (u slučaju x = deset) broj a (umanjenik) povećamo za $10x$, a broj b (umanjilac) povećamo za x^2, jer je $x^2=10x$. Dato oduzimanje, $a-b$, zamenjujemo, dakle, oduzimanjem $a'-b'$, gde je:

$$a'=2x^3+5x^2+13x+6$$
$$b'=4x^2+5x+2.$$

Tada postupamo kao pod 1), tj.:

$$a'-b'=2x^3+(5x^2-4x^2)+(13x-5x)+(6-2)$$

tj.: $=2x^3+x^2+8x+4$, pa je $a-b=2184$.

Ako je x = sedam, broj a (umanjenik) povećamo za $7x$, a broj b povećamo za x^2, jer je $x^2=7x$, pa oduzimanje $a-b$ zamenimo oduzimanjem:

$$\begin{aligned} a'-b' &=(2x^3+5x^2+10x+6)-(4x^2+5x+2) \\ &=2x^3+(5x^2-4x^2)+(10x-5x)+(6-2) \\ &=2x^3+x^2+5x+4=2154_7. \end{aligned}$$

(2) Neka je $a=4327$, $b=754$. Izračunajmo razliku $a-b$.

Prvo napišemo: $a=4x^3+3x^2+2x+7$

$b=7x^2+5x+4$

Kako ne možemo oduzeti $7x^2$ od $3x^2$

i $5x$ od $2x$, povećamo: a za $10x^2$ i $10x$

b za x^3 i x^2

jer je: $x^3=10x^2$ i $x^2=10x$,

pa dato oduzimanje $a-b$ zamenimo ekvivalentnim oduzimanjem $a'-b'$, gde je:

$a'=4x^3+13x^2+12x+7$ $[10x^2+3x^2=13x^2,\ 10x+2x=\quad]$

$b'=x^3+8x^2+5x+4$ $[x^2+7x^2=\ 8x^2]$.

Time je oduzimanje svedeno na slučaj 1), pa je:

$$a'-b'=3x^3+5x^2+7x+3 \quad \text{tj. } a-b=3573.$$

Izvršite isto oduzimanje kad mu je osnova devet i osam.

(3) $30000-4286$. U tom slučaju je:

$$a=3x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0$$
$$b=\phantom{3x^4+0\cdot{}}4x^3+2x^2+8x+6.$$

Zato pišemo redom:

$a'=3x^4+10x^3$

$b'=x^4+4x^3+2x^2+8x+6$ [jer je $x^4=10x^3$]

$a''=3x^4+10x^3+10x^2$

$b''=x^4+5x^3+2x^2+8x+6$ $[x^3=10x^2]$

$a'''=3x^4+10x^3+10x^2+10x$

$b'''=x^4+5x^3+3x^2+8x+6$ $[x^2=10x]$

$a^{\mathrm{IV}}=3x^4+10x^3+10x^2+10x+10$

$b^{\mathrm{IV}}=x^4+5x^3+3x^2+9x+6$ $[x=10]$.

Time je oduzimanje svedeno na 1) slučaj, pa je:

$$a^{\mathrm{IV}}-b^{\mathrm{IV}}=2x^4+5x^3+7x^2+x+4.$$

Dakle: $a-b=25714$.

U praksi primeri (2) i (3) izgledaju ovako:

$$\begin{array}{rcccc} & & {}^{+10} & {}^{+10} & \\ (2) & 4 & 3 & 2 & 7 \\ - & & 7 & 5 & 4 \\ & {}_{+1} & {}_{+1} & & \\ \hline & 3 & 5 & 7 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & & {}^{+10} & {}^{+10} & {}^{+10} & {}^{+10} \\ (3) & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & 4 & 2 & 8 & 6 \\ & {}_{+1} & {}_{+1} & {}_{+1} & {}_{+1} & \\ \hline & 2 & 5 & 7 & 1 & 4 \end{array}$$

(4) $a=4123_5$, $b=314_5$. Izračunati $a-b$.

Izvođenje je identično prethodnom. U praksi:

$$\begin{array}{rcccc} & & {}^{+5} & & {}^{+5} \\ (4) & 4 & 1 & 2 & 3_5 \\ - & & 3 & 1 & 4_5 \\ & {}_{+1} & & {}_{+1} & \\ \hline & 3 & 3 & 0 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & {}^{+8} & {}^{+8} & {}^{+8} \\ (5) & 7 & 0 & 0 & 0_8 \\ - & 3 & 6 & 5 & 2_8 \\ & {}_{+1} & {}_{+1} & {}_{+1} & \\ \hline & 3 & 1 & 2 & 6_8 \end{array}$$

3) Izračunatje:

$$(1)\quad \begin{array}{r} 7204 \\ -5638 \\ \hline \end{array} \qquad (2)\quad \begin{array}{r} 101010_2 \\ -11101_2 \\ \hline \end{array} \qquad (3)\quad \begin{array}{r} 21202_3 \\ -12022_3. \\ \hline \end{array}$$

3. Množenje. — Neka su a i b prirodni brojevi. Kako ćemo izračunati njihov proizvod $p=ab$?

1) *Jedan od činilaca je manji od osnove brojanja.* — (1) Neka je, npr., $a=462$, $b=4$. Tada je:

$$ab=(4x^2+6x+2)\cdot 4$$

pa je (§ 13.3, t. **5**): $\quad ab=4x^2\cdot 4+6x\cdot 4+2\cdot 4,$

tj.: (§ 13.3, teor. 5) $\quad =(4\cdot 4)x^2+(6\cdot 4)x+2\cdot 4,$

tj. $\quad =16x^2+24x+8,$

to jest, ako je osnova brojanja 10:

$$ab=(10+6)\,x^2+(20+4)\,x+8,$$

to jest (§ 13.3, t. **5**) $\quad =10x^2+6x^2+20x+4x+8,$

to jest $\quad =x^3+6x^2+2\cdot(10x)+4x+8 \qquad [10x^2=x^3]$

$$=x^3+6x^2+2x^2+4x+8 \qquad [10x=x^2]$$

$$=x^3+8x^2+4x+8.$$

Dakle: $ab=1\,848$.

Iz toga sledi praktični postupak:

462	4 puta 2 . . . 8 (pišemo jer je $8<10$);
$\times 4$	4 puta 6 . . . $24=2\cdot 100+40$, 4 (pišemo), 2 (prenos);
1848	4 puta 4 . . . 16 i 2 . . . 18 (pišemo).
	$(18x^2=10x^2+8x=x^3+8x^2=1\,000+800)$.

(2) Izvedite, na isti način, postupak za izračunavanje:

$$538\cdot 7;\qquad 4073\cdot 5;\qquad 3264\cdot 8.$$

(3) $352_6\cdot 5=(3x^2+5x+2)\cdot 5=15x^2+25x+10$

$$=23_6x^2+41_6x+14_6=(2\cdot 6x^2+3x^2)+(4\cdot 6x+x)+(x+4)$$

$$=2x^3+(3x^2+4x^2)+(x+x)+4 \qquad [x=6,\ 6x^2=x^3,\ 6x=x^2]$$

$$=2x^3+6x^2+x^2+2x+4$$

$$=2x^3+x^3+x^2+2x+4=3x^3+x^2+2x+4.$$

Dakle: $352_6\cdot 5=3\,124_6$.

Za praktično množenje trebalo je sastaviti tablicu množenja u sistemu čija je osnova 6. Međutim, nije teško prevoditi na „licu mesta“ u taj sistem:

352	$5\cdot 2 \ldots 10=14_6$, 4 (pišemo), 1 (prenos);
$\times\ 5$	$5\cdot 5 \ldots 25$ i $1 \ldots 26=42_6$, 2 (pišemo), 4 (prenos);
3124	$5\cdot 3 \ldots 15$ i $4 \ldots 19=31_6$ (pišemo).

Množi se, dakle, kao u dekadnom sistemu (što pokazuje teorijsko izvođenje), ali se (delimični) rezultati odmah prevode na šestični sistem. Tehnika množenja je jedinstvena za sve sisteme brojanja.

(4) Izračunajte: $423_5\cdot 4$; $\quad 6054_7\cdot 6$; $\quad 8\,375_9\cdot 8$.

2) *Jedan od činilaca je stepen osnove.*

(1) Neka je $a=574$, $b=10^n$. Proizvod pišemo:

$$p=(5x^2+7x+4)\,x^n,$$

tj. (§ 13.5, t. **2**): $\quad p=5x^{n+2}+7x^{n+1}+4x^n.$

Kako je (§ 15.2, t. **3**) $\quad 4x^n=4\underbrace{00\ldots 0}_{n\text{ nula}},$

proizvod iznosi: $\quad p=574\underbrace{00\ldots 0}_{n\text{ nula}}.$

To važi uopšte u svakom sistemu brojanja. Dakle:

$$574\cdot 10=\ \ 5740$$
$$574\cdot 10^2=\ \ 57400$$
$$574\cdot 10^3=\ 574000$$
$$574\cdot\ 8^3=5740000_8.$$
$$\ldots$$

(2) $2120_3\cdot 3^5=2120\underbrace{00000}_{5\text{ nula}}{}_3.$

(3) Izračunajte:

$$10111_2\cdot 2^3;\qquad 3013_4\cdot 4^6;\qquad 600_7\cdot 7^7;\qquad 77_3\cdot 9^4.$$

3) *Opšti slučaj množenja.* — (1) Neka je (u dekadnom sistemu) $a=224$, $b=132$. Tada je

$$ab=224\cdot(x^2+3x+2)$$
$$=224\cdot x^2+224\cdot 3x+224\cdot 2$$
$$=22\,400+6\,720+448=29\,568.$$

Ili: $\quad ab=224\cdot(2+3x+x^2)$

$$=448+672x+224x^2=448+6\,720+22\,400=\ldots$$

Otuda praktični raspored računanja:

224 · 132	ili	224 · 132	
224		448	Nula je neutralni element sabiranja, pa se nule ne moraju pisati (u delimičnim proizvodima).
672		672	
448		224	
29568		29568	

(2) Izračunajte uz obrazloženje: $517\cdot 304$; $\quad 2038\cdot 750$.

(3) $365_7\cdot 243_7=365_7\cdot(2x^2+4x+3)$

$$=365_7\cdot 2x^2+365_7\cdot 4x+365_7\cdot 3$$
$$=106300_7+21\,560_7+1\,461_7=132651.$$

Praktični raspored:

$$\begin{array}{l} 365_7 \cdot 243_7 \\ \hline \quad 1461 \\ \quad 2156 \\ 1063 \\ \hline 132651_7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 \cdot 5 = 15 = 21_7,\ 1 \text{ (pišemo), } 2 \text{ (prenos);} \\ 3 \cdot 6 = 18 \text{ i } 2 \ldots 20 = 26_7,\ 6 \text{ (pišemo), } 2 \text{ (prenos);} \\ 3 \cdot 3 = 9 \text{ i } 2 \ldots 11 = 14_7 \text{ (pišemo);} \\ 4 \cdot 5 = 20 = 26_7,\ 6 \text{ (pišemo), } 2 \text{ (prenos);} \\ 4 \cdot 6 = 24 \text{ i } 2 \ldots 26 = 35_7,\ 5 \text{ (pišemo), } 3; \text{ itd.} \end{array}$$

(4) $110101 \cdot 10110$ [u binarnom sistemu]

$=(110101) \cdot (10+100+10000)$ $[10110=10000+100+10]$

$=110101 \cdot 10+110101 \cdot 10^2+110101 \cdot 10^4$

$=1101010+11010100+1101010000=\ldots$

Praktični raspored:

$$\begin{array}{r} 110101 \\ 10110 \\ \hline 1101010 \\ 110101 \\ 110101 \\ \hline 10010001110 \end{array} \quad \text{Ili:} \quad \begin{array}{r} 110101 \\ 10110 \\ \hline 110101 \\ 110101 \\ 1101010 \\ \hline 10010001110 \end{array}$$

(5) Izračunajte označene proizvode:

$(1111 \cdot 1011)_2$; $(2100 \cdot 1021)_3$; $(7156 \cdot 5020)_8$.

4) *Sa koliko se cifara piše proizvod dva data broja?*

Iz tablice množenja jednocifrenih brojeva (gl. XIII) vidi se da proizvod može biti jednocifren (npr. $2 \cdot 3=6$) ili dvocifren [npr. $(7 \cdot 8=56)_{10}$, $(4 \cdot 4=31)_5$]. Isto tako je, npr., $32 \cdot 3=94$; $73 \cdot 24=1752$, tj. $2+2$, $57 \cdot 100=5700$, tj. $2+3-1$, $(341 \cdot 223=143143)_5$, tj. $3+3$, $(365 \cdot 27=13003)_8$, tj. $3+2$.

Ti primeri pokazuju da je broj cifara kojima se piše proizvod jednak zbiru cifara činilaca ili je manji za 1 od tog zbira. Da li je to opšta činjenica?

Neka je broj a napisan sa n cifara, a broj b sa k cifara. Tada je (glava XV, teorema 2):

$$x^{n-1} \leqslant a < x^n, \qquad x^{k-1} \leqslant b < x^k,$$

pa je (§ 13.4, t. **2** i § 13.5, t. **2**):

$$x^{n+k-2} \leqslant ab < x^{n+k},$$

tj. (pošto je x osnova brojanja):

$$\underbrace{100\ldots0}_{n+k-2} \leqslant ab < \underbrace{100\ldots0}_{n+k},$$

što pokazuje da se *ab piše sa $n+k-1$ cifara ili sa $n+k$ cifara.*

To može da posluži kao gruba kontrola tačnosti izvršenog množenja.

§ 16.2. DELJENJE

1. Ako su dati brojevi a i b napisani na pozicioni način, u sistemu čija je osnova x (dakle ma koja), onda izračunati brojeve q i r, napisane na isti način i u istom sistemu, koji zadovoljavaju uslove (§§. 14.1 i 14.3):

$$bq \leqslant a < b(q+1) \quad \text{ili} \quad bq \leqslant a,\ a+1 \leqslant b(q+1),$$
$$a = bq + r,\quad r < b,\quad \text{ili} \quad r \leqslant b-1.$$

znači *izvršiti deljenje broja a (deljenika) brojem b (deliocem).*

2. Broj cifara kojima se piše količnik. — Prvo što treba odrediti kad je deljenje (broja a brojem b) dato jeste broj cifara kojima se piše količnik q. Teoremu na osnovu koje se određuje broj cifara količnika možemo obrazložiti na dva načina:

1) Posmatrajmo množinu ili niz brojeva (koji smo već nazvali geometrijskom progresijom):

$$b,\ bx,\ bx^2,\ bx^3\ldots,\ bx^n,\ bx^{n+1},\ldots$$

gde je x osnova sistema brojanja.

Ako je bx^n najveći broj toga niza koji je jednak broju a ili manji od njega, pišemo:

$$bx^n \leqslant a < bx^{n+1}.$$

Konfrontiramo li te nejednakosti sa nejednakostima koje određuju količnik:

$$bq \leqslant a < b(q+1),$$

dobijamo

$$bx^n \leqslant bq, \text{ tj. } x^n \leqslant q,$$

(jer *najveći* multiplum broja b, manji od a ili jednak broju a, jeste bq)

i

$$b(q+1) \leqslant bx^{n+1}, \text{ tj. } q+1 \leqslant x^n+1,$$

[jer najmanji multiplum broja b koji je veći od a jeste $b(q+1)$].

Znači: $\boxed{x^n \leqslant q, \qquad q+1 \leqslant x^{n+1}.}$

Prema tome, polinom kojim se izražava količnik q je n-tog reda (§ 15.3, t. **1**):

$$q = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

pa se q piše sa $(n+1)$ cifara: $q = \overline{c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0}$.

Kako se bx^{n+1} dobija tako što se posle poslednje cifre (prve zdesna) broja b napiše (dopiše) $n+1$ nula (§ 16.1, t. **3**, 2), dolazimo (do sledećeg) rezultata:

Broj cifara količnika deljenja broja a brojem b jednak je najmanjem broju nula koje treba dopisati deliocu b pa da se dobije broj veći od deljenika a.

Na primer, ako treba podeliti 6347 brojem 26, onda je:

$$2600 < 6347 < 26\underbrace{000}_{3 \text{ nule}},$$

pa je količnik trocifren broj;

$$260 < 634 < 2600,$$

pa je količnik deljenja broja 634 brojem 26 dvocifren broj;

$$26 < 63 < 260,$$

pa je količnik deljenja broja 63 brojem 26 jednocifren broj.

Količnik deljenja, na primer:

$37:5$ je jednocifren (jer je $50>37$)
$37:3$ je dvocifren (jer je $30<37$).

2) Iz § 16.1, t. **3**. 4 neposredno se vidi da ako je deljenik napisan sa n cifara a b sa k cifara, onda je broj cifara količnika $(n-k)$ cifara ili $(n-k+1)$ cifara (jer broj cifara deljenika mora biti jednak zbiru cifara delioca i količnika ili tom zbiru smanjenom za 1).

U već navedenom primeru je:

u prvom slučaju $4-2+1=3$ cifre; u drugom $3-2+1=2$ cifre.

3) U praksi se broj cifara količnika može odrediti i ovako:

(1) Odvoji se (crticom) sleva onoliko cifara deljenikovih koliko ih ima delilac.

(2) Ako je tako dobijeni broj manji od delioca, broj cifara količnika jednak je broju preostalih cifara deljenika, a ako je taj broj veći od delioca, broj cifara količnika veći je za 1 od broja preostalih cifara. Na primer:

1754|38 : 2345 = . . (dve cifre);

1754|38 : 1593 = . . . (tri cifre).

Taj postupak je potpuno razumljiv onome koji već zna tehniku deljenja.

3. Izračunavanje prve cifre c_n količnika. — Napišimo ostatak deljenja ovako: $q=c_nx^n+r_n$, gde je $r_n<x^n$ ili $r_n\leqslant x^n-1$

(na primer: $q=399_{10}=3\cdot 10^2+99$, $99=10^2-1$).

Uostalom, q je prirodni broj pa se može prikazati u obliku deljenja brojem x^n, gde je x osnova brojanja, a u pogledu ostatka vidi Uputstva (ovaj §, t. **1**).

Tim izrazom zamenimo q u definicionoj jednakosti deljenja:

$$a=bq+r.$$

Dobijamo: $a=b(c_nx^n+r_n)+r=bc_nx^n+br_n+r$

ili (bolje): $a=(bx^n)\,c_n+(br_n+r)$.

Ispitajmo broj: br_n+r.

Broj r_n je ostatak deljenja količnika q stepenom osnove x^n. Znači, $r_n\leqslant x^n-1$, pa je $br_n\leqslant bx^n-b$. Broj r je ostatak deljenja broja a brojem b, dakle $r\leqslant b-1$. Saberimo te nejednakosti [§ 11.3, teor. 11, posled. (3)]: $br_n+r\leqslant bx^n-1$.

Prema tome (videti gore):

$$a=(bx^n)c_n+(br_n+r),\qquad br_n+r\leqslant bx^n-1,$$

tj. br_n+r je ostatak deljenja broja a brojem bx^n, a količnik tog deljenja je c_n. Dakle:

Prva cifra količnika deljenja broja a brojem b je količnik deljenja broja a brojem bx^n.

Na primer, ako je $a=6347$, $b=26$, onda je $q=c_2c_1c_0$ i c_2 se dobija deljenjem broja 6347 brojem 2600 i to ovako (glava XIV, teor. 10):

Podeli se 6347 brojem 100 i količnik je 63 (§ 15.4).

Podeli se 63 brojem 26 i količnik je $c_2=2$.

(Jasno je da se c_2 može izračunati i bez određivanja broja cifara količnika deljenja broja 6347 brojem 26, jer je $26<63<260$.)

4. Izračunavanje sledećih cifara količnika. — Pošto je prvi član desne strane jednakosti (vidi t. **3**):

$$a=(bx^n)\,c_n+(br_n+r)$$

sada poznat, napišemo tu jednakost ovako (§ 12.1):

$$a-(bx^n)c_n=br_n+r.$$

Stavimo $a-(bx^n)c_n=a'$,

pa imamo $a'=br_n+r_n$.

Kako je $r<b$, ta jednakost označava deljenje broja a' brojem b, pa je količnik tog deljenja r_n.

Međutim (t. **3**): $r_n=\overline{c_{n-1}\ldots c_1c_0}$

ili, analogno $r_n=c_{n-1}x^{n-1}+r_{n-1}$,

pa imamo $a'=b(c_{n-1}x^{n-1}+r_{n-1})+r$,

tj. $a'=(bx^{n-1})c_{n-1}+br_{n-1}+r$.

Znači, imamo, sa teorijske tačke gledišta, isto stanje kao u prethodnoj tački, pa na potpuno isti način možemo dokazati da je:

c_{n-1} količnik deljenja broja a' brojem bx^{n-1}

da se c_{n-1} izračunava iz a', kao što se c_n izračunava iz a.

Za dobijanje svih cifara količnika treba, dakle, ponoviti metodu pokazanu u tački **3**. Ta metoda je ista za deljenje brojeva u ma kom sistemu brojanja.

Neka je, na primer: $a=889584$, $b=365$.

(1) Kako je $365000<889584<3650000$, količnik deljenja broja a brojem b je četvorocifreni broj, tj. $q=c_3c_2c_1c_0$.

(2) Podelimo 889584 brojem 365000 (tj. $365\cdot 10^3$), tj. podelimo 889584 brojem 1000 i količnik 889 podelimo brojem 365:

$889=365\cdot 2+(889-730)$, tj. $889=365\cdot 2+159$, pa je $c_3=2$.

Znači: $a'=889584-365000\cdot 2=159584$.

(3) $a'=159584$ podelimo brojem $365\cdot 10^2=36500$.

Ako podelimo 159584 brojem 100 i količnik 1595 podelimo brojem 365, dobijamo $c_2=4$.

$$a''=159584-36500\cdot 4=13584.$$

(4) Podelimo 13584 brojem $365\cdot 10$, tj. 1358 brojem 365, dobijamo količnik $c_1=3$.

$$a'''=13584-3650\cdot 3=2634.$$

(5) Podelimo 2634 brojem 365, dobijamo:

$$2634=365\cdot 7+79, \qquad c_0=7.$$

Znači, količnik deljenja broja 889584 brojem 365 je $q=2437$, a ostatak $r=79<365$.

Proveravanje: $\quad a=b\cdot q+r, \quad r<b,$

$$889584=365\cdot 2437+79, \quad r<365.$$

Praktični raspored računanja:

$$\begin{array}{lrr|l}
a & \ldots & 8\,8\,9\,5\,8\,4 & 365\ \ldots\ldots=b \\
-bx^3c_3 & \ldots\ - & 7\,3\,0\,0\,0\,0 & 2\ \ldots\ldots=c_3 \\
a' & \ldots & 1\,5\,9\,5\,8\,4 & \\
-bx^2c_2 & \ldots\ - & 1\,4\,6\,0\,0\,0 & 4\ \ldots\ldots=c_2 \\
a'' & \ldots & 1\,3\,5\,8\,4 & \\
-bxc_1 & \ldots\ - & 1\,0\,9\,5\,0 & 3\ \ldots\ldots=c_1 \\
a''' & \ldots & 2\,6\,3\,4 & \\
-bc_0 & \ldots\ - & 2\,5\,5\,5 & 7\ \ldots\ldots=c_0 \\
r & \ldots & 7\,9 &
\end{array}$$

Izložena teorija pokazuje da se količnik datog deljenja izračunava nizom sukcesivnih deljenja, pri čemu je količnik svakog od tih deljenja jednocifren broj. A za to je dovoljno samo poznavanje tablice množenja u onom sistemu brojanja u kome se deljenje vrši. Ipak se ponekad događa da se jednocifreni količnik jednog od sukcesivnih deljenja ne može odmah odrediti. To se vidi i u navedenom primeru. Tada se delilac „zaokrugljuje" tako da ima oblik $c\cdot x^n$, pri čemu je c prva cifra delioca. Time se deljenje svodi na deljenje dvocifrenog jednocifrenim deliocem, a zatim se dobijena cifra količnika proba.

Npr. imali smo da delimo 1595 brojem 365. Umesto toga delimo brojem 300, tj. posle deljenja prvo brojem 100, delimo 15 brojem 3. Međutim, odmah vidimo da to ne može jer je 5 puta 65 približno 300, a to je mnogo veće od 95. Zato probamo 4.

Isto tako, kad smo delili 2634 brojem 365, probali smo (mentalno) brojem 300, tj. delili smo 26 brojem 3, ali smo probanjem našli da količnik ne može da bude 8, jer je $365\cdot 8=2920<2634$.

Dužom praksom u tome postiže se i lakoća i brzina.

5. Primenjujući *doslovno* ranije izloženi algoritam izračunajte:

8031:25; 410715:234; 777555:4444; 8000000:6751.

Tačnost svakog izvršenog deljenja proverite na osnovu činjenice: zbir ostatka i proizvoda delioca i količnika mora biti jednak deljeniku.

§ 16.3. VEŽBANJA I ZADACI

1. Oduzimanje 10^n-b može se vrlo lako izvršiti, npr., $1000-372$: $2+8=10$, $7+2=9$, $3+6=9$, $0+9=9$, tj. prva cifra zdesna dopunjuje se do 10 a sve ostale do 9. Obrazložite, a zatim primenite taj postupak kad je:

$$b=8736, \quad b=14905, \quad b=298400.$$

2. Je li tačno $a-b=a+(10^n-b)-10^n$, gde je n jednak broju cifara broja b ili veći od tog broja? Koristeći tačku 1 primenite tu formulu u slučaju $a=63542$, $b=5986$.

Uzmite i sami a i b pa računajte.

3. Početak tablice sabiranja u binarnom sistemu izgleda ovako:

+	0	1	10	11	100	...
0	0	1	10	11	100	...
1	1	10	11	100		...
10	10	11				...
11	11	100			111	...
...	...	...	...	...	...	...

Popunite prazna mesta i produžite tablicu do 10000.

4. Početak tablice množenja u binarnom sistemu izgleda:

·	0	1	10	11	100	...
0	0	0				...
1	0	1	10	11		...
10	0	10		110		...
11		11	110			...
100		100	1000	1100	10000	...
...	...	...	...	...	...	...

Popunite prazna mesta i produžite tablicu do 10000.

5. 1) U prethodnoj tablici je $100\cdot 100=10000$. Pokažite da je to tačno, a zatim izračunajte i kvadrat broja (binarni sistem): 101; 111; 1110011.

2) Izračunajte: 1000^{100}; 1011^{11}; 10001^{101} i proverite to u dekadnom sistemu.

3) Izračunajte razliku između:

$$11^{11} \text{ i } 11\cdot 11; \quad 111^{10} \text{ i } 10^{111}.$$

Sve proverite računajući i u dekadnom sistemu.

6. Izračunajte na dva načina (binarni sistem):

(1) $(1010+11)\cdot(1011+1001)$; (2) $101\cdot(11111-10011)$;

(3) $(101+111)\cdot(111-101)$; (4) $(11011+1111)^2$.

7. Izračunajte (u binarnom sistemu):

(1) 11110101:101; (2) 100111:11.

8. Napišite graf relacije | (deli) u množini

0, 1, 10, 100, 110, 1000 (binarni sistem).

9. 1) U kom sistemu i koju operaciju prikazuje ova tablica:

*	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	...
1	1	2	3	10	...
2	2	3	10	11	...
3	3	10	11	12	...
...	...	...	...	...	...

Produžite je do 22.

2) Sastavite do dvanaest tablicu sabiranja u sistemu čija je osnova: tri; pet; šest; ... ; devet; jedanaest; dvanaest.

3) Izračunajte:

(1) $(132+242+140)_5$; (2) $(6354+246)_7$; (3) $(52342+13+4021)_6$.

4) Izračunajte:

$(432-212)_5$; $(432-242)_5$; $(4000-2341)_5$;

$(53000-34154)_6$; $(6161-4646)_7$; $(10^8-77777)_8$.

10. 1) U kom sistemu brojanja i koju operaciju prikazuje ova tablica:

*	1	2	3	4	...
1	1	1	3	4	...
2	2	4	11	13	...
3	3	11	14	22	...
4	4	13	22	31	...
...	...	...	...	...	...

Proverite i produžite tablicu

2) Sastavite tablicu množenja u sistemu čija je osnova: tri; četiri; šest; sedam; osam.

3) Je li svaka od tih tablica simetrična u odnosu na dijagonalu kao tablica u dekadnom sistemu?

4) Izvršite množenje $3012 \cdot 2310$ u svim sistemima u kojima mogu da budu napisani ti činioci (osim dekadnog).

11. 1) Izračunajte količnik deljenja: broja a brojem b u sistemu čija je osnova pet kad je: (1) $a=4043$, $b=21$; (2) $a=4403$, $b=21$; (3) $a=40$, $b=21$.

2) Podelite broj 213626 brojem 35 u sistemu čija je osnova sedam.

12. Pokažite da je:

(1) $-111_2+222_3+444_5+555_6+666_7-777_8+888_9=987_{10}$;

(2) $888_9-777_8+666_7-555_6+444_5-333_4+222_3-111_2=1144_7$;

(3) $(3423_5-1545_6)\cdot(100111_2+2011_3-165_7)=1002_4$;

(4) $[(435_6+243_5)\cdot 320_4-(654_7-202_3)\cdot 101_2]-27143_8=0$.

13. Proizvod dva broja je 1504. Kad se jedan poveća za 10, njihov proizvod iznosi 1824. Koji su to brojevi?

14. Pri množenju jednog broja brojem 408 nije uzeta u obzir nula i zbog toga se pogrešilo za 1305000. Izračunajte taj broj.

15. Kad se oba činioca povećaju za 7, proizvod se poveća za 364. Razlika činilaca je 5. Izračunajte činioce.

16. Ako se jedan broj podeli brojem 175, ostatak je 73. Ako se taj isti broj podeli brojem 177, dobija se isti količnik (kao i kad se deli brojem 175), a ostatak je 11. Izračunajte količnik i deljenik.

17. Deljenik je 802, količnik je 14. Izračunajte delilac i ostatak.

18. 1) Neka je $a=bq+r$ i $m \mid a$. Kako se menja q kad se a: (1) pomnoži brojem m; (2) podeli brojem m?

2) Neka $m \mid b$. Kako se menja q kad se b: (1) pomnoži brojem m; (2) podeli brojem m?

19. Uspostavite svako od sledećih množenja:

```
(1)  x2x     (2)  1abcde     (3)   2 3●
      ×y            ×●3            ×9a
     ----         ------         ------
     3635         abcde1          ●●●●●
                                 ●●9●3
                                 ------
                                 ●●●●●a
```

20. Uspostavite svako od sledećih deljenja:

```
(1)  22●●●●  | 386        (2)  ●●●94  | 23●●
     ●●●●    |-----            ●●●●   |------
     ----    | ●●●             ----   |
      3724   |                  ●●●●  |
      ●●●●   |                  ●●●●  |
      ----   |                  ----  |
      ●●●●   |                    30  |
      ●●●●   |
      ----   |
       ●●2   |
```

Rezime

1. Sva pravila svih aritmetičkih operacija su istovetna za sve sisteme brojanja.

2. Razlikovati sabiranje kad zbir cifara istog ranga: (1) nije veći od osnove; (2) jeste jednak osnovi ili veći od nje.

3. Razlikovati oduzimanje: (1) kad nijedna cifra umanjioca nije veća od odgovarajuće cifre (istog ranga) umanjenika; (2) kad je bar jedna cifra veća od odgovarajuće cifre (cifre istog ranga) umanjenika.

4. Razlikovati množenje:

(1) kad je jedan činilac manji od osnove;

(2) kad je jedan činilac stepen osnove;

(3) opšti slučaj, tj. kad nije ni (1) ni (2).

5. Za određivanje cifara količnika postoji poseban algoritam.

GLAVA XVII

DELJIVOST PRIRODNIH BROJEVA PROVERAVANJE REZULTATA OPERACIJA

§ 17.1. DEFINICIJA I PROBLEM

1. Neka su a i m prirodni brojevi. Ako postoji takav prirodni broj q da je

$$a=mq \qquad [\S\ 14.1 \text{ i } \S\ 14.2]$$

onda se to, kratko, označava $m \mid a$, a izražava na razne načine:

Broj m *deli* broj a. Broj m je *delilac* broja a.

Broj m je *činilac* (faktor) broja a. Broj a je *deljiv* brojem m.

Broj a je *multiplum* broja m. Broj a je *sadržalac* broja m.

Očigledno je da sve to važi i za brojeve a i q.

2. Nije teško sastaviti neograničenu množinu multipluma datog broja m, na primer:

$M_2=\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ [množina multipluma broja 2]

$M_{10}=\{0, 10, 20, 30, \ldots\}$ [množina multipluma broja 10]

$M_5=\{0, 5, 10, 15, \ldots\}$

$M_4=\{0, 4, 8, 12, \ldots\}$

$M_3=\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

$M_7=\{0, 7, 14, 21, \ldots\}$ [množina multipluma broja 7].

. . .

Očigledno, svaka od tih množina je deo (podmnožina) množine prirodnih brojeva N i uopšte se množina M_m (multipluma prirodnog broja m) izražava ovako:

$$M_m=\{m \cdot n \mid n \in N\}.$$

3. Međutim, mnogo je značajnije pitanje: Ako su dati brojevi a i m, da li $a \in M_m$, to jest, prema prethodnoj definiciji, da li je $a=mq$?

Odgovor na to pitanje se uvek može dobiti deljenjem broja a brojem m: izvrši se deljenje (§ 16.2), pa ako je ostatak $r=0$, broj a je deljiv brojem m. Ali vrlo često nije potrebno znati količnik, nego samo da li $m \mid a$. U nekim slučajevima se to može (bez deljenja) odrediti (predskazati). Pravila na osnovu kojih se to određuje zovu se obeležja ili *kriterijumi deljivosti.*

§ 17.2. KRITERIJUMI DELJIVOSTI KOJI NE ZAVISE OD SISTEMA BROJANJA

1. Deljivost zbira. — 1) Neka $m \mid a$ i $m \mid b$. Da li $m \mid (a+b)$? Uzmite bilo koji primer, recimo $7 \mid 21$ i $7 \mid 56$ i izvršite deljenje $(21+56):7$. Pokažimo (dokažimo) to uopšte:

Uslovi su $a=mq_1$ i $b=mq_2$.

Sabiranjem tih jednakosti (§ 11.3, t. **5**, ili § 11.4) dobijamo:

$$a+b=mq_1+mq_2,$$

tj. (distributivnost) $\qquad a+b=m(q_1+q_2),$

što dokazuje da je $a+b$ deljiv brojem m (jer je $q_1+q_2=q$ prirodni broj).

Na isti način može se dokazati i za zbir od više sabiraka. Otuda:

Teorema 1. — *Ako je svaki sabirak deljiv datim brojem, i zbir je deljiv tim brojem.*

2) Da li važi obratno, tj. da li je svaki sabirak deljiv datim brojem ako je zbir deljiv tim brojem?

3) Šta možemo reći o deljivosti datog zbira datim brojem ako jedan sabirak nije deljiv (a svi ostali jesu deljivi) tim brojem? Navedite primere i dokažite:

Teorema 2. — *Ako jedan sabirak nije deljiv datim brojem, zbir nije deljiv tim brojem.*

4) Nijedan od sabiraka nije deljiv datim brojem. Možemo li tada potvrditi nešto o deljivosti zbira?

Nije određeno, jer to zavisi od sabiraka, npr.: $3 \nmid 17$, $3 \nmid 13$, a $3 \mid (17+13)$: $5 \nmid 18$, $5 \nmid 23$, $5 \nmid (18+23)$. Navedite i druge primere.

2. Deljivost razlike. — 1) Nije teško dokazati da ako $m \mid a$ i $m \mid b$, a $a \geqslant b$, onda $m \mid (a-b)$. Dokažite.

Teorema 3. — *Ako je i umanjenik i umanjilac deljiv datim brojem, i razlika je deljiva tim brojem.*

2) Posmatrajmo razliku $17-8$ i podelimo umanjenik, umanjilac i razliku brojem 3. Dobijamo:

$$\left.\begin{aligned} 17&=3\cdot 5+2 \\ 8&=3\cdot 2+2 \end{aligned}\right\} \ 17-8=9=3\cdot 3$$

Ispitajte tako razliku $33-13$ i broj 5; $46-25$ i broj 7; $29-17$ i broj 12; $13-4$ i broj 9.

Ti primeri pokazuju da ako su ostaci deljenja umanjenika i umanjioca istim brojem jednaki, razlika je multiplum tog broja. Da li to važi uopšte?

Neka je: $\left.\begin{aligned} a&=mq_1+r_1 \\ b&=mq_2+r_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &r_1=r_2 \\ &a>b \end{aligned}$

Tada je: $a-b=m(q_1-q_2)$, što dokazuje da je to opšta činjenica. Otuda:

Teorema 4. — *Ako su ostaci deljenja brojeva a i b brojem m jednaki, razlika $a-b$ je deljiva brojem m.*

Da li važi obrnuta teorema?

Neka je: $a=mq_1+r_1$
i $b=mq_2+r_2$.

Šta je nužno i dovoljno pa da bude: $a-b=m(q_1-q_2)$?

Teorema 5. — *Ako je razlika $a-b$ deljiva brojem m, ostaci deljenja brojeva a i b brojem m jednaki su.*

Na primer: $5\,|\,(38-23)$, $38=5\cdot 7+3$, $23=5\cdot 4+3$.

3. Deljivost proizvoda. — 1) Na osnovu teoreme 9, glava XIV, *proizvod je deljiv datim brojem ako je bar jedan činilac deljiv tim brojem,* tj.:

$$m|abc\ldots \text{ ako } m|a, \text{ ili } m|b, \text{ ili } \ldots$$

Navedite primere.

2) Na osnovu teoreme 5 (iste glave), ako je broj a deljiv brojem m, a m je deljiv brojem p, onda je a deljiv brojem p, tj.:

$$(m|a,\ p|m) \Rightarrow p|a.$$

Na primer: $(9|72,\ 3|9) \Rightarrow 3|72$.

3) Ako $m\nmid a$, onda $km\nmid a$ $(k\in N)$.

Na primer, pošto broj 400 nije deljiv brojem 7, on nije deljiv ni brojem 14, 21, 28, ...

Da li iz $m|a$ sledi $km|a$?

4. Deljivost broja stepenom osnove sistema brojanja. — Iz § 15.4 neposredno sledi:

Teorema 6. — *Broj je deljiv brojem x^p (u stvari brojem 10^p) ako su njegovih poslednjih p cifara nule.*

Na primer: (1) Da bi u binarnom sistemu dati broj bio deljiv brojem osam, nužno je i dovoljno da poslednje tri njegove cifre budu nule. (Zašto?) Da bude deljiv brojem šesnaest nužno je i dovoljno da poslednje četiri njegove cifre budu nule.

(2) $2700 : 10^2=27$; $80000 : 10^3=80$.

§ 17.3. DELJIVOST U DEKADNOM SISTEMU BROJANJA

1. Deljivost brojevima 2 i 5. — 1) $278=27\cdot 10+8$; $3\,402=340\cdot 10+2$;... Uopšte svaki prirodni broj $a=c_nc_{n-1}\ldots c_2c_10$ može se napisati kao zbir svih desetica i (prostih) jedinica $a=c_nc_{n-1}\ldots c_2c_1\cdot 10+c_0$.

Kako je prvi sabirak deljiv i brojem 2 i brojem 5 (§ 17.2, t. **3**, 1), deljivost broja a brojevima 2 i 5 zavisi od broja c_0. Zašto i kako? Otuda:

Broj je deljiv brojem 2 ili brojem 5 ako je broj koji označava njegova cifra jedinica deljiv brojem 2 ili brojem 5.

Znači:

Broj je deljiv brojem 2 ako mu je cifra jedinica (c_0) element množine $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Broj je deljiv brojem 5 ako mu je cifra jedinica element množine $\{0, 5\}$.

2) Do istog zaključka dolazimo i na osnovu teoreme 5 (§ 17.2). Zaista:

$$\left.\begin{array}{ll} & a=d\cdot 10+c_0 \\ \text{ili} & a=d\cdot(2\cdot 5)+c_0, \\ \text{odakle je} & a-c_0=d\cdot(2\cdot 5), \end{array}\right\} \quad [d \text{ ukupni broj desetica}]$$

pa je razlika $a-c_0$ deljiva brojevima 2 i 5.

Šta to, prema teoremi 5, znači?

3) Svaki broj množine M_2 (§ 17.1, t. **2**) deljiv je brojem 2, multiplum je broja 2. Svi se oni zovu *parni brojevi.* Prema tome, opšti oblik parnog broja je $2n$, $u\in N$.

Kako ostatak deljenja brojem 2 može biti samo 0 ili 1, opšti oblik neparnog broja glasi $2n+1$, $n\in N$.

2. Deljivost brojevima 4 i 25. — Primenimo prethodne metode:

1) $a=c_nc_{n-1}\ldots c_2c_1c_0=c_nc_{n-1}\ldots c_2\cdot 100+c_1c_0$.

Kako je $100=4\cdot 25$, nalazimo:

Broj je deljiv brojem 4, odnosno brojem 25, ako poslednje dve njegove cifre (prve dve zdesna) čine broj deljiv brojem 4, odnosno brojem 25.

Prema tome:

(1) *Broj je deljiv brojem 4, ako njegove poslednje dve cifre čine element množine* $\{00, 04, 08, 12, 16, \ldots$ multiplum broja 4 zaključno sa $96\}$.

Ali je lako videti da se ona svodi na množinu (koju treba pamtiti):

$$\{00, 04, 08, 12, 16\},$$

jer je, npr., $24=20+04$, $48=40+08$, $32=20+12$, ...

(2) *Broj je deljiv brojem 25 ako njegove poslednje dve cifre čine broj koji je element množine:* $\{00, 25, 50, 75\}$.

Navedite primere.

2) Drugi način izvođenja tih kriterijuma:

$$\left.\begin{array}{ll} & a=s\cdot 100+c_1c_0 \\ \text{ili} & a=s\cdot(4\cdot 25)+c_1c_0 \\ \text{odakle je} & a-c_1c_0=s\cdot(4\cdot 25), \end{array}\right\} \quad [s \text{ ukupni broj stotina}]$$

tj. (teoreme 5):

Broj je deljiv brojem 4, odnosno brojem 25, ako poslednje dve njegove cifre čine broj deljiv brojem 4, odnosno brojem 25.

3. Deljivost brojevima 8 i 125. — Broj $1\,000=8\cdot 125$. Primenite prethodne metode, izvedite i napišite kriterijum.

(1) *Broj je deljiv brojem 8 ako njegove tri poslednje cifre čine broj deljiv brojem 8, tj. ako* $8\,|\,\overline{c_2c_1c_0}$.

(2) *Broj je deljiv brojem 125 ako* $125\,|\,\overline{c_2c_1c_0}$, *tj. ako poslednje njegove tri cifre čine jedan od brojeva:*

$$\{000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875\}.$$

Na primer: $125 \mid 62375$; $125 \mid 711875$; $125 \mid 3625$.

4. Deljivost brojevima 9 i 3. — 1) Napišimo dati broj u obliku polinoma:

$$a=c_n\cdot 10^n+c_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\ldots+c_2\cdot 10^2+c_1\cdot 10+c_0$$

Kako je:
$$\begin{array}{lll} 10=9+1 & \text{i} & 10=3\cdot 3+1 \\ 10^2=99+1 & \text{i} & 10^2=33\cdot 3+1 \\ 10^3=999+1 & \text{i} & 10^3=333\cdot 3+1 \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

$$10_n=\underbrace{999\ldots 9}_{n \text{ cifara}}+1 \text{ i } 10^n=\underbrace{333\ldots 3}_{n \text{ cifara}}\cdot 3+1,$$

broj a možemo napisati ovako:

$$a=c_n(\underbrace{999\ldots 9}_{n \text{ cifara}}+1)+c_{n-1}(\underbrace{999\ldots 9}_{(n-1) \text{ cifara}}+1)+\ldots+c_2(99+1)+c_1(9+1)+c_0,$$

to jest (distributivnost):

$$a=c_n\cdot 999\ldots 9+c_n+c_{n-1}\cdot 999\ldots 9+c_{n-1}+\ldots+c_2\cdot 99+c_2+c_1\cdot 9+c_1+c_0,$$

tj. (komutativnost i asocijativnost sabiranja):

$$a=c_n\cdot 999\ldots 9+c_{n-1}\cdot 99\ldots 9+\ldots+c_2\cdot 99+c_1\cdot 9+(c_n+c_{n-1}+\ldots+c_2+c_1+c_1).$$

Kako je svaki sabirak prvog zbira deljiv i brojem 9 i brojem 3 (zašto?), broj a je (teor. 1 i 2) deljiv brojem 9, odnosno brojem 3, ako je zbir

$$c_n+c_{n-1}+\ldots+c_2+c_1+c_0$$

deljiv brojem 9, odnosno brojem 3.

A taj zbir je . . . Dakle:

Broj je deljiv brojem 9, odnosno brojem 3, ako je zbir njegovih cifara deljiv brojem 9, odnosno brojem 3.*

2) Ako označimo zbir cifara datog broja slovom c, tj stavimo

$$c_n+c_{n-1}+c_{n-2}+\ldots+c_2c_1c_0=c$$

prethodna jednakost se može napisati u obliku (§ 12.1):

$$a-c=c_n\cdot 99\ldots 9+\ldots+c_2\cdot 99+c_1\cdot 9,$$

odakle sledi (teorema 5) ranije iskazani kriterijum.

3) Ako je zbir cifara datog broja deljiv brojem 9, on je deljiv i brojem 3. Zašto? A obrnuto?

Na primer: 71 325 je deljiv brojem 9 pa dakle i brojem 3, 732 je deljiv brojem 3, a nije . . . , 6 325 nije deljiv ni brojem 9 ni brojem 3.

* Napomena na kraju § 15.1.

§ 17.4. PROVERAVANJE TAČNOSTI IZVRŠENIH OPERACIJA

1. 1) Ako stavimo (glava XIII, teor. 7):

$$c_n\cdot 99\ldots 9+c_{n-1}\cdot 99\ldots 9+\ldots+c_2\cdot 99+c_1\cdot 9=9d$$

i slično
$$c_n'\cdot 99\ldots 9+c_{n-1}'\cdot 99\ldots 9+\ldots+c_2'\cdot 99+c_1'\cdot 9=9d',$$

onda iz
i
$$\left.\begin{array}{l} a-c=9d \\ b-c'=9d' \end{array}\right\} \text{[prethodni §],}$$

sledi (glava XI, teor. 11 i njene posledice):

$$(a+b)-(c+c')=9(d+d').$$

A iz toga (teorema 5 ove glave):

Teorema 7. — *Ostatak deljenja zbira datih brojeva brojem 9 i ostatak deljenja zbira njihovih cifara brojem 9 jednaki su.*

Kako se i ostatak deljenja zbira brojem 9 svodi na ostatak deljenja zbira njegovih cifara brojem 9, prethodna teorema omogućuje sledeće dosta sigurno, a vrlo lako i brzo proveravanje tačnosti izvršenog sabiranja:

Saberu se ostaci deljenja svakog sabirka brojem 9 i izračuna se ostatak deljenja toga zbira brojem 9. Izračuna se ostatak deljenja dobivenog zbira brojem 9. Ako su ta dva ostatka jednaka, rezultat sabiranja je, vrlo verovatno, tačno izračunat.

Na primer:

	ostatak deljenja brojem 9	
352	1	
6048	0	$(1+5+8)=9\cdot 1+5$
752	5	
58967	8	
66119	5	

U praksi se ostaci deljenja izračunavaju tako što se pri izračunavanju zbira cifara izostavlja svaka cifra 9 i svaki zbir 9:

$5+3+2=10$, $10-9=1$ (ostatak deljenja broja 352 brojem 9);
$6+4=10$, $10-9=1$, $1+8=9$ (ostatak deljenja je nula),
ili $6+4+8=18$, $18=9\cdot 2+0$;
$7+2=9$, 5 (ostatak je 5);
$5+8=13$, $1+3=4$, $4+6=10$, $1+7=8$ (ostatak deljenja brojem 9).

U stvari, svaki dvocifreni zbir se odmah „steže" na jednocifren sabiranjem njegovih cifara, i to je njegov ostatak deljenja brojem 9. Na primer: $5+7=12$, $1+2=3$, $6+8=14$, $1+4=5$, . . . Prema tome, ostatak deljenja broja 375486 izračunava se mentalno: 3 i 7 . . . 10, 1 i 5 . . . 6 i 4 . . . 10, 1 i 8 . . . 0, 6 (i zaista $3+7+5+4+8+6=33=9\cdot 3+6$).

2) Oduzimanje je inverzna operacija sabiranju, pa se i tačnost izvršenog oduzimanja proverava inverzno.

2. Tačnost izvršenog množenja se, takođe, može proveriti „pomoću 9". Zaista:

$$a=9q_1+r_1,\quad b=9q_2+r_2,$$

tj. (§ 13.4): $ab=(9q_1+r_1)(9q_2+r_2)$,

tj. $ab=9\cdot 9q_1q_2+9q_2r_1+9q_1r_2+r_1r_2$,

tj. $ab-r_1r_2=9q \quad [q=9q_1q_2+q_2r_1+q_1r_2]$.

Otuda (teor. 5 ove glave) analogno pravilo:

Izračuna se ostatak $r'=r_1r_2-9q'$ *i ostatak* $r''=ab-9q''$. *Ako je* $r''=r'$, *proizvod ab je, vrlo verovatno, tačno izračunat.*

Na primer:

$$\begin{array}{r l}
276 \ldots\ldots\ldots & r_1=6 \\
\times\, 58 \ldots\ldots\ldots & r_2=4 \\
\hline
2208 & \\
1380 & \\
\hline
16008 \ldots\ldots\ldots & r''=6
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 6\cdot 4=24,\ r'=6$$

3. Na osnovu prethodnog, proveravanje tačnosti izvršenog deljenja vrši se „pomoću 9“, na primer, ovako:

$$\begin{array}{r|l} 152183 & 235 \\ \hline r=138 & 647 \end{array} \quad \text{tj. } \underbrace{152183}_{a}=\underbrace{235}_{b}\cdot\underbrace{647}_{q}+\underbrace{138}_{r}$$

$$\begin{array}{r r}
152183 \ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\
235 \ldots 1,\quad 647 \ldots 8,\ 1\cdot 8=8 \ldots\ldots\ldots\ldots & 8 \\
138 \ldots\ldots\ldots\ldots & 3
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} 3+8=11,\ 1+1=2$$

Dva pitanja i njihovi odgovori:

1) Zašto kažemo: Proveravanje pomoću 9 je „dosta sigurno“? Ili: Ako su ostaci jednaki, rezultat je „vrlo verovatno“ tačno izračunat?

Zato što proveravanje pomoću 9 ne otkriva grešku:

(1) Ako su neke cifre jednog broja (sabirka, činioca, zbira, proizvoda, ...) permutovane (tj. ako su im zamenjena mesta), jer je ostatak deljenja, npr. brojeva 7365 i 3756, ... brojem 9 uvek isti — 3.

(2) Ako se umesto 9 napiše nula i obrnuto.

(3) Ako se pri množenju „delimični“ proizvodi ne potpisuju pravilno.

Ali, te su greške vrlo retke i zato je proveravanje pomoću 9 „sasvim sigurno“.

2) Zašto se proverava baš „pomoću 9“?

Zato što se ostaci deljenja brojem 9 najlakše (tako reći mehanički) izračunavaju. Inače, sve što je rečeno o proveravanju „pomoću 9“ važi i o proveravanju pomoću svakog drugog broja, ali se ostaci deljenja drugim brojevima ne izračunavaju uvek lako. Probajte.

§ 17.5. VEŽBANJE I ZADACI

1. Pokažite da je prirodni broj:

(1) deljiv brojem 6, ako je deljiv i brojem 2 i brojem 3;

(2) deljiv brojem 12, ako je deljiv i brojem 3 i brojem 4;

(3) brojem 15, ako je deljiv i brojem 3 i brojem 5.

2. Koju cifru treba staviti umesto slova x, pa da se od $425x$ napravi broj:

(1) koji je deljiv brojem 5;

(2) koji je deljiv brojem 2, a nije deljiv brojem 4;

(3) koji podeljen brojem 9 daje ostatak 5?

3. Neka u $a=7224xy$ slova x i y označavaju cifru desetica i cifru jedinica. Napišite sve uređene parove (x, y) koji čine da: (1) $8 \mid a$; (2) $9 \mid a$; (3) istovremeno $8 \mid a$ i $9 \mid a$.

4. Dat je broj $a=10802$. Napišite sve uređene parove brojeva koje treba napisati umesto dveju nula, pa da istovremeno $4 \mid a$ i $9 \mid a$.

5. 1) Koji su ostaci deljenja brojeva 10, 10^2, 10^3 ... brojem 4?

2) Pokažite da je ostatak deljenja datog broja brojem 4 jednak ostatku deljenja broja (brojem 4) koji se od datog dobija tako što se cifra njegovih jedinica poveća za dvostruku cifru njegovih desetica. Proverite to na:

$$a=3446, \quad b=17693, \quad x=1891, \quad a+b+c \text{ i } abc.$$

Kako se, na osnovu toga, može iskazati kriterijum deljivosti brojem 4?

3) Koji su ostaci deljenja brojeva 10, 10^2, 10^3, ... brojem 8? Pokažite da je ostatak deljenja datog broja brojem 8 jednak ostatku deljenja broja koji se od datog dobija na taj način što se njegova cifra jedinica poveća za dvostruku cifru desetica i četvorostruku cifru stotina.

6. Podelite brojem 7 svaki od brojeva: 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6.

1) Napišite sve dobijene ostatke.

2) Šta možete reći o svim sledećim ostacima (koji se dobijaju deljenjem brojeva 10^7, 10^8, ... brojem 7)?

3) Izračunajte ostatke koji se dobijaju pri deljenju brojeva $a=542$, $b=8000000$, $c=8000542$ brojem 7.

4) Izračunajte ostatke koji se dobijaju pri deljenju brojeva a^3, b^3, c^3 brojem 7 (gde a, b, c označavaju brojeve date pod 3).

5) Jeste li uočili koju zanimljivu osobinu imaju ostaci dobijeni pod 1)?

7. Pokažite da je zbir: 3 uzastopna prirodna broja deljiv brojem 3; 5 uzastopnih prirodnih brojeva deljiv brojem 5; 7 ... deljiv brojem 7; ... $2n+1$ uzastopnih prirodnih brojeva deljiv brojem $2n+1$.

8. 1) Kojim brojem su deljivi brojevi 11, 1111, 111111, ...? Sa koliko cifara 1 mora biti napisan broj a pa da $11 \mid a$?

2) Kojim brojem je deljiv broj 1 ... 1, napisan sa $3p$ cifara 1 ($p \in N$)?

3) Neka su a, b, c tri različite cifre. Napišite sve (trocifrene) brojeve tim ciframa i pokažite da je njihov zbir multiplum broja 111 (bez obzira koji je sistem brojanja).

9. Napišite množinu: (1) $M_2 \cap M_3$; (2) $M_3 \cap M_4$; (3) $M_2 \cap M_6$.

10. 1) Koji su ostaci deljenja svih prirodnih brojeva brojem 3?

To pokazuje da broj 3 proizvodi particiju množine N:

$$\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$$
$$\{1, 4, 7, 10, \ldots\}$$
$$\{2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

Svaka od tih množina zove se *klasa ostataka po modulu* (ili modulo) 3.

2) Napišite klase ostataka po modulu 5.

3) Napišite klase ostataka po modulu: 7; 9; 11.

4) Razlika ma koja dva broja iste klase je multiplum modula (deljiva je modulom). Proverite to na raznim klasama koje ste napisali.

Ta se činjenica piše, na primer:

$$19 \sim 7 \pmod 3), \text{ ili } 19 \equiv 7 \pmod 3$$
$$41 \sim 13 \pmod 7, \text{ ili } 41 \equiv 13 \pmod 7$$
$$383 \sim 3 \pmod 5, \text{ ili } 383 \equiv 3 \pmod 5.$$

Uopšte, $a \sim b \pmod{m}$, ili $a \equiv b \pmod{m}$ čita se i *a kongruentno b modulo m* i izražava činjenicu:

$$m \mid (a-b) \text{ ili, što je isto, } a-b=mq, \quad a=mq_1+r, \quad b=mq_2+r.$$

5) Izračunajte bar 5 brojeva x koji zadovoljavaju uslov:
(1) $344 \equiv x \pmod{5}$; (2) $770 \sim x \pmod{7}$;
(3) $750 \equiv 678 \pmod{x}$; (4) $750 \sim 200 \pmod{x}$.

6) Napišite množinu svih brojeva koji zadovoljavaju uslov:
(1) $x \sim 20 \pmod{11}$; (2) $y \equiv 20 \pmod{13}$.

7) Izračunajte ostatak deljenja svakog broja množine

$$\{1, 4, 4^2, 4^4, 4^5\} \text{ brojem } 11.$$

8) Izračunajte ostatak deljenja svakog broja množine $\{4^5, 4^{10}, 4^{15}, 4^{25}, \ldots\}$ brojem 11.

9) Ma koji paran broj izražava se $2n$, $n \in N$.
Ma koji neparan broj izražava se $2n+1$, $n \in N$.
Izrazite ma koji broj množine: $\{1, 5, 9, 13, \ldots\}$.

10) Izrazite ma koji broj množine:
(1) $\{3, 7, 11, 15, \ldots\}$; (2) $\{2, 6, 10, 14, \ldots\}$.

GLAVA XVIII

PROSTI I SLOŽENI BROJEVI. ZAJEDNIČKI DELIOCI I ZAJEDNIČKI MULTIPLUMI (SADRŽAOCI)

§ 18.1. VRSTE PRIRODNIH BROJEVA

U § 17.1, t.**1**, uveli smo razne sinonime za delioce ili činioce i multiplume (sadržaoce).

Svaki element množine $N_1 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ima najmanje jedan delilac ili činilac. To je broj 1, jer $\forall n \in N_1 \Rightarrow 1 \mid n$.

Svaki drugi broj množine N_1, tj. svaki broj množine $N_1 \setminus \{1\}$ ima najmanje dva delioca (činioca), jer je svaki od njih deljiv brojem 1 i samim sobom:

$$\forall n \in N_1 \setminus \{1\} \Rightarrow 1 \mid n \text{ i } n \mid n; \quad n = 1 \cdot n.$$

Ali, množina N_1 sadrži i brojeve koji imaju više do 2 delioca (činioca), na primer: $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Svaki broj množine N_1 koji ima samo dva delioca (ili, što je isto, koji je deljiv samo brojem 1 i samim sobom) zove se prost broj.

Svaki drugi broj množine N_1, osim 1, tj. svaki broj množine N_1 koji ima više od dva delioca zove se složen broj.

Broj 1 nije ni prost ni složen.

Broj 0 (nula) je početni element množine parnih brojeva $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, pa ćemo ga smatrati složenim brojem (iako je $0 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$, jer je nula deljiva svakim prirodnim brojem).

Prema tome, moramo razlikovati: (1) broj 1, (2) proste prirodne brojeve i (3) složene prirodne brojeve.

U užem smislu, prosti i složeni brojevi su elementi množine:

$$N_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Na primer, ako posmatramo brojeve te množine od početka pa zaključno sa brojem 30, onda: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 i 29 su prosti brojevi, a svi ostali su složeni brojevi.

§ 18.2. PRIKAZIVANJE (PISANJE) SLOŽENIH BROJEVA U OBLIKU PROIZVODA PROSTIH BROJEVA (FAKTORIZACIJA)

1. Neka su p i q prosti brojevi i neka $m \mid pq$. Šta u tom slučaju možemo reći o broju m?

Prema prethodnim definicijama i teoremi 9, glava XIV, odgovor mora biti:

$$m=p \text{ ili } m=q.$$

2. Broj 4 ima jedan prost delilac (2). Broj 6 ima dva prosta delioca (2 i 3). Broj 10 ima opet dva prosta činioca (2 i 5). Broj 30 ima 3 prosta delioca (činioca). Imenujte ih.

Da li svaki složen broj ima proste delioce (činioce)?

Neka je a složen broj. On je, prema definiciji, deljiv jednim brojem b, $1<b<a$ (jer bi inače broj a bio prost broj). Taj broj b može biti prost broj i tada a ima jedan prost delilac. Ako je, pak, b složen broj, onda on mora biti deljiv nekim brojem $1<c<b$. Ako je c prost broj, onda je on delilac (činilac) broja a (§ 14.2, teorema 5). Ako je c složen broj, ponavljamo prethodno rasuđivanje. I taj proces ima kraja (jer konačni broj a mora imati i konačni broj delilaca), tj. mora se doći do prostog delioca broja. Dakle:

Teorema 1. — *Svaki složen broj ima bar (najmanje) jedan prost delilac (činilac).*

Na primer: $48=6\cdot8=2\cdot3\cdot8$; $81=9\cdot9=3\cdot3\cdot9$.

3. Neka je a složen broj. Prema prethodnoj teoremi, on ima jedan prost delilac p_1, tj.

$$a=p_1b.$$

Ako je b prost broj, broj a je napisan u obliku proizvoda prostih činilaca. Ako je b složen broj, onda je:

$$b=p_2c, \quad a=p_1p_2c.$$

Ako je c prost broj, broj a je napisan u obliku proizvoda prostih činilaca. Ako je c složen broj, nastavljamo proces, ali on se (videti napred) mora završiti. Znači:

Teorema 2. — *Svaki složen broj može se napisati u obliku proizvoda prostih brojeva.*

Na primer: $420=10\cdot42=2\cdot5\cdot42=2\cdot5\cdot6\cdot7=2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7$,
što se može napisati ovako $=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7$ ili, kraće, $2^2\cdot3\cdot5\cdot7$.

Taj se posao zove *faktorizacija* ili *„rastavljanje" datog broja na proste činioce.*

4. Može se dokazati:

Teorema 3. — *Faktorizacija složenog broja može da se izvrši samo na jedan jedini način* („Osnovna teorema aritmetike").

To znači da se dati broj a ne može napisati jedanput kao proizvod prostih brojeva $pqr\ldots$, a drugi put kao proizvod $p'q'r'\ldots$, gde se $p', q', r', \ldots$ razlikuju od $p, q, r, \ldots$

Dokaz nije težak ali je suptilan i mi se ovde nećemo upuštati u njega.

5. Tehnika faktorizacije može biti dvojaka, na primer:

(1) $666=6\cdot111=(2\cdot3)\cdot(3\cdot37)=2\cdot3\cdot3\cdot37=2\cdot3^2\cdot37$;

(2) $666=2\cdot333=2\cdot3\cdot111=2\cdot3\cdot3\cdot37=2\cdot3^2\cdot37$.

Pod (1) smo prvo dati broj napisali kao proizvod dva složena broja, a zatim smo svaki tako dobijeni (manji) broj rastavili na proste činioce. Pod (2) smo dati broj podelili njegovim najmanjim prostim deliocem zatim smo količnik podelili njegovim najmanjim prostim činiocem i tako do kraja.

Postupak (1) je brži (koristi, po pravilu, kriterijume deljivosti), ali postupak (2) je sigurniji i često lakši, na primer:

$$1\,500=15\cdot100=3\cdot5\cdot2^2\cdot5^2; \quad 1\,274=2\cdot637=2\cdot7\cdot91=2\cdot7\cdot7\cdot13=2\cdot7^2\cdot13.$$

1) Napišite u obliku proizvoda prostih činilaca: (1) 216; (2) 360; (3) 810; (4) 3240; (5) 10368; (6) 15600; (7) 13 760; (8) 86625.

2) Za koliko je veći broj čiji su prosti delioci 2, 5, 9, 13 od broja koji se rastavlja na sabirke 2, 5, 9, 13.

§ 18.3. ODREĐIVANJE PROSTIH (I SLOŽENIH) BROJEVA

1. Ne postoji opšta formula za određivanje da li je dati broj prost ili složen. Zato se dati broj a mora deliti prostim brojevima 2, 3, 5, 7, ... Pri tome, može se dogoditi:

(1) da se nađe delilac;

(2) da nastupi slučaj kad je količnik manji od delioca ili jednak deliocu (uz ostatak koji nije nula).

U slučaju (1) broj a je složen (§ 18.2).

U slučaju (2) broj a je prost.

Dakle, *broj a deli se redom brojevima 2, 3, 5, 7, 11, ... sve dotle dok se ne nađe delilac, ili dok se ne dobije količnik manji od broja kojim se deli ili jednak tom broju*, a ostatak nije nula (što pokazuje da je dati broj prost).

2. 1) Ispitajmo da li je broj 551 prost. Na osnovu kriterijuma deljivosti odmah vidimo da nije deljiv brojevima 2, 3, 5. Deljenjem brojevima 7, 11, 13, i 17 nalazimo da 551 nije deljiv nijednim od tih brojeva. Tek deljenjem brojem 19 dobijamo $551=19\cdot29$, dakle $19\mid551$ i $29\mid551$.

2) Ispitajmo broj 541. Prema utvrđenim kriterijumima, on nije deljiv nijednim od brojeva 2, 3, 5. Deljenjem nalazimo da nije deljiv nijednim od brojeva 7, 11, 13, 17, 19. Tek pri deljenju brojem 23 dobijamo količnik 23, ostatak 12. Broj 541 je prost.

3. Odredite koji su od sledećih brojeva složeni, odnosno prosti: (1) 143; (2) 307; (3) 1157; (4) 913; (5) 1009; (6) 2217; (7) 2273; (8) 3431.

§ 18.4. MNOŽINA SLOŽENIH I MNOŽINA PROSTIH BROJEVA

1. Može li biti množina složenih brojeva konačna (§ 10.4), tj. može li broj svih složenih brojeva biti konačan broj?

2. Prosti brojevi su sve ređi kad se ide duž niza prirodnih brojeva. Da li to znači da je njihova množina konačna?

Dopustimo da jeste. Tada postoji najveći prost broj p i mi možemo da načinimo i izračunamo proizvod svih prostih brojeva:

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\ldots p=n.$$

Posmatrajmo broj $n+1$. On je veći od n pa dakle i od p: $p<n<n+1$.

To znači da je $n+1$ složen broj (jer smo pretpostavili da je p najveći prost broj). Međutim, n je deljiv svakim prostim brojem 2, 3, 5, ..., a $n+1$ nije deljiv nijednim od tih brojeva (glava XVII, teor. 2), jer 1 nije deljiv nijednim prostim brojem). Znači, $n+1$ je prost broj, tj. postoji veći prost broj od p. Naša pretpostavka je pogrešna, množina prostih brojeva je neograničena.

(Do istoga zaključka dolazimo i na osnovu teoreme 5, glava XVII, jer pretpostavka dovodi do zaključka da je razlika $(n+1)-n=1$ deljiva brojem koji nije 1, a to je nemoguće.)

Dakle: *Množina složenih brojeva je beskonačna. Množina prostih brojeva je beskonačna.*

§ 18.5. DELJENJE SLOŽENIH BROJEVA

1. Neka je dato deljenje $4620:154=$

Rastavimo i deljenik i delilac na proste činioce (tj. izvršimo njihovu faktorizaciju): $(2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11):(2\cdot7\cdot11)=$

Iz toga odmah vidimo (§ 14.2, t. **12**) da je količnik $(2^2:2)\cdot3\cdot5\cdot(7:7)\cdot(11:11)=2\cdot3\cdot5=30$.

Primer pokazuje *da je složeni broj deljiv drugim brojem ako su ispunjena dva uslova*:

(1) *Ako deljenik sadrži sve proste činioce (faktore) delioca.*

(2) *Ako izložilac svakog prostog činioca deljenika nije manji od izložioca istog faktora delioca.*

Zaista, neka je:

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}p_5^{\alpha_5},\qquad b=p_1^{\beta_1}p_3^{\beta_3}p_5^{\beta_5}.$$

1) Ako je $\beta_1\leqslant\alpha_1$, $\beta_3\leqslant\alpha_3$, $\beta_5\leqslant\alpha_5$, onda je:

$$a=\left(p_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3-\beta_3}\cdot p_4^{\beta_4}\cdot p_5^{\alpha_5-\beta_5}\right)\cdot\underbrace{\left(p_1^{\beta_1}\cdot p_3^{\beta_3}\cdot p_5^{\beta_5}\right)}_{b},$$

pa je broj a deljiv brojem b.

2) Ako je $b=p_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}$, tj. ako su neki prosti činioci delioca b različiti od prostih činilaca deljenika, broj a nije, očigledno, deljiv brojem b, npr.:

$$(3^2\cdot5\cdot7\cdot17):(3^2\cdot5\cdot11\cdot17)=7:11.$$

3) Ako je $b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}p_5^{\beta_5}$, ali je, npr., $\beta_2>\alpha_2$, broj a nije deljiv brojem b, npr. $(2^3\cdot3\cdot5^2\cdot13):(2^2\cdot3^2\cdot13)=(2\cdot5^2):3$.

Pod (2) nije, dakle, ispunjen uslov (1) a pod (3) nije ispunjen uslov (2).

2. Na osnovu prethodnog mogu se, lako i brzo, izvršiti mnoga deljenja, na primer:

$$192:16=(4\cdot48):(4\cdot4)=(4\cdot4\cdot12):(4\cdot4)=12;$$
$$550:110=(55\cdot10):(11\cdot10)=(5\cdot11):11=5;$$
$$5379:33=(3\cdot1793):(3\cdot11)=1793:11=163;$$
$$930000:750=93000:75=31000:25=31\cdot10\cdot(100:25)=31\cdot10\cdot4.$$

3. Izvršite deljenja:

342000:45	2592000:18900
642000:240	5877000:360
420000:2100	1105000:6500
784000:3200	5270000:6200.

Nije nužno rastaviti na proste činioce deljenik i delilac. Dovoljno je deliti deljenik i delilac zajedničkim deliocem (§ 14.2, t. **10**).

§ 18.6. ZAJEDNIČKI DELIOCI I NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DELILAC

1. 1) Množinu svih delilaca broja a ranije smo označili sa div a ili D_a, na primer:

div 36=**1**, **2**, 3, **4**, 6, 9, 12, 18, 36;
div 40=**1**, **2**, **4**, 5, 8, 10, 20, 40.

Brojevi 1, 2 i 4 su *zajednički delioci* brojeva 36 i 40.

Broj 1 je zajednički delilac svih prirodnih brojeva pa se pri određivanju zajedničkih delilaca datih brojeva ne uzima u obzir.

2) Odredite zajedničke delioce brojeva 30, 45 i 210.

3) Očigledno, množina zajedničkih delilaca datih brojeva je presek množina delilaca datih brojeva:

div 144∩div 180={1, 2, 3}, tj. {2, 3};
(div 15∩div 105∩div 20={1, 5}, tj. {5};
div 48∩(div 36∩div 90)=
$D_{900}\cap D_{1350}\cap D_{1620}=$

2. Najveći broj među zajedničkim deliocima datih brojeva zove se *najveći zajednički delilac tih brojeva* (nzd):

div 120∩div 420∩div 500={1, 2, 4, 5, 10, 20}

pa je nzd (120, 420, 500)=20.

3. Postoje razni postupci za izračunavanje najvećeg zajedničkog delioca. Pokazaćemo ovde dva najvažnija:

1) Rastavimo date brojeve na proste činioce:

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}\ldots p_n^{\alpha_n},\qquad b=p_1^{\beta_1}p_4^{\beta_4}p_7^{\beta_7}q_1q_2.$$

Neka je $\alpha_1<\beta_1$, $\alpha_4>\beta_4$, $\alpha_7>\beta_7$.

Pod tim uslovima je nzd $(a, b)=p_1^{\alpha_1}\cdot p_4^{\beta_4}\cdot p_7^{\beta_7}$.

Jer, samo su p_1, p_4 i p_7 zajednički prosti delioci, a kako je $\beta_1 > \alpha_1$, broj $p_1^{\alpha_1}$ deli i a i b, itd.

Na primer: $a = 30\,800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, $b = 11\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 11$

$$\text{nzd}\,(a, b) = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 11.$$

2) Drugi postupak iznosi se „bez obrazloženja":*

$a = bq_1 + r_1$	$r_1 < b$,	$\text{div}\, a \cap \text{div}\, b = \text{div}\, b \cap \text{div}\, r_1$
$b = r_1 q_2 + r_2$	$r_2 < r_1$,	$\text{div}\, b \cap \text{div}\, r_1 = \text{div}\, r_1 \cap \text{div}\, r_2$
$r_1 = r_2 q_3 + r_3$	$r_3 < r_2$,	$\text{div}\, r_1 \cap \text{div}\, r_2 = \text{div}\, r_2 \cap \text{div}\, r_3$
. . . . itd.	. . . .	. . . . itd. . . . . .
$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$	$r_n < r_{n-1}$	$\text{div}\, r_{n-2} \cap \text{div}\, r_{n-1} = \text{div}\, r_{n-1} \cap \text{div}\, r_n$
$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$	$r_n \mid r_{n-1}$	$\text{div}\, r_{n-1} \cap \text{div}\, r_n = r_n$.

Očigledno je: $a > b > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n$.

Poslednji ostatak $r_n \mid a$, $r_n \mid b$ i r_n je veći od svih ostalih zajedničkih delilaca brojeva a i b, tj. $\text{nzd}\,(a, b) = r_n$.

Na primer: $a = 9\,348$, $b = 1\,640$

$9\,348 = 1\,640 \cdot 5 + 1\,148$

$1\,640 = 1\,148 \cdot 1 + 492$

$1\,148 = 492 \cdot 2 + 164$

$492 = 164 \cdot 3$

$\text{nzd}\,(9\,348,\ 1\,640) = 164$. I zaista:

$\text{div}\, 9\,348 \cap 1\,640 = \text{div}\, 1\,640 \cap \text{div}\, 1\,148$

$\text{div}\, 1\,640 \cap 1\,148 = \text{div}\, 1\,148 \cap \text{div}\, 492$

$\text{div}\, 1\,148 \cap 492 = 164$.

Odredite na taj način nzd (30800, 11000).

3) Odredite na oba načina nzd brojeva: 1050 i 735; 2400 i 3600; 450 i 999; 124 i 18; 50 i 75; 35 i 45; 24 i 8; 5 i 20; 7 i 8; 13 i 15; 18 i 25; 45 i 82.

4. Kad je nzd dva broja 1, oni se zovu *međusobno prosti brojevi*.

1) Koji su od ranije navedenih parova međusobno prosti brojevi? Sastavite i sami parove međusobno prostih brojeva.

2) Podelite svaka od dva data broja njihovim najvećim zajedničkim deliocem. Šta možete reći za tako dobijene količnike.

5. 1) Najveći zajednički delilac više brojeva (a, b, c, d) određuje se, razumljivo, ovako:

$$\text{nzd}\,(a, b) = m, \quad \text{nzd}\,(m, c) = p, \quad \text{nzd}\,(p \cdot d) = q.$$

2) Odredite nzd brojeva:

(1) 10, 25, 30; (2) 444, 666, 888; (3) 6, 8, 10; (4) 25, 75, 150, 600; (5) 5, 7, 8, 12.

* Pažljivi čitalac će, uz malo truda, uvideti to obrazloženje.

§ 18.7. ZAJEDNIČKI MULTIPLUMI I NAJMANJI ZAJEDNIČKI MULTIPLUM

1. Multiplumi (sadržaoci) broja 5 jesu:

(1) $5 \cdot 1 = 5$, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 3 = 15$, 20, 25, . . .

Ima ih beskonačno mnogo.

Multiplumi broja 7 jesu:

(2) $7 \cdot 1 = 7$, $7 \cdot 2 = 14$, 21, 28, . . .

I njih ima beskonačno mnogo.

Ako nizovi (1) i (2) imaju neke zajedničke članove, onda su to *zajednički multiplumi* brojeva 5 i 7.

1) Napišite 6 uzastopnih zajedničkih multipluma brojeva 5 i 7.

2) Napišite 5 zajedničkih multipluma brojeva 8 i 12; 15 i 9; 24 i 36; 14 i 25.

2. Očigledno je da nema najvećeg zajedničkog multipluma, a postoji *najmanji zajednički multiplum*, na primer:

$$\text{nzm}\,(8, 12) = 24; \qquad \text{nzm}\,(15, 9) = 45; \qquad \text{nzm}\,(11, 13) = 143.$$

Definišite najmanji zajednički multiplum dva broja a i b.

3. Kako se određuje najmanji zajednički mult'plum?

1) Odredite nzm (540, 1512).

2) Neka je $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} p_5^{\alpha_5}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} q^{\gamma} r^{\delta}$, gde su p_1, p_2, . . . , q, r prosti činioci (delioci) i neka je $\alpha_1 \leqslant \beta_1$, $\alpha_2 \geqslant \beta_2$.

Tada, da bi jedan broj bio deljiv brojem a, on mora da sadrži sve činioce $p_1, p_2, \ldots$, i to na stepenima čiji su izložioci jednaki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ili veći od njih.

Da bi bio deljiv i brojem b, on mora da sadrži $p_1^{\beta_1}$ jer je $\beta_1 > \alpha_1$, tj. $p_1^{\beta_1} > p_1^{\alpha_1}$, zatim q^{γ} i $r^{\delta}(p_2^{\beta_2} \leqslant p_2^{\alpha_2}$ i kako je ovaj poslednji već uzet, o $p_2^{\beta_2}$ ne treba voditi računa). Dakle:

$$\text{nzm}\,(a, b) = p_1^{\beta_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} p_4^{\alpha_1} q^{\gamma} r^{\delta}.$$

Na primer: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

Tražimo najmanji broj m tako da $105 \mid m$, $90 \mid m$, $150 \mid m$.

Da bi m bio deljiv brojem 105, on mora da sadrži činioce 3, 5 i 7. Ali da bi bio deljiv brojem 90, m mora da sadrži još činioce 2 i 3^2, dakle jedan deo broja m je $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Da bi bio deljiv i brojem 150, mora da sadrži 5^2, a ne 5. Znači:

$$\text{nzm}\,(105,\ 90,\ 150) = m = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

I zaista: $(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7):(3 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 3 \cdot 5$;

$(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7):(2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 5 \cdot 7$;

$(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7):(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 7$.

3) Odredite nzm brojeva:

(1) 3312 i 2736; (2) 1820 i 220; (3) 875 i 3000; (4) 8, 15, 24 i 120; (5) 7, 9, 5, 4; (6) 6, 9, 18, 36.

4. 1) nzd $(8, 12)=4$, nzm $(8, 12)=24$, $4 \cdot 24=4 \cdot 2 \cdot 12=8 \cdot 12$.

2) nzd $(15, 9)=3$, nzm $(15, 9)=45$; $3 \cdot 45=3 \cdot 5 \cdot 9=15 \cdot 9$.

Primeri pokazuju da je proizvod nzd i nzm dva broja jednak proizvodu tih brojeva. Da li je uvek tako? Jeste. Naime, može se dokazati da je

$$\text{nzd}\,(a, b) \cdot \text{nzm}\,(a, b)=ab.$$

3) Proverite to na raznim (prethodnim ili drugim proizvoljno uzetim) primerima.

Jedan trivijalan primer: nzd $(5, 7)=1$, nzm $(5, 7)=35$, $1 \cdot 35=5 \cdot 7$.

5. Iz jednakosti pod 2) sledi: nzm $(a, b)=ab:$nzd (a, b).

1) Izračunajte na taj način nzm brojeva:

(1) 30800 i 11000; (2) 108 i 144; (3) 1640 i 9348.

2) Izračunajte tim postupkom nzm brojeva datih u prethodnoj tački **3** pod 3).

§ 18.8. VEŽBANJA I ZADACI

1. Koji je od sledećih brojeva prost: 667, 889, 1097, 1763, 1789, 2999, 3000, 4111, 4237, 4397, 5003?

2. 1) Svaki prost broj:

(1) veći od 2 piše se ovako: $4k+1$ ili $4k-1$; $k \in N_1$;

(2) veći od 3 piše se: $6k+1$ ili $6k-1$;

(3) veći od 2 piše se: $8k+1$, ili $8k-1$, ili $8k+3$ ili $8k-3$;

(4) veći od 3 piše se: $12k+5$, ili $12k-5$, ili $12k+1$, ili $12k-1$.

Ali, ti su uslovi nužni a ne i dovoljni. Proverite to prema tablici prostih brojeva (videti Uputstva) i navedite kontraprimere.

2) Koliko prostih brojeva ima: u prvoj stoitin; u drugoj stotini; u trećoj stotini; itd.?

3) Od 10 miliona do 10001000 prosti brojevi su ovako raspoređeni po stotinama:

2, 6, 6, 6, 5, 4, 7, 10, 9, 6.

4) Svaki prost broj oblika $4k+1$ može se prikazati u obliku zbira dva „kvadrata“, na primer: $5=2^2+1^2$; $13=3^2+3$; $17=4^2+1^2$; . . .

Napišite u tom obliku proste brojeve manje od 100.

5) Primećeno je da se svaki paran broj veći od 2 može prikazati kao zbir dva prosta broja, npr. $4=2+2$; $6=3+3$; $8=5+3$; $10=$ . . . ; $12=$ . . .

Nije dokazano da je to opšta činjenica, ali do sad nije nađen paran broj koji se ne bi mogao tako prikazati.

Prikažite 100, 126 i 150 kao zbir dva prosta broja.

6) Da li je broj oblika n^2-n+41, $n \in N$, prost broj.

7) Veliki francuski matematičar Pierre Fermat tvrdio je (1600. godine) da je svaki broj oblika $2^{(2^n)}+1$ prost broj. Stavite uzastopno $n=1$, $n=2$, $n=3$, . . . i ispitajte to tvrđenje.

Veliki švajcarski (radio je u Rusiji) matematičar L. Euler utvrdio je (1732. godine) da je za $n=5$ broj $2^{(2^n)}+1$ složen broj, naime on ga je napisao ovako: $2^{(2^5)}+1=641 \cdot 6700417$.

8) Zbir dva prosta broja ne može biti prost broj. Zašto?

9) Proizvod dva prosta broja je uvek složen broj. Zašto?

10) Ako $n \in N$ i $n>2$, bar jedan od brojeva 2^n-1 ili 2^n+1 je složen broj. Obrazložite.

3. 1) Dati su brojevi $a=720$, $b=1\,320$.

(1) Napišite div 720 i div 1 320.

(2) Izračunajte njihov nzd i nzm.

(3) Izračunajte količnik broja a i nzd (a, b), količnik broja b i nzd (a, b). Šta možete reći o tim količnicima?

(4) Izračunajte količnik nzm (a, b) i broja a, količnik nzm (a, b) i broja b. Šta možete reći o tim količnicima?

2) Neka su $a=480$, $b=2520$. Ponovite sve što i pod 1).

4. 1) Dati su brojevi $a=420$, $b=792$, $c=1\,638$.

(1) Izvršite sve ono što je rečeno u prethodnoj tački.

(2) Napišite proizvod abc u obliku prostih činilaca.

(3) Izračunajte nzd (ab, bc, ca).

(4) Proverite formulu: nzm $(a, b, c) \cdot [\text{nzd}\,(ab, bc, ca)]=abc$.

5. Izračunajte (na dva načina):

(1) nzd (1000, 1 500, 2250, 3 375);

(2) nzm (1000, 1 500, 2250, 3 375);

(3) nzd i nzm brojeva $8 \cdot 346$ i $125 \cdot 346$.

6. Jedan izvor svetlosti emituje: crvenu svetlost svakih 16 sekundi, zelenu svetlost svakih 45 sekundi, belu svetlost svakih 2 minuta i 20 sekundi. Sve svetlosti je taj izvor emitovao istovremeno noćas u ponoć. U kom trenutku će taj izvor emitovati istovremeno: (1) crvenu i zelenu svetlost; (2) crvenu i belu; (3) zelenu i belu; (4) sve tri svetlosti?

7. Najmanji zajednički multiplum dva međusobno prosta broja je njihov proizvod. Dokažite.

8. Ako je broj $\overline{c_2c_1c_0}$ deljiv brojem 37, onda su i brojevi $\overline{c_1c_0c_2}$ i $\overline{c_0c_2c_1}$ deljivi brojem 37. Dokažite.

9. Proizvod četiri uzastopna prirodna broja deljiv je brojem 24. Dokažite.

10. $\forall_n \in N$ i $n>2) \Rightarrow$ bar jedan od brojeva 2^n-1 ili 2^n+1 je složen broj.

11. 1) Izračunajte x i y kad je nzm $(x, y)=a$, $xy=b$ za:

(1) $a=2160$, $b=51\,840$; (2) $a=24612$, $b=983016$.

2) Isto kad je nzm $(x, y)=a$, nzd $(x, y)=b$ za:

(1) $a=2160$, $b=24$; (3) $a=6720$, $b=32$.

12. Neka je nzd $(x, y)=36$, nzm $(x, y)=756$. Izračunajte brojeve x i y.

Rezime

1. 1) Prirodni brojevi su prosti ili složeni.

2) Prirodni broj je složen ako osim 1 i samog sebe ima bar još jedan delilac.

3) Broj 1 nije ni prost ni složen.

4) Složeni brojevi su „načinjeni“ od prostih brojeva (koji se zovu njegovi činioci ili delioci).

5) Množina složenih brojeva je beskonačna. Množina prostih brojeva je beskonačna.

2. 1) Svaki broj koji deli dva data broja ili više datih brojeva zove se zajednički delilac datih brojeva.

2) Svi zajednički delioci datih brojeva čine množinu koja je presek množina delilaca datih brojeva.

3) Najveći broj koji deli dva data broja ili više datih brojeva zove se najveći zajednički delilac (nzd) datih brojeva.

4) Brojevi čiji je nzd 1 su međusobno prosti brojevi.

3. 1) Svaki broj deljiv sa dva data broja ili sa više datih brojeva zove se zajednički multiplum (sadržalac) datih brojeva.

2) Najmanji multiplum datih brojeva zove se najmanji zajednički multiplum (nzm) datih brojeva.

3) Najmanji zajednički multiplum međusobno prostih brojeva je proizvod tih brojeva.

4) Između nzd i nzm brojeva a i b postoji relacija

$$\text{nzd}\,(a, b) \times \text{nzm}\,(a, b) = ab$$

GLAVA XIX

CELI BROJEVI

§ 19.1. FAMILIJE RAZLIKA

1. Neka su a i b prirodni brojevi. Utvrdili smo (§ 12.1) da postoji jedinstven treći prirodni broj $d=a-b$, ili $d+b=a$ *samo kad je* $a \geqslant b$.

Međutim, i u nauci i u praksi često se pojavljuju slučajevi:

$$2-5, \quad 4-7, \quad 0-2, \ldots, \text{ uopšte } a-b, \text{ kad } a<b.$$

Na primer, živin stub termometra pokazivao je u jednom trenutku 3 stepena, a posle nekog vremena spustio se za 5 stepeni. Koliko je tada pokazivao?

Oduzimanje, nije, dakle, uvek moguća operacija u množini prirodnih brojeva. Potrebni su novi brojevi koji će omogućiti svako oduzimanje. I mi ćemo te brojeve „stvoriti“, definisati. Kako?

2. Razlike $5-3$, $7-2$, $11-0, \ldots$ su prirodni brojevi: 2, 5, 11, ... Sad ćemo i razlike $\quad 3-5, \quad 2-7, \quad 6-9, \quad 0-5, \ldots, a-b, \ a<b$ smatrati brojevima. Te razlike će biti novi brojevi.

Ali, da bi oni to zaista bili, moramo odrediti kako se te nove razlike sabiraju i množe, jer je osnovna karakteristika objekata koji se zovu brojevi da se mogu sabirati i množiti.

3. To ćemo učiniti u sledećem paragrafu. Sada primetimo: (1) da novih razlika ima neograničeno mnogo; (2) da nisu sve različite.

Naime, kao što sve razlike, npr.:

$$5-3, \quad 6-4, \quad 9-7, \quad 34-32, \quad 100-98, \ldots$$

označavaju jedan isti prirodni broj (broj *dva*), tako i sve razlike, npr.:

$$1-4, \quad 5-8, \quad 7-10, \quad 77-80, \ldots$$

predstavljaju *razna imena* za jedan *isti* (novi) *broj*.

Zaista, uočimo da razlike za koje znamo da označavaju isti prirodni broj zadovoljavaju važan uslov: zbir njihovih „spoljašnjih“ članova jednak je zbiru njihovih „unutrašnjih“ članova, npr.:

$$5-3=9-7, \ 5+7=3+9; \qquad 9-2=100-93, \ 9+93=2+100; \ldots$$

Taj uslov zadovoljavaju i nove razlike, npr.:

$$1+8=4+5 \text{ i zato možemo pisati } 1-4=5-8.$$
$$12+14=20+6 \text{ i zato možemo pisati } 12-20=6-14.$$

Ali, pošto znak „—" ima uvek određeni smisao u množini prirodnih brojeva, umesto njega upotrebljava ćemo znak „$\sim$". Na primer:

$$7\sim 5, \quad 13\sim 1, \quad 3\sim 9, \quad 200\sim 300, \ldots$$

su novi simboli i svaki od njih nazvaćemo *„razlikom"* prirodnih brojeva. Svaka takva *razlika* je, dakle, *uređeni par prirodnih brojeva*. A sva razna imena za istu razliku nazvaćemo *familijom razlika*, i označavaćemo je ovako:

$$(a\sim b).$$

Znači, $(a\sim b)$ predstavlja množinu svih razlika $u\sim v$ koje zadovoljavaju uslov:

$$a+v=u+b.$$

Na primer, simbol $(3\sim 1)$ označava familiju svih razlika „vezanih" za $3\sim 1$, tj. $4\sim 2$, $5\sim 3$, $6\sim 4, \ldots, 20\sim 18, \ldots$, jer je $3+2=1+4$, $3+3=1+5$, $3+4=1+6, \ldots, 3+18=1+20, \ldots$ Napišite nekoliko razlika familije: $(2\sim 10)$; $(701\sim 650)$; $(1000\sim 5000)$.

Sve familije razlikâ prirodnih brojeva zovu se celi brojevi. Svaka familija razlikâ prirodnih brojeva je jedan ceo broj.

To su naši novi brojevi.

4. Uočimo dve karakteristike celih brojeva:

1) Svaka razlika pripada svojoj sopstvenoj familiji; na primer:

$3\sim 1$ pripada familiji $(3\sim 1)$;
$4\sim 11$ pripada familiji $(4\sim 11)$.

Uopšte, $a\sim b$ pripada $(a\sim b)$ jer je $a+b=b+a$.

2) Ako jedna razlika pripada familiji druge, obe pripadaju istoj familiji.

Zaista, neka $a\sim b$ pripada $(c\sim d)$, $p\sim q$ pripada $(a\sim b)$.

Tada je drugi uslov $\quad p+b=q+a,$
a prvi $\quad a+d=b+c,$

i sabiranjem tih jednakosti (§ 11.4) dobijamo:

$$p+b+a+d=q+a+b+c,$$
tj. (§ 11.3) $\quad p+d+(a+b)=(a+b)+q+c,$
tj. (§ 12.3, t. **6**) $\quad p+d=q+c,$

što pokazuje da (i) $p\sim q$ pripada familiji $(c\sim d)$.

5. Posledice druge karakteristike jesu:

(1) Svaka razlika $a\sim b$ pripada jednom i samo jednom celom broju (samo jednoj familiji razlikâ).

(2) Svaki ceo broj može se prikazati, imenovati, napisati tako što se (jednostavno) zagradi ma koja razlika koja mu pripada;

na primer: $(3\sim 1)$, $(6\sim 4)$, $(77\sim 75)$, $(2\sim 0), \ldots$ označavaju jedan isti celi broj.

$$(2\sim 7),\ (5\sim 10),\ (28\sim 33),\ (0\sim 5), \ldots$$

predstavljaju jedan isti celi broj.

(3) Pripadnost istoj familiji predstavlja kriterijum jednakosti celih brojeva, tj. *brojevi $(a\sim b)$ i $(c\sim d)$ su jednaki tada, i samo tada, ako je $a+d=b+c$*:

$$(a\sim b)=(c\sim d) \Leftrightarrow a+d=b+c.$$

Na primer: $(7\sim 11)=(1\sim 5) \Leftrightarrow 7+5=11+1$.

§ 19.2. SABIRANJE I MNOŽENJE CELIH BROJEVA

1. 1) Zbir dva cela broja definiše se jednakošću:

$$(a\sim b)+(c\sim d)=(a+c\sim b+d).$$

Zaista, šta označava $a+c$ na desnoj strani te jednakosti? Određen (jedinstven) prirodni broj (§ 11.1). Isto tako, $b+d$ je određen prirodni broj. Dakle, desna strana napisane jednakosti je određen celi broj. Ona definiše sabiranje celih brojeva $(a\sim b)$ i $(c\sim d)$.

Na primer:

(1) $(5\sim 3)+(6\sim 5)=(5+6\sim 3+5)=(11\sim 8)$;
(2) $(2\sim 7)+(4\sim 10)=(2+4\sim 7+10)=(6\sim 17)$;
(3) $(2\sim 7)+(5\sim 3)=(2+5\sim 7+3)=(7\sim 10)$;
(4) $(6\sim 2)+(9\sim 10)=(6+9\sim 2+10)=(15\sim 12)$;
(5) $(6\sim 11)+(2\sim 8)=(6+2\sim 11+8)=(8\sim 19)=(6\sim 17)=\ldots$;
(6) $(7\sim 9)+(4\sim 2)=(11\sim 11)=(17\sim 17)=(300\sim 300)=\ldots$

2) Proizvod dva cela broja definiše se jednakošću:

$$(a\sim b)\cdot(c\sim d)=(a\cdot c+b\cdot d\sim a\cdot d+b\cdot c).$$

Da li desna strana predstavlja celi broj? Objasnite. Primeri:

(1) $(7\sim 2)\cdot(8\sim 5)=(7\cdot 8+2\cdot 5\sim 7\cdot 5+2\cdot 8)=(66\sim 51)$;
(2) $(7\sim 2)\cdot(3\sim 6)=(7\cdot 3+2\cdot 6\sim 7\cdot 6+2\cdot 3)=(33\sim 48)$;
(3) $(3\sim 8)\cdot(6\sim 9)=(18+72\sim 27+48)=(90\sim 75)$;
(4) $(10\sim 5)\cdot(6\sim 9)=(60+45\sim 90+30)=(105\sim 120)=(33\sim 48)=\ldots$;
(5) $(4\sim 9)\cdot(10\sim 13)=(40+117\sim 52+90)=(157\sim 142)=\ldots$

2. Primeri sabiranja (2) i (5) i primeri množenja (2) i (4) pokazuju da se dobija *isti rezultat* (zbir odnosno proizvod) ako se: umesto jedne razlike uzme druga razlika *iste familije*. Rezultati pripadaju istoj familiji.

To i pokazuje da su definicije dobro izabrane.

Zbir dva cela broja je potpuno određen (jedinstven) broj, bez obzira koje se razlike iz familije svakog od njih sabiraju.

Proizvod dva cela broja je potpuno određen (jedinstven) broj, bez obzira koje se razlike iz familije svakog od njih množe.

3. 1) Izvršite svako od označenih sabiranja:

(1) $(3\sim 7)+(9\sim 2)$; (2) $(4\sim 9)+(20\sim 40)$;
(3) $(100\sim 60)+(200\sim 100)$; (4) $(19\sim 28)+(25\sim 42)$;
(5) $41\sim 41)+(33\sim 27)$; (6) $(60\sim 20)+(130\sim 130)$;
(7) $(12\sim 12)+(7\sim 12)$; (8) $(5\sim 5)+(53\sim 53)$.

2) Izvršite svako od označenih množenja:

(1) $(2\sim6)(10\sim7)$; (2) $(8\sim2)(3\sim5)$;
(3) $(10\sim8)(7\sim1)$; (4) $(5\sim20)(10\sim6)$;
(5) $(40\sim50)(8\sim7)$; (6) $(12\sim12)(8\sim3)$;
(7) $(30\sim12)(9\sim9)$; (8) $(2\sim2)(300\sim300)$.

3) Zamenite u prethodnim primerima:

(1) jednu razliku drugom razlikom iste familije, izvršite operaciju i uporedite dobijeni rezultat sa prvim;

(2) obe razlike drugim razlikama, iz odgovarajućih familija, izvršite operaciju i uporedite oba rezultata.

4) Izvršite i proverite (na osnovu definicije, odnosno kriterijuma jednakosti dva cela broja) sabiranje:

(1) $(5\sim2)+(x\sim y)$; (2) $(x\sim y)+(8\sim3)$.

5) Izvršite i proverite množenje:

(1) $(5\sim2)(x\sim y)$; (2) $(x\sim y)(8\sim3)$.

§ 19.3. KOMUTATIVNOST, ASOCIJATIVNOST I DISTRIBUTIVNOST U MNOŽINI CELIH BROJEVA

1. Sabiranje prirodnih brojeva je komutativno i asocijativno (§ 11.3). Da li je sabiranje celih brojeva komutativno i asocijativno?

1) Dokažimo da je: $(a\sim b)+(c\sim d)=(c\sim d)+(a\sim b)$.

Na osnovu definicije sabiranja je:

$$(a\sim b)+(c\sim d)=(a+c\sim b+d);$$
$$(c\sim d)+(a\sim b)=(c+a\sim d+b).$$

Kako je $c+a=a+c$, $d+b=b+d$, jer su to zbirovi prirodnih brojeva, napisana jednakost, tj. komutativnost sabiranja celih brojeva je dokazana.

2) Dokažite asocijativnost sabiranja celih brojeva, tj.:

$$(a\sim b)+[(c\sim d)+(e\sim f)]=[(a\sim b)+(c\sim d)]+(e\sim f).$$

2. Množenje prirodnih brojeva je komutativno, asocijativno i distributivno. Da li je množenje celih brojeva komutativno, asocijativno i distributivno?

1) Dokažite komutativnost, tj. $(a\sim b)(c\sim d)=(c\sim d)(a\sim b)$.

2) Dokažite asocijativnost množenja, tj.

$$(a\sim b)(c\sim d)(e\sim f)=(a\sim b)\cdot[(c\sim d)(e\sim f)]=[(a\sim b)(c\sim d)]\cdot(e\sim f).$$

3) Dokažite distributivnost množenja:

$$(a\sim b)[(c\sim d)+(e\sim f)]=(a\sim b)(c\sim d)+(a\sim b)(e\sim f).$$

3. Pet matematičkih zakona važi, dakle, i u množini celih brojeva. To znači da je ona numerička množina (množina brojeva).

