ПОПУЛАРНА КЊИГА

Уредник
Добривоје Дикић

Ј. ПЕРЕЉМАН

ЗАНИМЉИВА ГЕОМЕТРИЈА

НАРОДНА КЊИГА
БЕОГРАД 1958

Наслов оригинала
Я. И. Перельман:
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Превела с руског
Милица Илић-Дајовић

Насловна страна
Раш̄ка Руварца

ПРВИ ДЕО
ГЕОМЕТРИЈА У ПРИРОДИ

Природа говори језиком математике: слова тог језика су кругови, троугли и друге математичке фигуре.

Галилеј

ГЛАВА ПРВА

ГЕОМЕТРИЈА У ШУМИ

ПРЕМА ДУЖИНИ СЕНКЕ

Још сада се сећам оног дивљења с којим сам први пут посматрао седог шумара који је, стојећи поред огромног бора, мерио његову висину малом џепном справом. Када је старац управио своју квадратну дашчицу према врху дрвета, ја сам очекивао да ће он одмах почети да се вере уз дрво са метарском врпцом у руци. Уместо тога он је справицу вратио у џеп и рекао да је мерење свршено. А ја сам мислио да још није ни почело...

Тада сам био још дете и такав начин мерења којим човек одређује висину дрвета а да га није претходно оборио нити му се попео на врх изгледао је у мојим очима као неко мало чудо. Тек касније, када су ме научили елементарним стварима из геометрије, схватио сам како се просто догађају таква чуда. Постоји много различитих начина извођења таквих мерења помоћу веома једноставних справа и чак и без икаквих прилагођавања.

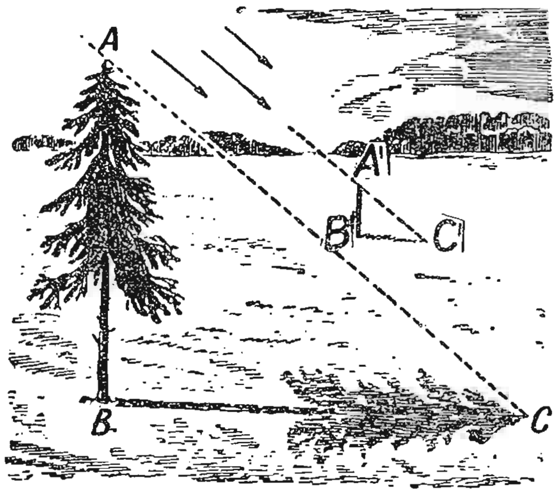
Најлакши и најстарији је, бесумње, онај начин којим је грчки мудрац Талес, шест векова пре наше ере, одредио у Египту висину пирамиде. Он се користио сенком. Фараон и свештеници окупљени у подножју највише пирамиде задивљено су посматрали дошљака са севера који је на основу сенке одгонетнуо висину огромне грађевине. Талес је, прича предање, изабрао дан и час кад је дужина његове сопствене сенке била једнака висини његовог раста; у том тренутку висина пирамиде треба такође да буде једнака дужини сенке пирамиде*). Ето то је, можда, једини случај кад човек може да извуче неку корист од своје сенке...

Данас нам задатак грчког мудраца изгледа једноставан као за децу, али не смемо заборавити да га ми посматрамо с висине величанствене зграде геометрије која је подигнута тек после

---

*) Разуме се, дужину сенке требало је рачунати од центра квадратне основе пирамиде; ширину те основе Талес је могао измерити непосредно.

Талеса. Триста година пре наше ере грчки математичар Еуклид написао је изванредну књигу по којој су учили геометри у току два миленијума после његове смрти. Истине које су у тој књизи садржане, данас познате сваком ученику, у Талесово време још нису биле откривене. А да би се за решавање задатка о висини пирамиде користило сенком, требало је већ знати неке геометриске особине троугла, и то ове две особине (од којих је прву открио сам Талес):



Сл. 1. Мерење висине дрвета помоћу његове сенке

1) углови на основици једнакокраког троугла су једнаки, и обратно, странице наспрам једнаких углова троугла једнаке су;

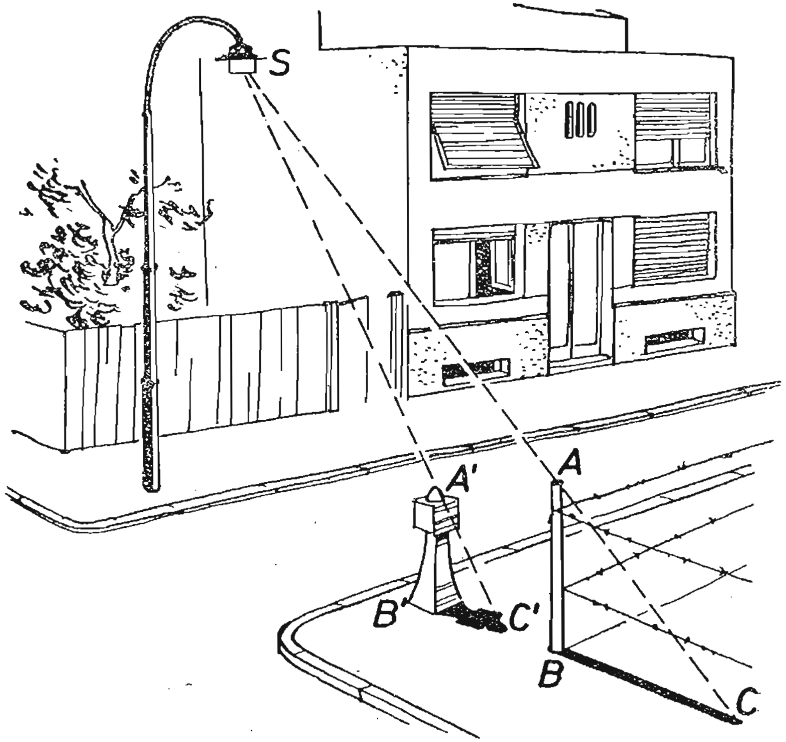
2) збир углова макојег троугла (или бар правоуглог троугла) износи два права угла.

Само наоружан тим знањем Талес је имао права да закључи да, кад је дужина сенке једнака висини његовог раста, Сунчеви зраци падају на равно тле под углом који је једнак половини правог угла и, према томе, врх пирамиде, центар њене основе и крај њене сенке треба да буду темена једнакокраког троугла.

Могло би нам се чинити подесним да се тим једноставним начином користимо да по јасном сунчаном дану измеримо дужину усамљених дрвета чија се сенка не слива са сенком суседног дрвећа. Али, на нашој географској ширини није тако лако као у Египту изабрати за то подесан тренутак: код нас Сунце стоји ниско над хоризонтом и сенке су једнаке висини предмета који их бацају само у подневним часовима летњих месеци*). Зато се Талесов поступак у наведеном облику не може увек применити.

Међутим, није тешко тај поступак изменити тако да се по сунчаном дану може користити макоја сенка, ма колико она била дугачка. Ако, осим тога, измерите и своју сенку или сенку неке мотке, тражену висину моћи ћете да израчунате из сразмере (сл.1)

$$AB : A'B' = BC : B'C',$$



Сл. 2. Кад је такво мерење неизводљиво?

---

*) Разуме се, то се не односи и на нашу земљу, чија се територија налази на географској ширини од 41° до 47°. Уопште је на географској ширини од 45° (Београд) висина предмета једнака дужини његове сенке на дан пролећне равнодневице (21 марта) и на дан јесење равнодневице (23 септембра) у подне, када Сунце достиже највећу висину од 45°. Осим тога, та се појава догађа на тој ширини још и у времену између пролећне и јесење равнодневице сваки дан по два пута — једанпут пре подне и једанпут после подне. У том периоду највећа дневна висина Сунца је изнад 45°. У другој половини године Сунце никад у току дана не достиже висину од 45°, те се зато никад и не догађа да је висина предмета једнака дужини његове сенке.

На екватору се та појава догађа сваки дан по два пута, а на половима никад. — Прим. прев.

јер је висина дрвета толико пута већа од ваше сопствене висине (или висине мотке) колико је пута сенка дрвета дужа од ваше сенке (или сенке мотке). То произлази, разуме се, из геометриске сличности троуглова ABC и $A'B'C'$ (са два пара једнаких одговарајућих углова).

Неки ће читаоци можда приметити да за тако елементаран поступак није ни потребно неко геометриско образложење, јер, зар и без геометрије није јасно да уколико је дрво више, утолико је његова сенка дужа? Али, ствар није тако проста како то изгледа. Покушајте да то правило примените на сенке које стварају предмети осветљени светлошћу уличне светиљке или стоне лампе, — оно неће важити. На сл. 2 видимо да је дирек AB виши од стубића $A'B'$ отприлике 4/3 пута, а сенка дирека већа је од сенке стубића ($BC : B'C'$) три пута. Објаснити зашто се у једном случају поступак може применити а у другом не може, немогуће је без геометрије.

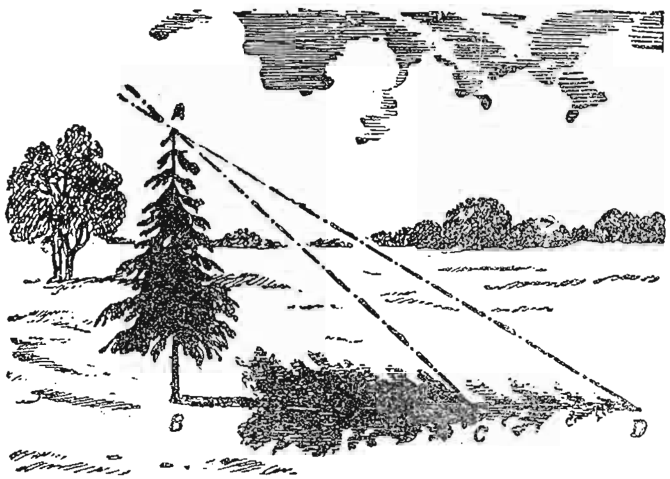
Задатак

Размотримо пажљиво у чему је ту разлика. Суштина је у томе што су Сунчеви зраци међу собом паралелни, а зраци светиљке непаралелни. Последње тврђење је очигледно; али, шта нам даје право да Сунчеве зраке сматрамо паралелним иако се они морају сећи на оном месту одакле полазе?

Решење

Сунчеве зраке који падају на Земљу можемо сматрати паралелним зато што је угао између њих веома мали, практично немерљив. Једноставан геометриски рачун увериће нас у то. Замислите два зрака који полазе из неке тачке Сунца и падају на Земљу на растојању од, рецимо, једног километра један од другога. Према томе, ако бисмо иглу шестара заболи у ту тачку Сунца, а другим краком шестара описали круг полупречником једнаким отстојању Земље од Сунца (тј. полупречником од 150 000 000 km), онда би лук између наша два зрака — полупречника био дугачак 1 km. Цела дужина тог џиновског круга била би једнака $2\pi \cdot 150\,000\,000$ km $=$ 940 000 000 km. Један степен тог круга је, разуме се, 360 пута мањи, тј. око 2 600 000 km; један лучни минут је 60 пута мањи од степена, тј. дужина му је 43 000 km, а један лучни секунд је још 60 пута мањи, тј. дужина му је 720 km. Али наш лук је дугачак само 1 km; то значи да он одговара углу од 1/720 секунда. Тако мали угао неухватљив је чак и за најтачније астрономске инструменте; према томе, у пракси можемо сматрати да су Сунчеви зраци који падају на Земљу паралелни*).

Кад нам те геометриске чињенице не би биле познате, не бисмо имали основа за горе разматрани начин одређивања висине помоћу сенке. Ако будете покушали да поступак са сенком примените у пракси, ви ћете се одмах уверити у његову непоузданост. Сенке нису ограничене тако јасно да се њихова дужина може сасвим тачно измерити. Свака сенка коју баца неки предмет осветљен од Сунца има нејасно оцртан сиви руб полусенке, која и чини да је граница сенке неодређена. То настаје зато што Сунце није тачка већ је то велико сјајно тело које испушта зраке из многих



Сл. 3. Како настаје полусенка

---

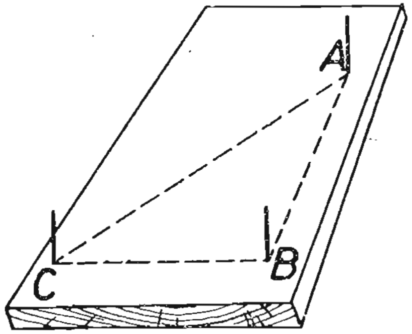
*) Другачије стоји ствар са зрацима који полазе из неке тачке Сунца ка крајевима Земљиног пречника; угао између њих довољно је велики да се може измерити (око 17″); одређивање тог угла дало је астрономима у руке један од начина да се утврди колико је растојање између Земље и Сунца.

тачака. На сл. 3 је показано зашто услед тога сенка BC дрвета има још и додатак у виду полусенке CD која постепено ишчезава. Угао CAD између крајњих граница полусенке једнак је оном углу под којим видимо Сунчев котур, тј. половини једног степена. Грешка која настаје отуда што се обе сенке (тј. права сенка и полусенка — прим. прев.) не могу тачно измерити може при не сувише ниском положају Сунца достићи 5% па и више. Та се грешка додаје другим неизбежним грешкама (услед неравног тла итд.) и чини крајњи резултат мало поузданим, а на брдовитом земљишту се тај поступак не може применити.

ЈОШ ДВА НАЧИНА

Мерење висине може се извести и без помоћи сенке. За то има много начина; најпре ћемо показати два најпростија.

Пре свега, можемо се користити особинама једнококраког правоуглог троугла ако се послужимо једном веома простом направом која се може лако начинити од једне дашчице и 3 ексера. На дашчици ма каквог облика, чак и на комаду коре дрвета ако он има једну равну страну, обележе се три тачке — темена једнакокраког правоуглог троугла — и у те тачке закуца се по један ексер или чиода (сл. 4). Рецимо да за цртање правог угла немате при себи троугаоник и да за преношење једнаких страница немате шестар. У том случају пресавијте једанпут лист хартије, а затим преко првог пресавијутка још једанпут тако да се оба дела првог пресавијутка поклопе — и добићете прав угао. Тај исти лист хартије послужиће вам и уместо шестара да измерите једнака растојања.

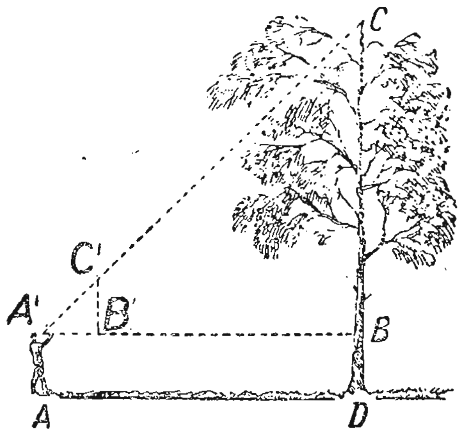


Сл. 4. Дашчица са ексерима за мерење висине

Као што видите, цела справа се може направити и на логоровању.

Ни руковање том направом није сложеније од њене израде. Пошто се одмакнете од изабраног дрвета, подигните дашчицу тако да је једна од катета троугла вертикална, што можете одредити помоћу виска — конца са камичком на једном крају — привезаног за горњи ексер. Приближујући се дрвету или удаљујући се од њега ви ћете увек наћи такво место A (сл. 4а) са кога ћете гледајући ексере A' и C' видети да ови покривају врх C дрвета; то значи да продужетак хипотенузе $A'C'$ пролази кроз тачку C. Тада је, очигледно, растојање $A'B$ једнако CB јер је угао $A = 45^0$.

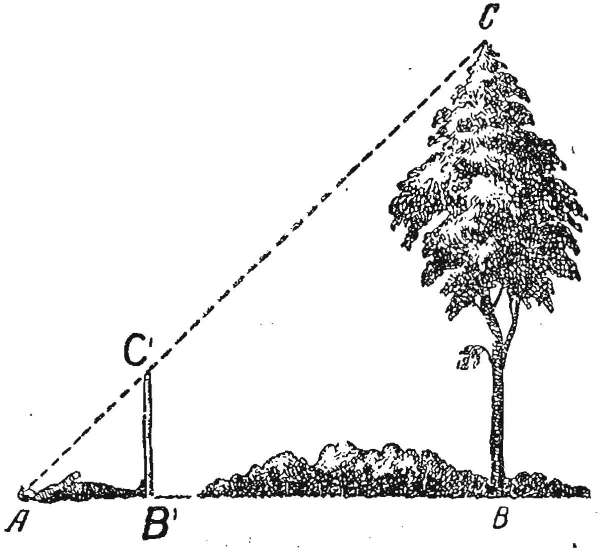
Према томе, пошто измерите растојање $A'B$ (или, на равном терену, исто толико растојање AD) и додате BD, тј. висину ока над земљом, добићете тражену висину дрвета.



Сл. 4а. Схема њене примене

Други начин се примењује без дашчице са ексерима.

Ту је потребна мотка, коју ћете морати да вертикално пободете у земљу тако да је њена висина над земљом једнака управо вашој висини. Место за мотку треба да изаберете тако да, лежећи како је показано на сл. 5, видите врх дрвета и врх мотке у истој правој. Ка-



Сл. 5. Још један начин одређивања висине

ко је троугао ABC једнакокрак и правоугли, то је $\sphericalangle A = 45^{\circ}$ и, према томе, $AB = BC$, тј. AB је једнако траженој висини.

НАЧИН ЖИЛА ВЕРНА

Следећи, такође једноставан начин мерења високих предмета сликовито је описан у познатом роману Жила Верна „Тајанствено острво“.

„— Данас треба да измеримо висину заравни Далеки Изглед — рече инжењер.

— Да ли вам за то треба каква справа? — упита Херберт.

— Не, не треба. Ми ћемо радити мало друкчије, примењујући један исто толико прост и тачан начин.

Младић је, трудећи се да што више научи, ишао за инжењером, који се спуштао са гранитне стене до ивице обале.

Инжењер је узео праву мотку дугачку 12 стопа и што је могао тачније измерио њену дужину упоређујући је са својом висином, коју је добро знао. Херберт је за њим носио висак који му је инжењер дао: камен привезан за један крај канапа.

На 500 стопа од гранитне стене која се дизала окомито инжењер је побио мотку две стопе у песак и, пошто је учврстио, помоћу виска управио ју је тачно вертикално. Затим се одмакао од мотке толико да, лежећи на песку, може врх мотке и врх литице да види у истој правој (сл. 6). Ту тачку је пажљиво обележио кочићем.

— Знаш ли елементарну геометрију? — упита он Херберта устајући са земље.

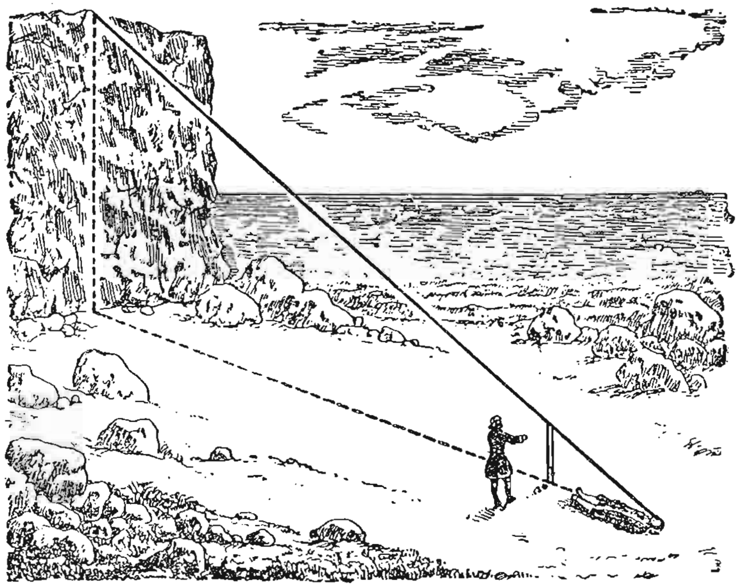
— Знам.

— Сећаш ли се особине сличних троуглова?

— Њихове одговарајуће странице су пропорционалне.

— Тачно. Па ево: ја ћу сада конструисати два слична правоугла троугла. Код мањег ће једна катета бити вертикална мотка, друга растојање од кочића до подножја мотке, а хипотенуза мој видни зрак. Код другог троугла катете ће бити: вертикална стена чију висину желимо да одредимо и растојање од кочића до подножја те стене; хипотенуза ће бити мој видни зрак који се поклапа са правцем хипотенузе првог троугла.

— Разумео сам! — повика младић. — Растојање од кочића до мотке односи се према растојању од кочића до подножја стене као што се висина мотке односи према висини стене.



Сл. 6. Како су јунаци Жила Верна измерили висину стене

— Да. И, према томе, ако измеримо два прва растојања, тада, пошто знамо висину мотке, можемо израчунати четврти, непознати члан пропорције, тј. висину стене. Ми ћемо се, на тај начин, снаћи и без непосредног мерења те висине.

Измерили су оба хоризонтална растојања: мање је износило 15 стопа, а веће 500 стопа.

Пошто је завршио мерење, инжењер је извео следећи рачун:

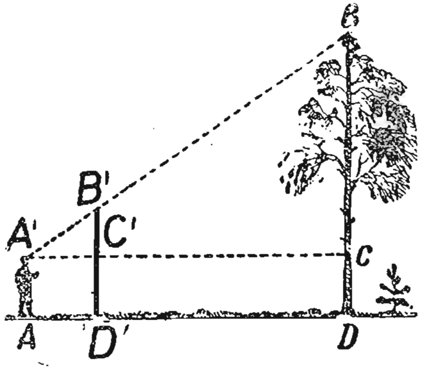
$$15 : 500 = 10 : x,$$
$$500 \cdot 10 = 5000,$$
$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Према томе, висина гранитне стене износила је 333 стопе“.

КАКО ЈЕ ПОСТУПИО ВОДНИК

Неки од малочас описаних начина мерења висине незгодни су зато што се приликом таквих мерења мора лећи на земљу. Разуме се, та се метода може избећи.

Ево како се једанпут догодило на једном од фронтова у Великом отаџбинском рату. Чети поручника Ивањука било је наређено да изгради мост преко планинске реке. На супротној обали утврдили су се фашисти. За извиђање места на коме је требало саградити мост поручник је издвојио извиђачку групу са водником Поповом на челу... У најближем шумском сектору војници су измерили пречник и висину најтипичнијих дрвета и избројали она која се могу искористити за мост.



Сл. 7. Мерење висине дрвета помоћу мотке

Висину дрвета одредили су помоћу мотке онако како је показано на сл. 7. — Тај начин састоји се у следећем.

Узмите мотку вишу од вас, пободите је вертикално у земљу на извесном отстојању од дрвета чију висину мерите (сл. 7). Одмакните се од мотке у правцу $D'D$ до оног места A одакле, гледајући врх дрвета, видите тај врх у истој правој са врхом мотке. Затим, не мењајући положај главе, погледајте у хоризонталном правцу $A'C$ и упамтите тачке C' и C у којима видни зрак пада на мотку и на дрво. Замолите свог помоћника да та места обележи — и посматрање је свршено. Остаје само да се на основу сличности троуглова $A'BC$ и $A'B'C'$ израчуна BC из пропорције

$$BC : B'C' = A'C : A'C',$$

одакле је

$$BC = B'C' \cdot \frac{A'C}{A'C'}.$$

Растојања DC, $A'C$ и $A'C'$ лако је измерити непосредно. Добивеној дужини BC треба још додати дужину CD (која се такође мери непосредно) да би се добила тражена висина дрвета.

Да би одредио колико на томе сектору има стабала водник је наредио војницима да измере површину сектора. Затим је избројао колико има дрвета на једној мањој површини, од $50 \cdot 50\ \mathrm{m}^2$, и извршио одговарајуће множење.

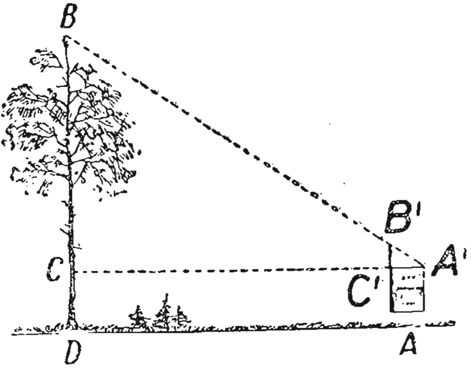
На основу свих података које су прикупили извиђачи командир одреда је утврдио где и какав мост треба саградити. Мост је изграђен у датом року, борбени задатак био је успешно извршен*).

ПОМОЋУ БЕЛЕЖНИЦЕ

За приближно процењивање неприступачне висине можете се послужити и својом џепном бележницом ако уз њу постоји и писаљка увучена у футролу или петљу на прегибу бележнице. Она ће вам помоћи да у простору образујете два слична троугла из којих се добија тражена висина. Бележницу треба држати пред очима онако како је показано на схематској сл. 8. Она треба да се налази у вертикалној равни, а писаљку треба подићи изнад горње ивице бележнице толико да, ако стојите на тачки A, врх B дрвета видите покривен врхом B' писаљке. Тада се услед сличности троуглова $A'BC$ и $A'B'C'$ висина BC одређује из пропорције

$$BC : B'C' = A'C : A'C'.$$

Растојања $B'C'$, $A'C$ и $A'C'$ измере се непосредно; добивеној дужини BC треба још додати дужину CD, тј. — ако је тле равно — висину ока над тлом.



Сл. 8. Мерење висине дрвета помоћу бележнице

Како је ширина $A'C'$ бележнице непроменљива, то ће, ако се будете постављали увек на истом отстојању од дрвета које треба да измерите (рецимо 10 m), висина дрвета зависити само од извученог дела $B'C'$ писаљке. Зато можете унапред израчунати која

---

*) Епизоде из Великог отаџбинског рата које су овде објављене описао је А. Демидов у часопису „Војна знања" № 8, 1949, у чланку „Извиђање реке".

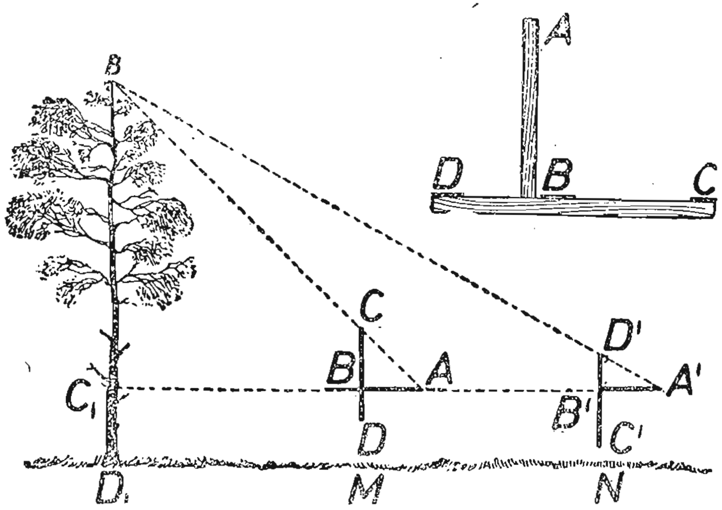
висина одговара овој или оној дужини извучене писаљке и те бројеве написати на писаљци. Тада ће се ваша бележница претворити у упрошћени висиномер, јер ћете помоћу ње моћи да одређујете висину одмах, без икаквог рачунања.

НЕ ПРИБЛИЖУЈУЋИ СЕ ДРВЕТУ

Дешава се да се понекад не може потпуно прићи подножју дрвета чију висину треба измерити. Да ли се у том случају може одредити висина дрвета?

Може. У ту сврху људи су изумели једну духовиту справу коју, као и оне напред, може свако сам да направи. Две дашчице AB и CD (сл. 9 горе) саставе се под правим углом тако да је $AB = BC$ а $BD = \frac{1}{2} AB$. Ето, то је цела справа. Да би се измерила висина, справа се држи у руци тако да је дашчица CD вертикална (ради чега треба за њу причврстити висак — канап с малим тегом) и стане се најпре на тачку M, где се справа окрене крајем C навише, — а затим мало даље од M на тачку N на правцу D_1M, где се справа окрене крајем D навише. Тачка M бира се тако да се крај C гледан из A види у једној правој са врхом дрвета, а тачка N бира се тако да тачка D' гледана из A' поклапа тачку B_1. У тражењу тих двеју тачака M и N*) управо се и састоји цело мерење јер је тражени део висине дрвета B_1C_1 једнак растојању MN. Та једнакост произлази, како је лако схватити, отуда што је $AC_1 = B_1C_1$ а $A'C_1 = 2B_1C_1$, што значи да је

$$A'C_1 - AC_1 = B_1C_1.$$



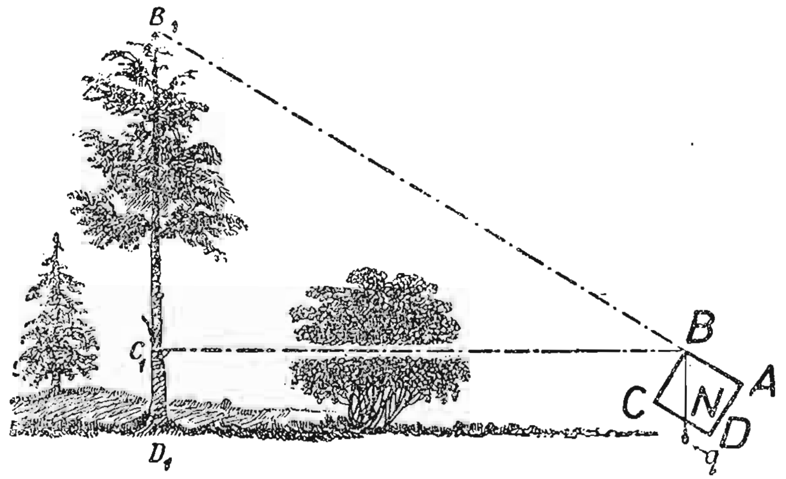
Сл. 9. Примена најпростијег висиномера

Као што видите, користећи се том простом справом ми меримо висину дрвета прилазећи његовом подножју на отстојање најмање једнако његовој висини. Само се собом разуме да је, ако се стаблу може прићи, довољно наћи само једну од тачака M и N да би се одредила висина дрвета.

Уместо двема дашчицама можемо се користити једном дашчицом у коју су на подесан начин пободена 4 ексера; у таквом облику справа је још једноставнија.

ШУМАРСКИ ВИСИНОМЕР

Време је да сада објаснимо како су начињени „прави“ висиномери којима се у пракси служе шумари. Описаћу један од таквих висиномера изменивши га унеколико тако да га свако може и сам направити.



Сл. 10. Схема употребе шумарског висиномера

---

*) Ове тачке морају се налазити на правој на којој је подножје дрвета чија се висина мери.

Суштина конструкције види се из сл. 10. Правоугаони картон или дашчица $ABCD$ држи се у руци тако да се, гледајући дуж ивице AB, види на њеном продужетку врх B_1 дрвета. У тачки B привезан је висак с малим тегом q. Обележи се тачка N у којој конац виска сече праву CD. Троугли BB_1C_1 и BNC су слични јер су оба правоугли и имају једнаке оштре углове BB_1C_1 и BNC (са паралелним одговарајућим страницама). То значи да имамо права да напишемо пропорцију

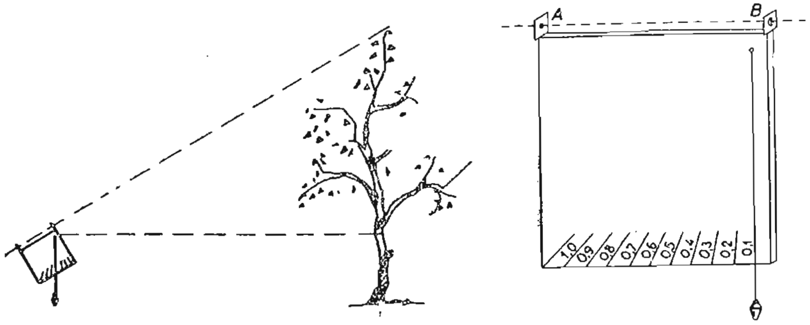
$$B_1C_1 : NC = BC_1 : BC;$$

одатле је

$$B_1C_1 = BC_1 \cdot \frac{NC}{BC}.$$

Како се BC_1, NC и BC могу непосредно измерити, то се лако добија тражена висина дрвета кад се дужини B_1C_1 дода висина доњег дела C_1D_1 стабла (тј. висина справе изнад тла).

Остаје још да додамо неколико појединости. Ако се узме дашчица са ивицом BC дужине, например, 10 cm, а дуж ивице DC се испише подела на сантиметре, тада ће се однос NC/BC увек изражавати десетним разломком који непосредно показује који део растојања BC_1 претставља висина B_1C_1 дрвета. Нека се, например, конац зауставио код седмог подеока (тј. $NC = 7$ cm); то значи да висина дрвета изнад посматрачевог ока износи 7 десетина (0,7 делова) отстојања посматрача од стабла.



Сл. 11. Шумарски висиномер

Друго побољшање односи се на начин посматрања: да би се олакшало визирање дуж ивице AB, могу се на висиномеру од картона пресавити на његовим горњим угловима два квадратића са по једном рупицом у средини, и то једном мањом — за око — а другом нешто већом — за циљање у врх дрвета (сл. 11 десно). Такву справу која је показана на сл. 11 десно, лако је начинити, и то не захтева много времена; за то није потребна ни нарочита умешност. Пошто она у џепу не заузима много места, омогућиће вам да на излету брзо одређујете висину предмета које сретете: дрвета, стубова, зграда и сл. (Та справа улази у састав збирке „Геометрија у природи“, коју је разрадио писац ове књиге.)

Задатак

Може ли се малочас описаним висиномером измерити висина дрвета̂ којима се не може потпуно прићи? Ако се може, како треба у таквим случајевима поступити?

Решење

Треба уперити справу у врх B дрвета (сл. 12) из двеју тачака A и A . Нека смо из A одредили да је $BC = 0{,}9\ AC$, а из тачке A' да је $BC = 0{,}4\ AC$. Тада знамо да је

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}, \quad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

одакле је

$$A'A = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18}BC.$$

Дакле

$$A'A = \frac{25}{18}BC, \quad \text{или} \quad BC = \frac{18}{25}A'A = 0{,}72\ A'A.$$

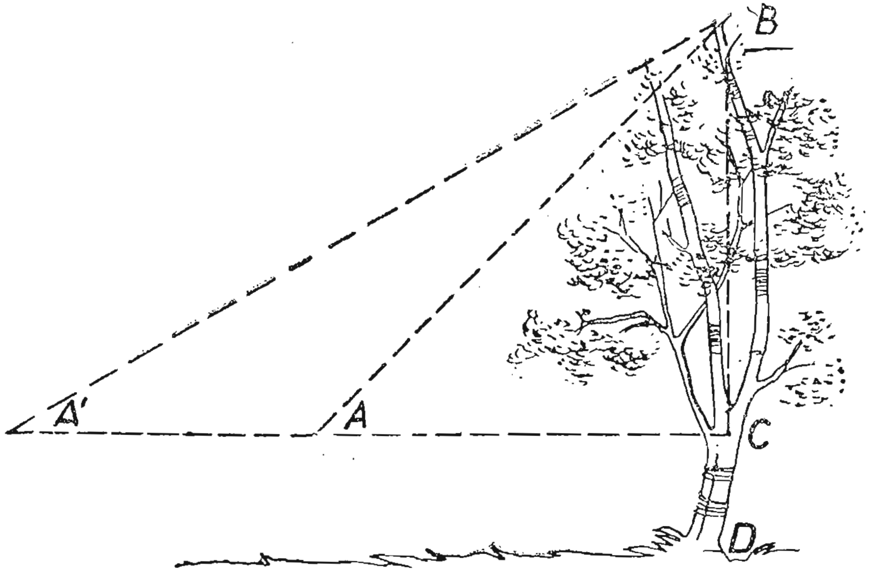
Сад видите да, пошто измеримо растојање $A'A$ између оба места посматрања и узмемо одређен део те дужине, добијамо тражену висину неприступачног предмета.

ПОМОЋУ ОГЛЕДАЛА

Задатак

Ево још једног интересантног начина одређивања висине дрвета — начин помоћу огледала. На извесном отстојању од дрвета чију висину треба измерити (сл. 13) на равном тлу у тачки

C се хоризонтално постави огледало и удаљи се од овога уназад до оне тачке D са које посматрач види у огледалу врх A дрвета.



Сл. 12. Како се, не приближујући се дрвету, мери његова висина

Тада је дрво (AB) онолико пута више од посматрача (ED) колико је пута отстојање BC огледала од дрвета веће од отстојања CD огледала од посматрача. Зашто?

Решење

Овај начин заснива се на закону одбијања светлости. Врх A (сл. 13) одражава се у тачки A' тако да је $AB = A'B$. Из сличности троуглова BCA' и CED произлази да је

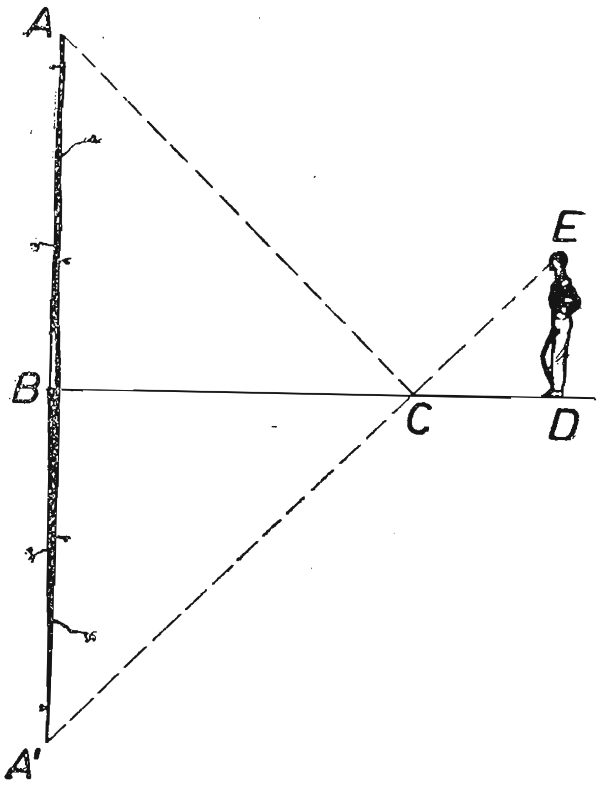
$$A'B : ED = BC : CD.$$

У тој пропорцији остаје сад само да се дужина $A'B$ замени њој једнаком дужином AB да би се поставио однос наведен у задатку.

Тај подесни и брзи начин може се применити по сваком времену, али не у шумској чести, већ кад се одређује висина усамљеног дрвета.

Задатак

Али, како треба поступити при одређивању висине помоћу огледала ако се уоченом дрвету не може потпуно прићи?



Сл. 13. Геометриска конструкција у вези са мерењем висине помоћу огледала

Решење

То је стари задатак, коме има више од 500 година. Њиме се још у Средњем веку бавио математичар Антонио де Кремона у делу „О практичном мерењу земљишта" (1400 год.).

Тај се задатак решава двоструком применом малочас описаног начина — стављањем огледала на два места. Ако се изврши одговарајућа конструкција, није тешко из сличности троуглова извести да је тражена висина дрвета једнака висини посматрачева ока помноженој односом растојања између положаја огледала и разлике отстојања посматрача од оба огледала.

Пре него што завршимо разговор о мерењу висине дрвета, даћу читаоцу још један „шумски" задатак.

ДВА БОРА

Задатак

Два бора расту на 40 m један од другог. Ви сте измерили њихову висину: добили сте да је један висок 31 m, а други, млади бор, свега 6 m.

Можете ли израчунати колико је растојање њихових врхова?

Решење

Тражено растојање врхова та два бора је по Питагориној теореми једнако

$$\sqrt{40^2 + 25^2} \approx 47 \text{ m}$$

(при чему је разлика висина тих борова 25 m — прим. прев.).

ОБЛИК СТАБЛА

Сада већ можете да, шетајући се шумом, одредите на скоро пола туцета разних начина висину било кога дрвета. Вас ће, вероватно, интересовати и да одредите његову запремину, да израчунате колико у њему има кубних метара дрвне масе, а уједно и да процените његову тежину — тј. да сазнате да ли би такво оборено стабло могла одвући једна запрега. Оба та задатка нису више тако проста као што је одређивање висине; стручњаци нису ни до данас нашли начин њиховог тачног решавања и задовољавају се само више или мање тачном приближном проценом. Чак и за оборено стабло које лежи пред вама окресано тај се задатак не решава тако просто.

Ствар је у томе што стабло, чак и оно најправије и без задебљања, не претставља ни ваљак, ни купу, ни зарубљену купу, ни неко друго геометриско тело чију запремину умемо да израчунамо по некој формули. Стабло, разуме се, није цилиндричног облика, јер се сужава при врху, али оно није ни купасто, јер његова изводница није права већ крива, и то не кружни лук већ нека друга крива испупчена ка оси стабла*).

Зато је више или мање тачно израчунавање запремине стабла изводљиво само средствима интегралног рачуна. Неким ће читаоцима можда изгледати чудно што се за мерење обичног стабла морамо обратити за помоћ вишој математици. Многи мисле да се виша математика односи само на неке нарочите предмете, а да се у обичном животу увек примењује само елементарна математика. То је, међутим, нетачно; можемо с довољном тачношћу израчунати запремину звезде или планете користећи се само елементарном геометријом, док је тачан прорачун запремине дугачког стабла или пивске боце немогућ без аналитичке геометрије и интегралног рачуна. Али, наша књига не претпоставља да њени читаоци познају вишу математику, те ћемо се стога овде морати задовољити само приближним израчунавањем запремине стабла.

Ми ћемо поћи од тога да је запремина стабла мање или више приближна или запремини зарубљене купе или, ако се стабло сужава у шиљак, запремини купе, или, најзад, ако се ради о кратким трупцима — запремини ваљка. Запремина сваког од тих трију тела лако се израчунава. Међутим, може ли се, ради једнообразног рачуна, наћи таква формула за запремину која би важила у исти мах за све три поменуте врсте тела? Тада бисмо могли приближно израчунати запремину стабла не водећи бригу о томе на шта оно више личи: на ваљак, на купу или на зарубљену купу.

---

*) Та крива је најприближнија такозваној „полукубној параболи" ($y^2 = ax^3$); тело добивено обртањем те параболе зове се најлоид (по имену математичара Најла који је нашао начин одређивања дужине лука такве криве). Стабло дрвета у шуми по облику је приближно најлоиду. Запремина најлоида израчунава се методама више математике.

УНИВЕРЗАЛНА ФОРМУЛА

Таква формула постоји; штавише, она је подесна не само за ваљак, купу и зарубљену купу него и за све врсте призама, пирамида и зарубљених пирамида, па чак и за лопту. Ево те необичне формуле, која је у математици позната под називом Симпсонова формула:

$$V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3)$$

где је: h — висина тела,
b_1 — површина доње основе,
b_2 — површина средњег пресека*),
b_3 — површина горње основе.

Задатак

Доказати да се по малочас наведеној формули може израчунати запремина следећих седам геометриских тела: призме, пирамиде, зарубљене пирамиде, ваљка, купе, зарубљене купе и лопте.

Решење

У тачност те формуле можемо се веома лако уверити ако је, једноставно, применимо на израчунавање запремине побројаних тела. Тада ћемо добити:

а) за призму и ваљак (сл. 14а):

$$V = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1 h;$$

b) за пирамиду и купу (сл. 14с):

$$V = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4 \cdot \frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1 h}{3};$$

---

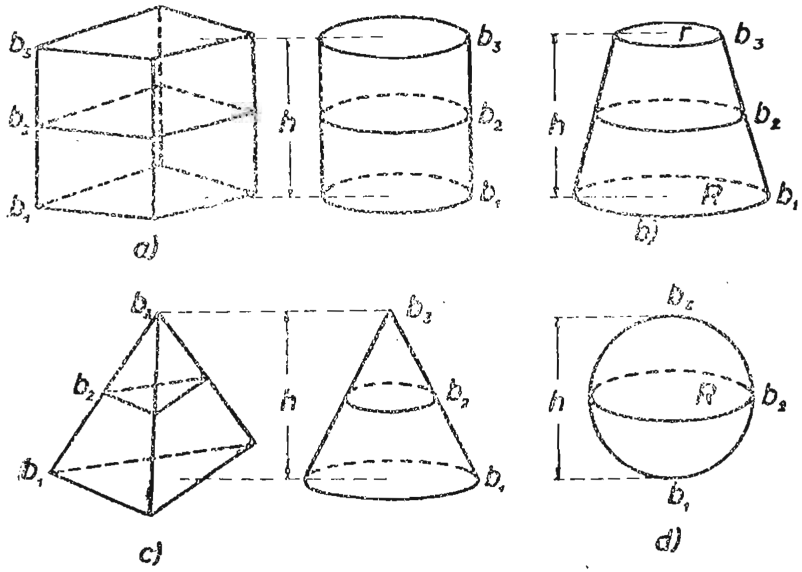
*) Тојест површина нормалног пресека кроз средину висине.

c) за зарубљену купу (сл. 14b):

$$V = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] =$$

$$= \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2);$$



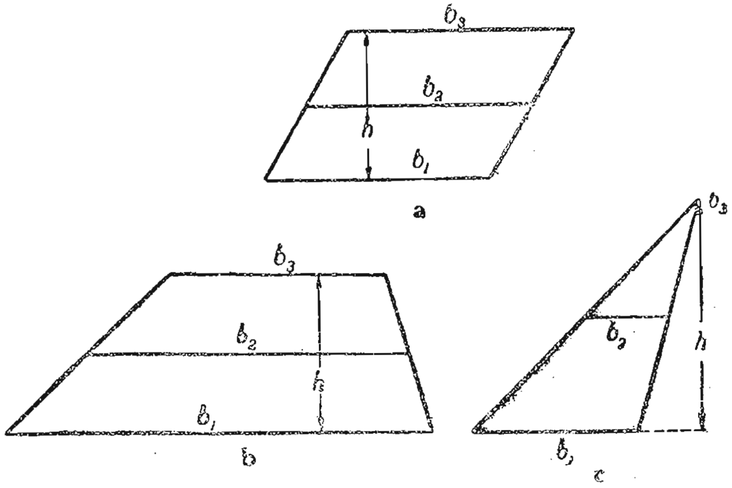
Сл. 14. Геометриска тела чија се запремина може израчунати по једној истој формули

d) за зарубљену пирамиду доказ се изводи на сличан начин; најзад за лопту (сл. 14d) је

$$V = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Задатак

Забележимо још једну интересантну особеност наше универзалне формуле: она је подесна такође и за израчунавање површине равних затворених фигура — паралелограма, трапеза и троугла, ако се:



Сл. 15. Универзална формула подесна је и за израчунавање површина ових фигура

под h подразумева, као и раније, висина фигуре,
под b_1 — доња основица,
под b_2 — средња линија,
под b_3 — горња основица.
Како ћемо се у то уверити?

Решење

Применом формуле добићемо:

а) за површину паралелограма (тј. ромбоида, ромба, правоугаоника и квадрата) (сл. 15а):

$$P=\frac{h}{6}(b_1+4b_1+b_1)=b_1h;$$

b) за површину трапеза (сл. 14b):

$$P=\frac{h}{6}\left(b_1+4\,\frac{b_1+b_2}{2}+b_2\right)=\frac{h}{2}(b_1+b_3);$$

с) за површину троугла (сл. 14с):

$$P=\frac{h}{6}\left(b_1+4\,\frac{b_1}{2}+0\right)=\frac{b_1h}{2}.$$

Као што видите, Симпсонова формула има довољно права да се назива универзалном формулом.

ОДРЕЂИВАЊЕ ЗАПРЕМИНЕ И ТЕЖИНЕ ДРВЕТА НА ПАЊУ

Дакле, сад знате формулу по којој можете приближно израчунати запремину обореног дрвета, не водећи рачуна о томе на које геометриско тело оно личи — на ваљак, купу или зарубљену купу. У том циљу потребно је измерити четири величине — дужину стабла и три пречника (доњи, горњи и по средини стабла). Мерење доњег и горњег пречника је веома просто, а непосредно одређивање средњег пречника без нарочите справе — (шумарске пречнице, сл. 16а)*) прилично је незгодно. Али, та се тешкоћа може избећи ако се канапом измери обим стабла и тај обим подели са $3^1/_7$; тако ће се добити пречник**).

На тај начин израчунаће се запремина стабла с тачношћу која је сасвим довољна за многе практичне сврхе. Тај задатак се краће, али с мањом тачношћу, решава тако што се запремина стабла израчуна као запремина ваљка чији је пречник једнак пречнику средњег пресека стабла, само, притом се за запремину добија вредност мања од тачне, и то понекад мања за 12%. Али, ако у мислима поделимо стабло на трупце од по 2 m дужине, одредимо запремину сваког од тих скоро цилиндричних делова и све тако нађене запремине саберемо да бисмо добили запремину целог стабла, — добићемо много бољи резултат: он ће бити мањи од тачне запремине не више него за 2—3%.

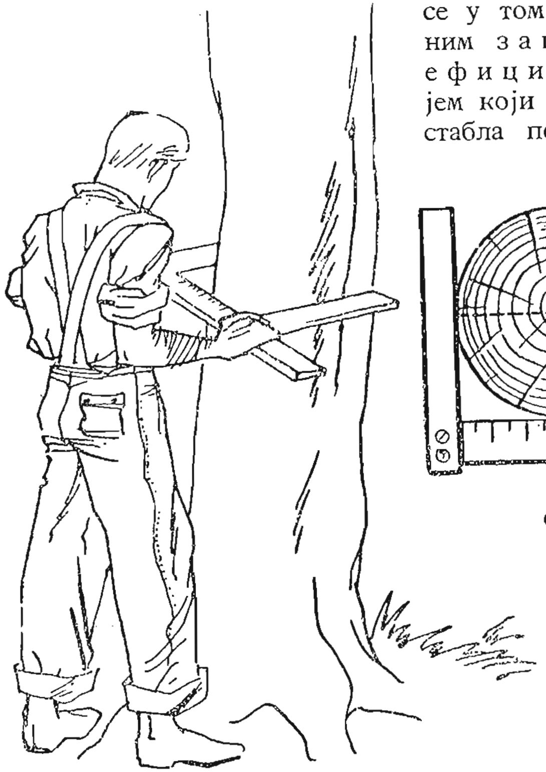
Међутим, од свега тога ништа се не може применити кад се ради о дрвету на пању — тј. о т.зв. дубећем стаблу; ако

---

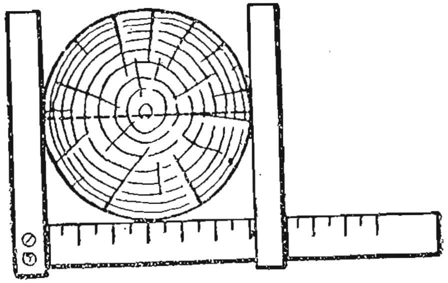
*) На сличан начин је начињена и опште позната справа за мерење пречника округлих тела.

**) Однос обима круга према пречнику једнак је π, тј. приближно $3^1/_7$.

немате намеру да се верете уз дрво, онда је вашем мерењу приступачан само пречник доњег дела стабла. У том случају мораћете се при израчунавању запремине задовољити само приближном проценом, тешећи се тиме што и стручни шумари обично поступају на сличан начин. Они се у том циљу служе такозваним *запреминским коефицијентом**), тј. бројем који за тражену запремину стабла показује колики је она део запремине оног ваљка чија је висина једнака висини тог стабла, а пречник је једнак пречнику тог стабла мереном на висини од 130 cm, тј. у висини прсију одраслог човека (на тој, т.зв. прсној висини је најподесније мерити пречник стабла). На сл. 17 нацртан је такав ваљак који служи за одређивање запреминског коефицијента. Разуме се, запремински коефицијенти су различити за дрвета разних врста и различите висине, јер



Сл. 16. Мерење пречника дрвета пречницом

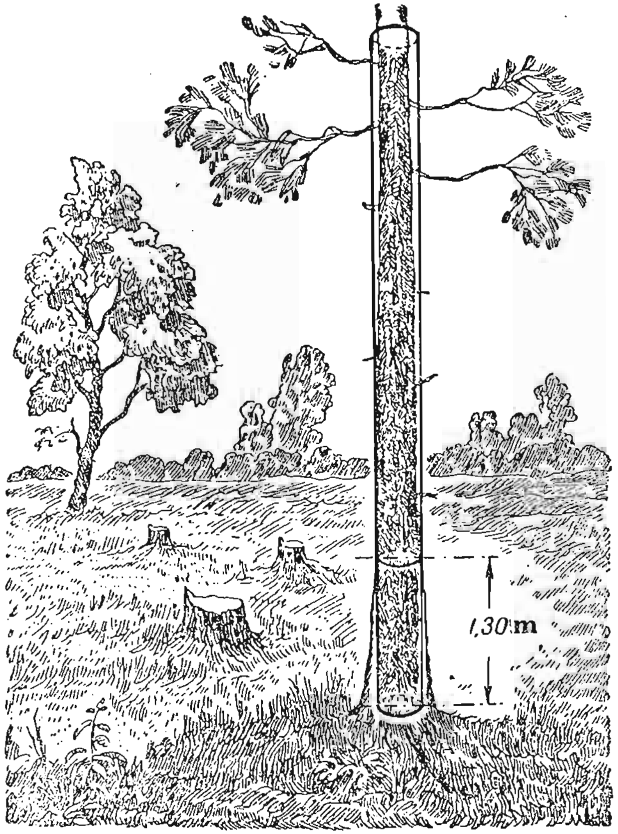


Сл. 16а. Пречница

---

*) Раније се тај број, као карактеристичан за облик стабла, називао *обличним бројем*. — Прим. прев.

облик стабла није увек исти. Али, ту нема неких нарочитих великих разлика; за стабла бора и јеле (израсла у шумском честару) запремински коефицијенти су између 0,45 и 0,51, тј. једнаки су отприлике 0,5.



Сл. 17. Шта је то запремински коефицијент

Према томе, за запремину игличастог дрвета на пању можемо без велике грешке узети половину запремине ваљка исте висине и пречника једнаког пречнику дрвета мереном на прсној висини.

Разуме се, то је само приближна процена, али она не отступа много од тачног резултата; она може до 2% да пребаци и до 10% да подбаци тачну вредност*).

Сада остаје само један корак да се оцени и тежина дрвета на пању. За то је довољно знати само да 1 m^3 свеже борове или јелове дрвне масе има око 600—700 kg.

Нека, например, стојите поред јеле за чију сте висину нашли да износи 28 m, а обим стабла на прсној висини је 120 cm. Тада је површина одговарајућег кружног пресека једнака 1100 cm^2, или 0,11 m^2, а запремина стабла износи $0{,}11 \cdot 28 = 1{,}5\ m^3$. Узимајући да 1 m^3 свеже јелове масе има просечну тежину од 650 kg, налазимо да 1,5 m^3 треба да има тежину од око 1 тоне (1000 kg).

ГЕОМЕТРИЈА ЛИШЋА

Задатак

У сенци сребрнасте тополе из њеног корена никли су изданци. Откините један лист и обратите пажњу на то колико је он велики у поређењу с лишћем дрвета-родитеља, а нарочито у поређењу с лишћем које је расло на јаком сунцу. Лишће које расте у хладу надокнађује недостатак светлости величином своје површине која хвата сунчеве зраке. Утврдити зашто је то тако — то је задатак ботаничара. Али, и геометар може ту да каже своју реч; он може одредити колико је пута површина листа изданка већа од површине листа дрвета-родитеља.

Како бисте ви решили тај задатак?

Решење

За то постоје два пута. Прво, одредити површину сваког листа појединачно и наћи однос тих површина. А површина листа може се измерити тако што се лист покрије провидном хартијом са квадратном мрежом, чији сваки квадратић има, например, 4 mm^2. То је додуше правилан, али претерано пипав начин**).

---

*) Неопходно је приметити да се запремински коефицијенти односе само на дрвеће у шуми, тј. на високо и танко дрвеће, усправно и без чворова; за усамљена, граната дрвета нема сличних правила израчунавања запремине стабла.

**) Али тај начин има и једно преимућство: користећи се њиме можемо упоређивати површине листова *различитог* облика, што се не може учинити на даље описани начин.

Краћи начин заснива се на томе да су оба листа различите величине, али имају исти или скоро исти облик; другим речима, то су геометриски сличне фигуре. Површине тих фигура, као што знамо, односе се као квадрати њихових димензија. То значи да треба, пошто одредимо колико је пута један лист дужи или шири од другог, још само да тако нађени број дигнемо на квадрат па да добијемо однос површина та два листа. Нека је лист изданка дугачак 15 cm а лист са гране истог дрвета само 4 cm; однос њихових дужина је 15/4, те је, према томе, површина првог листа већа од површине другог 225/16 пута (тј. 14 пута). Ако заокруглимо овај број (јер ту не може бити потпуне тачности), можемо тврдити да је лист изданка отприлике 15 пута већи од листа на дрвету.

Ево још једног примера:

Задатак

Лист маслачка који је растао у хладу дугачак је 31 cm. Други примерак, који је растао на сунцу, има лиску дугачку само 3,3 cm. Колико је пута отприлике површина првог листа већа од површине другог?

Решење

Поступићемо на претходни начин. Однос површина је једнак

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} \approx 87;$$

то значи да је један лист по површини око 90 пута већи од другог.

Није тешко изабрати у шуми много пари листова истог облика, али различите величине, и на тај начин прикупити интересантан материјал за геометриске задатке о односу површина сличних фигура. Ненавикнутом оку ће притом увек изгледати чудновато што сразмерно мала разлика у дужини и ширини листова доводи до знатне разлике у њиховим површинама. Ако је, например, један од два геометриски слична листа дужи но други за 20%, онда је однос њихових површина

$$1{,}2^2 \approx 1{,}4,$$

тј. разлика износи 40%. Ако пак разлика ширина износи 40%, тада је један лист по површини већи од другог за

$$1{,}4^2 \approx 2,$$

тј. скоро два пута.

Сл. 18 и 19. Одредите однос површина ових листова

Задатак

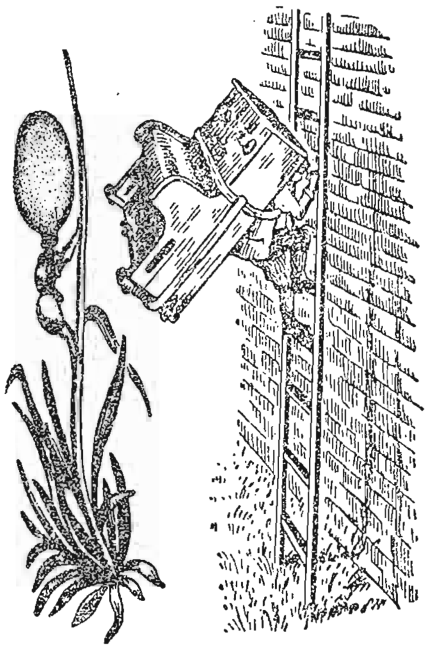
Предлажемо читаоцу да одреди однос површина листова претстављених на сл. 18 и 19.

ШЕСТОНОЖНИ ЈУНАЦИ

Баш су мрави чудесна створења! Хитро трчећи уз стабљику и носећи за свој раст претежак терет у устима (сл. 20) мрав задаје човеку који га посматра главоломни задатак: откуда том инсекту толика снага да може без неког видљивог напора да тегли терет десет пута тежи од себе самог? Јер, човек не би могао да се пење уз лествице носећи на леђима, например, клавир (сл. 20), а однос тежине терета према тежини тела за мрава је отприлике исти као однос тежине клавира према тежини човека. Излази да је мрав сразмерно јачи од човека!

Је ли то тако? Ту се без геометрије не можемо снаћи. Да чујемо шта каже стручњак (проф. А. Ф. Брант) најпре о снази мишића а затим и о горе постављеном питању о односу снаге инсекта и човека:

„Жив мишић сличан је еластичној врпци; само, скупљање мишића не изазива еластичност већ други узроци, и то се нормално испољава под утицајем нервних надражаја, а у физиолошком експерименту услед дејства електричне струје на одговарајући нерв или непосредно на сам мишић.



Сл. 20. Шестоножни јунак

Такви експерименти се веома лако изводе са мишићима исеченим из тек убијене жабе, јер мишићи хладнокрвних животиња ван организма, чак и на обичној температури, веома дуго задржавају своје животне особине. Начин извођења експеримента је веома једноставан. Исече се главни мишић задње ноге заједно с комадом бедрене кости од које он почиње и заједно са жилом на свом слободном крају. Овај мишић је најподеснији и по својој величини, и по облику и по томе што се лако може препарирати. За комадић бедрене кости мишић се окачи о статив, а кроз жилу се провуче кукица о коју се окачи тег. Ако се такав мишић дотакне слободним крајевима двеју жица које полазе из једне батерије, он ће се одмах скупити, скратити и подићи тег. Постепеним додавањем других тегова лако је одредити максималну снагу мишића у подизању терета. Надовежимо сада један на други два, три, четири једнака мишића и надражимо их све одједанпут. Тиме нећемо подићи већи терет, већ ће се, само, исти тег подићи на већу висину, која одговара збиру скраћења појединих мишића. Али зато, ако свежемо два, три, четири мишића један уз други у снопић, тај ће снопић, кад се надражи струјом, подизати два, три, четири пута већи терет. Исти такав резултат би се, очигледно, добио и кад би мишићи срасли један с другим. Према томе, можемо се уверити да снага мишића зависи не од дужине или укупне масе мишића, већ само од дебљине, тј. од попречног пресека мишића.

После овог удаљавања од постављеног питања пређимо на упоређивање једнако грађених, геометриски сличних али по величини различитих живих бића. Замислимо две животиње, од којих једна има у односу на другу двоструко увеличане све димензије. Код веће животиње величина (тј. запремина) и тежина целог тела, а такође и сваког од његових органа биће 8 пута веће, а површина (рачунајући у то и попречни пресек мишића) само је 4 пута већа. Испоставља се да се снага мишића, док животиња нарасте до двоструке дужине и осмоструке тежине, увећава само четири пута, тј. животиња је постала сразмерно двапут слабија. На основу тога би животиња која је три пута дужа (с попречним пресецима већим 9 пута и тежином већом 27 пута) била сразмерно три пута слабија, а она која је четири пута дужа била би четири пута слабија итд.

На основу закона неједнаког увећавања величине и тежине животиње, а заједно с тим и снаге мишића, објашњава се зашто инсект — како то видимо код мрава, осица итд. — може да носи терет који 30 или 40 пута превазилази тежину његовог сопственог тела, док је човек у стању да носи нормално — искључујемо гимнастичаре и дизаче терета — само око 9/10 своје тежине, а коњ, кога сматрамо дивном радном машином, може носити још мање — само око 7/10 своје тежине*)".

После тих објашњења ми ћемо другим очима гледати подвиге тог мрава-јунака, о коме је И. Крилов потсмешљиво писао:

„Био једном неки мрав огромне снаге,
Какву није им'о нико ни у давно доба:
Он је (како каже летописац његов верни)
Мог'о дићи два велика зрна боба!"

---

*) Подробније о томе в. у „Занимљивој механици" Ј. И. Перељмана, гл. X, Механика у живој природи.

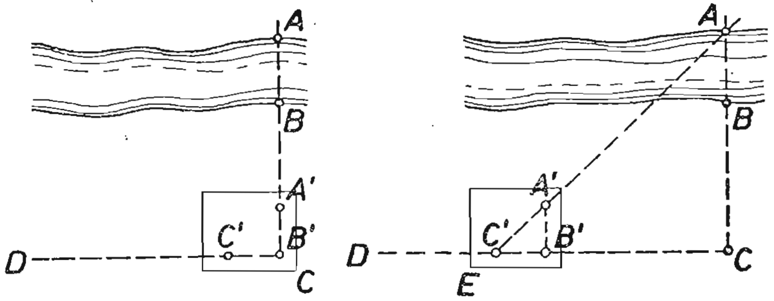
ГЛАВА ДРУГА

ГЕОМЕТРИЈА ПОРЕД РЕКЕ

МЕРЕЊЕ ШИРИНЕ РЕКЕ

Измерити ширину реке не препливавајући је или не пребацујући се преко ње — то је за онога који зна геометрију исто тако просто као и да одреди висину дрвета не пењући се до његовог врха. Неприступачно отстојање мери се на исти начин на који смо мерили неприступачну висину. У оба случаја одређивање траженог растојања замењује се одређивањем другог растојања које се лако може непосредно измерити.

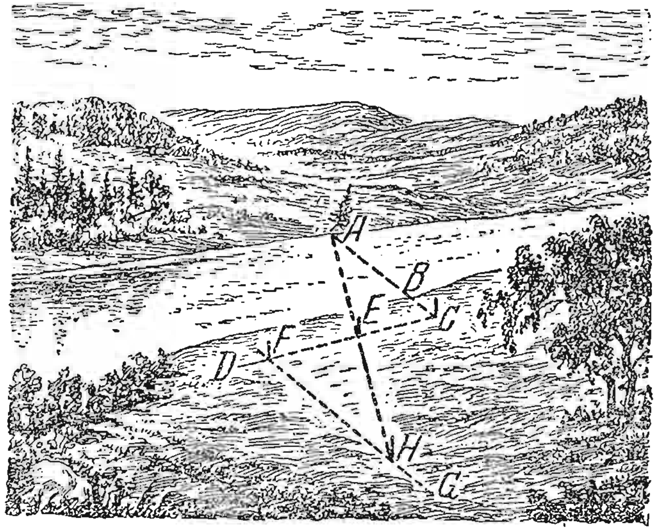
Од многих начина решавања тог задатка размотрићемо неколико најпростијих.



Сл. 21 и 22. Први и други положај дашчице са ексерима при мерењу ширине реке

1) За први начин потребна је већ позната нам „справа" с три ексера на теменима једнакокраког правоуглог троугла (сл. 4, стр. 12). Нека се тражи да, не прелазећи преко реке, одредите њену ширину *AB* (сл. 21) стојећи на оној обали на којој је обележена тачка *B*. Станите најпре на неко место *C* са кога ћете, држећи пред очима дашчицу са ексерима тако да гледајући једним

оком у правцу двају ексера B' и A' видите како ови покривају тачке B и A. Разуме се да ћете се, кад вам то буде пошло за руком, налазити управо на продужетку дужи AB. Сада, не помичући дашчицу са ексерима, погледајте преко ексера B' и C' (нормално на први правац) и уочите неку тачку D коју ти ексери покривају, тј. тачку на правој која је нормална на AC. После тога пободите у тачки C мотку, оставите то место и држећи пред очима своју справу идите дуж праве CD све док на њој не нађете такву тачку E (сл. 22) одакле се истовремено види да ексер B' покрива тачку C а ексер A' тачку A. То ће значити да сте на обали нашли треће теме троугла ACE у коме је угао C прав, а угао E једнак оштром углу троугла $A'B'C'$ на дашчици са ексерима, тј. једној половини правог угла. Очигледно је да је и угао A једнак половини правог угла, па је отуда $AC = CE$. Ако измерите растојање CE бар кораком, сазнаћете колико је растојање AC, а кад од овога одузмете растојање BC, које је лако измерити, одредићете ширину реке.

