КЊИГА ЗНАЊА

12

Urednik
Dr ANDRIJA STANČIĆ

LANSLOT HOGBEN

BROJEVI I STVARNOST

MATEMATIKA ZA SVAKOGA

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
NOVO POKOLENJE
BEOGRAD 1953

Naslov originala
MATHEMATICS FOR THE MILLION
by
LANCELOT HOGBEN

Ilustrovao
DŽ. F. HOREBIN

S engleskog preveo
MILAN S. NEDIĆ

Tekstove priredio za štampu
Dr ANDRIJA STANČIĆ

Štampa Jugoslovenskog štamparskog preduzeća — Beograd

BROJEVI I STVARNOST

»Vrlo je zanimljiva činjenica, da su se upravo ona matematička otkrića pokazala kao najpristupačnija masama koja su istovremeno najviše uticala na razvitak čiste matematike«.

Tobajes Dancih

IZ AUTOROVOG PREDGOVORA*

Ovu sam knjigu napisao za svoj ćef, u bolnici, prilikom jednog dužeg bolovanja. Nekoliko mojih prijatelja — par ljudi od milion i više obrazovanog sveta, koji su još u školi zastrašeni matematikom — ubedilo me je da knjigu treba da objavim. Pristao sam, kada su primili na sebe da izvrše korekturu šifova štamparskog sloga i da me tako rasterete posla koji bi me ometao u mom redovnom zaposlenju.

Ne prisvajam sebi svojstvo stručnjaka jer to nisam, i hoću jasno da istaknem dve stvari. Prvo, knjigu sam pisao kao običan građanin koji se interesuje za narodno prosvećivanje. Drugo, kakvi god se budu stavljali prigovori mom prilaženju problemima i gledištima koja sam pri tome ispoljio, smatram da će delo odgovoriti svojoj nameni, ako će potstaknuti interesovanje za matematiku i otkloniti osećanje niže vrednosti kod mnogih od ovih milion i više, koji su već izgubili nadu da matematiku nauče uobičajenim putem. Čitaoci koji su se navikli na pretstavu nebeskog svoda kakav je on posmatran sa južne polulopte, treba da imaju na umu da su ilustracije i primeri sazdani sa gledišta posmatrača koji živi severno od ekvatora. Neka se moji monolozi i digresije ne uzimaju suviše ozbiljno. Njih sam uneo da bih zasladio »tabletu«. Mnogi možda i nemaju veću hranljivu vrednost od saharina.

Da je ova knjiga iole napisana u nameri da se dâ naučna rasprava, autor bi davao i potrebnu dokumentaciju i osvetlio bi mesta gde se njegova gledišta ne slažu sa shvatanjima drugih. U tom slučaju štivo ne bi bilo tako živo i manje bi odgovaralo jedinoj nameni ove knjige, koja, čini mi se, jedino i opravdava njeno izdavanje.

** Dok je ovaj prevod bio u štampi, u Engleskoj je izašlo deseto izdanje originala, pored izdanja na desetak stranih jezika, koja su već ranije izašla širom sveta. — Red.*

GLAVA I

MATEMATIKA — OGLEDALO CIVILIZACIJE

Postoji priča o Didrou, enciklopedistu i materijalistu, jednome od najistaknutijih ličnosti u doba duhovnog buđenja pred samu Francusku revoluciju. Didro je boravio na ruskom dvoru, gde je njegova raskošna i smela govorljivost privlačila plemiće. Bojeći se da se ne pokoleba pobožnost njenih dvorjana, carica pozove Ojlera, najistaknutijeg matematičara toga doba, da javno diskutuje s Didroom. Didro je bio izvešten da je neki matematičar izveo dokaz o postojanju boga. Pozvali su Didroa u dvor, a nisu mu rekli ko će mu biti protivnik. Pred celim dvorom Ojler mu priđe, pa ozbiljno, kako je to dolikovalo, izjavi: „$\frac{a+b^n}{n} = x$, donc Dieu existe. Répondez![1])". Za Didroa su algebarske formule bile španska sela. Na nesreću on nije shvatio da je čvor baš u tome. Da je on bio shvatio da je algebra samo jezik kojim opisujemo *dimenzije* stvari suprotno običnim jezicima kojima se služimo da opišemo *vrstu* stvari na ovom svetu — on bi tražio od Ojlera da mu prevede prvu polovinu rečenice na govorni jezik. Slobodno prevedena na srpski ona bi se mogla ovako izraziti: »Neki broj x može se dobiti kad se najpre neki broj a doda proizvodu od n jednakih činilaca b, pa se sve to podeli brojem tih jednakih činilaca. I tako izlazi na kraju krajeva da bog postoji. Šta sad imate na to da kažete?« Da je Didro zatražio od Ojlera da na primerima razjasni prvi deo svoga dokaza, kako bi ga ruski dvor lakše razumeo, Ojler bi mu mogao odgovoriti da x iznosi 3, kad a iznosi 1, b dva, a n tri; ili da x iznosi 21 kad a iznosi 3, b tri, a n četiri itd. Ali za Ojlera bi bile nastale teškoće onda,

[1]) Dakle bog postoji. Odgovorite... !

kad bi dvor poželeo da zna kako drugi deo rečenice izlazi iz prvoga. Kao što bi mnogi od nas i Didro je dobio tremu kad se našao pred rečenicom izraženom na jeziku dimenzija. On je naglo otišao iz dvora uz prigušeni kikot celoga skupa, zatvorio se u svoje odaje, zatražio putnu ispravu i vratio se u Francusku.

Ma da Didro to nije mogao znati, on je imao poslednji da se smeje pred sudom istorije. Klerikalizam protiv koga se Didro borio bio je oboren i upiranje u »natprirodno«, kome je uvek služio poneki matematičar, i koje je branio i sam Ojler, počelo je još odonda da otstupa. Jedan izvrstan savremeni astronom, u svojim predavanjima u Džifordu kaže nam da je Dirak pronašao brojeve *p* i *q*. Donc Dieu existe. Drugi jedan istaknuti astronom, dok nas zabavlja svojim čudnim proračunavanjima rastojanja do zvezda, zastaje, pa »Gospodinu Velikom Arhitekti« izdaje počasnu diplomu matematičara. Bilo je izvrsnih prethodnika na tome polju još mnogo pre Ojlera. Jer prvi su matematičari bili sveštenici, tvorci kalendara, koji su proračunavali početke godišnjih doba. Misirski hramovi imali su nilometre pomoću kojih su sveštenici mučnim radom određivali pridolazak i opadanje svete reke. Njima su oni mogli sa velikom tačnošću da pretskažu poplave reke Nila. Njihovi papirusi pokazuju da su za izražavanje svojih merenja imali jezik koji se veoma mnogo razlikovao od nadmenog rečnika kojim su prepredeno saopštavali neposvećenima svoja proročanstva. Mase nisu mogle da vide vezu između proročanstva i stvarnosti, pošto su nilometri bili u vezi s rekom kroz podzemne kanale, vešto skrivene od očiju naroda. Misirski sveštenici su upotrebljavali jedan jezik kad su pisali po zapisnicima kakvog učenog društva, a sasvim drugi kad su nedeljom držali propovedi plačevnom skupu svojih zatucanih vernika.

U staro doba pisanje i čitanje bili su nešto tajanstveno i pretstavljali poseban zanat. Prost čovek nije mogao pročitati Rajndov papirus u koji je pisar Ahmes zapisao zakone o merenju stvari. Civilizovano društvo dvadesetoga veka demokratisalo je čitanje i pisanje *na jeziku vrsta*[1]). Zbog toga običan čovek može da razume naučne pronalaske, ako u njima nema zapletenih računa. On zna nešto o evoluciji. Više se ne veruje popovskim pričama o stvaranju sveta. Zato se tajanstvenost skrila u atom, koji je bezbedno sklonište ne zato što je mali, već zato

[1]) Svakodnevni jezik. — Pr. prev.

što morate da izvršujete zapletene račune i da se služite »podzemnim kanalima«[1]) da biste tamo dospeli. Ovi su podzemni kanali skriveni od oka običnog čoveka, pošto on nije obučavan da čita i da piše na *jeziku dimenzija*. Pre tri veka, kad su se sveštenici služili latinskim jezikom u svojim poslovima, protestantski reformatori su osnovali klasične srednje škole, te je biblija postala pristupačna narodu. Danas je pak došlo vreme za drugu jednu Reformaciju. Narod mora da nauči da čita i da piše na jeziku merenja tako da mu postane pristupačna biblija savremene nauke.

U Didroovo vreme još su život i sreća čovekova mogli zavisiti od toga jesu li njegova verska shvatanja pravoverna ili nisu. Danas život i sreća čovekova zavise, mnogo više nego što većina od nas misli, od toga hoće li se tačno protumačiti javni statistički podaci koje vode državne ustanove. Kad kakav odbor stručnjaka objavi da prosečan čovek može da živi od pomoći koju dobija u besposlici, ili da prosečno dete dobija dovoljno mleka, tada je i samo pominjanje pojma »prosečno« ili navođenje kakve liste brojeva dovoljno da onemogući pametno rasuđivanje o problemu. U stvari polovina stanovništva, ili i više od polovine, može nemati dovoljno sredstava za život dok je *prosečnom* čoveku, *prosečnom* detetu dovoljno ono što ima.

Većina stanovništva što danas živi po civilizovanim zemljama ne ume lako da čita i piše na jeziku dimenzija, isto kao što većina stanovništva u doba Viklifa i Lutera nije znala latinski, na kome su se jeziku vodile verske raspre. Savremenom Didrou ne ostaje drugo, već da nauči jezik dimenzija, samoodbrane radi, jer nijedno društvo nije bezbedno dok je izručeno na milost i nemilost svojim »mudracima«.

Mnogo pre nego što su »mudraci« počeli da uče da čitaju i pišu na svakodnevnom jeziku na kome opisujemo razne vrste stvari, drugi ljudi, koji nisu bili tako strašno mudri, učili su da govore. Običan čovek današnjice, a to će reći čitalac ove knjige, ili njen pisac, ima jedno veliko preimućstvo nad posetiocima hramova, u starome svetu, koji su slušali popovska proricanja. Baš i ako ne umemo da čitamo i da pišemo na *jeziku dimenzija*, mi smo svi bar učili da na njemu govorimo.

[1]) Pisac misli na podzemne kanale do Nila, o kojima je maločas govorio. — Pr. prev.

Kad bi nas neko upitao po čemu se razlikuju ljudi današnjice, tj. ljudi mašinskoga doba, od ljudi koji su živeli pre Američke ili Francuske revolucije, možemo dati nekoliko odgovora. Malo njih bi odgovorilo kao što je odgovorio Berk. Oko četrdeset godina posle onog događaja o kome smo govorili, Berk je napisao »ubistveni« napad na socijalnu revoluciju koju su najavili Enciklopedisti. Samo s tom razlikom što je Berk pisao elegantnom, zvučnom, neodoljivom prozom u kojoj mnogi odeljci potsećaju na poznate opise tekućih događaja u Rusiji, kakvi su se videli u izopačavajućem ogledalu dnevne štampe. U jednom od najzvučnijih ali u isto vreme i najglupljih odeljaka u svojim mudrovanjima Berk objavljuje rečitu posmrtnicu »ancien régime«-u[1]). Njegovu srdžbu dovodi do belog usijanja ne to što će Evropa postati kontinent dućandžija, već što će Evropa postati kontinent računara. »Doba viteštva je prošlo. Naišlo je doba sofista, ekonomista i *računara* i slava Evrope je utuljena na svagda...«

Prvi ljudi koji su stanovali po gradovima bili su životinje koje umeju da *govore*. Čovek mašinskog doba je živi stvor koji *računa*. Mi živimo u moru brojeva: kuvarski recepti, železnički redovi vožnje, statistike nezaposlenih, kazne, nameti, ratni dugovi, spiskovi prekovremenog rada, dozvoljene brzine, prosečni rezultati na kuglanama, verovatnoća pri opkladama, bilijarski računi, planska privreda, radne norme i njihova ostvarenja, kalorije, težine odojčeta, kliničke temperature, vodeni talog, broj časova u kojima je sijalo sunce, automobilske rekordne brzine, motorna snaga, čitanja strujomera, berzanski kursevi, prevozni troškovi, tablice za osiguravanje za slučaj smrti, diskont, interes, lutrija, talasne dužine i pritisak u gumi na točkovima. Svake večeri dok navija svoj časovnik savremeni čovek udešava naučni instrument toliko tačan i osetljiv, kakav ne bi mogao zamisliti ni najbolji majstor u Aleksandriji u doba njenog procvata. Danas je to za nas sasvim obična stvar. Nešto što mi ne zapažamo jeste to, da smo, koristeći se tim napravama, naučili da upotrebljavamo pronalaske čiji je nedostatak pretstavljao strahovite teškoće za najsjajnije matematičare Staroga veka. Odnosi, granične vrednosti, ubrzanje, nisu danas neke daleke apstrakcije koje čak i osam-

[1]) »Ancien régime« (ansjen režim) — poredak (monarhija) u Francuskoj pre Francuske revolucije 1789. — Pr. prev.

ljeni geniji tek maglovito shvataju. Oni se nalaze fotografisani na svakoj strani našeg života. U toku avanture u koju ćemo sad krenuti stalno ćemo zapažati kako nam danas nije ni malo teško da odgovorimo na pitanja koja su u staro doba mučila mozgove veoma sposobnih matematičara. To ne dolazi otuda što smo vi i ja neki naročito sposobni ljudi. To dolazi otuda što smo nasledili društvenu kulturu uslovljenu takvim materijalnim silama kakve na duhovni život staroga doba nisu uticale. I najsjajniji um je samo zarobljenik u granicama svoga sopstvenog društvenog nasleđa.

Jedan primer će to potpuno razjasniti već na samom početku. Grčki filozof eleatske škole Zenon, naterao je svoje savremenike na razmišljanje time, što im je postavio čitav niz zamršenih pitanja, od kojih je jedno što se najviše navodi, paradoks Ahila i kornjače. To je problem o kome su pronalazači školske geometrije raspravljali dok nisu promukli i dok im se od pisanja prsti nisu ukočili. Ahil se utrkuje s kornjačom. On trči deset puta brže od kornjače. Kornjača dobija 100 metara »fore«. I sad, kaže Zenon, Ahil pretrči 100 metara i stigne na mesto odakle je kornjača pošla. Međutim, kornjača se pomakla za jednu desetinu od onoga koliko se pomakao Ahil, te je, prema tome, 10 metara ispred njega. Ahil pretrči tih deset metara. Međutim kornjača je prešla jedan deseti deo od onoga što je prešao Ahil, te je prema tome 1 metar ispred Ahila. Ahil pretrči taj 1 metar. Međutim, kornjača je prešla jedan deseti deo od 1 metra, te je, prema tome, jednu desetinu metra ispred Ahila. Ahil pretrči tu jednu desetinu metra, ali kornjača pređe jednu desetinu jedne desetine metra. Ona je onda za jedan stoti deo metra ispred Ahila. Kad Ahil pređe taj stoti deo metra, kornjača je ispred njega za jedan hiljaditi deo metra. I tako, dokazivao je Zenon, Ahil je sve bliže kornjači, ali je nikad ne može potpuno stići.

Nemojte zamišljati da Zenon i svi mudraci koji su dokazivali ovu stvar nisu priznavali da će Ahil u stvari prestići kornjaču. Njih je zbunjivalo samo pitanje gde će je stići? Možda ste i vi postavili isto pitanje. Važno je samo to da vi to pitanje niste postavili iz istog razloga koji je mučio njih. Vas muči zašto li su oni razmišljali o takvim sitnim čudnim zagonetkama? I zbilja, ono što vas stvarno ovde zanima jeste *istoriski* problem. Ja ću vam začas pokazati da problem ne pretstavlja za vas nikakvu *matematičku* teškoću. Vi znate da prevedete ovaj problem na jezik dimenzija[1]), pošto ste nasledili društvenu kulturu koju od njihove rastavljaju ruševine dveju velikih civilizacija i dve velike socijalne revolucije. Teškoća koja je postojala za stare nije bila *istoriska* teškoća. Ona je bila *matematička*. Oni još nisu bili razvili matematički jezik na koji bi se mogao ovaj problem lako prevesti.

Grci nisu bili naviknuti na pojmove kao što su granice brzina i železničke povlastice za prenos putničkog prtljaga. Za njih je svaki problem u kome ima deljenja bio mnogo teži nego problem u kome ima množenja. Oni nisu imali načina da izvrše deljenje do proizvoljene tačnosti, pošto su se pri računu služili mehaničkom pomoći, računaljkom ili abakusom, pokazanim na sl. 6. Oni nisu umeli da sabiraju na hartiji. Iz svih tih i drugih razloga na koje ćemo još često nailaziti, grčki matematičar bio je nesposoban da vidi stvari koje mi danas vidimo, a da pri tome i ne brinemo brigu da li stvar vidimo ili ne. Ako nagomilavamo sve veće i veće količine, gomila raste sve brže i brže bez kraja, sve dok joj jednako dodajemo. Kad možemo da dodajemo u beskraj sve veće i veće količine, a da nikad ne stanemo, Zenonovim savremenicima je izgledalo da onda moramo biti u stanju da jednako dodajemo i sve manje i manje količine, a da nikad ne dostignemo izvesnu granicu. Oni su mislili da u jednom slučaju gomila stalno raste sve brže i brže, a drugom slučaju opet stalno raste, samo raste sve sporije. U njihovom matematičkom jeziku nije bilo ničega što bi im ukazalo na činjenicu da kad se jedna mašina uspori preko izvesne granice, ona stane.

Da bismo to jasno videli, mi ćemo najpre brojevima zabeležiti razmake koje kornjača pređe u raznim stupnjevima trke, pošto je Ahil krenuo. Kao što smo gore opisali, kornjača se kreće 10 metara na I stupnju, 1 metar na II stupnju, jednu desetinu metra na III stupnju, stoti deo metra na četvrtom stupnju, itd. Pretpostavimo da imamo onakav jezik brojeva kakav su imali Grci i Rimljani ili Jevreji, koji su za označavanje brojeva upotrebljavali slova iz azbuke. Poslužićemo se jezikom koji nam je poznat pošto se još upotrebljava na nekim

[1]) Matematički jezik. — Pr. prev.

časovnicima, po grobljima i po sudovima. Možemo ovako da napišemo skup svih razmaka koje je kornjača pretrčala pre nego što ju je Ahil stigao:

$$X+I+\frac{I}{X}+\frac{1}{C}+\frac{1}{M} \text{ itd.}^{1)}$$

Stavili smo »itd.«, pošto su stari narodi zapadali u velike teškoće kad su imali posla s brojevima većim od nekoliko hiljada. Ostavite na stranu to što smo rep ovog niza prepustili vašoj mašti (a ne zaboravljamo da je rep glavni deo životinje ako on stalno raste), pa obratite pažnju na drugu nezgodu pri ovakvom načinu pisanja. Nema ničega što bi vam govorilo o tome kako su međusobno povezana rastojanja na svakom stupnju trke. Danas imamo takav brojni rečnik da se taj odnos vidi sasvim jasno, kad sve to napišemo ovako:

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{100000}+\frac{1}{1000000} \text{ itd.}$$

U ovome slučaju mi smo napisali »itd.« da sebi uštedimo trud, a ne zato što nemamo pravih brojnih reči. Ove su brojne reči pozajmljene od Indusa, koji su naučili da pišu brojnim jezikom pošto su Zenon i Euklid već bili legli u grob. Jedna socijalna revolucija, protestantska Reformacija, dala nam je škole koje su učinile da ovaj brojni jezik postane opšta svojina čovečanstva. Drugi jedan socijalni preokret, Francuska revolucija, naučio nas je da upotrebljavamo reformisanu azbuku. Blagodareći zakonima o školama u XIX veku, ova reformisana azbuka postala je opšte naučno dobro. Hajde sad da napišemo poslednji zbir pomoću reformisane azbuke, koju mi zovemo decimalno obeležavanje:

$$10+1+0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+0{,}00001+0{,}000001 \text{ itd.}$$

Dovoljno je da se poslužimo reformisanom azbukom, pa da odmah vidimo da se to može napisati u mnogo sažetijem obliku:

$$11{,}111111 \text{ itd.}$$

ili još bolje:

$$11{,}\dot{1}$$

[1]) Rimljani nisu imali podesnog načina za pretstavljanje pravih razlomaka koje smo mi gore upotrebili primera radi. — Pisac.

Razlomak $0,\dot{1}$ mi priznajemo kao količinu koja je veća od $\frac{1}{10}$, a manja od $\frac{2}{10}$. Ako nismo zaboravili aritmetiku što smo je učili u školi, možemo se setiti čak i toga, da $0,\dot{1}$ odgovara ustvari vrednosti $\frac{1}{9}$. To znači ovo: što dužom načinimo šumu $0,1 + 0,01 + 0,001$ itd., ona je sve bliže do $\frac{1}{9}$, a nikad ne postaje veća od $\frac{1}{9}$. Celokupan broj metara za koje se kornjača pomiče dok ne nestane razmaka između nje i Ahila iznosi tačno $11\frac{1}{9}$ metara i ništa više.

Sad ćete početi uviđati šta se mislilo kad je rečeno da ova zagonetka ne pretstavlja za vas matematičku teškoću. Vi imate brojni jezik sastavljen tako, da može da povede računa o mogućnosti koju matematičari opisuju jednom upečatljivom reči. Oni to zovu konvergencija beskonačnog reda ka graničnoj vrednosti. Rečeno prostim rečima to znači samo toliko, da ako vi jednako gomilate sve manje i manje količine, *možete* dobiti gomilu koja ne postaje merljivo veća ako i dalje dodajete. Ogromna teškoća što su je imali matematičari staroga sveta kad su izvodili deljenje nastavljeno u beskraj, ili, kako to savremeni matematičari kažu, kad su imali posla sa beskonačnim redovima, granicama, iracionalnim količinama, transcendentnim brojevima, i tako dalje, pruža primer jedne velike društvene istine koju potvrđuje celokupna istorija ljudskog znanja. Plodonosna umna aktivnost najsposobnijih ljudi crpe svoju snagu iz običnog znanja kojim raspolažemo svi mi. Preko izvesne tačke sposobni ljudi ne mogu nikad da pređu granice društvene kulture koju su nasledili. Kad se »mudraci« gorde time što su se izdvojili od ostalih, mi se s pravom možemo pitati da li su oni, na kraju krajeva, zbilja baš tako mudri. Kad proučavamo matematiku vidimo da, kad god kultura jednog naroda izgubi vezu sa svakidašnjim životom ljudi i postane isključivom igračkom jedne besposlene klase, ona postane popovska politika. Njoj je suđeno da završi, kao i svaka popovska politika, u praznoverici. Gorditi se umnom izdvojenošću od običnih ljudi i s prezrenjem gledati na veliku društvenu ulogu vaspitanja i obrazovanja, znači biti i glup i

nevaljao. To je kraj umnom napretku. Istorija nam kazuje da praznoverice nije izmislio prost čovek. Njih su pronašli neurotični intelektualci, premalo opterećeni poslovima. Matematičar i prost narod uvek su potrebni jedan drugome. Zapadni svet je možda već na pragu da nepovratno padne u varvarstvo. Ako on umakne takvoj sudbini, ljudi i žene besposlena sveta koji mi sad gledamo svojim očima videće kako će demokratizacija matematike biti odlučan korak u napretku civilizacije.

U vremenu kakvo je ovo u kome mi živimo postoji ozbiljna opasnost da se vratimo u varvarstvo. Na matematiku možemo primeniti reči kojima je Kobet[1]) objašnjavao upotrebu gramatike radnicima, svojim savremenicima, kada još nije bilo sistema javnih škola. U prvome svome pismu o engleskoj gramatici za mlade radnike, Kobet je napisao ove reči: »Ali da se ovlada ovom granom znanja, dragi moj sine, postoji jedan razlog koji, ma da ga treba u svakome veku duboko osetiti, mora u naše vreme naročito duboko da se oseti. Ovde mislim na onu želju koju svaki čovek, a mlad čovek napose, treba da gaji u sebi, želju da bude sposoban da uspešno brani prava i slobode naroda svoje zemlje. Kada uzmogneš čitati istoriju engleskih zakona kojima je narodu obezbeđena sloboda, . . . naći ćeš da tiranija nema većeg neprijatelja od pera. I kad izgnanog Viljema Prina[2]), osuđenog na dugačak zatvor i na veliku globu, likujući budeš gledao kako se vraća u slobodu, kako ga narod nosi na rukama od Sautemptona do Londona, putem koji je sav posut cvećem, i kako onda optužuje i stavlja pod sud i u kvrge tirane od čijih su ruku nepravično i svirepo patili on i njegova domovina; kad se tvoje srce i srce svakog mladog čoveka u našoj zemlji nadme od silne radosti kad to vidi, svi vi treba dobro da zapamtite: da Prin nije znao gramatiku nikad ne bi mogao da izvrši dela koja su mu očuvala ovakvo ime i koja su učinila da mu ime ostane svetlo«.

Danas ekonomska tiranija nema moćnijeg prijatelja od računarskog čudovišta. Bez poznavanja matematike, gramatike dimenzija i reda, ne možemo planirati racionalno društvo u

[1]) Viljem Kobet, engleski pisac i popularizator (1762—1835). — Prev.

[2]) Viljem Prin, engleski puritanski pamfletista (1600—1669). — Prev.

kome će biti dokolice za sve, a bede ni za koga. Ako se malo pribojavamo da učimo matematiku, videćemo već pri prvim koracima u izučavanju te gramatike da razlozi zbog kojih mnogi odbijaju da je uče nisu bez svakog osnova. Kako se matematika uči i izlaže po školama time se ne čine nikakvi napori da se prikaže njena društvena istorija, njen značaj u našem sopstvenom društvenom životu, ogromna zavisnost civilizovanog čovečanstva od nje. Ni kao deci, ni kao odraslima, niko nam ne objašnjava kako je poznavanje ove gramatike često kroz istoriju služilo da pripomogne oslobođenju čovečanstva od praznoverice. Niko nam ne ukazuje na mogućnost da je upotrebimo za odbranu narodnih sloboda. Hajde da vidimo zašto je to tako.