Izvršite sabiranja i množenja:

(1) $(7\sim2)+(10\sim20)+(4\sim8)$;
(2) $(6\sim9)+(11\sim4)+(12\sim9)+(10\sim3)$;
(3) $(7\sim3)(4\sim9)(10\sim20)$;
(4) $[(4\sim7)+(10\sim30)]\cdot(6\sim4)$;
(5) $[(2\sim5)+(8\sim3)]\cdot[(7\sim4)+(3\sim9)]$.

§ 19.4. NULA I JEDAN

1. Dokažite da je $(0\sim0)+(a\sim b)=(a\sim b)$.

Broj $(0\sim0)$ *ne menja drugi sabirak.*

To pokazuje da je $(0\sim0)$ nula u množini celih brojeva. Ali, $(0\sim0)$ je, kao i svaki drugi celi broj, familija razlike, tj. celi broj $(0\sim0)$ možemo zameniti ma kojom razlikom iste familije.

Razlika $(x\sim y)$ pripada familiji $(0\sim0)$ tada, i samo tada, kad je $0+y=$ $=x+0$, tj. $x=y$.

Drugim rečima, *razlika pripada familiji* $(0\sim0)$ *ako je levi broj jednak desnom.* Prema tome, $(1\sim1)$, $(2\sim2)$, $(3\sim3)$, . . . , $(739\sim739)$, . . . su razni oblici, razni načini pisanja elementa *nula* u množini celih brojeva. (U § 19.2, t. **3** ima takvih primera.)

2. Izračunajte $(a\sim b)\cdot(1\sim0)$.

Celi broj se ne menja pri množenju brojem $(1\sim0)$.

Znači, $(1\sim0)$ je broj *jedan* u množini celih brojeva. On se može napisati i u obliku: $(a+1\sim a)$,

gde je a ma koji prirodni broj, jer je (§ 19.1): $a+1+0=1+a$.

Na primer: $(7\sim6)=(1\sim0)$; $(1000\sim999)=(1\sim0)$; . . .

3. Izračunajte:

(1) $(7\sim3)+(1\sim0)$; (2) $(5\sim12)+(4\sim3)$;
(3) $(3\sim9)(1\sim0)$; (4) $(10\sim9)(a+1\sim a)$.

§ 19.5. ODUZIMANJE CELIH BROJEVA

1. Naš zadatak na početku ove glave bio je: „Stvoriti“ množinu brojeva u kojoj uvek, bez obzira na relaciju poretka (reda) prirodnih brojeva a i b, postoji broj x takav da je $x+b=a$.

2. Da bismo pokazali da smo taj cilj postigli, uvešćemo jedan nov pojam: *simetrični broj* datog broja.

Kažemo da je jedan broj simetrični broj drugog broja ako je zbir ta dva broja nula. Ili: *Dva su broja simetrična ako je njihov zbir* $(0\sim0)$.

U množini N prirodnih brojeva *samo jedan* broj ima svog simetričnog broja. Taj broj je 0, jer je $0+0=0$. (Svaki drugi prirodni broj nema simetričnog broja, jer zbir svakog prirodnog broja množine N_1 i ma kog broja N nije nula.) Množina celih brojeva se drukčije ponaša u tom pogledu:

Svaki ceo broj ima svoj simetrični (ceo) broj.

Tu činjenicu dokazujemo na taj način što „stvaramo“ simetrični broj svakog celog broja. Zaista, neka je $(a\sim b)$ ma koji celi broj. Njegov simetrični broj je $(b\sim a)$, jer je:

$$(a\sim b)+(b\sim a)=(a+b\sim b+a) = \text{celi broj nula.}$$

Naime, levi broj je jednak desnom, pa je (§ 19.4, t. **1**)

$(a+b\sim b+a)$ jedna razlika familije $(0\sim 0)$.

Kratkoće radi, umesto „. . . je simetrični broj broja . . ." upotrebljavamo znak „—". Prema tome, ako A označava jedan celi broj, $-A$ označava *simetrični broj* broja A; broj $-B$ je *simetrični broj* celog broja B.

Za označavanje celih brojeva koristićemo *(privremeno)* velika slova $(A, B, C, \ldots)$ jer smo malim slovima označavali (i označavaćemo i dalje) prirodne brojeve. (Ne treba mešati množine koje smo takođe označavali velikim slovima i cele brojeve.)

3. 1) Rešimo sad jednakost $X+B=A$, tj. izračunajmo celi broj X, kad su dati celi brojevi A i B.

Svaki celi broj je, ponavljamo, jedna familija razlikâ prirodnih brojeva, pa se napisana jednakost može napisati i ovako:

$$(x\sim y)+(c\sim d)=(a\sim b).$$

Rešavamo je (tj. izračunavamo nepoznati broj X) dodajući levoj i desnoj strani (glava XI, teor. 9) simetrični broj broja $(c\sim d)$:

$$(x\sim y)+(c\sim d)+(d\sim c)=(a\sim b)+(d\sim c).$$

Kako je (t. **2**) $(c\sim d)+(d\sim c)$ nula, a nula ne menja sabirak $(x\sim y)$, dobijamo

$$(x\sim y)=(a\sim b)+(d\sim c),$$

tj.

$$(x\sim y)=(a+d\sim b+c).$$

Na primer: $(x\sim y)+(8\sim 1)=(5\sim 3)$;
$(x\sim y)+(8\sim 1)+(1\sim 8)=(5\sim 3)+(1\sim 8)$;
$(x\sim y)=(5+1\sim 3+8)$;
$(x\sim y)=(6\sim 11)$.

Rešite jednakost: $(2\sim 9)+(x\sim y)=(3\sim 7)$.

2) Kako $X+B=A$ znači isto što i $X=A-B$, mi smo, onim što prethodi, u stvari našli postupak za oduzimanje celog broja od celog.

Oduzeti ceo broj od celog broja znači dodati simetrični broj:

$$A-B=A+(-B).$$

Na primer: $(7\sim 3)-(5\sim 9)=(7\sim 3)+(9\sim 5)=(16\sim 8)$;
$(5\sim 11)-(18\sim 2)=(5\sim 11)+(2\sim 18)=(7\sim 29)$.

I to je (kako smo već pokazali) uvek moguće, jer svaki ceo broj ima svoj simetrični broj (što nije slučaj u množini prirodnih brojeva).

3) Izračunajte:

(1) $(10\sim 3)-(8\sim 5)$; (2) $(13\sim 10)-(4\sim 12)$;
(3) $(15\sim 6)-(2\sim 20)$; (4) $(7\sim 12)-(14\sim 8)$.

§ 19.6. POZITIVNI I NEGATIVNI BROJEVI

1. 1) Uočimo specijalne cele brojeve:

$$(0\sim 0),\ (1\sim 0),\ (2\sim 0), \ldots,\ (117\sim 0), \ldots,$$

tj. one koji se izražavaju razlikom čiji je desni član 0.

Ti celi brojevi zovu se *pozitivni brojevi*.

Između celih pozitivnih i prirodnih brojeva može se uspostaviti obostrana jednoznačna korespondencija (bižekcija):

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & 17 & \ldots & 100 & \ldots & a & \ldots \\ (0\sim 0) & (1\sim 0) & (2\sim 0) & \ldots & (17\sim 0) & \ldots & (100\sim 0) & \ldots & (a\sim 0). & \end{array}$$

Svakom prirodnom broju odgovara tačno određen pozitivni (celi) broj i obrnuto (bižekcija).

2) Šta je zbir a šta je proizvod dva cela pozitivna broja?

$$(a\sim 0)+(b\sim 0)=(a+b\sim 0);$$

$$(a\sim 0)(b\sim 0)=(ab+0\cdot 0\sim a\cdot 0+0\cdot b)=(ab\sim 0).$$

Zbir dva pozitivna broja je pozitivan broj.

Proizvod dva pozitivna broja je pozitivan broj. (Pokažite.)

3) Štaviše, zbir dva pozitivna broja, stavljena u korespondenciju respektivno sa prirodnim brojevima a i b, odgovara zbiru $a+b$.

Isto tako, proizvod dva pozitivna broja, stavljena u korespondenciju sa a i b, odgovara proizvodu ab.

Zbog svega toga [navedeno pod 1), 2) i 3)] pozitivni celi brojevi mogu se koristiti umesto prirodnih i obrnuto. Na primer, umesto $(0\sim 0)$ može se pisati 0, umesto $(1\sim 0)$ može se pisati 1, itd. Ali to se čini samo formalno, jer, iako se ponekad govori i piše „pozitivni (celi) brojevi su isto što i prirodni brojevi", „pozitivni (celi) brojevi poklapaju se sa prirodnim brojevima", pozitivni brojevi i prirodni brojevi se samo donekle mogu identifikovati. Na osnovu toga smatramo da je množina prirodnih brojeva proširena množinom negativnih brojeva i tako je postala množina celih brojeva.

Prirodni brojevi i pozitivni brojevi su (kaže se u savremenoj matematici) *izomorfni* (što znači: opisno i približno rečeno): Ako prirodnim brojevima p i q odgovaraju respektivno celi brojevi p' i q' (kaže se i: ako su p' i q' slike prirodnih brojeva p i q), onda svakom rezultatu r određene operacije izvršene nad p i q odgovara rezultat r' te iste operacije izvršene nad p' i q'.

2. 1) Uočimo dva „para" celih brojeva, npr.:

$$(8\sim 3) \text{ i } (5\sim 0); \qquad (7\sim 16) \text{ i } (0\sim 9).$$

Šta možemo reći o brojevima svakog od tih parova? Oni su jednaki, jer je (§ 19.1, t. **3**): $8+0=3+5$; $7+9=16+0$.

Brojevi $(8\sim 3)$ i $(5\sim 0)$ su dva *imena istog celog broja*, dve *razlike iste familije*. Kako se dobija druga razlika iz prve? Oduzimanjem manjeg člana i od njega (samog) i od većeg člana: $3-3=0$, $8-3=5$.

Na isti način dobija se $(0\sim 9)$ iz $(7\sim 16)$; naime, $7-7=0$, $16-7=9$. Ili iz $(5\sim 14)$, $(1\sim 10)$, . . .

Uopšte, svaki celi broj $(a\sim b)$ može se zameniti onom razlikom familije koju on predstavlja, a čiji je jedan član nula:

$$(p-q\sim 0) \text{ ako je } p>q, \qquad (0\sim q-p) \text{ ako je } p<q.$$

I to je razumljivo, jer (da opet ponovimo) svaki celi broj je familija neograničeno mnogo razlika pa se može zameniti, zapisati ma kojom od tih razlika. Najcelishodnije je zapisati ga razlikom čiji je jedan član 0. Ona se dobija iz date oduzimanjem manjeg člana i od njega i od drugog člana.

2) Tako se dobijaju svi pozitivni brojevi o kojima je bilo reči u prethodnoj tački, npr. $(7\sim 0)$ može se dobiti od: $(8\sim 1)$ $[(13\sim 6)$, $(152\sim 145)$, $(6019\sim 6012)$, . . .].

Isto tako, broj $(2\sim 8)$ može se napisati u obliku $(0\sim 6)$, jer je $2+6=8+0$; broj $(7\sim 15)$ može se napisati u obliku $(0\sim 8)$, jer je $7+8=0+15$; $411\sim 490$ može se napisati u obliku $(0\sim 79)$; . . .

Uopšte, svaki ceo broj može se napisati:

ili u obliku $(a\sim 0)$ i to je *pozitivan broj*;

ili u obliku $(0\sim a)$ i to je *negativan broj*.

Simbol $(a\sim 0)$ ili opštije $(x\sim 0)$ je *osnovni oblik* pozitivnog celog broja. Simbol $(0\sim a)$ ili $(0\sim x)$ je *osnovni oblik* negativnog celog broja. Na primer, $(7\sim 0)$ je potpuno određen pozitivni broj, $(0\sim 13)$ je potpuno određen negativni broj.

3) Znači li to da je na primer: $(8\sim 6)$ pozitivan, a $(6\sim 8)$ negativan broj; $(4\sim 7)$ negativan, $(7\sim 4)$ pozitivan broj?

3. Definisali smo (§ 19.3) sabiranje i množenje celih brojeva, a zatim smo izveli postupak za oduzimanje tih brojeva. Sad dokažite, služeći se poslednjim oblicima pozitivnih i negativnih brojeva, ove teoreme:

(1) *Zbir dva pozitivna broja je pozitivan broj.*

(2) *Zbir dva negativna broja je negativan broj.*

(3) *Zbir* $(a\sim 0)+(0\sim b)$ *je pozitivan ako je* $a>b$, *negativan ako je* $a<b$, *nula ako je* $a=b$.

(4) *Proizvod dva pozitivna broja ili dva negativna broja je pozitivan broj.*

(5) *Proizvod jednog pozitivnog i jednog negativnog broja je negativan broj.*

4. Uobičajeno je da se pozitivni i negativni brojevi pišu još kraće:

$$(a\sim 0)=+a, \quad (0\sim a)=-a \text{ (simetrični broj broja } a).$$

Uobičajeno je čak i da se „+" izostavlja, kad god se podrazumeva, kad god to ne stvara zabunu.

1) Izračunajte, služeći se kraćim simbolima, a na osnovu prethodnih teorema:

(1) $(+5)+(+13)=$ (2) $(-5)+(-13)=$

(3) $(+20)+(-14)=$ (4) $(+9)+(-23)=$

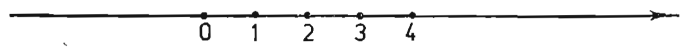
(5) $(+4)\cdot(+7)=$ (6) $(-4)\cdot(-7)=$ (7) $(+4)\cdot(-7)=$

2) Zašto nismo, pri formulisanju prethodnih teorema — pravila, uzeli u obzir oduzimanje? Izračunajte:

(1) $(+7)-(+3)$; (2) $(+7)-(-3)$; (3) $(-7)-(+3)$; (4) $(-7)-(-3)$.

3) Izračunajte: $(+13)+(-13)=$; $(-47)+(+47)=$.
Šta potvrđuju ti primeri?

5. 1) Nacrtajmo pravu i orijentišimo je (§ 7.3). Označimo dve njene proizvoljne tačke. Dogovorimo se da jednoj od tih tačaka pridružimo broj 0 a drugoj broj 1. (Kojoj moramo pridružiti 0, kojoj 1 kad smo već orijentisali pravu? Videti spomenuti § 7.3.)

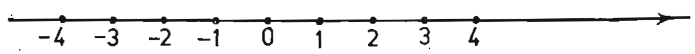


Slika 19.1

Možemo li da nacrtamo tačku koja odgovara broju 2, broju 3, broju 4, . . . ma kom prirodnom broju?

Tako se množina prirodnih brojeva N prikazuje tačkama jedne poluprave. Ta se poluprava često zove *„linija" prirodnih brojeva.*

2) Prema prethodnom, te iste tačke odgovaraju i pozitivnim brojevima. A tada, na sličan način možemo nacrtati tačke druge poluprave nacrtane prave, tako da svaka od njih odgovara tačno određenom negativnom broju, i obrnuto.



Slika 19.2

Na taj smo način cele brojeve prikazali određenim tačkama jedne orijentisane prave, koja se često zove *„linija" celih brojeva,* ali je bolje *prava celih brojeva.* Samim tim smo uneli *relaciju poretka (reda)* u množinu celih brojeva (pogotovu što smo pošli od linije prirodnih brojeva) i uvek smo u stanju da kažemo koji je od dva uočena cela broja veći (odnosno manji): tačno onako kako to određuju prirodni brojevi, odnosno kako određuje orijentacija prave (§ 7.3, aksiom Π 6). To znači da je svaki negativni broj manji ne samo od svakog pozitivnog broja nego i od nule. I da je, npr., $-2<-1$, $-100<-2$, . . .

3) Ali tu relaciju poretka (reda) možemo uvesti i definicijom (nezavisno od crteža):

Neka su A i B dva razna cela broja. *Kažemo da je A veći od B, ako je razlika $A-B$ pozitivan broj.*

Prema tome: $2>-7$, zato što je $2-(-7)=2+7=9$;

$-4>-5$, zato što je $-4-(-5)=1$;

$-10<-3$, zato što je $-10-(-3)=-10+3=-7$.

Dakle: $\ldots<-4<-3<-2<-1<0<+1<+2<+3<\ldots$

§ 19.7. DOPUNE

1. 1) Ranije smo uzeli, radi lakšeg rasuđivanja, da je celi broj 0 pozitivan broj. U stvari on nije ni pozitivan ni negativan broj. On je „granica" između pozitivnih i negativnih brojeva. Pa ipak, ponekad se nailazi na -0 ili $+0$. Uvek je $-0=+0=0$.

Prema tome, množinu celih brojeva čine nula, pozitivni celi brojevi i negativni celi brojevi. Ona se označava slovom Z. Dakle:

$$Z=\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}.$$

Ili, jednostavnije: $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Ili, „očiglednije": $Z=\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$.

2) Napišite „ekstenzivno" množinu $Z\setminus\{0\}$.

3) Napišite „ekstenzivno" množine Z^+ i Z^-.

2. 1) Prema definiciji (§ 19.5, t. **2**): Simterični broj broja $+3$ je -3, a simetrični broj broja -3 je broj $+3$ (ili 3 ako znak $+$ podrazumevamo). Simetrični broj broja -7 je $-(-7)=+7$ (ili 7, ako $+$ podrazumevamo). Znači:

$$-(+1)=-1, \quad -(-2)=+2, \ldots, \quad -(-a)=+a=a,$$

gde a označava ma koji ceo broj. (Vraćamo se, ne bez razloga, na mala slova.)

2) Do istog „zaključka" dolazimo i ovako:

Zamislite jedan ceo broj a.

Ako ste zamislili broj 2, onda je $a=+2$ (ili 2).

Ako ste zamislili 379, onda je $a=+379$ (ili 379).

Ako ste zamislili -83, onda je $a=-83$.

Kažemo: $-a$ označava celi broj a sa *promenjenim* znakom; na primer:

Ako je $a=+2$, onda je $-a=-2$.
Ako je $a=417$, onda je $-a=-417$.
Ako je $a=-13$, onda je $-a=13$ (ili $+13$).
Ako je $a=0$, onda je $-a=0$.

Dovršite (kad svako slovo označava ceo broj):

Ako je $a=-101$, onda je $-a=$
Ako je $-a=-1$, onda je $a=$
Ako je $-b=7$, onda je $b=$
Ako je $-c=1000000$, onda je $c=$

3) Videli smo da je, npr. $(-7)+(-5)=-12$.

Uopšte je: $\quad (-a)+(-b)=-(a+b)$,

i obrnuto: $\quad -(a+b)=(-a)+(-b)$.

Isto tako: $\quad -(a-b)=(-a)+(+b)=-a+b$.

Dovršite:

$-(3+5)=-3-5$	$-(42-102)=$	$-(-12-7)=$	$-(-a-b)=$
$-(100+329)=$	$-(-16+7)=$	$-(x+y)=$	$-(u+3)=$
$-(2-5)=$	$-(-8+13)=$	$-(x-y)=$	$-(3-u)=$

3. Šta označava simbol $Z,+$? Množinu Z u kojoj je definisana operacija sabiranje (§ 13.7). Utvrdili smo (ranije):

(1) Ako $a, b \in Z$, onda $(a+b) \in Z$.

(2) Ako $a, b, c \in Z$, onda $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(3) Ako $a \in Z$, onda $a+0=0+a=a$.

(4) Ako $a \in Z$, onda $(-a)+a=a+(-a)=0$.

Činjenica (1) pokazuje da je $Z, +$ *grupoid* (§ 13.7).

Činjenica (2) pokazuje da je $Z, +$ *semi-grupa* (§ 13.7).

Činjenica (3) pokazuje da je $Z, +$ *monoid* (§ 13.7).

Ako monoid ima još i osobinu (4), on se zove *grupa*.

Dakle: $\boxed{Z, + \text{ je (jedna) grupa.}}$

Kako je sabiranje u množini Z komutativno, kažemo:

$$\boxed{Z, + \text{ je (jedna) komutativna grupa.}}$$

To je **struktura** $Z, +$ (sabiranja u Z).

4. 1) Šta možemo reći o strukturi $Z, -$?

(1) Ako $a, b \in Z$, onda $(a-b) \in Z$.

(2) $4-(5-8)=4-(-3)=4+3=7, \quad (4-5)-8=-1-8=-9.$

(3) $7-3=4$, a $3-7=-4$.

Činjenica (1) izražava da je operacija $Z, -$ (oduzimanje u Z) *unutrašnja* ili *zatvorena* (rezultat svakog oduzimanja u množini celih brojeva je jedinstven ceo broj). Primeri (2) pokazuju da $\boldsymbol{Z}, -$ nije asocijativno, a primeri (3) pokazuju da $\boldsymbol{Z}, -$ nije komutativno.

Dakle, $\boldsymbol{Z}, -$ je *nekomutativni grupoid*.

2) Kad je $a=-a$? $\quad$ 3) Kad je $a+a=a$?

4) Prema onom što je već napomenuto, znak $+$ se najčešće izostavlja.

Znači: $+(-7)=-7; \quad a+(b-c)=a+(+b)+(-c)=a+b-c.$

Međutim: $a-(b-c)=a+[-(b-c)]=a+[-b-(-c)]=$
$=a+[-b+c]=a+(-b)+(+c)=a-b+c=$
$=\boldsymbol{(a-b)+c}.$

Otuda formule izostavljanja i uvođenja zagrada:*

$$a+(b+c)=a+b+c; \qquad a-(b+c)=a-b-c;$$
$$a+(b-c)=a+b-c; \qquad a-(b-c)=a-b+c.$$

5) Neka je dat zbir od više celih brojeva:

$$(+6)+(-2)+(-8)+(+9)+(-7)+(+5)=+3.$$

* Čitati ih u oba smera, tj. i zdesna nalevo.

Prema prethodnom je to bolje i lakše napisati ovako:

$$6-2-8+9-7+5$$

i izračunati: $6-2-8+9-7+5=4-8+9-7+5$
$=-4+9-7+5=5-7+5=3.$

Međutim, još lakše je (§ 12.3) izračunati zbir svih pozitivnih i zbir svih negativnih članova, pa onda zbir tih zbirova:

$$(6+9+5)-(2+8+7)=20-17=+3.$$

Ne gubiti iz vida da je, npr.: $-5-273-19=(-5)+(-273)+(-19)$

5. 1) Šta možemo reći o strukturi $Z, \bullet$ (tj. $Z. \times$)?

(1) Ako $a, b \in Z$, onda $(ab) \in Z$ [§ 19.2].

(2) Ako $a, b, c \in Z$, onda $(ab)\, c=a\,(bc)=abc$ [§ 19.3].

(3) Ako $a \in Z$, onda $1 \cdot a=a \cdot 1=a$ [§ 19.4].

Znači: $Z, \bullet$ (tj. $Z, \times$) *je komutativni monoid.* Zašto nije grupa?

2) Neka $a, b, c, d, e \in Z$. Tada je (§ 19.3):

$abc=(ab)\,c=fc$	$[ab=f]$;
$abcd=fcd=(fc)\,d=gd$	$[fc=g]$;
$abcde=gde=he \in Z$	$[gd=h]$.

Dakle: *Proizvod više celih brojeva je ceo broj koji se izračunava postupnim množenjem: prvog i drugog činioca, dobijenog proizvoda i trećeg činioca, itd.*

3) Neka su a, b, c, m celi brojevi. Tada je (§ 19.3):

(1) $(b+c)\,a=ba+ca$; (2) $(b-c)\,a=ab-ac$;

(3) $(b+c)\,(-a)=-ab-bc$; (4) $(b-c)\,(-a)=-ab+ac$;

(5) $(a+b-c)\,m=am+bm-cm$.

Dokaz jednakosti (5):

$(a+b-c)\,m=[(a+(b-c)]\,m$	[asocijativnost]
$=ma+(b-c)\,m$	[distributivnost]
$=\ldots$	[dovršite].

6. Množina u kojoj su definisane dve asocijativne operacije, od kojih je jedna sabiranje, a druga je distributivna u odnosu na sabiranje, zove se *prsten.* Dakle:

$$\boxed{\textit{Množina } Z, +, \bullet \textit{ je prsten.}}$$

7. Prirodni broj koji se dobiva kad se apstrahuje znak + ili − celog broja z zove se „apsolutna vrednost" ili *modul* broja z; na primer, ako je z broj $+3$, njegov modul je 3, ako je z broj -7, njegov modul je 7.

Modul broja z označava se ovako $|z|$, na primer:

$$|+5|=5, \ |-37019|=37019, \ |+110110_2|=110110_2.$$

8. Pokažite da ako $a, b, c, d, \in Z$, onda:

(1) $a=b \Rightarrow a+c=b+c$

(2) $(a=b$ i $c=d) \Rightarrow a+c=b+d$

(3) $a=b \Rightarrow ac=bd$

(4) $(a=b$ i $c=d) \Rightarrow ac=bd.$

9. Neka $a, b, c, d \in Z$. Da li je tačno:

(1) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$; (2) $(a<b$ i $c<d) \Rightarrow a+c<b+d$;

(3) $(a<b$ i $c>0) \Rightarrow ac<bc$; (4) $(a<b$ i $c<0)$ $ac>bc$?

10. Šta je: $(+7):1$; $(-3):1$; uopšte $a:1$, ili $\frac{a}{1}$?

To znači da treba naći broj koji pomnožen brojem 1 daje $+7$, -3, uopšte a. Dakle, deljenje celog broja brojem 1 ne menja celi broj.

A deljenje celog broja brojem -1?

§ 19.8. VEŽBANJA I ZADACI

1. 1) Napišite tri „razlike" (pomoću znaka ~) koje izražavaju broj: $+7$; -39; $+80$; -200.

2) Napišite na 10 načina broj: -1; $+10$.

3) Napišite osnovni oblik broja: $(13\sim5)$; $(17\sim70)$; $(31\sim30)$; $(1\sim1000)$; $(a\sim3a)$; $(10a\sim7a)$.

4) Napišite osnovni oblik broja: -11; $+921$; -22; -0; $+1001$; -10.

5) Odredite $x \in N$ tako da svaka od razlika $(72\sim x)$, $(x\sim39)$, $(5\sim x)$, $(x\sim0)$ označava broj -3.

6) Odredite $x \in N$ tako da svaki par razlika: $(5\sim x)$ i $x\sim13$; $(0\sim x)$ i $(x\sim6)$; $(x\sim3)$ i $(5\sim x)$; $(x\sim6)$ i $(8\sim x)$; $(7\sim x)$ i $(x\sim5)$; $(x\sim2)$ i $(x\sim3)$ označava isti ceo broj. Napišite uvek osnovni oblik tog broja.

7) Može li $(5\sim x)$ da označava $+6$?

2. Dat je broj z. Napišite $-z$:

$$-2, \ 15, \ -23, \ 0, \ -1000000, \ 5005005.$$

3. Napišite u binarnom sistemu: -3, -17, -25, -32, -225.

4. Izračunajte: $13-56$; $-2002+5002$; $-73+73$.

5. Umesto . . . stavite element množine Z:

$-5+\ldots=8$	$-23+\ldots=0$	$\ldots+1508=-14$	$\ldots-125=-26$
$-17+\ldots=12$	$\ldots+347=0$	$-19-\ldots=-32$	$-2-\ldots=-11.$

6. Izračunajte:

$(-8)-(-3)$; $(-4)-(-7)$; $(-13)-(-13)$; $(-73)-(+100)$;
$(16)-(+16)$; $(-16)+(+16)$; $(-271)+(+271)$.

7. 1) Jednog zimskog dana u podne termometar je pokazao $+4°C$. U ponoć je taj isti termometar pokazao $-13°C$. Šta možemo da izračunamo? Izračunajte.

2) U Verhojansku (Sibir) izmerena je najniža temperatura $-69°C$, a najviša $31°$.

3) Najvišu nadmorsku visinu u našoj zemlji ima Triglav — 2863 m a najnižu Prokljansko jezero (SRH) — pola metra.

4) Maksimalni vodostaj Save kod Zagreba bio je jedne godine 37 cm, a minimalni -126 cm.

5) Rimski imperator Avgustin vladao je od -29. godine do $+14$. godine. Koliko je godina vladao?

8. Svako slovo označava ceo broj, tj. element množine Z. Uklonite zagrade:

(1) $a+[b+(c-d)]$; (2) $a+[b-(c-d)]$; (3) $a-[b+(c-d)]$; (4) $a-[b-(c-d)]$.

9. Uklonite zagrade pa izračunajte:

(1) $5-8-[4-(3-5)-1]$; (2) $-3-[-4-(-9+2-7)+2]$;

(3) $(-2-7+3)+(3-9+4)$; (4) $(9-4+3)-(9-5-4)$.

10. Kao i uvek, svako slovo označava element množine Z. Uklonite zagrade, uprostite i iskažite činjenice:

(1) $(a+c)-(b+c)=$, $(a-c)-(b-c)=$;

(2) $a-(a-b)$, $a+(a-b)$, $a-(a+b)$.

11. Izračunajte:

(1) $(-3)(+5)$, $(-3)(-5)$, $(-13)(-13)$, $(-13)^2$
(tačka se kao znak množenja može izostaviti);

(2) $(-3)(-1)(-2)$, $(-3)(-1)(-2)(-5)$;

(3) $(+5)(-1)^2(-2)$, $(+5)(-1)^3(-2)$, $(-5)(-1)^{10}(-3)^2$;

(4) $(+3)(-5)(+2)(-4)(+10)(-1)(+8)$;

(5) $(-2)^5(-2)^3$; (6) $(-2)^4(-3)^3$; (7) $((-2)^3)^2$;

(8) $(-x)^{32}$, $(-x)^{33}$, $(-x)^{34}$.

12. 1) Je li tačno izračunato: $(a-b+c)(-3)=-3a+3b-3c$; $(-a+b+c)(-3)=$ $=3a-3b-3c$; $(-3)(-a+b-c)=3a-3b+3c$?

2) Izračunajte: $-5(x-5)+(x+5)5$; $-a(b+c)+a(-b+c)$.

3) Izračunajte:
(1) $(a+b)(c-d)$; (2) $(a-b)(c-d)$; (3) $(a+b)^2$; (4) $(a-b)^2$;
(5) $(a-b)(a+b)$; (6) $(1-a)(a+1)$; (7) $(20-b)(20+b)$;
(8) $(10a-10b)(10a-10b)$; (9) $(1+a-b)(1-x+y)$; (10) $(a-b+1)(x+y-1)$;
(11) $(1-b)(1+2b)(1-3b)$; (12) $(1+3b)(1-b)(1-2b)$.

13. Neka $z\in Z$. Dokažite: $(-1)\cdot z=-z$.

14. Neka je $a-b>0$, $c-d<0$. Šta možete reći o:

(1) $(a-b)x$ i $x(c-d)$ kad je $x>0$; (2) $x(a-b)$ i $(c-d)x$ kad je $x<0$?

15. Neka $a, b\in Z$. 1) Navedite sve slučajeve kad je:

(1) $a+b=0$; (2) $a+b<0$; (3) $a-b<0$; (4) $a-b>0$; (5) $a-b=0$; (6) $ab>0$; (7) $ab<0$; (8) $ab=0$; (9) $ab=-a$; (10) $ab=-1$; (11) $ab<b$.

2) Može li biti i kad:
(1) $a^2=0$; (2) $a^2<0$; (3) $a^3<0$; (4) $a^4<0$;
(5) $a^2+b^2=0$; (6) $a^2+b^2<0$; (7) $a^2-b^2=0$;
(8) $a^2-b^2<0$: (9) $a^2>a^3$; (10) $a^4<a^3$;
(11) $-(-a)<0$; (12) $-(-a^2)<0$?

16. Posmatrajmo aplikaciju (§ 9.5):

$$f\colon Z\to Z\colon x\to x+5.$$

Izračunajte: $f(0)$; $f(5)$; $f(-5)$; $f(-10)$; $f^{-1}(8)$; $f^{-1}(4)$; $f^{-1}(-25)$.

17. 1) Da li je N, $+$ komutativna grupa i zašto?

2) Da li je množina pozitivnih brojeva u kojoj je definisano sabiranje komutativna grupa i zašto?

3) Da li je množina negativnih brojeva u kojoj je definisano sabiranje komutativna grupa i zašto?

4) U množini $\{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ definisano je sabiranje. Da li je to grupa?

5) U množini $\{0, 1\}$ definisano je ovakvo sabiranje: $0+0=1$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$. Da li je to komutativna grupa?

18. U §§ 16.3, t. **5** i 17.5 t. **10** videli smo da se množina N može rastaviti u klase ostataka modulo m.

1) Napišite klase ostataka modulo 3 množine Z.

2) Dokažite da je relacija „. . . daje isti ostatak kad se deli brojem 3 kao . . ." ili, preciznije, „daje isti ostatak modulo 3" refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. da je relacija „ima isti ostatak modulo 3" jedna relacija ekvivalencije.

3) Prikažite tu relaciju u množini koju čine celi brojevi -5 i $+5$ i svi oni koji se nalaze između njih.

4) U kojoj od tih klasa je sabiranje binarna unutrašnja (zatvorena) operacija?

5) U kojoj od tih klasa je množenje binarna unutrašnja operacija? Ima li to množenje neutralni element?

Rezime

1. 1) Razlika $(a\sim b)$, gde a i b označavaju prirodne brojeve, zove se ceo broj.

2) Razlika $(a\sim b)$ je pozitivan ceo broj, negativan ceo broj ili nula, zavisno od toga da li je $a>b$, $a<b$, ili $a=b$.

3) Brojevi $(a\sim b)$ i $(c\sim d)$ su jednaki ako je $a+d=b+c$.

4) Osnovni oblik pozitivnog broja je $(a\sim 0)$. Osnovni oblik negativnog broja je $(0\sim a)$.

5) Ako se element množine N_1 označi znakom $+$, on se zove pozitivan broj. Ako se označi znakom $-$, zove se negativan broj.

6) Svi celi brojevi čine množinu koja se označava slovom Z.

7) $Z=Z^+\cup 0\cup Z^-$.

8) Svaki pozitivni broj je veći od nule. Svaki negativni broj je manji od nule. Ponekad se pojavljuje -0 i $+0$.

2. 1) Zbir celih brojeva definiše se jednakošću:

$$(a\sim b)+(c\sim d)=(a+c\sim b+d).$$

2) Množenje celih brojeva definiše se jednakošću:

$$(a\sim b)(c\sim d)=(ac+bd\sim ad+bc).$$

3) Na osnovu tih definicija dokazuje se:

(1) da je sabiranje komutativna i asocijativna operacija;

(2) da je množenje komutativna, asocijativna i distributivna operacija;

(3) da je 0 neutralni element sabiranja, a 1 neutralni element množenja;

(4) da svaki ceo broj, ima svoj simetrični broj;

(5) da je zbir celih brojeva:

$(a\sim 0)$ i $(b\sim 0)$ pozitivan broj $(a+b\sim 0)$;

$(a\sim 0)$ i $(0\sim b)$ $\begin{cases}\text{pozitivan broj } (a-b\sim 0) \text{ kad je } a>b,\\ \text{negativan broj } (0\sim b-a) \text{ kad je } a<b;\end{cases}$

ili, što je isto, $z+z'$ $\begin{cases}\text{pozitivan broj } |z|-|z'|,\\ \text{negativan broj } |z'|-|z|;\end{cases}$

(6) da je zbir simetričnih brojeva nula;

(7) da je proizvod brojeva $(a\sim 0)$ i $(b\sim 0)$, ili $(0\sim a)$ i $(0\sim b)$ pozitivan broj, a proizvod brojeva $(a\sim 0)$ i $(0\sim b)$ negativan broj (ili, što je isto, $zz_1=+|z|\cdot|z_1|$ i $z'z_1'=+|z'|\cdot|z_1'|$, a $zz'=-|z|\cdot|z_1'|$.)

3. Ceo broj oduzima se od celog tako što se umanjenik sabere sa simetričnim brojem umanjioca.

4. Više pozitivnih i negativnih brojeva sabiraju se tako što se izračuna zbir svih pozitivnih i zbir svih negativnih članova.

5. $z^{2n}>0$, z^{2n+1} je $\begin{cases}\text{pozitivan, ako je } z>0,\\ \text{negativan, ako je } z<0.\end{cases}$

GLAVA XX

RACIONALNI BROJEVI

§ 20.1. FAMILIJE KOLIČNIKA (RAZLOMAKA). RACIONALNI BROJEVI

1. 1) Ograničenost oduzimanja u množini prirodnih brojeva prisilila nas je da uvedemo (definišemo) cele brojeve.

Deljenje je takođe ograničena operacija u množini prirodnih brojeva, pa, dakle, i u množini celih brojeva; na primer:

$$\frac{6}{2}=3, \text{ jer je } 2\cdot 3=6, \quad \frac{-6}{2}=-3, \text{ jer je } 2\cdot(-3)=-6,$$

ali $\frac{7}{2}=x$ nije ni prirodan ni ceo broj, jer ne postoji ni prirodan broj ni ceo broj x takav da je $2\cdot x=7$. Isto tako ne postoji ceo broj x takav da je: $2x=-7$; $3x=14$; $5x=-33$; . . .

2) Zato, analogno uvođenju celih brojeva, a pošto su (§ 14.1, t. **3**):

$$\frac{6}{2}(=3), \quad \frac{-6}{3}(=-2), \quad \frac{35}{5}, \ \ldots$$

(označeni) količnici ($\frac{6}{2}$ je označeni, neizračunati količnik deljenja broja 6 brojem 2, $\frac{-6}{3}$ je označeni količnik deljenja broja -6 brojem 3 , . . .), možemo reći:

$\frac{7}{2}$ je (označeni) količnik deljenja broja 7 brojem -2;

$\frac{-3}{5}$ je (označeni) količnik deljenja broja -3 brojem 5;

$\frac{89}{-90}$ je (označeni) količnik deljenja broja 89 brojem -90; i sl.

Uopšte, $\frac{a}{b}$ nazivamo (označenim) količnikom celog (ili prirodnog) broja a celim (ili prirodnim) brojem b, bez obzira da li $b|a$.

3) Svaki takav količnik je, dakle, element množine posebne vrste uređenih parova (dosad upoznatih) uvedenih brojeva. Broj iznad crte smatraćemo prvim članom uređenog para. Da li su svi takvi parovi, svi (označeni) količnici brojevi i da li oni zaista omogućuju svako deljenje? To ćemo videti posle. Zasad podsetimo (§ 14.2) da se nulom ne deli i zato ćemo posmatrati samo količnike (uređene parove brojeva), gde a može biti svaki ceo (ili prirodni) broj, b takođe, izuzev $b=0$.

2. 1) Očigledno je da simboli (uređeni parovi):

(1) $\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \ldots$ označavaju isti broj [3];

(2) $\frac{-7}{1}, \frac{-14}{2}, \frac{-21}{3}, \frac{-28}{4}, \ldots$ označavaju isti broj [−7];

(3) $\frac{9}{-1}, \frac{18}{-2}, \frac{27}{-3}, \frac{36}{-4}, \ldots$ označavaju isti broj [−9].

Zato ćemo beskonačno mnogo uređenih parova, označenih količnika (1) smatrati (jednom) familijom količnika. Beskonačno mnogo količnika (2) smatraćemo drugom familijom. I tako dalje.

2) Lako je odrediti kojoj familiji pripada, npr., količnik $\frac{91}{-13}$, jer je $\frac{91}{-13}=-7$ pa $\frac{91}{-13}$ pripada familiji (2). Isto tako, količnik $\frac{-207}{23}$ pripada familiji (3), jer je $\frac{-207}{23}=-9$.

A kojoj familiji pripada, na primer: $\frac{3}{7}, \frac{-5}{9}, \frac{19}{18}, \ldots$?

Uočimo ma koja dva količnika familije (1), na primer: $\frac{6}{2}$ i $\frac{12}{4}$. Odmah vidimo da je $6\cdot4=12\cdot2$. Isto tako, jedan od tih količnika je, npr., $\frac{30}{10}$ a drugi $\frac{9}{3}$ pa je $30\cdot3=10\cdot9$. Uočimo količnik $\frac{18}{-2}$ i $\frac{36}{-4}$ familije (3). I u tom slučaju je $18\cdot(-4)=36\cdot(-2)$.

Zato: Količnik $\frac{3}{7}$ pripada familiji: $\frac{6}{14}, \frac{9}{21}, \frac{12}{28}, \ldots, \frac{24}{56}, \ldots$
jer je, npr.: $3\cdot21=9\cdot7$, $6\cdot21=14\cdot9$, $56\cdot3=24\cdot7, \ldots$

Količnik $\frac{-5}{9}$ pripada familiji: $\frac{-5}{9}, \frac{-10}{18}, \frac{-15}{27}, \ldots \frac{-105}{189}, \ldots$
jer je, npr.: $(-5)\cdot27=(-15)\cdot9$, $(-10)\cdot189=-(105)\cdot18, \ldots$

Uopšte, familija kojoj pripada $\frac{a}{b}$, gde su a i b prirodni ili celi brojevi, $b\neq0$, sastoji se iz beskonačno mnogo količnika oblika $\frac{u}{v}$ koji zadovoljavaju uslov

$$av=bu\,.$$

3) Svaka takva familija (označenih) količnika zove se *racionalan broj*, a svaki (označeni) količnik zove se *razlomak*.

Na primer: $\frac{4}{7}, \frac{-9}{5}, \frac{13}{-10}, \ldots$ su razlomci, a: $\left(\frac{4}{7}\right), \left(\frac{-9}{5}\right), \left(\frac{13}{-10}\right)$ su „odgovarajući" racionalni brojevi.

Uopšte, sa $\left(\frac{a}{b}\right)$, gde su a i b ma koji prirodni ili celi brojevi, $b\neq0$, označavaćemo familiju razlomaka koju određuje (čiji je jedan član, ili od kojih jedan je) $\frac{a}{b}$.

Broj a zove se *brojilac* a broj b zove se *imenilac* razlomka $\frac{a}{b}$.

3. Prema tome:

1) Svaki uređeni par prirodnih ili celih brojeva, npr.:

$$(8,\ 21),\ (-115,\ 47),\ (1,\ -300),\ (0,\ 2001), \ldots, (a, b)$$

napisan u obliku označenog deljenja, količnika:

$$\frac{8}{21}, \frac{-115}{47}, \frac{1}{-300}, \frac{0}{2005}, \ldots, \frac{a}{b},$$

zove se *razlomak* i određuje familiju *razlomaka*, recimo $\left(\frac{-17}{4}\right)$, uopšte $\left(\frac{a}{b}\right)$.

Ma koja dva razlomka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ iste familije zadovoljavaju uslov $ad=bc$.

Da su dva razlomka članovi (elementi) iste familije, označavamo i ovako:

$$\frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}, \text{ npr.: } \frac{91}{119}\cong\frac{13}{17},$$

a čitamo: razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{91}{119} \text{ i } \frac{13}{17}\right)$ su *ekvivalentni*.

Članove iste familije nazivamo ekvivalentnim zato što je $\cong$ *(jedna) relacija ekvivalencije*. (Pokušajte da to dokažete.)

2) Kao i svaka relacija ekvivalencije, relacija $\cong$ vrši (glava VI) particiju množine svih razlomaka

$$K=\left\{\begin{array}{l}\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots, \frac{n}{1}, \ldots \\ \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{2}, \ldots \\ \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots, \frac{n}{3}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, \ldots \end{array}\right\}$$

u klase (familije) ekvivalentnih razlomaka. Svaka od tih klasa (familija) zove se *racionalni broj*.

Kao predstavnik racionalnog broja može se uzeti bilo koji element klase, npr.:

$$\left(\frac{3}{7}\right), \left(\frac{-20}{35}\right), \left(\frac{a}{b}\right).$$

Posle ćemo videti da se najčešće uzima onaj element čiji su brojilac i imenilac međusobno prosti brojevi.

$\left(\frac{8}{11}\right)$ i $\frac{8}{11}$ čita se: *osam jedanaestina*, ili *osam na jedanaest*.

Dakle: *a na b* piše se $\frac{a}{b}$ odnosno $\left(\frac{a}{b}\right)$.

3) Neki primeri klasa ekvivalentnih razlomaka (racionalnih brojeva) jesu:

$$\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \frac{0}{4}, \frac{0}{5}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{9}{12}, \frac{12}{28}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{7}{5}, \frac{14}{10}, \frac{28}{20}, \frac{56}{40}, \ldots\right\}$$

4. 1) Pokažite da je: $\frac{3}{2} \cong \frac{12}{8}$; $\frac{6}{10} \cong \frac{3}{5}$; $\frac{3}{11} \cong \frac{156}{572}$.

2) Izračunajte broj umesto kojeg stoji slovo:

$$\frac{4}{5} \cong \frac{a}{30}; \quad \frac{3}{7} \cong \frac{9}{b}; \quad \frac{a}{3} \cong \frac{12}{9}; \quad \frac{2}{x} \cong \frac{3}{24}.$$

3) Da li iz $\frac{a}{b} \not\cong \frac{c}{d}$ i $\frac{c}{d} \not\cong \frac{e}{f}$ sledi $\frac{a}{b} \not\cong \frac{e}{f}$?

5. Neka je S množina razlomaka $\frac{a}{b}$ čiji članovi zadovoljavaju uslov $a \leqslant b < 10$

$$(\text{tj. } S = \left\{\frac{a}{b} \mid a \leqslant b < 10\right\}).$$

1) Napišite sve te razlomke.

2) Izvršite particiju množine S u klase ekvivalentnih razlomaka.

§ 20.2. SVEDENI (REDUCIRANI) PREDSTAVNICI RACIONALNIH BROJEVA

1. 1) Racionalni broj je klasa ekvivalentnih razlomaka. Predstavnik klase može biti ma koji element klase. Međutim, već smo napomenuli da je najbolje, najcelishodnije za predstavnika uzeti onaj element, onaj razlomak čiji su moduli brojioca i imenioca međusobno prosti brojevi (§ 18.6, t. **4**). Taj se razlomak zove *svedeni (reducirani) element* racionalnog broja (klase ekvivalentnih razlomaka).

Kako se dobija svedeni (reducirani) predstavnik racionalnog broja?

2) Da bismo pronašli taj postupak, rešimo prvo obrnuto pitanje:

Neka je $\frac{a}{b}$ svedeni (reducirani) element racionalnog broja. Mogu li se iz njega dobiti „ostali" elementi i kako?

Posmatrajmo prvo jedan primer. Očigledno je da je $\frac{11}{5}$ razlomak čiji su brojilac i imenilac međusobno prosti brojevi. „Ostali" elementi racionalnog broja $\left(\frac{11}{5}\right)$, tj. klase ekvivalentnih razlomaka, slede ovako:

$$\frac{11}{5}, \frac{22}{10}, \frac{33}{15}, \frac{44}{20}, \ldots, \frac{770}{350}, \ldots$$

jer je, npr., $22 \cdot 20 = 44 \cdot 10$, $33 \cdot 350 = 15 \cdot 770, \ldots$

Svaki od njih dobija se množenjem brojioca i imenioca reduciranog istim brojem množine $N \setminus \{0, 1\}$ (tj. prirodnim brojem većim od 1).

Navedeni primer ilustruje činjenicu:

Teorema 1. — Ako $\frac{a}{b} \in K$ i $k \in N \setminus \{0, 1\}$, onda je $\frac{a}{b} \cong \frac{ka}{kb}$.

To ćemo dokazati ako, prema definiciji relacije „$\cong$", dokažemo $(kb)a = (kb)a$. A ovo dokazujemo tako što polazimo od jednakosti:

$$(ka)b = (ka)b,$$

koja izražava refleksivnost relacije „$=$" u N. Leva strana te jednakosti može se napisati redom ovako: $k(ab)$ [asocijativnost], $k(ba)$ [komutativnost], $(kb)a$ [ponovna asocijativnost]. Dakle:

$$(kb)a = (ka)b,$$

tj. ono što smo hteli da dokažemo. Iz te jednakosti sledi $\frac{a}{b} \cong \frac{ka}{kb}$.

3) „Napišite" klasu: $\left(\frac{4}{7}\right)$; $\left(\frac{7}{9}\right)$; $\left(\frac{13}{3}\right)$.

2. 1) Napišite svedeni predstavnik klase čiji je jedan element:

$$\frac{2}{4}; \quad \frac{4}{6}; \quad \frac{5}{15}; \quad \frac{32}{8}; \quad \frac{42}{8}.$$

2) Opšti postupak za određivanje (izračunavanje) svedenog (reduciranog) predstavnika racionalnog broja sledi iz teoreme:

Teorema 2. — *Neka* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in K$ *i neka je* $\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d}$, *nzd* $(c, d) = 1$. *Tada postoji* $k \in N \setminus \{0, 1\}$ *takav da je* $a = kc$, $b = kd$.

Dokaz: Dato je $\qquad \frac{a}{b} \cong \frac{c}{d}$,

tj. (definicija relacije „$\cong$") $\qquad ad = bc$,

tj. (simetričnost relacije „$=$") $\qquad bc = ad$.

To znači da $c|ad$ (c deli ad). A kako su c i d međusobno prosti, [uslov nzd $(c,d) = 1$], $c|a$;

tj. $\qquad a = ck$

tj. $\qquad bc = ckd$,

odakle sledi: $\qquad b = dk$.

Drugim rečima, svedeni razlomak racionalnog broja čiji je jedan element $\frac{a}{b}$ dobija se deljenjem i brojioca (a) i imenioca (b) istim prirodnim brojem $k > 1$.

Znači, da se od *bilo kog elementa* $\frac{a}{b}$ *racionalnog broja dobije njegov svedeni predstavnik* $\frac{c}{d}$, *treba i brojilac i imenilac podeliti brojem* $k = nzd\,(a, b)$.

Primer: $\frac{36}{63}=\frac{36:9}{63:9}=\frac{4}{7}$.

Znači: $\frac{36}{63}$ je element racionalnog broja $\left(\frac{4}{7}\right)$.

Svedeni predstavnik racionalnog broja je analogon osnovnog oblika celog broja (§ 19.6) jer: Svaki racionalan broj je familija, klasa ekvivalentnih razlomaka (označenih količnika), a svaki ceo broj je familija klasa ekvivalentnih razlika.

3. Teorema 1 omogućava, dakle, da se izračuna bilo koji element racionalnog broja kad je dat njegov svedeni (reducirani) predstavnik (ili ma koji drugi element). Svaki tako dobijeni razlomak zove se (u nedostatku boljeg termina) *multiplum svedenog razlomka*. Zato se i samo izračunavanje zove *izračunavanje multipluma* (jednog ili više) *datog razlomka*.

Teorema 2 omogućava, obrnuto, da se iz bilo kojeg razlomka, elementa racionalnog broja dobije njegov svedeni predstavnik. Taj se posao zove *svođenje*, reduciranje, *uprošćavanje* datog razlomka ili *izračunavanje svedenog razlomka* (predstavnika).

Pri primeni teoreme 2 nije ovabezno izračunati najveći zajednički delilac brojioca i imenioca. Moguće je deliti ih redom zajedničkim deliocima, tj. postupno izračunavati razne ekvivalentne razlomke dok se ne dođe do svedenog, reduciranog; na primer: $\frac{90}{240}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

U praksi je često celishodnije da se prvo brojilac i imenilac rastave na proste činioce (§ 18.2), a posle se primenjuje teorema 2, npr.:

$$\frac{1352}{260}=\frac{2^3\cdot 13^2}{2^2\cdot 5\cdot 13}=(2^3\cdot 13^2):(2^2\cdot 5\cdot 13)$$

tj. (§ 14.2, t. **12**, 2) $\quad =(2^3:2^2)\cdot(13^2:13):5=(2\cdot 13):5=\frac{26}{5}$.

Uprostite (svedite): $\frac{1800}{144}$; $\frac{567}{1253}$.

4. 1) Treba obratiti pažnju da je, npr.:

$\frac{3}{9}\cong\frac{4}{12}$, jer je $3\cdot 12=9\cdot 4$, a $4\neq 3k$, $12\neq 9k$;

$\frac{2}{8}\cong\frac{15}{60}$, jer je . . . , a $15\neq 2k$, $60\neq 8k$.

Kako to objašnjavate?

2) Može li istovremeno biti: $\frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}$, $a=ck$, $b\neq dk$?

3) Neka je $\frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}$, nzd $(a, b)=1$, nzd $(c, d)=1$. Šta zaključujete o brojevima a i c, b i d?

5. 1) Odredite svedeni predstavnik racionalnog broja čiji je jedan element:

$$\frac{3}{18};\ \frac{34}{51};\ \frac{112}{115};\ \frac{315}{112};\ \frac{11}{132};\ \frac{34}{1001};\ \frac{35}{24}.$$

2) Napišite (ne koristeći svedeni predstavnik) još pet elemenata racionalnog broja čiji je jedan član:

$$\frac{12}{18};\ \frac{26}{10};\ \frac{25}{50};\ \frac{81}{27};\ \frac{9}{3};\ \frac{0}{16}.$$

3) Napišite (još) pet elemenata racionalnog broja:

$$\left(\frac{2}{7}\right);\ \left(\frac{5}{12}\right);\ \left(\frac{16}{33}\right);\ \left(\frac{17}{8}\right);\ \left(\frac{11}{3}\right).$$

4) Izračunajte broj umesto koga stoji x:

(1) $\frac{17}{11}\cong\frac{x}{33}$; (2) $\frac{6}{x}\cong\frac{12}{13}$; (3) $\frac{0}{x}\cong\frac{5}{7}$; (4) $\frac{x}{5}\cong\frac{2}{13}$; (5) $\frac{2}{7}=\frac{2}{x}$.

5) Izračunajte broj umesto kojeg stoji slovo:

$$\left(\frac{13}{9}\right)=\left(\frac{x}{189}\right);\quad \left(\frac{x}{57}\right)=\left(\frac{48}{19}\right);\quad \frac{21}{44}\cong\frac{126}{x};\quad \frac{11}{43}\cong\frac{550}{x}.$$

§ 20.3. SABIRANJE I MNOŽENJE RACIONALNIH BROJEVA

1. Sabiranje racionalnih brojeva definiše se jednakošću:

$$\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right),$$

a množenje se definiše jednakošću:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right).$$

Na primer:

$$\left(\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{3\cdot 5+7\cdot 8}{7\cdot 5}\right)=\left(\frac{15+56}{35}\right)=\left(\frac{71}{35}\right);\ \left(\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{3\cdot 8}{7\cdot 5}\right)=\left(\frac{24}{35}\right).$$

2. 1) Izračunali smo prethodne primere uzimajući svedene (reducirane) predstavnike racionalnih brojeva. Opšte definicije, međutim, to ne zahtevaju, jer $\left(\frac{a}{b}\right)$ nikako ne znači da je $\frac{a}{b}$ reducirani element racionalnog broja. To znači da se pri sabiranju i množenju racionalnih brojeva mogu uzeti ma koji njihovi elementi, ma koji ekvivalentni razllomci. Rezultat mora biti element tog istog racionalnog broja koji se dobija pri sabiranju, odnosno množenju reduciranih predstavnika. Zaista, uzmimo umesto $\frac{3}{7}$ ekvivalentni razlomak $\frac{6}{14}$. Dobijamo:

$$\left(\frac{6}{14}\right)+\left(\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{30+112}{70}\right)=\left(\frac{142}{70}\right).$$

Međutim, $\frac{142}{70}\cong\frac{71}{35}$, što se dobija primenom teoreme 2, ili se proverava na osnovu definicije relacije „$\cong$“: $142\cdot 35=71\cdot 70$.

Poslednja jednakost se može proveriti izračunavanjem napisanih proizvoda ili, na osnovu poznate činjenice:

$$142\cdot 35=(142:2)\cdot(35\cdot 2)=71\cdot 70=4970.$$

Isto tako je, npr.:

$$\left(\frac{8}{5}\cong\frac{32}{20}\right);\ \left(\frac{3}{7}\right)\cdot\left(\frac{32}{20}\right)=\left(\frac{96}{140}\right).\ \text{Ali}\ \frac{96}{140}\cong\frac{24}{35}.\ \text{[Proverite.]}$$

I to je sasvim razumljivo. Kad tako ne bi bilo, definicije sabiranja i množenja ne bi valjale. (To baš i pokazuje da su one pravilno uvedene.)

2) Na osnovu toga, sabiranje i množenje se u mnogo slučajeva pojednostavljuju na taj način što se razlomak kojim se izražava jedan sabirak, činilac, zamenjuje ekvivalentnim razlomkom, na primer:

$$(1)\ \left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{4+7}{9}\right)=\left(\frac{11}{9}\right).$$

Je li to sabiranje po definiciji i zašto?

Dokažite, uopšte: $\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)=\left(\frac{a+b}{c}\right).$

$$(2)\ \left(\frac{4}{8}\right)\left(\frac{28}{13}\right)=\left(\frac{16}{28}\right)\left(\frac{28}{13}\right)=\frac{16\cdot 28=16}{28\cdot 13=13}\ \ [\text{jer}\ (16\cdot 28):(28\cdot 13)=16:13].$$

Ali u ovom slučaju je ipak kraće:

$$\ldots=(4\cdot 28):(7\cdot 13)=4\cdot(28:7):13=\frac{16}{13}.$$

$$(3)\ \text{Međutim:}\ \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{12}{21}\right)\left(\frac{5}{12}\right)=\frac{5}{21}.$$

3) Izračunajte:

$$(1)\ \left(\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{10}\right);\quad (2)\ \left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{7}{10}\right);\quad (3)\ \left(\frac{13}{32}\right)+\left(\frac{19}{24}\right);$$

$$(4)\ \left(\frac{11}{18}\right)+\left(\frac{7}{27}\right);\quad (5)\ \left(\frac{9}{14}\right)+\left(\frac{12}{35}\right);\quad (6)\ \left(\frac{23}{45}\right)+\left(\frac{17}{60}\right);$$

$$(7)\ \left(\frac{6}{13}\right)\left(\frac{39}{40}\right);\quad (8)\ \left(\frac{26}{27}\right)\left(\frac{9}{39}\right);\quad (9)\ \left(\frac{48}{65}\right)\left(\frac{13}{32}\right).$$

3. Tek definicijama sabiranja i množenja racionalni brojevi stiču pravo da se nazivaju brojevima. I, sledstveno, da obrazuju množinu *racionalnih brojeva Q*.

1) Dokažite da pet matematičkih zakona (komutativost sabiranja i množenja, asocijativnost, ...) važe i u množini racionalnih brojeva.

2) Na osnovu tih osobina (zakona) i onoga što je rečeno u t. **2** pod 2) i 3), izračunajte:

$$(1)\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{7}{8}\right);\quad (2)\left(\frac{9}{10}\right)+\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{4}{5}\right);\quad (3)\left(\frac{11}{24}\right)+\left(\frac{19}{32}\right)+\left(\frac{27}{40}\right);$$

$$(4)\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{9}{14}\right)+\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{11}{21}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{7}{8}\right);\quad (5)\left(\frac{11}{15}\right)+\left(\frac{17}{35}\right)+\left(\frac{8}{21}\right);$$

$$(6)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{9}{10}\right);\quad (7)\left(\frac{22}{75}\right)\left(\frac{17}{15}\right)\left(\frac{25}{33}\right)\left(\frac{45}{34}\right);\quad (8)\left(\frac{21}{44}\right)\left(-\frac{13}{25}\right)\left(\frac{22}{49}\right)\left(\frac{15}{52}\right);$$

$$(9)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{7}{10}\right)+\left(\frac{3}{20}\right)\cdot\left(\frac{20}{21}\right);\quad (10)\left(\frac{35}{32}\right)\left(\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{16}{15}\right)+\left(\frac{8}{35}\right).$$

4. Sve što smo ranije dokazali važi kako za aritmetičke tako i za pozitivne i negativne racionalne brojeve jer su $a, b, c, d, m, n, \ldots$ u $\left(\frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{d}\right), \ldots$ prirodni ili celi brojevi, isključujući nulu kao imenilac. Prema tome, sabiranje, množenje i oduzimanje pozitivnih i negativnih racionalnih brojeva vrši se, kako je već pokazano, vodeći računa o tome da li su rezultati (usputni ili kranjji) pozitivni ili negativni (§ 19.6, t. **3** i § 19.5).

Izračunajte:

$$(1)\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{3}{4}\right);\quad (2)\left(\frac{5}{7}\right)-\left(\frac{5}{6}\right)-\left[\left(\frac{2}{21}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)\right];$$

$$(3)\left[\left(\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{13}{18}\right)\right]\left(-\frac{36}{65}\right);\quad (4)\left[\left(\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{9}{5}\right)\right]\left[\left(\frac{35}{18}\right)-\left(\frac{105}{27}\right)\right];$$

$$(5)\left(-\frac{24}{13}\right)\left\{\left(\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)-\left[\left(\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{13}{20}\right)\right]\right\},$$

5. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{49};\quad \left(-\frac{2}{5}\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{8}{125}.$

2) Izračunajte: $\left(-\frac{2}{3}\right)^4;\quad \left(\frac{5}{3}\right)^3;\quad \left(-\frac{7}{2}\right)^3;\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^5.$

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64};\quad \left(-\frac{1}{10}\right)^5=-\frac{1}{10^5}=\ldots;$

$\left(-\frac{1}{10}\right)^6;\quad \left(\frac{1}{5}\right)^5;\quad \left(\frac{1}{10}\right)^3;\quad \left(\frac{1}{10}\right)^4;\quad \left(\frac{1}{10}\right)^7;\quad \frac{1}{10^8}.$

4) $\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2};\quad \left(\frac{1}{x}\right)^3;\quad \left(\frac{1}{x}\right)^4;\quad \left(\frac{1}{b}\right)^5;\quad \left(-\frac{1}{z}\right)^6.$

5) $\left(\frac{2}{x}\right)^3;\quad \left(-\frac{3}{b}\right)^2;\quad \left(\frac{1}{2x}\right)^4;\quad \left(-\frac{2}{3a}\right)^3;\quad \left(\frac{4x}{5y}\right)^4.$

§ 20.4. NULA I JEDAN. SIMETRIČNI BROJEVI. RECIPROČNI (INVERZNI) BROJEVI

1. I množina racionalnih brojeva sadrži element *nula*.

1) Racionalni broj nula je $\left(\frac{0}{b}\right)$, gde $b\in Z$, $b\neq 0$.

Zaista: $\left(\frac{0}{b}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{0\cdot y+bx}{by}\right)=\left(\frac{bx}{by}\right)=\left(\frac{x}{y}\right).$

Kad nema bojaznosti od dvosmislenosti, umesto simbola $\left(\frac{0}{b}\right)$ može se upotrebiti 0.

2) Množina racionalnih brojeva sadrži i element *jedan* $\left(\frac{1}{1}\right)$. Zaista:

$$\left(\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{1\cdot x}{1\cdot y}\right)=\left(\frac{x}{y}\right).$$

Racionalni broj jedan $\left(\frac{1}{1}\right)$ može se da označi i simbolom $\left(\frac{a}{a}\right)$, gde je a ma koji celi broj različit od 0. Zaista, iz $1 \cdot a = 1 \cdot a$ sledi (§ 20.1) $\left(\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{a}{a}\right)$. Prema tome, svaki od brojeva:

$$\left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \ldots, \left(\frac{171}{171}\right), \ldots \left(\frac{-3}{-3}\right), \left(\frac{-11}{-11}\right), \ldots$$

je racionalni broj *jedan*, svaki od njih se može koristiti umesto $\left(\frac{1}{1}\right)$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{7}{7}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{-13}{-13}\right) = \ldots = \left(\frac{a}{b}\right).$$

Umesto $\left(\frac{1}{1}\right)$ ili $\left(\frac{a}{a}\right)$ može se upotrebiti simbol 1.

2. Množina Z (celih brojeva) ima važnu osobinu koju nema množina N: Svaki ceo broj ima simetrični broj.

I množina racionalnih brojeva Q ima tu osobinu. Zaista, ako je:

$\left(\frac{a}{b}\right)$ ma koji racionalan broj,

onda je: $\left(\frac{-a}{b}\right)$ njegov simetrični broj (i obrnuto).

Zaista, $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{ab + b \cdot (-a)}{bb}\right)$.

Posmatrajmo dobijeni brojilac $ab + b \cdot (-a)$,

tj. (komutativnost) $ba + b \cdot (-a)$,

tj. (distributivnost) $b[a + (-a)]$,

tj. (§ 19.5, t. **2**) $b \cdot 0$. Dakle: $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$.

1) Napišite simetrični broj racionalnog broja:

$$\left(\frac{3}{17}\right); \left(\frac{-15}{8}\right); \left(\frac{300}{301}\right); \left(\frac{-1001}{1000}\right).$$

2) Napišite simetrični broj broja: jedan; nula.

3. 1) Pojam *recipročni brojevi* je analogan pojmu *simetrični brojevi*: Zbir simetričnih brojeva je nula. *Proizvod recipročnih brojeva je jedan.*

Prema tome:

U množini N postoji samo jedan broj koji ima svoj recipročni broj. To je 1 (jer je $1 \cdot 1 = 1$).

U množini Z svaki od brojeva 1 (tj. $+1$ i -1) je istovremeno i svoj recipročni broj: $1 \cdot 1 = 1$; $(-1) \cdot (-1) = 1$.

U množini Q racionalnih brojeva *svaki racionalni broj, osim nule, ima svoj recipročni (inverzni) broj.*

Zaista, ako je $\left(\frac{a}{b}\right)$ ma koji racionalni broj, koji nije nula, onda je $a \neq 0$, pa je $\left(\frac{b}{a}\right)$ njegov recipročni broj, jer je:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{ab}{ba}\right) = 1 \qquad (\text{§ 20.4, t. } \mathbf{2}).$$

2) Pošto svaki racionalni broj, osim nule, ima recipročni broj, celishodno je uvesti simbol koji označava „... je recipročni broj broja ...“ Ako je r ma koji racionalan broj $(r \neq 0)$,

onda je: $\frac{1}{r}$ recipročni broj broja r.

Dakle: $r \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \cdot r = 1$.

Znači, recipročni broj broja $\left(\frac{5}{7}\right)$ je $\frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)}$, tj. (prema 1) $\frac{1}{\left(\frac{5}{7}\right)} = \left(\frac{5}{7}\right)$;

recipročni broj broja $\left(\frac{-8}{3}\right)$ je $\frac{1}{\left(\frac{-8}{3}\right)}$, tj. $\frac{1}{\left(\frac{-8}{3}\right)} = \left(\frac{3}{-8}\right)$; i slično.

§ 20.5. CELI BROJEVI KAO PODMNOŽINA (DEO) MNOŽINE RACIONALNIH BROJEVA

1. Dosad smo posmatrali racionalne brojeve $\left(\frac{a}{b}\right)$, gde je $b \neq 1$. Međutim, isključili smo samo 0, a ne i 1. Dakle b može biti i 1. Uostalom:

$$(1)\quad \left(\frac{a}{1}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ad + 1 \cdot c}{1 \cdot d}\right) = \left(\frac{ad + c}{d}\right);$$

$$(2)\quad \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{1 \cdot d} = \frac{ac}{d};$$

$$(3)\quad \left(\frac{a}{1}\right) + \left(\frac{b}{1}\right) = \left(\frac{a \cdot 1 + 1 \cdot b}{1 \cdot 1}\right) = \left(\frac{a + b}{1}\right);$$

$$(4)\quad \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) = \left(\frac{ab}{1 \cdot 1}\right) = \left(\frac{ab}{1}\right).$$

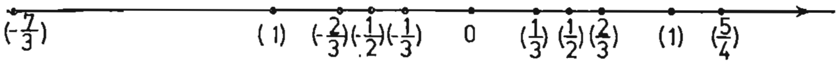
Ali kako možemo protumačiti rezultate pod (3) i (4)? Šta je $\left(\frac{a+b}{1}\right)$ i $\left(\frac{ab}{1}\right)$? Prema § 19.7, t. **10**, $\frac{a+b}{1} = a + b$, $\frac{ab}{1} = ab$.

To znači da je $\left(\frac{a}{1}\right) + \left(\frac{b}{1}\right) = (a + b) = a + b$ i $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) = ab$, tj. celi brojevi su specijalni racionalni brojevi, racionalni brojevi $\left(\frac{a}{b}\right)$ kad je $b = 1$.

Drugim rečima, *svaki ceo broj je jedan racionalan broj* $\left[\left(\frac{a}{1}\right), \left(\frac{b}{1}\right)\right.$, *npr.* $\left.\frac{-5}{1}, \frac{14}{7}, \ldots\right]$. *Svi celi brojevi čine (jednu) podmnožinu množine racionalnih brojeva:*

$$Z \subset Q.$$

2. 1) To ilustrujemo i tačkama prave linije (§ 19.6):



Slika 20.1

Naime: Postoji jedna tačka koja deli duž $[0,1]$ na dve podudarne duži i ona odgovara racionalnom broju $\left(\frac{1}{2}\right)$. Postoje dve tačke koje tu istu duž dele na tri podudarne duži: jedna odgovara broju $\left(\frac{1}{3}\right)$, druga broju $\left(\frac{2}{3}\right)$. Postoje tri tačke koje dele duž $[0,1]$ na četiri podudarne duži, . . .

2) Označite tačku koja odgovara broju:

$$\left(\frac{-3}{5}\right);\quad \left(\frac{3}{2}\right);\quad \left(\frac{13}{4}\right);\quad \left(\frac{-35}{5}\right);\quad \left(\frac{9}{3}\right);\quad \left(\frac{-6}{2}\right).$$

3) Taj geometrijski poredak racionalnih brojeva sugeriše relaciju poretka (reda) u množini racionalnih brojeva: od dva racionalna broja veći je onaj kome odgovara „desna“ tačka. Međutim, relacija poretka se uvodi (kao i u množini Z) definicijom:

Ako su $\left(\frac{a}{b}\right)$ i $\left(\frac{c}{d}\right)$ dva racionalna broja

i ako je: $\left(\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{c}{d}\right)=$ pozitivan broj, onda je $\left(\frac{a}{b}\right)>\left(\frac{c}{d}\right)$;

$\left(\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{c}{d}\right)=$ negativan broj, onda je $\left(\frac{a}{b}\right)<\left(\frac{c}{d}\right)$.

Npr.: $\left(\frac{-7}{4}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-7}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{(-7)\cdot 3+2\cdot 8}{12}=\frac{-5}{2}$, dakle $\left(\frac{-7}{4}<\frac{-2}{3}\right)$.

3. 1) Neka su $\left(\frac{m}{n}\right)$ i $\left(\frac{p}{n}\right)$ dva nenegativna racionalna broja i neka je $m>p$. Koja relacija postoji tada između $\left(\frac{m}{n}\right)$ i $\left(\frac{p}{n}\right)$?

Da li može biti: $\left(\frac{m}{n}\right)\cong\left(\frac{p}{n}\right)$? Ne može jer bi tada bilo $mn=pn$, tj. $m=p$, a to nije, nego $m>p$. Znači $mn>pn$, pa je i $\left(\frac{m}{n}\right)>\left(\frac{p}{n}\right)$. Otuda:

Teorema 3. — *Od dva nenegativna racionalna broja (dva nenegativna razlomka*) jednakih imenilaca veći je onaj čiji je brojilac veći.*

2) Analogno se može pokazati da ako su $\left(\frac{m}{n}\right)$ i $\left(\frac{m}{q}\right)$ dva nenegativna racionalna broja i ako je $n>q$, onda je $\left(\frac{m}{n}\right)<\left(\frac{m}{q}\right)$. Dakle:

Teorema 4. — *Od dva nenegativna racionalna broja (dva nenegativna razlomka) jednakih brojilaca veći je onaj čiji je imenilac manji.*

* Takvo izražavanje ne znači izjednačavanje racionalnog broja i razlomka.

Na primer: $\frac{5}{7}>\frac{3}{7}$; $\frac{8}{9}<\frac{8}{5}$.

3) Neka su $\left(\frac{m}{n}\right)$ i $\left(\frac{p}{q}\right)$ dva nenegativna racionalna broja (dva nenegativna razlomka). Tada je:

$$\frac{m}{n}\cong\frac{mq}{nq},\quad \frac{p}{q}\cong\frac{pn}{qn}\ \text{(teor. 1)}$$

pa, prema prethodnom, iz $mq>pn$ sledi $\left(\frac{m}{n}\right)>\left(\frac{p}{q}\right)$.

Teorema 5. — *Ako su* $\left(\frac{a}{b}\right)$ i $\left(\frac{c}{d}\right)$ *dva nenegativna racionalna broja (dva nenegativna razlomka), onda da bi bilo* $\left(\frac{a}{b}\right)>\left(\frac{c}{d}\right)$, *nužno je i dovoljno da bude* $ad>bc$.

4) Neka je $\left(\frac{a}{b}\right)>\left(\frac{c}{d}\right)$. Šta možete reći o $\left(\frac{b}{a}\right)$ i $\left(\frac{c}{d}\right)$?

5) Kako glase prethodne teoreme 3, 4 i 5: (1) kad je jedan od datih brojeva negativan; (2) kad su oba negativna?

4. 1) Ponekad je celishodno posmatrati tri množine racionalnih nenegativnih brojeva:

(1) množinu brojeva $\left(\frac{a}{b}\right)$ kad je $a<b$;

(2) množinu brojeva $\left(\frac{a}{b}\right)$ kad je $a=b$;

(3) množinu brojeva $\left(\frac{a}{b}\right)$ kad je $a>b$.

Množina (2) je singleton $\{1\}$. Svaki broj množine (1) je manji od 1. (Nekada su to bili „pravi razlomci“.) Svaki broj množine (3) je veći od 1 i često se prikazuje u obliku zbira jednog celog (nenegativnog) broja i jednog racionalnog broja množine (1): $\left(\frac{a}{b}\right)=q+\frac{r}{b}$, npr. $\left(\frac{23}{5}\right)=4+\frac{3}{5}$. Uporedite § 14.3: $a=bq+r$. Kad tu jednakost podelite brojem b, dobijate $\left(\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}\right)$.

Uobičajeno je da se u posebnim slučajevima ti zbirovi zapisuju kraće, na primer: Umesto $3+\frac{2}{7}$ piše se $3\frac{2}{7}$; umesto $5+\frac{6}{13}$ piše se $5\frac{6}{13}$; . . .

2) Pokažite na pravi brojeva množine tačaka koje odgovaraju brojevima: množine (1); množine (2); množine (3).

5. Slično je kad su racionalni brojevi negativni, na primer:

$$-1<-\frac{3}{7}<0;\quad -5<-4\frac{2}{9}<-4.\ \text{Znači}\ -4\frac{2}{9}=-\left(4+\frac{2}{9}\right).$$

Prema tome, ako je $|a|<|-b|$, onda je $-1<\left(\frac{a}{b}\right)<1$.

Pokažite (približno) tačku koja odgovara broju:

$$\frac{1}{100};\quad \frac{-1}{100};\quad \frac{1}{1000};\quad \frac{-1}{10000};\quad \frac{776}{777};\quad \frac{-9999}{10000}.$$

§ 20.6. DELJENJE U MNOŽINI RACIONALNIH BROJEVA

1. Definisali smo racionalne brojeve, jer nismo mogli odgovoriti na pitanja kao što su, npr. (§ 20.1): $7x=3$; $5x=-23$; $-8x=12$.

Da li sad možemo? Da li postoji broj x kojim treba: pomnožiti broj 7 da proizvod bude 3; pomnožiti broj 5 da proizvod bude -23; i slično?

Postoji, jer to znači da u $7x=3$ treba nešto učiniti pa da na levoj strani jednakosti bude $1\cdot x=x$. A to „nešto" jeste (§ 19.7, t. **8** i § 20.4, t. **3**): Pomnožiti levu i desnu stranu jednakosti $7x=3$ (kaže se i: pomnožiti jednakost . . .) recipročnim brojem broja 7, tj.: (§ 20.5, t. **3**) brojem $\frac{1}{7}$. Tada je:

$$(7x)\cdot\frac{1}{7}=3\cdot\frac{1}{7},$$

tj. (asocijat. i komut. množenja) $\left(7\cdot\frac{1}{7}\right)x=3\cdot\frac{1}{7}$,

tj. (§ 20.4, t. **3**, 2): $1\cdot x=3\cdot\frac{1}{7}$, tj. $x=3\cdot\frac{1}{7}$.

Ostaje još da izračunamo proizvod $3\cdot\frac{1}{7}$.

Prema § 20.3 i § 20.5 je $\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3\cdot 1}{1\cdot 7}\right)=\left(\frac{3}{7}\right)$, tj. $\frac{3}{7}$.

Kontrola: Smenimo u $7x=3$, x brojem $\frac{3}{7}$, pa imamo

$$7\cdot\frac{3}{7}=\left(\frac{7}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 7}=3.\ \text{ Znači, zaista je } x=\left(\frac{3}{7}\right).$$

U slučaju $5x=-23$ je $(5x)\cdot\frac{1}{5}=(-23)\cdot\frac{1}{5}$, tj. $x=\frac{-23}{5}$.

U slučaju $-8x=12$ je $(-8x)\left(\frac{-1}{8}\right)=12\left(\frac{-1}{8}\right)$,

tj. $$x=\frac{-12}{8},\ \text{tj. } x=\left(\frac{4\cdot(-3)}{4\cdot 2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\right).$$

I zaista: $$(-8)\left(\frac{-3}{2}\right)=\left(\frac{-8}{1}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)=\left(\frac{24}{2}\right)=12.$$

2. 1) Jedna posledica toga je postupak za množenje celog broja i racionalnog broja oblika $\left(\frac{1}{q}\right)$ ili $\left(\frac{-1}{q}\right)$, gde je q pozitivan ceo broj:

$$\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{1}{q}\right)=\left(\frac{a}{q}\right),\ \text{tj. } a\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{q}\cdot a=\frac{a}{q}\ \left(\text{ili } a\cdot\frac{-1}{q}=\frac{-1}{q}\cdot a=\frac{-a}{q}\right).$$

Odatle sledi: $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{ap}{q}\right)$, tj. $a\cdot\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\cdot a=\frac{ap}{q}$,

jer je, na osnovu prethodnog: $\frac{p}{q}=p\cdot\frac{1}{q}=\frac{1}{q}\cdot p$,

pa je $$a\cdot\frac{p}{q}=(a\cdot p)\cdot\frac{1}{q}=\frac{ap}{q},\ \text{ ili } \frac{p}{q}\cdot a=p\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot a\right)=p\cdot\frac{a}{q}=\frac{pa}{q}.$$

Na primer: $(-3)\left(\frac{7}{13}\right)=\left(\frac{-21}{13}\right)$; $\left(\frac{-2}{11}\right)(-4)=\frac{8}{11}$.

2) Izračunajte: $\frac{4}{7}(-3)$; $(-12)\left(\frac{-5}{6}\right)$; $\left(\frac{-7}{25}\right)(-5)$.

3. 1) Druga posledica jeste:

Odrediti broj koji treba staviti umesto slova x u

$$r_1x=r_2$$

znači (prethodna tačka) *podeliti broj r_2 brojem r_1* (gde r_1 i r_2 označavaju ma koja dva racionalna broja). A [opet prema prethodnom (t. **1**)] *podeliti broj r_2 brojem r_1 znači isto što i pomnožiti broj r_2 recipročnim brojem broja r_1*:

$$\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{ad}{bc}\right);$$

$$a:\left(\frac{c}{d}\right)=a\cdot\left(\frac{d}{c}\right)=\left(\frac{ad}{c}\right);$$

$$\left(\frac{a}{b}\right):c=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{a}{bc}.$$

Na primer:

(1) $\left(\frac{-7}{4}\right):\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{-7}{4}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{-35}{12}\right)$;

(2) $\left(\frac{-2}{9}\right):\left(\frac{-5}{4}\right)=\left(\frac{-2}{9}\right)\left(\frac{4}{-5}\right)=\left(\frac{-8}{-45}\right)=\left(\frac{8}{45}\right)$;

jer se (razumljivo) *znak rezultata deljenja određuje prema pravilima* (4) *i* (5), § 19.6, t. **3**.

Specijalno, ako su brojilac i imenilac racionalnog broja pozitivni, ili negativni, racionalni broj je pozitivan. Ako je jedan od njih pozitivan a drugi negativan, broj je negativan, na primer:

$$\left(\frac{-13}{-14}\right)=\left(\frac{13}{14}\right)\ \text{ili}\ \frac{-13}{-14}=\frac{13}{14};\quad \left(\frac{13}{-14}\right)=\left(\frac{-13}{14}\right)\ \text{ili}\ -\frac{13}{14}.$$

U svakom slučaju, kad delilac nije nula, *deljenje u množini racionalnih brojeva je uvek moguće.*

2) Izračunajte:

$$\left(\frac{7}{9}\right):\left(\frac{4}{5}\right); \quad \frac{6}{7}:\left(-\frac{2}{3}\right); \quad -\frac{11}{12}:\frac{7}{6}; \quad 8:\frac{3}{5};$$

$$8:\left(-\frac{4}{5}\right); \quad \left(-\frac{9}{10}\right):(-3); \quad \left(-\frac{11}{13}\right):\left(\frac{11}{13}\right).$$

3) Izračunajte:

$$\frac{3a}{4b}:\frac{5a}{2b}; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^3:\frac{2}{7}; \quad \frac{8}{3}:\left(\frac{4}{9}\right)^2; \quad \frac{8x^2}{y^3}:\frac{4x^2}{y}; \quad \frac{5a}{7b^3}:\frac{5a^2}{14b^2};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3:\left(\frac{1}{x}\right); \quad \left(\frac{1}{x}\right)^2:\frac{1}{x^5}.$$

4. 1) Neka su, kratkoće radi, a i b dva racionalna broja i neka je $a<b$. Šta možemo tvrditi o broju $\frac{a+b}{2}$ u upoređenju sa a i sa b?

$$a-\frac{a+b}{2}=a-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

I kako je $a<b$, $\frac{a-b}{2}$ je negativan broj, tj. $\frac{a+b}{2}>a$.

$$b-\frac{a+b}{2}=b-\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}= \text{pozitivan broj, tj. } \frac{a+b}{2}<b.$$

Znači: $$a<\frac{a+b}{2}<b.$$

Neka je $\frac{a+b}{2}=a_1$. Uporedite brojeve:

$$\frac{a+a_1}{2} \text{ i } a; \quad \frac{a+a_1}{2} \text{ i } a_1; \quad \frac{a_1+b}{2} \text{ i } b.$$

Tako možemo produžiti neograničeno, što dokazuje da ima beskonačno mnogo brojeva većih od a, manjih od b. Otuda:

Teorema 6. — *Između dva ma koja racionalna broja ima beskonačno mnogo (koliko god hoćemo) racionalnih brojeva.*

To znači da su na pravi brojeva (sl. 20.1) tačke koje odgovaraju racionalnim brojevima *svuda guste*. Zato se i kaže da je množina racionalnih brojeva „*svuda gusta*" (što nije slučaj sa množinom celih, pa dakle ni sa množinom prirodnih brojeva).

Broj $\frac{a+b}{2}$ zove se *aritmetička sredina* brojeva a i b. $\dfrac{a+\frac{a+b}{2}}{2}$ je aritmetička sredina brojeva a i $\frac{a+b}{2}$. I tako dalje.

Primeri: (1) Neka je $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{7}{4}$. Odredite osam brojeva većih od $\frac{3}{2}$ a manjih od $\frac{7}{4}$.

(2) Odredite pet brojeva većih od $-\frac{10}{2}$ a manjih od $-\frac{10}{3}$.

2) Činjenica da su racionalni brojevi svuda gusti omogućuje merenje, omogućuje da svakoj veličini korespondiramo broj sa kojom hoćemo tačnošću. To ćemo videti u § 24.2.

3) Iz iste činjenice (da su racionalni brojevi svuda gusti) moglo bi se zaključiti da svakoj tački prave brojeva (sl. 20.1) odgovara racionalni broj i obrnuto. To međutim nije tako. Iako su racionalne tačke vrlo guste, ima i mnogo (beskonačno mnogo) tačaka kojima ne odgovaraju racionalni brojevi. To ćemo videti u § 21.7.

20.7. RAZLOMCI I RACIONALNI BROJEVI (REKAPITULACIJA)

Iako se iz prethodnog jasno vidi razlika između množina raznih vrsta brojeva, ipak je neophodan jedan uporedni pregled:

1. Ograničenost, ili nezatvorenost, deljenja u množini N, pa dakle i u množini Z, nametnula je uvođenje novih brojeva, uvođenje razlomaka. Razlomak je, s te tačke gledišta, označeno deljenje dva prirodna odnosno dva cela broja. (Npr. $\frac{10}{5}$ je označeno deljenje broja 10 brojem 5, $\frac{3}{8}$ je označeno deljenje broja 3 brojem 8; $-\frac{4}{7}$ je označeno deljenje broja -4 brojem $+7$, ili broja $+4$ brojem -7, itd.)

Svaki razlomak je, dakle, uređeni par celih brojeva vezanih relacijom „. . . treba podeliti brojem . . ." ili „. . . je podeljen brojem . . ." Simbolima izraženo: $$\forall\, a, b \in Z,\ b\neq 0: \ \frac{a}{b}.$$

U § 22.4 videćemo kako se nenegativni razlomci koriste pri izražavanju mera veličina, ali s obzirom na izomorfizam operacija u N i Z^+ (§ 19.6, t. **1**) u teoriji se, prvenstveno, operiše uređenim parovima celih brojeva. (Videti i ovde t. **5**.)

2. Množina razlomaka je podeljena na klase ekvivalentnih razlomaka (tj. relacija „. . . je ekvivalentan . . .", koju smo označili sa „$\cong$" vrši particiju množine razlomaka). Svaka od tih klasa zove se racionalni broj. Jedan racionalni broj je, na primer:

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \ldots, \frac{100}{300}, \ldots$$

drugi je $$\ldots, -\frac{56}{40}, \ldots, -\frac{49000}{35000}, \ldots$$

3. Umesto da operišemo klasama, tj. neograničenim množinama ekvivalentnih razlomaka, mi operišemo njihovim predstavnicima. Predstavnik klase, racionalnog broja, može biti svaki njen, svaki njegov element. Jer, rezultati operacija racionalnim brojevima ne zavise od predstavnika. Međutim, lakše je raditi svedenim (reduciranim) predstavnicima i zato se njima, kad god je to moguće, pribegava, a i konačni rezultati se, po pravilu, reduciraju.

4. Kao simbol racionalnog broja uveli smo $\left(\frac{a}{b}\right)$ gde je $\frac{a}{b}$ bilo koji njegov razlomak, po pravilu svedeni. Međutim, pošto su rezultati operacija racionalnim brojevima $\left(\frac{a}{b}\right), \left(\frac{c}{d}\right), \ldots, \left(\frac{x}{y}\right), \ldots$ ekvivalentni rezultatima operacija razlomcima $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, . . . , to se u praksi operiše ovim poslednjim, tj. razlomcima (što razumljivo smanjuje opštost ali je manipulativnije). U praksi se i simbol „$\cong$" zamenjuje simbolom „=", npr. $\frac{28}{35}=\frac{64}{80}$. To nije pogrešno jer oba simbola označavaju isti broj, ali pojmovno treba praviti razliku između "=„ i "$\cong$„ npr. $\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$ i $\frac{7}{12}\cong\frac{21}{36}$.

5. 1) Množina Z celih brojeva je „proširena" množina N prirodnih brojeva. (Često se kaže da je N podmnožina množine Z, što se, § 19.6, kao i proširenje, formalno prihvata.) To je proširenje nametnula ograničenost, tj. nezatvorenost množine N u odnosu na oduzimanje.

2) Množina Q racionalnih brojeva je proširena množina Z celih brojeva. To je proširenje nametnula nezatvorenost množine Z u odnosu na deljenje. Množina Z je „defakto" podmnožina množine Q. Drugim rečima, celi brojevi su specijalni racionalni brojevi: kad je u $\left(\frac{a}{b}\right)$ $b=1$ ili kad $b\,|\,a$. U stvari, celi i racionalni brojevi imaju mnoge zajedničke osobine:

(1) Svih pet zakona (komutativnost i asocijativnost sabiranja i množenja i distributivnost množenja u odnosu na sabiranje) važe i u množini celih i u množini racionalnih brojeva.

(2) I množina celih i množina racionalnih brojeva sadrže *neutralni aditivni element* $0(8+0=0+8=8,\ \frac{1}{2}+0=0+\frac{1}{2}=0)$ *i neutralni multiplikativni element* $1\left[(-8)\cdot 1=1\cdot(-8)=-8,\ \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=n-\frac{1}{2}\right]$.

(3) Osim nule, svaki ceo broj i svaki racionalni broj ima svoj simetrični broj $\left[(-8)+(+8)=0,\ \left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=0\right]$*.

Jedna jedina razlika koja postoji između celih i racionalnih brojeva je što, osim nule, *svaki racionalni broj ima svoj recipročni broj*, a nijedan celi broj nema svoj recipročni broj (koji bi bio ceo broj, inače recipročni broj, npr., broja -13 je $-\frac{1}{13}$).

3) Važno je primetiti da se i celi i racionalni brojevi mogu definisati kao uređeni parovi prirodnih brojeva i to:

(a, b) je ceo broj ako označava razliku prirodnih brojeva a i b, tj. $a-b$;
(a, b) je racionalni broj ako označava količnik deljenja broja a brojem b.

Pri tome:

(1) (a, b) i (c, d) označavaju isti ceo broj ako je $a+d=b+c$;
(2) (a, b) i (c, d) označavaju isti racionalni broj ako je $ad=bc$.

Grafički prikazane te definicije izgledaju ovako:

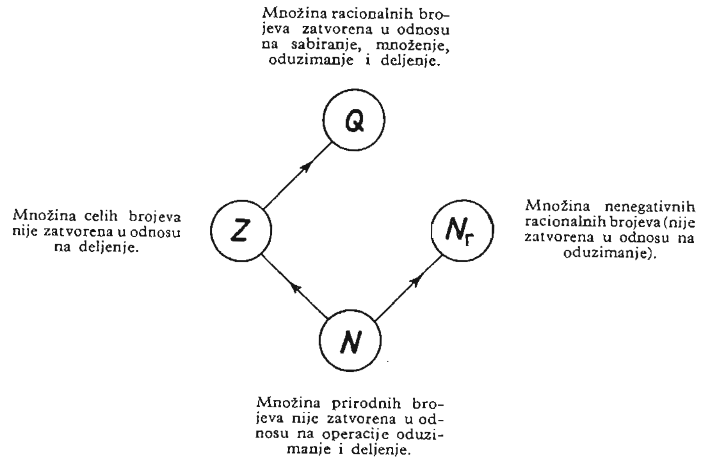
(1) $(a, b) \cong (c, d)$ (2) $(a, b) \cong (c, d)$

Navedite primere.

* A možemo reći da je nula sama sebi simetričan broj.

4) U stvari, svaki ceo broj predstavlja klasu ekvivalentnih razlika prirodnih brojeva, a svaki racionalni broj predstavlja klasu ekvivalentnih količnika celih brojeva, razlomaka.

5) Na osnovu prethodnog sve dosad proučene množine brojeva možemo prikazati šemom:



Slika 20.2

6. 1) Zašto se N, + zove komutativni monoid?
2) Je li Z, + komutativna grupa i zašto?
3) Zašto je Z, − nekomutativni grupoid?
4) Zašto je Z, − (ili Z, ×) komutativni monoid?
5) Z, + je komutativni prsten koji sadrži element jedan. Zašto?
6) Da li je Q, + komutativna grupa?

7. Zašto je množina racionalnih brojeva svuda gusta?

§ 20.8. JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

1. Jednakost $x+7=3$ označava pitanje: Koje brojeve zamenjuje slovo x? Tako (kratko) pitamo kad već znamo dosta o jednakostima sličnim napisanoj. U stvari, jednakost $x+7=3$ označava (kratko izražen) zahtev: *Naći (odrediti, izračunati) sve brojeve umesto kojih stoji slovo x (sve brojeve koji čine da leva strana jednakosti označava isti broj koji označava i njena desna strana)* (§ 1.4).

Takva se jednakost zove *jednačina*.

U opštem obliku ona glasi: $x+b=a$, ili $b+x=a$,

gde su a i b racionalni brojevi, i njeno *rešenje* je $x=a-b$.

Kako se dobija to rešenje?

Dodaje se kao sabirak, na osnovu poznatih teorema, levoj i desnoj strani napisane jednakosti simetrični broj broja b.

2) I jednačine: $x-b=a$ i $b-x=a$

su istog oblika (istog tipa) i rešavaju se na isti način: U slučaju $b-x=a$, može se dobiti negativni broj x: $-x=a-b$. Tada je (glava XVI) $-1(-x)=-(a-b)$ ili $(-x)(-1)=\ldots,\ x=-(a-b)$.

Na primer: (1) $8+x=5$,

$8+x-8=5-8$

$(8-8)+x=5-8,\ x=-3$.

I zaista: $8+(-3)=5$

(2) $\frac{2}{7}-x=-\frac{9}{14}-\frac{1}{14}$

$\frac{2}{7}-x-\frac{2}{7}=-\frac{9}{14}-\frac{1}{14}-\frac{2}{7}$,

tj. (komut. i distributivnost, ili § 12.3) $-x=-\left(\frac{9}{14}+\frac{1}{14}+\frac{2}{7}\right)$,

tj. $x=\frac{9}{14}+\frac{1}{14}+\frac{4}{14}=\frac{14}{14}=1$.

Zaista: $\frac{2}{7}-1=\frac{4}{14}-\frac{14}{14}=-\frac{10}{14}=-\frac{9}{14}-\frac{1}{14}$.

Spomenuta distributivnost glasi: $\left(\frac{9}{14}+\frac{1}{14}+\frac{2}{7}\right)(-1)$.

3) Jednačine $x+b=a$ i $x=a-b$ su *ekvivalentne* zato što se druga dobija iz prve ili prva iz druge (primenom dopuštenih „transformacija", tj. primenom poznatih teorema), pa, prema tome, slovo x stoji umesto istih brojeva. Ekvivalentnost se izražava na poznati način:

$$x+b=a \Leftrightarrow x=a-b.$$

Na primer: (1) $9+x=7 \Leftrightarrow x=7-9$

(2) $2-x=7 \Leftrightarrow x-2=-7 \Leftrightarrow x=-7+2$

(3) $-2-x=-1 \Leftrightarrow$

(4) $x-15=0 \Leftrightarrow$

(5) $x-2=-5 \Leftrightarrow$ Dovršite.

(6) $2-x=a \Leftrightarrow$

(7) $-a+x=b \Leftrightarrow$

2. Drugi tip jednačina je $bx=a$.

Tada je (§ 20.4 i § 20.6) $(bx)\cdot\frac{1}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, tj. $x=\frac{a}{b}$.

Na primer: $-13x=8,\ (-13x)\left(-\frac{1}{13}\right)=8\left(-\frac{1}{13}\right),\ x=-\frac{8}{13}$.

U slučaju $3x+18-x=2$ imamo:

$3x-x+18=2$ [komutativnost]

tj. $(3-1)\,x+18=2$ [distributivnost]

tj. $2x+18=2$

tj. $2x+18-18=2-18$

tj. $2x=-16$, tj. $x=-16\cdot\frac{1}{2}=-\frac{16}{2}=-8$.

Znači, $3x+18-x=2$ se, primenom opštih osobina, napiše u obliku $2x+18=2$, a zatim:

$$2x+18=2 \Leftrightarrow 2x=-16 \Leftrightarrow x=-\frac{16}{2}=-8.$$

1) Nađite brojeve umesto kojih stoji slovo x u:

(1) $3x-13-7x=7$; (2) $5x-17=3+9x$;

(3) $\frac{1}{2}-3x=1-6x+\frac{1}{3}$; (4) $4x+\frac{5}{8}=\frac{5}{8}-6x$.

2) Sastavite i sami primere i rešite ih.

3) Koji zahtev označava jednačina $\frac{21}{x}=-3$?

Izračunati delilac kad su dati deljenik i količnik.

3. 1) Šta znači $a<3$? To je tvrđenje da a označava svaki broj manji od 3. Da li umesto a možemo staviti: 2; -2; 0; -100; 5; $3+\frac{1}{573}$?

Šta označava $b>-1$? Možemo li staviti: $b=-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{5}$; $-\frac{573}{574}$; $-\frac{5}{4}$; 1; 11; ...?

2) Neka a označava samo cele brojeve. Napišite množinu brojeva koje označava a u slučaju: (1) $3<a<10$; (2) $3\leqslant a<10$; (3) $3\leqslant a\leqslant 10$; (4) $-1<a<5$; (5) $-1\leqslant a<3$; (6) $-1\leqslant a\leqslant 1$; (7) $-1<a<1$; (8) $-11<a<1$; (9) $15<a<16$; (10) $-3<a<-2$.

3) Slovo x označava ma koji broj intervala [0, 1]. Napišite deset brojeva koje označava x. Može li da bude $x=\frac{7}{9}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{3}{2}$?

4. 1) Šta označava $x+5<3$?

Označava zahtev da se odrede svi oni brojevi koji stavljeni umesto slova x čine da $x+5$ (leva strana nejednačine) bude manja od 3.

To se može odrediti „intuitivno" (prema pravilima sabiranja racionalnih brojeva). Naime, pošto je $5>3$, x ne može da bude ni pozitivan broj ni nula. Ali on ne može da bude ni -1 (jer je $-1+5=4>3$) ni -2. Umesto slova x može da stoji svaki racionalni broj manji od -2, tj. rešenje napisane nejednačine je $x<-2$. Zaista: $-2+5=3$, a $-\left(2+\frac{1}{10}\right)+5=3-\frac{1}{10}<3$.

Takvo rasuđivanje je neophodno pri rešavanju svake nejednačine. Inače, moguće je (§ 19.6, t. **9**) „dodati" i levoj i desnoj strani simetrični broj broja 5. Tada je: $x+5-5<3-5$, tj. $x<-2$.

Uopšte: (1) ako je $x+b<a$, onda je $x<a-b$;

(2) ako je $x-b<a$, onda je $x<a+b$;

(3) $x+b>a \Leftrightarrow x> \ldots$;

(4) $x-b>a \Leftrightarrow x> \ldots$;

(5) $b-x<a \Leftrightarrow x>b-a$;

(6) $b-x>a \Leftrightarrow x \ldots$.

2) Odredite množinu brojeva koje zamenjuje slovo:

(1) $x-3<-5$; (2) $-7+a>-1$; (3) $4-y>5$;

(4) $8-z<2$; (5) $3-x-7<10-\left(12+\frac{3}{10}\right)$.

5. 1) Šta označava $4x>12$?