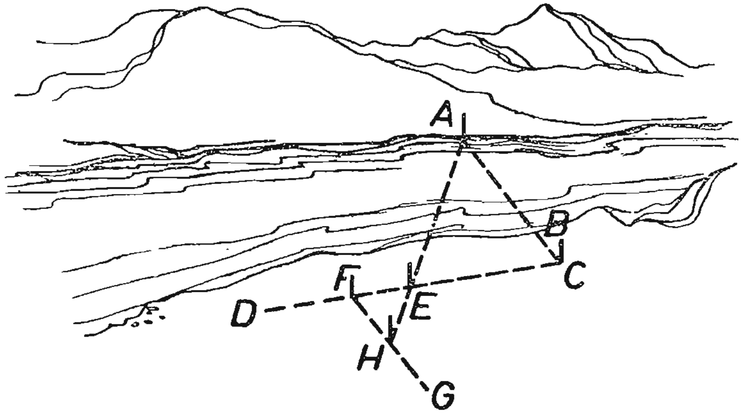


Сл. 23. Користимо се подударношћу троуглова

Прилично је незгодно и тешко непомично држати дашчицу са ексерима у руци; зато је лакше причврстити ту дашчицу на мотку чији је доњи крај заоштрен, тако да се може вертикално побости у земљу.

2) Други начин сличан је првом. Ту се такође одређује тачка C на продужењу дужи AB и помоћу дашчице са ексерима одређује се правац CD нормалан на CA. Али, потом се поступа другачије (сл. 23). На правој CD измере се једнака растојања CE и EF произвољне дужине и у тачкама E и F пободу се значке. Затим се стане на место F и помоћу дашчице са ексерима одреди правац FG нормалан на FC. Сада се, идући дуж FG, на овој правој тражи таква тачка H из које се види да мотка E покрива A. То ће значити да тачке H, E и A леже на једној правој.

Задатак је решен: растојање FH једнако је растојању AC, од кога треба само одузети BC да би се сазнало колика је тражена ширина реке (читалац ће се, разуме се, сам досетити зашто је FH једнако AC).



Сл. 24. Користимо се подударношћу троуглова

За овај поступак потребно је више места неголи за први; ако терен дозвољава да се изведу оба поступка, корисно је један резултат проверити другим.

3) Малочас описани поступак можемо унеколико изменити тако што ћемо на правој CD одмерити не два једнака отсечка, већ један отсечак неколико пута мањи од другог. Например (сл. 24), одмери се FE четири пута мање од EC, а затим се поступа као и раније. На правој FG нормалној на FC одреди се тачка H из које се види да штап E покрива тачку A. Али, сада FH није једнако

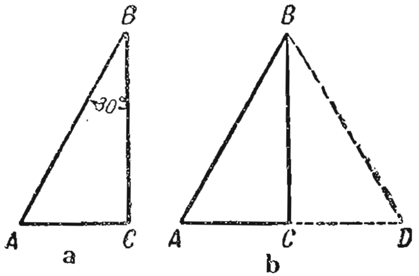
AC, већ је четири пута мање од тог отстојања: троугли ACE и EFH овде нису подударни већ су слични (имају једнаке одговарајуће углове, а неједнаке одговарајуће странице). Из сличности тих троуглова имамо сразмеру

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

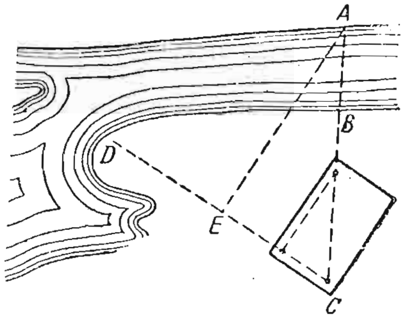
То значи да ћемо, пошто измеримо FH и добијени резултат помножимо са 4, добити растојање AC, а кад од овог одузмемо BC, сазнаћемо колика је тражена ширина реке.

За овај поступак потребно је, као што видимо, мање места, те је стога он подеснији за примену неголи претходни.

4) Четврти начин заснован је на особини правоуглог троугла да је, ако један од његових оштрих углова има 30^0, катета наспрам тог угла једнака половини хипотенузе. У тачност тог тврђења можемо се веома лако уверити. Заиста, нека је у правоуглом троуглу ABC (сл. 25a) $\sphericalangle B = 30^0$; доказаћемо да је тада $AC = {}^1/_2\, AB$. — Обрнимо троугао ABC око BC тако да он заузме положај симетричан свом првобитном положају (сл. 25b); у фигури ADB тачке ACD леже на једној правој, јер су оба угла код тачке C права. У троуглу ABD је $\sphericalangle A = 60^0$, а $\sphericalangle ABD$, као збир од два угла по 30^0, такође има 60^0. Према томе је $AD = BD$, као странице троугла једнаких углова. Како је пак $AC = {}^1/_2 AD$, то је, дакле, $AC = {}^1/_2 AB$.



Сл. 25. Кад је катета једнака половини хипотенузе



Сл. 26. Схема примене правоуглог троугла са углом од 30^0

Ако желимо да се користимо том особином троугла, тада треба да ексере на дашчици пободемо у темена правоуглог троугла чија је једна катета двапут мања од хипотенузе. Држећи такву справу пред очима треба да станемо на тачку C (сл. 26) на продужетку дужи AB тако да хипотенуза троугла на дашчици падне у правац AC. Гледајући дуж краће катете овог троугла треба обележити правац CD и на њему одредити тачку E такву да је правац EA нормалан на CD (то се може учинити помоћу исте дашчице). Лако је схватити да је растојање CE (тј. катета наспрам угла од 30^0) једнако половини растојања AC. Према томе, пошто измеримо CE, треба то растојање да помножимо са 2 и да одузмемо BC, па ћемо добити тражену ширину AB реке.

Ето, то су четири за примену лака начина помоћу којих увек можемо, не прелазећи на супротну обалу, да измеримо ширину реке са потпуно задовољавајућом тачношћу. Начине који изискују употребу компликованијих справа (па макар и оних које може свако сам направити) овде нећемо разматрати.

ПОМОЋУ ШТИТА НА КАПИ

Ево како је тај начин једанпут на фронту применио старији водник Купријанов. Његов вод добио је задатак да измери ширину реке преко које је требало организовати пребацивање.

Пошто се прикрао до шипражја у близини реке, вод је легао на земљу, а сам Купријанов се заједно са борцем Карповом привукао још ближе реци тако да је могао видети супротну обалу коју су држали фашисти.

— Па, Карпове, колико је донде? — упитао је Купријанов.

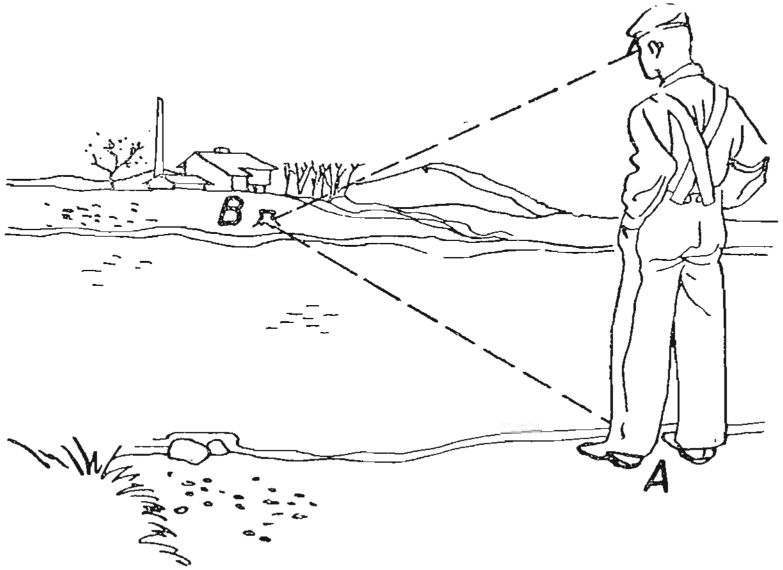
— По моме, не више од 100 до 110 метара — одговорио је Карпов.

Купријанов се сложио са својим извиђачем, али је, ради контроле, решио да измери ширину реке помоћу штита на капи.

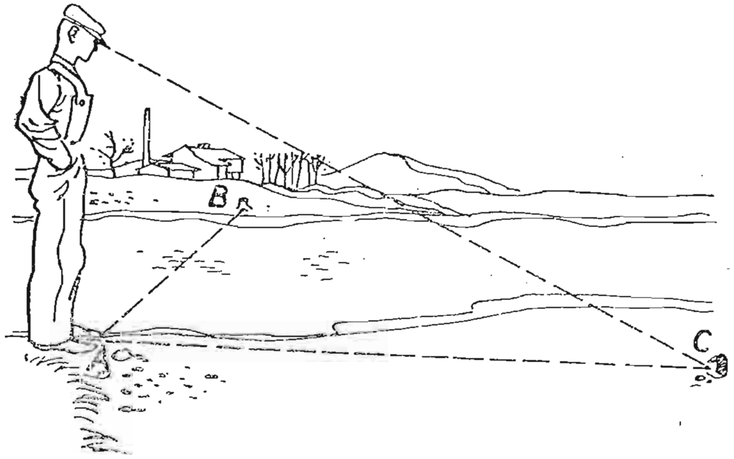
Тај се начин састоји у следећем. Треба стати лицем према реци и навући капу са штитом тако да доња ивица штита тачно покрива линију супротне обале (сл. 27). Штит се може заменити шаком или бележницом чврсто прислоњеном ивицом уз чело. Затим се, не мењајући положај главе, треба окренути надесно или налево или чак за 180^0 (на ону страну где је земљиште равно тако да се могу на њему мерити растојања) и уочити најдаљу тачку која се види испод штита (длана, бележнице).

Растојање до те тачке биће отприлике једнако ширини реке.

Тим се начином користио и Купријанов. Он је у шипрагу брзо устао, прислонио уз чело бележницу, исто се тако брзо окренуо и визирао најдаљу тачку. Затим се заједно са Карповом побауљке пребацио до те тачке мерећи растојање канапом. Добили су резултат 105 m.



Сл. 27. Испод штита на капи треба уочити једну тачку на супротној обали



Сл. 27а. На исти начин треба уочити тачку и на својој обали

Купријанов је јавио команди добијени податак.

Задатак

Објаснити геометриски начин мерења помоћу штита.

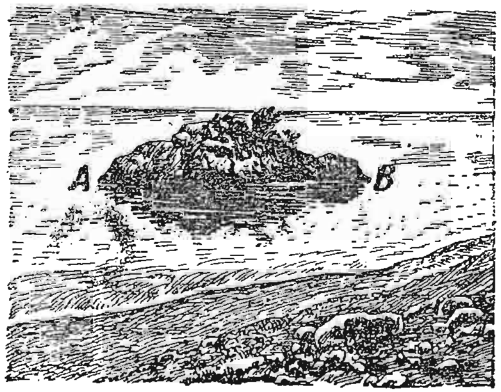
Решење

Видни зрак који додирује ивицу штита (длана, бележнице) првобитно је био управљен ка линији супротне обале (сл. 27). Кад се човек окреће, тада видни зрак, слично краку шестара, као да описује круг и тада је $AC = AB$ (као полупречници једног истог круга, сл. 27а).

ДУЖИНА ОСТРВА

Задатак

Сада нам претстоји сложенији задатак. Стојећи поред реке или језера видите острво (сл. 28) чију дужину желите да измерите не напуштајући обалу. Да ли је такво мерење изводљиво? Иако

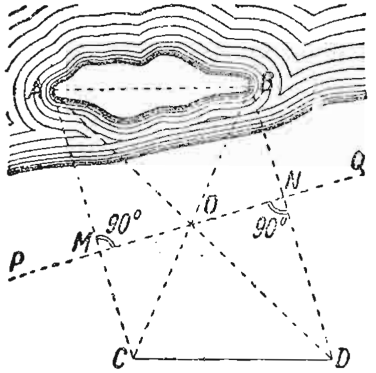


Сл. 28. Како се одређује дужина острва

су нам у том случају неприступачна оба краја дужи коју желимо да измеримо, ипак је задатак потпуно решљив, и то без икаквих компликованијих справа.

Решење

Нека треба одредити дужину AB (сл. 29) острва остајући за време мерења на обали. Пошто се на обали изаберу две произвољне тачке P и Q, ту се пободу значке и на правој PQ одреде се тачке M и N тако да праве AM и BN образују с правом PQ праве углове (за то се треба послужити дашчицом са ексерима). У средини O растојања MN пободе се значка и на продужетку дужи AM одреди се она тачка C из које се види да значка O покрива тачку B. Исто тако се на продужетку MN нађе тачка D из које се види да значка O покрива крај A острва. Растојање CD биће тражена дужина острва.



Сл. 29. Користимо се особинама подударних правоуглих троуглова

Није тешко то и доказати. Погледајте правоугле троугле AMO и OND; код њих су катете MO и NO једнаке, а осим тога су и углови AOM и NOD једнаки па су, према томе, ти троугли подударни, те је $OA = OD$. На сличан начин може се доказати да је $BO = OC$. Упоређујући затим троугле ABO и COD уверићемо се да су и ови подударни, а то значи да су једнака и растојања AB и CD.

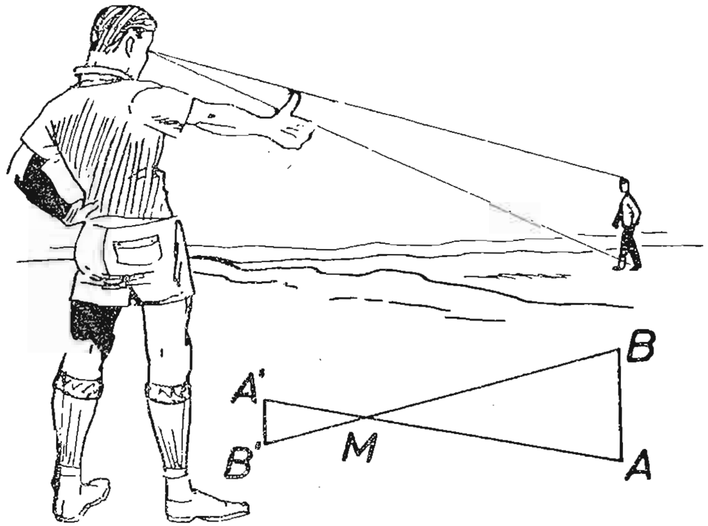
ПЕШАК НА СУПРОТНОЈ ОБАЛИ

Задатак

Обалом реке иде човек. Са друге обале ви јасно разабирете његове кораке. Можете ли, не мичући се с места, бар приближно одредити растојање од њега до вас? При руци немате никакву справу.

Решење

Немате справа, али имате очи и руке — а то је довољно. Испружите руку у правцу пешака и гледајте врх палца само десним оком ако пешак иде на вашу десну страну, односно само левим оком ако пешак иде на вашу леву страну. У оном тренутку кад пешак буде био покривен вашим палцем (сл. 30), ви затворите око којим сте дотад гледали и отворите друго: учиниће вам се као да се пешак одмакао уназад. Избројте колико ће корака он учинити док се поново не поравна с вашим палцем. Добићете све податке неопходне за приближно одређивање растојања.



Сл. 30. Како се одређује отстојање пешака који иде супротном обалом

Да објаснимо како ћете се тим подацима користити. Нека су на сл. 30 A' и B' ваше очи, тачка M — врх палца испружене руке, тачка A — први положај пешака, а тачка B — други положај. Троугли $A'B'M$ и ABM су слични (ви треба да се окренете пешаку тако да је $A'B'$ приближно паралелно правцу његовог кретања). Према томе је $BM : B'M = AB : A'B'$ пропорција у којој је непознат само члан $B'M$, а сви остали се могу непосредно одредити. Заиста, $B'M$ је дужина ваше испружене руке, $A'B'$

је растојање између ваших зеница, AB је измерено корацима пешака (корак се може узети просечно дугачак 3/4 m). Према томе, непознато растојање од вас до пешака на супротној обали реке је

$$MB = AB \cdot \frac{B'M}{A'B'}.$$

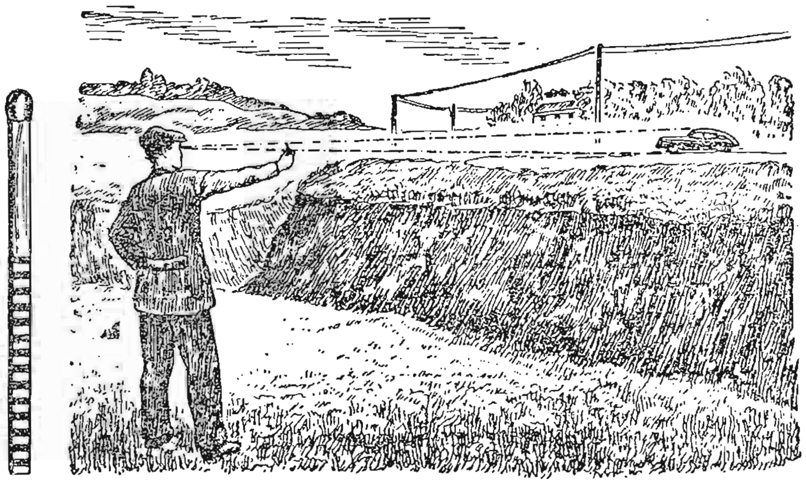
Ако је, например, растојање ваших зеница ($A'B'$) 6 cm, дужина $B'M$ од палца испружене руке до очију 60 cm, а пешак је начинио од A до B рецимо 14 корака, онда остојање пешака од вас износи $MB = 14 \cdot \frac{60}{6} = 140$ корака, или 105 m.

Довољно вам је да раније измерите код куће растојање својих зеница и $B'M$ — растојање од ока до палца испружене руке — да бисте, запамтивши однос тих растојања $\frac{B'M}{A'B'}$, могли брзо одређивати отстојања неприступачних предмета. Тада ће вам остати само да AB помножите тим односом. Просечно је код већине људи $\frac{B'M}{A'B'} = 10$, са малим отступањима. Тешкоћа ће бити само у томе да се на неки начин одреди растојање AB. У датом случају ми смо се користили корацима човека који се креће у даљини, али се можемо користити и другим подацима. Ако желите, например, да измерите колико је од вас удаљен теретни воз, онда дужину AB можете оценити упоређујући је с дужином теретног вагона која је обично позната (7,6 m од једног до другог одбојника). Ако се пак мери удаљеност неке куће, онда се AB оцењује према ширини прозора, дужини црепа и сл.

Тај исти поступак може се применити и за одређивање димензија удаљеног предмета ако је познато његово отстојање од посматрача. У том циљу можемо се користити и другим даљиномерима, које ћемо сада описати.

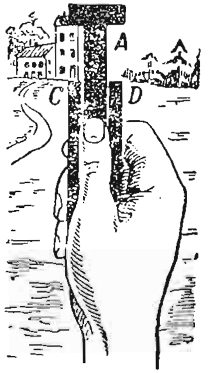
НАЈПРОСТИЈИ ДАЉИНОМЕРИ

У Глави првој описана је најпростија справа за одређивање неприступачних висина — висиномер. Сада ћемо описати најпростију направу за мерење неприступачних растојања — даљиномер. — Најпростији даљиномер може се направити од обичне шибице. За то је потребно исцртати на једној њеној страни милиметарску поделу, и то, да би било јасније, наизменично црне и беле пруге ширине 1 mm (сл. 31).

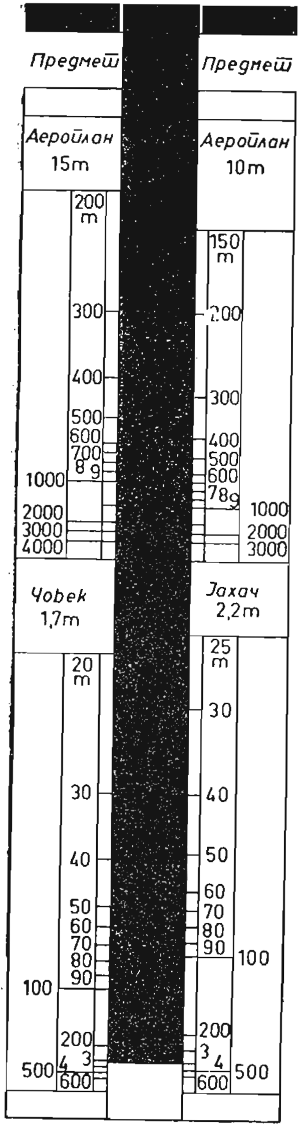


Сл. 31. Шибица-даљиномер и њена употреба за одређивање растојања до удаљених предмета

Коришћење овим примитивним „даљиномером" за оцењивање удаљености неког предмета могућно је само у оним случајевима кад су нам димензије тог предмета познате (сл. 31); уосталом, и разноврсним другим, савршенијим даљиномерима можемо се служити под тим истим условом. — Претпоставимо да у даљини видите човека и постављате себи задатак да одредите растојање до њега. Овде вам може помоћи шибица-даљиномер. Држећи је у испруженој руци и гледајући једним оком, подигните слободан крај шибице тако да поклопи врх удаљене прилике, а затим лагано померајући дуж шибице нокат палца, зауставите га код оне тачке која се пројектује на најнижу тачку удаљене прилике човека. Сад вам још остаје само да погледате код кога



Сл. 32. Покретни даљиномер у дејству



Сл. 33. Конструкција покретног даљиномера

се подеока зауставио нокат и тада имате све податке за решавање постављеног задатка.

Лако је уверити се у тачност сразмере

$$\frac{\text{тражено растојање}}{\text{растојање од ока до шибице}} =$$

$$= \frac{\text{просечан човечији раст}}{\text{измерени део шибице}}.$$

Одатле није тешко израчунати тражено растојање. Ако је, например, растојање од шибице 60 cm, човечији раст 1,7 m, а измерени део шибице 12 mm, тада тражено растојање износи

$$60 \cdot \frac{1700}{12} = 8\,500 \text{ cm} = 85 \text{ m}.$$

Да бисте се привикли на руковање тим даљиномером, измерите висину неког од својих другова и, замоливши га да се удаљи на извесно отстојање од вас, покушајте да одредите за колико се корака он од вас удаљио.

На исти начин можете одредити растојање до коњаника (средња висина 2,2 m), бициклиста (пречник точка 75 cm), телеграфског стуба дуж железничке пруге (висина 8 m, вертикално растојање између суседних изолатора 90 cm), до воза, до куће од опека и сличних објеката чије димензије није тешко оценити с довољном тачношћу. Довољно прилике за то имаћете на излету.

За оне који умеју да раде алатом неће бити тешко да начине подеснију справу истог типа, намењену за оцењивање растојања према величини удаљеног човека.

Конструкција те справице јасна је из сл. 32 и 33. Посматрани предмет „ухвати" се отвором *A* који настаје подизањем покретног дела справе. Величина отвора лако се одређује по подеоцима на деловима *C* и *D* непомичне дашчице. Да бисмо се ослободили потребе да ма шта израчунавамо, можемо на дашчици *C* непосредно написати код сваког подеока одговарајућа растојања ако је посматрани предмет људска прилика (справа се држи у испруженој руци). На десној страни можемо забележити растојања која смо раније израчунали за случај кад се посматра коњаник (2,2 m). За телеграфски стуб (висина 8 m), авион са распоном крила од 15 m и сличне веће објекте можемо искористити горње, слободне делове дашчица *C* и *D*. Тада ће справа изгледати као на сл. 33.

Разуме се, тачност такве оцене растојања није велика. То је управо само оцена, а не мерење. У раније разматраном примеру, када је растојање до човека било процењено на 8,5 m, грешка од 1 mm при мерењу дела шибице дала би грешку резултата од 7 m (тј. $\frac{1}{12}$ од 85). Али, ако би човек стајао четири пута даље, ми бисмо на шибици измерили не 12 mm већ 3 mm, и тада би грешка од 1 mm имала за последицу измену резултата на 57 m. Зато је наш пример у случају оцене растојања до удаљеног човека поуздан само за сразмерно мала растојања, од 100—200 m. При процењивању већих растојања треба бирати и веће објекте.

ЕНЕРГИЈА РЕКЕ

Ти знаш тај крај где све обиљем дише,
Где реке теку од сребра чистије,
Где степски ветар сад ковиље њише
И села тону у модре вишњике.

А. К. Толстој

Реку чија дужина није већа од 100 km сматрамо малом. Знате ли колико таквих малих река има у СССР? Веома много — 43 000!

Кад бисмо те реке надовезали у једну једину и ову исправили, добили бисмо траку дугачку 1 300 000 km. Таквом траком може се Земљина лопта тридесет пута обмотати око екватора (дужина екватора је отприлике 40 000 km).

Ток тих река није брз, али он крије у себи неисцрпне количине енергије. Стручњаци сматрају да би се, ако се саберу скривене могућности свих малих река које теку на територији СССР, добио запањујући број — 34 милиона киловата! Ту бесплатну енергију треба широко искористити за електрификацију села у близини река.

Нека слободно тече река —
Али ако план предвиђа брану
Каменим гребеном преко свих дубина
Преградићемо јој пут заувек.
С. Шчипачов

Познато вам је да се то остварује помоћу хидроцентрала; ви можете показати много иницијативе и указати стварну помоћ у припремању изградње мањих хидроцентрала.

Уствари, градитеље хидроцентрале интересује све што је у вези с реком: њена ширина и брзина тока, површина попречног пресека речног корита — то је т.зв. попречни профил реке — и водостај који могу издржати обале, а све се то може измерити приступачним средствима и претставља уствари нимало тежак геометриски задатак.

Сада ћемо прећи на решавање тог задатка.

Само, претходно ћемо овде навести практичан савет стручњака-инжењера о избору подесног места за изградњу будуће бране на реци.

Малу хидроцентралу капацитета од 15—20 киловата препоручљиво је градити најдаље 5 km од насеља.

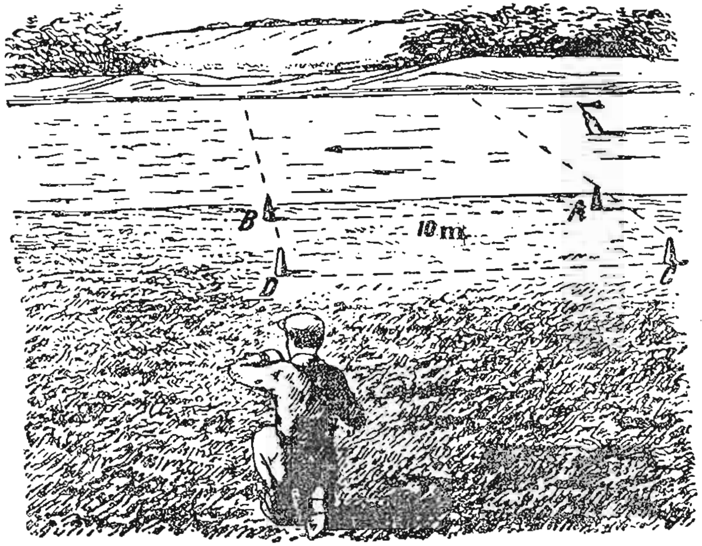
„Брану хидроцентрале треба градити на удаљености од извора која није мања од 10—15 km и није већа од 20—40 km, јер већа удаљеност од извора повлачи за собом поскупљење бране, услед веће количине воде у реци. Ако се пак хидроцентрала гради на удаљености од извора мањој од 10—15 km, услед мале количине воде и недовољног водостаја неће се моћи обезбедити потребна снага хидроцентрале. Изабрани део реке треба да има што мање великих дубина, које такође повећавају коштање бране, јер изискују масивнији темељ“.

БРЗИНА РЕЧНОГ ТОКА

Између села и шуме на брегу
Као трака се сјајна речица вије.
А. Фет

А колико воде протекне за један дан таквом реком?

То није тешко израчунати ако се претходно измери брзина речног тока. Мерење изводе два лица. Једно гледа на сат, а друго држи у руци неки добро видљиви пловак, например зачепљену полупразну боцу са заставицом забијеном у чеп. Изабере се прав део обале и на обали се пободу две значке A и B на растојању од, например, 10 m једна од друге (сл. 34).



Сл. 34. Мерење брзине речног тока

На правим нормалним на AB поставе се још две значке C и D. Један од мерача — онај са сатом — стане иза значке D, а други, са пловком, удаљи се мало од значке A, баци пловак у воду и стане иза значке C. Оба мерача гледају у правцу CA, односно DB на површину воде. У оном тренутку кад пловак пресече праву CA, први посматрач пљесне дланом о длан. На тај знак други посматрач бележи време и кад пловак пресече праву DB поново забележи време.

Претпоставимо да разлика оба времена износи 20 секунада. Тада брзина протицања воде у реци износи $10/20 = 0{,}5$ m/sec.

Обично се мерење понавља десет пута, бацањем пловка на разне тачке површине реке*). Затим се сабирају добијени бројеви и збир подели бројем мерења. То даје средњу брзину протицања површинског слоја река.

Дубљи слојеви теку спорије, те средња брзина целог тока износи отприлике 4/5 површинске брзине — према томе, у нашем примеру, 0,4 m у секунду.

Површинска брзина може се одредити и на други, додуше мање поуздан начин.

Седите у чамац и веслајте 1 km (мерено дуж обале) узводу, а затим у супротном правцу — низводу, настојећи да стално веслате једнаком снагом.

Нека сте тих 1 000 m узводу прешли за 18 минута, а низводу за 6 минута. Ако тражену брзину реке обележите са x а брзину свог кретања у стајаћој води са y, образоваћете једначине

$$\frac{1\,000}{y-x} = 18, \qquad \frac{1\,000}{y+x} = 6,$$

одакле је

$$y + x = \frac{1\,000}{6},$$

$$y - x = \frac{1\,000}{18},$$

$$2x = 110, \qquad x = 55.$$

Брзина протицања воде на површини једнака је 55 m у минуту, те је, према томе, средња брзина око 5/6 m у секунду.

КОЛИКО ВОДЕ ПРОТЕКНЕ РЕКОМ

На један или други начин увек можете одредити брзину којом протиче вода у реци. Тежи је други део припремног рада потребног за израчунавање количине протекле воде — израчунавање површине попречног пресека реке. Да бисмо нашли величину те површине, т.зв. живи (или оквашени) пресек реке, треба да начинимо цртеж тог пресека. Тај посао се ради на следећи начин.

Први начин

На оном месту где сте мерили ширину реке пободите поред саме воде по један кочић. Затим седните са својим друговима у чамац и веслајте од једног до другог кочића настојећи да се стално држите тог правца. Неискусан веслач неће умети да то изведе, нарочито ако је река брза. Ваш друг треба да је искусан веслач, осим тога њему треба да помаже и трећи учесник у том послу, који ће стајати на обали и пазити да чамац не скреће са правца и у случају потребе сигнализирати веслачу на коју страну треба да скрене. Приликом првог прелаза преко речице треба само да избројите са колико се завеслаја чамац помери за 5 или 10 m. Тада извршите други прелаз, наоружани овог пута довољно дугачком мотком са обележеним подеоцима, и на сваких 5—10 m (које ћете рачунати по броју завеслаја) спустите мотку вертикално до дна и забележите дубину речице на том месту.

На тај начин можете измерити живи пресек само мање реке; за широку и водом богату реку потребне су сложеније методе; тај рад изводе стручњаци. Аматеру остаје да изабере за себе задатак који одговара његовим скромним средствима за мерење.

Други начин

На уској и плиткој речици није потребан ни чамац.

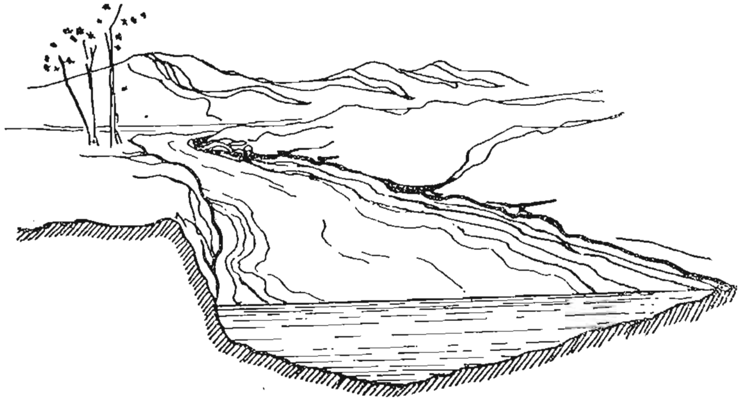
Између два кочића затегните управно на правац реке конопац на коме је сваки метар дужине обележен неким знаком или чвором, и спуштајући код сваког чвора мотку до дна реке, измерите дубину речног корита.

Кад су сва мерења завршена, ви најпре пренесите на милиметарску хартију или на лист из свеске са квадратима цртеж попречног профила реке. Добићете слику као што је сл. 35. Површина фигуре се може одредити веома лако, јер се она разлаже на низ трапеза (код којих знате обе основице и висину) и на два троугла са стране, код којих такође знате основицу и висину. Ако је цртеж рађен у размери 1:100, резултат ћемо добити непосредно у квадратним метрима.

---

*) Уместо да се десет пута баца један исти пловак, може се одједанпут бацити десет пловака на извесном растојању један од другог (тако да кад први од њих пресече правац BD други још није стигао до правца AC). — Прим. прев.

Сада већ имате све податке за израчунавање количине протекле воде. Очигледно, кроз живи пресек реке протиче сваког секунда она запремина воде која је једнака запремини призме чија је основа тај пресек а висина је средња брзина протицања у једном секунду. Ако је, например, средња брзина протицања воде у реци 0,4 m у секунду, а површина живог пресека, рецимо, једнака 3,5 m^2, тада у сваком секунду кроз тај живи пресек протекне



Сл. 35. Живи пресек реке

$$3{,}5 \cdot 0{,}4 = 1{,}4 \ m^3 \text{ воде}$$

или исто толико тона воде*). То за један сат износи

$$1{,}4 \cdot 3\,600 = 5\,040 \ m^3,$$

а за један дан

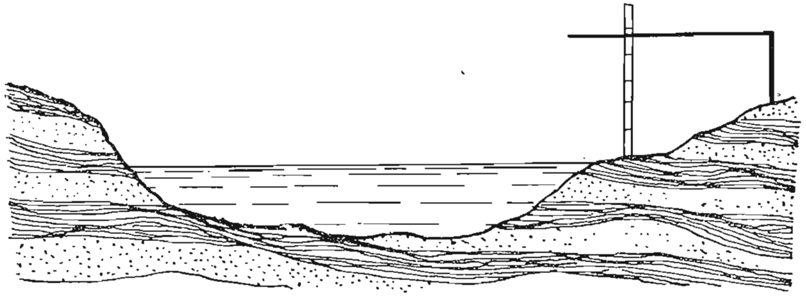
$$5\,040 \cdot 24 = 120\,960 \ m^3,$$

тј. преко сто хиљада кубних метара. А још је река са живим пресеком од 3,5 m речица; она може бити, рецимо, широка 3,5 m и дубока 1 m, може се понегде и прегазити, али и она крије у себи енергију која је кадра да се претвори у свемогућу електричну енергију. Колико ли воде протекне за један дан таквом реком као што је Нева, кроз чији живи пресек у сваком секунду протекне 3 300 m^3 воде! — То је „средњи проток" воде у Неви код Лењинграда. Средњи проток воде у Дњепру код Кијева је 700 m^3.

---

*) Један m^3 некуване воде тежак је 1 тону (1000 kg).

Млади истраживачи и будући градитељи своје хидроцентрале треба још да одреде колики водостај дозвољавају обале, тј. колику разлику нивоа воде може створити брана. У том циљу се на 5—10 m од воде на обали побију две мотке, као обично, у правцу нормалном на правац реке. Крећући се затим тим правцем поставе се кочићи на местима карактеристичних прелома обале (сл. 36). Помоћу летава са обележеном дужинском поделом мери се колико је један кочић виши од суседног и колико је њихово међусобно растојање. Према резултатима мерења, исцрта се профил обале, исто као што је био нацртан попречни профил речног корита.



Сл. 36. Мерење профила обала

Према профилу обала може се оценити висина допустивог водостаја.

Претпоставимо да се ниво воде може браном подићи за 2,5 m. У том случају можете својим подацима додати и могућну снагу ваше будуће хидроцентрале.

Да бисте то нашли, енергетичари кажу да треба 1,4 (проток реке у 1 секунду) да помножите са 2,5 (висина нивоа воде — водостај) и са 6 (коефицијент који се мења зависно од расхода енергије у машинама). Резултат ћете добити у киловатима.

На тај начин имаћете

$$1{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 21 \text{ киловат.}$$

Како се водостај реке, а према томе и проток воде, мења у току године, то је за прорачун потребно знати ону величину протока која је већи део године за реку карактеристична.

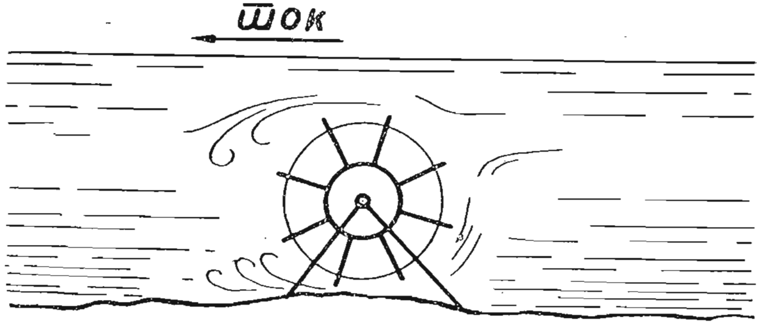
ТОЧАК У ВОДИ

Задатак

Точак с лопатицама намести се близу дна реке тако да се може лако вртети. На коју ће се страну он обртати ако је правац речног тока са десна на лево (сл. 37)?

Решење

Точак ће се обртати у смислу супротном кретању казаљке на сату. Брзина протицања дубљих слојева воде мања је од брзине протицања горњих слојева па ће, према томе, притисак на горње лопатице бити већи од притиска на доње лопатице*).



Сл. 37. На коју ће се страну точак окретати?

МРЉА НА ВОДИ

На реци у коју се испушта вода из фабрике могу се у близини канала често запазити дивни разнобојни преливи. Уље (например машинско), које истиче у реку заједно с водом из фабрике, као лакше остаје на површини и разлива се у необично танак слој. Може ли се измерити или бар приближно оценити дебљина тог слоја?

Задатак изгледа компликован, али се може решити без неких нарочитих тешкоћа. Ви се већ досећате да се нећемо бавити таквим безнадежним послом као што је непосредно мерење дебљине тога слоја. Ми ћемо га измерити посредним путем, краће речено, ми ћемо то израчунати.

Узмите одређену количину машинског уља, напр. 20 g, и проспите је на воду даље од обале (с чамца). Кад се вода буде разлила у облику више или мање јасно оцртане округле мрље, измерите бар приближно пречник тог круга. А кад знате пречник, израчунаћете и површину. Како вам је пак позната и запремина просутог уља (то ћете лако израчунати јер знате његову тежину), то се већ сама собом одатле налази тражена дебљина слоја. Размотрићемо један пример.

Задатак

1 g бензина разливен по води покрива круг с пречником од 30 cm*). Колика је дебљина мрље на води? 1 cm^3 тежак је 0,8 g.

Решење

Нађимо запремину мрље, која је, разуме се, једнака запремини узетог бензина. Ако је 1 cm^3 тежак 0,8 g, онда 1 g има запремину од $\frac{1}{0,8} = 1,25 \text{ cm}^3$, или 1 250 mm^3. Површина круга с пречником 30 cm, или 300 mm, једнака је 70 000 mm^2. Тражена дебљина разливеног слоја једнака је запремини подељеној површином основе:

$$\frac{1\,250}{70\,000} = 0,018 \text{ mm},$$

тј. мања је од педесетог дела милиметра. Разуме се да је непосредно мерење таквих дебљина обичним средствима немогућно.

Мрље уља и мехури сапунице разливају се, односно растежу, у још тање слојеве, достижући дебљину од 0,001 mm па и још мању. „Једанпут сам — прича енглески физичар Бојс у књизи

---

*) Разуме се да то важи за точак чија је величина толика да постоји потребна разлика у брзини протицања слојева воде које ударају на горње, односно доње лопатице. — Прим. прев.

*) Обични расход нафте приликом покривања површине стајаћих вода ради уништавања ларви комарца маларичара износи 400 kg на 1 хектар.

„Мехури сапунице" — извршио овакав оглед на обали. На површину воде просуо сам кашичицу маслиновог уља. Одмах се образовала велика мрља од 20—30 метара у пречнику. Како је мрља била хиљаду пута дужа и хиљаду пута шира од кашичице, то је дебљина слоја уља на површини воде морала бити приближно милионити део дебљине слоја у кашичици, или око 0,000 002 милиметра".

КРУГОВИ НА ВОДИ

Задатак

Ви сте не једанпут, наравно, радознало посматрали оне кругове које ствара камен бачен у мирну воду (сл. 38). И несумњиво, никад вам није тешко падало објашњење те поучне природне појаве: таласи се распростиру од почетне тачке у свим правцима једнаком брзином; зато у сваком тренутку све покренуте тачке морају да се налазе од места на коме је настало таласање на једнаком отстојању, тј. на кругу.

Сл. 38. Кругови на води

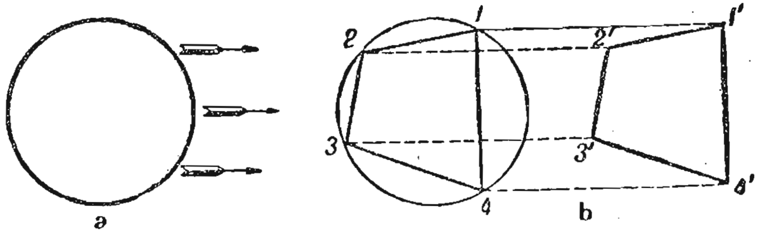
Али, како стоји ствар кад се камен баци у текућу воду? Да ли талас који изазива камен бачен у воду брзе реке мора такође имати облик круга или ће његов облик бити развучен?

На први поглед може се учинити да у текућој води таласи морају бити развучени на ону страну куда их вуче ток реке: таласање се низводу преноси брже неголи узводу и устрану. Зато би усталасани делови водене површине морали, по свој прилици, бити распоређени дуж неке развучене затворене криве, а у сваком случају не дуж круга.

Међутим, то уствари није тако. Бацајући камење и у најбржу воду можете се уверити да ће настати таласи строго кружног облика, потпуно исти као они у стајаћој води. Зашто?

Решење

Расуђиваћемо овако. Ако вода не би текла, таласи би били кружни. А какву промену изазива кретање текуће воде? Оно вуче сваку тачку тог кружног таласа у правцу стрелица на сл. 39а, при чему се све тачке преносе дуж паралелних правих истом брзином, тј. за једнака растојања. А паралелно померање (т.зв. транслација — прим. прев.) не мења облик геометриске фигуре. Заиста, услед таквог померања тачка 1 (сл. 39b) прелази у тачку 1 , тачка 2 у тачку 2′ итд; четвороугао 1234 замењује се подударним четвороуглом 1′2′3′4′, што се лако види из насталих паралелограма 122′1′, 233′2′, 344′3′ итд. Кад бисмо на кругу узели не четири тачке, већ више тачака, такође бисмо добили подударне многоугле; најзад, кад бисмо узели бесконачно много тачака, тј. круг, добили бисмо после паралелног померања подударан круг.



Сл. 39. Струјање воде не мења облик таласа

Ето зашто транслаторно кретање воде не мења облик таласа, те ови и у текућој води остају кружни. Разлика је само у томе што се на површини језера кругови не померају (ако не рачунамо то што се они разилазе од свог непокретног центра, а на површини реке кругови се, заједно са својим центром, крећу брзином протицања воде*).

ЗРНО КОЈЕ СЕ РАСПРСКАВА

Задатак

Позабавимо се сада задатком који, на први поглед, као да нема везе с претходним, а уствари је, као што ћемо видети, у уској вези са малочас додирнутом темом.

Замислите шрапнелско зрно како лети високо у ваздуху. Ево, оно почиње да се спушта и наједанпут се распрскава; комадићи лете на све стране. Нека су сви они испаљени једнаком снагом и лете не наилазећи на сметње у ваздуху. Пита се како ће лежати ти комади 1 секунд после избацивања ако за то време још нису успели да дотакну земљу.

Решење

Задатак је сличан задатку о круговима на води. И овде нам се чини као да зрна треба да су распоређена по некој фигури истегнутој наниже, у правцу падања, јер зрна избачена навише лете спорије неголи она избачена наниже. Међутим, није тешко доказати да зрна нашег замишљеног шрапнела морају бити распоређена по површини лопте. Замислите за тренутак да нема земљине теже; тада се, разуме се, сва зрна у току једног секунда разлете од места избацивања (тј. од уста цеви — прим. прев.) на строго једнака отстојања, тј. распоређују се на површини лопте. Уведимо сад у дејство силу земљине теже. Под њеним утицајем зрна морају падати; али, пошто сва тела, као што знамо, падају једнаком брзином**), то се и зрна морају у току 1 секунда спустити за једнака отстојања, и то дуж паралелних правих. Али, такво паралелно померање не мења облик геометриске фигуре, па према томе лопта остаје лопта.

Дакле, зрна замишљеног шрапнела морају образовати лопту која се, повећавајући се све више, спушта брзином тела које слободно пада.

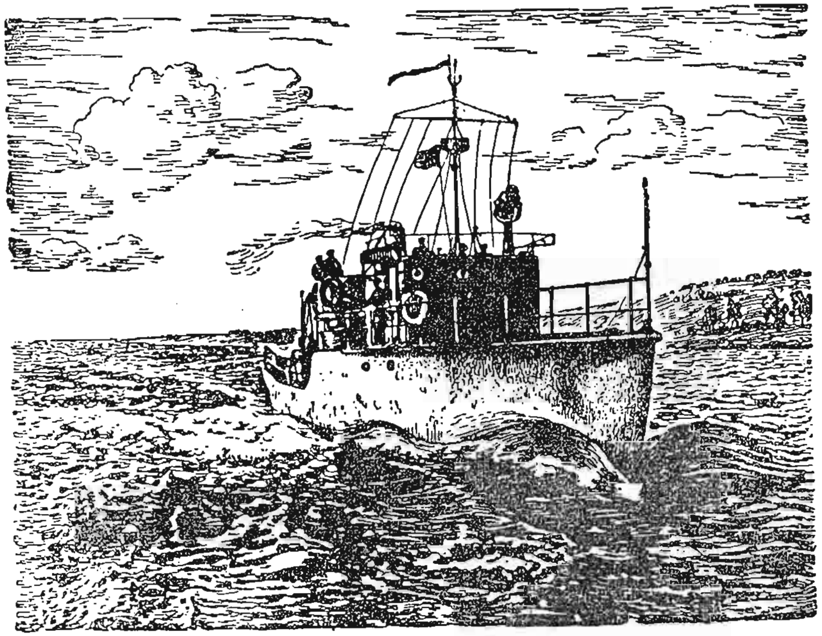
---

*) У тим расуђивањима битан је услов да се вода креће транслаторно једном истом брзином за све тачке насталог кружног таласа. Ако су ови таласи, изазвани каменом баченим у воду, настали на оном делу речне површине где су брзине померања неједнаке (напр. у близини обале), тада се кружни облик таласа неће одржати. — Прим. ред.

**) Разлике настају услед отпора ваздуха, који ми у овом задатку нисмо узели у обзир.

ПРАМЧАНИ ТАЛАС

Вратимо се на реку. Кад стојите на мосту, обратите пажњу на траг који оставља брзи брод. Видећете како се од прамца разилазе под извесним углом два водена гребена (сл. 40).



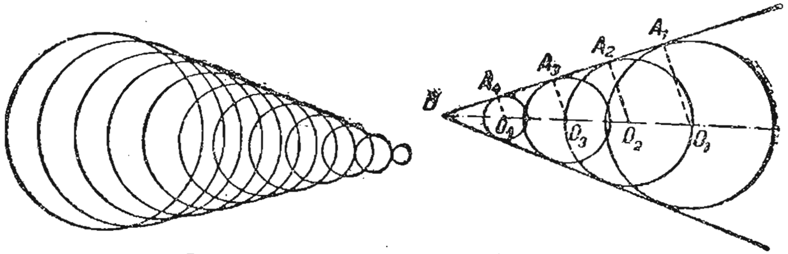
Сл. 40. Прамчани талас

Откуда ти гребени? И зашто је угао између њих утолико оштрији уколико брод брже плови?

Да бисмо објаснили себи узрок постанка тих водених гребена, вратимо се још једанпут оним круговима који се, изазвани камичцима баченим у воду, разилазе по површини воде.

Бацајући у воду камичак за камичком у одређеним временским размацима можемо на површини воде видети кругове разне величине; уколико је камичак касније бачен, утолико је мањи круг који он изазива. Ако се притом камичци бацају тако да падају у воду дуж једне праве, тада ће сви настали кругови заједно образовати нешто налик таласу уз прамац брода. Уколико су камичци мањи и уколико их чешће бацамо, утолико је та сличност већа. Ако умочите у воду неки штап и вучете га по површини воде, ви као да испрекидано падање камичака замењујете непрекидним, и тада ћете видети управо онакав талас какав настаје уз прамац брода.

Сад преостаје да се тој очигледној слици дода још само мало да би нам она постала потпуно јасна. Секући воду прамац брода у сваком тренутку ствара кружни талас као што је онај који ствара у воду бачен камен. Круг се шири на све стране, али за то време брод се померио напред и створио други кружни талас, за којим одмах следује трећи итд. Испрекидано настајање кругова изазвано камичцима замењује се непрекидним настајањем кругова, услед чега се и добија слика као сл. 41 лево. Сучељавајући се, гребени суседних таласа разбијају један други; остају недирнута само она два мала дела пуног круга која се налазе споља. Ти спољни делови образују два гребена који имају положај спољашњих заједничких тангената свих кружних таласа (сл. 41).



Сл. 41. Како настаје прамчани талас

Тако настају они водени гребени које сте видели иза брода и уопште иза сваког тела које се довољном брзином креће по површини воде.

Одатле непосредно произлази закључак да је та појава могућна само онда кад се тело креће брже него што се крећу таласи. Ако штап вучете кроз воду споро, нећете видети таласе, јер ће се кружни таласи налазити један у другоме и неће имати заједничку тангенту.

Таласи који се разилазе на две стране могу се видети и онда кад тело стоји у месту, а вода протиче крај њега. Ако је ток реке довољно брз, онда слични таласи настају на води код стубова моста. Притом се добија јаснији облик таласа неголи, например, код парброда, јер њихову правилност не нарушава рад бродске елисе.

Пошто смо објаснили геометриску страну ствари, покушајмо да решимо овакав задатак.

Задатак

Од чега зависи величина угла између оба брега прамчаног таласа пароброда?

Решење

Повуцимо из центара кружних таласа (сл. 41) полупречнике до одговарајућих делова праволиниског гребена, тј. до тачака заједничке тангенте. Лако је схватљиво да је O_1B пут који за извесно време пређе прамац брода, а O_1A_1 растојање на које се за то време распростре таласање. Однос $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ је синус угла O_1BA_1 и, у исто време, однос брзина таласа и брода. То значи да је $\sphericalangle B$ између гребена првог таласа управо два пута већи од угла чији је синус једнак односу брзине кружних таласа и брзине брода.

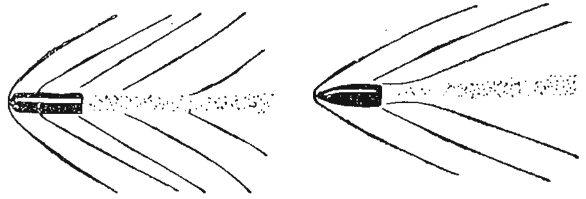
Брзина распростирања кружних таласа у води скоро не зависи од тога какав их је брод својим кретањем изазвао; зато угао под којим се разилазе брегови прамчаног таласа зависи углавном од брзине брода: синус половине угла је обрнуто пропорционалан тој брзини. И обрнуто, по величини угла можемо проценити колико је пута брзина пароброда већа од брзине таласа. Ако је, например, угао између брегова прамчаног таласа 30^0, као код већине морских путничко-теретних бродова, онда је синус половине тог угла ($\sin 15^0$) једнак 0,26; то значи да је брзина пароброда већа од брзине кружних таласа отприлике $\frac{1}{0{,}26}$ пута, тј. приближно 4 пута.

БРЗИНА ТОПОВСКИХ ГРАНАТА

Задатак

Таласе сличне малочас разматраним стварају у ваздуху избачена топовска граната и остала артиљериска зрна.

Лет зрна може се фотографисати. На сл. 42 нацртана су према снимку два зрна у лету, која се крећу различитим брзинама. На цртежу се јасно види онај ударни талас (како га у таквим случајевима зову) који нас овде интересује. Он постаје на исти начин као и прамчани талас. И овде се могу применити исти геометриски односи: синус половине угла под којим се разилазе ударни таласи једнак је односу брзине простирања таласа у ваздуху према брзини лета зрна. Али, таласно кретање у ваздуху



Сл. 42. Ударни талас у ваздуху који ствара зрно у лету

преноси се брзином која је блиска брзини звука, тј. 330 m у секунду. Зато је лако, кад се има снимак зрна у лету, приближно одредити његову брзину. Како би се то учинило на основу горњих двају цртежа?

Решење

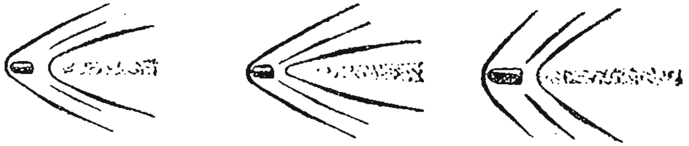
Измерићемо угао под којим се разилазе брегови ударног таласа на сл. 42. У првом случају тај угао има око 80^0, а у другом око 55^0. Половине тих углова износе 40^0, одн. $27^030'$. У таблицама налазимо: $\sin 40^0 = 0{,}64$, $\sin 27^030' = 0{,}46$. Према томе, брзина простирања ваздушног таласа, тј. 330 m у секунду, чини у првом случају 0,64 брзине лета зрна, а у другом случају 0,46 брзине лета зрна. Отуда је брзина првог зрна једнака $\frac{330}{0{,}64} =$

$= 520$ m/sec, а другог $\frac{330}{0{,}46} = 720$ m/sec.

Као што видите, прилично једноставна геометриска расуђивања, са извесном подршком од стране физике, помогла су нам да решимо један на први поглед веома замршен задатак да се по фотографском снимку зрна у лету одреди његова брзина у тренутку снимања. (Међутим, наш прорачун даје само приближно тачан резултат, јер овде нису узимане у обзир и неке другостепене околности.)

Задатак

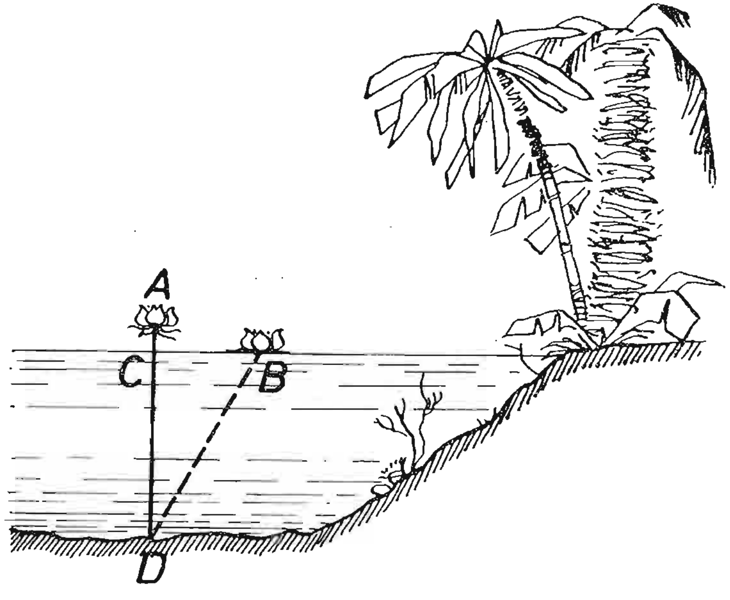
За оне који желе да на сличан начин самостално израчунају брзину артиљериског зрна доносимо овде три цртежа према фотографским снимцима зрна која лете различитим брзинама (сл. 43).



Сл. 43. Како се одређује брзина лета пројектила?

ДУБИНА РИБЊАКА

Кругови на води одвели су нас за извесно време у област артиљерије. Сад ћемо се вратити реци и разматраћемо индуски задатак о лотосу.



Сл. 44. Индуски задатак о лотосовом цвету

Стари Индуси су имали обичај да задатке и правила изражавају стиховима. Ево једног таквог задатка.

Задатак

Над језером тихим
Лотос се за пола стопе уздизао.
Он је растао усамљен. И ветар га је нагло
Нагнуо устрану. Нема
Цвета над водом више,
А у рано пролеће рибар га је
Нашао на води, две стопе
Од места на коме је никао.
И ја вас сад питам:
Колико је језерска вода
На том месту дубока?

Решење

Обележимо (сл. 44) тражену дубину CD рибњака са x. Тада по Питагориној теореми имамо:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

тојест

$$(x + {}^1/_2)^2 - x^2 = 2^2,$$

одакле је

$$x^2 + x + {}^1/_4 - x^2 = 4, \quad x = 3{}^3/_4.$$

Тражена дубина износи $3{}^3/_4$ стопе.

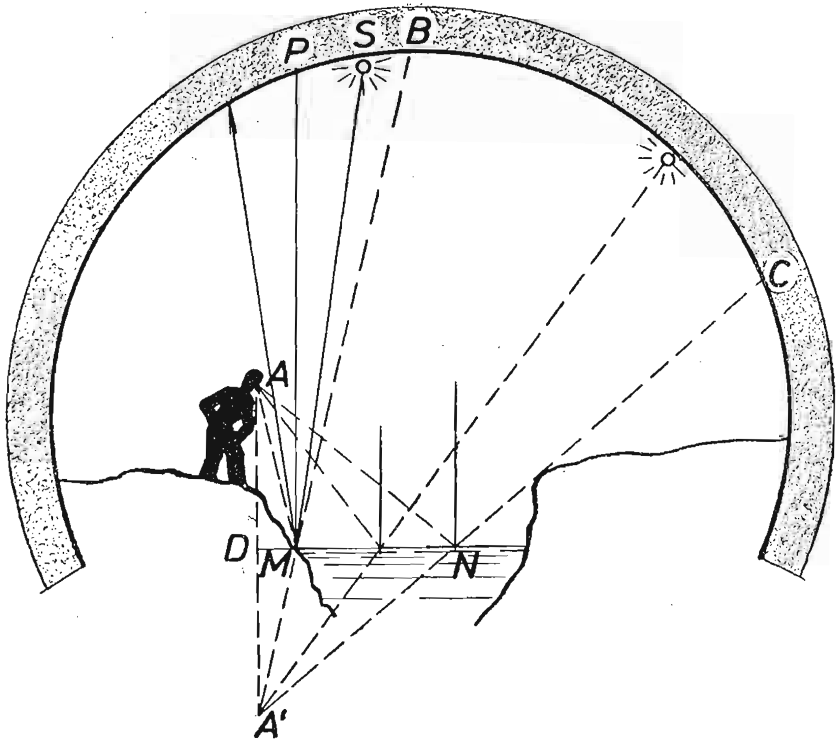
Близу обале реке или не много дубоког рибњака можете потражити водене биљке које ће вам пружити реални материјал за сличан задатак, да без икаквог оруђа, чак и не квасећи руке, одредите дубину воде на том месту.

ЗВЕЗДАНО НЕБО У РЕЦИ

Река и ноћу поставља геометру разне задатке. Сетите се Гогољевог описа Дњепра: „Звезде горе и блистају над светом и све се у Дњепру огледају. Све их Дњепар држи у свом тамном наручју: ниједна неће од њега побећи, изузев ако на небу не угасне.“ Уствари, кад стојиш на обали широке реке чини ти се да се у огледалу воде одражава цео звездани свод.

А да ли је заиста тако? Да ли се све звезде огледају у реци?

Да нацртамо то (сл. 45): A је око посматрача који стоји на ивици стрме речне обале, MN је површина воде. Које звезде посматрач може из тачке A видети у води?



Сл. 45. Колики се део звезданог неба може видети у речном огледалу

Да бисмо одговорили на то питање, спустимо из тачке A дуж AD нормалну на MN и продужимо је за исту толику дужину до тачке A'. Кад би се посматрач налазио у тачки A', он би могао видети само онај део звезданог неба који је обухваћен углом $BA'C$. Исто толико је и видно поље посматрача који гледа из тачке A. Звезде које се налазе ван тог угла посматрач не види; зраци које оне одбијају пролазе ван његових очију.

Како да се у то уверимо? Како да докажемо, например, да наш посматрач не може у речном огледалу видети звезду S која је ван угла $BA'C$?

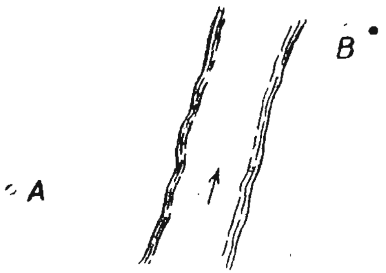
Пратићемо њен зрак који пада близу обале у тачку M; тај зрак ће се, по закону одбијања светлости, одбити под извесним углом према нормали MP који је једнак углу SMP и, према томе, мањи је од угла PMA (то је лако доказати на основу подударности троуглова ADM и $A'DM$); према томе, одбијени зрак мора проћи ван тачке A. Утолико ће даље од посматрачевог ока проћи зраци звезде S који се одбијају од тачака које су даље од тачке M.

Као што видимо, у Гогољевом опису има преувеличавања: у Дњепру се не огледају ни издалека све звезде за нас видљивог звезданог неба.

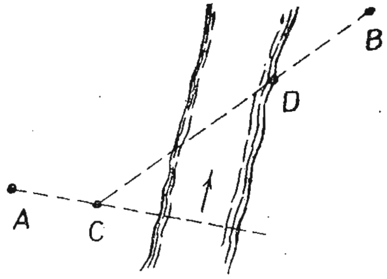
ПУТ ПРЕКО РЕКЕ

Задатак

Између тачака A и B налази се река (или канал) са приближно паралелним обалама (сл. 46). Преко реке треба саградити мост под правим углом према његовим обалама. Где треба изабрати место за мост да би пут од A до B био најкраћи?



Сл. 46. Где треба изградити мост под правим углом према обалама тако да пут од A до B буде најкраћи?

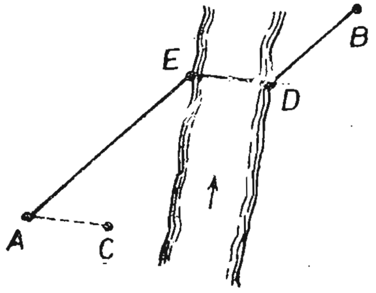


Сл. 47. Место за изградњу моста је изабрано

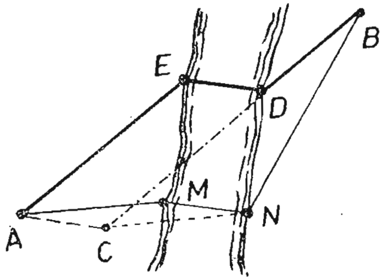
Решење

Повуцимо кроз тачку B (сл. 47) праву управну на правац реке и тачку C на тој правој изаберимо тако да је дуж AC једнака ширини реке. Добијамо трасу ACB; мост треба саградити у тачки D да би пут од A до B био најкраћи.

Заиста, кад саградимо мост DE (сл. 48) и спојимо E са A, добијамо пут $AEDB$ у коме је део AE паралелан са CD ($AEDC$ је паралелограм, јер су његове супротне странице AC и ED једнаке и паралелне). Зато је пут $AEDB$ по дужини једнак путу ACB.



Сл. 48. Мост је изграђен



Сл. 49. $AEDB$ је заиста најкраћи

Лако је показати да је сваки други пут дужи од пута ACB. Претпоставимо да смо помислили да је неки пут $AMNB$ (сл. 49) краћи од $AEDB$, тј. краћи од ACB. Ако спојимо C и N, видећемо да је $CN = AM$. Према томе је $AMNB = ACNB$. Али CNB је, очигледно, веће од CB, што значи да је и $ACNB$ веће од ACB, а отуда и веће од $AEDB$. На тај начин излази да пут $AMNB$ није краћи, већ је дужи од пута $AEDB$.

Ово расуђивање важи за сваки положај моста који се не поклапа са ED; другим речима, пут $AEDB$ је заиста најкраћи.

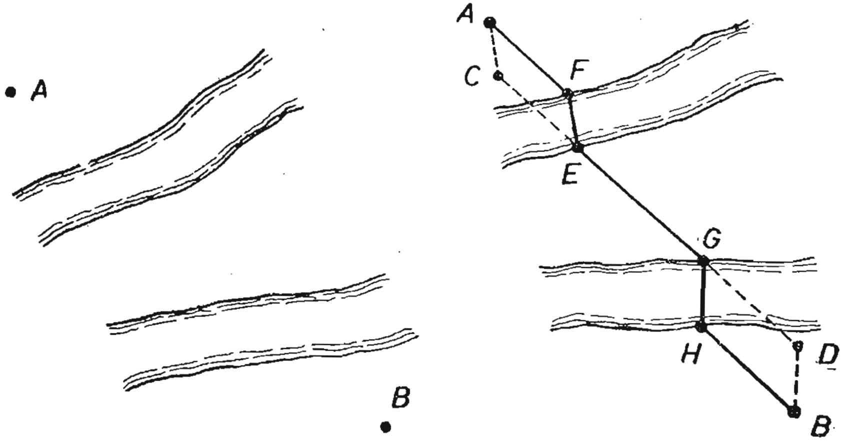
ИЗГРАДИТИ ДВА МОСТА

Задатак

Може се јавити сложенији случај — кад треба наћи најкраћи пут од A до B преко реке која се мора двапут пресећи под правим углом према обалама (сл. 50). На којим местима треба тада саградити мостове?

Решење

Треба из тачке *A* (сл. 50) повући дуж *AC* једнаку ширини реке у I делу и управну на њене обале. Из тачке *B* треба повући отсечак *BD* једнак ширини реке у II делу и такође управан на обале. Тачке *C* и *D* спојити једном дужи. У тачки *E* треба саградити мост *EF*, а у тачки *G* мост *GH*. Пут *AFEGHB* је тражени најкраћи пут од *A* до *B*.



Сл. 50. Саграђена су два моста

Како се то доказује — то ће, разуме се, читалац знати и сам ако и у овом случају буде расуђивао исто онако како смо ми расуђивали у претходном задатку.

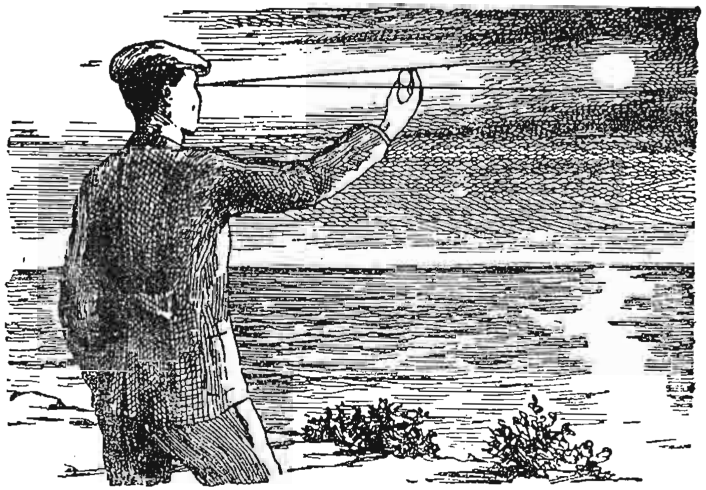
ГЛАВА ТРЕЋА

ГЕОМЕТРИЈА НА ОТВОРЕНОМ ПОЉУ

ПРИВИДНА ВЕЛИЧИНА МЕСЕЦА

Колика вам изгледа величина пуног Месеца на небу? Од разних људи добили би се веома различити одговори на то питање.