Vaspitni sistem Severozapadne Evrope u velikoj meri uobličili su tri nezavisna činioca u doba Reformacije. Jedan je lingvistički u običnom smislu te reči. Da bi se oslabila moć crkve kao vrhovnog ekonomskog gospodara bilo je potrebno uništiti uticaj crkve na maštu narodnu. Protestantski reformatori su se pozivali na priznati autoritet biblije, da bi pokazali kako su crkveni obredi popovske izmišljotine. Oni su imali da načine sveto pismo pristupačnim narodu. Pronalazak štampe bio je mehanički instrument koji je uništio intelektualnu papsku moć. Da bi biblija postala pristupačna, morao se predavati latinski i grčki jezik. To je ubrzalo velika vaspitna novačenja Džona Noksa[1]) i potstaklo ono cicijaško osnivanje klasičnih nižih srednjih škola u Engleskoj. Ideološki front protiv papstva i protiv bogatih manastira ojačao je svoj strategiski položaj novim prevodima i kritičkim pregledom tekstova biblije. To je razlog što je klasično obrazovanje zauzelo visoko počasno mesto u vaspitnom sistemu srednjih klasa.

Jezik dimenzija za svoj položaj u vaspitanju na Zapadu ima da zahvali dvoma različitim društvenim uticajima. Dok su pobunjenici protiv autoriteta crkve prikupljali snage, i pre nego što je reformatska doktrina počela da se u velikoj meri obraća trgovcima i zanatlijama po srednjovekovnim gradovima, trgovačke potrebe Hanze već su naterale ljude da osnuju naročite škole po Nemačkoj, da bi se u njima učila nova aritmetika što ju je Evropa pozajmila od Arapa. Za čudo veliki broj knjiga štampanih u toku tri godine posle osnivanja prve štam-

[1]) Džon Noks, škotski reformator (1505—1572). — Prev.

parije, bile su trgovačke računice. Četiri trgovačka jevanđelja: sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje, branio je Luter lukavom političkom mudrošću kad je objavio svoje čudno učenje po kome svakog dečka treba učiti da računa. Gramatika brojeva bila je lancima privezana za trgovačke poslove pre nego što je narod i mogao predvideti da će se ona uskoro mnogostruko uplesti u čovekov društveni život.

Geometrija, već razdvojena od veštine računanja, nije istim putem ušla u obrazovanje Zapada. Sem toga što je masovnim štampanjem biblije dat potstrek studijama mrtvih jezika, svet je potstican na proučavanje klasike još i time, što su političke teorije grčkih filozofa odgovarale trgovcima koji su težili ka izvesnoj ograničenoj varoškoj demokratiji. Uspomena na demokratiju grčkih gradova-državica trajala je u mašti bogatijih buržuja sve do Francuske revolucije, pa je uskoro posle nje stavljena u porodične pogrebne urne, da se u njima odmara kao zidna dekoracija. Besposlena klasa po grčkim gradovima-državicama zabavljala se geometrijom kao što se svet danas zabavlja ukrštenim rečima i šahom. Platon je učio da je geometrija najuzvišenija igra kojom se čovek može baviti u dokolici. I tako je geometrija uneta u evropsko školovanje kao deo klasičnog obrazovanja, bez ikakve jasne veze sa savremenom stvarnošću. Oni što su predavali Euklidovu geometriju nisu razumevali njen društveni značaj i čitava pokolenja školske dece učila su Euklida, a niko im nije kazao kako je jedna docnija geometrija, koja je u poslovnom životu u Aleksandriji izrasla iz Euklidova učenja omogućila da se izmere dimenzije sveta. Ova su merenja bacila u vazduh mnogobožački Panteon zvezda-bogova i kao na danu osvetlila put za daleka prekomorska putovanja. Kad je otkriveno koliko je površine našega sveta još neispitano, stvorena je time čvrsta osnova za ono što mi zovemo Kolumbova vera.

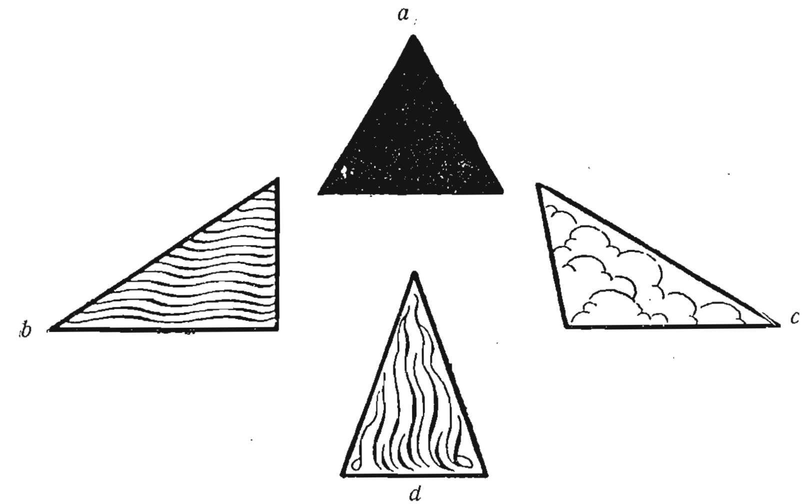
To što je Platon uzdizao matematiku kao neki uzvišeni i tajanstveni verski obred poticalo je iz mračnih praznoverica koje su zbunjivale čoveka i iz fantastičnih detinjarija koje su opčinjavale svet. Ljudi nisu mogli jasno da razlikuju kad kažu 13 je prost broj i kad kažu 13 je baksuz broj. Platon je svojim uticajem na obrazovanje matematiku prekrio tajanstvenim velom i time pripomogao da se održi čudna franmasonerija pitagorejskih bratstava, koja je ubijala svoje članove ako su odali matematičke »tajne« koje se sad štampaju po školskim udžbenicima. Ne ubija se ničiji ugled ako kažemo da taj tajanstveni veo čini sam predmet odvratnim. Platonovo veliko delo bilo je u tome, što je pronašao religiju koja zadovoljava osećajne potrebe ljudi koji se ne slažu sa svojom društvenom sredinom, a isuviše su pametni ili isuviše individualisti da traže svetinju u grubljim oblicima animizma[1]). Radoznalost ljudi koji su prvi razmišljali o atomima; proučavali osobine prirodnog magneta; posmatrali šta biva kad se ćilibar protrlja; parali životinje; stvarali kataloge biljaka u ona tri stoleća pre nego što je Aristotelo napisao svoj epitaf grčkoj nauci — isteralo je duhove iz prirodnih predmeta i svakidanjih stvari. Platon je toliko uzdigao animizam, da ga ogled nije mogao dohvatiti; to je postigao time što je pronašao svet »univerzalnih«. Ovaj svet univerzalnih bio je svet kakvog ga bog poznaje, »stvarni« svet, a naš sopstveni svet je samo njegova senka. U tom »realnome« svetu simboli reči i brojeva imaju u sebi neku mađiju koja iz tela životinja i stabala drveta iščezava čim su rasečeni i opisani.

Timeus je čarobna antologija čudnih izopačenosti do kojih ova mađija simbolizma može da dotera. »Stvarna« zemlja, kao nešto suprotno čvrstoj zemlji na kojoj zidamo kuće, jeste ravnostrani trougao. »Stvarna« voda, kao nešto suprotno onome što se ponekad zove vodom za piće, jeste pravougli trougao. »Stvarna« vatra kao nešto suprotno onome protiv čega se osiguravate, jeste ravnokraki trougao. »Stvarni« vazduh, kao nešto suprotno vazduhu koji upumpavate u gumu, jeste raznostrani trougao (sl. 1).

Da vam ne bude teško da ovo poverujete, pročitajte kako je Platon pretvorio geometriju lopte u mađisko objašnjenje čovekova porekla. Bog je, kaže nam on, »podražavajući loptastom obliku sveta, stavio dva božanstvena sastojka u jedno loptasto telo, naime u telo koje mi danas zovemo glava«. Da se glava »ne bi teturala po udubljenjima i uzvišicama na zemlji, već da bi mogla biti sposobna da iz jednih izađe i preko drugih pređe«, njoj je »pridodato telo da bi ono bilo prevozno i pokretno sredstvo, koje je zbog toga dobilo dužinu i četiri uda, izdužena, a međusobno spojena ...«. Ova nadmoćnost glave

[1]) Animizam je zamišljanje primitivnih naroda da svaka stvar ima svoju dušu, svoju l i č n o s t. Ispitivanjem prirode proterana je ta ličnost iz stvari. — P r e v.

bila je veoma laskava za intelektualce koje nisu mučili nikakvi praktični problemi! Nije onda nikakvo čudo što je Platonova čudna metafizika zadržala svoj uticaj na obrazovanje čak i onda, kad je njegov smeli projekat jednog planiranog društva prestao da bude smatran kao nešto što omladina treba da proučava. Vaspitni sistem osnovan na Platonovu učenju podesan



SL. 1. — PLATON JE IZVADIO MERENJE IZ GEOMETRIJE, PA MESTO NJEGA STAVIO MAĐIJU

Platonov stvarni svet bio je svet oblika iz koga je materija bila prognata.

(*a*) Ravnostrani trougao (tj. trougao čije su sve tri strane jednake pretstavlja osnovni oblik zemljin.

(*b*) Pravougli trougao je vodin duh. (Nalaženje duha u vodi pretstavlja najviši oblik mađije).

(*c*) Raznostrani trougao pretstavlja duh vazduha.

(*d*) Ravnokraki trougao (tj. trougao čije su dve strane jednake) pretstavlja osnovnu vatru.

(Ako ne znate ove nazive pribeležite im značenja. Možete opet naići na njih. Ovim smo vas opomenuli.).

je da predavanje matematike poveri ljudima kojima je preča glava od želuca i koji bi teturali po udubljenjima i uzvišicama po zemlji, kad bi imali da predaju drugi neki predmet. Naravno da ovo odbija zdrav svet za koji su simboli samo

SL. 1A. — MATEMATIKA U SVAKIDANJEM ŽIVOTU

Ova je slika uzeta iz čuvene Agrikoline knjige Rudarska tehnologija iz šesnaestog veka. U to doba rudari su bili radničke aristokrate

alatke organizovanog društvenog iskustva, a privlači one koji simbole upotrebljavaju da bi pobegli iz našeg ovozemaljskog sveta u kome se ljudi bore za nešto malo istine koju mogu imati koliko hoće u »stvarnom« svetu u kome je istina, izgleda, nešto samo sobom očevidno.

Činjenica da su matematičari često puta ovakvi objašnjava zašto su oni tako rado skloni da čuvaju samo za sebe visoke tajne svoga pitagorejskog bratstva. Za obične ljude savršenstvo Platonova »stvarna« sveta miriše na nestvarnost. Svet u kome žive obični ljudi jeste svet borbe, uspeha i neuspeha, pokušaja i grešaka. U matematičkom svetu sve je očevidno — čim se naviknete na njega. Nešto što nam se retko objašnjava jeste da je ljudskom rodu ponekad bilo potrebno hiljadu godina da uvidi kako je izvestan korak u nekom matematičkom dokazu »očevidan«. Kako radi nilometar očevidno vam je ako ste pop u nekom hramu. Ako ste van hrama, to vam može postati očevidno samo tako, ako istražite podzemni kanal koji spaja hram sa rekom čovekovog društvenog iskustva. Vaspitni metodi koji su pomešani s popovštinom i mađijom izmajstorisani su tako, da mi ne možemo da zapazimo nadolaženje i opadanje, večito kretanje reke. I tako su oni skrili od nas roman o jednoj stvari koja bi mogla da bude najlepša bajka o borbi čovekovoj s prirodom. Platon, u čijoj su školi vaspitavani naši nastavnici, nije odobravao da se vrše posmatranja, pa da se onda upotrebi matematika, da ih uredi i poveže. U jednome od dijaloga on pušta Sokrata, svoga učitelja, da upotrebi reči koje se isto tako dobro

---

i ova je knjiga privukla pažnju na mnogobrojne naučne probleme na koje se nije obraćala pažnja u robovskoj civilizaciji Staroga veka, kad je bilo malo dodira između teoriskih razmišljanja i praktičnog iskustva. Kad izmerite rastojanje HG koje je pretstavljeno zategnutim konopcem, možete dobiti rastojanje koje imate da bušite horizontalno da biste došli do okna ili dubinu do koje okno mora da se buši, ako želite da doprete do horizontalnog podzemnog hodnika. Pomoću dijagrama izdeljenog na podeoke možete lako videti da je odnos dužine podzemnog horizontalnog hodnika i merene dužine HG u stvari odnos dveju merljivih dužina N : M. Isto tako odnos dubine okna prema HG je O : M. Kad budete izveli dokaz 7 to će biti jasnije. Prava N je načinjena pomoću užeta postavljenog horizontalno pomoću alkoholne ravnjače. Zato je ona upravna na oba užeta od viska (stoji na njima pod pravim uglovima). Kad budete pročitali VI glavu videćete da onaj drugi visak i alkoholna ravnjača nisu potrebni ako imate uglomer da njime izmerite ugao na vrhu i ako imate neku tablicu sinusa i kosinusa.

mogu primeniti na mnoge udžbenike mehanike koji se još i sad upotrebljavaju. »Zvezdano nebo koje mi posmatramo izrađeno je na bazi vidljivosti i zbog toga, ma da je ono nešto najlepše i najsavršenije među vidljivim stvarima, mora se neophodno smatrati daleko nižim od pravih kretanja apsolutne brzine i apsolutne inteligencije... Njih imaju da shvate um i inteligencija, a ne oko... Blistavo nebo treba uzeti kao model, ali težeći uvek ka višem znanju. Ali astronom neće nikad zamišljati da dužine dana prema dužini noći ... ili odnos zvezda prema danu i noći, ili odnos jedne zvezde prema drugoj može biti večit... i isto tako je budalasto da se čovek toliko muči istražujući tačnu istinu o njima... U astronomiji kao i u geometriji treba da upotrebljavamo probleme, a nebo da ostavimo na miru ako hoćemo da priđemo predmetu kako treba i da tako učinimo na nam prirodni dar razuma štogod-štogod koristi«.

Ova će knjiga pričati kako se razvijala gramatika merenja i računanja pod pritiskom čovekovih društvenih postignuća; kako su je u docnijim vremenima kočile običajne pregrade; kako je ona upotrebljena da se izradi koncepcija sveta kome se može komandovati ako se izvršuju njegovi zakoni, ali koji se nikad ne može umilostiviti obredima i žrtvama. Ukoliko se ova naša priča bude razvijala, jedna teškoća koju mnogi osećaju, postajaće sve lakša. Matematičar stručnjak je uglavnom tehničar. Zato je njegova glavna briga u nastavi da i druge načini tehničarima. Matematičke su knjige pune vežbanja koja su tu zato, da razviju našu veštinu. To nas plaši zbog ogromnih prostranstava koje moramo da pređemo pre nego što uzmognemo baciti pogled na onu vrstu matematike koja se upotrebljava u modernoj nauci i u društvenoj statistici. Činjenica je da moderna matematika ne pozajmljuje baš tako mnogo od starog doba. Sigurno je da svaki korisni razvoj u matematici počiva na istoriskoj osnovi neke ranije grane. U isto vreme svaka nova grana čini nekorisnim grube alate koji su se pre nje upotrebljavali. Istina je da algebra, trigonometrija, upotreba crteža, diferencijalni i integralni račun — svi zavise od pravila grčke geometrije. Ipak zato od dvesta teorema u Euklidovim *Elementima* jedva da su nešto više od tuceta njih neophodno potrebne da nam pomognu da razumemo kako da se služimo tim granama matematike. Ono ostalo nam pokazuje kako možemo na zapleten način da uradimo stvari koje se mogu

uraditi prostije kad poznajemo docnije grane matematike. Za matematičkog stručnjaka ove zapletene stvari mogu pretstavljati korisnu nauku, ali one mogu samo da zbune i obeshrabre čoveka koji želi da shvati gde je mesto matematici u savremenoj civilizaciji. Redovi koji slede pisani su za one koji su već zbunjeni i obeshrabreni, pa su, razume se, zaboravili i ono što su nekada možda i znali, ili ne mogu da uoče značaj i korisnost onoga čega se još sećaju. Zato ćemo mi i početi od samoga početka.

Obično postoje dva gledišta o matematici. Jedno potiče od Platona[1]). Po tome gledištu matematička tvrđenja pretstavljaju večite istine. Platonovo učenje upotrebio je nemački filozof Kant[2]) kao motku kojom je tukao materijaliste svoga doba, kad su revolucionarni spisi, kao na primer Didroovi, udarili po popovštini. Kant je mislio da su geometriski principi večiti i da su oni potpuno nezavisni od naših čula. Ispalo je tako, da je Kant pisao baš uoči doba kad su biolozi otkrili da mi imamo čulo čiji se jedan sastavni deo zove unutarnje uvo, a koje oseća dejstvo gravitacije. Od toga otkrića, čiji je značaj prvi u potpunosti zapazio nemački fizičar Ernst Mah, geometriju koja je bila poznata u doba Kanta spustio je na zemlju Ajnštajn. Ona više ne lebdi po nebesima gde ju je Platon bio postavio. Mi znamo da su geometriska tvrđenja, kad se primene na stvarni svet, samo približne istine. Teorija relativiteta je mnogo zbunila matematičare i sad je postao običaj da se kaže kako je matematika samo igra. Razume se da nam to ništa ne kazuje o matematici. To nam samo kazuje dokle ide kultura izvesnih matematičara. Kad neko kaže da je matematika samo igra, on time samo kazuje svoje lično mišljenje; govori nam o samome sebi, prikazuje nam svoj stav prema matematici: ne kazuje nam ništa o javnom značaju jednog matematičkog tvrđenja.

Ako je matematika obična igra, ne vidi se nikakav razlog zašto bi je ljudi igrali ako ne žele da igraju. Zajedno sa nogometom, spada u one zabave bez kojih bi život bio podnošljiv. Gledište koje ćemo mi izložiti jeste u tome, da je matematika jezik dimenzija i da je dužnost obrazovanog građanina da u svoju najnužniju opremu unese kao bitan deo i znanje toga jezika. Ako su matematička pravila gramatička pravila, ne

[1]) Platon, grčki filozof, 427—347 godine pre naše ere. — Prev.

[2]) Imanuel Kant, nemački filozof, 1724—1804. — Prev.

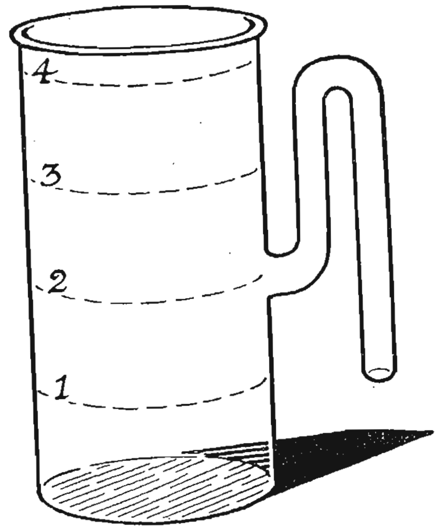
znači da je čovek glup ako ne uoči očiglednost jedne matematičke istine. Pravila obične gramatike nisu očevidna. Ona se moraju naučiti. Ona nisu večite istine. Ona su konvencionalna pravila bez čije pomoći ljudi ne bi mogli saopštavati jedan drugome istine o sudbini stvari u svetu. Tako je i s matematikom, gramatikom dimenzija. Matematička pravila su takva da se moraju učiti. Ako su strašna, zbog toga su strašna što su neobična kad na njih prvi put naiđete. Kao gerundijum ili ablativ apsolutni. Ona su strašna i zbog toga što se u svima jezicima tolika grdna pravila i tolike silne reči moraju upamtiti, da bi se osposobili da čitamo novine i da na radiju hvatamo vesti sa stranih stanica. Svako zna da nije znak neke velike društvene inteligencije kad neko ume da tatrlja na nekoliko stranih jezika. Nije takav znak ni kad neko ume da tatrlja i na jeziku dimenzija. Prava je društvena inteligencija u tome da čovek ume da se služi jezikom, da upotrebi pravu reč na pravome mestu. Važno je znati jezik dimenzija, jer poveriti zakone ljudskog društva, društvenu statistiku, priraštaj stanovništva, statističke proračune o naslednim osobinama, trgovački bilans — osamljenome matematičaru, a da se ne proveravaju njegovi zaključci, znači isto, kao kad bi se nekom odboru filologa stavilo u dužnost da izvede istine iz ljudske, životinjske ili biljne anatomije vadeći sve to samo iz svoje mašte.

Često ćete čuti ljude gde kažu da ništa nije tako sigurno kao što je sigurno da su dva i dva četiri. Tvrđenje da su dva i dva četiri nije matematičko tvrđenje. Matematičko tvrđenje na koje se svet poziva, tačno izraženo, ovako izgleda:

$$2 + 2 = 4$$

Ovo se može ovako prevesti: »Dodaj 2 na 2 da dobiješ 4«. Ali to tvrđenje ne mora važiti za sve što se događa u stvarnome svetu. Slika 2 pokazuje da u stvarnome svetu ne dobijete uvek 4, kad dodate 2 na 2. Reći $2 + 2 = 4$ znači samo objasniti značenje reči »dodati« kad se ona upotrebi da se prevede matematički glagol »+«. Kada kažemo da se u izrazu »$2 + 2 = 4$« radi o jednoj tačnoj postavci, onda je to samo gramatičko konvencionalno pravilo o glagolu »+« i o imenicama »2« i »4«. U srpskoj gramatici istinito je u istom smislu reći da množina od »čovek« jeste »ljudi«, ili, ako vam se to više dopada, »dodajte čoveka na četiri čoveka da dobijete ljude«. U srpskoj gramatici neistina je kad se kaže da množina od »dulek« glasi »dudi«.

Reći »$2 + 2 = 2$« pogrešno je u potpuno istom smislu. Jedna mala izmena u značenju reči »dodati« kada se upotrebljava da se prevede »+« učiniće da tvrđenje o aparatu na slici 2, postane potpuno tačno[1]). Takve promene u značenju stvaraju zabunu. Zadatak je gramatike da upravlja slobodom reči tako,



Sl. 2

U stvarnome svetu ne nalazite uvek da dobijete četiri kad saberete dva i dva.

Pokušajte da ovakav sud napunite vodom. Njegov zakon sabiranja glasio bi:

$$1+.1=2$$
$$1+.2=3$$
$$1+.3=2$$
$$2+.2=2 \text{ itd.}$$

Tačka uz neke brojeve stavljena je ovde da pokaže da ovo sabiranje nije isto što i sabiranje (+ bez tačke) koje važi za sud koji ne ispušta tečnost i koji je toliko veliki da se ne može napuniti.

---

[1]) Kad voda u sudu dođe do visine one savijene cevi, počinje isticati kroz nju. Voda ističe sve dok u sudu ne spadne na visinu 2. Otuda je $1 + 1 = 2$ i $1 + 2 = 3$, pošto još nismo došli na visinu savijene cevi. Ali $1 + 3 = 2$, jer smo od 1 naviše prošli i 2 i 3 i izbili na visinu savijene cevi. Tada je počelo isticanje i voda je spala na 2. Isto važi i za $2 + 2 = 2$. — Prev.

da ne bude zakrčivanja u intelektualnom saobraćaju. Reći da se *domovi* britanskog parlamenta nalaze u Glazgovu jeste čista laž kao tvrđenje koje se odnosi na stvaran svet. Ali kao gramatičko tvrđenje ono je jedan istinit primer o tome kako se gradi množina od »dom«. Kad bi neki britanski levičarski poslanik rekao da parlamentarni d o m i sramno lakomisleno postupaju prema nezaposlenim radnicima u Glazgovu, on bi jednom malom broju pametnih ljudi time saopštio duboku i važnu istinu o stvarnom svetu. Kao gramatičko tvrđenje to bi bilo pogrešno. Mnogi ne bi uočili glavnu stvar, pa bi se pitali da li je taj poslanik verodostojan čovek. Za razliku od g. Prina koji je znao gramatiku, taj ne bi mogao da doprinese unapređenju narodnih sloboda.

Matematički se jezik razlikuje od svakodnevnog govora zato što je on uglavnom racionalno planiran jezik. U jezicima dimenzija nema mesta za privatna osećanja bilo pojedinaca, bilo naroda. Oni su međunarodni jezici kao i dvoimeni imenik[1] u prirodopisu. Zauzet ogromnom složenošću svoga društvenog života čovek još nije počeo da primenjuje svoj pronalazački duh na racionalno planiranje običnog jezika, kad opisuje razne vrste ustanova ili ljudskih postupaka. Jezik svakodnevnog govora zagušen je osećanjem, a nauka o čovekovoj prirodi još nije odmakla tako daleko, da možemo jasno opisati pojedinačna čovekova osećanja. I tako je konstruktivna misao o ljudskom društvu sputana istim onim konzervatizmom koji je smetao ranijim prirodnjacima. Danas ne postoje kod ljudi razlike u tome na koju se vrstu životinja misli kad se kaže *cimex*[2]) ili *pediculus*[3]), pošto te reči upotrebljavaju samo oni ljudi koji ih upotrebljavaju u jednom jedinom smislu. I dandanji se može desiti, i to često, da oni misle na mnogo različitih stvari kad kažu da je dušek zagađen stenicama ili vašima. Proučavanje čovekovog društvenog života još nije dalo jednog Linea. Ako u diskusiji o »izumiranju države« izvestan argumenat ne sadrži ništa o stvarnoj razlici u upotrebi policije — onda on otkriva da je razlika samo u rečniku. Dosta je čudna stvar da ljudi koji su mnogo razboriti kada govore o potrebi da se pametno plani-

[1]) Imenik biljaka i životinja na narodnom i na latinskom jeziku. — P r e v.

[2]) Stenica. — P r e v.

[3]) Vaš. — P r e v.

raju druge društvene ustanove, često puta teško uviđaju da je potrebno stvoriti jedan racionalni međunarodni jezik.