Označava zahtev: Naći sve brojeve kojima treba pomnožiti 4 da proizvod bude veći od 12. Rešenje je očigledno $x>3$.

Ono se može dobiti i na osnovu § 19.6, t. **9**, § 20.4, t. **3** i § 20.6:

$$(4x)\cdot\frac{1}{4}>12\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow x>3.$$

2) Odredite množinu brojeva umesto kojih stoji slovo:

(1) $5x+7>2$; (2) $\frac{3}{5}y-8>-2$; (3) $\frac{7}{4}y-\frac{2}{5}<-\frac{7}{10}$;

(4) $\frac{5}{12}-2x>6$; (5) $\frac{3}{5}y-\frac{8}{9}-\frac{14}{15}y<\frac{17}{18}$.

3) Uopšte: ako je $bx>a$, onda je $x>\frac{a}{b}$;

$bx<a \Leftrightarrow \ldots$

§ 20.9. VEŽBANJA I ZADACI

1. 1) Dokažite da je: (1) $\frac{23}{99}\cong\frac{2\,323}{9\,999}\cong\frac{232\,323}{999\,999}$; (2) $\frac{173}{999}\cong\frac{173\,173}{999\,999}$.

2) Izračunajte broj umesto kojeg stoji slovo:

$\frac{23}{14}\cong\frac{x}{462}$; $\frac{y}{646}\cong\frac{63}{19}$; $\left(\frac{112}{43}\right)=\left(\frac{27\,776}{z}\right)$; $\left(\frac{99\,072}{a}\right)=\left(\frac{256}{493}\right)$.

2. $n\in\{2, 3, 4, \ldots\}=N\setminus\{0, 1\}$. Pokažite da su:

(1) $\frac{n-1}{n}$; (2) $\frac{n}{n+1}$; (3) $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$

svedeni (reducirani) predstavnici odgovarajućih racionalnih brojeva.

3. Kako treba izabrati $n\in N\setminus\{0, 1\}$ pa da $\frac{n^2-1}{3n+1}$ bude sveden predstavnik racionalnog broja?

4. Koliko se celih brojeva može dodati i brojiocu i imeniocu datog (svedenog) razlomka pa da se on ne menja?

5. 1) Neka je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Pokažite da je $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

2) Neka je dat razlomak $\frac{a}{b}$. Sastavite razlomak $\frac{x}{y}\cong\frac{a}{b}$ kad je dat zbir $x+y=s$.

Primer: $\frac{a}{b}=\frac{188\,887}{211\,109}$, $s=108$.

3) Dat je razlomak $\frac{a}{b}$. Sastavite razlomak $\frac{x}{y}\cong\frac{a}{b}$ kad je data razlika $x-y=d$.

Primer: $\frac{a}{b}=\frac{195}{117}$, $d=30$.

6. Izračunajte: (1) $\left(\frac{3}{77}\right)+\left(\frac{5}{121}\right)$; (2) $\left(\frac{5}{44\,990}\right)+\left(\frac{2}{8\,998}\right)$; (3) $\left(\frac{25}{50}\right)-\left(\frac{72}{144}\right)$;

(4) $\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{2x}{2y}\right)$; (5) $\left(\frac{2x}{3y}\right)-\left(\frac{3x}{4y}\right)$.

7. Izračunajte broj umesto kojeg stoji slovo:

(1) $\left(\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{x}{7}\right)=\frac{3}{25}$; (2) $\left(\frac{x}{27}\right)-\left(\frac{8}{15}\right)=\left(\frac{4}{260}\right)$; (3) $\left(\frac{x}{12}\right)-\left(\frac{20}{72}\right)=\left(\frac{5}{90}\right)$.

8. Izračunajte: (1) $\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{16}\right)$; (2) $\left(\frac{161}{12}\right)\left(\frac{72}{7}\right)$; (3) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{2b}{a}\right)$; (4) $\left(\frac{5}{7}\right):\left(\frac{11}{2}\right)$;

(5) $\left(\frac{6}{3}\right):\left(\frac{6}{2}\right)$; (6) $\left(\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)$; (7) $\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$.

9. 1) Neka je $M=\left\{\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{8}{1}\right), \ldots, \left(\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{2^{n+1}}{1}\right) \ldots\right\}$.

Pokažite da je $M, \bullet$ komutativna grupa.

2) Isto za množinu:

$$P=\left\{\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{p}{1}\right), \left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{p^2}{1}\right), \left(\frac{1}{p^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{p^n}\right), \left(\frac{p^{n+1}}{1}\right), \ldots\right\}.$$

10. Uporedite brojeve: (1) $\left(\frac{161}{12}\right)$ i $\left(\frac{41}{7}\right)$; (2) $\left(\frac{4}{3}\right)$ i $\left(\frac{16}{14}\right)$; (3) $\left(\frac{7}{15}\right)$ i $\left(\frac{8}{13}\right)$;

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)$ i $\left(\frac{2a}{b}\right)$; (5) $\left(\frac{1}{b}\right)$ i $\left(\frac{2}{3b}\right)$.

11. Izračunajte šest brojeva koje označava slovo:

(1) $\frac{2}{7}<a<\frac{11}{3}$; (2) $\left(\frac{19}{5}\right)<b<\left(\frac{24}{6}\right)$; (3) $\left(\frac{21}{56}\right)<x<\left(\frac{18}{24}\right)$.

12. Napišite recipročni broj broja: $-\frac{1}{2}$; -3; p; -1; -111.

13. Nađite najmanji ceo broj koji podeljen brojevima $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{35}$ i $\frac{6}{25}$ daje cele količinke.

14. Neka je dat reducirani broj $\frac{a}{b}$. Nađite opšti oblik reduciranog broja $\frac{c}{d}$ tako da proizvod $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ bude ceo broj. Koliko ima tih brojeva $\frac{c}{d}$ ako je $|c|<|d|$? Navedite primer.

15. $\frac{a}{b}$ kao pod **14.** Nađite opšti oblik reduciranih brojeva $\frac{c}{d}$ tako da je $\frac{c}{d} : \frac{a}{b}$ = ceo broj.

16. Rešite, u množini Z, jednačine:

(1) $12-(x+4)=6$; (3) $24=13+(x-13)$;

(2) $7-[(7-x)-13]=-13$; (4) $7-(7-x)-13=-13$.

17. Rešite jednačine:

(1) $a=bc-x$; (2) $x+ac=a(b+c)$; (3) $ac-x=c(a+b)$;

(4) $7-y=y-3$; (5) $8+n=18-n$.

18. Rešite u binarnom sistemu brojanja:

(1) $x+111=1\,101$; (2) $101-x=111$; (3) $x-100=110 \cdot 10$.

19. Napišite dve ekvivalentne jednačine ove jednačine:

(1) $-x-a=b$; (2) $-5=-4+x$; (3) $5=-x+1\,970$.

20. Napišite množinu brojeva koje zamenjuje slovo x u:

(1) $6<12-x<9$; (2) $x<4<10-x$; (3) $7-x<x-3$.

GLAVA XXI

DECIMALNI BROJEVI. NERACIONALNI (IRACIONALNI) BROJEVI. NIZOVI I REDOVI

§ 21.1. DECIMALNI BROJEVI

1. 1) Brojevi 1 10 100, 1 000, 10 000, . . .
ili, u obliku stepena, 10^0 10^1 10^2, 10^3, $10^4, \ldots$
zovu se, u dekadnom sistemu brojanja, *dekadne jedinice.*

2) Prosti činioci (svake) dekadne jednice jesu 2 i 5, npr.:

$$10=2 \cdot 5, \quad 100=2^2 \cdot 5^2, \quad 10\,000=2^4 \cdot 5^4.$$

Uopšte je: $10^n=2^n \cdot 5^n, \quad n \in N.$

To je poznato. Uostalom:

$$10^n=\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \ldots 10}_{n \text{ činilaca } 10}=\underbrace{(2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \ldots (2 \cdot 5)}_{n \text{ činilaca } 2 \text{ i } n \text{ činilaca } 5}.$$

3) *Razlomak čiji je imenilac (ma koja) dekadna jedinica zove se decimalan razlomak.* Na primer: $\frac{7}{10}, \frac{-13}{100}, \frac{9}{1\,000}, \frac{523}{10}, \frac{-5\,029}{104}, \ldots$ su decimalni razlomci.

Uopšte, $\frac{c}{10^n}$, $c \in Z$, $n \in N$ jeste decimalan razlomak.

2. 1) Neka je $\frac{a}{b}$ proizvoljan razlomak. Pitanje koje se odmah postavlja jeste: Postoji li ekvivalentan decimalan razlomak, tj. postoji li razlomak $\frac{c}{10^n}$ takav da je

$$\frac{a}{b} \cong \frac{c}{10^n}?$$

U nekim slučajevima je odgovor potvrdan. Ali samo u nekim, na primer: $\frac{21}{60} \cong \frac{7}{20} \cong \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} \cong \frac{35}{100}$, tj. $\frac{21}{60} \cong \frac{35}{100}$; $\frac{7}{60} \cong \frac{35}{300}$, $\frac{7}{60} \cong \frac{70}{600}$, ali ni 300 ni 600 nisu dekadne (nego višestruko dekadne) jedinice $(300=100 \cdot 3,\ 600=100 \cdot 6)$, pa $\frac{35}{300}$ i $\frac{70}{600}$ nisu decimalni razlomci, tj. $\frac{7}{60}$ nije decimalan razlomak.

Otuda *problem*: *Naći nužan i dovoljan uslov koji treba da zadovoljava svedeni razlomak* $\frac{p}{q}$ *pa da postoji decimalan razlomak* $\frac{c}{10^n}$ *takav da je* $\frac{p}{q} \cong \frac{c}{10^n}$.

2) (1) Dopustimo prvo da je $\frac{p}{q} \cong \frac{c}{10^n}$.

Na primer: $\frac{3}{20} \cong \frac{15}{100}$.

Tada je § 20.2, teor. 2 i t. **4**, 2:

$15 = 3 \cdot 5, \quad 100 = 20 \cdot 5.$

A to znači da $20 \mid 100$, to jest, § 18.5, da 20 sadrži samo one proste činioce koje sadrži 100, tj. (t. **1**, 2):

$20 = 2^2 \cdot 5.$

Uopšte $\frac{p}{q} \cong \frac{c}{10^n}$.

$c = mp, \quad 10^n = mq.$

A to znači da $q \mid 10^n$ (q deli 10^n), tj. q sadrži *samo* one proste činioce koje sadrži 10^n, tj. (tačka **1**, 2):

$q = 2^h \cdot 5^k, \quad h, k \in N.$

Dakle, ako postoji decimalan razlomak $\frac{c}{10^n}$ ekvivalentan svedenom razlomku $\frac{p}{q}$, onda su činioci imenioca q samo 2 i 5.

(2) Neka je *obrnuto* svedeni razlomak $\frac{p}{q}$ takav da su činioci imenioca q samo 2 i 5, tj. neka je: $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k}$, $h, k \in N$.

Tada su moguća tri slučaja:

Prvi slučaj: $h < k$

Na primer $\frac{7}{250} = \frac{7}{2 \cdot 5^3}$.

Pomnožimo (§ 20.2, teor. 1) brojilac i imenilac brojem 2^2, pa je

$$\frac{7}{250} \cong \frac{7 \cdot 2^2}{2 \cdot 5^3 \cdot 2^2} = \frac{28}{10^3}.$$

Uopšte $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k}$, $h < k$.

Pomnožimo (§ 20.2, teor. 1) brojilac i imenilac brojem 2^{k-h}, pa je

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k} \cong \frac{p \cdot 2^{k-h}}{2^h\, 5^k \cdot 2^{k-h}} = \frac{p \cdot 2^{k-h}}{2^k \cdot 5^k} = \frac{c}{10^n},$$

$$p \cdot 2^{k-h} = c, \quad k = n.$$

Drugi slučaj: $k = h$. Tada je dati svedeni razlomak decimalan razlomak.

Zaista: $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^h} = \frac{c}{10^n}$, gde je, očigledno, $p = c$, $h = k = n$.

Treći slučaj: $h > k$.

Na primer $\frac{13}{200} = \frac{13}{2^3 \cdot 5^2}$.

Pomnožimo brojilac i imenilac brojem 5, pa je:

$$\frac{13}{200} = \frac{13}{2^3 \cdot 5^2} \cong \frac{13 \cdot 5}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{65}{10^3}.$$

Uopšte, $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k}$, $h > k$.

Pomnožimo brojilac i imenilac brojem 5^{h-k}, pa je:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k} \cong \frac{p \cdot 5^{h-k}}{2^h \cdot 5^k \cdot 5^{h-k}} = \frac{p \cdot 5^{h-k}}{2^h \cdot 5^h} = \frac{c}{10^n},$$

$$p \cdot 5^{h-k} = c, \quad h = n.$$

Dakle, kad god je svedeni razlomak $\frac{p}{q}$ takav da je $\frac{p}{q} = \frac{p}{2^h \cdot 5^k}$, uvek postoji decimalan razlomak $\frac{c}{10^n}$ takav da je $\frac{p}{q} \cong \frac{c}{10^n}$. Pod (1) je dokazano da je uslov $q = 2^h 5^k$ nužan, a pod (2) je dokazano da je on i dovoljan. Otuda:

Teorema 1. — *Nužan i dovoljan uslov da postoji decimalan razlomak ekvivalentan datom svedenom razlomku $\frac{p}{q}$ jeste da su prosti činioci imenioca samo brojevi 2 i 5.*

Simbolima izraženo: $\frac{p}{q} \cong \frac{c}{10^n} \Leftrightarrow q = 2^h \cdot 5^k, \ h, k, n \in N.$

3. 1) Množina, klasa ekvivalentnih razlomaka:

$$\left\{\frac{p}{q}, \frac{2p}{2q}, \frac{3p}{3q}, \ldots, \frac{kp}{kq}, \ldots\right\}$$

zove se (glava XX) *racionalni broj*. Ako ona sadrži jedan decimalan razlomak $\frac{c}{10^n}$, taj se broj (ta klasa) zove *decimalni broj*. Znači:

Ako je jedan od elemenata (članova) racionalnog broja decimalan razlomak, racionalni broj zove se decimalni broj.

2) Razumljivo je da ako jedan racionalan broj sadrži decimalni razlomak $\frac{c}{10^n}$, on sadrži sve decimalne razlomke oblika $\frac{c \cdot 10^m}{10^{n+m}}$.

3) Isto tako, razumljivo je da su svi celi (pa prema tome i svi prirodni) brojevi decimalni brojevi, jer, pre svega, 1 je dekadna jedinica (t. **1**, 1), a zatim, svaki ceo broj a može se napisati u obliku decimalnog razlomka $\frac{a \cdot 10^m}{10^m}$.

Na primer: $37 \cong \frac{370}{10} \cong \frac{3\,700}{100} \cong \ldots$

Otuda inkluzija (§ 1.7): $N \subset Z \subset D \subset Q$,

gde N, Z, D i Q označavaju respektivno množinu prirodnih brojeva, množinu celih, množinu decimalnih, množinu racionalnih brojeva.

4. Napišite ekvivalentni decimalni razlomak: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{11}{25}$; $\frac{9}{32}$; $\frac{3}{125}$; $\frac{13}{80}$; $\frac{9}{120}$; $\frac{17}{400}$; $\frac{28}{625}$; $\frac{301}{2\,500}$; $\frac{21}{2\,400}$.

5. Napišite ekvivalentni decimalni razlomak u slučaju kad on postoji: $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{14}$; $\frac{11}{50}$; $\frac{17}{22}$; $\frac{97}{160}$; $\frac{97}{60}$; $\frac{97}{280}$.

§ 21.2. PISANJE (I ČITANJE) DECIMALNIH BROJEVA

1. 1) Prirodni, pa dakle i celi brojevi pišu se (§ 15.2) u obliku polinoma i na pozicioni način. Pri tome intervenišu, u svakom sistemu brojanja,

osnova $x = 10$,   *njeni stepeni* $x^n = 10^n$

i cifre koje se uzimaju iz množine $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9, \alpha, \beta, \ldots\}$.

Na primer: $y=3x^5+x^4+4x^2+2x+4$, $\quad y=310424$,

pa ako je:

$$x=7,\ \text{onda je}\ y=3\cdot 7^5+7^4+0\cdot 7^3+4\cdot 7^2+2\cdot 7+4=310424_7,$$
$$x=5,\ \text{onda je}\ y=3\cdot 5^5+5^4+0\cdot 5^3+4\cdot 5^2+2\cdot 5+4=310424_5,$$
$$x=10,\ \text{onda je}\ y=3\cdot 10^5+10^4+4\cdot 10^2+2\cdot 10+4=310424_{10}.$$

2) Za pisanje decimalnih brojeva, u stvari decimalnih razlomaka (predstavnika decimalnih brojeva), koristimo (u svakom sistemu brojanja) razlomak $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$, njegove stepene $\left(\frac{1}{x}\right)^n=\frac{1}{10^n}$ [§ 20.3, t. **5**] i, razumljivo, cifre.

Razlomak $\frac{1}{x}$ i svi njegovi stepeni

$$\left[\text{tj. } \left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}=\frac{1}{10^2},\ \left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{1}{x^3}=\frac{1}{10^3},\ \ldots,\ \frac{1}{x^n}\right]$$

zovu se *decimalne jedinice*, i to:

$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$ je decimalna jedinica prvog reda;

$\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$ je decimalna jedinica drugog reda;

$\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}$ je decimalna jedinica trećeg reda;

i tako dalje.

Svaka decimalna jedinica je 10 puta manja od decimalne jedinice (neposredno) prethodnog (višeg) reda:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(\frac{1}{x}\right)^2:x=\frac{1}{x^2}:x=\frac{1}{x^3},\quad \text{tj.}\ \frac{1}{1\,000}=\frac{1}{100}:10;$$
$$\frac{1}{10^5}=\frac{1}{10^4}:10;\quad \frac{1}{10^7}:10=\frac{1}{10^8}=\left(\frac{1}{10}\right)^8.$$

Kako je i svaka dekadna jedinica 10 puta manja od prethodnog višeg reda, usvojeno je da se i decimalne jedinice pišu na pozicioni način tačno kao dekadne.

Na primer, broj: $\quad 10^4+10^3+10^2+10+1$

piše se na pozicioni način ovako: $\quad 11111$,

pa 1 na četvrtom mestu zdesna označava broj $10^3=1000$, 1 na trećem mestu (zdesna) označava $10^2=100=1000:10$ (tj. 10 puta manji broj nego 1 na četvrtom mestu) i tako dalje;

broj: $$10^4+10^3+10^2+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}$$

piše se po istom principu, tj. decimalna jedinica $\frac{1}{10}$ piše se desno od dekadne jedinice 1, decimalna jedinica $\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$ piše se desno od jedinice $\frac{1}{10}$ (jer je 10

puta manja od $\frac{1}{10}$), decimalna jedinica trećeg reda $\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}$ piše se desno od decimalne jedinice drugog reda, jer je, . . . , itd. A da bi se znalo gde se završava pisanje dekadnih jedinica, ili, što je isto, gde počinje pisanje decimalnih jedinica, stavlja se zarez (*decimalni zarez*) između dekadne jedinice $1\ (=10^0)$ i decimalne jedinice prvog reda $\frac{1}{10}$. Dakle:

$$10^4+10^3+10^2+10+1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3=11\ 111{,}111$$

ili $$10\,000+1\,000+100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1\,000}=11\,111,\ 111.$$

Iz toga sledi da se (same) decimalne jedinice moraju pisati ovako:

$\frac{1}{10}=0{,}1$ [jer je broj dekadnih jedinica 0];

$\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$ [šta pokazuje 0 posle (levo od) zareza?];

$\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1\,000}=0{,}001$ [Zašto?].

Uopšte: $$\frac{1}{10^n}=\frac{1}{\underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{nula}}}=0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{nula}}1.$$

3) Brojevi $30=3\cdot 10$, $700=7\cdot 10^2$, . . . , $5000\ldots0=5\cdot 10^n$, . . . su višestruke dekadne jedinice, pa, na primer, u 7308, cifra 7 označava broj 7000 $(=7\cdot 10^3)$, cifra 3 označava broj 300, itd.

Brojevi:

$$\frac{2}{10}=2\cdot\frac{1}{10},\ \frac{9}{100}=9\cdot\frac{1}{100}=9\left(\frac{1}{10}\right)^2,\ \frac{7}{1\,000}=7\left(\frac{1}{10^3}\right),\ \ldots,\ \frac{5}{10^n},\ \ldots$$

su višestruke decimalne jedinice i, na pozicioni način, pišu se analogno pisanju višestrukih dekadnih jedinica, tj. svaka višestruka decimalna jedinica piše se na mestu odgovarajuće decimalne jedinice. Dakle:

$$\frac{2}{10}=0{,}2;\ \frac{9}{100}=9\left(\frac{1}{10}\right)^2=0{,}09,\ \ldots,\ \frac{7}{10^n}=0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ \text{nula}}7.$$

Prema tome je, na primer:

(1) $2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+3\cdot 10+6+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{9}{1\,000}=2\,736{,}419;$

(2) $5\cdot 10^4+2\cdot 10+8+\frac{7}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{6}{10^4}=50\,028{,}7306;$

(3) $\frac{a}{b}=\frac{29\,537}{1\,000}=\frac{2\cdot 10^4+9\cdot 10^3+5\cdot 10^2+3\cdot 10+7}{1\,000}=$

$=2\cdot 10+9+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}+\frac{7}{1\,000}$ [§ 14.2, t. **15,** i t. **12**]

$=29{,}537;$

$$(4)\quad \frac{c}{d}=\frac{29\,308}{10^4}=\frac{2^4\cdot 10^4+9\cdot 10^3+3\cdot 10^2+8}{10\,000}$$

$$=2+\frac{9}{10}+\frac{3}{100}+\frac{8}{10^4}=2{,}9308;$$

$$(5)\quad \frac{e}{f}=\frac{57}{10^4}=\frac{5\cdot 10+7}{10^4}=\frac{5}{10^3}+\frac{7}{10^4}=0{,}0057.$$

2. Napisan na pozicioni način decimalni broj se, dakle, sastoji iz dva „dela“: levi ili „celi deo“ (levo od decimalnog zareza) je prirodan, odnosno ceo broj; desni ili „decimalni deo“ i njegova „apsolutna vrednost“ (§ 19.7, t. **7**) su manji od 1.

Svaka cifra „decimalnog dela“ zove se *decimala*, i to: prva (odmah posle zareza), druga, treća, . . . decimala.

3. Decimalni broj se čita, na primer:

17,38=17 i 38 stotih (ne 17 „celih“!), ili češće: 17, zarez, 38;

0,056 = nula i 56 hiljaditih, ili češće: *nula, zarez, nula 56* (ne „nula celih“);

0,004=4 hiljadita ili: nula, zarez, dve nule, četiri;

5,7043=5, zarez, 7 hiljada četrdeset tri.

4. Svaki decimalan broj je racionalan broj, pa se može napisati u obliku razlomka. Na primer:

$$40{,}3=\frac{403}{10};\quad 2{,}031=\frac{2\,031}{1\,000};\quad 0{,}0007=\frac{7}{10^4};$$

$$0{,}56=\frac{56}{100}=\frac{14}{25};\quad 6{,}048=\frac{6\,048}{1\,000}=\frac{756}{125},\ \ldots$$

5. Dati razlomak napišite u obliku decimalnog razlomka i obrnuto (. . . u obliku svedenog razlomka):

$$\frac{17}{20};\ \frac{19}{400};\ 8{,}03;\ 0{,}534;\ \frac{97}{64};\ 62{,}005;\ 0{,}00004;$$

$$\frac{4}{125};\ 0{,}25;\ 0{,}75;\ \frac{6}{3\,125};\ 0{,}00055;\ 0{,}6225.$$

§ 21.3. EKVIVALENTNOST DECIMALNIH BROJEVA. UPOREĐIVANJE DECIMALNIH BROJEVA

1. 1) Uslov ekvivalentnosti dva decimalna razlomka $\frac{c}{10^n}$ i $\frac{c'}{10^m}$ izražava se ovako (§ 20.1):

$$\frac{c}{10^n}\cong\frac{c'}{10^m}\Leftrightarrow c\cdot 10^m=c'\cdot 10^n.$$

Pretpostavimo da je $m\geqslant n$ i podelimo obe strane jednakosti brojem 10^n:

$$c\cdot 10^{m-n}=c'.$$

Znači, brojilac i imenilac razlomka $\frac{c'}{10^m}$ možemo napisati ovako:

$$c'=c\cdot 10^{m-n},\qquad 10^m=10^n\cdot 10^{m-n},$$

odakle se vidi da se oni dobijaju množenjem brojioca i imenioca razlomka $\frac{c}{10^n}$ jednim istim brojem 10^{m-n}, što i mora biti prema teoremama 1 i 2 prethodne (XX) glave.

Obrnuto, pomnožimo brojilac i imenilac decimalnog broja $\frac{c}{10^n}$ proizvoljnom dekadnom jedinicom 10^p $(p\in N)\setminus\{0,\ 1\}$. Dobijamo (teoreme 1 i 2):

$$\frac{c}{10^n}\cong\frac{c\cdot 10^p}{10^n\cdot 10^p}.\ \text{Otuda:}$$

Teorema 2. — *Dva decimalna razlomka su ekvivalentna ako su brojilac i imenilac jednoga ekvimultiplumi brojioca i imenioca drugog, pri čemu je zajednički množilac dekadna jedinica (stepen broja 10).*

Na primer: $\frac{37}{100}\cong\frac{37\,000}{100\,000}$,

što se piše $0{,}37\cong 0{,}37000$, ili prostije $0{,}37=0{,}3700$;

$\frac{2\,019}{1\,000}\cong\frac{201\,900}{100\,000}$,

što se piše: $2{,}019\cong 2{,}01900$, ili prostije $2{,}019=\ldots$

Obrnuto: $0{,}2500=0{,}250=0{,}25$; $27{,}0804000=27{,}0804$.

2) Iz toga sledi:

(1) Decimalni broj se ne menja ako mu se dopišu ili izbrišu nule posle poslednje decimale koja nije nula.

(2) Najprostiji (reducirani) decimalni broj dobija se brisanjem svih nula posle poslednje decimale koja nije nula; 0,401000 se, na primer, uprošćava ovako: 0,401.

(3) Više decimalnih brojeva svodi se na zajednički imenilac tako što se dopisivanjem nula učini da svi imaju podjednako decimala. Na primer:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{7}{1\,000}=0{,}007\\[2ex] \dfrac{53}{10}=5{,}3\\[2ex] \dfrac{249}{100}=2{,}49\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{posle svođenja}\\ \text{na zajednički}\\ \text{imenilac izgledaju}\end{array}\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{7}{1\,000}=0{,}007\\[2ex] \dfrac{5\,300}{1\,000}=5{,}300\\[2ex] \dfrac{2\,430}{1\,000}=2{,}490\end{array}\right\}$$

2. 1) Od dva nenegativna decimalna broja veći je onaj čiji je „celi deo“ veći.

2) Ako su „celi delovi“ jednaki, dati decimalni brojevi se napišu tako da njihovi decimalni zarezi budu jedan ispod drugog, a zatim se upoređuju odgovara-

juće decimale (istog reda). Prvi par takvih odgovarajućih i različitih decimala određuje i koji je od datih brojeva veći. Na primer, ako su dati brojevi 276,3489 i 276,352, onda je:

$$\begin{array}{l} 2\ 7\ 6,\ 3\ 4\ 8\ 9 \\ 2\ 7\ 6,\ 3\ 5\ 2. \end{array}$$

I kako je $4<5$, to je $276{,}3489<276{,}352$.

3) Uporedite brojeve: 7,23 i 5,89; 0,28356 i 0,28177; 0,09 i 0,1.

§ 21.4. SABIRANJE, ODUZIMANJE, MNOŽENJE I DELJENJE DECIMALNIH BROJEVA

1. 1) Dva decimalna broja se uvek mogu napisati kao dva razlomka jednakih imenilaca (§ 21.3, t. **1**, 3): $\frac{a}{10^n}$ i $\frac{b}{10^n}$. A tada je (§ 20.3, t. **2**):

$$\frac{a}{10^n}\pm\frac{b}{10^n}=\frac{a\pm b}{10^n}.$$

Otuda:

Teorema 3. — *Zbir dva decimalna broja* $\frac{a}{10^n}$ *i* $\frac{b}{10^n}$ *jeste decimalni broj* $\frac{a+b}{10^n}$, *a njegova razlika je decimalni broj* $\frac{a-b}{10^n}$.

U množini nenegativnih brojeva oduzimanje je moguće samo ako je $a\geqslant b$. Na primer:

$$(1)\quad 7{,}43+1{,}8=\frac{743}{100}+\frac{180}{100}=\frac{923}{100}=9{,}23.$$

$$(2)\quad 7{,}43-1{,}8=\frac{743}{100}-\frac{180}{100}=\frac{563}{100}=5{,}63.$$

U praksi se najčešće piše:

$$\begin{array}{r} 7{,}43 \\ +\underline{1{,}8} \\ 9{,}23 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 7{,}43 \\ -\underline{1{,}8} \\ 5{,}63 \end{array}$$

jer se 0 posle 8 (desetih u 1,8) može ali ne mora pisati.

2) Opisani postupak se proširuje na zbir od ma koliko sabiraka:

$$\frac{a}{10^n}+\frac{b}{10^n}+\frac{c}{10^n}+\frac{d}{10^n}=\frac{a+b+c+d}{10^n},$$

na aritmetički polinom (§ 12.3) i ma koji zbir pozitivnih i negativnih brojeva:

$$\frac{a}{10^n}-\frac{b}{10^n}-\frac{c}{10^n}+\frac{d}{10^n}-\frac{e}{10^n}=\frac{a-b-c+d-e}{10^n}.$$

2. Neka su $\frac{a}{10^n}$ i $\frac{b}{10^p}$ dva decimalna broja. Njihov proizvod je:

$$\frac{a}{10^n}\cdot\frac{b}{10^p}=\frac{ab}{10^{n+p}}.$$

Otuda:

Teorema 4. — *Proizvod dva decimalna broja* $\frac{a}{10^n}$ *i* $\frac{b}{10^p}$ *je decimalni broj* $\frac{ab}{10^{n+p}}$.

Npr.: $$(0{,}47)\cdot(5{,}8)=\left(\frac{47}{100}\right)\left(\frac{58}{10}\right)=\frac{2\,726}{1\,000}=2{,}726.$$

U praksi se računanje raspoređuje ovako:

$$\begin{array}{r} 0{,}47 \\ \times\underline{5{,}8} \\ 376 \\ \underline{235} \\ 2{,}726 \end{array}$$

Prema prethodnoj formuli, broj decimala proizvoda mora biti $n+p$ (n=broj decimala jednog činioca, p=broj decimala drugog činioca).

Specijalni slučajevi:

(1) $8{,}253\cdot 100=825{,}3$; (2) $8{,}253\cdot 0{,}01=0{,}0853$;

(3) $0{,}01\cdot 0{,}001=0{,}00001$.

Oni se izvode iz opšteg slučaja, ali se svode na „pomeranje" decimalnog zareza u čemu treba uvek biti siguran.

3. Neka je $x=\frac{a}{10^n}$, $y=\frac{b}{10^p}$. Prema § 20.6 je:

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{10^n}:\frac{b}{10^p}=\frac{a}{10^n}\cdot\frac{10^p}{b}=\frac{a\cdot 10^p}{b\cdot 10^n},$$

pa količnik može biti:

(1) $\frac{a\cdot 10^{p-n}}{b}$ [kad je $p>n$];

(2) $\frac{a}{b}$ [kad je $p=n$];

(3) $\frac{a}{b\cdot 10^{n-p}}$ [kad je $p<n$].

U slučajevima (1) i (2) količnici nisu decimalni brojevi. Ali se to može dogoditi i u slučaju (3): kad a sadrži činioce 2^{n-p} i 5^{n-p}. Prema tome, količnik nije uvek decimalan broj. Otuda:

Teorema 5. — *Količnik (rezultat deljenja) dva decimalna broja je racionalan, uopšte nedecimalan, broj* $\frac{a\cdot 10^p}{b\cdot 10^n}$.

Na primer:

$$(1)\quad 1{,}76:0{,}3=\frac{176}{100}:\frac{3}{10}=\frac{176}{100}\cdot\frac{10}{3}=\frac{176}{30}\qquad \text{[nedec. racionalni broj];}$$

(2) $18:0{,}06=18:\frac{6}{100}=\frac{1\,800}{6}=300$ [ceo broj];

(3) $0{,}75:0{,}6=\frac{75}{100}:\frac{6}{10}=\frac{75\cdot 10}{6\cdot 100}=\frac{25}{20}=\frac{125}{100}=1{,}25$;

(4) $2{,}47:0{,}01=247$ [Zašto?];

(5) $0{,}1:0{,}001=100$ [Zašto?].

4. Proverite, ili izračunajte:

(1) $1{,}732+0{,}9864=2{,}7184$; (2) $8{,}46-0{,}846=7{,}614$;

(3) $43{,}1-72=-28{,}9$; (4) $(0{,}101)\,(0{,}5)=0{,}0505$;

(5) $(0{,}101)\,(0{,}0005)\,(0{,}0000002)=$

(6) $2{,}7:0{,}288=9{,}375$; (7) $1{,}2:3{,}81=$

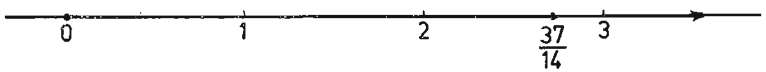
§ 21.5. NEDECIMALNI RACIONALNI BROJEVI

1. Ako je $\frac{p}{q}$ sveden razlomak i ako q sadrži i druge činioce osim 2 i 5, racionalni broj $\left(\frac{p}{q}\right)$ nije decimalan broj (§ 21.1) pa se ne može napisati na pozicioni način (pomoću decimala). On se može samo približno izraziti (aproksimirati) nizom decimalnih brojeva. Pokažimo to na primerima (što je pristupačnije):

1) Racionalni broj $\left(\frac{37}{14}\right)$ nije decimalni broj (jer je $14=2\cdot 7$). Mi ga možemo (§ 20.5, t. **4** i § 14.2, t. **15**) napisati ovako: $\frac{28+9}{14}=2+\frac{9}{14}$.

To pokazuje da je: $2<\frac{37}{14}<3$

i da mu odgovara označena tačka prave brojeva:



Slika 21.1

Ali, brojevi 2 i 3 su široke granice i odgovarajuća tačka je približno označena u intervalu $[2; 3]$. (Možda je ona blizu tačke 2, ili blizu tačke 3 ili ma koje druge tačke tog intervala.) Tačnije ćemo je odrediti ako odredimo drugi prirodni broj a takav da je:

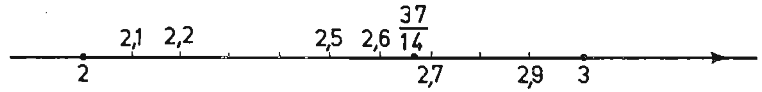
$$\frac{a}{10}<\frac{37}{14}<\frac{a+1}{10}.$$

Broj $\frac{a}{10}$ je decimalni broj čiji je imenilac 10. Ako uspemo da odredimo prirodni broj a, imaćemo za granice decimalne brojeve sa jednom decimalom,

a to su uže granice (tj. tačnije ćemo znati broj $\frac{37}{14}$ i tačnije ćemo odrediti tačku prave brojeva koja mu odgovara). Broj a određujemo iz date nejednakosti:

$$\frac{a}{10}<\frac{37}{14}\Rightarrow 14a<370\Rightarrow a<\frac{370}{14},\quad a<\frac{364+6}{14},\quad a<26+\frac{6}{14}.$$

Kako je $26+\frac{6}{14}<27$, to je: $\frac{26}{10}<\frac{37}{14}<\frac{27}{10}$, tj. $2{,}6<\frac{37}{14}<2{,}7$, pa je:



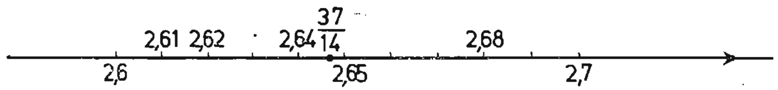
Slika 21.2

Granice su uže i odgovarajuća tačka je tačnije određena, ali opet daleko od toga da je sasvim tačno određena. Zato odredimo novi prirodni broj a' tako da je:

$$\frac{a'}{100}<\frac{37}{14}<\frac{a'+1}{100}.$$

Imamo: $\frac{a'}{100}<\frac{37}{14}\Rightarrow 14a'<3\,700\Rightarrow a'<264+\frac{4}{14}$,

to jest $\frac{264}{100}<\frac{37}{14}<\frac{265}{100}$, ili $2{,}64<\frac{37}{14}<2{,}65$, pa je:



Slika 21.3

(što pokazuje, a i iz $2{,}64<\frac{37}{14}<2{,}65$ se vidi, da smo na sl. 21.2 dosta pogrešili, jer je tačka bliža tački 2,6 nego tački 2,7).

Ako tako (takvo sužavanje granica) produžimo, dobićemo:

$$\frac{2642}{1000}<\frac{37}{14}<\frac{2643}{1000}\quad \text{ili}\quad 2{,}642<\frac{37}{14}<2{,}643;$$

$$\frac{26428}{10^4}<\frac{37}{14}<\frac{26429}{10^4}\quad \text{ili}\quad 2{,}6428<\frac{37}{14}<2{,}6429;$$

$$\frac{264285}{10^5}<\frac{37}{14}<\frac{264286}{10^5}\quad \text{ili}\quad 2{,}64285<\frac{37}{14}<2{,}64286;$$

. . . .

Do istih rezultata dolazimo i deljenjem broja 37 brojem 14, naime: $37:14=2$ i ostatak 9 jedinica; $9\,\text{j}=90$ desetih, 90 desetih$:14=6$ desetih i ostatak 6 desetih; 6 desetih$=60$ stotih, 60 stotih$:14=4$ stota i ostatak 4 stota; itd.

Napišimo uporedno prethodne rezultate i to deljenje:

$$2<\frac{37}{14}<3$$
$$2{,}6<\frac{37}{14}<2{,}7$$
$$2{,}64<\frac{37}{14}<2{,}65$$
$$2{,}642<\frac{37}{14}<2{,}643$$
$$2{,}6428<\frac{37}{14}<2{,}6429$$
$$2{,}64285<\frac{37}{14}<2{,}64286$$
$$2{,}642857<\frac{37}{14}<2{,}642858$$
$$2{,}6428571<\frac{37}{14}<2{,}6428572$$
$$2{,}64285714<\frac{37}{14}<2{,}64285715,$$

i tako dalje.

$$\begin{array}{l|l} 37 & 14 \\ \hline -28 & 2{,}6428571428\ldots \\ 90 & \\ -84 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 120 & \\ 80 & \\ 100 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 120 & \\ 8 & \end{array}$$

To pokazuje da umesto $\frac{37}{14}$ možemo uzeti 2,6 ili 2,7, ali to su *približni* decimalni brojevi kojima izražavamo $\frac{37}{14}$ i zato pišemo (§ 20.7):

$$\frac{37}{14}\approx 2{,}6, \text{ a čitamo } \frac{37}{14} \text{ je približno } 2{,}6,$$

ili

$$\frac{37}{14}\approx 2{,}7, \text{ a čitamo } \frac{37}{14} \text{ je približno } 2{,}7.$$

U prvom slučaju je racionalni broj $\left(\frac{37}{14}\right)$ izražen *približno manjim decimalnim brojem 2,6 sa tačnošću do* $\frac{1}{10}$ (do 0,1, do 1 desetog), jer je razlika $\frac{37}{14}-2{,}6<\frac{1}{10}$ (što se vidi iz $\frac{6}{10}:14=\frac{6}{10\cdot 14}\cong\frac{3}{70}<\frac{1}{10}$, a i sa crteža 21.2, koji je, razumljivo, napravljen na osnovu računskih rezultata).

U drugom slučaju je racionalni broj $\frac{37}{14}$ izražen *približno većim decimalnim brojem sa tačnošću do* $\frac{1}{10}$ *(do 1 desetog)*, jer je razlika $2{,}7-\frac{37}{14}<\frac{1}{10}$. (Pokažite to.)

Ali, napisane nejednakosti (i deljenje) pokazuju da možemo napisati i:

$$\frac{37}{14}\approx 2{,}64 \quad \left(\frac{37}{14} \text{ je približno } 2{,}64\right)$$

ili:

$$\frac{37}{14}\approx 2{,}65 \quad \left(\frac{37}{14} \text{ je približno } 2{,}65\right).$$

U slučaju $\frac{37}{14}>2{,}64$ je racionalni broj $\left(\frac{37}{14}\right)$ izražen približno *manjim decimalnim brojem 2,64 sa tačnošću do* $\frac{1}{100}$ *(do 1 stotog)*, jer je $\frac{4}{100\cdot 14}\cong\frac{2}{700}<\frac{1}{100}$. Slično u slučaju $\frac{37}{14}<2{,}65$.

I tako dalje. Racionalni broj $\left(\frac{37}{14}\right)$ možemo izraziti *približnim decimalnim brojem sa kojom god hoćemo tačnošću*: $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, ... $\frac{1}{10^n}$.

Uopšte, svaki nedecimalni racionalni broj $\left(\frac{a}{b}\right)$ može se izraziti približnim decimalnim brojem sa kojom god hoćemo *tačnošću*:

$$\frac{a}{b}\approx c,\ d_1 \qquad \left(\text{sa tačnošću do } \frac{1}{10}=0{,}1\right);$$
$$\frac{a}{b}\approx c,\ d_1d_2 \qquad \left(\text{sa tačnošću do } \frac{1}{100}=0{,}01\right);$$
$$\frac{a}{b}\approx c,\ d_1d_2d_3 \qquad \left(\text{sa tačnošću do } \frac{1}{1\,000}\right);$$
$$\ldots\ldots$$

Ukoliko je decimalna jedinica $\frac{1}{10^n}$ manja (tj. broj *n* veći), utoliko je tačnost veća, jer je razlika:

$$\frac{a}{b}-c,\ d_1d_2d_3\ldots, \text{ ili } c,\ d_1d_2d_3\ldots-\frac{a}{b}$$

manja od $\frac{1}{10^n}$. Ta se razlika zove *greška*.

Na primer: $\frac{37}{14}-2{,}64<\frac{1}{100}$, $\frac{37}{14}-2{,}642<\frac{1}{10^3}$,

a razlika $\frac{37}{14}-2{,}64$ ili $2{,}65-\frac{37}{14}$ je greška.

2) Nastaje pitanje: Koja od dva približna decimalna broja treba uzeti kad je tačnost data, manji ili veći?

Da li, npr., u slučaju $\frac{37}{14}$: 2,6 ili 2,7; 2,64 ili 2,65; 2,642 ili 2,643; ...?

Od dva približna broja sa istom tačnošću uzima se onaj koji proizvodi manju grešku. Ali, izračunavanje greške (u stvari dve greške) je zamoran posao i, što je važnije, podložan greškama koje se mogu potkrasti pri samom računanju.

Zato se greške (pri uzimanju približno većeg i približno manjeg decimalnog broja) ne izračunavaju, nego se ocenjuju. Navedeni primer pokazuje kako se to vrši. Naime:

Kad se izračuna da je $2<\frac{37}{14}<3$, tj. kad se izračuna da je „celi deo" decimalnog broja 2, dobija se ostatak 9, pa je $\frac{37}{14}=2+\frac{9}{14}$. Kako je $\frac{9}{14}>\frac{1}{2}$ $\left(\text{jer je } \frac{7}{14}=\frac{1}{2}\right)$, dati broj je bliži broju 3, on je veći od $2+\frac{1}{2}$ i zato je bolje, manja se greška pravi, ako se uzme $\frac{37}{14}\approx 3$.

Kad se izračuna da je $2{,}6<\frac{37}{14}<2{,}7$, u stvari kad se izračuna približni količnik 2,6, ostatak je 6 desetih, pa je $\frac{37}{14}=2{,}6+\frac{0{,}6}{14}$. Kako je $\frac{0{,}6}{14}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}$ (polovina desetog), tj. $\frac{6}{14}\cong\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$, broj $\frac{37}{14}$ je bliži broju 2,6 nego broju 2,7, pa je tačnije $\frac{37}{14}\approx 2{,}6$ nego $\frac{37}{14}\approx 2{,}7$. To se vidi i iz druge decimale: ona je $2<5$.

Kad se izračuna približni količnik 2,64, ostatak je (vidi „izvršeno" deljenje) 4 stota, pa je $\left(\frac{37}{14}\right)=2{,}64+\frac{0{,}04}{14}$. Kako je $\frac{0{,}04}{14}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}$ $\left(\text{tj. } \frac{2}{7}<\frac{1}{2}\right)$, broj $\frac{37}{14}$ je bliži broju 2,64 nego broju 2,65 (na sl. 21.3 smo opet pogrešili). To se vidi i iz treće decimale: $2<5$.

Tako se može rasuđivati i dalje: Kad se dobije približni količnik 2,642, ostatak $0{,}008>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1000}$, pa je $\frac{37}{14}$ bliži broju 2,643 nego broju 2,642. Sledeća decimala mora biti veća od 5 $\left(\text{jer je } \frac{8}{14}>\frac{1}{2}\right)$.

Prema tome, možemo iskazati ovo pravilo za određivanje približnog decimalnog broja datog racionalnog broja $\left(\frac{p}{q}\right)$:

Ako je poslednji ostatak deljenja (ostatak na kome se zadržavamo) *manji od polovine delioca (imenioca), izračunati decimalni broj je približni količnik deljenja, tj. uzimamo taj približno manji decimalni broj umesto datog racionalnog broja. Ako je ostatak veći od polovine delioca (imenioca), uzimamo približno veći decimalni broj, tj. poslednju izračunatu decimalu povećavamo za 1. Ako je ostatak jednak polovini delioca, može se uzeti približno veći ili približno manji decimalni broj* („ista" se greška pravi).

Ili, što je isto* *izračuna se i sledeća decimala pa: ako je ona manja od 5, prethodna decimala se ne menja, tj. uzima se decimalni broj čija je poslednja decimala pretposlednja izračunata; ako je ona veća od 5, prethodna decimala se poveća za 1; ako je sledeća decimala 5, može se proizvoljno uzeti približno manji ili približno veći decimalni broj (izračunati količnik)***.

Na primer: $\frac{37}{14}=2{,}6428571\ldots,$

gde tri tačke označavaju da možemo izračunati koliko hoćemo decimala.

* Ali se primenjuje mehanički.

** U ovom, trećem slučaju može se voditi računa o tome da li je poslednja decimala na parnom ili neparnom mestu, ali je za praksu dovoljno ono što je rečeno.

Umesto toga možemo napisati:

	$\frac{37}{14}\approx 2{,}6$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10}=0{,}1$);
ili	$\frac{37}{14}\approx 2{,}64$	(sa tačnošću do $\frac{1}{100}=0{,}01$);
ili	$\frac{37}{14}\approx 2{,}643$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10^3}=0{,}001$);
ili	$\frac{37}{14}\approx 2{,}6429$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10^4}=0{,}0001$);
	. . . .	
ili	$\frac{37}{14}\approx 2{,}642857$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10^6}=0{,}000001$);
	. . . .	

Ili, na primer:

$\frac{219}{109}\approx 2{,}0$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10}$);
$\frac{219}{109}\approx 2{,}00$	(sa tačnošću do $\frac{1}{100}$);
$\frac{219}{109}\approx 2{,}009$	(sa tačnošću do $\frac{1}{1000}$);
$\frac{219}{109}\approx 2{,}0091$	(sa tačnošću do $\frac{1}{10^4}$);
. . . .	

Otuda, preciznija formulacija pravila:

Ako se želi približni decimalni broj racionalnog nedecimalnog broja $\left(\frac{p}{q}\right)$ *sa tačnošću do* $\frac{1}{10^k}$, *onda se izračuna najmanje* $(k+1)$ *decimala i: ako je poslednja,* $(k+1)$ *po redu, decimala manja od 5, približni broj je izračunati broj sa k decimala; ako je poslednja,* $(k+1)$ *po redu, decimala veća od 5, približni broj se dobija tako što se k-ta decimala poveća za 1; ako je 5, k-ta decimala se uzima kako jeste ili se poveća za 1.*

3) Izračunajte približni decimalni broj racionalnog broja:

(1) $\frac{40}{19}$ sa tačnošću do: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^3}$ i $\frac{1}{10^4}$;

(2) $\frac{24}{37}$ sa tačnošću do: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$ i $\frac{1}{10^3}$;

(3) $\frac{77}{65}$ sa tačnošću do: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$ i $\frac{1}{10^4}$;

(4) $\frac{11}{35}$ sa tačnošću do: $\frac{1}{10^3}$ i $\frac{1}{10^5}$;

(5) $\frac{19}{11}$ sa tačnošću do: 1 i $\frac{1}{10^2}$;

(6) $\frac{7}{9}$ sa tačnošću do: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{1000}$;

(7) $\frac{17}{125}$ sa tačnošću do: 0,01 i 0,001;

(8) $\frac{13}{32}$ sa tačnošću do: 0,1, 0,01 i 0,00001.

2. 1) Iz svega prethodnog (ovog, § 21.1 i § 21.2) sledi:

(1) Ako imenilac (svedenog) racionalnog broja sadrži samo činioce 2 i 5 (jedan ili oba), on (taj racionalni broj) se može napisati na pozicioni način, jer je broj njegovih decimala konačan i zove se *decimalan broj*.

(2) Ako imenilac (svedenog) racionalnog broja sadrži i neke druge proste činioce (osim 2 i 5, ili 2 i 5 uopšte ne sadrži), on nije decimalan broj. Broj njegovih decimala je beskonačan i zato se nedecimalni racionalni brojevi zovu i *beskonačni decimalni brojevi*.

Ali (i to je karakteristično za svaki racionalan nedecimalan broj), njegove decimale (kojih ima beskonačno mnogo) ne slede jedna za drugom proizvoljno (bez „reda i poretka"), nego se, počev od jedne (decimale), određena *„grupa" decimala stalno ponavlja*. Lako je proveriti (deljenjem kako je već pokazano, primer $\frac{37}{14}$) da je, na primer:

(1) $\frac{1}{3}=0,333\ldots$ (stalno se ponavlja decimala 3);

(2) $\frac{23}{12}=1,91666\ldots$ (posle decimale 1 stalno se ponavlja 6);

(3) $\frac{24}{7}=3,428571\ 428571\ldots$ (stalno se ponavlja 428571);

Ako ste ranije (t. **1**, 3) tačno računali, dobili ste:

(4) $\frac{7}{9}=0,777\ldots$ (stalno se ponavlja decimala 7);

(5) $\frac{19}{11}=1,72\ 72\ 72\ldots$ (stalno se ponavlja 72);

(6) $\frac{24}{37}=0,648\ 648\ldots$ (stalno se ponavlja 648);

(7) $\frac{77}{65}=1,1846153\ 846153\ldots$ (stalno 846153);

(8) $\frac{40}{19}=2,105263157894736842\ldots$ (i tih 18 decimala se stalno ponavljaju).

To je razumljivo, jer broj različitih ostataka pri deljenju iznosi (§ 14.2) najviše onoliko koliko delilac smanjen za 1: ako je dat broj $\left(\frac{a}{b}\right)$ pa se deli broj a brojem b, onda različiti ostaci jesu: 1, 2, 3, . . . , $b-1$. Kako se deljenje u tim slučajevima ne može svršiti (tj. kako se nikad ne pojavljuje ostatak 0), mora se

ponovo pojaviti neki od ostataka koji je već bio. A tada se obavezno pojavljuje i ista decimala, posle čega se, usled ponavljanja ostataka, ponavljaju odgovarajuće decimale redom.

Na primer, pri izračunavanju približnih decimalnih brojeva broja:

$\frac{37}{14}$ ponavlja se ostatak 6, a zatim i svi sledeći ostaci do 6 i to se nastavlja neograničeno.

$\frac{24}{37}$ [tačka **1**, 3, primer (2)] ponavljaju se stalno ostaci 24, 18 i 32 i otuda se i decimale 6, 4 i 8 stalno ponavljaju istim redom.

$\frac{77}{65}$ [tačka **1**, 3, primer (3), tj. primer (7) ove tačke] ponavljaju se ostaci 55, 30, 40, 10, 35, 25.

I slično u svakom slučaju kad je broj $\left(\frac{a}{b}\right)$ takav da b sadrži i druge činioce osim 2 i 5.

2) Kažemo da sve decimale koje se ponavljaju čine *periodu* nedecimalnog (beskonačnog decimalnog) broja i zato se nedecimalni racionalni brojevi zovu i *periodični decimalni brojevi*.

Perioda se označava na razne načine, na primer: 3,18(724) ili $3,18\overline{724}$, ili $3,18\dot{7}2\dot{4}$.

3) Razlikujemo: *„čiste" periodične decimalne brojeve* [prethodni primeri (1), (3), (4), (5), (6), (8)] i „mešovite" periodične decimalne brojeve [primeri (2), (7) i $\frac{37}{14}$].

Očigledno je da ako imenilac b nedecimalnog racionalnog (periodičnog decimalnog) broja $\left(\frac{a}{b}\right)$ sadrži i činioce 2 i 5 (jedan ili oba), $\left(\frac{a}{b}\right)$ je „mešovit" periodičan decimalan broj. U protivnom on je „čist".

3. 1) (1) Dat je periodični decimalni broj 0,(6). Možemo li ga napisati u obliku svedenog broja $\left(\frac{a}{b}\right)$? Možemo.

Stavimo: $x=0,666\ldots$

$10x=6,666\ldots,$

to jest $10x=6+x$ (jer je $6,666\ldots=6+0,666\ldots$),

to jest $10x-x=6 \Rightarrow 9x=6 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$

Dakle: $0,666\ldots=\left(\frac{2}{3}\right)$, ili $0,(6)=\left(\frac{2}{3}\right)$.

(2) Dat je broj $4,\overline{35}$. Napišimo ga u obliku svedenog broja $\left(\frac{a}{b}\right)$.

„Celi deo" ne uzimamo u obzir jer je $4,\overline{35}=4+0,\overline{35}$, $\frac{a}{b}=n+\frac{p}{b}$.

$x=0,3535\ldots$

$100x=35,35\ldots=35+x$

$100x-x=35 \Rightarrow 99x=35 \Leftrightarrow x=\frac{35}{99}.$

Dakle: $4,\overline{35}=4+\frac{35}{99}=4\frac{35}{99}.$

(3) Napišimo broj 0,573(47) u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$x=0{,}573(47)$$

$$1000x=573(47),$$

tj. $$1000x=573+0{,}(47)=573+\frac{47}{99}$$

$$=573+\frac{47}{100-1}=\frac{573\,(100-1)+47}{99}$$

$$=\frac{57300-573+47}{99}=\frac{57347-573}{99}.$$

Dakle: $1000x=\frac{57347-573}{99}$, $\quad x=\frac{57347-573}{99000}$, $\quad 0{,}537(47)=\frac{53747-573}{99000}$.

2) Uopšte, napišimo $0,\ d_1d_1d_1\ldots=0,\ (d_1)$ u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)$.

(1) $$x=0,\ (d_1)$$

$$10x=d_1\,(d_1)=d_1+0,\ (d_1),$$

tj. $$10x=d_1+x\Rightarrow 9x=d_1\Leftrightarrow x=\frac{d_1}{9}.\ \text{Dakle: } 0,\ (d_1)=\left(\frac{d_1}{9}\right).$$

(2) Napišimo $0,\ (d_1d_2d_3)$ u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$x=0,\ (d_1d_2d_3)$$

$$1\,000x=d_1d_2d_3+x\Rightarrow 999x=d_1d_2d_3\Leftrightarrow x=\frac{d_1d_2d_3}{999}.$$

Dakle: $0,\ (d_1d_2d_3)=\frac{d_1d_2d_3}{999}$.

(3) Napišimo $0,\ d_1'd_2'\ldots d_k'\,(d_1d_2\ldots d_p)$ u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)$.

$$x=d_1'd_2'\ldots d_k'\,(d_1d_2\ldots d_p)$$

$$10^kx=d_1'd_2'\ldots d_k'+\frac{d_1d_2\ldots d_p}{\underbrace{99\ldots9}_{p\ \text{cifara}}}$$

$$=d_1'd_2'\ldots d_k'+\frac{d_1d_2\ldots d_p}{10^p-1}$$

$$=\frac{d_1'd_2'\ldots d_k'(10^p-1)+d_1d_2\ldots d_p}{10^p-1}$$

$$10^kx=\frac{d_1'd_2'\ldots d_k'd_1d_2\ldots d_p-d_1'd_2'\ldots d_k'}{99\ldots9}$$

$$x=\frac{d_1'd_2'\ldots d_k'd_1d_2\ldots d_p-d_1'd_2'\ldots d_k'}{\underbrace{999\ldots9}_{p\ \text{cifara}\ 9}\ \underbrace{00\ldots0}_{k\ \text{cifara}\ 0}}$$

3) Napišite u obliku $\left(\frac{a}{b}\right)$:

(1) $0{,}\overline{36}$; (2) $0{,}(234)$; (3) $0{,}2(51)$; (4) $0{,}5\dot{0}$; (5) $0{,}\overline{05}$;

(6) $2{,}2\dot{3}$; (7) $0{,}(285714)$; (8) $0{,}\dot{3}$; (9) $0{,}(105263157894736842)$.

4. Kako svaki racionalan broj može biti pozitivan ili negativan, sve što smo, u ovoj glavi (dovde), pokazali za aritmetičke racionalne brojeve važi i za pozitivne i negativne racionalne brojeve (jer znak + ili — ne utiče na pokazane osobine). Otuda:

Svaki racionalan broj $\left(\frac{a}{b}\right)$ $(a,\ b\in Z,\ b\neq0)$ *je ili decimalan (pa se može napisati konačnim brojem decimala) ili periodičan decimalan broj (čije se decimale, počev od jedne, periodično ponavljaju). Obrnuto, svaki decimalan i svaki periodičan decimalan broj (nenegativan ili negativan) može se napisati u obliku* $\left(\frac{a}{b}\right)$, $b\neq0$.

5. Nijedan racionalan nedecimalan (periodičan) broj ne može se napisati na pozicioni način, pomoću decimala, jer njih ima beskonačno mnogo. Ali, ukoliko više decimala napišemo, utoliko je taj (napisani) decimalni broj bliži datom. Zaista, videli smo da kad se napišu dve decimale, greška je manja od 0,01, kad se napišu tri decimale, greška je manja od 0,001, kad se napiše pet decimala, greška je manja od 0,00001 . . . , a ti brojevi (te decimalne jedinice) su sve manji i manji.

Na primer, svaki sledeći broj niza:

$$0{,}3;\quad 0{,}33;\quad 0{,}333;\quad 0{,}3333;\quad 0{,}33333;\ \ldots$$

je sve bliži broju $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Svaki sledeći broj niza:

$$1{,}3;\quad 1{,}31;\quad 1{,}318;\quad 1{,}3181;\quad 1{,}31818;\ \ldots$$

je sve bliži broju $\left(\frac{29}{22}\right)$.

Takvo približavanje nije ograničeno i mi se, tim postupkom, možemo približiti datom broju *koliko god hoćemo* [jer razlika između svakog sledećeg člana niza decimalnih brojeva i datog broja postaje sve manja (manja od $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, . . .)].

Zato se za niz brojeva 0,3; 0,33; 0,333; . . . kaže da *teži* broju $\left(\frac{1}{3}\right)$.

Isto tako, niz 1,3; 1,31; 1,318; . . . *teži* broju $\left(\frac{29}{22}\right)$.

To važi za svaki broj $\left(\frac{a}{b}\right)$ kad $b\neq2^h\cdot5^k$.

Kratak rezime §§ 21.1—21.5. — Količnik deljenja dva cela broja je: (1) konačan ili (2) beskonačan.

U slučaju (1) količnik se zove *decimalan broj* (u specijalnom slučaju, kad su sve njegove decimale nule, on se zove i *ceo broj*).

U slučaju (2) jedna ili više decimala se neograničeno ponavljaju i količnik se zove *periodičan decimalan broj*.

21.6. NERACIONALNI (IRACIONALNI) BROJEVI

1. 1) Dosad smo proširili množinu prirodnih brojeva u množinu celih brojeva, množinu celih brojeva u množinu racionalnih brojeva. Cilj svakog proširivanja bio je da se dobije numerička množina u kojoj se može vršiti određena operacija, ili, što je isto, u kojoj se izvesna vrsta jednačina može rešiti. Opšti oblik jednačina koje su nametnule uvođenje celih brojeva glasi $a+x=b$, a opšti oblik jednačina koje su nametnule uvođenje racionalnih brojeva je $ax=b$, ili, što je isto, $ax+b=0$. Te dve jednačine, koje se rešavaju pomoću sabiranja i množenja, morale su se posmatrati jer je (to smo više puta naglasili) samo ona množina numerička (množina čiji su elementi brojevi) u kojoj se mogu vršiti sabiranje i množenje.

Pojavljuju se jednačine u kojima intervenišu obe operacije (sabiranje i množenje), npr. $2x+11=5+x$; mi smo i takve („kombinovane") linearne jednačine rešavali (§ 20.8). Ali se, sasvim prirodno, pojavljuju i jednačine u kojima se operacija množenja ponavlja dva ili više puta, npr. $3xxx-5xx=2x+9$, što se (§ 13.5) kraće piše: $3x^3-5x^2=2x+9$.

Jednačine u kojima intervenišu samo sabiranje i množenje zovu se *algebarske jednačine*; one mogu biti prvog stepena, drugog stepena, . . . na primer:

$\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}=0$ je jedna jednačina prvog stepena (linearna jednačina);

$\frac{3}{7}x^2+5x-\frac{1}{2}=0$ je jedna jednačina drugog stepena;

$x^3-2x^2+\frac{1}{3}x-5=0$ je jedna jednačina trećeg stepena.

2) U množini racionalnih brojeva može se rešiti svaka jednačina prvog stepena, na primer:

$$\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}x=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{15}{4}.$$

I zaista: $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)+\frac{5}{2}=0$.

I mnoge jednačine drugog stepena se mogu rešiti u množini racionalnih brojeva, na primer:

(1) $x^2=9 \Leftrightarrow x=+3,\ x=-3$, jer je $3^2=9$ i $(-3)^2=9$.

(2) $x^2=\frac{25}{4} \Leftrightarrow x=+\frac{5}{2},\quad x=-\frac{5}{2}$, jer je . . .

(3) $x^2-\frac{64}{121}=0 \Rightarrow x^2=\frac{64}{121}$, pa je rešenje $\left\{\frac{8}{11},\ -\frac{8}{11}\right\}$.

Međutim, jednačina $x^2+9=0$, tj. $x^2=-9$ ne može se rešiti (u množini Q), jer kvadrat svakog nenegativnog i svakog negativnog broja je pozitivan broj, pa ne postoji racionalan broj q takav da je $q^2=-9$. Uopšte, $x^2+a=0$, kad je $a>0$, nema rešenja u množini racionalnih brojeva.

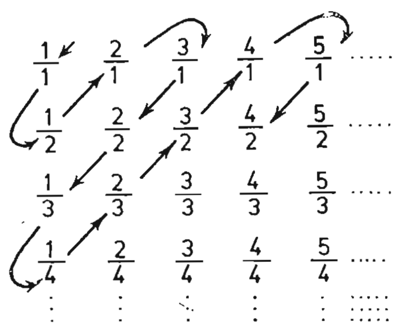
3) Da li jednačina $x^2-2=0$, tj. $x^2=2$, ima rešenja? Ona označava zahtev: Naći takav broj da kad se pomnoži samim sobom, proizvod bude 2. Kako je 2 nenegativan broj, ne postoje ranije navedene smetnje da se takav broj nađe. Međutim, očigledno je da taj broj nije ceo, jer je $1^2=1$, $2^2=4$ a $1<2<4$. Da li je taj broj racionalan u obliku $\frac{a}{b}$? Odgovor je teorema koja sledi.

2. 1) **Teorema 1.** — *Ako je $x^2=2$, x nije racionalan broj.*

Prethodna primedba. — Mogli bismo da poređamo racionalne brojeve tako da ne izostavimo nijedan (§ 20.1) i da probamo redom

$$\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\frac{1}{2};\ \frac{2}{1},\frac{2}{1};\ \frac{3}{1},\frac{3}{1};\ \ldots;\ \frac{3}{2},\frac{3}{2};\ \ldots\right).$$

Jer tu su svi, npr. broj $\frac{159}{357}$ nalazi se u 159-om stupcu i 357-om redu. (V. crtež.) Međutim, koliko bi nam vremena trebalo za to (čak i kad bismo „preskočili" prirodne brojeve $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{1}$, . . . za koje znamo da njihovi kvadrati nisu 2)?! Ne samo da pojedinac ne bi taj posao svršio za života, nego ga milioni i milijarde ljudi nikad ne bi završili. Zato se i služimo logičkim rasuđivanjem:



Dokaz. — Teorema tvrdi da ne postoji racionalni broj x čiji je kvadrat 2, ali mi ćemo pretpostaviti da postoji (pa ćemo videti do čega nas dovodi ta pretpostavka): Neka je, znači: $x=\frac{a}{b}$.

Tada je: $x^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}=2$,

to jest: $a^2=2b^2$.

Napišimo brojeve a, 2 i b u sistemu brojanja čija je osnova 3 (§ 15.5):

$$a=(a_1a_2\ldots a_n)_{tri}$$
$$2=(2)_{tri}$$
$$b=(b_1b_2\ldots b_p)_{tri}.$$

Cifre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su 0,1 ili 2. Neka je a_j prva cifra (računajući zdesna) koja nije 0. Cifra a_j je, dakle, 1 ili 2. I zato u a^2 prva cifra zdesna koja nije nula je 1 (jer $1\cdot1=1$, a $2\cdot2=11_3$). Isto važi za b^2, tj. prva cifra koja nije nula u b^2 je opet 1. I zato u $2b^2$ prva cifra zdesna koja nije nula je 2, pa $a^2\neq2b^2$; na primer:

$$a^2=c_1c_2\ldots c_s100\ldots0,\qquad 2b^2=d_1d_2\ldots d_t200\ldots0,$$

a ta dva broja ne mogu da budu jednaka.

Neka je, npr., $\frac{a}{b}=\frac{14}{19}$. Tada je:

$$14=112_3,\quad 19=201_3,\quad 112^2=21021_3,\quad b^2=111101_3,\quad 2b^2=222202_3$$

i očigledno: $$21021_3\neq 222202_3.$$

Dakle, naša pretpostavka da ako je $x^2=2$, onda je $x=\frac{a}{b}$ (racionalan broj) ne može se održati, tj. *rešenje jednačine* $x^2=2$ *nije racionalan broj*.

Drugi dokaz. — Taj dokaz se zasniva na ovim činjenicama (kojih se treba podsetiti):

(1) Svaki racionalan broj može se predstaviti svedenim (reduciranim) razlomkom (što smo i kod prethodnog dokaza koristili).

(2) Brojilac i imenilac svedenog razlomka su međusobno prosti brojevi, tj. ako je $\frac{a}{b}$ sveden, onda je $d(a, b)=1$. Drugim rečima, brojilac i imenilac ne mogu biti istovremeno parni brojevi, jer, ako bi to bilo, razlomak ne bi bio sveden (bilo bi $a=2p$, $b=2q$).

(3) Kvadrat parnog broja je paran broj ($a=2k$, $a^2=4k^2$, npr. $6^2=36$). Kvadrat neparnog broja je neparan [$(2k+1)^2=4k^2+4k+1$ = neparan broj, npr. $7^2=49$].

Na osnovu toga rasuđujemo:

Dopustimo da je svedeni razlomak $\frac{a}{b}$ rešenje jednačine $x^2=2$, tj. $\frac{a^2}{b^2}=2$. Odatle sledi $a^2=2b^2$, tj. a^2 je paran broj (jer je jednak dvostrukom broju b^2). Ali ako je a^2 paran broj, onda je [činjenica (3)] i a paran broj, tj. $a=2k$. U tom slučaju je $a^2=(2k)(2k)=4k^2$.

Stavimo to u $a^2=2b^2$, pa dobijamo $4k^2=2b^2$, tj. $2k^2=b^2$, odakle sledi da je b^2 paran broj, pa dakle i *b je paran broj*.

Znači, pretpostavljajući da je racionalni broj $\frac{a}{b}$ takav da je $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$, mi smo pretpostavili [činjenice (1) i (2)] da je $\frac{a}{b}$ sveden i kao takav a i b ne mogu biti istovremeno parni brojevi, a došli smo do zaključka da su a i b parni. Ta protivrečnost i dokazuje da broj koji pomnožen samim sobom daje, kao proizvod, 2 *nije racionalan broj*.

Dakle, *ne postoji takav racionalan broj čiji je kvadrat broj* 2.

Na sličan način možemo dokazati da brojevi čiji su kvadrati 3, 4, 7, . . . , 14, 15, . . . nisu racionalni brojevi.

3. 1) Moguće je probanjem izračunati decimalne brojeve čiji su kvadrati sve bliži broju 2. Zaista, ako znamo kvadrate brojeva 11, 12, 13, . . . , odmah napišemo da je $1{,}4^2=1{,}96$, a $1{,}5^2=2{,}25$, pa je $1{,}4^2<2<1{,}5$. Zatim probanjem izračunamo $1{,}41^2=1{,}9881$, $1{,}42^2=2{,}0168$, pa je $1{,}41^2<2<1{,}42^2$. I tako dalje. Pri tome, moramo, kao što se vidi, izračunati $1{,}411^2$, $1{,}412^2$, $1{,}413^2$, $1{,}414^2$, . . . dok ne dobijemo treću decimalu. Zatim, tako isto postupiti da se dobije četvrta, peta, . . . , decimala.

Pored toga, postoji i tačno određen postupak (algoritam) za izračunavanje približno manjih brojeva čiji se kvadrati razlikuju od 2 sa koliko se god hoće tačnošću.

Taj se postupak zove izračunavanje kvadratnog korena (u ovom slučaju broja 2, ali i svakog drugog broja*).

Primenom jednog ili drugog postupka dobijamo beskonačni niz brojeva:

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; . . .

čiji su kvadrati sve bliži broju 2 (što se faktičkim izračunavanjem, kao ranije, lako proverava).

Istim postupcima dobijamo beskonačni niz brojeva:

1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; . . .

čiji su kvadrati sve bliži broju 3;

2,2; 2,23; 2,236; 2,2360; 2,23607; . . .

čiji su kvadrati sve bliži broju 5; i tako dalje.

Dobijamo, dakle, beskonačne nizove racionalnih brojeva kao i u slučaju nedecimalnih brojeva (§ 21.5, t. **1**, 1). Ali, između nizova kojima se približavamo nedecimalnim brojevima i nizova kojima se približavamo broju čiji je kvadrat jednak broju 2, broju 5, broju 6, broju 7, itd. postoji suštinska razlika. Tu razliku ćemo biti u stanju da potpuno shvatimo posle (§ 21.7 i § 21.8). Zasad napišimo, npr., beskonačni niz:

(a) 1,3; 1,33; 1,336; 1,3363; 1,33636; . . . ,

kojim se približavamo broju $\frac{147}{110}$ i beskonačni niz:

(b) 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; . . . ,

kojim se približavamo „broju" čiji je kvadrat broj 2.

I u jednom i u drugom slučaju dobija se beskonačno mnogo decimala (jer se ni deljenje 147:110, ni postupak dobijanja „broja" čiji je kvadrat broj 2 ne može svršiti; kad bi se ti procesi mogli svršiti, rezultati bi bili decimalni brojevi). Ali unapred znamo da se u slučaju (a) decimale periodično ponavljaju (§ 21.5, t. **1**), a da u slučaju (b) nema periodičnosti, jer kad bi se pojavila periodičnost „broj" čiji je kvadrat 2 bio bi racionalan, a pokazali smo da nije. To je važna konstatacija, ali suštinska razlika izražava se trećom (3) od sledećih konstatacija.

(1) Svaki niz (a) ili (b) je niz racionalnih brojeva.

(2) Svaki niz (a) ili (b) *monotono* raste [što znači da je svaki sledeći broj (član) niza veći od svog prethodnika ili najviše jednak prethodniku § 21.9].

(3) *Postoji* najmanji racionalni broj koji je veći od svakog broja (člana) niza (a), a *ne postoji* najmanji racionalan broj koji je veći od svakog broja (člana) niza (b).

2) Rigorozni dokaz toga stava (3) zahteva dokaze niza prethodnih stavova koji bi zamorili čitaoca. Zato ćemo pokušati da to „naprečac" (oslanjajući se i na intuitivno uviđanje) učinimo:

1° Intuitivno uviđamo (a u § 21.9 pokazaćemo to i bliže) da je svaki broj niza (a) manji od $\frac{147}{110}$ i da možemo naći broj (član) toga niza koji se razlikuje od

* Opis tog algoritma može se naći u svakom udžbeniku algebre, a njegovo obrazloženje dato je u autorovoj knjizi *Teorijska i praktična aritmetika*, Beograd 1952.

$\frac{147}{110}$ za onoliko koliko mi hoćemo; na primer, jedan od tih brojeva je 1,3363636363. Metodama prethodnog paragrafa nalazimo da je:

$$\frac{147}{110}-1{,}33636363636=\frac{1}{10^{11}}=0{,}00000000001.$$

Uopšte je $\frac{147}{110}-1{,}336\ldots d_k<\frac{1}{10^k}$,

gde d_k označava cifru 3 ili cifru 6, a k raste neograničeno, što, rečima iskazano, znači da ma kako mali broj $\frac{1}{10^k}$ izabrali, uvek postoji broj niza (a) koji je manji od $\frac{147}{110}$. Drugim rečima: broju $\frac{147}{110}$ se možemo neograničeno približiti nizom (a), najveći broj „niza (a)" je, baš dati broj $\frac{147}{110}$. A kako ima i mnogo drugih racionalnih brojeva većih od svakog broja niza (a), npr. $\frac{148}{110}, \frac{149}{110}, \ldots, 2, 3, \ldots$, broj $\frac{147}{110}$ *je najmanji racionalni* broj veći od svakog broja niza (a).

Broj $\frac{147}{110}$ zove se *granica* niza (a).

2° Tako možemo pokazati i za druge racionalne brojeve. Može se uopšte pokazati da je svaki racionalan broj *granica jednog niza racionalnih brojeva, niza koji monotono raste.* I zato, svaki racionalan broj r deli množinu svih racionalnih brojeva u tri podmnožine: podmnožina racionalnih brojeva manjih od r, podmnožina racionalnih brojeva većih od r i $\{r\}$. [Videti prethodni paragraf.] Prema tome:

(1) Svaki racionalan broj pripada, obavezno, jednoj od spomenute tri podmnožine.

(2) Svaki broj prve podmnožine manji je od svakog broja druge podmnožine.

(3) U prvoj podmnožini ne postoji broj veći od svih ostalih.

(4) U drugoj podmnožini ne postoji broj manji od svih ostalih.

(5) Broj r (koji definiše spomenute tri podmnožine) veći je od svakog broja prve, a manji od svakog broja druge podmnožine.

3° Stavimo, na isti način, sve racionalne brojeve čiji su kvadrati manji od 2 u prvu podmnožinu, a sve racionalne brojeve čiji su kvadrati veći od 2 u drugu podmnožinu. Tada:

(1′) Svaki racionalan broj pripada ili prvoj ili drugoj podmnožini, jer (t. **2** i **3**, 1) ne postoji racionalan broj čiji je kvadrat jednak broju 2, nego su oni ili manji ili veći od 2.

(2′) Nijedna podmnožina nije prazna i: svaki broj prve podmnožine manji je od svakog broja druge podmnožine; svaki broj druge podmnožine veći je od svakog broja prve podmnožine.

(3′) U prvoj podmnožini ne postoji broj veći od svih ostalih.

(4′) U drugoj podmnožini ne postoji broj manji od svih ostalih.

Tvrđenje (2′) sledi (uzimajući u obzir 2°) iz činjenice da je kvadrat svakog broja većeg od 1 veći od tog broja i od svakog manjeg broja. Dokažimo (3′) i (4′):

Neka je a racionalan broj prve podmnožine, tj. takav da je $a^2<2$. Tada postoji (prema 2°) broj a_1 takav da je:

$$2-a_1^2<2-a^2, \text{ pa je } a_1<a.$$

Isto tako postoje $a_2, a_3, a_4, \ldots$ tako da je:

$$2-a_2^2<2-a_1^2, \text{ pa je } a_2<a_1;$$

$$2-a_3^2<2-a_2^2, \text{ pa je } a_3<a_2, \text{ itd.}$$

Na sličan način, ako je b proizvoljan broj druge podmnožine, postoje brojevi $b_1, b_2, b_3, \ldots$ takvi da je:

$$b_1^2-2<b^2-2, \text{ pa je } b_1<b;$$

$$b_2^2-2<b_1^2-2, \text{ pa je } b_2<b_1;$$

$$b_3^2 2-<b_2^2-2, \text{ pa je } b_3<b_2, \text{ itd.}$$

Ako sa $\sqrt{2}$ označimo „broj" čiji je kvadrat jednak broju 2, prethodno (3′) i (4′) se lepo vidi iz tablice:

$$1<\sqrt{2}<2$$
$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$
$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$
$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$
$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$$
$$1{,}41421<\sqrt{2}<1{,}41422$$
$$1{,}414213<\sqrt{2}<1{,}414214$$
$$1{,}4142135<\sqrt{2}<1{,}4142136$$

i tako dalje.

Brojevi a (levo) rastu, brojevi b (desno) opadaju (sve su manji), ali ma koliko produžili računanje, nećemo dobiti najveći broj a, niti najmanji broj b. Osim toga, razlika između desnog i levog odgovarajućeg broja je sve manja, na primer:

$$b_0-a_0=1, \quad b_1-a_1=0{,}1, \quad b_4-a_4=0{,}0001, \quad b_{10}-a_{10}=\frac{1}{10^{10}}, \ldots$$

$$b_k-a_k=\frac{1}{10^k}, \text{ a } k \text{ raste neograničeno.}$$

Znači, uvek možemo naći brojeve b_k i a_k tako da njihova razlika $\frac{1}{10^k}$ bude koliko hoćemo mala. Ali ta dva niza nemaju granicu, tj. niz (b) kojim se približavamo „broju" čiji je kvadrat 2 *nema granicu* [1) (3)].

3) Nema racionalnu granicu, a granica postoji, jer su svi racionalni brojevi podeljeni u dve podmnožine koje zadovoljavaju uslove (1′), (2′), (3′), (4′). Ta se granica definiše kao *neracionalni broj* čiji je kvadrat 2.

Na sličan način dolazi se do neracionalne granice niza racionalnih brojeva:

čiji su kvadrati jednaki broju 5, 6, 7, . . . , 13, . . . , 50, . . .;
čiji su treći stepeni jednaki broju 2, 3, 4, 5, . . .;
čiji su četvrti stepeni jednaki broju 2, 3, 4, ...;
i tako dalje.

Još lakše je videti da su, npr.:

$$\alpha=0{,}101001000100001\ldots$$
$$\beta=0{,}122333444455555\ldots$$
$$\gamma=3{,}252552555255552\ldots$$

neracionalne granice monotonih nizova racionalnih brojeva:

$$\alpha=0{,}1;\ 0{,}10;\ 0{,}101;\ 0{,}1010;\ 0{,}10100;\ \ldots$$
$$\gamma=3{,}2;\ 3{,}25;\ 3{,}255;\ 3{,}2552;\ 3{,}25525;\ \ldots$$

Iz načina kako decimale slede jedna za drugom vidi se da α, β, γ nisu periodični decimalni brojevi, a svaki rastavlja množinu racionalnih brojeva na dve podmnožine koje zadovoljavaju uslove (1'), (2'), (3'), i (4'), npr.:

$$3<\gamma<4$$
$$3{,}2<\gamma<3{,}3$$
$$3{,}25<\gamma<3{,}26$$
$$3{,}252<\gamma<3{,}253.$$
$$\ldots$$

Znači, α, β, γ i neograničeno mnogo sličnih beskonačnih neperiodičnih decimalnih brojeva jesu *neracionalni* ili *iracionalni brojevi*. Otuda:

Kad god se množina racionalnih brojeva deli u dve podmnožine tako:

(1) da je svaki broj prve podmnožine manji od svakog broja druge i

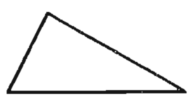
(2) da nema racionalnog broja većeg od svih brojeva prve podmnožine i nema racionalnog broja manjeg od svih brojeva druge podmnožine, onda se „ono" što vrši tu podelu, to rastavljanje, zove neracionalan (iracionalan) broj.

Svaka podela o kojoj je napred reč zove se i *presek* u množini racionalnih brojeva, ali ne u smislu teorije množina, i zato treba dodati: neracionalni (iracionalni) presek u množini racionalnih brojeva.

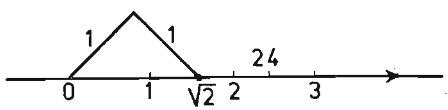
A koliko ima iracionalnih brojeva? To ćemo videti u sledećem paragrafu.

4. 1) Može se pokazati da neracionalnom broju $\sqrt{2}$ odgovara tačka prave brojeva. Zaista:

(1) Još pre 2500 godina ljudi su dokazali da ako su mere, „merni brojevi" stranica pravouglog trougla (sl. 21.4) a, b, c, onda je $a^2+b^2=c^2$. (To je poznata Pitagorina teorema.)



Slika 21.4



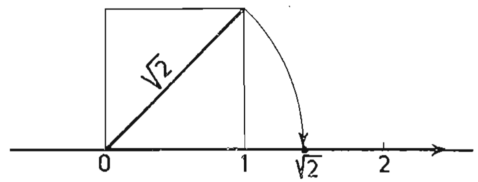
Slika 21.5

(2) Na pravi brojeva uzima se da je: $\frac{1}{2}$ mera ("merni broj" duži određene tačkom 0 i tačkom $\frac{1}{2}$; 1 mera („merni broj") duži određene tačkom 0 i tačkom 1; 2,4 mera duži određene tačkom 0 i tačkom 2,4; itd.

(3) Uzimajući (1) i (2) u obzir, konstruišimo pravougli jednakokraki trougao čije su mere katetâ 1 u položaju prikazanom crtežom sl. 21.5. Očigledno, merni broj hipotenuze iznosi $\sqrt{2}$ (jer je $c^2=1^2+1^2=2$, tj. $c=\sqrt{2}$).

Dakle, $\sqrt{2}$ (kvadratnom korenu iz 2) odgovara potpuno određena tačka prave brojeva, tačka kojoj ne odgovara nijedan racionalan broj.

Lakše je, u istu svrhu, konstruisati kvadrat čija je mera stranice 1 (sl. 21.6)



Slika 21.6

2) Broj $\sqrt{2}$ je pozitivan (ili negativan), jer postoji iracionalni (neracionalni) broj $-\sqrt{2}$. Prema tome, rešenje jednačine:

$$x^2=2 \text{ je } \{\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\}.$$

To važi za svaki iracionalan broj pa je:

$$\sqrt{3}>0;\ -\sqrt{5}<0;\ \sqrt{7}>0;\ \sqrt{10}>0;\ -\sqrt[3]{11}<0;\ \ldots;\ -0{,}1223334444\ldots<0.$$

3) Neka $x, y \in Q$, $y\neq 0$. Dokažimo da je $x+y\sqrt{2}$ iracionalan broj. Pretpostavićemo suprotno, tj. da je $x+y\sqrt{2}$ racionalan, tj. da je $x+y\sqrt{2}=z$, gde je z racionalan broj. Ali, $x+y\sqrt{2}=z$ može biti tada, i samo tada, kad je $y\sqrt{2}=z-x$, tj. kad je $y\sqrt{2}$ racionalan broj, tj. kad je $\sqrt{2}\ (z-x):y$ racionalan. Dakle, pretpostavka nas dovodi do protivrečnosti, ona nije tačna, tj. $x+y\sqrt{2}$ nije racionalan, nego iracionalan broj.

4) Dokažite da su $x-y\sqrt{2}$ i $x+y\sqrt{5}$ iracionalni brojevi (pod uslovom da su x i y racionalni brojevi, $y\neq 0$).

5) (1) $\sqrt[3]{8}=2$ (zašto?), $\sqrt{-27}=-3$ (zašto?), $\sqrt[4]{16}=2$ i -2.

(2) Da li je $\sqrt[3]{20}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$, $\sqrt[6]{75}$, $\sqrt[3]{2}$ racionalan broj?

(3) $\sqrt{6{,}25}$, $\sqrt[3]{0{,}125}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{0{,}0081}$ su racionalni brojevi. Odredite ih.

(4) Zašto su $\sqrt{31}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{5}$ iracionalni brojevi?

6) Ako je dat $\sqrt[n]{a}$, gde je a nenegativan racionalan broj, $n\in N\setminus\{0, 1\}$, a ne postoji takav broj x da je $x^n=a$, $\sqrt[n]{a}$ je iracionalan broj.

Ako je dat $\sqrt[n]{a}$, gde je a negativan racionalan broj, a $n\in\{3, 5, 7, \ldots\}$, i ne postoji racionalan broj x takav da je $x^n=a$, $\sqrt[n]{a}$ je iracionalan broj.

Kad je a negativan broj, a $n\in\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $\sqrt[n]{a}$ nije ni racionalan ni iracionalan.

7) I čuveni broj π (§ 22.4) je iracionalan, ali izračunavanje njegovih decimala je mnogo složenije. Nedavno je, elektronskom mašinom, izračunato preko 100000 decimala broja π. Prvih 30 decimala jesu

$$\pi=3{,}141592653589793238462643832795\ldots$$

5. 1) Kad je poznato dovoljno decimala i iracionalni brojevi se aproksimiraju približnim decimalnim brojevima onako kako je pokazano u § 21.5, t. **1**, na primer:

$\sqrt{5}\approx 2{,}24$ sa tačnošću do 0,01;	$\pi\approx 3{,}14159265$ sa tačnošću do 10^{-8};
$\approx 2{,}236$ sa tačnošću do 0,001;	$\approx 3{,}1416$ sa tačnošću do 0,0001;
$\approx 2{,}236068$ sa tačnošću do 10^{-6};	$\approx 3{,}14$ sa tačnošću do 10^{-2}
. . . . . .	. . . . . .

2) Iracionalni brojevi se mogu sabirati i množiti (pa dakle i oduzimati i deliti), na primer:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3{,}1463; \qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\approx 2{,}449; \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-5}{4}=-1.$$

Ali to izlazi iz okvira ove knjige.*

Šta pokazuje poslednji primer? Je li množina iracionalnih brojeva zatvorena u odnosu na pojedine operacije?

Inače, svih pet osnovnih osobina (komutativnost, asocijativnost, . . .) važi i u množini iracionalnih brojeva.

§ 21.7. MNOŽINA REALNIH BROJEVA

1. Množina Q racionalnih brojeva i množina J iracionalnih brojeva su razdvojene, nemaju zajedničkih elemenata.

Unija tih dveju množina, tj. $Q\cap J=R$, *zove se množina realnih brojeva.*

2. Dosad smo utvrdili da svakom broju, bez obzira kojoj numeričnoj množini pripada, odgovara tačka prave brojeva. Pridimo sad malo bliže (i rigoroznije) toj geometrijskoj interpretaciji (jer će nam kasnije ona biti veoma korisna).

1) U glavi VII uveli smo orijentisanu pravu i interval, naime (sl. 21.7):

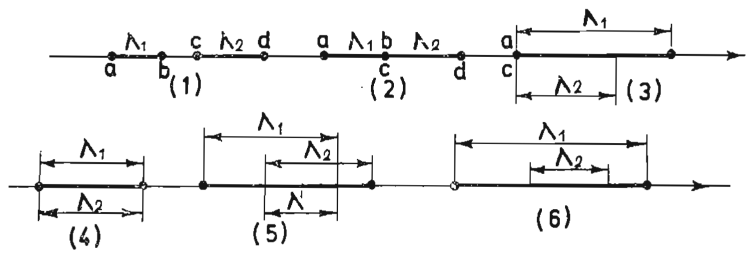
Slika 21.7

$a<b$, zatvoren interval $[a, b]$, $x\in[a, b]$.

Kratkoće radi interval ćemo ovde označavati velikim grčkim slovom Λ (lambda) i pomoćnim oznakama, npr.:

$$\Lambda,\ \Lambda',\ \Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3, \ldots, \Lambda_n, \ldots$$

Između dva data intervala može postojati jedna, i samo jedna od ovih relacija:



Slika 21.8

* Ponovo upućujemo čitaoca na autorovu *Aritmetiku — teorijsku i praktičku.*

U slučaju:

(1) intervali su razdvojeni, tj. $\Lambda_1\cap\Lambda_2=\varnothing$;

(2) intervali su granični, tj. $\Lambda_1\cap\Lambda_2=\{c\}$ i $b=c$;

(3) dve krajnje tačke su im zajedničke i jedan je *umetnut* u drugi, tj.

$$\Lambda_1\supset\Lambda_2 \text{ i } a=c;$$

(4) poklapaju se, tj. $\Lambda_1=\Lambda_2$;

(5) seku se, tj. $\Lambda_1\cap\Lambda_2=\Lambda'$;

(6) jedan je umetnut u *drugi*, tj. $\Lambda_1\supset\Lambda_2$ ili $\Lambda_1\cap\Lambda_2=\Lambda_2$.

Ako su intervali razdvojeni ali se mogu dovesti u položaj prikazan crtežom (4), oni su *podudarni (kongruentni)*, tj. $\Lambda_1\cong\Lambda_2$.

2) U ovom momentu je za nas najvažnija relacija „. . . umetnut u . . .“. Posmatrajmo niz zatvorenih intervala:

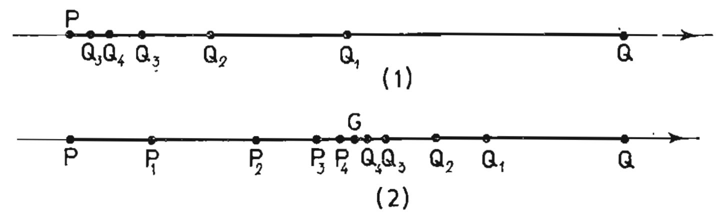
$$\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3, \ldots, \Lambda_n, \ldots$$

On se zove *niz umetnutih intervala* ako su zadovoljena dva uslova:

(a) Ako je $\Lambda_n\supset\Lambda_{n+1}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, tj. ako je svaki sledeći interval umetnut u prethodni.

(b) Ako se intervali neograničeno smanjuju kad n raste neograničeno. Ili drukčije i preciznije: Ako mera („merni broj“) intervala teži nuli kad n raste neograničeno. [U tom pogledu videti dalje pod (3).]

Dva tipična niza umetnutih intervala prikazana su crtežima:



Slika 21.9

Na crtežu (1) prikazan je niz umetnutih intervala*:

$$[P, Q],\ [P, Q_1],\ [P, Q_2], \ldots, [P, Q_n], \ldots$$

a na crtežu (2):

$$[P, Q],\ [P_1, Q_1],\ [P_2, Q_2], \ldots, [P_n, Q_n], \ldots$$

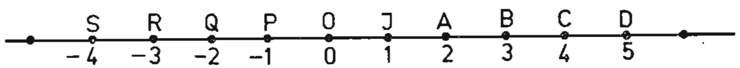
Prema (a) i (b) svi intervali niza umetnutih intervala imaju jednu jedinu zajedničku tačku. (Crteži samo ilustruju tu činjenicu.) U slučaju prikazanom crtežom (1) ta je tačka P. U slučaju prikazanom crtežom (2) ta je tačka G. (Ne treba smetnuti s uma da orijentisana prava, nosač umetnutih intervala, nije fizički nego *geometrijski prostor.*)

* Ovde i dalje moramo odstupiti od već usvojenog načina označavanja elemenata, pa ćemo tačke (elemente) označavati velikim slovima.

3) Poznato je (na to smo ukazali kad je bilo reči pojedinačno o numeričkim množinama N, Z, Q) da čim se izaberu dve tačke prave, npr. O i J, kojima se dodele, respektivno, brojevi 0 i 1, prava postaje orijentisana i svima njenim određenim tačkama A, B, C, . . . (npr. „desno" od O) i određenim tačkama P, Q, R . . . („levo" od O) odgovaraju tačno određeni brojevi.

Sad uvodimo nov termin: Broj koji odgovara određenoj tački zove se *koordinata* te tačke.*

(1) Posmatrajmo prvo slučaj prikazan crtežom.



Slika 21.10

Svi intervali $[J, A]$, $[A, B]$, $[B, C]$, . . . , $[O, P]$, $[P, Q]$, . . . kongruentni (podudarni) su intervalu $[O, J]$. Zato tački A dodeljujemo koordinatu 2, tački B dodeljujemo koordinatu 3, . . . tački R dodeljujemo koordinatu -3, itd. I zato se tačke . . . , R, P, Q, O, J, A, B, . . . orijentisane prave zovu, kratko, *„cele tačke"*.

Prvo što treba konstatovati u vezi s tim jeste da između množine tačaka prave i množine celih brojeva postoji jednoznačna obostrana (biunivoka) korespondencija, tj. bižekcija (§ 9.5):

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots R, & Q, & P, & O, & J, & A, & B, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \ldots -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, \ldots \end{array}$$

Drugo, samom orijentacijom prave uvedena je relacija poretka u obe množine, npr. $R<P$ i $-3<-1$, $D>A$ i $5>2$, . . .

Treće, svaka „cela" tačka identifikuje se svojom koordinatom i dobija ime te koordinate. Zato se govori i piše, npr., tačka 2, tačka -17, . . . (umesto broj 2, broj -17, . . .).

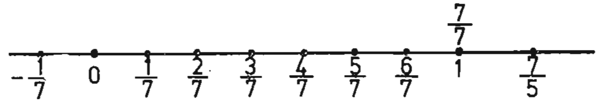
Četvrto, množina celih tačaka zavisi od izbora tačke 0 (nula) i tačke 1, što, s obzirom na neograničenost tih izbora, znači da svaka tačka jedne prave može biti cela. Ali, kad se jednom izaberu tačke 0 i 1, više se ništa ne može menjati u toku rešavanja jednog problema. Samo tako se može govoriti o stalnim tačkama čija su imena, npr., -10, -1700, 8, $8 \cdot 10^{10}$, . . .

Takva se prava zove, kao što je poznato, *linija brojeva* (ili „brojna linija", ali je svakako *prava brojeva* ili *osa brojeva* bolji termin, što je već ranije napomenuto).

(2) Možemo li odrediti tačku prave (ose) brojeva kojoj odgovara (kojoj treba dodeliti) racionalni broj na primer $\left(\frac{3}{7}\right)$?

* Napomenimo da je dodeljivanje brojeva tačkama prave *mentalni* posao. Crtanje i pisanje je fizički posao koji nam olakšava mentalni rad.

U tu svrhu podelimo interval $[0, 1]$ na 7 kongruentnih intervala.* Kraj trećeg intervala, računajući od 0 „nadesno" [jer je $\left(\frac{3}{7}\right)$ pozitivan odnosno nenegativan broj], je tražena tačka. Ona očigledno odgovara (§§ 20.1 i 20.2) i svakom broju beskonačne množine $\left\{\frac{3}{7}, \frac{6}{14}, \frac{18}{21}, \ldots, \frac{1611}{3759}, \ldots\right\}$.



Slika 21.11

Na sličan način konstruišemo odgovarajuću tačku ma kojeg datog racionalnog broja $\left(\frac{a}{b}\right)$, naime: interval $[0, 1]$ podelimo na b podudarnih intervala i izbrojimo, počev od 0, a intervala u pozitivnom odnosno negativnom smeru, već prema tome, da li je $\left(\frac{a}{b}\right)>0$ ili $\left(\frac{a}{b}\right)<0$. Ali, u mnogim konkretnim slučajevima konstrukcija se može i lakše izvršiti; na primer, tačku $-\frac{41}{6}$ konstruišemo ovako: $-\frac{41}{6}=-6+\frac{-5}{6}$, što pokazuje da (tražena) tačka pripada intervalu $[-7, -6]$; podelimo taj interval na 6 podudarnih intervala i prva tačka „desno" od -7 je tražena tačka. (To je u stvari „desna" krajnja tačka intervala $\left[-7, -\frac{41}{6}\right]$ pa je broj $\left(-7-\frac{41}{6}\right):2=-\frac{83}{12}$ koordinata sredine tog intervala. Konstruišite tačku čija je koordinata $\left(-7-\frac{41}{6}\right):3=-\frac{83}{18}$).

Na taj način, svakom racionalnom broju odgovara *racionalna tačka* koja se, prema potrebi, zove i racionalni broj, baš kao što se i racionalni brojevi (npr. $-\frac{70}{13}$, -3, $-\frac{27}{25}$, $-\frac{10}{91}$, 0, $\frac{42}{43}$, 1, . . .) zovu (kad zatreba i, podvlačimo, *kad se radi na osi brojeva ili uz njenu pomoć*) *racionalne tačke*.

Između množine racionalnih tačaka i odgovarajućih racionalnih brojeva postoji bižekcija. A relacija poretka (reda) koja postoji u jednoj od tih množina, postoji i u drugoj, npr., ako je $A<B$, onda je i $a<b$, i obrnuto.

$$\begin{array}{ccc} \ldots A, & B, & C, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \ldots a, & b, & c, \ldots \end{array}$$

(3) Iz prethodnog [pod (2)] izvodimo i konkretnu interpretaciju racionalnih brojeva, na primer: $\frac{3}{4}$ označava deo jedinice koji se dobija tako što se jedi-

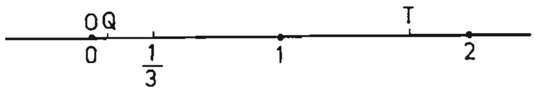
* Vidi *Metodika savremenog matematičkog obrazovanja*, crteži (slike) 234, 235, 236. Da bi bilo očiglednije, na crtežu 21.11 uzimamo veću skalu, tj. znatno veći interval $[0, 1]$. Tako postupamo kad god je to potrebno.

nica podeli na 4 jednaka dela pa se uzmu (izbroje) 3 takva dela; $\frac{65}{17}$ označava da je jedinica podeljena na 17 jednakih delova, a zatim uzeto (izbrojeno) 65 takvih delova. Iz toga, pak, sledi da svakom intervalu (svakoj duži) prave brojeva odgovara tačno određen nenegativni broj, koji se zove *mera* ili *„merni broj"* intervala (duži, § 7.5.). Na primer, mera intervala $[OA]$ (sl. 21.10) je 2, mera intervala $[SP]$ je 3, a prema prethodnom možemo konstruisati interval čija je mera

$$7\frac{3}{8}, \frac{14}{23}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$$

3) U § 20.6, t. **4** napomenuli smo da prava brojeva sadrži i neracionalne tačke. Sadrži li ona malo ili mnogo neracionalnih tačaka? U § 21.6 napomenuli smo da ima neograničeno, beskonačno mnogo neracionalnih brojeva. (Između svaka dva racionalna broja nalazi se jedan neracionalan.) Ako svakom neracionalnom (iracionalnom) broju odgovara tačka prave brojeva, onda ona sadrži beskonačno mnogo neracionalnih tačaka. Međutim, mi nismo dokazali niti da neracionalnih brojeva ima beskonačno mnogo, niti da svakom takvom broju odgovara tačka prave brojeva. Zato „dokažimo" teoremu:

Svaki interval prave brojeva sadrži neograničeno mnogo neracionalnih tačaka.