Месец је велик „као тањир“, „као јабука“, „као човечја глава“ и сл. — све те оцене су у највећој мери нетачне и неодређене и сведоче само о томе да они који тако одговарају не воде рачуна о суштини питања.



Сл. 51. Шта је то видни угао

Тачан одговор на то, како изгледа, толико обично питање може дати само онај ко јасно схвата шта се разуме под привидном величином предмета. Мало ко подозрева да се ту ради о величини извесног угла и то управо оног угла који образују две полуправе повучене од крајњих тачака посматраног предмета ка нашем оку; тај се угао назива видним углом или угловном величином предмета (сл. 51). А када се привидна величина Месеца на небу оцењује упоређивањем с величином тањира, јабуке и сл., онда су такви одговори или потпуно бесмислени или пак треба да значе да Месец на небу видимо под истим видним углом под којим видимо и тањир или јабуку. Али, то само по себи још није довољно, јер тањир или јабуку видимо под разним угловима зависно од њихове удаљености од нас: ако су близу, видимо их под већим углом, а ако су даље, под мањим углом. Да би се та неодређеност отклонила, неопходно је навести са коликог се отстојања посматрају тањир или јабука.

Упоређивање величине удаљених предмета с величином других предмета чије се отстојање од посматрача не зна — то је у књижевности уобичајен поступак којим су се користили и велики писци. Такво упоређивање ствара известан утисак захваљујући томе што је блиско начину схватања већине људи, али не ствара јасну слику. Ево примера из Шекспировог „Краља Лира“; Едгар описује какав је видик с високог обронка морске обале:

„Како је грозно, вртоглаво
Бацити поглед дубоко доле ту!
Вране и чавке што средином лете
Личе на бубе. На пô пута доле
Виси човек — бере мирођију. Страшно!
Изгледа не већи но његова глава.
Рибари што по обали ходају
К'о да су мишеви. Усидрен велики брод
Има величину свог чамца, а чамац
К'о једва видљива котвина плутача.
Шумни, пенушави таласи што плаве
Безбројни пусти шљунак не чују се
На овој висини...“
(Превод Ж. Симића и С. Пандуровића.)

Та упоређивања створила би јасну претставу о растојању кад би било речено и то колико су удаљени предмети с којима се упоређује (бубе, човечја глава, мишеви, чамци...). Исто тако је и при упоређивању величине Месеца с величином тањира или јабуке потребно рећи колико треба да су од ока удаљени ови познати предмети.

Испоставља се да је ово отстојање много веће него што се то обично мисли. Држећи у испруженој руци јабуку ви њоме заклањате не само Месец него и велики део неба око Месеца. Обесите јабуку неким концем о какву грану и постепено се све више удаљујте од ње, док она управо не покрије само потпуни Месечев котур; у том положају јабука и Месец имаће за вас једнаку привидну величину. Пошто измерите отстојање јабуке од свог ока, уверићете се да оно отприлике износи 10 m. Ето колико треба одмаћи од себе јабуку да би нам она заиста изгледала по величини једнака Месецу на небу! А тањир би требало удаљити на 30 m, тј. на 50 корака.

Ово што смо рекли изгледаће невероватно свакоме ко о томе слуша први пут, али то је неоспорно и произлази одатле што ми Месец видимо под видним углом од само 30 *). У свакодневном животу нам скоро никад не затреба да оцењујемо углове, те зато већина људи има сасвим мутну претставу о величини малог угла, например угла од 1^0, од 2^0 или од 5^0 (овде не мислим на геометре, техничке цртаче и друге стручњаке који су навикли у пракси да мере углове). Само велике углове оцењујемо више или мање поуздано, нарочито ако се досетимо да их упоредимо с познатим нам угловима између казаљки на сату; свима су, наравно, познати углови од 90^0, 60^0, 30^0, 120^0, 150^0, које смо толико навикли да видимо на сатном бројчанику (у 3^h, 2^h, 1^h, 4^h, 5^h), тако да ћемо, и не разликујући бројеве, по величини угла између казаљки погодити колико је сати. Али, мале и издвојене предмете ми обично видимо под много мањим углом и зато никако не умемо да чак ни приближно оценимо одговарајући видни угао.

ВИДНИ УГАО

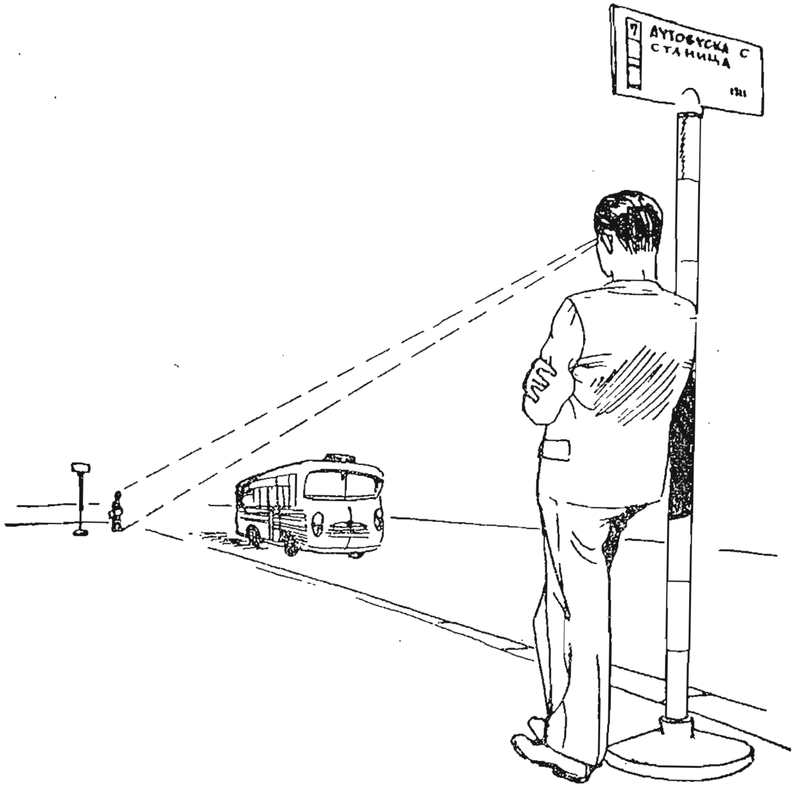
У жељи да наведемо очигледан пример угла од 1^0 израчунаћемо колико треба да се од нас удаљи човек средњег раста (1,7 m) да бисмо га видели под тим углом. Преводећи тај задатак на језик геометрије рећи ћемо да треба да израчунамо полупречник круга чији лук од 1^0 има дужину од 1,7 m (строго говорећи, овде се не ради о луку већ о тетиви, али за мале углове се разлика

---

*) Уствари је привидни пречник Месеца, или видни угао Месеца, променљив. При кретању Месеца по путањи његово остојање од Земље мења се од 354 000 km до 406 000 km, те се, према томе, видни угао мења од 33′40″ до 29′24″. — Прим. ред.

између дужине лука и дужине одговарајуће тетиве може занемарити). Расуђиваћемо овако:

Ако лук од 1^0 има дужину од 1,7 m, онда ће пуни круг, који има 360^0, имати дужину $1{,}7 \cdot 360 = 610$ m; полупречник је пак 2π пута мањи од обима круга; ако се за број π узме његова приближна вредност 22/7, тада ће полупречник бити једнак



Сл. 52. Са отстојања од 100 m човек се види под углом од 1^0

$$610 : \frac{44}{7} \approx 98 \text{ m}.$$

Према томе, човека видимо под углом од 1^0 ако је он од нас удаљен око 100 m (сл. 52). Ако се он удаљи двапут више, тј. на отстојање од 200 m, ми ћемо га видети под углом од 30 , а ако

се он приближи на 50 m отстојања, тада ће видни угао порасти на 2^0 итд.

Није тешко израчунати такође да штап дугачак 1 m видимо под углом од 1^0 ако се налази на отстојању од $360 : \frac{44}{7} \approx 57$ m од нас. Отприлике под истим толиким углом видимо и 1 cm на отстојању од 57 cm, 1 km на отстојању од 57 km итд. — уопште, сваки предмет који се налази на отстојању 57 пута већем од свог пречника. Ако упамтимо тај број 57, моћи ћемо брзо и просто да изводимо све рачуне који се односе на угловну величину предмета. Например, ако желимо да одредимо колико треба да удаљимо јабуку пречника 9 cm да бисмо је видели под углом од 1^0, довољно је да помножимо $9 \cdot 57$ и добићемо 513 cm, или око 5 m; с двапут већег отстојања видећемо је под двапут већим углом, тј. под углом од 30′ — дакле, тада ће та јабука имати исту привидну величину као и Месец.

На тај начин можемо ма за који предмет израчунати оно отстојање на коме нам његова величина изгледа привидно једнака величини Месеца.

ТАЊИР И МЕСЕЦ

Задатак

На колико отстојање треба удаљити тањир пречника 25 cm да би он изгледао велики као Месец на небу?

Решење

$$25 \text{ cm} \cdot 57 \cdot 2 \approx 28 \text{ m}.$$

МЕСЕЦ И МЕТАЛНИ НОВАЦ

Задатак

Израчунајте то исто за петодинарку (пречник 24,6 mm) и двединарку (пречник 22,2 mm).

Решење

$$0{,}0246 \cdot 57 \cdot 2 \approx 2{,}8 \text{ m},$$
$$0{,}0222 \cdot 57 \cdot 2 \approx 2{,}5 \text{ m}.$$

Ако вам се чини невероватним да нам Месец не изгледа већи од дводинарке на отстојању од четири корака или од попречног пресека обичне писаљке на отстојању од 80 cm — држите писаљку у испруженој руци према пуном Месечевом котуру; она ће покрити не само Месечев котур него и део неба око њега. И ма колико то чудно изгледало, предмет чија је величина најподеснија за упоређивање с привидном величином Месеца није ни тањир, ни јабука, па чак ни вишња, већ зрно грашка или, још боље, главица шибице! За упоређивање с тањиром или јабуком треба ове удаљити на неоубичајено велико отстојање; јер јабуку у својој руци или тањир пред собом на столу видимо десет до двадесет пута већим него што нам изгледа Месечев котур, а главицу шибице коју посматрамо на отстојању од 25 cm од ока (отстојање јасне видљивости) видимо заиста под углом од 30′, тј. на том отстојању је привидна величина главице шибице једнака привидној величини Месеца.

То што у очима људи Месечев котур варљиво постаје 10 до 20 пута већи претставља једну од најзанимљивијих оптичких обмана. Она зависи пре свега од јачине Месечева сјаја: пун Месец се на небу издваја много оштрије него што се на својој подлози истичу тањири, јабуке, метални новац и други предмети с којима се врши упоређивање*).

Ова илузија намеће нам се с таквом неизрецивом упорношћу да јој чак и сликари, који се одликују поузданим оком, подлежу исто као и остали људи и на својим сликама претстављају пун Месец много већи него што би требало. Да бисмо се у то уверили, довољно је да упоредимо насликани пејзаж са његовим фотографским снимком.

То што смо рекли односи се и на Сунце, које са Земље видимо приближно под тим истим углом од $^{1}/_{2}{}^{0}$; иако је прави полупречник Сунчеве лопте 400 пута већи од Месечевог, видни угао, због тога што је отстојање Сунца од нас 400 пута веће, остаје исти**).

СЕНЗАЦИОНАЛНИ СНИМЦИ

Да бисмо објаснили важан појам видног угла, удаљићемо се мало од наше непосредне теме — геометрија на отвореном пољу — и навешћемо неколико примера из области фотографије.

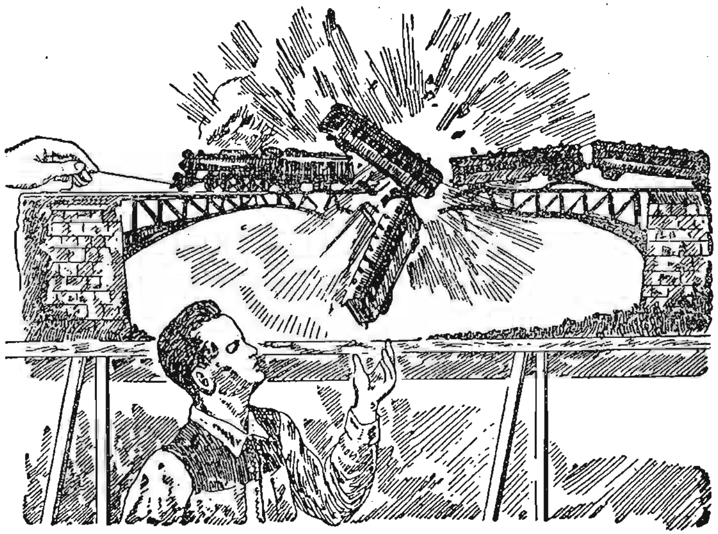
---

*) Из истог разлога усијана жица у електричној сијалици изгледа нам много дебља него кад је хладна и тамна.

**) При средњем отстојању Земље од Сунца угловни пречник Сунца износи око 32′. — Прим. ред.

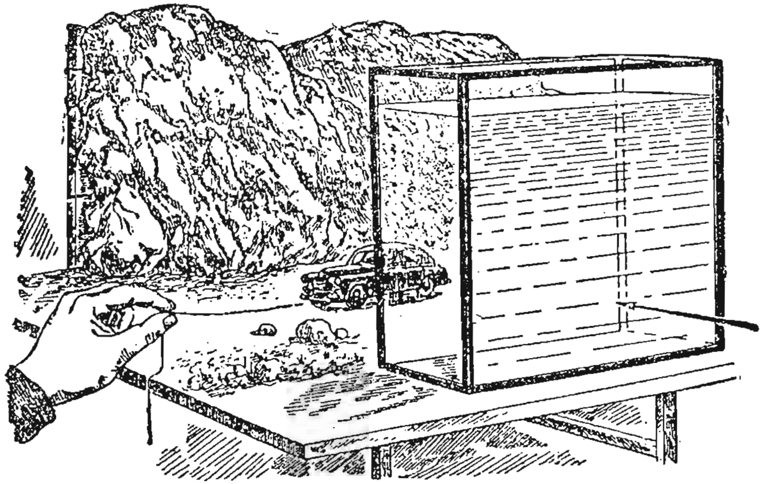
На биоскопском платну сте, наравно, видели такве катастрофе као што је судар возова или такве невероватне сцене као што је аутомобил који иде по морском дну.

Сетите се филма „Деца капетана Гранта“. Како је јак утисак — зар не? — оставила на вас сцена бродолома у бури или призор крокодила који су у речном муљу окружили дечака. Разуме се да нико и не помишља да су такви снимци начињени непосредно у природи. Али, како се такви снимци добијају?



Сл. 53. Припремање железничке несреће за снимање

Тајну откривају овде приложене илустрације. На сл. 53 видите „катастрофу“ воза-играчке на истом таквом мосту, а на сл. 54 аутомобил-играчку који вуку концем иза акваријума. То је управо та „природа“ која је била снимљена на одговарајући део филмске траке. Па зашто онда, кад те снимке видимо на биоскопском платну, имамо илузију да су то пред нама прави воз и прави аутомобил? — Јер овде, на илустрацијама, ми бисмо одмах запазили њихове минијатурне димензије, чак иако не бисмо могли да их упоређујемо с величином других предмета. Узрок је прост: воз-играчка и аутомобил-играчка снимљени су са веома малог отстојања, изблиза, те их зато гледалац види отприлике под оним истим видним углом под којим ми обично видимо праве вагоне и аутомобиле. Ето, у томе је тајна те илузије.



Сл. 54. Путовање аутомобила по дну мора

Сл. 55. Слика из филма „Руслан и Људмила“

Или, ево још једне слике из филма „Руслан и Људмила“ (сл 55): огромна глава и малени Руслан на коњу. Глава је на макетном пољу близу камере, а Руслан на коњу је на знатном отстојању. У томе је сва тајна илузије.

Сл. 56 претставља други пример илузије заснован на истом принципу. На тој слици видите чудан предео, који потсећа на природу из најстаријих геолошких епоха: чудно дрвеће налик на џиновске маховине, на њему огромне водене капи, а на предњем плану огромно чудовиште које је, међутим, слично безазленим стоногама! Без обзира на тако неуобичајен изглед, слика је цртана из природе: то је управо мали део шумског тла, само цртан под неуобичајеним видним углом. Ми никад не видимо стабаоце маховине, кап росе, стоноге и сл. под тако великим видним углом и зато тај цртеж изгледа тако туђ, непознат. Пред нама је предео какав бисмо видели кад бисмо били величине мрава.

Сл. 56. Загонетни предео снимљен у природи

Исто тако поступају, и то намерно, фоторепортери буржоаских листова приликом израде тобожњих фоторепортажа. У једном од иностраних листова једанпут је била објављена белешка с приговором градској самоуправи која допушта да се на градским улицама гомилају огромна брда снега. Као потврда објављен је снимак једног таквог брда, који је остављао поразан утисак. Приликом проверавања испоставило се да је као природа за снимак послужила невелика гомила снега, коју је фотограф-„шаљивчина“

снимио с веома малог отстојања, тј. под неуобичајено великим видним углом.

Други пут је тај исти лист објавио снимак широке расселине у близини града; та расселина је, како је писало у листу, улаз у пространо подземље, где је нестала група необазривих туриста који су се осмелили да продру у пећину. Одред добровољаца, сакупљен ради тражења залуталих, открио је да је расселина фотографски снимак једва приметне пукотине у избледелој стени, пукотине широке само 1 cm!

ЖИВИ УГЛОМЕР

Није тешко да свако сам начини угломер једноставне конструкције, нарочито ако се притом служи готовим угломером. Али, и такав угломер нам се не нађе увек при руци кад шетамо изван града. У тим случајевима можемо се користити услугама оног „живог угломера“ који увек носимо уза се — то су наши прсти на рукама. Да бисмо се њима користили приликом приближног оцењивања видног угла, треба само да претходно извршимо неколико мерења и рачуна.

Пре свега, треба да утврдимо под којим углом видимо нокат на кажипрсту своје напред испружене руке. Обична ширина нокта је 1 cm, а његово отстојање од ока је у таквом положају око 60 cm, те га зато видимо отприлике под углом од 1^0 (уствари нешто мањим, јер се угао од 1^0 добија на отстојању од 57 cm). Код деце је нокат мањи а рука краћа, тако да је и код њих видни угао отприлике исти — 1^0. Читалац ће добро учинити ако сам, не ослањајући се на податке у књизи, изврши за себе то мерење и рачун да би се уверио да резултат не отступа много од 1^0; ако је отступање велико, треба измерити ширину нокта на другом прсту.

Кад то знате, ви можете оцењивати видни угао дословце голим рукама. Сваки удаљени предмет који управо покрива нокат кажипрста ваше испружене руке видите под углом од 1^0; према томе, тај предмет се налази на отстојању које је 57 пута веће од његовог пречника. Ако нокат покрива половину предмета, то значи да је угловна величина тог предмета 2^0, а да је његово отстојање 27 пута веће од његовог пречника.

Пун Месец покрива само половина нокта, тј. пун Месец видимо под углом од 30 , те, према томе, његово отстојање од Земље износи 114 његових пречника; ето, ово важно астрономско мерење извршили смо... голим рукама!

За веће углове користите се горњим чланком свог палца држећи га савијеног на испруженој руци. Код одраслог човека је дужина (запамтите: **дужина**, а не **ширина**) тог чланка око 3,5 cm, а растојање од ока до испружене руке око 55 cm. Лако је израчунати да његова угловна величина у таквом положају треба да је једнака 4^0. То нам омогућује да оцењујемо видни угао од 4^0 (а то значи и видни угао од 8^0).

Овде треба прикључити још два угла који се могу измерити прстима, а то су угао који одговара на испруженој руци отвору између средњег прста и кажипрста раширених што је могућно више и угао између палца и кажипрста раширених што је могућно више. Није тешко израчунати да први угао има отприлике 7^0—8^0, а други 15^0—16^0.

За време шетње по пространом отвореном терену пружиће вам се много пута прилика да примените свој живи угломер. Нека се у даљини види теретни вагон који покрива отприлике половина чланка на палцу ваше испружене руке, тј. који видите под углом од око 2^0. Кад је дужина теретног вагона позната (око 6 m), лако ћете наћи колико вас растојање дели од њега: $6 \cdot 28 = 170$ m. Резултат је, разуме се, грубо приближан, али је ипак поузданији неголи ничим основана оцена одока.

Узгред ћемо показати како можете на терену обележити прав угао користећи се само својим телом.

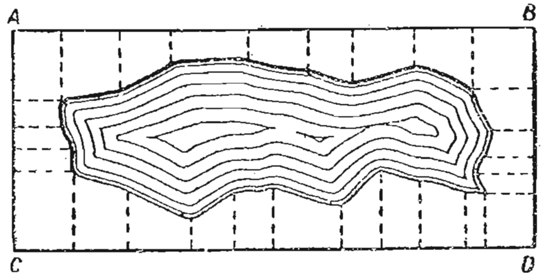
Ако треба да кроз извесну тачку повучете праву нормалну на неку дату праву (на којој та тачка лежи — прим. прев.), тада станите на ту тачку окренути тако да гледате низ дату праву и, **засад не окрећући главу**, слободно испружите руку на ону страну где желите да повучете нормалу. Пошто то учините, подигнуте палац своје испружене руке, окрените главу к палцу и запазите који предмет — камен, жбунић и сл. — покрива ваш палац ако га гледате одговарајућим оком (тј. десним ако сте испружили десну руку, а левим ако сте испружили леву).

Сада вам остаје још само да на земљи обележите праву линију од места на коме сте стајали до предмета који сте запазили — то ће бити тражена нормала. Овај начин оставља утисак као да не обећава добре резултате, али после мало увежбавања научићете да цените услуге тог живог „екера“*) не мање од оног правог, у облику крста.

---

*) Екер је геодетска справа за повлачење нормалних правих на терену.

Затим, користећи се живим угломером можете без икаквих справа измерити угловну висину небеских тела над хоризонтом, међусобно растојање звезда у степенима, видљиве димензије сјајног пута метеора и сл. Најзад, пошто умете да и без справа обележавате праве линије на терену, можете израдити план мањег терена на начин чија је суштина јасна из сл. 57; например, при



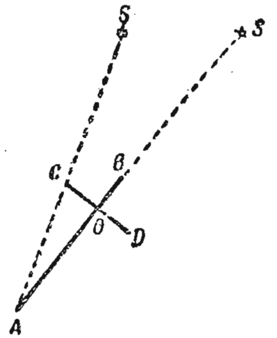
Сл. 57. Снимање језера на плану

скицирању језера измере се димензије правоугаоника $ABCD$, а такође и дужина нормалних отстојања карактеристичних тачака обале од страница тог правоугаоника и растојања подножја тих нормала од ивица правоугаоника. Једном речи, кад бисте се нашли у Робинсоновом положају, ваше знање да се користите својим рукама за мерење углова (и ногама за мерење растојања) могло би вам послужити за најразноврсније потребе.

ЈАКОВЉЕВ ШТАП

Ако желите да имате тачнији угломер од малочас описаног природног „живог угломера", можете сами начинити просту и подесну справу којом су се некад служили наши преци. То је, по имену проналазача назван, Јаковљев штап, справа која је код морепловаца била у широкој употреби до XVIII века (сл. 58), све док је нису постепено истиснули још подеснији и тачнији угломери (секстанти).

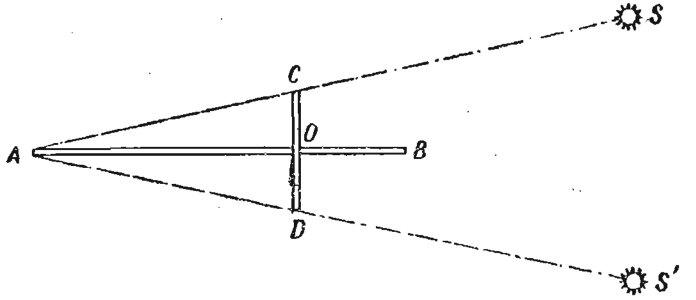
Он се састоји из једног дугачког лењира AB од 70—100 cm, по коме може да клизи на њ нормална дашчица CD; оба дела, CO и OD покретне дашчице једнака су међу собом. Ако желите да помоћу те справе одредите угловно растојање између звезда S и S' (сл. 58), принесете оку крај A лењира (на коме је ради лакшег посматрања причвршћена плочица са рупицом у средини) и управите лењир тако да звезду S' видите код краја B лењира; затим пречку CD померајте дуж лењира дотле док звезду S не будете видели код самог краја C (сл. 58). Сада преостаје још само да измерите растојање AO да бисте, знајући дужину CO, израчунали величину угла SAS'. Они који знају тригонометрију видеће да је тангенс траженог угла једнак односу CO/AO; наша „путна тригонометрија", изложена у Глави V, такође је довољна за извођење тог рачуна; по Питагориној теореми израчунаћете дужину AC, а затим ћете наћи угао чији је синус једнак CO/AC.



Сл. 58. Јаковљев штап и схема његове употребе

Најзад, тражени угао можете наћи и графички: нацртајте троугао ACO на хартији у произвољној размери и измерите угао A угломером, а ако немате угломер, онда на начин описан у нашој „путној тригонометрији" (в. Главу V).

А за шта је потребна друга половина попречне дашчице? Она је потребна у случају кад је угао који се мери сувише велики,



Сл. 59. Одређивање угловног растојања између звезда помоћу Јаковљевог штапа

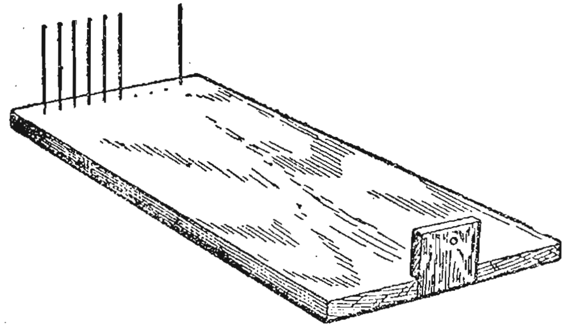
тако да га не можемо измерити на малочас показани начин. Тада се на звезду S' управи не лењир AB, него права AD, померајући пречку тако да њен крај C покрије у исто време звезду S (сл. 59).

И сада, разуме се, неће бити тешко одредити величину угла SAS' рачунски или графички.

Да се приликом сваког мерења не би морало рачунати или конструисати, може се ово учинити унапред, још приликом израде справе, и резултат забележити на лењиру AB; тада, уперивши справу ка звезди, можете само прочитати податак забележен поред тачке O — то је величина траженог угла.

ГРАБУЉАСТИ УГЛОМЕР

Још је лакше направити другу справу за мерење угловне величине предмета — такозвани „грабуљасти угломер“, који својим изгледом заиста потсећа на грабуље (сл. 60). Главни део те справе је једна дашчица на чијем је једном крају учвршћена плочица с отвором који посматрач приноси оку. На супротној ивици дашчице пободене су танке игле (које се употребљавају за збирке инсеката), чији међусобни размак износи педесет седми део њиховог отстојања од отвора пробушене плочице*). Ми већ знамо да притом размак двеју узастопних игала видимо под углом од 1^0. Игле се могу побости и на следећи начин, који даје тачнији резултат: на зиду се нацртају две паралелне праве на растојању од 1 m и, пошто се одмакне 57 m од зида, посматрач гледа те праве кроз отвор на плочици и игле забада у дашчицу тако да сваки пар суседних игала покрива праве нацртане на зиду.



Сл. 60. Грабуљасти угломер

---

*) Уместо игала може се узети оквир са затегнутим концима.

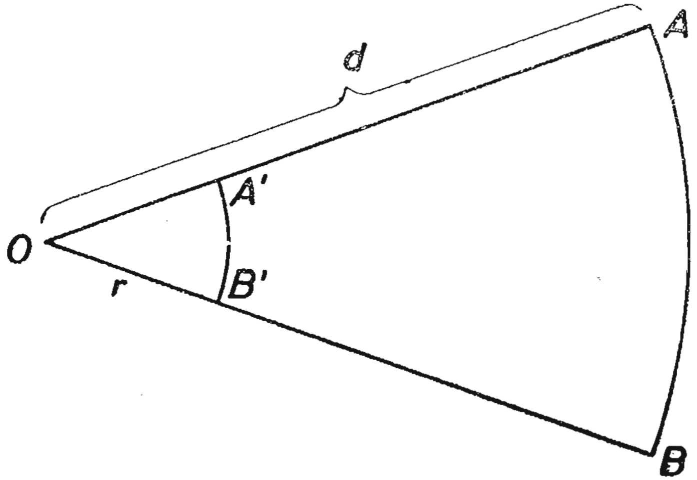
Кад су игле пободене, могу се понеке од њих извадити да би се добили углови од 2^0, 3^0 или 5^0. Начин употребе тог угломера читаоцу је, разуме се, јасан и без објашњења. Користећи се тим угломером можемо видни угао мерити с довољно великом тачношћу, која није мања од $15'$.

АРТИЉЕРИСКИ УГЛОМЕР

Артиљерац не гађа „на слепо“.

Знајући висину циља, он одређује угловну величину те висине над хоризонтом и израчунава растојање до циља; у другом случају он одређује за који угао треба да обрне оруђе да би ватру пренео са једног циља на други.

Задатке те врсте он решава брзо и то у глави. На који начин?



Сл. 61. Схема артиљериског угломера

Погледајте сл. 61. $\widehat{AB}$ је кружни лук полупречника $OA = d$, а $\widehat{A'B'}$ је кружни лук полупречника $OA' = r$.

Из сличности двају кружних исечака AOB и $A'OB'$ произлази:

$$\widehat{AB} : d = \widehat{A'B'} : r ,$$

или

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{r}\, d.$$

Однос $\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{r}$ карактерише величину видног угла AOB; кад се зна тај однос, лако се израчунава $\overset{\frown}{AB}$ ако је познато d, или d ако је познато $\overset{\frown}{AB}$.

Артиљерци олакшавају себи рачун на тај начин што деле круг не на 360 делова, како је уобичајено, него на 6 000 једнаких лукова, тако да дужина сваког тог лука износи приближно 1/1000 полупречника круга.

Уствари, нека, например, лук $\overset{\frown}{A'B'}$ угломерног круга с центром O (сл. 61) претставља једну јединицу такве поделе*); тада је дужина целе кружне линије $2\pi r \approx 6r$, а дужина лука $\overset{\frown}{A'B'}$ је $\overset{\frown}{A'B'} \approx \frac{6r}{6\,000} = \frac{1}{1\,000} r.$

У артиљерији се та јединица назива хиљадитим. Према томе,

$$\overset{\frown}{AB} \approx \frac{0{,}001r}{r} d = 0{,}001 \cdot d,$$

тј. да би се сазнало колико растојање AB на терену одговара једном подеоку угломера**) (тј. углу од једног хиљадитог), довољно је у броју d одвојити почев с десна три децимална места.

При предаји команде или резултата осматрања преко пољског телефона или радија, број хиљадитих изговара се именовањем сваке цифре посебно; например, угао од 105 хиљадитих изговара се: један нула пет, а пише: 1—05, а угао од 8 хиљадитих изговара се: нула нула осам, а пише 0—08. Сада ћете лако решити овакав артиљериски задатак.

Задатак

Тенк се (рачунајући његову висину) види од артиљериског оруђа (тј. са места где се налази то оруђе) под углом 0—05. Одредити раздаљину до тенка, рачунајући да његова висина износи 2 m.

---

*) Разуме се, угао на сл. 61 није једнак углу од 1 хиљадитог. — Прим. прев.

**) Тј. размаку између два узастопна подеока на угломеру.

Решење

5 поделака угломера = 2 m,

1 поделак угломера = $\frac{2\text{m}}{5}$ = 0,4 m.

Како је један поделак угломера један хиљадити раздаљине, то је, према томе, цела ова раздаљина хиљаду пута већа, тј.

$$d = 0{,}4 \cdot 1000 = 400 \text{ m}.$$

Ако командир или извиђач немају при руци угломерних справа, они ће се користити дланом, прстима или макојим приступачним средствима, онако како је о томе изложено у овој нашој књижици (в. „Живи угломер“). Само, артиљерац мора њихову „вредност“ да зна не у степенима него у хиљадитима.

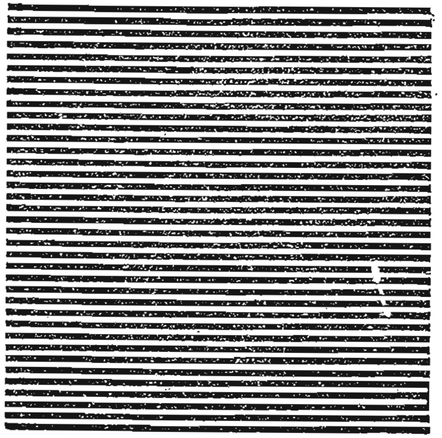
Ево приближне „вредности“ (тј. оцене) неких предмета у хиљадитима:

длан	1—20
средњи прст, кажипрст или домали прст	0—30
округла оловка (дебљина)	0—12
метални динар (пречник)	0—40
метална двединарка (пречник)	0—45
шибица (дужина)	0—75
шибица (дебљина)	0—03

ОШТРИНА ВАШЕГ ВИДА

Пошто сте савладали појам угловне величине предмета, моћи ћете схватити како се мери оштрина вида и чак и сами извршити такво мерење.

Нацртајте на листу хартије 20 праволиниских паралелних отсечака дугачких колико шибица (5 cm) и широких 1 mm тако да образују квадрат као на сл. 62. Причврстите тај цртеж на добро осветљени зид и одмичите се од њега све дотле док не осетите да више не разликујете сваку линију посебно, већ вам се све оне сливају у једнолику сиву површину. Измерите то отстојање од зида и израчунајте — ви већ знате како — видни угао под којим престајете да разликујете пруге широке 1 mm. Ако тај угао има $1'$, тада је оштрина вашег вида нормална, а ако тај угао има $3'$, тада оштрина вашег вида износи само $^{1}/_{3}$ нормалне оштрине вида итд.



Сл. 62. За мерење оштрине вида

Задатак

Линије на сл. 62 сливају се, за ваше око, на отстојању од 2 m. Да ли је оштрина вашег вида нормална?

Решење

Ми знамо да се са отстојања од 57 mm пруга ширине 1 mm види под углом од 1^0, тј. $60'$. Према томе, са отстојања од 2 000 mm она се види под углом x који се одређује из пропорције

$$x : 60 = 57 : 2\,000,$$

$$x \approx 1{,}7'.$$

Оштрина вида је испод нормалне и износи

$$1 : 1{,}7 \approx 0{,}6.$$

ГРАНИЧНИ МИНУТ

Малочас смо рекли да нормално око престаје да разликује пруге које види под углом мањим од $1'$. То важи за сваки предмет: ма какве биле контуре посматраног објекта, нормално око престаје да их разликује ако их види под углом мањим од $1'$. Сваки предмет претвара се притом у једва приметну тачку, „премалу за човечје око" (Шекспир), у мрљу без димензија и облика. Таква је особина нормалног човечјег ока: један угловни минут је средња граница оштрине његовог вида. Чиме је то условљено — то је посебно питање које се тиче физике и физиологије чула вида. Ми овде говоримо само о геометриској страни те појаве.

То што смо малочас рекли односи се у подједнакој мери и на велике, али веома удаљене предмете, као и на блиске, али веома сићушне предмете. Ми голим оком не разликујемо облик зрнаца прашине која лебде у ваздуху: обасјана Сунчевим зрацима она нам изгледају као једнаке сићушне тачке, иако су уствари по облику веома разнолика. Ми не разликујемо мале појединости на телу инсеката опет зато што их видимо под углом мањим од $1'$. Из истог разлога не видимо без телескопа појединости на површини Месеца, планета и других небеских тела.

Нама би свет изгледао сасвим другачији ако би се граница нормалног вида помакла. Човек у кога би граница оштрине вида била не 1 , већ, например, $^{1}/_{2}{}'$, видео би свет који нас окружује и даље и дубље него ми. То преимућство оштрог вида веома јасно је описао Чехов у приповеци „Степа":

„Он је (Васја) имао необично оштар вид. Он је видео тако добро да је за њега сура пуста степа увек била пуна живота и догађаја. Требало је само да се загледа у даљину да би спазио лисицу, зеца, дропљу у лету или неку другу животињу која се држи подаље од људи. Није никаква вештина видети зеца кад протрчи или дропљу у лету, — то је видео свако ко је пролазио степом, — али свако не може да види дивље животиње у њиховом домаћем животу кад оне не беже, не крију се и не обазиру се узнемирено на све стране. А Васја је видео лисице како се играју, зечеве како се умивају шапицама, дропље како шире крила. Захваљујући таквој оштрини вида Васја је, осим света који су видели сви, имао још један свет, свој сопствени, који ником није био приступачан и био је, вероватно, веома леп, јер би, кад би га он посматрао и дивио се, тешко било не завидети му".

Чудно је помислити да је за такву огромну промену довољно спустити границу јасне видљивости са $1'$ до $^1/_2{}'$ или до приближно толико минута.

Волшебно дејство микроскопа и телескопа условљено је тим истим узроком. Намена тих инструмената је да се правац зракова посматраног предмета измени тако да они улазе у око као прамен који се јаче шири; захваљујући томе објекат се види под већим видним углом. Кад се каже да микроскоп или телескоп увећава 100 пута, то значи да помоћу њих видимо предмете под 100 пута већим углом неголи кад их посматрамо голим оком. И тада појединости које се од голог ока крију иза границе оштрине вида постају приступачне нашем оку. Пуни Месец видимо под углом од $30'$; како пак пречник Месеца има отприлике 3 500 km, то се сваки део Месечеве површине који има у пречнику $\frac{3500}{30}$ km, тј. око 120 km, слива, за голо око, у једва приметну тачку. Приликом посматрања кроз дурбин који увеличава 100 пута, неприметни ће бити већ много мањи делови с пречником од највише $\frac{120}{100} = 1{,}2$ km, а при посматрању телескопом који увеличава 1000 пута неприметни ће бити делови с пречником од највише 120 m. Одатле произлази, између осталог, и закључак да, кад би на Месецу било таквих предмета као што су велике фабрике или океански пароброди, ми бисмо их могли видети помоћу савременог телескопа*).

Правило граничног минута има велики значај и за наша обична свакодневна посматрања. Услед те особине нашег чула вида ми престајемо да разликујемо контуре сваког предмета који је од нас удаљен за 3 400, тј. $57 \cdot 60$ својих пречника, и његова се слика у нашем оку слива у тачку. Зато, ако неко стане да вас убеђује да је голим оком распознао лице човека на удаљености од четвртине километра, не верујте му — изузев у случају да он има феноменалан вид. Јер, растојање између човечјих очију је свега 3 cm, што значи да се за посматрача оба ока сливају у тачку већ на удаљености од $3 \cdot 3\,400$ cm, тј. 100 m. Артиљерци се служе тиме за оцену отстојања одока. По њиховим правилима, ако се очи човека у даљини виде као две раздвојене тачке, онда раздаљина до тог човека не премаша 100 корака (тј. 60—70 m). Ми смо добили нешто већу раздаљину — 100 m; то показује да се у војној пракси рачуна са нешто смањеном*) (за 30%) оштрином вида.

Задатак

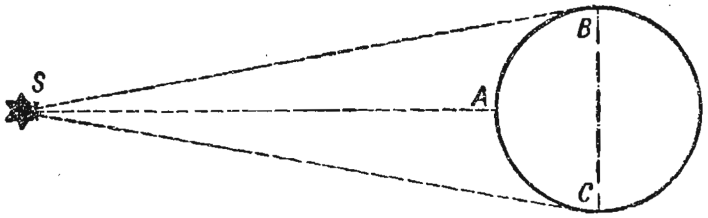
Да ли човек са нормалним видом може разликовати коњаника на отстојању од 10 km служећи се двогледом који увеличава три пута?

Решење

Висина коњаника је 2,2 m. Посматран голим оком он се на отстојању од $2{,}2 \cdot 3\,400 \approx 7$ km претвара у тачку, а посматран дурбином који увеличава три пута он се на отстојању од 21 km претвара у тачку. Према томе, помоћу таквог дурбина ми га на отстојању од 10 km можемо разговетно видети (ако је ваздух довољно провидан).

МЕСЕЦ И ЗВЕЗДЕ НА ХОРИЗОНТУ

Чак и најнепажљивији посматрач зна да је пун Месец, кад је ниско над хоризонтом, знатно већи него кад стоји високо на небу. Разлика је толико велика да је тешко не запазити је. То је исто и са Сунцем: познато је колико је велики Сунчев котур на заласку или у зору, кад просијава иза облака (гледати право у Сунце незаклоњено облаком штетно је за очи).



Сл. 63. Зашто је Сунце кад се налази на хоризонту даље од посматрача неголи кад се налази на средини неба

---

*) То важи под условом потпуне провидности и хомогености наше атмосфере. Уствари, ваздух је нехомоген и није потпуно прозрачан; зато је слика која се види при великом увеличавању замагљена и деформисана. То поставља границу коришћења све већих увеличавања и побуђује астрономе да граде опсерваторије у јасном ваздуху високих планинских висова.

*) Оштрина вида је утолико већа уколико је гранични угао јасне видљивости мањи. — Прим. прев.

Код звезда се та појава испољава у томе што њихова међусобна растојања постају све већа, уколико се више приближавају хоризонту. Ко је видео зими дивно сазвежђе Ориона (или лети Лабуда) високо на небу или ниско близу хоризонта, није се могао начудити огромној разлици у величини сазвежђа у оба положаја.

Све је то утолико загонетније што небеска тела, кад их посматрамо при изласку или заласку, не само да нам нису ближа него су чак даља од нас (за величину Земљиног полупречника). То је лако разумети из сл. 63: у зениту посматрамо небеско тело из тачке *A*, а на хоризонту из тачке *B* или *C*. А зашто се Месец, Сунце и сазвежђа увећавају идући ка хоризонту?

„Зато што је то нетачно" — могли бисмо одговорити. То је оптичка обмана. Помоћу грабуљастог угломера или неког другог угломера није тешко уверити се да се Месечев котур види под истим углом*) од $^1/_2$ степена. Користећи се грабуљастим угломером или „Јаковљевим штапом" можемо се уверити да се и угловна растојања између звезда не мењају ма где се сазвежђе налазило, у зениту или на хоризонту. То значи да је увеличавање тог растојања оптичка обмана којој подлежу сви људи без разлике.

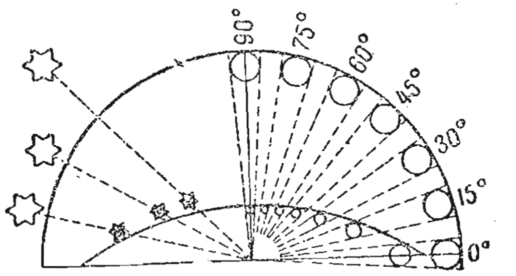
Чиме се тумачи тако сложена и општа обмана чула вида? На то питање, колико нам је познато, наука још није дала неоспоран одговор, мада већ две хиљаде година, још од Птолемејевог времена, настоји да га реши. Та илузија је у вези с тим што нам цео небески свод не изгледа као полусфера у геометриском смислу речи већ као сферна калота (капа) чија је висина два до три пута мања од полупречника основе. До тога долази зато што при обичном положају главе и очију за хоризонтална и њима блиска растојања стичемо утисак да су већа у поређењу са вертикалним растојањима; у хоризонталном правцу предмет посматрамо право, а у сваком другом подигнутим или спуштеним погледом. Ако Месец посматрамо лежећи на леђима, он ће нам, напротив, изгледати већи кад је у зениту неголи кад је ниско над хоризонтом**). Пред психологе и физиологе се поставља задатак да објасне зашто видљиве димензије предмета зависе од наших очију.

---

*) Мерења извршена прецизнијим инструментима показују да је видљиви пречник Месеца чак и мањи кад се Месец налази близу хоризонта услед тога што се због *рефракције* (тј. преламања светлости зракова у атмосфери — прим. прев.) Месечев котур види нешто спљоштен.

**) Ово објашњење унео је у „Занимљиву геометрију" редактор књиге, и то у њено седмо и сва даља издања. У ранијим издањима књиге Ј. И. Перељман је привидно увећање Месеца близу хоризонта тумачио тиме што га код хоризонта видимо поред удаљених предмета, а насред небеског свода видимо га усамљеног. Међутим, та иста илузија запажа се и на хоризонту морске пучине, тако да раније објашњење описане светлосне појаве морамо признати незадовољавајућим. — Прим. ред.

Што се тиче утицаја привидне спљоштености небеског свода на величину небеских тела у његовим разним деловима, он постаје потпуно јасан из схеме преставље̄не на сл. 64. На небеском своду Месечев котур увек видимо под углом под 30′, било да је Месец на хоризонту (на висини од 0°) или у зениту (на висини од 90°). Али наше око не посматра тај котур увек на једном истом отстојању: Месец у зениту примиче нам се на мање отстојање неголи кад је на хоризонту и зато нам његова величина кад је у та два положаја не изгледа иста — унутар једног истог угла круг (који је уписан у тај угао — прим. прев.) је мањи што је год ближи темену. На левој страни исте слике показано је како, услед тога, растојања између звезда као да се све више растежу уколико се звезде више приближавају хоризонту; тада нам иначе једнака угловна растојања између њих изгледају неједнака.



Сл. 64. Утицај спљоштености небеског свода на привидну величину небеског тела

Ту има још једна поучна страна. Дивећи се великом Месечевом котуру код хоризонта да ли сте запазили на њему бар једну нову црту коју нисте могли разабрати на котуру великог Месеца? Не. Али, пред вама је увећан котур, зашто се не виде нове појединости? Зато што овде нема увеличавања какво омогућује, например, двоглед; овде се не увећава видни угао под којим предмет видимо. Само увећавање тог угла помаже нам да разликујемо нове појединости; свако друго „увећавање" је просто за нас потпуно бескорисна оптичка варка*).

---

*) Подробније о томе видети у књизи истог аутора „Занимљива физика", II књига, Гл. IX.

КОЛИКА ЈЕ ДУЖИНА МЕСЕЧЕВЕ СЕНКЕ И СЕНКЕ СТРАТОСТАТА

Прилично неочекивану примену видног угла нашао сам у задацима у којима се тражи израчунавање сенке коју бацају нека тела у простору. Месец, например, баца у васиони конус сенке који га свуда прати.

Докле се та сенка простире?

Да бисмо приближно израчунали дужину те сенке, нема потребе да на основу сличности троуглова саставимо пропорцију у коју ће ући пречници Сунца и Месеца, а и растојање између Месеца и Сунца. То се може постићи на много простији начин. Замислите да се ваше око налази у оној тачки где се завршава конус Месечеве сенке, тј. у врху тог конуса, и да одатле посматрате Месец. Шта ћете видети? Црни Месечев круг који заклања Сунце. Узмимо да угао под којим видите Месечев (или Сунчев) котур у том случају има 30 . Но, ми већ знамо да је предмет који се види под углом од 30′ удаљен од посматрача за $2 \cdot 57 = 114$ својих пречника. То значи да се врх конуса Месечеве сенке налази на отстојању од 114 Месечевих пречника од Месеца. Отуда је дужина Месечеве сенке једнака

$$3\,500 \cdot 114 \approx 400\,000 \text{ km}.$$

Добија се да је дужина Месечеве сенке већа од средњег Месечевог отстојања од Земље; зато се и могу десити потпуна помрачења Сунца (за она места на Земљи на која та сенка пада).

Одатле произлази такође да резултат малочас извршеног рачуна није у опреци са стварношћу.

У оним случајевима кад са Земље видимо Месец и Сунце под истим углом од 30 (види примедбе на стр. 73 и 76), врх конуса Месечеве сенке лежи на Земљиној површини; тада израчуната дужина Месечеве сенке показује приближно отстојање Месеца од Земље у том тренутку.

Није тешко израчунати и дужину Земљине сенке у простору, узимајући да је угао код врха конуса сенке исти, тј. од 30 ; она је онолико пута већа од Месечеве колико је пута Земљин пречник већи од Месечевог, тј. отприлике 4 пута.

Исти начин подесан је и за приближно израчунавање дужине сенке мањих предмета у простору. Нађимо, например, докле

је допирао у ваздух конус сенке коју је бацао стратостат „СОАХ-I“ у оном тренутку кад се његов омотач надуо у лопту. Како је пречник стратостата 36 m, то је дужина његове сенке (и овде узимамо да угао при врху конуса има 30′) једнака

$$36 \cdot 114 \approx 4\,100 \text{ m},$$

или око 4 km.

У свим разматраним случајевима радило се, наравно, о дужини пуне сенке а не полусенке*).

ДА ЛИ ЈЕ ОБЛАК ВИСОКО НАД ЗЕМЉОМ

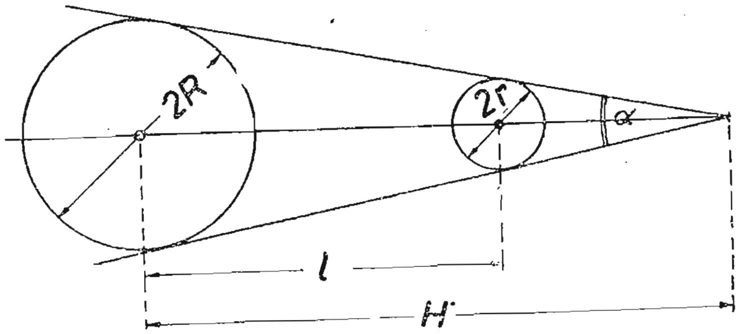
Сећате ли се како вас је задивила дугачка бела путања у облику петље кад сте је први пут видели високо на јасном плавом небу? Сада, наравно, знате да је та трака облака оригинални „потпис“ авиона који овај оставља у ваздуху као „потсетник“ о свом месту боравка.

У расхлађеном, влажном и прашином богатом ваздуху лако настаје магла.

Авион у лету непрекидно избацује ситне честице — то је производ рада мотора — и те су честице оне тачке око којих се згушњава водена пара; настаје облачић.

---

*) За овде посматране мање углове код врхова конуса сенки које бацају нека тела важи приближна формула: угао α у радијанима једнак је $(2R - 2r)/l$, где је $2R$ пречник Сунца, $2r$ пречник тела, а l отстојање тела од Сунца (в. слику). За веома мало r у поређењу са R тело се налази близу врха конуса сенке и l се веома мало разликује од висине H потпуног конуса сенке. Ако занемаримо број r а l заменимо са H, добићемо $\alpha \approx 2R/H$. Ако сматрамо да врх конуса сенке лежи на површини Земље, тада је $H \approx 150 \cdot 10^6$, $2R \approx 1{,}41 \cdot 10^6$ и $\alpha \approx 0{,}009$ (радијана) $\approx 30'$. — Прим. ред.



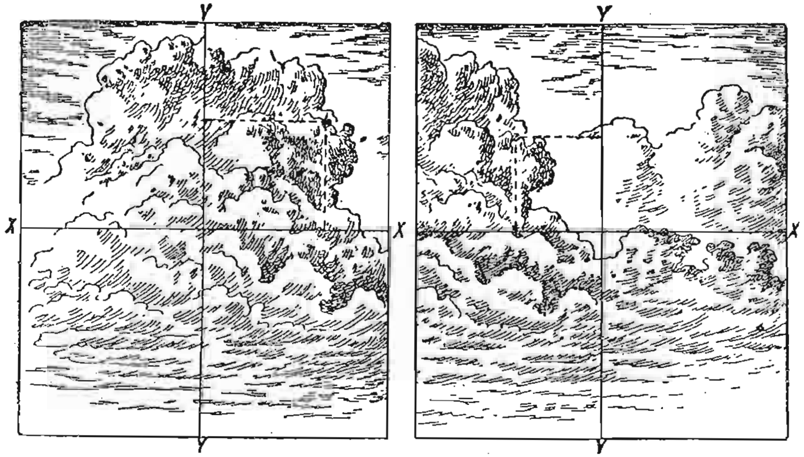
Ако се одреди висина тог облачића док се он још није раширио, може се приближно оценити на колику се висину залетео одважни пилот на свом авиону.

Задатак

Како се одређује висина облака над Земљом ако он још није изнад нас?

Решење

За одређивање великих висина треба се помоћи обичним фотографским апаратом, апаратом који је прилично сложен, али данас прилично распрострањен и омиљен код омладине.



Сл. 65. Цртеж двају положаја једног истог облака

У датом случају потребна су два фотографска апарата с једнаким жижним даљинама (жижне даљине су обично забележене на ободу око објектива апарата).

Оба фотоапарата поставе се на узвишење отприлике једнаке висине. У пољу то могу бити троношци, а у граду кровови кућа. Растојање између узвишења треба да је толико да један посматрач може видети другога непосредно или двогледом. То растојање (основица) измери се или одреди по карти или плану терена. Фотоапарати се постављају тако да им оптичке осе буду паралелне. Могу се, например, осе управити ка зениту.

Кад облак који се снима дође у видно поље објектива фотоапарата, један посматрач даје сигнал другоме, например махањем марамом, и на тај знак оба посматрача истовремено окидају.

На снимцима, који по величини треба да буду тачно једнаки филмовима, повуку се праве YY и XX које спајају средине супротних крајева снимака (сл. 65). Затим се на сваком снимку забележи једна иста тачка облака и израчунају њена отстојања у милиметрима од правих YY и XX. Ова отстојања се обележавају словима x_1, y_1 на једном снимку, а x_2, одн. y_2 на другом снимку.

Ако се испостави да се обележене тачке налазе са разних страна праве YY (као на сл. 65), тада се висина облака израчунава по формули

$$h = b \cdot \frac{f}{x_1 + x_2},$$

где је b дужина основице (у метрима), а f жижна даљина (у милиметрима).

Ако се испостави да се обележене тачке налазе са исте стране праве YY, висина облака се одређује по формули

$$h = b \cdot \frac{f}{x_1 - x_2}.$$

Што се тиче отстојања y_1 и y_2, она за израчунавање h нису потребна, али, упоређујући их једно с другим, можемо проверити тачност снимака.

Ако су филмови лежали у касетама симетрично, тада ће y_1 бити једнако y_2. У пракси се, наравно, они мало разликују.

Нека су, например, отстојања тачке облака од правих YY и XX на оригиналу снимка: $x_1 = 32$ mm, $y_1 = 29$ mm, $x_2 = 23$ mm, $y_2 = 25$ mm, а жижна даљина објектива $f = 135$ mm и растојање фотографских апарата*) (основица) $b = 937$ m.

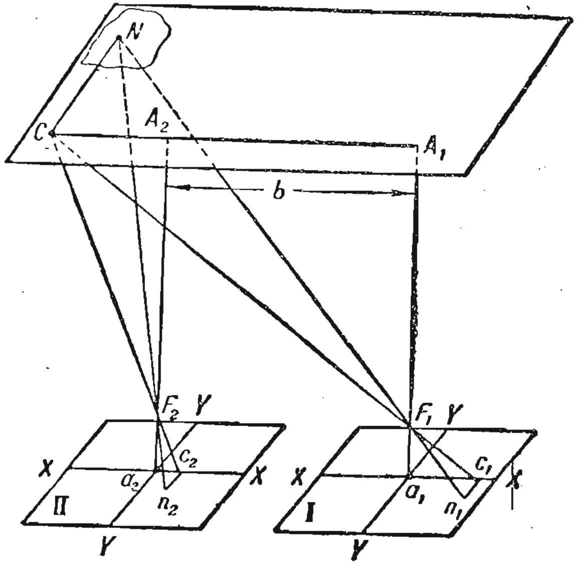
---

*) Према експерименту описаном у књизи Н. Ф. Платонова „Примена математичке анализе на решавање практичних задатака". У чланку „Висина облака" Н. Ф. Платонов наводи извођење обрасца за израчунавање висине h, описује друге могуће положаје апарата за снимање облака и даје низ практичних савета.

Фотографије показују да за одређивање висине облака треба применити образац

$$h = b \cdot \frac{f}{x_1 + x_2};$$

$h = 937\ \mathrm{m} \cdot \frac{135}{32 + 23} \approx 2\,300\ \mathrm{m}$, тј. снимљени облак налазио се на висини од око 2,3 km од Земље.



Сл. 66. Схема пресликавања једне тачке облака на плоче двају фотографских апарата управљених у зенит

Они који желе да виде како се изводе обрасци за одређивање висине облака могу се послужити схемом претстављеном на слици 66. Конструкцију приказану на сл. 66 треба замислити у простору. Фигуре I и II претстављају филмове (тј. хоризонталне делове филмских трака на које се врши снимање — прим. прев.), F_1 и F_2 су оптички центри објектива апарата, N је уочена тачка облака, n_1 и n_2 ликови тачке N на филмовима, a_1A_1 и a_2A_2 нормале подигнуте из средине сваког филма до нивоа облака, $A_1A_2 = a_1a_2 = b$ дужина основице.

Ако се једна тачка креће праволиниски од оптичког центра F_1 навише до тачке A_1, затим од A_1 дуж основице до тачке C која је теме правог угла A_1CN, најзад из тачке C у тачку N, тада ће отсечцима F_1A_1, A_1C и CN одговарати у фотографском апарату (тј. на филму) отсечци $F_1A_1 = f$ (жижна даљина), $a_1c_1 = x_1$ и $c_1n_1 = y_1$. Аналогне су конструкције и за други фотографски апарат.

Из сличности троуглова произлазе пропорције

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1F_1}{f} = \frac{CF_1}{F_1c_1} = \frac{CN}{y_1}$$

и

$$\frac{A_2C}{x_2} = \frac{A_2F_2}{f} = \frac{CF_2}{F_2c_2} = \frac{CN}{y_2}.$$

Утврђујући те пропорције и имајући у виду очигледну једнакост $A_2F_2 = A_1F_1$ налазимо, прво, да је $y_1 = y_2$ (знак правилног снимања) и, друго, да је

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C}{x_2};$$

али како је, према конструкцији, $A_2C = A_1C - b$, то је

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C - b}{x_2},$$

одакле је

$$A_1C = b \cdot \frac{x_1}{x_1 - x_2},$$

и најзад,

$$A_1F_1 = b \frac{f}{x_1 - x_2} \approx h.$$

Ако би се испоставило да су n_1 и n_2 — ликови тачке N на филмској траци — са разних страна праве YY, то би значило да се тачка C налази између тачке A_1 и тачке A_2, а тада је $A_2C = b - A_1C_1$ и тражена висина је

$$h = b \frac{f}{x_1 + x_2}.$$

Ови обрасци важе само у случају кад су оптичке осе фотографских апарата уперене ка зениту. Ако је облак далеко од зенита и не пада у видно поље апарата, можете апарате поставити и другачије (задржавајући паралелност оптичких оса), например, да их уперите хоризонтално а нормално на основицу b или дуж ове основице.

За сваки положај апарата неопходно је претходно конструисати одговарајући цртеж и извести обрасце за одређивање висине облака.

* * *

Ето, „усред бела дана" појавили су се на небу беличасти паперјасти облаци. Одредите два-три пута њихову висину у извесним временским размацима. Ако се испостави да се облаци спуштају, то је знак погоршања времена; очекујте кишу после неколико часова.

Снимите аеростат или стратостат који лебди у ваздуху и одредите његову висину.

ВИСИНА ТОРЊА НА ФОТОГРАФСКОМ СНИМКУ

Помоћу фотографског апарата може се одредити не само висина облака или авиона у лету него и висина објеката на земљи: куле, јарбола, торња и сл.

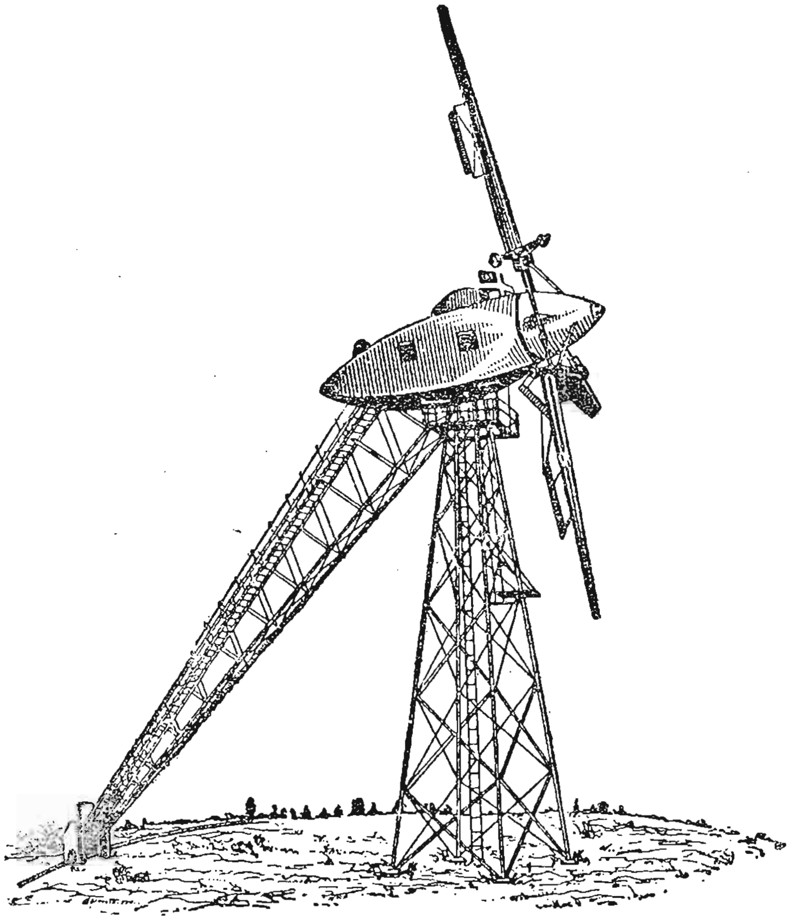
На сл. 67 претстављена је ветрењача постављена на Криму у близини Балаклаве. Основа торња је квадрат; претпоставимо да дужину његове странице знамо на основу непосредног мерења: 6 m.

Извршите потребна мерења на слици и одредите висину целе ветрењаче.

Решење

Фотографија торња и његова права контура геометриски су узајамно сличне. Према томе, колико је пута висина торња на слици већа од дужине странице или дијагонале на слици, толико исто пута је висина торња у природи већа од његове странице или дијагонале.

Мерење слике: дужина најмање скраћене дијагонале основе је 23 mm, а висина целе ветрењаче је 71 mm.



Сл. 67. Ветрењача на Криму

Како је дужина странице квадратне основе торња 6 m, дијагонала основе једнака је

$$\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} = 8,48 \ldots \text{ m}.$$

Према томе је

$$\frac{71}{23} = \frac{h}{8,48},$$

одакле је

$$h = \frac{71 \cdot 8{,}48}{23} \approx 26\,\mathrm{m}.$$

Разуме се, за то није подесан сваки снимак већ само онај у коме пропорције нису деформисане, како се то иначе дешава код неискусних фотографа.

ЗА САМОСТАЛНА ВЕЖБАЊА

Нека сада читалац податке поцрпене из ове главе сам примени на решавање следећих разноврсних задатака:

Човек средњег раста (1,7 m) види се из даљине под углом од 12 . Одредити његово отстојање од посматрача.

Коњаник (2,2 m) види се из даљине под углом од 9′. Одредити његово отстојање од посматрача.

Телеграфски стуб (8 m) види се под углом од 22′. Одредити отстојање стуба од посматрача.

Кула светиља висока 42 m види се са брода под углом од $1^{0}10'$. На коликом се отстојању од куле налази тај брод?

Земљина лопта види се с Месеца под углом од $1^{0}54'$. Одредити растојање између Месеца и Земље.

Са отстојања од 2 km види се зграда под углом од 12′. Одредити висину те зграде.

Месец се види са Земље под углом од 30′. Кад се зна да у том тренутку отстојање Месеца од Земље износи 396 000 km, одредити пречник Месеца.

Колика треба да су слова на школској табли да би их ученици у клупама видели исто тако јасно као и слова у својим књигама (на отстојању од 25 cm од очију)? Узети да је растојање од клупа до табле 5 m.

Микроскоп увеличава 50 пута. Могу ли се под њим видети човечја крвна зрнца, чији је пречник 0,007 mm?

Ако би на Месецу било људи нашег раста, колико би телескоп требало да увеличава да бисмо их могли видети са Земље?

Колико је хиљадитих у једном степену?

Колико је степени у једном хиљадитом?

Авион летећи управно на правац нашег посматрања за 10 sec прелази растојање које видимо под углом од 300 хиљадитих. Одредити брзину авиона ако је његова удаљеност 2 000 m.

ГЛАВА ЧЕТВРТА

ГЕОМЕТРИЈА НА ПУТУ

ВЕШТИНА МЕРИТИ КОРАЦИМА

Када се за време шетње изван града нађете крај железничког насипа или на друму, можете да извршите низ занимљивих геометриских вежбања.

Пре свега се користите друмом да бисте измерили дужину свог корака и брзину свог хода. То ће вам омогућити да растојање мерите корацима — навика која се доста лако стиче после краткотрајне вежбе. Ту је главно навићи се да увек чинимо кораке једнаке дужине, тј. да усвојимо одређено „равномерно“ корачање.

На друму је на сваких 100 метара постављен бели камен; пошто такав комад пута од 100 m пређете својим обичним равномерним кораком и избројите кораке, лако ћете наћи просечну дужину свог корака. Таква мерења треба понављати сваке године, — например сваког пролећа — јер дужина корака, нарочито код младих људи, не остаје непромењива.

Забележићемо интересантан однос који је нађен многобројним мерењем: просечна дужина корака одраслог човека једнака је отприлике половини његовог раста, рачунајући до висине очију. Ако је, например, човечја висина рачуната до очију 1,40 m, тада је дужина његовог корака око 70 cm. Занимљиво је, кад се за то пружи прилика, проверити то правило.

Осим дужине корака корисно је такође знати и брзину свог хода — тј. број километара пређених за 1 сат. Понекад се за то користи следеће правило: за 1 сат прелазимо онолико километара колико корака начинимо за три секунда; например, ако за 3 sec начинимо четири корака, тада за 1 сат пређемо 4 km. Али, то правило се може применити само ако је позната дужина корака. Није тешко одредити колика треба да је она; ако дужину корака у метрима обележимо са x, а број корака у 3 sec са n, имамо једначину

$$\frac{3\,600}{3} \cdot nx = n \cdot 1\,000,$$

одакле је $1\,200\ x = 1\,000$ и $x = (5/6)$ m, тј. око 80—85 cm. То је сразмерно велики корак; такве кораке чине људи високог раста. Ако ваш корак нема 80—85 cm, морате брзину свог корака измерити на други начин, тј. да помоћу часовника одредите за које време прелазите растојање између два камена на друму.

ОДРЕЂИВАЊЕ РАСТОЈАЊА ОДОКА

Пријатно је и корисно не само мерити растојања без метарске траке, корацима, већ и оцењивати их непосредно одока, без мерења. Та се навика изграђује само вежбом. Кад сам као ђак с групом другова учествовао у летњим екскурзијама ван града, код нас су такве вежбе биле уобичајене. Ми смо их изводили као неки нарочити спорт који смо сами измислили — као такмичење у тачном оцењивању одока. Кад изађемо на пут, ми уочимо неко дрво крај пута или неки други удаљени предмет — и такмичење почиње.

— Колико има корака до дрвета? — пита неко од ученика у игри.

Остали говоре колико има корака, а затим заједно броје кораке да би одредили чија је оцена најближа тачној — и тај је победник. Тада је на њему ред да покаже предмет чије отстојање треба оценити одока.