Tehnika merenja i računanja pratila je karavane i galije po velikim trgovačkim putevima. Ona se razvijala veoma sporo. Bar četiri hiljade godina je prošlo od doba kad su se ljudi osposobili da izračunaju kad će biti naredno pomračenje sunca ili meseca do doba kad su ljudi umeli da izračunaju koliko gvožđa ima u suncu. Između prvih zabeleženih zapažanja o elektricitetu dobivenom trljanjem i merenja privlačnosti jednog naelektrisanog tela prošlo je dve hiljade godina. Možda još veći vremenski razmak razdvaja poznavanje magnetskog gvožđa (prirodnog magneta) od merenja magnetske sile. Razvrstati stvari prema njihovim dimenzijama bio je mnogo teži posao nego raspoznati razne vrste stvari koje postoje. To je tešnje bilo vezano za čovekova društvena postignuća nego za njegovu biološku »opremu«. Naše oči i uši mogu da raspoznaju razne vrste stvari na velikoj daljini. Da bi merio stvari na daljini, čovek je morao da stvori sebi nove čulne organe, kao što su astrolab, teleskop i mikrofon. On je načinio terazije koje pokazuju i one razlike u težini koje naše ruke nikako ne osećaju. Na svakom stupnju razvoja pribora za merenje čovek je usavršavao »pribor« jezika dimenzija. Kako se čovekov pronalazak i duh okretao od brojanja stada i godišnjih doba ka građenju hramova; od građenja hramova ka upravljanju brodovima po morima kojih i nema na zemljopisnoj karti; od pomorskog gusarenja ka mašinama koje tera snaga mrtve materije; — tako je uporedo s tim iskrsavao sve noviji jezik dimenzija. Civilizacije su se dizale i padale. Na svakome stupnju se jedna prostija, manje izopačena kultura, probija kroz pregrade uobičajenih misli, donosi sveža pravila gramatici merenja, noseći u sebi ograničenje svoga daljeg razvitka i neizbežnost da i ta nova pravila moraju biti jednom zamenjena drugim. Istorija matematike je ogledalo civilizacije.

Početke nekog jezika dimenzija nalazimo u svešteničkim civilizacijama Misira i Sumerije. Vidimo kako se iz tih starih civilizacija prvi plodovi svetovnog znanja prenose trgovačkim drumovima u unutrašnjost, sve do Kine, i kako izbijaju i u Sredozemlje i preko njega dalje, brodovima semitskih naroda koji trguju kalajem i bojama. U Grčku i u Malu Aziju upadaju prostiji narodi sa severa, pa po gradovima, gde popovska kasta još nije ustanovljena, otkrivaju tajne tvoraca egipatskih piramida i ulaze u njih. Ukoliko Grci sve više napreduju, geometrija sve više postaje zabavna igra. Sama pak grčka misao izopačuje se u antičkom obožavanju zvezda. Baš u trenutku kad je izgledalo sasvim neizbežno da će geometrija prokrčiti put jednom novom jeziku, ona prestaje da se dalje razvija. Pozornica se prebacuje u Aleksandriju, to najveće središte moreplovstva i mehaničkih veština staroga sveta. Ljudi razmišljaju o tome koliko je još ostalo sveta da se ispita. Geometrija se upotrebljavala za merenje po nebu. Trigonometrija zauzima svoje mesto. Mere se zemljine dimenzije, rastojanja do sunca i do meseca. Svrgavaju se s prestola bogovi-zvezde. Izgubljena je vera u bogove po oblacima.

U Aleksandriji, gde nalazimo prve početke novog jezika za meranije zvezda, ljudi razmišljaju o brojevima nezamislivo velikim u poređenju sa brojevima koje je grčki intelekt mogao da shvati. Anaksagora je uvredio Periklov dvor svojom izjavom da je sunce veliko koliko grčko kopno. Međutim i sama Grčka postala je nešto beznačajno malo u poređenju sa svetom čiji su obim izmerili Eratosten i Posejdonije. Ali i sam svet je postao nešto beznačajno u poređenju sa Suncem kakvog ga je Aristarh izmerio. Pre nego što je tamna noć kaluđerskog sujeverja progutala veliku metropolu staroga doba, ljudi su se starali da napipaju nove načine računanja. Poluge na računaljci postale su pregrade na kavezu u koji je bio zatvoren duhovni život u Aleksandriji. Ljudi kao Diofant i Teon upotrebljavali su geometriske diagrame ne bi li pronašli grube recepte za računanje. Oni su gotovo već bili otkrili treći novi jezik: *algebarski jezik*. Što nisu uspeli kriva je sudbina društvene kulture koju su oni nasledili. Na istoku su Indusi krenuli sa mnogo nižeg stupnja. Njih nije davila mòra nekog davno utvrđenog rečnika brojeva, te su izradili nove simbole koji su bili podesni za prosto računanje bez upotrebe mehaničkog sredstva. Muslimanska civilizacija koja se sručila u južne oblasti Rimske Carevine donela je sobom tehniku merenja kakva se bila razvila u rukama Grka i Aleksandrinaca. Na to je dodala i novi instrument za rukovanje brojevima koji se razvio iz induskog pronalaska brojnih simbola. U rukama arapskih matematičara, kao što je Omar Kajjam, jezik računanja dobio je svoj glavni oblik. Mi ga i dandanji zovemo arapskim imenom: *algebra*. Za algebru i za uzore modernog evropskog pesništva dugujemo jednom nearijevskom narodu koji ne bi imao pravo glasa u Južnoafričkoj Uniji.

Ovu novu aritmetiku doneli su u Evropu trgovačkim putevima Jevreji, učenici mavarskih univerziteta u Španiji, i trgovci nehrišćani koji su trgovali sa istokom. Neki od njih su bili štićenici plemića čiji se vidik bio proširio u krstaškim ratovima. Evropa stoji na pragu velikih prekomorskih putovanja. Moreplovci vode sobom Jevreje astronome koji umeju da se služe zvezdanim kalendarima koje je pripremila arapska učenost. Trgovci se bogate. Više nego ikad svet misli u velikim brojevima. Nova aritmetika ili »*algoritam*« kumuje pronalasku koji zaprepašćuje, a do čega je dovela potreba za što tačnijim tablicama za merenje zvezda u moreplovstvu. Logaritmi su bili jedan od prvih kulturnih plodova velikih prekomorskih putovanja. Matematičar misli u geografskim pojmovima, u zemljopisnim dužinama i širinama. Neizbežna posledica je jedna nova vrsta geometrije koju u svakidanjem govoru zovemo grafikon ili grafik. Ova nova geometrija, Dekartova, sadrži u sebi nešto što je grčka geometrija bila prenebregla. U dokonome starome svetu antike nije bilo časovnika. U užurbanome svetu velikih pomorskih putovanja mehanički časovnici zamenjuju starinske popovske ceremonije pri određivanju tačnog vremena. Iz istog društvenog spleta pojavljuju se: geometrija koja može da izrazi vreme i religija u kojoj nema dana svetaca[1]). Jedna grupa ljudi koja je proučavala mehaniku časovničkog klatna i izvela nova otkrića o kretanju planeta pronalazi iz te geometrije vremena nov jezik dimenzija, jezik za merenje kretanja. Taj jezik mi danas zovemo *infinitezimalni račun*.

Ova gruba skica istorije matematike kao ogledala civilizacije, koja se upliće u opštu čovekovu kulturu, u njegove pronalaske, u njegovo ekonomsko uređenje, u njegova religiska verovanja, može zasad da se prekine na onome stupnju koji je bio dostignut kad je Njutn umro. Od toga doba naovamo većinom su popunjavane praznine i oštreni već pronađeni instrumenti. Ovde-onde naziru se obrisi jedne nove matematike. Momente koji na to ukazuju vidimo u društvenoj statistici i u proučavanju atoma. Počinjemo da verujemo u mogućnost novih jezika dimenzija koji će prevazići jezike koje sad upotrebljavamo, kao što je infinitezimalni račun prevazišao i u sebe sabrao sve što mu je prethodilo.

[1]) Misli se — protestantizam. — Pr. prev.

UPUTSTVA ČITAOCIMA OVE KNJIGE

Kad se piše matematička knjiga obično se pokazuje kako svaki korak logički sleduje iz prethodnog koraka, a ne kazuje vam se zašto bi bilo dobro da se ti koraci izvedu. Ova je knjiga napisana da vam se pokaže kako svaki korak istoriski sleduje iz prethodnog koraka i kakva je korist za vas ili za koga drugoga ako se ti koraci učine. Prva metoda odbija od sebe mnoge pametne i društveno aktivne ljude, pošto se pametni ljudi čuvaju čiste logike, a ljudi društveno aktivni smatraju čovečiji mozak kao instrument za društvenu delatnost.

Mada je najveća pažnja obraćena na to da se pokaže kako sva logička, ili, kao što bi trebalo da kažemo, sva gramatička pravila idu u neprekidnom nizu jedno za drugim, ne smete očekivati da ćete sigurno pratiti svaki korak u nekom dokazu kad ga čitate prvi put. Jedan izvrsni škotski matematičar dao je veoma pametan savet. Mnogi su ljudi bez potrebe bili obeshrabreni zato što za taj savet nisu znali. »Svaka matematička knjiga koja nešto vredi«, rekao je Kristal, »mora se čitati od početka ka kraju i od kraja ka početku... po savetu jednog francuskog matematičara: Allez en avant et la foi vous viendra«[1]).

Ako hoćete da vam bude prijatno da čitate ovu knjigu, morate stalno da se pridržavate ovih dveju neophodnih napomena.

Prva je, da jednom pročitate celu knjigu brzo skroz, da biste stekli opšti pogled na međusobnu povezanost matematike i društva. Kad počnete da je čitate po drugi put, da biste ušli u stvari što dublje, pročitajte skroz svaku glavu, pre nego što počnete da prorađujete pojedinosti.

Drugo je, da kad tekst čitate radi ozbiljnog proučavanja, uvek imate pri ruci pero i hartiju, najbolje hartiju s kvadratićima, a i pisaljku i gumu, i da izradite sve matematičke zadatke i da nacrtate sve slike redom kako budu nailazile pri čitanju. Koliko će vam koristiti ova knjiga zavisi od vaše saradnje na učenju, tome društvenom poslu.

[1]) Samo vi napred, a vera će sama doći. — Prev.

GLAVA II

PRVI KORACI U MERENJU

ili

Matematika u preistoriji

Neki će vam reći kako matematika nije počela sve dok se nije javila klasa koja je imala dovoljno slobodna vremena da se igra crtežima i brojevima. Docnije ćemo naići na mnogo očevidnih potvrda gledišta po kome je matematika napredovala kad god je bilo stvarnog posla za matematičara, a da je bila u zastoju kad je postala igračka jedne klase, izdvojene od ljudske svakidašnjice. Bilo to tačno ili pogrešno, činjenica je da matematički umni rad, kao i druge vrste umnog rada, zavisi od našeg kulturnog i biološkog nasleđa, od naše društvene i fizičke sredine. Najistaknutiji matematički pisci staroga doba, Grci, živeli su u svetu u kome su mogli da vide ljude kako mere uglove među zvezdama, grade hramove pomažući se crtežima izrađenim na pesku, izračunavaju visine pomoću dužine senke, crtaju slike na ilovači i prave crepove. Ljudi koji su prvi pisali matematičke knjige živeli su u svetu u kome su sveštenička arhitektura Piramida, mađiska igra s brojevima, kiparske vaze ukrašene geometriskim oblicima, zidovi i podovi pokriveni pločicama mozaika — bile obične stvari. Tu su bili trgovci koji su brojali svoj novac. Tu su bili poreznici koji su porez razrezivali na osnovu premeravanja zemljišta. Bilo je tu robova zanatlija koji su zidali građevine pomoću pravouglog lenjira, olovnog viska i vodenog ravnomera[1]). Bilo je mornara koji su se na svojim putovanjima upravljali prema Severnjači. Besposlenost u najboljem slučaju omogućuje da se razmišlja o svetu,

[1]) Libele. — Prev.

ali taj svet će da *izmene* oni koji nikada nemaju vremena da besposliče.

I zbilja, sasvim je pogrešno zamisliti da su matematiku pronašli besposleni atinski idealisti prosto zato što su bili očarani njenom potpunom nekorisnošću. Vavilonci i Misirci su bili sposobni da postignu rezultate koji nisu bili malog značaja. U veštini računanja vavilonska je tehnika bila mnogo bolja od tehnike Grka iz Atike. Velika starost tih postignuća i tesna povezanost prvobitnih spisa sa društvenom delatnošću onih što su određivali tačno vreme nateruju nas da se vratimo daleko nazad pre Nipurskih tablica[1]) i Keopsovih velikih piramida. To moramo ako želimo da shvatimo društveno poreklo matematičkih proučavanja. U doba kad su ljudi prvi put počeli da pišu matematičke knjige, čovečanstvo je našlo načina da odgovori na čitav niz pitanja na koja je odgovor — broj. Kad budemo bili proučili neka od tih pitanja moći ćemo da shvatimo kako se pojavila potreba za matematikom.

1. — KOLIKO JEDINKI SAČINJAVAJU GRUPU?

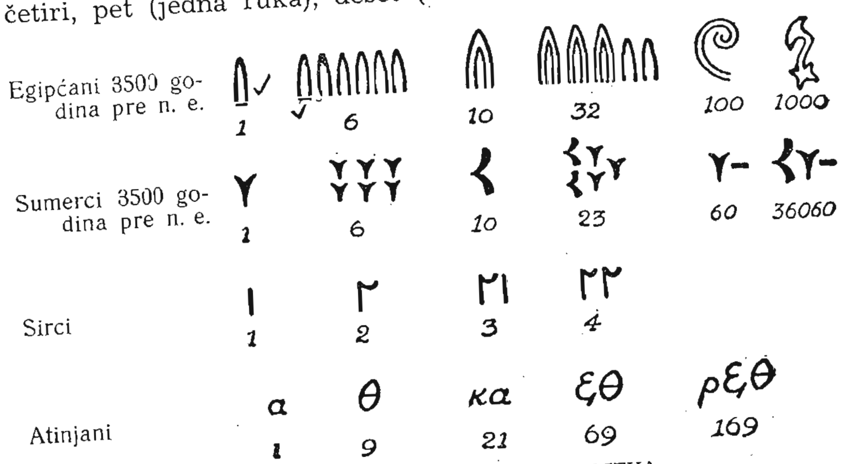
Iščezli urođenici u Tasmaniji, koji u svome kulturnome razvoju teško da su bili prestigli paleolitsko doba[2]), nisu računali dalje od četiri. Možemo pretpostaviti da se potreba za brojanjem velike množine stvari nije osetila sve dok čovek nije počeo da drži stada i jata. Ovčar i pastir moraju da broje koliko imaju ovaca i krava, da bi videli da im neka nije nestala. Mnogo pre nego što su ljudi počeli da žive u gradovima, uspeli su da pronađu kako da broje po grupama. U našem brojnom sistemu mi grupišemo predmete za brojanje u desetice, u desetice desetica (stotine) ili u desetice desetica desetica (hiljade). Na to mislimo kad kažemo da je *deset osnova* ili grupni broj našeg sistema.

Neki sadržaoci petice (pet, deset, dvadeset) javljaju se kao osnova ili kao osnovni način grupisanja brojeva gotovo u svima brojnim sistemima celoga sveta. To dolazi otuda što

[1]) Godine 1888 otpočelo je otkopavanje stare haldejske varoši Nipura u Mesopotamiji. Tu su nađene mnoge tablice sa podacima o kulturnom životu starih Haldejaca. — Prev.

[2]) Kameno doba, t. zv. »Staro«, kada je čovek živeo po pećinama, hranio se divljači i samoniklim biljkama, a alate i oružje pravio od kamena. — Prev.

se primitivan čovek, kao i dete, služi prstima kao rabošem da zabeleži stvari koje broji. Starosedeoci dveju Amerika ponekad su upotrebljavali i prste na nogama. Jedno urođeničko pleme u Paragvaju ima imena za brojeve od jedan do četiri, pet (jedna ruka), deset (dve ruke), petnaest (dve ruke



SL. 3. — STARINSKO PISANJE BROJEVA

O ovome će biti govora i u docnijim glavama. Kao što je izneto na kraju ove glave povlaka za nulu retko je bila upotrebljavana na kraju niza brojeva u šezdesetičnom načinu pisanja brojeva kod Vavilonaca. Kad je stavljena kao što je ovde pokazano broj 60 je 1(60) + 0(1). Broj 36060 je 10(60^2) + 1(60) + 0(1). Na isti bi način bio napisan broj 660 koji je 11(60) + 0(1). Praznina između oznaka ili ostaloga teksta kazivala vam je na šta se mislilo.

i jedna noga), dvadeset (obe ruke i obe noge). Brojne oznake u kalendaru starih Maja (sl. 106, glava VII) pokazuju posebne znake za jedinice jedan do četiri, za pet, za dvadeset, i za četiri stotine (dvadeset dvadesetica)[1]). I u engleskom jeziku ima tragova o ovom brojanju na rukama i nogama kao što se vidi po čestoj upotrebi reči »*score*« u starom zavetu[2]). Jedan čak još stariji način grupisanja brojeva u dvojke i četvorke (dve ruke i noge) vidi se po osnovi *dva* siriskog brojnog sistema (sl. 3).

[1]) Isti znak je bio upotrebljavan ponekad za 360, a ponekad za 400.

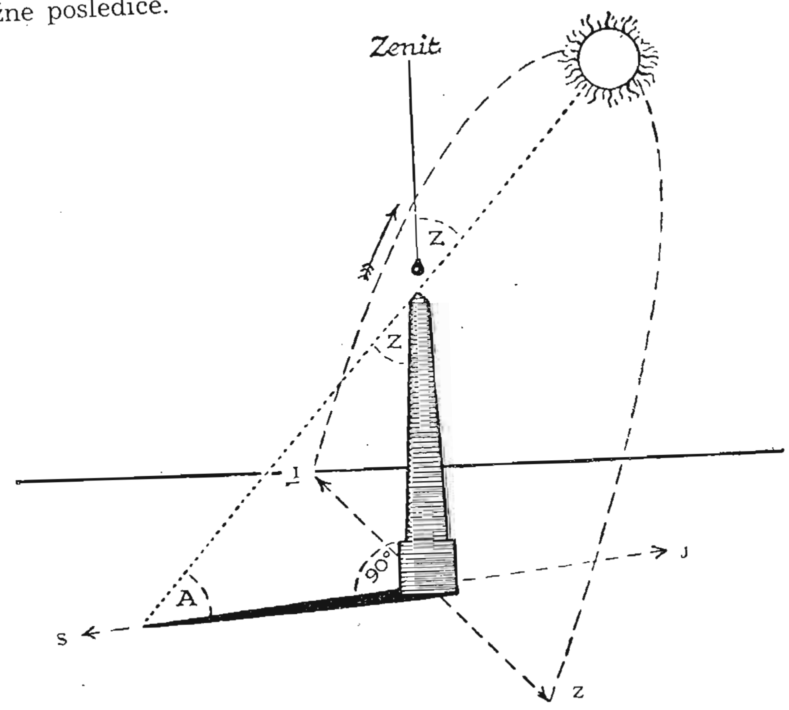
[2]) Englezi imaju dve reči za dvadeset: twenty i score. Ova poslednja znači i »zarez«. Englezi su nekada obeležavali 20 jednim krupnim zarezom. — Prev.

2. — KAD JE TO BILO?

Ne možemo da kažemo da li je upotrebi brojeva za brojanje predmeta kao što su ovce i krave zbilja prethodila neka druga primena brojeva, koju je čovek započeo čim je izašao iz doba lova i prikupljanja hrane. Kad je naučio da seje zrno i da drži stoku koja se množi u izvesnim godišnjim periodima, morao je da vodi računa o godišnjem dobu. On je primetio kako se mesec rađa nešto docnije i zalazi nešto docnije svake noći između dva naredna puna m e s e c a, pa je počeo da skuplja dane u m e s e c e od trideset dana. On je isto tako zapazio, kao gotovo i svi primitivni narodi, da se noću sazvežđa na nebu menjaju prema godišnjem dobu, izlaze nešto ranije i zalaze nešto ranije svake noći. Gotovo svi narodi umeju da prate godišnja doba time što raspoznaju koje se zvezde prve pojavljuju na nebu posle Sunčeva zalaska. Znaju da izračunaju broj meseci koji proteknu između jednog i drugog sušnog ili kišnog doba. Misirci su utvrdili dužinu godine na 365 dana još 4000 godina pre naše ere, brojeći dane koji proteknu između dveju narednih prilika kada se zvezda-pas, Sirijus, jedva pojavi neposredno pred Sunčev izlaz. Zbrajanje dana u godinu bilo je isto tako izvedeno posmatranjem ponašanja Sunčeve senke. Sunčeva senka u podne kada je najkraća pružala se uvek u istome pravcu. Podnevna senka delila je horizont linijom, meridijanom (podnevkom), koja je išla od onoga što mi zovemo sever ka jugu. U izvesnim različitim dobima godine Sunce je izlazilo i zalazilo daleko prema severu ili jugu horizonta i prema tome i podnevna senka bivala najkraća, odnosno najduža. Dan najkraće podnevne senke (21 juni po našem kalendaru) bio je letnja Sunčeva prekretnica. Godinom je smatran i broj dana od jedne letnje Sunčeve prekretnice do naredne. Dani prolećne i jesenje ravnodnevice, kad se Sunce rađa i zalazi tačno na po puta između tačke severa i tačke juga na horizontu (tj. tačno na istoku i tačno na zapadu), bili su dani naročitih obreda. Posmatrajući Sunčevu senku u razna godišnja doba, čovek neolitskog doba[1]) je istovremeno naučio i da odredi sebi vreme obeda i radne časove prema dužini Sunčeve senke što su je bacali koci ili kameni spomenici koje je pobadao odnosno podi-

[1]) T. zv. »Novo Kameno doba«, u kome su ljudi glačali i bušili kamen, podizali prve gradove i naselja na kolju; bavili se zemljoradnjom i stočarstvom. — P r e v.

zao radi tog posmatranja. Ovo sve veće obraćanje pažnje na proučavanje vremena, koje je ubrzavano što su se više utvrđivale poljoprivredna i stočarska ekonomija, imalo je tri veoma važne posledice.



Sl. 4.

Podne o ravnodnevici (21 marta i 23 septembra), kad se Sunce rađa tačno na istoku i zalazi tačno na zapadu. Sunčeva senka na podne uvek se nalazi na pravoj liniji koja spaja tačke severa i juga na horizontu (vidiku). To je u isto vreme i posmatračev meridijan (podnevak) koji spaja severni pol s južnim.

Zenit je ime koje su astronomi dali onoj tački na nebu koja nam je tačno nad glavom.

Vidite da ugao (A) za koji je Sunce iznad horizonta i ugao (Z) koji Sunčev zrak zaklapa s viskom ili s vertikalom iznose zajedno 90°. Imamo:

$$A + Z = 90^\circ, \text{ a odatle } A = 90^\circ - Z \text{ i } Z = 90^\circ - A.$$

Ugao A se zove Sunčeva »visina«, a ugao Z zove se Sunčeva »zenitna daljina«.

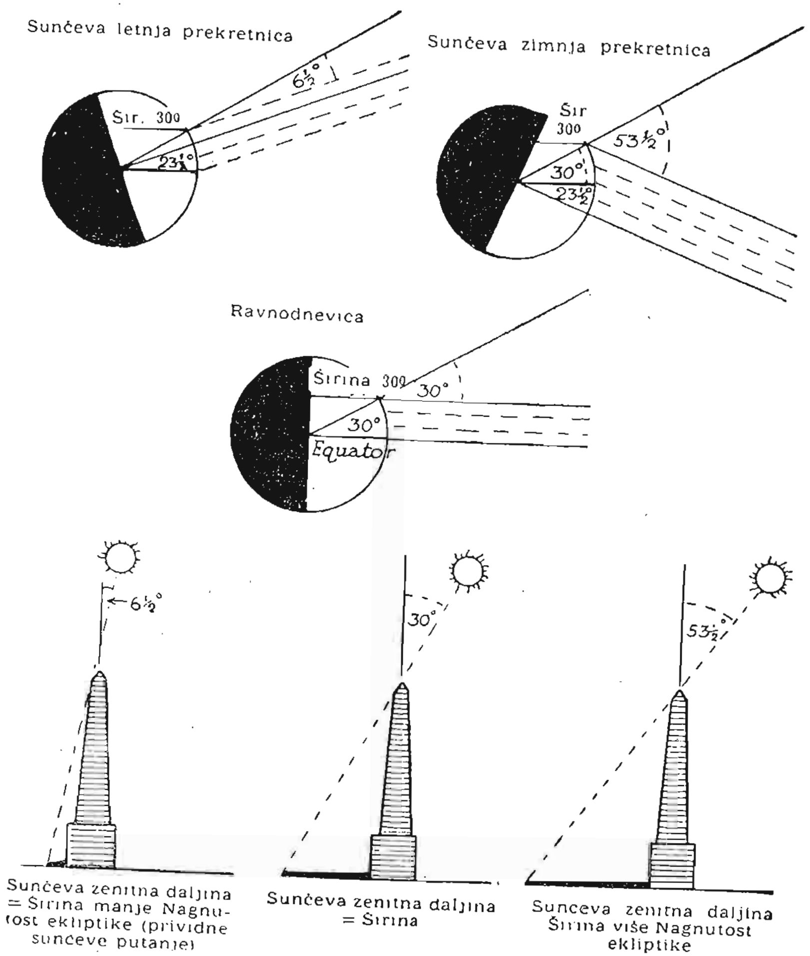
Kod današnjih primitivnih naroda društveni zadatak posmatranja promena godišnjih doba poverava se najstarijim i najmudrijim ljudima u plemenu, čak i samo jednoj porodici koja poznaje nebeske tajne najbolje od svih drugih. Najstariji tragovi o životu u gradskim naseljima u Misiru, Sumeriji i dalekome Jukatanu svedoče o tome kako se još u toj dalekoj davnini bio izdvojio sveštenički stalež. Njegova je prvobitna društvena funkcija bila da bude čuvar kalendara. Velika je greška smatrati prvobitni sveštenički poziv kao čisto verski u savremenom smislu te reči. On je potekao iz ekonomske potrebe da se beleži tok vremena. Ma da su uz taj posao išla lažna i fantastična verovanja, ipak je on postavio prve osnove organizovanog naučnog rada. Ta verovanja, fantastična i lažna, kao što znamo da su, mnogo više imaju veze s naučnim pretpostavkama nego s onim što se danas zove religisko verovanje. Ona su izvedena iz svakidašnjeg čovekovog iskustva i pretstavljaju prvi korak ka racionalnom tumačenju prirode.