Silka 21.12

Zaista, neka je T (sl. 21.12) jedna neracionalna tačka, tj. tačka čija je koordinata neki neracionalan broj. Konstruišimo tačku Q tako da intervalu (duži) $[QT]$ odgovara bilo koji racionalan broj, na primer $\frac{8}{5}$. Tačka Q pripada jednom intervalu, npr. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$. Da li je Q racionalna tačka? Nije, jer kad bi tako bilo, kad bi njena koordinata bila racionalni broj $\left(\frac{a}{b}\right)$, onda bi koordinata tačke T bila $\frac{a}{b}+\frac{8}{5}$ tj. racionalni broj, a mi smo pretpostavili da tački T odgovara neracionalan broj. Dakle, tački Q ne odgovara racionalan broj. A kako možemo, na opisani način, da konstruišemo koliko god hoćemo tačaka (Q_1, Q_2, ...) intervala $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ (jer uvek možemo da nađemo koliko god hoćemo racionalnih brojeva koji odgovaraju intervalima $[Q_1T]$, $[Q_2T]$, $[Q_3T]$, ...), interval $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ sadrži neograničeno mnogo neracionalnih tačaka. Dakle:

Prava brojeva sadrži beskonačno mnogo neracionalnih tačaka i njihove su koordinate neracionalni (iracionalni) brojevi.

4) Pokažimo da svakoj neracionalnoj tački odgovara neracionalni, tj. iracionalni broj kao koordinata.

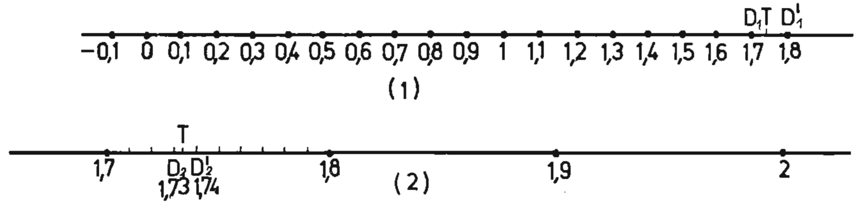
(1) U tu svrhu napomenimo prvo da se tačke kojima odgovaraju decimalni brojevi, tj. *decimalne tačke*, konstruišu kao i ostale racionalne tačke. Pa i lakše, jer se odgovarajući interval, npr. $[-6, -5] \cong [0, 1]$, deli na 10, 100, 1000,... podudarnih intervala, već prema tome sa koliko je decimala napisan dati broj; na primer, ako je dati broj $-5{,}7$, interval $[-6, -5]$ deli se na 10 podudarnih intervala, pa je sedma podeona tačka „levo" od -5 (ili treća „desno" od -6) tražena tačka. Ako je dati broj $-5{,}74$, interval $(-6, -5]$ deli se na 100 podudarnih intervala, ili, što je isto, interval $[-5{,}8, -5{,}7]$ deli se na 10 podudarnih intervala, pa je tražena tačka četvrta „levo" od -5, 7, odnosno šesta „desno" od $-5{,}8$.

Uopšte, da bi se dobila tačka $c, d_1d_2, \ldots, d_k$ deli se interval $[c, c+1]$ na 10^k podudarnih intervala, pa se izbroji $d_1d_2 \ldots d_k$ tačaka desno odnosno levo od c. Ili, što je isto, interval $[c, c+1]$ deli se na 10 podudarnih intervala, pa se odredi tačka c, d_1, interval $[c, d_1; c, d_1+1]$ deli se na 10 podudarnih intervala, pa se odredi tačka c, d_1d_2; itd.

Označimo množinu svih decimalnih tačaka velikim grčkim slovom Δ (delta). Svaki interval Λ čiji su krajevi decimalne tačke D i D' (odgovarajuće koordinate d i d') pripada množini Δ.

(2) Neka je sad T (sl. 21.12) neracionalna tačka. Koji broj joj odgovara, tj. koja je njena koordinata?

Podelimo svaki interval $[0, 1]$ i $[1, 2]$ na 10 podudarnih intervala. Oni su granični i tačka T mora biti (unutrašnja) tačka jednog od tih intervala [sl. 21.13(1)]. Nazovimo taj interval Λ_1. Podelimo interval Λ_1 na 10 podudarnih intervala (tj.



Slika 21.13

$[1, 2]$ na 100). Pošto T nije racionalna tačka, ona je unutrašnja tačka jednog od tih intervala. Neka je to Λ_2. Interval Λ_2 podelimo na 10 podudarnih intervala. Tačka T je sigurno unutrašnja jednog od njih, recimo Λ_3.

Jasno je da taj proces možemo neograničeno produžiti, jer su krajevi intervala decimalne tačke D_1 i D'_1, D_2 i D'_2, D_3 i D'_3, a tačka T nije racionalna (pa ne može biti nijedna od tačaka D, tj. nijedna od tačaka množine Δ).

Kako su koordinate tačaka $D_1, D'_1, D_2, D'_2, \ldots$ decimalni brojevi $d_1, d'_1, d_2, d'_2, \ldots$, pri čemu je $d'_n = d_n + \frac{1}{10}$, dakle decimalni brojevi koje možemo pročitati sa crteža, nalazimo da tački T odgovara broj τ (grčko slovo tau) takav da je:

$$1 < \tau < 2$$
$$1{,}7 < \tau < 1{,}8$$
$$1{,}73 < \tau < 1{,}74$$
$$1{,}732 < \tau < 1{,}733$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

tj. beskonačni neperiodični broj, a to je, po definiciji, iracionalni broj. Tom se broju možemo približiti decimalnim brojevima c kojom god hoćemo tačnošću $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots \frac{1}{10^n} \ldots\right)$, ali nikad ne možemo napisati decimalni broj koji odgovara tački T, niti se, pak, opisnim postupkom dobija periodični decimalni broj. (Uporedi § 21.5, t. **1** i § 21.6, t. **5**, 4.)

Postupak je opšti, tj. primenjuje se na svaku neracionalnu tačku. Otuda:

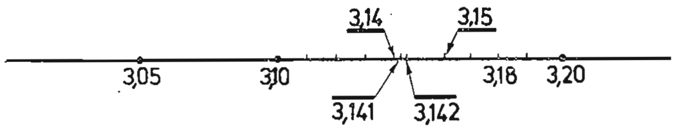
Svakoj neracionalnoj tački odgovara određeni iracionalni broj (iracionalna koordinata).

(U datom slučaju dobili smo broj $\sqrt{3}$ čiju smo tačku konstruisali u § 21.6.)

5) Obrnuto, dat je iracionalni broj. Konstruisati odgovarajuću tačku prave brojeva.

U mnogo slučajeva to se može postići geometrijski (§ 21.6, t. **2** i t. **3**, 1), jer je, na primer, $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}$, $\sqrt{17}=\sqrt{4^2+1}$, $\sqrt{12}=\sqrt{4^2-2^2}$, $\sqrt{15}=\sqrt{4^2-1}, \ldots$ Međutim, to nije uvek moguće i opšti postupak je sledeći. Uzmimo, na primer broj:

$$\pi=3{,}141592653598\ldots$$



Slika 21.14

Napišimo niz intervala čiji su krajevi decimalni brojevi*:

$$[3{,}1;\ 3{,}2],\quad [3{,}14;\ 3{,}15],\quad [3{,}141;\ 3{,}142], \ldots$$

Tom nizu odgovara niz „tačkastih" intervala:

$$\Lambda_1=[D_1, D_1'],\quad \Lambda_2=[D_2, D_2'],\quad \Lambda_3=[D_3, D_3'], \ldots,\quad \Lambda_n=[D_n, D_n'], \ldots$$

jer je 3,1 koordinata tačke D, a 3,2 je koordinata tačke D_1', itd. Ti su intervali umetnuti i smanjuju se neograničeno, tj. dužina intervala teži nuli kad k raste neograničeno, jer je:

$$d_n'=d_n+\frac{1}{10^n},$$

pa mera intervala Λ_n iznosi $\frac{1}{10^n}$ (a taj broj teži nuli kad n raste neograničeno).

Znači (prethodno pod 2), intervali $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ čine niz umetnutih intervala, pa imaju zajedničku tačku P, tj. stalno je:

$$D_n<P<D_n'$$

kad n raste neograničeno. A kako je stalno i:

$$d_n<\pi<d_n',$$

gde su d_n i d_n koordinate tačaka D_n i D_n', tačka P odgovara broju π.

* Već smo u stvari imali: $\lambda_1=[1{,}7;\ 1{,}8]$, $\lambda_2=[1{,}73;\ 1{,}74]$, $\lambda_3=[1{,}732;\ 1{,}733], \ldots$

Taj se postupak može primeniti uvek jer je svaki iracionalan broj neperiodičan decimalan broj. Dakle:

Svakom iracionalnom broju odgovara jedna, i samo jedna, tačka prave brojeva i ona se zove iracionalna tačka.

Opšti i konačni zaključak:

Između tačaka prave čijim su dvema tačkama dodeljeni brojevi 0 i 1 — prave brojeva — i realnih brojeva postoji jednoznačna obostrana korespondencija (bižekcija).

Prava (osa) brojeva sadrži neograničeno mnogo i racionalnih i iracionalnih tačaka, pa je i množina racionalnih brojeva i množina iracionalnih brojeva beskonačna.

3. Na osnovu definicije (t. **1**) i uspostavljene jednoznačne korespondencije između tačaka prave brojeva i realnih brojeva, neposredno uviđamo sledeće činjenice i definicije (i zato činjenice navodimo bez dokaza*):

1) Svaki realni broj odgovara jednoj, i samo jednoj, tački prave brojeva. I obratno: Svaka tačka prave brojeva odgovara jednom, i samo jednom, realnom broju.

2) U množini R definisana je relacija totalnog reda, tj.:

$$\forall\, r_1,\ r_2 \in R:\ r_1 \leqslant r_2.$$

3) Za svaki realni broj r važe ove ekvivalencije:

$$r \text{ je pozitivan} \Leftrightarrow r \geqslant 0;$$
$$r \text{ je negativan} \Leftrightarrow r \leqslant 0;$$
$$r \text{ je striktno pozitivan} \Leftrightarrow r>0;$$
$$r \text{ je striktno negativan} \Leftrightarrow r<0.$$

4) Za svako $r_1,\ r_2 \in R$: r_1+r_2 zove se zbir i $r_1+r_2 \in R$.

5) $\forall\, r_1,\ r_2 \in R$ (tj. za svaki element r_1 i svaki element r_2 množine R):

$$r_1+r_2=r_2+r_1 \text{ (komutativnost).}$$

6) $\forall\, r_1, r_2, r_3 \in R$: $r_1+r_2+r_3=(r_1+r_2)+r_3=r_1+(r_2+r_3)$.

Kako se zove ta osobina?

7) $\forall\, r \in R$: $r+0=r=0+r$, tj. nula je neutralni element sabiranja realnih brojeva.

8) $\forall\, r \in R$ ima $-r$ tako da je $(-r)+r=0=r+(-r)$.

Kako se zovu, u tom slučaju, brojevi r i $-r$?

9) $\forall\, r_1,\ r_2 \in R$: $r_1-r_2=r_1+(-r_2)$. Šta je to?

10) Ako $a, b, c, d, e, f, g, h \in R$, onda je:

(1) $a+(-b)+c+d+(-e)+(-f)+g+(-h)=a-b+c+d-e-f+g-h$

(2) $-(a+b+c+\ldots+h)$ je simetrični zbir zbira $a+b+\ldots+h$

i $$-(a+b+c+\ldots+h)=-a-b-\ldots-g-h.$$

* Neke ćemo dokazati u § 21.10.

11) Ako $a, b, c, d \in R$, onda:

(1) $a<b$ i $c<d \Rightarrow a+c<b+d$;

(2) $a \leqslant b$ i $c \leqslant d \Rightarrow a+c \leqslant b+d$;

(3) $a<b$ i $c \leqslant d \Rightarrow a+c<b+d$;

(4) $a \leqslant b$ i $c<d \Rightarrow a+c<b+d$;

(5) $a<b \Leftrightarrow -b<-a$;

(6) $a \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant -a$;

(7) $a<b<c \Leftrightarrow -c<-b-a$;

(8) $a \leqslant b<c \Leftrightarrow -c<-b \leqslant a$;

(9) $0<a \Leftrightarrow -a<0$;

(10) $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \Leftrightarrow 0 \leqslant c-b \leqslant d-a$.

12) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1 \cdot r_2$, tj. $r_1 r_2$ zove se proizvod realnih brojeva r_1 i r_2 i $r_1 r_2 \in R$.

13) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1 r_2 = r_2 r_1$ (Kako se to zove?)

14) $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$: $r_1 r_2 r_3 = (r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3)$.

15) $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$: $(r_1+r_2) r_3 = r_1 r_3 + r_2 r_3$;

$r_3 (r_1+r_2) = r_1 r_3 + r_2 r_3$;

$(r_1-r_2) r_3 = r_1 r_3 - r_2 r_3$;

$r_3 (r_1-r_2) = r_1 r_3 - r_2 r_3$.

16) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1 \cdot (-r_2) = -(r_1 r_2) = (-r_1) \cdot r_2$.

17) $\forall r \in R$: $0 \cdot r = r \cdot 0$.

18) $\forall r \in R$: $1 \cdot r = r = 1 \cdot r$.

19) Proizvod dva realna broja (koji nisu nule) je pozitivan ako, i samo ako, su oni istog znaka.

20) $\forall r \in R$; $r \cdot \frac{1}{r} = 1 = r r^{-1}$. Odatle sledi da su r i $\frac{1}{r}$ (koji se piše i r^{-1}) istog znaka.

4. Kako je za svako $a, b, c \in R$:

1) (1) $a+b \in R$, (2) $(a+b)+c = a+(b+c)$,

(3) $a+b = b+a$, (4) $a+0 = a$, (5) $-a+a = 0$;

2) (1) $ab \in R$, (2) $(ab)\, c = a\, (bc)$,

(3) $ab = ba$, (4) $a \cdot 1 = a$, (5) $\frac{1}{a} \cdot a = 1$;

3) $(a+b)\, c = ac+bc$,

$\boxed{R, +, \bullet \text{ je polje.}}$

5. Neka su $\alpha<\beta$ dva realna broja i neka $\Lambda = \{\alpha, \beta\}$ označava sve realne brojeve τ takve da je $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, tj. neka je Λ interval realnih brojeva. Posmatrajmo niz intervala realnih brojeva:

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_n, \Lambda_{n+1}, \ldots$$

koji zadovoljava uslove:

(1) $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_n$ za svaki nenegativni broj n.

(2) „Širina" intervala Λ_n smanjuje se neograničeno kad nenegativni broj n raste neograničeno. Drugim rečima, mera intervala Λ_n teži nuli kad n raste neograničeno.

Tada svi ti intervali imaju jedan jedini zajednički realni broj, tj. niz umetnutih intervala $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, *teži jedinstvenom realnom broju.*

Na primer, granice svakog člana niza $\lambda_n = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{n}, \frac{1+\sqrt{5}}{n}\right]$ su iracionalni brojevi ali niz zadovoljava i uslov (1) (npr. $\frac{1-\sqrt{5}}{5} < \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ i $\frac{1-\sqrt{5}}{5} < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, tj. $\lambda_{n+1} \subset \lambda_n$) i uslov (2) jer mera njegove dužine iznosi:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{n} - \frac{1-\sqrt{5}}{n} = \frac{2\sqrt{5}}{n} < \frac{1}{10^{10}}$$ kad je $n > 2\sqrt{5} \cdot 10^{10}$, pa (dati niz) teži broju 0.

§ 21.8. UPOREDNI PREGLED OSOBINA MNOŽINE RACIONALNIH BROJEVA (Q) I MNOŽINE REALNIH BROJEVA (R)

1. Pregled osobina:

Množina Q	Množina R
1) Zatvorenost operacija	
1 (1) $\forall x, y \in Q$: $x+y \in Q$	1 (1) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1+r_2 \in R$
1 (2) $\forall x, y \in Q$: $xy \in Q$.	1 (2) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1 r_2 \in R$.
2) Komutativnost	
2 (1) $\forall x, y \in Q$: $x+y = y+x$	2 (1) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1+r_2 = r_2+r_1$
2 (2) $\forall x, y \; Q$: $xy = yx$.	2 (2) $\forall r_1, r_2 \in R$: $r_1 r_2 = r_2 r_1$.
3) Asocijativnost	
3) $\forall x, y, z \in Q$:	3) $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$:
(1) $(x+y)+z = x+(y+z)$	(1) $(r_1+r_2)+r_3 = r_1+(r_2+r_3)$
(2) $(xy)z = x(yz)$.	(2) $(r_1 r_2) r_3 = r_1(r_2 r_3)$.
4) Distributivnost	
4) $\forall x, y, z \in Q$:	4) $\forall r_1, r_2, r_3 \in R$:
(1) $(x+y)z = xz+yz$	(1) $(r_1+r_2) r_3 = r_1 r_2 + r_1 r_3$
(2) $z(x+y) = zx+zy$.	(2) $r_3(r_1+r_2) = r_3 r_1 + r_3 r_2$.

5) Neutralni elementi

5 (1) $\forall x \in Q$: $x+0=x=0+x$	5 (1) $\forall r \in R$: $r+0=r=0+r$
5 (2) $\forall x \in Q$: $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$.	5 (2) $\forall r \in R$: $r \cdot 1 = r = 1 \cdot r$.

6) Simetrični elementi

$\forall x \in Q$ postoji $y \in Q$ tako da je $x+y=0$.	$\forall r_1 \in R$ postoji $r_2 \in R$ tako da je $r_1+r_2=0$ ili $r+(-r)=0$.

7) Recipročni elementi

$\forall x \in Q$ postoji $y \in Q$ tako da je $xy=1$.	$\forall r_1 \in R$ postoji $r_2 \in R$ tako da je $r_1 r_2 = 1$ ili $r \cdot \frac{1}{r} = 1$.

8) Trihotomija

$\forall x, y\ Q$:	$\forall r_1, r_2 \in R$:
ili je $x=y$, ili $x<y$, ili $x>y$.	ili je $r_1=r_2$, ili $r_1<r_2$, ili $r_1>r_2$.

9) Relacija jednakosti

$\forall x, y, z \in Q$:	$\forall r_1, r_2, r_3 \in R$:
(1) $x=y \Rightarrow x+z=y+z$	(1) $r_1=r_2 \Rightarrow r_1+r_3=r_2+r_3$
(2) $x=y \Rightarrow xz=yz$	(2) $r_1=r_2 \Rightarrow r_1 r_3=r_2 r_3$
(3) $x+z=y+z \Rightarrow x=y$	(3) $r_1+r_3=r_2+r_3 \Rightarrow r_1=r_2$
(4) $xz=yz,\ z\neq 0 \Rightarrow x=y$.	(4) $r_1 r_3=r_2 r_3,\ r_3\neq 0 \Rightarrow r_1=r_2$.

10) Relacija poretka (reda)

$\forall x, y, z \in Q$:	$\forall r_1, r_2, r_3 \in R$:
(1) $x<y \Leftrightarrow x+z<y+z$	(1) $r_1<r_2 \Leftrightarrow r_1+r_3<r_2+r_3$
(2) $x<y,\ z>0 \Leftrightarrow xz<yz$	(2) $r_1<r_2,\ r_3>0 \Leftrightarrow r_1 r_3<r_2 r_3$
(3) $x<y,\ z<0 \Leftrightarrow xz>yz$.	(3) $r_1<r_2,\ r_3<0 \Leftrightarrow r_1 r_3>r_2 r_3$.

Dakle, množina R ima sve osobine koje ima množina Q.

$Q, +, \bullet$ je polje i $R, +, \bullet$ je polje.

2. 1) Pregled svih proučenih numeričkih množina:

R (realni brojevi)
- 1) Q (racionalni brojevi)
  - (1) P (periodični decimalni brojevi)
  - (2) D (decimalni brojevi) — Z (celi) — N (prirodni brojevi)
- 2) I (iracionalni ili beskonačni neperiodični decimalni brojevi)

2) Sastavite Venov dijagram proučenih numeričkih množina.

§ 21.9. NIZOVI I REDOVI

1. 1) U § 21.6 posmatrali smo neke nizove racionalnih brojeva. Napišite pet sledećih brojeva (članova) niza:

(1) $0{,}6;\ 0{,}66;\ 0{,}666;\ \dots;$

(2) $5{,}4;\ 5{,}47;\ 5{,}473;\ 5{,}4737;\ 5{,}47373;\ \dots;$

(3) $1{,}9;\ 1{,}99;\ 1{,}999;\ \dots;$

(4) $-4,\ 1,\ 6,\ 11,\ \dots;$

(5) $13,\ 3,\ -7,\ -17,\ \dots;$

(6) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \dots;$

(7) $-\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots;$

(8) $\sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ \dots;$

(9) $0{,}3;\ 0{,}37;\ 0{,}373;\ 0{,}3737;\ 0{,}37377;\ \dots$

Svaka *beskonačna* (neograničena) sukcesija brojeva:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots$$

zove se, kratko, *niz*, pri čemu indeks označava rang (rêdni broj) *člana* niza. U stvari niz je funkcija $f(n)$, $n \in N_1$.

U mnogo slučajeva niz se definiše *opštim članom*, ili se iz nekoliko njegovih (po pravilu prvih) članova sastavlja formula opšteg člana, na primer: opšti član niza (5) je $x_n = x_1 - 10(n-1)$; opšti član niza (6) je $\frac{1}{2^n}$; opšti član niza (7) je $\frac{(-1)^n}{n}$.

2) Napišite opšti član svakog od ostalih nizova, zaključno sa (8).

3) Opšti član niza:

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \dots$ je $2n$;

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots$ je $2n+1$.

4) Napišite prvih 5 članova niza:

(1) $3n$; (2) n^2; (3) $2n+3$; (4) $n(n+1)$.

5) Pokušajte da napišete opšti član niza:

(1) $2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \dots$ i izračunajte 15. član;

(2) $27,\ 22,\ 17,\ 12,\ \dots$ i izračunajte 30. član;

(3) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{8},\ \dots$ i izračunajte x_{73};

(4) $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \dots$ i izračunajte x_{20};

(5) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots$ i izračunajte x_{100};

(6) $-25,\ -15,\ -5,\ 5,\ \dots$ i izračunajte x_{51};

(7) 1, 4, 9, 16, . . . i izračunajte x_{10};
(8) 0,3, 0,03; 0,003; 0,0003; i izračunajte x_{23};
(9) 1, 4, 16, 64, . . . i izračunajte x_8;
(10) 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, . . . i izračunajte x_{10}.

Neki odgovori: (2) $x_n=27-5(n-1)$; (3) $x_{17}=-53$; (7) $x_{10}=100$; (9) $x_8=16384$.

6) Napišite prvih pet članova niza čiji je opšti član:

(1) $2+\frac{1}{10^n}$; (2) $\frac{2^n-1}{2^n}$; (3) $2-\frac{1}{10^n}$;

(4) $\frac{(-1)^n}{2^n}$; (5) $\frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$; (6) $\frac{1}{n}$;

(7) $3+\frac{(-1)^n}{n}$; (8) $1+\frac{1}{2^n}$; (9) $1+\frac{1}{2^n}$.

7) Ako je $x_n \leqslant x_{n+1}$, kažemo da niz *monotono* raste. Ako je $x_n < x_{n+1}$, niz stvarno raste. I obrnuto: Niz *monotono opada*, odnosno stvarno opada.

Izrazite simbolima da niz monotono opada i da stvarno opada.

8) Ispitajte i napišite koji od nizova navedenih pod 5) i 6):

(1) monotono raste; (2) stvarno raste; (3) monotono opada; (4) stvarno opada.

2. 1) Videli smo (§ 21.6) da su svi članovi nekih nizova, ako monotono ili stvarno rastu, manji od određenih brojeva.

Priđimo bliže toj činjenici. U tu svrhu posmatrajmo, npr., niz:

(1) 1,9; 1,99; 1,999; . . . čiji je opšti član $2-\frac{1}{10^n}$ i niz

(2) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, . . . čiji je opšti član $\frac{n}{2}$.

I jedan i drugi stvarno raste. Označite tačke prave brojeva čije su koordinate prvih pet članova jednog i drugog niza. Primećujete li bitnu razliku u ponašanju ta dva niza?

Postoji li član niza (2) čija se tačka nalazi iza tačke 3 (prave brojeva); iza tačke 5; iza tačke 11?

Postoji li član niza (1) čija se tačka nalazi: iza 3; iza 2? Gde se nalazi, npr., tačka koja odgovara sedmom, devetom, dvanaestom, stotom članu niza (1)? Tačke koje odgovaraju desetom, stotom, hiljaditom . . . članu niza (1) nalaze se ispred 2 i sve su bliže tački 2. One se tu zgušnjavaju, ali nijedna ne postaje ni 2, a kamoli da pređe iza 2. Zašto? Zato što su svi članovi niza (1) manji od 2:

$$2-x_1=\frac{1}{10},\quad 2-x_6=\frac{1}{10^6},\quad 2-x_{100}=\frac{1}{10^{100}},\ \ldots$$

Znači, interval $\left[2-\frac{1}{10^n},\ 2\right]$ postaje sve manji kad n raste. Zaista:

Mi možemo učiniti da taj interval bude manji od $h=0{,}001$. Za to je dovoljno da je n (rang člana niza) veći od $m=3$, jer je tada $2-1{,}9999=0{,}0001<h$.

Možemo li učiniti da interval bude manji od $h=0{,}000001$? Možemo. Treba uzeti $n>m=6$, jer tada je, npr., $2-1{,}9999999<0{,}000001$.

Možemo li naći takav prirodni broj m da za sve $n>m$ interval bude manji od $h=\frac{1}{10^{12}}$? Možemo, $m=12$.

Znači, ma kako mali bio pozitivni broj h, uvek možemo naći prirodni broj m takav da razlika između svakog člana niza (1) čiji je rang veći od m i broja 2 bude manji od h. Ta se činjenica izražava tako što se kaže da je 2 *granica* posmatranog niza.

To važi za mnoge monotono ili stvarno rastuće nizove, pogotovu za sve nizove kojima se definišu periodični racionalni brojevi (§ 21.6). Zato uvodimo definiciju:

Broj a zove se *granica* niza

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$$

ako za ma kako mali pozitivni broj h postoji broj $m \in N_1$ i odgovarajući član niza x_n takav da se svaki član koji sledi za x_n *$(n>m)$* nalazi između $a-h$ i a, tj. da je svaki takav član broj intervala $[a-h,\ a]$.

Pri tome granice intervala ne dolaze u obzir.

2) Pokažite na sličan način da je 2 granica niza $2+\frac{1}{10^n}$.

U tom slučaju svaki član koji sledi za x_n *$(n>m)$* nalazi se između a i $a+h$, tj. u $[a,\ a+h]$.

Prvi primer pokazuje da su svi članovi niza manji od granice. Drugi primer pokazuje da su svi članovi niza veći od granice. Za prvi niz kažemo da teži granici „s leve strane“. Drugi teži granici „s desne strane“.

I niz $2+\frac{1}{(-10)^n}$ ima granicu 2, ali njegovi članovi su naizmenično manji od 2 i veći od 2, na primer: $x_1=1{,}9$; $x_2=2{,}01$; $x_3=1{,}999$; $x_4=2{,}0001$; $x_5=1{,}99999$; $x_6=2{,}000001$.

Zato, uopšte, za niz:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots$$

kažemo da ima granicu a ako za ma kako mali pozitivan broj h postoji broj $m \in N_1$ i odgovarajući član x_n takvi da se svaki član koji sledi za x_n $(n>m)$ nalazi u intervalu $[a-h,\ a+h]$, tj. u $|\,a-h\,|$.

Definicija može da pričinjava teškoće zbog neuobičajenog načina izražavanja. Inače, misao koju ona izražava je veoma prosta: niz ima granicu ako je, počev od dovoljno velikog n, svaki sledeći član niza sve bliži broju a. I to približavanje nema kraja, jer je granica broj kome se članovi neograničeno približavaju, ali ga nijedan ne dostiže.

3) Pokažimo da je granica niza:

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots$$

broj nula. U tu svrhu treba pokazati da za svaki, ma kako mali, pozitivan broj h postoji član niza $\frac{1}{n}$ takav da se svaki član $\frac{1}{m}$ koji sledi za njim nalazi između $0-h$

i $0+h$. A to jeste, jer je dovoljno uzeti $\frac{1}{n}<h$, na primer, ako je $h=0{,}001$, treba uzeti $n=10\,000$, jer su tada $+\frac{1}{10\,000}$ i $-\frac{1}{10\,001}$ bliži nuli nego 0,001. Ako je $h=0{,}00001$, $n=10\,000$ ne zadovoljava, ali $n=1\,000\,000$ zadovoljava, jer su $\frac{1}{1\,000\,000}$ i $-\frac{1}{1\,000\,001}$ bliži 0 nego 0,00001. I tako dalje.

4) Da je broj a granica niza:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

izražava se ovako $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots \to a$,

a čita: niz: $x_1, x_2, \ldots, x_3, \ldots, x_n \ldots$ teži ka (broju) a.

Ili: Kad $n\uparrow$, $x_n \to a$. (Čita se: Kad n raste neograničeno, x_n teži ka a.)

U tom slučaju govorimo da dati niz *konvergira* ka a, kao granici, kad n raste neograničeno. Uopšte, za niz koji ima granicu kažemo da je *konvergentan*. U protivnom niz je *divergentan*, na primer, svaki od nizova:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots, n, \ldots$$
$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \ldots, 2n, \ldots$$
$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \ldots, n^2, \ldots$$
$$3, \quad 11, \quad 19, \quad 27, \ldots,$$

od kojih smo tri već naveli, jeste divergentan. Isto tako, nizovi:

$$-1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$
$$-1, \quad 2, \quad -3, \quad 4, \ldots, (-1)^n n, \ldots$$

jesu divergentni.

Nije uvek lako odrediti granicu datog niza i uopšte da li je dati niz konvergentan odnosno divergentan. O tome postoji posebna matematička teorija i još uvek se otkrivaju i dokazuju nove teoreme.

5) Odredite granicu svakog od 9 nizova navedenih u t. **1** pod 6).

6) Sastavite niz čija je granica:

(1) pet ; (2) tri; (3) nula; (4) deset.

3. 1) Nizovi (4) i (5) pod 1) i nizovi (1), (2), (5) i (6) pod 5) tačke **1.** imaju jednu zajedničku osobinu. Možete li je pronaći i iskazati?

Takvi se nizovi zovu *aritmetički nizovi* (ili *aritmetičke progresije*). Stalna razlika uzastopnih članova zove se *razlika niza* i najčešće se označava slovom d.

Znači, ako je: $\quad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

aritmetički niz, onda je:

$$a_2=a_1+d,\ a_3=a_2+d=a_1+2d,\ a_4=a_3+d=$$
$$a_5= \ , \ldots, a_n=$$

Dovršite nedovršene jednakosti.

Proverite na primerima pod 4) da li ste dobro odredili opšti član, tj. *formulu za izračunavanje opšteg člana.*

2) Izračunajte opšti član aritmetičkog niza:

(1)	$-13,$	$-3,$	$7,$	$\ldots$ i član a_{13};
(2)	$8,$	$-7,$	$-22,$	$\ldots$ i član a_{70};
(3)	$\frac{1}{3},$	$\frac{5}{6},$	$\frac{4}{3},$	$\ldots$ i član a_{13};
(4)	$0{,}4,$	$0{,}7,$	$1,$	$\ldots$ i član a_{17}.

3) Ako je razlika $d>0$, aritmetički niz je *rastući*, ako je $d<0$, aritmetički niz je *opadajući.*

Sastavite (sami) 3 rastuća i 5 opadajućih aritmetičkih nizova.

4) Neka je dat konačni aritmetički niz:

$$2, \ 6, \ 10, \ 14, \ 18, \ 22, \ 26, \ 30.$$

Izračunajte zbir: krajnjih članova; drugog iz početka i drugog s kraja; trećeg iz početka i trećeg s kraja; itd., tj. izračunajte zbir svaka dva simetrična člana prema sredini niza. Šta primećujete.

Da li je to opšta činjenica?

$$a_1,\ a_1\neq d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ a_1+4d,\ a_1+5d$$
$$a_1+(a_1+5d)=(a_1+d)+(a_1+4d)=(a_1+2d)+(a_1+3d)$$

U datom primeru svaki zbir je 32. A tih zbirova ima $4=\frac{8}{2}$. Možete li iz tih podataka izračunati *zbir svih članova niza*? Izračunajte.

Važi li to uopšte? Važi, jer je zbir svaka dva simetrična (prema sredini niza) člana jednak zbiru a_1+a_n.

Znači, kad je broj članova konačnog aritmetičkog niza $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ paran broj, tj. kad je $n=2k$, imamo:

$$(1) \qquad a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}.$$

Izostavite poslednji član datog primera aritmetičkog niza i saberite simetrične članove prema sredini (koja je sad broj 14). Dobijate $(2+26):2=14$, $(6+22):2=14, \ldots$, tj. uvek srednji član. To znači da je: $2+6+10+14+18+22+26=14+14+14+14+14+14+14=14\cdot 7=98$, tj. dati niz možemo zameniti nizom čiji su svi članovi *jednaki srednjem članu.*

Da li to važi uopšte? Neka je:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$$

konačni aritmetički niz. Tada je:

$$a_5=a_1+4d,\ a_9=a_1+8d,\ a_1+a_9=a_1+a_1+8d=2a_1+8d,$$

to jest: $$\frac{a_1+a_9}{2}=a_1+4d=a_5.$$

Odgovor je pozitivan, pa je: $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_9=9a_5$,

to jest: $$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_5}{2}\cdot 9.$$

Dakle, ako je broj članova datog niza neparan broj, $n=2k+1$, zbir svih članova jeste:

(2) $$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\frac{a_1+a_2}{2}\cdot n.$$

Ali to je ista formula kao i pod (1), jer je $(a_1+a_n)\cdot\frac{n}{2}=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$

Ta se formula lepše piše ovako $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

Prema tome, ako stavimo: $a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n$

onda je: $$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

formula za izračunavanje zbira n članova aritmetičkog niza.

Izračunajte zbir 10 članova niza:

(1) $4, 9, 14, \ldots$ (2) $-12, -9, -6, \ldots$

Izračunajte zbir 12 članova niza:

(3) $2,\ 2\frac{2}{3}\ 3\frac{1}{3}, \ldots$ i (4) $8,\ 6{,}6,\ 5{,}2, \ldots$

Izračunajte zbir:

(5) prvih 100 brojeva množine $N_1=\{1, 2, 3, \ldots\}$;

(6) prvih 80 prirodnih brojeva deljivih brojem 4;

(7) svih brojeva oblika $2n$ kad je $11<2n<65$;

(8) svih brojeva $6n$ kad je $75<6n<190$;

(9) svih brojeva oblika $8n$ kad je $100<8n<400$;

(10) svih brojeva oblika $-5n$ kad je $-500<-5n<-23$;

(11) prvih n parnih brojeva;

(12) prvih n neparnih brojeva.

5) Neka su 4 i 22 dva krajnja člana aritmetičkog niza čiji je broj članova $n=7$. Da napišemo taj niz.

Iz $a_7=a_1+(n-1)d$ je $22=4+6d \Rightarrow d=3$.

Traženi niz glasi: 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22.

Dva člana jednog aritmetičkog niza jesu:

(1) 4 i 25. Umetnite između njih 6 članova.

(2) 2,9 i 15,5. Umetnite između njih 5 članova.

(3) -5 i 11. Umetnite između njih 7 članova.

6) Ako su a i b ma koji realni brojevi, broj $\frac{a+b}{2}$ zove se *aritmetična sredina* brojeva a i b.

Isto tako, $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ zove se aritmetička sredina realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Izračunajte aritmetičku sredinu brojeva:

(1) 37 i 2,8; (2) 17, 9, 40 i 14; (3) $\frac{6}{7}$ i $\frac{2}{5}$; (4) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$.

7) Vratite se za jedan časak na § 20.6, t. **4**. Šta smo tamo izračunavali?

4. 1) Nizovi u t. **1**: (6) pod 1) i (8), (9) i (10) pod 5) imaju zajedničku osobinu. Pronađite je i iskažite.

Svaki od tih nizova zove se *geometrijski niz* („geometrijska progresija") a stalni broj, količnik ma kog člana i prethodnog, zove se *količnik niza* i označava se najčešće slovom q.

Prema tome, ako je:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

geometrijski niz, onda se on može napisati ovako:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots, a_1q^{n-1}\ldots,$$

jer je: $$a_3=a_2q=a_1qq=aq^2,\ a_4=a_3q=a_1q^3, \ldots$$

Znači, opšti (ili poslednji) član geometrijskog niza glasi:

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

Na primer, ako je prvi (početni) član 3, a količnik je 2, onda pet prvih članova geometrijskog niza jesu 3, 6, 12, 24, 48.

Ako su prva tri člana niza 16, 8, 4, onda je $q=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, pa je:

$$a_5=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=1.$$

Osmi član istog niza je $a_8=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=16\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$.

2) Neka je s_n zbir prvih n članova geometrijskog niza $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ Tada je:

$$s_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1} \text{ ili}$$

(1) $$s_n=a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}),$$

pa ako bismo uspeli da nađemo formulu za izračunavanje zbira

(2) $$s_q=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1},$$

mogli bismo da izračunamo zbir

(3) $$s_n=a_1s_q.$$

Pomnožimo jednakost (2) količinikom q:

(4) $$s_q\cdot q=q+q^2+q^3+\ldots+q^n.$$

Oduzmimo jednakost (4) od (2), pa je:

$$s_q - s_q \cdot q = 1 + (q-q) + (q^2 - q^2) + \ldots (q^{n-1} - q^{n-1}) - q^n,$$

tj. $$s_q(1-q) = 1 - q^n, \text{ tj. } s_q = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Stavimo s_q u (3), tj. u $s_n = a_1 s_q$, pa je:

(5) $$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Na primer, izračunajmo zbir prvih 7 članova niza 3, 6, 12, ... Kako je $a=3$, $q=2$, dobijamo $s_7 = 3 \cdot \frac{1-2^7}{1-2} = 3(2^7-1) = 3 \cdot 127 = 381$.

Proverite to sabiranjem: $3+6+12+24+48+96+192=$

3) Izračunajte zbir:

(1) prvih 5 članova niza 2, 6, 18, ... a zatim izračunajte zbir prvih 6 članova niza:

(2) 128, 64, 32, ...; (3) 3, -6, 12, ... ; (4) 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... ; (5) 4, -6, 9, ...

4) Dva člana geometrijskog niza jesu 3 i 192. Umetnimo između njih 5 članova tog niza. Posle umetanja broj svih članova je $n=7a_7=192=3q^6$, tj. $q^6=64$, $q^3=\sqrt{64}=\pm 8$, $q=\pm 2$. Dakle, traženi članovi jesu: 6, 12, 24, 48, 96 ili -6, 12, -24, 48, -96.

Umetnite četiri člana geometrijskog niza između:

(1) 5 i 160; (2) 384 i 12; (3) 162 i $-\frac{2}{3}$.

5) U nizu: 5, 10, 20, 40, 80, 160, ...

je: $$10=\sqrt{5\cdot 20}=\sqrt{100}, \quad 20=\sqrt{10\cdot 40}, \quad 40=\ldots$$

U nizu [t.1,5 (8)]:

$$0{,}3, \ 0{,}03, \ 0{,}003, \ 0{,}0003, \ldots$$

je: $$0{,}03=\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}003}=\sqrt{0{,}00009}$$

$$0{,}003=\sqrt{0{,}03\cdot 0{,}0003}=\sqrt{0{,}000009}.$$

Proverite da to važi za svaki od već navedenih geometrijskih nizova.

Uopšte, u: $$a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \ldots$$

je: $$a_1q=\sqrt{a_1\cdot a_1q^2}=\sqrt{a_1^2q^2}, \quad a_1q^4=\sqrt{a_1q^3\cdot a_1q^5}=\sqrt{a_1q^8}, \ldots$$

Kvadratni koren $\sqrt{ab}$ proizvoda dva pozitivna ili dva negativna realna broja zove se *geometrijska sredina* ta dva broja.

Uopšte, $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$, gde su $a_1, a_2, \ldots a_n$ nenegativni realni brojevi, zove se geometrijska sredina brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

5. 1) Označeni zbir svih članova svakog beskonačnog niza zove se (matematički) *red*. Redovi su, na primer:

(1) $1+3+5+7\ldots$ (aritmetički red)

(2) $1+2+4+8+\ldots$ (geometrijski red)

(3) $0{,}3+0{,}03+0{,}003+\ldots$ (geometrijski red)

(4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ (geometrijski red)

(5) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$

(6) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

(7) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$

Uopšte, $a_1+a_2+a_3+\ldots$, gde je broj sabiraka neograničen zove se red. Njegovi članovi su $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Očigledno je da se u slučaju (1) ne može govoriti o određenom zbiru. Zašto? To isto važi i za red (2).

2) U slučaju (3), međutim, možemo napisati, prema prethodnoj formuli (5):

$$s_n = 0{,}3\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0{,}3}{0{,}9}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right].$$

Kad n raste neograničeno $(0{,}1)^n$ *teži* nuli (§ 21.7, t. **2**, 5).

A tada zbir $s_n = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$ *teži* broju $\frac{1}{3}$.

I zato kažemo da je red (3) *konvergentan*. [Redovi (1) i (2) su *divergentni*.]

Svaki periodičan decimalan broj je jedan kovergentan red, na primer:

(1) $8{,}0077\ldots = 8+0{,}007+0{,}0007+0{,}00007+\ldots$

$$= 8+0{,}007\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= 8+0{,}007\cdot\frac{1-0}{0{,}9}$$ [kad n raste neograničeno[1]

$$= 8+\frac{0{,}007}{0{,}9} = 8+\frac{0{,}07}{9} = 8+\frac{7}{900},$$

što dobijamo i postupkom datim u § 21.5, t. **3**.

(2) $5{,}49212(13) = 5+0{,}49212+0{,}0000013+0{,}000000013+\ldots$

$$= 5+0{,}49212+0{,}0000013\cdot\frac{1-(0{,}01)^n}{1-0{,}01},$$

pa kad n raste neograničeno, $(0{,}01)^n$ teži nuli

i $$5{,}4921213 = 5+0{,}49212+\frac{0{,}0000013}{0{,}99}$$

$$= 5+0{,}49212+\frac{0{,}00013}{99}$$

$$= 5+\frac{49212}{10^5}+\frac{13}{99\cdot 10^5}$$

$$= 5+\frac{49212(100-1)+13}{99\cdot 10^5}$$

$$= 5+\frac{4921213-49212}{9900000},$$

tj. rezultat koji dobijamo i primenom spomenutog postupka.

Zato se periodični decimalni brojevi zovu i *periodični decimalni redovi. Periodični decimalni redovi su konvergentni.*

3) Ima i mnogo drugih konvergentnih (i divergentnih) redova i ispitivanje konvergencije redova (razumljivo i u opštem obliku) je predmet jedne obimne matematičke teorije (teorije redova). Mi ćemo, apelujući na intuitivnost, ukazati samo na jedan delić te teorije.

a) (1) Primer $0{,}3+0{,}03+0{,}003+\dots$ posmatrali smo i u § 21.5, t. **6**. Očigledno je, naime, da su članovi niza:

$$0{,}33;\ 0{,}333;\ 0{,}3333;\ 0{,}33333;\dots$$

uzastopni zbirovi: prva dva člana, prva tri člana, ..., prvih n članova reda:

$$0{,}3+0{,}03+0{,}003+0{,}0003+\dots$$

i da se oni približavaju jednom broju $\frac{1}{3}$.

Ti uzastopni zbirovi su, dakle, uzastopni delimični zbirovi napisanog reda i on je konvergentan zato što se oni (njegovi delimični zbirovi) neograničeno približuju jednom broju.

(2) Posmatrajmo red:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Njegovi uzastopni delimični zbirovi jesu:

$$1\frac{1}{2},\quad 1\frac{3}{4},\quad 1\frac{7}{8},\quad 1\frac{15}{16},\quad 1\frac{31}{32},\dots$$

Svaki sledeći je veći od prethodnog, ali se oni „zgušnjavaju": dok je razlika između drugog i prvog $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, razlika između petog i četvrtog je $\frac{31}{32}-\frac{15}{16}=\frac{1}{32}$ (8 puta manja od $\frac{1}{4}$). Ma koliko članova (napisanog reda) mi sabirali, zbir je veći od prethodnog, ali uvek manji od 2. Broj 2 je, dakle, *granica* niza (uzastopnih delimičnih zbirova):

$$\left(1+\frac{1}{2}\right),\quad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right),\quad \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right),\dots$$

pa je 2 zbir datog reda i on je konvergentan.

Na osnovu ta dva primera možemo reći: Kad niz uzastopnih delimičnih zbirova teži jednom stalnom broju, tj. kad taj niz ima granicu, taj broj, ta granica je zbir reda i on je konvergentan.

Neka je dat ma koji red:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+\dots$$

gde su $a_1, a_2, a_3, \dots$ realni brojevi koji se ređaju pô nekom zakonu.

Njegovi uzastopni delimični zbirovi jesu: $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3=a_1+a_2+$ $+a_3, \dots$ Ako su oni sve veći, ali s_n je stalno manji od jednog određenog (konačnog) broja g, ma kako bio veliki broj n (npr. $n=10^{10}$, 10^{100}, 10^{1000}, ...), tj. ako se zbirovi

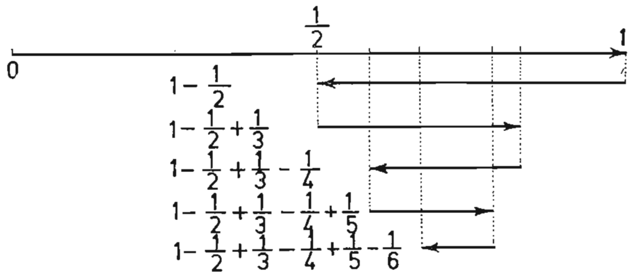
s_n zgušnjavaju, mi možemo zamisliti tačke $S_1, S_2, S_3\dots$ koje odgovaraju brojevima $s_1, s_2, s_3, \dots$ Prema iskazanom uslovu tačka S_2 je „desno" od S_1, S_3 je desno od $S_2, \dots$, ali kako je $s_n<g$ (za ma kako veliko n), nijedna tačka S_n ne može da „pređe na drugu stranu" (levo ili desno) od tačke G. To znači da se sve tačke S posle S_1 nalaze u intervalu $[S_1, G]$ određenom tačkama S_1 i G, npr. desno od S_1 a levo od G. Podelimo taj interval na dva intervala. Tada tačke S ili „ulaze" u desnu polovinu intervala ili ne „ulaze". Ako „ulaze", one tu i ostaju (jer prema uslovu ne mogu preći desno od G). U tom slučaju ta polovina intervala je drugi interval niza (§ 21.5, t. **6**). Ako tačke S ne ulaze u drugu polovinu prvog intervala $[S_1, G]$, one ostaju u prvoj polovini. U tom slučaju mi posmatramo tu „prvu" polovinu kao drugi interval. Produžimo proces pa podelimo drugi interval na dva. Jedna od polovina drugog intervala je treći interval. I tako dalje.

Na taj način dobijamo niz umetnutih intervala (§ 21.7) jer je svaki sledeći interval u unutrašnjosti prethodnog, a dužina intervala teži nuli (što znači: smanjuje se neograničeno). Dakle, postoji jedan, i samo jedan, realni broj koji se nalazi (ili čija se tačka nalazi) u unutrašnjosti svih intervala niza. Taj broj je granica niza uzastopnih delimičnih zbirova reda i zato: red (tj. zbir neograničeno mnogo pozitivnih sabiraka) čiji niz uzastopnih delimičnih zbirova teži jednoj granici (jednom određenom konačnom broju) *konvergira* ka toj granici i ona je, po definiciji, njegov zbir.

b) Jednu drugu vrstu konvergentnih redova ilustruje primer:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

čiji članovi teže nuli (vidi ovu tačku pod 2), a znaci $+$ i $-$ se naizmenično menjaju. Formirajmo uzastopne delimične zbirove i označimo odgovarajuće tačke.



Slika 21.15

Imamo opet niz umetnutih intervala: prvi ograničen zdesna brojem (tačkom) 1, a sleva brojem (tačkom) $1-\frac{1}{2}$, tj. $\left[1, 1-\frac{1}{2}\right]$; drugi je interval $\left[1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]$; treći je $\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$, itd. Osim toga, dužina intervala teži nuli. Dakle, postoji jedna i samo jedna tačka (jedan i samo jedan broj) koja pripada svakom intervalu, tj. uzastopni delimični zbirovi napisanog reda nagomilavaju se oko jedne tačke, granice, i red je konvergentan.

5. Dve vrste ispitanih redova ukazuju na put koji vodi opštem kriterijumu za „prepoznavanje" svakog konvergentnog reda:

Neka je: $a_1+a_2+a_3+\ldots$

red čiji članovi mogu biti pozitivni ili negativni. Svaki put kad formiramo jedan delimični zbir, mi „lomimo" red na dva „komada". Prvi se komad sastoji od konačnog broja prvih (početnih) članova reda, uzetih redom i sabranih da se dobije delimičan zbir. Drugi se komad sastoji od svih ostalih članova koji nisu uračunati u formirani zbir. Nazovimo prvi komad „*glavom*" reda, a drugi „repom" reda. Označimo sa $s_1, s_2, s_3, \ldots$ uzastopne delimične zbirove „glave", a sa $q_1, q_2, q_3, \ldots$ odgovarajuće „repove". Stavimo dakle:

$s_1=a_1$ i odgovarajući „rep" $q_1=a_2+a_3+a_4+\ldots$

$s_2=a_1+a_2$ i odgovarajući „rep" $q_2=a_3+a_4+a_5+\ldots$

$s_3=a_1+a_2+a_3$ i odgovarajući „rep" $q_3=a_4+a_5+a_6+\ldots$

i tako dalje

Svaki put kad formiramo jedan delimični zbir, mi oduzimamo jedan član od „repa" i priključujemo ga „glavi". Znači, kad n (u s_n) raste, delimični zbir s_n se neprekidno menja i to: ako je poslednji prebačeni član (od „repa" „glavi") pozitivan, s_n raste, a ako je taj (prebačeni) član negativan, s_n opada. Ako ne vodimo računa o znaku člana koji se prebacuje, prebačeni član je pozitivan (uopšte nenegativan) broj i zove se apsolutna vrednost (modul) menjanja (varijacije); na primer, porast za $\frac{1}{2}$ ili opadanje za $\frac{1}{2}$ ima isti modul $\frac{1}{2}$.

Red konvergira ako delimični zbirovi teže jednoj granici. A oni teže jednoj granici ako se neograničeno približavaju toj granici (ako se zgušnjavaju, nagomilavaju oko te granice). I ako se uzme dovoljno veliko n, s_n se toliko približava granici da vrlo malo varira, ma koliko se članova reda oduzimalo od „repa" i priključivalo „glavi". Apsolutna vrednost (modul) varijacije može, kad je n dovoljno veliko, da bude toliko mala koliko se hoće. Kako je:

$$s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$

a

$$q_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots,$$

kad prebacimo p prvih članova repa q_n, s_n se povećava za $a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}$. Da bi red konvergirao, nužno je i dovoljno da apsolutna vrednost tog zbira $(a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p})$ teži nuli kad n raste, bez obzira koliko članova sadrži rep. I obrnuto: Ako apsolutna vrednost p prvih članova repa teži nuli kad n raste, ma kako veliki bio p, red konvergira. Tada postoji niz umetnutih intervala i njihova zajednička tačka (broj) je granica niza delimičnih zbirova i zbir reda. Otuda:

U množini R realnih brojeva (jedan) red konvergira (ka jednoj granici) ako je apsolutna vrednost njegovog „repa" ograničena (ili ako se njegov „rep" steže).

§ 21.10. VEŽBANJA I ZADACI

1. Je li $\frac{91}{2002}$ decimalan broj i zašto? Napišite ga u svedenom obliku.

2. Napišite u obliku (svedenog) broja $\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$1{,}101;\ 0{,}002;\ 5{,}55;\ 7{,}0001;\ 17{,}856.$$

3. $\frac{1}{10}$ piše se još na dva načina: 0,1 i 10^{-1}. Uopšte:

$$\frac{1}{10^n}=\underbrace{0{,}00\ldots01}_{n-1\text{ nula}}=10^{-n}$$

Napišite u obliku decimalnog broja:

(1) $8\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{7}{10^2}$; (2) $4\cdot10+6\cdot10^0+8\cdot10^{-1}+5\cdot10^{-5}$.

4. Neka je $\frac{a}{b}<1$ svedeni razlomak. Koliko ima decimalnih brojeva takvih da je:

(1) $b\leqslant2$; (2) $b\leqslant10$; (3) $b\leqslant50$; (4) $b\leqslant100$.

5. U dekadnom sistemu brojanja je:

$$(21{,}102)_{10}=2\cdot10+1\cdot10^0+1\cdot\frac{1}{10}+2\cdot\frac{1}{10^3},$$

ili (t. **3**) $\quad =2\cdot10+1\cdot10^0+1\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-3},$

ili (t. **3**) $\quad =2\cdot10+1\cdot10^0+1\cdot0{,}1+2\cdot0{,}001.$

Je li ovo tačno:

$$(21{,}102)_3=\left[2\cdot3+1\cdot3^0+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^3}\right]_{10},$$

ili $\quad =[2\cdot3+1\cdot3^0+1\cdot3^{-1}+2\cdot3^{-3}]_{10}.$

Napišite tako: $(21{,}102)_7$; $(0{,}64)_9$; $(12{,}01)_3$; $(101{,}1)_2$; $(0{,}001)_2$; $(0{,}001)_5$.

6. 1) Svaki od sledećih brojeva napisan je u dekadnom sistemu. Napišite ga (kad god je to moguće) u obliku decimalnog broja u sistemu brojanja čija je osnova 3:

$$\frac{2}{3};\ \frac{6}{54};\ \frac{9}{12};\ \frac{5}{9};\ \frac{2}{7};\ \frac{6}{50}.$$

2) Napišite prethodne brojeve kao decimalne u sistemu brojanja čija je osnova 11.

7. 1) Napišite $\frac{a}{2^3}$ u obliku decimalnog broja (u dekadnom sistemu):

(1) sa 2 decimale; (2) sa 3 decimale.

2) Koji uslov mora da zadovoljava a u $\frac{a}{2^n}$, pa da se $\frac{a}{2^n}$ napiše u obliku decimalnog broja?

3) Isto pitanje za $\frac{a}{5^n}$.

4) Koji uslov treba da zadovoljava a u $\frac{a}{2^m\cdot5^n}$ pa da se u decimalnom obliku taj broj piše sa $m+n$ decimala?

Sve se, u ovoj tački, podrazumeva u dekadnom sistemu.

8. Izračunajte u sistemu brojanja čija je osnova:

1) dva: (1) $111,1+1,111$; (2) $11,0001-0,001$;
(3) $10,1\cdot 0,01$; (4) $0,111\cdot 111$.

2) tri: (1) $112,01+221,12$; (2) $221,2-0,022$;
(3) $21\cdot 0,12$; (4) $2,02\cdot 100$.

3) 9: (1) $456,02+0,088$; (2) $4,85-1,835$;
(3) $808\cdot 0,06$; (4) $121,7\cdot 0,6$.

9. Izrazite periodičnim decimalnim brojem:

$$\frac{5}{12};\ \frac{5}{11};\ \frac{3}{7};\ \frac{2}{13};\ \frac{2}{17}.$$

10. Napišite, primenjujući dva postupka (§ 21.5, t. **3** i § 21.8, t. **4.** 2) u obliku razlomka:

$$0,555\ldots;\ 0,\dot{7};\ 0,(123);\ 0,\overline{025};\ 6,25757\ldots$$

11. $\left(\frac{1}{3}\right)_{10}=0,333\ldots$ [periodičan decimalan broj a $\left(\frac{1}{3}\right)_3=0,1$ („decimalan broj")]. Isto tako je $\left(\frac{2}{9}\right)_{10}=0,(2)$, a $\left(\frac{2}{9}\right)_9=0,2$. Izaberite osnovu brojanja tako da sledeći broj bude „decimalan broj":

$$\frac{5}{11};\ \frac{2}{7};\ \frac{5}{9};\ \frac{13}{11};\ \frac{4}{5};\ \frac{9}{101};\ \frac{13}{8}.$$

12. 1) Neka je P množina periodičnih decimalnih brojeva. Neka $x, y\in P$, $x=\frac{a}{b}$ $y=\frac{c}{d}$, $z=x+y$. Popunite:

x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$	$z=x+y$
$0,4\dot{5}$	$0,\dot{3}$				
$0,(36)$	$0,(285714)$				
$0,2\dot{3}$	$0,2\dot{6}$				

2) Je li P zatvorena u odnosu na sabiranje?

3) Neka je $xy=u$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=u$. Popunite:

x	y	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$	$xy=u$
$0,2(3)$	$0,2(6)$				
$0,58\dot{3}$	$0,(428571)$				

4) Je li P zatvorena u odnosu na množenje?

13. 1) Pokažite da je $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

2) Neka su x i y racionalni brojevi. Dokažite da $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

3) Napišite tri beskonačna periodična broja.

14. Zbir, razlika, proizvod iracionalnih brojeva nisu obavezno iracionalni broj. Navedite primere.

15. 1) Neka su a i b realni brojevi. Šta možete reći o njima ako je $a-b>0$?

2) *Neka je M neprazna množina realnih brojeva (tj. $M\subset R$). Broj a zove se gornja granica množine M tada, i samo tada, kad je $m\leq a$, za svako $m\in M$.*

Ispitajmo razne slučajeve.

(1) Neka je $M=\{0, 2, 5, 7, 11\}$. Gornja granica množine M je svaki prirodni broj veći od 11, npr. 58, 25, 16, ... Ali, množina M ima i *najmanju gornju granicu* koja pripada množini N. To je 11.

Za svaku od sledećih množina odredite gornju i najmanju gornju granicu koja pripada množini N: $\{5, 7, 0, 23, 3\}$; $\{1, 2, \ldots, 100\}$.

Ima li množina $\{0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$ gornju granicu? Dakle, nema svaka podmnožina prirodnih brojeva gornju, pa dakle ni najmanju gornju granicu. Ako množina $M\subset N$ ima gornju granicu koja $\in N$, ona ima i najmanju gornju granicu.

(2) Neka je $M\subset Z$. Da li M ima gornju i najmanju gornju granicu? Na primer:
(a) $M=\{-3, 4, 17,0, -68\}$; (b) $M=\{-3, -2, -1, 0, 2, \ldots\}$;
(c) $M=\{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6\}$; (d) $\{-4, -5, -6\}$.

(3) Neka je $M\subset Q$. Da li M ima gornju i najmanju gornju granicu? Na primer:

(a) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}\right\}$; (b) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots\right\}$;

(c) $\{0,1, 0,7, 0,3, 0,2, 0,9, 0,5, 0,8,\}$; (d) $\left\{\frac{1}{3^n}\mid n>1,\ n\in N\right\}$.

(4) Neka je $M=\{x\mid x$ je nenegativan broj takav da je $x^2<2\}$. Ima li M gornju granicu?

(5) Neka je $M\subset R$ i neka M ima gornju granicu u R. Ima li tada M najmanju gornju granicu u R?

16. Kad je: (1) $\lambda_2\subseteq\lambda_1$; (2) $\lambda_1\subseteq\lambda_2$; (3) $\lambda_1\cup\lambda_2=\lambda_3$; (4) $\lambda_1\cup\lambda_2\cap\lambda_3=\lambda_3$; (5) $\lambda_1\cup\lambda_2=\lambda_2$? Pokažite crtežom svaki slučaj.

17. 1) Označite na pravi brojeva prvih pet intervala niza:

$$[-1,1];\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];\ \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right];\ \ldots;\ \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right];\ \ldots$$

2) Je li to (pod 1) niz umetnutih intervala? Ako jeste, kojoj tački teži (koja je njihova zajednička tačka)?

3) Označite na pravi brojeva niz intervala:

$$[-1,2];\ \left[\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right];\ \left[\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right];\ \ldots;\ \left[\frac{-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right]$$

i ako je to niz umetnutih intervala, označite tačku kojoj on teži.

4) Označite pet prvih članova niza $J_n=\left[\frac{\sqrt{2}-2}{n}, \frac{\sqrt{2}+2}{n}\right]$ i odredite broj kome on teži.

5) Isto kad je $J_n=\left[3-\frac{1+\sqrt{2}}{n},\ 3+\frac{1-\sqrt{2}}{n}\right]$.

18. Konstruišite niz krugova koji:

(1) teži (konvergira) zajedničkom centru;

(2) teži tački kružnice prvog kruga.

19. 1) Konstruišite tačku prave brojeva čija je koordinata: $\frac{-3}{2}$; $\frac{-7}{4}$; $\frac{19}{8}$; $\frac{-24}{8}$; $-2+\sqrt{7}$.

2) Izračunajte metodom § 21.7, t. **2**, 5) prvih 5 decimala broja $\sqrt{7}$.

20. 1) Pokažite primerima da je množina D zatvorena u odnosu na sabiranje, oduzimanje i množenje, a nije zatvorena u odnosu na deljenje.

2) Pokažite (pomoću aritmetičke sredine) da u intervalu $[0{,}051;\ 0{,}052]$ ima neograničeno mnogo decimalnih brojeva. Izračunajte bar pet.

3) Skicirajte prethodni interval deleći ga prvo na 10 podudarnih intervala, zatim na 100 i najzad na 1000 podudarnih intervala.

21. Dokažite u množini R (realnih brojeva):

1) Ako je $a+x=b+x$, onda je $a=b$.

2) Ako je $ab=0$, onda je ili $a=0$, ili $b=0$.

3) $ab=ac,\ a\neq 0 \Rightarrow b=c$. 4) $b>a \Rightarrow b+c>a+c$. 5) $ac<bc,\ c<0 \Rightarrow a>b$.

22. 1) Koji je broj veći: $\frac{17}{12}$ ili $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ ili $\frac{577}{408}$?

2) Napišite simetrični i recipročni broj broja: -3; -4 (63); $\sqrt{2}$.

23. Izračunajte: (1) $0{,}\dot{2}-0{,}\dot{3}$; (2) $\sqrt{2}-(-5\sqrt{2})$;

(3) zbir i proizvod brojeva $1{,}(54)$ i $2{,}3\dot{9}$.

24. Svaka bakterija deli se svakog časa na 2 bakterije. Na početku ima 4 bakterije. Koliko će ih biti posle 7 časova?

25. Izračunajte zbir reda:

(1) $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ \dots$

(2) $1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ \dots$

(3) $1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ \dots$

(4) $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ \dots$

(5) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ \dots$

(6) $3+2+\frac{4}{3}+\ \dots$

(7) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ \dots$

(8) $4-3+\frac{9}{4}-\ \dots$

GLAVA XXII

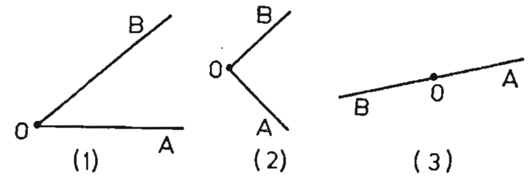
NAJNUŽNIJE PROŠIRENJE MNOŽINE ELEMENTARNIH GEOMETRIJSKIH POJMOVA. PRIMENA REALNIH BROJEVA U GEOMETRIJI

U glavi IV i glavi VII proučen je (razumljivo u okviru postavljenih zadataka knjige) niz elementarnih geometrijskih pojmova. U ovoj glavi dodaćemo još neke neophodne geometrijske pojmove (uglavnom intuitivno i informativno, ne upuštajući se u njihovu dublju analizu, što je takođe određeno namenom knjige). Zatim ćemo pokazati kako se realni brojevi dodeljuju nekim geometrijskim objektima, što je već započeto u prethodnoj glavi (posebno § 21.7). Ali, prethodno učinimo jednu napomenu tehničke prirode.

Svaka geometrijska figura je množina (skup) tačaka (§ 4.2 i § 4.3). U prvih deset glava tačke su označene malim latinskim slovima kako je usvojeno u teoriji množina. Međutim, iz tehničkih razloga (a i tradicija da se u geometriji tačke označavaju velikim latinskim slovima je duga i jaka), mi smo, već u prethodnoj glavi (XXI), počeli da tačke označavamo velikim slovima, što ćemo sprovoditi i u ovoj glavi. Nastojaćemo da usled toga ne nastane nigde zbrka, ali i čitalac treba da obrati pažnju i vodi računa koji pojam označava dotično slovo.

§ 22.1. UGAO. POLIGONALNA LINIJA I POLIGON. KRIVA (LINIJA)

1. Ugao. — 1) Ugao se definiše kao par dveju polupravih (§ 7,6) sa *zajedničkim početkom.*



Slika 22.1

Svaka poluprava zove se *krak* ugla, a njihov zajednički početak je *teme* ugla. Ugao se označava i čita: $\angle AOB$ ili (kad nema bojazni od zabune) $\angle O$.

Ako se kraci ugla nalaze u normalnom međusobnom položaju, on je „prav" — *pravi ugao.*

Ako su kraci podmnožine iste prave, ugao je „opružen" ili „ravan" — *opruženi ugao* ili *ravni ugao.*

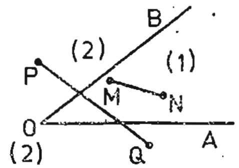
2) Ugao deli ravan Π u dve množine koje nemaju zajedničkih tačaka. Prema tome, kad god posmatramo ugao, razlikujemo tri podmnožine ravni Π:

(1) množinu koja se zove ugao;

(2) jednu konveksnu množinu [sl. 22.2(1)];

(3) jednu nekonveksnu množinu [sl. 22.2(2)].

Jedna od množina, (2) ili (3), zove se unutrašnja oblast ili *unutrašnjost* ugla. Ona druga je *spoljašnjost* ugla. Naime, ako se AOB (sl. 22.2) smatra granicom konveksne oblasti (1), onda je ta (konveksna) oblast unutrašnjost ugla AOB.



Slika 22.2

U protivnom, tj. ako je AOB granica nekonveksne oblasti, ona je unutrašnjost ugla. U stvari, dve poluprave OA i OB, sa zajedničkim početnikom, „obrazuju" dva ugla i mi možemo posmatrati jedan ili drugi i zavisno od toga određujemo njihovu unutrašnjost. (Ili, što je isto, prvo se dogovorimo koju ćemo množinu smatrati unutrašnjom i time je ugao, koji se posmatra, određen.)

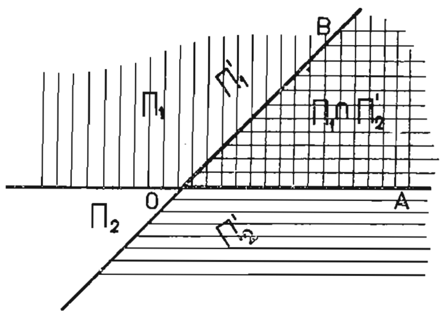
3) (1) U mnogim oblastima savremene matematike (a ponekad i u samoj geometriji) pod uglom se podrazumeva konveksna množina ravni određena dvema polupravama sa zajedničkim početkom. Preciznije:

Ugao je *presek* dveju poluravni određene pravama čiji su delovi dve poluprave sa zajedničkim početkom (sl. 22.3).

Prava koja sadrži krak OA određuje poluravni Π_1 i Π_2, a prava koja sadrži OB određuje poluravni Π_1' i Π_2'.

(2) Najzad, ugao se definiše i kao *množina svih polupravih ravni Π, koje izlaze iz O a čije su „granice" OA i OB.*

(3) *U svakom slučaju unutrašnjost ugla je presek (u smislu teorije množine) dveju poluravni.*

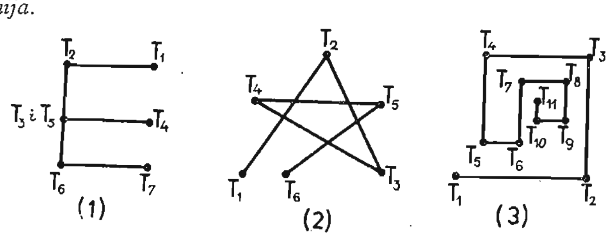


Slika 22.3

2. Poligonalna linija i poligon — 1) Uočimo, $(k+1)$ tačaka ravni, pri čemu nije obavezno da su sve različite (tj. neke se mogu i poklapati), ali je obavezan *određen red* (poredak) kojim „slede" jedna za drugom:

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \ldots,\ T_k,\ T_{k+1}.$$

Unija $[T_1T_2] \cup [T_2T_3] \cup [T_3T_4] \cup \ldots \cup [T_{k-1}T_k] \cup [T_kT_{k+1}]$ zove se *poligonalna linija*.



Slika 22.4

Tačke $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ zovu se *temena*, a duži $[T_1T_2]$, $[T_2T_3], \ldots$, $[T_kT_{k+1}]$ zovu se *stranice* poligonalne linije. Red kojim su data temena određuje njihovu *uzastopnost*. Tri uzastopna temena određuju dve *uzastopne* („susedne") stranice.

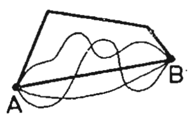
Poligonalne linije mogu da budu vrlo komplikovane. Ako su prvih k temena različite tačke i ako se ma koje dve stranice ne seku (tj. ako osim zajedničkih temena uzastopnih stranica, linija nema drugih tačaka koje se poklapaju), poligonalna linija je *prosta* [npr. sl. 22.4(3)].

2) Prosta poligonalna linija kod koje je $T_1 = T_{k+1}$ (prvo i poslednje teme ...) zove se *prosti poligon* ili *prosti mnogougao*; na primer, svaki trougao i mnogi četvorougli (§ 7.8) su prosti poligoni (mnogougli). Crtež 22.6 takođe prikazuje jedan prosti mnogougao (poligon).

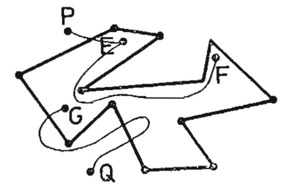
Zbir svih stranica mnogougla (poligona) zove se njegov *obim*.

3) Svaka linija koja vezuje dve tačke ravni (Π) zove se *koneksija* tih tačaka (sl. 22.5). U specijalnom slučaju koneksija može biti poligonalna linija, koja se sa svoje strane može svesti na duž.

Ako je broj zajedničkih tačaka koneksije (dveju tačaka ravni Π) i prostog mnogougla $\boldsymbol{M}$ paran (nula je paran broj), tačke (vezane koneksijom) zovu se *unutrašnje tačke* mnogougla (u odnosu na mnogougao) $\boldsymbol{M}$. Ako je broj zajedničkih tačaka koneksije i prostog mnogougla $\boldsymbol{M}$ neparan, jedna (od tačaka vezanih koneksijom) je unutrašnja, a druga *spoljašnja*. (Pokažite na crtežu 22.6 unutrašnje i spoljašnje tačke mnogougla $\boldsymbol{M}$).



Slika 22.5



Slika 22.6

Na osnovu prethodnog, intuitivno uviđamo da prosti mnogougao (poligon) deli ravan Π u dve množine koje nemaju zajedničkih tačaka. Prema tome, kad god posmatramo prosti mnogougao, razlikujemo tri podmnožine ravni Π:

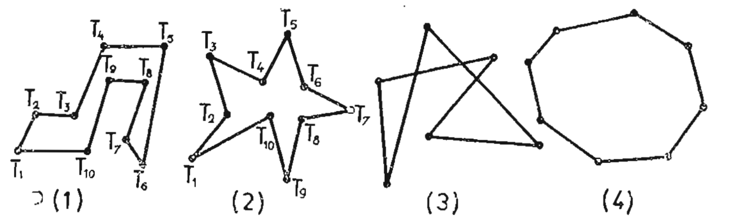
(1) množinu koja se zove mnogougao;

(2) množinu unutrašnjih tačaka;

(3) množinu spoljašnjih tačaka.

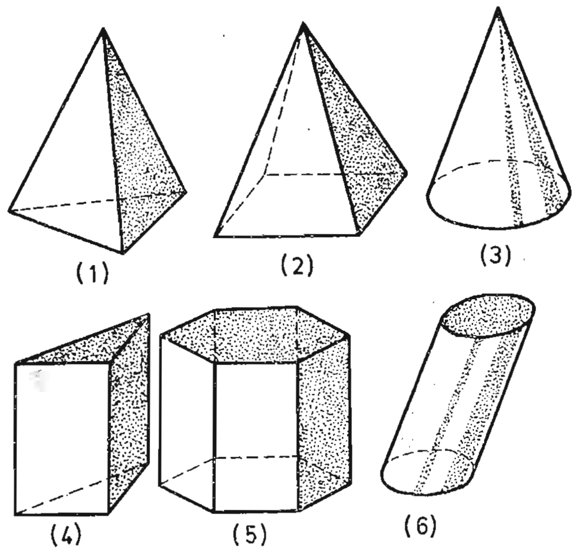
Množina (2) unutrašnjih tačaka se kratko zove *oblast mnogougla*. Znači samo prosti mnogougao ima (svoju) oblast.

4) (1) Pokažite na sl. 22.7 crteže prostih mnogouglova i njihove oblasti.



Slika 22.7

uvedemo disk). Trouglu analogna prostorna figura je tetraedar [sl. 22.12(1)], a pravilnom trouglu — pravilni tetraedar.



Slika 22.12

Tetraedar je specijalna piramida.

Možemo da zamislimo i druge raznovrsne piramide, zatim razne vrste prizme [crteži (4) i (5) prikazuju dve vrste], među kojima je najpoznatiji pravougli paralelepiped („kvadar“, kocka je specijalan kvadar), i druge analogone poligona čiji je zajednički naziv *poliedri*. Dakle, u ravni poligoni, u prostoru poliedri; poligone čine delovi prave (stranice), poliedre čine delovi ravni (strane poliedra). Otuda „trostrana“, „četvorostrana“, „petostrana“, . . . „n-to strana“ piramida, odnosno „n-to strana“ prizma. Samo, „n-to strani“ poliedar ne označava uvek, kao n-to stranični poligon, poliedar čiji je broj strana n, na primer, broj strana n-to strane piramide je $n+1$, a broj strana n-to strane prizme je $n+2$.

2) Krivolinijskim ravnim figurama odgovaraju prostorne figure koje se sastoje od delova krivih i ravnih površi (kupa, valjak) ili samo od krivih (sfera, elipsoid).

4. Sve spomenute (i mnoge druge) prostorne figure su ***konveksne***, kao i mnogi poligoni i uopšte kao što su mnoge ravne (u ravni) proste zatvorene linije. I kao što svaki prosti poligon, uopšte svaka ravna prosta zatvorena linija, ograničuje deo ravni „načinjen“ od unutrašnjih tačaka, tako i svaka konveksna prostorna figura (konveksni poliedri, kupa, valjak, sfera) ograničuje deo prostora „načinjen“ od *unutrašnjih tačaka* u odnosu na datu figuru: Dve ma koje unutrašnje tačke konveksne prostorne figure određuju duž koja nema zajedničkih tačaka sa figurom. Jedna unutrašnja i jedna spoljašnja tačka određuju duž koja ima jednu zajedničku tačku sa figurom (duž koju figura seče).

Množina svih unutrašnjih tačaka zove se *geometrijsko telo*: piramidalno (ako je figura koja ga određuje piramida), kupasto (konusno), prizmatično, itd.

Razumljivo je da možemo zamisliti i nekonveksne prostorne figure koje ograničuju unutrašnjosti tela, ali su to predmeti specijalnih matematičkih ispitivanja.

5. 1) Zamislite ravnu konveksnu figuru Γ (veliko grčko slovo gama) i tačku T, koja ne pripada ravni figure Γ. Zamislite sve duži određene tačkama figure Γ i tačkom T. Te duži obrazuju jedan deo prostorne figure. Drugi njen deo je oblast figure Γ, tj. deo ravni ograničen figurom Γ. Tako možemo zamisliti svaku piramidu, svaku kupu.

2) Zamislite ravnu konveksnu figuru Γ i tačku T van ravni figure Γ. Zamislite ma koju tačku S figure Γ i duž $[ST]$. Neka su S_1, S_2, S_3, . . . sve tačke figure Γ. Zamislite sve duži $[S_1T_1]$, $[S_2T_2]$, . . . paralelne i podudarne duži $[ST]$ i u istom poluprostoru, koji određuje ravan figure Γ, u kome se nalazi $[ST]$. Sve te duži obrazuju jedan deo prostorne figure. Druga dva dela obrazuju oblast (unutrašnjost) figure Γ i „isto takva“ oblast koju ograničuju tačke T_1, T_2, T_3, . . . u ravni paralelnoj ravni figure Γ. Tako možete zamisliti svaku prizmu i svaki valjak.

Prostorne figure koje ste zamislili pod 1) i 2) čine, bezmalo, sve konveksne prostorne figure.

3) Kako zamišljate sferu?

§ 22.3. NEKE (VAŽNIJE) GEOMETRIJSKE RELACIJE

U glavama IV i VII upoznali smo dve geometrijske relacije: paralelnost i perpendikularnost. Videli smo da je paralelnost jedna relacija ekvivalencije a perpendikularnost nije. (Zašto?) Te relacije postoje i između nekih prostornih figura. Spomenuli smo (prethodni §) paralelnost pravih i ravni. Isto tako, dve prave, dve ravni, prava i ravan mogu biti međusobno perpendikularne. (Navedite primere.)

Polazeći od toga da se pojmovi jednakost i podudarnost duži često identifikuju, dosad smo upotrebili, u nekoliko mahova, termin „podudarne duži“ iako to nismo prethodno definisali.

Podudarnost, sličnost i „manje“ odnosno „veće“ su tri važne geometrijske relacije. Ovde ćemo izneti samo njihovu suštinu.

1. *Podudarnost.* — 1) Intuitivno, za dve figure kažemo da su podudarne ako se razlikuju samo po položaju. I ni po čemu drugom.

Jezikom teorije množina i geometrijskim jezikom to znači ovo:

Svaka geometrijska figura je, ponavljamo, množina tačaka. *Ako između tačaka dveju figura **F** i **F'** postoji bižekcija (jednoznačna obostrana korespondencija) i ako ta bižekcija održava sva odstojanja odgovarajućih tačaka, figure su podudarne (kongruentne).**

* U toj definiciji upotrebili smo termin *odstojanje*. Smatramo da je odgovarajući pojam približno formiran (intuitivno ili prethodnim obrazovanjem koje je, takođe, moralo biti intuitivno). Ako nije, zamislite ili označite tačke M_1, M_2 . . . , M_n. Ubodite iglu šestara u M_1 i raširite ga da vrh njegove pisaljke bude u M_2. Ne menjajući otvor šestara probajte da nađete još jedan par tačaka tako da igla bude u jednoj a vrh pisaljke u drugoj. Pretpostavimo da ste našli par $\{M_4, M_7\}$. Tada kažemo da je odstojanje tačaka M_1, M_2 „jednako“ odstojanju tačaka M_4, M_7 i to zapisujemo ovako:

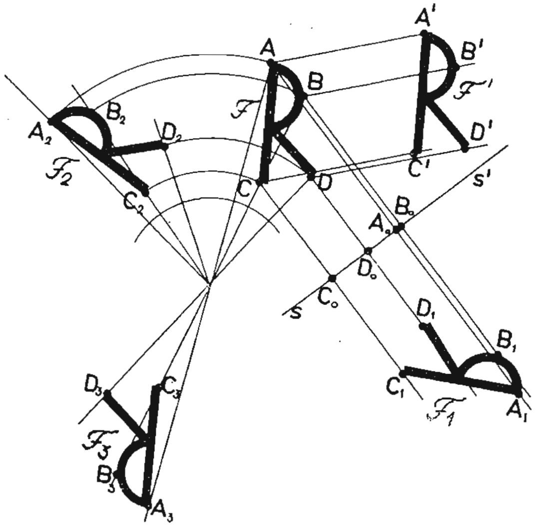
$$d(M_1, M_2) = d(M_4, M_7).$$

Po sebi se razume da tu jednakost možemo napisati i ovako:

$$d(M_2, M_1) = d(M_4, M_7)$$

(Nastavak na 348. strani.)

Postoje metode kojima se iz date figure F može dobiti kongruentna figura F' (ili obrnuto). One se zovu *izometrijske transformacije*, poimenično: translacija, rotacija, osna simetrija i centralna simetrija. Sve su prikazane crtežom:



Slika 22.13

Ne upuštajući se u detaljna „objašnjenja",* napomenimo da je figura:

F' dobijena iz F translacijom, tj. tačke figure F' konstruisane su tako da su duži $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, ... paralelne i podudarne (konstrukcije se vrše lenjirom i šestarom);

F_1 dobijena je iz F osnom simetrijom, tj. $[AA_1] \perp ss'$ i $[A_1A_0]$ podudarno sa $[AA_0]$, $[BB_1] \perp ss'$ i $[B_1B_0]$ podudarno sa $[BB_0]$, ... ;

F_2 dobijena iz F rotacijom oko centra O, svi uglovi AOA_2, BOB_2, COC_2, itd. su podudarni i $[OA_2]$ podudarno sa $[OA]$, $[OB_2]$ podudarno sa $[OB]$, ... ;

F_3 dobijena je iz F centralnom simetrijom u odnosu na centar O, tj. A, O, A_3 pripadaju istoj pravi i $[OA_3]$ podudarno sa $[OA]$, B, O, B_3 pripadaju istoj pravi i $[OB_3]$ podudarno sa $[OB]$.

Zato se u savremenoj matematici daje ovakva definicija kongruentnosti (podudarnosti):

$$d(M_1, M_2) = d(M_7, M_4)$$
$$d(M_4, M_7) = d(M_1, M_2)$$

A „održava sva odstojanja" znači da ako su A, B bilo koje tačke figure F a A' B' odgovarajuće tačke figure F', onda je $d(A', B') = d(A, B)$.

Treba još obratiti pažnju da smo napisali „jednako". To smo učinili zato što spomenuti eksperiment samo delimično vodi pojmu „jednaka odstojanja". Potrebna je suptilnija analiza tog pojma, u što se ovde ne možemo upuštati.

* Izometrijske transformacije su detaljno prikazane u *Nastavi geometrije*, izd. Zavoda za izdavanje udžbenika SRS, 1964. Tamo je pokazano i upoređivanje uglova i konstrukcija podudarnih uglova (o čemu se govori ovde i u sledećoj tački). O svemu tome govori se i u udžbenicima geometrije za V i VI razred.

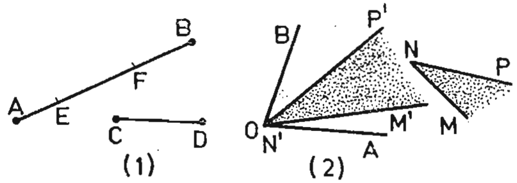
Figure F i F' su kongruentne ako su dobijene jedna iz druge primenom jedne ili više uzastopnih izometrijskih transformacija.

Razumljivo je da se u mnogo slučajeva utvrđuju kriterijumi kongruentnosti, pa nije potrebno da se jedna figura dobija iz druge „tačku po tačku".

2) Kao simbol podudarnosti upotrebljava se $\cong$, dakle $F' \cong F$ i specijalno $[AB] \cong [CD]$, $\angle AOB \cong \angle PQR$ (uglovi ... su podudarni), $\triangle AOB \cong \triangle PQR$ (trouglovi ... su podudarni).

3) *Podudarnost je jedna relacija ekvivalencije.* Obrazložite.

2. Relacija „... je manja (veća) od ..." — 1) Za figuru F' kažemo da je manja od figure F, ako je F' podudarna (pravoj) podmnožini množine F; na primer:



Slika 22.14

$$[AB] > [CD], \text{ jer je } [CD] \cong [EF] \subset [AB];$$

$$\angle MNP < \angle AOB, \text{ jer je } MNP \text{ podudaran delu ugla } AOB.$$

To je samo „kvalitativno" upoređivanje figura, samo konstatacija da je jedna figura manja odnosno veća od druge. I zato se na taj način ne mogu uporediti sve figure. Jasno je po sebi da relacija „manje" odnosno „veće" ne postoji, npr., između jedne duži i jednog ugla, jednog trougla i jednog četvorougla, ... Ali tako kako je ta relacija definisana i kako su definisane figure, ona ne postoji, uopšte uzev, ni između dva trougla, dva četvorougla, ..., dve piramide, ...*

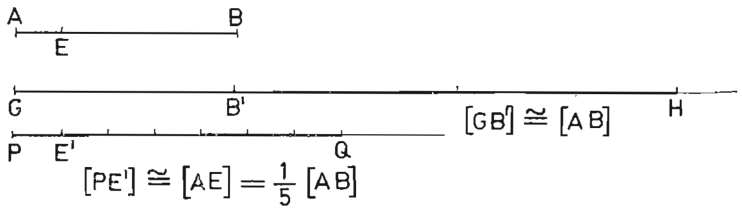
2) Jedan „prelaz" između „kvalitativnog" i „kvantitativnog" upoređivanja figura (množina tačaka) jeste, na primer:

Duž $[AB]$ je 2, 3, ..., 7, 3, $\frac{3}{7}$, ... uopšte *k puta* veća (odnosno manja) od duži $[CD]$, što se zapisuje:

$$[AB \cong k[CD], \ k \text{ realan broj, tj. } k \in R.$$

Ugao AOB je k puta veći od ugla GHK: $\angle AOB \cong k \angle GHK$.

I, teorijski bar, kad god postoji relacija „... je k puta veće (manje) od ..." nepoznata figura se može konstruisati, na primer, ako je data duž $[AB]$, pa treba konstruisati duži $[GH]$ i $[PQ]$ tako da je, npr.: $[GH] \cong 3[AB]$, $[PQ \cong \frac{7}{5}[AB]$, postupa se ovako**:



Slika 22.15

* Nastavak tih razmatranja u § 22.4, t. **2.** 3 i t. **5.** 4.

** Konstrukcije n-puta manje duži (tj. deljenje duži na podudarne duži) pokazane su u § 22.6, t. **6**, 4 i 5 i § 24.5, t. **2**, 4 i 5.

Napominjemo da je dokazano da se ugao ne može (u opštem slučaju) samo lenjirom i šestarom podeliti na 3 podudarna ugla. Upošte, lenjirom i šestarom može se uvek konstruisati $\frac{1}{2^n}$-ti deo ($n \in N_1$) datog ugla. Ali teorijski postoji $\frac{1}{k}$-ti deo svakog ugla, $k \in R$.

Nije potrebno podvlačiti da ako između dve figure postoji relacija „. . . je k puta veća od . . .", a jedna od njih nije data, onda se ni ona druga ne može konstruisati. Relacija $\boldsymbol{F} \cong k\boldsymbol{F}'$ može se napisati u obliku $\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{F}'} = k$ (razmera), ali može postojati beskonačno mnogo figura čija je razmera dati broj k.

Jasno je da ako se između dve figure ne može uspostaviti relacija „. . . je veće od . . ." ne može se uspostaviti ni relacija „. . . je k puta veće (manje) od . . ."

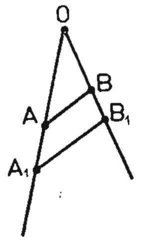
3. Sličnost. — 1) Za figure $\boldsymbol{F}$ i $\boldsymbol{F}'$ kažemo da su slične ako:

(1) svakoj tački T figure $\boldsymbol{F}$ odgovara tačka T' figure $\boldsymbol{F}'$ (bižekcija);

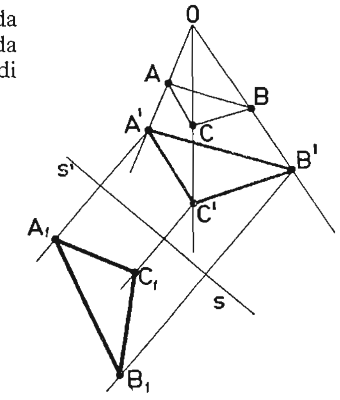
(2) svakom odstojanju $d(T_1, T_2)$ figure $\boldsymbol{F}$ ogdovara k puta veće odstojanje $d(T_1', T_2')$, tj. $d(T_1', T_2') = k \cdot d(T_1, T_2)$, gde su T_1 i T_2 ma koje tačke figure $\boldsymbol{F}$, a T_1' i T_2' odgovarajuće tačke figure $\boldsymbol{F}'$, $k \in R$ (ali stalan, konstantan za date figure);

(3) svakom uglu XYZ figure $\boldsymbol{F}$ odgovara podudaran ugao $X'Y'Z'$ figure $\boldsymbol{F}'$(pri čemu se kod prostornih figura podrazumevaju prostorni uglovi = =dijedri*).

2) Može se dokazati (sl. 22.16) da ako je $[OA_1] = k[OA]$ i $[OB_1] = k[OB]$, onda je $A_1B_1 \| AB$. I obrnuto: Iz $A_1B_1 \| AB$ sledi $[OA_2] = k[OA]$ i $[OB] = k[OB]$.



Slika 22.16



Slika 22.17

Otuda, kad je data jedna od figura $\boldsymbol{F}$ ili $\boldsymbol{H}$ i broj k, ona druga se (u mnogo slučajeva) vrlo jednostavno konstruiše tako da između njih postoji relacija koja zadovoljava sva tri navedena uslova. Zaista (sl. 22.17): Ako su dati figura ABC i broj k, treba uzeti proizvoljnu tačku O i nacrtati polupravе OA, OB, OC (poluprave koje određuju karakteristične tačke date figure). Zatim je dovoljno konstruisati ma koju (karakterističnu] tačku A', ili B' ili C' tako da je $[OA'] = k[OA]$

* Uostalom, kod prostornih figura se uslovi (2) i (3) moraju malo modificirati i upotpuniti, u što ovde ne ulazimo, jer je bitno da se formira potrebni pojam.

(ili $[OB'] = k[OB]$ ili . . .), zatim konstruisati poluprave koje izlaze iz A' a paralelne su respektivno, sa $[AB]$ i $[AC]$. Preseci tih polupravâ i polupravâ OB i OC su tražene tačke B' i C'.

Ako se posle toga konstruiše (primenom jedne od izometrijskih transformacija) figura $A_1B_1C_1 \cong A'B'C'$, onda je $A_1B_1C_1$ tražena figura H, jer između ABC i $A_1B_1C_1$ postoji relacija koja ispunjava sva tri navedena uslova. Dakle, trougao $A_1B_1C_1$ sličan je datom trouglu ABC i to se zapisuje ovako:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC.$$

Figure $A'B'C'$ i ABC su takođe slične, ali se nalaze u specijalnom položaju (odgovarajuće duži su i paralelne). I zato se zovu *homotetične figure* (u odnosu na *centar O homotetije*).

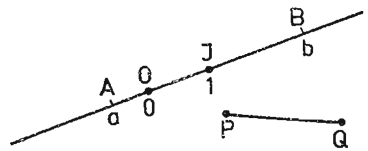
3) Opisana konstrukcija je jedna transformacija, transformacija kojom se dobija slična figura datoj. Ona se i zove *transformacija sličnosti. I homotetija* je jedna transformacija.

Otuda: *Dve figure su slične ako se dobijaju jedna iz druge metodom transformacije sličnosti.*

4) Da li je *sličnost jedna relacija ekvivalencije*? Obrazložite.
5) Jesu li proizvoljni jednakostranični trouglovi: (1) podudarni; (2) slični? Obrazložite.
6) Jesu li proizvoljni kvadrati: (1) podudarni; (2) slični? Obrazložite.
7) Zašto su slične: (1) sve kocke; (2) sve sfere?
8) Data su dva pravougaonika $\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{P}_2$. Koji uslovi treba da budu zadovoljeni pa da bude: (1) $\boldsymbol{P}_1 \cong \boldsymbol{P}_2$; (2) $\boldsymbol{P}_1 \sim \boldsymbol{P}_2$?
9) Konstruišite dva: (1) podudarna; (2) slična pravougaonika kad je $k = 2; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}$.
10) Podudarnost je specijalan slučaj sličnosti. Zašto?

§ 22.4. REALNI BROJEVI I GEOMETRIJSKI OBJEKTI (FIGURE)

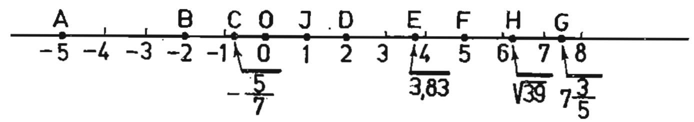
1. Mera duži i dužina duži. — 1) Nacrtajmo proizvoljnu pravu i napravimo od nje pravu brojeva. (U tu svrhu dovoljno je, § 21.7, t.2, označiti dve njene tačke O i J i dodeliti im, respektivno, brojeve 0 i 1.) Svakoj tački prave brojeva odgovara određeni realni broj, njena koordinata. Uočimo tačke A i B prave brojeva i neka su njihove koordinate, respektivno, a i b. Svaka tačka X duži $[AB]$ ima svoju koordinatu x i množina svih tih koordinata (realnih brojeva) je $a \leqslant x \leqslant b$.



Slika 22.18

Prema §§ 21.6 i 21.8, razlika $b - a$ uvek postoji. Ona je jedan jedini (određeni) realni broj, tj. $b - a \in R$. Pretpostavimo da je $B > A$ (glava VII). Tada je $b > a$ i $b - a > 0$ (pozitivan broj). Taj pozitivan broj zove se *mera* (kaže se i merni broj) duži $[AB]$ i označava se kratko $m[AB]$.

Na primer, ako je:



Slika 22.19

onda je: $m[AB]=-2-(-5)=3$; $m[BC]=-\frac{5}{7}+2=1\frac{2}{7}$; $m[AE]=8{,}83$; . . .

Prema tome:

(1) Svakoj duži prave brojeva odgovara određen nenegativni realni broj koji se zove njena mera.

(2) Svakoj duži $[PQ]$ koja nije deo prave brojeva odgovara određeni nenegativni realni broj, mera, jer se uvek može (§ 22.3, t. **1**) konstruisati duž $[AB]$ prave brojeva tako da je:

$$[AB]\cong[PQ], \text{ pa je } m[PQ]=m[AB].$$

2) Ako se duž (OJ) izabere tako da je podudarna duži koja se zove centimetar, onda duži (sl. 12.19):

$[AB]$ odgovara imenovani broj 3 cm;

$[BC]$ odgovara imenovani broj 8,83 cm; i slično.

Imenovani broj 3 cm zove se *dužina* duži AB i zapisivaćemo je ovako $(AB)=3$ cm. Imenovani broj 8,83 cm zove se *dužina* duži $[BC]$ i pisaćemo $(BC)=$ $=8{,}83$ cm, itd.

I slično ako je jedinična duž decimetar, metar, . . .

Iz prethodnog je jasno da nije korektno pisati: $AB=3$ ili $AB=3$ cm, nego $(AB)=3$, odnosno $m(AB)=3$ cm, ili $(AB)=3$ cm ili ma koji drugi simbol.

Napomena. — Svakoj duži pripisuje se *dužina.* Ali razlikovati dve dužine duži: *apsolutnu,* ili *geometrijsku* dužinu i *relativnu* dužinu.

Apsolutna dužina se ispoljava pri upoređivanju dve duži („pri stavljanju jedne na drugu"). Svim podudarnim dužima pripisuje se ista apsolutna dužina. Apsolutna dužina je, prema tome, pojam identičan sa pojmom duži kad se ona posmatra kao veličina. Relativna dužina je *broj* koji se dobija pri merenju date duži izabranom jedinicom. Relativna dužina je, dakle, *mera* (merni broj) duži i, razumljivo, zavisi od jedinice merenja; na primer, relativna dužina duži $[AB]$ je 3 cm, ili 30 mm, ili 0,3 dm ili 0,0003 hm. Jasno je da su dve relativne dužine jednake: (1) ako su odgovarajuće duži podudarne; (2) ako se one mere istom jedinicom.

U osnovnoj nastavi se jedva može govoriti o apsolutnoj dužini. Zato se, skoro uvek, pod dužinom duži podrazumeva relativna dužina.

Potpuno analogno stoje stvari sa površinom i zapreminom. I opet, u osnovnoj nastavi do izražaja dolaze relativna površina i relativna zapremina, tj. njihove mere.

3) Poligonalna linija je unija stranica. Njena mera je, dakle, zbir mera stranica.

Dužina poligonalne linije i poligona je zbir dužina svih njenih, njegovih stranica.

4) Duž $[BA]$ (sl. 22.18 ili 22.19) je podudarna duži $[AB]$, ali je suprotno orijentisana. Ako vodimo računa o orijentaciji, onda se duž $[AB]$ zove *orijentisana duž* (ili *vektor**) i označava ovako: $\overrightarrow{AB}$. Shodno tome, vektoru $\overrightarrow{AB}$ (sl. 22.19) odgovara broj 3, tj. $+3$, a vektoru $\overrightarrow{BA}$ odgovara broj -3 (simetrični broj broja 3).

* To je klasični smisao. U modernoj matematici vektor je opštiji pojam. (Videti *Metodika savremenog matematičkog obrazovajna,* glava XIX.)

Ali brojevi $+3$ i -3 nisu *mere.* Oni se zovu *„algebarske vrednosti"* vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ i, ako treba, piše se $[\overline{AB}]=3$, $[\overline{BA}]=-3$ (ili, po dogovoru, neki drugi simbol, npr. $\overline{AB}=3$, a *nikako* $\overrightarrow{AB}=3$, odnosno $\overrightarrow{BA}=-3$).