Онај који је најбоље одредио отстојање добија један поен. После десет пута пребројавају се поени; победником у такмичењу сматрао се онај који је добио највише поена.

Сећам се, у прво време наше оцене растојања биле су с грубим грешкама. Али, убрзо, много брже него што би се могло очекивати, тако смо се изоштрили у вештини да одока оцењујемо растојања, да смо врло мало грешили. Само при наглој промени на терену, например, при прелазу са пустог поља у проређену шуму или на пољану обраслу жбуњем, при враћању у прашњаве тесне градске улице, а такође и ноћу, при варљивој светлости месеца, ми смо један другог ловили у крупним грешкама. Али, потом смо научили да се сналазимо у свакој ситуацији, узимајући у мислима у обзир све околности при оцењивању одока. Напослетку, наша група је постигла такво савршенство у оцењивању растојања одока, да смо морали потпуно прекинути са тим спортом: сви смо подједнако добро погађали и такмичења су изгубила свој интерес. Али, зато смо се изоштрили у оцењивању растојања одока, што нам је добро послужило на нашим излетима ван града.

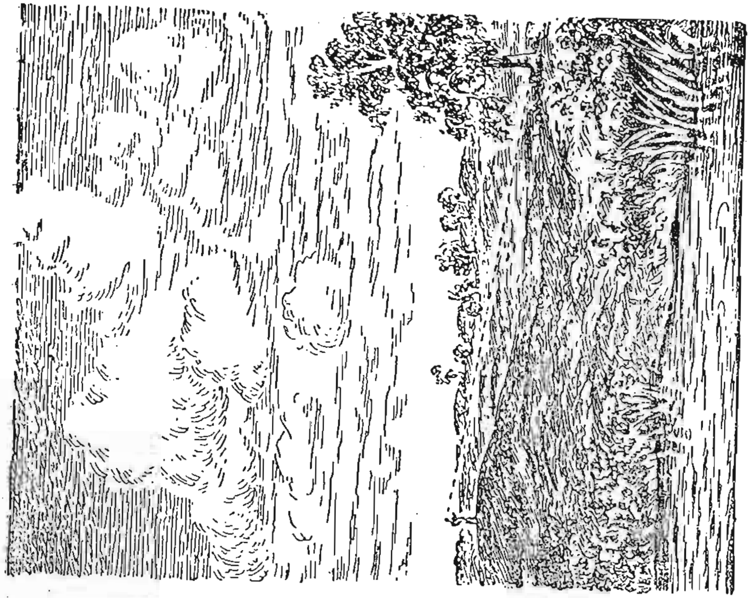
Занимљиво је да способност оцењивања растојања одока изгледа не зависи од оштрине вида. У нашој групи био је један кратковиди дечак који не само што није осталима уступао у тачности оцењивања растојања одока него је понекад излазио из такмичења као победник. Насупрот томе, један дечак са потпуно нормалним видом није могао да стекне вештину да одока одреди растојање. Касније сам имао прилике да то исто посматрам и при оцењивању висине дрвета одока; изводећи те вежбе са студентима — али сад не више као игру него ради потреба њихове будуће професије — запазио сам да су кратковиди стицали ту вештину ништа лошије него остали. То може да послужи као утеха кратковидима: иако немају оштар вид, они су ипак способни да код себе развију задовољавајућу вештину оцењивања дужине одока.

Вежбати се у оцењивању растојања одока може се у свако доба године, ма у којој прилици. Идући градском улицом можете себи поставити задатак да одредите одока колико је корака до најближег стуба за осветљење, до овог или оног предмета на вашем путу. Кад је напољу ружно, ви ћете на тај начин неосетно испунити време идући пустим улицама.

Оцењивању растојања одока много се посвећује пажња у армији; добро око неопходно је извиђачу, стрелцу, артиљерцу. Интересантно је упознати правила којима се они у пракси користе при оцењивању одока. Ево неколико напомена из једног уџбеника артиљерије:

„Голим оком се растојања одређују или по навици да се по извесном степену јасног распознавања видљивих предмета разликују њихова различита отстојања од посматрача, или оцењујући растојања мерећи их неком дужином од 100 до 200 корака на коју је око навикло и која изгледа утолико мања уколико је објект више удаљен од посматрача.

При одређивању растојања према степену јасног распознавања видљивих предмета треба имати на уму да нам изгледају ближи они предмети који су јаче осветљени или они који се бојом више истичу од околине или на води, предмети који се налазе



Сл. 69. Кад се попнеш на узвишицу, видиш да је до дрвета још исто толико растојање

Сл. 68. Дрво иза узвишице изгледа близу

изнад других, групе предмета у поређењу с појединим предметима, или уопште крупнији предмети.

Може се руководити следећим правилима: до на 50 корака могу се јасно разликовати очи и уста на лицу; на 100 корака очи изгледају као тачке; на 200 корака дугмета и појединости на униформи се још могу разабрати; до на 300 корака види се лице; до на 400 корака разликују се покрети ногу; до на 500 корака види се боја копорана".

Притом и најоштрије око чини грешку до 10% растојања које се одређује, и то грешку навише или наниже (тј. процена је до 10% већа, односно мања од праве величине растојања — прим. прев.).

Међутим, дешавају се случајеви кад су грешке при оцењивању растојања одока много веће. Прво, при одређивању на равној потпуно једнобојној површини — на воденом огледалу реке или језера, на чистој пешчаној равници, на пољу обраслом густом травом — растојање нам увек изгледа мање од правог; одока га оцењујемо као двапут мање, уколико грешка није и већа. Друго, грешке су могућне и кад се одређује растојање до неког предмета чија је основа заклоњена железничким насипом, брежуљком, зградом, уопште неким узвишењем. У таквим случајевима ми и нехотице сматрамо да се предмет налази не иза узвишења већ на њему самом и, према томе, чинимо грешку подбацујући растојање које одређујемо (сл. 68 и 69).

У сличним случајевима опасно је ослонити се на оцењивање одока и треба прибећи другим начинима оцењивања растојања о којима смо већ говорили и још ћемо говорити.

НАГИБИ*

Дуж железничке пруге, осим стубова и ознака километара видите још и друге ниске стубове с натписима на косо прикуцаним дашчицама који су многима неразумљиви и који изгледају као на сл. 70.

То су „знаци". У првом натпису, например, горњи број 0,002 значи да ту нагиб пута (да ли је успон или пад показује положај дашчице) износи 0,002: пут се успиње или спушта за 2 mm на сваких 1 000 mm. Доњи пак број, 140, показује да је тај

---

*) Тачнији израз за појам који обухвата и успон и пад (спуст) је стрмина, али је овде задржан уобичајен назив нагиб. — Прим. прев.

нагиб сталан на дужини од 140 m, где је постављен други знак са обележеним новим нагибом. Друга дашчица, са натписом $\frac{0,006}{55}$, показује да се на наредној деоници од 55 m дужине пут успиње или спушта 6 mm на сваки метар.

Сл. 70. Обележавање нагиба

Кад знате смисао ознака нагиба, можете лако израчунати висинску разлику двеју тачака пута обележених тим ознакама. У првом случају, например, висинска разлика је $0,002 \cdot 140 = 0,28$ m, а у другом $0,006 \cdot 55 = 0,33$ m.

У железничком саобраћају, као што видите, величина нагиба пута не мери се степенима, али те ознаке нагиба пута лако је изразити степенима. Ако је AB (сл. 70) линија пута, а BC висинска разлика тачака B и A, тада ће нагиб дела пута AB према хоризонталној дужи AC бити на стубу означен односом $\frac{BC}{AB}$. Како је угао A врло мали, могу се AB и AC сматрати полупречницима круга чији је лук BC*). Тада израчунавање угла A ако се зна однос $BC : AB$, неће бити нимало тешко. Например, ако је нагиб обележен са 0,002, расуђујемо овако: кад дужина лука износи 1/57 полупречника, одговарајући централни угао има 1^0 (в. стр. 74); а који угао одговара луку од 0,002 полупречника? Величину x тог угла налазимо из пропорције $x : 1^0 = 0,002 : \frac{1}{57}$, одакле је

$x = 0,002 \cdot 57 = 0,11$, тј. $x = 0,11^0$, или $x \approx 7'$.

На железничким путевима дозвољени су само врло мали нагиби. Код нас је установљен гранични нагиб од 0,008, тј. $0,008 \cdot 57$ степени — нешто мање од $^1/_2{}^0$; то је највећи нагиб. Једино су за Закавкавску железничку пругу изузетно дозвољени нагиби до 0,02 или скоро $1^030'$*).

Тако незнатне нагибе ми скоро и не примећујемо. Пешак може да осећа нагиб тла под својим ногама тек онда кад је тај нагиб већи од 1/24; то одговара углу од $(57/24)^0$, тј. око 2^030 .

Ако пређете железничком пругом неколико километара и запишете притом ознаке нагиба, моћи ћете да прорачунате колико сте се попели или спустили, тј. колика је висинска разлика између почетне и завршне тачке пређеног пута.

Задатак

Шетњу дуж железничке пруге почели сте од стуба са ознаком успона $\frac{0,004}{153}$ и наишли сте даље на следеће ознаке:

заравaн**)	успон	успон	заравaн	пад
$\frac{0,000}{60}$	$\frac{0,0017}{84}$	$\frac{0,0032}{121}$	$\frac{0,000}{45}$	$\frac{0,004}{210}$.

Шетњу сте завршили код наредног знака нагиба. Колики сте пут прешли и колика је висинска разлика између последње и прве ознаке?

Решење

Свега је пређено

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ m}.$$

---

*) Понеком читаоцу ће се можда учинити недопустивим да се коса дуж AB сматра једнаком нормали AC. Стога је поучно уверити се колико се AC и AB мало разликују у дужини ако је BC стоти део од AB. По Питагориној теореми имамо

$$AC = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0,9999AB^2} = 0,99995AB.$$

Разлика тих дужина износи свега 0,00005 од AB, те се, наравно, у израчунавању приближне вредности таква грешка може занемарити.

*) У нашој земљи највећи нагиб имају железнички путеви Коњиц—Сарајево и Ријека—Бакар (0,029—0,033). — Прим. прев.

**) Знак 0,000 означава хоризонталан део пута (заравaн).

Ви сте се попели за

$$0{,}004 \cdot 153 + 0{,}0017 \cdot 84 + 0{,}0032 \cdot 121 \approx 1{,}15 \text{ m},$$

а спустили сте се за

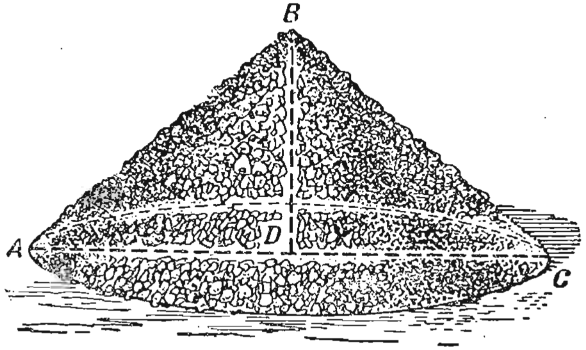
$$0{,}004 \cdot 210 = 0{,}84 \text{ m},$$

те сте се, према томе, на завршетку пута нашли изнад полазне тачке за

$$1{,}15 - 0{,}84 = 0{,}31, \text{ тј. за } 31 \text{ cm}.$$

ГОМИЛЕ ШЉУНКА

Гомиле шљунка дуж ивица друма такође су предмет који заслужује пажњу „геометра у природи“. Упитајте се колика је запремина гомиле која је пред вама — и ви ћете тако поставити себи геометриски задатак који је прилично заплетен за човека навикнутог да математичке тешкоће савлађује само на хартији или на школској табли. Требаће да се израчуна запремина купе чија висина и полупречник нису доступни обичном мерењу. Али то нимало не смета да њихову дужину одредимо посредним путем.



Сл. 71. Уз задатак о гомили шљунка

Полупречник ћете наћи кад метарском траком или канапом измерите обим основе и поделите га*) са 6,28.

Сложеније стоји ствар с висином. Требаће (сл. 71) да се измери дужина изводнице AB или, како поступају путари, обеју изводница $AB + BC$ одједанпут (пребацујући метарску траку преко врха гомиле), а затим, знајући полупречник основе, израчунати висину BD по Питагориној теореми. Размотрићемо један пример.

Задатак

Обим кружне основе купасте гомиле шљунка је 12,1 m, а дужина двеју изводница је 4,6 m. Колика је запремина те гомиле?

Решење

Полупречник основе гомиле има

$$12{,}1 \cdot 0{,}159 \approx 1{,}9 \text{ m}$$

(уместо 12,1 : 6,28), а висина је

$$\sqrt{2{,}3^2 - 1{,}9^2} \approx 1{,}3 \text{ m},$$

те је запремина гомиле

$$\frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}9^2 \cdot 1{,}3 \approx 4{,}9 \text{ m}^3.$$

Уобичајене димензије гомила шљунка на нашим путевима су сагласно ранијим правилима 4,8 m, 2,4 m, а запремина 1,2 m³.

„ГОРДИ БРЕГ“

Гледајући на купасте гомиле шљунка или песка сетио сам се старе источњачке легенде, коју је Пушкин испричао у „Шкртом витезу“:

„Читао сам негде
Да је цар једном неки војницима својим
Наредио да по шаку земље баце на гомилу, —
И уздигао се горди брег
И цар је с висине могао весело гледати
И долину белим шаторима покривену
И море којим галије броде“.

---

*) У пракси се то дељење замењује множењем реципрочним бројем, и то бројем 0,318 ако се тражи пречник, а бројем 0,159 ако треба израчунати полупречник.

То је једна од оних многобројних на први поглед веродостојних легенди у којима нема ни зрна истине. Може се рачуном доказати да, кад би у старо време неки владалац намислио да оствари такву жељу, био би обесхрабрен јадним исходом: пред њим би се уздизала само тако бедна гомилица земље да је никаква машта не би могла надувати у легендарни „горди брег“.

Ми ћемо то отприлике израчунати. Колико је у старо доба цар могао имати војника? Војске у старо доба нису биле бројно толико јаке као данас. Армија од 100 хиљада људи била је већ задивљујућа по својој бројности. Зауставимо се на том броју, тј. узмимо да је брег начињен од 100 хиљада шака земље. Захватите највећу шаку земље и успите је у стаклени суд; ви га једном шаком нећете напунити. Узећете да је шака војника из старог доба имала запремину од $\frac{1}{5}\ l$ (тј. dm³). Отуда је запремина брега

$$\frac{1}{5} \cdot 100\,000 = 20\,000, \text{ тј. } 20 \text{ m}^3.$$

То значи да је брег уствари била купа са запремином не већом од 20 m³. Тако скромна запремина већ нас може разочарати, али ми ћемо наставити рачун да бисмо одредили висину брега. Зато је потребно знати колики угао чини изводница купе са њеном основом. У датом случају можемо узети да је тај угао једнак углу природног пада, тј. 45°; стрмији нагиб не треба узети у обзир, јер би се тада земља осипала (било би правилније узети чак и блажи нагиб, например упола мањи). Зауставивши се на углу од 45° закључујемо да је висина такве купе једнака полупречнику њене основе; према томе је

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

одакле је

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \approx 2{,}7 \text{ m}.$$

Треба да човек има веома богату уобразиљу да би гомилу земље високу 2,7 m ($1^1/_2$ човечји раст) називао „гордим брегом“. Рачун за двапут мањи нагиб падине дао би нам још скромнији резултат.

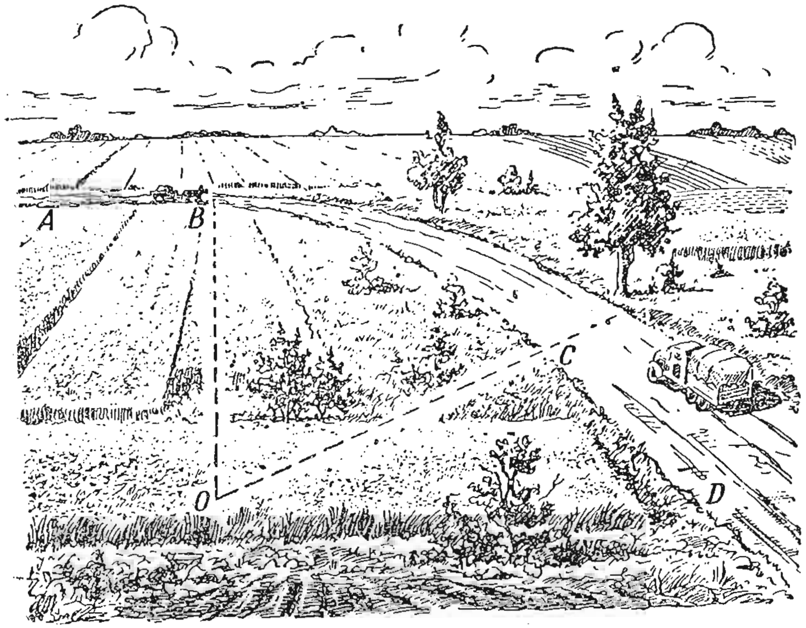
Атила је имао највећу војску за коју је знао Стари свет. Историчари је процењују на 700 000 људи. Кад би сви ти војници учествовали у насипању брега, настала би гомила виша од оне чију смо висину израчунали, али не много виша, јер би њена запремина била 7 пута већа од претходне, тако да би њена висина премашивала висину претходне гомиле свега $\sqrt[3]{7}$ пута, тј. 1,9 пута; другим речима, та висина би износила $2{,}7 \cdot 1{,}9 \approx 5{,}1$ m. Сумњам да би брежуљак таквих размера могао задовољити Атилино самољубље.

Са таквих невеликих узвишења било је, наравно, лако видети „долину покривену белим шаторима“, али видети море — то би се могло само ако би се та узвишица подигла крај морске обале.

О томе на коју се даљину може видети са ове или оне висине поразговараћемо у Глави шестој.

ПОРЕД КРИВИНЕ ПУТА

Ни друм ни железничка пруга никад не заокрећу оштро, већ прелазе из једног у други правац постепено, без прелома,

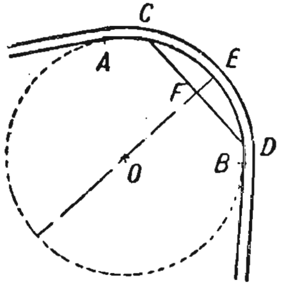


Сл. 72. Кривина пута

луком. Тај лук је обично део круга постављен тако да праволиниски делови пута буду његове тангенте. Например, на сл. 72 праволиниске деонице AB и CD пута спојене су луком BC тако да AB и CD додирују (у геометриском смислу) тај лук у тачкама B и C, тј. AB и полупречник OC граде прав угао, а такође и CD и полупречник OC граде прав угао. Тако се ради, наравно, зато да би пут постепено улазио у кривину и из ње излазио. Полупречник кривине пута обично се узима веома велики — на железничким пругама не мањи од 600 m; најчешће полупречник кривине на главној железничкој прузи има 1000 па чак и 2000 m.

ПОЛУПРЕЧНИК КРИВИНЕ

Стојећи близу једне од тих кривина да ли бисте могли одредити колики је њен полупречник? То није тако лако као наћи полупречник круга нацртаног на хартији. На цртежу је то просто: повучете две произвољне тетиве и у њиховим срединама подигнете нормале; у њиховој просечној тачки је, као што је познато, центар круга; отстојање центра било од које тачке криве је тражени полупречник.



Сл. 73. У вези са израчунавањем полупречника кривине

Али, извршити сличну конструкцију на терену било би, разуме се, веома незгодно, јер се центар кривине налази на отстојању од 1 до 2 km од пута, често и на неприступачном месту. Конструкција би се могла извршити на плану пута, али преношење кривине на план такође није лак посао.

Све се те тешкоће отклањају ако се прибегне не конструисању већ израчунавању полупречника. За то се може искористити следећи поступак. Допунићемо у мислима лук AB кривине до круга (сл. 73). Пошто спојимо тачке C и D кривине, измеримо тетиву CD а такође и „стрелу" EF (тј. висину отсечка $CFDEC$). Помоћу та два податка сад већ није тешко израчунати тражену дужину полупречника. Посматрајући праву CD и пречник круга као тетиве које се секу обележимо дужину тетиве са a, дужину стреле са h, а полупречник са R; тада је:

$$\frac{a^2}{4} = h\,(2R - h),$$

одакле је

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2,$$

те је тражени полупречник*)

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}\,.$$

Например, ако је стрела 0,5 m и тетива 48 m, тражени полупречник је

$$R = \frac{48^2 + 4 \cdot 0{,}5^2}{8 \cdot 0{,}5} \approx 580 \text{ m}.$$

Ово се израчунавање може упростити ако се сматра да је $2R - h$ једнако $2R$ — а та слобода је дозвољена, јер је h веома мало у поређењу са R (R има неколико стотина метара, а h ни 10 m). Тада се добија за рачун веома подесна приближна формула

$$R = \frac{a^2}{8h}\,.$$

Ако бисмо је применили на малочас разматрани случај, добили бисмо исту дужину:

$$R = 580.$$

Када сте израчунали полупречник кривине и, сем тога, знате да се центар кривине налази на нормали подигнутој у средини тетиве, можете приближно забележити и оно место где треба да се налази центар кривине.

---

*) То исто се могло добити и другим путем — из правоуглог троугла COF, где је $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$, $OF = R - h$. По Питагориној теореми је

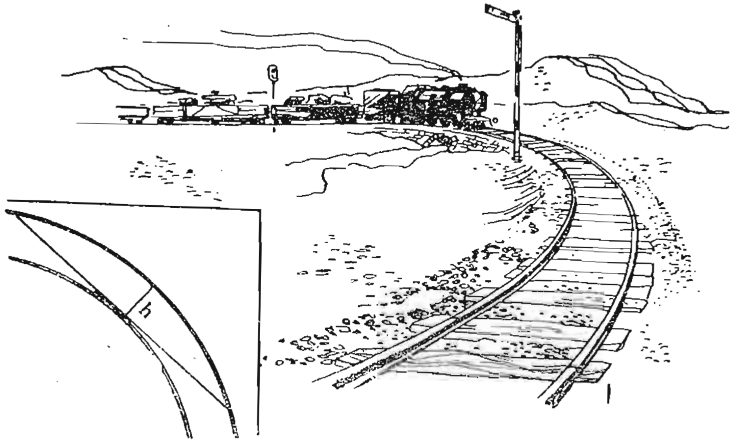
$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

одакле је

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}\,.$$

Ако су путем положене шине, налажење полупречника кривине се упрошћује. Уствари, ако затегнемо траку дуж тангенте унутрашње шине, добићемо тетиву лука спољне шине, чија је стрела h (сл. 74) једнака ширини колосека — 1,52 m. Полупречник кривине је у том случају (ако је a дужина тетиве) приближно једнак



Сл. 74. Уз израчунавање полупречника кривине железничке пруге

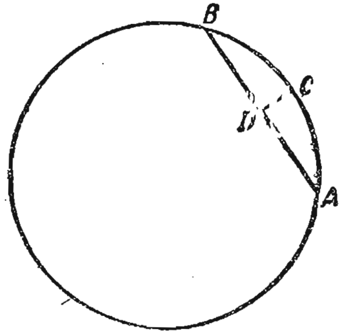
$$R = \frac{a^2}{8 \cdot 1{,}52} = \frac{a^2}{12{,}2}.$$

Ако је $a = 120$ m, полупречник кривине је око 1200 m*).

ДНО ОКЕАНА

Од кривине пута до дна океана је, чини се, највише неочекиван скок. У сваком случају тај скок се у први мах не може разумети. Али, геометрија повезује обе ове теме на најприроднији начин.

Реч је о кривини дна океана, о томе какав је његов облик: удубљен, раван или испупчен. Многима ће бесумње изгледати невероватно да и поред своје огромне дубине океани не претстављају улегнућа на Земљиној лопти; како ћемо сада видети, њихово дно не само што није удубљено него је чак и испупчено. Сматрајући да је океан „без дна и без краја", ми заборављамо да је његова „бескрајност" много стотина пута већа од његове дубине „без дна", тј. да водена маса океана претставља слој који се далеко простире и, разуме се, понавља кривину наше планете.



Сл. 75. Да ли је дно океана равно?

Узмимо као пример Атлантски Океан. Његова ширина код екватора чини отприлике шестину пуног круга. Ако је круг на сл. 75 екватор, онда лук ABC претставља водено огледало Атлантског Океана. Кад би његово дно било равно, његова би дубина била једнака CD, тј. стрели лука ACB. Знајући да је лук AB једнак шестини круга и да је, према томе, тетива AB страница правилног уписаног шестоугла (која је, као што је познато, једнака полупречнику R круга), можемо CD израчунати из раније наведене формуле за кривину пута:

$$R = \frac{a^2}{8h}, \quad \text{одакле је} \quad h = \frac{a^2}{8R}.$$

Пошто знамо да је $a = R$, добијамо за дати случај

$$h = \frac{R}{8}.$$

За $R = 6400$ km имамо

$$h = 800 \text{ km}.$$

Дакле, да би дно Атлантског Океана било равно, његова највећа дубина требало би да достигне до 800 km. Уствари пак она не достиже ни 10 km. Одатле и произлази непосредан закључак: дно тог океана по свом општем облику је испупчено, само са много мањом кривином него што је кривина његове водене површине.

То важи и за остале океане. Њихово дно претставља на површи Земље места смањене кривине и скоро не нарушава њен општи сферни облик.

---

*) У пракси је тај начин неподесан утолико што због великог полупречника кривине врпца за тетиву мора бити врло дугачка.

Наша формула за израчунавање полупречника кривине пута показује да уколико је водени басен пространији, његово дно је испупченије. Посматрајући формулу $h = \frac{a^2}{8R}$ одмах видимо да, уколико ширина океана или мора више расте, његова дубина мора — да би дно било равно — да расте врло брзо, пропорционално квадрату ширине. Међутим, при прелазу од малих водених басена ка већим брзина не расте по таквој вртоглавој прогресији. Океан је шири од неког мора, рецимо, 100 пута, али од њега није дубљи, 100 · 100, тј. 10 000 пута. Зато сразмерно мали басени имају више угнуто дно него океани. Дно Црног Мора између Крима и Мале Азије није испупчено као океанско дно, чак није ни равно, већ је удубљено. Водена површина тог мора (пресечена једном нормалном равни — прим. прев.) претставља лук од приближно 2^0 (тачније, од 1/170 Земљиног екватора). Дубина Црног Мора је прилично равномерна и износи 2,2 km. Ако у датом случају изједначимо лук са тетивом, добијамо да би море с равним дном морало имати највећу дубину

$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \cdot 8R} = 1{,}1 \text{ km}.$$

Према томе, дно Црног Мора је за више од 1 km (тј. 2,2 — 1,1) испод оне замишљене равни постављене кроз крајње тачке његових наспрамних обала, тј. оно претставља улегнуће а не испупчење.

ДА ЛИ ПОСТОЈЕ ВОДЕНА БРДА

Раније изведена формула за израчунавање полупречника кривине пута помоћи ће нам да одговоримо и на ово питање.

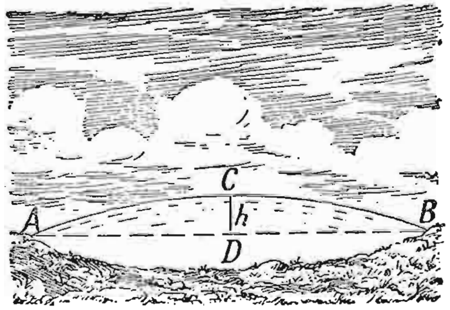
Претходни задатак припремио нас је за одговор. Водена брда постоје, али не у физичком него у геометриском значењу тих речи. Не само свако море, већ и свако језеро је у неку руку водено брдо. Кад стојите крај обале језера, вас од супротне тачке обале одваја водено испупчење чија је висина утолико већа уколико је језеро шире. Ту висину можемо израчунати: из формуле $R = \frac{a^2}{8h}$ имамо величину „стреле“ $h = \frac{a^2}{8R}$; овде је a праволиниско растојање између обала, које се може изједначити са ширином језера (тј. тетива са луком). Ако је та ширина, рецимо, 100 km, онда је висина „воденог брда“

$$h = \frac{10\,000}{8 \cdot 6400} = 200 \text{ m}.$$

Водено брдо је задивљујуће висине!

Чак и мање језеро од 10 km ширине највишу тачку свог испупчења изнад праве која спаја његове обале издиже за 2 m, тј. више од човечијег раста.

Али, имамо ли права да та водена испупчења називамо брдима? У физичком смислу не, јер се она не уздижу изнад хоризонта, те су то, дакле, равни. Погрешно је мислити да је права AB (сл. 76) хоризонтална (у претстави човека који стоји у тачки A) и да се над њом уздиже лук ACB. Хоризонтална линија овде није AB већ је то ACB, која лежи на слободној површини мирне воде, а права ADB је нагнута према хоризонту: AD се спушта испод површине Земље до тачке D, своје најдубље тачке, и затим се опет „подиже“ излазећи испод земље (или воде) у тачки B. Ако би дуж праве AB биле постављене цеви, тада се лоптица постављена у тачки A не би ту задржала, већ би се скотрљала (кад су зидови цеви глатки) до тачке D, а одатле би разигравши се „устрчала“ до тачке B; затим би се, не задржавајући се ту, котрљала до D, докотрљала до A, поново се скотрљала итд. Идеално глатка лоптица би се у идеално глаткој цеви (при отсуству ваздуха, који смета кретању) вечито котрљала тамо-амо...



Сл. 76. Водено брдо

Дакле, иако нашем оку изгледа (сл. 76) да је ACB брдо, у физичком смислу речи ту је равно место. Брдо, — ако хоћете — ту постоји само у геометриском смислу.

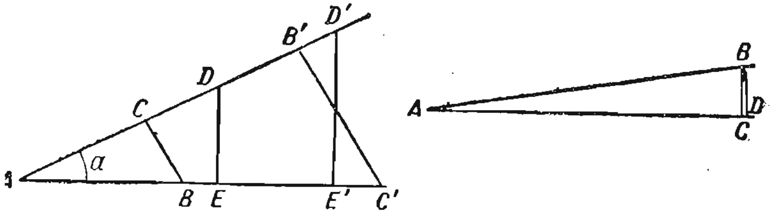
ГЛАВА ПЕТА

ПУТНА ТРИГОНОМЕТРИЈА БЕЗ ФОРМУЛА И ТАБЛИЦА

ИЗРАЧУНАВАЊЕ СИНУСА УГЛА

У овој глави показаћемо како се могу израчунати странице троугла с тачношћу до 2% и углови с тачношћу до 1^0 користећи се само појмом синуса угла и не прибегавајући ни таблицама ни формулама. Таква упрошћена тригонометрија може устребати за време шетње ван града, када се немају при руци таблице, а формуле су скоро заборављене. Робинсон на свом острву могао би се успешно користити таквом тригонометријом.

Дакле, замислите да још нисте учили тригонометрију или да сте је заборавили, — неким читаоцима вероватно неће бити тешко да себе замисле у таквом положају. Почећемо да се с њом упознајемо изнова.



Сл. 77. Шта је то синус оштрог угла

Шта је синус оштрог угла? — То је однос супротне катете према хипотенузи у оном троуглу који нормала на крак оштрог угла отсеца од тог угла. Например, синус угла α (сл. 77) је $\frac{BC}{AB}$, или $\frac{ED}{AD}$, или $\frac{D'E'}{AD'}$, или $\frac{B'C'}{AC'}$. Лако је видети да су услед сличности овде образованих троуглова сви ти односи једнаки међу собом.

А чему су једнаки синуси разних углова од 1^0 до 90^0? Како да се то сазна ако се немају при руци таблице? — Врло просто: свако треба да сам за себе састави таблицу синуса. То ћемо и ми сада урадити.

Почнимо од оних углова чији су нам синуси познати из тригонометрије. То је, пре свега, угао од 90^0, чији се синус, очигледно, једнак 1. Затим угао од 45^0, чији се синус лако израчунава по Питагориној теореми; његова је вредност $\sqrt{2}/2$, тј. 0,707. Даље нам је позната вредност синуса од 30^0; наиме, пошто је катета наспрам тог угла једнака половини хипотенузе, синус од 30^0 једнак је $1/2$.

Према томе, ми знамо синусе (или, како је усвојено да се означава, sin) углова од 30^0, 45^0 и 90^0, и то је:

$$\sin 30^0 = 0{,}5,$$
$$\sin 45^0 = 0{,}707,$$
$$\sin 90^0 = 1.$$

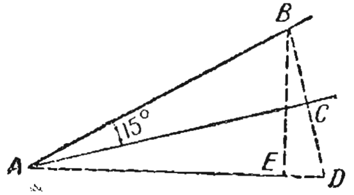
То, наравно, није довољно за решавање геометриских задатака; неопходно је знати вредности синуса и свих углова који се налазе између наведених углова, и то бар оних који се разликују за по један степен. За веома мале углове се при израчунавању синуса може уместо односа катете према хипотенузи без велике грешке узети однос лука према полупречнику: из сл. 77 видимо да се однос BC/AB мало разликује од односа $\widehat{BD}/AB$. Овај последњи однос лако је израчунати. Например, за угао од 1^0 лук је $\widehat{BD} = \frac{2\pi R}{360}$, где је $\pi = 3{,}14159\ldots$ и, према томе, можемо узети да је

$$\sin 1^0 = \frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

На исти начин налазимо:

$$\sin 2^0 = 0{,}0349,$$
$$\sin 3^0 = 0{,}0524,$$
$$\sin 4^0 = 0{,}0698,$$
$$\sin 5^0 = 0{,}0873.$$

Али, треба се уверити докле се ова таблица сме продужити а да се не начини велика грешка. Ако бисмо на тај начин израчунали sin 30^0, добили бисмо 0,524 уместо 0,500; разлика би се појавила већ у другој значајној цифри и грешка би износила 24/500, тј. око 5%. То је сувише грубо чак и за нестрогу путну тригонометрију. Да бисмо нашли границу до које је допуштено израчунати синусе на наведени приближни начин, постараћемо се да тачно израчунамо sin 15^0. У том циљу користићемо се једном не баш много сложеном конструкцијом (сл. 78).



Сл. 78. Како се израчунава sin 15^0

Нека је $\sin 15^0 = BC/AB$. Продужимо BC за исто толику дуж до тачке D и спојмо A са D; добијамо два подударна троугла ADC и ABC и угао BAD од 30^0. Спустимо на AD нормалу BE; добијамо правоугли троугао BAE са углом од 30^0 ($\sphericalangle\, BAE$); тада је $BE = AB/2$. Сада из троугла ABE по Питагориној теореми израчунавамо AE:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} AB^2,$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\ AB.$$

То значи да је $ED = AD - AE = AB - 0{,}866\,AB = 0{,}134\,AB$. Сада из троугла BED израчунавамо BD:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\,AB)^2 = 0{,}268\,AB^2,$$

$$BD = \sqrt{0{,}268\ AB^2} = 0{,}518\ AB.$$

Половина дужи BD, тј. дуж BC, једнака је 0,259 AB, те је, према томе, вредност траженог синуса

$$\sin 15^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\,AB}{AB} = 0{,}259.$$

То је таблична вредност за sin 15^0 на три децимале, а приближна вредност коју бисмо могли наћи на претходни начин једнака је 0,262. Упоређујући вредности

0,259 и 0,262

видимо да, ако се ограничимо на две значајне цифре, добијамо:

0,26 и 0,26,

тј. резултати су истоветни. Грешка при замени тачније вредности (0,259) приближном (0,26) износи 1/1000, тј. око 0,4% (тј. око 0,4% тачне вредности — прим. прев.). Толика грешка је за путне рачуне допуштена, те, према томе, имамо права да синусе углова израчунавамо на претходни начин.

За размак од 15^0 до 30^0 можемо синусе израчунавати помоћу пропорција. Расуђиваћемо овако:

Разлика између sin 30^0 и sin 15^0 је $0{,}50 - 0{,}26 = 0{,}24$. То значи да можемо узети да, при увећавању угла за 1^0, синус тог угла расте отприлике за 1/15 те разлике, тј. за $0{,}24/15 = 0{,}016$. Строго говорећи, то уствари није тако, али се отступање од показаног правила открива тек у трећој значајној цифри, коју ми и иначе одбацујемо. Дакле, додајући вредности sin 15^0 постепено по 0,016 добијамо sin 16^0, sin 17^0, sin 18^0 итд.:

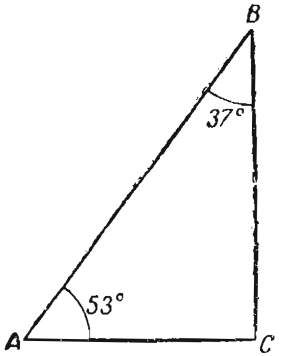
$$\begin{aligned}
\sin 16^0 &= 0{,}26 + 0{,}016 = 0{,}28,\\
\sin 17^0 &= 0{,}26 + 0{,}032 = 0{,}29,\\
\sin 18^0 &= 0{,}26 + 0{,}048 = 0{,}31,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sin 25^0 &= 0{,}26 + 0{,}16 = 0{,}42 \text{ итд.}
\end{aligned}$$

Све вредности ових синуса су тачне на две прве децимале, тј. имају за наш циљ довољну тачност; оне се разликују од тачних вредности мање него за половину јединице последње цифре.

На исти се начин поступа при израчунавању синуса углова који се налазе између 30^0 и 45^0. Разлика синуса ових углова је: $\sin 45^0 - \sin 30^0 = 0{,}707 - 0{,}5 = 0{,}207$. Кад је поделимо са 15, добијамо 0,014. Ову величину ћемо постепено додавати вредности sin 30^0; добићемо редом:

$$\begin{aligned}
\sin 31^0 &= 0{,}5 + 0{,}014 = 0{,}51,\\
\sin 32^0 &= 0{,}5 + 0{,}028 = 0{,}53,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sin 40^0 &= 0{,}5 + 0{,}14 = 0{,}64 \text{ итд.}
\end{aligned}$$

Остаје да нађемо синусе оштрих углова већих од 45^0. У томе ће нам помоћи Питагорина теорема. Нека, например, желимо да нађемо $\sin 53^0$, (сл. 79) тј. однос BC/AB. Како је $\sphericalangle B = 37^0$, то његов синус можемо израчунати по претходном поступку: $\sin 37^0 = 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}014 = 0{,}6$. С друге стране, знамо да је $\sin B = AC/AB$. Дакле, $AC/AB = 0{,}6$, одакле је $AC = 0{,}6\ AB$. Кад знамо AC, лако нам је да израчунамо BC. Ова дуж је:



Сл. 79. Уз израчунавање синуса угла већег од 45^0

$$BC = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} =$$
$$= \sqrt{\overline{AB}^2 - (0{,}6AB)^2} =$$
$$= AB\sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8AB.$$

Рачун није нимало тежак; треба само умети израчунавати квадратни корен.

ИЗРАЧУНАВАЊЕ КВАДРАТНОГ КОРЕНА

Начин израчунавања квадратног корена који се показује у уџбеницима алгебре лако се заборавља. Али, и без њега се можемо снаћи. У мојим књигама из геометрије наведен је један стари простији начин израчунавања квадратног корена помоћу дељења. Овде ћу изложити још један одавно познати начин који је такође једноставнији од оног у уџбеницима алгебре.

Нека треба израчунати $\sqrt{13}$. Он се налази између 3 и 4 па је, према томе, једнак броју 3 увећаном за известан прави разломак, који ћемо обележити са x.

Дакле, $\sqrt{13} = 3 + x$, одакле је $13 = 9 + 6x + x^2$.

Квадрат разломка x је мали разломак који у првој апроксимацији можемо занемарити; тада имамо:

$13 = 9 + 6x$, одакле је $6x = 4$ и $x = 2/3 = 0{,}67$.

Значи да је приближно $\sqrt{13} = 3{,}67$. Ако хоћемо да одредимо још тачнију вредност корена, написаћемо једначину $\sqrt{13} = 3^2/_3 + y$, где је y мали прави разломак, било позитиван или негативан. Одатле је $13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$. Кад одбацимо y^2, налазимо да је y приближно једнако $-\frac{2}{33} = -0{,}06$. Према томе, у другој апроксимацији је $\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. Трећу апроксимацију налазимо на исти начин, итд.

На уобичајени начин који се показује у алгебри нашли бисмо да је вредност $\sqrt{13}$ с тачношћу до 0,01 такође 3,61.

НАЋИ УГАО КАД СЕ ЗНА ВРЕДНОСТ ЊЕГОВОГ СИНУСА

Дакле, сад можемо да израчунамо вредност синуса макојег угла од 0^0 до 90^0 на две децимале. Потреба за готовом таблицом отпада; за приближан рачун можемо је, ако желимо, увек саставити и сами.

Али, за решавање тригонометриских задатака потребно је знати изводити и обратну рачунску операцију — израчунавати углове кад је дата вредност њиховог синуса. То је такође једноставно. Нека треба наћи угао чији синус има вредност 0,38. Како је вредност датог синуса мања од 0,5, то је тражени угао мањи од 30^0. Али, он је већи од 15^0, јер је, као што знамо, $\sin 15^0 = 0{,}26$. Да бисмо нашли тај угао који се налази између 15^0 и 30^0, поступићемо онако како је објашњено на страни 123:

$$0{,}38 - 0{,}26 = 0{,}12,$$
$$\frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5,$$
$$15^0 + 7{,}5^0 = 22{,}5^0.$$

Дакле, тражени угао има приближно $22{,}5^0$.

Други пример: — Наћи угао чији синус има вредност 0,62.

Решење:

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12,$$
$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6,$$
$$30^0 + 8{,}6^0 = 38{,}6^0.$$

Тражени угао има приближно $38{,}6^0$.

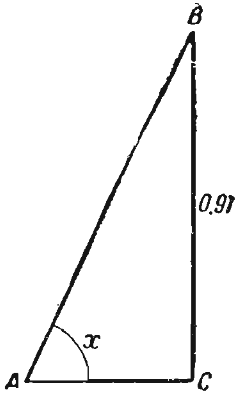
Најзад, трећи пример: Наћи угао чији је синус једнак 0,91.

Како се вредност датог синуса налази између 0,71 и 1, то се тражени угао налази између 45^0 и 90^0. На сл. 80 BC је синус угла A ако је $BA = 1$. Кад се зна BC, лако је наћи синус угла B:

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0{,}91^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

Сада ћемо наћи величину угла B чији је синус једнак 0,42; после тога ћемо лако наћи угао A који је једнак $90^0 - \sphericalangle B$. Како се 0,42 налази између 0,26 и 0,5, то се угао B налази између 15^0 и 30^0. Он се одређује овако:



Сл. 80. Уз израчунавање оштрог угла кад је познат његов синус

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16,$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10,$$

$$\sphericalangle B = 15^0 + 10^0 = 25^0.$$

Према томе, за угао A имамо:

$$\sphericalangle A = 90^0 - \sphericalangle B = 90^0 - 25^0 = 65^0.$$

Сада смо потпуно наоружани за приближно решавање тригонометриских задатака, јер умемо да нађемо синус угла и угао кад је дат његов синус, и то с тачношћу која је на путу довољна.

Али, да ли је за то довољан само синус угла? Зар нам неће затребати и остале тригонометриске функције — косинус, тангенс итд.? Сада ћемо на низу примера показати да се у нашој упрошћеној тригонометрији може проћи и са самим синусом угла.

ВИСИНА СУНЦА

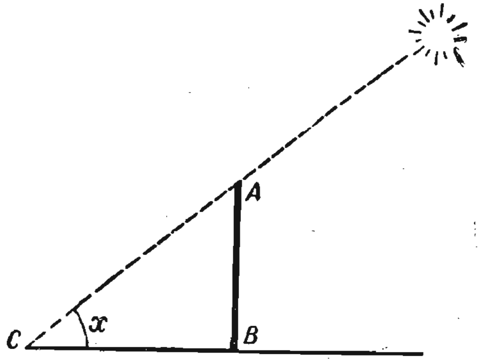
Задатак

Сенка BC (сл. 81) вертикалне мотке AB високе 4,2 m има 6,5 m дужине. Колика је у том тренутку висина Сунца над хоризонтом, тј. колики је $\sphericalangle C$?

Решење

Лако је видети да је синус угла C једнак AB/AC. Али је

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74.$$



Сл. 81. Одредити висину Сунца над хоризонтом

Зато тражени синус има вредност $4{,}2/7{,}74 = 0{,}55$. На раније показани начин налазимо одговарајући угао: 33^0. Висина Сунца је 33^0, с тачношћу до $0{,}5^0$.

УДАЉЕНОСТ ОСТРВА

Задатак

Тумарајући с компасом у руци поред реке запазили сте речно острвце A (сл. 82) и желите да одредите његову удаљеност од тачке B на обали. У том циљу одредите помоћу компаса величину угла ABN који права BA образује с правцем југ—север (SN). Затим измерите дужину отсечка BC и одредите величину угла NBC између тог отсечка и SN. Исти поступак се понавља и за тачку C и праву CA. — Рецимо да сте добили следеће податке:

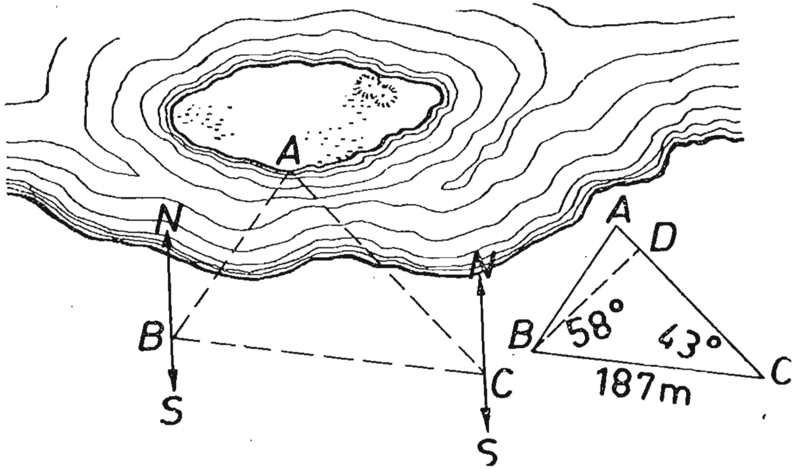
права BA је за 52^0 од SN нагнута према истоку,
права BC је за 110^0 од SN нагнута према истоку,
права CA је за 27^0 од SN нагнута према западу,
дужина $BC = 187$ m.

Како да се, на основу тих података, израчуна растојање AB?

Решење

У троуглу ABC позната нам је страница BC. $\sphericalangle ABC = 110^0 - 52^0 = 58^0$; $\sphericalangle ACB = 180^0 - 110^0 - 27^0 = 43^0$. Повуцимо у том троуглу (сл. 82) висину BD. Имамо: $\sin C = \sin 43^0 = BD/187$. На раније показани начин израчунаћемо $\sin 43^0$; добићемо 0,68. Дакле,

$$BD = 187 \cdot 0{,}68 = 127.$$



Сл. 82. Како се израчунава удаљеност острва

Сада нам је у троуглу ABD позната катета BD; $\sphericalangle A = 180^0 - (58^0 + 43^0) = 79^0$ и $\sphericalangle ABD = 90^0 - 79^0 = 11^0$. Израчунаћемо $\sin 11^0$; његова је вредност 0,19. Према томе, $AD/AB = 0{,}19$. С друге стране, по Питагориној теореми је

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Ако AD заменимо са $0{,}19\,AB$ а BD са 127, имамо:

$$AB^2 = 127^2 + (0{,}19\,AB)^2,$$

одакле је $AB \approx 129$.

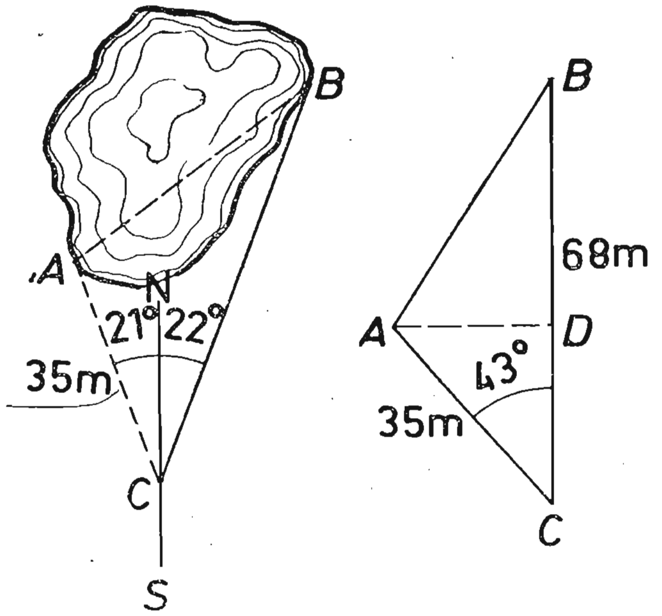
Дакле, тражена удаљеност острва је око 129 m.

Читаоцу, мислим, не би било тешко да израчуна и страницу AC ако би и то затребало.

ШИРИНА ЈЕЗЕРА

Задатак

Да бисте одредили ширину AB језера (сл. 83) ви сте помоћу компаса нашли да се права CA нагиње према западу за 21^0, а CB према истоку за 22^0. Дужина $CB = 68$ m, а $CA = 35$ m. Израчунати на основу тих података ширину језера.



Сл. 83. Израчунавање ширине језера

Решење

У троуглу ABC познати су нам угао од 43^0 и дужине страница које га захватају: 68 m и 35 m. Повуцимо (сл. 83) висину AD; имамо: $\sin 43^0 = AD/AC$. Независно од тога израчунајмо $\sin 43^0$; добијамо 0,68. Дакле, $AD/AC = 0{,}68$, $AD = 0{,}68 \cdot 35 = 24$. Затим израчунавамо CD:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649, \quad CD = 25{,}5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Сада из троугла ABD имамо:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380,$$

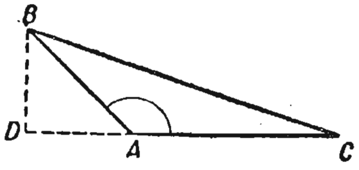
$$AB \approx 49.$$

Дакле, тражена ширина језера је око 49 m.

Ако би било потребно израчунати и остала два угла у троуглу ABC, тада бисмо, пошто смо већ нашли $AB = 49$, даље поступили овако:

$$\sin B = AD/AB = 24/49 = 0{,}49, \text{ одакле је } \sphericalangle B = 29^0.$$

Трећи угао, $\sphericalangle A$, наћи ћемо тако што ћемо од 180^0 одузети збир углова од 29^0 и 43^0; $\sphericalangle A = 108^0$.



Сл. 84. У вези са решавањем тупоуглог троугла

Може се десити да у посматраном случају решавања тоугла (кад су познате две странице и њима захваћени угао) дати угао није оштар, већ је туп. Ако су, например, у троуглу ABC (сл. 84) познати тупи угао A и странице AB и AC, тада је ток израчунавања осталих његових елемената овакав. Спусти се висина BD и из троугла BDA израчунају се BD и AD; затим се, знајући $DA + AC$, налази BC и $\sin C$, пошто се претходно израчуна однос BD/BC.

ТРОУГАОНО ЗЕМЉИШТЕ

Задатак

На излету смо измерили корацима странице троугаоног земљишта и нашли да оне имају 43, одн. 60, одн. 54 корака. Колики су углови тог троугла?

Решење

То је најсложенији случај решавања троугла — кад су познате његове три странице. Међутим, и ту се може изаћи на крај и без помоћи других функција осим синуса угла.

Спустимо (сл. 85) висину BD на најдужу страницу AC; имамо:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2, \quad BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

одакле је

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2, \quad DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070;$$

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)\,(DC - AD) = 60\,(DC - AD).$$

Према томе је

$$60(DC - AD) = 1070 \text{ и } DC - AD = 17{,}8.$$

Из двеју једначина

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ и } DC + AD = 60$$

добијамо:

$$2DC = 77{,}8, \quad DC = 38{,}9.$$

Сада је лако израчунати висину:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

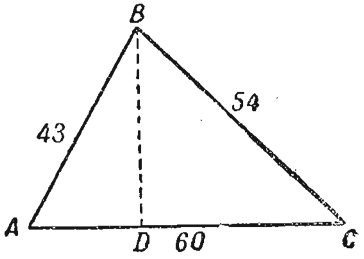
одакле налазимо:

$$\sin A = BD/AB = 37{,}4/43 = 0{,}87; \quad \sphericalangle A \approx 60^0;$$

$$\sin C = BD/BC = 37{,}4/54 = 0{,}69; \quad \sphericalangle C \approx 44^0.$$

Трећи угао је: $\sphericalangle B = 180^0 - (\sphericalangle A + \sphericalangle C) \approx 76^0$.

Ако бисмо у датом случају рачунали помоћу таблица, по свим правилима „праве“ тригонометрије, добили бисмо углове изражене у степенима и минутима. Али, ти минути би били сигурно погрешни, јер мерећи дужину страница корацима чинимо грешку која није мања од 2—3%. То значи да би требало, да не бисмо сами себе заваравали, да добијене „тачне“ величине углова заокруглимо бар до целог степена. И, тада бисмо добили онај исти резултат до кога смо дошли служећи се упрошћеним начином. Корисност наше „путне“ тригонометрије овде веома уочљиво долази до израза.



Сл. 85. Наћи углове овог троугла 1) рачунски; 2) помоћу угломера

ОДРЕЂИВАЊЕ ВЕЛИЧИНЕ ДАТОГ УГЛА БЕЗ ИКАКВИХ МЕРЕЊА

За мерење углова на терену потребан је бар компас, а понекад су нам довољни и сопствени прсти на руци или кутија за шибице. Али, може затребати да се измери угао на хартији, на плану, или на карти.

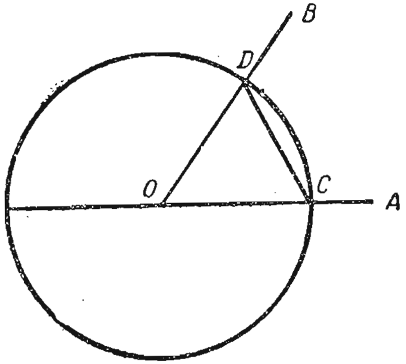
Разуме се, ако је при руци угломер, то се питање решава врло просто. А ако немамо угломера, например на путу? — Геометар ни у том случају не сме да се изгуби. Како бисте ви решили наредни задатак?

Задатак

Нацртан је угао *АОВ* (сл. 86) мањи од 180⁰. Одредити његову величину без мерења.

Решење

Могли бисмо да из произвољне тачке крака *ВО* спустимо нормалу на крак *АО* и да у добијеном правоуглом троуглу измеримо катете и хипотенузу и нађемо синус угла, а затим и величину самог угла (в. стр. 125). Али, такво решење не би одговарало строгом услову — ништа не мерити!



Сл. 86. Како одредити величину угла *AOB* користећи се само шестаром?

Користићемо се решењем које је 1946 год. нашао З. Рутејка из Каунаса.

Из темена *O* као центра произвољним отвором шестара опишемо пун круг. Тачке *C* и *D* у којима овај круг сече краке угла спојимо једном дужи. Сада од почетне тачке *C* на кругу преносимо помоћу шестара тетиву *CD* у једном и у другом правцу све док врх игле шестара не дође поново у тачку *C*.

Преносећи тетиву морамо бројати колико смо пута за то време обишли круг и колико смо пута преносили тетиву.

Узмимо да смо круг обишли n пута и за то време k пута пренели тетиву *CD*. Тада ће тражени угао бити

$$\sphericalangle AOB = \frac{360^0 \cdot n}{k}.$$

Заиста, нека дати угао има x^0; преносећи дуж круга тетиву *CD* k пута ми као да угао од x^0 увећавамо k пута; али, како смо притом обишли круг n пута, то ће тај угао имати $n \cdot 360^0$, тј. $x^0 \cdot k = n \cdot 360^0$; одатле је

$$x^0 = \frac{360^0 \cdot n}{k}.$$

За угао на сл. 86 је $n = 3$, $k = 20$ (проверите!), те је, према томе, $\sphericalangle AOB = 54^0$. Кад се нема шестар, круг се може описати помоћу игле и траке од хартије; тетива се може преносити помоћу исте траке од хартије.

Задатак

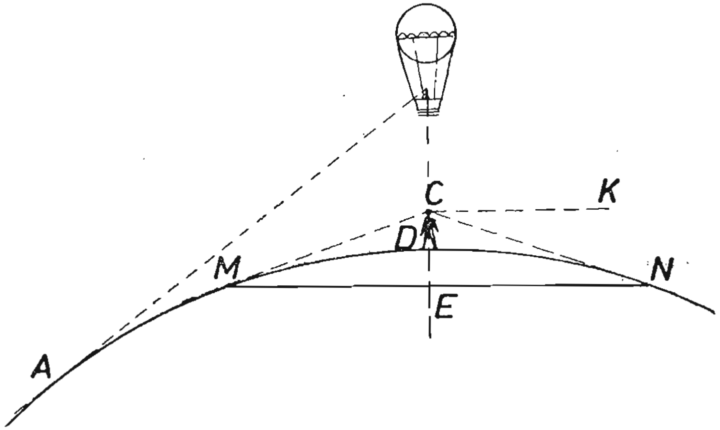
Одредите на показани начин углове троугла на сл. 85.

ГЛАВА ШЕСТА

ТАМО ГДЕ СЕ НЕБО СА ЗЕМЉОМ САСТАЈЕ

ХОРИЗОНТ

У степи или на равном пољу ви себе видите у центру кружне линије која ограничава део Земљине површине који видите око себе. То је хоризонт. Линија хоризонта је недостижна; кад идете к њој, она се од вас удаљује. Али, иако је недостижна, она ипак реално постоји; то није оптичка обмана, није фатаморгана. За сваку тачку са које се посматра постоји одређена граница дела Земљине површине који се из те тачке види, и удаљеност те границе од стајалишта није тешко израчунати. Да бисмо себи објаснили геометриске односе у вези с хоризонтом, погледајмо сл. 87, на којој је показан део Земљине површине. У тачки C налази се посматрачево око на висини CD над Земљином површином. До које даљине види око себе тај посматрач ако се налази на равном земљишту? Очигледно, он види само до тачака M, N, где видни зрак додирује површину Земље; даље од тих тачака Земља се налази испод видног зрака. Те тачке M и N (као и остале на кружној линији MEN) чине границу видљивог дела Земљине површине, тј. сачињавају линију хоризонта. Посматрачу се чини да се ту небо наслања на земљу, јер у тим тачкама он види истовремено и небо и предмете на Земљи.



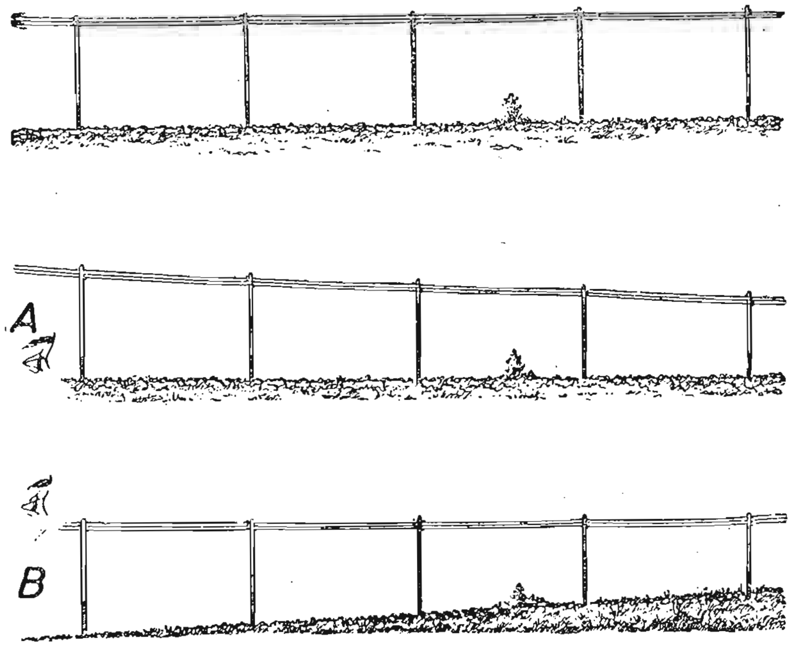
Сл. 87. Хоризонт

Можда ће вам се учинити да сл. 87 не даје верну слику стварности, јер се уствари хоризонт увек налази на нивоу очију, док на слици круг лежи, очигледно, испод стајалишта посматрача. Заиста, увек изгледа да линија хоризонта лежи на нивоу наших очију и да се чак пење заједно с нама кад се ми пењемо на већу висину. Али, то је оптичка варка; уствари је линија хоризонта увек испод очију, како је то и показано на сл. 87, само што је угао који права CM (одн. CN) гради с правом CK управном на полупречник Земље у тачки C (тај се угао зове „спуштање хоризонта“) веома мали и без инструмената се не може измерити.

Забележимо успут и другу занимљиву околност. Ми смо малочас рекли да се, кад се посматрач пење на већу висину изнад површине Земље, например авионом, чини да линија хоризонта остаје на нивоу очију, тј. као да се подиже заједно с посматрачем. Ако се он попне на довољно велику висину, изгледаће му да тле под авионом лежи испод линије хоризонта, — Земља ће му изгледати удубљена у облику чаше чија је ивица линија хоризонта. То је нарочито добро описао и објаснио Едгар По у фантастичним „Доживљајима Ханса Пфала“.

„Пре свега, — прича његов јунак летач — мене је зачудило то што ми се површина Земље учинила удубљеном. Ја сам очекивао да ћу је неизоставно видети испупчену кад се будем пео увис; тек сам размишљањем нашао објашњење те појаве. Вертикална права повучена од мог балона ка Земљи чинила би катету правоуглог троугла чија би основица била дуж од подножја вертикале до линије хоризонта, а хипотенуза дуж од линије хоризонта до мог балона. Али, моја је висина била ништавна у поређењу с видним пољем; другим речима, основица и хипотенуза замишљеног правоуглог троугла биле су толико велике у поређењу с вертикалном катетом да сам их могао сматрати скоро паралелним. Зато свака тачка која се налази управо под летачем увек изгледа да лежи испод нивоа хоризонта. Отуда утисак удубљености. И то ће се продужити све док висина успона не постане толико велика да основица троугла и хипотенуза престану да изгледају паралелне“.

Као допуну овог објашњења додаћемо следећи пример. Замислите прав низ телеграфских стубова (сл. 88). За око које се налази у тачки *A*, на нивоу подножја стубова, низ изгледа као на средњој слици. Али, за око у тачки *B*, на нивоу врхова стубова, низ изгледа као на доњој слици, тј. оку се чини као да се идући ка хоризонту подиже.

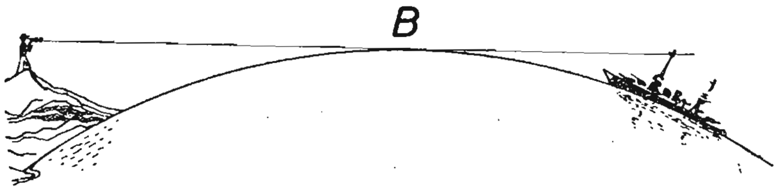


Сл. 88. Шта види око посматрајући низ телеграфских стубова

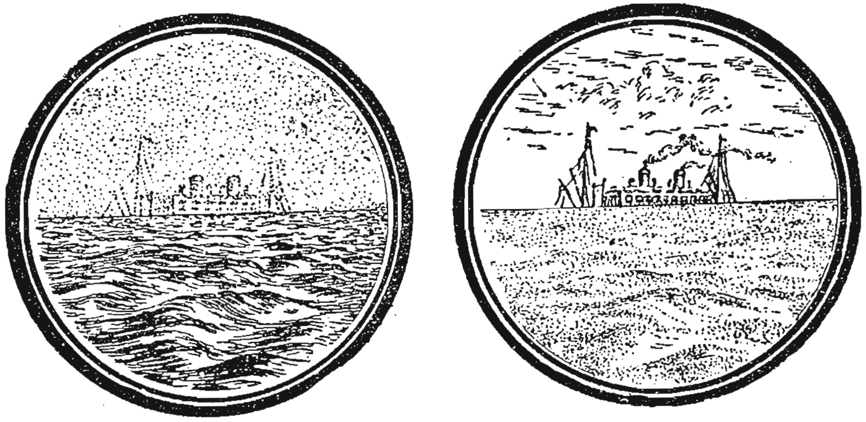
БРОД НА ХОРИЗОНТУ

Када са обале мора или великог језера посматрамо брод који се појављује на хоризонту, чини нам се да брод видимо не у оној тачки (сл. 89) у којој се он стварно налази већ много ближе, у тачки *B*, где наш видни зрак клизи по испупченој површини мора. Ако посматрамо голим оком, тешко се можемо отети утиску да се брод налази у тачки *B*, а не даље иза хоризонта (упоредите са оним што је речено у глави IV о утицају узвишице на процену растојања).

Међутим, дурбином се тај подбачај у оцени удаљености брода много јасније запажа. Дурбином не видимо подједнако јасно и блиске и удаљене предмете; дурбином подешеним за даљину блиске предмете видимо расплинуто, и обратно, дурбином подешеним за близину удаљене предмете видимо у магли. Стога, ако управимо дурбин (који довољно увећава) ка пучини и подесимо га тако да јасно видимо површину воде, брод ће се видети у расплинутим контурама, откривајући на тај начин своју већу удаљеност од посматрача (сл. 90 лево). Напротив, ако дурбин подесимо тако да се оштро виде обриси брода упола скривеног иза хоризонта, запазићемо да је код хоризонта површина воде изгубила своју пређашњу јасност и да нам се оцртава као у магли (сл. 90 десно).



Сл. 89. Брод иза хоризонта

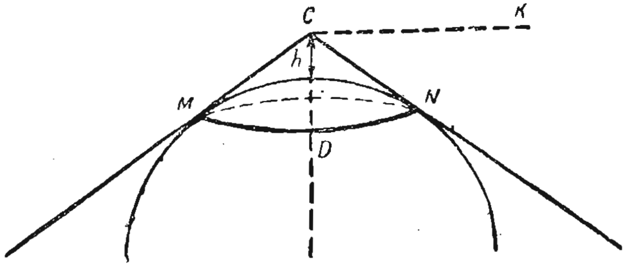


Сл. 90. Брод иза хоризонта посматран дурбином

УДАЉЕНОСТ ХОРИЗОНТА

А на коликој се даљини од посматрача налази линија хоризонта? Другим речима, колики је полупречник оног круга на равном земљишту у чијем се центру налазимо? Како се израчунава удаљеност линије хоризонта ако се зна висина посматрачевог ока над Земљом?

Тај задатак се своди на израчунавање дужине отсечка CN (сл. 91) тангенте повучене из посматрачевог ока на Земљину површину. Квадрат тог отсечка једнак је, као што знамо из геометрије, производу спољашњег отсечка h сечице и целе дужине те сечице, тј. $h + 2R$, при чему је R полупречник Земљине лопте. Како је висина посматрачевог ока над Земљом обично веома мала у поређењу с пречником Земљине лопте и, например, при највишем успону авиона она износи око 0,001 пречника, то можемо узети да је $2R + h$ једнако $2R$ и тада ће се формула упростити:



Сл. 91. Уз задатак о удаљености хоризонта

$$CN^2 = h \cdot 2R.$$

То значи да се удаљеност хоризонта од посматрача може израчунати по веома простој формули:

$$\text{удаљеност хоризонта} = \sqrt{2Rh},$$

где је R полупречник Земље (око 6400 km*), а h висина посматрачевог ока над површином Земље.