Primitivni čovek video je kako se na promenljivom nebu ogledaju smrt i rađanje, san i bdenje, osnovni ritmovi plodnosti i opadanja. Pojave novih sazvežđa, oduživanje ili skraćivanje Sunčeve senke, javljali su da je vreme jagnjenju, sejanju i sušenju slame. Naizmenične Mesečeve mene poklapale su se sa ženinim mesečnim pranjem. Zalaz Sunca bio je znak da se ide na počinak, izlaz Sunca je fizički budio čoveka. Danas već počinjemo da razumevamo kako su ta ravnomerna ponavljanja prirodnih događaja postala potstrekači ritmičkih promena u našem rođenom telu što ih regulišu nervni impulsi. Mi znamo da svetlost tera na lučenje sluznu žlezdu koja upravlja organima za razmnožavanje. Poznavanje ove činjenice od velikog je značaja za povećanje proizvodnje jaja. Živina se drži u prostoriji koja je stalno osvetljena elektrikom. Primitivan čovek nije mogao da shvati da veliki grubi časovnik koji mu kazuje kad treba sejati, a kad sparivati stoku, nije njegov veliki poglavica, niti kakav starac njegova plemena, koji se podmićivanjem da namamiti ili odbiti. Sveštenički stalež je uskoro stekao dominantan položaj zato što je prvobitni čovek, u svojoj prostosrdačnosti, nagonski hteo da podmiti i da umilostivi preuzvišene i moćne nebeske stanovnike, a to je bilo veoma unosno za one što su na zemlji bili njihovi »oficiri za vezu«. Stočari donose poklone za bogove, a od njih se popovi goje. Pre pet hiljada godina popovi u Haldeji umeli su da pretskazuju

pomračenja, a to su za ondašnji svet koji je jednako piljio u nebo, bili svečani i zloslutni događaji. Tako su popovi svoju nadmoćnost upotrebljavali više na to da vladaju, nego da služe. Tajna nauka hramova postala je izvor tiranije, kao što i mora da vodi u tiraniju svako znanje kad prestane da bude zajedničko dobro čovečanstva.

Još mnogo vekova pre nego što su prestali da vrše društveno potreban posao, sveštenici čuvaoci kalendara uradili su dve stvari od trajne vrednosti za istinsko prosvećivanje ljudskog roda. Na jednu od njih ćemo se vratiti docnije. Druga je bila pisanje brojeva. Dok su brojevi upotrebljavani da se broje ovce i krave, nije bilo potrebno da se oni i zabeleže. Potreba da se brojevi zabeleže javila se tek onda, kad su počela brižljiva posmatranja godišnjih doba. Tek mnogo docnije javilo se pisanje kojim su se mogle saopštiti vesti. Ono se javilo tek onda, kad su ljudi prvi put klesali u kamenu ili rezali na drvetu zabeleške o nebeskim događajima koji su svečano proslavljani i povodom kojih su se prinosile žrtve.

Najstariji zabeleženi brojevi potsećaju na čovekovih deset prstiju. U starim svešteničkim zapisima naroda u Sredozemlju brojevi jedan do devet su zbilja pretstavljeni prstima. Docniji feničanski trgovački zapisi imali su znak za jedinicu koji se mogao ponavljati sve do devet puta (kao I, II, III u rimskom načinu pisanja brojeva). Imali su, zatim, znak za deseticu koji se takođe mogao ponavljati devet puta (kao kod Rimljana X, XX itd.), a onda i znak za sto (kao rimsko C). Takvo feničansko pisanje brojeva poslužilo je kao osnova brojevima koje su upotrebljavali Grci u Joniji i Etrurci. Ono je bilo glomazno, ali je bar bilo pametnije nego ono što je za njim došlo. Da im ne bi bilo tako glomazno, Etrurci su se vratili na brojanje jednom rukom, pa su dodali znake koji u rimskom obeležavanju znače 5, 50 i 500 (V, L i D). Docniji Grci su odbacili jonsko pisanje brojeva i usvojili pisanje brojeva pomoću svih slova iz azbuke, kao što su pisali i Jevreji. Taj svoj sistem ostavili su Grci u nasleđe Aleksandrincima. On je bio zbijen, ali je imao dve posledice koje su se pokazale kobnim. Jedna, koju ćemo proučavati u petoj glavi ove knjige, bila je u tome što je taj sistem potsticao na jednu naročitu vrstu mađije brojeva zvanu »gematrija«. Druga koja je mnogo važnija, biće proučena u sedmoj glavi. Time što je zaveden sistem pisanja brojeva pomoću slova postalo je nemoguće i najsjajnijim aleksandriskim matematiča-



SL. 5. — EGIPĆANSKO MERENJE NAGNUTOSTI EKLIPTIKE POMOĆU SUNČEVE SENKE

Na podne je Sunce najviše. Pol, Zemljin centar, posmatrač i Sunce nalaze se svi u istoj ravni. O ravnodnevicama (21 marta i 23 septembra) Sunčeva zenitna daljina na podne jeste posmatračeva geografska širina (30° u Memfisu). Ako je E nagib ekliptike,

$L + E$ = Sunčeva zenitna daljina o zimnjoj prekretnici (21 decembra)

rima da pronađu prosta pravila za računanje, a da ne moraju pribegavati mehaničkim sredstvima.

Da je čovek imao toliko nogu koliko stonoga, ili da je, kao rečni rak, imao devetnaest pari udova koji grade pet grupa različitih po svojim zadacima, razvoj brojnog jezika udario bi sasvim drugim putem. Verovatno bi udario sasvim drugim putem i da čovek nije bio stvorenje koje rađa žive mladunce. Veoma velika teškoća koju su osećali Zenon i njegovi savremenici u tome što nisu imali brojeve, kao 0,1, koji se protežu, mogla je biti mnogo manje strašna da su ljudska bića nosila jaja. U jednoj od najstarijih knjiga o brojevima, u K i n e s k o j k n j i z i o p e r m u t a c i j a m a, koja je pisana oko 1100 godine pre n. e., nalazimo sve brojeve podeljene u dve grupe, na grupu (ili »niz«) neparnih brojeva:

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

i na grupu parnih brojeva:

$$2, 4, 6, 8, \ldots$$

Svaki broj iz niza parnih brojeva može se savršeno podeliti na dva dela. Parni brojevi su »ženski«. Neparni brojevi su»muški«. Savršen brak jednih i drugih pretstavlja potpuni brojni niz:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$$

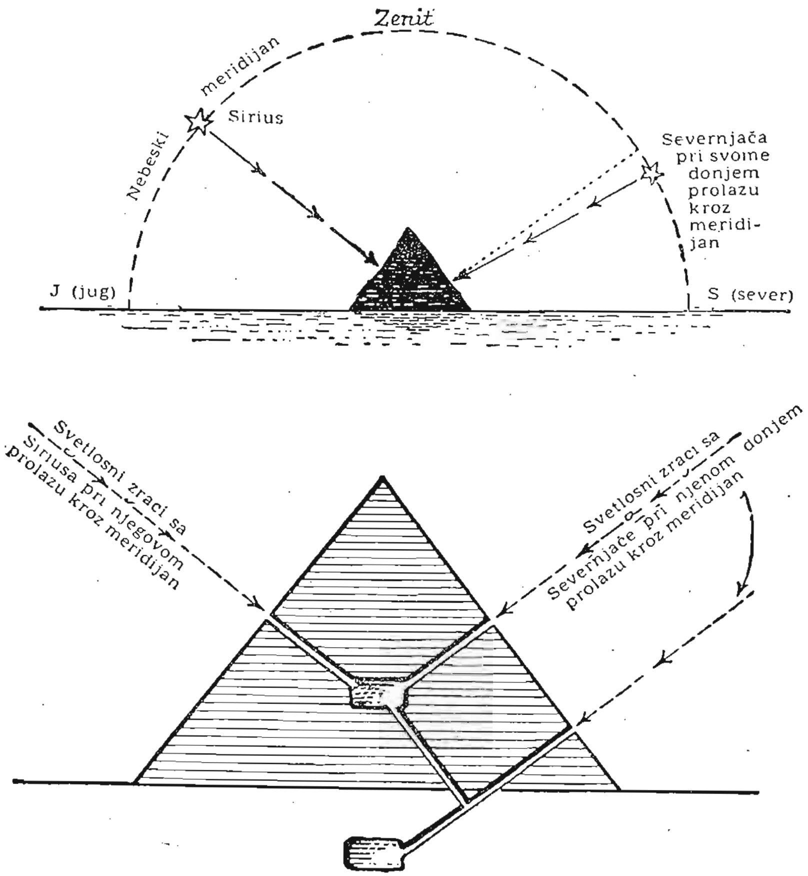
Čitava pokolenja čovečanstva mučila su muku kako da svoja merenja izraze ovim polno tačno sparenim brojevima, koji su se, eto, tako razvili da mogu da opišu veličinu grupa potpuno odeljenih i različitih stvari. Pametni ljudi antike nikako nisu mogli da shvate kakav li je to broj (kao što je kvadratni koren iz dva) koji potseća na nesneseno jaje. Broj je imao da bude ili dečko ili devojčica.

Ne treba da se čudimo toj prividno beznačajnoj vezanosti broja za pol. Zapisivanje brojeva bilo je uzgredni proizvod pri organizovanju kalendara, koji je čoveku postao potreban kada se počeo paštiti o svome razplođavanju i rasplođavanju svoje

$L - E$ = Sunčeva zenitna daljina o letnjoj prekretnici (21 juna)

I tako je nagnutost ekliptike

$\frac{1}{2}$(Sunč. zenit. dalj. na dan 21 dec. — Sunč. zen. dalj. na dan 21 juna). To će biti još opširnije objašnjeno docnije.



SL. 5A. — ASTRONOMSKA NAORIJENTISANOST VELIKE PIRAMIDE

Keopsova i Sneferuova piramida sagrađene su po istovetnom geometriskom planu. Četiri piramidine strane tačno gledaju na sever, jug, istok i zapad. Obim osnove ima isti odnos prema visini kao kružni obim prema poluprečniku, tj. $2 \times 3 \frac{1}{7}$ ili 2π. Prema Flindersu Petriu: »Kvadrat i horizontalnost osnove sjajno su tačni; prosečna greška je manja od jednog desetohiljaditog u pogledu dužinâ, kvadratnosti i horizontalnosti«. Jednovremeni izlaz Siriusa i Sunca objavljivao je početak misirske godine i nadolazak svete reke koji je donosio blagostanje zemljoradnicima. Kad Sirius prolazi kroz meridijan njegovi zraci padaju pod pravim uglom na južnu stranu Velike Piramide, prolaze pravo niz okno za propuštanje čistog vazduha u kraljevsku sobu i osvetljavaju glavu umrlog faraona. Glavni otvor i drugo jedno okno koje vodi u donju sobu dobijali su svetlost od Severnjače koja je onda pretstavljala zvezdu α u sazvežđu *Zmaj* i bila na svome donjem prolazu, kroz meridijan, tri stepena niže od pravog nebeskog pola.

stoke. U zapisanim brojevima staroga sveta može se otkriti još jedan trag polnosti. Naročito isticanje broja tri dolazilo je verovatno otuda što se mislilo na muški polni organ. U mnogim jezicima reč »trostruko« znači moćno, kao na primer u izrazu »trostruko je naoružan«[1]). U starim načinima pisanja brojeva vidimo znake da su se ljudi vraćali na tu starinsku brigu za plodnost. Kao primer za to može da posluži interval od tri što su zaveli Rimljani koji su brojeve preuzeli od Etruraca. Evo:

I	II	III	IV	V	(Renesansa)
X	XX	XXX	XL	L	(Rim)
C	CC	CCC	CD	D	(Rim)

Prvobitni feničanski i sumerski načini pisanja brojeva pomalo su već pretskazivali da će se pisanje brojeva razviti u tome pravcu što će se najradije brojni znaci skupljati u grupe od tri. Izvrtanje broja četiri[2]) i dr. slično je sa starinskim kazivanjem vremena: deset do pet, mesto sadašnjeg četiri i pedeset. Pokazalo se da je to velika nezgoda, jer još više otežava Rimljanima da pronađu pravila za računanje. Verovatno se Rimljani ne bi bili zapleli u to nesrećno izvrtanje brojeva, da su se ljudska bića razmnožavala spoljnim oplođavanjem kao žabe.

Civilizovano čovečanstvo razradilo je pisane znake za brojeve pre nego što se pojavila potreba za brzim i prostim načinima računanja. Kad su izrađivali svoje oznake za pisanje brojeva ljudi nisu predviđali da će nekada biti potrebno da se brojevi tako pišu, da se pomoću njih mogu izvoditi proste računske radnje. Kad su ljudi bili primorani da rade s velikim brojevima, došli su na misao da se posluže fizičkim aparatom koji sadržava u sebi ceo njihov vidik brojeva i merenja. Idealisti bez ikakve potrebe čine ove naše probleme nerazum-

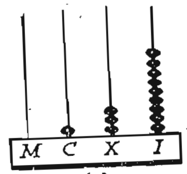
[1]) »Naoružan do zuba«. — Mi imamo nešto slično: »pa uzima trostruku kamdžiju«. — Prev.
[2]) IV bi se moglo pročitati: jedan do pet. — Prev.

ljivim time što kriju teškoće koje su mučile ove matematičare staroga sveta. Elastičnost njihovog umnog rada bila je stalno sputavana krutošću njihove materijalne opreme. Njih su proglasili za tajanstveno duboke dok su oni ustvari bili samo nužno nespretni. Kad se čovek već toliko bio uzdigao, da više nije morao da se oslanja na raboše na kojima su brojevi bili pretstavljeni zarezima, prešao je na upotrebu kamičaka ili na upotrebu školjki, koji su mogli biti brzo rastureni i upotrebljeni ponovo koliko god hoćeš puta. Tako se pojavila računaljka. U početku ona je verovatno pretstavljala niz žljebova na jednoj ravnoj površini. A onda je to bio red uspravnih drvaca na koja su bili nanizani izbušeni kamičci, školjke ili đinđuve. Najzad je računaljka sa zatvorenim okvirom, koja se vidi na donjem delu sl. 6, pobedila raniji tip koji se vidi u gornjem delu te slike. Računaljka ili *abakus* jeste mnogo rani pronalazak čovekov. Ona je išla svima kulturnim putevima širom sveta u doba megalitičke kulture[1]). Meksikanci i Peruanci su se služili računaljkama kad su Španci prvi put došli u Ameriku. Kinezi i Misirci su imali računaljku još na nekoliko hiljada godina pre naše ere. Rimljani su je uzeli od Etruraca. Sve do početka naše ere ova uokvirena računaljka bila je jedini računski instrument što su ga ljudi imali.

Za nas su brojevi znaci pomoću kojih mogu da se odrede zbirovi. Ovakvo shvatanje broja bilo je potpuno nepoznato i najboljim matematičarima stare Grčke. Stari brojni zapisi bili su prosto oznake da se njima zabeleže rezultati dobiveni radom na računaljci, mesto da se, kao danas, posao izvede perom ili pisaljkom. U celoj istoriji matematike revolucionarnijeg koraka nije bilo od onoga kada su Indusi pronašli znak »0« da stoji mesto praznog stuba na računaljci. Jasnije ćete videti zašto je to bilo toliko važno i kako je to omogućilo prosta pravila za računanje, kad dođete do sedme glave ove knjige. Ovde možemo istaći dve stvari u vezi sa pronalaskom ovog »ništa«. Prva je ova: ako je naša osnova 10, potrebno nam je još devet brojeva da izrazimo koliko god veliki broj. Naša veština beleženja brojeva nije više ograničena brojem slova u azbuci. Ne moramo uvoditi svaki put nove znake, kao Rimljani: X, C i M kad množimo sa deset. Drugu važnu stvar kod ovoga

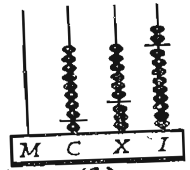
[1]) Preistorisko doba kada su ljudi pravili spomenike i skloništa od grubog i ogromnog kamenja. — Prev.

Sabiranje na računaljci



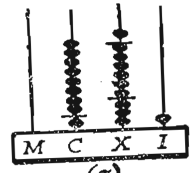
(a)

139



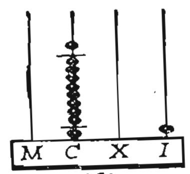
(b)

139+862



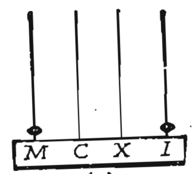
(c)

Dodajte 1 u stupcu X mesto 10 izbačene iz stupca I.



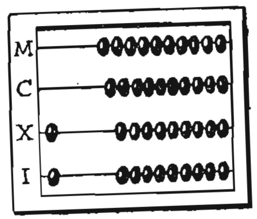
(d)

Dodajte 1 u stupcu C mesto 10 izbačene iz stupca X

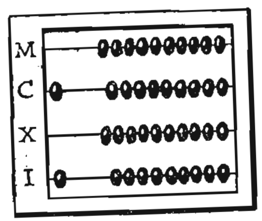


(e)

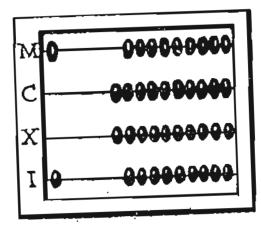
Dodajte 1 u stupcu M mesto 10 izbačene iz stupca C.



2 + 9 = 10 + 1
Saberite jedinice, pa prebacite u X jedinicu za svaku izbačenu deseticu



60+30+10+1 = 101
Saberite desetice, pa prebacite u C jedinicu za svakih izbačenih deset desetica



100+800+100+1 = 1001
Saberite stotine, pa prebacite u M jedinicu za svakih izbačenih deset stotina

SL. 6. — SABIRANJE 139 SA 862 NA RAČUNALJCI

»ništa« možete početi zapažati ako pogledate na donji deo slike 6. Novi induski rečnik brojeva omogućuje vam da sabirate na hartiji isto onako kao što računate na računaljci. Zasad moramo ostaviti na stranu pitanje kako je taj pronalazak izveden i kakvu je ulogu odigrao u docnijoj istoriji matematike. Važno je zapaziti da su matematičari klasičnog starog doba nasledili društvenu kulturu u kojoj se već vršilo pisano beleženje brojeva ma da se još nije bila osetila potreba za temeljitijim računima. Zato su se oni i oslanjali isključivo na mehanička sredstva koja su danas bačena u dečje igračke.

Uobičajeno je da se razlikuju dva načina na koji se brojevi upotrebljavaju: prosti brojevi pokazuju koliko jedinki sačinjavaju jednu grupu, a redni brojevi pokazuju mesto jednog događaja u nizu. Ovo razlikovanje nije tako važno kao drugo jedno koje je poteklo od najranijih pokušaja da se zabeleži tok vremena. Kad kažemo: ima u stadu 100 ovaca, mislimo isto kao kad kažemo: poslednja ovca je stota po redu, kad su one poređane u jedan red. Godišnja doba zabeležena na rabošu protezala su se kroz horizont iskustva u najranije doba ljudske kulture kao ovce poređane u jednom redu. Ako smatramo da je svaka ovca jednaka drugoj prilikom prebrojavanja stada, time mislimo da kažemo samo to, da je svaka ovca kvalitativno jedinka iste vrste kao i svaka druga. U pogledu kvantitativnom, znači u pogledu visine, težine, zapremine, ukupnog broja vlakana u vuni nije svaka ovca jedinka iste vrste kao druga. Najraniji kalendari nisu se osnivali na merenju vremena u jednakim razmacima. Oni su beležili događaje koji se ređaju jedan za drugim, a koji su jasno obeleženi prirodnim pojavama. Jedan dan se razlikuje od drugoga po tome koliko traje mrak u njemu, isto onako kao što se jedna ovca razlikuje od druge, različitih dimenzija po prostoru koji zauzima.

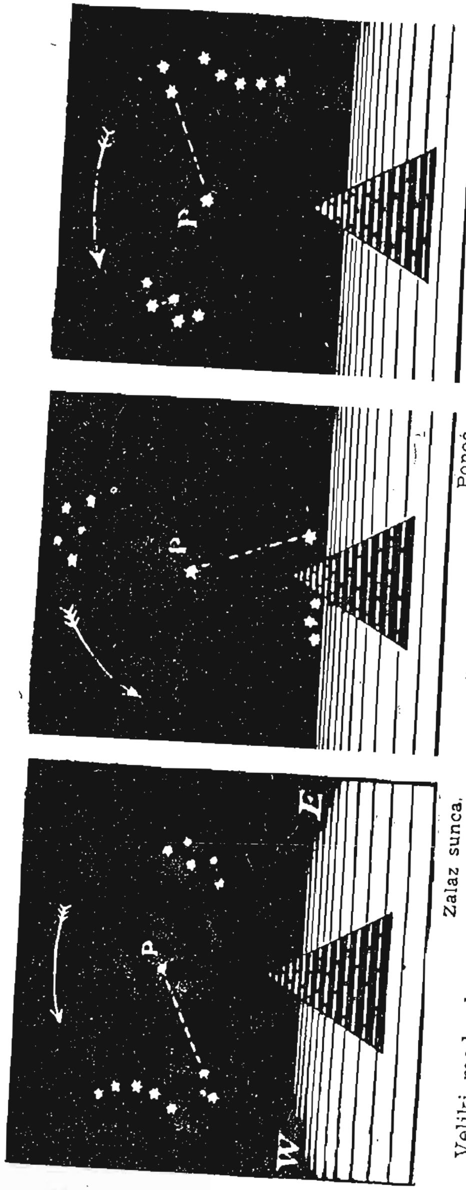
Što je rečeno o upotrebi brojeva, kada se njima pretstavlja veličina jedne grupe jedinki koje se mogu poređati u jedan niz, jednako važi i za upotrebu brojeva kada se njima označava red koji jedan događaj ili jedna stvar zauzima u nekom prirodnom ili veštačkom nizu. Mi možemo da poređamo dvadeset i osam drvaca razne veličine u određeni niz gde dolaze sve veća i veća drvca, ili sve manja i manja, a da ništa ne znamo o tome kako dužina ma koga drvceta odgovara mernim podeocima na lenjiru od tri desimetra. Isto tako mogu primitivna plemena da utvrde vreme početka četrnaeste suše, a da

i ne znaju da li su razmaci između jednog sušnog doba i drugog zbilja jednaki. Nema mnogo razlike u upotrebi broja kad kažemo da na jednoj livadi ima sedam ovaca i kad kažemo da je nedelja sedmi dan u sedmici. Ali je sasvim nešto drugo kad kažemo da godina ima 365 dana, a dan 24 časa. Kad su ljudi počeli da dele dan prema položaju sunčeve senke, počeli su da upotrebljavaju stare brojeve na način koji je bio sasvim nov. Čas nije rastavljen od drugoga časa nikakvim prirodnim događajem kao što kišno doba razdvaja jednu sušu od druge, ili kao što mesečevi razni oblici razdvajaju dva puna meseca. Časovni minuti odgovaraju samo m e r e n j i m a na jednoj skali koju možemo da upotrebimo tačnije ili netačnije prema tome koliko smo tačno posmatrali pokazivač, tj. ugao senke, kad poslednje zrnce padne u čašu za pesak[1]), ili koliko smo tačno zapazili gde je sad kazaljka na časovniku.

3. — U KOME SE PRAVCU TO NALAZI?

Potreba za tačnim merenjem javila se prirodno iz posla oko beleženja toka vremena koje je bilo bitna potreba sređenog varoškog života. Sasvim je sigurno da su ljudi počeli da mere uglove mnogo pre nego što su se mnogo pomučili oko merenja dužina. Broj dana u godini utvrđen je pomoću jednovremenog izlaza sa suncem zvezde Siriusa, još na samom početku života u gradskim naseljima kraj reke Nila. Da bi opazio k a d će se pojaviti neka određena zvezda, ili neko određeno sazvežđe, čovek je morao da zna n a k o j o j t a č k i na nebu će se oni pojaviti. Imamo mnogo dokaza da je još neolitski čovek naučio da postavlja grube spomenike da bi pomoću njih utvrdio pravac nebeskih pojava a to je bilo pre nego što se javljaju gradovi, od kojih imamo sačuvanih ostataka. Da bismo saznali pravac u kome će neki predmet biti viđen na horizontu, potrebno je da ga posmatramo sa neke utvrđene tačke i da se možemo osloniti na neku utvrđenu liniju. Dve su osnovne linije na koje se oslanjamo: poznati meridijan koji na horizontu spaja tačku severa s tačkom juga i linija koja ga seče pod pravim uglom i spaja tačku istoka s tačkom zapada. Te su dve linije verovatno bile utvrđene pre nego što su i počele velike civilizacije koje su imale kalendar. Taj pronalazak pretstavlja

[1]) Misli se na peščani časovnik. — P r e v.



Veliki medved se spušta. Kasiopeja se penje.

Zalaz sunca.

Kasiopeja se približava gornjem prolazu kroz meridijan. Veliki medved u donjem prolazu kroz meridijan.

Ponoć

Veliki medved se diže. Kasiopeja se spušta.