2. Mera oblasti pravougaonika i površina pravougaonika. — 1) Svaki pravougaonik određuje oblast (§ 22.1, t. **2**, 3). Toj oblasti može se dodeliti realni nenegativni broj ako se prethodno izabere jedinična oblast. Kao jedinična oblast može se uzeti oblast jednog određenog pravougaonika. Usvojeno je da to bude oblast kvadrata (specijalnog pravougaonika) čija je stranica jedinična duž, tj. čija je mera stranice 1.

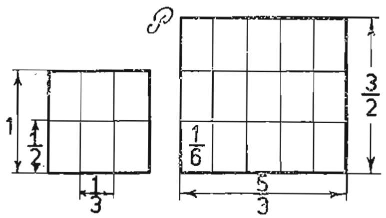
Tada, ako su mere stranica pravougaonika realni (nenegativni) brojevi a i b, *proizvod ab zove se mera oblasti pravougaonika.*

Ispitajmo tri slučaja, zavisno od toga da li su a i b prirodni brojevi, racionalni ili iracionalni brojevi.

(1) Kad su a i b prirodni brojevi, nema nikakvih teškoća, jer je ab broj svih jediničnih oblasti koje bi se dobile kad bi se oblast pravougaonika podelila na jedinične oblasti.

(2) Ako su mere stranica racionalni brojevi, tj. ako je $a=\frac{m}{p}$, $b=\frac{n}{q}$, onda se jedinična oblast podeli na pq pravougaonih oblasti (mera jedne stranice svake od njih je $\frac{1}{p}$, a mere druge stranice je $\frac{1}{q}$). A tada je očigledno da oblast datog pravougaonika sadrži mn tih („malih") pravougaonih oblasti pa je $ab=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}$ njegova mera.

Na primer, ako su mere stranica pravougaonika $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$, onda crtež (sl. 22.20) ilustruje ono što je rečeno.



Slika 22.20

Pošto je jedinična oblast podeljena na $2\cdot 3=6$ pravougaonih oblasti, svakoj od njih odgovara broj $\frac{1}{6}$, a oblasti datog pravougaonika odgovara broj $\frac{1}{6}\cdot 15=\frac{15}{6}$ (petnaest šestina jedinične oblasti). Dakle, $m(P)=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}$ (što se može uprostiti: $\frac{5}{2}$ jedinične oblasti).

U slučajevima (1) i (2) pravougaonici su, kratko rečeno, *„racionalni".*

(3) Ako su mere stranica pravougaonika iracionalni brojevi α i β, ne postoji deo jedinične oblasti koji bi se sadržao mn puta ($m, n\in N_1$) u oblasti datog pravougaonika. Pa ipak, možemo pokazati da i takvom pravougaoniku odgovara broj $\alpha\beta$.

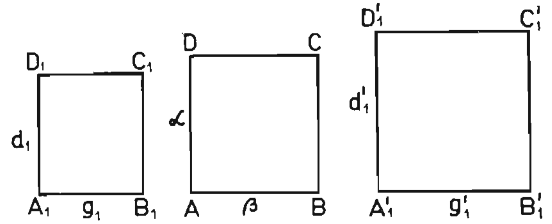
Zaista, tada postoje (§ 21.6) racionalni (nenegativni) brojevi d_1, d_1', g_1, g_1' takvi da je:

$$d_1<\alpha<d_1', \qquad g_1<\beta<g_1', \tag{1}$$

pa dakle i:

$$d_1g_1<\alpha\beta<d_1'g_1' \tag{2}$$

Te nejednakosti pokazuju da postoji pravougaonik $A_1B_1C_1D_1$, čije su mere stranica d_1 i g_1, i pravougaonik $A'_1B'_1C'_1D'_1$, čije su mere stranica d'_1 i g'_1. Oblast prvog je manja, a oblast drugog je veća od oblasti datog pravougaonika čije su mere brojevi α i β.



Slika 22.21

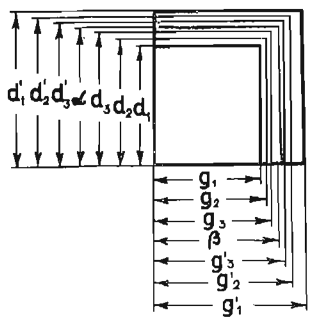
Ali tada postoji [§ 21.7 t. **2**] niz umetnutih intervala:

$$[d_1, d'_1],\ [d_1, d'_2], \ldots, d_n, d'_n], \ldots,$$

koji se steže oko α, i niz umetnutih intervala:

$$[g_1, g'_1],\ [g_2, g'_2], \ldots, [g_n, g'_n], \ldots,$$

koji se steže oko β. A to znači da postoji neograničeni niz pravougaonika čije oblasti rastu i neograničeni niz pravougaonika čije oblasti opadaju. Razlika tih oblasti je sve manja, opada neograničeno kad n raste i pravougaonici $A_iB_iC_iD_i$ i $A'_iB'_iC'_iD'_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ neograničeno se približavaju „iracionalnom" pravougaoniku $ABCD$.



Slika 22.22

Drugim rečima, proizvod $\alpha\beta$ se stalno nalazi između proizvoda dva racionalna broja:

$$d_1g_1 < \alpha\beta < d'_1g'_1$$
$$d_2g_2 < \alpha\beta < d'_2g'_2$$
$$d_3g_3 < \alpha\beta < d'_3g'_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

A kako svaki proizvod d_ng_n i svaki proizvod $d'_ng'_n$ predstavlja meru oblasti jednog pravougaonika, i *proizvod $\alpha\beta$ je mera iracionalnog pravougaonika $ABCD$*.

Na primer, ako su mere stranica jednog pravougaonika $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, onda (§ 21.6, t. **5**, 2 i 5) je:

$$1\cdot 1<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<2\cdot 2 \text{ (razlika je 3)};$$
$$1{,}4\cdot 1{,}7\approx 2{,}38<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<1{,}5\cdot 1{,}8=2{,}7 \text{ (razlika je 0,32)};$$
$$1{,}41\cdot 1{,}73\approx 2{,}44<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}<1{,}42\cdot 1{,}74\approx 2{,}47 \text{ (razlika je 0,03)};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Razlika između mera dva niza racionalnih pravougaonika vrlo brzo opada, što znači da se oblasti odgovarajućih pravougaonika neograničeno približavaju oblasti pravougaonika čije su mere stranica $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, kojoj odgovara broj, mera $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

Dakle, *oblasti (ma kog) pravougaonika čije su mere stranica ma koji realni (nenegativni) brojevi a i b dodeljuje se realni (nenegativni) broj p=ab i on se zove mera (ili merni broj) te oblasti.*

Simbolima: $m(\boldsymbol{P})=ab=p$, ili $m(ABCD)=(AB)\,(BC)$

ili, ako smo prethodno rekli da su mere stranica $[AB]$ i $[BC]$, respektivno, a i b:

$$m(ABCD)=ab.$$

2) Uzmemo li u obzir napomenu uz prethodnu tačku **1**, možemo reći:

Ako je jedinična oblast ograničena kvadratom čija je stranica podudarna duži koja se zove centimetar, mera oblasti pravougaonika zove se *„površina oblasti pravougaonika"*, kratko *„površina pravougaonika"* i zapisuje se (ab) cm² ili p cm², na primer:

$$28\ \text{cm}^2,\quad \frac{15}{6}\ \text{cm}^2,\quad (\sqrt{2}\cdot\sqrt{3})\ \text{cm}^2=\sqrt{6}\ \text{cm}^2.$$

I slično kad je jedinična oblast ograničena kvadratom čija je stranica podudarna duži koja se zove decimetar, metar, ..., kilometar.

Poznato je da se *oblast ograničena kvadratom* čija je stranica:

1 cm zove kvadratni centimetar (cm²);

1 dm zove kvadratni decimetar (dm²);

. . . .

Prema tome, ako su dužine stranica jednog pravougaonika, npr. 4,8 m i 7,5 m, njegova površina iznosi (4,8 · 7,5) m² = 36 m² (trideset šest kvadratnih metara).

3) U § 22.3, t. **2** rečeno je da u množini pravougaonika ne postoje relacije „... je jednak ... „i" ... je veći (odnosno) manji od ..." Te relacije postoje u *množini oblasti ograničenih pravougaonicima*. I postoje geometrijske metode (dakle ne određujući odgovarajuće mere) za utvrđivanje tih relacija. I za konstrukciju pravougaonika čija je oblast jednaka oblasti datog pravougaonika. Uopšte, relacija „... je jednaka ..." vrši particiju množine Q (svih) oblasti ograničenih pravougaonicima u klase „jednakih pravougaonika" (neprecizno rečeno).

Ako su, pak, *uz istu jedinicu* dobijene mere p_1 i p_2 dveju „pravougaonih" oblasti, onda:

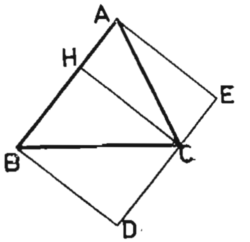
u slučaju $p_1=p_2$, odgovarajuće oblasti su jednake;

u slučaju $p_1<p_2$, oblast čija je mera p_1 *manja* je od oblasti čija je mera p_2.

Taj smisao imaju kratke ali *neprecizne (pa dakle i nekorektne) rečenice*: „Pravougaonik $\boldsymbol{P}_1$ je jednak pravougaoniku $\boldsymbol{P}_2$" i „Pravougaonik $\boldsymbol{P}_1$ je manji od pravougaonika $\boldsymbol{P}_2$" (do toga se dolazi i spomenutim geometrijskim metodama).

3. 1) Rešenjem problema dodeljivanja realnog broja oblasti pravougaonika rešen je problem dodeljivanja broja svakoj oblasti, bez obzira kojom prostom linijom je ona ograničena, jer se svaka takva oblast može: ili (1) zameniti (neposredno ili posredno) jednakom, ekvivalentnom pravougaonom oblašću, ili (2) podeliti na pravougaone oblasti.

Postupak (1) primenjuje se kad je granica oblasti prost poligon i izlaže se u svim udžbenicima elementarne geometrije. Napomenimo samo da je oblast ograničena trouglom dvaput manja od oblasti pravougaonika čija je jedna stranica podudarna jednoj stranici trougla, a druga je stranica podudarna odstojanju te (uočene) stranice trougla od naspramnog temena (sl. 22.23).



Slika 22.23

„Očigledno" je da je oblast ograničena trouglom $BHC=\frac{1}{2}$ oblasti ograničene pravougaonikom $BHCD$ i $(AHC)=\frac{1}{2}(AHCE)$. Kako je $[AB]\cong[AB]$, $[CH]\cong[DB]$, sledi prethodno tvrđenje.

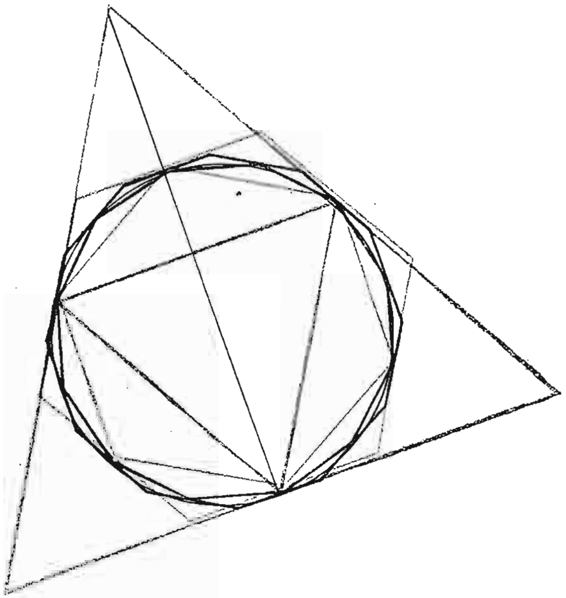
Prema tome, ako je a mera stranice $[AB]$, h mera odstojanja $[CH]$, onda je $m(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\,ah$.

Postupak (2) se, uglavnom, primenjuje kad je granica oblasti kriva linija i predstavlja jednu od primena integralnog računa (zbir beskonačno mnogo beskonačno malih pravougaonih oblasti).

Dakle, svakoj oblasti (ograničenoj ma kojom linijom) može se (teorijski, o čemu je ovde i reč, jer se u praksi ponekad nailazi na velike teškoće) dodeliti realni (nenegativni) broj. Taj se broj zove *mera* (ili merni broj) *oblasti*.

2) Ono što je rečeno u prethodnoj tački (t. **2**, 2 i 3) važi za svaku oblast. Pogotovu za oblasti ograničene poligonima koje se mogu, geometrijskim metodama, zameniti jednakim pravougaonim oblastima.

4. Mera i površina kruga. Mera i dužina kružnice. — 1) Na crtežu 22.24 prikazana je kružnica a zatim su prikazani upisani i opisani pravilni trougao


Slika 22.24

(plavo), upisani i opisani pravilni šestougao (zeleno) i upisani i opisani pravilni dvanaestougao (crveno).

Krug (oblast ograničena kružnicom) je „očigledno":

veći od oblasti upisanog a manji od oblasti opisanog trougla;
veći od oblasti upisanog a manji od oblasti opisanog šestougla;
veći od oblasti upisanog a manji od oblasti opisanog dvanaestougla.

Ako (misaono) produžimo tako, pa upišemo i opišemo pravilni poligon čiji je broj stranica 24 $(=12\cdot 2)$, 48 $(=24\cdot 2)$, 96 $(=48\cdot 2)$, ... uvek će krug biti veći od oblasti upisanog a manji od oblasti opisanog poligona. Pregledno napisano to izgleda:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{P}_3<\boldsymbol{K}<\boldsymbol{P}_3' \\ \boldsymbol{P}_6<\boldsymbol{K}<\boldsymbol{P}_9' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{P}_{12}<\boldsymbol{K}<\boldsymbol{P}_{12}' \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{P}_{192}<\boldsymbol{K}<\boldsymbol{P}_{192}' \\ \boldsymbol{P}_n<\boldsymbol{K}<\boldsymbol{P}_n' \end{array}\right\}$$

$\boldsymbol{P}_n$ je oblat upisanog pravilnog poligona a $\boldsymbol{P}_n'$ je oblast opisanog pravilnog poligona, n je broj stranica poligona i ima oblik:

$$n=3\cdot 2^{k-1},\ k\in N_1$$

(npr. $k=3$, $n=3\cdot 2^2=12$;
$k=7$, $n=3\cdot 2^6=192$);
. . . .

Imamo, dakle, niz „umetnutih oblasti" („intervala"), jer je:

$$\boldsymbol{P}_3<\boldsymbol{P}_6<\boldsymbol{P}_{12}<\ldots<\boldsymbol{P}_n<\ldots$$

$$\boldsymbol{P}_3'>\boldsymbol{P}_6'>\boldsymbol{P}_{12}'>\ldots>\boldsymbol{P}_n'>\ldots$$

pa

$$\boldsymbol{P}_n'-\boldsymbol{P}_n$$

opada neograničeno, tj. ispunjeni su uslovi (a) i (b), § 21.7, t. **2**, pa je krug *granica* tog niza.

Kako svakom poligonu odgovara realni broj, mera, umesto prethodnih nejednakosti možemo napisati

$$p_3<p_\circ<p_3'$$
$$p_6<p_\circ<p_6'$$
$$p_{12}<p_\circ<p_{12}'$$
$$\cdots\cdots$$
$$p_n<p_\circ<p_{12}'$$
$$\cdots\cdots$$

odakle se vidi da krugu odgovara broj, mera i ona je granica umetnutih intervala (brojeva):

$$[p_3,\ p_3'],\ [p_6,\ p_6'],\ \ldots,\ [p_n,\ p_n'],\ \ldots,$$

gde je $n=2\cdot 2^{k-1}$, $k\in N$.

Ako se poluprečnik kruga uzme za jedinicu, tj. ako je mera poluprečnika 1, onda se, na osnovu Pitagorine teoreme i prethodne t. **3**, može izračunati da je:

$$p_3=\frac{3}{4}\sqrt{3}\approx 1{,}3,\ \text{a}\ p_3'=3\sqrt{3}\approx 5{,}19;$$

$$p_6=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}5,\ \text{a}\ p_6'=2\sqrt{3}\approx 3{,}46;$$

$$p_{12}\qquad\approx 3\ ,\ \text{a}\ p_{12}'\qquad\approx 3{,}22;$$

. . . .

to jest:

$$1{,}3 < p_o < 5{,}19$$
$$2{,}5 < p_o < 3{,}46$$
$$3{,}00 < p_o < 3{,}22$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Odatle se vidi da interval $[p_n, p_n']$ brzo opada (već kod $k=3$, mera intervala je $\approx 0{,}22$) i ako se izračunavanje produži (tj. ako se izračuna p_{24}, i p_{24}', p_{48} i p_{48}', ...), dobija se da je granica intervala broj π, tj.:

$$\pi_o = \pi = 3{,}141\ 592\ 653\ldots \quad (\S\ 21.6,\ \text{t. } \mathbf{5}).$$

Dakle, ako je mera poluprečnika 1, mera kruga (mera „jediničnog kruga") jeste broj π.

2) Neka su L_3, L_6, L_{12}, ... poligonalne linije (tj. unije stranica) upisanih pravilnih mnogouglova, a L_3', L_6', L_{12}', ... poligonalne linije opisanih pravilnih mnogouglova. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} L_3 < K < L_3' \\ L_6 < K < L_6' \\ \cdots\cdots\cdots \\ L_n < K < L_n' \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \begin{array}{l} K = \text{kružnica} \\ n = 3\cdot 2^{k-1},\ k \in N_1 \end{array}$$

tj. (pošto svakoj liniji L_n, odgovara broj, mera l_n):

$$\left.\begin{array}{l} l_3 < l_o < l_3' \\ l_6 < l_o < l_6' \\ \cdots\cdots \\ l_n < l_o < l_n' \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} n = 3\cdot 2^{k-1},\ k \in N_1$$

Imamo, dakle, niz umetnutih intervala:

$$[l_3, l_3'],\ [l_6, l_6'],\ [l_{12}, l_{12}'],\ \ldots,\ [l_n, l_n'],\ \ldots$$

čija je granica određen realan broj. Taj se broj zove *mera* (merni broj) kružnice.

Ako se poluprečnik kružnice uzme za jedinicu, može se izračunati da je:

$$\begin{array}{llll} l_3 = 3\sqrt{3} \approx 5{,}19, & l_3' = 6\sqrt{3} \approx 10{,}32 \\ l_6 = 6, & l_6' = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9 \\ l_{12} \approx 6{,}18, & l_{12}' \approx 6{,}48 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

to jest da je:

$$5{,}19 < l_o < 10{,}32$$
$$6{,}00 < l_o < 6{,}9$$
$$6{,}18 < l_o < 6{,}48.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Dakle, $[l_n, l_n']$ brzo opada (već je $[l_{12}, l_{12}'] \approx 0{,}3$) i ako se izračunavanje produži, nalazi se da je granica niza intervala broj 2π (krajevi intervala se nagomilavaju oko tačke $2\cdot 3{,}1415\ldots$).

Mera kružnice čija je mera poluprečnika 1 (mera „jedinične kružnice") jeste 2π.

Dobili smo interesantne rezultate:

Broj π je mera kruga, a broj 2π je mera kružnice kad je poluprečnik 1. Zato je broj π „nadaleko čuven".

3) Nije teško izračunati da ako je mera poluprečnika r, onda je:

$$p_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}, \quad p_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}, \quad p_{12} = 3r^2, \ldots$$

$$l_3 = 3r\sqrt{3}, \quad l_6 = 6r, \quad l_{12} = 3r(\sqrt{6} - \sqrt{2}), \ldots$$

(tj. broj dobijen kad je $r=1$ pomnožen brojem r^2, odnosno brojem r), pa je i (kad je mera poluprečnika r):

mera kruga πr^2, a mera kružnice $2\pi r$.

4) Ako je jedinica merenja poluprečnika metar, decimetar, ..., broj $(2\pi r)$ m zove se *dužina* kružnice (u metrima), a broj (πr^2) m zove se *površina* kruga.

Na primer, ako je dužina poluprečnika 0,7 m, dužina kružnice iznosi $(1{,}4\pi)$ m ($1{,}4\pi$ metara), a površina kruga iznosi $(0{,}49\pi)\ \text{m}^2$ ($0{,}49\pi$ kvadratnih metara).

5) Mera jedne četvrtine:

kruga je $\frac{\pi}{4}$, odnosno $\frac{\pi r^2}{4}$; kružnice je $\frac{\pi}{2}$, odnosno $\frac{\pi r}{2}$.

Mera $\frac{2}{5}$ kruga je $\frac{2}{5}\pi$, odnosno $\frac{2}{5}\pi r^2$.

Površina $\frac{3}{8}$ kruga čija je dužina poluprečnika 4 cm iznosi $\left(\frac{3}{8}\cdot 16\right)\text{cm}^2 = 6\pi\ \text{cm}^2$.

Dužina kružnog luka koji iznosi $\frac{5}{9}$ kružnice, a čija je dužina poluprečnika 6 dm, iznosi

$$\left(\frac{5}{9}\cdot 2\pi\cdot 6\right)\text{dm} = \frac{10}{3}\pi\ \text{dm}.$$

5. Mere prostornih figura. — Prema prethodnom ravnoj figuri dodeljujemo dva broja, dve mere: jednu liniji, linijsku, *linearnu meru*; drugu oblasti (koju figura određuje, ograničuje), *kvadratnu meru* (jer za jedinicu uzimamo oblast ograničen kvadratom). Analogno, svakoj konveksnoj* prostornoj figuri dodeljujemo dva broja, dve mere: *kvadratnu meru* (samoj figuri) i meru za prostor koji figura određuje, ograničuje. Ovu drugu možemo nazvati *kubnom merom*, jer se za jedinicu merenja, uzima *prostor ograničen kockom (kubom)*.

1) Kvadratna mera konveksne figure je zbir kvadratnih mera pojedinih njenih delova, jer su ti delovi (bar u već navedenim, § 22.2, elementarnim slučajevima): ili ravni (delovi ravni) ograničeni prostim linijama (poliedri), ili delovi krivih površi, koji se mogu svesti na ravne delove (cilindri i kupe), ili su analogoni kružnice i elipse (sfera, elipsoidi) pa se mere mogu i elementarno izračunati.

2) Izračunavanje kvadratne mere svake oblasti zasniva se na izračunavanju mere oblasti pravougaonika. *Izračunavanje kubne mere svake prostorne (konveksne) figure zasniva se na izračunavanju kubne mere prostora (tela) ograničenog*

* Ovde se ograničujemo na konveksne prostorne figure koje su najpristupačnije, a i najznačajnije (i za teoriju i za praksu).

pravouglim paralelepipedom („kvadrom"). A izračunavanje kubne mere pravouglog paralelepipeda je analogno izračunavanju kvadratne mere pravougaonika. Naime, ako su a, b, c (linearne) mere triju ivica pravouglog paralelepipeda (koje „izlaze" iz istog temena), onda je njegova kubna mera proizvod abc. I to je razumljivo, jer je ab, odnosno ac, odnosno bc kvadratna mera odgovarajuće strane paralelepipeda, pa njegov prostor sadrži onoliko jediničnih prostora (ograničenih jediničnim kockama) koliko iznosi mera treće ivice (odstojanja dveju naspramnih strana paralelepipeda).

Kako se na osnovu toga (i izračunavanju kvadratnih mera ravnih figura) nalaze pravila za izračunavanje kubnih mera jednostavnih prostornih figura izlaže se (elementarno) u svakom dobrom udžbeniku za osnovnu školu. Preciznije i malo opširnije (povećava se broj posmatranih figura) ta se pravila izlažu i u svakom dobrom srednjoškolskom udžbeniku. (Kod takozvanih oblih figura interveniše, sasvim razumljivo, broj π.)

Metodama više matematike dolazi se (razumljivo preciznije) do istih pravila.

3) Ako se kao linearne jedinice uzimaju metar i (iz njega) izvedene jedinice, izračunata kvadratna mera prostorne figure zove se *površina*, a izračunata kubna mera zove se *zapremina*. Pri tome, kratkoće radi (ali ne i precizno), govori se: „zapremina prizme", „zapremina valjka", . . . , „zapremina sfere". Na primer:

(1) Ako su (linearne) mere ivica pravouglog paralelepipeda 3 cm, 8 cm i 2 dm, onda njegova *zapremina* iznosi $(3\cdot 8\cdot 20)\ \mathrm{cm}^3 = 480\ \mathrm{cm}^3$ (480 kubnih centimetara).

(2) Ako su (linearne) mere ivica prave pravilne šestostrane prizme 13 mm i 7 cm, njena *zapremina* iznosi $\left(\frac{3}{2}\cdot 13^2\cdot 70\sqrt{3}\right)\ \mathrm{mm}^3$.

(3) Ako je mera poluprečnika pravog kružnog valjka 5 cm, a mera odstojanja njegovih krugova iznosi 10 cm, njegova zapremina iznosi $(\pi\cdot 5^2\cdot 10)\ \mathrm{cm}^2 = 250\,\pi\ \mathrm{cm}^3$.

4) O relacijama „. . . je jednako . . ." i „. . . je manje (odnosno veće) od . . ." u množini konveksnih figura (i samih figura i geometrijskih tela koja one određuju) važi sve ono što je već rečeno (t. **2.** 3).

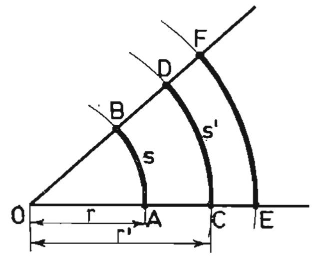
6. Mera ugla i luka. — 1) Ako se izabere ma koji ugao za jedinicu, svakom uglu odgovara realni (nenegativni) broj, na primer: broj 3 označava da je uočeni ugao 3 puta veći od jediničnog ugla; broj $\frac{7}{11}$ označava da je uočeni ugao podudaran uglu koji se dobija tako što se jedinični ugao podeli na 11 podudarnih uglova i uzme (uoči, označi) 7 tih delova; isto tako, uglu može da odgovara i broj $\sqrt{5}$, broj $\frac{1}{\sqrt{7}}$, . . .

2) Još stari narodi izabrali su za jedinični ugao ugaoni stepen (°): $1° = \frac{1}{90}$ pravog ugla. Prema tome: $\frac{1}{2}$ pravog ugla inzosi 45°, $\frac{2}{3}$ pravog ugla iznosi 60°; $\frac{3}{4}$ pravog ugla iznosi 67,5° (=67°30'); opruženi ugao iznosi 180°, a 4 prava ugla iznose 360°.

Ponegde se za jedinicu ugla uzima i grad, $1\ \mathrm{gr} = \frac{1}{100}$ pravog ugla.

3) Ugaoni stepen i njegovi delovi (minut, $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ}$ i sekund $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$) su praktične jedinice za merenje uglova. U teoriji se jedinični ugao uvodi ovako (sl. 22.25):

Teme ugla je centar neograničeno mnogo kružnica (koncentričnih). Preseci krakova ugla i tih kružnica određuju luk svake kružnice (npr. $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, . . .). Na primer, uglu od 17° odgovara luk svake kružnice od 17°, a očigledno je da lukovi nisu podudarni. Samo lukovi iste kružnice (ili lukovi podudarnih kružnica) su podudarni kad ih određuju podudarni centralni uglovi.



Slika 22.25

Međutim, uglu od $\alpha°$ ogdovara dužina luka od $\frac{2\pi r}{360°}\cdot\alpha° = \frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha°$ (u cm ako je dužina poluprečnika u cm, u dm ako je . . .). Označimo tu dužinu slovom s, tj. stavimo $s = \frac{\pi r}{180°}\cdot\alpha°$ i podelimo tu jednakost brojem r. Dobijamo:

$$\frac{s}{r} = \frac{\pi\alpha°}{180°}.$$

Uočimo dva luka $\overset{\frown}{AB}$, čija je dužina s, i $\overset{\frown}{CD}$, čija je dužina s. Iz prethodnog sledi:

$$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}\left(= \frac{\pi\alpha°}{180°}\right),$$

tj. razmera (količnik dužine luka i dužine poluprečnika za isti ugao) je stalan broj. Taj se broj i uzima za *„jedinicu"* ugla. Naime, stavlja se: $\frac{s}{r} = 1$, odakle sledi $s = r$.

Znači, za jedinični ugao uzima se onaj ugao čiji je luk (kad se „ispravi") „jednak" (podudaran) poluprečniku kojim je opisan.

Taj se ugao zove *radijan*.

Ili, što je isto, radijan je kružni luk čija je dužina jednaka dužini poluprečnika. — 1 radijan $\approx 57°17'45''$.

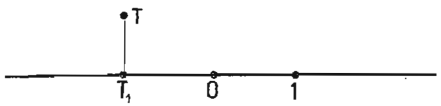
Zašto je mera pravog ugla $\frac{1}{2}\,\pi$ radijana?

§ 22.5. KORESPONDENCIJA IZMEĐU REALNIH BROJEVA I TAČAKA RAVNI I PROSTORA. DEKARTOV KOORDINATNI SISTEM

1. 1) U § 21.7 utvrdili smo da ako se jednoj tački prave dodeli broj 0 (nula) a drugoj broj 1, samim tim se između množine tačaka te prave i množine realnih brojeva uspostavlja bižekcija (biunivoka korespondencija): Svakoj tački odgovara određen realan broj i svakom realnom broju odgovara određena tačka. Dovoljno je da nam se pokaže tačka spomenute prave (prave realnih brojeva), pa da odredimo odgovarajući broj. I dovoljno je da zamislimo ma koji realni broj, pa da odredimo tačku prave brojeva.

2) A kad tačka ne pripada pravi nego ravni Π, na primer T, sl. 22.26? Možemo li joj tada dodeliti broj?

Bez ikakvog dopunskog crtanja, svaki koji suštinski shvata pravu brojeva uviđa da tačku T karakterišu dva broja: jedan je mera njenog odstojanja od prave brojeva, a drugi je broj koji odgovara tački T_1 (drugi kraj spomenutog odstojanja).

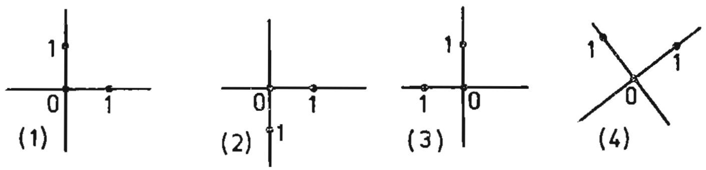


Slika 22.26

A koja bi mera bila kad bi se tačka T nalazila u drugoj poluravni (u odnosu na pravu brojeva), a na podudarnom odstojanju? Ili, još bolje, evo dva broja: -3 i 5, gde je -3 broj koji odgovara tački T_1 (koordinata tačke T_1, kako smo kazali u § 21.7), a 5 je mera odstojanja tačke T od prave brojeva. Konstruišite tačku T.

Odatle se vidi da nije dovoljna mera odstojanja tačke T od prave brojeva. Ona mora da sadrži i podatak: kojoj od dve poluravni pripada tačka T. Najkraće i najcelishodnije se taj podatak daje tako što se dogovorimo da mera odstojanja bude „pozitivna" ako tačka T pripada jednoj poluravni, a „negativna" ako pripada drugoj poluravni (§ 22.4). A to se postiže jednim potezom: uzme se još jedna prava brojeva koja seče prvu. Pri tome, međusobni položaj tih dveju pravâ (brojeva) može biti proizvoljan, ali je zasad najbolje da prave budu međusobno perpendikularne (normalne). Orijentacija druge prave brojeva je proizvoljna. Prema potrebi uzima se jedna ili druga, jer ni orijentacija prve nije obavezna sleva nadesno (sl. 22.27).

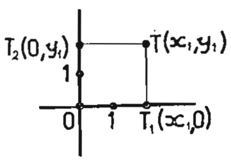
Nije, uopšte, obavezno da prva prava bude paralelna pravi koju određuju posmatračeve oči [sl. 22.27(4)]. Ipak je uobičajeno da prva prava bude orijentisana sleva nadesno, a druga „odozdo naviše" prema glavi posmatrača [sl. 22.27(1)].



Slika 22.27

3) Tada svakoj tački ravni odgovara uređeni par brojeva (x, y). Oni se određuju tako što se konstruišu dve poluprave koje izlaze iz T: jedna $\perp$ na prvu pravu brojeva, druga $\perp$ na drugu pravu brojeva. Presecima T_1 i T_2 tih polupravâ i pravâ brojeva odgovaraju brojevi x i y.

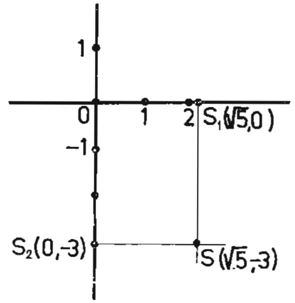
Obrnuto, svakom uređenom paru realnih brojeva odgovara tačka ravni. Ona se konstruiše tako što se konstruišu poluprave koje izlaze: jedna iz one tačke prve prave brojeva koja odgovara prvom broju datog para, druga iz tačke druge prave brojeva koja odgovara drugom broju datog para; presek tih polupravâ je tražena tačka. Tako je na crtežu 22.29 konstruisana tačka $S(\sqrt{5}, -3)$.



Slika 22.28

4) Oba broja koji odgovaraju tački ravni zovu se *koordinate* te tačke. Prvi se broj zove *apscisa*, a drugi *ordinata* uočene tačke. Otuda se i prva prava brojeva (obično $\parallel$ pravi koju određuju oči posmatrača) zove *apscisna osa*, a druga *ordinatna osa*. Obe ose su *koordinatne ose*.

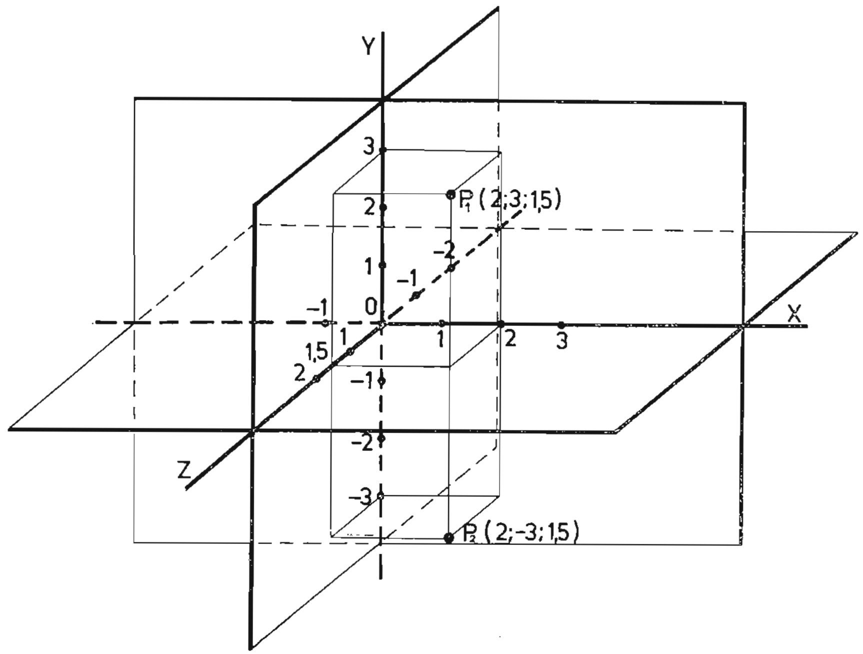
5) Konstruišite tačke: $A(3, 2)$; $B(-4, 5, 1)$; $C\left(-\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)$; $D\left(\frac{7}{2}, =\sqrt{3}\right)$.



Slika 22.29

2. Na sličan način postupa se u trodimenzionalnom prostoru (prava je jednodimenzionalan a ravan je dvodimenzionalan prostor):

Stanite, npr., negde u sobi i okrenite se licem jednom zidu. Patos je model jedne ravni, levi zid je model druge ravni a prednji zid je model treće ravni. To su tri *koordinatne ravni* (svake dve međusobno perpendikularne) koje se seku duž tri prave (svaka perpendikularna na ostale dve). Dignite kažiprst desne ruke i ocenite (ili izmerite) mere (za izabranu jedinicu) njegovih odstojanja od svake ravni. To su tri broja koji odgovaraju tački „u kojoj stoji" vrh vašeg kažiprsta, npr. $P_1(2; 1{,}5; 3)$: 2 je mera odstojanja od levog zida, 1,5 je mera odstojanja od prednjeg zida, a 3 je mera odstojanja od patosa*.



Slika 22.30

* Na sl. 22.30 je tehnička greška u zapisivanju koordinata. Treba $P_1(2; 1{,}5; 3)$ i $P_2(2; 1{,}5; -3)$.

Zamislite simetričnu tačku P_2 „ispod" patosa. Njene koordinate su 2; 1,5; −3, pa je zapisujete $P_2(2;\ 1{,}5;\ -3)$. Zamislite simetričnu tačku P_3 (vrh vašeg prsta) u odnosu na levi zid. Ona je $P_3(-2;\ 1{,}5;\ 3,)$. Zamislite tačku ispred prednjeg zida, iza levog zida a iznad patosa. To je $P_4(-2;\ 1{,}5;\ 3)$.

Gde se nalazi tačka: $P_5(2;\ -1{,}5;\ 3)$; $P_6(-2;\ -1{,}5;\ 3)$; $P_7(2;\ -1{,}5;\ -3)$; $P_8(-2;\ -1{,}5;\ -3)$?

3. 1) Pronalaskom takvog reperiranja tačaka u ravni i prostoru, tj. povezivanje algebre i geometrije, matematika je krenula gigantskim koracima napred (jer se danas geometrijske figure izražavaju jednačinama i obrnutno, jednačine se prikazuju geometrijskim figurama). To je ogromna tekovina koju dugujemo francuskom matematičaru i filozofu Rene Dekartu (1596—1650).

Po njemu se svaki napred opisani metod uspostavljanja korespondencije između tačaka i uređenih parova odnosno uređenih tripleta realnih brojeva zove Dekartov koordinatni sistem (u ravni odnosno u prostoru).

2) Postoji li kakva veza između Dekartovog koordinatnog sistema i Dekartovog proizvoda? (Glava III)

§ 22.6. VEŽBANJA I ZADACI

1. Nacrtajte:

(1) dve proste i dve neproste poligonalne linije;

(2) više prostih i neprostih poligona;

(3) pet zatvorenih prostih krivih i pet zatvorenih neprostih krivih.

2. 1) Koja je glavna karakteristika prostog poligona?

2) Koja je glavna karakteristika proste linije?

3) Pokažite svaku oblast koju ste dobili u prethodnoj tački.

4) Kad je poligon „konveksan"? Kad je kriva „konveksna"?

5) Nacrtajte jedan „konveksan" i jedan „ukršten" četvorougao. To je najprostiji slučaj iz koga se vidi kad kriva „ima" (tj. ograničuje), a kad nema oblast.

3. 1) Kako zamišljate: kocku; pravu kupu; pravi valjak?

2) Za koju prostornu figuru kažemo da je konveksna? Da li je sama množina koju čine tačke figure konveksna?

4. Nacrtajte proizvoljan trougao, četvorougao i petougao. Konstruišite: podudarni trougao (translacijom i rotacijom); podudarni četvorougao (osnom i centralnom simetrijom); podudarni petougao (osnom simetrijom i rotacijom).

5. Nacrtajte proizvoljan ugao i konstruišite podudarni ugao primenjujući sve četiri izometrijske transformacije.

6. 1) „Nacrtajte" proizvoljan pravougaonik, romb i proizvoljnu kružnicu. Konstruišite figure slične nacrtanim.

2) Nacrtajte proizvoljan petougao, označite proizvoljnu tačku O njegove oblasti i konstruišite homotetični petougao u odnosu na centar homotetije O.

3) Nacrtajte proizvoljnu duž $[AB]$ i konstruišite (metodom homotetije) tri puta veću duž $[A'B']$ i dva puta manju duž $[A''B'']$, tj. $[A'B']\cong 3[AB]$, $[A''B'']\cong 2[AB]$.

4) Nacrtajte proizvoljnu duž $[CD]$ i podelite je (metodom homotetije) na tri podudarne duži.

5) Na isti način podelite proizvoljnu duž $[PQ]$ na 7 podudarnih duži, a proizvoljnu duž $[XY]$ na 13 podudarnih duži.

7. Nacrtajte proizvoljnu pravu i označite, baš tim redom, njene tačke A, B, C, D, tako da je $[AB]\cong[BC]\cong[CD]$.

1) Neka je $m[AC]=1$. Tada je $m[AD]=$

2) Neka je $m[BD]=1$. Tada je $m[AC]=\quad$; $m[AD]\quad=$; $m[BC]=\quad$.

3) Neka je $m[AD]=1$. Izračunajte meru svake od ostalih duži.

8. Neka je $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{15}$, -3, $\frac{14}{6}$, 0, 16, $-\frac{3}{7}$, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{3}$ apscisa tačke A. Odredite, u svakom od navedenih slučajeva, apscisu tačke B tako da bude $m[AB]=1$.

9. Svaki broj je koordinata (apscisa) tačke koju označava slovo (napisano iznad broja):

	A	B	C	D
(a)	$\frac{7}{8}$	3	5	
(b)	1	-2	$\frac{6}{5}$	
(c)	41	$-\frac{3}{5}$	6	
(d)	11	$\frac{11}{2}$	$\frac{11}{3}$	
(e)	-2	$-\frac{3}{7}$	$\frac{6}{1}$	

1) Odredite koordinatu (apscisu) tačke D tako da je $[AB]\cong[CD]$.

2) Koje mogu biti apscise tačke D kad je $[AB]<[CD]$?

3) Napišite apscise tačke D kad je $[AB]>[CD]$.

4) Odredite apscisu tačke D tako da je $[AB]\cong\frac{1}{3}[CD]$.

10. A, B, C su tačke prave brojeva i to tako da je apscisa tačke A stalno 0, a $m[BC]=0$. Neka je:

(1) $m[AB]=\frac{1}{2}$, $[\overline{CD}]=-\frac{3}{4}$; (2) $m[AB]=11$, $[\overline{CD}]=-\frac{61}{7}$;

(3) $[\overline{AB}]=-3$, $m[CD]=\frac{6}{4}$; (4) $[\overline{AB}]=\frac{5}{17}$, $m[CD]=\frac{5}{17}$.

Konstruišite u svakom od tih slučajeva tačku D i izračunajte $m[AD]$.

11. 1) Neka (§ 22.5): $A(-5{,}4;\ 0)$, $B(-3;\ 0)$; $C(1{,}6;\ 0)$, $D(5;\ 0)$, $E(6\frac{5}{12};\ 0)$. Izračunajte:

(1) $m([AB]\cup[BC])$; (2) $m([BD]\cup[DE])$;

(3) $m([AC]\cup[BC])$; (4) $m([CD]\cup[CE])$;

(5) $m([BD]\cup[CD])$; (6) $m([AD]\cup[BE])$;

(7) $m([AC]\cap[BC])$; (8) $m([AC]\cap[BD])$.

2) Izrazite svaku od prethodnih unija kao množinu realnih brojeva.

12. 1) Ako su A, B, C, D tačke prave brojeva, onda je $m([AB]\cup m[CD])=m[AB]+m[CD]-m([AB]\cap[CD])$. Zašto?

2) Ta jednakost važi i kad umesto $[AB]$ i $[CD]$ posmatramo ma koje množine M_1 i M_2.

13. 1) Iz prethodnog (pod 1) a i iz t. **11** sledi:

(1) $m[AB]+m[CD]\geqslant m([AB]\cup[CD])$;

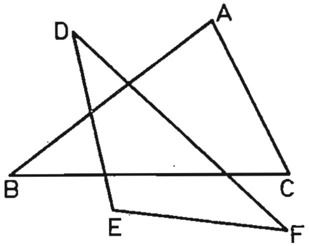
(2) $[AB]\subset[CD]\Rightarrow m[AB]\leqslant m[CD]$.

2) Važi li to za: (1) konačne množine; (2) oblasti; (3) tela?

14. Neka je $\alpha=m(\angle ABC)=79°$, $\beta=m(\angle DEF)=130°$, $\gamma=m(\angle GHK)=11°$. Izračunajte ono što označava φ u: (1) $\alpha-\varphi=\beta$; (2) $\alpha+\beta=\varphi$; (3) $\alpha+\beta-\gamma=\varphi$; (4) $\alpha-\varphi+\beta=\gamma$.

15. 1) Unutrašnjost ugla je *presek* dveju poluravni [§ 22.1, t. **3** (3)]. Pokažite da je unutrašnjost, tj. oblast trougla, *presek* triju poluravni.

2) Neka $U(\triangle ABC)$ označava unutrašnjost a $S(\triangle ABC)$ spoljašnjost trougla ABC i neka se trouglovi ABC i DEF nalaze u međusobnom položaju prikazanom na crtežu 22.31.



Slika 22.31

Osenčite oblast:

(1) $U(\triangle ABC)\cap U(\triangle DEF)$;

(2) $S(\triangle ABC)\cap S(\triangle DEF)$;

(3) $U(\triangle ABC)\cap S(\triangle DEF)$;

(4) $U(\triangle DEF)\cap S(\triangle DEF)$.

3) Zamenite simbol $\cap$ simbolom $\cup$ i izvršite ono što se zahteva pod (1), (2), (3) i (4).

16. Izračunajte meru površine oblasti ograničene pravougaonikom $ABCD$ kad je:

(1) $m[AB]=\frac{7}{2}$, $m[CD]=\frac{5}{2}$; (2) $(AB)=\frac{3}{5}\text{dm}$, $m(CD)=\frac{7}{6}\text{dm}$;

(3) $m[AB]=\frac{11}{12}$, $m[CD]=\frac{11}{12}$; (4) $(AB)=\sqrt{17}\text{ m}$, $(CD)=\sqrt{17}\text{ m}$.

17. Izračunajte meru površine paralelograma $ABCD$ kad je:

(1) $m[DC]=7$, a mera odstojanja pravih AB i CD je 4;

(2) $(AB)=10{,}5$ cm, $(AD)=6$ cm, $m(\angle BAD)=30°$;

(3) $(AB)=2$ dm, $(AD)=\sqrt{12}$ dm, $m(\angle BAD)=30°$;

(4) $(AB)=5$ m, $(AD)=13$ m, projekcija duži $[AD]$ na pravu AB poklapa se sa $[AB]$

(5) $[AB]\cong[CD]$, $(AC)=12$, $(BD)=7$.

18. 1) Mera poluprečnika jednog kruga je $\sqrt{\pi}$. Izračunajte (kvadratnu) meru kruga i (linearnu) meru kružnice.

2) Dužina poluprečnika jedne kružnice iznosi $\sqrt{12}$ dm. Izračunajte dužinu kružnice i površinu kruga.

19. Ako slovo r označava meru poluprečnika sfere, njena kvadratna mera izračunava se ovako: $\pi r^2\cdot 4=4\pi r^2$, a kubna mera izračunava se: $4\pi r^2\cdot\frac{r}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3$.

Neka je dužina poluprečnika jedne sfere $\sqrt{12}$ cm. Izračunajte njenu površinu i zapreminu.

20. 1) Neka je u Dekartovom koordinatnom sistemu $A(3, 4)$. Izračunajte $m[OA]$.

2) Isto: $B(\sqrt{3}, \sqrt{13})$, $m[OB]=$.

3) „Nacrtajte“ množinu tačaka čije koordinate zadovoljavaju uslov: (1) $x+y=2$; (2) $x-2y=4$.

Rezime

1. Svaka figura je množina tačaka.

2. 1) Svakoj množini tačaka dodeljuje se određen realan (nenegativan) broj i to:

(1) konačnoj (diskretnoj) množini dodeljuje se prirodni broj;

(2) jednodimenzionalnoj figuri (kontinuiranoj množini tačaka osim prave, neograničenih i neprostih linija) dodeljuje se linearna mera;

(3) dvodimenzionalnoj figuri (oblasti) dodeljuje se kvadratna mera;

(4) trodimenzionalnoj konveksnoj figuri dodeljuju se dve mere (kvadratna mera i kubna mera).

2) Ako su mere imenovani brojevi, one se dogovorno zovu dužina, odnosno površina, odnosno zapremina.

3) Ako se, dvema tačkama prave dodele brojevi 0 i 1, prava postaje osa, prava brojeva: svakoj tački prave (ose) brojeva odgovara određen realan broj, i obrnuto.

4) Ako se od dve neparalelne (najčešće međusobno perpendikularne) prave naprave prave brojeva, svakoj tački ravni odgovara uređen par realnih brojeva, i obratno.

5) Ako se od tri neparalelne (međusobno perpendikularne) prave naprave prave brojeva, svakoj tački prostora odgovara uređen triplet realnih brojeva, i obrnuto.

3. Tri važne geometrijske relacije jesu: podudarnost, sličnost i manje (odnosno veće). Prve dve su relacije ekvivalencije i važe uopšte. Treća je relacija poretka (reda) i odnosi se na duži i oblasti (dvodimenzionalne ili trodimenzionalne).

GLAVA XXIII

NEKA PITANJA PRAKTIČNE ARITMETIKE

§ 23.1. MERENJE I ZAOKRUGLJIVANJE REZULTATA MERENJA

1. Dodeljivanje brojeva geometrijskim objektima, izloženo u prethodnoj glavi, matematički je proces koji treba razlikovati od fizičkog merenja: neposrednog ili posrednog.

Neposrednim fizičkim merenjem određuju se mere dužina (kratko dužine) realnih predmeta (i modela geometrijskih objekata). Iz tih mera (dužina) izračunavaju se mere površina i zapremina realnih predmeta.* To izračunavanje je posredno merenje. Na sličan način određuju se: mere uglova u prirodi i kod realnih predmeta, masa predmeta, vreme, brzina, temperatura, itd.

I fizičkim merenjem se, dakle, dodeljuju brojevi (rezultat svakog merenja je broj), ali ne geometrijskim, nego fizičkim objektima i fizičkim pojavama. Usled toga su brojevi dobiveni fizičkim merenjem približni. Velike su razlike između tvrđenja, na primer:

„Dužina ove učionice je 8,2 metara", i „Kad je dužina stranice kvadrata 1 metar, dužina njegove dijagonale je $\sqrt{2}$ metara". Ili: „Mera površine kruga jediničnog poluprečnika je π".

2. Pri svakom fizičkom merenju se, dakle, uvek pojavljuju greške. One su veće ili manje, što zavisi od mnogo čega: šta se meri (kad se, npr., mere metalni predmeti greške su manje nego kad se mere drveni, a rezultati terenskih merenja su vrlo daleko od toga da prikazuju stvarno stanje), čime se meri (kojom spravom), ko meri (izvežban majstor ili učenik), golim ili „naoružanim" okom, u kom cilju se meri (kad se prave dečje igračke dopuštene su velike greške), itd.

Računanje takvim približnim rezultatima merenja povećava, po pravilu, greške.

U svakom slučaju, rezultat merenja (neposrednog ili posrednog, tj. rezultat računanja brojevima dobijenim neposrednim merenjem) je broj manji ili veći od tačnog broja koji odgovara pravom stanju. Matematički rečeno, fizičkom predmetu ili stanju odgovara čitav interval realnih (nenegativnih) brojeva, a ne jedan određen broj. Taj interval zavisi od svega već nabrojanog (a i od drugih okolnosti). Na primer, prava dužina (mera dužine) učionice može biti svaki broj intervala $8{,}15<x<8{,}35$. Od njih treba uzeti onaj koji je najbliži tačnom broju, a to se utvrđuje tako što se meri više puta, pa se izračuna aritmetička sredina (§ 21.9, t.2,6) svih dobijenih brojeva.

* Pri merenju realnih predmeta moraju se upotrebiti opšte usvojene jedinice (metarskog ili nekog drugog sistema), jer bi merenje bilo besciljno kad njegovi rezultati ne bi bili pristupačni zainteresovanim ljudima. A oni će biti pristupačni ako budu izraženi u već usvojenim jedinicama merenja.

Recimo, ako je mereno 6 puta, pa je dobiveno 8,24; 8,40; 7,98; 8,23; 8,18; 8,29 metara, onda je aritmetička sredina:

$$(8{,}24+8{,}40+7{,}98+8{,}23+8{,}18+8{,}29):6=8{,}2353\ldots$$

Ona je periodičan decimalan broj. Šta treba sad raditi? Aproksimirati je decimalnim brojem (§ 21.5). To aproksimiranje zove se i *zaokrugljivanje*.

3. Zaokrugljuju se i brojevi dobijeni pri merenju i brojanju. (Brojanje je specijalan slučaj merenja i rezultat može biti tačan ili približan broj; na primer, kad se broje klupe u učionici, dobija se tačan broj, a kad se broje zrna pšenice čija je masa, npr., 10 g ili stabla u voćnjaku, pogotovu u šumi, dobijeni broj je približan.) Zaokrugljuju se, prema prethodnom, i rezultati aritmetičkih operacija izvršenih nad prirodnim (tačnim ili približnim) brojevima, nad racionalnim (tačnim ili približnim) i iracionalnim brojevima.

U literaturi se daju razna pravila zaokrugljivanja. Međutim, sva se ona, uglavnom, svode na aproksimiranje kako je obrazloženo u § 21.5 (i § 21.6). Ne ponavljajući, navedimo primere (uz neka dopunska „objašnjenja" gde je to potrebno):

(1) $124\,738 \simeq 124\,740$ (približno veći broj sa tačnošću do 10, tj. greška je manja od $\frac{1}{2}\cdot 10$);

$124\,738 \simeq 124\,700$ (približno manji broj sa tačnošću do 100, tj. greška je manja od $\frac{1}{2}\cdot 100$);

$124\,738 \simeq 125\,000$ (greška je manja od $\frac{1}{2}\cdot 1000$);

(2) $0{,}7403 \simeq 0{,}740$ (sa tačnošću do 10^{-3}, greška je manja od $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1000}$; ako ne bismo napisali nulu posle 4, značilo bi da smo zaokruglili do stotih, tj. da je greška manja od $\frac{1}{2}\cdot 100$);

$0{,}7403 \simeq 0{,}7$ (sa tačnošću do 10^{-1}, greška je manja od $\frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$);

(3) $0{,}7003 \simeq 0{,}700$ (sa tačnošću do 10^{-3}, tj. nule moramo napisati);

(4) $\sqrt[3]{385} \simeq 7{,}2748 \simeq 7{,}275 \simeq 7{,}28 \simeq 7{,}3$.

Pirmeri (2) i (3) pokazuju da se cifra 0 posle decimalnog zareza ne može uvek izostaviti. Ona pokazuje sa kojom smo tačnošću uzeli približni broj. S druge strane približnom decimalnom broju ne mogu se dopisati nule kao tačnom; na primer, dok se tačni broj 3,7 može napisati u obliku 3,70, ili 3,700, ili 3,7000, . . . (§ 20.2, teor.1), rezultat merenja 3,7 m ne može se napisati 3,70 m, jer bi to značilo da je uzet sa tačnošću do 0,01 metra (tj. do 1 cm), a 3,7 pokazuje da je rezultat merenja dat sa tačnošću do 0,1 m.

§ 23.2. ARITMETIČKE OPERACIJE PRIBLIŽNIM BROJEVIMA

Teorija tih operacija nije teška, ali je vrlo zamorna. Celishodnije je da, uglavnom primerima, dođemo do odgovarajućih pravila.

1. Uzmimo primere sabiranja prirodnih brojeva. Poljoprivredno dobro raspolaže sa: 2400 ha oranica, 280 ha livada, 98 ha vinograda i 86 ha pašnjaka. Izračunati površinu imanja tog poljoprivrednog dobra.

Ako izračunamo običnim postupkom, dobijamo:

$$(2400+280+98+86)\ \text{ha}=2864\ \text{ha}.$$

Međutim, kao rezultati fizičkog merenja, brojevi (sabirci) su približni (zaokrugljeni) pa ne znamo cifru jedinice prvog i drugog sabirka i cifru desetica prvog sabirka. Zato cifre jedinica i desetica zbira nisu sigurne pa je najpravilnije zameniti ih nulama, vodeći računa, razumljivo, o zbiru koji daju te cifre trećeg i četvrtog sabirka.

Napišimo, dakle, sabirke tako da na mesto nesigurnih cifara stavimo N:

$$\begin{array}{r} 24NN \\ 28N \\ 98 \\ +\ \ 86 \\ \hline 28NN \end{array}$$

Zaokrugljeni rezultat običnog računanja je 2900 ha. To isto dobijamo ovde jer je $1+9+16=26$, pa je cifra desetica veća od 5.

2. Ako su svi sabirci približni brojevi sa istim brojem decimala, sabiraju se kao kad su tačni. Dobijeni zbir je napisan tačno po pravilu zaokrugljivanja:

$$7{,}306+0{,}824+5{,}736=13{,}866.$$

3. 1) Ako sabirci nemaju isti broj decimala, zbir ima nesigurnih decimala i treba ga zaokrugliti; na primer, ako je neto-masa 4,507 kg a dara (težina ambalaže) 2,8 kg, ukupna masa, izračunata na običan način, iznosi 7,307 kg. Međutim decimale stotih i hiljaditih nisu sigurne i zato računamo: $(4{,}507+2{,}8NN)\ \text{kg}=$ $=7{,}3NN$ jer ne možemo sabirati nepoznatu decimalu hiljaditih sa 7 hiljaditih i nepoznatu decimalu stotih sa 0 stotih.

2) U slučaju

$$\begin{array}{r} 5{,}23 \\ 13{,}35271 \\ +\ \ 0{,}814256 \\ \hline 19{,}396966 \end{array} \approx 19{,}40$$

jer počev od treće decimale nijedna dalja decimala prvog sabirka nije poznata, pa te decimale nisu sigurne u zbiru.

3) Da izvršimo oduzimanje $42{,}7-14{,}2724$ gde su umanjenik i umanjilac približni brojevi:

$$\begin{array}{r} 42{,}7NNN \\ -\,14{,}2724 \\ \hline 28{,}4NNN \\ \hline 28{,}4 \end{array}$$

Rezultat je 28,4, jer decimale počev od druge nisu poznate, a vodimo računa da je 7 možda smanjen za 1.

Očigledno je da se navedeni primeri mogu lakše izračunati ovako:

$$\begin{array}{r} 4{,}5 \\ +2{,}8 \\ \hline 7{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}23 \\ 13{,}352 \\ +\ \ 0{,}814 \\ \hline 19{,}396 \\ \hline 19{,}40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 42{,}7 \\ -14{,}27 \\ \hline 28{,}4N \\ \hline 28{,}4 \end{array}$$

Otuda pravilo: *U rezultatu sabiranja i oduzimanja približnih brojeva zadržava se onoliko vrednosnih decimala koliko ih ima broj (sabirak, umanjenik ili umanjilac) sa najmanje decimala. Međutim, moguće je skratiti posao izostavljanjem nesigurnih decimala i pre izvršenja operacije, ali je u tom slučaju veoma korisno zadržati jednu decimalu više svakog broja nego što je potrebno u rezultatu.*

Zaista, ako se ne bi u drugom primeru zadržala i treća decimala, a u trećem i druga decimala, rezultat ne bi bio pravilno zaokrugljen.

4. 1) Pretpostavimo da smo mereći ivice učionice dobili 12,72 m i 6,51 m i da hoćemo da izračunamo površinu poda. Kako su to približni brojevi (brojevi centimetara nisu sigurni), možemo ih zaokrugliti na decimetre, pa je: $(12{,}7\cdot 6{,}5)\ \text{dm}^2=$ $=8\,255\ \text{dm}^2$. Ali taj rezultat je približan i nastaje pitanje: koje su cifre sigurne, tj. kako da ga zaokruglimo? Da bismo to videli, izračunajmo površinu u cm^2:

$$(1272\cdot 651)\ \text{cm}^2=828\,072\ \text{cm}^2\approx 8\,281\ \text{dm}^2.$$

Upoređivanjem tog i prethodnog rezultata (8255) vidimo da su samo prve dve cifre (8 i 2) iste, a ostale dve (5 i 5) su se izmenile. Dakle, one nisu sigurne pa dobijeni broj moramo zaokrugliti, tj. $8\,255\ \text{dm}^2\approx 8\,200\ \text{dm}^2$. To se vidi i kad računanje napišemo ovako:

$$\begin{array}{r} 127N \\ x65N \\ \hline NNNN \\ 635N \\ 762N \\ \hline 82NNNN \end{array}$$

Pomnožili smo, dakle, trocifreni približni broj i dobili smo rezultat sa *dvema* sigurnim ciframa. To je opšte pravilo. Proverite ga na primerima: $753\cdot 64\cong 48000$; $472\cdot 702\,508\cong 240\,000$; $484\cdot 7=3\,388\cong 3000$.

2) Neka je $a\approx 5425$ i $b\approx 28{,}4$. Izračunajmo ab. Kako je:

$$\begin{array}{c} 5424<a<5426 \\ \underline{28{,}3<b<28{,}5} \\ 5424\cdot 28{,}3<ab<5426\cdot 28{,}5 \qquad (\S\ 13.4) \\ 153499{,}2<ab<154641, \end{array}$$

pa je
$$ab\approx 154\cdot 10^3,\ \text{greška je manja od } 10^3.$$

Uopšte, neka je:

$$d_1\approx a_k a_{k-1}\ldots a_2 a_1 \text{ i } d_2\cong b_m b_{m-1}\ldots b_2 b_1,\ k\geqslant m,\ d_1\geqslant d_2.$$

Tada je:

$$\begin{array}{c} d_1-1<d_1<d_1+1 \\ \underline{d_2-1<d_2<d_2+1} \\ (d_1-1)(d_2-1)<d_1d_2<(d_1+1)(d_2+1), \end{array}$$

tj.
$$d_1d_2-(d_1+d_2)+1<d_1d_2<d_1d_2+(d_1+d_2)+1,$$

tj.
$$d_1d_2-(d_1+d_2)<d_1d_2<d_1d_2+(d_1+d_2),$$

pa je
$$d_1d_2\approx c_1c_2\ldots c_m\cdot 10^k.$$

Proizvod dva približna broja piše se sa onoliko vrednosnih cifara koliko takvih (cifara) ima činilac koji ih ima manje i onoliko nula (posle poslednje vrednosne cifre) koliko ih ima činilac sa većim brojem cifara.

Evo još 4 primera:

(1) $0{,}783\cdot 8{,}2=6{,}4206\approx 6{,}4$; (2) $5{,}63\cdot 0{,}8=4{,}504\approx 5$;

(3) $0{,}2743\cdot 0{,}7=0{,}19201\approx 0{,}2$; (4) $6{,}3\cdot 2{,}7=17{,}01\approx 17$.

3) Izvršite množenja: (1) $0{,}4\cdot 0{,}8$; (2) $0{,}7\cdot 3{,}04$; (3) $0{,}043\cdot 0{,}69$; (4) $42{,}81\cdot 8{,}24$; (5) $109{,}23\cdot 38{,}45$.

4) Masa 1 m³ kamenog uglja iznosi 1,3 t(ona). Izračunajte masu 18,5 m³ tog uglja.

5) Za 1 ha treba 0,27 t superfosfata (veštačkog đubriva). Koliko treba za 35,5 ha?

5. 1) Neka je d_1 napisan sa k vrednosnih cifara, a d_2 sa m vrednosnih cifara i neka je $k\geqslant m$. Koliko sigurnih vrednosnih cifara ima količnik $d_1:d_2=q$? Ne može ih biti manje od m, jer bi tada (prema prethodnom pravilu množenja) $d_2\cdot q=d_1$ imao manje od m sigurnih cifara, a uslov je $k\geqslant m$.

Koliko sigurnih vrednosnih cifara ima količnik $d_2:d_1=q_1$? Više od m ne može biti, jer bi $d_1\cdot q_1=d_2$ imao više od m, a d_2 ih ima m.

Dakle, samo prvih m vrednosnih cifara količnika q može biti sigurno, na primer: ako je $a\approx 5425$, $b\approx 28{,}4$, onda je:

$$5424:28{,}5<a:b<5426:28{,}3,$$

tj.
$$190{,}315\ldots<a:b<191{,}342\ldots,$$

pa je
$$a:b\approx 191.$$

Dakle, pravilo množenja važi i za deljenje pa ga možemo ovako formulisati:

Pri množenju i deljenju približnih brojeva u rezultatu zadržati onoliko vrednosnih cifara (počev sleva), koliko ih ima onaj od brojeva (nad kojima se vrši operacija) koji ih ima manje.

2) Izvršite deljenja: (1) $27:8$; (2) $632947:256$; (3) $0{,}38:2{,}63$; (4) $2{,}45:0{,}0115$; (5) $2{,}63:7$; (6) $281:0{,}058$; (7) $25{,}46:356$.

3) Za koje vreme će automobil čija je brzina 53 km/čas preći 955 km?

4) Površina pravougaone njive iznosi 194 500 m². Dužina jedne njene stranice je 230 m. Računajte.

5) Sa 83 ha dobijeno je 1430 t krompira.

§ 23.3. IMENOVANI BROJEVI

1. Prema § 22.4 svaka dužina, svaka površina, svaka zapremina je imenovan broj, na primer: 37 mm, 3,7 cm, 3 cm, 7 mm, 17 m. 2900 mm², 29 cm², 0,29 dm², 0,0029 m²; 2,0027 ha, 0,27 ara; 48073 mm³, 48,073 cm³, 0,048073 dm³, . . . , . . .

Isto tako (na primer) 36°20′, 3,250 kg (ili 3 kg 250 g, ili 3250 g), 4 č 36 min (ili 276 min), itd. su imenovani brojevi, jer je uz svaki označena *jedinica merenja*.

Imenovani broj se, dakle, kao rezultat merenja „sastoji“ iz realnog broja i imena jedinice kojom je merenje izvršeno: On pokazuje kojom je jedinicom izmerena data veličina i koliko se puta ta jedinica sadrži u datoj veličini, npr.:

$$\frac{3}{5}\,\mathrm{m}=\left(\frac{1}{5}\text{ od m}\right)\cdot 3,\ \text{tj. petina metra uzeta 3 puta.}$$

Ako ma koju jedinicu označimo slovom j, onda:

$$nj=\underbrace{j+j+j+\ldots+j}_{n\text{ puta}};$$

$$\frac{a}{n}j=\left(\frac{1}{n}\text{ od } j\right)\cdot a,\ \text{tj. enti deo jedinice uzet, ponovljen } a \text{ puta.}$$

Prema tome (mogli bismo reći): *Imenovani broj je proizvod jedinice merenja i realnog (nenegativnog) broja.*

2. 358 g je *jednoimeni broj*, a 35 dkg 8 g ili 3 kg 5 dkg 8 g je *višeimeni* ili *višeimenovani broj*.

Uopšte, $\frac{a}{n}j_1+\frac{b}{n}j_2+\frac{c}{n}j_3+\ldots+\frac{k}{n}j_k$ zove se *višeimeni (višeimenovani) broj* ako su $j_1, j_2, \ldots, j_k$ izvedene iz iste osnovne jedinice.

3. Očigledno je:

(1) $\frac{a}{n}j_1=\frac{b}{n}j_2$, ako je $\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$ i $j_1=j_2$;

(2) $\frac{a}{n}j_1>\frac{b}{n}j_1$, ako je $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$;

(3) $\frac{a}{n}j_1$ i $\frac{a}{n}j_2$ ne mogu se uporediti (7 m i 7 m², 20° i 20 kg ne mogu se uporediti);

(4) 0,7 ha = 70 a = 7000 m² = 700000 dm² = . . . ;

(5) 300000 g = 300 kg = 3 q (mc) = 0,3 t;

(6) 5,3 č = (5,3 · 60) min = (5,3 · 60 · 60) sec;

(7) 5 dn 7 č 28 min = (5 · 24 · 60 + 7 · 60 + 28) min = .

4. Sabiranje i oduzimanje imenovanih brojeva:

(1) 9 km + 17 km + 4 km = (9 + 4 + 17) km = 30 km;

(2) 0,536 kg + 3,08 kg + 0,9 kg = (0,536 + 3,08 + 0,9) kg.

Uopšte: $\frac{a}{n}j_1+\frac{b}{n}j_1+\frac{c}{n}j=\frac{a+b+c}{n}j.$

(3) 0,7 m + 13 cm = 70 cm + 13 cm = 83 cm.

(4) 26 dm² + 3 ha + 17 m² = 0,000026 ha + 3 ha + 0,0017 ha,

= 3,001726 ha,

ili = 26 dm² + 3000000 dm² + 1700 dm² = ;

(5) 4 kg − 53 g = 4000 g − 53 g = 3047 g,

ili = 4 kg − 0,053 kg = (4 − 0,053) kg = 3,047 kg.

Uopšte, ako je $j_1=cj_2$, onda je $aj_1\pm bj_2=(ac\pm b)j_2$.

5. Množenje i deljenje imenovanih brojeva neimenovanim brojevima:

1) 4,2 kg · 5 = 4,2 kg + 4,2 kg + . . . + 4,2 kg = (4,2 · 5) kg = 21 kg,

4,2 kg : 6 = (4,2 : 6) kg = 0,7 kg,

$4{,}2\ \mathrm{kg}\cdot\frac{5}{6}=(4{,}2\ \mathrm{kg}\cdot 5)\cdot\frac{1}{6}=(4{,}2\cdot 5)\ \mathrm{kg}:6=(21:6)\ \mathrm{kg}=3{,}5\ \mathrm{kg}$,

ili $4{,}2\ \mathrm{kg}\cdot\frac{5}{6}=(4{,}2\ \mathrm{kg}:6)\cdot 5=0{,}7\ \mathrm{kg}\cdot 5=3{,}5\ \mathrm{kg}$.

Uopšte: $a\,j\cdot p=(ap)\,j$; $a\,j:p=(a:p)\,j=\frac{a}{p}j$,

$$a\,j\cdot\frac{p}{q}=\left(a\cdot\frac{p}{q}\right)j=\frac{ap}{q}\,j,$$

$$\frac{a}{b}\,j\cdot\frac{p}{q}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\right)j=\frac{ap}{bq}\,j.$$

Razumljivo je da važi komutativnost:

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{a}{b}j=\frac{a}{b}j\cdot\frac{p}{q}.$$

2) $5{,}7\ \mathrm{kg}:\frac{4}{7}=x,\quad \frac{4}{7}x=5{,}7\ \mathrm{kg},\quad \frac{1}{7}x=(5{,}7:4)\ \mathrm{kg}.$

$$x=[(5{,}7:4)7]\ \mathrm{kg}=\frac{5{,}7\cdot 7}{4}\ \mathrm{kg},\ \text{tj.}\ 5{,}7\ \mathrm{kg}:\frac{4}{7}=\frac{5{,}7\cdot 7}{4}\ \mathrm{kg}.$$

Uopšte: $\frac{a}{b}j:\frac{p}{q}=\frac{aq}{bp}j.$

3) (1) $(20°15'25'')\cdot 4=80°60'100''=81°1'40''.$

(2)
$$\begin{array}{rrr|l}
46° & 27' & 14'' & \ 4 \\ \cline{4-4}
2°=\ \dots\dots & 120' & \dots & \ 11°36'48'' \\ \cline{2-2}
 & 147' & \dots & \\
 & 144' & \dots & \\ \cline{2-2}
 & 3'=\ \dots & 180 & \\ \cline{3-3}
 & & 194 & \\
 & \text{ostatak} & 2'' &
\end{array}$$

(3) $(16°35'58'')\cdot 10$ i $(16°35'58''):10.$

6. Množenje imenovanih brojeva:

1) Površina oblasti pravougaonika čije su dužine stranica a cm i b cm izračunava se: $a\ \mathrm{cm}\cdot b\ \mathrm{cm}=(a\cdot b)\ (\mathrm{cm}\cdot\mathrm{cm})=ab\ \mathrm{cm}^2$.

2) Zapremina pravougaonog paralelepipeda čije su dužine ivica a cm, b cm, c cm izračunava se:

$$a\ \mathrm{cm}\cdot b\ \mathrm{cm}\cdot c\ \mathrm{cm}=(abc)\ (\mathrm{cm}\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{cm})=abc\ \mathrm{cm}^3.$$

3) (1) Ako čovek podigne 12 kg na visinu čija je dužina 8 m, on vrši *rad*: $12\ \mathrm{kg}\cdot 8\ \mathrm{m}=96\ \mathrm{kgm}$.

(2) Ako na turbine električne centrale pada a kg vode sa visine od h metara, voda vrši rad: $a\ \mathrm{kg}\cdot h\ \mathrm{m}=(ah)\ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m})=ah\ \mathrm{kgm}$.

Uopšte: $a\,j_1\cdot b\,j_2=(ab)\,(j_1\cdot j_2)=ab\,j_3$
ako postoji jedinica $j_3=j_1j_2$.

7. Deljenje imenovanih brojeva:

1) Sta znači: $15\ \mathrm{m}:3\ \mathrm{m}$; $20\ l:9\ l$?

Sa praktičnog stanovišta to su pitanja: Koliko puta po 3 m možemo uzeti (odseći) od komada čija je dužina 15 m? Koliko puta (npr. kanti) po 9 litara možemo uzeti (napuniti) od 20 litara?

Odgovori su: $15\ \mathrm{m}:3\ \mathrm{m}=5$, $20\ l:9\ l=\frac{20}{9}$, dakle *neimenovani brojevi.*

Nezavisno od prakse: iz $15\ \mathrm{m}:3\ \mathrm{m}=x$ sledi $3\ \mathrm{m}\cdot x=15\ \mathrm{m}$ (metara), pa je (t. **5**) $x=5$.

Ili: $15\ \mathrm{m}:3\ \mathrm{m}=(15:3)\ (\mathrm{m}:\mathrm{m})=5$.

2) $3\ \mathrm{g}:6\ \mathrm{kg}=0{,}003\ \mathrm{kg}:6\ \mathrm{kg}=0{,}003:6=0{,}0005$.

Uopšte: $a\,j:b\,j=\frac{a}{b}$ (neimenovani broj),

jer je: $\quad b\,j\cdot\frac{a}{b}=\frac{b\cdot a}{b}j=a\,j,$

ili: $\quad a\,j:b\,j=(a:b)\ (j:j)=\frac{a}{b}.$

3) (1) Za 12 časova pređen je put dužine 42 km. Ako je kretanje bilo ravnomerno, svakog časa je pređen put dužine 3,5 km. To se zove *brzina* i zapisuje se ovako: $42\ \mathrm{km}:12\ \text{č}=3{,}5\ \mathrm{km}/\text{č}$.

Brzina u sekundi iznosi $3{,}5\cdot\frac{1000\ \mathrm{m}}{(60\cdot 60)\ \mathrm{sec}}\approx 0{,}97\ \mathrm{m/sec}.$

(2) Brzina iznosi 7,8 m/sec. Izračunati dužinu puta pređenog za 3,25 č.

$$\begin{aligned}7{,}8\ \mathrm{m/sec}\cdot 3{,}25\ \text{č}&=(7{,}8\cdot 3{,}25)\ \mathrm{m}\text{č}/\mathrm{sec}\\ &\approx 25{,}4\ \mathrm{m}\text{č}/\mathrm{sec}=2{,}54\ \mathrm{m}\cdot 60^2\mathrm{sec}\approx 91{,}4\ \mathrm{km}.\end{aligned}$$

4) (1) Na oblast čija je površina $22\ \mathrm{cm}^2$ pritiskuje sila od 52 kg. Koliki je pritisak: na $1\ \mathrm{cm}^2$; na $1\ \mathrm{mm}^2$?

$$52\ \mathrm{kg}:22\ \mathrm{cm}^2\approx 2{,}4\ \mathrm{kg/cm}^2=2{,}4\frac{1000\ \mathrm{g}}{100\ \mathrm{mm}^2}=24\ \mathrm{g/mm}^2.$$

(2) Materijal podnosi $8{,}6\ \mathrm{kg/cm}^2$ pritiska. Kolika se masa može staviti na $5{,}3\ \mathrm{dm}^2$?

$$\begin{aligned}8{,}6\ \mathrm{kg/cm}^2\cdot 5{,}3\ \mathrm{dm}^2&=(8{,}6\cdot 5{,}3)\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^2/\mathrm{cm}^2\\ &=(8{,}6\cdot 5{,}3)\ \mathrm{kg}\cdot 100\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{cm}^2\\ &\approx(46\cdot 100)\ \mathrm{kg}\approx 4\,600\ \mathrm{kg}.\end{aligned}$$

Ili: $8{,}6\ \mathrm{kg}\cdot 530=(8{,}6\cdot 530)\ \mathrm{kg}\approx 4\,600\ \mathrm{kg}$ (§ 23.2, t. **4**).

5) Cena se uvek izražava sa dve jedinice: d/kg (dinara po kilogramu); d/t (dinara po toni); . . .

GLAVA XXIV

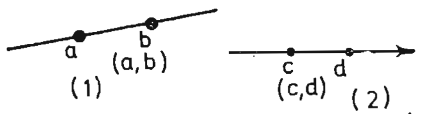
EKVIPOLENCIJA

§ 24.1. EKVIPOTENTNI UREĐENI PAROVI TAČAKA

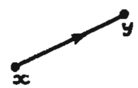
1. 1) U glavi III definisali smo pojam: *uređeni par* (i posle smo ga stalno koristili, jer ima fundamentalni značaj u modernoj matematici).

Dve tačke a i b* čine uređeni par čim se dogovorimo koju ćemo smatrati prvom (i to ne menjamo u toku ispitivanja, rešavanja određenog problema). Znači (a, b) je uređeni par tačaka a i b. Svaki takav par orijentiše pravu ab od a ka b, jer je $a<b$ [sl. 24.1 (1)] [sl. 24.1 (2)]. Obrnuto, dve tačke orijentisane prave uvek čine uređeni par.

Isto tako i specijalni slučaj kad je $a=b$, tj. (a, a), smatramo uređenim parom. On se zove *identični par* (glava III).



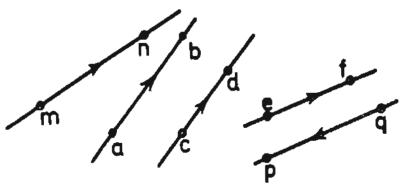
Slika 24.1



Slika 24.2

2) Uređeni par prikazuje se grafički strelicom koja „izlazi" iz prvog člana i „ulazi" u drugi. Uređeni par tačaka (x, y) prikazivaćemo strelicom na intervalu $]x, y[$ (sl. 24.2).

3) Uređeni parovi (a, b) i (c, d), sl. 24.3, jesu *paralelni*, tj.:



Slika 24.3

$$(a, b) \| (c, d),$$

kad su prave ab i cd paralelne.

Isto tako je:

$$(e, f) \| (p, q).$$

Ali, uređeni parovi (a, b) i (c, d) su *istog smera*, a uređeni parovi (e, f) i (p, q) su *suprotnog smera*. To su *suprotni* uređeni parovi.

Možemo li nešto reći za uređene parove (a, b) i (m, n)? Ne. A za, npr., (p, q) i (c, d)? Ne.

* Ponovo se vraćamo na oznake teorije množina.

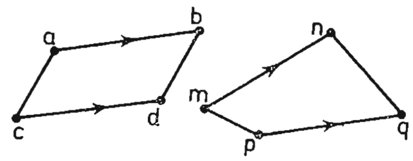
2. 1) Za uređene parove (a, b) i (c, d), sl. 24.4, kažemo da su *vezani paralelogramom* i to se označava ovako (a, b) ▱ (c, d).

Uređeni parovi (m, n) i (p, q) nisu vezani paralelogramom.

Jesu li (a, b) i (m, n) vezani paralelogramom?

Kad kažemo da su dva uređena para tačaka vezana paralelogramom?

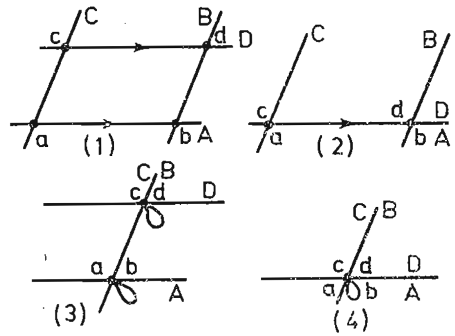
Ne treba gubiti iz vida da samo uređeni parovi *istog smera* mogu biti vezani paralelogramom.



Slika 24.4

2) Crtež 24.5(1) prikazuje dva uređena para (a, b) i (c, d) vezana paralelogramom.

Zamislite kako se taj crtež deformiše i od njega postaje crtež (2). Zatim, zamislite kako od tog crteža (1) postaje (3). Najzad, zamislite kako od (2), ili od (3), postaje (4). Jeste li pri tim deformacijama uzeli u obzir da prave $A=ab$ i $D=cd$, $C=ac$ i $B=bd$ ostaju stalno paralelne? To je obavezno.

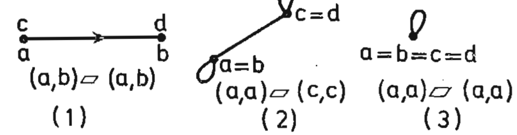


Slika 24.5

To pokazuje da su i identični parovi vezani paralelogramima. Naime, crtež (2) prikazuje parove (a, b) i (c, d) koji se poklapaju, crtež (3) prikazuje dva identična para, a crtež (4) dva identična para koji se poklapaju. Otuda: Dva identična para, različita [crtež (3)] ili ne [crtež (4)], jesu uvek vezana paralelogramom.

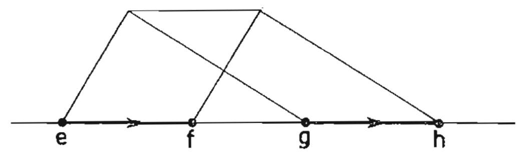
Svaka dva uređena para tačaka koji se mogu vezati paralelogramom zovu se ekvipolentni uređeni parovi tačaka.

Znači, (a, b) i (c, d), prikazani crtežom 24.4 ili 24.5, jesu ekvipolentni uređeni parovi tačaka. Uređeni parovi (a, b) i (c, d) prikazani crtežom 24.6 su



Slika 24.6

specijalni ekvipolentni uređeni parovi tačaka. Isto tako, (e, f) i (g, h), sl. 24.7, jesu ekvipolentni uređeni parovi tačaka, jer su vezani sa dva paralelograma čija



Slika 24.7

je jedna stranica zajednička. Primetimo da su tačke e, f, g, h kolinearne (tj. pripadaju istoj pravi).

Prema tome:

Dva uređena para tačaka su ekvipolentna:

(1) *ako se mogu vezati jednim paralelogramom* [sl. 24.4 ili 24.5(1)];

(2) *ako se mogu vezati sa dva paralelograma koji imaju jednu zajedničku stranicu* (sl. 24.7);

(3) *ako je svaki od njih identičan par* [sl. 24.6(2) i (3)].

Ekvipolentnost parova (a, b) i (c, d) označava se ovako

$$(a, b)\uparrow(c, d),$$

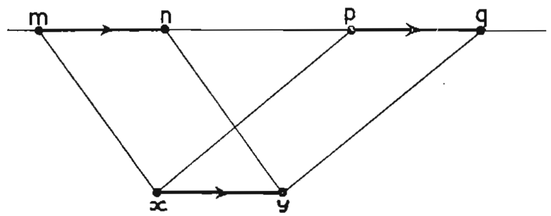
što se čita: Uređeni par (a, b) ekvipolentan je uređenom paru (c, d).

Kažemo još da između dva ekvipolentna uređena para tačaka postoji relacija *ekvipolencije*.

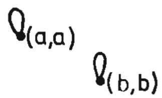
3. Na osnovu prethodne definicije možemo napisati:

(1) $(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, b)▱(c, d)$ [sl. 24.4, 24.5(1)];

(2) $(m, n)\uparrow(p, q) \Leftrightarrow ((m, n▱(x, y)$ i $(x, y)▱(p, q))$ [sl. 24.8];



Slika 24.8

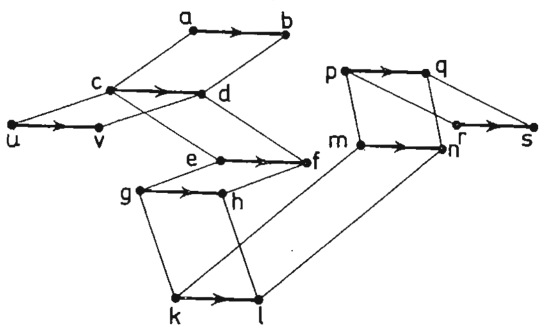


Slika 24.9

(3) $(a, a)\uparrow(b, b)$, sl. 24.9, tj. dva identična uređena para su *uvek ekvipolentna. Uopšte, svi identični uređeni parovi su ekvipolentni*, tj.:

$$(a, a)\uparrow(b, b)\uparrow(c, c)\uparrow \dots$$

i svaki uređeni par ekvipolentan identičnom paru jeste identičan.



Slika 24.10

(4) $(a, a)\uparrow(a, a)$, jer je $(a, a)▱(a, a)$ [sl. 24.6(3)].

4. Iz crteža 24.10 je očigledno:

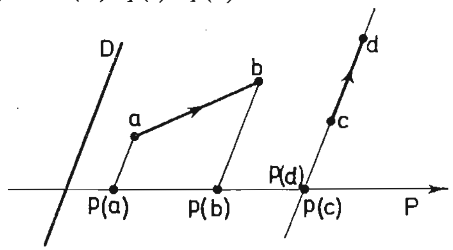
$(a, b)\uparrow(c, d)\uparrow(e, f)\uparrow$
$\uparrow(g, h)\uparrow \dots \uparrow(r, s)\uparrow(u, v) \dots$

Na osnovu toga uvodimo:

Aksiom Π 13. — Ekvipolencija je tranzitivna relacija.

5. Posmatrajmo paralelnu projekciju ravni Π na pravu P za pravac (D) (§ 9.6, t. **4**).

Projekcija uređenog para (a, b) je uređeni par $(p(a), p(b))$. U specijalnom slučaju, kad je $cd \subset (D)$: $p(c) = p(d)$.



Slika 24.11

§ 24.2. OSOBINE EKVIPOLENCIJE

1. 1) Da li je ekvipolencija jedna relacija ekvivalencije? Jeste. Pokažimo to:

(1) $(a, a)\uparrow(a, a)$ [24.1, t. **3**, 3(4)]

$(a, b)\uparrow(a, b,)$ jer je $(a, b)▱(a, b)$ [sl. 24.5(2) i 24.6(1)].

Znači, ekvipolencija je *refleksivna relacija*.

(2) $(a, a)\uparrow(b, b) \Rightarrow (b, b)\uparrow(a, a)$ [§ 24.1, t. **3**, 3(3)]

$(a, b)\uparrow(c, d) \Rightarrow (c, d)\uparrow(a, b)$, jer $(a, b)▱(c, d) \Rightarrow (c, d)▱(a, b)$.

U stvari, ako su tačke a, b, d, c, uzete tim redom, temena paralelograma, onda su i tačke c, d, b, a, uzete tim redom, temena (tog istog) paralelograma.

To pokazuje da je *ekvipolencija i simetrična relacija*.

(3) Najzad, ekvipolencija je tranzitivna (aksiom Π 11), tj.:

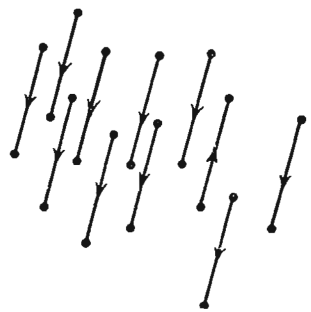
$((a, b)\uparrow(c, d)$ i $(c, d)\uparrow(e, f)) \Rightarrow (a, b)\uparrow(e, f)$.

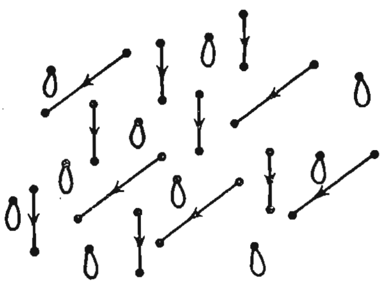
Dakle: *Ekvipolencija je relacija ekvivalencije*.

2) Jesu li uređeni parovi tačaka prikazani crtežom 24.12 ekvipolentni?

3) Na crtežu 24.13 prikazane su tri množine ekvipolentnih uređenih parova tačaka.

Pokažite elemente svake množine.


Slika 24.12


Slika 24.13

2. Ako je $(a, b)\uparrow(a, d)$, onda je $b=d$.

Ako je $(a, b)\uparrow(c, b)$, onda je $a=c$.

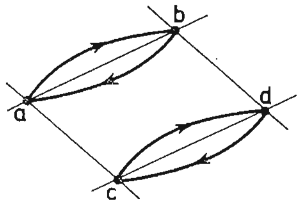
Te implikacije slede neposredno iz definicije ekvipolentnih uređenih parova i zapisuju se na poznati način:

$$(a, b)\uparrow(a, d) \Rightarrow b=d; \ (a, b)\uparrow(c, b) \Rightarrow a=c.$$

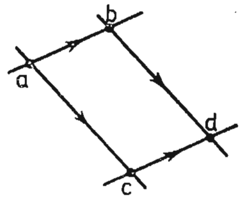
3. Neka je $(a, b)\uparrow(c, d)$, sl. 24.14. Da li je tada $(b, a)\uparrow(d, c)$ i zašto?

Dakle: $(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (b, a)\uparrow(d, c)$.

To jest: *Ako su dva uređena para ekvipolentna, onda su i suprotni parovi ekvipolentni.*



Slika 24.14



Slika 24.15

4. Neka je $(a, b)\uparrow(c, d,)$ sl. 24.15. Da li je tada i $(a, c)\uparrow(b, d)$ i zašto?

Dakle: $(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, c)\uparrow(b, d)$.

5. Iz prethodnih osobina sledi da ako su (a, b) i (c, d) ekvipolentni parovi, onda se iz tabele

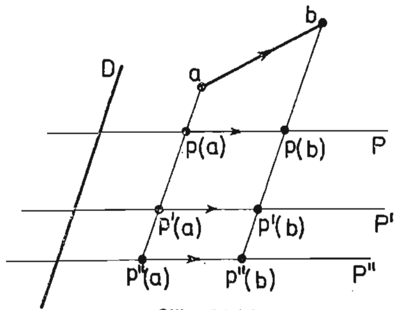
$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

dobijaju još tri ekvipolencije. Napišite ih.

§ 24.3. PARALELNE PROJEKCIJE EKVIPOLENTNIH UREĐENIH PAROVA

1. 1) „Nacrtajte" uređeni par $(a, b,)$, više paralelnih pravâ, npr. $P \| P' \| P'' \| \ldots$ i pravu $D \neq P$. Konstruišite paralelne projekcije para (a, b) na svaku pravu P, P', P'' za pravac (D).

Šta možete reći o tim projekcijama? Obrazložite.



Slika 24.16

Dakle: $(p(a), p(b))\uparrow(p'(a), p'(b))\uparrow$ $\uparrow(p''(a), p''(b))$, tj. *paralelne projekcije uređenog para tačaka na paralelne prave jesu ekvipolentni uređeni parovi.*

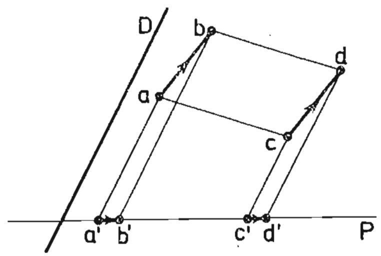
2) Posmatrajte specijalni slučaj: paralelne projekcije identičnog para na paralelne prave.

2. 1) Projektujte (tj. konstruišite paralelne projekcije) dva ekvipolentna uređena para na pravu P za pravac (D). Šta možete reći o paralelnim projekcijama ekvipolentnih parova?

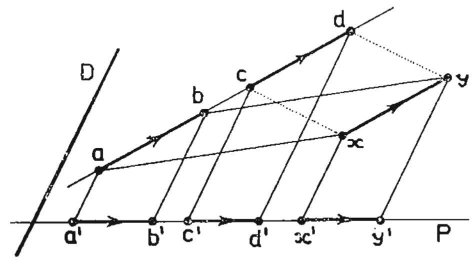
Ako je $(a, b)\uparrow(c, d)$, sl. 24.17, i ako su (a', b') i (c', d') njihove paralelne projekcije na P za pravac (D), onda je:

$$(a', b')\uparrow(c', d').$$

Pokušajte da to dokažete. (Posle konsultujte Uputstva.)



Slika 25.17



Slika 24.18

Teorema 1. — *Projekcije ekvipolentnih uređenih parova na istu pravu, za isti pravac, jesu ekvipolentni uređeni parovi.*

2) Da li teorema važi kad su ekvipolentni parovi kolinearni (sl. 24.18)?

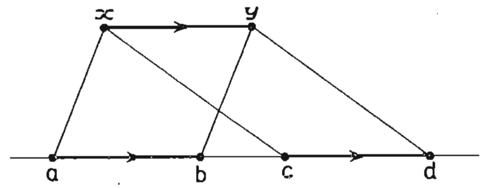
To je specijalan slučaj i lako se dokazuje uvođenjem pomoćnog para (x, y) koji je ekvipolentan paru (a, b). Zaista, tada je:

(1)	$(a', b')\uparrow(x', y')$	[prethodna teorema];
(2)	$((x, y)\uparrow(a, b)$ i $(a, b)\uparrow(c, d)) \Rightarrow (x, y)\uparrow(c, d)$	[tranzit];
(3)	$(x, y)\uparrow(c, d) \Rightarrow (x', y')\uparrow(c', d')$	[pret. teorema];
(4)	$(a', b')\uparrow(c', d)$	[iz (1) i (3)].

Iskazana teorema važi, dakle, uopšte.

3. Proširimo sad činjenicu, § 24.2, t. **4**, na slučaj kad su tačke a, b, c, d kolinearne, tj. dokažimo da (sl. 24.19):

$$(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, c)\uparrow(b, d).$$



Slika 24.19

U tu svrhu konstruišimo par (x, y) ekvipolentan parovima (a, b) i (c, d), a koji nije kolinearan sa njima. Tada:

$(a, b)\uparrow(x, y) \Rightarrow (a, x)\uparrow(b, y)$	[24.2, t. **4**];
$(x, y)\uparrow(c, d) \Rightarrow (x, c)\uparrow(y, d)$	[24.2, t. **4**];
$(x, c)\uparrow(y, d) \Rightarrow xc \| yd$	[24.1, t. **2**].

Ako sad projektujemo ekvipolentne parove (a, x) i (b, y) paralelno pravi xc, dobijamo:

$$(a, x)\uparrow(b, y) \Rightarrow (a, c)\uparrow(b, d) \qquad \text{[pret. teorema]}$$

A to i dokazuje tvrđenje, jer se taj (poslednji) zaključak dobija pod pretpostavkom da je $(a, b)\uparrow(c, d)$.

4. Konstruišite: $(a, b)\uparrow(c, d)$, proizvoljne prave $P\|Q$, pravu $D\neq P$, paralelnu projekciju (a', b') para (a, b) na P za pravac (D) i paralelnu projekciju (c'', d'') para (c, d) na Q za pravac (D). Obrazložite da je $(a', b')\uparrow(c'', d'')$.

To važi i kad su parovi (a, b) i (c, d) kolinearni.

Znači: *Projekcije ekvipolentnih parova na paralelne prave, za isti pravac, jesu ekvipolentni uređeni parovi.*

Iz svega prethodnog zaključujemo:

Paralelna projekcija održava ekvipolentnost.

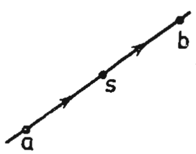
5. Nacrtajte tri tačke $a, b, c \in \Pi$ i konstruišite tačku x tako da je $(c, x)\uparrow(a, b)$.

Problem ima samo jedno rešenje, tj. tačka x je jedinstvena.

U specijalnom slučaju (§ 24.2, t. **2**): $(a, b)\uparrow(a, x) \Rightarrow b=x$.

§ 24.4. SREDINA UREĐENOG PARA I NEKE PRIMENE

1. 1) Uočimo bilo koji uređeni par tačaka (a, b). Tačka s koja zadovoljava uslov $(a, s)\uparrow(s, b)$ zove se *sredina uređenog para* (a, b).



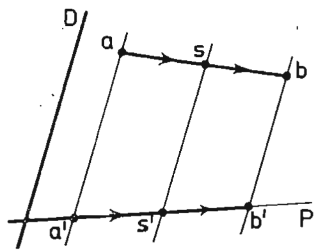
Slika 24.20

Tačka s zove se i: *sredina para* $\{a, b\}$, *sredina intervala* $[a, b]$, *sredina duži* $[a, b]$, odnosno sredina poluotvorene $[a, b[$ ili otvorene duži $]a, b[$.

2) Ako je s sredina uređenog para (a, b), onda je s sredina i uređenog para (b, a). Zaista, na osnovu § 24.2, t. **1** i t. **3**:

$$(a, s)\uparrow(s, b) \Leftrightarrow (b, s)\uparrow(s, a)$$

2. 1) Neka je s sredina uređenog para (a, b), sl. 24.21, i neka su a', s', b' paralelne projekcije tačaka a, s, b na pravu P za pravac (D). Šta možete, na osnovu prethodnog paragrafa, reći o (a', s') i (s', b')? Otuda:



Slika 24.21

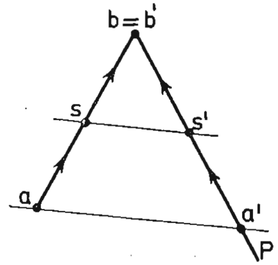
Teorema 2. — *Paralelna projekcija održava sredinu uređenog para tačaka.*

Ili (t. **1**, 1): *Paralelna projekcija održava sredinu duži.*

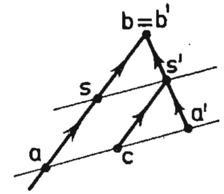
Drugim rečima, *paralelna projekcija sredine date duži (datog uređenog para) je sredina (paralelne) projekcije te duži.*

Simbolima: $(a, s)\uparrow(s, b) \Rightarrow (a', s')\uparrow(s', b')$.

2) Očigledno je da teorema 2 važi i u specijalnom slučaju kad $b\in P$ (sl. 24.22). Tada je $b=b'$.



Slika 24.22



Slika 24.23

3. 1) Dokažimo obrnutu teoremu. I to prvo obrnutu teoremu specijalnog slučaja (pod 2).

Naime, neka je s sredina uređenog para (a, b), a s' sredina uređenog para (a', b'), pri čemu je $b'=b$. Dokažimo da su prave ss' i aa' paralelne (sl. 24.22 i sl. 24.23).

Simbolima: $((a, s)\uparrow(s, b) \text{ i } (a', s'))\uparrow(s', b) \Rightarrow ss'\|aa'$.