---

*) Тачније 6371 km.

Како је $\sqrt{6400} = 80$, то се горња формула може написати у облику:

$$\text{удаљеност хоризонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h},$$

где h мора бити изражено у километрима.

То је чисто геометриски, упрошћени рачун. Ако пак желимо да га прецизирамо узимајући у обзир физичке факторе који утичу на удаљеност линије хоризонта, тада треба да имамо у виду такозвану „атмосферску рефракцију“. Рефракција, тј. преламање светлосних зракова у атмосфери, повећава удаљеност хоризонта отприлике за 1/15 израчунате удаљености (за 6%). Тај број — 6% — је само просек. Удаљеност хоризонта се унеколико увећава или умањује зависно од многих услова, и то се она

увећава	умањује
при високом атмосферском притиску,	при ниском атмосферском притиску
близу Земљине површине,	на висини,
по хладном времену,	по топлом времену,
изјутра и увече,	преко дана,
по влажном времену,	по сувом времену,
над морем;	над копном.

Задатак

Колико далеко унаоколо види човек који стоји на равном земљишту?

Решење

Сматрајући да се око одраслог човека налази на 1,65 m или на 0,0016 km над тлом, имамо:

$$\text{удаљеност хоризонта} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ km}.$$

Ваздушни омотач Земље, као што је горе речено, прелама путању светлосних зракова, услед чега се хоризонт удаљује просечно за 6% оног растојања које се добија по формули. Да бисмо урачунали ту поправку, треба да 4,52 km помножимо са 1,06; добијамо:

$$4{,}52 \cdot 1{,}06 \approx 4{,}8 \text{ km}.$$

Дакле, човек средњег раста види у равници не даље од 4,8 km. Пречник видљивог круга је свега 9,6 km, а површина тог круга је 72 km². То је много мање него што обично мисле људи који описују огромна пространства степа која се могу обухватити погледом.

Задатак

Колико далеко види на мору човек који седи у чамцу?

Решење

Ако узмемо да се око човека који седи у чамцу налази на 1 m (или на 0,001 km) изнад површине воде, тада удаљеност хоризонта износи

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ km},$$

или, кад се узме у обзир средња атмосферска рефракција, око 3,8 km. Од удаљенијих предмета виде се само њихови горњи делови; њихове основе су сакривене испод хоризонта.

Ако је положај ока још нижи, хоризонт се сужава; например, при спуштању за 0,5 m сужава се до на 2,5 km. Напротив, ако се посматра са увис истакнутих тачака (с катарке), удаљеност хоризонта расте; например, кад се висина повећа за 4 m, расте до 7 km.

Задатак

До које се даљине унаоколо простирала Земља пред очима ваздухопловаца у гондоли стратостата СОАХ-1 кад се овај налазио на највишој тачки свог успона (тј. на висини од 22 km)?

Решење

Како се балон налазио на висини од 22 km, то је, за толику висину, удаљеност хоризонта једнака:

$$113\sqrt{22} = 530 \text{ km},$$

а кад се урачуна рефракција, она је 560 km.

Задатак

На коју висину треба да се попне летач да би видео на 50 km унаоколо?

Решење

Из формуле за удаљеност хоризонта имамо у датом случају једначину:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

одакле је

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0{,}2 \text{ km}.$$

Према томе, довољно је попети се свега на 200 m висине.

Да бисмо урачунали поправку, одузмимо од 50 km 6% те дужине; добићемо 47 km. Даље је $h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}17$ km, тј. 170 m (уместо 200 m).

На највишој тачки Лењинових Гора крај Москве подигнута је зграда Универзитета на тридесет два спрата — највећа универзитетска и научна зграда на свету. Висина њеног последњег, тридесет другог спрата изнад реке Москве је 242 m. Према томе, са прозора последњег спрата зграде Универзитета открива се панорама од преко 55 km у пречнику.

ГОГОЉЕВА КУЛА

Задатак

Интересантно је знати шта се увећава брже: висина успона или удаљеност хоризонта. Многи мисле да, кад се посматрач пење, хоризонт расте необично брзо. Тако је, између осталих, мислио и Гогољ кад је у чланку „О архитектури нашег доба" писао:

„Огромне, колосалне куле неопходне су у граду... Код нас се обично ограничавају на висину која омогућује да се види само град, док је за престоницу неопходно да се види бар на сто педесет врста*) унаоколо, а за то треба још само један или два спрата

---

*) 1 врста има 1,0668 km, а 150 врста = 160 km.

више и све ће се изменити. Видик ће се, сразмерно повећавању висине зграда, проширивати необичном брзином“.

Да ли је и у стварности тако?

Решење

Довољно је погледати формулу

$$\text{удаљеност хоризонта} = \sqrt{2Rh}$$

да би одмах постала јасна нетачност тврђења да, кад се посматрач пење, видик веома брзо расте. Напротив, удаљеност хоризонта расте спорије него висина стајалишта: она је пропорционална квадратном корену висине. Када се висина посматрача над тлом увећа 100 пута, хоризонт се одмиче само 10 пута даље, а кад висина стајалишта постане 1000 пута већа, хоризонт се помера само тридесет један пут даље. Зато је погрешно тврдити да би требало само ,,један или два спрата више, и све ће се изменити“. Ако се на осмоспратној згради саграде још два спрата, удаљеност хоризонта порашће $\sqrt{10/8}$ пута, тј. 1,1 пут — укупно за 10%. А то се повећање једва запажа.

Што се тиче идеје о изградњи куле с које би се могло видети „бар на 150 врста (тј. на 160 km) унаоколо“, она је потпуно нереална. Гогољ, наравно, није ни слутио да би таква кула морала имати огромну висину.

Заиста, из једначине

$$160 = \sqrt{2Rh}$$

имамо:

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25600}{12800} = 2 \text{ km}.$$

То је пак висина велике планине. Највиша досад пројектована зграда у Москви — административна зграда на 32 спрата, чији ће позлаћени издужени врх, по пројекту, допирати до висине од 280 m изнад тла — седам пута је нижа од торњева које је замислио Гогољ.

ПУШКИНОВ БРЕГ

Сличну грешку чини и Пушкин кад говори у „Шкртом витезу“ о далеком хоризонту који се отвара с врха „гордог брега“:

„И цар је с висине могао весело гледати
И долину, белим шаторима покривену,
И море којим галије броде“...

Ми смо већ видели колико је била скромна висина тог „гордог“ брега: чак ни огромна Атилина војска не би на тај начин подигла узвишицу вишу од 5 m. Сада можемо завршити рачун одређујући за колико је тај брег проширио хоризонт посматрача када се овај попео на његов врх.

У том случају би се око посматрача налазило на $5 + 1{,}5$, тј. на 6,5 m изнад тла и, према томе, удаљеност хоризонта би била једнака $\sqrt{2 \cdot 6400 \cdot 0{,}0065} \approx 9$ km. То је свега за 4 km више од оног што се може видети стојећи на равном земљишту.

ГДЕ СЕ САСТАЈУ ШИНЕ

Задатак

Разуме се, ви сте не једанпут приметили како се, у даљини, размак између шина све више сужава. Али, да ли вам се десило да видите ту тачку у којој се обе шине најзад састају? Да ли се та тачка може видети? — Сада имате довољно знања да тај задатак решите.

Решење

Сетимо се да се за нормално око сваки предмет претвара у тачку онда кад се види под углом од 1′, тј. кад је од посматрача удаљен за 3400 својих пречника. Ширина колосека је 1,52 m. То значи да размак између шина треба да се сузи у тачку на отстојању од $1{,}52 \cdot 3400 = 5{,}2$ km. Дакле, кад бисмо могли да оком пратимо шине до удаљености од 5,2 km, видели бисмо како се оне састају у једној тачки*). Али, на равном земљишту хоризонт се налази на удаљености мањој од 5,2 km, наиме на удаљености од свега 4,8 km. Према томе, човек с нормалном видом који стоји на равном земљишту не може видети тачку у којој се шине састају. Он би ту тачку могао видети само под једним од следећих услова:

---

*) На нашим пругама је ширина нормалног колосека 1,435 m. У том случају бисмо, под истим условима као горе, видели да се шине састају у једној тачки удаљеној 4,879 km. — Прим. прев.

1) ако му је оштрина вида појачана тако да се за њега предмети сливају у тачку кад их види под извесним углом већим од 1′;

2) ако железнички пут није хоризонталан;

3) ако се посматрачево око налази над земљом на висини од

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12800} = 0{,}0021 \text{ km},$$

тј. 210 cm.

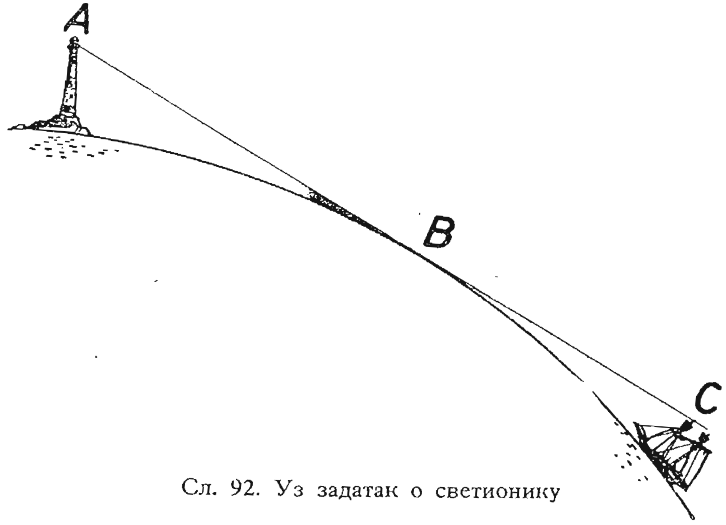
ЗАДАЦИ О СВЕТИОНИКУ

Задатак

На обали се налази светионик чији се врх диже 40 m изнад површине воде. С коликог се отстојања светионик види са брода ако се морнар-осматрач налази на катарци на висини од 10 m изнад површине воде?

Решење

Из сл. 92 види се да се тај задатак своди на израчунавање растојања *AC* које је збир растојања *AB* и *BC*. *AB* је удаљеност хоризонта од светионика високог 40 m над морем, а *BC* је удаљеност хоризонта од морнара-осматрача на висини од 10 m. Према томе, тражено растојање је:



Сл. 92. Уз задатак о светионику

$$113\sqrt{0{,}04} + 113\sqrt{0{,}01} = 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 34, \text{ дакле } 34 \text{ km}.$$

Задатак

Колики део светионика види осматрач са отстојања од 30 m?

Решење

Из сл. 92 јасан је ток решења задатка: треба, пре свега, израчунати дужину *BC*, затим нађено растојање одузети од растојања *AC*, тј. од 30 km, да би се добило растојање *AB*. Кад знамо *AB*, израчунавамо висину с које је удаљеност хоризонта једнака *AB*. Ево целог рачуна:

$$BC = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3,$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7 \text{ km},$$

$$\text{висина} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12800} = 0{,}027 \text{ km}.$$

Према томе, са отстојања од 30 km не види се 27 m светионика; остаје видљиво само 13 m.

МУЊА

Задатак

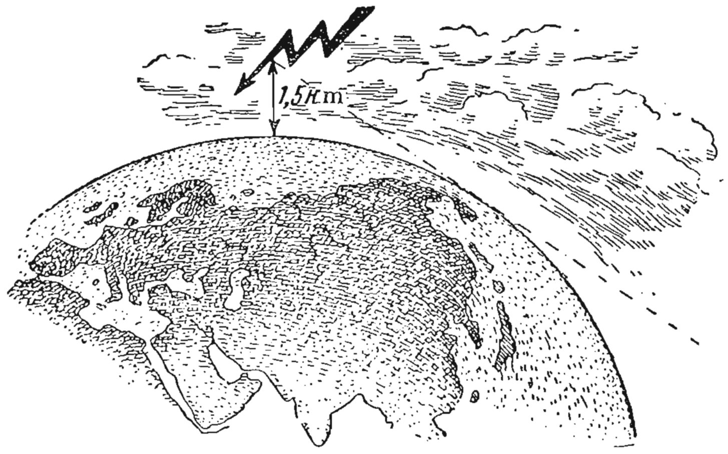
Над вашом главом је на висини од 1,5 km блеснула муња. На коликој се даљини од места где се налазите та муња још може видети?

Решење

Треба израчунати (сл. 93) удаљеност хоризонта за висину од 1,5 km. Она износи:

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ km}.$$

То значи да је, ако је земљиште било равно, муњу могао видети човек чије се око налазило на нивоу тла на отстојању од 138 km (а са поправком од 6% — на отстојању од 146 km). Из тачака удаљених 146 km од вашег стајалишта муња би се видела на самом хоризонту, а како се на толиком отстојању звук не чује, то се она из тих тачака само види као блесак, светлац — муња без грома.



Сл. 93. Уз задатак о муњи

ЈЕДРИЛИЦА

Задатак

Стојите на обали језера или мора, крај саме воде, и посматрате једрилицу која се од вас удаљује. Познато вам је да је висина јарбола над водом 6 m. На коликом ће отстојању од вас једрилица почети да се привидно спушта у воду (тј. испод хоризонта) и на коликом ће вам се отстојању она потпуно изгубити из вида?

Решење

Једрилица ће почети да се скрива испод хоризонта (в. сл. 92) у тачки B — на растојању једнаком удаљености хоризонта за човека средњег раста, тј. 4,8 km. Потпуно ће се сакрити „испод хоризонта" у тачки чије је отстојање од B једнако

$$113\sqrt{0{,}06} = 8{,}7 \text{ km}.$$

Према томе, једрилица ће се сакрити „испод хоризонта" у тачки чије отстојање од обале износи

$$4{,}8 + 8{,}7 = 13{,}5 \text{ km}.$$

ХОРИЗОНТ НА МЕСЕЦУ

Задатак

Досад су се сва наша израчунавања односила на Земљину лопту. А како би се изменила удаљеност хоризонта ако би се посматрач нашао на некој другој планети, например на једној од равница на Месецу?

Решење

Задатак се решава по истој формули; удаљеност је једнака $\sqrt{2Rh}$, али у овом случају $2R$ треба заменити не пречником Земљине лопте већ пречником Месеца. Како је пречник Месеца једнак 3500 km, то за око на 1,5 m изнад тла имамо:

$$\text{удаљеност хоризонта} = \sqrt{3500 \cdot 0{,}0015} = 2{,}3 \text{ km}.$$

На Месечевој равници ми бисмо видели свега на 2,3 km у даљину.

У МЕСЕЧЕВОМ КРАТЕРУ

Задатак

Ако посматрамо Месец чак и мањим дурбином, видећемо на њему много такозваних прстенастих планинских венаца, обликâ којима нема сличних на Земљи. Један од највећих прстенастих планинских венаца, Коперников кратер, има у пречнику споља 124 km, а унутра 90 km. Највише тачке прстенастог бедема уздижу се над тлом унутрашње котлине на 1500 m висине. Ако бисте се ви нашли у средини унутрашње котлине, да ли бисте одатле видели тај прстенасти гребен?

Решење

Да бисмо одговорили на то питање треба да израчунамо удаљеност хоризонта за гребен бедема, тј. за висину од 1,5 km. Она је на Месецу једнака $\sqrt{3500 \cdot 1{,}5} = 73$ km. Пошто додамо удаљеност хоризонта за човека средњег раста, добићемо отстојање на коме би се прстенасти гребен скривао под хоризонтом посматрача:

$$73 + 2{,}3 = 75{,}3, \text{ тј. око } 75 \text{ km}.$$

Како је пак центар котлине удаљен од њеног руба 45 km, то је потпуно могућно видети тај бедем из центра котлине*).

НА ЈУПИТЕРУ

Задатак

Колика је удаљеност хоризонта на Јупитеру, чији је пречник 11 пута већи од Земљиног?

Решење

Ако је Јупитер покривен чврстом кором и има равну површину, човек пренет на његову површину морао би видети на даљину од

$$\sqrt{11 \cdot 12800 \cdot 0{,}0016} = 14{,}4, \text{ тј. око } 14 \text{ km}.$$

ЗА САМОСТАЛНО ВЕЖБАЊЕ**)

Израчунати удаљеност хоризонта за перископ подморнице који се над мирном површином мора уздиже 30 cm.

Колико се високо мора дићи летач над Ладошким Језером да би у исти мах видео обе обале које раздваја растојање од 210 km?

На коју висину између Лењинграда и Москве треба да се дигне летач да би могао видети оба града одједанпут? Растојање Лењинград—Москва износи 640 km.

Колико се високо мора дићи летач да би у исти мах могао видети обе обале Скадарског Језера, које раздваја растојање од 45 km?

На коју висину између Београда и Загреба треба да се дигне летач да би могао видети оба града истовремено? Растојање Београд—Загреб износи 385 km.

---

*) В. књигу истог аутора „Занимљива астрономија“ (чланак „Предели на Месецу“).

**) Последња два задатка додао је преводилац. — Прим. прев.

ГЛАВА СЕДМА

ГЕОМЕТРИЈА РОБИНСОНА

(Неколико страница из Жила Верна)

ГЕОМЕТРИЈА ЗВЕЗДАНОГ НЕБА

> „Открио се бездан звезда пун;
> Звездама краја нема, ни бездану дна“.
> *Ломоносов*

Било је време кад се аутор ове књиге припремао за не баш обичан позив: за каријеру човека који је претрпео бродолом. Краће речено, намеравао сам да постанем Робинсон. Да се то било догодило, ова би књига могла бити написана интересантније него сада, или би, можда, остала и ненаписана. Нисам успео да постанем Робинсон, и сада за тим не жалим. Али, у детињству сам ватрено веровао у свој будући позив Робинсона и за то сам се најозбиљније припремао. Јер, чак и један осредњи Робинсон треба да има доста знања и умења која за људе других „професија“ нису обавезна.

Шта би, пре свега, требало да учини човек кога је море, после бродолома, избацило на пусто острво? Разуме се, требало би да одреди географски положај свог принудног боравишта — географску ширину и дужину. О томе се, нажалост, исувише кратко говори у већини историја о старим и новим Робинсонима. У потпуном издању оригиналног „Робинсона Крусо“ наћи ћете о томе само један ред, па и тај у заградама:

„На ширини на којој се налази моје острво (тј. по моме рачуну на 9°22′ северно од екватора)...“

Ова досадна краткоћа доводила ме је до очајања кад сам прикупљао знања неопходна за онакву своју будућност каквом сам је замишљао. Већ сам био готов да се и одрекнем каријере јединог становника неког пустог острва, кад ми је „Тајанствено острво“ Жила Верна открило тајну.

Ја своје читаоце не спремам за Робинсоне, али ипак сматрам да није излишно да се овде зауставимо на најпростијим методама одређивања географске ширине. То знање може затребати не само становницима непознатих острва. Код нас има толико насељених места која нису обележена на картама (а зар је детаљна карта увек при руци?), тако да се пред многе од мојих читалаца може поставити задатак да одреде географску ширину. Истина, ми сада не можемо, као некад Љермонтов, тврдити да чак ни

„Тамбов на општој*) карти
Није увек кружићем означен“;

али много мањих места и колхоза није означено на општим картама још ни данас. Човек не треба да се упушта у авантуре на мору да би се нашао у улози Робинзона, који први одређује географски положај свог места становања.

Ствар је у основи једноставна. Посматрајући небо у јасној звезданој ноћи запазићете да звезде лагано описују на небеском своду нагнуте кругове, као да се цела купола неба непрекидно обрће око косо утврђене невидљиве осе. Уствари пак, наравно, ви сами, обрћући се заједно са Земљом, описујете у обратном смислу кругове око њене осе. Једина тачка звездане куполе на нашој северној хемисфери која остаје непомична јесте она у којој у мислима продужена Земљина оса продире небески свод. Тај Северни пол света налази се недалеко од сјајне звезде на врху репа Малог Медведа**) — Северњаче. Кад ову звезду нађемо на нашем северном небу, ми смо самим тим нашли и положај Северног пола света. Северњачу није тешко наћи ако се најпре одреди положај свима познатог сазвежђа Великог Медведа (Великих Кола). Повуцимо праву кроз његове крајње звезде***), онако како је показано на сл. 94; кад растојање између тих звезда продужите отприлике за дужину целог сазвежђа, наићи ћете на Северњачу.

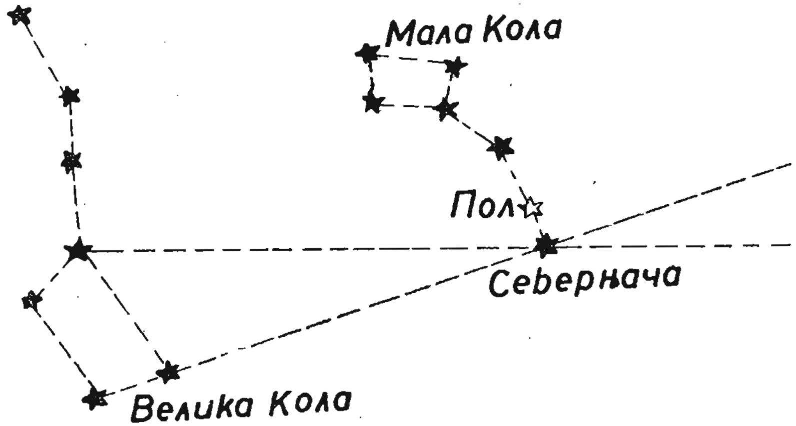
---

*) Мисли се на географску карту целе државе. — Прим. прев.

**) Иако медвед нема реп, људска машта га је дала медведима на небеском своду — Малом и Великом Медведу. Уосталом, народна прича „Како је медвед изгубио реп“, која се среће у предању многих народа (код нас је забележена у Вуковим „Српским народним приповијеткама“), указује на старо веровање да је медвед некад имао реп, чиме се и може тумачити име поменутих сазвежђа. — Прим. прев.

***) Тј. кроз задње „точкове“ Великих Кола. — Прим. прев.

То је једна од оних тачака на небеској сфери која ће нам бити потребна за одређивање географске ширине. Друга тачка, зенит, јесте она тачка која се на небу налази вертикално над вашом главом. Другим речима, зенит је она тачка у којој у мислима продужен полупречник Земље повучен до места на коме стојите продире небеску сферу. Небески лук између вашег зенита и Северњаче има исто толико степени колико их има и лук од вашег стајалишта до Северног пола. Ако је ваш зенит удаљен од пола 30⁰ (то је т.зв. „зенитно отстојање“), тада сте ви удаљени од Земљиног Северног пола 30⁰, а то значи да сте удаљени од екватора 60⁰; другим речима, ви се налазите на шездесетој паралели.



Сл. 94. Тражење звезде Северњаче

Према томе, да бисмо нашли ширину неког места, треба само да измеримо у степенима (и деловима степена) зенитно отстојање Северњаче; после тога остаје да се та величина одузме од 90⁰ — и географска ширина је одређена. У пракси се може поступати и другачије. Како лук између зенита и хоризонта има 90⁰, то ћемо, кад од 90⁰ одузмемо зенитно отстојање Северњаче, добити управо дужину небеског лука од Северњаче до хоризонта; другачије речено, добићемо т.зв. висину Северњаче над хоризонтом. Зато је географска ширина маког места једнака висини Северњаче над хоризонтом тог места.

Сад сте разумели како треба да одредите географску ширину. Сачекавши да ноћ буде ведра, потражићете на небу Северњачу и измерићете њену угловну висину (тј. висину у степенима) над хоризонтом; резултат ће вам одмах дати тражену ширину вашег места. Ако желите да будете тачни, треба да узмете у обзир то да се Северњача не подудара са Северним полом света, већ је од овог удаљена за 1,25⁰. Зато Северњача не остаје потпуно непокретна: она описује око непокретног небеског пола мали круг који лежи час више, час ниже, час лево, час десно од пола за 1,25⁰. Пошто одредите висину Северњаче у њеном највишем и најнижем положају (астроном би рекао: у тренутку њене горње и доње кулминације), наћи ћете аритметичку средину тих двеју висина. То је права висина пола и, према томе, тражена ширина места.

Али, ако је тако, онда нема потребе да бирамо неизоставно Северњачу; можемо да се зауставимо на било којој звезди која не залази испод хоризонта и да, пошто измеримо њену висину у оба крајња положаја над хоризонтом, нађемо аритметичку средину тих висина. Добићемо висину пола над хоризонтом, тј. ширину места на коме се налазимо. Но, притом је неопходно умети погодити тренутак највишег и тренутак најнижег положаја уочене звезде, чиме се посао нешто компликује; осим тога се и иначе оба положаја не могу запазити у току исте ноћи. Ето зашто је у првим приближним мерењима боље користити се Северњачом занемарујући притом њено мало отстојање од небеског Северног пола.

Досад смо замишљали да се налазимо на северној Земљиној полулопти. Како бисте поступили кад бисте се нашли на јужној полулопти? Исто тако, али само с том разликом што се тада одређује висина не Северног већ Јужног пола света. Нажалост, у близини тог пола нема тако сјајне звезде као што је Северњача на нашој небеској хемисфери. Чувени Јужни Крст блиста прилично далеко од Јужног пола и, ако желимо да се за одређивање географске ширине користимо звездама тог сазвежђа, мораћемо узети аритметичку средину висине највишег и висине најнижег положаја неке његове звезде.

Јунаци романа Жила Верна су се приликом одређивања ширине свог „тајанственог острва“ користили управо тим дивним сазвежђем јужног неба.

Поучно је поново прочитати оно место у роману где се описује тај поступак. Узгред ћемо сазнати како су нови Робинсони решили свој задатак иако нису имали никаквих справа за мерење углова.

ГЕОГРАФСКА ШИРИНА „ТАЈАНСТВЕНОГ ОСТРВА“

„Било је 8 часова увече. Месец још није био изашао, али су се на хоризонту већ сребрили нежни бледи одблесци који би се могли назвати Месечевом зором. У зениту су блистала сазвежђа јужне хемисфере и међу њима сазвежђе Јужног Крста. Инжењер Смит је неко време посматрао то сазвежђе.

— Херберте, — рече он после кратког размишљања, — је ли данас 15 април?

— Јесте, — одговори младић.

— Ако се не варам, сутра је један од она четири дана у години када је право време једнако средњем времену: сутра Сунце пролази кроз меридијан тачно у подне по нашем часовнику*). Ако буде ведар дан, моћи ћу да приближно одредим географску дужину острва.

— Без справа?

— Да. Вече је ведро, и зато ћу вечерас покушати да одредим географску ширину нашег острва мерећи висину звезда Јужног Крста, тј. висину Јужног пола над хоризонтом. А сутра ћу у подне одредити и дужину острва.

Кад би инжењер имао секстант, справу помоћу које се тачно мере угловна растојања предмета на основу одбијања светлосних зракова, тај задатак не би био нимало тежак. Пошто би те вечери одредио висину пола а сутрадан тренутак проласка Сунца кроз меридијан, добио би географске координате острва: ширину и дужину. Али, он није имао секстант и требало је да га нечим замени.

Инжењер је ушао у пећину. При светлости ватре на огњишту отесао је две правоугаоне дашчице које је на једном крају спојио као шестар тако да су се његови краци могли отварати и затварати. Уместо завртња послужио му је јак багремов трн који је нашао међу суварцима крај огњишта.

Када је справа била готова, инжењер се вратио на брдо. Требало је да измери висину пола над јасно оцртаним хоризонтом, тј. над нивоом мора. Да би могао посматрати, он је отишао на висораван Далеког Изгледа, — притом је морао узети у обзир и

---

*) Наш часовник не иде строго сагласно са сунчаним часовником: између „правог сунчаног времена“ и оног „средњег времена“ које показује тачан часовник постоји разилажење које је једнако нули само четири пута годишње: око 16 априла, 14 јуна, 1 септембра и 24 децембра. (Види „Занимљиву астрономију“ Ј. И. Перељмана.)

висину саме висоравни над морем. Ово последње мерење се може извршити другог дана користећи се елементарном геометријом.

Хоризонт обасјан одоздо Месечевим зрацима (тј. зрацима који су се од Месеца одбијали — прим. прев.) оштро се оцртавао пружајући све повољне услове за посматрање. Сазвежђе Јужни Крст блистало је на небу у изврнутом положају: звезда Алфа, која чини његову основу, најближа је Јужном полу света.

Ово сазвежђе није тако близу Јужног пола као што је Северњача близу Северног. Звезда Алфа удаљена је од пола 27^0; инжењер је то знао и намеравао је да то растојање унесе у свој рачун. Он је сачекао тренутак проласка звезде кроз меридијан — то олакшава мерење.

Смит је један крак свог дрвеног шестара управио хоризонтално а други према звезди Алфа Јужног Крста; отвор тако образованог угла дао му је угловну висину те звезде над хоризонтом. Да би тај размак добро учврстио, он је помоћу багремовог трња за обе дашчице прикуцао трећу, попречну, тако да је та фигура задржавала неизмењен облик.

Остало је још само да се одреди величина добијеног угла с обзиром на надморску висину стајалишта, тј. узимајући у рачун спуштање хоризонта, за шта је било неопходно измерити висину стене*). Величина угла даће висину пола над хоризонтом звезде Алфа Јужног Крста и, према томе, висину, тј. географску ширину острва, јер је ширина сваког места на Земљиној лопти једнака висини пола над хоризонтом тог места. Тај рачун је намеравао да остави за сутра".

Како је извршено мерење висине стене, мојим је читаоцима познато из одломка наведеног у првој глави ове књиге. Пошто овде изоставимо то место романа, пратићемо даљи инжењеров рад:

„Инжењер је узео шестар који је уочи тог дана направио и помоћу кога је одредио угловно растојање између звезде Алфа Јужног Крста и хоризонта. Он је пажљиво измерио величину тог угла помоћу круга подељеног на 360 једнаких делова и нашао је да угао има 10^0. Отуда је за висину пола над хоризонтом, — пошто

---

*) Како се приликом тог мерења инжењер налазио не на нивоу мора него на високој стени, права повучена од посматрачева ока ка линији хоризонта није се строго поклапала са нормалом Земљиног полупречника, већ је са овим образовала известан угао. Међутим, тај угао је тако мали да се у датом случају могао занемарити (за висину од 100 m он нема ни $0{,}33^0$); зато Смит, тачније Жил Верн, није имао потребе да рачун компликује уношењем те поправке. (Ј. П.)

је углу од 10^0 додао угао од 27^0 између уочене звезде и пола, а висину стене са које је мерио свео на ниво мора, — добио резултат 37^0. Смит је закључио да се Линколново Острво налази на 37^0 јужне ширине, између тридесет пете и четрдесете паралеле.

Остало је још да се нађе географска дужина острва. Инжењер је рачунао да је одреди тог истог дана у подне, при проласку Сунца кроз меридијан острва".

ОДРЕЂИВАЊЕ ГЕОГРАФСКЕ ДУЖИНЕ

„Али, како ће инжењер одредити тренутак проласка Сунца кроз меридијан острва кад за то нема никаквих справа? То питање је Херберта много интересовало.

Инжењер је припремио све што му је било потребно за астрономско посматрање. Он је на пешчаној обали изабрао чистину коју је осека поравнила. Мотка дугачка шест стопа, пободена на том месту, била је управна на зараван.

Херберт је тада схватио на који је начин инжењер намеравао да одреди тренутак проласка Сунца кроз меридијан острва или, другим речима, да одреди месно подне. Он је хтео да то одреди на основу сенке коју мотка баца на песак. Тај начин, наравно, није потпуно тачан, али, кад се нема никаквих справа, он ипак даје доста задовољавајући резултат.

Тренутак кад сенка мотке буде била најкраћа биће подне. Довољно је пажљиво пратити кретање краја сенке да би се запазио тренутак кад сенка, пошто престане да се скраћује, почне опет да расте. Сенка у том случају као да игра улогу казаљке на часовнику.

Када је, по инжењеровом рачуну, наступило време посматрања, он је клекнуо и побадајући у песак кочиће почео да бележи постепено скраћивање моткине сенке.

Новинар (један од инжењерових сапутника) је држао у руци свој хронометар и био спреман да упамти онај тренутак кад сенка постане најкраћа. Како је инжењер то посматрање вршио 16 априла, тј. једног од оних дана кад се право подне поклапа са средњим, то ће тренутак који новинар буде очитао на свом хронометру бити утврђен по времену меридијана Вашингтона (места из кога су путници пошли).

Сунце се полако пело. Сенка се постепено скраћивала. Опазивши, најзад, да је она почела да расте, инжењер упита:

— Колико је часова?

— Пет часова и један минут, — одговори новинар.

Посматрање је било завршено. Остало је само да се изведе једноставан рачун.

Посматрањем је установљено да временска разлика између меридијана Вашингтона и меридијана Линколновог Острва износи округло 5 часова. То значи да, кад је на острву подне, у Вашингтону је већ 5 часова по подне. Сунце у свом привидном дневном кретању око Земљине лопте прелази 1^0 за 4 минута, а 15^0 за 1 час, а кад се 15^0 помножи са 5 (број часова), добија се 75^0.

Вашингтон лежи на меридијану $77^03'1''$ западно од Гриничког меридијана, који Американци, као и Енглези, узимају за почетни. То значи да се острво налази отприлике на 152^0 западне дужине.

Узимајући у обзир недовољну тачност посматрања, може се тврдити да се острво налази између 150 и 155 меридијана западно од Гринича".

Напоменимо на крају да има неколико разних начина одређивања географске дужине; начин који су применили јунаци Жила Верна само је један од њих (познат под називом „начин превођења хронометара"). Исто тако постоје и други начини одређивања географске ширине, и то тачнији од оног који је овде описан (и који је приликом пловидбе неподесан).

ДРУГИ ДЕО

ИЗМЕЂУ ЗБИЉЕ И ШАЛЕ У ГЕОМЕТРИЈИ

> Предмет математике је толико озбиљан да је корисно не пропуштати ниједну прилику да се он учини мало забавнијим.
>
> *Паскал*

ГЛАВА ОСМА

ГЕОМЕТРИЈА У МРАКУ

НА ДНУ БРОДА

Са слободног ваздуха над пољем и морем пренесимо се у тескобни и мрачни труп старинског брода, где је млади јунак из једног од Мајн-Ридових романа успешно решио један геометриски задатак под таквим околностима под којима се вероватно ниједном од мојих читалаца није десило да се бави математиком. У роману „Дечак — поморац" (или „На дну брода") Мајн-Рид прича о једном младом љубитељу поморских пустоловина који се, немајући средстава да плати пут, увукао у труп једног непознатог брода и ту се неочекивано нашао затворен за све време пловидбе. Провлачећи се кроз бродски пртљаг који је испуњавао његову тамницу он је наишао на сандук с двопеком и бачву воде. Разборити дечак је схватио да с том ограниченом залихом хране и воде треба бити што штедљивији и стога је одлучио да је издели на дневне оброке.

Пребројати двопеке — то није било тешко, али како одредити дневну количину воде кад се не зна укупна количина воде? Ето, то је тај задатак пред којим се нашао млади Мајн-Ридов јунак. Да видимо како га је он решио.

МЕРЕЊЕ ЗАПРЕМИНЕ БАЧВЕ

„Било ми је неопходно да утврдим дневни оброк воде. За то је требало да сазнам колико воде има у бачви, а затим да то поделим на порције.

На срећу, у сеоској школи нам је учитељ на часовима аритметике говорио о неким основним стварима из геометрије: ја сам понешто знао о коцки, пирамиди, ваљку, лопти; знао сам и то да се бачва може схватити као две зарубљене купе састављене својим основама (двојна зарубљена купа).

Да бих одредио запремину своје бачве требало је да знам њену висину (или, заправо, половину те висине), затим обим једног данцета и обим њеног средњег пресека, тј. најширег дела бачве.

Преостало ми је само да измерим те величине — али, у томе је и била сва тешкоћа.

Како да то измерим?

Није било тешко наћи висину бачве; она је била преда мном; што се тиче кругова, до њих нисам могао доћи. Био сам сувише мали да бих могао дохватити до врха; осим тога, сметали су ми и сандуци који су стајали са стране.

Била је још једна тешкоћа: нисам имао ни метра, ни канапа којима бих се при мерењу могао служити; па како могу одредити те величине кад немам чиме да их мерим? — Ја сам ипак одлучио да свој план не одбацим док о њему свестрано не промислим.

ЛЕЊИР СА ДУЖИНСКОМ ПОДЕЛОМ

(Мајн-Ридов задатак)

Размишљајући о бачви, с чврстом одлуком да измерим њену запремину, ја сам изненада открио оно што ми је недостајало: помоћи ће ми прут толико дугачак да може проћи кроз бачву на месту где је она најшира. Ако завучем прут у бачву тако да он упре у њен супротни зид, дознаћу дужину њеног пречника. Остаће још само да дужину прута помножим са 3 па да добијем обим круга. То није строго тачно, али је за моје мерење потпуно довољно. Како се пак отвор који сам дан раније био начинио на бачви налазио на њеном најширем делу, то ћу, кад у њ завучем прут, наћи онај пречник који ми је потребан.

Али, где да нађем прут? — То није било тешко. Одлучио сам да се користим даском од сандука и сместа сам се латио посла. Истина, даска је имала свега 60 cm дужине, а бачва је била више него двапут шира. Али, то није могло задати неку тешкоћу; требало је само припремити три штапића и надовезати их један на други тако да се добије довољно дугачак прут.

Пошто сам даску расекао уздуж, начинио сам три добро издељана прута. Чиме да их привежем један за други? Послужио сам се везицама са својих ципела, које су биле дугачке скоро читав метар. Кад сам надовезао прутове један на други, добио сам један прут дугачак скоро метар и по.

Међутим, чим сам хтео да почнем мерење, искрсла је нова препрека. Уверио сам се да је немогућно да свој прут завучем у бачву — отвор је био сувише мали. Нисам смео да савијем прут, — он би се сигурно преломио.

Ускоро сам смислио како да свој прут за мерење дужине завучем у бачву: ја сам га раставио на делове, завукао први део и тек сада за његов крај који је вирио из бачве привезао други део; затим сам, пошто сам увукао други део, привезао и трећи.

Прут сам управио тако да додирне дугу наспрам отвора на бачви и направио сам на њему знак код отвора. Пошто од дужине прута одузмем дебљину бачве, добићу величину која ми је потребна за даље мерење.

Прут сам извлачио исто онако како сам га и завлачио, пазећи да упамтим места где су поједини делови били свезани, како бих после могао да пруту дам ону исту дужину коју је имао у бачви. Мала омашка могла би у крајњем резултату изазвати знатну грешку.

Дакле, добио сам пречник доње основе зарубљене купе. Сада треба наћи пречник данцета бачве које је горња основа те купе. Ја сам ставио прут на бачву, упро сам њиме у супротан део руба и забележио на њему дужину пречника. За то ми није требало више од једног минута.

Остало је само да измерим висину бачве. Требало би, рећи ћете, једну палицу ставити вертикално поред бачве и на њој зарезом забележити висину. Али, моја просторија је била потпуно мрачна и, кад бих палицу поставио вертикално поред бачве, не бих могао видети докле досеже горње данце. Ја сам се могао служити само чулом пипања: требало је рукама напипати данце и одговарајуће место на палици. Осим тога, палица би, окрећући се око бачве, могла да се накриви и ја бих добио нетачну величину висине.

Промисливши добро нашао сам како да савладам ту тешкоћу. Привезао сам само две дашчице, а трећу сам ставио на горње данце тако да она прелази његову ивицу за 30—40 cm; затим сам уз бачву прислонио дугачку летву тако да ова гради са извученом летвицом прав угао и, према томе, паралелна је висини бачве. Пошто сам на летви направио зарез код места где је бачва била најиспупченија, тј. на средини, и одузео дебљину данцета, добио сам на тај начин половину висине бачве или, што је исто, висину једне зарубљене купе.

Сада сам имао све податке потребне за решавање задатка.

ОНО ШТО ЈЕ ЗАПРАВО И ТРЕБАЛО УЧИНИТИ

Изразити запремину бачве у кубним јединицама и затим ове прерачунати у галоне*), то је уствари једноставан аритметички рачун с којим ми није било тешко да изађем на крај. Истина, за тај рачун нисам имао писаћег прибора, али то би ми било некорисно јер сам се налазио у потпуном мраку. Често ми се дешавало да све четири рачунске радње изводим напамет, без пера и хартије. Сада ми је претстојало да оперишем са не сувише великим бројевима и тај задатак ме није нимало збунио.

Али, наишао сам на нову тешкоћу. Имао сам три податка: висину и обе основе зарубљене купе; али, колика је бројна величина тих података? Неопходно је пре рачуна изразити те величине бројевима.

У први мах ми се та препрека учинила несавладљивом — па кад нема ни стопе, ни метра, ни лењира с дужинском поделом, мораћу да одустанем од решавања тог задатка!

Међутим, сетио сам се да сам у пристаништу био измерио своју висину — 4 стопе. Како би ми сада послужио тај податак? Врло просто: могао сам обележити 4 стопе на свом пруту и ту дужину узети као основу за рачунање.

Да бих обележио своју висину опружио сам се на под и затим ставио прут на себе тако да је један његов крај додиривао једно моје стопало а други био на мом челу. Једном руком придржавао сам прут, а другом сам зарезом обележио на њему место у висини свог темена.

Али даље, ето нових тешкоћа! Прут дугачак 4 стопе не вреди нам за мерење ако на њему нису означене и мање јединице — палци (инчеви). Чини се да није тешко 4 стопе поделити на 48 делова (палаца) и те подеоке забележити на лењиру. У теорији то је заиста врло просто, али у пракси, па још у оном мраку у коме сам се ја налазио, то није било ни лако ни просто.

На који начин наћи на пруту средину те дужине од 4 стопе? Како сваку половину прута опет преполовити, а затим сваку стопу поделити на 12 палаца потпуно једнаких један другоме?

Почео сам тиме што сам припремио палицу нешто дужу од 2 стопе. Упоредивши је с прутом на коме су биле обележене 4 стопе уверио сам се да је двострука дужина палице нешто већа од 4 стопе. Скраћујући палицу и понављајући упоређивање неколико пута ја сам при петом мерењу успео да двострука дужина палице износи 4 стопе.

То ми је одузело много времена. Али, времена сам имао довољно; био сам чак задовољан што сам имао чиме да га испуним.

Уосталом, досетио сам се да даљи рад скратим на тај начин што сам палицу заменио везицом, коју је било лако преполовити. За то су ми биле добро дошле моје везице с ципела. Пошто сам их везао јаким чвором, латио сам се посла и убрзо сам могао отсећи комад дугачак 1 стопу. Досад сам делио напола — то је лако; али отсад треба делити на по три једнака дела, а то је теже. Но ја сам и с тим изашао на крај и ускоро сам имао у рукама три комада дугачка по 4 палца. Преостало је да их преполовим и сваку половину да преполовим још једанпут да бих најзад добио комадић дугачак 1 палац.

Сад сам имао оно што ми је раније недостајало за обележавање дужинске поделе на пруту; пажљиво преносећи дуж прута добијене комадиће ја сам начинио 48 зареза који су означавали палце. Тако сам стекао лењир подељен на палце помоћу кога сам могао измерити дужине које сам раније добио. Тек сада сам могао довести до краја задатак који је за мене био толико важан.

Одмах сам почео са рачуном. Пошто сам измерио оба пречника, узео сам аритметичку средину њихових дужина и затим нашао величину површине која одговара том средњем пречнику. Тако сам добио величину основе ваљка који је по запремини једнак двојној зарубљеној купи исте висине. Помноживши површину основе висином, добио сам тражену запремину.

Кад сам број кубних палаца у једном кварту*) поделио са 69 (број кубних палаца), сазнао сам колико има кварата у мојој бачви.

У њој је било више од 100 галона, — тачније, 108 галона".

ПРОВЕРАВАЊЕ РАЧУНА

Читалац који зна геометрију запазиће, бесумње, да начин израчунавања запремине двојне зарубљене купе који је применио млади Мајн-Ридов јунак није потпуно тачан. Ако (сл. 95) полупречник мањих основа обележимо са *r*, полупречник велике

---

*) Галон је мера за запремину течности. Енглески галон садржи око 1246,5 *l*. Галон има 4 кварта, а кварат 2 пинте.

*) 1 галон има 277 кубних инчева (палаца); 1 кварат има 69,25 кубних инчева (палаца).

основе са R а висину са h, тада ће запремина коју је добио дечак бити изражена формулом

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{4}(R^2+r^2+2Rr).$$

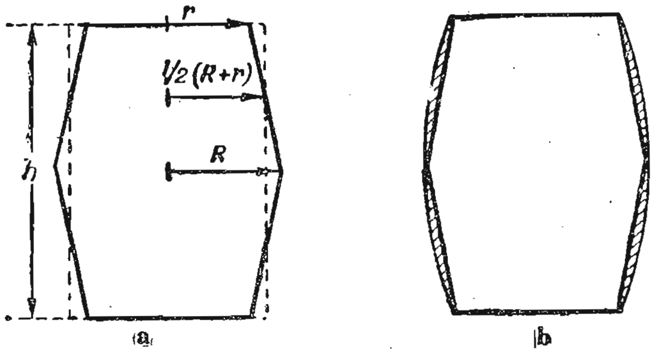
Међутим, поступајући по правилима геометрије, тј. примењујући формулу за запремину зарубљене купе, ми бисмо за тражену запремину добили израз

$$\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Та два израза нису идентична и лако је уверити се да је други већи од првог за

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2.$$

Онима који знају алгебру јасно је да је разлика $\frac{\pi h}{12}(R-r)^2$ позитивна величина, тј. начин Мајн-Ридовог дечака даје резултат мањи од тачног резултата.



Сл. 95. Проверавање рачуна

Од интереса је одредити колики је отприлике тај подбачај. Бачве се обично праве тако да је њихова највећа ширина већа од пречника данцета за своју 1/5, тј. $R-r=\frac{R}{5}$. Претпостављајући да је бачва у Мајн-Ридовом роману имала управо такав облик, можемо наћи разлику између праве и добијене запремине зарубљених купа:

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

тј. око $\frac{hR^2}{100}$ (ако се узме $\pi = 3$). Грешка је, као што видимо, једнака запремини ваљка чији је полупречник основе једнак полупречнику највећег попречног пресека бачве, а висина је тристотинити део висине бачве.

Али, у датом случају је пожељно да се добијени резултат мало повећа, јер је запремина бачве већа од збира запремина двеју у њој уписаних купа. То је јасно из сл. 95, на којој се види да се на показани начин мерења димензија бачве одбацује онај део њене запремине који је осенчен.

Млади Мајн-Ридов математичар није сам измислио ту формулу за израчунавање запремине бачве; она се наводи у неким елементарним уџбеницима геометрије као формула подесна за приближно одређивање количине садржане у бачви. Треба напоменути да сасвим тачно мерење запремине бачве није нимало лак задатак. О томе је још у XVII веку размишљао велики немачки астроном Кеплер, који је међу својим математичким делима оставио и посебан рад о вештини одређивања запремине бачве. Једноставно и тачно геометриско решење овог задатка није нађено ни до данас; постоје само у пракси разрађене методе које дају приближну вредност с већом или мањом тачношћу. На југу Француске, например, употребљава се проста формула

$$\text{запремина бачве} = 3{,}2\,hRr,$$

која се у пракси оправдала.

Интересантно је размотрити и питање: Зашто се заправо бачвама даје такав за мерење неподесан облик — облик ваљка са испупченим боковима? Зар није једноставније правити тачно цилиндричне бачве? Истина, такве цилиндричне бачве се праве, али не од дрвета већ од метала (например бачве за бензин). Али, зашто се дрвене бачве праве бокасте? Какво је преимућство таквог облика?

Преимућство је у томе што се обручи, кад се стављају на бачву, могу чврсто и јако набити на веома прост начин: набијањем ка најширем делу бачве. Тада обруч довољно јако стеже дуге и обезбеђује неопходну непропустљивост бачве.

Из истог разлога дрвени чаброви, каце итд. праве се обично не у цилиндричном облику већ у облику зарубљене купе; ту се такође чврсто стезање дуга обручима постиже једноставно набијањем ових ка ширем делу суда.

Овде ће бити умесно упознати читаоца са размишљањима Јохана Кеплера о том предмету. У времену између открића другог и трећег закона кретања планета велики математичар је посветио пажњу питању облика бачава и о томе је чак и написао један математички рад „Нова стереометрија винских бачава“. Ево како то дело почиње:

„Због материјала, израде и намене винске бачве су обле, облика сличног конусном или цилиндричном. Течност која се дуго држи у металним судовима квари се од рђе; стаклени и земљани судови су недовољно велики и несигурни, камени нису подесни због своје тежине, те, према томе, остаје да се вино усипа у дрвене судове и у њима чува. Од једног целог дебла се опет не може лако издупсти потребна количина довољно великих судова, а ако се то и може, такви судови брзо напукну. Зато се бачве морају правити од више међусобно састављених дрвених делова. Истицање течности кроз пукотине између појединих делова не може се избећи ни кад се узме било какав други материјал ни на неки други начин осим стезања обручима...

Кад би се од дрвених дашчица могла склопити лопта, такви лоптасти судови би били најпожељнији. Али како се дашчице не могу стегнути у лопту, то место лопте заузима ваљак. Но тај ваљак не може бити потпуно правилан јер би обручи који попусте одмах постали некорисни и не би могли да се јаче набију ако бачва не би имала конусни облик који се мало сужава са обеју страна бокастог дела. Тај облик је подесан и за котрљање и за превоз у колима и пошто се таква бачва састоји од двеју међусобно истоветних половина са заједничком основом, најподеснија је за помицање а и лепог је изгледа*).“

---

*) Не треба мислити да Кеплерево дело о мерењу бачава претставља математичку доколицу, разоноду генија у часовима одмора. Не, то је озбиљан рад у коме се први пут уводе у геометрију бесконачно мале величине и почеци интегралног рачуна. Винска бачва и за привреду важан задатак мерења њене запремине послужили су Кеплеру као повод за дубока и плодотворна математичка размишљања.

НОЋНО ПУТОВАЊЕ МАРКА ТВЕНА

Сналажљивост коју је Мајн-Ридов дечак показао у свом тешком положају заслужује дивљење. У потпуном мраку у каквом се он налазио већина људи не би умела чак ни да се колико толико правилно оријентише, а да и не говоримо о неком мерењу и рачунању. Поучно је с том Мајн-Ридовом причом упоредити хумористичну приповетку о бесмисленом путовању у мрачној гостионичкој соби — о догађају који као да се десио чувеном Мајн-Ридовом сународнику хумористу Марку Твену. У тој причи је успешно наглашено колико је тешко у мраку створити себи претставу о распореду ствари чак и у обичној соби ако није од раније добро познат. Ми овде ту забавну епизоду из „Путовања по иностранству“ Марка Твена наводимо у скраћеном облику.

„Пробудио сам се и осетио жеђ. Пала ми је на ум дивна мисао да се обучем, изађем у врт и да се умивањем на кладенцу освежим.

Тихо сам устао и почео да тражим своје ствари. Нашао сам једну чарапу. Где је друга — нисам имао појма. Спустивши се обазриво на колена почео сам да тражим даље, пипајући и повлачећи руком. Помицао сам се све даље и даље, али чарапу нисам налазио и само сам се ударао о намештај. Кад сам био легао да спавам, у соби је било много мање намештаја, а сад га је било пуна соба; нарочито је било много столица, које су се свугде налазиле. Да се нису у међувремену ту уселиле још две породице? Ниједну од тих столица нисам видео у мраку, те сам зато стално ударао главом о њих.

Напослетку сам решио да могу да живим и без једне чарапе. Устао сам и кренуо вратима, како сам мислио, — али сам неочекивано угледао свој мрачни лик у огледалу.

Јасно је да сам погрешио и да немам никакве претставе о томе где се налазим. Да је у соби било само једно огледало, оно би ми помогло да се оријентишем, али била су два, а то је исто тако лоше као да их има цела хиљада.

Хтео сам да поред зида дођем до врата. Поновио сам своје покушаје и — оборио сам слику. Она није била велика, али је направила такву галаму као да се срушила читава панорама. Харис, мој собни друг који је спавао у суседном кревету, није се мрдао, али сам ја осећао да ћу га, ако будем тако наставио, неизоставно пробудити. Покушаћу неким другим путем. Пронаћи ћу опет округли сто, — ја сам стајао крај њега већ неколико пута, — и постараћу се да од њега дођем до свог кревета; ако нађем кревет, наћи ћу и боцу с водом, а тада ћу бар моћи да угасим своју несавладљиву жеђ. Најбоље је бауљати; тај сам начин већ био испитао и зато му највише и верујем.

Најзад сам успео да набасам на сто, тј. да га напипам главом уз сразмерно не тако велики тресак. Тада сам поново устао и кренуо балансирајући испружених руку и раширених прстију. Нашао сам столицу. Затим зид. Другу столицу. Затим диван. Свој штап. То ме је зачудило: добро сам упамтио да је у соби био само један диван. Опет сам налетео на столицу и поново сам се ударио. Затим сам набасао на нови ред столица.

Тек тада ми је пало на памет оно чега сам се одавно морао сетити: сто је био округао, па се, према томе, при свом путешествију нисам смео служити том полазном тачком. На срећу, кренуо сам између столица и дивана, али сам се нашао у потпуно непознатој области и успут оборио свећњак са камина. После свећњака срушио сам лампу, а после лампе је с треском полетела на под и боца.

Аха, — помислио сам, — најзад сам те нашао, рођена моја!

— Лопови! Крађа! — раздера се Харис.

Треска и вика дигоше целу кућу на ноге. Са свећама и фењерима појавише се газда, гости, послуга.

Ја се обазрех око себе. Испоставило се да стојим поред Харисовог кревета. Само један отоман стајао је поред зида, само једна столица је стајала тако да је на њу могао човек наићи, — и ја сам, као планета, кружио око ње и с њом се као кометом сударао у току читаве ноћи.

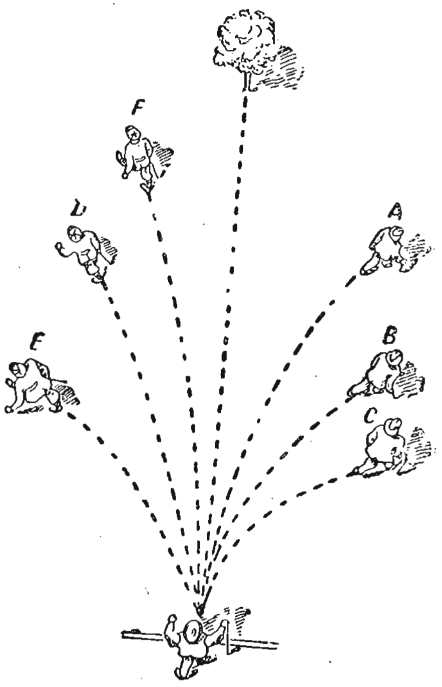
Кад сам узео у обзир дужину свог корака, нашао сам да сам те ноћи прешао 47 миља“.

* * *

Последње тврђење преувеличано је преко сваке мере: немогућно је за неколико часова прећи пешице 47 миља. Али, остале појединости ове приче су довољно веродостојне и лепо карактеришу оне комичне препреке на које човек обично наилази кад без система, на срећу, лута у мраку у непознатој соби. Утолико више треба да ценимо задивљујућу методичност и присуство духа младог Мајн-Ридовог јунака, који је не само знао да се оријентише у потпуном мраку него је у таквој ситуацији још и решио један нимало лак математички задатак.

ЗАГОНЕТНО КРУЖЕЊЕ

Поводом кружења Марка Твена у мрачној соби интересантно је забележити једну загонетну појаву која се може запазити код људи који тумарају затворених очију: они не могу ићи право, већ неизоставно скрећу устрану описујући лук, а ипак мисле да иду право напред (сл. 96).



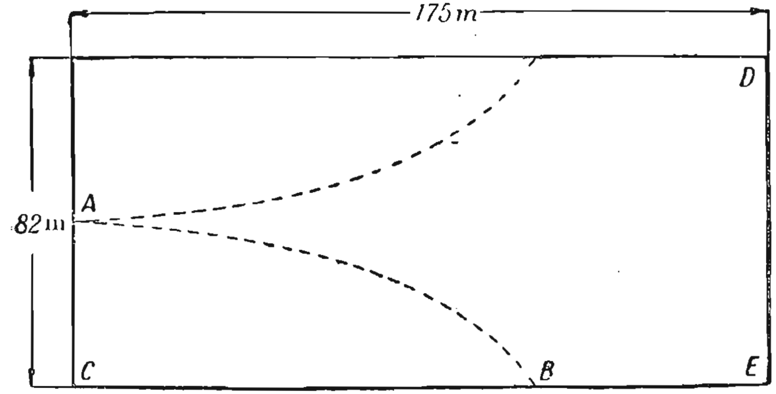
Сл. 96. Ходање затворених очију

Одавно се запазило такође да и путници који путују без компаса кроз пустињу, или степом по вејавици или магли, или уопште у свим случајевима кад нема могућности за оријентисање, — скрећу с правог пута и лутају у круг враћајући се по неколико пута на једно исто место. Полупречник круга који тада описује пешак има око 60—100 m; уколико је ход бржи, полупречник круга је мањи, тј. утолико су кружне путање уже.

Вршени су и нарочити експерименти у циљу проучавања склоности људи да с правог пута скрећу на кружни. Ево шта о таквим експериментима каже херој Совјетског Савеза И. Спирин:

„На глатком зеленом аеродрому било је постројено сто будућих пилота. Свима су завезали очи и рекли да иду право напред. Људи су пошли... Најпре су ишли право; затим су једни почели да скрећу удесно а други улево и постепено су почели да праве кругове враћајући се на свој претходни траг“.

Познат је и сличан експеримент на Тргу светог Марка у Венецији. Људима су завезали очи, постројили их на једном крају трга, управо наспрам цркве, и рекли им да пођу цркви. Иако је требало прећи само 175 m, ипак ниједан од тих људи није дошао до фасаде зграде (која је широка 82 m) већ су сви скренули устрану описујући лук и ударили су на једну од бочних колонада *CE* (сл. 97).



Сл. 97. Схема експеримента на Марковом тргу у Венецији

Онај ко је читао роман Жила Верна „Доживљаји капетана Гатераса“ сећа се, вероватно, како су путници у снежној пустињи наишли на нечије трагове:

„— То су наши трагови, пријатељи моји! — повика доктор. — Ми смо залутали у магли и набасали на своје сопствене трагове...“

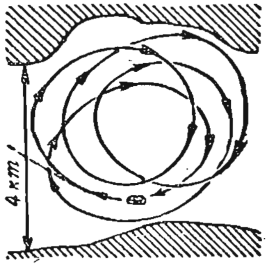
Класичан опис сличног лутања у круг оставио нам је Лав Толстој у причи „Газда и радник“:

„Василије Андрејич је гонио коња онамо камо је из неког разлога претпостављао да се налази шума са стражаревом кућицом. Снег му је засипао очи, а ветар као да је хтео да га заустави, али он, полегао по коњском врату, није престајао да тера коња.

Јахао је око пет минута, како му се чинило, стално право, не видећи ништа осим коњске главе и беле путање.

Одједном се нешто пред њим зацрнело. Срце му радосно залупа и он крете ка тој тамној маси назирући већ у њој зидове сеоских кућа. Али, та црна маса је био висок црни пелен израстао на међи... И, не знајући зашто, Василије Андрејич је осетио да га изглед тог пелена мученог немилосрдним ветром натерује да уздрхти и он журно ободе коња и не примећујући да је, прилазећи пелену, потпуно променио пређашњи правац.

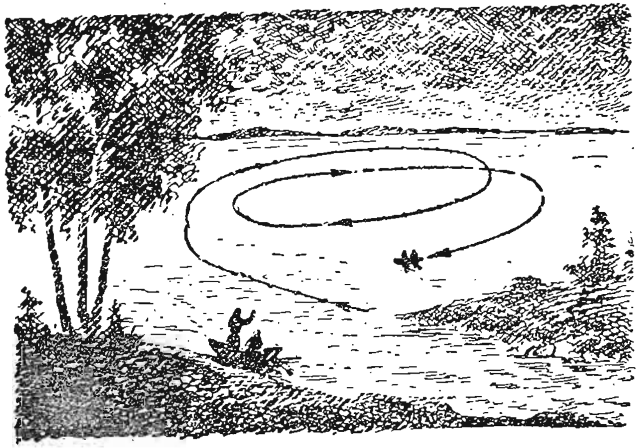
Опет се пред њим нешто зацрнело. То је опет била међа обрасла црним пеленом. Опет се исто онако очајно тресао суви коров. Поред корова се видео коњски траг који је ветар засипао снегом. Василије Андрејич се зауставио, сагао и загледао: то је био траг коња, понегде завејан, и то је могао бити само траг његовог коња. Он је, очигледно, кружио, и то на малом простору“.



Сл. 98. Схема лутања тројице путника

Норвешки физиолог Гулдберг, који је кружењу посветио посебно испитивање (1896 г.), сакупио је низ брижљиво проверених података о истинитим случајевима те врсте. Навешћемо два примера.

Једне снежне ноћи три путника одлуче да крену из шумареве кућице и да изађу из долине широке 4 km да би дошли до своје куће која се налази у правцу који је на приложеном цртежу обележен испрекиданом линијом (сл. 98). Идући они су неопазице скренули удесно, дуж криве која је обележена



Сл. 99. Како су веслачи покушали да се по магловитом времену пребаце преко залива

стрелицом. Пошто су прешли известан пут, они су, судећи по протеклом времену, оценили да су дошли до циља, а уствари су се нашли крај оне исте кућице коју су били оставили. Кренули су поново на пут, али су још више скренули и опет су дошли до полазне тачке. То исто поновило се и трећи и четврти пут. Очајни, они су покушали и пети пут, али је резултат био исти. После петог круга одустали су од даљих покушаја да изађу из долине и сачекали су јутро.

Још је теже у мрклој ноћи или по густој магли веслати у правој линији на мору. Забележен је случај — један од многих сличних случајева — када су веслачи, одлучивши да по магли пређу залив широк 4 km, двапут долазили до близу супротне обале, али нису до ње дошли, већ су несвесно описали два круга и искрцали су се, напослетку ... на месту где су се укрцали (сл. 99).

То се исто дешава и животињама. Поларни истраживачи причају како пси упрегнути у санке описују у снежној пустињи кругове. Пси, ако се пусте да пливају завезаних очију, такође описују у води кругове. По кругу лете и ослепљене птице. Гоњења звер, изгубивши од страха способност оријентације, спасава се бекством не по правој линији него по спирали.

Зоолози су утврдили да се пуноглавци, морски пауци, медузе, па чак и микроскопски мале амебе у капи воде — сви крећу по кругу.

Чиме се тумачи загонетна привржевост човека и животиње кружном кретању, њихова немогућност да се у мраку стално држе једног правца?

Ово питање ће у нашим очима изгубити своју тобожњу тајанственост чим га ми правилно поставимо.

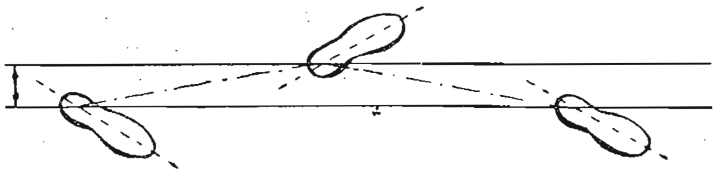
Упитајмо се не зашто се животиње крећу кружно, него шта им је неопходно да би се оне кретале праволиниски.

Сетите се како се креће ауто-играчка који се навија. Дешава се да ауто не иде праволиниски већ завија устрану. У том криволиниском кретању нико не види ништа загонетно; свако се досећа откуд оно произлази: десни точкови нису једнаки левим.

Јасно је да се и живо биће може без помоћи очију кретати тачно праволиниски само у оном случају кад мишићи његове десне и леве стране раде потпуно једнако. Али, ствар је управо у томе што симетрија тела човека и животиње није потпуна. Код огромне већине људи мишићи десне стране тела нису развијени исто као и мишићи леве стране. Природно је да пешак који стално избацује десну ногу нешто даље него леву не може да се држи праве линије; ако му очи не помажу да исправља своју путању, он ће неизбежно заокретати улево. Исто тако и веслач, кад му је због магле онемогућено да се оријентише, неизбежно ће завијати улево ако његова десна рука ради јаче од леве. То је геометриска неминовност.

Замислите да, например, избацујући леву ногу човек прави корак за 1 mm дужи неголи десном ногом. Тада ће, начинивши сваком ногом наизменично по хиљаду корака, човек описати левом ногом пут за 1000 mm, тј. за читав метар дужи неголи десном. На правим паралелним путањама то је немогућно, али је зато потпуно остварљиво на концентричним круговима.

Ми чак можемо, користећи се планом горе описаног кружења у снежној долини, израчунати колико је код тих путника корак леве ноге био дужи од корака десне (пошто је пут скретао удесно, јасно је да су кораци леве ноге били дужи). Растојање између линија трагова десне и леве ноге при ходу (сл. 100) једнако



Сл. 100. Линије отисака десног и левог стопала при ходу

је отприлике 10 cm, тј. 0,1 m. Кад човек описује један пун круг, његова десна нога прелази пут $2\pi R$, а лева пут $2\pi(R + 0{,}1)$, где је R полупречник тог круга у метрима. Разлика $2\pi(R+0{,}1) - 2\pi R = 2\pi \cdot 0{,}1$, тј. 0,62 m или 620 mm, састављена је из разлике између дужине левог и десног корака поновљене онолико пута колико је корака било учињено. Из сл. 98 може се закључити да су наши путници описивали кругове с пречником око 3,5 km, тј. обима око 10000 m. Ако се узме да је средња дужина корака 0,7 m, на том путу је тада било учињено $\frac{10000}{0{,}7} = 14000$ корака; од тог броја 7000 је учињено десном ногом и исто толико левом. Дакле, дознали смо да је 7000 левих корака дуже од 7000 десних корака за 620 mm. Отуда је један леви корак дужи од једног десног за $\frac{620 \text{ mm}}{7000}$, тј. за мање од 0,1 mm. Ето колика је ништавна разлика у дужини корака довољна да доведе до тако запањујућег резултата!

Полупречник оног круга који описује залутали путник зависи од разлике дужина десног и левог корака. Ту зависност није тешко установити. Ако је дужина корака 0,7 m, број корака начињених дуж целог круга једнак је $\frac{2\pi R}{0,7}$, где је R полупречник круга у метрима; међу њима је левих корака $\frac{2\pi R}{2\cdot 0,7}$, а десних исто толико. Ако тај број помножимо разликом x дужина корака, добићемо разлику обимâ оних концентричних кругова који су описани левом, односно десном ногом, тј.

$$\frac{2\pi Rx}{2\cdot 0,7} = 2\pi\cdot 0,1 \text{ или } Rx = 0,14,$$

где су R и x изражени у метрима.

По тој простој формули лако је израчунати полупречник круга кад је позната разлика, и обрнуто. Например, за учеснике у експерименту на Марковом тргу у Венецији можемо утврдити колики је полупречник највећег круга који су они, идући, описали. Како је $AC = 41$ m висина отсечка (стрела) сваког од тих кругова, а BC је половина тетиве, при чему BC није веће од 175 m (сл. 97), то се полупречник R лука AB одређује из једначине

$$BC^2 = 2R\cdot AC + AC^2.$$

Узимајући $BC = 175$ m добијамо:

$$2R = \frac{BC^2 - AC^2}{AC} = \frac{175^2 - 41^2}{41} \approx 700 \text{ m},$$

одакле R, полупречник највећег од кругова описаних при извођењу експеримента на Марковом тргу, није већи од 350 m.