Pred sam sunčev izlaz

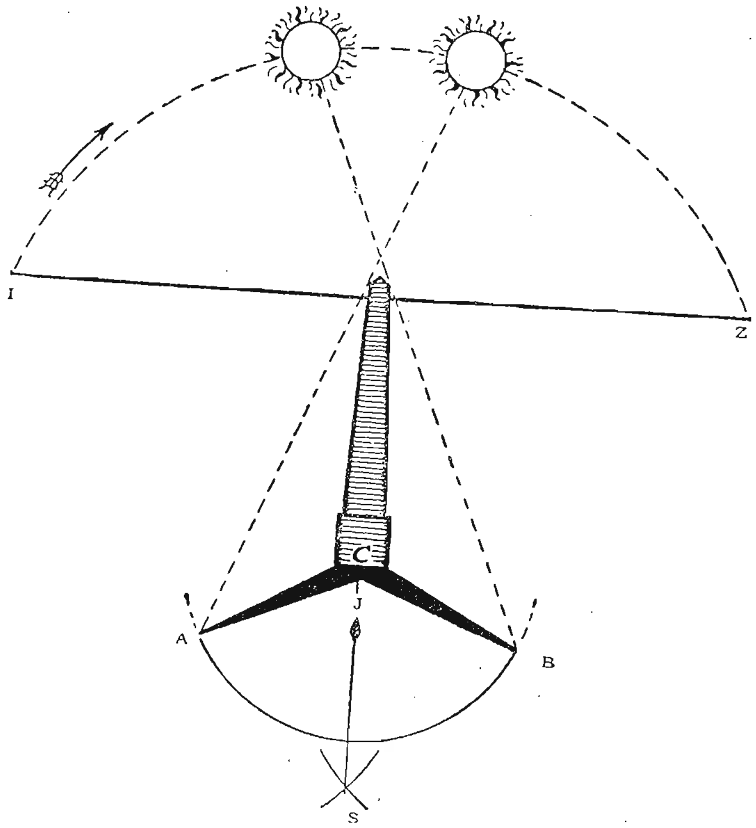
SL. 7. — NOĆNO OKRETANJE ZVEZDA

Dijagramski pretstavljeno nebo kako ga mi danas možemo videti sa egipatskih piramida u pozno leto. Dva pokazana sazvežđa, pošto su sasvim blizu Pola, ne zalaze za horizont. Posle šest meseci Kasiopeja bi bila zapažena kako se spušta posle Sunčeva zalaza, a diže se baš pred sâm Sunčev izlaz.

prvi matematički problem u društvenoj delatnosti ljudskog roda.

Meridijan sever—jug izabran je na osnovu položaja Sunčeve senke kad je ona najkraća na podne. Sem toga on je upravljen ka mestu na nebu oko koga se zvezde noću okreću. U doba kad su građene Piramide, jedna svetla zvezda iz sazvežđa Zmaj okretala se po malom krugu (od tri stepena) oko toga meridijana. Položaj sazvežđa menja se u toku vekova i danas se nebeski pol poznaje po Severnjači koja je odmaknuta samo za jedan stepen od Pola. Zabeleženo je kako je u staro doba utvrđen tačan položaj podnevne senke. Na pesku ili na mekanoj zemlji oko motke ili oko obeliska za utvrđivanje senke (koji su u ono doba pretstavljali javni časovnik) opisan je krug pomoću konopca. Dve tačke u kojima su senke tačno dodirivale krug bile su obeležene, pa je prepolovljen ugao između tačke u kojoj je zabodena motka i tih dveju tačaka. To je polovljenje ugla izvršeno u početku na ovaj način: zategnut je konopac između onih dveju tačaka gde senke dodiruju krug, pa je taj konopac sklopljen na dva jednaka dela. Docnije se to radilo time, što su iz pomenutih dveju tačaka opisani krugovi jednakim poluprečnicima i nađen presek tih krugova (sl. 8).

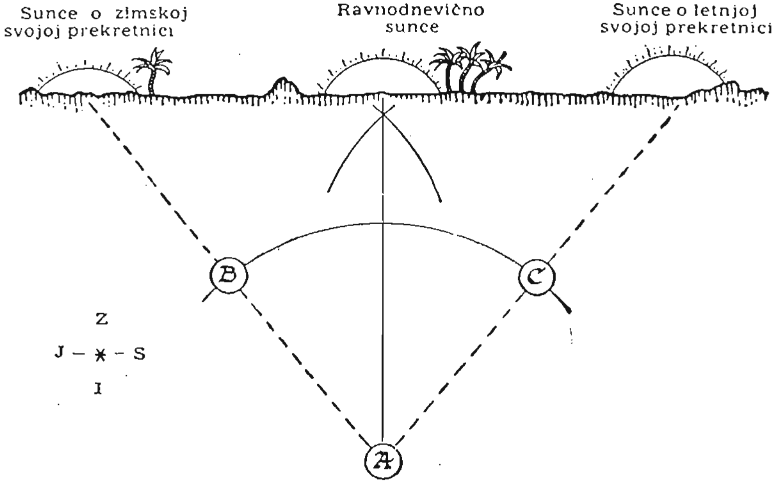
Utvrđivanje meridijana istok—zapad ili *ekvinokcijale* pretstavljalo je sličan problem. Po pravcu u kome su najstariji grobovi bili okrenuti vidi se da je taj problem postojao pre nego što je počeo život po gradovima. Mi smo već toliko naučeni na to da Sunce izlazi na istoku, a zalazi na zapadu, da mnogi od nas i ne zna da se to dešava svega dva puta godišnje: o proletnjoj i jesenjoj ravnodnevici, kada su dan i noć jednaki. Za vreme naše zime Sunce izlazi na jugoistoku, a zalazi na jugozapadu, a leti izlazi na severoistoku a zalazi na severozapadu. Velika svečanost u čast plodnosti na dan prolećne ravnodnevice bila je utvrđena za onaj dan kad Sunce izlazi i zalazi na sredini između svoja dva krajnja položaja u kojima se ono nalazi o svojoj letnjoj i svojoj zimskoj prekretnici. Stari spomenici kao što su spomenik u Stounhendžu (Engleska) i ostaci kalendarske kulture starih Maja pokazuju da je Sunčev položaj o izlazu i zalazu u dane prekretnica utvrđen poređivanjem u pravu liniju dva stuba nejednake veličine. Mogućno je da je položaj ravnodnevičnog Sunca pri izlazu i zalazu utvrđen time što je prepolovljen ugao pokazan na sl. 9. Možda su taj položaj utvrdili i time, što su povukli jednu pravu liniju pod *pravim uglom* na liniju meridijana sever—jug.



SL. 8. — UTVRĐIVANJE MERIDIJANA SEVER—JUG

U doba iz koga su prvi pisani spomenici o kulturnim dostignućima staroga sveta sveštenstvo je već odavno znalo tačan pravac zvezda kad one dostižu svoju najvišu tačku iznad horizonta (prolaz kroz meridijan). Velika Piramida je sagrađena 2800 g. pre n. e. Ona je tako postavljena, da Siriusovi zraci

padaju na njenu južnu površinu pod pravim uglom pri njegovom prolazu kroz meridijan. Jedno okno za sprovođenje svežeg vazduha, a koje vodi u kraljevu sobu, tačno je tako postav-

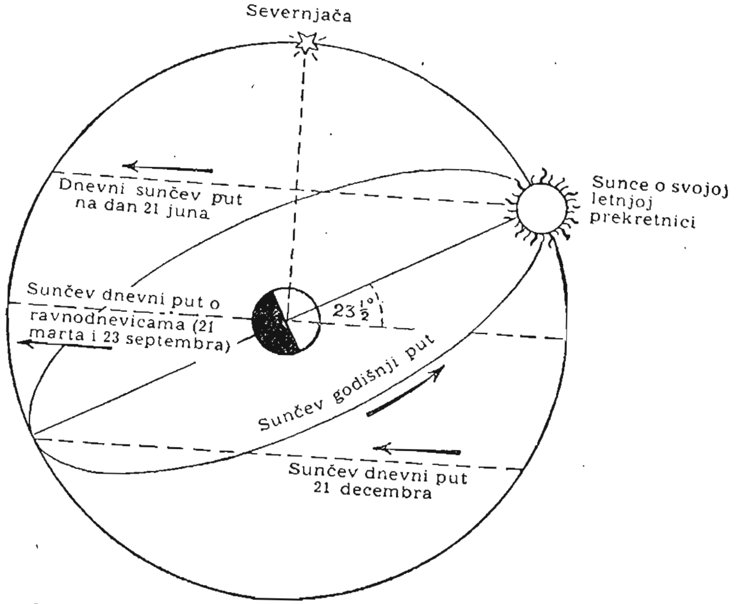


SL. 9. — UTVRĐIVANJE RAVNODNEVICE

Po izvesnim veoma starim kalendarskim spomenicama da se zaključiti da je ravnodnevica utvrđena posmatranjem izlaza i zalaza Sunčeva o Sunčevim prekretnicama (21 decembra i 21 juna) kada Sunce izlazi i zalazi na svojim krajnjim položajima prema jugu odnosno prema severu. Na slici su tačke *A* i *B* postavljene u jednoj pravoj sa Suncem o njegovoj zimskoj prekretnici. Rastojanje između *A* i *C* je isto kao između *A* i *B*. Na sredini puta između svoja dva krajnja položaja Sunce izlazi tačno na istoku i zalazi tačno na zapadu, a dan i noć su tada jednaki. Zato se ta dva dana (21 mart i 23 septembar) zovu ravnodnevice. Po starinskim obredima to su bili veliki praznici. Tačke istoka i zapada mogu se dobiti polovljenjem ugla *BAC*.

ljeno, da je mrtvoga faraona osvetljavala pas-zvezda pri svome prolazu kroz meridijan. Glavni otvor i drugo jedno okno propuštali su Severnjačinu svetlost u njenoj najnižoj tački (označena sa α u sazvežđu Zmaj). Čudesna tačnost u konstrukciji ovih građevina došla je otuda što su vekovima beležena posmatranja. Sredstva kojima su stari beležili pravac u kome se nešto nalazi i dandanji odražavaju fizičku stvarnost iz koje je poteklo prvo merenje uglova.

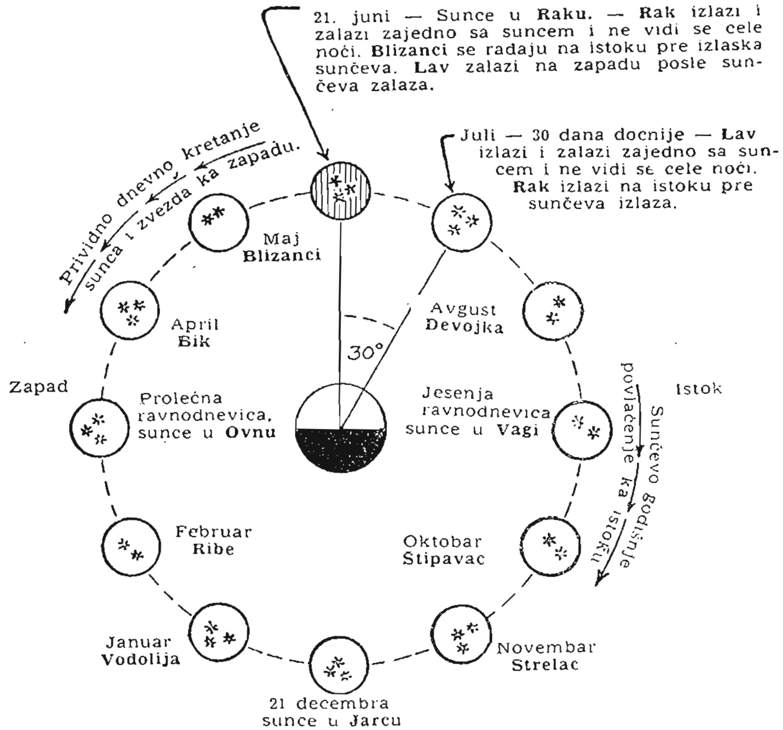
U staroj svešteničkoj nauci ceo nebeski svod okretao se oko osovine koja prolazi kroz nebeski pol. Sunce, Mesec, planete i zvezde okretali su se oko nje po paralelnim krugovima.



SL. 10. — SUNČEVO GODIŠNJE KRETANJE (PRIVIDNO) PO NEBESKOJ LOPTI

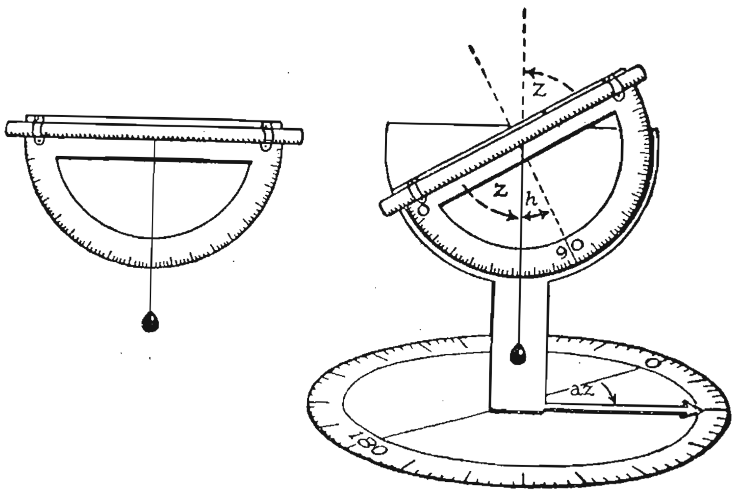
Svake noći Mesec sklizne malo nazad na nebeskom svodu tako da — izlazi docnije i zalazi docnije dok raste i opada. Izgledalo je da svakog dana Sunce pomalo sklizne nazad, uginjući se na nebeskom svodu tako da iste zvezde izlaze narednih noći sve ranije, a poneke postaju i nevidljive u razdoblju kad Sunce zauzima na nebu isti položaj kao i one. Nagnuta Sunčeva putanja kroz pojas sazvežđa Zodijaka objašnjavala je zašto je Sunce u nekim danima na podne više nego drugih dana. Da se pronađe dužina godine bilo je potrebno izvršiti tačna merenja, te nije nikakvo čudo što prve procene nisu bile tako tačne kao docnije. Vavilonska godina bila je najpre od 360 dana. Na dvanaest misirskih meseci po trideset dana dodati su pet prazničnih dana, što pokazuje da su i Misirci neko vreme imali

godinu od 360 dana. I tako je kružni put Sunčev po ekliptičnom pojasu nebeske lopte bio obeležen sa 360 stupnjeva od kojih svaki odgovara jednome danu i jednoj noći. Jedva se



SL. 11. — SUNČEVO (PRIVIDNO) GODIŠNJE POVLAČENJE KROZ SAZVEŽĐE ZODIJAKA

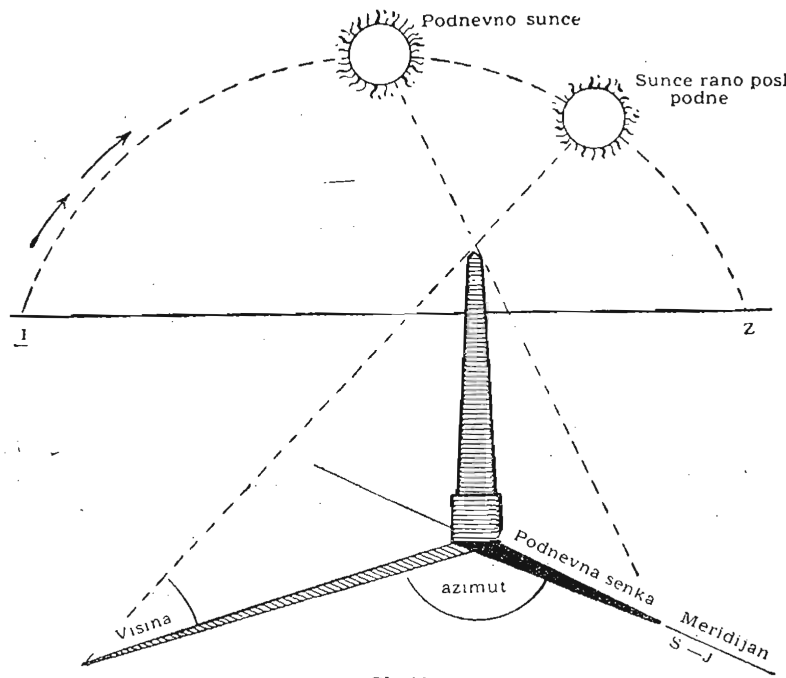
može sumnjati u to da je uglovni stepen potekao iz ove prirodne podele Sunčeve putanje na 360 delova, koja putanja pretstavlja pun ugao kad Sunce opiše ceo krug (sl. 11). Sveštenici staroga sveta u Sredozemlju znali su već dve hiljade godina pre naše ere koji ugao zaklapa Sunčeva nagnuta putanja sa ravnodnevičnom ravni (sl. 5 i 10) (»nagnutost ekliptike«) i to sa tačnošću do sićušnog dela stepena. Vavilonski kulturni spomenici pokazuju da su Vavilonci imali sprave uglavnom slične sa astrolabom (sl. 12) ili sa prvobitnim teodolitima koji su se upotrebljavali dok teleskop nije pronađen. Pomoću njih su oni izradili kartu svoga neba, krugove visine i azimuta (Vidi sl. 13 i 118).



Sl. 12.

Prost teodolit ili astrolab za merenje ugla što ga neka zvezda (ili ma koji drugi predmet) zaklapa s horizontom (visina) ili s vertikalom (zenitna daljina) može se načiniti na taj način što će se komad neke metalne cevi utvrditi sasvim paralelno sa osnovom nekog školskog uglomera, koji možete kupiti u svakoj radnji za školski pribor. U uglomerovom centru utvrdite uže o koji je obešen neki težak predmet (na pr. komad metala za livenje slova koji će vam besplatno dati svaki slagač ako ga lepo zamolite), da posluži kao visak. Kad se predmet vidi kroz cev podeoci naspram užeta pretstavljaju zenitnu daljinu (*Z*), a visina (*h*) je 90° — *Z*. Ako sve to postavite tako da se slobodno okreće na jednom uspravnom drvenom nosaču koji se slobodno okreće na jednoj kružnoj osnovi izdeljenoj na stepene (načinjenoj od dva uglomera sastavljena osnovama) i utvrdite jedan pokazivač paralelan s cevi, možete meriti azimut (*az*) ili ugao neke zvezde ili drugog nekog predmeta (na pr. Sunce na zalazu) prema meridijanu sever—jug. Da biste to postigli utvrdite skalu podeoka tako da ona pokazuje 0° kad je pokazivač upravljen na podnevno Sunce ili na polarnu zvezdu (Severnjaču). Ovako je izgledao instrument koji je upotrebljavan za određivanje geografske širine i dužine u doba velikih moreplovnih putovanja. Vi se možete poslužiti njime da odredite geografsku širinu i dužinu svoje kuće (glava 4, str. 185) ili da načinite plan svoga susedstva (glava 4, str. 176 i glava 6, str. 277).

Sad ćete moći jasnije da vidite zašto je merenje pravca dovelo do novog načina upotrebe brojeva. Brojevi su bili pronađeni da opišu razdvojene stvari i oni su za te razdvojene stvari bili sasvim zgodni. Nikako se to ne može reći za merenje.



Sl. 13.

Pravac nekog nebeskog tela može da se utvrdi pomoću dva ugla: uglom koji ono zaklapa s horizontom ili s vertikalom (visina ili zenitna daljina) i uglom koji ono zaklapa s meridijanom (azimut).

Ma kako vi pokušavali da podelite obim nekog kruga na 360 »jednakih« delova, ti delovi neće nikad biti jednaki. Oni će biti samo toliko približno jednaki, koliko vam vaše sprave dopuštaju da ih načinite jednakim. Pa i onda, čak i kad upotrebite astrolab, stari oblik sekstanta, ili i moderni sekstant koji ima teleskop i vernie[1]), i radite što možete pažljivije,

[1]) Sprava za merenje veoma sitnih dužina. Ona se zove i nonius. — Prev.

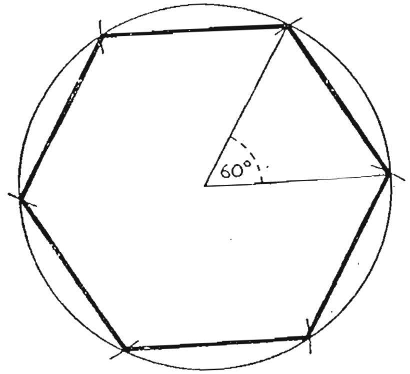
pravac neće nikad tačno odgovarati obeleženom podeoku. U praksi imate da uzmete najbliži podelak kao tačnu oznaku. Ovako ili onako tek ista teškoća nastaje pri upotrebi brojeva u vezi i sa svima ostalim pitanjima.

4. — DOKLE SE TO PRUŽA?

Ljudi su gradili hotele za svoje nebeske posetioce i za njihove zemaljske pretstavnike mnogo pre nego što su bili toliko pametni, da misle na to da grade kuće koje će biti podesne da oni sami stanuju u njima. Za građenje kalendarskih spomenika, da bi se tačno znao pravac u kome se vide nebeska tela, i za podizanje grobnica za balsamisane ostatke bogorođenog faraona, neophodno je bilo tačno meriti razmake. Dve piramide, Keopsova i Sneferuova u Gizeu sagrađene su po istom geometriskom planu koji je objašnjen uz sl. 5A sa Petrievim objašnjenjima. Tačnost pri građenju karakteristična za hramovsku arhitekturu u vezi je sa istaknutom društvenom ulogom hramova. Pošto su građeni da primaju svoje nebeske goste, ovi stari spomenici imali su da budu veoma tačno postavljeni, što se vidi na oknima za dovođenje sveža vazduha na Velikoj Piramidi u Gizeu. Tokom mnogo hiljada godina ljudi su se zadovoljavali time što su za sasvim praktične potrebe upotrebljavali grube anatomske jedinice za dužinu. Semitski narodi su se služili laktom, to jest dužinom od vrha srednjeg prsta do lakta, kao što se seljaci i dandanji služe nogama kad hoće da odmere njivu u koracima i stopama. Za obične poslove oni su se zadovoljavali jedinicom za merenje dužine koja se menjala od čoveka do čoveka. Hramovska arhitektura zahtevala je mnogo veći stepen tačnosti i oslanjala se na davno zaboravljenu veštinu računanja senke u sunčanijim zemljama gde je i počela civilizacija. Visine su računate pomoću dužine senke i Sunčevog ugla iznad horizonta. Računanje visina za taj način zavisi od nekih prostih istina o odnosu između dužina strana u trouglu.

Najraniji matematički pronalasci pripadaju toj klasi problema. Još u veoma davno doba Vavilonci su znali kako da nacrtaju ugao od 60°. Oni su to radili tako što su u krug upisivali sliku od šest jednakih strana (heksagon-šestougaonik) — sl. 14. Svuda u starome svetu nalazimo tragove jednog veoma prostog uputstva za crtanje ugla od 90°. Ono se osniva na činje-

nici da je trougao *pravougli* kad su mu strane 3, 4 i 5 jedinica. Prema jednoj legendi, sveštenici-arhitekte u Misiru postavljali su prav ugao tako što su vezivali tri konopca (kao na sl. 15) čije su dužine bile u odnosu 3 : 4 : 5. Ako im se krajevi klin-



Sl. 14.

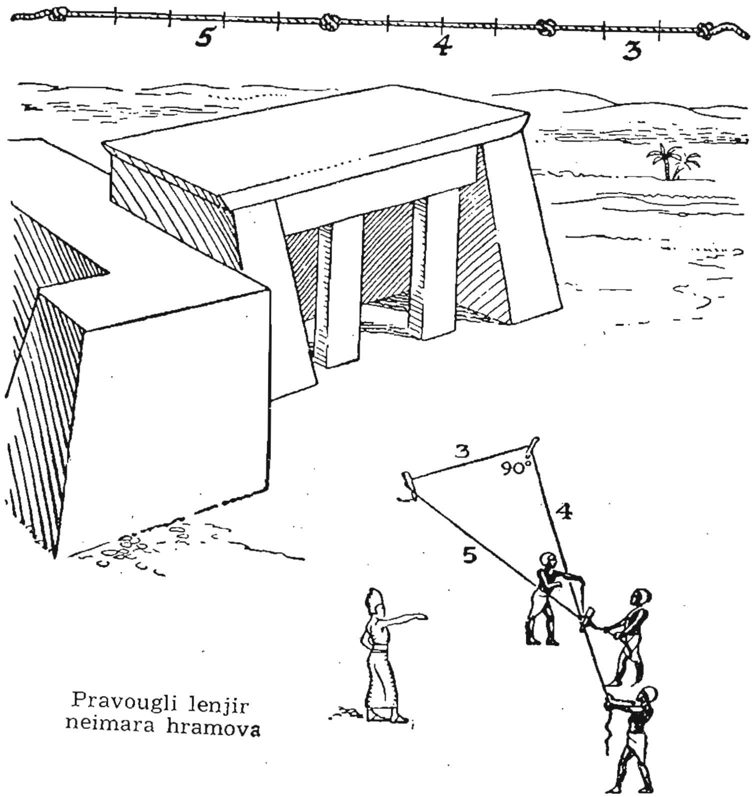
Pravilan *šestougaonik* (slika sa šest jednakih strana i šest jednakih uglova) upisan u krugu time što su na obimu kružnom njegovim polu-prečnikom otsecani lukovi.

cima pritvrde dobija se savršen pravougli lenjir. Pre pet ili šest hiljada godina Misirci i Vavilonci su bili otkrili bar jedan slučaj u kome se ispoljava opšte pravilo o stranama pravouglog trougla (v. sl. 16). Geometriski udžbenici to izlažu ovim rečima: »kvadrat na najvećoj strani (hipotenuzi) pravouglog trougla jednak je sa zbirom kvadrata na onim drugim dvema stranama«. I tako se pravougli trougao dobija i kad sastavimo tri konopca od 5 metara, 12 metara i 13 metara, opružimo ih, pa ih klincima pričvrstimo na njihovim krajevima kao na sl. 15. Možemo odmah videti da je

$$25 + 144 = 169$$

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

I upotreba stepena, ili tristašesetog dela kružnog obima, kao jedinice za merenje uglova može da pripomogne da se objasni rani pronalazak još jedne važne istine. I Misirci i Vavilonci su znali da je kod svih krugova isti odnos obima prema prečniku. Ovaj odnos mi obeležavamo grčkim slovom »π« (pi). On, grubo uzeto, iznosi $3\frac{1}{7}$ ili, kako mi pišemo razlomke 3,1416, (do 4 decimala tačno). Vavilonci su upotrebljavali grubu približnu vrednost, računajući da je taj odnos 3,0. Misirci su,

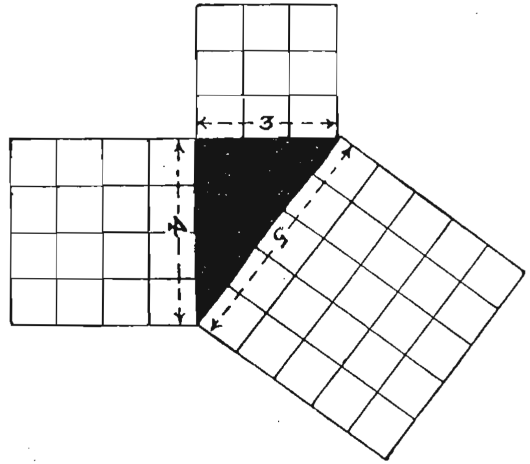


Pravougli lenjir neimara hramova

Sl. 15.

međutim, dali mnogo bližu približnu vrednost. Osnovne ivice piramida u Gizeu i njihove visine imaju odnos 11/7, iz čega izlazi da je odnos polovine obima prema visini bio 22/7, tj. $3\frac{1}{7}$. Ahmesov papirus (oko 1600 g. pre n. e.) daje odnos kružnog

obima prema prečniku kao 3,16 — izraženo u našim oznakama. Moskovski papirus daje obrazac za površinu lopte, gde π iznosi 3,14. I tako je misirsko merenje kruga bilo tačno sa greškom manjom od 1 stotog.