Konstruišimo (§ 24.3, t. **5**) tačku c tako da je $(s, b)\uparrow(c, s')$. Tada: $((a,s)\uparrow(s, b) \text{ i } (s, b)\uparrow(c, s')) \Rightarrow (a, s)\uparrow(c, s')$ (§ 24.2,. t. **1**(3)].

A kako ekvipolentni parovi određuju paralelogram, iz $(a, s)\uparrow(c, s')$ sledi $ss'\| ac$.

Na sličan način dokazuje se $ss'\|ca'$. U tu svrhu dovoljno je konstruisati tačku d tako da je $(b, s')\uparrow(s, d)$.

Tada je $(d, a)\uparrow(s, s')$, pa je $d=c$, jer je $(a, c)\uparrow(s, s')$, odakle sledi $ss'\|ca'$.

Dakle: $ss'\|aa'$, što je i trebalo dokazati. Otuda:

Teorema 3. — *Prave određene sredinama dva uređena para (dve duži) sa jednom zajedničkom krajnjom tačkom paralelne su.*

2) Treba primetiti da je c paralelna projekcija tačke s' za pravac (ba), pa je, na osnovu teoreme 2, sredina para (a, a'), duži $[a, a']$. (Vidi dalje t. **5**, 3.)

Dakle: (sl. 24.23) $(a, c)\uparrow(c, a')$. Ali još važnije od toga su, već utvrđene, činjenice:

$(c, s)\uparrow(s', b)$ pa, prema tome, i $(c, s)\uparrow(a', s')$;

$(c, s)\uparrow(a', s')$ i $(c, s)\uparrow(s', b')$;

$(s, s')\uparrow(a, c)$ i $(s, s')\uparrow(c, a')$.

3) Iz prethodne teoreme neposredno sledi *da je sredina uređenog para (duži) jedna jedina.* Pokušajte da to obrazložite.

4. Nacrtajte kolinearne tačke $a', b', c' \in \Pi$ tako da je $(a', b')\uparrow(b', c')$. Neka je $aa'\|cc'$. Šta, u tom slučaju, možemo tvrditi za pravu bb' i na osnovu čega?

Iz datih uslova sledi da je crtež „sličan" crtežu 24.21 (pri čemu je položaj duži $[ac]$ potpuno proizvoljan). Prema tome, na osnovu teoreme 2 i jedinstvenosti sredine (prethodna t. **3**, 3) mora biti $bb' \| aa' \| cc'$. Otuda:

Teorema 4. — *Ako su b i b' sredine uređenih parova (a, c) i (a', c') i ako su prave aa' i cc' paralelne, onda je $bb' \| aa' \| cc'$.*

Simbolima: $\big((a, b)\uparrow(b, c)$ i $(a', b')\uparrow(b', c')$ i $cc' \| aa'\big) \Rightarrow (bb' \| aa' \| cc')$.

5. Ako četiri tačke a, a', c, c' zadovoljavaju uslov prethodne teoreme tj. ako je $[aa'] \| [cc']$, bez obzira kakav je međusobni položaj parova (a, c) i (a', c'), neparalelnih stranica $[ac]$ i $[a'c']$, one određuju trapez. Tri tačke a, a', b (sl. 24.22, ili 24.23) određuju trougao. Teoreme 2, 3 i 4 i svi njihovi specijalni slučajevi (prethodne tačke 2, 3, 4) čine zajedno „malu teoremu Talesa". Možemo ih prestilizovati ovako:

1) *Prava koja sadrži sredinu jedne neparalelne stranice trapeza a paralelna je njegovim paralelnim stranicama, sadrži i sredinu druge neparalelne stranice.*

2) *Prava koja sadrži sredine neparalelnih stranica trapeza paralelna je njegovim paralelnim stranicama.*

3) *Prava koja sadrži sredinu jedne stranice trougla a paralelna je drugoj stranici trougla sadrži i sredinu treće stranice.*

4) *Prava koja sadrži sredine dveju stranica trougla paralelna je trećoj stranici.*

Očigledno je da su 1) i 2), 3) i 4) međusobno obrnute teoreme.

§ 24.5. OSOBINE DIJAGONALA PARALELOGRAMA I MEDIJANA TROUGLA (DALJE PRIMENE SREDINE PARA TAČAKA)

1. Konstruišite nekolinearne parove $(a, b)\uparrow(c, d)$. Neka je s presečna tačka pravâ ad i bc. Proverite da je $(a, s)\uparrow(s, d)$ i $(b, s)\uparrow(s, c)$. Da li je uvek tako?

Konstruišite, nezavisno od prethodnog, $(a, s)\uparrow(s, d)$ i $(b, s)\uparrow(s, c)$. Je li $(a, b)\uparrow(c, d)$? Da li je uvek tako?

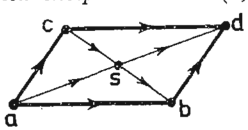
Mogu se dokazati ove ekvivalencije:

$$(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, d)\boldsymbol{S}(b, c)$$

$$(a, c)\uparrow(b, d) \Leftrightarrow (a, d)\boldsymbol{S}(b, c),$$

gde $\boldsymbol{S}$ označava relaciju „. . . ima istu sredinu kao . . .".

Ili (rečima iskazane): *Uređeni parovi (a, b) i (c, d), odnosno (a, c) i (b, d), jesu ekvipolentni ako (a, d) i (b, c) imaju istu sredinu i obrnuto.*



Slika 24.24

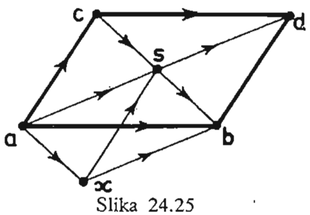
To se može dokazati i kad su a, b, c, d kolinearne i kad nisu. Mi ćemo dokazati samo kad nisu.

Pretpostavimo, znači, da je $(a, b)\uparrow(c, d)$, da ti uređeni parovi nisu kolinearni (sl. 24.24) i dokažimo $(a, d)\boldsymbol{S}(c, b)$.

U tu svrhu projektujmo:

(1) (a, b) i (c, d) na pravu bc paralelno sa ad;

(2) (a, b) i (c, d) na pravu ad paralelno sa bc.



Slika 24.25

Na osnovu teoreme 1, dobijamo:

U slučaju (1) $(c, s)\uparrow(s, b)$; Dakle:
U slučaju (2) $(a, s)\uparrow(s, d)$. $(a, d)\boldsymbol{S}(c, b)$.

Obrnuto: Pretpostavimo da $(a, d)\boldsymbol{S}(c, b)$ i dokažimo da je $(a, b)\uparrow(c, d)$.

Konstruišimo polupravu iz a paralelno sa cb i polupravu iz b paralelno sa ad (sl. 24.25). Neka se njihov presek zove x.

Prema toj konstrukciji, tačke a, s, b, x određuju paralelogram, pa je:

	$(a, x)\uparrow(s, b)$.	
Iz toga i uslova	$(c, s)\uparrow(s, b)$	
sledi (tranzitivnost)	$(a, x)\uparrow(c, s)$,	
tj. (§ 24.2, t. **4**)	$\boxed{(a, c)\uparrow(x, s).}$	(1)
Iz	$(a, x)\uparrow(s, b)$	
sledi (§ 24.2, t. **4**)	$(a, s)\uparrow(x, b)$,	
a iz toga i uslova $(a, s)\uparrow(s, d)$	$(x, b)\uparrow(s, d)$,	
pa je (opet § 24.2, t. **4**)	$\boxed{(x, s)\uparrow(b, d).}$	(2)
Iz (1) i (2) je [§ 24.2, t. **1**(3)]	$(a, c)\uparrow(b, d)$,	
a odatle (§ 24.2, t. **4**)	$(a, b)\uparrow(c, d)$,	

što je i trebalo dokazati.

Dokazali smo, dakle, teoremu i obrnutu teoremu, tj.:

$$(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, d)\boldsymbol{S}(c, b).$$

To se najčešće iskazuje ovako:

Teorema 5. — *Četvorougao je paralelogram tada, i samo tada, kad je presek njegovih dijagonala sredina svake dijagonale.*

2. Rešite ove konstruktivne probleme:

1) *Dat je uređeni par $(a, b.)$ Konstruisati uređeni par (a, x) tako da je b sredina para (a, x).*

2) *Dat je uređeni par (a, b). Konstruisati niz uzastopnih ekvipolentnih parova od kojih je prvi (a, b).*

„Uzastopni" znači da je početak sledećeg kraj prethodnog.

3) *Dat je uređeni par (a, b). Konstruisati njegovu sredinu.*

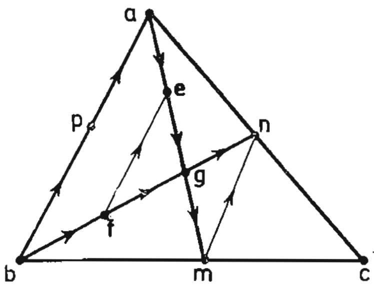
4) *Dat je uređeni par (a, f). Konstruisati tačke b, c, d, e koje određuju pet uzastopnih ekvipolentnih parova (orijentisane prave af).*

5) Uopštiti prethodni problem.

3. 1) Duž određena jednim temenom trougla i sredinom naspramne stranice zove se *medijana trougla.*

2) *Medijana tripleta* nekolinearnih tačaka je duž određena jednom od tih tačaka i sredinom uređenog para određenog drugim dvema tačkama.

3) Nacrtajte triplet tačaka (a, b, c), konstruišite sredine m, n, p uređenih parova (b, c), (c, a), (a, b) i nacrtajte medijane $[am]$ i $[bn]$.



Slika 24.26

Neka je $am \cap bn = \{g\}$, neka je e sredina para (a, g), f sredina para (b, g).

Na osnovu § 24.4, t. **3**, 2 je:

(1) $(m, n) \uparrow (p, a)$
[„u“ tripletu (a, b, c)];

(2) $(f, e) \uparrow (p, a)$
[„u“ tripletu (a, b, g)].

Iz te dve ekvipolencije sledi (tranzitivnost ekvipolencije):

$(m, n) \uparrow (f, e,)$

a odatle (t. **1** ovog §, tj. teor. 5)

$(e, m) S (f, n)$.

Na osnovu te (poslednje) relacije, a s obzirom na to da su e i f respektivne sredine parova (a, g) i (b, g), možemo pisati:

$$(a, e) \uparrow (e, g) \uparrow (g, m)$$

$$(b, f) \uparrow (f, g) \uparrow (g, n).$$

Znači, tačka preseka g medijana tripleta (odnosno trougla) je (prethodni konstruktivni problem pod 4) jedna (i to druga) od dve tačke koje određuju tri ekvipolentna para tačaka svake medijane. Jer, da smo umesto $[bn]$ uzeli medijanu $[cp]$, za nju bismo dobili slične relacije, naime: $(c, h) \uparrow (h, g) \uparrow (g, p)$, gde je h sredina para (c, g). Dakle:

Teorema 6. — *Sve tri medijane trougla imaju jednu zajedničku tačku.*

Za tri i više pravih koje imaju zajedničku tačku kažemo da su *konkurentne*. Uz pomoć tog termina, prethodna teorema se izražava:

Medijane trougla su konkurentne.

§ 24.6. VEŽBANJA I ZADACI

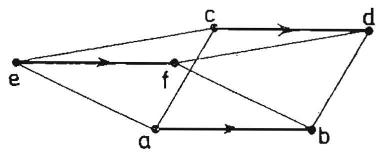
1. Ako je $(a, b) \uparrow (c, d)$, onda: $(x, y) \uparrow (a, b) \Leftrightarrow (x, y) \uparrow (c, d)$.

2. Ako su dva uređena para ekvipolentni, svaki novi par ekvipolentan jednom od njih ekvipolentan je i onom drugom.

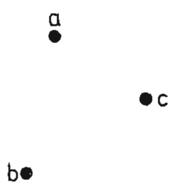
3. Nacrtajte proizvoljan par (p, q) a zatim konstruišite:

(1) $(a, p) \uparrow (p, q)$; (2) $(q, b) \uparrow (p, q)$.

4. Na crtežu 24.27 je $(a, b) \uparrow (c, d) \uparrow (e, f)$. Napišite sve ostale ekvipolencije.



Slika 24.27



Slika 24.28

5. 1) Tačke a, b, c prikazane ovde, sl. 24.28, pripadaju ravni Π. Konstruišite tačke x, y, z tako da je: $(c, x) \uparrow (a, b)$; $(a, y) \uparrow (b, c)$; $(b, z) \uparrow (c, a)$.

2) Pokažite da je: $(y, c) \uparrow (a, b)$; $(z, a) \uparrow (b, c)$; $(x, b) \uparrow (c, d)$.

3) Jesu li tripleti (a, b, c) i (x, y, z) isto orijentisani?

4) Konstruišite medijane tih tripleta (§ 24.5, t. **3** i § 24.4).

5) Zašto su sve medijane konkurentne?

6. Neka je $a, b \in \Pi$, $a \neq b$.

1) Konstruišite x, y, z tako da je $(a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z)$.

2) Konstruišite x, y, z, u, v, w tako da je:

$$(w, v)\,(v, u) \uparrow (u, a) \uparrow (a, b) \uparrow (b, x) \uparrow (x, y) \uparrow (y, z).$$

7. „Nacrtajte“ $(a, b) \uparrow (c, d)$ tako da a, b, c, d nisu kolinearne. Konstruišite $(e, f) \uparrow (a, b)$, $(h, k) \uparrow (c, d)$ i dokažite da je $(e, f) \uparrow (h, k)$.

8. Dokažite implikaciju:

$$((a, b) \uparrow (c, d) \text{ i } (p, x) \uparrow (q, y) \uparrow (a, c)) \Rightarrow (d, y) \uparrow (b, q).$$

9. Konstruišite a, b, c, d, e, f tako da je:

$$(a, b) \uparrow (c, d) \uparrow (e, f) \text{ i } (a, c) \uparrow (c, e).$$

Odatle se mogu izvesti još dve ekvipolencije. Napišite ih.

10. „Konstruišite“ $(a, b) \uparrow (c, d)$. Neka je $C = cd$ i označite sa p projekciju na pravi C paralelno nekoj pravi D. Konstruišite pravac (D) tako da bude: $p(a, b) = (c, d)$.

11. 1) Nacrtajte neparalelne prave A i B. Označite tačke $a, b \in A$. Konstruišite množinu tačaka x i množinu tačaka y tako da je:

$$(x, y) \uparrow (a, b) \text{ i } p(x, y) = (a, b),$$

gde p označava projekciju na A paralelno sa B.

2) Kako izgledaju množine tačaka x i y kad je dat samo uslov $p(x, y) = (a, b)$?

12. Ako su a, b, c, d kolinearne tačke:

$$(a, b) \uparrow (c, d) \Rightarrow (a, d)\, S\, (b, c);$$

$$(a, c) \uparrow (b, d) \Rightarrow [ad]\, S\, [bc].$$

13. Neka je (a, b, c, d) paralelogram, m sredina stranice $[ab]$, n sredina stranice $[cd]$. Tada je $[mn]\, S\, [ac]$.

14. Nacrtajte proizvoljne nekolinearne tačke m, n, p. Neka su to sredine stranica trougla. Konstruišite taj trougao.

15. Neka je (a, b, c) nekolinearni triplet, d sredina uređenog para (b, c). Prava koja sadrži sredinu uređenog para (a, d) i paralelna je sa bc seče $[ab]$ u e, $[ac]$ u f. Dokažite da $(a, d)\, S\, (e, f)$.

16. Nacrtajte triplet nekolinearnih tačaka (a, b, c), konstruišite sredinu p uređenog para (a, c) i sredinu q uređenog para (b, q). Neka je:

$$aq \cap bc = \{d\},\ p \in P,\ P \parallel aq,\ P \cap bc = \{e\}.$$

Tada je $(b, d) \uparrow (d, e) \uparrow (e, c)$. Dokažite.

17. Posmatrajte četvorougao (a, b, c, d). Neka su m, n, p, q respektivne sredine uzastopnih stranica $[ab], \ldots$ Neka su x i y respektivne sredine uređenih parova (b, d) i (a, c).

1) Dokažite:

(1) (m, n, p, q) je paralelogram:

(2) $(m, p)\, S\, (q, n)\, S\, (x, y)$;

(3) $(q, y) \uparrow (x, n) \uparrow (p, y)$ i (x, m).

2) Koju figuru definišu tačke: (q, x, n, y); (m, x, p, y)?

18. Nacrtajte proizvoljan četvorougao (a, b, c, d). Konstruišite $(a, x) \uparrow (c, d)$ i $(x, y) \uparrow (a, b)$. Dokažite da $(b,d)\ \boldsymbol{S}\ (y,c)$.

19. Neka je (a, b, c, d) paralelogram, neka su m i n respektivne sredine stranica $[ab]$, i $[cd]$, $dm \cap ac = \{p\}$, $bn \cap ac = \{q\}$. Dokažite: (1) $dm \parallel bn$; (2) $(a, p) \uparrow (p, q) \uparrow (q, c)$.

20. Dato je: $P \cap Q = \{m\}$; $m \neq p \in P$, $m \neq q \in Q$; $p \in A \parallel P$, $q \in B \parallel Q$; $A \cap B = \{a\}$.

1) Konstruišite $b \in B$ tako da je $(a, p) \uparrow (p, b)$ i $c \in A$, tako da je $(a, q) \uparrow (q, c)$.

2) Dokažite da je m sredina uređenog para (b, c).

Rezime

1. Uređeni parovi:

(1) $(a, b) \uparrow (c, d) \Leftrightarrow ab \parallel cd$;

(2) suprotni (a, b) i (b, a);

(3) vezani paralelogramom:

$(a, b)▱(c, d) \Leftrightarrow ab \parallel cd,\ ac \parallel bd,\ ab$ i cd isto orijentisane;

(4) ekvipolentni $(a, b)\uparrow(c, d) \Leftrightarrow (a, b)▱(c, d)$.

2. Osobine ekvipolencije:

(1) refleksivnost: $(a, b)\uparrow(a, b)$;

(2) simetričnost: $(a, b)\uparrow(c, d) \Rightarrow (c, d)\uparrow(a, b)$;

(3) tranzitivnost: $((a, b)\uparrow(c, d)$ i $(c, d)\uparrow(e, f)) \Rightarrow (a, b)\uparrow(e, f)$;

(4) $(a, b)\uparrow(c, d) \Rightarrow (b, a)\uparrow(d, c)$;

(5) $(a, b)\uparrow(c, d) \Rightarrow (a, c)\uparrow(b, d)$;

(6) Paralelne projekcije ekvipolentnih parova na jednu pravu ili na više paralelnih pravâ jesu ekvipolentni parovi.

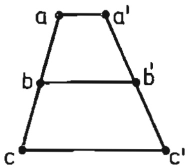
(7) Postoji jedna, i samo jedna, tačka x takva da je $(a, b)\uparrow(c, x)$.

(8) Postoji jedna, i samo jedna, tačka y takva da je $(a, b)\uparrow(y, c)$.

3. Sredina:

(1) Postoji jedna, i samo jedna, tačka s takva da je $(a, s)\uparrow(s, b)$.

(2) Postoji jedna, i samo jedna, tačka $s \in [ab]$ takva da je $[as] \cong [sb]$.



Slika 24.29

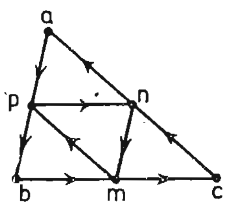
(3) $((aa' \parallel bb' \parallel cc'$ i $(a, b)\uparrow(b, c)) \Rightarrow (a', b')\uparrow(b', c')$;

(4) Obrnuto:

$$\left.\begin{array}{l} aa' \parallel cc' \\ (a, b)\uparrow(b, c) \\ (a', b')\uparrow(b', c') \end{array}\right\} bb' \parallel aa'.$$

(5) Slika 24.30:

$$mp \parallel ca \Leftarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (a, p) \uparrow (p, b) \\ (c, n) \uparrow (n, a) \end{array}\right\} pn \parallel bc \\ \left.\begin{array}{l} (c, n) \uparrow (n, a) \\ (b, m) \uparrow (m, c) \end{array}\right\} mn \parallel ab. \end{array}\right.$$



Slika 24.30

(6) Obrnuto: $((a, p)\uparrow(p, b)$ i $pn \parallel bc)) \Rightarrow$ $\Rightarrow (c, n)\uparrow(n, a)$.

4. Dijagonale paralelograma (a, b, d, c):

(1) $(a, b)\uparrow(c, d) \Rightarrow (a, d)\boldsymbol{S}(b, c)$ tj. $[ad]\boldsymbol{S}[bc]$.

$(a, c)\uparrow(b, d) \Rightarrow (a, d)\boldsymbol{S}(b, c)$,

(Videti i § 9.6);

(2) Ta se osobina koristi pri konstrukciji sredine uređenog para, duži.

(3) Deljenje uređenog para, duži na ekvipolentne parove podudarne duži [sl. 8, uputstava].

5. (1) Medijana trougla = duž određena temenom i sredinom naspramne stranice.

(2) Medijane trougla su konkurentne.

GLAVA XXV

NEKI REKAPITULATIVNI ZADACI

1. Napište ekstenzivnu definiciju množine koju čine:

1) imena lica koja stanuju u vašem stanu;

2) slova kojima se piše vaše ime a nema ih u imenu vaše majke;

3) imena meseca koja počinju slovom: (1) j; (2) a; (3) s; (4) k;

4) prirodni brojevi manji od 19 a multiplumi su broja: (1) 4; (2) 6; (3) 9; (4) 10; (5) 19;

5) fudbalski timovi: (1) u Beogradu; (2) u vašem mestu;

6) $\{x|x+1=4\}$; 7) $\{x|x+0=0\}$; 8) $\{x|0+x=x\}$;

9) $\{x|x+7=0\}$; 10) $\left\{x|x\cong\frac{4}{25}\right\}$; 11) $\{x|x:\sqrt{x}=-1\}$;

12) $\left\{x|x\cdot\frac{3}{17}=-1\right\}$; 13) $\{x|x$ neparan multiplum broja $7<100\}$;

14) $\left\{x|\frac{3}{13}-x=x+\frac{1}{26}\right\}$; 15) $\{x|x^2-25=-169\}$;

16) $\{x|x$ je prost paran broj$\}$.

2. Napišite definiciju prema osobini elemenata:

1) {Vršac, Vukovar, Vinkovci, . . .};

2) $\{11, 33, 55, 77, 99\}$;

3) $\left\{-\frac{6}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}\right\}$;

4) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$;

5) $\{809, 811, 821, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887\}$;

6) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$; 7) {tačka, prava, ravan};

8) {kvadrat, romb}; 9) {ovca, koza, krava}.

3. Napišite elemente množine:

1) $A=\{x|x$ je multiplum broja 3 manji od $15\}$;

2) $B=$ {ban} i $C=$ {banana};

3) $D=\{x|x$ je ostatak deljenja brojem $11\}$;

4) $E=\{x|x$ je čovek koji je otišao na Mars$\}$;

5) $F=\{x|x$ je naš grad sa manje od 10 stanovnika$\}$;

6) $G=\{x|x$ je broj koji ima samo jedan delilac$\}$;

7) $H=\{x|x$ je broj deljiv brojem $0\}$;

8) $K=\{x|x$ je tačka preseka koncentričnih kružnica$\}$.

4. Prikažite Venovim dijagramom:

1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$ i $B=\{a, b, c, d\}$;

2) $A=\{1, 2, 3, 4$ i $C=\{3, 4, 5, 6\}$;

3) $B=\{a, b, c, d\}$ i $D=\{d, a, c, b\}$;

4) $P=\{0, 2, 4, \dots\}$ i $H=\{1, 3, 5, \dots\}$;

5) $E=$ {ovca, pas} i $F=\{x|x$ je domaća životinja$\}$.

5. Za svaku množinu u ovom stupcu nađite jednaku množinu u desnom stupcu i to izrazite simbolima:

$A=\{x|x$ je jedno od prva tri slova abecede$\}$;	$P=\{3, 70, 800\}$
$B=\{x|x$ je jednocifren broj$\}$	$Q=\{0{,}5;\ 0{,}25\}$
$C=\{x|x$ je cifra, broj pomoću kojega se piše $873\}$	$R=$ {vrat}
$D=\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$	$X=\{x|x$ je arapska cifra$\}$
$E=$ {trava}	$Y=\{x|1\leqslant x\leqslant 12\}$
$F=\{x|x$ je broj napisan na časovniku$\}$	$Z=\{a, b, c\}$.

6. Izrazite pomoću znaka $\subset$ ili $\subseteq$ relaciju između množina:

1) $A=\{x|x$ je svako lice koje se zove učitelj$\}$ i $B=\{x|x$ je učiteljica$\}$;

2) $A=\left\{33\frac{1}{3}\%\right\}$ i $B=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$;

3) $A=\{x|x$ je jednakokraki trougao$\}$ i $B=\{x|x$ je jednakostranični trougao$\}$.

7. Između ovih množina nađite svaki par između kojih postoji relacija „. . . je podmnožina množine . . .“ i izrazite to simbolima:

$A=\{x|x$ je prirodni broj manji od $101\}$,

$B=\{5, 10, 15, \dots 100\}$, $N=\{0, 1, 2, \dots\}$,

$C=\{1, 10, 100\}$, $D=\{x|x=10^n,\ n\in N\}$,

$E=\{10, 20, 30, \dots\}$, $F=\{5, 10, 15, 20, \dots\}$,

$Q=\{x|x$ racionalan broj$\}$, $R=\{x|x$ realan broj$\}$.

8. Sastavite primere A, B, C tako da:

(1) $A\subset B,\ B\subset A,\ A\subset C$; (2) $A\not\subset B,\ B\subset C,\ A\not\subset C$;

(3) $A\subset B,\ B\not\subset C,\ A\subset C$; (4) $A\subset B,\ B\not\subset C,\ A\not\subset C$;

(5) $A\not\subset B,\ B\not\subset C,\ A\subset C$; (6) $A\not\subset B,\ B\not\subset C,\ A\not\subset C$.

9. $A\subseteq\{\}$. Šta možete reći o množini A?

10. Koliko se podmnožina može sastaviti od množine čiji je broj elemenata: (1) 5; (2) 12; (3) 0?

11. 1) $A=\{2, 3, 6\}$, $B=\{0, 1, 2\}$, $A\cap B=$
2) $A=\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $B=\{6, 12, 18, \ldots\}$, $A\cap B=$
3) $A=\{x|x$ je sed$\}$, $B=\{x|x$ je otac$\}$, $A\cap B=$
4) $C=\{x|x$ je lep$\}$, $D=\{x|x$ je mama$\}$, $C\cap D=$
5) Je li tačno: (1) $A\cap B\subseteq A$ i $A\cap B\subseteq B$;
(2) $(D\subseteq A$ i $D\subseteq B)\Rightarrow D\subseteq(A\cap B)$?

12. 1) $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 5, 7\}$, $A\cup B=$
2) $A=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $A\cup N=$
3) Neka je $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i neka je:
(1) $A\cup B=S$. Tada je $A=\ldots$, $B=\ldots$
(2) $A\cup B=\{0, 2, 4, 6\}$. Tada je $A=\ldots$, $B=\ldots$
(3) $A\cup B=\{1, 3, 5\}$. Tada je $A=\ldots$, $B=\ldots$

13. 1) Neka je $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. Tada je $C=\{x|x\in A, x\notin A\cap B\}=\ldots$; $D=\{x|x\in B, x\notin A\cap B\}=\ldots$
Napišite kraće množine C i D.
2) $A\subset B$. (1) $A\cup B=\ldots$; (2) $A\cap B=\ldots$

14. 1) Neka osnovnu množinu U čine đaci jedne srednje škole. Obrazujte pet podmnožina množine U.
2) Pomoću tih množina ilustrujte: (1) presek; (2) razliku množina; (3) podmnožinu; (4) particiju množine; (5) praznu množinu.
3) $U=\{x|x\in N, x<10\}$. $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$. $\overline{A}=\ldots$
4) U kao pod 3). $A=\{0, 12, 3\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$. $\overline{A\cup B}=\ldots$; $\overline{A\cap B}=\ldots$
5) $U=N$. $A=\{x|x$ dvocifren broj$\}$. $\overline{A}=\ldots$
6) $A\cap\overline{B}=\{\}$. Koja relacija postoji između A i B.
7) Neka je U osnovna množina, C i D dve njene podmnožine takve da je $C\cup D=U$ a $C\cap D=\varnothing$. Pokažite da je $C=\overline{D}$, $D=\overline{C}$.
8) Neka su A i B dve podmnožine množine U. (1) Pokažite: $B\subseteq A\Rightarrow\overline{A}\subseteq\overline{B}$. (2) Da li iz $\overline{A}\subseteq\overline{B}$ sledi $B\subseteq A$? (Poslužite se i Venovim dijagramom.)

15. Neka je U množina đaka jedne gimnazije, A množina članova uprave omladinske organizacije te gimnazije, B množina učenika, C množina učenica, D množina đaka I i II razreda, E množina đaka III i IV razreda.
1) Prikažite sve te množine Venovim dijagramom (šrafirajući prazne prostore).
2) Koje od sledećih tvrđenja je tačno:
(1) $A\cup B=U$; (2) $B\cap C=\varnothing$; (3) $A\cup D\cup E=U$;
(4) $B=C$; (5) $A\subseteq B$; (6) $B\cup C=U$; (7) $B\cap D=\{\}$?

16. Neka je: $A=\{m, n, p\}$, $B=\{x, y\}$.
1) Napišite u obliku pravougaonika $A\times B$ i $B\times A$.
2) Zaokružite jednake uređene parove (koji se javljaju u oba proizvoda).

17. 1) Neka je:
$P=\{a\}$, $Q=\{x\}$. $P\times Q$ ima .... elemenata.
$P=\{a, b, c\}$, Q $\{x, y, z, u\}$. $P\times Q$ ima ..... elemenata.
2) $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Iz koliko se elemenata sastoji $A\times A$? Napišite $A\times A$.

18. Neka je $M=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
1) Koliko elemenata (uređenih parova) sadrži množina $M\times M$? Napišite ih.
2) Sastavite podmnožinu množine $M\times M$ od elemenata čiji su članovi vezani relacijom „... je kvadrat od ...", tj. napišite graf te relacije.
3) Napišite graf relacije „... ima kao kvadrat ..." u množini M.

19. Neka je $S=\{x|x\in N, 1<x<10\}$. (1)
1) Napišite graf i nacrtajte sagitalnu šemu relacije:
$\left.\begin{array}{l}\text{(1) „... je međusobno prost sa ..."}\\ \text{(2) „... deli ..."}\end{array}\right\}$ u S.
2) Prikažite Dekartov proizvod $S\times S$ u obliku mreže, a zatim elemente tog proizvoda koji su i elementi relacije (1) prikažite crvenim, a elemente relacije (2) zelenim (tačkama).

21. 1) Ako je $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5\}$, elementi množine $A\times B$ mogu se rasporediti ovako:

B ↓						
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	
	1	2	3	4	5 ←	A

Odaberimo neke od tih elemenata (uređenih parova) i sastavimo podmnožinu:
{(2,3), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5}.
Da li je ta podmnožina relacija i ako jeste koja? Treba pronaći pravilo po kome su izabrani elementi, ili što je isto, relaciju koja postoji između članova svakog elementa (x, y) poslednje množine. To pravilo, ta relacija glasi: $x+1\geqslant y$.
Proverite da svaki element podmnožine zadovoljava napisani uslov (relaciju), a svaki od ostalih elemenata množine $A\times B$ ne zadovoljava (npr. $2+1\ngeqslant 4$).
Napisana podmnožina je, dakle, relacija $x+1\geqslant y$; možemo je izraziti ovako

$$\boldsymbol{R}_{A\times B}=\{(x, y)\mid x\in A,\ y\in B : x+1\geqslant y\}.$$

2) Svakom elementu (paru brojeva) množine $A\times B$ odgovara tačka Dekartova koordinatnog sistema (§.22.5). Konstruišite sve te tačke, a zatim svaku tačku koja odgovara elementu relacije $\boldsymbol{R}$. zaokružite crvenom kružnicom.

22. Neka je $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a relacija:

$$\boldsymbol{R}=\{(x, y)|(x, y)\in M\times M : x-2\geqslant y\}.$$

1) Napišite graf (ekstenzivnu definiciju) relacije $\boldsymbol{R}$.
2) Prikažite, na osnovu § 22.5, grafik te relacije.

3) Ako je M neograničena množina, tj. ako je $M=N_1$, onda je (x, y) element množine $N_1 \times N_1$. Kako (tada) izgleda grafik relacije (definisane pod 1)?

4) Neka je $M \subset R$ (podmnožina realnih brojeva). Nacrtajte grafik relacije: $\boldsymbol{R}=\{(x, y) | (x, y)\ R \times R,\ 1 \leqslant x \leqslant 6,\ 1 \leqslant y \leqslant 6:\ x-2 \geqslant y\}$

5) Neka je ponovo $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a

$$\boldsymbol{R}=\{(x, y) | x, y \in M: x-2 \leqslant y\}.$$

Konstruišite grafik te relacije (§ 22.5).

6) M je množina realnih brojeva intervala $[1;\ 6]$. Prikažite grafički relaciju $\boldsymbol{R}'=\{(x, y) | (x, y) \in R \times R:\ x-2 \leqslant y\},\ x, y \in M$

[Npr. $(\sqrt{11}, \sqrt{30})$, $\left(\frac{14}{3}, \frac{8}{3}\right)$ $(5,3)$ su tri para, elementa relacije $\boldsymbol{R}'$. Pronađite još. Tada svakom elementu (x, y) odgovara tačka jednog trapeza ili njegove oblasti. Konstruišite taj trapez].

7) Isto (što i pod 6) kad je M množina racionalnih brojeva. Možete li, u tom slučaju, prikazati grafik?

23. Relacija $\boldsymbol{R}=\{(x, y) | (x, y) \in R \times R:\ y=|x|\}$ je podmnožina Dekartova proizvoda $R \times R$.

1) Proverite da su:

$$(-3,3)\quad (-\sqrt{5}, \sqrt{5}),\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ (0,0)\ (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

pet njenih elemenata. Napišite još pet.

2) Konstruišite njen grafik. To su dve poluprave čiji je zajednički početak $(0,0)$.

24. 1) Neka je $\boldsymbol{R}=\{(x, y) | (x, y) \in Z \times Z:\ |x|+1=|y|$. Da li su parovi, npr. $(5,\ 6)$, $(3,\ -4)$, $(-6,\ 5)$, $(6{,}3,\ -7{,}3)$, $(-1,\ 0)$, elementi te relacije?

[Neki jesu, neki nisu. Ispitajte.]

2) Neka je $\boldsymbol{R}=\{(x, y) | (x, y) \in R \times R: x^2+y^2=25\}$. Jesu li parovi, npr. $(3,4)$, $(-5,0)$, $(2, 21)$, $(2, -\sqrt{21})$, $(4{,}2,\ 0{,}6)$, $(0, -5)$, $(\sqrt{27}, -\sqrt{2})$, elementi relacije $\boldsymbol{R}$?

3) Napišite graf i prikažite grafik (mrežu) relacije: $\boldsymbol{R}'=\{(x, y) | (x, y) \in (A \times A): y>x\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

4) Isto (relacija $\boldsymbol{R}'$) kad je A množina svih realnih brojeva intervala $[1;\ 4]$.

Zašto, npr., $(1,1)$, $(2,2)$, $(5, \sqrt{21})$ nisu elementi relacije a, npr., $(2;\ 2{,}001)$ jeste.

5) Množina A: prvo kao pod 3), posle kao pod 4), a:

$$\boldsymbol{R}=\{(x, y) | (x, y) \in A \times A: y=2x\}.$$

Napišite graf u prvom slučaju i nacrtajte oba grafika.

25. 1) Da li su relacije navedene u t. **19.** relacije ekvivalencije?

2) Da li je relacija $\neq$ uvek, samo ponekad ili nije nikad: (1) refleksivna; (2) simetrična; (3) tranzitivna? Navedite primere.

3) Šta možete reći o relaciji „... daje isti ostatak pri deljenju brojem 5"?

4) Šta možete reći o relacijama:

(1) „je kongruentno (podudarno)"; (2) „je slično"; (3) „ima jednaku površinu, zapreminu"; (4) „ima istu apscisu"; (5) „ima ekvipolentnu paralelnu projekciju za isti pravac"?

5) Jesu li relacije (1) „ima za sestru"; (2) „je predak"; (3) „je šef"; (4) „izdržava"; (5) „voli" (između ljudi) relacije ekvivalencije (ili neke druge i koje)?

26. 1) Neka je $M=\{1, 2, 3, 4\}$ i

$$\boldsymbol{R}=\{(1,1),\ 2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (2,3),\ (3,4),\ (2,4)\};$$

(1) pokažite da je to relacija poretka (reda), ali ne totalnog;

(2) nacrtajte njenu sagitalnu šemu;

(3) napišite graf inverzne relacije $\boldsymbol{R}^{-1}$.

2) Uredite množinu N pridržavajući se definicije:

$$\forall a, b \in N:\ a<b \Leftrightarrow \exists x \in N \setminus 0 \text{ takvo da je } a+x=b.$$

3) Uredite $N \setminus \{0\}$ pridržavajući se definicije:

$$\forall a, b \in N: a<b \Leftrightarrow \exists x \in N \text{ takvo da je } b=ax.$$

27. 1) Koja je od sledećih relacija funkcija:

(1) $(-2,7)$, $(-2,4)$, $(-2,3)$, $((-2,1)$, $(-3,6)$;

(2) $(7,2)$, $(4,\ -2)$, $(3,\ -2)$, $(-1,\ -2)$, $(6,\ -2)$;

(3) $(5,7)$, $(-2,1)$, $(2,3)$, $(8,1)$, $(3,\ -2)$, $(2,\ \sqrt{9})$.

2) Da li su ove relacije funkcije:

(1) y je uvek x;

(2) y je mera oblasti trougla x;

(3) y je srednja dnevna temperatura x?

28. 1) Neka je $A=\{3, 4, 5, 6\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$.

Sastavite množinu $A \times B$ i ispitajte da li je funkcija relacija: (1) „je manji od"; (2) „daje zbir 10 kad se sabere sa".

2) Neka je $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Pokažite da u $A \times A$ relacija: (1) „je manji od" nije funkcija; (2) „prethodi" (ili „je prethodnik") jeste funkcija.

3) Da li je relacija „manje ili jednako" ($\leqslant$) funkcija u $N \times N$?

29. 1) Neka je A množina đaka, B množina stolica u učionici. Kako se zove relacija:

(1) svaki učenik sedi na jednoj stolici i ima još slobodnih stolica;

(2) na nekim stolicama sede i po dva đaka, jer ih nema dovoljno;

(3) svaki učenik sedi na jednoj stolici i slobodnih stolica nema?

2) Kako se jednim imenom zovu sve te funkcije?

30. Neka je $f=\{(x, y) \in Q \times Q: xy=1\}$.

Izračunajte: $f(4)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-0{,}1)$.

31. 1) Šta je slika (dolazna množina) funkcije

$$f=\{(x,y)\in Z\times Z: y=2x\}$$

2) Neka je $g=\left\{(x, y)\in R\times R: y=\frac{6}{3+x^2}\right\}$.

(1) Za koje brojeve x je ona definisana?

(2) Kad je y najveći? (3) Nacrtajte grafik.

32. 1) Kad je:

(1) $k(A)+k(B)=k(A\cup B)$; (2) $k(A)-k(B)=k(A\setminus B)$:

(3) $k(A)\cdot k(B)=k(A\times B)$?

2) Jesu li sabiranje i oduzimanje funkcije i zašto?

33. Nacrtajte pravu A, označite njene tačke p, q, r, t i pokažite (imenujte) sve poluprave:

(1) čija je unija prava A;

(2) čiji je presek tačka $\{q\}$;

(3) čiji je presek duž $[qr]$;

(4) čiji je presek prazan;

(5) čija unija sadrži tačke p, q, r, t, a nije A.

34. 1) Polazeći od definicije ugla: par polupravâ sa zajedničkom početnom tačkom, prikažite crtežom dva ugla čiji je presek: (1) prazan; (2) tačka; (3) dve tačke; (4) tri tačke; (5) četiri tačke; (6) poluprava; (7) duž.

2) Pokažite u svakom od prethodnih slučajeva presek unutrašnjosti prikazana dva ugla. Kad je taj presek oblast?

35. 1) Neka se ugao U sadrži 4 puta u datom uglu AOB. Šta je 4 a šta $4U$?

2) Šta je 0,37 jutara?

GLAVA XXVI

ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

Počeci matematičke logike, u toku prošlog veka, vezana su za uzak problem: Utvrđivanje osnova na kojima počiva matematika. Kasnije se pred nju postavljaju širi ciljevi, na primer: Sastaviti aparat pojmova koji bi služio kao zajednička osnova mnogih naučnih oblasti. Nije teško videti da takav problem ima smisla. Zaista, u svakoj teoriji upotrebljavaju se dve grupe termina. Prvu grupu čine termini koji označavaju pojmove kojima dotična teorija operiše. Na primer u geometriji takvi su termini: tačka, prava, ravan, kružnica, trougao itd. Drugu grupu čine termini koji, i u govornom jeziku i u svima naukama, služe kao neophodno sredstvo za prenošenje, saopštavanje čovekovih misli, njegovih rasuđivanja i zaključivanja. To su na primer reči: „ne", „i", „ili", „svaki", „neki" itd. Nužnost tačnog poznavanja značenja tih reči oseća se u svim maukama, ali najviše u matematičkim rasuđivanjima. Jedan od zadataka matematičke logike je da precizira smisao i pravilnu upotrebu navedenih i mnogih drugih termina. Ostale zadatke videćemo iz sledećih izlaganja koja se, to posebno napominjemo, daju u najelementarnijem obliku.

§ 26.1. ISKAZI I LOGIČKE OPERACIJE NAD ISKAZIMA

1. Iskazi. — Rečenica je - kaže se u gramatici — niz reči kojima se izražava neka misao. Nekim mislima se nešto tvrdi ili odriče. Na primer:

Marko je odličan učenik.
Milena je Stevina sestra.
Prirodni broj 8 je paran broj.
Broj 10 je deljiv brojem 3.
Kiseonik je metal.
Vuk nije divlja životinja.

Takve misli, kojima se nešto o nečemu tvrdi ili odriče, zovu se iskazi.

Nisu iskazi na primer: Da li je ta olovka meka? Šta češ danas kuvati? Zdravo drugovi! Nisu, jer nijednom od tih rečenica se ništa niti tvrdi, niti odriče.

Odmah pada u oči da se svakom od poslednje tri rečenice tvrdi odnosno odriče ono što nije istina. Međutim, to ništa ne smeta da one budu iskazi. Svakim iskazom se, dakle, nešto tvrdi ili odriče a posle se ispituje da li on iskazuje istinu ili neistinu (laž). Prema tome:

Iskaz je misao kojom se nešto tvrdi ili odriče i za koju možemo da kažemo da je ili istinita, ili neistinita (lažna).

Svaka misao za koju se ne može reći da je ili istinita ili lažna (neistinita) nije iskaz.

Iskazi se označavaju malim slovima, na primer: $p, q, r, \ldots$. Svakom istinskom iskazu pripisuje se cifra 1, svakom neistinitom (lažnom) iskazu pripisuje se cifra 0.

Ako je iskaz p istinit, kratko se zapisuje $v(p)=1$, a čita: Vrednost iskaza p je 1.

Ako je iskaz q neistinit, kratko se zapisuje $v(q)=0$, a čita: Vrednost iskaza q je 0.

2. Prosti i složeni iskazi. — Posmatrajmo iskaze:

(1) Milan je kod kuće i radi domaći zadatak.
(2) Broj 15 je deljiv brojem 5 i broj 15 je deljiv brojem 3.
(3) Vreme je hladno i duva vetar.
(4) Vreme je hladno ili duva vetar.
(5) Milan je u školi ili kod kuće.
(6) Ne duva vetar.
(7) Milan nije u učionici.
(8) Duva vetar.
(9) Milan je u učionici.
(10) Broj 14 je deljiv brojem 7.

Svaki od iskaza (1), (2), ..., (7) je takav da su i njegovi delovi iskazi. To je očigledno u slučaju prvih 5 iskaza. Ali i u (6) reči „duva vetar" čine iskaz. Koje reči u (7) čine iskaz?

Možemo li sastaviti deo iskaza (8) koji je opet iskaz? Ne možemo. To isto važi za (9) i (10).

Svaki od iskaza (1), (2), (3), ..., (7) je *složen iskaz*. Iskazi (8), (9) i (10) su *prosti iskazi*.

3. Negacija (odricanje). — Iskaz „Ne duva vetar" dobija se iz iskaza „Duva vetar" tako što se ispred ovoga stavlja reč „ne". Na isti način „Milan nije u učionici" dobija se iz „Milan je (ste) u učionici": „Milan *ne* je(ste) u učionici".

Iskaz „Ne duva vetar" je *negacija* (odricanje) iskaza „Duva vetar". Iskaz „Milan nije u učionici" je *negacija* (odricanje) iskaza „Milan je u učionici".

Ako označimo sa p iskaz „Duva vetar", iskaz „Ne duva vetar" označavaćemo $\neg p$ i čitaćemo: *ne* p (U literaturi se za negaciju koriste i drugi simboli npr. $\bar{p}$, Np, $\sim p$).

Uvodimo definiciju:

Ako je x iskaz, $\neg x$ je takođe iskaz i zove se negacija (odricanje) iskaza x.

Očigledno je da ako je x istinit, iskaz $\neg x$ je neistinit iskaz i obrnuto:

x	$\neg x$
1	0
0	1

4. Konjunkcija i disjunkcija. — 1) Svaki od iskaza (1), (2), (3) sastoji se od dva prosta iskaza koji su vezani rečcom, svezom „i". Prosti iskazi u (4) i (5) vezani su rečcom, svezom „ili". Reči „i" i „ili" služe, dakle, za logičko vezivanje iskaza i zato se zovu *logičke veze* (sveze, konektori).

Ako je iskaz dobijen pomoću logičke veze „i", on se zove *konjunkcija* dva (prosta) iskaza. Prema tome primeri (1), (2), i (3) su konjunkcije. Ako označimo: sa p iskaz, „Milan je kod kuće", sa q „Milan radi domaći zadatak", sa $\wedge$ logičku vezu „i", iskaz (1) zapisujemo (simbolima) $p \wedge q$ i čitamo: p *i* q.

Nastaje pitanje: Kad je iskaz $x \wedge y$ istinit?

Odgovor glasi: Kao i u svakodnevnom životu. Prema tome, svaki iskaz (1), (2), (3) je istinit ako su oba iskaza x i y (koji čine dati iskaz) istinita. Ako je jedan od iskaza x ili y neistinit, ili ako su oba neistinita, i ceo iskaz je neitsinit. Sve to definišemo ovako:

Definicija 1. — *Ako su x i y iskazi, onda i $x \wedge y$ je iskaz i on se zove konjunkcija iskaza x i y. Konjunkcija $x \wedge y$ je istinit iskaz, ako su oba iskaza x i y istinita. U svakom drugom slučaju $x \wedge y$ je neistinit iskaz.*

Dakle, tablica:

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

pokazuje sve moguće vrednosti konjukcije $x \wedge y$.

2) Iskaz dobijen od dva iskaza pomoću logičke veze „ili" zove se *disjunkcija*. Iskazi (4) i (5) su primeri disjunkcije. Ako sa p označimo iskaz „Vreme je hladno", sa q označimo iskaz „Duva vetar", a sa $\vee$ označimo logičku vezu „ili", iskaz (4) zapisujemo simbolima

$p \vee q$, a čitamo: p ili q.

Iskaz (4) se u svakodnevnom životu prihvata za istinit, ako je bar jedan od iskaza koji ga čine istinit. Međutim, drukčije stoje stvari u slučaju iskaza (5), jer samo jedan od sastavljenih iskaza može biti istinit. Naime, ako je Milan kod kuće, on ne može biti u školi, i obrnuto. Prema tome, logička veza „ili" upotrebljava se na dva načina: istinitost jednog od vezanih iskaza ne isključuje istinitost drugog iskaza; istinitost jednog isključuje istlnitost drugog. Otuda i dve disjunkcije: neisključujuća disjunkcija (4) i isključujuća disjunkcija (5). Isključujuća disjunkcija zove se i *alternativa* a izražava se pomoću simbola $\dot{\vee}$.

Definicija 2. — *Ako su x i y iskazi, $x \vee y$, je iskaz i zove se neisključujuća disjunkcija iskaza x i y.*

Uzima se da je $x \vee y$ istinit iskaz kad je bar jedan od iskaza x ili y, istinit. Ako su oba iskaza, x i y, neistinita i iskaz (disjunkcija) $x \vee y$ je neistinit.

Definicija 3. — *Ako su x i y iskazi, $x \dot{\vee} y$ je iskaz i zove se isključujuća disjunkcija iskaza x i y ili alternativa.*

Uzima se da je $x \dot{\vee} y$ istinit iskaz ako je samo jedan od iskaza x ili y istinit. Ako su oba iskaza istinita, isključujuća disjunkcija nije istinita.

Dakle, vrednosti disjunkcije izgledaju:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	y	$x \dot{\vee} y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Mi ćemo dalje koristiti uglavnom neisključujuću disjunkciju i pisaćemo kratko disjunkcija (ili $\vee$).

5. Ponovljeno korišćenje logičkih veza. — Neka su x i y proizvoljni iskazi. Kako su i $x \wedge y$ i $x \vee y$ iskazi, možemo da posmatramo i njihove negacije: $\neg(x \wedge y)$, odnosno $\neg(x \vee y)$. Pri tome zagrade imaju sličnu ulogu kao i u algebri. One označavaju red pravljenja složenih iskaza. Na osnovu prethodnih tablica vrednosti negacija izgeldaju ovako:

x	y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

x	y	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

x	y	$\neg x$	$\neg x \wedge y$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Postupa se dakle, kao i u slučaju algebre, tj. prvo se određuje vrednost iskaza u zagradama, pa se posle primenjuje negacija. U slučaju $\neg x \wedge y$ prvo se određuje vrednost iskaza $\neg x$ pa se posle vrši konjunkcija.

6. Implikacija. — O implikaciji je bilo reči još u § 1.10. Kasnije smo je često upotrebljavali. Ona se, znači, pravi pomoću logičke veze „ako . . . , onda", na primer:

(1) Ako su dve stranice trougla podudarne, onda su i (njegova) dva ugla podudarna.

(2) Ako je $ABCD$ paralelogram, onda su njegove naspramne stranice podudarne.

(3) Ako je vreme lepo, (onda) ja idem na izlet.

Označimo sa p iskaz „Vreme je lepo", a sa q označimo iskaz: „Ja idem na izlet". Tada iskaz (3) možemo zapisati: „Ako p, onda q". Ili kad logičku vezu „ako . . . onda" označimo simbolom $\Rightarrow$, isti iskaz (3) zapisujemo ovako: $p \Rightarrow q$. Na isti način zapisuju se i iskazi (1) i (2).

Iskaz $p \Rightarrow q$ zove se *implikacija* i čita se: p *strelica* q.

Najčešće se implikacija $p \Rightarrow q$ upotrebljava pri izražavanju činjenice: Iz iskaza p sledi iskaz q. Zato iz istinitosti iskaza p nužno sledi istinitost iskaza q. U protivnom, ako je p istinit a q neistinit, $p \Rightarrow q$ je neistinit iskaz. Zbog toga, $p \Rightarrow q$ se uzima za istinit kad je $v(p)=1$ i $v(q)=1$, a za neistinit kad je $v(p)=1$, $v(q)=0$.

A šta je kad je $v(p)=0$? Uzmimo primer: „Ako je četvorougao $ABCD$ romb, (p), onda je $AC \perp BD (q)$". Ako je $v(p)=0$ (tj. ako je neistina da je $ABCD$ romb), onda se za q ne može tvrditi niti da je $AC \perp BD$, niti da nije $AC \perp BD$. Zaista, poznato je da postoje četvorouglovi čije su dijagonale međusobno perpendikularne, a oni nisu rombovi, tj. postoji slučaj: $v(p)=0$, $v(q)=1$, $v(p \Rightarrow q)=1$. Isto tako postoje četvorouglovi koji nisu rombovi i čije dijagonale nisu međusobno perpendikularne, tj. postoji i slučaj: $v(p)=0$, $v(q)=0$, $v(p \Rightarrow q)=1$.

Zato uzimamo da je $p \Rightarrow q$ uvek istinit kad je $v(p)=0$. I uvodimo definiciju:

Ako su x i y iskazi, onda i $x \Rightarrow y$ je iskaz i zove se implikacija (iskaza x i y).

Uzimamo da je $x \Rightarrow y$ neistinit iskaz samo kad je x istinit a y neistinit. U svim ostalim slučajevima $x \Rightarrow y$ je istinit iskaz.

Otuda tablice vrednosti:

x	y	$x \Rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

x	y	$x \vee y$	$x \Rightarrow (x \vee y)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Implikacija se u matematici zove i teorema.

7. Ekvivalencija. — I ekvivalenciju smo koristili (počev od § 1.10). Na primer:

$\forall \triangle ABC$: $[AB] \cong [AC] \Rightarrow \angle B \cong \angle C$ $\quad (p)$

$\forall \triangle ABC$: $\angle B \cong \angle C \Rightarrow [AB] \cong [AC]$ $\quad (q)$

Zapisujemo „ujedno".

$\forall \triangle ABC$: $[AB] \cong [AC] \Leftrightarrow \angle B \cong \angle C$.

To jest: $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow p$

zapisujemo kraće $p \Leftrightarrow q$,

i čitamo: p ekvivalentno q.

Ekvivalencija se izražava rečima „ako, i samo ako" ili „tada, i samo tada, kada". Na primer: Četvorougao je paralelogram, tada, i samo tada, kada su mu naspramne stranice podudarne.

Dakle, ako su dva iskaza vezana rečima „ako i samo ako" ili „tada i samo tada, kada", dobijeni složeni iskaz zove se ekvivalencija. Istinitost ekvivalencije sledi iz činjenice da njome izražavamo dve istinite međusobno obrnute implikacije (teoreme). Zato uzimamo da je $x \Leftrightarrow y$ istinit iskaz, ako su istovremeno istinite obe teoreme (implikacije), a neistinit kad je jedna istinita a druga lažna. To se najbolje vidi iz tablica:

x	y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

x	y	$x \Leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Uvodimo, dakle, definiciju:

Ako su x i y iskazi i $x \Leftrightarrow y$ je iskaz. On se zove ekvivalencija iskaza x i y.

Uzima se da je $x \Leftrightarrow y$ istinit iskaz kad x i y imaju jednake (iste) vrednosti. U suprotnom slučaju $x \Leftrightarrow y$ je neistinit iskaz.

8. Funktori. — Simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ zovu se *funktori*. Oni služe, kako je pokazano, za izražavanje iskaza simbolima. Na primer:

$$([AB]\cong[A_1B_1])\wedge([AC]\cong[A_1C_1])\wedge(\angle A\cong\angle A_1))\Rightarrow(\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1).$$

Da ne bi se dogodila greška svaki iskaz se, dakle, stavlja u male zagrade.

9. Logičke operacije nad iskazima. — Od dva ili više brojeva, dobiva se njihov zbir, njihova razlika, njihov proizvod, ... tako što sa nad tim brojevima vrši određena operacija. Analogno, kad se od iskaza dobiva negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija ili ekvivalencija kažemo da je nad odgovarajućim iskazima izvršena određena logička operacija.

Podvlačimo da se napred navedene vrednosti logičkih operacija, prikazane u obliku tablica, uvode definicijama, tj. one se ne dokazuju.

10. Neka vežbanja. — 1) Izrazite simbolima iskaze:

(1) Ako je $xy=0$, onda je $x=0$, ili $y=0$.

(2) Ako je $xy>0$, onda je $x>0$ i $y>0$, ili $x<0$ i $y<0$.

(3) Ako je $xy<0$, onda je .... (Dovršite i izrazite simbolima.)

(4) Ako je $\frac{x}{y}>0$, onda ... (Dovršite i ...)

(5) Ako je $\frac{x}{y}<0$, onda ... (Dovršite i ...)

2) Umesto tri tačke stavite odgovarajuću logičku vezu, a posle iskaz izrazite simbolima:

(1) Ako je $xy\neq0$, onda je $x\neq0$ ... $y\neq0$.

(2) Ako je $xy<0$, onda je $x>0$ ... $y>0$.

(3) Ako je $\frac{x}{y}=0$, onda je $x=0$ ... $y\neq0$.

(4) Ako je $x^2+y^2=0$, onda je $x=0$ ... $y=0$.

(5) Ako je $x^2+y^2\neq0$, onda je $x\neq0$ ... $y\neq0$.

Dva odgovora: 1) (1) $(xy=0)\Rightarrow((x=0)\vee(y=0))$

2) (1) $(xy\neq0)\Rightarrow((x\neq0)\wedge(y\neq0))$.

§ 26.2. ALGEBRA ISKAZA

1. Izrazi iskaza. — 1) Podsetimo, da se, na primer

$$13,\ 40,\ a,\ b,\ \dots,\ a+5,\ a+b,\ 7a,\ ab,\ \frac{a}{b},\ \dots,$$

$$(a+0{,}3)+b,\ (a+7{,}4)b,\ ab+12,\ \frac{a-b}{4},\ \frac{a}{a+b},\ \dots.$$

zovu algebarski izrazi i da svaka cifra (ili niz cifara napisanih na određen način) označava određeni broj, a svako slovo označava najčešće množinu (skup) datih brojeva. Zato se slova u matematici zovu i promenljive, numeričke promenljive.

2) Na sličan način, ako $p, q, \dots, x, y, \dots$ označavaju iskaze, videli smo (prethodni §) da $\neg p$, $p\wedge q$, $p\vee q$, $p\Rightarrow q$, $p\Leftrightarrow q$ označavaju složenije iskaze. Od njih možemo da napravimo još složenije iskaze, na primer:

$$(p\wedge q)\vee r,\quad (p\vee q)\wedge r,\quad (p\Rightarrow q)\vee r,\ \dots.$$

Taj se proces može produžiti. Mogu se dakle, posmatrati, ispitivati razni *izrazi iskaza* (ili iskazni izrazi) kao god što se u običnoj algebri posmatraju algebarski izrazi. Analogija je potpuna: Slova u algebarskom izrazu su numeričke promenljive (označavaju množine brojeva), a slova u iskaznom izrazu su iskazane promenljive (označavaju množine iskaza). Umesto znakova algebarskih operacija $(+, -, \times, \dots)$ iskazne promenljive vezane su funktorima.

Preciznije, uvodi se definicija:

Izraz iskaza je skup iskaznih promenljivih vezanih funktorima $(\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \dots)$. *U specijalnom slučaju se i svaka iskazna promenljiva (analogno numeričkoj promenljivoj) zove izraz iskaza.*

2. Vrednost izraza iskaza. — Ako u datom algebarskom izrazu svaku numeričku promenljivu zamenimo brojem i izvršimo označene operacije, dobivamo numeričku vrednost datog algebarskog izraza. Na sličan način, ako u izrazu iskaza, na primer, $(p\vee q)\wedge r$ iskazne promenljive zamenimo, respektivno, iskazima „pada kiša", „duva vetar", „hladno je", dobivamo određeni iskaz: „Pada kiša ili duva vetar i hladno je". Tom iskazu odgovara određena vrednost (1 ili 0) i to je vrednost datog izraza iskaza.

Uopšte, ako u datom izrazu iskaza svaku iskaznu promenljivu zamenimo određenim iskazom (iz date množine iskaza), dobivamo određeni iskaz. Vrednost tog iskaza zavisi od vrednosti iskaza kojima zamenjujemo pojedine iskazne promenljive. I tako mora biti, jer vrednost složenog iskaza (konjunkcije, disjunkcije, negacije, implikacije, ekvivalencije) zavisi od vrednosti iskaza koji čine dotični složeni iskaz i ona se određuje na napred definisani način (§ 26.1). Uvodimo, dakle, definiciju:

Vrednost datog izraza iskaza je vrednost iskaza koji se dobiva kad se svaka iskazna promenljiva zameni iskazom čija je vrednost onakva (1 ili 0) kakva je vrednost dotične (zamenjene) iskazane promenljive.

Odredimo npr. vrednost izraza $(x\vee y)\wedge x$, kad je $v(x)=1$, $v(y)=0$. Rešenje: neka je x konkretni iskaz čija je vrednost 1, y konkretni iskaz čija je vrednost 0. Tada vrednost disjunkcije $x\vee y$ je 1. Kako vrednost iskaza x je 1, vrednost konjunkcije $(x\vee y)\wedge x$ jeste 1. Prema formulisanoj definiciji to je vrednost datog izraza, dakle $v((x\vee y)\wedge x)=1$.

Kao i u algebarskom izrazu, iskazne promenljive mogu da uzimaju razne vrednosti. Svakoj kombinaciji tih vrednosti odgovara određena vrednost datog izraza. Ako npr. dati izraz čine dve iskazne promenljive, mogući sistemi vrednosti izraza jesu (1,1), (1,0), (0,1), (0,0), a svakom tom sistemu odgovara (§ 26.1) određena vrednost: vrednost datog izraza. Na primer tablica vrednosti izraza $(x\wedge y)\vee x$ izgleda:

x	y	$x\wedge y$	$(x\wedge y)\vee x$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Kao vežbu čitalac može sastaviti tablicu vrednosti izraza:

(1) $(x\wedge y)\vee\neg x$; (2) $x\Rightarrow(x\wedge\neg y)$; (3) $(x\wedge y)\Leftrightarrow x$;

(4) $(x\wedge y)\Leftrightarrow(y\wedge x)$; (6) $\neg[(x\wedge y)\Leftrightarrow(y\wedge x)]$; (7) $x\wedge\neg x$.

Jedan odgovor: Tablica vrednosti izraza (6) glasi:

x	y	$x \wedge y$	$y \wedge x$	$(x \wedge y) \Leftrightarrow (y \wedge x)$	$\neg[(x \wedge y) \Leftrightarrow (y \wedge x)]$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0

3. Vrste izraza. — Tablice vrednosti datih izraza (t. **2**) pokazuju da za razne vrednosti iskaznih promenljivih vrednosti nekih izraza je stalno **1**, vrednost drugih izraza je stalno 0, a ima izraza čija vrednost bude i 1 i 0.

Izraz čija je vrednost, za sve moguće kombinacije vrednosti sadržanih iskazanih promenljivih, uvek 1 *zove se opštevalidan izraz*. Izraz čija je vrednost stalno 0 zove se *kontradikcija*. Izraz čija je vrednost za neke vrednosti sadržanih iskaznih promenljivih 0, a za druge 1, zove se *neutralan* izraz.

Kratkoće radi izraze ćemo označavati slovom X uz eventualne indekse. Na primer ako su X_1 i X_2 dva izraza (iskaza), onda su i $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, $X_1 \Rightarrow X_2$, $X_1 \Leftrightarrow X_2$ takođe izrazi (iskaza).

4. Ekvivalentni izrazi. — 1) Izrazi, na primer:

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (y \wedge x), (x \vee y) \Leftrightarrow (y \vee x), (x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y), \neg(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y), \neg\neg x \Leftrightarrow x$$

su opštevalidni. Osim toga, svaki od njih je sastavljen od dva izraza vezana funktorom ekvivalencije. Za takva dva izraza kažemo da su ekvivalentni.

Definicija. — *Za dva izraza X_1 i X_2 čija je ekvivalencija opštevalidan izraz kažemo da su ekvivalentni. Ekvivalentnost se zapisuje ovako* $X_1 \sim X_2$.

Iz opštevalidnosti prethodno navedenih izraza slede ekvivalentnosti:

(1) $\neg\neg x \sim x$; (2) $x \wedge y \sim y \wedge x$; (3) $x \vee y \sim y \vee x$;
(4) $x \Rightarrow y \sim \neg x \vee y$; (5) $\neg(x \wedge y) \sim \neg x \vee \neg y$.

Zatim, lako se izvode ekvivalentnosti:

(6) $\neg(x \vee y) \sim \neg x \vee \neg y$; (7) $x \Leftrightarrow y \sim y \Leftrightarrow x$;
(8) $x \Leftrightarrow y \sim (x \Rightarrow y) \wedge (x \Rightarrow y)$; (9) $x \wedge x \sim x$;
(10) $x \vee x \sim x$; (11) $(x \wedge y) \wedge z \sim x \wedge (y \wedge z)$;
(12) $(x \vee y) \vee z \sim x \vee (x \vee z)$; (13) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z \sim x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
(14) $(x \vee y) \wedge z \sim (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$; (15) $(x \wedge y) \vee z \sim (x \vee z) \wedge (y \vee z)$.

Prema definiciji treba pokazati opštevalidnost svake od navedenih ekvivalencija. Na primer u slučaju (14) pokazujemo da je $((x \vee y) \wedge z \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (y \wedge z)) = X$ opštevalidan ovako:

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \wedge z$	$x \wedge z$	$y \wedge z$	$(x \wedge z) \vee (y \wedge z)$	X
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

Uputstvo. — Dosad smo sastavili više logičkih tablica. Treba obratiti pažnju na mehanizam njihovog sastavljanja. Pre svega, broj redova tablice iznosi 2^k, gde je k broj prostih iskaza. (U slučaju poslednje tablice je $k=3$. Zato 8 redova.) Zatim se ispisuju vrednosti prostih iskaza i to ovako: U stupcu prvog iskaza napiše se 1,1,... sve do sredine tablice, tj. $(2^k:2)$ jedinica; u stupcu drugog iskaza napiše se $(2^k:4)$ jedinica, $(2^k:4)$ nula, $(2^k:4)$ jedinica i tako dalje; u stupcu trećeg iskaza napiše se $(2^k:8)$ jedinica, zatim $(2^k:8)$ nula itd. Najzad se izračunavaju vrednosti složenih izraza.

Svaka ekvivalentnost $X_1 \sim X_2$ izražava jedan logički zakon. Prema tome, svaka od prethodnih ekvivalentnosti izražava jedan *logički zakon*. Neki od tih zakona imaju i specijalna imena. Na primer (1) je zakon dvostruke negacije, a (5) i (6) zovu se Demorganovi zakoni.

Tablice njihovih vrednosti izgledaju ovako:

x	y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$ (1)	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \vee \neg y$ (2)	(1) $\Leftrightarrow$ (2)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

x	y	$x \vee y$	$\neg(x \vee y)$ (1)	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \vee \neg y$ (2)	(1) $\Leftrightarrow$ (2)
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

2) Lako se dokazuju teoreme:

(1) $X \sim X$ (refleksivnost).
(2) Ako je $X_1 \sim X_2$ onda je $X_2 \sim X_1$ (simetričnost).
(3) Ako je $X_1 \sim X_2$, a $X_2 \sim X_3$, onda je $X_1 \sim X_3$ (tranzitivnost).
(4) Ako je $X_1 \sim X_2$, onda $\neg X_1 \sim \neg X_2$.
(5) Ako je $X_1 \sim X_2$, i $X_3 \sim X_4$, onda:
(5^{I}) $X_1 \wedge X_3 \sim X_2 \wedge X_4$; ($5^{\mathrm{II}}$) $X_1 \vee X_3 \sim X_2 \vee X_4$;
(5^{III}) $X_1 \Rightarrow X_3 \sim X_2 \Rightarrow X_4$; ($5^{\mathrm{IV}}$) $X_1 \Leftrightarrow X_3 \sim X_2 \Leftrightarrow X_4$.

Iz 1) i 2) vide se analogije između „obične" algebre i algebre iskaza.

3) Za ekvivalentnost izraza vezana je ekvivalentnost iskaza:

Dva iskaza su ekvivalentna ako su im vrednosti jednake.

Iz te definicije sledi da ako je $X_1 \sim X_2$, onda su iskazi koji se od njih dobijaju, kad se iskazane promenljive zamene konkretnim iskazima, ekvivalentni. Obrnuto, međutim, ne stoji uvek.

5. Primene. — 1) Kao što je napomenuto, analogije između „obične" algebre i algebre iskaza su očigledne. I zato, kao što u običnoj algebri umesto datih rešavamo ekvivalentne jednačine, tako i u algebri iskaza, umesto da tražimo vrednosti datih izraza, mi tražimo vrednosti ekvivalentnih izraza. Na primer umesto vrednosti $x \Rightarrow y$, mi određujemo vrednost ekvivalentnog izraza $\neg x \vee y$, što u krajnjoj liniji znači da umesto da dokazujemo teoremu $x \Rightarrow y$, mi dokazujemo $\neg x \vee y$. U stvari, lako se proveravaju i sledeće ekvivalentnosti:

(1) $x \Rightarrow y \sim \neg y \Rightarrow \neg x$;

(2) $x \Rightarrow y \sim (\neg y \wedge x) \Rightarrow x$;

(3) $x \Rightarrow y \sim (\neg y \wedge x) \Rightarrow y$;

(4) $x \Rightarrow y \sim (\neg y \wedge x) \Rightarrow (z \wedge \neg z)$;

(5) $(x_1 \wedge x_2) \Rightarrow y \sim (\neg y \wedge (x_1 \wedge x_2)) \Rightarrow (z \wedge \neg z)$.

[Lako se vidi da je (5) u suštini (4). Samo je iskaz x konjunkcija izraza x_1 i x_2.]

Zato se umesto teoreme $x \Rightarrow y$ dokazuje istinitost ma kojeg izraza na desnoj strani. Na tome se zasniva poznati *dokaz od suprotnog*, tj. metod dokazivanja koji dopušta suprotno od onoga što teorema tvrdi.

Na primer, poznata je teorema da ako dve prave odsecaju od krakova ugla proporcionalne duži onda su te (presečne) prave paralelne, tj. ako jedna prava seče krake ugla čije je teme o u a i a_1, a druga seče iste te (krake) u b i b_1, onda

$$\frac{[oa]}{[oa_1]} = \frac{[ab]}{[a_1b_1]} \Rightarrow aa_1 \parallel bb_1.$$

Imamo, dakle, iskaz $x = \frac{[oa]}{[oa_1]} = \frac{[ab]}{[a_1b_1]}$ i iskaz $y = aa_1 \parallel bb_1$, pa treba dokazati da iz x sledi y tj. $x \Rightarrow y$.

Umesto toga mi pretpostavljamo da sledi $\neg y$, tj. $aa_1 \nparallel bb_1$. Međutim, iz $\neg y$ i x dokazujemo da je istinito y, ili, što je isto, da iz $(\neg y \wedge x)$ sledi y, tj. $(\neg y \wedge x) \Rightarrow y$, tj. [ekvivalentnost (3)] tvrđenje $x \Rightarrow y$ je istinito.

§ 26.3. LOGIČKE FUNKCIJE

1. Ako je A data množina čiji su elementi brojevi, a f označava dato pravilo koje svakom elementu x množine A pridružuje određen broj y množine B, onda kažemo da je y *funkcija od x, definisana u množini A* i to zapisujemo ovako

$$y = f(x), \quad x \in A.$$

Množina A zove se definiciona oblast funkcije f, a B je množina vrednosti te funkcije (glava IX).

1) Posmatrajmo sad množinu M đaka jednog odeljenja i iskaze:

Bora je odličan đak.
Vesna je odličan đak.
Marko je odličan đak.
x je odličan đak.

Očigledno je da se svaki od prva tri iskaza može dobiti iz četvrtog kada se umesto x stavi određeno ime đaka. Umesto x možemo da stavimo ime svakog učenika množine M. Dobijamo množinu iskaza „x je odličan đak". Neki od njih su istiniti, neki su neistiniti. Ali zasad obratimo pažnju da svi oni imaju isti *predikat*: „. . . je odličan đak". „x je odličan đak" je jedna iskazna ili logička funkcija definisana u množini M datog odeljenja učenika. Označimo je, kratko, sa $P_1(x)$ gde P_1 označava dati predikat.

2) Na sličan način ako umesto slova x u jednačini $x^2-6x+5=0$ stavimo realne brojeve, dobićemo razne iskaze na primer: $1^2-6\cdot1+5=0$, $2^2-6\cdot2+5=0$, $3^2-6\cdot3+5=0$, $4^2-6\cdot4+5=0$, $5^2-6\cdot5+5=0$, $6^2-6\cdot6+5=0, \ldots$

Očigledno je da su samo prvi i peti od tih iskaza istiniti. Svi ostali su neistiniti. Predikat u tom slučaju je $\ldots{}^2-6\cdot\ldots+5=0$ i ako ga označimo sa P_2 jednačinu $x^2-6x+5=0$ označavamo sa $P_2(x)$. Kad se umesto x stavljaju razni realni brojevi dobijaju se razni iskazi, pa je posmatrana jednačina jedna logička funkcija definisana u množini R realnih brojeva.

Uopšte, ako je data množina M čiji elementi mogu biti najraznovrsnije prirode (brojevi, tačke, prave, ljudi, iskazi, . . .) i ako je dat određen predikat P, koji svakom elementu M pridružuje jedan iskaz, onda kažemo *da je u M definisana (data) jedna logička (iskazna) funkcija* i ona se kratko označava:

$$P(x), \quad x \in M.$$

3) Neka je M množina iskaza:

Marija je otišla u bioskop (iskaz a_1).

Marija je kod kuće (iskaz a_2).

Marija je otišla na izlet (iskaz a_3).

Označimo sa b iskaz: Marija pregledava pismene zadatke svojih učenika. Šta znači: $x \wedge b$, $x \in M$?

Ako zamenimo x iskazima a_1, a_2, a_3, dobijamo potpuno određene iskaze. Jedan od njih $a_2 \wedge b$ je istinit, ostali su neistiniti.

Znači, $x \wedge b$ je jedna logička funkcija čiji je predikat „$\ldots \wedge b$" a definisana je u množini $M = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Iz navedenih primera vidimo da u slučaju svake logičke funkcije postoji jednoznačna korespondencija između elemenata date množine M i množine J iskaza. Elementi množine M mogu biti, kao što je već rečeno, razne prirode, elementi množine J su samo iskazi. Oni su istiniti ili neistiniti u zavisnosti od odgovarajućeg elementa množine M. Na primer: $a, b \in M$, $P(a)$ može imati vrednost 1, a $P(b)$ može imati vrednost 0.

Neka je M_1 ona podmnožina množine M koju čine elementi za koje je (Px) istinit iskaz. Podmnožina M_1 zove se *množina istinitosti* logičke funkcije $P(x)$. Može se dogoditi da je $M_1 = M$, ili $M_1 = \varnothing$. Dopunska množina $\overline{M}_1$ množine M_1 u odnosu na M zove se *množina neistinosti* funkcije $P(x)$.

2. Ne samo svaka jednačina nego i svaka nejednačina je jedna logička funkcija. Na primer $x-7>0$ je logička funkcija u množini $M = \{x \mid x > 7\}$. Njen predikat P je „$\ldots -7>0$".

3. Operacije nad logičkim funkcijama definišu se analogno operacijama nad iskazima (§ 26.1):

1) Ako logičke funkcije $P_1(x)$ i $P_2(x)$ posmatramo u istoj množini M, onda se $P_1(x) \wedge P_2(x)$ zove *konjunkcija* tih funkcija pri čemu:

(1) Njena definiciona oblast je množina M.

(2) Ako $a \in M$, onda je $P_1(a) \wedge P_2(a)$ iskaz nove funkcije (konjunkcije) i on je istinit ako su oba iskaza $P(a)$ i $P(b)$ istinita.

(3) Ako je M_1 množina istinitosti funkcije $P_1(x)$ a M_2 je množina istinitosti funkcije $P_2(x)$, onda je presek $M_1 \cap M_2$ množina istinitosti logičke funkcije $P_1(x) \wedge P_2(x)$.

Na primer ako je $M=R$, a $P_1(x)$ i $P_2(x)$ su respektivno logičke funkcije $x-3>0$ i $x-7<0$, onda je $]3;7[$ množina istinitosti konjunkcije

$$(x-3>0) \wedge (x-7<0).$$

2) Ako su $P_1(x)$ i $P_2(x)$ logičke funkcije definisane u M, onda je $P_1(x) \vee \vee P_2(x)$ logička funkcija definisana u M i zove se *disjunkcija* funkcija $P_1(x)$ i $P_2(x)$. Ona daje istinite iskaze samo za one vrednosti x za koje je bar jedna od funkcija $P_1(x)$ ili $P_2(x)$ istinita.

Unija $M_1 \cup M_2$ je množina istinitosti disjunkcije $P_1(x) \vee P_2(x)$.

Na primer u slučaju $x-3=0$ i $x-7=0$ množina istinitosti funkcije $(x-3=0) \vee (x-7=0)$ je $\{3,7\}$, jer je $M_1=\{3\}$, $M_2=\{7\}$.

3) Ako je $P(x)$ logička funkcija definisana u množini M, onda i $\neg P(x)$ je logička funkcija u množini M. Zove se *negacija* funkcije $P(x)$.

4) $P_1(x) \Rightarrow P_2(x)$ je *implikacija* logičkih funkcija $P_1(x)$ i $P_2(x)$.

5) $P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$ je *ekvivalencija* logičkih funkcija $P_1(x)$ i $P_2(x)$.

Napomena. — U *Metodici savremenog matematičkog obrazovanja* (Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1970) dato je više primera logičkih zadataka uz uputstvo za njihovo rešavanje. Ovde preporučujemo čitaocu da obrazloži:

(1) $a \wedge b = b \wedge a$	(6) $a \wedge 0 = 0$
(2) $a \vee b = b \vee a$	(7) $a \wedge 1 = a$
(3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$	(8) $a \vee 1 = a$
(4) $(a \vee b) \wedge c = ac \vee bc$	(9) $v(a \wedge a) = 1$
(5) $a \wedge 0 = 0$	(10) $a = a$

pri čemu a, b, c, označavaju proizvoljne iskaze.

UPUTSTVA I REZULTATI

PRETHODNA NAPOMENA

Matematika može, pored ostalog, da bude izvor lepih, pravih estetskih doživljaja, izvor najzdravijih zadovoljstava koje čovek može da doživi. To zna svako ko je uspeo da delimično uđe u nju (mali je broj onih koji su, tradicionalnim obrazovanjem, potpuno ušli u matematiku).

Ali, matematička zadovoljstva nisu „jeftina roba". Štaviše, ona se ne mogu kupiti ni za kakav novac. I niko još nije uspeo da izazove matematička zadovoljstva kod drugog. Ona dolaze samo posle samostalnog, uistinu samostalnog upornog rada. Dobra matematička knjiga predstavlja trnovit, pun uzbrdica put kojim treba samostalno da ide onaj koji želi da dospe do matematičke zgrade i da uživa u njenim lepotama.

Nastojalo se, svim silama, da ova knjiga olakša put u savremenu matematiku. Sva materija je grupisana u glave. Svaka glava obrađuje grupu srodnih pojmova. Svaki pojam ili grupa najtešnje povezanih pojmova obrađuju se jednim odeljkom glave — paragrafom. Opšti plan svakog paragrafa jeste:

1) Polazeći od bliskih primera i pristupačnih rasuđivanja formira se potrebni pojam.

2) Odmah se postavljaju odgovarajuća pitanja ili odgovarajući zadaci koji formirani pojam bolje osvetljavaju i utvrđuju.

3) Ako se u paragrafu formira više pojmova (i ako je potrebno), on se završava zadacima koji ujedinjuju te pojmove.

Na kraju svake glave postavljaju se zadaci (vežbanja i zadaci) koji:

(1) povezuju i utvrđuju sve pojmove formirane u toj glavi;

(2) povezuju pojmove te glave sa ranije (u prethodnim glavama) formiranim pojmovima ili pripremaju formiranje sledećih pojmova;

(3) uvode „čitaoca" u stvaralački rad.

Na ovom poslednjem (3) insistira se i kroz celokupno izlaganje, jer se jedino tako ulazi u matematiku, jedino tako se osposobljava za matematičko mišljenje, što je ne samo osnovno i bitno nego i krajnji cilj kome treba težiti i koji je stalno bio prisutan kako pri opštoj koncepciji „izlaganja", tako i pri obradi svakog pojma, pa čak i pri formulaciji svake rečenice.

Od „čitaoca" se zahteva, pre svega i iznad svega, upornost u savlađivanju svih prepreka i istrajnost u radu. On treba da upregne sve sile kako bi suštinski razumeo ono o čemu se govori. On treba da se, ako mu nešto nije jasno, vrati na početak paragrafa, na početak glave, na početak knjige. I to ne jedanput. Više puta. Mnogo puta. Ali je pri prvom „čitanju" korisno da pređe preko nekih stvari koje mu nisu sasvim jasne, da uporno ide dalje do kraja paragrafa ili glave. Da reši one zadatke koje može, a zatim da se ponovo vrati. Pri ponovnom čitanju on će videti da tek sada razume, zaista razume, stvari koje su mu ranije izgledale jasne.

Odeljak „Uputstva i rezultati" sadrži odgovor na skoro svako pitanje (postavljeno u tekstu ili zadatku),* rešenje ili sugestije za rešavanje skoro svakog zadatka, ali „čitalac" će to pogledati tek *kad samostalno napiše odgovor ili reši zadatak. Nikako pre.*

Nije lako pridržavati se toga, jer ako čovek zna da postoji odgovor, ne ulaže potrebni napor. Međutim, treba znati da samostalno rešavanje svih pitanja i problema predstavlja jedinu garanciju uspeha. Može se pri tome pogrešiti. To nije nikakvo zlo. Naprotiv, svaka greška najbolje, najsigurnije „uči". Tek konfrontiranjem svojih i datih rasuđivanja, uviđanjem eventualnih svojih grešaka „čitalac" duboko, suštinski shvata odgovarajući pojam, razume odgovarajuću činjenicu, odnosno odgovarajući dokaz. Rešenja i uputstva nisu data zato da se „čitalac" (onaj koji bude ulazio u savremenu matematiku putem ovog udžbenika) pomoću njih "uči„ rešavati (jer to nije moguće), nego da proveri pravilnost svojih rasuđivanja.

A za uzdržavanje od „konsultacije" uputstava (čim se naiđe na neku teškoću) nije potrebna dugotrajna disciplina. Dovoljno je da se jedna ili najviše dve glave obrade uz tu disciplinu, pa da to postane „zakon". Jer, vrlo brzo „čitalac" (prethodna napomena) stiče sposobnost za rešavanje postavljenih problema, pa dakle i samopouzdanje, a tada je on „dobio bitku". Posle toga, uzbrdice se sve ređe pojavljuju, celokupni rad ide sve lakše i brže, zadovoljstva od postignutih uspeha su sve češća, a ona su ta koja vuku snažno napred, ka daljim osvajanjima.

Ali, i tada, ne treba misliti da je posao završen kad se dođe do kraja knjige. Neophodno je vratiti se, u raznim razmacima vremena, na pojedine glave ili čitavu knjigu. Tek posle trećeg „čitanja" može se smatrati da je uspeh postignut. U stvari, već pri drugoj proradi svake glave, svakog paragrafa treba, došavši do jednog pasusa, dokaza ili ma kog logičkog koraka, zatvoriti knjigu i pokušati potpuno samostalno reprodukovanje. I sve dok se takvo reprodukovanje manjih ili većih celina, čak i celih paragrafa, ne može izvršiti, ne treba se zadovoljiti.

Isto tako, nužno je često (kad god se ima vremena a njega uvek ima kad se hoće) otvoriti nasumice knjigu kod paragrafa „vežbanja i zadaci", pročitati bilo koji zadatak (jedan, dva, tri, . . .) i rešiti ga samostalno. (Napominje se da su neki zadaci namerno ponovljeni u raznim glavama.) Tako treba postupiti i sa rezimeima koji slede posle svake glave. Pročitati bilo koju tačku rezimea. Ako je sve jasno, dobro je. U protivnom, vratiti se na odgovarajuće mesto i podsetiti se onoga o čemu se u rezimeu govori.

Sve su to važni momenti koji doprinose uspehu.

GLAVA I

§ 1.1.

1. 1) Određene, definisane jesu: moj pisaći pribor; ove knjige na stolu; vozila beogradske registracije; aritmetička pravila.

Zaista:

Podrazumeva se da lice koje kaže „moj pisaći pribor" govori to onima koji dobro poznaju i njega i njegov pisaći pribor (npr. đak, učitelj, službenik, . . .). Ako je to, pretpostavimo, govornik na nekom skupu, sastanku, on će pokazati svoj pisaći pribor.

* Sa porastom osposobljenosti „čitaoca" rešenja postaju, razumljivo, ređa.

To isto važi i kad kažemo „ove knjige na stolu". Množina ne bi bila određena kad bismo rekli „knjige na stolu", jer u tom slučaju ne znamo o kom stolu je reč, pa se i ne može odrediti da li jedna određena knjiga pripada toj „množini" ili ne.

Množina „aritmetička pravila" određena je, sasvim razumljivo, samo za one koji mogu da razlikuju aritmetička pravila od nekih drugih pravila. Ali „definisana množina" i ne označava da svaki čovek može odrediti njene elemente. I ljude možemo razvrstati u množinu onih za koje je jedna množina definisana i množinu svih ostalih; na primer, množina „stolarski alat" nije definisana za mene, jer kad bi mi se pokazali razni alati, ne bih za svaki od njih mogao reći da li se stolar služi njime ili ne. A zar su množine „četvorouglovi", „psihološki termini" (tim pre „psihološki pojmovi"), „najmanji delići materije" (kojih zasad ima 200), . . . definisane za svako razumno biće?

Šta možete reći za „ovo stado ovaca", „Miličino posuđe", „selo Ugrinovci", „četa kapetana Dušana Vojnovića"? „Cifre" nije definisana množina, jer cifre mogu biti arapske, rimske, a bilo je i drugih.

2) Definisana je množina pod brojem: (2), (4), (5), (6), (7), (9), (10), (11), (13), (14), (15), (16), (18). Zašto?

Zašto nije definisana „množina" (1). Kako bi trebalo dopuniti izražavanje pa da bude definisana?

Ako bismo (3) iskazali ovako: „onaj crni par cipela" ili „Ivankine cipele sa najvišom potpeticom", ili jednostavno „ovaj par cipela" (je dobar ali je skup), itd., ona bi bila definisana.

Zašto nije definisana „množina": (8); (12); (17)?

Množina (19) nije definisana jer je, npr., žena od 30 godina mlada za pedesetogodišnjaka, a stara za dete od 10 godina.

Možete li sa sigurnošću reći: Ovaj čovek (ova žena) mi je prijatelj?

§ 1.3.

2. 4) $A=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$B=\{$ponedeljak, utorak, . . . , nedelja$\}$.

$B=\{d|d$ je sedmični dan$\}$.

$D=\{$decembar$\}$.

$E=\{7, 14, 21, \ldots, 70, 77, 84, 91, 98\}$.

$E=\{m|m$ multiplum broja $7<100\}$.

$F=\{1, 2, 4, 8, 16\}$, $\quad F=\{y|y$ je činilac broja $16\}$.

$G=\{x|x$ jedinica za merenje dužine, zapremine i mase$\}$.

$K=$(vidi autorovu „Matem. u I i II razredu o. š.", izdanje 1967. god.)?

5) $L=\{x|x$ je multiplum broja 3 između 2 i $16\}$.

$M=\{z|z$ je trocifren broj napisan ciframa 1, 2 i $3\}$.

3. 1) $a \in \{a, b, c\}$, itd. Dovršiti. 2) $x \in S$, $199 \notin B$. Dovršiti.

§ 1.4.

2. 1) $E=G=K$ zato što se svaka od njih sastoji od elemenata a, b, c, d i samo od njih.

$H \neq E$ zato što $b \notin H$. $G \neq F$ zato što ... $H=F$ zato što ...

2) $A=B$, jer su 1, 2, 3 svi prosti brojevi ...

3) $C \neq D$, jer je $D=\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

4) Kako je $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, samo je $A=C$.

§ 1.5.

2. 3) (1) Singleton (samo 0 može da se stavi umesto x, ako želimo da to bude jednakost).

(2) Prazna (jer ne postoji broj koji bi se mogao dodati i broju 3 i broju 4 da se dobije jednakost).

3. (1) $\{a, b\}$; (2) $\{a\}$; (3) $\varnothing$ ili $\{\ \}$.

4. 1) (2); (6); (9); (10).

2) (2); (5) jer on može nositi opanke ili sandale; (6); (7).

§ 1.6.

2. 1) Zato što su svi elementi prikazanih množina elementi množine K. Množina K zove se u ovom slučaju *osnovna* ili *univerzalna* množina.

2) $t \in S$, $t \in M$.

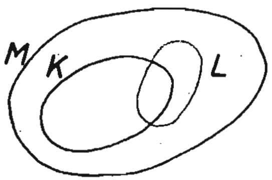
3) Jer imaju zajedničke elemente, tj. neki su se đaci prijavili i za sportsku i za pozorišnu sekciju.

6) Element v pripada i množini P, a element ... Jedan deo dijagrama je šrafiran, jer je prazan.

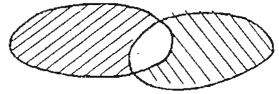
8) Ti elementi ne pripadaju nijednoj od množina S, P, B, C (to su đaci koji se nisu prijavili ni za jednu sekciju) i zato odgovarajuće tačke treba crtati unutar granice dijagrama K, ali tako da ne pripadaju nijednom od dijagrama S, P, B, C, F.

3. 1) Časovnik ne pripada množini M.

2) Slika 1, ako ima đaka koji nose i kecelju i naočare. Ako takvih nema, krive K i L se ne seku.



Slika 1



Slika 2

3) Šrafirati crvenim prazni deo dijagrama H (jer je svaka hrizantema element množine C). 4) Slika 2.

6) Treći sleva, tj. (3). Recite (napišite) zašto svaki od ostalih nije pravilan.

7) (3) Obrazložite.

8) $a \in A$, $a \notin B$; $b \notin A$, $b \in B$, $c \in A$, $c \in B$.

§ 1.7.

2. 1) (1) $\{3, 5, 7\}$; (2) $\{9\}$; (3) $\varnothing$. Broj 1 nije prost broj. Zaista, po definiciji, broj je prost, ako je deljiv sa dva broja (brojem 1 i samim sobom). Broj 1 je deljiv samo jednim brojem.

3) t ... B, t ∈ J, t ...

4) Tačno je, jer je 48 deljiv brojem 12, tj. delioci broja 12 su elementi množine koju čine delioci broja 48, delioci broja 48 su elementi množine koju čine delioci broja 240, ...

5) Slika 3. Slučaj (2) ćemo tek objasniti. Zasad pokušajte sami.

Slika 3

4. 3) Niš je *element*, a {Niš} je deo množine {gradovi u Srbiji}. Izrazite to pomoću simbola $\in$ i $\subset$.

§ 1.8.

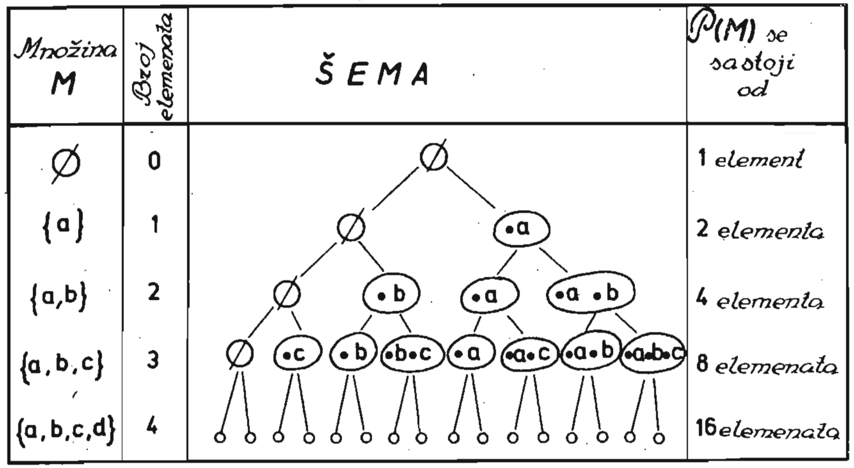
2. $P(C)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$P(D)=\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

3. Ako postupno napišete sve delove, dobićete da kad je:

množena	broj njenih delova iznosi
$\{\ \}$	1
$\{a\}$	2
$\{a, b\}$	4
$\{a, b, c\}$	8
. . . .	

Ako napravite šemu:



Slika 4

odmah vidite da se od svakog dela (od svake podmnožine) prethodne množine dobijaju dva dela sledeće množine, to jest:

$n[P(X_0)]=1$	$2^0=1$
$n[P(X_1)]=1\cdot 2$	$2^1=2$
$n[P(X_2)]=2\cdot 2$	$2^2=4$
$n[P(X_3)]=2\cdot 2\cdot 2$	$2^3=8$
$n[P(X_4)]=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$	$2^4=16$
. . . .	
$n[P(X_n)]=2\cdot 2\cdot 2\ldots 2$	

Rečima iskazano: *Napiše se proizvod od onoliko dvojaka koliko elemenata sadrži data množina i izračuna se taj proizvod.*

§ **1.9.**

2. (2) i (3) Videti § 1, t. **3**, 2. (4) $\in$; (5) $\in$.

3. Svaki objekt (svaki pojam) može biti jednak samom sebi, a ne može pripadati samom sebi. Zato je $x=x$, $x\notin x$, pa $\varnothing\notin\varnothing$.

Međutim, $\varnothing$ je element množine $\{\varnothing\}$ i zato $\varnothing\in\{\varnothing\}$. $\varnothing$ i $\{\ \}$ su dva simbola, dva imena jedne iste „stvari", istog pojma (prazne množine) i zato je $\varnothing=\{\ \}$, a $\{\varnothing\}$ je množina pa $\varnothing\neq\{\varnothing\}$. [Videti 1] primedbu § 1.7. Uostalom (§ 1.4, t. **2**), $a\notin a$, $a\in\{a\}$]. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ je par zato što $\varnothing\neq\{\varnothing\}$.

4. Poslednje tri su jednake.

6. (1) $A=\{13\}$ ili $A=\{x|x=13\}$;
(2) $B=\{17, 19\}$ ili $B=\{x|x=17$ ili $x=19\}$;
(3) $C=\{3, 5, 6, \ldots, 30, 31\}$ ili $C=\{x|x$ nije delilac broja $32\}$.

7. 1) $\operatorname{div} 20=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$; $\operatorname{div} 29=\{1, 29\}$.

2) Odatle i iz 1) vidi se da 1 nije prost broj. To smo napomenuli i ranije. $\operatorname{div} 0=\{1, 2, 3, \ldots\}=N-0$ jer je $N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, tj. broj 0 je deljiv svakim prirodnim brojem osim 0.

8. (1) $\neq$; (2) $=$; (3) $=$; (4) $=$; (5) $\neq$ jer $\varnothing$ nije element . . .

9. Jeste. Zaista: (1) Elementi koji nisu jednaki (identični) sami sebi nisu elementi. (2) U jednom problemu (zadatku, primeru) svaki simbol označava samo jedan element (§ 1.3, t. **2**, 1). Ostalo je jasno. Obratite pažnju na $x=1$ *i* $x=2$ i $x=1$ *ili* $x=2$.

10. 2) Ima. Koje su to škole?

11. (1) Na primer: „zastava", „moskvič", „mercedes", . . .
(2) $\{p|p$ je pas$\}$; $\{a|a$ je lav$\}$; . . .
(5) Podmnožine se mogu ekstenzivno definisati.

12. 1) To je lako jer podmnožine nemaju zajedničkih elemenata. Znači, u unutrašnjosti koju određuje S treba nacrtati 5 krivih koje nemaju ničeg zajedničkog.

2) Sad je malo teže, jer neke podmnožine imaju zajedničkih elemenata. Poslužite se pisaljkama raznih boja.

13. (1) Morate napisati 8 podmnožina.
(2) Kao kad je data množina $\{x, y\}$.
(3) $\varnothing$ i 0. (4) $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$. (5) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
(6) 64 podmnožine. Dobro je pisati: Slovenija, Hrvatska, . . . Posle proverite posmatrajući delove množine $\{a, b, c, d, e, f\}$.

14. (1) $\{5, 7\}$; (2) $\varnothing$; (3) $=(1)$; (4) A; (5) $\{4, 8\}$.

15. (1) $\subset$; (2) $\subset$; (3) $\in$; (4) $\subseteq$.

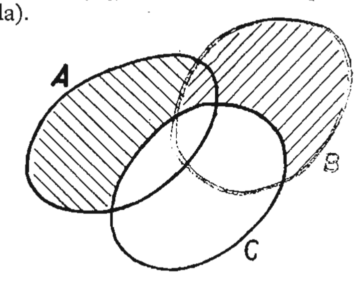
16. Sve je rešeno u tekstu (§ 1.8) i pod **13** (ovog §). Ali baš zato napišite redom sve što se traži (pomoću velikih zagrada).

$$P(\varnothing)=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$
$$P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}.$$

18. (1) $X=\{a, b, c\}$, $X=\{a, b, d\}$;
(2) $X=\{0, 1, 2, 3\}, \ldots$

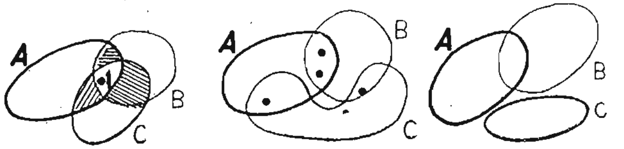
19. (1) pogrešno; (3), (4) i (6) besmisleno. Napišite kako treba.

20. 1) Slika 5. Objasnite.
2) Sad su B i C uključene u A, li $C\not\subseteq B$.



Slika 5

3) Vidi t. 7 ovog §. Slika 6: (1) Objasnite. (2) Objasnite i imenujte označene elemente. (3) Objasnite i označite zajedničke i nezajedničke elemente.



(1) (2) (3)

Slika 6

Najzad vratite se na dijagrame (1) i (2) i označite i imenujte elemente nepraznih delova.

GLAVA II

§ 2.1.

2) $E \cap F = \{a, c\}$; $E \cup F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

(Jer a i c pripadaju i jednoj i drugoj množini, ali mi ih uzimamo zato što pripadaju *ili* množini E ili množini F, a ne zato što pripadaju obema. Uostalom unija, kao množina, ne može da sadrži dva ista elementa, § 1.1, **3**, 3.)

$$E \setminus F = \{b, d\}, \quad F \setminus E = \{e, f, g\}.$$

Nacrtajte dijagrame svih tih množina (razumljivo prvo E i F) označavajući i sve elemente, posmatrajući i dijagrame i prethodne jednakosti, ponovo čitajte definicije (u tekstu posle „prema tome") udubljujući se u značenje reči „i", „ili", „a ne".