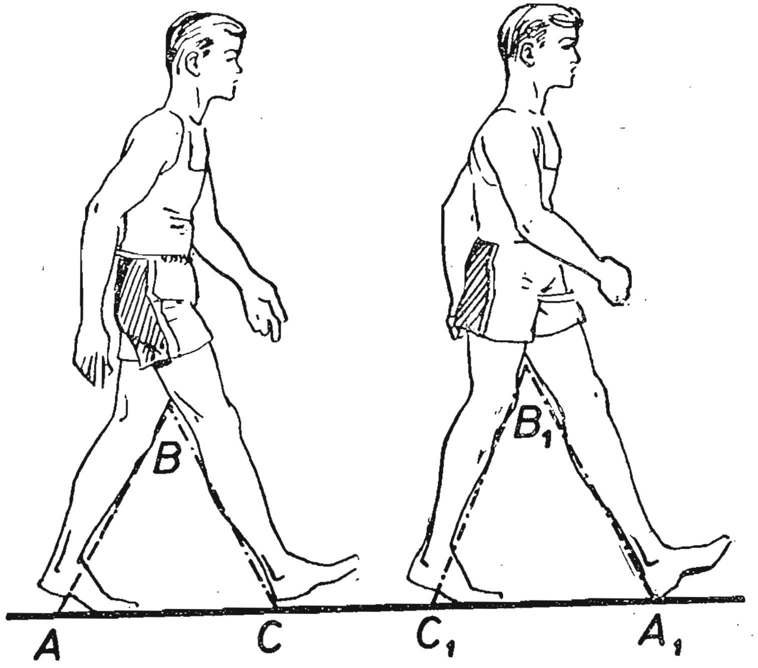
Знајући то, ми ћемо из добијене формуле $Rx = 0,14$ одредити најмању величину разлике дужина корака:

$$350x = 0,14, \quad \text{одакле је} \quad x = 0,4 \text{ mm}.$$

Дакле, код учесника у експерименту разлика у дужини десних и левих корака није била мања од 0,4 mm.

Понекад читамо или слушамо да појава кружења при ходу завезаних очију зависи од разлике у дужини десне и леве ноге; како је код већине људи лева нога дужа од десне, људи при ходу неизбежно криве правац свог кретања. Такво објашњење засновано је на једној геометриској грешци.

Важна је разлика дужинâ коракâ а не ногу. Из сл. 101 је јасно да се, и кад постоји разлика у дужини ногу, ипак могу правити строго једнаки кораци ако се при ходу свака нога избацује под једнаким углом, тј. ако се корача тако да је $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B$. Како је притом увек $A_1B_1 = AB$ и $B_1C_1 = BC$, то је $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ и, према томе, $AC = C_1A_1$. Напротив, при строго једнакој дужини ногу кораци могу бити различите дужине ако се при ходу једна нога избацује даље од друге.



Сл. 101. Ако је угао корака сталан, кораци ће бити потпуно једнаки

Из сличног разлога веслач који весла десном руком јаче неголи левом мора неминовно управљати чамац по кругу заокрећући улево. Животиње које не праве исте кораке левим и десним ногама или птице које десним и левим крилом не замахују подједнако снажно, такође се морају кретати по кругу кад су онемогућене да очима контролишу своју праволиниску путању. И ту су сасвим незнатне разлике у снази руку, ногу или крила.

Ако се тако гледа на ствар, раније наведене чињенице губе своју тајанственост и постају потпуно природне. Било би чудновато кад би, напротив, људи и животиње могли да се стално држе једног правца не контролишући га очима. Јер, неопходни услов за то је строго геометриска симетричност тела, која је за створове живе природе апсолутно немогућна, а и најмање отступање од математички савршене симетрије треба да, као неизбежну последицу, повлачи за собом кружно кретање. Чудо је не оно чему се ми овде чудимо већ оно што смо били готови да сматрамо природним.

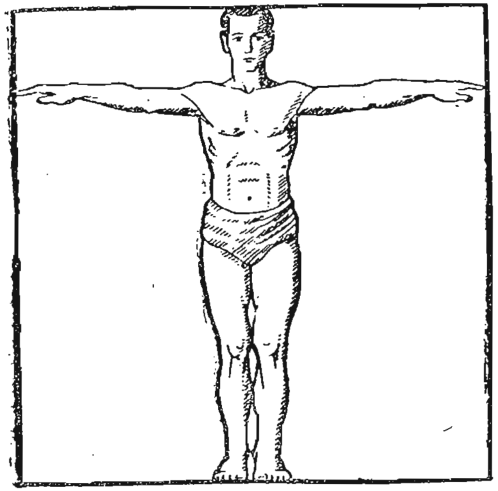
Немогућност да се држи праволиниског пута не претставља за човека битну сметњу: компас, путеви и карте спасавају га у већини случајева од последица тог недостатка.

Ни за животиње, нарочито становнике пустиња, степа и безграничног морског простора, то не претставља никакву сметњу; за њих је несиметричност тела, која их приморава да се крећу кружно уместо праволиниски, за живот важан чинилац. Као невидљивим ланцем она их везује за место рођења, онемогућујући им да се одатле много удаљују. Лав који се одважио да зађе дубље у пустињу неизбежно се враћа на место поласка. Галебови који остављају родне стене да би се винули изнад пучине не могу а да се не врате свом гнезду (међутим, утолико су загонетнији далеки летови птица које у правој линији пресецају копна и океане).

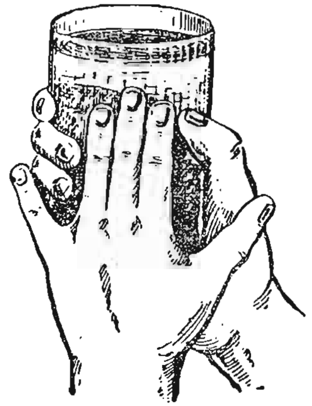
МЕРЕЊЕ ГОЛИМ РУКАМА

Мајн-Ридов дечак је могао успешно да реши свој геометриски задатак само зато што је уочи путовања био измерио своју висину и добро упамтио колика је она. Добро би било кад би се свако од нас снебдео таквим „живим метром“, како би у случају потребе могао њиме да се користи при мерењу. Корисно је такође знати да је код већине људи растојање између врхова прстију раширених руку једнако висини раста (сл. 102). То правило је забележио генијални уметник и научник Леонардо

да Винчи; оно омогућује да се својим „живим метрима“ користимо много подесније него што је то чинио Мајн-Ридов дечак. Просечна висина одраслога човека (словенске расе) је око 1,7 m или 170 cm; то је лако упамтити. Али, не треба се ослањати на просечну висину; свако треба да измери своју висину и растојање прстију раширених руку.



Сл. 102. Правило Леонарда да Винчија



Сл. 103. Мерење обима округле чаше „голим рукама“

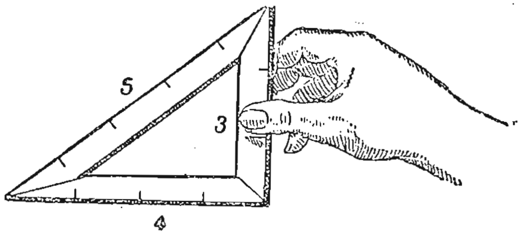
За мерење — без метра — мањих дужина треба упамтити дужину свог педља, тј. растојање између палца и малог прста кад се прсти на руци рашире. Код одраслог човека педаљ има око 18 cm, али је код младих људи мањи и са узрастом се све до 25 године постепено повећава.

Затим, у истом циљу потребно је измерити и упамтити дужину свог кажипрста рачунајући је од основе средњег прста и од основе палца. Исто тако треба да знате и највеће растојање између врхова кажипрста и средњег прста, које код одраслог човека има око 10 cm. Треба, најзад, знати и ширину својих прстију. Ширина три састављена средња прста је око 5 cm.

Наоружани свим тим подацима ви ћете моћи да прилично добро вршите разна мерења дословце речено голим рукама, чак и у мраку. На сл. 103 показан је један пример: ту се прстима мери обим чаше. Полазећи од просечних величина, може се рећи да је обим чаше једнак 18 + 5 = 23 cm.

ПРАВ УГАО У МРАКУ

Враћајући се још једанпут младом Мајн-Ридовом математичару поставимо себи задатак: Како би требало он да поступи да би поуздано добио прав угао? — „Ја сам прислонио (уз извучену дашчицу) дугачак прут тако да он са дашчицом гради прав угао" — читамо у роману. Радећи то у мраку и ослањајући се само на чуло пипања, ми можемо прилично да погрешимо. Међутим, дечак је у положају у коме се налазио имао једно средство помоћу кога је могао да прав угао образује на много сигурнији начин. Које је то средство?



Сл. 104. Најпростији правоугли троугаоник, код кога су дужине страница цели бројеви

Решење

Треба применити Питагорину теорему и од летвица начинити троугао са страницама толике дужине да тај троугао мора бити правоугли. Најпростије је узети летвице чија је дужина 3, 4, 5 пута већа од неког произвољно изабраног отсечка (сл. 104).

То је прастари египатски начин који су у Земљи пирамида примењивали већ пре неколико хиљада година. Уосталом, том истом начину образовања правог угла прибегава се често још и данас приликом извођења грађевинских радова.

ГЛАВА ДЕВЕТА

СТАРО И НОВО О КРУГУ

ПРАКТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА ЕГИПЋАНА И РИМЉАНА

Данас сваки ђак израчунава обим круга кад зна његов пречник много тачније него најмудрији свештеник прастаре Земље пирамида или највештији архитект великог Рима. Стари Египћани су сматрали да је обим круга већи од пречника 3,16 пута, а Римљани — 3,12 пута, док је тачан однос 3,14159... Однос обима круга према пречнику египатски и римски математичари установили су не путем строгих геометриских расуђивања и рачуна, као што су то учинили каснији математичари, већ су га нашли просто на основу искуства. Али, зашто су се код њих показале такве грешке? Зар нису могли да неки округао предмет обавију концем и да затим, исправивши конац, измере његову дужину?

Нема сумње да су они тако и поступали; али, не треба мислити да такав начин мора неизоставно дати и тачан резултат. Замислите, например, вазу са округлим дном пречника 100 mm. Обим кружног дна треба да буде једнак 314 mm. Међутим, уствари, мерећи концем тешко да ћете добити ту дужину; лако је погрешити за милиметар, а тада ће испасти да је π једнако 3,13 или 3,15. Ако још узмете у обзир да се ни пречник вазе не може сасвим тачно измерити и да је и ту грешка од 1 mm веома вероватна, уверићете се да се за π добијају доста широке границе:

$$\frac{313}{101} \quad \text{и} \quad \frac{315}{99},$$

тј., изражене у децималним разломцима: 3,09 и 3,18.

Сад видите да, одређујући π на наведени начин, можемо добити резултат који се не подудара са 3,14: једанпут ћемо добити 3,1, други пут 3,12, трећи пут 3,17 и сл. Случајно се ту може наћи и 3,14, али у очима оног ко рачуна тај број неће имати већи значај неголи остали бројеви.

Такав експериментални пут не може дати колико-толико прихватљиву вредност за π. У вези с тим постаје нам разумљивије зашто Стари свет није знао за тачан однос обима круга према пречнику, те је био потребан Архимедов геније да за π нађе вредност $3^{1}/_{7}$, да је нађе без икаквих мерења, само расуђивањем.

„ТО ЈА ЗНАМ И ДОБРО ПАМТИМ“

У „Алгебри“ старог арабљанског математичара Мухамеда бен-Мусе, о израчунавању обима круга читамо ове редове: „Најбољи начин је да се пречник помножи са $3^{1}/_{7}$. То је најбржи и најлакши начин. Алах зна за бољи“.

Сада знамо да ни Архимедов број $3^{1}/_{7}$ не изражава потпуно тачно однос обима круга према пречнику. Теориски је доказано да се тај однос не може изразити неким коначним разломком. Ми можемо написати само његову приближну вредност, која уосталом далеко превазилази тачност која је потребна и за најстроже захтеве практичног живота*). У XVI веку је математичар Лудолф, који је живео у Лајдену, имао стрпљења да израчуна број π на 35 децимала и изразио жељу да се та вредност уклеше на његов надгробни споменик**). Ево те вредности:

3,14159265358979323846264338327950288...

Неки Шенкс је 1873 године објавио вредност броја π на 707 децимала! Такви дугачки бројеви који приближно изражавају вредност броја π немају ни практичног ни теориског значаја. Само се од беспослице и од трке за „рекордима“ по сваку цену могла у наше време појавити жеља да се „превазиђе“ Шенкс. У времену од 1946 до 1947 године су Фергусон (Манчестерски универзитет) и Ренч (из Вашингтона) независно један од другог израчунали 808 децимала броја π и окористили су се утолико што су у Шенксовом рачуну открили грешку после 528 децимале.

Кад бисмо зажелели да, например, израчунамо обим Земљиног екватора с тачношћу до 1 cm под претпоставком да знамо тачну дужину његовог пречника, онда би нам за то било потпуно довољно да број π узмемо на свега девет децимала. Ако пак узмемо двапут више децимала (тј. 18), можемо да израчунамо обим круга чији је полупречник једнак отстојању Земље од Сунца, и то с грешком која није већа од 0,0001 mm (тј. која је 100 пута мања од дебљине длаке).

Апсолутну некорисност чак и прве стотине децимала броја π необично јасно је показао руски математичар Граве. Он је израчунао да, ако замислимо лопту чији је полупречник једнак отстојању Земље од Сиријуса, тј. $132 \cdot 10^{10}$ km, ту лопту напунимо микробима сматрајући да у сваком кубном милиметру има по 1 билион (10^{10}) микроба и затим све те микробе поређамо дуж једне праве линије тако да је растојање свака два суседна микроба опет једнако растојању између Сиријуса и Земље, тада би се, ако се притом број π узме на 100 децимала, узимајући тај фантастични отсечак (тј. растојање између два суседна микроба) за пречник круга, обим тог гигантског круга могао израчунати с микроскопском тачношћу — с тачношћу до $\frac{1}{1\,000\,000}$ mm. Тачно каже француски астроном Араго да „у смислу тачности ми не бисмо добили ништа ако би између обима круга и његовог пречника постојао однос који би се могао изразити рационалним бројем“.

За обично рачунање с бројем π потпуно је довољно упамтити прве две децимале (3,14), а за тачнији рачун прве четири децимале (3,1416; за последњу цифру узимамо 6 уместо 5 зато што за овом долази цифра већа од 5).

Кратки стихови или упечатљиве изреке остају у памћењу дуже него бројеви, и зато се, ради памћења неке вредности броја π, састављају нарочити стихови или поједине реченице. У таквим производима „математичке поезије“ речи се бирају тако да се број слова у свакој речи подудара са одговарајућом цифром броја.

Познати су стихови на енглеском језику од свега 13 речи, који према томе дају 12 цифара после запете, на немачком језику — од 24 речи, на француском од 30 речи*) (а има их и од 126 речи).

---

*) Појединости о томе видети на стр. 187—190.

**) У то време ознака π још није била у употреби. Ту ознаку увео је тек средином XVIII века велики математичар Леонард Ојлер.

*) Ево тих стихова:

a) на енглеском:

See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks ofttimes resisting.

b) на немачком:

Wie o dies π
Macht ernstlich, so viele viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglige, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein.

Ти стихови су занимљиви, али их има много и гломазни су. Међу ученицима Е. Терскова, професора математике у једној средњој школи у Москви, популаран је стих који је он сам саставио:

„Ето я знаю и помню прекрасно“.
3 1 4 1 5 9...

А једна од његових ученица, Есја Чериковер, са инвентивношћу својственом нашим ученицима измислила је оштроуман, помало ироничан наставак:

„Пи многие знаки мне лишни, напрасны“.
...2 6 5 3 5 8

У целини се добија овакав двостих од 12 речи:

„Ето я знаю и помню прекрасно,
Пи многие знаки мне лишни, напрасны*)“.

Писац ове књиге, немајући смисла за писање стихова, предлаже, са своје стране, просту и такође потпуно довољну прозаичну реченицу:

„Что я знаю о кругах**)?“ — Ово питање крије у себи и одговор: 3,1416***).

ГРЕШКА ЏЕКА ЛОНДОНА

Следеће место из романа Џека Лондона „Мала газдарица велике куће“ даје материјала за геометриски рачун:

„Усред њиве дизао се челични стуб, побијен дубоко у земљу. Од врха стуба до краја њиве био је затегнут накатранисан конопац, привезан слободним крајем за трактор. Механичари су покренули ручицу и мотор је прорадио.

Машина је сама кренула напред, описујући круг око стуба чије му је подножје служило као центар.

— Да би машина радила потпуно онако како треба, мора се круг који она описује претворити у квадрат — рече Грехем.

— Да, јер на квадратној њиви на тај начин остаје много земље неузорано.

Грехем узе нешто да рачуна па онда рече:

— Губи се отприлике по 3 ара од сваких 10 ари.

— Не мање“.

Предлажемо читаоцима да тај рачун провере.

Решење

Рачун није тачан, губи се мање од 0,3 целокупног земљишта. Нека је, рецимо, страница квадрата једнака a. Површина тог квадрата је a^2. Пречник уписаног круга је такође a, а његова површина је $\pi a^2/4$. Од квадратног земљишта губи се део чија је површина

$$a^2 - \pi a^2/4 = (1 - \pi/4)a^2 = 0,22a^2.$$

Видимо да необрађени део квадратне њиве износи не око 30%, како су мислили јунаци америчког романсијера, већ само око 22%.

БАЦАЊЕ ИГЛЕ

Најоригиналнији и најнеочекиванији начин приближног израчунавања броја π јесте следећи.

Треба имати кратку шиваћу иглу (од 2 cm), боље са заломљеним врхом, да би игла била свугде једнаке дебљине, и на листу хартије треба извући паралелне праве тако да је отстојање сваких двеју суседних правих двапут веће од дужине игле. Затим се са извесне висине игла баца на хартију и пази се на то да ли игла сече коју од паралелних правих или не сече ниједну (сл. 105 лево). Да игла не би отскакала, под хартију се ставља упијаћа хартија или комад меке тканине. Бацање игле понавља се много пута, например 100 пута или, још боље, 1000 пута, и сваки пут се запише да

---

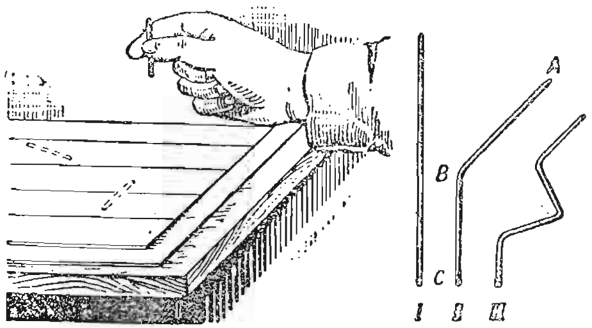
c) на француском:
Que j'aime à faire apprendre
un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, sublime ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

*) То ја знам и добро памтим; многе цифре π су ми сувишне.

**) Шта знам о круговима?

***) На нашем језику реченица
„Још и круг у школи упознајеш“
показује, бројем слова у свакој речи, приближну вредност броја π на пет тачних децимала: 3,14159. — Прим. прев.

ли је било или није било пресецања*). Ако се укупан број бацања игле подели бројем случајева кад је било запажено пресецање, тада се у количнику мора добити број π, тојест, разуме се, његова више или мање тачна приближна вредност. Објаснићемо зашто се добија такав количник. Нека је K највероватнији број пресецања неке од посматраних правих и игле, а дужина наше игле нека је 20 mm. У случају пресецања тачка пресека (односно додира) треба, разуме се, да лежи на некој од ових милиметара и у том погледу ни било који од њих ни било који део игле нема никакве предности. Зато је највероватнији број пресека сваки милиметар $\frac{K}{20}$. За део игле од 3 mm тај број је $\frac{3K}{20}$, за део од 11 mm он је једнак $\frac{11K}{20}$ итд. Другим речима, највероватнији број пресека је директно пропорционалан дужини игле.



Сл. 105. Бифонов експеримент са бацањем игле

Та се пропорционалност задржава и у случају кад је игла савијена. Нека је игла савијена као на сл. 105,II, при чему је део $AB = 11$ mm, а $BC = 9$ mm. За део AB највероватнији број пресека једнак је $\frac{11K}{20}$, за BC је $\frac{9K}{20}$, а за целу иглу је $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, тј. као и раније тај број је K. Иглу можемо савити на још необичнији начин*) (III на сл. 105) — број пресека се од тога неће променити. (Имајте у виду да, кад је игла савијена, једну исту праву могу пресецати два дела или и више делова игле; такво пресецање треба, разуме се, рачунати као 2, 3 итд., јер се прво убраја приликом срачунавања пресека за један део игле, друго за други део игле итд.)

Замислите сада да бацамо иглу савијену у облику круга с пречником једнаким растојању између паралелних правих (ово је двапут веће од наше игле). Такав прстен ће увек двапут сећи неку линију (или одједном додиривати две линије, тако да се у сваком случају добијају по два пресецања). Ако је укупан број бацања N, онда је број пресецања $2N$. Наша права игла је од тог прстена мања по дужини онолико пута колико је пута полупречник мањи од обима круга, тј. 2π пута. Али, ми смо већ утврдили да је највероватнији број пресецања пропорционалан дужини игле. Зато највероватнији број пресецања (K) наше игле мора бити 2π пута мањи од $2N$, тј. тај број је $\frac{N}{\pi}$. Отуда је

$$\pi = \frac{\text{број бацања}}{\text{број пресецања}}.$$

Уколико се посматра већи број бацања, утолико се добија тачнија вредност броја π. Швајцарски астроном Р. Волф је средином прошлог века посматрао 5000 бацања игле на хартију са извученим паралелним правим и за број π је добио вредност 3,159..., која је, уосталом, мање тачна од Архимедовог броја.

Као што видите, однос обима круга према пречнику налази се овде експерименталним путем, при чему се — и то је најзанимљивије — не црта ни круг ни његов пречник, тј. ради се без шестара. Човек који нема никаквих претстава о геометрији па чак ни о кругу, може на тај начин одредити број π ако стрпљиво изврши велики број бацања игле.

---

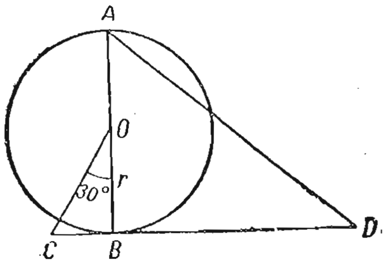
*) Пресецањем треба сматрати и онај случај кад игла додирује једну од нацртаних паралелних правих.

*) Разуме се, иглу треба савијати тако да све њене тачке остају и даље у једној равни. — Прим. прев.

РЕКТИФИКАЦИЈА КРУГА

Задатак

За многе практичне сврхе довољно је за π узети број $3\,^1/_7$ и кружну линију исправити преносећи њен пречник на неку праву $3\,^1/_7$ пута (дељење отсечка на 7 једнаких делова може се, као што је познато, извршити потпуно тачно). Постоје и други приближни начини таквог исправљања (ректификације) круга које примењују столари, лимари и сл. у свом занату. Ми их овде нећемо разматрати, већ ћемо само навести један доста једноставан начин ректификације који даје резултат с необично великом тачношћу.



Сл. 106. — Приближан графички начин ректификације круга

Ако је потребно ректификовати круг O полупречника r (сл. 106), тада се повуче пречник AB и у тачки B на тај пречник нормална права CD. Из центра O се под углом од 30^0 према OB повуче дуж OC, а затим се на праву CD почев од тачке C положи утростручен полупречник датог круга и тако добијена тачка D споји са A; дуж AD једнака је половини обима круга. Ако се дуж AD увећа два пута, добиће се приближно ректификовани круг. Грешка је мања од $0{,}0002\,r$.

На чему се заснива та конструкција?

Решење

По Питагориној теореми је

$$CB^2 + OB^2 = OC^2.$$

Ако полупречник OB обележимо са r и имамо у виду да је $CB = OC/2$ (као катета наспрам угла од 30^0), добијамо:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2,$$

одакле је

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

У троуглу ABD је

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3},$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153r.$$

Упоређујући тај резултат са оним који се добија кад се π узме с већим степеном тачности ($\pi = 3{,}141593$), видимо да разлика износи свега $0{,}00006r$. Ако бисмо на тај начин ректификовали круг полупречника 1 m, грешка би за полукруг износила свега 0,00006 m, а за цео круг 0,00012 m, или 0,12 mm.

КВАДРАТУРА КРУГА

Не верујем да који од мојих читалаца није никад слушао о „квадратури круга“, да није слушао о оном најчувенијем геометриском проблему с којим су се још пре двадесет столећа мучили математичари. Чак сам и убеђен да ће се међу мојим читаоцима наћи и таквих који су и сами покушавали да тај проблем реше. Ипак, још више ће бити оних читалаца који не схватају у чему је, у суштини, тежина овог класичног нерешљивог проблема. Многима који су навикли да понављају оно што су чули од других — да је проблем квадратуре круга нерешљив — нису јасне ни суштина самог проблема ни тешкоће његовог решавања.

У математици има не мало проблема који су и теориски и с гледишта праксе од много већег интереса него што је то случај с проблемом квадратуре круга. Али, ниједан од њих није стекао такву популарност као тај проблем који је одавно ушао у причу. Две хиљаде година радили су на њему и истакнути математичари — стручњаци и безбројне масе нестручњака.

„Наћи квадратуру круга“ значи конструисати квадрат чија је површина тачно једнака површини датог круга. У пракси се тај задатак јавља прилично често, али се он управо у пракси решава приближно, са коликом се год хоће тачношћу. Чувени антички проблем захтева, међутим, да цртеж буде тачно конструисан помоћу само двеју врста графичких операција: 1) описивањем круга датог полупречника око дате тачке, 2) повлачењем праве кроз две дате тачке.

Кратко речено, цртеж треба конструисати служећи се само шестаром и лењиром.

У широким круговима нематематичара раширено је уверење да сва тешкоћа потиче отуда што се однос обима круга према његовом пречнику (чувени број π) не може изразити бројем са коначно много децимала. То је тачно једино утолико што нерешљивост проблема зависи од нарочите природе броја π. Уствари, претварање правоугаоника у квадрат је лак и тачно решљив задатак, а проблем квадратуре круга своди се на то да се шестаром и лењиром конструише правоугаоник који је по површини једнак датом кругу. Из формуле за површину круга, $P = \pi r^2$, или (што је исто), $P = \pi r \cdot r$, јасно је да је површина круга једнака површини оног правоугаоника чија је једна страница једнака r, а друга је π пута већа. Значи да је сва ствар у томе да се нацрта дуж која је π пута већа од дате дужи. Као што је познато, π није тачно једнако $3^1/_7$, ни 3,14, па чак ни 3,14159. Низ цифара тог броја је бесконачан.

Поменуту особеност броја π, његову ирационалност*) утврдили су још у XVIII веку математичари Ламберт и Лежандр, који су се у том питању непосредно ослањали на дубока истраживања Леонарда Ојлера (1707—1783). Па ипак сазнање да је број π ирационалан није зауставило напоре „квадратуриста" упућених у математику. Они су схватили да ирационалност броја π сама по себи не чини проблем безнадежним. Постоје ирационални бројеви које геометрија зна да савршено тачно „конструише". Нека, например, треба конструисати дуж која је од дате дужи већа $\sqrt{2}$ пута. Број $\sqrt{2}$, као и π, ирационалан је. Па ипак, ништа није лакше неголи конструисати тражену дуж: она је једнака дијагонали квадрата конструисаног над датом дужи.

Сваки ученик лако излази на крај чак и са конструкцијом дужи $a\sqrt{3}$ (страница једнакостраничног уписаног троугла). Није нарочито тешка чак ни конструкција наизглед веома сложеног ирационалног израза

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},$$

јер се он своди на конструкцију правилног многоугла са 64 странице.

Као што се види, ирационални множилац који улази у дати алгебарски израз не чини увек тај израз немогућним за конструкцију шестаром и лењиром. Нерешљивост проблема квадратуре круга потиче не само отуда што је број π ирационалан већ се она крије у другој особености тог броја. Наиме, број π није алгебарски, тј. он се не може добити као резултат решавања неке алгебарске једначине са рационалним коефицијентима. Такви бројеви називају се трансцендентним бројевима.

Француски математичар Вијет, који је живео у XVI веку, доказао је да је

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

Овај израз за број π решио би проблем квадратуре круга ако би број у њему заступљених операција био коначан (тада би се наведени израз могао геометриски конструисати). Али, како у том изразу има бесконачно много квадратних корена*), Вијетова формула не помаже решавању проблема.

Дакле, нерешљивост проблема квадратуре круга проузрокована је трансцендентношћу броја π, тј. тиме што се број π не може добити као корен алгебарске једначине са рационалним коефицијентима. Ту карактеристичну особину броја π је строго доказао немачки математичар Линдеман (1882 год.). У суштини, тог научника треба сматрати јединим човеком који је решио проблем квадратуре круга, без обзира на то што је његово решење негативно: оно тврди да је тражена конструкција геометриски

---

*) Број се назива ирационалним ако се не може тачно изразити разломком облика $\frac{p}{q}$, где су p и q цели бројеви. Ирационални бројеви се изражавају бесконачним непериодичним децималним разломцима.

*) Тачкице у имениоцу значе да у имениоцу има бесконачно много чинилаца (квадратних корена). Закон образовања чинилаца одређује се на основу прва три већ написана чиниоца.

неизводљива. На тај начин се 1882 године завршавају многовековни напори математичара у том правцу, али нажалост не престају бесплодни покушаји многобројних нематематичара који нису добро упознати са историјатом тог проблема.

Тако стоји ствар са проблемом квадратуре круга у теорији. Што се пак тиче праксе, за њу није ни потребно тачно решење тог чувеног проблема. Убеђење многих људи да би позитивно решење проблема квадратуре круга имало огроман значај за практични живот уствари је дубока заблуда. За свакодневне потребе довољно је знати добре приближне методе решавања тог проблема.

Практично узев, тражење квадратуре круга је постало некорисно од оног времена кад је било нађено првих 7—8 тачних цифара броја π. За потребе практичног живота потпуно је довољно знати да је $\pi = 3{,}1415926$. Никакво мерење дужине не може дати резултат који се изражава бројем са више од седам значајних цифара. Зато је некорисно узимати број π са више од осам цифара; од тога се тачност рачуна неће побољшати*). Ако је полупречник изражен бројем са седам значајних цифара, обим круга неће имати више од седам поузданих цифара, чак и ако број π узмемо са сто цифара. То што су некада математичари узалуд улагали огроман труд да добију што „дужи" израз за π нема никаквог практичног смисла, а и научни значај тог рада је ништаван. То је просто ствар стрпљења. Ако имате воље и доста времена, можете израчунати и 1000 цифара за број π користећи се, например, следећим бесконачним редом**) који је нашао Лајбниц:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Али, то би било једно аритметичко вежбање које никоме није потребно и које нимало неће изменити већ добијено решење чувеног геометриског проблема.

Раније поменути (в. стр. 181) чувени француски атсроном Араго је поводом тога написао:

„Решаваоци квадратуре круга настављају да се баве решавањем проблема чија је немогућност сада позитивно доказана, и које, чак и кад би се могло остварити, не би било ни од каквог практичног интереса. Нема смисла расправљати о томе! Они који теже да открију квадратуру круга нису сасвим здраве памети, а таквима се ништа не може доказати".

Араго иронично завршава:

„У свим земљама су академије наука које се боре против решавалаца квадратуре круга приметиле да обично та болест узима више маха у пролеће".

БИНГОВ ТРОУГАО

Размотрићемо једно од приближних решења проблема квадратуре круга које је веома подесно за потребе практичног живота.

Тај начин решавања састоји се у томе што се израчунава угао α (сл. 107) под којим треба према пречнику AB повући тетиву $AC = x$, која је страница траженог квадрата. Да би се нашла величина тог угла, треба се обратити за помоћ тригонометрији:

$$\cos\alpha = AC/AB = x/2r,$$

где је r полупречник круга.

То значи да је страница траженог квадрата $x = 2r\cos\alpha$, а његова површина $4r^2\cos^2\alpha$. С друге стране, површина квадрата је једнака πr^2, тј. површини датог круга. Према томе,

$$4r^2\cos^2\alpha = \pi r^2,$$

одакле је

$$\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

У таблицама налазимо

$$\alpha = 27^0 36'.$$

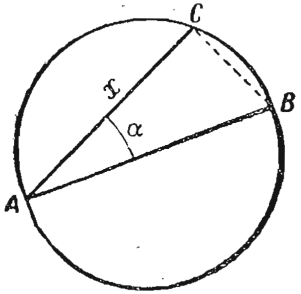
Дакле, кад у датом кругу повучемо тетиву под углом од $27^0 36'$ према пречнику, одмах добијамо страницу квадрата чија је

---

*) Види „Занимљиву аритметику" Ј. Перељмана.

**) За такав рачун потребно је врло много стрпљења јер би, например, за добијање броја π са шест децимала било потребно у наведеном реду узети ни више ни мање од 2 000 000 чланова.

површина једнака површини датог круга. У пракси се у том циљу конструише троугао*) коме један од оштрих углова има 27°36′ (а други 62°24′). Кад се има такав троугао, може се за сваки дати круг одмах наћи страница квадрата једнаке површине.



Сл. 107. Бингов троугао

За оне који желе да начине такав троуганик за цртање корисно ће бити следеће упутство:

Пошто је тангенс угла од 27°36′ једнак 0,523, или 23/44, катете таквог троугла односе се као 23 : 44. Зато ћемо, кад начинимо троугаоник чија је једна катета например 22 cm, а друга 11,5 cm, имати оно што нам је потребно. Само се собом разуме да се таквим троугаоником може користити као и обичним троугаоником.

ГЛАВА ИЛИ НОГЕ

Чини ми се да је један од јунака Жила Верна рачунао који је део његовог тела прешао дужи пут за време његовог путовања око света — глава или стопала. То је веома поучан геометриски задатак ако се питање постави одређеније. Ми ћемо га задати у следећем облику:

Задатак

Замислите да сте обишли Земљину лопту дуж екватора. За колико је дужи пут који је притом прешло ваше теме од пута који су прешла ваша стопала?

Решење

Ноге су прешле пут $2\pi R$, где је R полупречник Земљине лопте. Врх главе прешао је притом пут $2\pi(R + 1{,}7)$, где је 1,7 m човекова висина. Разлика путева је $2\pi(R + 1{,}7) - 2\pi R = 2\pi \cdot 1{,}7 =$

---

*) Овај практични начин нашао је руски инжењер Бинг; поменути троугао носи по имену свог проналазача назив „Бингов троугао".

$= 10{,}7$ m. Дакле, глава је прешла пут за 10,7 m дужи од пута који су прешле ноге.

Занимљиво је да у крајњи резултат не улази величина Земљиног полупречника. Зато ће се исти резултат добити и на Земљи, и на Јупитеру, и на најмањој планети. Уопште, разлика обима двају концентричних кругова не зависи од њихових полупречника, већ само од њиховог растојања. Додавање једног центиметра полупречнику Земљине путање повећало би обим те путање за исто онолико за колико ће се таквим увећавањем полупречника повећати обим петодинарке.

На том геометриском парадоксу*) заснован је следећи интересантан задатак који се налази у многим збиркама геометриских забава:

Ако се Земљина лопта омота дуж екватора жицом и затим дужина жице продужи за 1 m, да ли ће између жице и Земље моћи да проскочи миш?

Обично се одговара да ће размак између Земље и жице бити тањи од власи, јер шта значи један метар у поређењу са 40 милиона метара Земљиног екватора! Уствари је величина тог размака једнака

$$\frac{100}{2\pi}\text{ cm} \approx 16\text{ cm}.$$

Не само миш, већ и крупнија мачка моћи ће да прође кроз тај размак.

ЖИЦА ОКО ЕКВАТОРА

Задатак

Сада замислите да је дуж Земљиног екватора омотана затегнута челична жица. Шта ће се десити ако се та жица охлади за 1°? Од хлађења се жица мора скратити. Ако се она није притом прекинула ни растегла, колико се дубоко усекла у тле?

Решење

У први мах изгледа да такво незнатно снижење температуре, само за 1°, не може изазвати знатније усецање жице у земљу. Рачун показује другачије.

---

*) Парадоксом се назива истина која нам се чини невероватном, за разлику од софизма — лажног тврђења које у први мах оставља утисак да је истинито.

Охлађена за 1^0 челична жица се скраћује за стохиљадити део своје дужине. Пошто је дугачка 40 000 000 m (дужина Земљиног екватора), жица се мора скратити, како је лако израчунати, за 400 m. Али, полупречник тог круга од жице смањиће се не за 400 m већ за много мање. Да би се нашло за колико ће се смањити полупречник, треба 400 поделити са 6,28, тј. са 2π. Добиће се око 64 m. Дакле, жица која се охладила свега за 1^0 треба, под наведеним условима, да се усече у земљу не за неколико милиметара, како би нам се могло учинити, већ за преко 60 m.

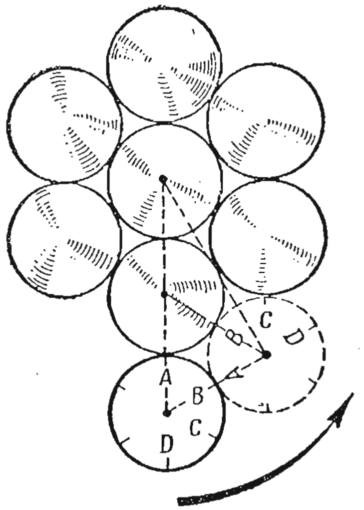
ЧИЊЕНИЦЕ И РАЧУН

Задатак

Пред вама је 8 једнаких кругова (сл. 108). Седам осенчених су непокретни, а осми, неосенчен, котрља се по њима без клизања. Колико ће обртаја он начинити кад непокретне кругове обиђе једанпут?

Ви то, наравно, можете одмах објаснити практично; ставите на сто осам дводинарки, распоредите их као на слици и, притискујући седам дводинарки, котрљајте осму по њиховом рубу. Да бисте одредили број обртаја, пратите, например, положај броја 2 на дводинарци. Сваки пут кад цифра 2 заузме првобитни положај, дводинарка се једанпут обрнула око свог центра.

Извршите тај експеримент не у памети већ у стварности и ви ћете утврдити да ће дводинарка извршити свега четири обртаја.



Сл. 108. Колико ће обртаја неосенчени круг начинити обилазећи осенчене кругове?

Хајде сада да покушамо да добијемо исти одговор помоћу расуђивања и рачуна!

Да објаснимо, например, колики лук сваког непокретног круга обилази покретни круг. У том циљу замислимо кретање покретног круга са „брега“ *A* до најближег улегнућа између два суседна круга (в. сл. 108).

На основу слике није тешко утврдити да лук *AB* дуж кога се котрљао круг има 60^0. На сваком непокретном кругу има по два таква лука, који заједно чине лук од 120^0 или 1/3 пуног круга.

Према томе, покретни круг изврши 1/3 обртаја котрљајући се по трећини периферије сваког непокретног круга. Непокретних кругова има укупно 6; отуда произлази да ће покретни круг извршити само $1/3 \cdot 6 = 2$ обртаја.

Добија се резултат који се не слаже с резултатима посматрања. Али, „чињенице су тврдоглаве“. Ако рачун није потврђен посматрањем, значи да је у рачуну грешка.

Нађите грешку у наведеним расуђивањима.

Решење

Ствар је у томе што, кад се круг котрља без клизања по праволиниском отсечку чија је дужина 1/3 обима покретног круга, тада он заиста изврши 1/3 обртаја око свог центра. То тврђење не важи, не одговара стварности ако се круг котрља по луку макоје криве линије. У посматраном задатку покретни круг, котрљајући се дуж лука који је 1/3 његове периферије, изврши не 1/3 обртаја већ 2/3 обртаја и, према томе, пошто пређе 6 таквих лукова, он изврши

$$6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \text{ обртаја!}$$

У то се можете уверити и својим очима:

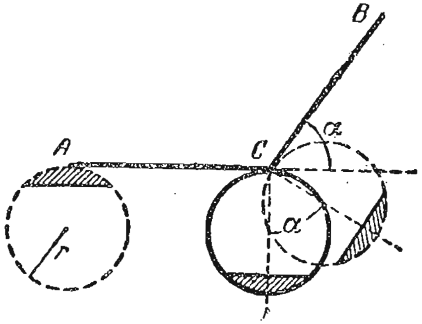
На сл. 108 је испрекидано обележен положај покретног круга пошто се прекотрљао дуж лука *AB* ($= 60^0$) непокретног круга, тј. дуж лука који је 1/6 обима круга. У новом положају круга највише место на његовој периферији заузима не тачка *A* већ тачка *C*, што, како је лако видети, одговара обртању тачака круга за 120^0, тј. за 1/3 пуног обртаја. Путу од 120^0 одговараће 2/3 пуног обртаја покретног круга.

Дакле, ако се круг котрља дуж криволиниске (или изломљене) путање, он не прави исти број обртаја као онда кад се котрља дуж праволиниске путање исте дужине.

* * *

Задржимо се још мало на геометриској страни те чудновате чињенице, утолико пре што објашњење које се обично за то даје није увек убедљиво.

Нека се круг полупречника r котрља по правој. Он изврши један обртај на отсечку AB чија је дужина једнака обиму покретног круга ($2\pi r$). Преломимо отсечак AB у његовој средини C (сл. 109) и део CB заокренимо за угао α у односу на првобитни положај.



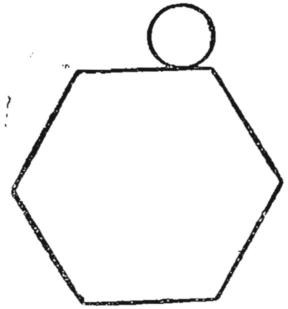
Сл. 109. Како долази до допунског обртања приликом котрљања круга по изломљеној линији

Сад круг, пошто изврши половину обртаја, долази до темена C и, да би заузео такав положај да у тачки C додирује отсечак CB, мора се заједно са својим центром обрнути за угао једнак углу α (ти углови су једнаки јер су им краци узајамно нормални).

У току овог обртања круг се котрља без померања дуж отсечка. Ето, то је оно што у овом случају чини додатак пуном обртају у поређењу с котрљањем дуж праве.

Допунски обртај је онолики део пуног обртаја колики је део пуног угла угао α, тј. $\frac{\alpha}{2\pi}$. Дуж отсечка CB круг такође изврши половину обртаја, тако да при кретању дуж изломљене линије ACB он изврши укупно $1+\frac{\alpha}{2\pi}$ обртаја.

Сада није тешко претставити себи колико обртаја изврши круг који се креће споља дуж страница испупченог правилног шестоугла (сл. 110). Очигледно, он изврши толико обртаја колико би се пута обрнуо на праволиниском путу дужине једнаке обиму (тј. збиру страница) шестоугла плус број обртаја који је једнак збиру спољашњих углова шестоугла подељених са 2π. Како је збир спољашњих углова сваког испупченог многоугла сталан и једнак 4 права угла или 2π, то је $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.



Сл. 110. Колико ће обртаја више начинити круг ако се котрља по ивици неког многоугла него кад се котрља по његовој исправљеној контури?

На тај начин обилазећи шестоугао, а такође и било који испупчени многоугао, круг увек изврши један обртај више неголи при кретању дуж праволиниског отсечка једнаког обиму многоугла.

Ако му се број страница неограничено удвостручава, правилни испупчени многоугао се приближава кругу те, према томе, све што је речено за многоугао важи и за круг. Ако се, например, у складу са првобитно постављеним задатком, један круг котрља дуж лука од 120^0 једнаког му круга, тада тврђење да покретни круг притом изврши не 1/3 већ 2/3 обртаја постаје и геометриски потпуно јасно.

ДЕВОЈЧИЦА НА КОНОПЦУ

Кад се круг котрља дуж неке праве или криве која с њим лежи у једној равни, тада се и свака тачка круга креће у равни, тј., како се каже, има своју путању (трајекторију).

Сл. 111. Циклоида — путања тачке A на кружној линији која се котрља без клизања по правој линији

Пратите трајекторију било које тачке круга који се котрља дуж праве или круга и видећете најразноврсније криве*).

Неке од њих приказане су на сл. 111 и 112.

Поставља се питање: може ли тачка круга који се котрља по унутрашњој страни периферије другог круга (сл. 112) описати не неку криву већ праву? На први поглед то изгледа немогућно.

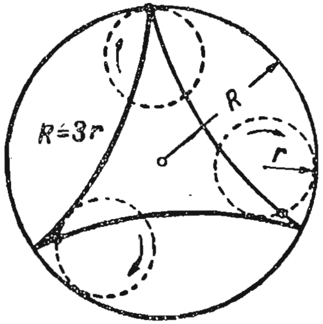
Међутим, баш такву конструкцију сам ја видео својим очима. То је била играчка — „девојчица на конопцу“. И ви је можете

---

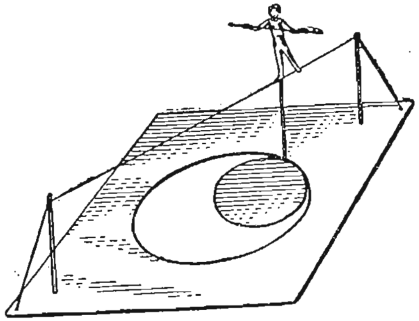
*) Много корисног и интересантног, а такође и примере који се односе на то питање читалац ће наћи у интересантној књизи Г. Н. Бермана „Циклоида“, Гостехиздат, 1954.

лако начинити. На чврстом картону или фурниру нацртајте круг полупречника 30 cm тако да остане са стране доста места и један од пречника продужите на обе стране.

На продужецима пречника пободите по једну иглу и у њих удените конац, затегните и оба му краја причврстите за картон (фурнир). Нацртани круг исеците и у тако настали отвор ставите други круг од картона, с пречником од 15 cm. У сами руб тог малог круга пободите чиоду, као на сл. 113, изрежите од чврсте хартије фигуру девојчице-акробаткиње и прилепите јој ногу за главицу чиоде.



Сл. 112. Троврха циклоида — путања тачке на кружној линији која се котрља са унутрашње стране по већем кругу, при чему је $R = 3r$



Сл. 113. На покретном кругу постоје тачке које се крећу праволиниски

Покушајте сада да котрљате мали круг дуж руба кружног отвора; глава чиоде, а заједно с њом и фигура девојчице, клизиће час напред час назад по затегнутом концу. То се може објаснити једино тиме да се тачка покретног круга у коју је забодена чиода креће по пречнику кружног отвора.

Али зашто у аналогном случају, приказаном на сл. 112, тачка покретног круга описује не праву већ криву линију (ова се зове хипоциклоида)? Сва је ствар у односу пречника великог и малог круга.

Задатак

Докажите да се, ако се унутар великог круга котрља дуж његове периферије круг двапут мањег пречника, за време тог кретања макоја тачка на периферији малог круга креће по отсечку који је пречник великог круга.

Решење

Ако је пречник круга O_1 двапут мањи од пречника круга O (сл. 114), тада се ма у коме тренутку кретања круга O_1 једна од његових тачака налази у центру круга O.

Пратићемо кретање тачке A.

Нека је мали круг котрљајући се прешао лук AC.

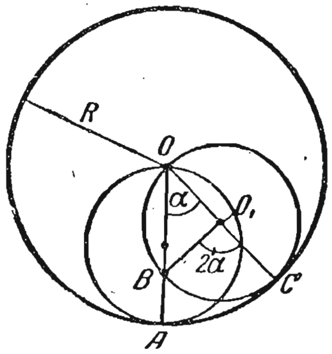
Где ће бити тачка A у новом положају круга O_1?

Очигледно, она се мора налазити у таквој тачки B његове периферије да су луци AC и BC једнаки (круг се котрља без клизања). Нека је $OA = R$ и $\sphericalangle AOC = \alpha$. Тада је $AC = R\alpha$; према томе, и $BC = R\alpha$, али како је $O_1C = R/2$, тада је $\sphericalangle BO_1C = \frac{R\alpha}{R/2} = 2\alpha$, па је $\sphericalangle BOC$, као периферијски угао, једнак $2\alpha/2 = \alpha$, тј. тачка B је остала на зраку OA.

* * *

Овде описана играчка претставља уствари примитиван механизам за трансформисање обртног кретања у праволиниско.

Конструисање таквих механизама (они се називају инверзорима) интересује техничаре-механичаре још од времена уралског механичара И. И. Ползунова, једног од проналазача парне машине. Обично су ти механизми који тачки саопштавају праволиниско кретање конструисани на принципу преносника.



Сл. 114. Геометриско објашњење играчке „девојчица на жици“

Веома велики допринос математичкој теорији механизама дао је велики руски математичар Пафнутиј Л. Чебишов (1821—1894). Он је био не само математичар већ и истакнути механичар. Сам је конструисао модел „самоходне“ машине (она се и данас чува у Академији наука СССР), механизам наслоњаче која се сама љуља, у то време најбољу рачунску машину — аритмометар итд.

ПУТ ПРЕКО СЕВЕРНОГ ПОЛА

Ви, сигурно, знате за чувени лет хероја Совјетског Савеза М. Громова и његових другова од Москве до Сан-Џасинта преко Северног пола, када је за 62 часа и 17 минута лета М. Громов освојио два светска рекорда у лету без спуштања: у правој линији (10 200 km) и по изломљеној линији (11 500 km).

Шта мислите, да ли се заједно са Земљом обртао око њене осе и авион Громова и другова који су прелетели преко Пола? То се питање често чује, али се не чује увек и тачан одговор. Сваки авион, па и онај који лети преко Пола, безусловно мора учествовати у обртању Земљине лопте. До тога долази зато што је авион у лету одвојен само од Земљиног тла, али остаје везан за њену атмосферу и ова га вуче да се обрће око осе наше планете.

Према томе, летећи преко Северног пола из Москве у Америку авион се у исто време обртао заједно са Земљом око њене осе. Како изгледа траса тог пута?

Да би се и на то питање тачно одговорило, треба имати у виду да, кад говоримо да се „тело креће“, то значи да се мења положај датог тела у односу на нека друга тела. Питање о траси и уопште о кретању неће имати смисла ако притом није дат (или се, бар, не подразумева), како то кажу математичари, систем референције или, просто речено, тело у односу на које се кретање врши.

У односу на Земљу авион М. Громова се кретао скоро дуж меридијана Москве. Меридијан Москве, као и сваки други, обрће се заједно са Земљом око њене осе, обртао се и авион који се држао линије меридијана за све време лета, али за посматрача са Земље то кретање не утиче на трасу пута, јер се оно врши већ у односу на неко друго тело, а не на Земљу.

Према томе, за нас, чврсто везане за Земљу, траса тог лета преко Северног пола је лук великог сферног круга, ако се сматра да се авион кретао тачно изнад меридијана и да се притом налазио стално на једнаком отстојању од центра Земље.

Сада ћемо питање поставити овако: имамо кретање авиона у односу на Земљу, и знамо да се авион и Земља заједно обрћу око Земљине осе, тј. имамо кретање авиона и Земље у односу на неко треће тело; како ће изгледати траса лета за посматрача везаног за то треће тело?

Да најпре мало упростимо тај необични задатак. Замислимо поларну област наше планете као раван котур који лежи у равни нормалној на Земљину осу. Нека је та замишљена раван оно „тело“ у односу на које се котур окреће око Земљине осе и нека се дуж једнога од пречника тог котура равномерно креће мали авион-макета који се навија и који претставља авион који лети изнад меридијана преко Северног пола.

Каквом ће линијом у нашој равни бити претстављен пут авиона-макете (тачније речено, неке тачке те макете, например, њеног тежишта)?

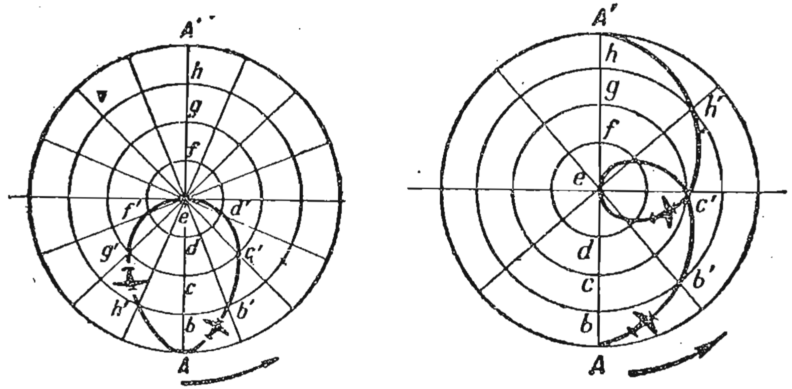
Време за које авион-макета може прећи с једног до другог краја пречника зависи од његове брзине.

Размотрићемо три случаја:

1) авион-макета прелази свој пут за 12 часова;
2) авион-макета прелази тај пут за 24 часа;
3) тај исти пут авион-макета прелази за 48 часова.

Котур у свим случајевима изврши пуни обртај за 24 часа.

Први случај (сл. 115). Авион-макета прелази пречник котура за 12 часова. Котур изврши за то време половину обртаја, тј. обрне се за 180°, а тачке A и A' узајамно замене места. На сл. 115 пречник је подељен на 8 једнаких делова, тако да сваки од њих авион пређе за 12 : 8 = 1,5 час. Да видимо где ће се налазити авион 1,5 час после почетка кретања. Кад се котур не би обртао, авион би, кренувши од тачке A, после 1,5 часа, стигао



Сл. 115 и 116. Криве које у непокретној равни описује тачка кад учествује у двама кретањима

у тачку b. Али, котур се обрће и за 1,5 час обрнуће се за $180^0 : 8 = 22{,}5^0$. Притом ће се тачка b котура померити у тачку b'. Посматрач који стоји на самом котуру и обрће се заједно с њим не би запазио то обртање и видео би само то да се авион-макета померио из тачке A у тачку b. Али, посматрач који се налази ван котура и не учествује у његовом обртању, видео би друго: за њега би се авион померио дуж криволиниске путање из тачке A у тачку b'. После наредног 1,5 часа би посматрач који стоји ван котура видео авион у тачки c'. У току следећег 1,5 часа авион би се, за њега, померио дуж лука $c'd'$, а после још 1,5 час он би дошао у центар e.

Пратећи даље кретање авиона посматрач који стоји ван котура видеће нешто сасвим неочекивано: авион описује криву $e'f'g'h'A$ и његово кретање, маколико то чудно изгледало, завршава се не на супротном крају пречника већ у полазној тачки.

Одгонетка те неочекиване појаве је веома проста: за шест часова путовања авиона по другој половини пречника тај полупречник успева да се обрне заједно с котуром за 180^0 и да заузме положај прве половине пречника. Авион се обрће заједно с котуром чак и у оном тренутку кад он пролази изнад његовог центра. Разуме се, авион се не може цео сместити у центар котура; само једна његова тачка поклапа се са центром и у одговарајућем тренутку он се цео обрће заједно с котуром око те тачке. То се често догађа и са авионом у тренутку кад он лети над Земљиним полом. Према томе, путовање авиона-макете дуж пречника котура од једног краја до другог разним посматрачима изгледа различито. Ономе који стоји на котуру и обрће се заједно с њим, тај пут изгледа праволиниски. Али, непокретни посматрач, који не учествује у обртању котура, види кретање авиона по криволиниској путањи која је приказана на сл. 115 и потсећа на контуру капи.

Исту такву криву видео би свако од вас ако би, претпоставимо, из центра Земље посматрао лет авиона у односу на замишљену раван нормалну на Земљину осу, под фантастичним условом да је Земља прозрачна, а ви и раван не учествујете у њеном обртању, и кад би лет посматраног авиона преко Пола трајао 12 часова.

Ту имамо интересантан пример слагања двају кретања.

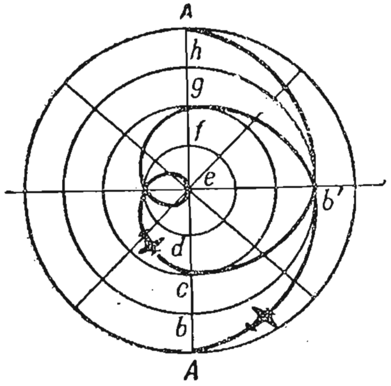
Уствари пак, лет из Москве преко Северног пола до дијаметрално супротне тачке на истој паралели није трајао 12 часова, те ћемо се зато сада зауставити на анализирању још једног таквог припремног задатка.

Други случај (сл. 116). Авион-макета прелази пречник за 24 часа. За то време котур изврши пун обртај, и тада ће за посматрача непокретног у односу на котур путања којом се авион-макета креће имати облик криве претстављене на сл. 116.

Трећи случај (сл. 117). Котур као и раније изврши пун обртај за 24 часа, али авион-макета путује дуж пречника од једног до другог краја 48 часова.

Овога пута осмину пречника авион-макета прелази за $48 : 8 = 6$ часова.

За тих 6 часова котур се обрне за четвртину пуног обртаја — за 90^0. Зато ће се после шест часова кретања авион померити дуж пречника у тачку b (сл. 117), али ће обртање котура пренети ту тачку у b'. После још 6 часова авион ће доћи у тачку g итд. За 48 часова авион прелази цео пречник, а котур изврши 2 пуна обртаја. Резултанту тих двају кретања непокретни посматрач види у облику необичне криве која је на сл. 117 јаче извучена.



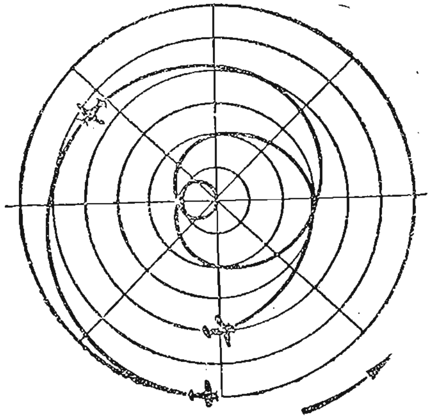
Сл. 117. Још једна крива која настаје слагањем двају кретања

Малочас разматрани случај приближава нас реалним условима лета преко Северног пола. За лет од Москве до Северног пола Громову је било потребно око 24 часа; зато би посматрач који би се налазио у центру Земље тај део трасе видео као криву скоро идентичну с првом половином криве на сл. 117. Што се тиче друге етапе Громовљевог лета, она је трајала отприлике

1,5 пут дуже, а сем тога је растојање од Пола до Сан-Џасинта такође 1,5 пут веће од растојања од Москве до Северног пола. Зато би непокретни посматрач трасу друге етапе пута видео као криву истог облика као што је и путања прве етапе, али 1,5 пут дужу.

Каква се крива напослетку добија показано је на сл. 118.

Многе ће можда забринути околност да су почетна и крајња тачка пута показане на тој слици у тако блиском суседству. Али, не треба губити из вида да то цртеж показује не истовремени положај Москве и Сан Џасинта, већ положаје које раздваја временски размак од 2,5 дана.



Сл. 118. Путања лета Москва—Сан-Џасинто онаква какву би видео посматрач који не учествује ни у лету ни у обртању Земље

Дакле, ето какав би отприлике облик имала траса Громовљевог лета преко Северног пола ако би се тај лет могао посматрати, например, из центра Земљине лопте. Имамо ли права да ту сложену петљу називамо стварном путањом лета преко Северног пола, за разлику од релативне путање, која се претставља на картама? Не, јер је и то кретање такође релативно; оно је релативно у односу на неко тело које не учествује у обртању Земље око осе, исто као што је уобичајено претстављање трасе лета релативно у односу на површину Земље која се обрће.

Кад бисмо тај исти лет могли пратити са Месеца или Сунца*), траса лета би нам изгледала другачија.

Месец нема, као Земља, дневно обртање, али он зато обилази нашу планету за месец дана. За 62 часа лета Москва—Сан-Џасинто Месец је описао око Земље лук од 30⁰, и то не би могло а да, за посматрача са Месеца, не утиче на трајекторију лета. На облику трасе авиона посматране у односу на Сунце показао би се утицај трећег кретања — револуције Земље око Сунца.

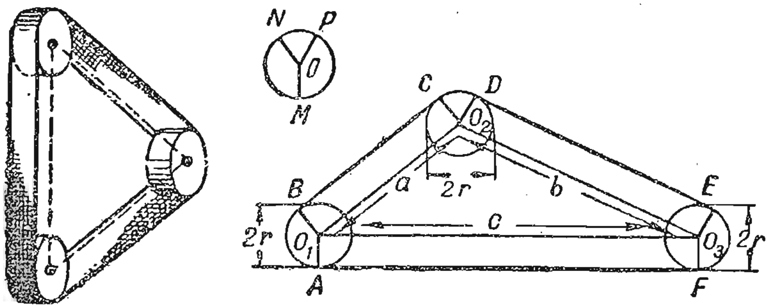
„Не постоји кретање појединачног тела, већ постоји само релативно кретање“ — каже Ф. Енгелс у „Дијалектици природе“. Горе разматрани задатак у то нас на најобичнији начин уверава.

ДУЖИНА ТРАНСМИСИОНОГ КАИША

Кад су ученици занатске школе завршили свој рад, мајстор им је на растанку дао да, ако желе, реше овакав задатак.

Задатак

— За један од нових погона наше радионице, — рекао је мајстор, — треба сашити трансмисиони каиш, само не преко два точка, како се то често дешава, већ одмах преко три, — и мајстор показа ученицима схему трансмисије.



Сл. 119. Схема трансмисије. Како одредити дужину трансмисионог каиша користећи се само наведеним димензијама?

— Сва три точка, — настави он, — имају једнаке димензије. Њихови пречници и растојања између оса показани су на схеми.

---

*) Тојест, у односу на координатни систем везан за Месец или Сунце.

Како ћете, знајући те размере и не вршећи више никаква допунска мерења, брзо одредити дужину трансмисионог каиша?

Ученици су се замислили. Убрзо је један рекао: — По мом мишљењу, овде је сва тешкоћа у томе што на цртежу нису наведене дужине лукова AB, CD и EF дуж којих каиш належе на сваки точак. Да би се одредила дужина сваког од тих лукова треба знати величину одговарајућег централног угла и, чини ми се, без угломера нећемо моћи решити задатак.

— Углови о којима говориш, — одговори мајстор, — могу се израчунати и по димензијама наведеним на цртежу, помоћу тригонометриских формула и таблица, али то је дуг и компликован пут. Овде ни угломер није потребан као што нема потребе да се зна дужина сваког од тих лукова појединачно; довољно је знати...

— Њихов збир, — прихватише неки од ученика који су схватили у чему је ствар.

— А сад идите кући и доносите ми сутра решење.

Не журите се, читаоче, да дознате решење које су мајстору донели његови ученици. После свега што је мајстор рекао тај задатак ћете лако решити и сами.

Решење

Заиста, дужина трансмисионог каиша одређује се веома просто: збиру растојања између осовина точкова треба још додати обим круга једног точка. Ако је дужина каиша l, тада је

$$l = a + b + c + 2\pi r.$$

Да је збир лукова с којима се каиш додирује једнак обиму једног точка — то су се сетили скоро сви који су радили задатак — али сви нису успели да то и докажу. Од довољно образложених донетих решења мајстор је као најбоље признао следеће.

Нека су BC, DE и FA тангенте кругова (сл. 119). Повуцимо полупречнике до додирних тачака. Како периферије точкова имају једнаке полупречнике, то су фигуре O_1BCO_2, O_2DEO_3 и O_1O_3FA правоугаоници, па је, према томе, $BC + DE + FA = a + b + c$. Остаје да се покаже да збир лукова $AB + CD + EF$ износи пун обим круга.

У том циљу конструишимо круг O полупречника r (сл. 119, горе). Повуцимо $OM \| O_1A$, $ON \| O_1B$ и $OP \| O_2D$; тада је $\sphericalangle MON = \sphericalangle AO_1B$, $\sphericalangle NOP = \sphericalangle CO_2D$ и $\sphericalangle POM = \sphericalangle EO_3F$, као углови с паралелним крацима.

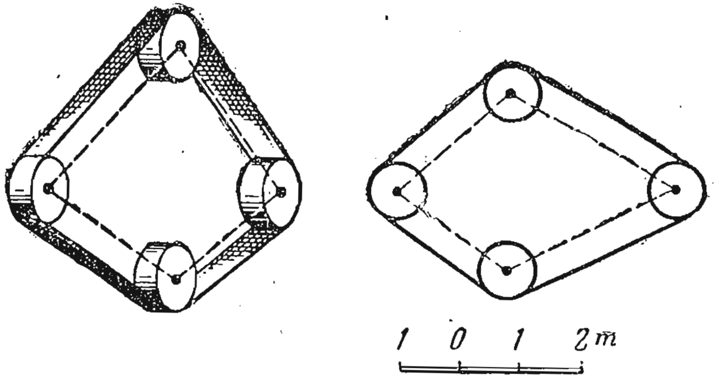
Одатле произлази да је $AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r$.

Дакле, дужина каиша је $l = a + b + c + 2\pi r$.

На исти начин може се показати да ће не само за три точка него и за било колико једнаких точкова дужина трансмисионог каиша бити једнака збиру растојања између њихових осовина и обима једног точка.

Задатак

На сл. 120 претстављена је схема трансмисије преко четири једнака точка (точкови који се између њих налазе нису нацртани, јер не утичу на решење задатка). Користећи се размером датом на цртежу видите са цртежа неопходне величине и израчунајте дужину трансмисионог каиша.



Сл. 120. Прочитајте са цртежа потребне величине и израчунајте дужину трансмисионог каиша

ЗАДАТАК О ДОСЕТЉИВОЈ ВРАНИ

У школским хрестоматијама често се налази занимљива причица о досетљивој врани. У тој старој причи реч је о жедној врани која је нашла крчаг с водом. Воде је у крчагу било мало, кљуном се није могла дохватити, али је врана умела да се снађе у невољи: почела је да у крчаг убацује камичке. Последица те досетке била је то што се ниво воде подигао до руба крчага и врана је могла да се напије воде.

Ми овде нећемо расправљати о томе да ли је врана могла испољити такву сналажљивост. Тај случај нас интересује само са геометриске стране. Он нам даје повод да размотримо следећи задатак.

Задатак

Да ли би врана могла угасити жеђ кад би воде било до половине крчага?

Решење

Анализа задатка увериће нас да начин који је врана применила не доводи увек до циља без обзира на првобитни ниво воде у крчагу.

Једноставности ради узмимо да крчаг има облик правоугаоне призме, а да камичци претстављају лоптице једнаке величине. Лако је схватити да се вода подиже изнад нивоа камичака само у оном случају кад првобитна количина воде има запремину већу од целокупног простора између камичака. Ми ћемо израчунати колики је тај простор. Најпростије је тај рачун извести кад су лоптице распоређене тако да центар сваке од њих лежи на истој вертикалној правој на којој и центри лоптица које се налазе изнад и испод ње. Нека је пречник лоптице d и, према томе, њена запремина $\pi\, d^3/6$, а запремина око ње описане коцке d^3. Разлика тих запремина, $d^3 - \pi\, d^3/6$, је запремина неиспуњеног дела коцке, а однос

$$\frac{d^3 - \pi d^3/6}{d^3} = 0{,}48$$

показује да неиспуњени део сваке коцке износи 0,48 њене запремине. Исто толики део запремине крчага, тј. нешто мање од половине, чини и збир запремина свих празнина. Ствар се мало мења ако крчаг има призматичан облик, а каменчићи немају лоптаст облик. У свим случајевима може се тврдити да, ако је првобитно вода била у крчагу наливена испод половине, врана не би успела да убацивањем каменчића подигне воду до ивице.