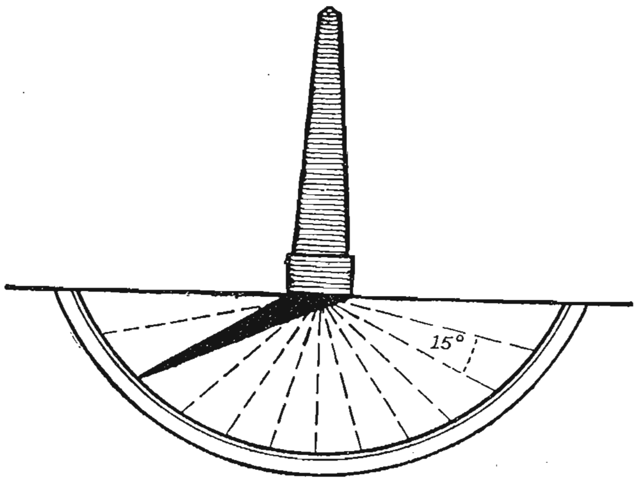
SL. 16 — PRAVOUGLI TROUGAO NEIMARA HRAMOVA

Najduža strana: 5 stopa . . . . . ($5^2 = 25$ kvadratnih stopa)
Kraće strane
4 stope . . . . . ($4^2 = 16$ „ „)
3 stope . . . . . ($3^2 = 9$ „ „)

$$25 = 16 + 9$$
ili $$5^2 = 4^2 + 3^2$$

Što je jedno prosto uputstvo za crtanje ugla od 60^0 mnogo staro u tome leži objašnjenje zašto je baš čas uzet za jedinicu vremena. Da bi se radni dan podelio pomoću Sunčeve senke na podeoke koji nisu rastavljeni nikakvim prirodnim razmakom, morao je biti izabran neki podesan ugao za jedinicu, da bi se označili podeoci na Sunčanom časovniku (sl. 17). Za jedan čas nebeska lopta (ili Zemlja, kako bismo mi to rekli) obrne se oko svoje osovine za $360^0 : 24 = 15^0$. U četvrtoj glavi videćete da se od svih uglova manjih od 90^0 najlakše crtaju uglovi od 60^0, 30^0 i 45^0. Kad smo već pronašli kako da crtamo te uglove, možemo dobiti njihove delove time što ćemo ih prepoloviti, pa dobivene polovine opet prepoloviti i tako više puta. Od tri pomenuta ugla samo ugao od 60^0 može da se deli dva puta, a da dâ uglove koji su izraženi celim brojem stepeni. Kad ga dva puta delimo dobijamo četiri ugla od 15°, tj. luk koji Sunce pređe za jedan čas u svom prividnom kretanju oko osovine nebeske lopte.

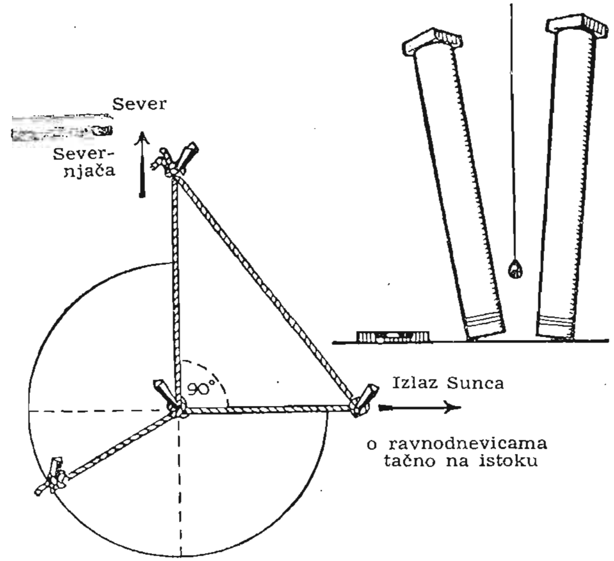
Sa napretkom građevinarstva prav ugao, dakle ugao od 90°, koji zaklapaju visak i vodena ravnjača, dobijao je sve



SL. 17. — SAT POMOĆU SENKE ILI OBELISK

veću važnost kao mera za veličinu ugla. Ugao gradskog neimara nije bio dat u stepenima, već kao izvestan deo pravog ugla (sl. 18). Kada je izgrađivanje hramova postalo prava manija, koja je do krajnosti materijalno iscrpljivala ove stare društvene zajednice sa popovima na njinoj grbači, ti isti popovi su svoju najveću kulturnu tekovinu, merenje uglova, prepustili zanatliskoj klasi robova i slobodnjaka. Jedine tragove o tome koliko je ta potčinjena klasa poznavala građevinska merenja nalazimo u geometriskoj savršenosti njenih dela. Jedini razlog zašto mi obično govorimo o Grcima kao o prvim matematičarima jeste taj, što Misirci nisu ostavili za sobom skoro nikakvu literaturu koja bi nam govorila o tome kako su došli do nekih otkrića koja i dan danas pretstavljaju najčudesnije podvige u merenju u celoj čovekovoj istoriji. Oni odlomci što

ih imamo, kao što je Rindov papirus pisara Ahmesa, pokazuju da je njihova računica bila na istoj visini na kojoj je bila računica Grka koji su se pojavili docnije. Oni su ostavili tako malo literature zato što pismena klasa nije imala nimalo volje da udara na velika zvona svoje popovske tajne, a zanatliska klasa zemljomera, građevinara, neimara i mornara, čiji su



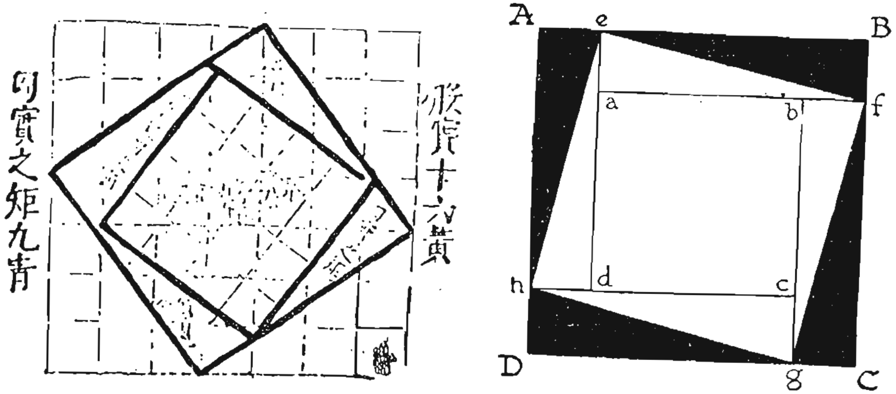
SL. 18. — PRIMENA UGLA U NEIMARSTVU

Pri postavljanju hrama u vezi sa četiri glavne tačke (sever, jug, istok, zapad) na velikom krugu horizonta, vidi se da su ugao četvrtgodine ($\frac{1}{4}$ od $360 = 90$) i najveći ugao trougaonog lenjira jedno i isto. Linija viska i vodena površina daju nam definiciju pravog ugla kao jedne nezavisne jedinice za merenje. Hramovni stub je uspravan kad je na obema stranama podjednako nagnut prema horizontalnoj liniji kao i liniji viska. Prav ugao je isto tako onaj ugao što ga linija viska zaklapa s horizontom.

članovi bili nepismeni, prenosila je svoje znanje usmeno s kolena na koleno. Usled klasno ograničenog sistema obrazovanja u staro doba mnogo je dragocenog znanja izgubljeno i upropašćeno.

5. — KOLIKU POVRŠINU TO ZAHVATA?

Vladajuća kasta koja je naređivala podizanje ovih ogromnih hramova i grobnica, izrabljivala je zemljoradnike. To je dovelo do zavođenja poreze na zemljište u Misiru. Herodot nam priča kako je Nil stalno plavio međe između imanja i odnosio ih, i tako su nastajali sporovi o tome koliko još poreze ima da se plati i dokle je čije imanje. Otuda je ponikao zemljomerski



Sl. 19.

Knjiga Ču Pei Suan Kinga, verovatno pisana oko 1 000 g. pre n. e., postala je, prema usmenom predanju, iz jednog izvora iz doba kad grčki geometri još nisu bili predavali ono što mi danas zovemo Pitagorina teorema, tj. da je kvadrat na najvećoj strani pravougla trougla jednak zbiru kvadrata na onim drugim dvema stranama. Ovaj veoma stari primer štampanja pomoću pokretnih slova iz jednog starog izdanja je *Ču Pei*, iznet u Smitovoj *Istoriji matematike*, dokazuje istinitost gornje teoreme. Kad se na ona četiri bela pravougla trougla dodadu četiri pravougla trougla potpuno jednaka sa trouglom eBf, može se dobiti kvadrat. Zatim nacrtajte četiri pravougaonika kao što je $eafB$ od kojih je svaki načinjen od dva trougla kao što je efB. Kad budete pročitali četvrtu glavu moći ćete da odgonetnete kinesku zagonetku koja je mnogo lakša od Euklidove. Ovo su stupnjevi odgonetke:

$$\text{Trougao } efB = \tfrac{1}{2} \text{ pravougaonika } eafB = \tfrac{1}{2}\, Bf \cdot eB$$

Kvadrat $ABCD$ = kvadrat $efgh$ + 4 puta trougao $efB = (ef)^2 + 2 \cdot Bf \cdot eB$

Ali je i

Kvadrat $ABCD = (Ae + eB)^2 = (Bf + eB)^2 = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2 \cdot Bf \cdot eB$

I tako je

$$(ef)^2 + 2 \cdot Bf \cdot eB = (Bf)^2 + (eB)^2 + 2\, Bf \cdot eB$$

Odatle je

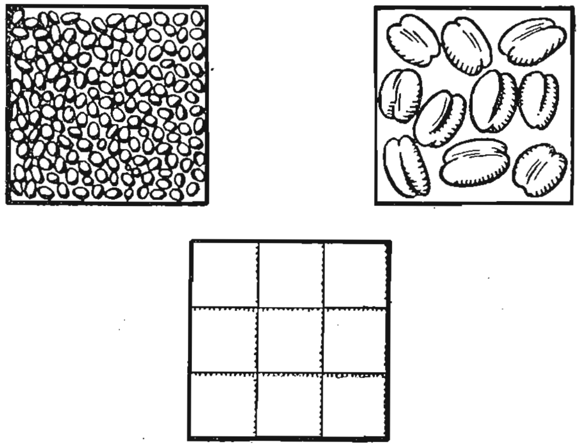
$$(ef)^2 = (Bf)^2 + (eB)^2$$

zanat. Uz stvaranje zemljomerskog zanata Misirci su obraćali veliku pažnju sistemima navodnjavanja, a naročito u vezi sa proricanjem poplava svete reke. Ovde su opet sveštenici mogli da povećaju svoj uticaj. Misirski zemljomeri, mesto da mere u g a o, počeli su da mere p o v r š i n u. Mi ne znamo tačno kako su ljudi došli na misao da uzmu kvadrat za jedinicu površine. Tu se nameću razna, podjednako verovatna objašnjenja. Prema jednome od njih to je poteklo iz načina na koji su krpljene korpe u korparstvu — zanatu koji se javio pre tkanja. Po drugome, to je poteklo od mozaičkih ploča, ili je došlo od šara u obliku kvadratnih polja koje su se viđale na starijoj vavilonskoj grnčariji. Ima izvesnih razloga za pretpostavku da je veoma rano pronađeno kako da se meri površina, kad su rađeni crteži podova s kvadratnim pločicama. Jedan od prvih primera štampanja pomoću drvene ploče[1]) u Kini, izgleda da je izrađen prema kopiji jednog takvog crteža i prikazuje takozvanu Pitagorinu teoremu (sl. 19) koju su Kinezi verovatno znali pre njega. Misirci i Vavilonci su znali da pronađu površinu trougla čije su strane poznate i površinu kruga čiji je poluprečnik poznat. Njihova metoda za određivanje površine kruga osnivala se na tome što su krug delili na male, približno trouglaste režnjeve.

Pitanje, koliku ravnu površinu ograđuje jedan zid isto je kao i pitanje, koliko bi se kvadratnih pločica određene veličine moglo postaviti na tu površinu kad bi se njoj dao podesan oblik (sl. 20). Razume se da tu debljina pločica nema nikakva značaja. Broj upotrebljen da izrazi rezultat merenja jedne dužine kazuje nam koliko se puta može preneti na merenu dužinu izvesna određena dužina koju zovemo j e d i n i c a. Merenja koja izvodimo kad pitamo koliko cigli treba poređati jednu do druge od jednog kraja zida do drugog (dužina), koliko je cigli potrebno da se poploča neki pod (površina) i koliko je cigli potrebno da se ispuni izvestan prostor (zapremina) — sva su u vezi jedno s drugim pod uslovom da je uvek reč o istoj vrsti cigala. Zato je važno da se sasvim jasno zna koju smo jedinicu izabrali kad se brojevi upotrebljavaju za ove poslove. Jedinica ravne površine jeste kvadrat čija je strana

[1]) Na njoj su bili izrezani crteži i slova. — P r e v.

izvesna određena dužina. Dužine su samo onda iste vrste i podesne za upoređivanje kad pretstavljaju »toliko i toliko puta« jednu istu jedinicu. Da bismo uporedili jednu liniju dugačku



SL. 20. — ČOVEK UČI DA MERI POVRŠINE

U početku je vrednost jedne njive određivana prema količini ječma ili pirindža koja se može dobiti sa nje. Priroda ne stvara sve ječmene stabljike ili sva ječmena zrna jednakima, ali čovek može da načini kvadratne opeke koje se mogu poređati tako da načine slike skoro istih oblika koji se ne mogu razlikovati golim okom. Ako je jedan kvadrat načinjen od n opeka (n je 3 na našoj slici) u spoljnjem redu, dužina svake strane je n puta dužina strane jedne opeke. Broj opeka koje sačinjavaju kvadrat iznosi n redi po n opeka, a to znači n puta n opeka. Zato mi i kažemo, kad imamo da pomnožimo n sa n, da je n dignuto na kvadrat i pišemo: $n \cdot n = n^2$. Osnovno pravilo za izračunavanje površina osniva se na podu popločanom kvadratnim opekama. Pravilo glasi da n^2 površinskih jedinica sačinjavaju površinu kvadrata čija je strana n dužinskih jedinica.

3 palca s jednom linijom dugom 5 stopa[1]), moramo ih obe izraziti u palcima (3 palca i 60 palaca), ili u stopama $\left(\frac{1}{4} \text{ i } 5\right)$, ili upotrebiti neku nezavisnu meru (na pr. 7,5 santimetara i 150 santimetara). Isto tako, da bismo upoređivali površine

[1]) Stopa ima 12 palaca. — Prev.

moramo se držati jedne stalno određene dužine. Kvadrat čija je strana duga 10 palaca obuhvata 100 kvadratnih palaca i ima četiri puta veću površinu od kvadrata sa stranama dugim 5 palaca, koji obuhvata 25 kvadratnih palaca. Kvadrat sa stranom dugom deset palaca pretstavlja samo tridesetšesti deo kvadrata čija je strana 5 stopa.

6. — KOLIKO PROSTORA TO ISPUNJAVA?

Kad je trgovina bila sva u razmeni, žito, vino i ulje su mereni sudovima. Društveni običaj je naređivao da upotrebljeni sudovi imaju manje-više stalan oblik i stalnu veličinu. Ostaci ovih grubih mera još se i dandanji upotrebljavaju u Engleskoj. »Svinjska glava« je veliko bure čija je veličina različita prema tome kakvo se vino ili pivo prodaje u njima[1]). Engleski se sistem merenja pomakao veoma malo od sistema upotrebljavanog u bronzano doba. Pinta[2]) i galon (sudovi za merenje) i sad se više upotrebljavaju nego kubna stopa. Ukoliko se trgovina sve više razvijala duž sumerskih trgovačkih puteva, sve se više javljala društvena potreba da se usvoji jedna zajednička mera, da bi se mogli upoređivati sudovi različitih veličina. Verovatno su Sumerci prvi zaveli merenje zapremina pomoću broja kocki čije su ivice utvrđene dužine, a koje su potrebne da se njima ispuni izvestan prostor, pošto su oni zidali ciglama.

7. — KOLIKO MATERIJE TO SADRŽI?

Mi i dandanji zapreminom merimo čvrsta tela koja mogu tesno da se spakuju jedno uz drugo. Na primer, mi Englezi i sad govorimo o toliko i toliko bušla[3]) brašna ili ječma. Takva je mera očevidno bila nekorisna feničanskim trgovcima koji su prvi došli na engleske obale po kalaj. Sumerci i njihovi semitski naslednici u Maloj Aziji počeli su trgovati još u veoma staro doba. Posle osnivanja velikih trgovačkih pristaništa, kao što je grad Tir, došlo je osnivanje kolonije u Kartagini, na zapadnoj obali Sredozemnog Mora. Feničanski su trgovci plo-

[1]) Za pivo to bure ima 54 galona po 4,5 litra; za vino 46 galona; za duvan (u SAD) od 750 do 1200 funti po 453,593 grama. — Prev.

[2]) Iznosi 0,57 litra. — Prev.

[3]) Iznosi 36,35 litara. — Prev.

vili na sever i menjali robu sa megalitičkim[1]) zajednicama u Britaniji, Kornvolu i Devnu oko 1500 godina pre n. e. Oko 500 godina pre n. e. Kartaginjanin Hano plovio je pored afričke obale čak preko ekvatora. Čim su brodovi počeli da krmane na pučinu odakle se obala ne vidi, popovska ekonomija starih civilizacija bila je osuđena na propast. Moreplovac je sad morao znati da računski odredi položaj zvezda.

Za trgovački narod, kao što nam i biblija priča, lažna mera je nešto užasno. Nije onda nikakvo čudo što su civilizacije u Mesopotamiji i u Maloj Aziji pretekle misirsku civilizaciju pronalaskom sistema mera za težinu i za dimenzije. Potreba za tačnim računima u trgovačkim poslovima vezana je za veoma visok razvoj aritmetike. U Nipuru je pronađeno pedeset hiljada tablica velike biblioteke, čiji su najveći deo razorili Elamiti oko 2000 godine pre n. e. Tu je već postojala škola trgovačke računice za trgovce.

Vavilonska aritmetika zamalo što nije bila isto onako korisno sredstvo za računanje kao što je naša današnja aritmetika. Princip mesne vrednosti, koji će biti objašnjen u sedmoj glavi, stalno je primenjivan u brojnome sistemu sa osnovom 60. Pomoću višestrukih kombinacija oznaka za jedan i za deset obeležavani su osnovni brojevi od 1 do 59, kao što mi upotrebljavamo oznake za 1 do 9 kao osnovne brojeve. Preko toga, mesto je označavalo toliko puta 60, ili toliko puta 3600 ili toliko puta drugi neki stepen od 60, kao što mi pretstavljamo toliko puta deset, ili toliko puta sto, ili neki još veći stepen od deset. Kao Indusi i pleme Maja i Vavilonci su u svome pisanju brojeva upotrebljavali nulu koja je umetana da pretstavlja prazninu u nizovima stepena od šeset, kao što mi danas pravimo razliku između brojeva 33 i 303. Ipak izgleda da su retko upotrebljavali nulu na krajnjem mestu desno kao što mi danas pravimo razliku između brojeva 33 i 330. Taj korak je, izgleda, bio jedina stvar koja je nedostajala, pa da njihovo pisanje brojeva odgovara arapskim pronalascima kojima se mi danas služimo. Vavilonska se aritmetika

[1]) Megaliti su nadgrobni i drugi verski spomenici od grubog krupnog kamena iz preistoriskog doba. — Prev.

zbilja nikad nije digla dotle do pronađe sistem »algoritama«[1]), ma da je sasvim lepo mogla to da postigne. Za brzo računanje bile su sastavljene tablice množenja, sabiranja, oduzimanja, deljenja, dizanja na kvadrat i tablice progresija[2]), i to tako temeljne, da ne ustupaju aparatu modernog računanja. Tradicija grčke aritmetike potekla je iz Pitagorine mađije brojeva, te ima mnogo manje veze s našom aritmetikom; i atički način pisanja brojeva, ma da manje glomazan nego onaj mnogo stariji način, bio je potpuno nepodesan da stvori algoritme ili pravila za računanje, koje danas zna svako dete od dvanaest godina. U drugom jednom pogledu vavilonska aritmetika je u najvišem stepenu moderna. Pri pisanju razlomaka imenitelji nisu označavani. Seksagezimalni razlomci su upotrebljavani isto onako kao što mi upotrebljavamo desetne razlomke, sem što nije bilo pronađeno nešto kao što je naša desetna zapeta, da se njome označi tačno šta ima da znači izvestan niz cifara. Vavilonske aritmetičke tablice, kao i moderne logaritamske tablice, ostavljale su da se o vrsti veličine zaključuje prema ostalome tekstu.

Ono što je rečeno o merenju pravca odnosi se isto tako na dužinu, površinu, zapreminu i težinu. Pri merenju težine upotrebljavaju se brojevi da nam kažu koliko puta treba uzeti jednu određenu težinu, da bi ona održavala ravnotežu s nekim posebnim predmetom kad jedno stavimo na jedan tas na terazijama, a drugo na drugi tas. Nije to isto kao kad bismo brojali ovce jednog stada ili dane u godini. Dva predmeta mogu držati ravnotežu jedan drugome na terazijama, a da se na drugim, osetljivijim terazijama pokaže da je jedan predmet teži od drugoga. Ma kakve mi jedinice izabrali, ma kakve instrumente upotrebili, brojevi, muški i ženski, neparni i parni, kojima se služimo da prebrojimo novac ili stoku, ne mogu nam nikad dati tačnu meru težine ili zapremine nekog predmeta, njegovu površinu, dužinu njegovih ivica, ili ugao pod kojim je postavljen. Videćemo da će nam lakše biti da rešimo izvesna svoja teška pitanja, i to teška pitanja koja su zbunjivala najmudrije ljude u staro doba, ako odmah u početku shvatimo

[1]) Algoritam je pravilo kako da se dođe do rešenja pomoću konačnog broja računskih radnji. — Prev.

[2]) Daćemo dva primera progresije.
Aritmetička progresija: $2 + 5 + 8 + 11 + \dots$
Geometriska progresija: $2 + 6 + 18 + 54 + \dots$ — Prev.

da su brojevi najpre upotrebljeni za to da označe koji je po redu neki predmet ili događaj u nekom nizu, i, da se potreba za pravilima o upotrebi brojeva prvi put javila kad su brojevi upotrebljeni pri merenjima koja nikad ne mogu biti tačna.

VEŽBANJA UZ DRUGU GLAVU

1. — Nađite nekoliko kružnih predmeta, kao na primer poklopac kante za otpatke ili cifarnik časovnika.

I na jednom i na drugom izmerite obim i prečnik, pa podelite dužinu obima dužinom prečnika što tačnije možete.

*

Sledeći niz uputstava odnosi se na trougle. Pazite u svakome primeru na kakve nas zaključke navode ta uputstva.

2. — Nacrtajte trougao čije su strane 10 santimetara, 8 santimetara i 6 santimetara.

To se radi na taj način što se na hartiji povuče pravá linija i na njoj obeleži dužina AB od 10 santimetara. Udesite šestar tako da mu razmak od šiljatog kraka do kraka u kome je pisaljka bude 8 santimetara. Stavite vrh šiljatog kraka u tačku A, pa drugim krakom opišite kružni luk čiji će poluprečnik biti 8 santimetara. Na isti način opišite kružni luk iz B poluprečnikom od 6 santimetara. Spojite tačku C u kojoj se seku ta dva luka sa A i B, pa ćete imati trougao koji ste želeli.

Nacrtajte trouglove sa stranama:

(b) 9 santimetara, 15 santimetara, 12 santimetara.

(c) 17 santimetara, 8 santimetara, 15 santimetara.

3. — U sva tri trougla izmerite ugao između dveju kraćih strana trouglovih.

4. — Misirski način za dobijanje pravog uglà još i sad se upotrebljava. Donji navod je iz broja 2 Glasnika Ministarstva poljoprivrede i ribolova (1935). To je deo uputstva za podizanje voćnjaka.

»Najprostiji način da se postavi prav ugao jeste ovaj: dvadesetčetvrta karika se pričvrsti u tački gde treba da se postavi prav ugao, karika na početku lanca (0) i devedesetšesta karika se pritvrde jedna uz drugu i zakucaju u zemlju van osnovne linije tako da deo lanca od početka do 24 karike bude zategnut. Ako se 56 karika postavi u željenom pravcu i oba cela lanca od 24 do 56 i od 56 do 96 se čvrsto zategnu, taj će pravac (24 do 56) biti pod pravim uglom s osnovnim pravcem (0 do 24)«.