3) $C \cup D = \{a, b, c, d\}$, $\quad C \cup K = \{a, b, c, h\}$,
$C \cup G = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $\quad G \cup K = \{d, e, f, g, h\} = G$.

4) a) $A \cap B$ je množina žutih lala.

$A \cup B$ je množina cvetova (u toj prodavnici) koji zadovoljavaju bar jedan od dva uslova: lala, *ili* je žut.

$A \setminus B$ je množina lala (u prodavnici) koje *nisu žute*.

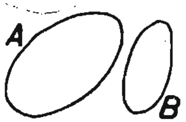
$B \setminus A$ je množina žutih cvetova (u prodavnici) koji *nisu lale*.

b) $A \cap B = \varnothing$ znači da množine A i B nemaju zajedničkih elemenata. U navedenom slučaju: u prodavnici nema žutih lala (sl. 7).

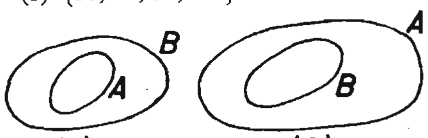
c) (1) Slika 8 (1): $A \subset B$ ili $A \setminus B = \varnothing$, tj. $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B$.

(2) Slika 8 (2) — — — — — — — — — — tj. — — — — — — —

5) (1) $\{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, \ldots\}$,
(2) $\{10, 20, 30, \ldots\}$; (3) $\{30, 60, 90, \ldots\}$.



Slika 7



(1) (2)

Slika 8

§ 2.2.

1. 1) To je množina automobila registrovanih u Beogradu, a izrađenih u Nemačkoj.

2) $= \{0, 14, 28, \ldots\} = \{z \mid z$ je multiplum i broja 2 i broja $7\}$.

3) $E \cap F = \varnothing$

2. 3) $X \cap \varnothing = \varnothing$. Zaista, presek čine zajednički elementi datih množina, a kako ih prazna množina nema, to ih ni presek ne može imati.

4. (1), (2) = {Zaječar, Sisak, Bitolj}.

5. 1) (1) $\{12\}$; (2) $\varnothing$; (3) $\{12\}$.

§ 2.3.

1. 1) Množina građana Jugoslavije koji plaćaju bar jednu od pretplata, tj. množina građana Jugoslavije koji plaćaju *za radio, ili za televiziju ili i za radio i za televiziju.*

2) $P \cup H = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{z \mid z$ prirodni broj$\} = N$.

3) $E \cup F = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, \ldots\} = \{z \mid z$ multiplum broja 3 ili broja $5\}$. Napišite još nekoliko elemenata te unije.

4) $G \cup K = G$. Zašto?

2. 2) $X \cup X = X$. Ako se operacija unije primeni samo na jednu množinu, ova ostaje nepromenjena. Ili: *Rezultat primene unije na jednu množinu je ta ista množina.*

3) $X \cup \varnothing = X$, jer prazna množina ne sadrži nijedan element, pa se, prema definiciji, unija sastoji samo od elemenata množine X.

Kako je $\varnothing \cup X = X \cup \varnothing$, to je $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$.

Ako je jedna od množina na koje se primenjuje unija prazna, rezultat je ona druga množina.

4) Ako je $X \subset Y$, onda je $X \cup Y = Y$.

4. 1) $A \cup C \cup D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$.

Zašto je $A \cup B \cup C = A \cup B$?

5. Napišite ekstenzivnu definiciju svake date množine i njihove unije. $C \cup A \cup B = A \cup B \cup C$ i predstavlja množinu nastavnika naše škole koji izvode nastavu bar jednog od spomenutih nastavnih predmeta.

§ 2.4.

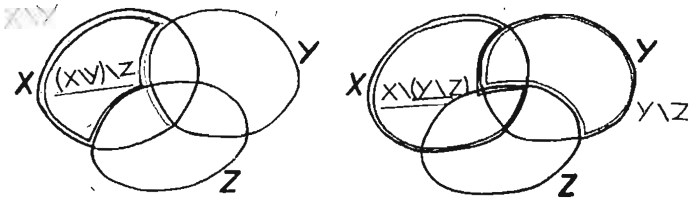
1. 2) $P \setminus T = \{0, 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, \ldots\}$; $\quad T \setminus P = \{3, 9, 15, 21, \ldots\}$.

2. 2) $X \setminus \varnothing = X$, $\varnothing \setminus X = \varnothing$,

3) $X \setminus X = \varnothing$.

4) To znači da množine nemaju zajedničkih elemenata i zato je, očigledno, $X \setminus Y = X$ i $Y \setminus X = Y$.

3. Slika 9. Iz dijagrama se vidi da $(X \setminus Y) \setminus Z \neq X \setminus (Y \setminus Z)$.



Slika 9

Međutim, treba paziti pri interpretaciji dijagrama. Posmatrajte, npr.:

$$A = \{1, 2, 3\},\quad B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\},\quad C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

i izračunajte $(A \setminus B) \setminus C$ i $A \setminus (B \setminus C)$. Šta dobijate?

§ 2.5.

3. (1) Jesu. Baza je N (množina prirodnih brojeva).

(2) Jesu u množini trouglova. (3) Nisu, jer . . .

(4) Nisu, jer neprežívar nije uvek ptica.

(5) Jesu. Osnova je $U = \{$kičmenjaci$\}$.

4. $\bar{A}$ je množina nestaklenih klikera.

$\bar{B}$ je množina klikera koji nisu crni.

$A \cup \bar{B}$ čine oni klikeri koji su ili stakleni, ili nisu crni ili su stakleni necrni;

$A \cap \bar{B} = \{$stakeni klikeri čija boja nije crna$\}$,

$\bar{A} \cup B = \{$crni ne-stakleni klikeri$\}$,

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{$ne-stakleni klikeri koji nisu crni$\}$.

5. $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$,

$\bar{B} = \{5, 6, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

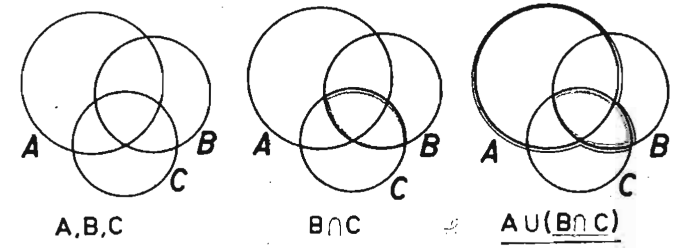
Nastavite sami . . . .

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{6, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

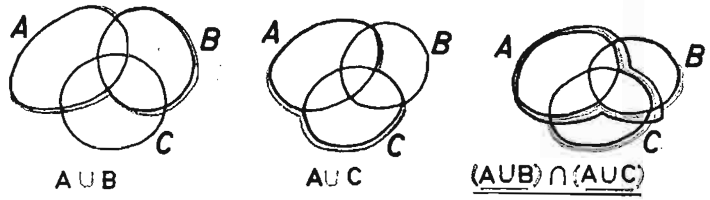
Treba proveriti i crtanjem dijagrama.

§ 2.6.

2. 1) Slike 10 i 11.



Slika 10



Slika 11

§ 2.7.

2. 1) i 2) su particije odgovarajućih množina. Kojih?

3) Nije. Zašto? 4) Nije. Zašto?

5) (1) Nije. (2) Jeste. (3) Nije. Svako tvrđenje obrazložiti.

§ 2.8.

1. Na primer:

$$\begin{aligned}(A \cap D) \cap (B \cup D) &= D \cap (B \cup D) && [\S\ 2.2,\ \text{t. } \mathbf{2}, 4],\\ &= (D \cap B) \cup (D \cap D) && [\S\ 2.6,\ \text{t. } \mathbf{1}],\\ &= (D \cap B) \cup D && [\S\ 2.2,\ \text{t. } \mathbf{2}, 2],\\ &= \varnothing \cup D = D = \{2, 6, 8, 10\}.\end{aligned}$$

2. 1) $A \subset B \subset T$; $C \subset T$; . . .

2) $A \cap C = \varnothing$; . . .; $T \cap B = B$; $T \cup B = T$; $B \setminus T = \varnothing$.

3) $B \cap D$ množina jednakokrakih tupouglih trouglova.

$B \cup D$ množina B, množina D i množina $B \cap D$.

$T \setminus B$ množina trouglova koji nisu jednakokraki.

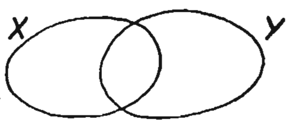
3. Sva „teškoća“ primera (1) — (6) sastoji se u pisanju ekstenzivne definicije (svih) delilaca svakog broja. O tome će se govoriti kasnije, a sad odredite sve proste delioce (probanjem ako drukčije ne znate), a zatim napravite njihove pojedine proizvode i opet probajte.

(1) $\{1, 2, 4, 8\}$; (2) $\{1\}$; (3) $\{1, 5, 25, 125\}$;
(4) $\{1, 2, 4, 8, 16, 64, 512, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$;
(5) $\{3, 6, 8, 9, 12, 24, 36, 72\}$;
(6) $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 625, 1000\}$;
(7) $4N$; (8) $\{13\}$; (9) div $17=\{1, 17\}$;
(10) $35N$, jer je to množina prirodnih brojeva koji pripadaju i množini $5N$ i množini $7N$, dakle $(5\times 7)N$;
(11) $\varnothing$; (12) $\varnothing$. [Videti t. **5** i t. **6** (3) ovog §.]

4. (1) $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x \mid x \text{ riba ili sisar}\}$, $A\setminus B=A$, $B\setminus A=B$;
(2) $A\cap B=B$, $A\cup B=A$, $A\setminus B=\bar{B}$;
(3) $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$, $A\setminus B=\{1\}$;
(4) $A\cap B=40N$, $A\cup B=\{0, 5, 8, 10, 15, 16, \ldots\}$, $A\setminus B=A\setminus 40N$;
(5) $A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=N$, $A\setminus B=N$, $B\setminus A=D$.

5. To i ono u t. **6**, **7**, **8** pa i **9** treba pamtiti.

6. Treba zamisliti, ili nacrtati, dijagrame. U drugom slučaju treba nacrtati dijagrame X i Y u najopštijem slučaju (položaju) (sl. 12). Tada $X\subset Y$ znači da je sav onaj deo dijagrama X koji se nalazi van Y prazan.



Slika 12

Šrafirajte taj deo. Dobijate slučaj § 2.2, t. **2**, 4, pa odmah slede sve ekvivalencije.

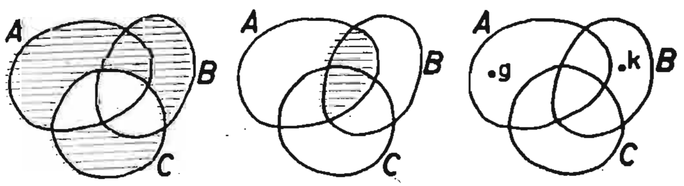
7. 1) Poslužite se opet dijagramom (sl. 12). Uostalom, to je pokazano u tekstu.

2) Iz onoga što je rečeno u t. **5** sledi $(A\cup B)\cap B=\varnothing$, tj. A i B nemaju zajedničke elemente. Nacrtajte dijagram.

8. Dve od njih nemaju zajedničke elemente (*disjunktivne su*). Pokažite to.

9. Primenite poznatu metodu (slika 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 i uputstva). To je jedna teorema, ali i ona i sve ono pod **10** služi za vežbanje u primeni spomenute grafičke metode.

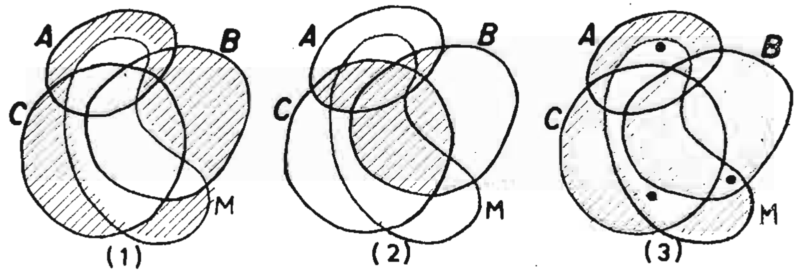
10. Kao u t. **9**, § 2.6. **12.** Slika 13.



Slika 13

13. (1) i (3). (2) Nije jer $\{3\}\cap\{4, 5, 3\}\neq\varnothing$ i ... (5) Nije zato što $\{1, 2\}\cup\{3, 5, 6\}\cup\{7, 8\}\neq A$. Zašto (4) nije particija?

14. Slika 14. **15.** 1) Jeste.



Slika 14

GLAVA III

§ 3.1.

1. 2) Cipela a i cipela s, cipela a i cipela t, . . . , cipela a i cipela v, cipela b i cipela s, . . . Dakle:

$$\left.\begin{array}{l}(a, s), (a, t), (a, k), (a, v)\\ (b, s), (b, t), \ldots\\ (c, s), (c, t), \ldots\end{array}\right\}\ \text{Napišite i nenapisane parove.}$$

2. (4) N je množina prirodnih brojeva, a $N\setminus O=\{1, 2, 3, \ldots\}$. (x, y) je, dakle, razlomak i uobičajeno je da se zapisuje u obliku $\frac{x}{y}$; na primer $\frac{3}{7}, \frac{29}{25}, \ldots$

§ 3.2.

4. 3) Članovi uređenih parova mogu biti i jednaki (identični). Zato:

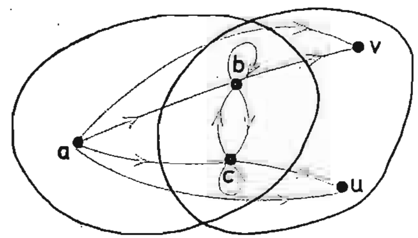
(2) $\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3, 4, 5\}=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), \ldots, (3, 4), (3, 5)\}$.

§ 3.3.

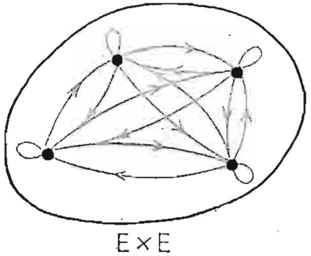
2) Strelice su okrenute od elemenata množine B ka elementima množine A (jer su sad elementi množine B prvi članovi uređenih parova).

3) Slika 15, tj. tačno prema šemi (§ 3.2, t. **3**). Naime, sad su i (b, b) i (c, c) parovi (elementi proizvoda), pa otuda „alke“ oko b i oko c, zatim parovi (b, c) i (c, b), pa strelica od b ka c i strelica od c ka b. Duž „alke“ nije potrebna strelica, jer je očigledno

$$(b, b)=(b, b).$$



Slika 15



Slika 16

4) Slika 16. Opet tačno prema šemi: iz svake tačke „polaze“ 4 strelice u svaku tačku „dolaze“ 4 strelice. Jedna od njih se vraća u isti element. Ona se zove (kako već rekosmo) *alka* ili *predica*. Tačke (elemente množine E) nismo imenovali jer je to sad *sporedno* (što, razume se, ne znači da nije dopušteno; naprotiv, u nekim slučajevima je to neophodno).

5) Sad ne treba da bude teškoća, jer je $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, pa je grafik kombinacija prethodnih.

§ 3.5.

4. To su takođe osobine distributivnosti. Pokažite ih računski i grafički (ili obrnuto). Obratite pažnju na to da su te formule u svemu „slične“ prethodnim, ali nisu „identične“, jer proizvod množina nije komutativan, pa, npr. $C\times(A\cup B)\neq \neq(A\cup B)\times C$.

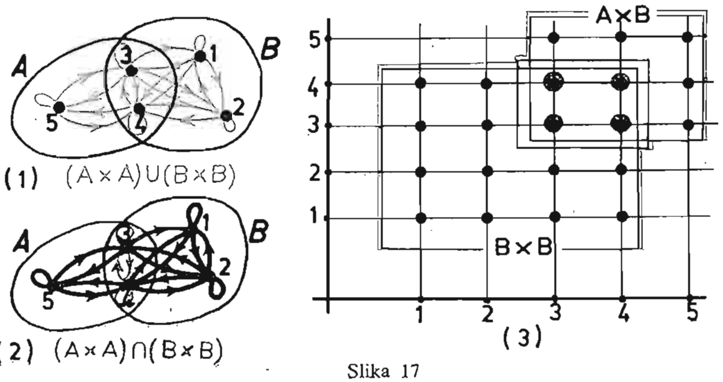
§ 3.6.

3. To su vrlo lepe vežbe za savlađivanje svega onoga što se odnosi na proizvod množina.

(1) Iz $A\times A=\{(3, 3), (3, 4), (3, 5)$, $(4, 3), (4, 4), (4, 5)$, $(5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$ i $B\times B=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$, $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)$, $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)$, $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$,

sledi $(A\times A)\cup(B\times B)=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3)$, $(3, 1), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 4)$, $(4, 3), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}$.

I to služi kao kontrola sagitalne šeme [sl. 17 (1)] koju treba neposredno crtati.



Slika 17

(2) Slika 17 (2), jer je očigledno presek:

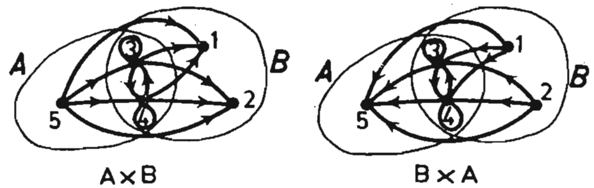
$$(A\times A)\cap(B\times B)=\{(3, 3), (4, 4), (3, 4), (4, 3)\}.$$

Crtež 17 (3) predstavlja mrežu unije (ograničenu plavom linijom) i mrežu preseka (ograničenu crvenom linijom).

(3) Nacrtajte neposredno sagitalnu šemu i mrežu proizvoda $\{1, 2, 3, 4, 5\}\times\{3, 4\}$.

(4) Na sl. 18 date su sagitalne šeme proizvoda $A\times B$ i $B\times A$. Njihovu uniju čine sve strelice. Ujedinite obe te šeme. Šta dobijate? Prikažite i mrežu unije $(A\times B)\cup(B\times A)$. Za kontrolu napišite:

$$(A\times B)\cup(B\times A)=\left\{\begin{matrix}(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\\ (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\\ (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\end{matrix}\right\}.$$



Slika 18

(5) Analogno prethodnom [pod (4)].

(6) Nacrtajte dijagrame množina C, A, B, pa ćete videti da ostaje $\{1, 2\}\times\{5\}=\{(1, 5), (2, 5)\}$, tj. samo dve strelice. Uostalom: $(C\setminus A)\times(C\setminus B)= =\bar{A}\times\bar{B}=\{1, 2\}\times\{5\}$.

4. To je očigledno, jer ako je jedna od množina čiji proizvod tražimo prazna, onda se ne može sastaviti nijedan uređeni par. Obrnuto, iz $A\times B=\varnothing$ sledi da taj proizvod nema nijednog para, to jest . . .

5. I jedno i drugo možete proveriti crtajući sagitalne šeme ili mreže leve i desne strane. Pomoću mreže je lakše [bolje se vidi, sl. 17 (3)]. Pokušajte.

GLAVA IV

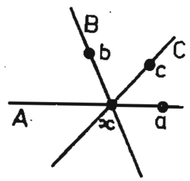
§ 4.4.

4. Slika 4.4: Pošto svaka od pravâ sadrži obe označene tačke, na osnovu aksioma Π 3 je $A=B$. Prave se, dakle, poklapaju.

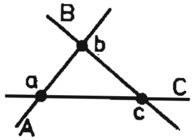
Slika 4.5: $B\subset A$, tj. sve tačke prave B su i tačke prave A. Za takve dve prave kažemo da se poklapaju.

Slika 4.6: Prava B sadrži tačku, npr. b koja ne pripada pravi A, a obe prave sadrže tačku c. To znači da je $A\cap B=\{c\}$. U tom slučaju kažemo da se prave A i B *seku* u tački c.

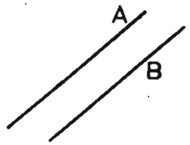
5. Odgovori su prikazani crtežima.



Slika 19



Slika 20



Slika 21

§ 4.5.

2. Ekvivalencija: Ako prava A seče pravu B, onda i prava B seče pravu A i obrnuto.

4. 1) (1) $A \cup B$ su sve tačke koje pripadaju bilo pravi A bilo pravi B. $\Pi \setminus (A \cup B)$ su sve ostale tačke ravni Π, tj. tačke koje ne pripadaju bar jednoj pravi A ili B.

(2) To je množina koju čine sve tačke ravni (Π), osim preseka $\{c\} = A \cap B$.

2) U slučaju (2) presek je prazan, pa je razlika Π, tj. $\Pi \setminus (A \cup B) = \Pi$.

§ 4.6.

Teorema 4. Sledi iz teoreme 3. A kad se još uzme da ona (teor. 3) važi za svaku tačku ravni Π, tvrđenje je očigledno.

§ 4.7.

3. Množine P, Π_1 i Π_2 nisu prazne. One nemaju zajedničkih elemenata. Njihova unija je množina Π.

Ili, kratko: Svaka tačka ravni Π pripada jednoj, i samo jednoj, od množina P, Π_1, Π_2 koje nisu prazne.

§ 4.8.

3. Dve poluprave sa početkom a („izlaze" iz a). Dve sa početkom b.

§ 4.10.

1. Ne, jer ih ima beskonačno mnogo.

2. Prema intuitivnom shvatanju: samo jedna.

Teorema 9. — *Ako je svaka od dve prave A i C paralelna sa pravom B, one su (međusobno) paralelne.*

Dokaz: Iz uslova sledi da su A i C elementi pravca (B). Iz toga, a na osnovu teor. 8, sledi zaključak.

Teorema se može, kratko, zapisati i ovako: $A \| B \| C \Rightarrow A \| C$.

Teorema 10. — *Ako su A i B paralelne prave, a prava C seče B, onda ona seče i A.* Ili: *Ako su A i B paralelne, a B seče C, onda i A seče C.*

5. To su „očigledne" ekvivalencije. Čitaju se u oba smera, na primer: Ako je prava A paralelna pravi G, prava A je element pravca (G). I obrnuto, ako je A element pravca G, prava A je paralelna pravi G. — Jesu li te ekvivalencije nezavisne?

8. Najbolje pročitajte levu stranu i napišite samostalno desnu. Ako u tome uspete, lako ćete dokazati (ili bar odmah razumeti dokaz).

(1) *Ako su prave A i B međusobno perpendikularne i ako je $C \| A$, a $D \| B$, onda su C i D međusobno perpendikularne.* Ili: *Ako su dve prave paralelne (međusobno) perpendikularnim pravama, one su (međusobno) perpendikularne.*

Dokaz: C je element pravca (A), D je element pravca (B), a kako su pravci međusobno perpendikularni, prave C i D su [Π 5] međusobno perpendikularne.

(2) To je specijalan slučaj implikacije (1): *Prava paralelna jednoj od dve perpendikularne prave perpendikularna je na drugoj.*

(3) *Dve prave perpendikularne na trećoj jesu paralelne.*

Zaista: Iz uslova sledi da su (A) i (B) perpendikularni na pravi C, tj. da je $(A) = (B)$. Prave A i B su dakle elementi istog pravca, tj. paralelne su.

(4) je drukčije izražena implikacija (3), jer je (ako čitamo iz „sredine" na levu i desnu stranu) prava B perpendikularna na A i C. Ili, što je isto: prave A i C su perpendikularne na B.

(5) Prema (4) je $A \| C$, a $C \perp D$, tj. $A \| C \perp D$, dakle $A \perp D$. U kom su međusobnom položaju B i D?

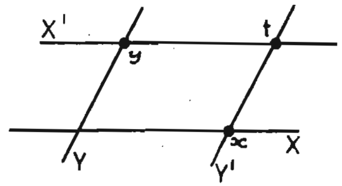
§ 4.11.

1. (A) i (B) su pravci. (1) (A) je prazan, treba dakle nacrtati samo pravu B. (2) A i B se seku. (3) $A \| B$.

2. Ako se prave A i B seku, presek njihovih pravaca je prazan i obratno:

$$A \| B \Leftrightarrow (A) \cap (B) = \varnothing .$$

Jer dva razna pravca ne mogu imati zajedničke prave.

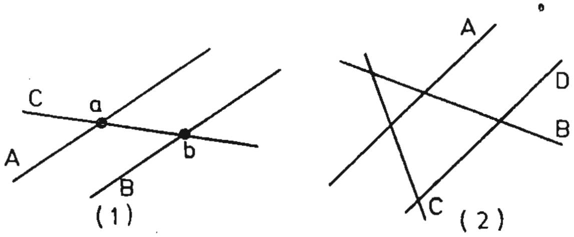


Slika 22

4. Iz datih uslova sledi $X' \nparallel Y$, pa je $X' \cap Y = \{y\}$ i $Y' \nparallel X$, pa je $Y' \cap X = \{x\}$.

5. Prvo „pokušajte“ rasuđivanjem, a zatim proverite tako što ćete „nacrtati“ sve prave.

6. Crteži 23.



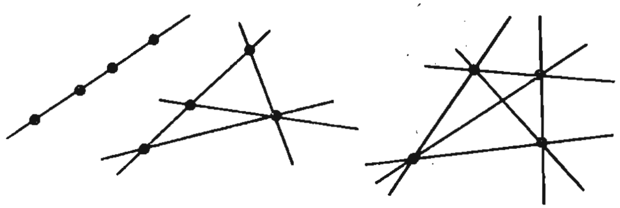
Slika 23

7. 1) Tri prave mogu imati 0, 1, 2 ili 3 zajedničke tačke. Nula tačaka imaju kad je $A\|B\|C$, itd. Nacrtajte sve slučajeve.

2) U slučaju 0 zajedničkih tačaka, prave određuju 4 oblasti. U slučaju 1 i 2 zajedničke tačke, one određuju 6 oblasti.

3) Pokažite particiju ravni u svakom slučaju.

8. 1) 1, 4 ili 6 (sl. 24).



Slika 24

2) U prvom slučaju dve oblasti (dve poluravni). U drugom slučaju deset oblasti. U trećem slučaju može se dogoditi:

(1) da 4 prave obrazuju dva para paralelnih;

(2) da su samo 2 prave paralelne;

(3) da figura ne sadrži paralelnih pravih.

Izbrojte svaki put oblasti.

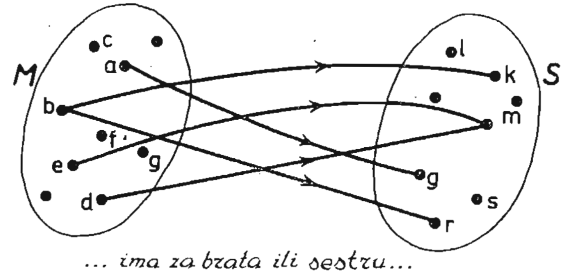
9. (1) $\{s\}$; (2) $\{s\}$; (3) C.

12. Pročitajte ponovo § 2.7. Uostalom tvrđenje pod 3) „govori“ sve.

GLAVA V

§ 5.1.

4) Jedan od mogućih slučajeva prikazuje crtež 25. Znači, neki đaci množine M imaju brata ili sestru u množini S. Preciznije, za neke elemente množine M može se reći, tvrditi „. . . ima za brata ili sestru . . . u množini S“.



Slika 25

§ 5.3.

3) Problem ima više rešenja. Pokušajte da nađete bar jedno. To nije lako za onoga koji nailazi na teškoće u pogledu deljivosti brojeva (glava XVII). Ali na osnovu autorovih „radnih sveski i zbirki zadataka“ za III i IV razred osnovne škole (Beograd, 1967. godine), svako može naći jedno rešenje. U svakom slučaju to je jedan od značajnijih problema i ne treba preći preko njega.

4) $\boldsymbol{R}=\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 350), (1, 0), (2, 2), (2, 6), (2, 350), (2, 0), (3, 3), \ldots, (3, 0), (5, 5), \ldots. (7, 7), (7, 350), (7, 0), \ldots, (350, 350), (350,0)\}$.

Napišite tako da svi elementi (uređeni parovi) budu napisani.

§ 5.4.

1. 1) U množini B, jer u porodici može biti i članova koji ne mogu sebe da izdržavaju (deca, starci). Prikažite tu relaciju u množini A i u množini B.

2) Jeste. Zašto? 4) Videti § 4.5, posledica definicije 2.

2. 2) Svaka je antirefleksivna jer:

(1) nijedan stanovnik ne može biti stariji od sebe;

(2) nijedna žena ne može biti sebi sestra;

(3) u ravni ne postoji „ispred“.

3. 1) Nije refleksivna jer nedostaje par (3, 3). Nije antirefleksivna jer ima parove (2, 2) i (5, 5).

2) $\boldsymbol{R}=\{(b, b), (b, g), (b, m), (g, g), (g, b), (g, m), (m, m), (m, b), (m, g)\}$.

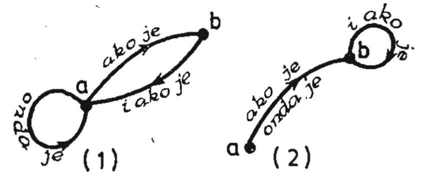
Relacija je, dakle, refleksivna.

3) Relacija je antirefleksivna (nijedan element ne može da bude mlađi od sebe).

4) Nije ni refleksivna ni antirefleksivna. Vidi pod 1).

5) Svaki proizvod $A\times B$, $C\times D$, $E\times F$, uopšte $X\times Y$, je refleksivna relacija.

4. 2) Nije tranzitivna. 3) i 4) Jeste. Obrazložite. 5) Prva jeste, druga nije. 6) Jeste. 7) (1) $a\boldsymbol{R}a$ [sl. 26 (1)]; (2) $a\boldsymbol{R}b$ [sl. 26 (2)]; (3) $a\boldsymbol{R}b$; (4) $a\boldsymbol{R}a$. *Treba „zapamtiti" te specijalne slučajeve.*



Slika 26

8) Nije. Samo nenaviknuti čitalac se može zbuniti, jer iz $x\boldsymbol{R}y$ i $y\boldsymbol{R}z$ sledi $z=x$. A iz $x+y=7$ i $y+x=7$ ne sledi $x+x=7$.

5. 3) **Definicija 4.** — *Ako relacija $\boldsymbol{R}$ sadrži par (y, x), kad god sadrži par (x, y) ona je simetrična.*

Ili: *Ako iz $x\boldsymbol{R}y$ sledi $y\boldsymbol{R}z$, relacija $\boldsymbol{R}$ je simetrična.*

6. 1) **Definicija 5.** — *Ako relacija nikad ne sadrži recipročne parove (x, y) i (y, x), kad je $(x\neq y)$, ona je antisimetrična.*

2) Svaka od tih relacija je antisimetrična.

3) Antisimetrična je, npr. $5 \mid 20$, a $20 \nmid 5$. 4) Nije.

5) Nije simetrična, jer ne sadrži i recipročni par (d, c). Ali nije ni antisimetrična, jer sadrži (a, b) i (b, a).

§ 5.5.

1. R i R^{-1} su međusobno recipročne relacije. Prikažite ih strelicama u dve boje (npr. R crvenom a R^{-1} zelenom bojom) i proverite iskazana tvrđenja. Ili, nacrtajte sagitalnu šemu refleksivne relacije i pokažite da je i recipročna relacija refleksivna. Nacrtajte sagitalnu šemu tranzitivne relacije i pokažite da je i recipročna relacija tranzitivna. I tako dalje.

2. 2) $R=\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, m), (b, c), (b, d), (b, m), (c, d), (c, m), (d, m)\}$. Mrežu analogno sl. 5.1 (2).

3) Ona je antirefleksivna (nema nijedne alke), antisimetrična (ne sadrži recipročne prave, tj. nema dvostrukih, povratnih strelica), tranzitivna je [kad god su (x, y) i (y, z) njeni parovi, uvek je i (x, z) njen par]. Je li sve to tačno?

3. U najopštijem slučaju takva šema sadrži: tačke iz kojih ne polazi nijedna strelica; tačke iz kojih polazi samo jedna strelica; tačke iz kojih polazi više strelica; tačke u koje dolazi samo jedna strelica; tačke u koje dolazi više strelica; tačke u koje ne dolazi nijedna strelica; tačke iz kojih ne polaze i u koje ne dolaze strelice. To nije težak ali je vrlo instruktivan zadatak. Dobro sredstvo za kontrolu stečenih znanja.

Sadrži li vaša šema: alke, recipročne (simetrične) parove; tranzitivne triplete?

4. I to je vrlo instruktivan primer.

5. Slika 27. Obrazložite.

6. Ako ste relacije pravilno prikazali, karakteristike njene sagitalne šeme jesu: (1) Ima tačaka iz kojih ne izlaze i u koje ne ulaze strelice. (2) Iz jedne tačke izlazi samo jedna strelica. (3) Nema nijedne alke. (4) Ne sadrži recipročne elemente (tj. relacija nije . . .). (5) Nema tranzitivnih tripleta. Obrazložite svako od tih tvrđenja.

7. 1) To je simetrična relacija. $\boldsymbol{R}^{-1}$ nacrtajte pisaljkom druge boje. $\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}$. Ako to nije sasvim jasno, napišite njihove grafove:

$\boldsymbol{R}=\{(a, g), (g, a), (a, r), (r, a), (r, g), (g, r), \dots\}$

$\boldsymbol{R}=\{(g, a), (a, g), \dots\}$.

Slika 27

2) Je li sad $\boldsymbol{R}$ simetrična i zašto? Obrtanjem strelica lako dobijate $\boldsymbol{R}^{-1}$, ali da li ona glasi: „. . . ima za brata . . .", „. . . ima za sestru . . ."?

9. 1) Uočite množine $A=\{1, 3, 9, 27, 81\}$ i $B=\{5, 7, 13, 31, 85\}$. Vidite da $\boldsymbol{R}_1$ glasi „. . . je za četiri manje od . . ." od A ka B. Ona je antisimetrična.

Ispitajte $\boldsymbol{R}_2$. U $\boldsymbol{R}_1$ karakteristični su prvi članovi: 1, 3, 9, 27, 81, ali to ne igra nikakvu ulogu u relaciji.

2) $\boldsymbol{R}_1^{-1}=\{(5, 1), (7, 3), \dots\}$

$\boldsymbol{R}_{+2}^{-1}=\{(1, 0), (5, 2), \dots\}$. Dovršite i iskažite rečima.

10. 1) x deli y ili x je delilac y, tj. $x \mid y$. Ta je relacija refleksivna.

2) $\boldsymbol{R}^{-1}$ označava relaciju: „y je deljiv brojem x", ili „y je multiplum x". Je li ona refleksivna.

Činjenice **11**, **12**, . . . , **16** su veoma važne. Treba svaku obrazložiti.

11. Podsećamo da smo slovom $\boldsymbol{D}$ označili množinu pravih u ravni (Π). Relacija $\parallel$ (paralelnosti) u Π je: refleksivna, simetrična i tranzitivna.

12. Antirefleksivna i simetrična.

13. U množini N relacija $\mid$ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

14. Relacija $\subset$ je refleksivna i tranzitivna.

15. Relacija $=$ je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

16. Nije simetrična jer iz, na primer, $5\leqslant 7$ ne sledi $7\leqslant 5$.

Antisimetrična je, jer $(x\leqslant y$ i $y\leqslant x) \Rightarrow x=y$.

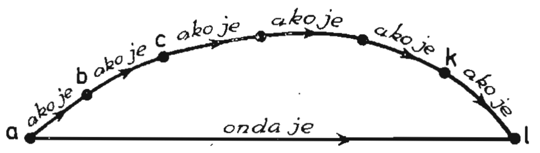
Tranzitivna je, jer, npr., $(3\leqslant 5$ i $5\leqslant 9) \Rightarrow 3\leqslant 9$.

Relacija je i refleksivna. Zašto?

17. Sigurno je refleksivna. (Videti § 5.4, t. **5.1**.)

18. U opštem slučaju nije. Pomislite samo na triplet: žena, muž, svekrva (ili majka, sin, snaha).

19. Slika 28.



Slika 28

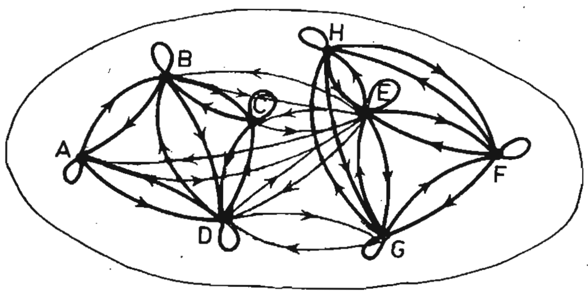
21. 1) Te činjenice (teoreme) su skoro očigledne, jer je drugi član svakog uređenog para (elementa) množine $\boldsymbol{O}$ različit od drugog člana svakog elementa množine $\boldsymbol{M}$. A (§ 3.1)?

$$(a, b)=(c, d) \text{ samo kad je } a=c \text{ i } b=d.$$

2) Isti razlog jer ako je (x, y) element relacije $\boldsymbol{R}$, onda je (y, x) element relacije $\boldsymbol{R}^{-1}$, a $(x, y)\neq(y, x)$.

3) $(\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{M})^{-1}$ su strelice koje polaze iz tačaka koje označavaju očeve ili majke, a dolaze u tačke koje označavaju sinove ili kćerke. Iz toga sledi i da je relacija S deo relacije $(\boldsymbol{O}\cup\boldsymbol{M})^{-1}$.

22. Slika 29, ali treba nacrtati još 8 strelica. Nacrtajte vodeći računa o boji. Nacrtajte sve prave date množine u Π.



Slika 29

23. (1) i (2). Relacija $\perp$ (odnosno $\|$) jednaka je recipročnoj relaciji (i obratno). To sledi iz simetričnosti (prethodne tačke **12** i **13**).

(3) Svaka relacija je množina. (Videti tačku **2.** 1.) Množine $\|$ i $\perp$ nemaju zajedničkih elemenata.

24. Tu treba samo pravilno pročitati: (1) Množina svih pravâ paralelnih pravi P je pravac (P). 2) Ako je $A\perp B$, sve prave pravca (A) (ili paralelne sa A) normalne su na svima pravama paralelnim sa B. I slično.

25. Tranzitivnost, ali to nije matematičko tvrđenje, jer se odnosi na ljude, a ne na matematičke objekte. I zaista, zar je uvek tako?

GLAVA VI

§ 6.3.

5. 2) Particija množine N modulo 2. Njene klase su parni i neparni brojevi. Odgovarajuća relacija ekvivalencije je „pripada klasi ostataka modulo 2".

3) $\boldsymbol{P}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$. $\boldsymbol{E}$=pripada klasi ostataka modulo 5.

5) (1) 13 kongruentno 4 modulo 3. 19 kongruentno 12 modulo 7;
(2) $\{1, 3, 5, \ldots\}$, $\{3, 7, 11, \ldots\}$, $\{7, 15, 23, 31, \ldots\}$;
(3) 5; 36.

8. Nije ni refleksivna ni tranzitivna (§ 4.11, tačka **5**).

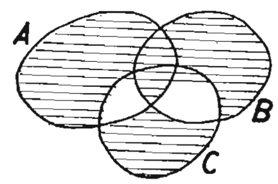
§ 6.4.

4. Iz 10 klasa $\{0, 10, 20, \ldots\}$, $\{1, 11, 21, \ldots\}, \ldots$

5. 1) $\{1, 6, 11, 16, \ldots\}$, $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}, \ldots$;
2) $\{0, 8, 16, 24, \ldots\}$, $\{1, 9, 17, \ldots\}, \ldots$ Koliko ih ima?

6. „. . . je isti model kao . . ."

7. Slika 30.



Slika 30

8. (1) Nema praznih oblasti;
(2) $B\setminus A=\varnothing$; (3) $A\setminus B=\varnothing$;
(4) $A\cap B=\varnothing$;
(5) $A\setminus B=\varnothing$; $B\setminus A=\varnothing$.

9. Jeste. Najveći mogući broj je 12. Najmanji je 1, tj. svi su đaci množine M rođeni istog meseca (slučaj kad je verovatnoća vrlo mala, jer se samo jednim čudom može to dogoditi, ali je ipak moguće).

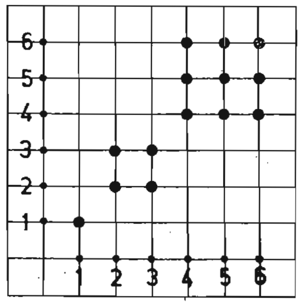
10. Na primer:

(1) $\boldsymbol{R}=\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c)\}$ i ona proizvodi particiju:

$$\boldsymbol{P}=\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\};$$

(2) $\boldsymbol{R}=\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ koja proizvodi particiju:

$$\boldsymbol{P}=\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}.$$



Slika 31

11. Slika 31. Graf relacije glasi:

$$\boldsymbol{R}=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (2, 3), (3, 2), \ldots\}.$$

Dovršite. Nacrtajte i njenu sagitalnu šemu.

12. Pošto je X element pravca (Z), a Z je element pravca (Y), to je $X \| Y$. Rasuđivanje se može napisati ovako:

$$\left.\begin{array}{l} X \in (Z) \Rightarrow X \| Z \\ Z \in (Y) \Rightarrow Z \| Y \end{array}\right\} \Rightarrow X \| Y \text{ (na osnovu tranzitivnosti).}$$

13. (A) i (B) su pravci. Zato: u prvom i trećem slučaju je $X \| Y$; u drugom X i Y se seku. U stvari, samo u drugom slučaju je $(A) \nparallel (B)$.

14. a je manje od b, a veće od c. Ili, c manje od a, a manje od b. Dakle $c<a<b$. Relacija $<$ ne može biti ekvivalencija, jer nije refleksivna (ne može biti $a<a$) i nije simetrična (ako je $a<b$, ne može biti $b<a$).

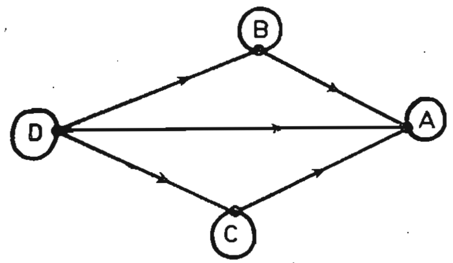
15. a je najveće, d . . . **16.** To smo već imali.

17. Iz datog uslova sledi $A \nparallel B$. Jer ako bi bilo $A \| B$, onda bi bilo $(A) \cap (B) \neq \varnothing$.

GLAVA VII

§ 7.1.

3. 3) Jeste. 4) Nije. 5) Obe relacije se konkretizuju istom šemom:



Slika 32

Kako nijedna strelica ne vezuje elemente B i C, *svaki red koji određuje svaka relacija* ($\subset$ *i* |) *je parcijalan.*

§ 7.3.

2. 3) $p<a$, $b>a$, $x \leqslant a$, $a \leqslant a$; $a>p$, $a \geqslant p$, $a \geqslant x$, $a \geqslant a$.

4) Kad x nije veći od a i a nije veći od x, onda ostaje samo $a=x$. Inače, to se čita, na poznati način: Iz . . . i . . . sledi . . . (implikacija).

§ 7.4.

3. 4) Zato što klase imaju zajednički element a.

5) Sad nije ispunjen treći (3) uslov particije (§ 2.7, t. **1**).

Oba ta zadatka smo imali i ranije. Gde?

4. Vodite računa o ranije navedenim simbolima. Posmatrajte slučajeve otvorenih i zatvorenih polupravâ.

A_1 i A_2 su poluprave (delovi) iste prave, jer A_1, $xA_2 \subset A$, a $A \| A$.

5. (1) Poluprave su otvorene i imaju zajednički početak a.

(2) Koji je početak poluprave ba? [A poluprave bc]? Prva je otvorena a druga je zatvorena i imaju zajedničku tačku b.

(3) U ovom slučaju poluprave nemaju zajednički početak. ab[je otvorena, a . . .

§ 7.5.

2. 1) Duži su paralelne (perpendikularne) ako su delovi paralelnih (perpendikularnih) pravâ.

3. $[aa] = \{a\}$. $[aa] = \varnothing$.

§ 7.6.

1. 2) (1) (b, c, a) i (c, a, b); (2) (c, b, a) i (b, a, c).

§ 7.7.

2. A, C, G. Zašto ostale nisu konveksne?

4. Jeste. Dokaz: Neka su x i y dve ma koje (razne) tačke preseka množina A i B (sl. 7.21). Treba dokazati da taj presek sadrži duž $[xy]$.

Iz uslova sledi da x, y pripadaju i množini A i množini B. A kako su A i B konveksne množine, $[xy]$ je sadržana i u A i u B, tj. u njihovom preseku.

Simbolima:

Iz $x, y \in A \cap B$ sledi $x, y \in A$ i $x, y \in B$. Iz toga, pak, i iz uslova, da su A i B konveksne množine, sledi $[xy] \subset A \cap B$. A to je, po definiciji (t. **1**), uslov konveksnosti.

§ 7.9.

1. (1) Parcijalni red, jer je relacija refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, ali ne sadrži uređeni par dva elementa (nije koneksna). (2) Totalni red. (3) Nije šema relacije reda jer nije tranzitivna (potrebne su još dve strelice. Nacrtajte ih.) (4) Nije relacija reda, jer nije antisimetrična (ali je koneksna).

2. Odbacite jednu strelicu i dodajte jednu strelicu (jer relacija mora biti antisimetrična i tranzitivna).

3. Nacrtajte strelice koje određuju pojedini parovi. Da bi bila relacija poretka, ona mora biti refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

4. Relacija mora biti refleksivna što znači da u svakoj od tačaka koje figurišu u datoj relaciji treba nacrtati alku. Ona mora biti tranzitivna. Zato treba nacrtati još strelicu (5, 7).

5. Da bi bila šema parcijalnog reda, ona mora biti: (1) refleksivna i zato treba nacrtati alku u svakoj tački; (2) antisimetrična (taj uslov je zadovoljen); (3) tranzitivna i zato treba nacrtati još dve strelice.

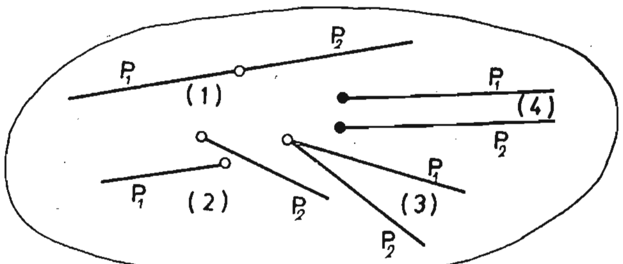
6. 1) Iz šeme se vidi da je to relacija reda, ali ne totalnog. Da se dobije R^{-1}, treba nacrtati crvene alke u svima tačkama i crvene strelice (4, 2), (4, 3), (3, 2).

2) $R \cup R^{-1} = \{(1,1), (2,2), \ldots, (4,2)\}$. [Napišite sve.]
$M \times M = \{(1,1), 1,2), \ldots, (4,4),$ [Napišite sve.]

pa je: $R \cup R^{-1} \subset M \times M$.

7. 1) Relacija je totalnog poretka. Obrazložite.
3) $R \cup R^{-1} = M \times M$. Obrazložite.

9. Slika 33.



Slika 33

10. Ne zaboraviti da prvo slovo označava „levu" tačku, a da slovo do zagrade označava početak poluprave. Lakše je ako tačke koje pripadaju (sadržane, uključene tačke) nacrtate plavom ili crnom pisaljkom a nesadržane — crvenom. Morate napraviti 4 crteža.

11. (1) $\varnothing$; (2), (3) i (4) $\{a\}$.

12. Većina tih primera data je u § 4.11, t. **10** i t. **11**. Treba ih sad rešiti ponovo, ne gledajući tamo.

(10) P_2; (11) P_4; (12) P_3; (13) P_2; (14) P_1.

13. $[aa]$ je nula duž pa je $\| \ldots$

14. (1) $[ab]$; (2) $]ab[$; (3) $[ab[$; (4) $]ab[$; (5) $]ab]$; (6) $[ab[$; (7) $[ab]$; (8) $]ab[$. Vidite i uputstvo uz **10.** tačku.

15. 1) $x \geqslant x$ ili $x \leqslant x$; $x > a$; $a < x$; $b > a$; $x < b$; $b \geqslant b$, ili . . .

2) (1) Ne možemo jer a je početak, a b se nalazi iza a (desno). (2) Ne možemo. 3) Možemo. $[bx] = \{y \in P | b \geqslant y \geqslant x\}$.

4) (1) $\{x\}$; (2) $]ax[$; (3) $\overline{xb}$ je dopunska (komplementarna) množina, § 2.5, množine xb i zato je presek $ya]$, gde je $y < a$. (4) ya [i] bz; 5) $\{[ax[, \{x\},]xb]\}$, jer (§ 2.7):

(1) nijedna klasa te particije nije prazna;
(2) klase nemaju zajedničkih elemenata;
(3) $[ax[\cup \{x\} \cup]xb] = [ab]$.

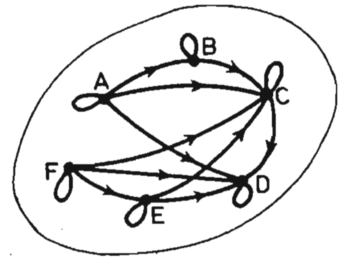
16. Nacrtajte tri-četiri takva intervala. Rasuđujte na njima, pa ćete dobiti, na primer:

(1) $]ab[\cap]cd[\cap]ef[=]af[$; (3) Otvoren;
(2) $[ab] \cap [cd] \cap [ef] = [af]$; (4) Zatvoren.

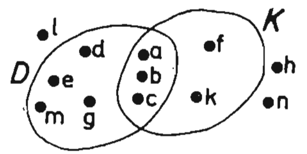
17. 2) Slika 34. 3) Relacija parcijalnog reda.

19. 1), 2), 4) Jeste. 3), 5), 6), 7) Nije.

20. 1) $c \in]K_u[$; $a \notin]K_s[$; $[K_u] \not\subset [K_s]$;
2) $x \in K$, $y \notin K$;
3) (1) K; (2) $[K_u] \setminus \{c\}$;
(3) $]K_u[$; (4) $\varnothing$.



Slika 34



Slika 35

21. Slika 35.

22. (1) $[K_p]$; (2) $]K_p[$; (3) jedna particija.

23. 1) (1) $\varnothing$; (2) $]A_u[$; (3) $]B_u[$; (4) $\varnothing$; (5) $[K_p]$.
2) (1) $[A_u] \subset [B_u]$ i $[A_u] \not\subset [B_u]$;
(2) $[A_u]$ i $\varnothing$; (3) $[B_u]$ i $[A_u] \cup [B_u]$.

24. 1) $\{c\}$ je krug centra c i poluprečnika nula.
2) (1) $\{c\}$; (2) $[K_n]$; 3) (1) K; (2) K.

26. 1) $\{x\}$; 4) $P_1 \cup P_2$.

27. (1) i (2) $\subset$; (5) $P_r \not\subset R$.

28. 1) $R \cap P_r = Q$; $P \cup P_r = P$; $T_k \setminus T_s = \overline{T_s}$, ako je osnovna množina T_k, jer $T_s \subset T_k$, pri čemu T_k označava množinu jednakokrakih trouglova.

2) (1) jednakokraki ne-pravougli trougao:;

(2) jednakostranični pravougaonik, tj. kvadrat;

(3) jednakokraki pravougli trougao;

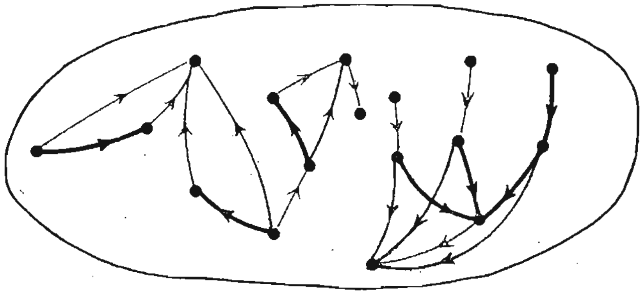
(4) ono što se nekad zvalo „romboid“;

(5) prazna množina. Zašto?

GLAVA VIII

§ 8.1.

1. Slika 36.



Slika 36

§ 8.2.

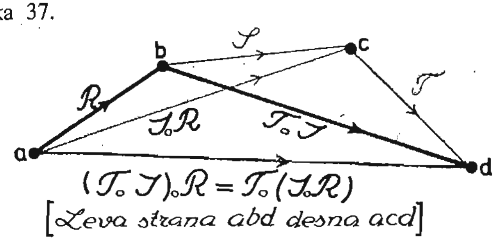
1) (1) „... ima za babu po majci...“

(2) „... ima za prababu po majci...“

(3) „... ima...“

§ 8.3.

3. 3) Slika 37.



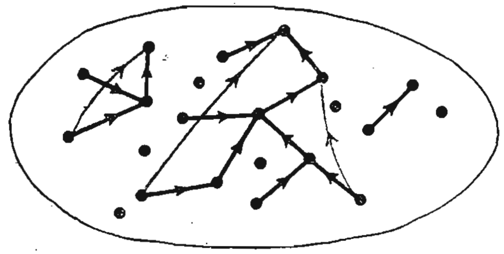
Slika 37

§ 8.5.

1. (1) Žena ... ima za unuka od sina ...
(2) Čovek ... ima za unuka od kćeri ...
(3) Žena ... ima za unuka od kćerke ...

2. (1) ... ima za pradedu očevog dedu po ocu ... ; (2) Isto.
(4) ... ima za prababu maminu babu po majci ... ;
(5) ... ima za pradedu maminog dedu po ocu ... ;
(6) ... ima za prababu očevu babu po ocu ... ;
(9) ... ima za pradedu očevog dedu po majci ...

3. Na sl. 38 plava strelica označava M^2, zelena M^3, crvena M^4. $M^5 = M^6 = \ldots = \varnothing$. Nacrtajte sve plave, sve zelene i sve crvene strelice.

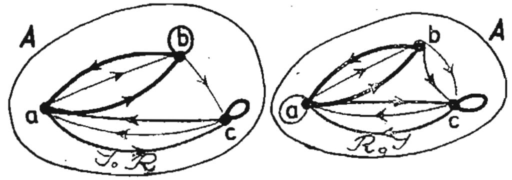


Slika 38

4. Slika 39. Nužno je da ih sami nacrtate uzimajući u obzir ove „elementarne“ kompozicije:

(1) $(b, c)\circ(a, b)=(a, c)$; (4) $(b, a)\circ(a, b)=(a, a)$;
(2) $(a, c)\circ(a, a)=(a, c)$; (5) $(a, a)\circ(a, a)=(a, a)$.
(3) $(b, b)\circ(a, b)=(a, b)$;

kojima se treba uvek služiti.



Slika 39

Da je (b, c) element relacije $R\circ S$, sledi i iz $(c, c)\circ(b, c)$ [videti (3)] i iz $(c, a)\circ(a, b)$.

Taj primer treba dobro proučiti.

5. Prvo iskažite relaciju R rečima. $R^2=\{(1, 4), (2, 8), (3, 12)\}$. $R \circ R \circ R=\{(1, 8)\}$.

6. $<^2=\{(7, 14), (12, 49)\}$. $<^3=\{(7, 49)\}$.

7. $R^{-1} \circ R=\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g)\}$.

8. 1) Prema formulama, t. **4** i $R^{n+1}=R^n \circ R$, dobijamo:

(1) $(b, c)\circ(a, b)=(a, c)$, $(c, d)\circ(b, c)=(b, d), \ldots$ elemente relacije C^2;

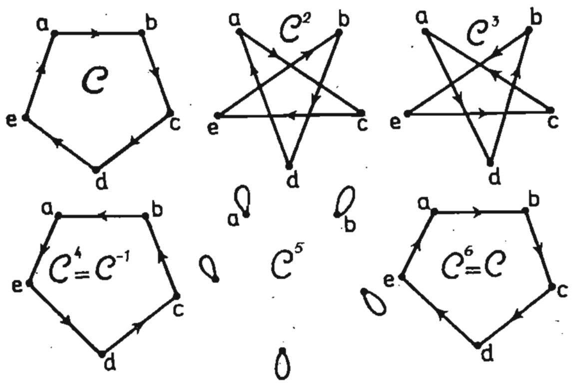
(2) $C^3=C^2 \circ C$, pa su $(b, d)\circ(a, b)=(a, d)$, $(c, e)\circ(b, c)=(b, e)$, $(d, a)\circ(c, d)=(a, c), \ldots$ elementi relacije C^3;

(3) $C^3 \circ C=C^4$ pa su $(b, e)\circ(a, b)=(a, e)$, $(c, a)\circ(b, c)=(b, a)$, $(d, a)\circ(c, d)=(c, a)$, $(e, c)\circ(d, e)=(d, c), \ldots$ elementi relacije C^4;

(4) $C^5=C^4 \circ C$, pa su $(b, a)\circ(a, b)=(a, a)$, $(c, b)\circ(b, c)=(b, b)$, $(d, c)\circ(c, d)=(c, c), \ldots$, elementi relacije C^5;

(5) $C^6=C^5 \circ C$, pa su [t. **4** (2)] $(a, b)\circ(a, a)=(a, b)$, $(b, c)\circ(b, b)=(b, c)$ $(c, d)\circ(c, c)=(c, d), \ldots$ elementi relacije C^6, to jest $C^6=C$.

Sve to pokazuju i sagitalne šeme.



Slika 40

I iz njih i iz elemenata vidi se i to da je $C^3=(C^2)^{-1}$, $C^4=C^{-1}$, a C^5 je identična relacija. Na osnovu toga možete neposredno napisati relaciju (i nacrtati njenu šemu):

$$C^7,\ C^8,\ C^{12},\ C^{17},\ C^{19},\ C^{100},\ C^{1002}, \ldots$$

Učinite to.

Relacija $C=\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\}$ je jedna *ciklička relacija*.

Neka je data ciklička relacija:

$$C=\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, a)\}.$$

Nacrtajte njenu sagitalnu šemu, a zatim i šemu relacije:

$$C^2,\ C^3,\ C^4,\ C^5,\ C^6,\ C^7,\ C^8,\ C^{10},\ C^{98},\ C^{100\,002}.$$

Ako u tome uspete, možete biti sigurni da ste ušli u elementarnu kompoziciju relacija.

10. $\perp^7=\perp$ [vidi formule pod 3 prethodnog §].

11. 1) „Neposredno" znači prvo odrediti relaciju ($\parallel$ ili $\perp$) između odgovarajućih pravâ „računski", pa onda crtati (a ne crtanjem određivati njihov međusobni položaj).

2) Prvo „nacrtajte" prave A, B, C, D. Iz crteža se odmah vidi:

	A	B	C	D
A	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$	$\perp$
B	$\perp$	$\parallel$	$\perp$	$\parallel$
C				
D				

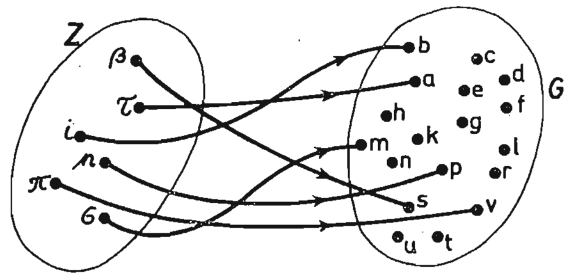
Dovršite.

12. Imate $(c, a)\circ(b, c)=(b, a)$, $(d, b)\circ(c, d)=(c, b)$, itd.

GLAVA IX

§ 9.1.

1. 4) Slika 41.



Slika 41

4. Nije, jer O^{-1} glasi „. . . je otac . . .", a mnogi ljudi imaju više od jednog deteta.

5. To je druga definicija funkcije, ekvivalentna prethodnoj, jer ako $R(x)$ nije singleton ili prazna množina, iz x polazi više strelica.

3) (2) Kao pod (1): f(Italija)=Rim; Pariz=f(Francuska).

4) Slično prethodnom:

h(Brisel)—Belgija;

h(Lenjingrad)=h(Odesa)=h(Harkov)=SSSR;

i tako dalje.

5) Pročitajte još jednom t. **3**. prethodnog §.

(1) $f(3)=3+5=8$, $f(17)=22, \ldots$;

(2) Broj 5, tj. $f(0)=0+5=5$; (3) $f(1)=1+5=6, \ldots$;

(4) $f(x)=8$, $x+5=8$, $x=3$;

(5) $f(a)=73$, $a+5=73$, $a=68$;

(6) $f(p+3)=p+3+5=p+8$; $f(3p)=3p+5$.

Pod (4) i (5) data je vrednost funkcije pa se traži tačka (element). Nekoliko uređenih parova te funkcije jesu:

$$(0,5),\ (1,6),\ (2,7),\ (3,8), \ldots$$

6) Između tih vežbanja i prethodnih nema bitne razlike. Odgovorite na svako:

(4) Na nulu jer je 3 puta $0 \ldots 0$; (5) 0.

7) (1) $s(5)=25$; $s(1)=1$.

(2) $s(w)=16$, $w=4$; (3) $s(72)=2\cdot u\cdot u=2\cdot u\cdot u=2u^2=2\cdot 6^2$.

§ 9.3.

1. Ako su (x_1, y_1) i (x_1, y_2) elementi (uređeni parovi) iste funkcije, onda su njene „dve" vrednosti $f(x_1)=y_1$ i $f(x_1)=y_2$ jednake.

Zaista, u određenoj tački x_1 (za određeni polazni element) funkcija ima jednu jedinu vrednost.

3. Singleton, što sledi iz definicije funkcije. Videti prethodnu t. **1**.

4. Tada se definiše: $f(A)$ je prazna množina, tj. ako je $A=\varnothing$, i $f(A)=\varnothing$.

5. (1) Označava funkciju f napisanu kao množinu uređenih parova, tj. neekstenzivni graf funkcije f. To smo već činili u § 9.2, pod 1).

(2) Kao i pod (1), f je množina svih uređenih parova (x, y) gde je x element definicione oblasti A, a y je slika x (iksa), tj. vrednost funkcije f u tački x.

(3) Isto, samo je sad definiciona oblast množina prirodnih brojeva.

Videti i § 9.7, t. **3**.

2. 1) (1) $f(2)=4$, $f(3)=6, \ldots$ $f(13)=26$, $g(10)=15, \ldots$;

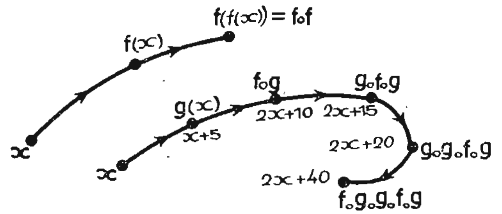
(2) $(g\circ f)(2)=g(4)=9$, $(g\circ f)(3)=g(6)=11$

$$\left.\begin{aligned} g\circ f\colon\ & g(f(2))=g(4)=9\\ & g(f(5))=g(6)=11\\ & g(f(5))=g(10)=15.\end{aligned}\right\}\ \text{Uopšte je } g\circ f\colon\ x\to 2\cdot x+5.$$

$$\left.\begin{aligned} f\circ g\colon\ & f(g(2))=f(7)=14\\ & f(g(3))=f(8)=16\\ & f(g(5))=f(10)=20.\end{aligned}\right\}\ \text{Uopšte je } f\circ g\colon\ x\to (x+5)\cdot 2.$$

2) (1) $x\to 2\cdot 2x=4x$; (3) $x\to(x+5)+5=x+10$;

(2) $x\to 2\cdot(2\cdot 2x)=$ (4) $x\to\{[(x+5)\cdot 2+5]+5\}\cdot 2$.



Slika 42

3. 1) $f\circ h$: $x\to(2x)^2$; $h\circ g$: $x\to(x+5)\cdot 2$;

$h\circ g\circ f$: $x\to(x^2+5)\cdot 2$; $f\circ g\circ h=(2x+5)^2, \ldots$;

2) $f\circ h$: $f(h(0))=f(0)=0$, ili $(2\cdot 0)^2=0$

$f(h(1))=f(2)=4$, ili $(2\cdot 1)^2=4$

$f(h(5))=f(10)=100$, ili $(2\cdot 5)^2=$

$h\circ g$: $h(g(0))=h(5)=10$, ili $(0+5)\cdot 2=10$

$h(g(2))=h(7)=14$, ili $(2+5)\cdot 2=14$.

Dovršite.

§ 9.5.

2. (1) Šema 9.5: Ima automobila raznih maraka, ali ima i iste marke: to su oni čiji se krajevi završavaju u istoj tački („višestruke tačke" množine M). Zatim neke marke nisu zastupljene, jer ima „slobodnih" tačaka (one u koje ne dolaze strelice) množine M.

(2) Šema 9.6: Ima i kola iste marke (M ima i „višestrukih tačaka"), ali *nema* slobodnih tačaka u M.

Šema 9.7: Svaki automobil je druge marke (M nema „višestrukih tačka"), ali ima i nezastupljenih maraka (u M ima i slobodnih tačaka).

Šema 9.8: prikazuje situaciju na jednom sajmu (ili izložbi) kola: od svake marke ima samo po jedan automobil (tj. M nema ni višestrukih, ni slobodnih elemenata).

3. 1) Ako je K množina karata, J množina igrača, onda imamo slučaj aplikacija *na* u momentu koji sledi odmah posle deljenja karata. Dok se još dele, je . . .

2) Aplikacija *u* k: $N \to N$. 3) Bižekcija.

4) (1) Kad nema dva ista prezimena, ona je bižekcija. Zašto ne može da bude aplikacija *u*?

(2) Ako je đak Milovanović, onda je $f(t)=$ Milovanović.

(3) f^{-1} je aplikacija (uopšte funkcija) samo kad f nije aplikacija, *na* tj. (u ovom slučaju) kad je f bižekcija.

6) Bižekcija.

7) (1) Bižekcija u množini N, jer $2N$ označava množinu parnih brojeva. Prikažite njenu (delimičnu) sagitalnu šemu.

(2) Aplikacija *u* u množini N. Nacrtajte sagitalnu šemu.

8) $h=\{(a, (a, 7)), (b, (b, 7)), (c, (c, 7)), (d, (d, 7))\}$.

To je, dakle, bižekcija, čiji su dolazni elementi: $(a, 7)$, $(b, 7)$, . .

4. Jeste. Dijagram (sagitalna šema) pokazuje to očigledno.

5. Tada *g∘f je bižekcija* $A \to C$. Nacrtajte dijagram.

§ **9.6.**

4. 3) Projekcije pravih A i B su tačke (njihovi preseci sa P), projekcija svake druge prave koja nije paralelna sa A $[\notin (A)]$ jeste P.

4) Treba konstruisati prave pravca (A) kojima pripadaju krajevi svake duži, odnosno krajevi prečnika paralelnog sa P. Njihovi preseci sa P . . .

§ **9.7.**

2. Osim druge, u drugom redu, sve su šeme funkcija.

3. (1) Slika 43.

(2) Definiši množ. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, množ. slika $\{1, 2, 3\}$. Prikažite kao pod (1).

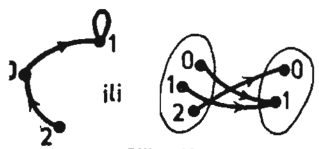
(3) Vidi § 9.3, t. **5**. Definiciona (polazna) množina je N. Množinu slika dobijamo ovako:

$x=0, \quad y=0+1=1$

$x=1, \quad y=1+1=2$

$x=2, \quad y=4+1=5.$

. . . .



Slika 43

Prema tome, množinu slika čine brojevi:

1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, . . .

tj. brojevi čije razlike čine množinu neparnih brojeva:

1 3 5 7 9, . . .

(5) Definiciona množina je $\{1, 2, 3, \ldots\}$, a . . .

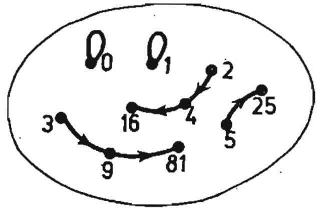
4. (1) To je transformacija $H = H \to H$.

(2) Nije funkcija. Zašto?

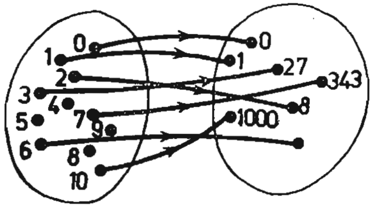
5. Napravite sagitalnu šemu pa ćete videti: Najčešće f nije funkcija, jer Mihajlo Nedeljković i Mihajlo Simić pokazuju da iz tačke „Mihajlo" izlaze dve strelice. Iz istih razloga f^{-1} ne mora biti. Ali ima odeljenja u kojima je ili f ili f^{-1} funkcija. (Vidi § 9.5, t. **3**, 4).

6. Na primer $B=\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Nacrtajte sagitalnu šemu.

7. Može na razne načine; na primer: $f=\{(1, 2), (2, 5), (3, 7), (4, 6), (5, 4), (6, 3), (7, 1)\}$, $f^{-1}=\{(2, 1), (5, 2), (7, 3), \ldots\}$.



Slika 44



Slika 45

8. 1) Slika 44 koju treba dovršiti. 2) Slika 45. Dovršite. Napišite: $f=\{(0, 0), (1, 1), (2, 4), \ldots\}$; $g=\{\ldots\}$.

3) (1) $x=20$ jer je $20 \cdot 20=400$; (2) $y=8$, jer je $8^3=512$; (14) $z=7$; (15) $z=9$. $z^2+2z=z(z+2)=$ proizvod dva prirodna broja između kojih . . . Tako se rešavaju svi primeri počev od (12). Ali mogu se rešiti (formalno) i kao kvadratne jednačine.

Treba pisati i ovako (što je vrlo važno):

$f(x)=400 \quad f(x)=20^2 \quad x=f^{-1}(20^2)=20$

$g(y)=512 \quad g(y)=8^3 \quad y=g^{-1}(8^3)=8;$

. . . .

$h(z)=35 \quad h(z)=5 \cdot 7 \quad z=h^{-1}(5^2+2 \cdot 5)=5;$

. . . .

9. 2) f^{-1} je funkcija $N \to N$, a ne aplikacija, jer nije definisana u svakoj tački. Definisana je $y=7$, 14, 21, . . .

f^{-1}: $7N \to N$ je aplikacija.

10. $g(0)=7$; $g\{3\}=\{18+7\}=\{25\}$; $g\{2, 3, 5\}=\{19, 25, 42\}$; . . .

11. $h(2N)=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, tj. množina neparnih brojeva (jer u $x+1$ treba stavljati samo parne brojeve, tj. $h(2N)$: $x \to 2x+1$).

12. 1) f, g i h su funkcije. f i h su bižekcije. Šta predstavlja crtež 46? Nacrtajte šeme ostale dve funkcije. Zašto s nije funkcija? U kom su srodstvu h i s?

2) Unija i presek relacija izračunavaju se kao i unija i presek ma kojih drugih množina:

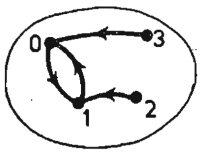
$f \cup s = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (1, 0), (0, 3)\}$.

I ona nije funkcija, jer sadrži parove $(1, 2)$ i $(1, 0)$.

$g \cap h = \{(1, 0)\}$ i on je . . .

Nacrtajte šeme te unije i tog preseka.

Jeste li primetili da je f ciklička relacija?



Slika 46

13. Unija nije uvek funkcija, a presek jeste. Sastavite primere.

14. 1) t: $N \to N$ je aplikacija, jer svaki prirodni broj ima svoj trostruki.

2) t: $N \to N$ nije bižekcija, jer nije svaki prirodni broj trostruki broj drugog prirodnog broja. Međutim:

t: $N \to 3N$: $x \to 3x$ je bižekcija,

jer je polazna množina N, a dolazna $3N$, pa svaki prirodni broj ima svoju sliku u $3N$ i obrnuto.

3) t^{-1}: $3N \to N$: $3x \to x$ je . . .

15. 1) i 2) To su bižekcije. Obrazložite: $g \circ f$: $N \to 6N$.

16. $h \circ g$: $x \to 8x$, $h \circ h \circ g$: $x \to 32x$, . . .

17. Nacrtajte sagitalnu šemu f. Iz nje ćete videti da ona nije ni aplikacija u, ni aplikacija na, ni bižekcija, jer u c dolaze dve strelice, a u e (dolazi) nula strelica.

18. Kad je $x=2$, $f(x)=1$. Kad je $x=3$, $f(x)=2$ . . . f je ciklička funkcija. Prema tome, i f^{-1} je . . .

19. Aplikacija na. Na primer, svi brojevi 3, 13, 23, 33, . . . imaju, u funkciji u, istu sliku 3.

20. $f(g(0))=f(0)=5$; $f(g(100))=f(500)=505$, . . .

$(g \circ f)(7)=g(12)=60$ ili $g \circ f$: $x \to 5(x+5)$, $5 \cdot 12=60$

$f(g(a))=5(a+1)$, $g(f(a))=5(a+5)$.

21. Nacrtajte prave ac i bd. Ako su te prave $\|$, svaka prava X koja je $\| ac$ a kojoj pripada tačka x duži $[ab]$ seče $[cd]$ u tački y. Tačka x se preslikava u y (ili obrnuto): bižekcija. Ako $ac \nparallel bd$, one se seku, tj. $ac \cap bd = \{p\}$. Tačka p i ma koja tačka x duži $[ab]$ određuju pravu koja seče $[cd]$ u y. (x, y) — opet bižekcija.

Treba nacrtati 3 crteža: jedan kad je $ab \| cd$, drugi kad je $ac \cap bd = \{p\}$, treći kad je $ad \cap bc = \{p\}$.

Ta je činjenica vrlo važna: Ona tvrdi da svakoj tački jedne duži odgovara tačka druge duži bez obzira kolike su te duži.

Dodatak 1:

Relacije i funkcije

4. 1) Dobro bi bilo da napišete sve elemente (uređene parove) proizvoda $A \times B$, ali je isto tako dobro da uočite (i da vežbate) takvo pisanje dugačkih izraza.

3) (1) § 5.2, t. **2**, sl. 5.3.

(2) Nacrtajte poluprave X i Y. Svaka od njih određuje dve poluravni: Pokažite zajednički deo (tj. presek) dveju od tih poluravni. Taj zajednički deo, tj. množina svih njegovih tačaka je „mreža“ proizvoda $X \times Y$. Prikažite nekoliko elemenata te mreže.

4) $$A^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_1, a_9),$$
$$(a_2, a_1), (a_2, a_2), \ldots, (a_2, a_9),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}.$$

Dovršite.

5) U tom slučaju umesto pravougaonika, prikazanog crtežom 5.3, jeste kvadrat.

5. 3) (1) Slika 5.3, tj. relacija prikazuje jednu oblast.

(2) „mreža“ je jedna linija.

6, 7, 8. Napišite odgovor na svako pitanje. Zatim svaki odgovor izrazite i simbolima.

Tek ako to učinite, možete smatrati da ste „savladali“ množine, relacije i funkcije (i da možete ići dalje).

Kad god budete, u daljem, nailazili na pozivanje (npr. § 8,3, t. **5**), a ne razumete „izlaganje“, obavezno pročitajte navedenu tačku, a po potrebi i „ceo“ paragraf.

Dodatak 2

Svi primeri od 1 do 20 su takvi da ih može i mora rešiti svaki potpuno samostalno. Oni koji posle toga slede preciziraju neke važne pojmove.

2. (1) $\{0, 4, 5, 6, \ldots\}$; (2) $\varnothing$; (4) $\{5\}$;
(7) $\{2N, 5, 15, 25, \ldots\}$; (8) $\{0, 10, 20, \ldots\}$.

4. (1) $A \neq B$; disjunktivne su (nemaju zajedničkih elemenata);
(3) $A \subset B$.

6. $\bar{A}$ (§ 2.5) označava dopunsku (komplementarnu) množinu množine $\bar{A}$ u odnosu na U.

12. „. . . je triput veći od . . .“. $(3a, a)$, $(6b, 2b)$, . . .

19. 5) Na primer „. . . pripada . . .“.

20. 1) f je funkcija od A ka B. 2) $f(a)=b$, $g(x)=2x+3$.

22. 1) $D=X$. 2) $N \setminus \{x \mid x>7\}$.

3) Pod uslovom da je svako dete dopratio najviše samo jedan roditelj. Aplikacija je kad . . .

4) Kad je manje učenika nego sedišta.

24. 1) To je identična aplikacija ili identična transformacija (§ 9.6, t. **3**).

25. 4) (2) Pođite npr. od 5:

$$h:\ 5 \to 10$$
$$k:\qquad 10 \to 13$$
$$f = k \circ h:\ 5 \longrightarrow 13.$$

Drugim rečima: $h(5)=10$; $k(10)=13$; $f(5)=k(h(5))=13$.

5) $g \circ h = g(h(a)) = g(2a) = 2\,(4a) - 9 = 8a - 9$

$h \circ g = h(g(b)) = h[2\,(4q-q)] = 8b - 18$

$g \circ k = g(k(x)) = g(x+3) = 4\,(x+3) - 9 = 4x + 3$

$k \circ g = k(g(y)) = k(4y-9) = 4y - 9 + 3 = 4y - 6.$

Opšti postupak: Prvu funkciju zdesna staviti umesto slova leve funkcije. To sledi i iz svega onog što je rečeno u glavi VIII i (posebno) u § 9.4.

GLAVA X

§ 10.1.

1. Bižekcija i ekvipotencija su sinonimi, ili, što je isto: *Postoji bižekcija* $A \to B$ i *množine* A i B *su ekvipotentne* jesu dva ekvivalentna tvrđenja, tj.

$$A \to B \Leftrightarrow A \sim B.$$

O implikaciji ($\Rightarrow$) i ekvivalenciji ($\Leftrightarrow$) kojima se služimo i u sledećoj tački data su prva obaveštenja u § 1.10.

2. Iako navedeni dokazi refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti ekvivalencije nisu potpuno rigorozni, mogu pričinjavati početniku izvesne teškoće. U tom slučaju neka se čitalac zadovolji intuitivnim shvatanjem:

(1) Svaka je množina ekvipotentna samoj sebi.

(2) Ako je A ekvipotentna množini B, onda i B je ekvipotentna množini A.

(3) Ako je A ekvipotentna množini B, a množina B je ekvipotentna množini C, onda su A i C ekvipotentne.

3. Ako ne možete neposredno, uzmite primere, prikažite ih crtežima i odgovorite na postavljeno pitanje (jer je to važna činjenica, koju ćemo kasnije koristiti.) Evo i dokaza:

Iz $A \sim B$ sledi bižekcija $A \to B$,

tj. ako je $\quad A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$

onda je $\quad a_1 \to b_1,\ a_2 \to b_2,\ a_3 \to b_3, \ldots$

Isto tako iz $C \to C$ sledi $c_1 \to c_1,\ c_2 \to c_2,\ c_3 \to c_3, \ldots$

A iz svega sledi bižekcija $A \cup C \to B \cup C$, tj. $A \cup C \sim B \cup C$.

§ 10.5

1. (1) Nije. Obrazložimo to uopšte, tj. pokažimo da

$$k(\{1, 2, \ldots, n\}) \neq k(\{0, 1, 2, \ldots, n\}).$$

Stavimo $A = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Očigledno je $B = A \setminus \{0\} \subset A$. Identična transformacija (alke, sl. 48) da između B i $A \setminus \{0\}$ postoji bižekcija, tj. $B \sim A \setminus \{0\}$, pa je $k(B) = k(A \setminus \{0\})$.

A kako A sadrži jedan element više od $A \setminus \{0\}$, to je obavezno $k(A \setminus \{0\}) < k(A)$, to jest, na osnovu poslednje jednakosti, $k(B) < k(A)$.

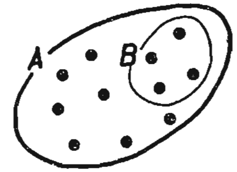
(2)—(5) Jeste.

2. (1) Primer tog slučaja prikazan je crtežom 47. On pokazuje da je $A \setminus B \cap B = \varnothing$ (jer $A \setminus B$ i B nemaju zajedničke elemente). S druge strane je $A \setminus B \cup B = A$. Iz te dve jednakosti sledi $k(A \setminus B) + k(B) = k(A)$. A odatle $k(A \setminus B) = k(A) - k(B)$.

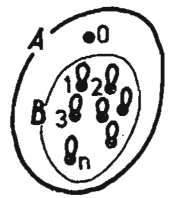
(2) Iz $A \subset B$ sledi $A \setminus B = \varnothing$, a odatle $k(A \setminus B) = k(\varnothing) = 0$.

(3) Nacrtajte dijagrame. $A \setminus B = A$ pa je $k(A \setminus B) = k(A)$.

Sva tri slučaja su (za kasnije operacije brojevima) vrlo važna.

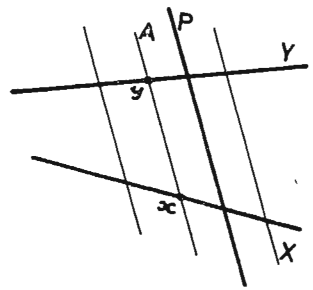


Slika 47

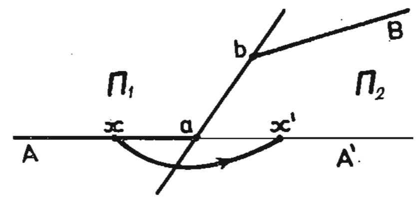


Slika 48

3. 1) Nacrtajte bilo koje dve prave X i Y i pravu P koja ih seče. Tada svaka prava $\| P$ seče i X i Y. (Zašto? Gde smo to ranije pokazali?) Neka je $A \| P$ i neka je $A \cap X = \{x\}$. Tada je $A \cap Y = \{y\}$. Znači, relacija „tačka ... prave X i tačka ... prave Y pripadaju istoj pravi pravca (P)" je bižekcija (tj. između tačaka prave X i prave Y postoji obostrana jednoznačna korespondencija), tj. $X \sim Y$ pa je $k(X) = k(Y)$. Dakle, sve prave imaju isti kardinal.



Slika 49



Slika 50

2) Sve je $= \delta$.

3) Uočite zatvorene poluprave A i B čiji su počeci respektivno a i b. Prava ab deli ravan u dve poluravni Π_1 i Π_2. Razlikujte dva slučaja: (1) poluprave A i B pripadaju istoj poluravni i (2) poluprava A pripada poluravni Π_1, poluprava B pripada poluravni Π_2.

U slučaju (1) obrazloženje kao pod 1).

U slučaju (2) poluprava A se preslikava u A (simetrija u odnosu na a), tj. svakoj tački poluprave A odgovara tačka poluprave A', tj.:

$$\left.\begin{array}{ll} A'\sim A, & k(A)=k(A'), \\ A'\sim A, & k(A')=k(B), \end{array}\right\} \; k(A)=k(B).$$

4. Svaka poluprava množine P_c ima jednu, i samo jednu, zajedničku tačku sa K, tj. $X\cap K=\{x\}$. Obrnuto, svaka tačka $x\in K$ određuje jednu, i samo jednu, polupravu X množine P_c. Dakle, između polupravih P_c i tačaka kružnice K postoji biżekcija, tj. množine P_c i K su ekvipotentne.

5. § 9.7, tj. **21**, str. 444.

6. 1) div $75=\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$, $k(\text{div } 75)=6$,
div $273=\{1, 3, 7, 13, 21, 273\}$, $k(\text{div } 273)=6$,
div $7=\{1, 7\}$, $k(\text{div } 7)=2$,
div $p=\{1, p\}$, $k(\text{div } p)=2$.

2) div $250=\{1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250\}$,
div $200=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$,
div $250\cup$div $200=\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250\}$,

$k(\text{div } 250\cup\text{div } 200)=14$, $\quad k(\text{div } 250\cap\text{div } 200)=6$.

Primetimo da je $k(\text{div } 250)=8$, $k(\text{div } 200)=12$.

7. 2) Komplementarna množina množine definisane relacijom $x=y$ je množina definisana relacijom $x\neq y$; definisane relacijom $x<y$ je množina definisana relacijom $x>y$, a to su tačke sve „ispod“ prave određene tačkama $x=y$.

8. 1) Treba postupiti metodski: U § 10.3, t. **3.** 2 napisano je svih 6 permutacija elemenata množine $\{a, b, c\}$. Jedna od njih je *abc*. Od nje se pomoću elementa d dobijaju 4 permutacije elemenata date množine: *abcd, abdc, adbc, dabc*. Zašto? Dovršite.

2) (1) Na osnovu prethodnog sada ima $24\cdot 5=120$ permutacija elemenata množine $\{a, b, c, d, e\}$.

9. $N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$N_1=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,

pa imamo: $\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \ldots$, tj. biżekciju $x\to x+1$.

U slučaju $N=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$N\setminus\{0, 1\}=\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$. imamo biżekciju $x\to x+2$.

U slučaju N i $N\setminus\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ biżekcija glasi $x\to x+k+1$.

Dakle, svaka komplementarna množina množine $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ u odnosu na N (§ 2.5) je ekvipotentna množini N.

§ **11.1.**

4. Jer je leva strana 2 a desna 1.

5. 1) Iz Venova dijagrama lako se vidi: $k(A\cap B)=7$; $k(A\setminus B)=11$; $k(B\setminus A)=17$. U pogledu kardinala razlike pripremamo sledeću glavu.

2) Opet iz Venova dijagrama se vidi da je $B\subset A$, pa je $k(A\cap B)=4$, $k(A\setminus B)=9, \ldots$

3) $A\cap B=\varnothing$, dalje vidi § 2.4.

6. 1) Ako taj broj označite slovom x, onda je $8\leqslant x\leqslant 14$. 2) $155\leqslant x\leqslant 183$.

7. $k(M)=13$, $k(S)=24$, $k(M\cap S)=3$, $k(M\cup S)+k(M\cap S)=13+24$, $k(M\cup S)+3=37$, $k(M\cup S)=34$. Nacrtajte dijagram pa ćete rezultat odmah naći.

8. (1) $k(A\times B)=k(A)\times k(B)=5\times 4=20$; $\quad$ (2) $k(A\setminus C)=3$;
(3) $k(A\times(B\cup C))=k(A)\times k(B\cup C)=5\times 7=35$;
(4) $k((A\cup C)\times(B\cap C))=8\times 2=16$;
(5) $k((A\cap C)\times(B\cup C))=2\times 7=14$;
(6) $k((A\cap C)\times(B\cap C))=2\times 2=4$;
(7) $8\times 7=56$; $\quad$ (8) $6\times 8=48$.

§ **11.2.**

1. Nužno je da čitalac samostalno sastavi tu mrežu (jer gledati je, tj. „razumeti je“, i *sastaviti je* su dve različite stvari).

§§ **11.3. i 11.4.**

Neophodno je svaku teoremu potkrepiti sa nekoliko primera.

Ako vas dokazi teorema zamaraju, znači da morate uložiti još dosta napora: sve dok oni budu „išli lako“.

§ **11.5.**

3. Neki zahtevi su nemogući.

4. Primeniti komutativnost i asocijativnost sabiranja, na primer:
(5) $(4+96)+(24+26+50)+(13+27+58+2)=100+100+100=$

7. 1) $(0, 0), (1, 1), \ldots, (13, 13), \ldots (x, x)$.

2) Tačke koje određuju brojevi $x+y$ i $y+x$ pripadaju pravi normalnoj na dijagonali i podjednako su udaljene od te dijagonale.

3) 28, 36, 44. Iz toga se lako dobijaju zbirovi svih ostalih stubaca. Kako?

4) Brojevi $a+b$, $a'+b'$, $a+b'$ i $a'+b$ su temena jednog pravougaonika i to prva dva su krajevi jedne a treći i četvrti su krajevi druge dijagonale tog pravougaonika. Je li zaista $(a+b)+(a'+b')=(a+b')+(a'+b)$ i kako se desna strana te jednakosti dobija iz leve (na osnovu kojih osobina)?

8. 2) (1) Nije. (2) Na osnovu 1) je:

$$a=b+d,\ b=c+e,\ a=c+e+d=c+f, \text{ tj. } a>c.$$

§ 12.1.

1. Prema § 2.1 i § 2.4 je $A \setminus B = A$, $C \setminus D = \{a, b, c, g\}$, $E \setminus F = \{a, b, d, e, h\}$. Kako je $k(A) = 6$, $k(B) = 5$, $k(C) = 7$, $k(D) = 6$, $k(E) = 6$, $k(F) = 3, \ldots$

§ 12.2.

5. Razlika se ne menja ako se i umanjenik i umanjilac povećaju, odnosno smanje za ...

§ 12.3.

2. 2) $c \leqslant b$, $b - c \leqslant a$.

5. 1) Navedite primere.

§ 12.4.

2. 1) 5, 8 i 12. 2) 5, 14, 0. 3) 0, 31, 29.

3. 85, 87. Poslužite se Venovim dijagramom.

5. 2) (1) (0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), dakle 6.
(2) (0, 4), (1, 3), ..., svega 5 rešenja.
(6) Samo jedno (0, 0).

4) Iz prethodnog se vidi:

$(0, n), (1, n-1), (2, n-2), \ldots$ svega $n+1$ rešenja.

5) Sve tačke koje predstavljaju grafička rešenja iste jednakosti pripadaju istoj pravi. U slučaju $x+y=5$ ta je prava određena tačkama (0, 5) i (5, 0). I slično u ostalim slučajevima. U slučaju (6) prava se svodi na tačku (0, 0).

§ 13.2.

1. Treba da sami sastavite što veći deo mreže.

§ 13.3.

2. $ab = m$, $m \cdot 0 = 0$; $b \cdot 0 = 0$, $a \cdot 0 = 0$.

$a \cdot 0 = 0$, $0 \cdot c = 0$; $0 \cdot c = 0$, $c \cdot 0 = 0$.

3. i **4.** Umesto reči *sabirak, zbir, sabiranje* treba upotrebiti, respektivno, *činilac, proizvod, množenje.*

§ 13.4.

1. 2) Na osnovu teoreme 11 je:

$$\left.\begin{array}{l} a=b \Rightarrow ac=bc \\ c=d \Rightarrow bc=bd \end{array}\right] ac=bd \text{ (tranzitivnost).}$$

2. 2) Poslužite se metodom primenjenom u t. **1**, 2).

§ 13.5.

2. Uzmite i druge primere.
Uopšte: $(a^p)^q \neq a^{(p^q)}$; $a^p \neq p^a$.

3, **4**, **5.** Svaki slučaj potkrepite sa više primera.

§ 13.6.

1. Ako sva slova kojima se služimo u našem jeziku označimo sa S, onda treba odrediti $k(S \times S) = 30 \cdot 30 = \ldots$

2. (1) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\} =$
(2) $\{10, 11, \ldots, 99\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 9\} =$

3. 1) O „dijagonali" videti § 11.5, t. **7**, $xx = x^2$.
2) Komutativnost množenja.
3) (1) Pravougaonik (§ 7.8, t. **3**).
(2) Generalisanu komutativnost i ...

4. i **5.** Primenti osobine množenja.

6. (1) $z = 1+2+3+\ldots+l+m+n$

$z = b+m+l+\ldots+3+2+1$

$z+z = 2z = (n+1)+(m+2)+(l+3)+\ldots+(l+3)+(m+2)+(n+1)$

$2z = n(n+1)$ jer su svi zagrađeni zbirovi jednaki a ima ih n.

Dakle: $z = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Uzmite razne primere. Izračunajte $1+2+\ldots+1000$.

(2) Parni brojevi se dobijaju kad se brojevi 1, 2, 3, 4, ... pomnože brojem 2. Zato je na osnovu (1):

$$2+4+6+\ldots+2m+2n = n(n+1).$$

Izračunajte: $2+4+6+\ldots+100$; $2(1+2+3+\ldots+10)$;
$2(1+2+3+4+6)$; $2(1+2+3+\ldots+999)$.

(3) Na prethodnu jednakost primeniti § 11.3, teor. 11 (koja „uzgred rečeno" daje i odgovor na § 12.3, t. **6**) oduzimanjem od svakog člana njene leve strane 1, a od desne strane ... Tada je:

$$1+3+5+\ldots+2m-1+2n-1=nn+n-n=n^2.$$

7. Sve formule koje ćete izračunati su vrlo korisne i treba bar one pod (7), (8), (9) i (10) pamtiti.

Uvek primenite metodu pokazanu u § 13.3, t. **5**, pod 2) i 3).

(4) $p-q=r,\ (m-n)\,r=mr-nr=m\,(p-q)-n\,(p-q)=$

Dovršite na osnovu teor. 8 ove glave i teor. 6 glave XII.

(9) $(a-1)\,(a-1)=a^2-a-a+1=a^2-(a+a)+1=a^2-2a+1.$

(10) $(1-a)\,k=k-ak=1+a-(a+a^2)=1+a-a-a^2=1+(a-a)-a^2=$
$=1-a^2$

Primene: $101\cdot 101=(100+1)\,(100+1)=100\cdot 100+2\cdot 100+1$
$99\cdot 101=(100-1)\,(100+1)=100\cdot 100-1=9999$
$11^2=11\cdot 11=(10+1)\,(10+1)=100+2\cdot 10+1=121$
$99^2=99\cdot 99=(100-1)\,(100-1)=100^2-200+1=$

9. I pri tim izračunavanjima koristiti metodu § 13.3, t. **5**, pod 2) i 3).

(5) $(1+x)\,(1+2x)=(1+x)\,p=p+px=p+px$ [distributivnost množenja]
$=1+2x+(1+2x)\,x$
$=1+2x+x+2x^2$
$=1+(2x+x)+2x^2$ [asoc. sabiranja]
$=1+(2+1)\,x+2x^2$ [distriubtivnost]
$=1+3x+2x^2.$

(6) $(1+3x+2x^2)\,(1+3x)=(1+3x+2x^2)\,q$
$=q+3xq+2x^2q$
$=1+3x+3x\,(1+3x)+2x^2\,(1+3x)$
$=1+3x+3x+3\cdot 3x^2x+2x^2+2\cdot 3\cdot x^2x$
$=1+(3+3)\,x+(9+2)\,x^2+6x^3$
$=1+6x+11x^2+6x^3.$

(7) $4x^2-4x+1.$ (8) $9x^2-1.$

11. Napraviti mrežu Dekartova proizvoda u $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\times\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, označiti one tačke koje su rešenja (koje prikazuju rešenja) jednačina: $x+y-2=0,\ x+y-3=0,\ x+y-8=0,\ x+y-9=0.$

Na primer, rešenja jednačine $x+y-8=0$ jesu: (0, 8), (8, 0), (1, 7), (7, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4), (0, 8).

12. 1)

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	3	5	7	9					
2	2	5	8	11						
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

7. Videti (§ 7.1, t. **2** (def. 3 i 4).

8. i **9.** Navedite više primera.

11. Ako je $k \mid a$, onda je $a=kq$, pa je:

$$abc:k=(kqbc):k=(qbck):k \parallel qbc.$$

Navedite više primera.

13. Navedite primere.

14. Primenite postupak analogan prethodnom (t. **13**).

15. $(a-b+c-d-e):m=[(a+c)-(b+d+e)]:m$
$=(s-s'):m$
$=s:m-s':m$ [t. **14**].

Dovršite.

16. Sledi, pod uslovom $c\neq 0$, jer iz $ac=bc$ sledi $ac-bc=0$ pa je $(ac-bc):c=0$, tj. $a-b=0$, tj. $a=b$.

§ 14.3.

3. Najbolje je (ako vam ta tehnika deljenja nije poznata) da prvo proučite primere koji slede i da sami uzmete i druge primere. Inače, do istog (končanog) rezultata deljenja broja a brojem b možemo doći i ako u prvoj od jednakosti:

$$a=bq+r,\quad r<b$$
$$q=cq_1+r_1,\quad r_1<c$$
$$q_1=dq_2+r_2,\quad r_2<d$$
$$q_2=eq_3+r_3,\quad r_3<e$$

smenimo q iz druge: $a=b\,(cq_1+r_1)+r,$

tj.: $a=bcq_1+br_1+r.$

Zatim u poslednjoj jednakosti smenimo q_1 iz

treće: $a=bc\,(dq_2+r_2)+br_1+r,$

tj.: $a=bcdq_2+bcr_2+br_1+r.$

I tako dalje. Dovršite.

§ 14.4.

1. $5=5\cdot 1;\ 707=7\cdot 101;\ 111111=11\cdot 10101;\ \ldots$

3×37 jer ne postoji prirodni broj q takav da je $37=3q$.

2. 1) Kao pod **1**, ili, na onsovu teoreme 9:

$55:5=(11\cdot 5):5=11\cdot(5:5)=11;\ 100:2=10\cdot(10:2)=10\cdot 5=$

Ili se prvo primeni teor. 7 a posle 9 i 11, npr.:

$$55:5=110:10=(11\cdot 10):10=11;$$
$$140:35=280:70=(28\cdot 10):(10\cdot 7)=(28:7)\cdot(10:10)=4.$$
$$a^3:a=(a^2\cdot a):a=a^2.$$

2) Prvo teor. 13 a zatim prethodno:

(2) $300:25+3800:25-75:25=$
$=(3\cdot 100):25+(19\cdot 200):25-(3\cdot 25)\cdot 25$
$=3\cdot(100:25)+\ldots$

Ili: (3) $(2\cdot 12-6\cdot 12-10\cdot 12+30\cdot 12):12=$
$=[(2-6-10+30)\cdot 12]:12=\ldots$ [§ 14.2, t. **10**].

3. § 13.6, tačke **7**, **8** i **9**.

4. § 14.2, tačka **8**.

5. Vidite mreže prethodnih operacija. Napisaćete (tačni) količnik u preseku reda a i stupca b samo onda kad $b\mid a$. Ostale kvadratiće šrafirate (ili obojte). Ako napravite dovoljno veliku „tablicu", dobićete interesantne i značajne redove ispunjene kvadratićima.

6. 3) Rezultati sabiranja i množenja prirodnih brojeva su uvek prirodni brojevi, a...

5) § 12.2, t. **5** i § 14.2, tačke **9** i **10**.

8. Treba dokazati da su q i r jedinstveni brojevi, a mi ćemo dopustiti da postoje dva količnika q_1 i q_2 i dva ostatka r_1 i r_2, tj. da je:

$$a=bq_1+r_1,\quad r_1<b,$$
$$a=bq_2+r_2,\quad r_2<b.$$

Iz toga, a na osnovu tranzitivnosti, sledi:

$$bq_1+r_1=bq_2+r_2.$$

Kako $r_1\neq r_2$, dopustimo da je $r_2>r_1$. U tom slučaju poslednju jednakost možemo da napišemo ovako (glava XI, teor. 11):

$$bq_1-bq_2=r_2-r_1,$$

tj. (glava XIII, teor. 8) $\quad b(q_1-q_2)=r_2-r_1.$

Kako su svi brojevi u ovoj jednakosti prirodni, iz nje sledi (§ 14.1) da $b\mid(r_2-r_1)$. Međutim, ako je $r_2>r_1$, to ne može biti, jer je $(r_2-r_1)<b$ [$r_2<b$ i $r_1<b$). Znači, mora biti $r_2=r_1$ (jer $b\mid 0$).