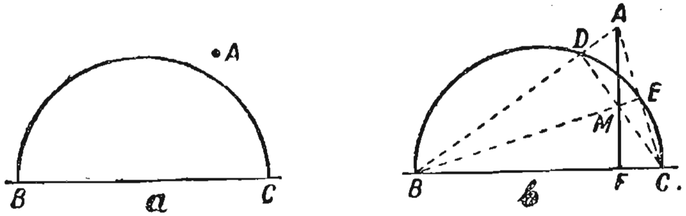
Кад би врана била јача — толико да стресе каменчиће у крчагу и на тај их начин збије — она би успела да воду подигне до висине која је више него двапут већа од првобитног нивоа. Али, она није кадра да то учини те се, ако претпоставимо да су каменчићи растресито распоређени, нисмо много удаљили од стварних услова. Сем тога су крчази обично бокасти у средини, што такође умањује висину до које се вода пење и поткрепљује тачност нашег закључка: кад би у крчагу било воде мање од половине, врана је се не би могла напити.

ГЛАВА ДЕСЕТА

ГЕОМЕТРИЈА БЕЗ МЕРЕЊА И РАЧУНАЊА

КОНСТРУКЦИЈЕ БЕЗ ШЕСТАРА

При решавању геометриских конструктивних задатака обично се служимо лењиром и шестаром. Сада ћемо видети, међутим, да се понекад може проћи и без шестара и у оним случајевима у којима га у први мах сматрамо неопходним.



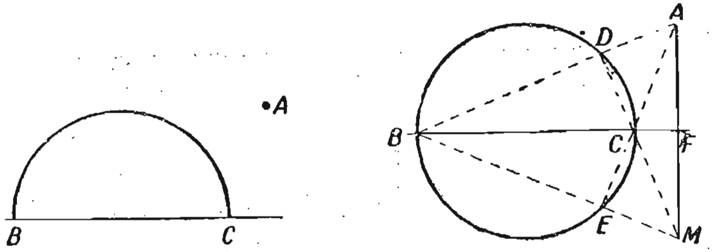
Сл. 121. Конструктивни задатак и његово решење. Први случај.

Задатак

Из тачке A (сл. 121a) ван датог полукруга треба, без помоћи шестара, спустити на пречник тог полукруга нормалу. Положај центра полукруга није познат.

Решење

Овде ћемо искористити особину троугла да се све његове висине секу у једној тачки. Спојмо A са B и C; добићемо тачке D и E (сл. 121b). Праве BE и CD су, очигледно, висине троугла ABC. Трећа висина, тражена нормала пречника BC, мора пролазити кроз пресечну тачку двеју других, тј. кроз M. Ако помоћу лењира повучемо праву кроз тачке A и M, испунићемо захтев истакнут у задатку: да се не служимо шестаром. Ако тачка A лежи тако да тражена нормала пада на продужење пречника (сл. 122),



Сл. 122. Исти задатак. Други случај.

тада ће се задатак моћи решити само ако је дат пун круг, а не полукруг. Сл. 122 показује да се у овом случају решавање не разликује од оног које нам је већ познато, само се овде висине троугла ABC секу не у троуглу, него ван троугла.

ТЕЖИШТЕ ПЛОЧЕ

Задатак

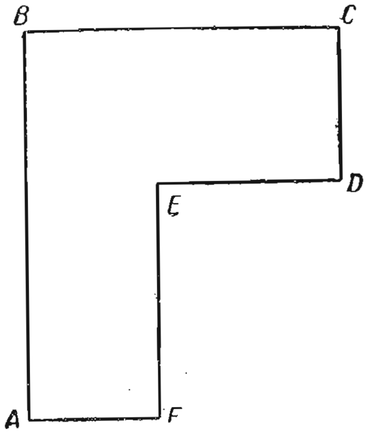
Вероватно знате да се тежиште танке хомогене плоче која има облик правоугаоника или ромба налази у пресеку дијагонала; ако је плоча троугаона, тежиште се налази у пресеку тежишних линија, а ако је кружна, у центру тог круга.

Покушајте сада да се сетите како бисте путем конструкције нашли тежиште плоче састављене од двају произвољних правоугаоника у облику слова Г (сл. 123). Сагласимо се да се притом служимо само лењиром и да ништа не меримо и не рачунамо.

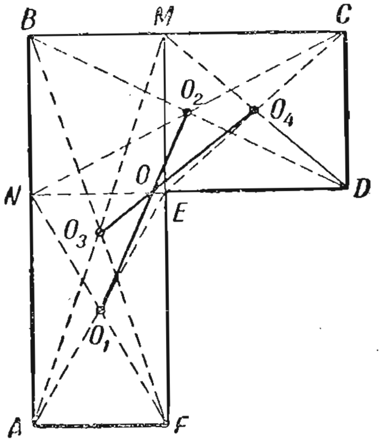
Решење

Продужимо страницу DE до пресека са AB у тачки N и страницу FE до пресека са BC у тачки M (сл. 124). Дату фигуру ћемо најпре посматрати као састављену од правоугаоника $ANEF$

и $NBCD$. Тежиште сваког од њих налази се у пресецима O_1 и O_2 њихових дијагонала. Према томе, тежиште целе фигуре налази се на правој O_1O_2. Сада ћемо ту исту фигуру посматрати као састављену од правоугаоника $ABMF$ и $EMCD$, чија се тежишта налазе у пресецима O_3 и O_4 њихових дијагонала. Тежиште целе фигуре лежи на правој O_3O_4. Према томе, тежиште је у тачки O у којој се секу праве O_1O_2 и O_3O_4. Све те конструкције се заиста изводе помоћу лењира.



Сл. 123. Користећи се само лењиром нађите тежиште нацртане плоче



Сл. 124. Тежиште плоче је нађено

НАПОЛЕОНОВ ЗАДАТАК

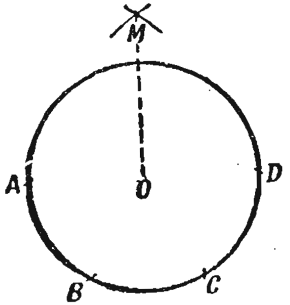
Досад смо се бавили конструкцијама које се изводе само помоћу лењира, без помоћи шестара (под условом да је један круг на цртежу унапред дат). Сада ћемо размотрити неколико задатака у којима је постављено обрнуто ограничење: забрањује се служење лењиром, а све конструкције треба извршити само шестаром. Један од тих задатака заинтересовао је Наполеона I. Кад је прочитао књигу италијанског математичара Маскеронија о таквим конструкцијама, он је француским математичарима поставио следећи задатак:

Задатак

Дати круг поделити на четири једнака дела не служећи се лењиром. Дат је положај центра круга.

Решење

Нека треба поделити на четири дела круг O (сл. 125). Од произвољне тачке A преносимо по кругу три пута полупречник круга; добијамо тачке B, C и D. Лако је видети да је растојање AC — тетива лука који је трећина пуног круга — страница уписаног једнакостраничног троугла и, према томе, једнако $r\sqrt{3}$, где је r полупречник круга. AD је, очигледно, пречник круга. Из тачака A и D полупречником AC опишемо кружне луке који се секу у тачки M. Показаћемо да је растојање MO једнако страници квадрата уписаног у наш круг. У троуглу AMO катета $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$, тј. страници уписаног квадрата. Сада остаје да се отвором MO шестара обележе узастопно на кружној линији четири тачке да би се добила темена уписаног квадрата, која, очигледно, деле круг на четири једнака дела.



Сл. 125. Само шестаром поделити круг на четири једнака дела

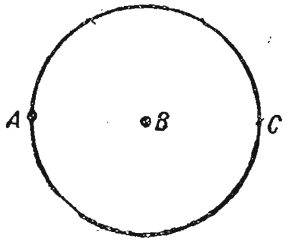
Ево другог, лакшег задатка исте врсте.

Задатак

Без лењира увећати растојање између датих тачака A и B (сл. 126) пет пута — уопште, задати број пута.

Решење

Из тачке B полупречником AB опишимо круг (сл. 126) Дуж тог круга пренесимо почев од тачке A растојање AB три пута; добијамо тачку C која је, очигледно, дијаметрално супротна тачки A. Растојање AC је двапут веће од растојања AB. Кад из



Сл. 126. Како се само помоћу шестара може растојање између тачака A и B увећати n пута (n је природан број)

C полупречником BC опишемо круг, можемо на исти начин наћи тачку дијаметрално супротну тачки B и, према томе, удаљену од A за троструко растојање AB, итд.

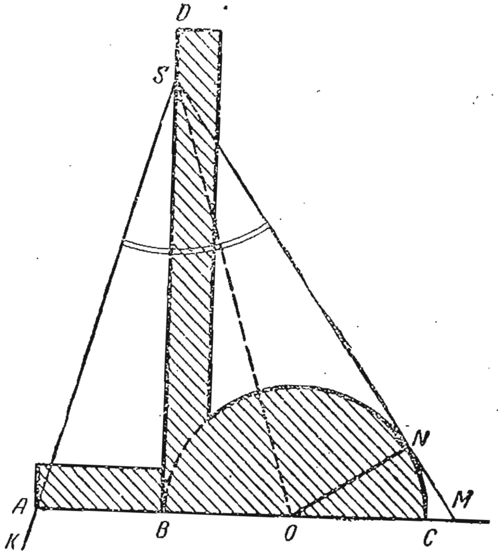
НАЈПРОСТИЈИ ТРИСЕКТОР

Служећи се само шестаром и лењиром без дужинске поделе не може се произвољно задати угао поделити на три једнака дела. Али, математика нимало не одбацује могућности да се то дељење изведе помоћу неких других инструмената. За ту сврху је пронађено много разних инструмената, који се зову трисектори. Најпростији трисектор можете и ви сами лако направити од чврсте хартије, картона или танког лима. Он ће вам послужити као помоћни инструмент за цртање.

На сл. 127 трисектор је (осенчена фигура) претстављен у природној величини. Правоугаони део AB једнак је, по дужини, полупречнику полукруга, а правоугаони део BD образује прав угао с правом AC; он додирује полукруг у тачки B; дужина тог дела је произвољна. На истој слици је показана и употреба трисектора.

Нека, например, треба поделити на три једнака дела угао KSM (сл. 127). Трисектор се намести тако да се теме S угла налази на правој BD, један крак угла пролази кроз тачку A, а други крак додирује полукруг*). Затим се повуку праве SB и SO и дељење датог угла на три једнака дела је завршено.

Да бисмо то доказали, спојмо једном дужи центар полукруга O и тачку додира N. Лако је уверити се да је троугао ASB подударан троуглу SBO, а троугао SBO подударан троуглу OSN. Из подударности та три троугла произлази да су углови ASB, BSO и OSN једнаки међу собом, што је и требало доказати.



Сл. 127. Трисектор и схема његове употребе

Такав начин извођења трисекције угла није чисто геометриски — пре га можемо назвати механичким.

ЧАСОВНИК-ТРИСЕКТОР

Задатак

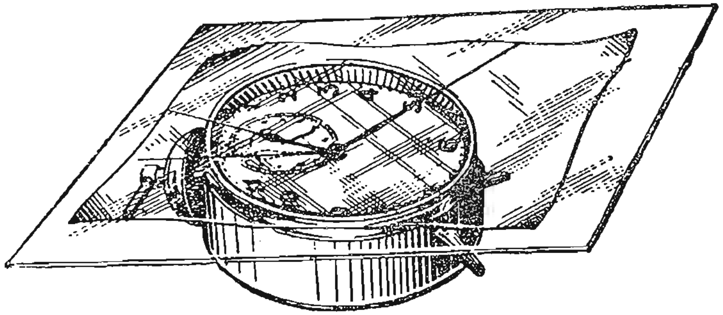
Да ли је могућно помоћу шестара, лењира и часовника дати угао поделити на три једнака дела?

---

*) Могућност таквог уклапања нашег трисектора у дати угао је последица једне просте особине тачака зракова који дати угао деле на три једнака дела: ако из произвољне тачке O зрака SO повучемо отсечке $ON \perp SM$ и $OA \perp SB$ (сл. 127), имаћемо: $AB = OB = ON$. Читалац ће то лако доказати и сам.

Решење

Могућно је. Прецртајте дати угао на провидну хартију и у оном тренутку кад се обе казаљке часовника поклопе поставите цртеж на цифарник тако да се теме угла поклапа са центром обртања казаљки и један крак угла има правац казаљки (сл. 128).



Сл. 128. Часовник-трисектор

У оном тренутку кад се минутна казаљка помери до поклапања с правцем другог крака датог угла (можете је и ви сами обрнути), повуците из темена угла зрак у правцу сатне казаљке. Добићете угао једнак углу за који се обрнула сатна казаљка. Сада помоћу шестара и лењира тај угао двапут увећајте и удвојени угао поново двапут увећајте (начин удвајања угла познат је из геометрије). На тај начин добијени угао је трећина датог угла.

Заиста, кад минутна казаљка опише известан угао α, сатна казаљка се за то време обрне за 12 пута мањи угао, тј. за $\alpha/12$, а кад се овај увећа 4 пута, добија се угао $(\alpha/12) \cdot 4 = \alpha/3$.

ДЕЉЕЊЕ КРУГА

Радиоаматерима, конструкторима, градитељима разних модела и уопште онима који воле да нешто израђују својим рукама понекад се дешава да се замисле над оваквим практичним задатком.

Задатак

Из дате плоче исећи правилан многоугао са задатим бројем страница.

Тај се задатак своди на овакав задатак:

Поделити круг на n једнаких делова, где је n природан број.

* * *

Оставимо засад по страни очигледно решавање постављеног задатка помоћу угломера — то је ипак решавање помоћу очију — и размислимо о геометриском решавању, тј. решавању помоћу шестара и лењира.

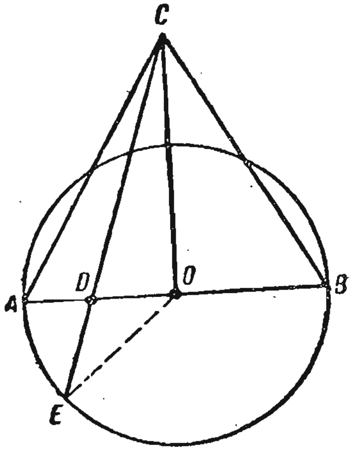
Пре свега поставља се питање на колико се једнаких делова може теориски помоћу шестара и лењира круг тачно поделити. То су питање математичари потпуно решили: дељење круга није могућно на било који број делова*).

Могућно је дељење на: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, ..., 257, ... делова.

Није могућно дељење на: 7, 9, 11, 13, 14, ... делова.

Незгодно је још и то што не постоји јединствени начин извођења конструкције; поступак дељења на, рецимо, 15 делова није исти као поступак дељења на 12 делова итд., а све те поступке није лако упамтити.

Практичару је потребан геометриски начин, па макар и приближан, али довољно прост и општи начин дељења круга на било који број једнаких лукова.



Сл. 129. Приближан геометриски начин поделе круга на n једнаких делова

Нажалост, у уџбеницима геометрије се том питању још увек не посвећује довољно пажње; стога ћемо овде показати један интересантан начин приближног геометриског решавања постављеног задатка.

---

*) Појединости видети у уџбенику геометрије.

Нека, например, треба поделити круг (сл. 129) на девет једнаких делова. Конструишимо на једном од пречника AB круга једнакостранични троугао ACB и поделимо пречник AB тачком D у односу $AD : AB = 2 : 9$ (у општем случају је $AD : AB = 2:n$).

Спојмо тачке C и D једним отсечком и продужимо овај до пресека с кругом у тачки E. Тада ће лук AE бити отприлике 1/9 круга $\left(\text{у општем случају је } \widehat{AE} = \frac{360^0}{n}\right)$, или, тетива AE ће бити страница правилног уписаног деветоугла (n-тоугла). Релативна грешка је притом једнака око 0,8%.

* * *

Ако изразимо зависност између величине централног угла AOE који се приликом наведене конструкције образује и броја n којим се круг дели, добићемо следећу тачну формулу:

$$\operatorname{tg}(AOE) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 32} - n}{n - 4},$$

која се за велике вредности n може заменити приближном формулом

$$\operatorname{tg}(AOE) \approx 4\sqrt{3} \cdot (n^{-1} - 2n^{-2}).$$

С друге стране, при тачном дељењу круга на n једнаких делова централни угао мора бити једнак $\frac{360^0}{n}$. Упоређујући угао од $\frac{360^0}{n}$ са углом AOE добијамо величину грешке коју чинимо кад лук AE сматрамо n-тим делом кружне линије.

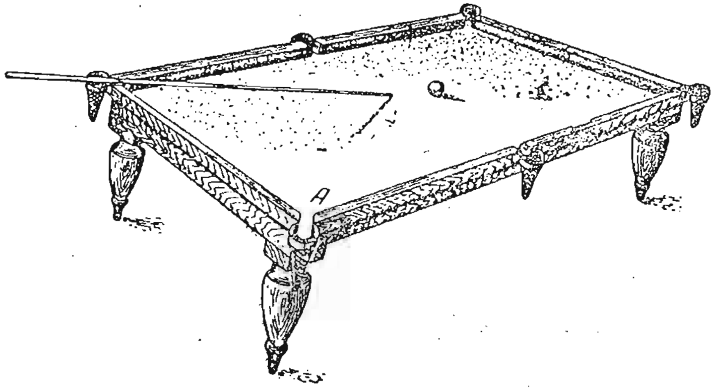
За извесне вредности n добија се оваква таблица:

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
$\frac{360^0}{n}$	120^0	90^0	72^0	60^0	$51^0 26'$	45^0	36^0	18^0	6^0
$\measuredangle AOE$	120^0	90^0	71^0 57	60^0	$51^0 31'$	45^0 11	$36^0 21'$	$18^0 38'$	6^0 26
Грешка у %	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

Као што се из таблице види, на наведени начин може се круг приближно поделити на 5, 7, 8 или 10 делова с малом релативном грешком — од 0,07% до 1%; таква грешка је потпуно допустива у већини практичних радова. Уколико се број n којим се дели повећава, тачност те методе приметно опада, тј. релативна грешка расте, али, како показују испитивања, она ма колико било n не премаша 10%.

ПРАВАЦ УДАРА (ЗАДАТАК О БИЛИЈАРСКОЈ ЛОПТИ)

Послати билијарску лопту у рупу не директним ударцем већ приморати је да се успут одбије од једне, двеју, чак и трију издигнутих ивица стола — то значи, пре свега, „у глави“ решити један геометриски задатак.



Сл. 130. Геометриски задатак на билијарском столу

Важно је да се правилно нађе оком прва тачка удара о ивицу; даљи пут еластичне лопте по добром столу биће одређен законом одбијања („упадни угао једнак је углу одбијања“).

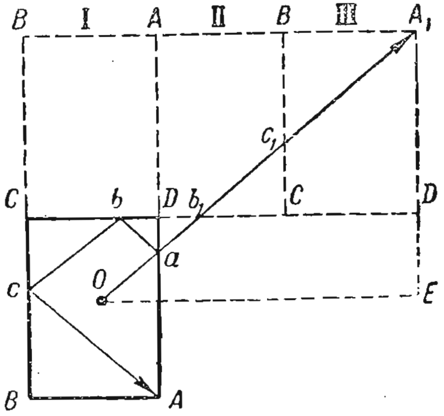
Задатак

Какве вам геометриске претставе могу помоћи да нађете правац удара тако да би лопта која се, например, налази на средини билијарског стола после три одбијања упала у рупу A (сл. 130)?

Решење

Треба да замислите да су уз билијарски сто уз његову краћу страну прикључена још три таква иста стола и да циљате у правцу најдаље рупе трећег од тих замишљених столова.

Сл. 131 помоћи ће вам да схватите то тврђење. Нека је $OabcA$ пут лопте. Ако се „сто" $ABCD$ обрне око CD за 180^0, он ће заузети положај I; ако га затим поново обрнемо за исти угао око AD и још око BC, он ће заузети положај III. После тога ће се рупа A наћи у тачки обележеној словом A_1.



Сл. 131. Замислите да су уз билијарски сто постављена још три иста стола и гађајте у правцу најдаље рупе

Полазећи од очигледне подударности троуглова лако ћемо доказати да је $ab_1 = ab$, $b_1c_1 = bc$ и $c_1A_1 = cA$, тј. да је дужина отсечка OA_1 једнака дужини изломљене линије $OabcA$.

Према томе, циљајући у замишљену тачку A_1 ви ћете лопту натерати да се котрља по изломљеној линији $OabcA$ и она ће пасти у рупу A.

Да анализирамо још и ово питање: Под којим ће углом странице OE и A_1E правоуглог троугла A_1EO бити једнаке?

Лако је утврдити да је $OE = \frac{5}{2}AB$ и $A_1E = \frac{3}{2}BC$. Ако је $OE = A_1E$, тада је $\frac{5}{2}AB = \frac{3}{2}BC$ или $AB = \frac{3}{5}BC$.

На тај начин, ако краћа страна износи 3/5 дуже стране, тада је $OE = EA_1$; у том случају удар у лопту кад се она налази на средини стола може се управити под углом од 45^0 према ивици стола.

„ПАМЕТНА ЛОПТА"

Малочас су нам једноставне геометриске конструкције помогле да решимо задатак у вези с билијарском лоптом, а сад нека та иста билијарска лопта сама реши један занимљив стари задатак.

Зар је то могућно? Па лопта не може да мисли! То је истина, али у оним случајевима кад треба извести неки рачун, при чему је познато које операције и којим редом треба у том циљу извршити, може се тај рачун препустити некој машини која ће га без грешке и брзо извршити. У ту сврху измишљено је много механизама, почев од простог аритмометра па све до најкомпликованијих електричних машина.

У часовима доколице често се људи забављају задатком како да се извесна количина воде из напуњеног суда дате запремине одлије помоћу друга два празна суда чија је запремина такође позната.

Ево једног од многих сличних задатака.

Помоћу два празна суда од 9 l и 5 l одлити 6 l воде из пуног суда од 12 l.

Да бисте тај задатак решили ви, разуме се, не можете да експериментишете с правим судовима. Сва потребна „пресипања" можете извршити на хартији по, рецимо, оваквој схеми:

Суд од 9 l	0	7	7	2	2	0	9	6	6
Суд од 5 l	5	5	0	5	0	2	2	5	0
Суд од 12 l	7	0	5	5	10	10	1	1	6

У сваком ступцу забележен је резултат наредног пресипања.

У првом: напуњен је суд од 5 l, суд од 9 l је празан (0), а у суду од 12 l остало је 7 l.

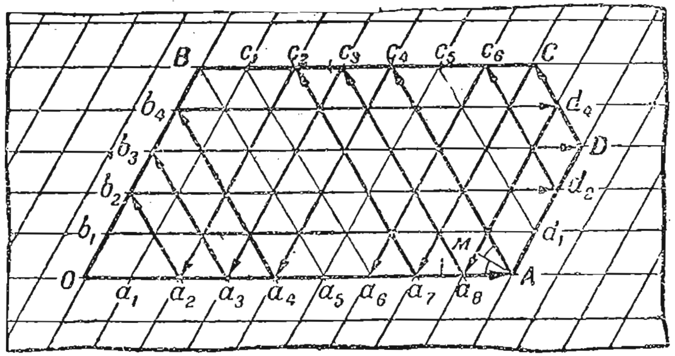
У другом: 7 l из суда од 12 l одлије се у суд од 9 l итд.

Покушајте да нађете своје решење тог задатка, тј. свој поредак пресипања. После низа покушаја ви ћете то несумњиво постићи, јер наведена схема пресипања није једино могућна; међутим, ако усвојите други поредак пресипања, може да их буде више од девет.

У вези с тим биће од интереса разјаснити следеће:

1) Да ли се може утврдити неки одређени поредак пресипања кога бисмо се могли придржавати у свим случајевима, независно од запремине датих судова?

2) Може ли се помоћу два празна суда одлити из трећег суда произвољна могућна количина воде, тј., например, из суда од 12 l помоћу два суда од 9 l и 5 l одлити 1 l воде, или 2 l воде, или 3 l, 4 l итд. до 11 литара?



Сл. 132. Механизам „паметне" лоптице

На сва та питања одговориће „паметна" лоптица ако сада за њу конструишемо специјалан „билијарски" сто.

Извуците на листу хартије мрежу паралелних правих тако да оне граде подударне ромбове са оштрим углом од 60^0 и конструишите фигуру $OBCDA$ онако како је то показано на сл. 132.

Ето, то ће нам бити „билијарски" сто. Ако гурнемо билијарску лопту дуж OA, тада ће она, пошто се од ивице AD одбије тачно по закону одбијања („упадни угао једнак је углу одбијања", тј. $\sphericalangle OAM = \sphericalangle MAC_4$), поћи дуж праве Ac_4 која спаја темена малих ромбова; у тачки c_4 одбиће се од ивице BC и котрљати се дуж праве c_4a_4, затим дуж правих a_4b_4, b_4d_4, d_4a_8 итд.

По услову задатка имамо три суда: од 9 l, 5 l и 12 l.

У складу с тим ми ћемо фигуру конструисати тако да на страници AD има 9 ромбова, на OB 5 ромбова, на AD 3 ромба (12—9 = 3), а на BC 7 ромбова*) (12 — 5 = 7).

Запазимо да је свака обележена тачка на страницама фигуре одвојена одређеним бројем ромбова од страница OB и OA. Например, од тачке c_4 има 4 ромба до OB и 5 ромбова до OA, од тачке a_4 има 4 ромба до OB и 0 ромбова до OA (јер a_4 лежи на OA), од тачке d_4 има 8 ромбова до OB и 4 ромба до OA итд.

На тај начин свака тачка на страницама фигуре коју удара билијарска лопта одређује два броја. Сагласимо се да први од њих, тј. број ромбова који уочену тачку одвајају од OB, претставља број литара воде која се налази у суду од 9 l, а други, тј. број ромбова који ту исту тачку одвајају од OA, претставља количину воде у суду од 5 l. Преостала количина воде налазиће се, очигледно, у суду од 12 l.

Сада је све припремљено за решавање задатка помоћу билијарске лопте.

Пустите лопту опет дуж OA и, дешифрујући сваку тачку на ивици у коју она удари онако како је горе речено (тј. читајући у свакој тачки број ромбова који ту тачку одвајају од OB, одн. OA — прим. прев.), пратите њено кретање бар до тачке a_6 (сл. 132).

Прва тачка удара: A (9,0); то значи да прво пресипање треба да нам да овакву расподелу воде:

Суд од 9 l	9	
Суд од 5 l	0	
Суд од 12 l	3	

---

*) Суд који је у почетку пун воде увек је највећи од три суда. Нека је запремина празних судова a, одн. b, а пуног суда c. Ако је $c \geqq a + b$, тада „билијарски" сто треба конструисати у облику паралелограма са страницама од a и b ромбова.

То је остварљиво.

Друга тачка удара: c_4 (4, 5); то значи да лопта препоручује следећи резултат другог пресипања:

Суд од 9 *l*	9	4	
Суд од 5 *l*	0	5	
Суд од 12 *l*	3	3	

То је такође остварљиво.

Трећа тачка удара: a_4 (4,0); за треће пресипање лопта саветује да се 5 *l* воде поново успе у суд од 12 *l*:

Суд од 9 *l*	9	4	4
Суд од 5 *l*	0	5	0
Суд од 12 *l*	3	3	8

Четврта тачка удара: b_4 (0, 4); резултат четвртог пресипања

Суд од 9 *l*	9	4	4	0		
Суд од 5 *l*	0	5	0	4		
Суд од 12 *l*	3	3	8	8		

Пета тачка: d_4 (8, 4); лопта указује да треба пресути у празан суд од 9 *l*:

Суд од 9 *l*	9	4	4	0	8		
Суд од 5 *l*	0	5	0	4	4		
Суд од 12 *l*	3	3	8	8	0		

Продужите да и даље пратите лопту, па ћете добити овакву таблицу:

Суд од 9 *l*	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
Суд од 5 *l*	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
Суд од 12 *l*	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Дакле, после низа пресипања циљ је постигнут; у два суда налази се по 6 *l* воде. Лопта је решила задатак!

Ако пустите да лопта настави кретање и после удара у тачку a_6, онда вам неће бити тешко да проверите да ће у том случају лопта ударати редом у сваку од обележених тачака на страницама фигуре (и уопште у сва темена ромбова) и да ће се тек после тога вратити у полазну тачку O. То значи да се из суда од 12 *l* може усути у суд од 9 *l* било који (цео) број — од 1 до 9 — литара воде, а у суд од 5 *l* било који (цео број) — од 1 до 5 — литара воде.

Али, лопта је рђаво решила задатак. Ми смо успели да тај задатак решимо у 9 потеза (в. прву таблицу), а лопта га је решила у 18 потеза.

Међутим, лопта нам може дати и решење краће од нашег.

Заиста, гурните је дуж ивице OB (сл. 132) и пратите њено кретање сматрајући да се оно покорава закону одбијања. Кад дође ивицом OB до тачке B, лопта ће се одбити од ивице BC и кренуће праволиниским путем Ba_5. Затим по отсечку a_5c_5, по c_5d_1, по d_1b_1, по b_1a_1, по a_1c_1 и, најзад, по c_1a_6.

Свега 8 одбијања!

Ако свакој тачки удара лопте о ивицу придружимо по два броја онако како смо се раније договорили, добићемо решење задатка у облику следеће таблице:

Суд од 9 *l*	0	5	5	9	0	1	1	6
Суд од 5 *l*	5	0	5	1	1	0	5	0
Суд од 12 *l*	7	7	2	2	11	11	6	6

Лопта је дала најекономичније решење задатка — у 8 потеза.

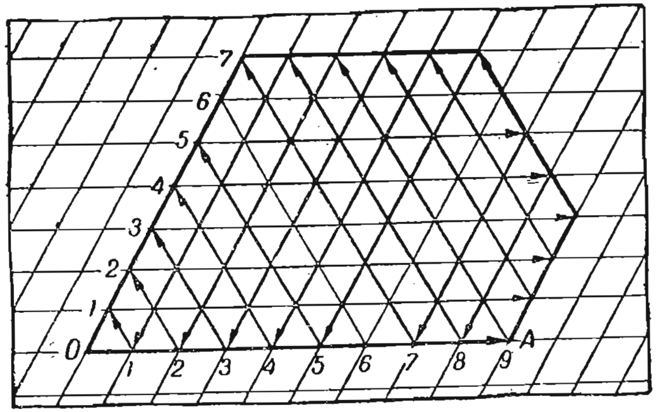
Али задатак те врсте може и да нема траженог решења. Како то лопта открива?

Врло просто: у том случају она се враћа у полазну тачку O не ударивши у потребну тачку.

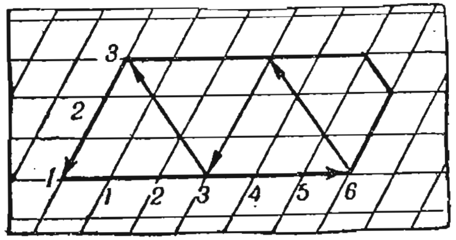
На сл. 133 претстављен је механизам решавања тог задатка за судове од 9 *l*, 7 *l* и 12 *l*:

Суд од 9 *l*	9	2	2	0	9	4	4	0	8	8	1	1	0	9	3	3	0	9	5	5	0	7	7	0
Суд од 7 *l*	0	7	0	2	2	7	0	4	4	0	7	0	1	1	7	0	3	3	7	0	5	5	0	7
Суд од 12 *l*	3	3	10	10	1	1	8	8	0	4	4	11	11	2	2	9	9	0	0	7	7	0	5	5

„Механизам" показује да се из пуног суда од 12 *l* може помоћу два празна суда од 9 *l* и 7 *l* одлити макоји број литара изузев 6 литара воде.



Сл. 133. „Механизам" показује да се из пуног суда од 12 *l* не може одасути 6 *l* помоћу два празна суда од 9 *l* и 7 *l*



Сл. 134. „Механизам" решавања још једног задатка помоћу пресипања

На сл. 134 показан је механизам решавања тог задатка за судове од 3 *l*, 6 *l* и 8 *l*. Овде се лопта после 4 одбијања враћа у полазну тачку *O*. Одговарајућа таблица:

Суд од 6 *l*	6	3	3	0
Суд од 3	0	3	0	3
Суд од 8 *l*	2	2	5	5

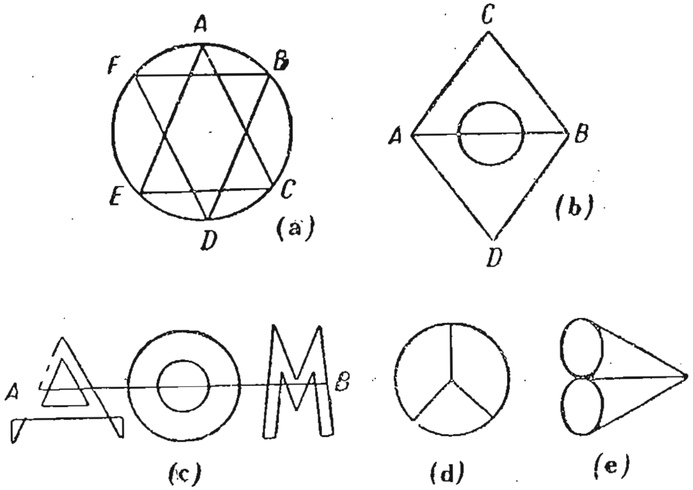
показује да је у том случају немогућно одасути 4 *l* или 1 литар воде из суда од 8 *l*.

На тај начин наш „билијар" са „паметном" лоптом заиста претставља интересантну и оригиналну рачунску машину која добро решава задатке о пресипању течности.

ЈЕДНИМ ПОТЕЗОМ

Задатак

Прецртајте на лист хартије пет фигура које видите на сл. 135 и покушајте да сваку од њих нацртате једним потезом, тј. не



Сл. 135. Покушајте да сваку фигуру нацртате једним потезом повлачећи сваку линију само једанпут

подижући писаљку са хартије и пролазећи сваком линијом само по једанпут.

Многи од оних којима је тај задатак био постављен почињали су од фигуре *d*, наизглед најпростије, но њихови покушаји да ту фигуру нацртају једним потезом нису успевали. Огорчени, они су већ с мањом сигурношћу прелазили на остале фигуре и, на своје чуђење и задовољство, без неких нарочитих тешкоћа излазили су на крај с првим двема фигурама па чак и са замршеном трећом, која претставља прецртану реч „дом". Али, пету фигуру *e*, као и четврту *d*, нико није успео да нацрта једним потезом писаљке.

Па зашто се за једне фигуре постављени задатак може решити, а за друге не може? Можда само зато што нам у појединим случајевима наш проналазачки смисао није довољан или је, можда, и сам задатак нерешљив за неке фигуре? Зар се у том случају не може навести неко правило на основу кога би се могло унапред оценити да ли дату фигуру можемо или не можемо нацртати једним потезом писаљке?

Решење

Свако укрштање, тј. сваку тачку у којој се сустичу линије дате фигуре зваћемо чвором. Притом ћемо чвор звати парним ако се у њему састаје паран број линија, а непарним ако је број линија које се у њему састају непаран. На фигури *a* сви чворови су парни; на фигури *b* има два непарна чвора (тачке *A* и *B*), на фигури *c* су крајеви отсечка којим је прецртана реч дом непарни чворови, а на фигурама *d* и *e* има по четири непарна чвора.

Посматрајмо најпре неку фигуру чији су сви чворови парни, например фигуру *a*. Почнимо своју маршруту из произвољне тачке *S*. Пролазећи, например, кроз чвор *A* ми цртамо две линије: ону која нас доводи у *A* и ону која нас води из *A*. Како сваки парни чвор има онолико излаза колико и улаза, то ће се приликом кретања од чвора до чвора број неисцртаних линија сваки пут смањивати за 2, те је, дакле, у принципу сасвим могућно да се, пошто пређемо све линије, вратимо у полазну тачку *S*.

Али, претпоставимо да смо се вратили у полазну тачку и да више нема излаза из ње, а да је на фигури остала једна неисцртана линија која полази из неког чвора *B* у коме смо већ били. То значи да треба да у своју маршруту унесемо поправку: кад будемо дошли у *B* треба прво да исцртамо пропуштене линије па да, вративши се у *B*, продужимо ранијим путем.

Нека смо, например, одлучили да фигуру *a* пређемо овако: најпре дуж страница троугла *ACE*, затим вративши се у тачку *A* по кругу *ABCDEFA* (сл. 135). Како притом остаје неисцртан троугао *BDF*, то морамо пре него што, например, оставимо чвор *B* и пођемо дуж лука *BC* обићи и троугао *BDF*.

Према томе, ако су сви чворови фигуре парни, тада увек можемо, полазећи било из које њене тачке, ту фигуру целу нацртати једним потезом, при чему се у том случају обилажење фигуре мора завршити у оној тачки из које смо га и започели.

Посматрајмо сада фигуру која има два непарна чвора. Например, фигура *b* има два непарна чвора: *A* и *B*. Она се такође може нацртати једним потезом.

Заиста, почнимо обилажење од непарног чвора 1 и идимо било којом линијом, до непарног чвора 2, например од *A* до *B* путем *ACB* на фигури *b* (сл. 135). Кад смо нацртали ту линију, ми смо самим тим искључили по једну непарну линију из сваког непарног чвора, као да те линије у фигури није ни било. Оба непарна чвора постају после тога парни. Како на фигури нема више непарних чворова, то сада имамо фигуру са само парним чворовима; на фигури *b*, например, после исцртавања линије *ACB* остаје троугао с кругом.

Таква се фигура, као што је било показано, може нацртати једним потезом, па се, према томе, тако може нацртати и цела фигура.

Ево једне допунске примедбе. Почињући обилажење од непарног чвора 1 треба пут који води до непарног чвора 2 изабрати тако да се не образују фигуре изоловане од дате фигуре*). Например, при исцртавању фигуре *b* на слици 135 било би некорисно журити са прелазом из непарног чвора *A* у непарни чвор *B* дуж праве *AB* јер би притом круг остао изолован од остале фигуре и неисцртан.

Дакле, кад фигура има два непарна чвора, она се може нацртати једним потезом ако се исцртавање почне од једног непарног чвора и заврши у другом. То значи да се тада почетна и завршна тачка линије исцртавања не поклапају.

Отуда произлази да се фигура која има четири непарна чвора не може нацртати једним потезом, већ само са два потеза,

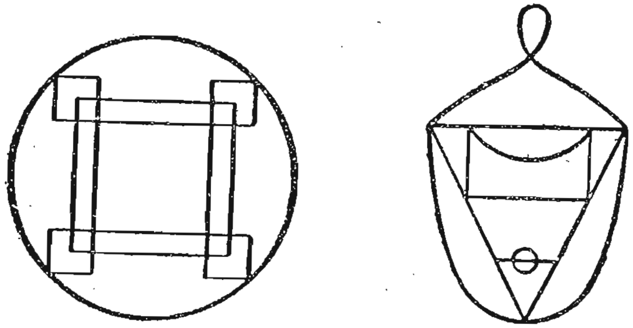
---

*) Појединости у вези с тим радознали читалац који има извесну претспрему наћи ће у уџбеницима топологије.

али то већ не одговара услову задатка. Такве су например фигуре ***d*** и *e* на слици 135.

Као што видите, ако научите да правилно расуђујете, можете много да предвидите и да се тако избавите од непотребног трошења снаге и времена, а правилном расуђивању учи и геометрија.

Можда су вас, читаоче, помало уморила овде изложена расуђивања, али се ваши напори откупљују оним преимућствима које даје знање у поређењу са незнањем*).



Сл. 136. Нацртајте сваку фигуру једним потезом

Увек можемо унапред одредити да ли је решљив задатак цртања дате фигуре једним потезом и знати од ког чвора треба то обилажење почети.

Сем тога, сад вам је лако да за своје другове измислите какве год хоћете замршене фигуре те врсте.

На крају, нацртајте једним потезом две фигуре које видите на сл. 136.

СЕДАМ МОСТОВА У КАЛИЊИНГРАДУ

Пре двеста година у граду Калињинграду**) било је седам мостова који су спајали обале реке Прегел (сл. 137).

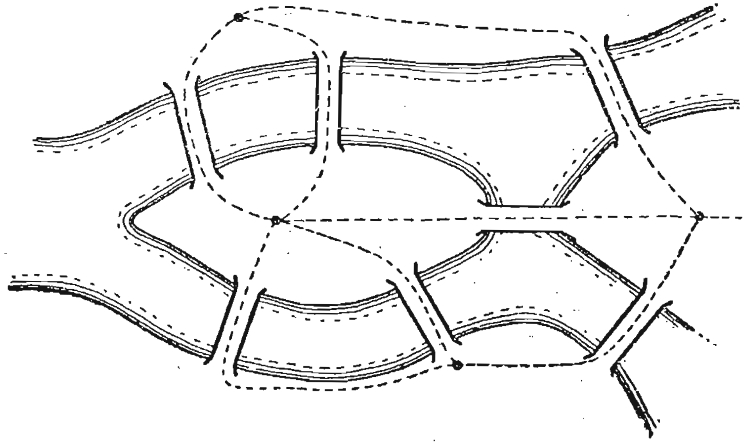
---

*) Овде је потребно истаћи да испитивање чворова има велики значај за решавање питања саобраћаја у великим градовима, нарочито кад се ради о аутомобилским путевима, где треба омогућити прелаз са трасе на трасу, односно промену правца тако да се једном пређени део пута не мора поново прелазити и да се не пресеца правац кретања осталих возила. — Прим. прев.

**) У то време се тај град звао Кенигсберг, па се у математичкој литератури задатак о коме је овде реч зове задатак о кенигсбершким мостовима. — Прим. прев.

У то доба, 1736 године, највећи математичар тог времена Леонард Ојлер (који је тада имао око 30 година) заинтересовао се за овакав проблем: Да ли се може шетајући градом прећи преко свих тих седам мостова, али преко сваког само по једанпут?

Лако је схватити да је тај проблем еквивалентан са малочас разматраним задатком о цртању фигура једним потезом.



Сл. 137. Немогућно је прећи преко свих тих седам мостова тако да се преко сваког од њих пређе по једанпут

Нацртајмо схему могућних путева (в. испрекидану линију на сл. 137). Добија се једна од фигура из претходног задатка, са четири непарна чвора (сл. 135, фигура *e*). Она се, као што сад знате, не може нацртати једним потезом, и према томе, немогућно је прећи преко свих седам мостова тако да се преко сваког моста пређе по једанпут. Ојлер је тада то исто и доказао.

ГЕОМЕТРИСКА ШАЛА

Пошто сте ви и ваши другови сазнали тајну успешног цртања фигура једним потезом, реците својим друговима да ви ипак можете нацртати фигуру са четири непарна чвора, например круг са два пречника (сл. 138) не дижући писаљку са хартије и не повлачећи ниједну линију двапут.

Ви врло добро знате да је то немогућно, али можете остати при својој сензационалној изјави. Ја ћу вас сада научити једном малом лукавству.

Почните да цртате круг од тачке A (сл. 138). Чим нацртате четвртину кружне линије — лук AB — подметните под писаљку код тачке B други лист хартије (или пресавијте доњи крај листа на коме цртате) и наставите да цртате доњи део кружне линије до тачке D, супротне тачки B.

Сл. 138. Геометриска шала

Сада склоните подметнути лист хартије (или исправите свој лист). На вашем листу биће нацртан само лук AB, али ће писаљка бити у тачки D (иако је ви нисте дизали са хартије)!

Није тешко довршити цртање фигуре; повуците најпре лук DA, затим пречник AC, лук CD, пречник DB и на крају лук BC. Може се изабрати и друга маршрута из тачке D; нађите је!

ПРОВЕРАВАЊЕ ОБЛИКА

Задатак

Желећи да се увери да отсечени комад тканине има облик квадрата кројачица пресавија тканину по дијагоналама и утврђује да се крајеви тканине поклапају. Да ли је такво проверавање довољно?

Решење

На тај се начин кројачица уверава само у то да су све странице четвороугаоног комада тканине једнаке међу собом. Међу испупченим четвороуглима ту особину има не само квадрат већ и сваки ромб, а ромб претставља квадрат само онда кад су му углови прави. Према томе, проверавање на које се ослања кројачица није довољно. Треба се бар очима уверити у то да су углови на комаду тканине прави. У том циљу може се, например, тканина пресавити још по средњој линији и тада контролисати да ли се поклапају углови који леже на једној страници.

ИГРА

За ову игру треба имати један правоугаони лист хартије и неке фигуре једнаког и симетричног облика, например домине, или метални новац исте вредности, или кутије за шибице и сл. Фигура треба да има толико да могу покрити цео лист хартије. Играју два играча. Играчи редом стављају фигуре ма на које слободно место на хартији и било у којем положају све дотле док се цео лист не испуни фигурама.

Није дозвољено једном на хартију постављене фигуре померати. Сматра се да је добио онај играч који је последњи поставио своју фигуру.

Задатак

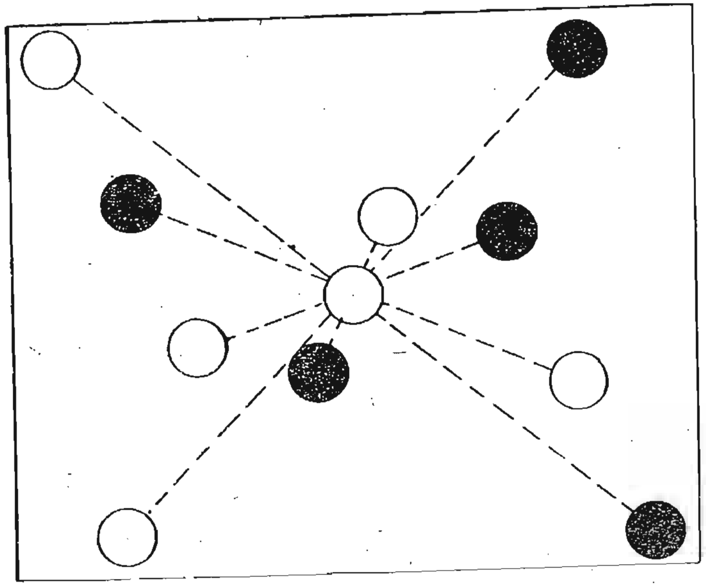
Наћи начин вођења игре такав да онај који почиње игру насигурно добија.

Решење

Играч који започиње игру треба у првом потезу да заузме место у центру листа постављајући фигуру тако да се, по могућности, њен центар симетрије поклапа са центром листа хартије и затим постављати сваку фигуру симетрично претходно постављеној фигури противника (сл. 139).

Ако се придржава тог правила, играч који почиње игру увек ће на листу хартије нећи место за своју фигуру и неминовно ће добити игру.

Геометриска суштина тог начина вођења игре је у следећем: правоугаоник има центар симетрије, тј. тачку која полови све праволиниске отсечке који кроз њу пролазе, а крајеви им се налазе на ивици листа; сваки од ових отсечака дели правоугаоник на два једнака дела. Стога свакој тачки или сваком сектору правоугаоника одговара симетрична тачка, одн. симетрични сектор који припада тој фигури, и само се центар правоугаоника поклапа са својом симетричном тачком.



Сл. 139. Геометриска игра. Добија онај ко последњи постави фигуру

Одатле произлази да, ако први играч заузме централни положај, тада ће, ма које место изабрао за своју фигуру његов противник, на правоугаоном листу хартије увек постојати слободан сектор симетричан сектору који је покрила противникова фигура.

Пошто други играч мора сваки пут да бира место за своју фигуру, то на крају неће на листу остати места управо за његову фигуру, те игру добија први играч.

ГЛАВА ЈЕДАНАЕСТА

ВЕЛИКО И МАЛО У ГЕОМЕТРИЈИ

27 000 000 000 000 000 000 У НАПРСТКУ

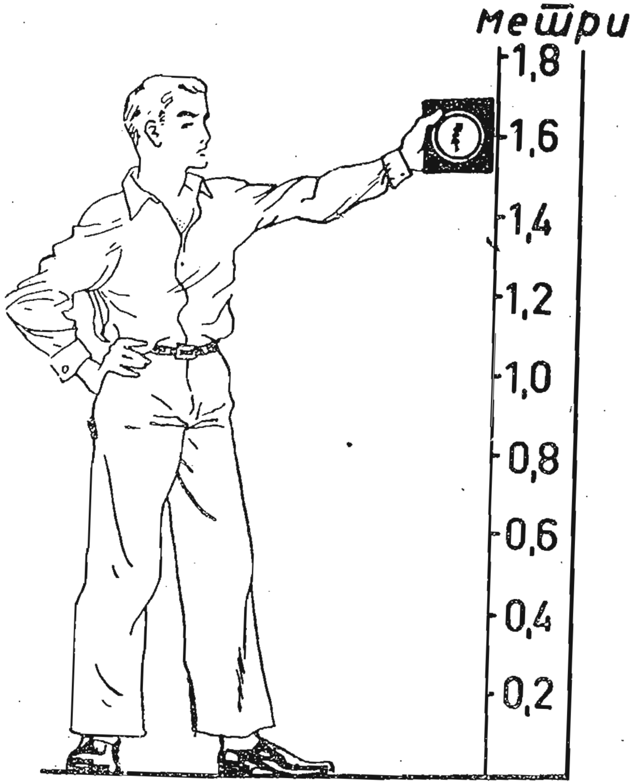
Број 27 са осамнаест нула који је написан у заглављу може се прочитати на разне начине. Једни кажу: то је 27 трилиона; други, например финансиски стручњаци, прочитаће га као 27 квинтилиона, а трећи ће га и написати краће: $27 \cdot 10^{18}$ и прочитаће га као 27 пута 10 на осамнаести степен.

Па шта то може, у тако невероватној количини, да стане у један напрстак?

Реч је о честицама ваздуха који нас окружује. Као и свака материја, и ваздух се састоји од молекула. Физичари су утврдили да у сваком кубном центиметру (тј. отприлике у једном напрстку) ваздуха који нас окружује на температури од 0° има 27 трилиона молекула. Пред нама је један дивовски број. Ни најживља машта не може га ни отприлике претставити на неки очигледан начин. Заиста, са чим се може упоредити такво мноштво? С бројем људи на свету? Али, на Земљи има „само“ две милијарде ($2 \cdot 10^9$) људи, тј. 13 милијарди пута мање неголи молекула у напрстку. Ако би све звезде у васиони које се могу видети најјачим телескопом биле исто као и наше Сунце окружене планетама и ако би свака од ових планета била насељена исто као наша Земља, чак се ни тада не би могао саставити укупан број свих становника једнак молекулском „становништву“ једног напрстка! Ако бисте покушали да пребројите то невиђено становништво, онда бисте, бројећи непрекидно, например по сто молекула у минуту, морали бројати не мање од 500 милиона година!

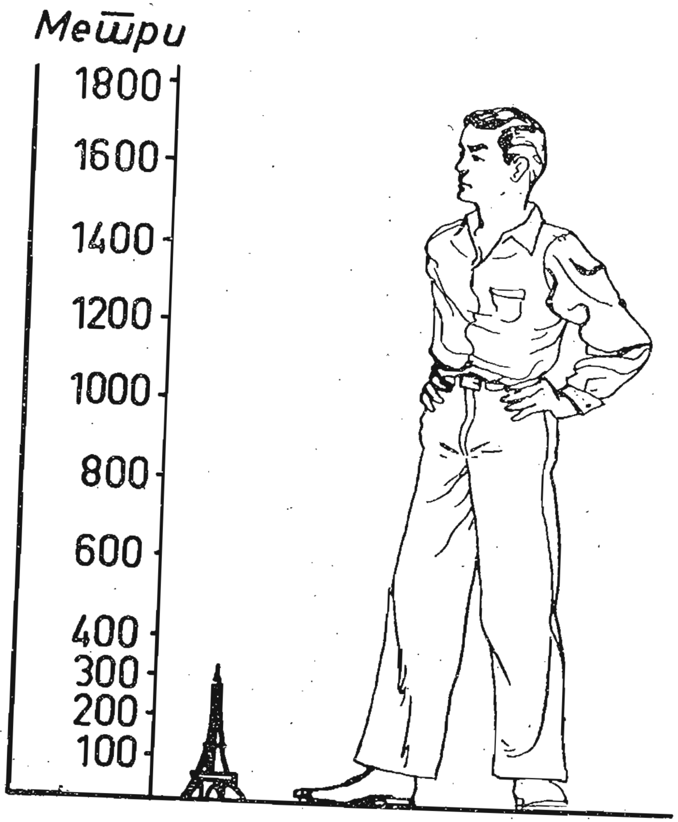
Међутим чак се ни скромнији бројеви не могу увек јасно предочити.

Шта ви замишљате кад вам се говори например о микроскопу који увећава 1000 пута? Једна хиљада није тако велики број, а међутим увећавање хиљаду пута не схватају ни издалека сви онако како би требало. Ми често не умемо да оценимо колико су уствари сићушни они предмети које толико увеличане видимо под микроскопом. Бактерија тифуса увеличана хиљаду пута изгледа нам колико мушица (сл. 140) посматрана на растојању јасне видљивости, тј. на 25 cm. Али, колико је та бактерија мала у стварности? Замислите да сте се, заједно са увеличавањем бактерије, и ви увећали 1000 пута. То значи да би ваша висина достигла 1700 m! Глава би вам била изнад облака, а чувена Ајфелова кула у Паризу, висока 300 m, дошла би вам испод колена (сл. 141). Ето,



Сл. 140. Дечак посматра бацил тифуса увеличан 1000 пута

колико сте пута ви мањи од тог замишљеног џина, толико је пута бацил тифуса мањи од сићушне мушице.



Сл. 141. Дечак увеличан 1000 пута

ЗАПРЕМИНА И ПРИТИСАК

Могло би се помислити: није ли тим молекулима ваздуха тесно кад их има 27 трилиона у напрстку? Нимало! Молекул кисеоника или азота има $\frac{3}{10\,000\,000}$ mm (или $3 \cdot 10^{-7}$) у пречнику.

Ако узмемо да је запремина молекула једнака кубу његовог пречника, добићемо:

$$\left(\frac{3}{10^7}\ \mathrm{mm}\right)^3 = \frac{27}{10^{21}}\ \mathrm{mm}^3.$$

Молекула у напрстку има $27 \cdot 10^{18}$. То значи да је запремина свих становника напрстка једнака отприлике

$$\frac{27}{10^{21}} \cdot 27 \cdot 10^{18} = \frac{729}{10^3}\ \mathrm{mm}^3,$$

тј. око 1 mm³, што чини само хиљадити део кубног центиметра. Размаци између молекула су много пута већи од њихових пречника, тако да молекули имају где да се шетају. Заиста, као што знате, молекули ваздуха не стоје у миру, скупљени у једну гомилу, већ се непрестано и хаотично крећу с места на место, лете у простору у коме се налазе. Кисеоник, угљендиоксид, водоник, азот и други гасови имају и индустриски значај, али би за држање великих количина тих гасова били потребни огромни резервоари. Например, 1 тона (1000 kg) под нормалним притиском има запремину од 800 m³, тј. за чување само једне тоне чистог азота потребан је сандук са димензијама 10 · 10 · 8 m. А за чување једне тоне чистог ваздуха била би потребна цистерна с капацитетом од 10 000 m³.

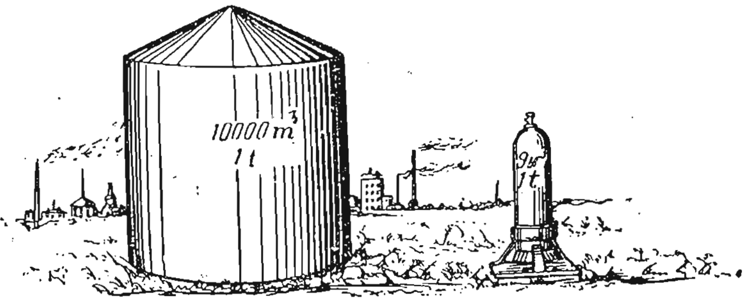
Могу ли се молекули гаса присилити да се збију? Инжењери тако и поступају — повећавањем притиска приморавају их да се збијају. Али, то није лако учинити. Не заборавите да коликом се снагом врши притисак на гас, исто толиком снагом гас притиска зидове суда у коме се налази. Стога су потребни веома јаки судови који су и хемиски отпорни према гасу.

Најновија хемиска апаратура коју је наша индустрија произвела од лаких метала може да издржи огроман притисак, високе температуре и штетно хемиско дејство гасова.

Данас наши инжењери сабијају водоник 1163 пута, тако да се једна тона водоника, која под нормалним атмосферским притиском има запремину од 10 000 m³, може сместити у сразмерно мали балон запремине од око 9 m³ (сл. 142).

Шта мислите, колики притисак треба извршити на водоник да би се његова запремина смањила 1163 пута? Знајући из физике да се запремина гаса смањује онолико пута колико се пута

увећава притисак, ви одговарате: притисак на водоник треба увећати такође 1163 пута. — Да ли је тако и у стварности? Није. У стварности се на водоник морало дејствовати притиском од 5000 атмосфера, тј. увећати притисак 5000 пута, а не 1163 пута. Ствар је у томе што се запремина тела мења обрнуто пропорционално притиску само кад притисак није много велики. За велики притисак се таква законитост не опажа. Тако, например, кад се у хемиским фабрикама на 1 t азота дејствује притиској од 1000 атмосфера, тада се читава тона тог гаса смањује на 1,7 m³ (уместо 800 m³ које азот заузима под нормалним атмосферским притиском) и при даљем повећавању притиска до 5000 атмосфера, или 5 пута, запремина азота се смањује само до 1,1 m³.



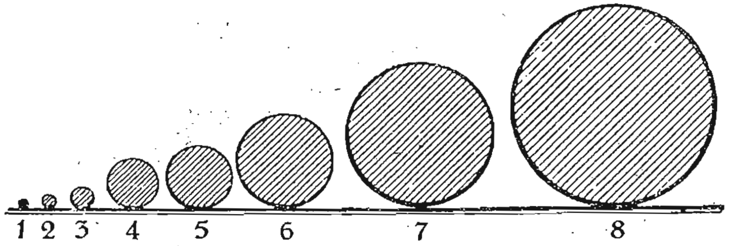
Сл. 142. Тона водоника под нормалним атмосферским притиском (лево) и под притиском од 5000 атм. (десно)

ТАЊЕ ОД ПАУЧИНЕ А ЈАЧЕ ОД ЧЕЛИКА

Попречни пресек конца, жице па чак и паучине, ма колико био мали, ипак има известан одређен геометриски облик, и то најчешће кружни облик. Притом попречни пресек (или, како се још каже, дебљина) једне нити паучине има отприлике 5 микрона $\left(\frac{5}{1000}\ \mathrm{mm}\right)$. Да ли постоји нешто тање од паучине? Која је „танкопреља" највештија? Паук или, можда, свилена буба? Не. Пречник нити природне свиле има 18 микрона, тј. та нит је 3,5 пута дебља од паучине.

Људи су одавно маштали о томе да својом вештином превазиђу вештину паука или свилене бубе. Позната је стара легенда о чувеној прељи и ткаљи Гркињи Арахнеи. Она је тако савршено савладала свој занат да су њене тканине биле танке као паучина, прозрачне као стакло и лаке као ваздух. Са њом се није могла такмичити чак ни сама богиња Атина, богиња мудрости и покровитељка свих заната.

Та легенда, као и многе друге старе легенде и фантазије, у наше време постала је стварност. Вештијим од Арахнее показали су се инжењери-хемичари који су од обичне дрвне масе начинили необично танко и изванредно издржљиво вештачко влакно.

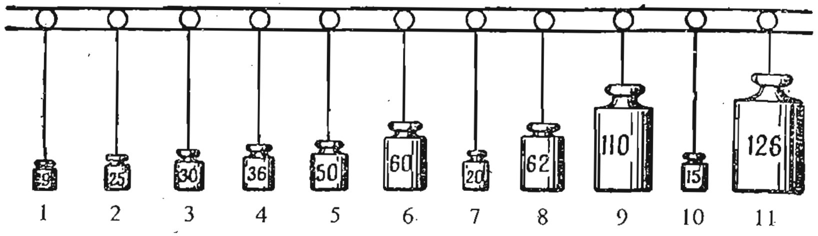


Сл. 143. Упоредна дебљина влакана: 1 — бакарно-амонијачна свила, 2 — паучина и ацетатна свила, 3 — вискозна свила, 4 — најлон, 5 — памук, 6 — природна свила, 7 — вуна, 8 — човечја влас.

Свилена влакна добијена, например, бакарно-амонијачним технолошким процесом 2,5 пута су тања од паучине, а јачином скоро не уступају влакнима природне свиле. Природна свила може издржати оптерећење од 30 kg на 1 mm^2 попречног пресека, а вештачко свилено влакно до 25 kg на 1 mm^2.

Интересантан је начин прављења вештачке свиле. Дрвна маса се претвара у целулозу, а целулоза се раствара у амонијачном раствору бакра. Млазеви раствора се кроз веома мале отворе испуштају у воду, која односи растварач, после чега се образују влакна и намотавају се на калемове. Дебљина влакна бакарно-амонијачне свиле је 2 микрона. За 1 микрон је дебље влакно такозване ацетатне, такође вештачке свиле. Чудновато је то што су неке врсте ацетатне свиле јаче од челичне жице! Ако челична жица може да издржи оптерећење од 110 kg на 1 mm^2 попречног пресека, влакно ацетатне вештачке свиле може да издржи 126 kg на 1 mm^2.

Свима вама добро позната вискозна свила има влакно дебљине око 4 микрона, а јачину влакна од 20 kg до 60 kg на 1 mm^2 попречног пресека. На сл. 143 показана је сразмерна дебљина паучине, човечије власи, разних вештачких влакана, а такође и вуненог и памучног влакна, а на сл. 144 је приказана њихова јачина изражена у килограмима на 1 mm^2. Вештачко, или, како га још називају, синтетичко влакно је једно од највећих савремених техничких открића, које има огроман привредни значај. Ево шта о томе каже инжењер Бујанов: „Памук расте споро, а његова количина зависи од климе и приноса. Произвођач природне свиле — свилена буба — има веома ограничене могућности. У току целог свог живота она испреде чауру у којој има свега 0,5 g свиленог влакна.



Сл. 144. Гранична издржљивост влакана (у килограмима на 1 mm^2 попречног пресека): 1 — вуна, 2 — бакарно-амонијачна свила, 3 — природна свила, 4 — памук, 5 — човечја влас, 6 — најлон, 7 — вискозна свила, 8 — високо отпорна вискозна свила, 9 — челична жица, 10 — ацетатна свила, 11 — високо отпорна ацетатна свила.

Количина вештачке свиле добијена путем хемиске прераде 1 m^3 дрвне масе замењује 320 000 свилених чаура или годишњу стрижу 30 оваца, или просечан принос памука са 0,5 ha. Та количина влакна довољна је за израду 4000 пари женских чарапа или 1500 m свилене тканине".

ДВА СУДА

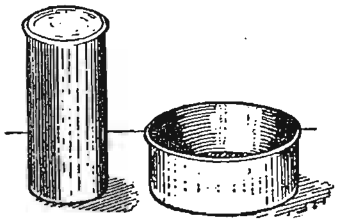
Још нетачнију претставу имамо о великом и малом у геометрији, где треба упоређивати не бројеве него површине и запремине. Свако ће без размишљања одговорити да је 5 kg слатка веће него 3 kg слатка, али неће увек погодити који је од два суда који се налазе на столу већи.

Задатак

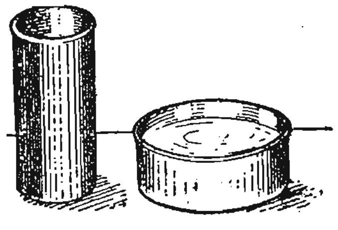
Који је од два суда (сл. 145) већи, онај десно, широки, или онај лево, трипут виши, али двапут ужи?

Решење

За многе ће вероватно бити неочекивано да у овом случају високи суд има мању запремину неголи широки. Међутим, то је лако проверити рачуном. Површина основе широког суда је 2·2 пута, тј. четири пута већа од основе уског суда, а његова висина је само три пута мања. То значи да је запремина широког суда 4/3 пута већа од запремине уског суда. Ако се садржај високог суда прелије у широки, он ће у овом суду испунити само 3/4 његове запремине (сл. 146).



Сл. 145. Који суд има већу запремину



Сл. 146. Резултат пресипања садржаја високог суда у широки

ДИВОВСКА ЦИГАРЕТА

Задатак

У излогу фабрике дувана изложена је огромна цигарета, 15 пута дужа и 15 пута шира од обичне. Ако је за савијање једне цигарете нормалне величине потребно 0,5 g дувана, колико је дувана потребно за савијање дивовске цигарете у излогу?

Решење

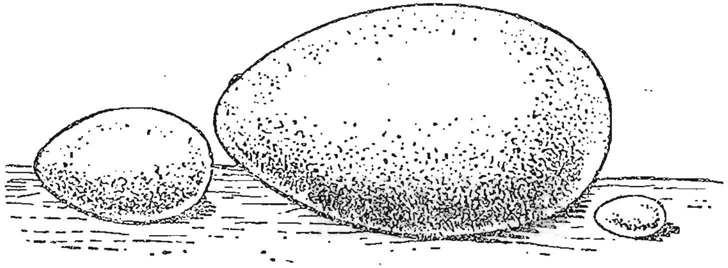
$$0{,}5 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 = 1700 \text{ g},$$

тј. више од 1,5 kg.

НОЈЕВО ЈАЈЕ

Задатак

На сл. 147 претстављена су у истој размери два јајета — кокошије (десно) и нојево (лево). У средини је нацртано јаје изумрлог епиорниса, о коме ће бити речи у следећем задатку.



Сл. 147. Упоредна величина нојевог, епиорнисовог и кокошијег јајета

Добро погледајте слику и реците колико је пута запремина нојевог јајета већа од запремине кокошијег. На први поглед чини се да разлика не може бити много велика. Утолико нас више чуди резултат који се добија правилним, геометриским рачуном.

Решење

Непосредним мерењем на слици уверавамо се да је нојево јаје $2^1/_2$ пута дуже и шире од кокошијег. Према томе, запремина нојевог јајета је већа од запремине кокошијег

$$2\tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{2} = 125/8 \text{ пута},$$

тј. отприлике 15 пута.

Кајгана од једног таквог јајета била би довољна за доручак породици од 5 чланова, ако се рачуна да је сваком члану довољна кајгана од по 3 јајета.

ЕПИОРНИСОВО ЈАЈЕ

Задатак

На Мадагаскару су некад живели огромни нојеви — епиорниси, чије су женке носиле јаја од 28 cm дужине (на средини сл.

147). Међутим, кокошије јаје је дугачко 5 cm. Колико кокошијих јаја има укупну запремину једнаку запремини једног јајета изумрлог мадагаскарскогноја?

Решење

Кад извршимо множење (28/5) · (28/5) · (28/5), добијамо око 170. Једно епиорнисово јаје има запремину једнаку укупној запремини коју имају скоро 200 кокошијих јаја! Више од 50 људи могло би се заситити од једног таквог јајета, чија је тежина, што није тешко израчунати, износила 8—9 kg. (Потсећамо читаоца да постоји једна оштроумна фантастична прича Х. Велса о епиорнисовом јајету.)

ЈАЈА РУСКИХ ПТИЦА

Задатак

Али, најоштрији контраст у величини добија се кад се обратимо природи која нас окружује и упоредимо јаја лабуда и жутоглавог царића, најсићушније од свих руских птица*). На сл. 148 су обриси тих јаја претстављени у природној величини. Како се односе њихове запремине?