Ako možete da nađete podesno mesto, pričvrstite na zemlji misirski konopčani trougao i ovaj maločas pomenuti zemljomerski trougao. Uverite se da se na oba načina dobija pravougli trougao.

5(a). — Nacrtajte prav ugao. Odmerite od temena dužinu od 5 santimetara na jednome kraku i od 12 santimetara na drugome kraku. Sastavite krajeve da načine trougao. Izmerite treću stranu.

(b). — Na isti način nacrtajte pravougli trougao sa stranama pravog ugla od 12 santimetara i od 16 santimetara, pa izmerite treću stranu.

(c). — Nacrtajte pravougli trougao sa stranama pravog ugla od 7 santimetara i 24 santimetra, pa izmerite treću stranu.

6. — Nacrtajte trougao sa jednom stranom od 2 santimetra i na svakom njenom kraju ugao od 30^0.

Nacrtajte trougao s jednom stranom od 3 santimetra i na svakom njenom kraju ugao od 30^0.

Nacrtajte trougao s jednom stranom od 4 santimetra i na svakom njenom kraju ugao od 30^0.

U sva tri trougla izmerite one druge dve strane.

7. — Nacrtajte tri trougla: jedan sa stranom od 2 santimetra, drugi sa stranom od 3 santimetra, treći od 4 santimetra a sa uglovima od 45^0 na krajevima tih strana.

8. — Nacrtajte tri trougla razne veličine, ali da kod svakoga budu po dve strane jednake, pa izmerite sve uglove.

9. — Pronađite koliki je zbir sva tri ugla u svima trouglovima koje ste nacrtali.

10. — Nacrtajte dva trougla ali da po obliku budu različiti od svih trouglova što ste ih dosad crtali. Izmerite uglove, pa i u jednom i u drugom saberite sva tri ugla.

OGLEDI NA TROUGLIMA

1. — Pogledajte opet pravougle trougle koje ste crtali u poslednjem odeljku pod brojevima 2 (a), (b), (c) i 5 *(a, b, c)*. U svakome od tih trouglova nazovimo najveću stranu c, srednju a, a najmanju b. Nađite a^2 b^2 i c^2 za svaki trougao, pa se uverite u svakome od tih slučajeva da su ova tvrđenja tačna:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

2. — Ako je u nekom pravouglom trouglu $c = 26$, $a = 24$, koliko je b?

Ako je $a = 24$, $b = 18$, koliko je c?

Ako je $c = 34$, $b = 16$, koliko je a?

3. — Ako su u nekom trouglu dva ugla po 45^0, koliki je treći ugao?

Ako su dva ugla po 30^0, koliki je treći ugao?

Ako je jedan ugao 30^0, drugi 60^0, koliki je treći ugao?

Ako je jedan ugao 75^0, drugi 15^0, koliki je treći ugao?

DA SE UPAMTI!

1. — Ako je u pravouglom trouglu c najveća strana, a b i a one druge dve strane, onda je:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

2. — U svakome trouglu, ako su uglovi A, B i C:

$$A + B + C = 180^0$$

GLAVA III

GRAMATIKA DIMENZIJA, REDA I BROJA

ili

Prevođenje na jezik brojeva

Kad se o matematici govori kao o jeziku dimenzija i o matematičkim pravilima kao o gramatičkim pravilima to je nešto više nego obična igra reči. Lakše ćemo razumeti matematiku ako zapazimo kako su u osnovi slični jezik kojim čovek opisuje razne v r s t e stvari u svetu i jezik kojim opisuje njihove razne d i m e n z i j e. U svim vidovima matematike ta je sličnost veoma velika. Ako vas zanima sklop jezika, videćete da nije šteta za ove stranice što smo ih u ovoj glavi posvetili bližem proučavanju sličnosti između matematike i jezika svakodnevnog života. Ako nalazite da je gramatika dosadna stvar, onda bolje da preskočite ove strane što sad dolaze, pa da se na njih vratite docnije, kad se za to pruži prilika.

Kad je govorio o raznim v r s t a m a stvari u svetu, primitivni čovek je najpre naučio da grubim slikama, mesto rečima, zabeleži povremene događaje i pojave, da bi mu to docnije koristilo. Malo pomalo te su slike počele služiti mesto predmeta pretstavljenih istom izgovorenom reči kao i naslikana stvar. Kinesko se pisanje, izgleda, razvilo uglavnom na toj osnovi. Ali što je vreme dalje odmicalo taj način pisanja pomoću slika postajao je sve nerazumljiviji. Kad su nepismeni narodi sa Zapada počeli da pišu, upotrebljavali su slikovne oznake svojih učitelja i osvajača, da takvim oznakama pretstave glasove. Pisanje je prestalo da ima slikovno značenje. Šta ima da znači saopštenje o nekom događaju moglo se poznati tek onda, kad je to saopštenje prevedeno na govorni jezik. Ova velika podela na dva načina pisanja: pisanja pomoću slika ili hijeroglifa i pisanja pomoću azbuke, tj. pisanja pomoću slova, ogleda se i u matematici. Matematička književnost počinje slikovnim ili hijeroglifskim jezikom koji mi zovemo g e o m e t r i j a. Tokom vremena geometrija se razvijala u pravcu koji potseća na razvoj kineskog jezika. Slike su prvobitno upotrebljavane kao pretstavnici oblika ili površine ili zapremine. One su upotrebljavane posle i kao grafički pretstavnici rešenja aritmetičkih problema. Tek mnogo docnije je čovek prestao da se služi isključivo slikama da zabeleži kako se ponašaju brojevi. On je počeo da upotrebljava slova, pa je sastavljao »rečnike« u kojima možete da nađete šta znače upotrebljene »reči«. Takvi se »rečnici« zovu *tablice*. Nema ničeg tajanstvenijeg u tome da se razume značenje izraza »sin 15°« od razumevanja značenja francuske reči »écoutille«[1]). Značenje za »sin 15°« nalazi se na taj način što se u tablicama prirodnih vrednosti sinusa pod 15° pogleda broj koji mu odgovara. Te su tablice veoma važan sastavni deo opreme svakog broda. U tablicama za »sin 15°« stoji broj 0,2588, kao što u francusko-srpskom rečniku kod »écoutille« stoji »otvor na krovu broda«. Istina to 0,2588 ne kazuje vam kako da upotrebite sin 15°. Ali i kad znate da »écoutille« znači »otvor na krovu broda« to vam ne kazuje kako da upotrebite reč »écoutille«, sem ako slučajno tačno znate koji je to deo na brodu. U obadva slučaja ako hoćete da znate kako da upotrebite onaj izraz ili onu reč, morate ipak donekle poznavati sastav broda.

Rečnički jezik, ili, kako ga matematičari zovu, »a n a l i z a« došao je docnije nego hijeroglifski jezik i postao je iz njega; ali on nikad nije doveo do toga da hijeroglifski jezik postane potpuno nepotreban. Čak ni u običnome jeziku mi nismo daleko odmakli od hijeroglifske metode. Kakva valjana karikatura vredi koliko i čitava knjiga političkog besedništva. Danas ima mnogo rečničkih jezika. Svaki ima svoju naročitu vrednost. Francuski je jezik naročito zgodan za ironične viceve. Engleski je jezik naročito zgodan da se na njemu zbiveno izraze naučne istine. Izvijugana razvučenost nemačkog načina izražavanja može da se upotrebi da se njime zalude pametni i poštovanja vredni ljudi te da poveruju da Hegelova dijalektika daje pamet i da narod napreduje kad goni Jevreje. Isto se tako razne vrste analize pod imenima kao što su »infinitezimalni račun«, »vektorska ana-

[1]) Otvor na krovu broda za vezu s njegovom unutrašnjošću i za vetrenje. — P r e v.

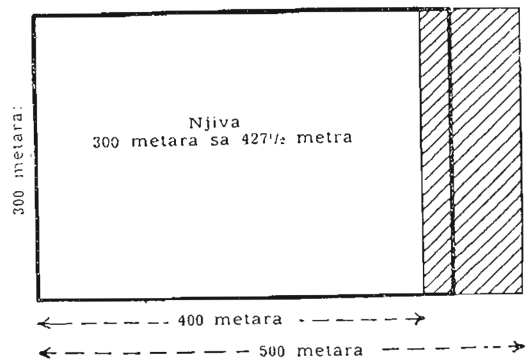
liza«, »algebra matrica« — često puta upotrebljavaju za razne vrste računanja i merenja stvari. Osnovna sličnost svih gramatika, bilo to gramatika v r s t e, ili gramatika d i m e n z i j a, vidi se po dvema osnovnim granama govora koje se nalaze u jezicima oba tipa. Jedna grana govora su i m e n i c e koje pretstavljaju stvari o kojima se govori u rečenici. Druga grana govora su g l a g o l i koji vam kazuju šta da radite sa stvarima ili šta te stvari rade.

Imenice. — Imenice iz matematičke gramatike zovu se b r o j e v i. Isto onako kao što možemo da razlikujemo razne vrste imenica koje zovemo osobne imenice, zajedničke imenice, apstraktne imenice, zbirne imenice, i razne vrste zamenica, ima i raznih načina na koje možemo podeliti brojeve u klase kao i imenice u običnom jeziku. Veoma je mnogo vremena prošlo dok je čovek uvideo na kakve se sve razne načine mogu upotrebiti brojevi. Mnoge teškoće koje se javljaju kad učimo kako se upotrebljavaju pravila matematičke gramatike potiču otuda što mi na samome početku ne shvatimo dva u osnovi različita načina na koje se brojevi upotrebljavaju.

Dokle god je čovek računao vreme u danima i merio vino vrčevima, nije ga mučilo što on nateruje iste reči da služe za dva bitno različita načina opisivanja dimenzija. Mi ta dva različita načina za upotrebu brojeva možemo nazvati: *brojanje* ili osobni brojevi i *procena* ili zajednički brojevi. Brojimo dinare, jabuke, tromesečne rokove plaćanja i stanovništvo. Procenjujemo visine, voltaže, površine, litre i pulsacije. Brojeve koji služe za merenje veličine jedne grupe možemo nazvati *osobni* brojevi, pošto postoji jedan jedini broj koji tačno opisuje veličinu jedne grupe. Ako kažete da livadom trče 15 ovaca, mislite da tu ima 15 ovaca, a ne 15,001 ili 14,999 ovaca. Broj 15 stoji mesto nečeg sasvim određenog, isto onako kao što osobno ime Milan B. Jovančević stoji mesto jedne potpuno određene ličnosti. Ako kažete da je vaša soba visoka 4 metra i 3 santimetra, sve što pod tim podrazumevate jeste to, da je na jednoj pantljici izdeljenoj na santimetre ta visina bliža podeoku kod 4 metra i 3 santimetra nego podeoku kod 4 metra i 2 santimetra, ili podeoku kod 4 metra i 4 santimetra. Ako želite da uzmete sitnije podeoke na pantljici, desete delove od santimetra, možete dobiti drugu procenu. Sa još sitnijim podeocima i vernieom mogli biste dati broj tačan do jednog stotog od santimetra. Mikroskop bakteriologa može da meri bez teškoća do jednog četirihiljaditog dela od milimetra. Spektroskop može da zapazi razlike do jednog stotrilionitog dela od santimetra (0,00000000000001 santimetra). Nema nikakva razloga da se pretpostavi da su naši današnji spektroskopi najtačniji instrumenti koje čovek uopšte može da pronađe. Razlike u procenama veličine jednog elektrona pokazane za poslednjih trideset godina mnogo su veće nego razlike između sadanjih procena zemljine veličine i procena od pre dve hiljade godina. Govoriti o astronomiji i fizici kao »egzaktnim« naukama znači u najmanju ruku pogrešno označavati stvari. Valjda je ta oznaka zato prodrla u javnost što pomaže filozofima idealistima da sa visine gledaju na postojanje biologije kao nauke koja se bavi nedostacima njihovih rođenih mozgova.

Nešto što mora biti jasno kad se govori o dimenzijama jedne sobe jeste ovo: broj koji se tada navodi samo je jedan broj od ogromno velike klase brojeva koji su blizu jedan drugome isto onako kao što zajednička imenica »ljudi« stoji mesto velikog broja stvorenja veoma sličnih jedno drugom, a među kojima se nalaze i Janko i Marko. Janko i Marko nas opominju da razlika između osobnih i zajedničkih imenica u običnoj gramatici nije ni blizu tako jasno povučena kao što to izgleda po školskim udžbenicima. U basni o velikom zlom vuku g. Vuk je osobna imenica. A kad mi kažemo da se tamo skupio i Janko i Marko, onda su to ustvari zajedničke imenice, jer na svetu ima mnogo Janka i mnogo Marka. Ostali tekst ima da nam kaže na koga se to Janka i na koga Marka naročito misli. Danas mi imamo više načina da pokažemo kad je broj upotrebljen kao zajednička imenica. Ako je najsitniji podelak na mojoj mernoj vrvci santimetar, tvrđenje da je moja soba visoka 40 desimetara i 3 santimetra ili 403 santimetra znači da je njena visina bliža podeoku 403 nego podeoku 402 ili 404, tj. ona leži između $402\frac{1}{2}\left(403 \text{ santimetra} - \frac{1}{2}\text{santimetra}\right)$ i $403\frac{1}{2}\text{santimetra}\left(403 \text{ santimetra} + \frac{1}{2}\text{santimetra}\right)$. Zbog toga se, kad kažemo da je soba visoka 403 santimetra, može mnogo tačnije izraziti ono što mislimo kad kažemo da je soba visoka $403 \pm \frac{1}{2}$ santimetra. Kad primenimo matematiku na stvarni svet, samo osobne imenice, ili celi brojevi, kao što je na primer 183, tačno

pretstavljaju veličinu grupa sačinjenih od posebnih jedinki, kao što je broj članova nekog sindikata, ili broj kuglica u glasačkoj kutiji. Za sve druge slučajeve, kad brojevi odgovaraju zajedničkim imenicama potrebni su nam brojevi koji se rastežu kao što su brojevi $183 \pm 0,5$. Inače se moramo osloniti na okolni tekst da bismo objasnili šta hoćemo da kažemo. Visina od »403 santimetra« merena vrvcom sa podeocima od jednog santimetra stvarno znači $403 \pm 0,5$ santimetara. Dvostruka upotreba brojeva za brojanje i za procenu stalno je stvarala nesporazum između praktičnog čoveka i matematičara. U narednim dvema glavama videćemo kako je to dovelo do prve krize u istoriji matematike. Praktičan čovek je naišao na teškoću kad je valjalo osposobiti cele brojeve za merenja koja su vršila nesavršena ljudska bića, sa svojim nesavršenim čulima, nesavršenim instrumentima u jednom nesavršenom i promenljivom svetu. On se onda zadovoljio time što je produžio da umeće nove podeoke na svojoj mernoj skali. Da je to bilo vrlo zgodno do izvesne mere možete se uveriti kad razgledate sl. 21. Pretpostavimo da se od četiri čoveka traži da izračunaju



Sl. 21.

površinu jedne pravougaonične njive široke 300 metara, dugačke $427\frac{1}{2}$ metara. Pretpostavićemo zasad, kao što praktičan čovek uvek pretpostavlja, da je zbilja mogućno da jedna njiva bude tačno 300 metara široka i $427\frac{1}{2}$ metara dugačka. Pretpostavimo i to da prvi ima vrvcu od 100 metara, drugi pantljiku od 10 metara, treći motku od 3 metra i četvrti lenjir od 1 metra. Nijedan od njih neće naići ni na kakvu teškoću dok meri širinu. Oni će moći ovako postaviti svoje mere: prvi tri puta, drugi 30 puta, treći 100 puta, četvrti 300 puta. Nevolja počinje s dužinom koja iznosi $427\frac{1}{2}$ metra. Prvi će naći da je dužina te njive veća od 4 njegove mere, a manja od 5 njegovih mera. Tako će on proceniti da je površina te njive između površine njive sa širinom od 300 metara i dužinom od 400 metara i njive široke 300 metara i dugačke 500 metara, tj. da je površina njegove njive između 300×400 ili 120 000 kvadratnih metara i 300×500 ili 150 000 kvadratnih metara (sl. 21). Drugi će naći da je ta njiva dugačka više od 42 puta njegova mera, a manje od 43 puta njegova mera. Njegova procena se nalazi između 420×300 i 430×300 kvadratnih metara.

Hajde da načinimo tablicu svih njihovih procena:

Mera	Donja granica u m²	Gornja granica u m²
100 metara	$300 \times 400 = 120\,000$	$300 \times 500 = 150\,000$
10 metara	$300 \times 420 = 126\,000$	$300 \times 430 = 129\,000$
3 metra	$300 \times 426 = 127\,800$	$300 \times 429 = 128\,700$
1 metar	$300 \times 427 = 128\,100$	$300 \times 428 = 128\,400$

Kad pogledate ove rezultate videćete da je gornja procena prvog grubog merenja za 30 000 kvadratnih metara (ili za 25 procenata) veća od donje procene koja iznosi 120 000 kvadratnih metara. Pri poslednjoj i najboljoj proceni gornja je procena veća za 300 kvadratnih metara od donje procene koja iznosi 128 100 kvadratnih metara. Gornja procena je veća od donje za $\frac{1}{427}$ njen deo, tj. manja je od $\frac{1}{4}$ procenta[1]). Da izrazimo to i drukčije:

prva je procena $135\,000 \pm 15\,000$ kvadratnih metara,

poslednja i najbolja procena je $128\,250 \pm 150$ kvadratnih metara.

[1]) $128\,100 : 427 = 300$
1% je $128\,100 : 100 = 1281$
$\frac{1}{4}\%$ je $1281 : 4 = 320{,}25$
300 je manje od 320,25. — Prev.

Ovaj nam primer daje istorisku sliku o tome kako je praktičan čovek rešio problem da osposobi broj za merenja. Mesto da pronađe »zemljišne« brojeve, on je nastavio da se služi »stadnim« brojevima unoseći sve sitnije i sitnije podeoke na svoje merilo. Ako nije mogao da tačno izmeri kilogramom brašno koje je merio, on je izdelio kilogram na hektograme[1]). Hiljade godina počev od doba kad je naučio da se služi računaljkom čovek je uvek postupao s razlomcima kao sa sitnijim delovima svoga merila. Čak i do pre trista godina matematičari su upotrebljavali stepene $\left(\frac{1}{60}\right)$, minute $\left(\frac{1}{3600}\right)$ i sekunde $\left(\frac{1}{216000}\right)$ da označe delove dužine, težine, pa čak i delove svote novaca, pošto je bilo teško zamisliti razlomak kao stvaran broj bez neke metaforične skale jasno izdeljene na podeoke. Stvaran je broj bio ceo broj kao što su brojevi: 2 ovce ili 5 krava.

Grci su pisali knjige o karakteru slika koje su misirski neimari i zemljomeri crtali na pesku i kojima su se rukovodili u svom radu. Ti su se Grci prvi pozabavili činjenicom da praktični ljudi upotrebljavaju broj na dva razna načina. Upoređujući slike koje su crtali pomoću dva veoma nesavršena instrumenta, šestara i lenjira, oni su brzo pronašli da ne mogu da pretstave dimenzije »ovčim« i »kravljim« brojevima, koji moraju da budu neparni ili parni, muški ili ženski kao ovce i goveda. Da im je bila drukčija društvena sredina, to bi mogao biti prvi korak da se planira racionalni jezik brojeva. Međutim to je dovelo do zastoja. Grčke matematičare nije finansiralo Ministarstvo vazduhoplovstva, kao što ono danas finansira aerodinamiku. Njihovo zapažanje nije imalo da dâ rezultate koji će se praktično upotrebiti. Mesto da gledaju kako da usavrše jezik brojeva, Grci su tražili savršenstvo po nebu. Oni su iz geometrije proterali broj i merne jedinice, pa su slavili matematiku kao sredstvo za duhovno usavršavanje. Matematika se tek onda osposobila da iskorači korak napred, kad su Aleksandrinci počeli da se bave merenjem, mesto da traže savršenstvo po nebu.

Istorija ove krize biće izneta malo docnije. Ovde ćemo spomenuti jednu majstoriju koja je samo još više zamrsila i onako već dovoljno zamršene stvari. Da bi izbegao nesavršenstva

[1]) Deseti deo kilograma. Teg od 100 grama (»deset deka«). — Prev.

grčkog jezika brojeva, Eudoks[1]) je uveo u proučavanje slika običaj koji potseća na trouglasta uprošćavanja koja su hipnotisala Hitite[2]) u godini 1953 pre n. e. i još zanose Hegelove sledbenike u godini 1953 posle n. e. Da ne bi morali upotrebiti jedinice kao što su »lakat« i »santimetar«, oni su govorili da veličina neke slike, linije ili ugla mora biti jedna od triju stvari. Ona je ili veća (>), ili manja (<) od neke druge slike, linije, odnosno ugla, ili »jednaka« (=) s drugom nekom slikom, linijom, odnosno uglom. Atinski intelektualci nisu ispitivali na koje se vrste stvari mogu primeniti te reči. Da su to zbilja bili uradili, oni bi videli da su ta, na izgled, savršenstva, i te, na izgled, tačnosti njihovih geometriskih dokaza samo uslovni.

Postoje tri načina da se izrazi veličina jedne grupe ili jednog predmeta. Prvi i najgrublji jeste utvrđivanje jedne jedine g r a n i c e. Na primer, ja znam da je »ukradeni bacil«[3]) manji od g. Velsa. Ne mogu golim okom da zapazim bacil, a mogu da vidim neki predmet koji je $\frac{1}{1000}$ deo veličine g. Velsa i tako mogu da kažem da je bacil manji od $\frac{1}{1000}$ dela veličine g. Velsa. Matematičkim jezikom rečeno: $b < \frac{W}{1000}$. Sem ako slučajno ne pamtim dimenzije vodonikovog atoma, ili veličinu molekula belanceta, ili granice vidljivosti kroz mikroskop, ne mogu da nađem nijednu količinu od koje je ukradeni bacil veći ($b > ?$). Obrnuto, znam da je rastojanje (S) od Sautporta do zvezde Siriusa veće od rastojanja (s) od Sautporta do Sirakuze. Ja čak znam da je to rastojanje više od hiljadu puta veće. Matematičkim jezikom: $S > 1000\,s$. Ako nemam pri ruci nikakvu astronomiju, nemam načina da navedem rastojanje nijedne zvezde koja je još dalje od Siriusa, tj. nijedno rastojanje od koga je manje rastojanje od Sautporta do Siriusa ($S < ?$). Tvrđenja koja sadrže samo jednu jedinu granicu javljaju se često u vezi merenja izvesnih predmeta. Ponekad se takva tvrđenja mogu postaviti i u vezi s grupama. Na primer, ja mogu znati da je broj krvnih zrnaca u čovečijem telu mnogo veći nego broj stanovnika u Londonu, ili da je broj buva u svetu veći nego broj ljudi u svetu, a ne mogu ni u jednome od ta dva slučaja da kažem neki broj kao gornju granicu.

[1]) Živeo od 409 do 356 godine pre n. e. — P r e v.

[2]) Narod koji je nekad živeo u Maloj Aziji. — P r e v.

[3]) Aluzija na Velsovu priču »Ukradeni bacil« koja je objavljena 1895 g. — P r e v.

Takva gruba tvrđenja pretstavljaju prvi korak u merenju. Za pravo merenje potrebno je postaviti dve granice. Mi smo to već prikazali kad smo govorili o visini neke sobe i o površini jedne njive. Jednu granicu pretstavlja broj jedinica koji je veći, a drugu granicu broj jedinica koji je manji nego što je broj jedinica koji smo uzeli kao srednju vrednost. Možemo i veličinu neke grupe opisati na taj način. Na primer, možda nam je rečeno da London ima 11 miliona stanovnika, a Liverpul 1 milion i da je broj stanovnika u Moskvi negde između ta dva broja. Mi onda možemo izraziti broj stanovnika u Moskvi većim i manjim brojem ovako 6 ± 5 miliona. Sve dok upotrebljavamo samo cele brojeve za obeležavanje jedinica za merenje, možemo da postavljamo samo takva tvrđenja kao što je ono maločas. Jedino nam ostaje da suzimo pojas neizvesnosti omeđen brojevima sa predznacima + i —.

Poredeći grupe možemo ponekad izneti i treću vrstu tvrđenja. Ako svaka kokoška u nekom kokošinjcu snese 4 jajeta nedeljno, broj (n) kokošijih jaja koja su snesena za nedelju dana tačno je četiri puta veći od broja (N) kokošaka u tome kokošinjcu. Na matematičkom jeziku ova rečenica glasi:

$$n = 4N$$

Važno je da se kod ove rečenice zapazi da je ona sasvim tačna tada, (i samo tada!) kada se odnosi na veličinu neke grupe zasebnih stvari, ili na način (red) na koji su poređane te stvari u grupi, kao što su kokoši svaka za sebe i jaje svako za sebe. Kad govorimo o dimenzijama neke stvari koju možemo nacrtati na pesku ili izraditi od voska kao neku figuru iz Euklidove geometrije, tada nema mesta potpunoj jednakosti. Ako je geometriska duž zbilja nešto što može da zameni visinu nekog kamenog zida, a geometriski pravougaonik nešto što može da zameni neku pravougaoničnu njivu, najbolje što možemo reći o jednom i o drugome jeste to, da su manji ili veći nego toliko puta druga neka duž odnosno drugi neki pravougaonik. Na primer, ako su one skoro iste veličine, mogu reći da je jedna linija manja nego 1,001 puta druga linija, a veća nego 0,999 puta druga linija.