A tada, iz $b(q_1-q_2)=0$ sledi $q_1-q_2=0$ (jer $b\mid 0$), tj. $q_1=q_2$.

Dakle, pretpostavka da se pri deljenju mogu dobiti razni količnici i razni ostaci ne može se održati. Tvrđenje je dokazano.

9. 1) U opštem slučaju je: $a=bq+r,\ r\leqslant b-1$.

Dodajmo obema stranama napisane jednakosti x:

$$a+x=bq+(r+x).$$

I da se q ne menja, tj. da napisana jednakost ostane, mora biti:

$$r+x\leqslant b-1,$$

tj. (glava XI, teor. 11): $r-r+x\leqslant b-1-r,\quad x\leqslant b-(r+1)$.

Navedite primere.

2) Utvrdite to pomoću primera.

10. $\quad a=(a-b)\,q_1+r_1,\quad b=(a-b)\,q_2+r_2$

$a-b=(a-b)\,(q_1-q_2)+(r_1-r_2),\qquad$ [glava XIII, teor. 7 i 8]

tj.: $\quad \dfrac{a-b}{a-b}=\dfrac{a-b}{a-b}(q_1-q_2)+\dfrac{r_1-r_2}{a-b},\qquad$ [glava XIII, teor. 11]

tj.: $\quad 1=q_1-q_2+\dfrac{r_1-r_2}{a-b}.$

Kad je to moguće? Samo kad je $q_1-q_2=1$ i $r_1-r_2=0$ (jer samo tada može zbir na desnoj strani da bude 1).

Dakle, ako se a i b dele razlikom $a-b$, količnici se razlikuju za 1 a ostaci su jednaki.

Proverite tu činjenicu na primerima.

§ 15.2.

U ovom i sledeća dva paragrafa izlaganje je na dosta visokom nivou. Odlučili smo se za taj nivo zato što želimo da, osim činjenica koje se pružaju, čitalac stekne i neophodnu sposobnost da „barata" sa indeksima i operiše opštim pojmovima. Ti će se pojmovi kasnije pokazati veoma korisnim i plodonosnim, ali i sami po sebi oni znatno uzdižu onoga koji želi da se obrazuje matematički. Zato neka čitalac ne žali trud i vreme. Oni će se višestruko isplatiti. Onaj, pak, koji bude, i pored angažovanja svih svojih snaga, nailazio na teškoće, može prvo pročitati „Brojanje i pisanje brojeva" u autorovoj *Radnoj svesci* za IV razred osnovne škole (pri čemu će mu i Uputstvo uz tu svesku koristiti).

U svakom slučaju, čitalac se mora potruditi da „zaboravi" ono što zna o pisanju brojeva. Neka koristi samo ono što je u prethodnim glavama (uključujući i X) izloženo.

Ipak, za onoga koji „ne može bez konkretnih primera" dajemo jedan (uz ponovnu napomenu da je preuranjen):

$3274=6\cdot 545+4$ [545 šestica (jedinica II reda) i 4 jedinice prvog reda].

$545=6\cdot 90+5$ [90 puta po $6\times 6=6^2$ (jedinica III reda)i 5 jedinica II reda].

$90=6\cdot 15+0$ [15 puta po $6\times 6\times 6=6^3$ (jedinica IV reda) i 0 jedinica III reda].

$15=6\cdot 2+3$ [2 po 6^4, tj. 2 jedinice V reda i 3 jedinice IV reda].

To znači da je: $q_1=545, \quad r_0=4,$
$q_2=90, \quad r_1=5,$
$q_3=15, \quad r_2=0,$
$q_n=q_4=2<6, \quad r_3=3.$

Dakle: $3274=\underbrace{2\cdot 6^4}_{\mathrm{V}}+\underbrace{3\cdot 6^3}_{\mathrm{IV}}+\underbrace{0\cdot 6^2}_{\mathrm{III}}+\underbrace{5\cdot 6}_{\mathrm{II}}+\underbrace{4}_{\mathrm{I}}$ → polinom; → redovi

$$\left.\begin{array}{l} 3274=\ 2\quad 3\quad 0\quad 5\quad 4 \\ \text{ili („stegnuto") } 3274=23054 \end{array}\right\} \text{ u sistemu } x=6.$$

3. 2) četiri, dvadeset pet, šezdeset četiri, sto;

3) osam, dvadeset sedam, hiljada, dve stotine šesnaest.

§§ 15.3. i 15.4.

Materija se izlaže tako da nisu potrebna posebna objašnjenja. Jedino: § 15.4, t. **2**, primeri pod 3):

(4) Količnik deljenja brojem 7^9 je 0, ostatak je dati broj. Na to obratiti pažnju i kod sledećih primera.

(7) Rešite ga u svakom sistemu brojanja počev od $x=2$.

§ 15.5.

Napomena. — Ovaj paragraf je namenjen čitaocu koji „nije dobro shvatio" prethodne paragrafe ove glave, a dobro će doći i svakom drugom.

1. 4) (1) Zato što:

Kod dvojičnog sistema dva znaka (dve tačke) jedne pregrade zamenjuje jedan znak sledeće (leve) pregrade, npr. dve tačke druge pregrade zamenjuje jedna tačka treće pregrade, jedna tačka četvrte pregrade zamenjuje (stoji umesto) dve tačke treće pregrade, itd.

Kod abaka trojičnog sistema tri znaka jedne pregrade zamenjuje jedan znak sledeće (leve) pregrade, npr. jedna tačka druge pregrade stoji umesto tri tačke prve pregrade, jedna tačka pete pregrade stoji umesto tri tačke četvrte pregrade, devet tačaka treće pregrade, dvadeset i sedam tačaka druge pregrade, osamdeset i jedne tačke prve pregrade.

(2) Svaka pregrada sedmičnog sistema može da sadrži najviše šest tačaka, jer svakih sedam zamenjuje jedna tačka sledeće leve zagrade.

6) Pod 4) je pokazano kako se to izračunava:

(1) 32; (2) 81; 1296. Zaista:

u prvoj pregradi cifra	1 označava	1 predmet,
u drugoj pregradi cifra	1 označava	6 predmeta,
u trećoj pregradi cifra	1 označava	$6\cdot 6=36$ predmeta,
u četvrtoj pregradi cifra	1 označava	$36\cdot 6=216$ predmeta,
u petoj pregradi cifra	1 označava	$216\cdot 6=1296$ predmeta.

U devetičnom sistemu cifra 1 u petoj pregradi označava:

$$9^4=9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=6561.$$

(3) Kad bi to bila cifra 1,

u trojičnom sistemu označavala bi: $81\cdot 3=243$

a cifra 2 označava $243\cdot 2=486$.

U šestičnom sistemu $(1296\cdot 6)\cdot 2=$

U devetičnom . . . $(6561\cdot 9)\cdot 2=$

(4) Cifra 1 bi u petičnom sistemu u toj (četvrtoj) pregradi označavala $5\cdot 5\cdot 5=125$. Zato cifra 3 označava $125\cdot 3$.

Cifra 1 u osmičnom sistemu u toj (četvrtoj) pregradi označavala bi $8^3=512$, a cifra 4 označava $8^3\cdot 4=512\cdot 4=2048$.

U dekadnom sistemu: $1000\cdot 4=$

7) Ma gde se nalazila, 0 uvek označava 0 predmeta. U stvari, na crtežu (1) u prvoj pregradi je 0, a u četvrtoj je $2^3\cdot 0=0$. U sedmoj pregradi crteža (3) je $5^6\cdot 0=0$.

11) $444444_5=4\cdot 5^5+4\cdot 5^4+4\cdot 5^3+4\cdot 5^2+4\cdot 5+4$.

12) (5) 100010_2; (6) 2003_4; (8) 100001111_{10};
(9) 11111_8.

2. 1) $b=3$ (odmah se vidi), $k=5832$;

2) $b=1352_8$, $c=2424_7=3201_4$;
$d=1111101000_2=1101001_3=33220_4=\ldots=1331_9$.

3) Svaki odgovor je 10 (vidite i § 15.2, t. **3**), ali prvo izračunajte prema opštem postupku.)

4) i 5) Prvo u dekadnom pa posle u traženom sistemu.

3. $14_5=13_6$; $12_3=11_4$.

4. To je, u stvari, mreža jednog Dekartova proizvoda.

5. Ova je tačka posvećena samo binarnom sistemu. Treba izvršiti sve zahteve bez izuzetka.

2) Praktično je i pregledno rasporediti računanje ovako:

317	1
158	0
79	1
39	1
19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

Znači:
$317=100111101$. Umesto „klase" od po tri cifre (kao kod dekadnog sistema) u binarnom sistemu je bolje da „klase" budu od po četiri cifre.

$273859=1000010110111000011$.

3) (1) 1, 1010, 1100100, 1111101000, 10011100010000,
1100001101010000, 11110100001001000000.

(2) 1, 2, 4, 8, 16, 32, . . . , 512.

(3) 7; 455; 170; 65; 61.

4) (2) 1001110011010. Koliko je puta veći od datog?

§ 16.1.

Uložite sve napore da shvatite kako se praktična pravila izračunavanja obrazlažu na osnovu svega što prethodi. Samo ako ih obrazložite i ako ih primenite na razne (najbolje na sve upoznate) sisteme brojanja, možete biti sigurni da ih (tehnička pravila) zaista razumete i da ćete u svako doba znati zašto se baš tako sabira, oduzima, . . .

1. 2) (4) 1000000000; 1000001110111.

3) (3) 252204.

2. i **3.** Svako izračunavanje na pozicioni način proverite pomoću polinoma, ali i obrnuto (svaki rezultat dobijen računanjem odgovarajućim polinomima proverite računajući tehnički, na pozicioni način).

§ 16.2.

1. Napisane nejednakosti i jednakosti definišu deljenje (glava XIV). Ostatak deljenja daje se i u obliku $r \leqslant b-1$, jer ostatak deljenja brojem b može biti:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ b-2,\ b-1 \text{ (najveći).}$$

2. 1) $x^n \leqslant q$ označava $1000\ldots0 \leqslant q$, što i pokazuje da se q piše sa $(n+1)$ cifara.

3. i **4.** Nužno je više puta samostalno ponoviti ceo opisani algoritam.

§ 16.3.

5. 1) $\underline{101 \cdot 101}$ Slično u ostalim slučajevima pa se dobija:

$$\begin{array}{r} 101\\ \underline{101}\\ 11001 \end{array}$$

$111 \cdot 111 = 110001;$

$1110011 \cdot 1110011 = 11001110101001.$

2) $1000^{100} = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1000000000000;$

$1011^{11} = \underbrace{1011 \cdot 1011 \cdot 1011}_{11_2 \text{ činilaca}} = 1010011011;$

$10001^{101} = 10001 \cdot 10001 \cdot 10001 \cdot 10001 \cdot 10001$

$= 1010110101010 1100001.$

3) $11^{11} = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11 \cdot (11 \cdot 11);$

$11^{11} - 11 \cdot 11 = 11 \cdot 11\,(11-1)$

$= 1001 \cdot 10 = 10010;$ [distributivnost];

$111^{10} = 111 \cdot 111 = 110001;$

$10^{111} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000000;$

$10^{111} - 111^{10} = 1001111.$

Treba da izračunate sve „međurezultate“ i da proverite pomoću dekadnog sistema.

6. Jedan je način izvršiti označenje operacije u svakoj zagradi pa posle pomnožiti. Drugi je metoda primenjena u § 13.6, t. **7** i dalje.

(1) 100000100; (2) 111100; . . .

Uvek proverite i pišući brojeve u dekadnom sistemu.

7. Primenite tačno postupak (algoritam) primenjen u § 16.2, t. **3** i **4.** Rasporedite praktično kao tamo. Dobićete: (1) 110001; (2) 1101. Proverite množenjem delioca količnikom.

8. $\boldsymbol{R} = \{(0, 0), (1, 0), (10, 0), (100, 0), (110, 0), (1000, 0), (1, 1), (1, 10), \ldots (1, 1000), (10, 10), (10, 110), (10, 1000), (100, 100), (100, 1000), (110, 110), (1000, 1000)\}$.

Nacrtajte sagitalnu šemu te relacije.

9. 1) Sabiranje u sistemu čija je osnova četiri.

3) (3) 100420_6. 4) $(432-242)_5 = 140_5$.

$$\begin{aligned}(4000-2341)_5 &= 4x^3-(2x^3+3x^2+4x+1)\\ &= 4x^3+5x^2-(3x^3+3x^2+4x+1)\\ &= 4x^3+5x^2+5x-(3x^3+4x^2+4x+1)\\ &= 4x^3+5x^2+5x+5-(3x^2+4x^2+5x+1)\\ &= (4x^3-3x^3)+(5x^2-4x^2)+(5x-5x)+(5-1)\\ &= 1x^3+x^2+0x+4 = 1104_5.\end{aligned}$$

Ili: $4x^3 = 3x^3 + x^3 = 3x^3 + 4x^2 + x^2 = 3x^3 + 4x^2 + 4x + x$, x = pet pa je dato oduzimanje ekvivalentno oduzimanju:

$$(3x^3+4x^2+4x+5)-(2x^3+3x^2+4x+1) =$$

$$(10^8 - 77777)_8 = 77700001_8.$$

10. 1) Tablica množenja u sistemu čija je osnova pet.

4) Treba izračunati: $(3012 \cdot 2310)_4$; $(3012 \cdot 2310)_5$; $(3012 \cdot 2310)_6$; . . . ; $(3012 \cdot 2310)_9$.

11. 1) Postupiti tačno po algoritmu izloženom u § 16.2, t. **3** i **4**:

$$(1)\qquad \begin{array}{lr|l}
a\ldots & 4\,0\,4\,3 & 21 \\
-21x^2\cdot 1\ldots & -2\,1\,0\,0 & 1\,\ldots\ldots\, c_2 \\
a'\ldots & 1\,4\,4\,3 & \\
-21x\cdot 4\ldots & -1\,3\,4\,0 & 4\,\ldots\ldots\, c_1 \\
a''\ldots & 1\,0\,3 & \\
-21\cdot 3\ldots & 1\,0\,3 & 3\,\ldots\ldots\, c_0 \\
r\ldots & 0 &
\end{array}$$

Dakle: $4043_5=(21\cdot 143)_5+0$.

Izvršite i ostala deljenja i proverite prema formuli $a=bq+r,\ r<b$.

2) $213626=(35\cdot 6034)_7+10_7$.

Svi sledeći zadaci rešavaju se na osnovu definicija i teorema uvedenih i dokazanih u prethodnim glavama (XI—XVI), a ne „pomoću jednačina". Nužno je, dakle, svaki korak pri rešavanju zasnovati na odgovarajućoj teoremi formulisanoj i obrazloženoj u ovoj knjizi.

13. $xy=1\,504$, $(x+10)y=1\,824$, tj. $xy+10y=1\,824$, tj. $1\,504+10y=1\,824$, tj. $10y=320, \ldots$

14. 3625. Treba primeniti distributivnost množenja u odnosu na oduzimanje, a zatim izračunati jedan činilac kad su poznati proizvod i drugi činilac.

15. Pokažimo, na tom primeru, kako se primenjuje ono što je sadržano u prethodnim glavama.

Imamo, pre svega, jednakost: $ab=ab$.

Povećamo li svaki činilac za 7, $(a+7)\,(b+7)$, proizvod se povećava za 364, tj. $(a+7)\,(b+7)=ab+364$.

Tako je izražen jedan deo uslova zadatka. Sad je:

$ab+7a+7b+49=ab+364$ [§ 13.6, t. **7**],

tj. $7a+7b=364-49$ [gl. XI, teor. 11, ili § 12.3, t. **6**],

tj. $7(a+b)=315$ [§ 13.3, t. **5**],

tj. $a+b=315:7$ [§ 14.1, ili § 14.2, t. **16**],

tj. $a+b=45$.

Znači, brojevi a i b (koje tražimo) zadovoljavaju dva uslova:

$$a+b=45 \text{ i } a-b=5.$$

Iz drugog uslova je (§ 12.2) $a=b+5$. Tada prvi uslov glasi:

$b+5+b=45$,

tj. [glava XI, teor. 8] $b+b+5=45$,

tj. [glava XI, teor. 11 i 3.1] $2b=40$,

tj. [§ 14.1 ili § 14.2, t. **16**] $b=20$, a tada je $a=25$.

Kontrola: $25\cdot 20=500$.

$(25+7)\,(20+7)=32\cdot 27=684;\ 684-500=364$.

16. 1) $a=175q+73,\ 73<175$,

$a=177q+11,\ 11<177$.

Dakle, $177q+11=175q+73$,

tj. (glava XI, teor. 11) $177q-175q=73-11$,

tj. $(177-175)q=62,\ q=31,\ a=175\cdot 31+73$.

17. Neka d označava delilac a r ostatak. Tada je:

$802=14d+r,\quad 0\leqslant r<d$,

tj. $802-14d=r$, tj.: $0\leqslant 802-14d<d$ (jer je $a\leqslant r<d$).

Iz tih nejednakosti sledi: $14d\leqslant 802,\ 15d>802$.

Međutim, $802=14\cdot 57+4$ i $802=15\cdot 53+7$,

što znači da je $14d\leqslant 14\cdot 57+4$, a $15d>15\cdot 53+7$,

tj. da je $54\leqslant d<57$,

tj. da delilac može biti 54, 55, 56 ili 57.

Izračunajte ostatak u svakom od tih slučajeva.

18. Svaki slučaj u dekadnom sistemu brojanja.

19. i **20.** Nisu laka, ali nisu ni nesavladljiva.

Napomena. — Tehnika aritmetičkih operacija prirodnim brojevima može se lako savladati (naučiti), ali bez teorije, bez obrazloženja (odnosno izvođenja) pojedinih pravila, tehnika nije matematika. I ne samo to. Teorija a samim tim i tehnika navedenih operacija *ne može se suštinski usvojiti ako se radi samo u jednom sistemu brojanja.*

Ponavljamo: Broj deset nema nikakav izuzetan značaj ni u teoriji ni u praksi osnovnih aritmetičkih operacija prirodnim brojevima.

§ 17.2.

1. 2) Nije. Evo primera: $x+y=10$. $2\,|\,10$ i ako je $x=8,\ y=2$, onda je svaki sabirak deljiv brojem 2. Ali može biti $7+3=10,\ 5+5=10$.

3) Neka $m|a,\ m|b,\ m\nmid c$, onda je:

$a=mq_1,\ b=mq_2,\ c=mq_3+r,\ r<m$,

pa je: $a+b+c=m(q_1+q_2+q_3)+r,\ r<m$,

tj.: $a+b+c=mq+r,\ 0<r<m$,

što i pokazuje da zbir $a+b+c$ nije deljiv brojem m.

2. Te su teoreme dokazane napred. Nađite to.

3. Preporučljivo je da se ponovo pročita § 14.2. To važi za sve što se iznosi u ovom paragrafu (§ 17.2).

4. (1) osam$=1\,000_2$.

§ **17.3.**

1. 1) Na osnovu teorema 1 i 2, § 17.2.

§ **17.4.**

1, 2, 3. Treba izvršiti više proizvoljnih sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i proveriti njihovu tačnost „pomoću 9“.

§ **17.5.**

1. (1) $6=3\cdot 2$. Ako $3|a$ (tj. ako je broj a deljiv brojem 3), onda je: $a==3+3+3+\ldots+3$. Da li može broj sabiraka (trojaka) biti neparan ako želimo da on bude deljiv brojem 6? Ne može jer bi tada bilo:

$$a=6+6+\ldots+6+3, \text{ tj. } a=6q+3.$$

Dakle, da $6|a$ nužno je i dovoljno da $2|a$ i $3|a$, tj. da je (§ 14.2, t. **12**) $a=(2\cdot 3)\,k$, $k\in N_1$.

(2) i (3) Rasuđivanje kao pod (1).

5. 2) Prvo proverite na datim primerima, a zatim:

$$\boxed{\overline{c_1c_0}-(2c_1+c_0)=10c_1+c_0-2c_1-c_0=8c_1=4\cdot 2c_1.}$$

To pokazuje (teorema 5) da su ostaci deljenja $\overline{c_1c_0}$ i $(2c_1+c_0)$ jednaki.

3) Prvo proverite na proizvoljno uzetim primerima (ili na onima pod 2), a zatim analogno prethodnom postupku.

Ili: $a=1\,000h+100c_2+10c_1+c_0=1\,000h+96c_2+8c_1+4c_2+2c_1+c_0$
$=(1\,000h+96c_2+8c_1)+(4c_2+2c_1+c_0)$.

6. 3) Za izračunavanje ostatka deljenja broja b treba iskoristiti ostatke pod 1), a za izračunavanje ostatka deljenja broja c treba koristiti ostatke deljenja broja a i broja b.

Zašto su ostaci deljenja brojeva 10^6 i 8000000 jednaki? Ako ne možete odgovoriti, nađite ostatke deljenja brojeva 9000000, 2000000, 3000000, . . .

4) Prethodno uputstvo. $a^3=7q_1+3^3=7q+6$.

5) Pogledajte zbirove simetričnih (u odnosu na srednji) ostataka.

7. $n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$. Dakle . . .
$n+n+1+n+2+n+3+n+4=5(n+2)$.

9. Videti § 17.1, t. **2**. Inače takve smo primere rešavali i ranije. (1) M_6; (2) M_{12}; (4) ako je $b=2n$, onda M_b. Ako nije, . . .

10. 7) i 8). Može se dokazati teorema na osnovu koje se ti ostaci lako izračunavaju. Vi možete koristiti $4^{10}=(4^5)^2$; $4^{15}=(4^5)^3$; . . . (prethodna tačka **6**).

9) $4n+1$; 10) (1) $4n+3$; (2) $4n+2$, $n\in N$.

§ **18.2.**

5. 1) (5) $2^7\cdot 3^4$; (6) $2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$; (7) $2^6\cdot 5\cdot 43$. 2) 1141.

§ **18.3.**

3. Prosti su (2), (5), (7).

§ **18.4.**

1. Potvrdan odgovor na to pitanje značilo bi da postoji najveći složeni broj. Može li da postoji takav broj? Uzmite, npr., 1000000. Možete li ga pomnožiti ma kojim prirodnim brojem? Zamislite da ga množite redom brojevima množine $\{2, 3, 4, \ldots\}$.

§ **18.7.**

1. 1) $35\cdot 1=35$, $35\cdot 2=70$, $35\cdot 3=105$, . . .

§ **18.8.**

2. 1) Prosti brojevi manji od 1000:

2	47	109	191	269	353	439	523	617	709	811	907
3	53	113	193	271	359	443	541	619	719	821	911
5	59	127	197	277	367	449	547	631	727	823	919
7	61	131	199	281	373	457	557	641	733	827	929
11	67	137	211	283	379	461	563	643	739	829	937
13	71	139	223	293	383	463	569	647	743	839	941
17	73	149	227	307	389	467	571	653	751	853	947
19	79	151	229	311	397	479	577	659	757	857	953
23	83	157	233	313	401	487	587	661	761	859	967
29	89	163	239	317	409	491	593	673	769	863	971
31	97	167	241	331	419	499	599	677	773	877	977
37	101	173	251	337	421	503	601	683	787	881	983
41	103	179	257	347	431	509	607	691	797	883	991
43	107	181	263	349	433	521	613	701	809	887	997

Proverite da se svaki prost broj dobija iz jedne od navedenih formula, ali je, npr. $4 \cdot 4 - 1 = 15$, $4 \cdot 6 + 1 = 25$, $6 \cdot 11 - 1 = 65, \ldots$, a to su složeni brojevi.

6) Stavite $n = 1, 2, 3, \ldots$ i ispitajte. Koji se broj dobija kad je $n = 40$? A kad je $n = 41$? (U ovom poslednjem slučaju dobija se očigledno složen broj jer je $41^2 - 41 + 41 = 41^2$.)

10) Ako je $n = 2k + 1$ (neparan broj), onda je:

$$2^n + 1 = 2^{(2k+1)} + 1 = (2+1)\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{2k \text{ činilaca}},$$

što pokazuje da $3|(2^n+1)$ i 2^n+1 je složen broj.

Ako je $n = 2k$, onda je $2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2}_{2k} - 1 = b \in M_3$, pa $3|(2^n - 1)$.

6. (1) u 12 časova; (2) u 7 č; (3) u 21 č; (4) u ponoć posle 2 dana (i noći).

7. Neka su a i b međusobno prosti brojevi a m njihov multiplum. $a|ab$, $b|ab$, tj. ab je njihov nzm.

nzm (a, b) deli svaki multiplum brojeva a i b. Znači $ab|m$, tj. $ab = mq$.

Sad treba dokazati da je $q = 1$. Kako $a|m$, postoji prirodni broj q_1 takav da je $m = aq_1$. Smenimo to u poslednjoj jednakosti:

$$ab = aqq_1, \text{ tj. } b = qq_1 \text{ tj. } q|b.$$

Na isti način se dokazuje da $q|a$, a kako su a i b međusobno prosti brojevi, ...

8. Uslov: $\overline{c_2c_1c_0} = 100c_2 + 10c_1 + c_0 = 37q$.

$\overline{c_1c_0c_2} = 100c_1 + 10c_0 + c_2 = 10(10c_1 + c_0) + c_2$

$10c_1 + c_0 = 37q - 100 \cdot c_2$. Dakle:

$\overline{c_1c_0c_2} = 10(37q - 100c_2) + c_2 = 370q - 999c_2$.

Kako je $999 = 9 \cdot 111 = 9 \cdot 3 \cdot 37, \ldots$

Analogno se dokazuje i $37|\overline{c_0c_2c_1}$. Navedite primere.

9. Četiri uzastopna broja jesu: n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Treba dokazati da je njihov proizvod $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$ deljiv brojem 24. A za to je dovoljno dokazati da je on deljiv brojevima 3 i 8. (Zašto?)

Da $3|p$ nužno je i dovoljno da deli bar jedan činilac proizvoda p. Dokažimo da je od tri uzastopna broja bar jedan deljiv brojem 3.

Broj 3 deli sve prirodne brojeve u tri klase (§ 17.5, t.**10**, 1): $3k$, $3k+1$ i $3k+2$. Van tih klasa ne postoji nijedan prirodni broj (§ 2.7). Znači, ili je $n = 3k$, ili $n+1 = 3k$ ili $n+2 = 3k$ i time je dokazana pomoćna teorema. Ali, samim tim dokazano je da $3|p$.

Dokažimo da i $8|p$. Broj n može biti paran, tj. oblika $2k$ ili neparan $2k+1$. Ako je $n = 2k$ (paran broj), onda je sledeći paran broj $n+2 = 2k+2$. Dokažimo da je od dva uzastopna parna broja jedan deljiv brojem 4. Zaista:

Ako je $k = 2m$, onda je $n = 2 \cdot 2k = 4k$ (pa je deljiv brojem 4). Ako je $k = 2m+1$, onda je $n+2 = 4m+4 = 4(m+1)$ (pa je deljiv brojem 4).

Odatle sledi da $8|n(n+2)$.

Ako je $n = 2k+1$, onda su $n+1$ i $n+3$ uzastopni parni brojevi pa $8|(n+1)(n+3)$. Dakle, ma koji bio prirodni broj n, $24|p$.

10. To je zadatak **2**.10. Sad ćemo ga rešiti drukčije:

$2^n - 1$, 2^n i $2^n + 1$ su tri uzastopna broja.

Na osnovu prethodnog (zad. **9**), bar jedan od njih je deljiv brojem 3. Kako 2^n nije deljiv brojem 3, mora ili $3|(2^n - 1)$ ili $3|(2^n + 1)$.

11. 1) nzm $(x, y) \cdot$ nzd $(x, y) = xy$ [§ 18.7, t. **4**]

$$2160d = 51\,840, \quad d = (8 \cdot 9 \cdot 72) : (8 \cdot 9 \cdot 3) = 24.$$

$$x' = x : d, \quad y' = y : d, \quad 24x'y' = 2160, \quad x'y' = 90.$$

I kako su x' i y' međusobno prosti brojevi, moguća su ova rešenja:

$x' = 1$, $y' = 90$, pa je $x = dx' = 24$, $y = 24 \cdot 90$,

$x' = 2$, $y' = 45$, pa je $x = 48$, $y = 24 \cdot 45$,

$x' = 5$, $y' = 18$, pa je $x = 120$, $y = 24 \cdot 18$,

$x' = 9$, $y' = 10$, pa je $x = 24 \cdot 9$, $y = 24 \cdot 10$.

Kontrola: $x = 120$, $y = 432$, nzd $(120, 432) = 24$; nzm $(120, 432) = 2160$.

Kontrolišite ostala rešenja i rešite ostale primere.

12. To je, u stvari, prethodni problem pod 2). Zato ćemo pokazati opšte rešenje:

Neka je nzd$(x, y) = d$, nzm$(x, y) = m$.

Tada je (§ 18.7, t. **4**): $dm = xy$,

tj. ako je $x : d = x'$, $y : d = y'$, $x'y'd = m$.

Odatle sledi da mora $d|m$,

pa da problem bude moguć, tj. $x'y' = q$ $[q = m : d]$.

To pak pokazuje da su x' i y' dva međusobno prosta delioca broja q. Ako, dakle, znamo x' i y', onda je $x = dx'$, $y = dy'$.

U datom slučaju je $x'y' = m : d = 21$, pa dobijamo dva rešenja: $x' = 1$, $y' = 21$ i $x' = 3$, $y' = 7$, a odatle: $x = 36$, $y = 756$ i $x = 108$, $y = 252$.

§ 19.2.

1. 1) Bolje se pamti ako se napiše: $(a \sim b) + (c \sim d) = (a + c \sim b + d)$.

1. 2) ac i db su prirodni brojevi (§ 13.1). $ac + bd$ je prirodni broj, itd. Inače, radi lakšeg pamćenja uporedite množenje $(a - b)(c - d)$ (§ 13).

§ 19.3.

1. 2) Leva strana: $(a\sim b)+(c+e\sim d+f)=[a+(c+e)\sim b+(d+f)]$
$$=(a+c+e\sim b+d+f).$$

Desna strana: $(a+c\sim b+d)+(e\sim f)=([a+c]+e\sim [b+d]+f)$.
$$=(a+c+e\sim b+d+f).$$

2. 1) $(a\sim b)(c\sim d)=(ac+bd\sim ad+bc)$

$(c\sim d)(a\sim b)=(ca+db\sim cb+da)$,

i kako je $ca=ac$, $db=bd$, $cb=bc$, $da=ad$ . . . Na osnovu komutativnosti je:
$$be+ad=ad+be.$$ Dakle:

2) Leva strana: $=(a\sim b)\,(ce+df\sim cf+de)$
$$=(a[ce+df]+b[cf+de]\sim a[cf+de]+b[ce+df])$$
$$=(ace+adf+bcf+bde\sim acf+adc+bce+bdf).$$

Izračunajte analogno desnu stranu i uporedite.

3) Leva strana: $=(a\sim b)\,(c+e\sim d+f)$
$$=(a[c+e]+b[d+f]\sim a[d+f]+b[c+e])$$
$$=(ac+ae+bd+bf\sim ad+af+bc+be).$$

Desna strana: $=(ac+bd\sim ad+bc)+(ae+bf\sim af+be)$
$$=ac+bd+ae+bf\sim ad+bc+af+be,$$

tj. (komutativnost) $=ac+ae+bd+bf\sim ad+af+bc+be$. Dakle: . . .

§ 19.4.

2. Tačno prema definiciji:

$(a\sim b)(1\sim 0)=(a\cdot 1+b\cdot 0\sim a\cdot 0+b\cdot 1)=(a\sim b)$.

§ 19.6.

2. 3) Iz prethodnog sledi (očigledno) potvrdan odgovor.

3. (1) Svodi se (t. **1**) na zbir prirodnih brojeva. Uostalom:

$(a\sim 0)+(b\sim 0)=(a+b\sim 0)=$ pozitivan broj.

(2) $(0\sim a)+(0\sim b)=(0\sim a+b)=$negativan broj.

Navedite primere.

(3) $(a\sim 0)+(0\sim b)=(a+0\sim 0+b)=(a\sim b)$, pa ako je $a>b$, $(a\sim b)$ je pozitivan broj. Ako je $a<b$, broj $(a\sim b)$ je negativan. (Videti t. **2**. 3.)

Uostalom: U slučaju $a>b$, $(a\sim b)$ se zapisuje u obliku $(a-b\sim 0)$, a u slučaju $a<b$, . . . Kad je, pak, $a=b$, pišemo $(a-a\sim b-b)$, tj. $(0\sim 0)$. Navedite primere.

(4) $(0\sim a)\,(0\sim b)=(0\cdot 0+ab\sim 0\cdot b+a\cdot 0)$

$=(ab\sim 0)$ pozitivan broj.

Primer: $(0\sim 7)\,(0\sim 5)=(35\sim 0)$.

(5) $(a\sim 0)\,(0\sim b)=(a\cdot 0+0\cdot b\sim ab+0\cdot 0)=(0\sim ab)$.

4. 2) Videti § 19.5, t. **3**.3) i § 19.5, t. **2**.

§ 19.7.

2. 3) $-(2-5)=-2+5$; $-(-16+7)=16-7$; $-(-a-b)=a+b$.

4. 2) Samo kad je $a=0$. 3) Samo kad je $a=0$. Zaista, $a+a=a\cdot a=a-a$, $a=0$.

8. Iskoristiti prethodnu tačku i §§ 11.3, 12.3 i 13.4. Na primer:

iz $-5=2-7$ sledi: $\begin{cases} -5+8=(2-7)+8, \\ -5-4=(2-7)-4, \\ -5\cdot 2=(2-7)\cdot 2, \\ (-5)\,(-2)=(2-7)\,(-2); \end{cases}$ iz $-5=2-7$ i $-8+5=-3$ sledi. $\begin{array}{l} -5+(-8+5)=(2-7)+(-3), \\ -5-(-8+5)=(2-7)-(-3), \\ (-5)\,(-8+5)=(2-7)\,(-3). \end{array}$

Navedite i druge primere.

9. Pokušajte da obrazložite na osnovu tačke **7** i §§ 11.4, 12.3, 13.4, 19.5 i 19.6 i proverite na primerima.

§ 19.8.

1. 1) Broj -39 izražava npr. $(1\sim 40)$, $(61\sim 100)$, . . .

4) $(0\sim 22)$ je broj -22; $(0\sim 0)$ je $0=-0$ [§ 16.7, t. **1**].

5) Samo jedan prirodni broj se ne može odrediti, jer $(72\sim x)$ označava broj -3 ako je $x=75$, a brojem 75 se ne može sastaviti ni jedna druga . . . Zato, za svaku razliku treba odrediti odgovarajući prirodni broj.

6) $x=9$, $0\sim 4$; $x=3$, $(0\sim 3)$, . . . Očigledno je da poslednji slučaj nije moguć.

7) Ne može jer u N ne može biti $5-x=6$.

2. z i $-z$ su simetrični brojevi, a oni se razlikuju samo znakom („predznakom"). Dakle: 2, -15, 23, . . .

3. § 15.5: $(-3)_{10}=(-11)_2$, $(-17)_{10}=(-10001)_2$, $(-225)=(-11100001)_2$.

5. $-19-13=-32$; $99-125=-26$; . . .

6. $(-73)-(-100)=-73+(+100)=-73+100=27$.

$(-13)-(-13)=-13+13=0$; $(-271)+(+271)=0$ (§ 19.5, t. **1**, ili $-271+271=0$).

7. 1) Za koliko se Celzijusovih stepeni temperatura promenila. $4-(-13)=$ $=17$. Temperatura je pala za 17°C.

2) Razlika između najniže i najviše temperature iznosi 100°C. 5) 43 god.

8. (3) $a-b-c+d$; (4) $a-b+c-d$.

9. (1) $5-8-4+3-5+1=(5-5)+(-4+4)-8=-8$;

(2) -15; (3) -8; (4) $9-4+3-9+5+4=(9-9)+(-4+4)+3+5=$ $=3+5=8$.

10. (1) Gde smo ranije imali slične slučajeve?

(2) b; $a+(a-b)=2a-b$; $a-(a+b)=-b$.

11. (6) -432; (7) 64; (8) $(-x)^{32}=x^{32}$; $(-x)^{33}=-x^{33}$.

12. 2) 50; $-2ab$.

3) Gde smo ranije imali slična množenja? Uporedite rasuđivanja tamo i ovde.

Proverite za: (1) $a=-3$, $b=5$, $c=-2$, $d=-4$,
(2) $a=6$, $b=-8$, $c=3$, $d=5$.
(3) $a=0$, $b=-1$, $c=-6$, $d=10$.

(7)–(10). Treba primeniti asocijativnost i komutativnost množenja; na primer $(2b)(-3b)=-2b\cdot 3b=-2\cdot 3bb=6b^2$.

Proverite za: (1) $a=2$, $b=-3$, $x=-10$, $y=-20$;
(2) $a=-1$, $b=-2$, $x=8$, $y=-7$.

13. $-1=(0\sim 1)$? $z=(x\sim y)$.

$$(0\sim 1)(x\sim y)=(0\cdot x+y\sim 0\cdot y+x)=(y\sim x).$$

Međutim $(y\sim x)=-(x-y)=-z$.

Zaista $(y\sim x)+(x\sim y)=(y+x\sim x+y)=(0\sim 0)$.

Odatle sledi da je $(y\sim x)=-(x\sim y)$.

Tek su time dokazana sva prethodna množenja gde je jedan od činilaca -1. A na osnovu toga i $(-z)(+z')=-zz'$.

15. 1) (1) Kad je $a=b=0$ i kad su a i b simetrični brojevi.

(2) Kad je $a<0$, $b<0$. I kad je $a>0$, $b<0$, $|a|<|b|$ (ili obrnuto).

2) (2); (4), (6), (10) i (12) ne može.

16. $f(x)=x+5 \Rightarrow f(0)=0+5=5$; $f(5)=5+5=10$; $f(-5)=-5+5=0$; ...

$f^{-1}(x)=x-5 \Rightarrow f^{-1}(8)=8-5=3$; $f^{-1}(-25)=-25-5=-30$.

17. 1) Nije jer nije zadovoljen uslov (4).

2) i 3) Nije, jer nema neutralnog elementa 0.

4) Nije jer množina nije zatvorena $(-3)+(-2)=-5\notin\{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$.

5) Jeste. Zadovoljava sve uslove.

18. 1) Klasa 0: $\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots$
Klasa 1: $\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots$
Klasa 2: $\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots$

Zaista: Kad ma koji broj klase 0 podelimo brojem 3, ostatak je 0. Ako ma koji broj klase 1 podelimo brojem 3, ostatak je 1. Na primer: $1=0+1$, $4=3+1$, $-2=-3+1$ pa kad se -2 podeli brojem 3, ostatak je 1; $-8=-9+1$, pa je $(-9+1):3=-3$ i ostatak 1.

Najzad kad ma koji broj klase 2 podelimo brojem 3, ostatak je uvek 2. Na primer: $11=9+2$; $8=6+2$; $-1=-3+2$; $-7=-9+2, \ldots$

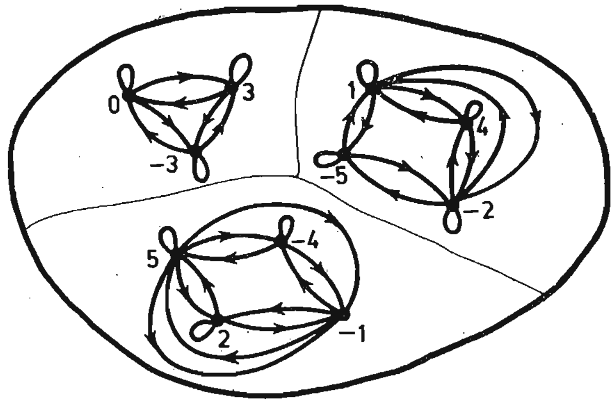
I svaki celi broj je element jedne i samo jedne od tih klasa (§ 2.7).

2) (1) Svaki broj daje isti ostatak modulo 3 kao i on sâm. Relacija je refleksivna.

(2) Dva broja a i b iste klase „srodna su“ samo po tome što se pri deljenju broja a brojem 3 dobija isti ostatak kao i pri deljenju broja b brojem 3. Otuda i obrnuto: pri deljenju broja b brojem 3 dobija se isti ostatak kao ... Na primer, 4 podeljen brojem 3 daje ostatak kao i -5 podeljen brojem 3. I obrnuto. — Relacija je simetrična.

(3) Tranzitivnost je očigledna.

3) Slika 51.



Slika 51

4) Samo u klasi 0, npr. $-6+3=-3$; $9+(-9)=0$, itd.

U ostalim klasama nije, npr. $-8-2=-10$ pripada klasi 1, ali $1+4=5$ pripada klasi 2.

-4 i 2 pripadaju klasi 2, a $-4+2=-2$ pripada klasi 1.

5) Opet samo u klasi 0, ali ta množina ne sadrži element 1 koji je neutralni element množine.

3. 1) Da bi se dokazalo da je relacija „$\cong$“ jedna relacija ekvivalencije, treba dokazati da je ta relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

(1) Na osnovu refleksivnosti relacije „$=$“ pišemo $ab=ab$,
tj. (komutativnost u N i Z) $\quad ab=ba$,
tj. (definicija „$\cong$“) $\quad \frac{a}{b}\cong\frac{a}{b}$.

Znači, $\frac{a}{b}$ je ekvivalentan samom sebi (refleksivnost relacije „$\cong$“).

(2) Neka je $\quad \frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}$.
Prema definiciji relacije „$\cong$“ je $\quad ad=bc$,
tj. (simetr. relacije „$=$“ u N i Z) $\quad bc=ad$,
tj. (definicija relacije „$\cong$“) $\quad \frac{c}{d}\cong\frac{a}{b}$.

Znači, ako je $\frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}$, onda je i $\frac{c}{d}\cong\frac{a}{b}$ (simetričnost relacije „$\cong$“).

(3) Neka je $\quad \frac{a}{b}\cong\frac{c}{d}$ i $\frac{c}{d}\cong\frac{e}{f}$.
Tada je (prema definiciji „$\cong$“) $\quad ad=bc$ i $cf=de$,
tj. (§ 13.4, t. **1** i § 19.7, t. **8**) $\quad (ad)(cf)=(bc)(de)$,
tj. (na osnovu čega?) $\quad afcd=becd$,
tj. (§ 14.2, t. **13**) $\quad (afcd):(cd)=(becd):(cd)$,
tj. (§ 14.2, teorema 10): $\quad af=be$,
tj. (definicija relacije „$\cong$“) $\quad \frac{a}{b}\cong\frac{e}{f}$.

Dakle, relacija „$\cong$“ je i tranzitivna.

4. 3) Ne, npr. $\frac{2}{5}\not\cong\frac{7}{3}$, $\frac{7}{3}\not\cong\frac{8}{20}$, a $\frac{2}{5}\cong\frac{8}{20}$.

5. 1) $\left\{\frac{9}{9}, \frac{8}{8}, \frac{8}{9}, \frac{7}{7}, \frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{6}{6}, \frac{6}{7}, \frac{6}{8}, \frac{6}{9}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{9}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{9}, \frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \ldots, \frac{0}{9}\right\}$, svega 54.

2) $\left\{\frac{9}{9}, \frac{8}{8}, \frac{7}{7}, \frac{6}{6}, \frac{5}{5}, \frac{4}{4}, \frac{3}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right\}$; $\left\{\frac{8}{9}\right\}$; $\left\{\frac{7}{8}\right\}$; $\left\{\frac{7}{9}\right\}$; $\left\{\frac{6}{7}\right\}$; $\left\{\frac{6}{8}, \frac{3}{4}\right\}$; $\left\{\frac{6}{9}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}\right\}$; $\left\{\frac{5}{6}\right\}$; $\left\{\frac{5}{7}\right\}$; $\left\{\frac{5}{8}\right\}$; $\left\{\frac{5}{9}\right\}$; $\left\{\frac{4}{5}\right\}$; $\left\{\frac{4}{7}\right\}$; $\left\{\frac{4}{8}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}\right\}$; $\left\{\frac{4}{9}\right\}$; $\left\{\frac{3}{5}\right\}$; $\left\{\frac{3}{7}\right\}$; $\left\{\frac{3}{8}\right\}$; $\left\{\frac{3}{9}, \frac{1}{3}\right\}$; $\left\{\frac{2}{5}\right\}$; $\left\{\frac{2}{7}\right\}$; $\left\{\frac{2}{8}, \frac{1}{4}\right\}$; $\left\{\frac{2}{9}\right\}$; $\left\{\frac{1}{5}\right\}$; $\left\{\frac{1}{6}\right\}$; $\left\{\frac{1}{7}\right\}$; $\ldots$; $\left\{\frac{1}{9}\right\}$; $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{0}{3}, \ldots, \frac{0}{9}\right\}$; 29 klasa.

1. 3) $\frac{4}{7}, \frac{8}{14}, \frac{12}{21}, \frac{16}{28}, \ldots$; $\frac{7}{9}, \frac{14}{18}, \frac{21}{27}, \frac{28}{36}, \ldots$

2. 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; 4; 14.

4. 1) $\frac{3}{9}$ nije sveden razlomak, $\frac{4}{12}$ takođe. $\frac{3}{9}\cong\frac{1}{3}$ i $\frac{4}{12}\cong\frac{1}{3}$, tj. oba razlomka ($\frac{3}{9}$ i $\frac{4}{12}$) pripadaju istoj klasi.

3) $a=c$, $b=d$. Drukčije nije moguće.

5. 4) (3) i (4) su nemogući slučajevi. Zašto?

§ 20.3.

2. 2) (1) $\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{9\cdot 4+9\cdot 7}{9\cdot 9}\right)=\left(\frac{9\,[4+7]}{9\cdot 9}\right)=\left(\frac{4+7}{9}\right)$.

Da se dokaže:
$$\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)=\left(\frac{ac+bc}{cc}\right).$$
$$\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)=\left(\frac{a+b}{c}\right),$$

treba uočiti da je, na osnovu distributivnosti, $ac+bc=c\,(a+b)$. Znači tj. (teorema 2):

$$\left(\frac{ac+bc}{cc}\right)=\left(\frac{c\,[a+b]}{cc}\right)=\left(\frac{a+b}{c}\right).$$

3) (2) Po definiciji je $\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{7}{10}\right)=\left(\frac{5\cdot 10+7\cdot 8}{8\cdot 10}\right)$, tj. (distributivnost u brojiocu) $=\left(\frac{2\,[5\cdot 5+7\cdot 4]}{8\cdot 10}\right)=\left(\frac{25+28}{40}\right)$.

Međutim, do tog rezultata možemo doći i neposrednije (teor. 1 i prethodna tačka **2**, 2): $\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{7}{10}\right)=\left(\frac{25}{40}\right)+\left(\frac{28}{40}\right)=\left(\frac{25+28}{40}\right)$, tj. svaki sabirak zamenimo ekvivalentnim brojem ali tako da su im imenioci jednaki. Pri tome, najbolje (najkraće) je izračunati najmanji zajednički multiplum imenilaca sabiraka.

Izvršite na taj način sva označena sabiranja.

3. 1) (1) $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)$ i $\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{cb+da}{db}\right)$.

Ali su a, b, c, d celi brojevi (za koje važi komutativnost množenja i sabiranja) i zato je:

$$\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{cb+da}{db}\right)=\left(\frac{bc+ad}{bd}\right)=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right).$$

(2) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\right]+\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)+\frac{e}{f}=\left(\frac{(ad)f+(bc)f+(bd)e}{(bd)f}\right)$

i $\quad\left(\frac{a}{b}\right)+\left[\left(\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{e}{f}\right)\right]=\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{cf+de}{df}\right)=\left(\frac{a(df)+b(cf)+b(de)}{b(df)}\right).$

Zašto je drugi rezultat jednak prvom?

(3) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right)$ i $\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{ca}{db}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right).$

(4) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\right]\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\frac{(ac)e}{(bd)f},$

$\left(\frac{a}{b}\right)\left[\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right]=\ldots$ (Dovršite.)

(5) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\right]\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{(ad)m+(bc)m}{(bd)n}=\frac{(ad+bc)m}{(bd)n},$

$\left[\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\right]\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{am}{bn}\right)+\left(\frac{cm}{dn}\right)=$

$=\left(\frac{(am)(dn)+(bn)(cm)}{(bn)(dn)}\right)=\ldots$

Kako su brojevi a, b, c, d, m, n celi, na osnovu asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti množenja celih brojeva, poslednji rezultat se može preraditi u:

$$\frac{n[(ad)m+(bc)m]}{n(bd)n}=\frac{(ad)m+(bc)m}{(bd)n},$$

tj. u prethodni rezultat, što dokazuje distributivnost množenja u množini racionalnih brojeva.

2) (1) $\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{6}{8}\right)+\left(\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{13}{8}\right)+\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{39}{24}\right)+\left(\frac{20}{24}\right)=\left(\frac{59}{24}\right).$

Ili, neposredno: $\left(\frac{18}{24}\right)+\left(\frac{20}{24}\right)+\left(\frac{21}{24}\right)=\left(\frac{18+20+21}{24}\right)=\left(\frac{59}{24}\right).$

Tako postupiti u svim slučajevima.

(6) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\right]\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right)=1;$

(8) $\left[\left(\frac{21}{44}\right)\left(\frac{22}{49}\right)\right]\left[\left(-\frac{13}{25}\right)\left(\frac{15}{52}\right)\right]=\left(-\frac{9}{280}\right).$

4. Rešiti svaki primer na razne načine koristeći sve zakone i sva pravila. Pod (5) je celishodno zameniti $-\frac{24}{13}$ ekvivalentnim razlomkom $-\frac{120}{65}$, pa primeniti distributivnost.

5. Sve se izračunava na osnovu (ili po analogiji) § 13.5 i § 19.6, t. **3**: $\frac{1}{10^8}$ je isto što i $\left(\frac{1}{10}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2x}\right)^4=\frac{1}{(2x)^4}=\frac{1}{32x^4}.$

3. Terminom nenegativni (racionalni) broj označavamo i neoznačeni „aritmetički" (racionalni) broj i pozitivni racionalni broj.

5) (2) Prema **2**.3 sve obrnuto.

§ 20.6.

3. 3) Posle primene pravila deljenja razlomaka primeniti § 14.1, t. **12** (a razumljivo i §§ 13.5 i 20.3, posebno t. **5**):

$$\frac{3a}{4b}:\frac{5a}{2b}=\frac{3a}{4b}\cdot\frac{2b}{5a}=\frac{3\cdot 2ab}{4\cdot 5ab}=\frac{3}{10};$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^3:\frac{2}{7}=\left[\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\frac{2}{7}\right]:\frac{2}{7}=\left(\frac{2}{7}\right)^2, \text{ ili } \left(\frac{2}{7}\right)^3:\frac{2}{7}=\left[\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\frac{2}{7}\right]:\frac{2}{7}=\left(\frac{2}{7}\right)^2;$$

$$\frac{8}{3}:\frac{16}{81}=\frac{8}{3}\cdot\frac{81}{16}=\frac{27}{2}, \text{ ali i } \left(\frac{8}{3}:\frac{4}{9}\right):\frac{4}{9}=\left(\frac{8}{3}:\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\right):\frac{4}{9}=\left(2:\frac{1}{3}\right):\frac{4}{9}=6:\frac{4}{9}=$$

$$=6\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{2}, \text{ jer } \frac{8}{3}:\frac{4}{3}=\frac{8:4}{3:3}=2;$$

$$\frac{5a}{7b^3}\cdot\frac{14b^2}{5a^2}=\frac{5\cdot 14ab^2}{7\cdot 5a^2b^3}=\frac{2ab^2}{aab^2b}=\frac{2}{ab},$$

$$\text{ili } \frac{5a}{7b^3}:\frac{5a^2}{14b^2}=\frac{5a}{7b^3}:\left(\frac{5a}{7b^2}\cdot\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{5a}{7b^3}:\frac{5a}{7b^2}\right):\frac{a}{2}=\frac{1}{b}:\frac{a}{2}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{a}=\frac{2}{ab}.$$

§ 20.7

6. Pročitati ponovo § 13.7 i glavu XVI.

§ 20.8

3. 2) (1) $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; (2) $\{3, 4, 5, \ldots, 9\}$; (4) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; (6) $\{-1, 0, 1\}$; (7) $\{0\}$; (9) $\{\ \}$; (10) $\varnothing$.

4. 2) (5) $x>-2+\frac{3}{10}$, tj. $x>-\left(2-\frac{3}{10}\right)$, tj. $x>-\left(1+\frac{7}{10}\right).$

5. 2) (2) $\Leftrightarrow \frac{3}{5}y>6 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}y\right)\cdot\frac{5}{3}>6\cdot\frac{5}{3}\Rightarrow y>10.$

(4) $\ldots\Leftrightarrow -2x>6-\frac{5}{12}\Rightarrow -2x>5+\frac{7}{12}\Leftrightarrow(-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)>$

$>\left(5+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow x<-\frac{5}{2}-\frac{7}{24}\Rightarrow x<-\frac{67}{24}$, tj. $x<-\left(2+\frac{19}{24}\right).$

§ 20.9.

1. $\frac{2323}{9999}=\frac{23\cdot 100+23}{99\cdot 100+99}=\frac{23\,(100+1)}{99\,(100+1)}=\frac{23\cdot 101}{99\cdot 101}=\frac{23}{99}.$

2. Označimo sa b brojilac, sa i imenilac.
Tada je u slučaju:

(1) $b=n-1, \quad i=n, \quad i-b=1;$
(2) $b=n, \quad i=n+1, \quad i-b=1.$

To i pokazuje da su brojilac i imenilac međusobno prosti brojevi, jer brojevi koji se razlikuju za 1, tj. dva uzastopna prirodna broja, nemaju, osim 1, zajedničkih delilaca.

Slučaj (3) je malo teži, ali se i on može pokazati:

$$b^2-2i=4n^2+4n+1-4n^2-4n=1,$$

pa je i u tom slučaju nzd $(b, i)=1$.

3. $i^2-2i-9b=8$, tj. $i\,(i-2)-9b=8$. Ta jednakost pokazuje da ako brojilac (b) i imenilac (i) imaju zajednički prost delilac p, mora $p \mid 8$, tj. $p=2$. Obrnuto, ako $2 \mid i$, mora (to pokazuje jednakost) da $2 \mid 9b$, tj. $2 \mid b$. Prema tome, da $\frac{b}{i}$ bude sveden razlomak, nužno je i dovoljno da $2 \nmid i\ (=3n+1)$, tj. n mora biti paran broj.

Proverite taj zaključak, tj. uzmite $n=2k$ i $n=2k+1$, uvrstite u dati razlomak i računajte.

4. Neograničeno mnogo i oni se nalaze ovako: Neka je $\frac{a}{b}$ dati razlomak. Tada je: $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$, tj. $ab+bx=ab+ay \Leftrightarrow bx=ay \Leftrightarrow x=\frac{ay}{b}$.

Brojevi a i b su međusobno prosti. Znači, da bi x bio ceo broj, mora $b \mid y$, $y \in Z$. A kako ima neograničeno mnogo multipluma broja b, ima neograničeno mnogo celih brojeva x i y.

Proverite kad je dat, npr. $\frac{2}{3}$.

5. 1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$

2) Na osnovu prethodnog je:

$\frac{a+b}{b}=\frac{x+y}{y}$, tj. $\frac{s}{y}=\frac{a+b}{b} \Leftrightarrow y\,(a+b)=bs \Leftrightarrow y=\frac{bs}{a+b}$; $\frac{x}{y}=\frac{51}{57}$.

3) Analogan postupak $\frac{x}{y}=\frac{85}{45}$.

6. (1) $\left(\frac{748}{9317}\right)$; (2) i (3) Lakše je ako računate reduciranim brojevima. (4) $\left(\frac{x}{y}\right)[1+1]=2\frac{x}{y}$; (5) $\frac{x}{y}\left[\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right]=$ (Primenjena je, dakle, distributivnost, jer $\frac{2x}{2y}\cong\frac{x}{y}$; $\frac{2x}{3y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y}$, . . . Proverite izračunavajući na osnovu definicija.)

7. (1) i (2) je nemoguće. Zašto? Pogledajte imenioce. (3) $x=4$.

8. (6) $\frac{1}{3}$; (7) Namerno smo slučaj ostavili bez srednjih zagrada da bi se videlo da nije svejedno da li se prvo množi ili deli. Naime $\frac{a}{b}:\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\right]=\frac{a}{b}:\frac{a^2}{b^2}$ i $\left[\frac{a}{b}:\frac{a}{b}\right]\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$. Dakle, takvi slučajevi nisu asocijativni.

9. 1) Elementi su oblika $\frac{1}{1}$, $\frac{2^n}{1}$ ili $\frac{1}{2^n}$ pa je množina M zatvorena u odnosu na množenje. Množenje je komutativno i asocijativno. Data množina sadrži neutralni element $\frac{1}{1}$ i recipročne elemente jer su $\frac{1}{1}$ i $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2^n}$ i $\frac{2^n}{1}$ recipročni brojevi.

10. Prema § 20.5, t. **3.** Broj koji nije reduciran prvo reducirati. (4) i (5) je očigledno jer je $\frac{2a}{b}=\frac{a}{b}\cdot 2$; $\frac{2}{3b}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2}{3}$, tj. $\frac{2}{3}$ od $\frac{1}{b}$.

11. § 20.6, t. **4.** Prvo reducirajte nereducirane brojeve.

13. Nzm $(3, 9, 6)=18$. **14.** $\frac{c}{d}=\frac{bn}{a}$, gde $a \nmid n$. Ako je $|\,c\,|<|\,d\,|$, broj brojeva $\frac{c}{d}$ je jednak količniku deljenja broja a brojem $b(a=bq+r)$.

15. Analogno prethodnom: $\frac{c}{d}=\frac{an}{b}$, $b \nmid n$.

16. (2) $\Rightarrow 7-(7-x-13)=-13 \Rightarrow x+13=-13 \Leftrightarrow x=-26$.

17. (2) $x=ab$; (3) $x=-bc$; (4) $y=5$.

18. (1) $x=110$; (2) $x=-10$; (3) $x=10000$.

19. (1) $-x-a=b \Leftrightarrow -x=b+a \Leftrightarrow x=-b-a \Rightarrow x=-(a+b)$.

20. (1) $x \in Z$: $\{4, 5\}$; (2) $x \in Q: x<4$; (3) $x>5$.

§ 21.1.

2. 2) Prvi slučaj: $2^h\cdot 2^{k-h}\cdot 5^k=2^{h+k-h}\cdot 5^k=2^k\cdot 5^k$.
Treći slučaj: $2^h\cdot 5^k\cdot 5^{h-k}=2^h\cdot 5^{k+h-k}=2^h\cdot 5^h$.

§ 21.4.

4. (5) 0,0000000000101. (7) $\frac{40}{127}$.

§ 21.5.

1. 2) Sve što je tu izloženo može se čitati samo olovkom u ruci, tj. proveravanjem svih izračunavanja.

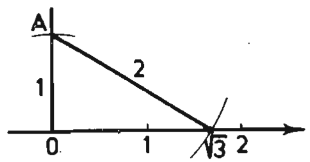
3) (1) 2,1; 2,105; 2,1053; (2) 0,6; 0,65; 0,649;
(3) 1,2; 1,18; 1,1846; (4) 0,314; 0,31426;
(5) 2; 1,73; (6) 0,8; 0,78; 0,778;
(7) 0,14; 0,136; (8) 0,4; 0,41; 0,40625.

(7) i (8) su decimalni brojevi. Dakle, i decimalni brojevi se aproksimiraju po istom pravilu.

3. 3) (1) $\left(\frac{4}{11}\right)$; (2) $\left(\frac{26}{111}\right)$; (3) $\left(\frac{83}{330}\right)$; (4) $\left(\frac{1}{2}\right)$; (5) $\left(\frac{5}{99}\right)$; (6) $\left(\frac{67}{30}\right)$; (7) $\left(\frac{2}{7}\right)$; (8) $\left(\frac{1}{3}\right)$.

§ 21.6.

3. 1) Potpuno analogno dokazima da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Dobija se jednakost $a^2=3b^2$. Kako $3b^2$ sadrži činilac 3, mora i a^2 da sadrži taj činilac (jer $a^2=3b^2$ kaže da je a^2 i $3b^2$ isti broj). A kako je $a^2=aa$, i a mora da sadrži činilac 3. Znači, $a=3k$, $a^2=9k^2$, pa kad to stavimo u $a^2=3b^2$, dobijamo $9k^2=3b^2$, tj. $3k^2=b^2$, što pokazuje da i b sadrži činilac 3, tj. a i b nisu međusobno prosti brojevi kako smo pretpostavili. Dakle, pretpostavka se ne može održati, 3 nije racionalan broj $\frac{a}{b}$.



Slika 52

Konstrukcija tačke $\sqrt{3}$ prikazana je crtežom 52 (jer je $3=4-1=2^2-1$, $\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1})$.

Dokažite samostalno da su $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ iracionalni brojevi i konstruišite odgovarajuće tačke prave brojeva ($\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{2^2+1}$; $\sqrt{7}=\sqrt{16-9}$).

3) Nije teško uočiti kako se ređaju decimale broja (α): 1 pa jedna nula, 1 pa dve nule, 1 pa tri nule, itd. Kako se ređaju decimale broja (β), broja (γ)?

4. 3) Samo $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}$. Svi ostali su iracionalni brojevi.

§ 21.7.

2. 5) Kad n raste, $\frac{1}{10^n}$ opada [npr. $\frac{1}{10^8}=\frac{1}{100000000}$ (jedinice), $\frac{1}{10^{16}}$ je dvaput manji od prethodnog, itd.], to jest kad broj n raste neograničeno, broj $\frac{1}{10^n}$ teži nuli, što znači da se $d_n'=d_n+\frac{1}{10^n}$ svodi na $d_n'=d_n$, tj. da se interval λ_n svodi na tačku.

3. 1) Izražava eksplicitno prethodni opšti zaključak.

3) Iako se obično uzima da nula (0) nije ni pozitivan, ni negativan broj, strogo uzev 0 je i pozitivan i negativan broj (to zahteva i relacija totalnog reda).

8) r i $-r$ su simetrični brojevi.

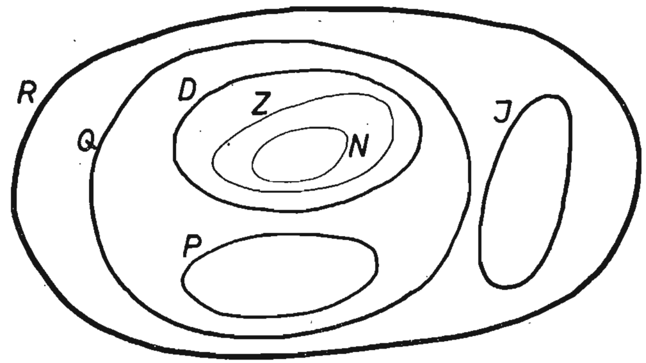
9) Definicija oduzimanja u množini R.

11) Čitaj: (1) Iz $a<b$ i $c<d$ sledi $a+c<b+d$. I slično dalje.

4. Množina realnih brojeva snabdevena sabiranjem i množenjem $(R, +, \cdot)$ zove se polje. Svako polje ima strukturu prstena.

§ 21.8.

2. 2) Slika 53.



Slika 53

§ 21.9.

1. 4) (1) 3, 6, 9, . . . (Produžite.)
(2) 1, 4, 9, . . . (Produžite.)
(4) 2, 6, 12, 20, . . . (Produžite.)

5) (1) $x_n=7n-5$ ili $x_n=2+(n-1)\cdot 7$, pa je $x_{15}=7\cdot 15-5=100$.
(2) $x_n=32-5n$ ili $x_n=27+(n-1)(-5)$,

pa je 30. član $32-5\cdot 30=32-150=-118$, ili $27+(30-1)(-5)=27+29\cdot(-5)=-118$.

(3) $x_n=\frac{1}{2n}$ pa je $x_{73}=\frac{1}{146}$. (4) $x_n=\frac{1}{n^2}$, $x_{20}=\frac{1}{400}$.

(5) To je niz prirodnih brojeva, tj. $N_1=N\setminus\{0\}$.

(6) $x_n=10n-35$ ili $-25+(n-1)\,10$, pa je $x_{51}=475$.

(7) $x_n=n^2$. (8) $x_n=\frac{3}{10^n}$, pa je $x_{23}=\frac{3}{10^{23}}=0,\underbrace{00\ldots0}_{\text{Koliko?}}3$.

3. 1) Razlika dva uzastopna člana istog niza je stalan broj:

$$a_n=a_1+(n-1)\,d.$$

2) $a_{13}=107$; $a_{70}=-1027$; $a_{13}=\frac{19}{3}$; $a_{17}=5,2$.

4) (1) $a_{10}=4+9\cdot 5=49$, $s_{10}=\frac{10}{2}(4+49)=5\cdot 53=$

(2) $a_{10}=-12+9\cdot 3=$, $s_{10}=\frac{10}{2}(-24+9\cdot 3)=$

(3) $s_{12}=68$; (5) $s_{100}=50\cdot 101$; (6) 12960;

(7) 1026; (8) 2508; (9) $104+(n-1)\,8=400$;

(10) $104+(n-1)\,8=400$, $8\,(n-1)=400-104$, $n-1=37$, $n=38,\ldots$

(11) Analogno rešavanju (9).

(12) i (13) Može prema opštoj formuli jer je $\frac{n}{2}(2+2n)=n\,(n+1)$ i $\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$. Ali i ovako:

$$2+6+8+\ldots+2n=2\,(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\frac{n}{2}(n+1)=n\,(n+1)$$

$$1+3=4=2^2,\ 1+3+5=9=3^2,\ 1+3+5+\ldots+n=n^2,$$

tj. metodom analogije.

Ili: $1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{n}{2}(n+1)-\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\left(n+1-\frac{n}{2}-1\right)=$
$=\left(\frac{n}{2}\right)^2$ (jer je broj neparnih brojeva $\frac{n}{2}$).

5) (2) 2,9; 5; 7,1; 9,2; 11,3; 13,4.

6) (1) 19,9; (2) 20; (3) $\frac{22}{35}$; (4) $\frac{5}{36}$.

4. 1) Svaki član (svakog od tih nizova) dobija se množenjem prethodnog jednim stalnim brojem. Ili, što je isto, količnik dva uzastopna broja je stalan broj. Zaista, svaki član niza:

1) (2) je proizvod prethodnog člana i broja 2, i količnik ma kog člana i njegovog prethodnika je 2;

(3) je proizvod prethodnog člana i broja $\frac{1}{2}$, ili količnik ma kog člana i njegovog prethodnika je . . .;

2) (8) je proizvod prethodnog i broja $0{,}1=\frac{1}{10}$, ili količnik ma kog člana i prethodnog je 0,1;

(9) je proizvod prethodnog i broja $0{,}01=\frac{1}{100}$, ili . . .;

(10) je proizvod prethodnog i broja $\frac{1}{2}$, ili količnik . . .

3) (1) $s_5=484$; (2) 252; (3) $s_6=-63$; (4) $\frac{728}{81}$; (5) $-16{,}625$.

4) (1) 10, 20, . . .; (2) $q^5=\frac{1}{32}$, $q=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}$, pa je 192, 96, 48, 24;
(3) -54, 18, $-6{,}2$.

2. $0{,}002=\frac{1}{2^2\cdot 5^3}$; $17{,}856=\frac{2232}{5^3}$.

4. (1) 1; (2) 15; (3) 103; (4) 207.

5. $(101{,}1)_2=\left(2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(5+\frac{1}{2}\right)_{10}$

$(0{,}001)_2=\left(\frac{1}{2^3_{10}}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)_{10}$.

6. 1) $\frac{2}{3}=\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)_3=(0{,}2)_3$; $\frac{6}{54}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}=(0{,}01)_3$; $\frac{9}{12}$ ne može;

$\frac{5}{9}=5\cdot\frac{1}{3^2}=\left(12\cdot\frac{1}{3^2}\right)_3=\left(\frac{12}{100}\right)_3=(0{,}12)_3$.

2) Nije moguće.

7. 1) (1) $\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}=0{,}25$; (2) $\frac{1}{2^3}=0{,}125$.

2) nzd $(a,\ 2)=1$. 4) nzd $(a,\ 10)=1$.

8. 1) (1) 1001,011; (2) 10,1111; (3) 0,101; (4) 110,001.
2) (1) 1110,20; (2) 221,101; (3) 10,22; (4) 202.
3) (1) 456,118; (2) 3,014; (3) 53,53; (4) 74,16.

9. 0,41666 . . .; 0, (45); 0,428571428571 . . .
0, (153846); 0,1176470588235294 . . .

10. $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{41}{333}$; $\frac{25}{999}$; $\frac{413}{66}$.

11. Vidite i t. **6**: $\left(\frac{5}{11}\right)_{11}=0{,}5$; $\left(\frac{2}{7}\right)_7=0{,}2$; $\left(\frac{5}{9}\right)_9=0{,}5$; 1,2; 0,8; 0,9; 1,625.

12. 1) $\frac{41}{90}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{71}{90}$, 0,7(8); $\frac{4}{11}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{50}{77}$, 0,(64935); $\frac{7}{30}$, $\frac{8}{30}$, $\frac{1}{2}$, 0,5.

2) Nije, npr., $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ (ili poslednji primer pod 1).

3) $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{14}{225}$, 0,06(2); $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{4}$, 0,25.

4) Nije. Vidi poslednji primer.

13. 1) $\sqrt{2}=x$, $\sqrt{3}=y$, $x^2=2$, $y^2=3$, $x^2\cdot y^2=6$, $(xy)^2=6$, $xy=\sqrt{6}$.

2) Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=z$ racionalan broj. Tada je $(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})^2=z^2$, tj. $2x^2+2xy\sqrt{6}+3y^2=z^2$, tj. $2xy\sqrt{6}=z^2-2x^2-3y^2$, tj. $\sqrt{6}=(z^2-2x^2-3y^2):2xy$, a to je protivrečnost, jer je $\sqrt{6}$ iracionalan broj a desna strana (poslednje jednakosti) je racionalan broj.

4) (1) $a_{10}=4+9\cdot 5=49$, $s_{10}=\frac{10}{2}(4+49)=5\cdot 53=$

(2) $a_{10}=-12+9\cdot 3=$, $s_{10}=\frac{10}{2}(-24+9\cdot 3)=$

(3) $s_{12}=68$; (5) $s_{100}=50\cdot 101$; (6) 12960;

(7) 1026; (8) 2508; (9) $104+(n-1)\,8=400$;

(10) $104+(n-1)\,8=400$, $8\,(n-1)=400-104$, $n-1=37$, $n=38, \ldots$

(11) Analogno rešavanju (9).

(12) i (13) Može prema opštoj formuli jer je $\frac{n}{2}(2+2n)=n\,(n+1)$ i $\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2$. Ali i ovako:

$$2+6+8+\ldots+2n=2\,(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\frac{n}{2}(n+1)=n\,(n+1)$$

$$1+3=4=2^2,\ 1+3+5=9=3^2,\ 1+3+5+\ldots+n=n^2,$$

tj. metodom analogije.

Ili: $1+3+5+\ldots+2n-1=\frac{n}{2}(n+1)-\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\left(n+1-\frac{n}{2}-1\right)=$ $=\left(\frac{n}{2}\right)^2$ (jer je broj neparnih brojeva $\frac{n}{2}$).

5) (2) 2,9; 5; 7,1; 9,2; 11,3; 13,4.

6) (1) 19,9; (2) 20; (3) $\frac{22}{35}$; (4) $\frac{5}{36}$.

4. 1) Svaki član (svakog od tih nizova) dobija se množenjem prethodnog jednim stalnim brojem. Ili, što je isto, količnik dva uzastopna broja je stalan broj. Zaista, svaki član niza:

1) (2) je proizvod prethodnog člana i broja 2, i količnik ma kog člana i njegovog prethodnika je 2;

(3) je proizvod prethodnog člana i broja $\frac{1}{2}$, ili količnik ma kog člana i njegovog prethodnika je . . .;

2) (8) je proizvod prethodnog i broja $0{,}1=\frac{1}{10}$, ili količnik ma kog člana i prethodnog je 0,1;

(9) je proizvod prethodnog i broja $0{,}01=\frac{1}{100}$, ili . . .;

(10) je proizvod prethodnog i broja $\frac{1}{2}$, ili količnik . . .

3) (1) $s_5=484$; (2) 252; (3) $s_6=-63$; (4) $\frac{728}{81}$; (5) $-16{,}625$.

4) (1) 10, 20, . . .; (2) $q^5=\frac{1}{32}$, $q=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}=\frac{1}{2}$, pa je 192, 96, 48, 24; (3) -54, 18, $-6{,}2$.

2. $0{,}002=\frac{1}{2^2\cdot 5^3}$; $17{,}856=\frac{2232}{5^3}$.

4. (1) 1; (2) 15; (3) 103; (4) 207.

5. $(101{,}1)_2=\left(2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(5+\frac{1}{2}\right)_{10}$

$(0{,}001)_2=\left(\frac{1}{2^3_{10}}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)_{10}$.

6. 1) $\frac{2}{3}=\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)_3=(0{,}2)_3$; $\frac{6}{54}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}=(0{,}01)_3$; $\frac{9}{12}$ ne može;

$$\frac{5}{9}=5\cdot\frac{1}{3^2}=\left(12\cdot\frac{1}{3^2}\right)_3=\left(\frac{12}{100}\right)_3=(0{,}12)_3.$$

2) Nije moguće.

7. 1) (1) $\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}=0{,}25$; (2) $\frac{1}{2^3}=0{,}125$.

2) nzd $(a, 2)=1$. 4) nzd $(a, 10)=1$.

8. 1) (1) 1001,011; (2) 10,1111; (3) 0,101; (4) 110,001.

2) (1) 1110,20; (2) 221,101; (3) 10,22; (4) 202.

3) (1) 456,118; (2) 3,014; (3) 53,53; (4) 74,16.

9. 0,41666 . . .; 0, (45); 0,428571428571 . . .

0, (153846); 0,1176470588235294 . . .

10. $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{41}{333}$; $\frac{25}{999}$; $\frac{413}{66}$.

11. Vidite i t. **6**: $\left(\frac{5}{11}\right)_{11}=0{,}5$; $\left(\frac{2}{7}\right)_7=0{,}2$; $\left(\frac{5}{9}\right)_9=0{,}5$; 1,2; 0,8; 0,9; 1,625.

12. 1) $\frac{41}{90}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{71}{90}$, 0,7(8); $\frac{4}{11}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{50}{77}$, 0,(64935); $\frac{7}{30}$, $\frac{8}{30}$, $\frac{1}{2}$, 0,5.

2) Nije, npr., $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$ (ili poslednji primer pod 1).

3) $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{14}{225}$, 0,06(2); $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{4}$, 0,25.

4) Nije. Vidi poslednji primer.

13. 1) $\sqrt{2}=x$, $\sqrt{3}=y$, $x^2=2$, $y^2=3$, $x^2\cdot y^2=6$, $(xy)^2=6$, $xy=\sqrt{6}$.

2) Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=z$ racionalan broj. Tada je $(x\sqrt{2}+y\sqrt{3})^2=z^2$, tj. $2x^2+2xy\sqrt{6}+3y^2=z^2$, tj. $2xy\sqrt{6}=z^2-2x^2-3y^2$, tj. $\sqrt{6}=(z^2-2x^2-3y^2):2xy$, a to je protivrečnost, jer je $\sqrt{6}$ iracionalan broj a desna strana (poslednje jednakosti) je racionalan broj.

14. $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$. Videti i t. **12**.

15. 1) Tada je $a>b$. (Videti odgovarajuću definiciju, glava XX.)

2) (2) (a) ima (to je 17); (c) ima (to je 6); (d) ima (to je -4); (b) nema.

(3) (a) i (b) $\frac{2}{3}$; (c) 0,9; (d) $\frac{1}{9}$.

(4) Ima gornju granicu, npr. 2, 3, 1, 5, ali *nema najmanju gornju granicu*, tj. ne postoji najveći racionalni broj čiji je kvadrat manji od 2.

(5) Ima i to je iracionalan broj.

17. 2) 0. 3) Nije niz umetnutih intervala jer drugi uslov (b) nije ispunjen. 4) i 5) § 21.7, t. **5**: 0 i 3.

19. Tačka $-2+\sqrt{7}$ konstruiše se tako što se od tačke -2 prenese (u pozitivnom smeru) duž čija je mera $\sqrt{7}=\sqrt{16-9}=\sqrt{4^2-3^2}$.

20. 1) $0{,}5:0{,}03=\frac{50}{3}=16,(6)$. 2) § 20.6, t. **4** i § 21.9, t. **1**. 6. 3) § 22.6 i § 24.5.

21. 1) Ako $x\in R$, onda postoji $-x\in R$, pa je:

$$a+x+(-x)=b+x+(-x),\ \text{tj.}\ a+0=b+0.$$

2) Ako je $ab=0$, onda je ili $a=0$ ili $a\neq 0$. Ako je $a=0$, teorema je tačna. Ako $a\neq 0$, postoji $a^{-1}=\frac{1}{a}\in R$, tako da je $a\cdot\frac{1}{a}=1$. A tada je $(ab)=1\cdot b=0$, odakle sledi $b=0$.

3) Tada je $\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}(ac)$, tj. $1\cdot b=1\cdot c$, tj. $b=c$.

4) Tada postoji $d\in R$, tako da $b=a+d$, tj. $b+c=(a+d)+c=(a+c)+d$. Dakle, $b+c>a+c$.

5) Dokažimo: $ac<bc$, $c>0 \Rightarrow a<b$. Tada postoji $d>0$, $d\in R$ tako da je $ac+d=bc$, tj. $\frac{1}{c}(ac+d)=b$, tj. $a+\frac{d}{c}=b$. Kako je $\frac{d}{c}>0$, iz poslednje jednakosti sledi $a<b$. Dokažite sad za $c<0$.

22. 2) 4,(63) i $-\frac{1}{4,(63)}=-\frac{51}{11}$; $-\sqrt{2}$ i $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

23. (1) $\frac{1}{9}$; (2) $6\sqrt{2}$; (3) $3\frac{52}{55}$ i $3\frac{39}{55}$.

24. 256 (§ 21.8, t. **3**, 1).

25. Svaki od redova (1)—(6) je geometrijski pa se za izračunavanje njihovih zbirova može primeniti i postupak pokazan u § 21.5, t. **3** i postupak pokazan u 21.8, t. **4**, 2. Najbolje je primeniti oba, na primer:

$$(3)\quad x=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots$$

$$x=1+\frac{2}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots\right]$$

$$x=1+\frac{2}{3}x\Rightarrow x-\frac{2}{3}x=1\Rightarrow\frac{1}{3}x=1\Leftrightarrow x=3.$$

I (§ 21.8): $a_1=1$, $q=\frac{2}{3}$. Otuda: $s_n=1\cdot\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=1:\frac{1}{3}=3$, jer kad n raste neograničeno, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ teži nuli. Može se dokazati teorema da ako prirodni broj n raste neograničeno i ako je realni broj:

$|a|>1$, onda $|a^n|$ raste neograničeno;

$|a|<1$, onda a^n teži nuli.

I redovi (7) i (8) su geometrijski pa se i na njih može primeniti § 21.8, t. **4**, 2, ali oni se ponašaju kao red prikazan crtežom 21.15.

Rezultati su: (1) 2; (2) $\frac{3}{2}$; (4) $\frac{4}{3}$; (5) 3; (6) 9; (7) $\frac{2}{3}$; (8) $\frac{16}{7}$.

§ 22.1.

2. 4) (1) Crtež (4) prikazuje *konveksni* mnogougao.

(2) Ako je oblast mnogougla konveksna množina, on je „konveksan".

(3) Ako su sve tačke svake dijagonale unutrašnje tačke (prostog) mnogougla, mnogougao je konveksan. Ako taj uslov nije ispunjen (makar za jedan „delić" jedne dijagonale), mnogougao nije konveksan (on je konkavan).

Važna primedba. — Na osnovu onoga što je rečeno o konveksnosti množina, osim prave (i duži pod uslovom da nijedna njena tačka nije isključena), nijedna druga linija (posmatrana kao jedna množina tačaka) nije, i ne može da bude, konveksna. Međutim, ako je oblast koju određena linija ograničuje konveksna, kažemo da je i njena granica „konveksna". To je potrebno u nekim slučajevima radi kraćeg i preciznijeg izražavanja. (Uporediti napomenu na kraju § 5.1.)

5) Broj dijagonala $=\frac{n(n-3)}{2}$. Jer iz svakog temena izlazi $n-3$ dijagonala, ali se po dve poklapaju. Prema tome:

petougao ima $\frac{5(5-3)}{2}=5$ dijagonala;

sedmougao ima $\frac{7(7-3)}{2}=14$ dijagonala;

osamdesetougao ima $\frac{80(80-3)}{2}=40\cdot 77$ dijagonala.

6) Zasad znate: jednakostranični trougao, kvadrat i romb.

7) Zasad znate: jednakostranični trougao, kvadrat i pravougaonik.

3. 2) Kružnicu (čija se oblast zove krug) i (verovatno poznajete) elipsu. (Ili, kako smo napomenuli: krug, čija se oblast zove disk, i elipsa.)

§ 22.2.

5. 3) Jednu stalnu tačku C i krajeve svih mogućih podudarnih duži $[CT_1]$, $[CT_2]$, $[CT_3], \ldots$ Tačke T_1, T_2, $T_3, \ldots$ čine množinu koja se zove sfera.

§ 22.3.

1. 1) O bižekciji je bilo mnogo reči ranije. Ovde znači da svakoj tački M figure $\boldsymbol{F}$ odgovara tačka M' figure $\boldsymbol{F}'$ i obrnuto.

3) Glava VI: (1) Svaka figura je podudarna samoj sebi (refleksivnost). (2) Ako je $\boldsymbol{F} \cong \boldsymbol{F}'$, onda je i $\boldsymbol{F}' \cong \boldsymbol{F}$ (simetričnost). (3) Ako je $\boldsymbol{F} \cong \boldsymbol{F}'$, a $\boldsymbol{F}' \cong \boldsymbol{F}''$, onda . . . (tranzitivnost).

3. 4) Jeste. Obrazloženje kao u slučaju podudarnosti.

5) (1) Nisu. (2) Jesu. 6) (1) Nisu. (2) Jesu.

7) Ispunjeni su svi uslovi definicije. „Objasnite" to bliže.

8) (1) Stranice pravougaonika $\boldsymbol{P}_2$ moraju biti kongruentne stranicama drugog. (2) Ako je jedna stranica pravougaonika $\boldsymbol{P}_1$ k puta veća od jedne stranice pravougaonika $\boldsymbol{P}_2$, onda i susedna stranica pravougaonika $\boldsymbol{P}_1$ mora biti k puta veća od druge stranice pravougaonika $\boldsymbol{P}_2$.

10) U slučaju podudarnosti je $k=1$.

§ 22.4.

2. Više nego ma šta drugo potrebno je nekoliko puta samostalno reprodukovati sve što se ovde izlaže.

6. 3) Zato što je dužina poluprečnika 1.

§ 22.5.

3. 2) To je ista „stvar", isti pojam, ista relacija između elemenata dve množine ili iste množine.

§ 22.6.

3. 2) Potpuno analogno ravnim figurama. Vidite *važnu primedbu* Uputstava, § 22.1, t. **2.**

6. 3) $[OA'] = 3[OA]$, $[OA''] = \frac{1}{2}[OA]$.

4) Nacrtajte polupravu paralelnu sa $[CD]$. Odmerite tri njene duži, npr. $[EF] \cong [EG] \cong [GH]$. Presek pravih CE i DH je centar homotetije O. Poluprave OF i $OG \ldots$ Kad ne uspeva taj postupak?

7. 1) $\frac{3}{2} = 1{,}5$. 2) 1; 1,5; $\frac{1}{2}$; 3) $m[AB] = \frac{1}{3}$; . . .

8. $-\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$; $x - \frac{7}{15} = 1$, $x = 1\frac{7}{15}$ i $\frac{7}{15} - x = 1$, $x = \frac{7}{15} - 1 = -\frac{8}{15}$, . . . ; $x - 3\sqrt{3} = 1$, $x = 1 + 3\sqrt{3}$ i $x = 3\sqrt{3} - 1$.

9. (a) 1) $7\frac{1}{8}$ i $2\frac{7}{8}$. 2) $x > 7\frac{1}{8}$ i $x < 2\frac{7}{8}$.

3) $\left\{x \mid 5 < x < 7\frac{1}{8}\right\}$, tj. svi realni brojevi između 5 i $7\frac{1}{8}$ i $\left\{x \mid 2\frac{7}{8} < x < 5\right\}$. Dakle, svi realni brojevi između $2\frac{7}{8}$ i $7\frac{1}{8}$ osim 5. 4) $11\frac{3}{8}$ i $5 - 6\frac{3}{8} = -1\frac{3}{8}$.

(b) 1) $m[AB] = |(-2-1)| = |-3| = 3$, pa je $1\frac{1}{5} + 3 = 4\frac{1}{5}$ i $-1\frac{4}{5}$.

2) $x > 4\frac{1}{5}$ i $x < -1\frac{4}{5}$.

3) $\left\{x \mid 1\frac{1}{5} < x < 4\frac{1}{5}\right\}$ i $\left\{x \mid -1\frac{4}{5} < x < 1\frac{1}{5}\right\}$.

4) $1\frac{1}{5} + 3 \cdot 3 = 10\frac{1}{5}$ i $1\frac{1}{5} - 9 = -7\frac{4}{5}$.

10. (1) Apscisa tačke D je $-\frac{1}{4}$, pa je $m[AD] = \frac{1}{4}$.

(2) Apscisa tačke D je $11 - \frac{61}{7} = 2\frac{2}{7}$, pa je $m[AD] = \frac{16}{7}$.

(3) Apscisa tačke D može biti $-3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$ ili $-3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, pa je $m[AD] = \frac{9}{2}$ ili $\frac{3}{2}$.

(4) $m[AD] = \frac{10}{17}$ ili 0.

11. 1) (1) $m[AC] = 1{,}6 + 5{,}4 = 7$; (2) $9\frac{5}{12}$; (3) $m[AC]$;

(4) $m[CE] = 6\frac{5}{12} - 1{,}6 = 4\frac{49}{60}$; (6) $11\frac{49}{60}$; (7) i (8) $m[BC]$.

2) (1) $\{x \mid -5{,}4 \leqslant x \leqslant 1{,}6\}$; . . .

12. 1) Sa crteža je to očigledno. Ispitajte sve slučajeve.

2) Ispitajte slučaj kad su M_1 i M_2 konačne množine [tada su $m(M_1)$ i $m(M_2)$ prirodni brojevi] i kad su to oblasti.

15. 1) Prava koja sadrži stranicu $[AB]$ deli ravnu u dve poluravni. Osenčite onu kojoj pripada teme C. Osenčite poluravan čija je ivica $[AC]$ a kojoj pripada B. A dalje? Dakle . . .

16. (4) 17 m². **17.** (1) 28. (2) Projekcija stranice $[AD]$ na AB je $[AH]$, $(AH) = 3$ cm. [Jer $m(\angle BAD) = 30°$. A tada iz $\triangle AHD$ je $6^2 - 3^2 = 27$, tj. $m(HD) = \sqrt{27}$ cm, pa površina iznosi $(10{,}5 \cdot 3\sqrt{3})$ cm² $\approx (10{,}5 \cdot 3{,}2)$ cm².]

(3) $(AH) = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$, $(AD)^2 - (AH)^2 = (HD)^2$, tj. $(HD) = 3$ dm, pa je $p = (2 \cdot 3)$ dm². (Konstruišite taj paralelogram pa proverite.)

(4) $(HD) = 12$ m, pa je $p = (5 \cdot 12)$ m². (5) 42 (romb).

18. 1) π^2, $2\pi\sqrt{\pi}$. 2) $4\pi\sqrt{3}$ dm u 12π dm^2.

19. 48π cm^2 i $32\pi\sqrt{3}$ cm^3.

20. 1) $m[OA]=5$. 2) $m[OB]=4$ (Pitagorina teorema).

§ **23.2.**

4. 3) (1) 0,3; (2) 2; (3) 0,030 ($=0{,}02961 \approx 0{,}030$, videti § 23.1, t. **4**); (4) 353; (5) 4200 (sa tačnošću do 1).

4) 24 t 5) 9,6 t

5. 2) (1) 3; (2) 2470; (3) 0,14; (4) 213; (5) 0,4; (6) 4800; (7) 0,0715;

3) 18 časova 4) 850 m 5) 17 t

§ **24.1.**

2. 1) Za dva uređena para tačaka (u, v) i (x, y) kažemo da su vezana paralelogramom ako tačke u, v, y, x, uzete baš tim redom, određuju paralelogram.

§ **24.2.**

1. 2) Jesu, osim jednog. Pokažite ga i objasnite zašto nije ekvipolentan ostalima.

3. Jeste, jer ako su tačke a, b, d, c uzastopna temena paralelograma, onda su očigledno i b, a, c, d uzastopna temena istog paralelograma.

[Jasno je da strelica od a ka b označava par (a, b), a obrnuta strelica označava suprotni par (b, a). Drukčije se, u ovom slučaju, ne mogu prikazati suprotni parovi.]

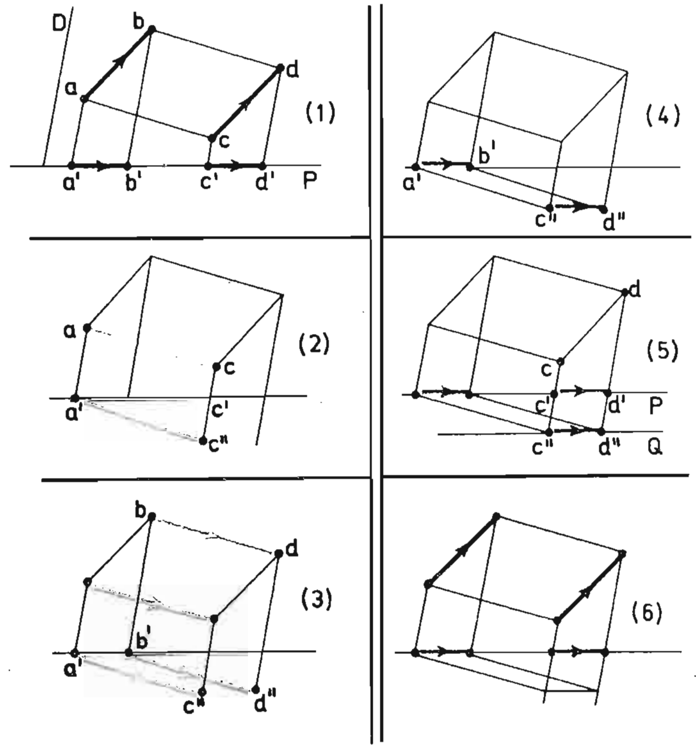
4. (a, b) ▱ $(c, d) \Rightarrow (a, c)$ ▱ (b, d), što je očigledno [jer ako su a, b, d, c uzastopna temena paralelograma, onda . . .

§ **24.3.**

1. 1) Iz uslova sledi da su $p(a)$, $p(b)$, $p'(b)$ i $p'(a)$ temena paralelograma [$P' \| P$, $ap''(a) \| bp''(b)$]. Iz istih razloga tačke $p'(a)$, $p'(b)$, $p''(b)$ i $p''(a)$ su temena paralelograma. Dalje, tranzitivnost (§ 24.2, t. **1**, 3).

2) To su identični parovi, a svi identični parovi su ekvipolentni [§ 24.1, t. **3** (3)].

2. 1) Crtež (1): $(a, b)\uparrow(c, d)$; (a', b') i (c', d') njihove paralelne projekcije na P za (D). Treba dokazati: $(a', b')\uparrow(c', d')$.



Slika 54

Crtež (2): Poluprava koja izlazi iz a' paralelno sa ac seče cc' u c''. Kako je i $aa' \| cc'$, tačke a, c, c'', a' određuju paralelogram, pa je $(a', c'')\uparrow(a, c)$.

Crtež (3): Analogno prethodnom, pa je $(b', d'')\uparrow(b, d)$.

Iz dobijene [pod (2) i (3)] dve ekvivalencije, a na osnovu 24.2, t. **4**, sledi:

$$(a', c'')\uparrow(b', d'').$$

Odatle, opet na osnovu 24.2, t. **4**, sledi [crtež (4)]:

$$(a', b')\uparrow(c'', d'').$$

A iz te ekvipolencije sledi [crtež (5)] paralelnost $Q \| P$, tj. (prethodna tačka 1):

$$(c'', d'')\uparrow(c', d').$$

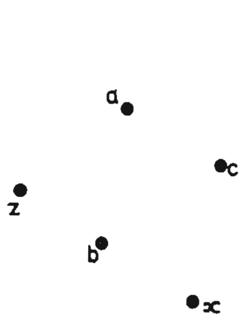
Poslednje dve ekvipolencije daju (§ 24.2, t. **1**):

$$(a', c')\uparrow(c', d'),$$

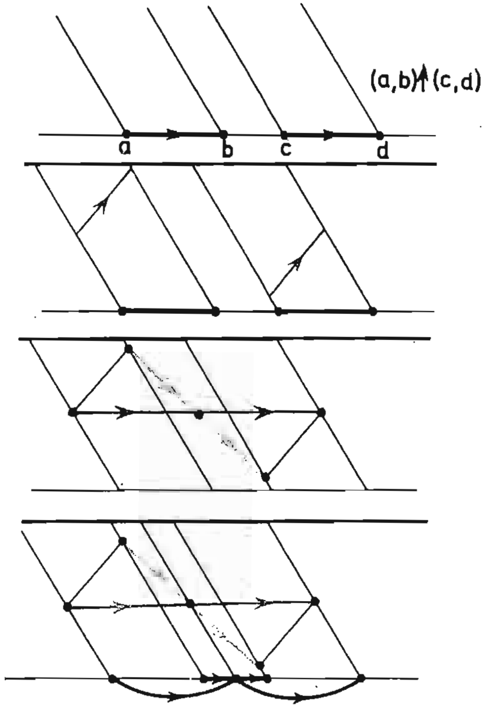
tj. ono što treba dokazati [crtež (6)].

5. 1) Rešenje pokazuje crtež 61. 3) Jesu. Oba ↄ, § 24.5, t. **3** i t. **2**.
5) Iskoristiti teoremu 5 (§ 24.5).

6. To je problem 2 (§ 24.5, t. **2**).



Slika 61



Slika 62

7. Razlikujte dva slučaja: (1) e, f, h, k nisu kolinearne; (2) kolinearne su.

9. $(b, d)\uparrow \ldots$ i $(b, c)\uparrow \ldots$ (Dovršite.)

11. U oba slučaja: dve prave paralelne sa B, ali ... Prikažite svaki slučaj crtežom.

12. Dokaz je prikazan „filmom" (sl. 62).

13. (m, b, c, n) je paralelogram, a onda § 24.4, t. **2** i **3**. Ili: $(a, m)\uparrow(n, c)$ i § 24.5, t. **1**.

14. § 24.4, t. **3**. Ili: § 24.5, t. **3** i t. **5** ovog §.

15. § 24.4, t. **3**, 2. Ili: (a, e, d, f) je paralelogram (§ 24.5, t. **3**), a tada § 25.5, t. **1**.

16. Ako posmatrate triplet (b, p, e), tačka d je (§ 24.4) sredina para $(b, e,)$, a ako posmatrate triplet (a, d, c), tačka e je (isti §) sredina para (d, c).

17. Iako složen, zadatak (inače dobro poznat) nije težak:

1) (1) $(m, n)\uparrow(q, p)$, jer je $mn \parallel ac \parallel pq\ [qp]$ (§ 24.4).

(2) Posle (1) § 24.5, t. **1**, uzimajući u obzir i da je $(m, x)\uparrow(a, q)\uparrow(y, p)$ (§ 24.4).

(3) Posle (1) i (2) to je očigledno.

2) Na osnovu prethodnih rasuđivanja, ili istim rasuđivanjima, nalazi se da svaka množina tačaka definiše paralelogram.

18. Iz konstrukcija sledi $(b, y)\uparrow(c, d)$, a tada § 24.5, t. **1**.

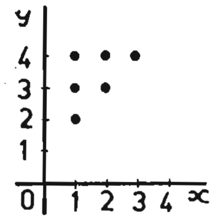
19. (1) $(d, n)\uparrow(m, b)$.
(2) Rasuđivanje kao u prethodnoj t. **16**.

20. 1) § 24.5, t. **2**, 1. 2) § 24.4, t. **5**, 3.

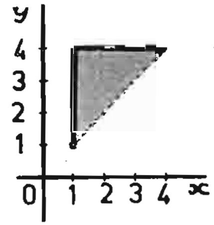
GLAVA XXV

Ovde su uputstva i rešenja, namerno, vrlo oskudna.

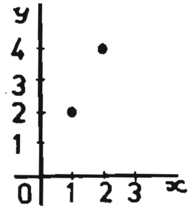
24. 2) Dva nisu. 3) Crtež 63. 4) Crtež 64. $6>4$, $\sqrt{21}>4$, pa $(6, \sqrt{21})$ nije element. (2,2) nije jer nije $y>x$, a (2, 2,001) zadovoljava taj uslov.



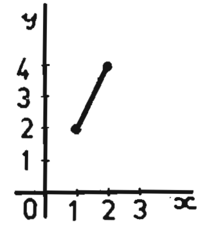
Slika 63



Slika 64



Slika 65



Slika 66

26. 2) {(0, 1), (0, 2), (0, 3), . . . , (1, 2), (1, 3), (1, 4), . . . , (2, 3), (2, 4), (2, 5), . . . , (3, 4), (3, 5), (3, 6), . . .}
3) {(1, 2), (1, 3), . . . , (2, 4), (2, 6), (2, 8), . . . , (3, 6), (3, 9), (3, 12), . . . , (4, 8), (4, 12), (4, 10), . . .}

27. 1) (1) Nije. (3) Jeste, samo da li množina može da sadrži dva ista elementa?