Решење

Мерењем дужине оба јајета видимо да она износи 125 mm, одн. 13 mm. Кад измеримо ширину, добијамо 80 mm и 9 mm. Лако је видети да су ти бројеви скоро пропорционални. Проверавајући пропорцију

$$125 : 80 = 13 : 9$$

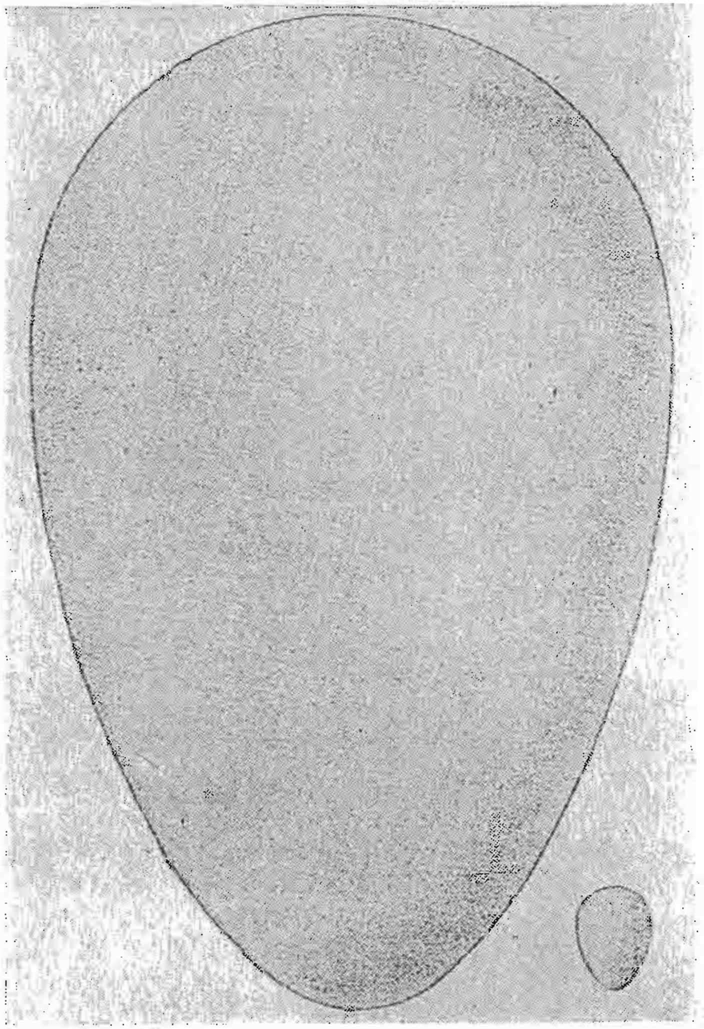
упоређивањем производа њених спољашњих и њених унутрашњих чланова, добијамо 1125 и 1040, — тј. два броја који се мало разликују један од другог. Одатле закључујемо да, сматрајући та јаја геометриски сличним телима, не чинимо велику грешку. Стога је однос њихових запремина приближно једнак

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{510\,000}{730} = 700.$$

Према томе, лабудово јаје је око 700 пута веће од царићевог.

---

*) Од птица које живе у нашој земљи највеће јаје носи женка орла а најмање женка царића. — Прим. прев.



Сл. 148. Лабудово и царићево јаје (природна величина). Колико је пута једно од другог веће по запремини?

ОДРЕДИТЕ ТЕЖИНУ ЉУСКЕ НЕ РАЗБИЈАЈУЋИ ЈАЈА

Задатак

Дата су два јајета истог облика, али неједнаке величине. Треба, не разбијајући јаја, одредити приближну тежину њихове љуске. Каква мерења и рачунање треба за то извршити? Дебљину љуске оба јајета треба сматрати једнаком.

Измеримо дужину велике осе сваког јајета; добијамо d и d'. Тежину љуске првог јајета обележимо са x, а тежину љуске другог јајета са y. Тежина љуске пропорционална је њеној површини, тј. квадрату њене дужине. Зато, сматрајући да је дебљина обеју љусака једнака, образујмо пропорцију

$$x : y = d^2 : d'^2.$$

Измеримо тежину сваког јајета; добијамо тежине p и p'. Тежину садржаја јајета можемо сматрати пропорционалном његовој запремини, тј. кубу дужине јајета:

$$(p - x) : (p' - y) = d^3 : d'^3.$$

Имамо систем од две једначине са две непознате x и y; кад га решимо, добијамо:

$$x = \frac{p'd^3 - pd'^3}{d'^2\,(d - d')}, \qquad y = \frac{p'd^3 - pd'^3}{d^2\,(d - d')}.$$

ВЕЛИЧИНА МЕТАЛНОГ НОВЦА

Тежина нашег металног новца пропорционална је његовој вредности, тј. новац од две копејке је двапут тежи од новца од 1 копејке, новац од 3 копејке је трипут тежи итд. То исто важи и за сребрни новац: например, новац од 2 гривењика*) је двапут тежи од 1 гривењика. Како пак разне вредности металног новца исте врсте имају обично геометриски сличан облик, то, кад знамо пречник једног примерка из једне серије разних вредности, можемо израчунати пречнике примерака осталих вредности те серије. Навешћемо неколико примера таквог рачуна.

---

*) 2 гривењика = 20 копејака.

Задатак

Пречник новца од 5 копејака је 25 mm. Колики је пречник новца од 3 копејке?

Решење

Тежина, а према томе и запремина новца од 3 коп. износи 3/5, тј. 0,6 запремине новца од 5 коп. То значи да димензије новца од 3 коп. треба да буду мање од димензија новца од 5 коп. $\sqrt[3]{0{,}6}$ пута, тј. да износе 0,84 одговарајућих димензија новца од 5 коп. Отуда тражени пречник новца од 3 коп. треба да има 0,84 · 25, тј. 21 mm (уствари, тај пречник је 22 mm).

МЕТАЛНИ НОВАЦ ОД МИЛИОН РУБАЉА

Задатак

Замислите фантастичну сребрну монету од милион рубаља која има исти облик као и новац од 2 гривењика, али је сразмерно веће тежине. Кад би се поставила дупке поред аутомобила, колико би пута она била виша од аутомобила?

Решење

Димензије тог новца не би биле тако огромне како би се могло помислити. Његов би пречник био свега око 3,8 m, једва већи од висине једног спрата. Уствари, ако је запремина 5 000 000 пута већа од запремине новца од 2 гривењика, тада је пречник (а такође и дебљина) већи само $\sqrt[3]{5\,000\,000}$ пута, тј. 172 пута.

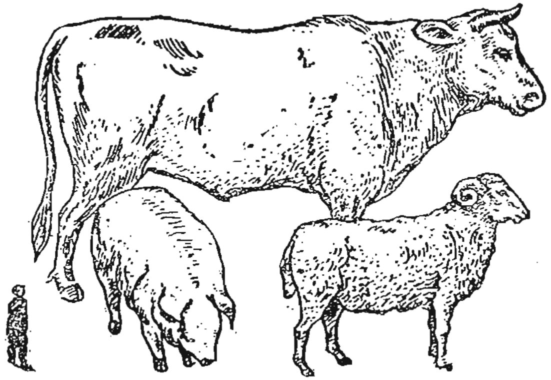
Кад 22 mm помножимо са 172, добијамо приближно 3,8 m — прилично скроман пречник за монету толике вредности.

ОЧИГЛЕДНО ПРЕТСТАВЉАЊЕ

Читалац који се на претходним примерима навикао да упоређује запремине геометриски сличних тела на основу њихових димензија неће дозволити да га неко изненади питањима те врсте. Он ће стога лако моћи да избегне грешке неких тобоже очигледних претстава, које се понекад јављају у илустрованим часописима.

Задатак

Ево једног примера таквог претстављања. Ако човек поједе за дан просечно око 400 g меса, за 60 година свог живота он поједе око 9 тона. Како пак тежина говечета износи ½ тоне, то човек може на крају свог живота тврдити да је појео 18 волова.



Сл. 149. Колико меса човек поједе у свом животу (открити грешку у цртежу)

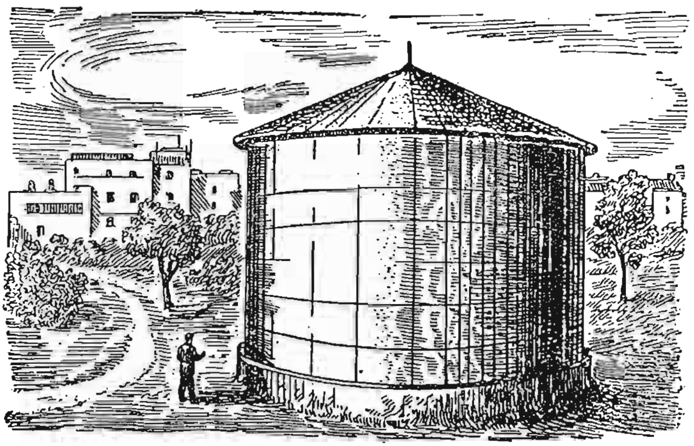
На приложеној слици (сл. 149) коју преносимо из једног енглеског часописа приказан је тај џиновски во поред човека који га је у току свог живота појео. Да ли је цртеж тачан? Колика би била тачна размера величина вола и човека?

Решење

Цртеж није тачан. Во који је на њему нацртан виши је од нормалног вола 18 пута па је, разуме се, исто толико пута дужи и дебљи. Према томе, он је од нормалног вола тежи $18 \cdot 18 \cdot 18 = 5832$ пута. Таквог би вола човек могао појести кад би живео не мање од 2000 година! Тачно нацртан во треба да буде виши, дужи и дебљи од обичног свега $\sqrt[3]{18}$ пута, тј. 2,6 пута; то на цртежу не би изгледало тако задивљујуће да би могло послужити као празна илустрација количине меса коју човек поједе.

Задатак

На сл. 150 је друга илустрација из те исте области. Човек попије за један дан разних течности просечно 1,5 *l* (7—8 чаша). У току његовог седамдесетогодишњег живота то износи око 40 000 *l*. Како обична ведрица има 12 *l*, то је цртач требало да нацрта неки суд који је 300 пута већи од ведрице. Он је сматрао да је то и учинио на сл. 150. Да ли је цртач у праву?

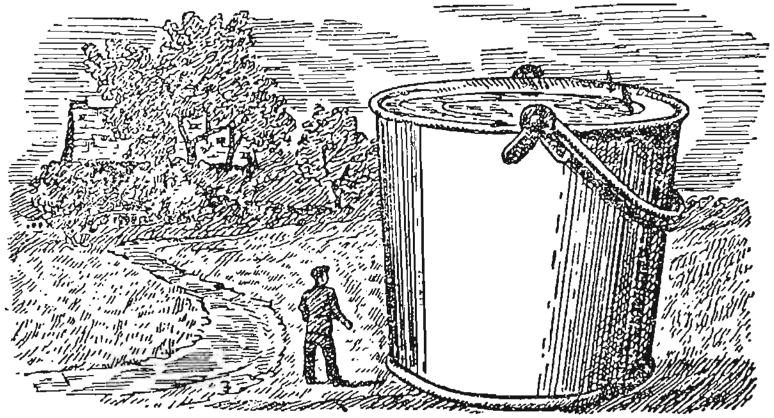


Сл. 150. Колико воде човек попије у току свог живота (у чему је грешка цртача?)

Решење

На цртежу су димензије много увећане. Суд треба да је од обичне ведрице виши и шири само $\sqrt[3]{3300} = 14{,}9$ пута, или, округло, 15 пута. Ако је нормална ведрица висока и широка по 30 cm, тада би за смештање целокупне количине воде коју попије свако од нас у току целог свог живота било довољно ведро високо 4,5 m и исто толико широко. На сл. 151 је претстављен тај суд у тачној размери.

Досад разматрани примери показују, између осталог, да је претстављање статистичких података у облику тродимензионалних тела недовољно очигледно и да не производи онај утисак који се обично очекује. Дијаграми у облику стубаца у том погледу имају несумњиво преимућство.



Сл. 151. Тачно претстављен однос (в. сл. 150)

НАША НОРМАЛНА ТЕЖИНА

Ако претпоставимо да су тела свих људи геометриски слична (а то је тачно само у просеку), тада можемо израчунати тежину људи на основу њихове висине сматрајући да је мушкарац од 1,65 m висине (средњи раст) тежак 64 kg (толика је просечна тежина код разних народа), а да је жена висине 1,55 m (средњи раст) тешка 55 kg (просечна тежина жена код разних народа). Резултати који се при таквом рачунању добијају могу се многима учинити неочекивани.

Одредимо, например, која се телесна тежина може сматрати нормалном за мушкарца чија је висина за 10 cm мања од нормалне.

Обично се тај задатак решава овако: Од нормалне тежине мушкарца средњег раста одузима се онолики њен део колики део од 165 cm износи 10 cm, тј. 64 kg се умањују за 10/165 од 64 kg, и добијена тежина — 61 kg — сматра се одговором на постављено питање. Тај рачун није тачан.

Тачна тежина (x) ће се добити ако се израчуна из пропорције

$$64 : x = 1{,}65^3 : 1{,}55^3,$$

одакле је

$$x \approx 53 \text{ kg}.$$

Разлика у односу на резултат који се обично добија знатна је — 8 kg.

Аналогно томе, за мушкарца чија је висина за 10 cm већа од средње, нормална тежина се израчунава из пропорције

$$64 : x = 1{,}65^3 : 1{,}75^3.$$

Сада је $x = 76$ kg, тј. за 12 kg веће од средње тежине. Тај прираштај тежине је много већи него што се то обично мисли.

Нема сумње да таква израчунавања, правилно извршена, треба да имају не мали значај у медицинској пракси приликом одређивања нормалне тежине, приликом дозирања лекова и сл.

ДИВОВИ И КЕПЕЦИ

Какав у том погледу треба да буде однос између тежине дива и тежине кепеца? Многима ће, уверен сам, изгледати невероватно да див може бити 50 пута тежи од кепеца. Међутим, до тог закључка нас доводи правилан геометриски рачун.

Један од највиших људи чије је постојање тачно утврђено био је Аустријанац Винклмајер, са 278 cm висине; за њим долазе Елзашанин Крау, са 275 cm висине, и Ирац О'Брик, са 268 cm висине, о коме су причали да је на уличним фењерима припаљивао лулу. Сви су они били читав метар виши од човека нормалног раста. Насупрот томе, кепеци кад одрасту достижу око 75 cm висине, тј. за читав метар су мањи од човека нормалне висине. А какав је однос запремине и тежине дива према запремини и тежини кепеца?

Тај однос је једнак

$$275^3 : 75^3, \text{ или } 11^3 : 3^3 \approx 49.$$

То значи да је див тежак колико скоро педесет кепеца заједно.

Ако је пак веровати у вести о арабљанској жени-кепецу Агиби, која је била висока 38 cm, и о највишем гиганту од 320 cm висине, тада тај однос постаје још чудноватији: највиши човек је преко 8 пута виши од тог кепеца и, према томе, тежи је 593 пута. Вероватније је Бифоново саопштење; он је измерио кепеца високог 43 cm. Тај кепец је 405 пута лакши од оног дива.

ГУЛИВЕРОВА ГЕОМЕТРИЈА

Писац „Гуливерових путовања" је с великом обазривошћу избегавао опасност да се заплете у геометриске односе. Читалац се несумњиво сећа да је у земљи Лилипуту нашој стопи одговарао палац, а у земљи дивова, напротив, нашем палцу је одговарала стопа. Другим речима, у Лилипуту су сви људи, све ствари, све што је природа створила 12 пута мањи од нормалних, а код дивова су толико пута већи. Али, ови на први поглед прости односи су се много компликовали када је требало решавати питања као што су следећа:

1) Колико је пута Гуливер више јео за ручком неголи Лилипутанац?

2) Колико је пута Гуливеру више чохе требало за одело неголи Лилипутанцу?

3) Колико је била тешка јабука у земљи дивова?

Писац „Гуливерових путовања" је у већини случајева све те задатке успешно решио. Он је тачно израчунао да, ако је Лилипутанац 12 пута мањи од Гуливера, тада је запремина његовог тела мања 12 · 12 · 12 пута, тј. 1728 пута; према томе, да би се Гуливер наситио било је потребно 1728 пута више хране неголи за једног Лилипутанца. И ми у „Путовањима" читамо овакав опис Гуливеровог обеда:

> „Триста кувара кували су јело за мене. Око моје куће су била имања где се спремало јело и где су живели кувари са својим породицама. Кад би дошло време ручка, дохзатио бих 20 људи из послуге и стављао их на сто, а 100 људи је послуживало на земљи: једни су приносили јело, други су о обрамицама носили бачвице с вином. Стојећи на врху лествица, трећи би, кад затреба, све то подизали на сто помоћу конопаца и котурача".

Свифт је тачно израчунао и колико је потребно тканине за Гуливерово одело. Површина његовог тела је 12 · 12 = 144 пута већа од површине тела једног Лилипутанца; исто толико пута више

било му је потребно материјала, кројача и сл. Све је то Свифт узео у обзир кад је, у Гуливерово име, причао да му је било „додељено 300 кројача Лилипутанаца, којима је било наређено да сашију одело по тамошњој моди". (Хитност тог рада захтевала је двапут већи број кројача.)

Потреба да изводи такве рачуне јављала се Свифту скоро на свакој страни. И, говорећи уопште, он их је тачно извео. Ако је у Пушкиновом „Евгенију Оњегину", како сам песник каже, „време израчунато по календару", у Свифтовом „Гуливеру" су све размере усклађене са правилима геометрије. Само ретко где није сачувана одговарајућа размера, нарочито при описивању Земље дивова. Ту понекад наилазимо на грешке.

„Једанпут, — прича Гуливер, — пође с нама у врт дворски кепец. Уличивши погодан тренутак кад сам се у пролазу нашао под једним дрветом, он је дохватио грану и затресао је над мојом главом. Прави град од јабука, великих као добро буренце, с лупом се просу на земљу; једна ме удари у леђа и обори..."

Гуливер се после тог ударца срећно дигао на ноге. Међутим, лако је израчунати да је удар од пада такве јабуке морао заиста бити убитачан, јер се та јабука, 1728 пута тежа од наше, тј. тешка 80 kg, срушила с висине од 12 m. Енергија удара морала је бити 20000 пута већа од енергије пада обичне јабуке и могла би се упоредити само с енергијом артиљериског зрна...

Највећу грешку учинио је Свифт у процени снаге мишића дивова. Ми смо већ у I глави видели да снага великих животиња није пропорционална њиховој величини. Ако она расуђивања која смо тамо навели применимо на Свифтове дивове, испоставиће се да је, иако им је мишићна снага била 144 пута већа од Гуливерове, њихова телесна тежина била 1728 пута већа. И ако је Гуливер био у стању да подигне не само тежину свог сопственог тела него још и један отприлике исто толики терет, дивови не би могли ни да савладају тежину свог огромног тела. Они би морали да непомично леже на једном месту, немоћни да учине било какав већи покрет. Њихова снага, тако сликовито описана код Свифта, могла је бити само резултат нетачног рачуна*).

---

*) Видети детаљно о томе у „Занимљивој механици" од Ј. И. Перељмана.

ЗАШТО ПРАШИНА И ОБЛАЦИ ПЛИВАЈУ У ВАЗДУХУ

„Зато што су лакши од ваздуха“ — ево обичног одговора који многима изгледа тако неоспоран да не оставља никаквог повода за сумњу. Али, такво објашњење је и поред своје примамљиве једноставности потпуно погрешно. Честице прашине не само што нису лакше од ваздуха него су од њега теже стотинама па чак и хиљадама пута.

Шта су то „зрнца прашине“? То су најситније честице разних тела: камена, стакла, угља, дрвета, метала, текстилних влакана и сл. Зар су сви ти материјала лакши од ваздуха? Један поглед на таблицу специфичних тежина увериће вас да је сваки од њих неколико пута тежи од воде или лакши од ње 2—3 пута. Вода је пак 800 пута тежа од ваздуха; према томе, зрнца прашине су тежа од њега неколико стотина пута, ако не и хиљаду пута. Сада је очигледна неоснованост уобичајеног погледа на узрок појаве пливања зрнаца прашине у ваздуху.

А који је прави узрок? Пре свега, треба приметити да обично ми ту појаву погрешно замишљамо сматрајући је „пливањем“. У ваздуху (или течности) пливају само она тела чија тежина није већа од тежине једнаке запремине ваздуха (или течности), а зрнца прашине премашују ту тежину много пута, па зато не могу пливати у ваздуху. Она и не пливају већ лебде, тј. лагано се спуштају задржавана у свом падању отпором ваздуха. Зрнце прашине у свом паду треба да прокрчи себи пут између честица ваздуха гурајући их од себе или повлачећи их за собом. И на једно и на друго троши се енергија падања. То расипање енергије је утолико веће уколико је, у поређењу са тежином, већа површина тела (тачније, површина његовог попречног пресека). При падању већих масивних тела ми уопште не примећујемо успоравајуће дејство отпора ваздуха, јер њихова тежина знатно премашује дејство силе отпора.

Али, погледајмо шта се дешава кад се тело смањује. Геометрија ће нам помоћи да се и ту снађемо. Није тешко схватити да се, кад се запремина тела смањује, његова тежина смањује много више неголи површина његовог попречног пресека: смањивање тежине је пропорционално трећем степену скраћења дужине, а слабљење отпора је пропорционално отпору, тј. другом степену смањења дужине.

Какав то има значај у нашем случају јасно је из следећег примера. Узмимо лопту за крикет, с пречником од 10 cm, и сићушну лоптицу од истог материјала с пречником од 1 mm. Однос њихових димензија је једнак 100, јер је 10 cm сто пута веће од 1 mm. Мала лоптица је лакша од велике 100^3 пута, тј. 1 000 000 пута, а отпор на који она наилази при кретању у ваздуху слабији је само 100^2 пута, тј. 10 000 пута. Јасно је да мала лоптица треба да пада спорије од велике. Краће речено, узрок тога што се зрнца прашине „држе“ у ваздуху јесте њихова способност да лебде, условљена њиховим малим димензијама, а не то што су она тобоже лакша од ваздуха. Кап воде с пречником од 0,001 mm пада у ваздуху равномерно брзином од 0,1 mm у секунду; довољно је ништавно, за нас неухватљиво струјање ваздуха да би се омело такво споро падање.

Ето зашто се у соби где се много пролази прашина слеже мање него у ненастањеним просторијама, и то мање дању него ноћу, иако би, како се чини, требало да буде баш обрнуто; слегање ометају вртложна кретања која настају у ваздуху, а којих скоро обично и нема у мирном ваздуху мало посећиваних просторија.

Ако се камена коцкица висока 1 cm раздроби у коцкаста зрнца висине од 0,0001 cm, тада ће се укупна површина те камене масе повећати 10 000 пута, а толико ће пута порасти и отпор ваздуха према кретању те масе. Зрнца прашине често имају баш такву величину, те је разумљиво што много повећан отпор ваздуха потпуно мења слику падања.

Из истог узрока „пливају“ у ваздуху и облаци. Давно је одбачено старо схватање да се облаци састоје од водених мехура напуњених воденом паром. Облаци су скуп огромног мноштва необично сићушних, али пуних водених капљица. Ове капљице, иако су 800 пута теже од ваздуха, ипак не падају, — оне се спуштају једва приметном брзином. Велико успоравање пада објашњава се, као и за зрнца прашине, њиховом површином, која је огромна у поређењу са њиховом тежином.

Стога и најслабије узлазно ваздушно струјање може не само да прекрати крајње споро падање облакâ одржавајући их на одређеној висини, него и да их подиже увис.

Главни узрок свих тих појава је присуство ваздуха; у безваздушном простору би и зрнца прашине и облаци падали исто онако као и тешко камење.

Излишно је додати да споро падање човека с падобраном (око 5 m/sec) спада у појаве сличне врсте.

ГЛАВА ДВАНАЕСТА

ГЕОМЕТРИСКА ЕКОНОМИЈА

КАКО ЈЕ ПАХОМ КУПОВАО ЗЕМЉУ

(Задатак Лава Толстоја)

Ову главу, чији ће необични наслов читаоцу постати јасан тек из даљег излагања, почећемо одломком из свима познате приче Л. Толстоја „Треба ли човеку много земље“*).

———

„— А колика је цена? — пита Пахом.

— Код нас је једна цена: 1000 рубаља за дан.

Пахом није разумео.

— Па каква је то мера — дан? Колико у њој има јутара?

— Ми то — рече — не умемо рачунати. А ми продајемо за дан; колико за дан обиђеш, твоје је, а цена је 1000 рубаља.

Зачуди се Пахом.

— Па то се — рече — за дан може много земље обићи.

Насмеја се старешина.

— Сва је твоја — рече. — Само је један услов: ако се за дана не вратиш на оно место одакле си кренуо, паре ти пропадају.

— А како — пита Пахом — да обележим где пролазим?

— Ми ћемо стати где ти је воља; ми ћемо ту остати, а ти иди, начини круг, а са собом понеси мотику и, где треба, обележи, на угловима јамице ископај и преко њих две гранчице укрсти; затим ћемо од једне до друге јамице ралом заорати. Захвати колики год хоћеш круг, само се до заласка сунца врати на оно место са кога си кренуо. Што обиђеш — све је твоје.

Разиђоше се Башкирци. Договорили су се да се сутрадан узору сакупе и пре сунца изађу на уговорено место“.

---

*) Ова прича о животом плаћеној грамжљивости постоји код многих народа. У „Српским народним приповијеткама“ Вук Ст. Караџић је ту причу забележио под насловом „Колико човеку земље треба“. — Прим. прев.

* * *

„Дођоше у степу; зора руди. Приђе старешина Пахому и показа му руком.

— Ево, — рече, — све је ваше докле око допире. Бирај шта хоћеш.

Скиде старешина лисичију шубару с главе и постави је на земљу.

— Ево — рече, — ово ће бити мета. Одавде пођи, овамо дођи. Што обиђеш, све ће бити твоје.

Чим је синуло на видику сунце, Пахом заметну мотику на раме и крете у степу.

Пређе једну врсту, заустави се, ископа рупу. Пође даље. Одмаче се још више, ископа и другу рупу.

Прошао је пет врста. Погледа на сунашце — већ је време доручку. — „Једна запрега је прошла — помисли Пахом. — А њих је четири на дан, још је рано да окренем устрану. Да пређем још пет врста па да заокренем налево“. — Крете опет право. — „Но, — помисли, — на тој страни сам доста захватио; треба заокренути“. Заустави се, ископа повећу рупу и сави оштро налево. Ишао је дуго и том страном; начинио је и други угао. Осврну се Пахом на шихан (брежуљак); од врућине се замаглио, а услед јаре једва се виде људи на њему. — „Но, — помисли, — дугачке сам стране захватио, ову треба узети краћу“. И пође трећом страном. Погледа на сунце — сад ће подне, а он је трећом страном прешао само две врсте. А до оног места је петнаест врста. — „Не, — помисли, — морам окренути право шихану“.

Журно ископа Пахом рупу и окрете право брежуљку.

Иде Пахом право на шихан, а већ му је тешко. Да му је да се одмори, — а не сме, неће стићи до заласка сунца. А сунце је већ близу краја.

Иде тако Пахом; тешко му је, а све убрзава корак. Иде, иде, а још је далеко; потрча што брже може... Трчи Пахом, кошуља и чакшире од зноја се лепе за тело, грло му је суво. У грудима као да му се ковачки мехови надимају, а срце удара као маљ. Трчи Пахом из последње снаге, а сунце већ прилази крају. Сад ће почети да залази.

Сунце је близу краја, а и шихан није далеко. Види шубару од лисичине на земљи и старешину како на земљи седи.

Обазре се Пахом на сунце, а оно је дошло до земље и већ почело једним крајем да залази. Запе Пахом свом снагом и устрча на шихан. Види — шубара. Потсекоше му се ноге и он паде испружених руку да шубару дохвати.

— Јунак си! — повика старешина, — много си земље освојио!

Један радник притрча, хтеде да га подигне, а њему из уста липти крв и он лежи мртав...“

Задатак Лава Толстоја

Нећемо водити рачуна о мрачном расплету те приче и зауставићемо се само на њеној геометриској страни. Да ли се по подацима, расејаним у тој причи, може отприлике утврдити колико је земље Пахом обишао? Тај задатак је на први поглед нерешљив, али се ипак може прилично просто решити.

Решење

Ако пажљиво поново прочитамо причу и извучемо из ње све геометриске податке, неће нам бити тешко да се уверимо да је тих података сасвим довољно за исцрпан одговор на постављено питање. Може се чак и нацртати план земљишта које је Пахом обишао.

Пре свега, из приче је јасно да је Пахом ишао дуж страница једног четвороугла. О првој његовој страници читамо:

„Прешао је пет врста... Да пређем још пет врста па да заокренем налево...“

То значи да је прва страница четвороугла имала у дужину око 10 врста.

О другој страници, која образује прав угао с првом, у причи нису дати бројни подаци.

Дужина треће странице, која је очигледно управна на другу, у причи је непосредно указана: *„Трећом страном прешао је само две врсте“*.

Непосредно је дата и дужина четврте странице: *„До оног места је петнаест врста“**).

На основу тих података можемо нацртати план земљишта које је Пахом обишао (сл. 152). У добијеном четвороуглу $ABCD$ страница $AB = 10$ врста, $CD = 2$ врсте, $AD = 15$ врста, а углови B и C су прави. Дужину x-непознате странице BC није тешко израчунати ако се из D повуче на AB нормала DE (сл. 153). Тада су нам у правоуглом троуглу AED познате катете $AE = 8$ врста и

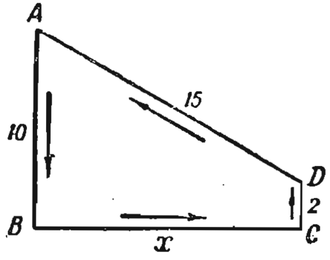
---

*) Међутим, овде је несхватљиво како је с толиког растојања Пахом могао разликовати људе на шихану.

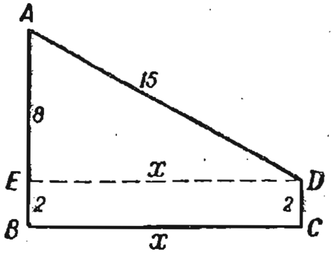
хипотенуза $AD = 15$ врста. Непозната катета $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx$ ≈ 13 врста.

Према томе, друга страница је била дугачка око 13 врста.

Пахом се, очигледно, преварио кад је сматрао да је друга страница краћа од прве.



Сл. 152. Пахомов пут



Сл. 153. — Пахомов пут са детаљнијим подацима

Као што видите, план оног земљишта које је Пахом обишао може се доста тачно нацртати. Несумњиво је Лав Толстој имао пред собом цртеж налик на сл. 152 кад је писао своју причу.

Сад је лако израчунати и површину трапеза $ABCD$, који се састоји из правоугаоника $EBCD$ и правоуглог троугла AED. Она је једнака

$$2 \cdot 13 + 0{,}5 \cdot 8 \cdot 13 = 78 \text{ квадратних врста.}$$

Израчунавање по формули за трапез дало би, разуме се, исти резултат:

$$\tfrac{1}{2}(AB + CD) \cdot BC = \tfrac{1}{2}\,(10 + 2) \cdot 13 = 78 \text{ квадр. врста.}$$

Видимо да је Пахом обишао пространо земљиште од 78 кв. врста, или око 8000 десетина. Десетина би га коштала 12,5 копејака.

ТРАПЕЗ ИЛИ ПРАВОУГАОНИК?

Задатак

У судбоносни дан свога живота Пахом је прешао $10 + 13 + 2 + 15 = 40$ врста идући дуж страница трапеза. Његова првобитна намера била је да иде дуж правоугаоника; трапез је настао случајно, услед нетачног рачуна. Занимљиво је испитати да ли је он био у добитку или губитку зато што је његово земљиште испало не правоугаоно већ трапезасто. У коме случају би он добио веће земљиште?

Решење

Правоугаоника са обимом од 40 врста може бити врло много, и сваки има другу површину. Ево низа примера:

$14 \cdot 6 = 84$ квадратних врста,
$13 \cdot 7 = 91$ квадратна врста
$12 \cdot 8 = 96$ квадратних врста
$11 \cdot 9 = 99$ „ „

Видимо да све те фигуре једнаког обима од 40 врста имају површину већу од површине нашег трапеза. Међутим, има и таквих правоугаоника са обимом од 40 врста чија је површина мања од површине тог трапеза:

$18 \cdot 2 = 36$ квадратних врста,
$19 \cdot 1 = 19$ „ „
$19{,}5 \cdot 0{,}5 = 9{,}75$ „ „

Према томе, на питање постављено у задатку не може се дати одређен одговор. Има правоугаоника са површином већом од површине трапеза, али их има и са мањом, иако сви имају једнак обим. Зато се може дати потпуно одређен одговор на питање који од свих правоугаоника задатог обима има највећу површину. Упоређујући наше правоугаонике ми примећујемо да, уколико је мања разлика страница, утолико је већа површина правоугаоника. Природно је закључити да ће, кад те разлике нема, тј. кад се правоугаоник претвори у квадрат, површина фигуре постати највећа. Она ће тада бити једнака $10 \cdot 10 = 100$ кв. врста. Лако је видети да тај квадрат има већу површину неголи макоји правоугаоник једнаког обима. Пахом је требало да иде дуж странице квадрата да би добио земљиште највеће површине — за 22 кв. врсте веће од оног које је успео да обиђе.

ЈЕДНА ИНТЕРЕСАНТНА ОСОБИНА КВАДРАТА

Једна интересантна особина квадрата — да својом контуром обухвата највећу од површина макојег другог правоугаоника истог обима — многима није позната. Зато ћемо овде навести строг доказ тог тврђења.

Обележимо обим правоугаоне фигуре са O. Код квадрата са толиким обимом свака страница ће бити $O/4$. Доказаћемо да, скраћујући једну његову страницу за неку дужину b а продужујући му суседну страницу за исто толико, добијамо правоугаоник једнаког обима, али мање површине. Другим речима, доказаћемо да је површина $(O/4)^2$ квадрата већа од површине $(^1/_4O - b)\,(^1/_4O + b)$ правоугаоника:

$$(O/4)^2 > (O/4 - b)\,(O/4 + b).$$

Како је десна страна ове неједнакости једнака $(O/4)^2 - b^2$, то цео израз постаје:

$$0 > -b^2, \text{ или } b^2 > 0.$$

Али, последња неједнакост је очигледна: квадрат макојег броја, било позитивног или негативног, већи је од 0. Према томе, тачна је и првобитна неједнакост која нас је до тога довела.

Дакле, од свих правоугаоника једнаког обима квадрат има највећу површину.

Одатле произлази, између осталог, и то да од свих правоугаоника једнаке површине квадрат има најмањи обим. У то се можемо уверити следећим расуђивањем. Претпоставимо да то није тачно и да постоји такав правоугаоник A чија је површина једнака површини квадрата B, а обим мањи од обима квадрата. Тада ћемо, кад нацртамо квадрат C са обимом једнаким обиму правоугаоника A, добити квадрат који има већу површину него A и, према томе, већу површину него квадрат B. Шта смо добили? Да квадрат C има обим мањи од обима квадрата B, а површину већу неголи овај. То је очигледно немогућно: кад је страница квадрата C мања од странице квадрата B, тада му и површина мора бити мања. То значи да се није смело претпоставити да постоји правоугаоник A који, по површини једнак са квадратом, има обим мањи од обима квадрата. Другим речима, од свих правоугаоника једнаке површине најмањи обим има квадрат.

Познавање тих особина квадрата било би помогло Пахому да правилно расподели своје снаге и да добије правоугаоно земљиште највеће површине. Знајући да за један дан може прећи без премарања, рецимо, 36 врста, он би пошао дуж контуре квадрата са страницом од 9 врста и увече би био сопственик земљишта од 81 врсте, тј. за 3 врсте више него што је стекао смртоносним напрезањем свих својих снага. И, напротив, ако би се унапред ограничио на неко правоугаоно земљиште одређене површине, например, од 36 кв. врста, могао би да оно што жели постигне с најмањим утрошком снаге идући контуром квадрата чија је страница 6 врста.

ЗЕМЉИШТЕ ДРУГАЧИЈЕГ ОБЛИКА

Али, можда би Пахому било још корисније да обележи за себе земљиште не правоугаоног облика већ неког другог, произвољног четвороугаоног, троугаоног, петоугаоног облика итд.?

То се питање може разматрати строго математички, али, бојећи се да не заморимо свог читаоца ми овде нећемо улазити у то разматрање и упознаћемо се само с резултатима.

Прво, може се доказати да од *свих четвороуглова* једнаког обима највећу површину има квадрат. Стога, желећи да има четвороугаоно земљиште, Пахом никаквом досетком не би могао да стекне више од 100 кв. врста (сматрајући да он за дан пређе највише 40 врста).

Друго, може се доказати да квадрат има већу површину неголи било који троугао једнаког обима. Једнакостранични троугао исто толиког обима има страницу 40/3 = 13,3 врста, а површину (по формули $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где је P површина, а a страница);

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. врста,}$$

тј. мању чак и од површине оног трапеза који је Пахом обишао. Касније ћемо доказати (стр. 269) да од свих троуглова једнаког обима *једнакостранични* има највећу површину. То значи да, ако чак и тај највећи троугао има површину мању од површине квадрата, тада су и сви остали троуглови једнаког обима по својој површини мањи од квадрата.

Али, ако површину квадрата почнемо упоређивати са површином петоугла, шестоугла итд. једнаког обима, видећемо да ту престаје првенство квадрата: правилни петоугао има већу површину, правилни шестоугао још већу итд. У то се можемо лако уверити на примеру правилног шестоугла. Ако му је обим 40 врста, страница ће му бити једнака 40/6, а површина (по формули $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$) биће једнака

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115 \text{ кв. врста.}$$

Да је Пахом за своје земљиште изабрао облик правилног шестоугла, он би са истим утрошком снаге стекао земљиште чија је површина за 115 — 78, тј. за 37 врста већа неголи уствари, а за 15 кв. врста већа него што би било квадратно земљиште (али тада би, разуме се, морао да крене на пут са угломером у руци).

Задатак

Од шест шибица начинити фигуру највеће површине.

Решење

Од шест шибица се могу саставити разне фигуре: једнакостранични троугао, правоугаоник, разни ромбоиди, читав низ неправилних петоуглова, низ неправилних шестоуглова и, најзад, правилни шестоугао. Геометар и не упоређујући те фигуре једну с другом зна унапред која фигура има највећу површину: правилни шестоугао.

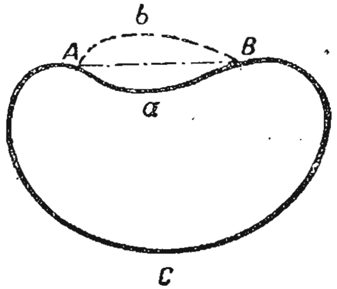
ФИГУРЕ С НАЈВЕЋОМ ПОВРШИНОМ

Може се строго геометриски доказати да, уколико је већи број страница правилног многоугаоног земљишта, утолико је већа површина коју тај многоугао, задржавајући исти обим, обухвата. А највећу површину с датим обимом обухвата круг. Да је Пахом трчао дуж круга, тада би, пошто пређе 40 врста, добио површину једнаку

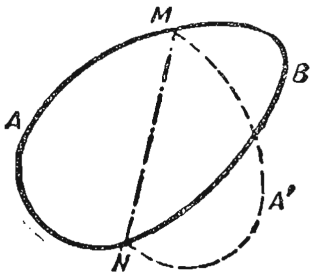
$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ кв. врста.}$$

Већу површину с датим обимом не може имати никоја друга фигура, без обзира да ли је праволиниска или криволиниска.

Ми ћемо себи дозволити да се мало зауставимо на тој чудноватој особини круга да обухвата већу површину неголи макоја друга фигура било каквог облика са једнаким обимом. Можда неки читаоци желе да сазнају на који се начин таква тврђења доказују. Ми ћемо навести доказ — истина, не сасвим строг — те особине круга, доказ који је дао математичар Јакоб Штајнер. Доказ је прилично дугачак, али они којима се он буде учинио заморним могу га изоставити без штете по разумевање даљег излагања.



Сл. 154. Утврђујемо да фигура са максималном површином мора бити испупчена



Сл. 155. Ако тетива полови обим испупчене фигуре с највећом површином, она тада полови и површину

Треба доказати да фигура која, с датим обимом, има највећу површину претставља круг. Пре свега ћемо утврдити да тражена фигура мора бити испупчена. То значи да се макоја њена тетива мора потпуно налазити унутар те фигуре. Нека имамо фигуру $AaBC$ (сл. 154), која има спољашњу тетиву AB. Заменимо лук a симетричним луком b. Услед такве замене се обим фигуре ABC неће изменити, а површина ће се очигледно увећати. То значи да фигуре као $AaBC$ не могу бити оне које, са истим обимом, ограничавају највећу површину. Према томе, тражена је фигура испупчена (конвексна).

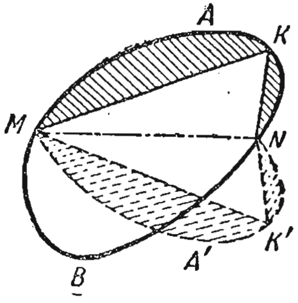
Затим можемо унапред утврдити и другу особину те фигуре: свака тетива која полови обим дели и површину на два једнака дела. Нека је $AMBN$ (сл. 155) тражена фигура и нека тетива MN полови њен обим. Доказаћемо да је површина AMN једнака површини MNB. Заиста, ако би неки од тих делова био по површини већи од другог, например, $AMN > MNB$, тада бисмо, преклопивши фигуру AMN око MN, добили фигуру $AMA'N$, чија је површина већа од површине првобитне фигуре $AMBN$, а обим јој је исти. То значи да фигура $AMBN$, чија тетива која полови њен обим дели њену површину на неједнаке делове, не може бити тражена фигура (тј. не може с датим обимом имати највећу површину).

Пре него што кренемо даље, доказаћемо следећу помоћну теорему: Од свих троуглова с двема датим страницама највећу површину има онај чије дате странице образују прав угао. Да бисмо то доказали, сетимо се тригонометриске формуле за површину троугла P с датим страницама a и b и захваћеним углом C:

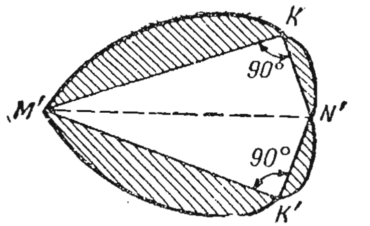
$$P = \frac{1}{2}\, ab \sin C.$$

Овај израз ће, очигледно, имати највећу вредност (за дате странице) онда кад $\sin C$ има највећу вредност, тј. кад је једнак 1, а угао чији је синус једнак 1 је прав, што је и требало доказати.

Сада можемо прећи на главни задатак — доказ да од свих фигура датог обима O највећу површину ограничава круг. Да бисмо се у то уверили, покушајмо да претпоставимо да постоји нека фигура $MANBM$ различита од круга (сл. 156) која има ту особину. Повуцимо у њој тетиву MN која полови њен обим; ова исто тако дели на два једнака дела и површину фигуре. Преклопимо половину MKN око MN тако да заузме симетричан положај



Сл. 156. Претпоставимо да постоји фигура која је различита од круга а има највећу површину



Сл. 157. Утврђујемо да од свих фигура са датим обимом највећу површину ограничава круг

($MK'N$). Запазимо да фигура $MNK'M$ и првобитна фигура $MKNM$ имају једнак обим и једнаку површину. Како лук MKN није полукруг (јер, иначе, не би имало шта да се доказује), то се на њему морају налазити такве тачке из којих се дуж MN види под углом различитим од правог угла. Нека је K таква тачка а K' њој симетрична тачка, тј. углови K и K' нису прави. Размичући (или примичући) странице MK, KN, MK' и NK' можемо учинити да им захваћени угао постане прав, те ћемо добити подударне правоугле троугле. Ове троугле саставићемо хипотенузама (као на сл. 157) и прикључићемо им на одговарајућим местима осенчеве отсечке. Добићемо фигуру $M'KN'K'M'$, која има исто толики обим као и првобитна, али има, очигледно, већу површину (зато што правоугли троугли $M'KN'$ и $M'K'N'$ имају већу површину неголи косоугли MKN и $MK'N$). То значи да никаква фигура с датим обимом различита од круга не може имати максималну површину. Само у случају круга ми на показани начин не бисмо могли конструисати фигуру која, са истим обимом, има још већу површину.

Ето каквим се расуђивањима може доказати да је круг фигура која, с датим обимом, има највећу могућну површину.

Лако је доказати тачност и овог тврђења: од свих фигура једнаке површине круг има најмањи обим. За то је потребно применити на круг она расуђивања која смо раније били применили на квадрат (стр. 261).

ЕКСЕРИ

Задатак

Какав је ексер лакше извући, округли, четвртасти или троугласти, ако су они укуцани подједнако дубоко и имају једнаку површину попречног пресека?

Решење

Поћи ћемо од чињенице да се јаче држи онај ексер који већом површином додирује материјал који га окружује. Који од наших ексера има већу бочну површину? Ми већ знамо да је, кад су површине једнаке, обим квадрата мањи од обима троугла, а обим круга мањи од обима квадрата. Ако се страница квадрата узме за јединицу, рачун ће нам за те три величине дати следеће

бројне вредности: 4,53; 4; 3,55. Према томе, јаче од осталих треба да се држи троугласти ексер. Међутим, такви се ексери не израђују — бар их нема у продаји. Узрок томе крије се вероватно у чињеници да се такви ексери лакше савијају и ломе.

ТЕЛО НАЈВЕЋЕ ЗАПРЕМИНЕ

Особину сродну поменутој особини круга има и лопта; она, са датом површином, ограничава највећу могућну запремину. И насупрот томе, од свих тела једнаке запремине најмању површину има лопта. Те особине имају значаја и у практичном животу. Лоптасти самовар има мању површину неголи цилиндрични или неки други који садржи исти број шоља воде, а како свако тело губи топлоту само по својој површини, то се лоптасти самовар хлади спорије неголи било какав други самовар једнаке запремине. Насупрот томе, резервоар топломера брже се греје и хлади (тј. прима температуру предмета који га окружују) ако му се да облик не лоптице већ цилиндра.

Из истог узрока Земљина лопта, која се састоји од чврсте коре и језгра, треба да смањује своју запремину, тј. да се скупља, сабија под дејством свих оних сила које мењају облик њене површине; њеном унутрашњем делу мора постати тесно увек кад њен спољашњи део претрпи било какву промену која мења његов сферни облик. Могућно је да је та геометриска чињеница у вези са земљотресима и уопште са тектонским појавама, али о томе треба геолози да кажу своју реч.

ПРОИЗВОД ЈЕДНАКИХ МНОЖИЛАЦА

У задацима као што су они којима смо се напред бавили разматра се питање са извесне, такорећи економске стране: како се, с датим утрошком снаге (например, при прелажењу пута од 40 врста), може постићи најповољнији резултат (захватити највеће земљиште). Отуда и потиче наслов овог дела наше књиге: „Геометриска економија". Али, то је слобода популаризатора; у математици питања те врсте носе други назив: проблеми максимума и минимума. Они могу бити веома разноврсни по садржају и по тежини. Многи се решавају само методама више математике, али има доста и таквих за чије је решавање довољно и најосновније знање. У даљем излагању размотрићемо низ таквих задатака из области геометрије, које ћемо решавати користећи се једном интересантном особином производа једнаких множилаца.

За случај два множиоца та нам је особина већ позната. Знамо да је површина квадрата већа од површине било кога правоугаоника једнаког обима. Ако се то геометриско тврђење преведе на језик аритметике, оно ће значити следеће: ако дати број треба раставити на два броја таква да њихов производ има највећу могућну вредност, тада треба тај број поделити на два једнака дела. Например, од свих производа

$$13 \cdot 17,\ 16 \cdot 14,\ 12 \cdot 18,\ 11 \cdot 19,\ 10 \cdot 20,\ 15 \cdot 15$$

итд., код којих је збир чинилаца једнак 30, највећи ће бити $15 \cdot 15$, чак и ако се упоређују и производи разломљених бројева ($14\frac{1}{2} \cdot 15\frac{1}{2}$ и сл.).

То исто важи и за производе трију бројева чији је збир сталан; такав производ достиже своју највећу вредност кад су му чиниоци једнаки међу собом. Ово непосредно произлази из претходног. Заиста, нека је збир три броја x, y и z једнак a:

$$x + y + z = a.$$

Претпоставимо да x и y нису једнаки. Ако сваки од њих заменимо полузбиром $\frac{x+y}{2}$, горњи збир се неће изменити:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Али како је, према претходном,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

то је производ три чиниоца

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z$$

већи од производа xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z > xyz.$$

Уопште, ако су међу чиниоцима производа xyz бар два неједнака, тада се увек могу изабрати бројеви који ће, не мењајући збир датих бројева, дати производ већи од xyz. И само кад су сва три чиниоца једнака, таква се замена не може извршити. Према томе, ако је $x + y + z = a$, производ xyz биће највећи кад је

$$x = y = z.$$

Том особином једнаких чинилаца користићемо се при решавању неколико интересантних задатака.

ТРОУГАО НАЈВЕЋЕ ПОВРШИНЕ

Задатак

Какав облик треба да има троугао са задатим збиром страница да би имао највећу површину?

Ми смо већ раније (стр. 262) напоменули да ту особину има еднакостранични троугао. Али, како се то доказује?

Решење

Површина P троугла са страницама a, b, c и обимом $a + b + c = 2s$ изражава се, као што је познато из геометрије, формулом

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

одакле је

$$\frac{P^2}{s} = (s-a)(s-b)(s-c).$$

Површина P троугла биће највећа онда кад њен квадрат P^2, или израз $\frac{P^2}{s}$, достигне највећу вредност (према услову задатка је полуобим s непромењива количина). Али, како обе стране једнакости постижу своју највећу вредност истовремено, ово се питање своди на то да се одреди под којим условом производ

$$(s-a)(s-b)(s-c)$$

постаје највећи. Имајући у виду да је збир та три чиниоца стална величина:

$$s-a+s-b+s-c=3s-(a+b+c)=3s-2s=s,$$

закључујемо да њихов производ достиже своју највећу вредност тада кад чиниоци постану једнаки, тј. кад важи једнакост

$$s-a=s-b=s-c,$$

одакле је

$$a=b=c.$$

Дакле, троугао датог обима има највећу површину онда кад су му странице једнаке међу собом.

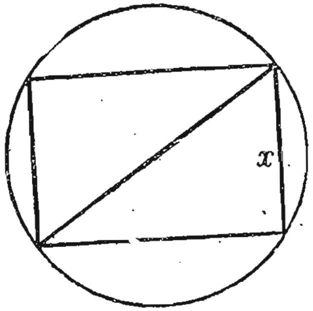
НАЈТЕЖА ГРЕДА

Задатак

Из цилиндричног балвана треба истесати греду највеће тежине. Како то треба урадити?

Решење

Задатак се, очигледно, своди на то да се у круг упише правоугаоник највеће површине. Мада је после свега што је напред речено читалац већ припремљен на помисао да ће такав правоугаоник бити квадрат, ипак је од интереса строго доказати то тврђење.



Сл. 158. Уз задатак о најтежој греди

Обележимо једну страницу траженог правоугаоника (сл. 158) са x; тада је друга једнака $\sqrt{4R^2-x^2}$, где је R полупречник кружног пресека балвана. Површина правоугаоника је

$$P=x\sqrt{4R^2-x^2},$$

одакле је

$$P^2=x^2\,(4R^2-x^2).$$

Како је збир чинилаца x^2 и $4R^2-x^2$ стална величина $(x^2+4R^2-x^2=4R^2)$, то ће њихов производ P^2 бити највећи кад је $x^2=4R^2-x^2$, тј. за $x=R\sqrt{2}$. Тада ће пак своју највећу вредност достићи и P, тј. површина траженог правоугаоника.

Дакле, једна страница правоугаоника с највећом површином једнака је $R\sqrt{2}$, тј. страници уписаног квадрата. Греда има највећу запремину ако је њен попречни пресек квадрат уписан у попречни пресек цилиндричног балвана.

ОД ТРОУГАОНОГ КОМАДА КАРТОНА

Задатак

Имамо комад картона у облику троугла. Из тог комада треба паралелно основици и висини троугла изрезати правоугаоник највеће површине.

Решење

Нека је ABC дати троугао (сл. 159), а $MNOQ$ онај правоугаоник који треба да се изреже. Из сличности троуглова ABC и NBM имамо:

$$BD:BE=AC:NM,$$

одакле је

$$NM=\frac{BE\cdot AC}{BD}.$$

Ако једну страницу NM траженог правоугаоника обележимо са y, њено отстојање BE од врха троугла са x, основицу AC датог троугла са a, а његову висину BD са h, горе наведени израз можемо написати у облику:

$$y=\frac{ax}{h}.$$

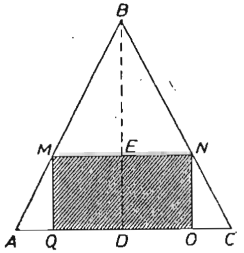
Површина P траженог правоугаоника $MNOQ$ једнака је

$$P=MN\cdot NO=MN\cdot(BD-BE)=$$

$$=(h-x)\,y=(h-x)\,ax/h$$

према томе је

$$Ph/a=(h-x)x.$$



Сл. 159. У троугао уписати правоугаоник највеће површине

Површина P биће највећа онда кад је највећа вредност производа Ph/a, тј. дакле онда кад производ чинилаца $h-x$ и x достигне своју највећу вредност. Али, збир $h—x+x=h$ је стална величина. То значи да је производ максималан кад је

$$h-x=x,$$

одакле је

$$x=\frac{h}{2}.$$

Видимо да страница NM траженог правоугаоника пролази кроз средину висине троугла и, према томе, спаја средине његових кракова. То значи да је та страница правоугаоника једнака $a/2$, а друга $h/2$.

ЛИМАРЕВЕ НЕВОЉЕ

Задатак

Лимару су наручили да од квадратног комада лима начини 60 cm широку кутију без поклопца, с квадратним дном, и поставили су услов да кутија има највећу могућну запремину. Лимар је дуго премеравао колико широке делове треба да савије са сваке стране, али није могао да нађе тражено решење (сл. 160). Хоће ли читалац моћи да га спасе из те невоље?

Решење

Нека је ширина делова које треба савити једнака x (сл. 160). Тада ће ширина квадратног дна кутије бити једнака $60—2x$, а запремина V биће изражена производом

$$V=(60—2x)(60—2x)x.$$

За које ће x тај производ имати највећу вредност? Ако би збир три чиниоца био сталан, производ би био највећи онда кад су они једнаки међу собом. Али, овде збир чинилаца

$$60-2x+60-2x+x=120-3x$$

није стална величина, јер се мења кад се x мења. Међутим, није тешко постићи да збир та три чиниоца буде стална величина; за то је довољно само помножити обе стране једнакости са 4. Добијамо:

$$4V=(60-2x)(60-2x)\cdot 4x.$$

Збир ових чинилаца једнак је

$$60-2x+60-2x+4x=120,$$

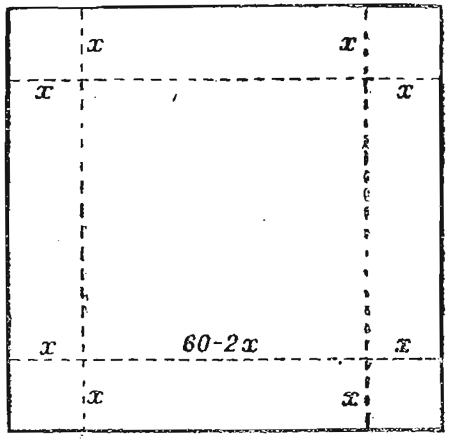
а то је стална величина. То значи да производ ових чинилаца достиже своју највећу вредност онда кад су они једнаки, тј. када је

$$60-2x=4x,$$

одакле је

$$x=10.$$

Тада ће пак $4V$, а са овим и V достићи свој максимум.



Сл. 160. Решење лимаревог задатка

Дакле, кутија највеће запремине добиће се ако се од комада лима савију стране у дубини од 10 cm. Та највећа запремина једнака је $40\cdot 40\cdot 40=16\,000$ cm^3. Ако савијемо стране за центиметар плиће или дубље, ми ћемо у оба случаја смањити запремину кутије. Заиста је

$$9\cdot 42\cdot 42=15\,876\ \text{cm}^3,$$
$$11\cdot 38\cdot 38=15\,884\ \text{cm}^3;$$

и у једном и у другом случају запремина је мања од 16 000 cm^3*).

---

*) Решавајући задатак у општем облику наћи ћемо да је, ако је a дужина квадратног комада, за прављење кутије потребно савити правоугаоне комаде ширине $x=a/6$, јер је производ $(a-2x)\cdot(a-2x)\cdot x$, или $(a-2x)\cdot(a-2x)\cdot 4x$ највећи за $a-2x=4x$.

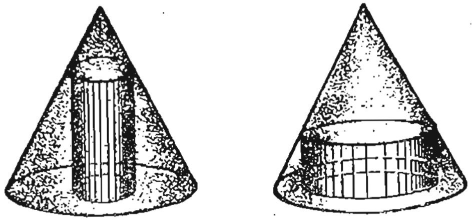
ТОКАРЕВЕ НЕВОЉЕ

Задатак

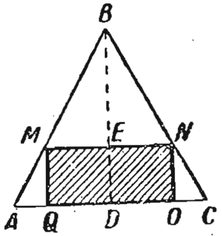
Токару је дата масивна купа и наручено му је да од ње изради ваљак тако да отпадне што мање материјала (сл. 161). Токар је почео да размишља о облику траженог ваљка: да ли да начини висок, па макар и узак (сл. 161, лево), или, напротив, широк а низак (сл. 161, десно). Он дуго није могао решити какве треба да су димензије тог ваљка да би му запремина била највећа, тј. да би отпало најмање материјала. Како је требало токар да поступи?

Решење

Задатак захтева пажљиво геометриско разматрање. Нека је ABC (сл. 162) осни пресек купе, а BD његова висина, коју ћемо обележити са h; полупречник основе $AD = DC$ обележићемо са R.



Сл. 161. Од купе се може начинити ваљак висок а узак или широк а низак. Када ће бити најмање отпадака?



Сл. 162. Осни пресек купе и ваљка

Ваљак који се може начинити од купе има осни пресек $MNOQ$. Наћи ћемо на коликом отстојању $BE = x$ од врха B треба да се налази горња основа ваљка да би његова запремина била највећа.

Полупречник r основе ваљка (QD или ME) лако се налази из пропорције

$$ME : AD = BE : BD, \quad \text{тј.} \quad r : R = x : h,$$

одакле је

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

Висина ED ваљка једнака је $h - x$. Према томе, његова запремина је:

$$V = \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2x^2}{h^2} (h - x),$$

одакле је

$$\frac{V h^2}{\pi R^2} = x^2 (h - x).$$

У изразу $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$ величине h, π и R су сталне, а само је V променљива. Циљ нам је да нађемо такво x за које V постаје највеће. Али, очигледно, V ће постати највеће заједно са $\frac{Vh^2}{\pi R^2}$, тј. са $x^2(h—x)$. А кад ће овај последњи израз постати највећи? Ми ту имамо три променљива чиниоца: x, x и $(h - x)$. Кад би њихов збир био сталан, производ би био највећи онда кад су чиниоци једнаки. Може се лако постићи да тај збир буде сталан ако се обе стране последње једнакости помноже са 2. Тада се добија

$$\frac{2\,Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x).$$

Сада три чиниоца на десној страни имају сталан збир

$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Према томе, њихов производ ће бити највећи онда кад су сви чиниоци једнаки, тј.

$$x = 2h - 2x, \qquad \text{одн.} \qquad x = 2h/3.$$

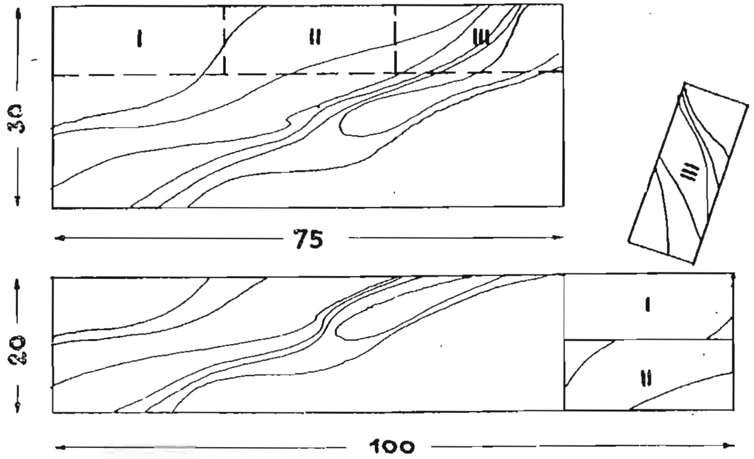
Тада ће и израз $\frac{2\,Vh^2}{\pi R^2}$, а заједно с њим и запремина V ваљка имати своју највећу вредност.

КАКО ПРОДУЖИТИ ДАСКУ

Кад се прави нека ствар у радионици или код куће, дешава се да понекад димензије материјала којим се располаже нису онакве какве су потребне.

Тада треба покушати да се одговарајућом обрадом измене димензије материјала; притом се много добија помоћу геометриске и конструкторске досетљивости и рачуна.

Замислите овакав случај. За израду полице за књиге потребна вам је даска строго одређених димензија, и то: 1 m дужине и 20 cm ширине, а ви имате даску која је краћа а шира, например дугачка 75 cm, а широка 30 cm (сл. 163, горе).



Сл. 163. Како са три сечења и једним резањем продужити даску

Како да се поступи?

Може се, наравно, отсећи дужином даске комад широк 10 cm (испрекидана линија) и овај пресећи на три једнака мању комада дужине по 25 cm и са два од тих комада продужити даска (сл. 163, доле).

Такво решење задатка било би неекономично по броју операција (три сечења и три лепљења и не би задовољавало у погледу издржљивости даске (издржљивост је смањена на оном месту где су мањи комади слепљени с даском).

Задатак

Нађите начин да дату даску продужите помоћу три сечења и само једног лепљења.

Решење

Треба (сл. 164) пресећи даску $ABCD$ по дијагонали AC и једну половину (например $\Delta\, ABC$) паралелно њој самој померити дуж дијагонале за отсечак C_1E једнак дужини која недостаје, тј. за 25 cm; заједничка дужина двеју половина постаће после тога једнака 1 m. Сада те половине треба слепити дуж AC_1 и сувишне делове (осенчене троугле) отсећи. Добиће се даска потребних димензија.

Заиста, из сличности троуглова ADC и C_1EC имамо:

$$AD : DC = C_1E : EC,$$

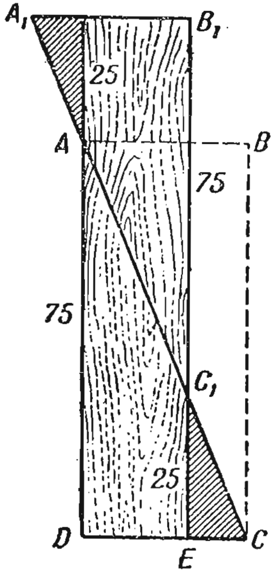
одакле је

$$EC = \frac{DC}{AD} \cdot C_1E,$$

или

$$EC = \frac{30}{75} \cdot 25 = 10 \text{ cm},$$

$$DE = DC - EC = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$



Сл. 164. Решење задатка о продужавању даске

НАЈКРАЋИ ПУТ

На завршетку ћемо размотрити један задатак „о максимуму и минимуму“ који се решава најпростијим геометриским конструкцијама.

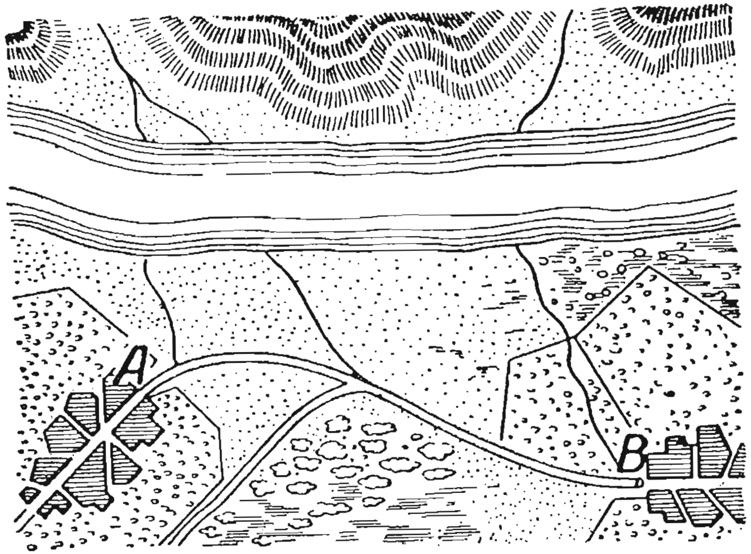
Задатак

Поред обале реке треба изградити црпну станицу из које би се вода цевима доводила у насеља A и B (сл. 165).

На коме је месту треба изградити да би заједничка дужина цеви од црпке до оба насеља била најмања?

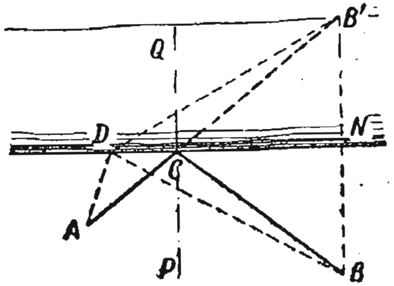
Решење

Овај се задатак своди на тражење најкраћег пута од A до обале и затим до B.



Сл. 165. Уз задатак о црпки

Узмимо да је тражени пут ACB (сл. 166). Пресавијмо цртеж дуж CN. Добићемо тачку B'. Ако је ACB најкраћи пут, то ће, због



Сл. 166. Геометриско решење задатка о избору најкраћег пута

$CB' = CB$, пут ACB' морати бити краћи од сваког другог пута (например ADB'). То значи да је за налажење најкраћег пута потребно наћи само тачку C у којој права AB' сече линију обале.

Тада ћемо, пошто спојимо C и B, добити оба дела најкраћег пута од A до B преко C.

Ако се у тачки C повуче нормала на CN, лако је видети да су углови ACP и BCP, које оба крака најкраћег пута образују с том нормалом, једнаки међу собом ($\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ = \sphericalangle BCP$).

Такав је, као што је познато, закон одбијања светлосног зрака кад се он одбија од огледала: упадни угао једнак је углу одбијања. Отуда произлази да при одбијању светлосни зрак бира најкраћи пут, а тај закључак био је познат још пре две хиљаде година античком физичару и геометру Херону из Александрије.

НАПОМЕНА

Писац „Занимљиве геометрије“, Ј. И. Перељман умро је 1942 год. у Лењинграду. За његова живота било је објављено шест издања ове књиге, а ни после његове смрти она није престала да својим новим издањима, местимично допуњаваним савременим садржајем, придобије нове читаоце. Многобројним преводима „Занимљиве геометрије“ придружује се и овај, први превод на нашем језику. Овом преводу је преводилац понегде додао извесне напомене, сматрајући да ће то југословенском читаоцу бити од користи. Иначе, превод се од оригинала разликује још и једним делом илустрација, којима су, из техничких разлога, оригиналне илустрације морале бити замењене.

М. И. Д.

САДРЖАЈ

ПРВИ ДЕО

ГЕОМЕТРИЈА У ПРИРОДИ

Штампа: Графичко предузеће „Просвета" — Београд, Ђуре Ђаковића 21