Jedna od velikih kulturnih tekovina našega veka jeste u tome, što imamo razlomke koji se rastežu kao i razlomke koji se ne rastežu. Razlomak koji se ne razteže, kao $\frac{2}{3}$, potpuno je dovoljan da prikaže odnos jedne grupe jedinki ili predmeta prema drugoj. Ako pri nekom glasanju listićima ima 300 glasača, pa njih 100 pogrešno popune listiće, broj ispravnih listića biće $\frac{2}{3}$ broja glasača. Ako je jedan zid dugačak 6 metara, pa su tapetirana samo 4 metra, ne možemo reći da su tapetirane $\frac{2}{3}$ zida tačno u istom smislu kao gore. Naše izmerene dužine od 6 metara i od 4 metra, kao i sva merenja, netačne su do izvesne mere. To se lako da izraziti u zbivenome obliku kad se upotrebi decimalni razlomak $0{,}\dot{6}$. Taj razlomak $0{,}\dot{6}$ znači:

$$0{,}\dot{6} > \frac{6}{10} \qquad 0{,}\dot{6} < \frac{7}{10}$$
$$0{,}\dot{6} > \frac{66}{100} \qquad 0{,}\dot{6} < \frac{67}{100}$$
$$0{,}\dot{6} > \frac{666}{1000} \qquad 0{,}\dot{6} < \frac{667}{1000}$$
$$0{,}\dot{6} > \frac{6666}{10000} \qquad 0{,}\dot{6} < \frac{6667}{10000}$$
$$0{,}\dot{6} > \frac{66666}{100000} \qquad 0{,}\dot{6} < \frac{66667}{100000} \text{ itd.}$$

Kad upotrebimo desetni razlomak $0{,}\dot{6}$ možemo prekinuti gde god hoćemo prema tačnosti koju mogu da pokažu naši instrumenti. Ako je naša greška pri merenju 1 na 100, nema smisla nastaviti dodavanje šestica posle 0,66. Pošto 0,67 premaša $\frac{2}{3}$ za $\frac{1}{300}$ što pretstavlja jedan dvestotiniti deo od $\frac{2}{3}$[1]), a $\frac{2}{3}$

[1]) $0{,}67-\frac{2}{3}=\frac{67}{100}-\frac{2}{3}=\frac{201}{300}-\frac{200}{300}=\frac{1}{300}$

$\frac{1}{100}$ od $\frac{2}{3}$ je $\frac{2}{300}$

$\frac{1}{200}$ od $\frac{2}{3}$ je $\frac{2}{300}:2=\frac{1}{300}$. — Prev.

premaša 0,66 za $\frac{1}{150}$ što pretstavlja[1]) jedan stoti deo od $\frac{2}{3}$. i 0,66 i 0,67 odgovaraju razlomku $\frac{2}{3}$ kad on pretstavlja rezultat merenja izvršenog pomoću skale koja dozvoljava grešku 1 od sto. Desetni razlomak nam omogućuje da izrazimo tačno koliko znamo i koliko ne znamo. Ima svega jedan vek kako su decimalni razlomci u opštoj upotrebi. Za ovaj deo našeg društveno-kulturnog nasleđa imamo da zahvalimo Narodnoj skupštini Francuske Revolucije. Do pre tako oko pet stotina godina praktičan čovek nije imao na raspoloženju ovakav jednostavan način da izrazi koliko li se njegova zapažanja razlikuju od zapažanja drugog nekog praktičnog čoveka.

I tako možemo da učinimo da se desetni razlomak $0{,}\dot{6}$ približi razlomku $\frac{2}{3}$ koliko god hoćemo time što ćemo dopisivati šestice dok nam se ne dosadi. Kad se naviknemo da teramo dokle nam je volja, nije nam teško uvideti da ima mnogo brojeva za koje ne možemo da nađemo prost odnos dva muška broja ili odnos jednog ženskog i jednog muškog broja kao kod $\frac{2}{3}$. Desetni razlomak $0{,}\dot{6}$ može da se napiše brojnim oznakama pošto se on prosto sastoji iz decimalnog niza šestica. Kad bi se on sastojao od brojeva koji se ne ređaju ni po kakvom pravilu, morali bismo mu pronaći neku drugu oznaku da obeležimo njegovo brojno ime. U modernoj matematici, kao i običnom govoru, postoje zamenice. Najvažnije su zamenice π i e o kojima ćemo docnije čuti malo više. Prvi je broj odnos između kružnog obima i prečnika. Upotrebljavamo grčko slovo π (izgovara se pi) pošto tačna vrednost koju dajemo zavisi od svrhe za koju upotrebljavamo taj broj. Ako hoćemo da izradimo osnovu jednog valjka s greškom do, recimo, 1 od sto, sasvim je dovoljno da uzmemo da π iznosi 3,14. Ako želimo da izradimo osnovu jednog valjka s greškom manjom od 1 od 10 000, tj. $\left(\frac{1}{10000}\right)$

[1]) $\frac{2}{3}-\frac{66}{100}=\frac{200}{300}-\frac{198}{300}=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$

$\frac{1}{100}$ od $\frac{2}{3}$ je $\frac{2}{3}:100=\frac{2}{300}=\frac{1}{150}$. — Prev.

dovoljno je da π iznosi 3,1416. Koliko ćemo pustiti rep razlomku zavisi od toga da li crtamo točak rimskih kočija, klip na nekoj zastareloj lokomotivi ili moderni avionski motor. Kao i $0,\dot{6}$ tako i π je zbilja jedna porodica brojeva koji su svi veoma bliski jedan drugome. Upotrebljavamo zamenicu π pošto nema zgodnog načina da porodičnu sličnost izrazimo zajedničkom imenicom iz jezika brojeva.

U matematici se pismena obično upotrebljavaju mesto imena samo na malo drukčiji način. Uz vlastite imenice i zajedničke imenice, u gramatikama se pravi razlika između misaone imenice kao što je »pravda« i zbirne imenice »lišće«. Ovo razlikovanje je dovelo do zagušivanja intelektualnog prometa mesto da se to zagušivanje otkloni. I zbilja, jedna od najvećih kulturnih revolucija u ljudskoj istoriji nastupila je kad je zapaženo da je gramatičareva mislena imenica prava svaštareva vreća. Ponekad se ne može razlikovati od zbirne imenice. Idealistički filozof Platon je mislenim imenicama, kao što je »pravda«, pripisivao posebno postojanje koje je nezavisno od društvenih prilika naroda koji izvestan društveni postupak označava pravičnim ili nepravičnim. Platonova čudna shvatanja o tim rečima u tesnoj su vezi s njegovim shvatanjima o brojevima. Oba su shvatanja odletela u njegovo nebo univerzalija[1]) za koje su teolozi skolastici držali da je isto tako određen prostor kao što je i sam pakao. Moderna nauka počinje kad su ljudi kao Rodžer Bekn i Fransis Bekn odbacili svet »univerzalija« i legli na posao da nateraju reči da opisuju čvrsto tle ljudskog iskustva. U matematici nam nije potrebno da povlačimo razliku između misaonih i zbirnih imenica, pošto je m a t e m a t i k a j e z i k a k c i j e. Pismena naše azbuke koja se upotrebljavaju za označavanje čitave porodice brojeva kojima je svima zajedničko nešto što je tačno definisano, odgovaraju onome što mi zovemo zajedničke imenice i boljoj vrsti mislenih imenica. U običnom govoru vrednost takvih imenica je u tome, što se pomoću njih štedi vreme i prostor. Isto to važi i u jeziku dimenzija. Kao primer uzmimo ova tri načina da izrazimo jedno isto pravilo.

(1) »Površina jednog pravougaoničnog poda u kvadratnim jedinicama (na pr. kvadratnim metrima) nalazi se kad se pomnoži dužina širinom izraženom istim jedinicama (ovde su to metri)«.

[1]) Svet opštih pojmova. — P r e v.

To se može napisati mnogo kraće ovako:

(2) Površina = dužina × širina.

Tome se može dati još sažetiji oblik:

(3) $$p = ah$$

Kad upotrebimo pismena p, a, h ona nam pokazuju kako ćemo naći površinu poda soba raznih dužina i širina tako da ne moramo pisati pravilo ponovo za svaku drukčiju sobu, a kad napišemo h uz a to znači da treba pomnožiti a sa h. Kad upotrebimo neki misleni ili zbirni broj, kao što je na primer n, da stoji mesto izvesnog broja pojedinačnih stvari o kojima govorimo, isto onako kao što mislena imenica »boja« stoji mesto reči crveno, plavo, zeleno itd., to nam daje ne samo mogućnost da sažeto izrazimo neko pravilo, već i da p r o n a đ e m o pravila za računanje. Na slici 22 dat je primer jednostavnog pravila te vrste.

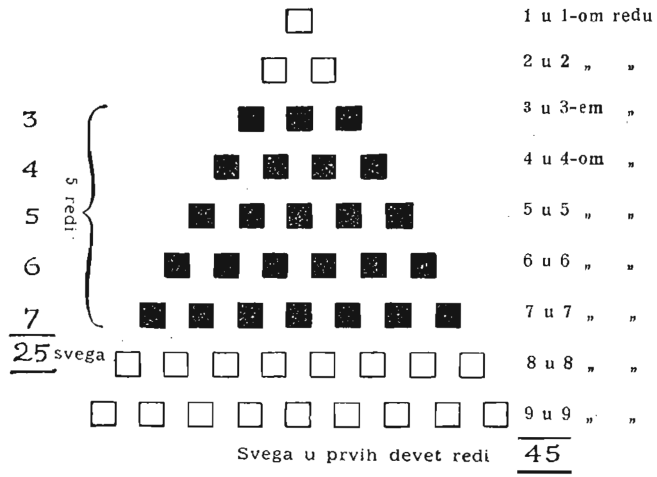
Pretpostavimo da je izvestan broj stolica poređan u redove tako da svaki red ima jednu stolicu više nego prethodni, a jednu stolicu manje nego naredni red. Ako hoćemo da znamo koliko stolica tu ima svega, ili da upotrebimo reč koja se obično primenjuje kod sabiranja, ako hoćemo da znamo z b i r svih stolica, nije nam potrebno da se mučimo da brojimo jednu po jednu. Možemo naći zbir po jednostavnom pravilu koje se primenjuje kod sabiranja čitave jedne porodice nizova brojeva kao što su brojevi stolica u svakom redu. Ako prvi red ima jednu stolicu, dvanaesti red imaće dvanaest stolica i zbir svih stolica u prvih dvanaest redi biće:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

Možemo ove brojeve i ovako poređati:

$$(1 + 12) + (2 + 11) + (3 + 10) + (4 + 9) + (5 + 8) + (6 + 7).$$

Zbir svakog ovog para je 13, a ima svega šest parova, što iznosi svega 6 puta 13, tj. 78. Hajde sad da napišemo ovo što smo uradili, a da ne upotrebimo posebne brojeve. Imali smo da saberemo izvestan broj brojeva. Neka ih je n. Mi smo ih poređali u parovima i načinili parova pola od onoga koliko iznosi n, tj. $\frac{1}{2}n$ parova. Zbir svakog para iznosio je koliko par početnog i krajnjeg broja, tj. zbir svakog para iznosio je, kratko rečeno, $(p + k)$; pošto je svega $\frac{1}{2}n$ parova, celokupan zbir iznosi $\frac{1}{2}n \times (p + k)$. Odmah sad možete sabrati prvih dvadeset i prvih trideset brojeva, pa ćete videti kako dobijate isti rezultat



Broj redi (n) = 9
Broj u prvom redu (p) = 1
Broj u devetom (krajnjem) redu (k) = 9

$$\text{Zbir} = \frac{1}{2} \cdot n\,(p+k) = \frac{1}{2} \cdot 9\,(1+9) = 45$$

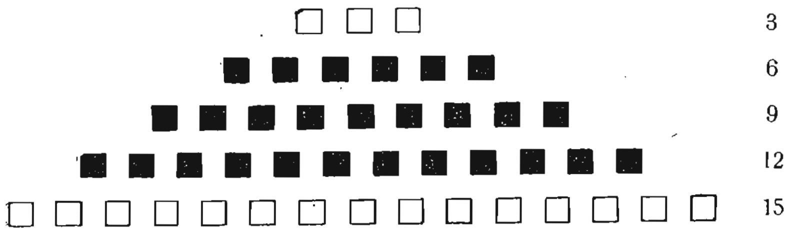
SL. 22. — ZBIR PRVIH DEVET BROJEVA

Naš obrazac isto tako važi i za izračunavanje broja stolica od trećeg do sedmog reda zaključno. U ovome slučaju broj redi (n) je 5, prvi broj (p) je 3, a krajnji broj (k) je 7. Otuda je zbir

$$\frac{1}{2} \cdot 5\,(3+7) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$

mnogo brže kad upotrebite prosto pravilo koje smo sad izveli. Na primer, ako saberete svih prvih trideset brojeva (1 do 30) naći ćete da je zbir 465. Ima 30 brojeva $(n = 30)$, prvi je 1, a krajnji 30. Po našem pravilu, zbir mora da bude $\frac{1}{2} \cdot 30(1+30) = 15 \cdot 31 = 465$

Naredna stvar koju treba zapaziti jeste ova: izvedeno pravilo važi bilo da počnemo od prvog reda stolica, bilo od ma koga drugoga. Na primer, neka smo počeli s trećim redom (u kome su 3 stolice), pa išli do dvanaestoga. U tome bi slučaju bilo deset redi, tj. deset brojeva da se saberu $(n = 10)$, od kojih prvi (p) iznosi $3 (p = 3)$, a krajnji (k) iznosi $12 (k = 12)$. Zbir će biti $\frac{1}{2} \cdot 10(3 + 12) = 75$. To je za 3 manje od 78, što je očevidno tačno, pošto smo izostavili bili jednu stolicu iz prvog reda i dve stolice iz drugog reda. Ili isprobajte pravilo ovako. Zbir brojeva od 1 do 30 (sve stolice u prvih trideset redi) jeste zbir brojeva



Broj redova (n) = 5
Prvi broj (p) = 3
Krajnji broj (k) = 15

$$\text{Zbir} = \frac{1}{2} \cdot n\,(p+k) = \frac{1}{2} \cdot 5\,(3+15) = \frac{1}{2}\,(5 \times 18) = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45$$

SL. 23. — ZBIR NIZA 3, 6, 9, 12, 15

NAPOMENE. — (1) Obrazac važi zbog toga što se ovi brojevi mogu poređati u niz koji uvek raste ili opada za isti broj (3). (2) Obrazac vam uštedjuje trud, jer ako znate da niz ovako raste ne morate brojati stolice po redovima sem u prvome i u krajnjem.

od 1 do 12 (tj. 78) i osamnaest narednih brojeva od 13. do 30. Zbir prvih dvanaest brojeva je 78; zbir narednih osamnaest brojeva treba da bude $\frac{1}{2} \cdot 18\,(13+30) = 9 \cdot 43 = 387$, a 387 sabrano sa 78 daje 465, što smo već dobili neposrednim sabiranjem.

Druga stvar koju treba zapaziti jeste ova: ovo pravilo koje nam uštedjuje mučni trud oko sabiranja važi i za druge nizove, a ne samo za niz u kome brojevi rastu sve za 1. Uzmimo na primer niz brojeva:

7 12 17 22 27 32

Možemo ih sabrati po parovima ovako:

$$(7 + 32) + (12 + 27) + (17 + 22)$$

Svaki od ova tri para iznosi koliko i zbir prvog (7) i krajnjeg (32), tj. 39 i zato je zbir svih šest brojeva $\frac{1}{2} \cdot 6(7 + 32) = 3 \times 39 = 117$. Možemo ih poređati u ovakve parove zato što se svaki broj razlikuje od svoga prethodnog za isti iznos[1]). Zato je zbir drugog i pretposlednjeg, trećeg i pretpretposlednjeg itd. isti kao i zbir prvog i poslednjeg. Zbog toga naše pravilo važi za sve nizove brojeva podešene tako da razlika između drugog i prvog bude ista kao i razlika između trećeg i drugog, četvrtog i trećeg itd. U početku može da vas buni što ovo pravilo važi i za one nizove brojeva gde je n neparan broj. Neće vam biti teško da uočite zašto je to tako, ako zapazite da je srednji član u ovakvom nizu uvek jednak polovini zbira prvog i poslednjeg člana[2]). Zato, ako poređate prvih trinaest brojeva $1 + 2 + 3 + \ldots + 11 + 12 + 13 +$ po parovima, dobijate:

$$(1 + 13) + (2 + 12) + (3 + 11) + (4 + 10) + (5 + 9) + (6 + 8) + 7.$$

Međutim, 7 je poluzbir prvog i poslednjeg člana $(1 + 13)$. I tako ima $6\frac{1}{2}$ parova po $(1 + 13)$. I ovde važi pravilo koje smo primenili kad je n bio paran broj. Zbir prvih 13 brojeva je $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot (1 + 13) = 91$, što iznosi za 13 više od 78, tj. za 13 više od zbira 12 brojeva.

G l a g o l i. — Kad upotrebljavamo mislene ili zbirne brojeve (tj. slova) da njima izrazimo matematička pravila kao u poslednjem primeru, množenje obično označavamo na taj način, što brojeve koji treba da se pomnože stavimo jedne pored drugih. Kad hoćemo da pokažemo da se zbir brojeva ima da pomnoži nekim brojem, mi taj zbir stavljamo u zagradu. Na primer, brojna rečenica $a(b + c)$ znači da je a pomnoženo zbirom

---

[1]) $12 - 7 = 5$, $17 - 12 = 5$, $22 - 17 = 5$ itd. — P r e v.

[2]) $3 + 8 + 13 + 18 + 23$. Srednji je član 13. I zbilja je $13 = \frac{1}{2} \times (3 + 23) = \frac{1}{2} \cdot 26 = 13$. — P r e v.

koji se dobija kad se saberu b i c. I tako $3(5 + 2)$ znači 21, tj. 3×7. To nije isto što i $ab + c$. Ako upotrebimo iste brojeve kao maločas, poslednje tvrđenje bi značilo $(3 \times 5) + 2 = 15 + 2 = 17$. Moramo da upotrebimo opširniji oblik 3×5 kad označavamo množenje posebnih brojeva, pošto je zbijeniji oblik već upotrebljen za nešto sasvim drugo. Na primer, 35 znači trideset i pet, a ne petnaest, a $2\frac{1}{2}$ ne znači $\frac{1}{2}$ od 2. Sad ćemo malo bolje da zagledamo značenje znakova »$\times$« i »$+$«, ili stavljanje brojeva jedan uz drugi, kao što su h i a u obrascu za površinu. Možda je bolje da se to pravilo napiše u nešto poznatijem obliku:

$$a \times h = p$$

Videli smo šta ovo tvrđenje znači kao rečenica izražena govornim jezikom. Ovako kako je ovde napisano ono pretstavlja jednu matematičku rečenicu. Rečenice se u matematici zovu j e d n a č i n e. Jednačina nije ništa drugo do jedna potpuna rečenica na matematičkom jeziku. Kao što znamo, rečenica mora da ima glagol; glagol nam kazuje šta radi imenica. Mi smo već videli da su h, a i p imenice. Znači »$\times$« i »$+$« su matematički glagoli. Pošto je matematika praktičan a ne sentimentalan govor, matematičke rečenice, tj. jednačine, imaju jednu naročitu osobinu. One uvek imaju glagol »dobiti« (u sadašnjem vremenu — »dobija se«), što se matematičkom azbukom piše ovako: $=$. Sami pak matematičari ne zovu znake $\times$ i $+$ glagolima, već »operatorima«. Potpun prevod matematičke rečenice

$$a \times h = p$$

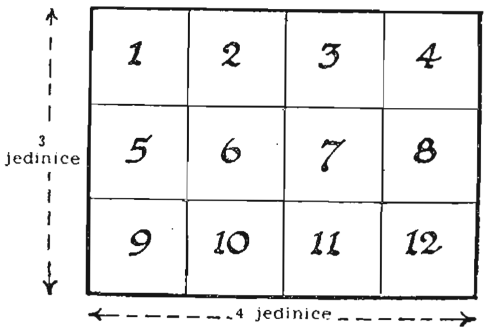
glasio bi ovako:

»Dužina (a) m o r a b i t i p o m n o ž e n a š i r i n o m (h), d a s e d o b i j e p o v r š i n a (p)«.

Sad nam nije teško uvideti da je ono što matematičari zovu operatorima tačno isto što i glagoli u gramatici. Čim shvatite tu vezu, jednačina neće biti ništa tajanstveno za vas. Uverićemo se da li mi to dobro razumemo. Jednu istu stvar reći ćemo na dva načina, u dva stupca.

Tvrđenje rečima (retorska algebra)	*Matematička jednačina* (simbolička algebra)
dužina	a
mora biti pomnožena	$\times$
širinom	h
da se dobije	$=$
površina	p

Sad nam je to jasno i možemo da pristupimo ispitivanju glagola ili operatora »×«. To ćemo da učinimo najjasnije ako uzmemo rečenicu koja opisuje sobu 3 metra sa 4 metra i sa površinom od 12 kvadratnih metara. Ta se rečenica može prevesti na dva razna načina. Prvi je način hijeroglifska ili crtačka metoda koja se u matematici zove g e o m e t r i j a. Ta se metoda sastoji u tome da se nacrta pod u izvesnoj razmeri, recimo 3 santimetra i 4 santimetra, da se dužina i širina izdele na santimetre, da se nacrtaju po celoj slici kvadratni santimetri, pa da se oni prebroje kao na sl. 24. Naći ćete da ih ima 12. Drugi je



SL. 24. — HIJEROGLIFSKO MNOŽENJE
Na jeziku slika u geometriji možemo pretstaviti operator (ili matematički glagol) »×« »puta« u matematičkoj rečenici 3 × 4 = 12 uputstvom »*načini pravougaonik* od 3 dužinske jedinice i 4 dužinske jedinice, pa *prebroj* kvadrate«.

način pak taj da se čovek prosto seti da mu stoji na raspoloženju tablica množenja i da mu ona kazuje da 3 puta 4 ili 4 puta 3 iznosi 12. To je rečenički jezik ili, kako to matematičari kažu »analiza«. Tablica množenja je rečnik. Pre četiri stotine godina niko nije učio tablicu množenja dalje od 2. Dok nisu došle škole da zadovolje potrebe trgovačke klase čiji je opstanak zavi-

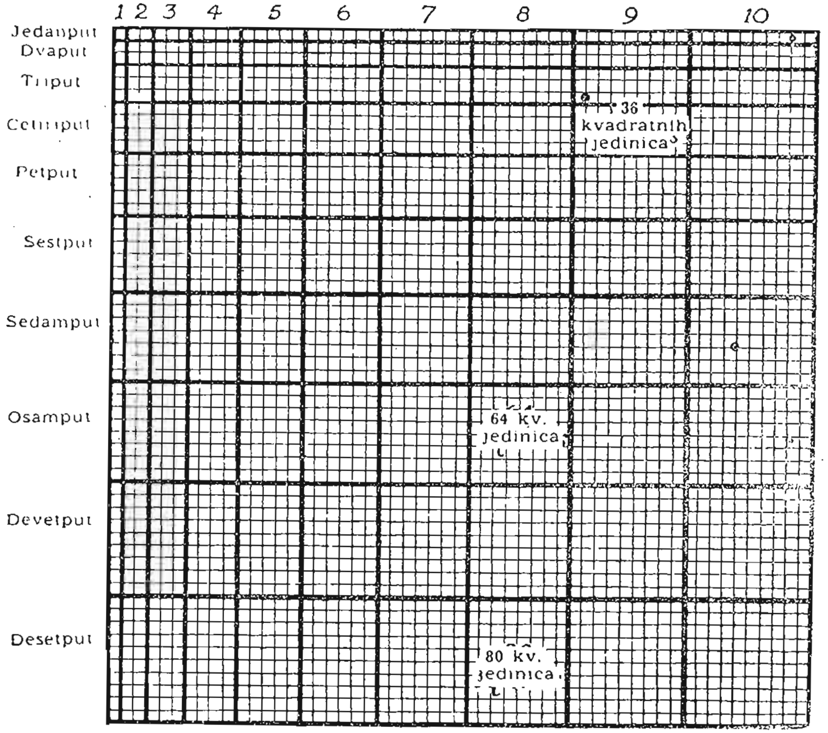
sio od veštine računanja tablica množenja je bila pomoćno obaveštajno sredstvo kao i rečnik (sl. 25). Crtanje slike u razmeri može vam izgledati kao veoma zaobilazna metoda. To je samo zato što je tablica množenja jedan deo vašeg društveno-kulturnog nasleđa. Hijeroglif »×« koji znači »nacrtaj srazmerni pravougaonik, pa prebroj kvadratne jedinice« jeste prevod glagola »pomnožiti« na stariji matematički jezik, isto onako kao što su i hijeroglifi stariji od azbuke. Tek docnije je društvo steklo rečničku metodu za prevođenje znaka »×« koji znači isto kao da je rečeno »seti se ili pogledaj tu i tu vrstu i taj i taj stubac u tablici množenja«.

Ovaj prost primer otkriva važnu činjenicu iz istorije matematike. Napredak u matematici zavisio je veoma mnogo od toga da se pronađu načini rada s brojevima koji bi bili više društveni, a manje individualistički (sl. 25). Ako se poslužite hijeroglifskim ili geometriskim prevodom znaka »×« moraćete uvek da uradite nešto iznova, kad vam zatreba da izračunate koliko vam je potrebno linoleuma da se pokrije pod neke sobe. Kad se poslužite rečničkim jezikom, vi se ustvari koristite pogodnošću koju vam pruža jedna društveno-kulturna tekovina u vidu izvesnog niza brojeva koji su ispisani jednom za svagda.

I u običnom govoru jedna ista reč može da ima razne uloge. U rečenici »Potrebno je jesti«, glagol jesti igra ulogu imenice; u rečenici »moramo jesti da bismo živeli« ta ista reč igra ulogu glagola. Na žalost i kod matematičara postoji ista loša navika. Kad oni napišu 10^2, što znači 10×10 (ili dve desetice međusobno pomnožene), 10 je broj, a 2 gore desno je uputstvo za rad, a to znači 2 je operator. Kad napišu 2^{10}, što znači $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ili deset dvojaka međusobno pomnoženih), 10 napisano gore desno je operator, a 2 je broj. Takvi nedostaci u matematičkom jeziku nisu tako strašni kao odgovarajuće greške u običnom govoru, pošto mi označavamo da se 2 ili 10 imaju upotrebiti kao operatori na taj način, što ga stavimo na jedno neobično mesto, a štampamo ga sitnijim slogom, ili ga pišemo sitnije. Isto se to radi sa mislenim (apstraktnim) ili zbirnim brojevima. Tvrđenje:

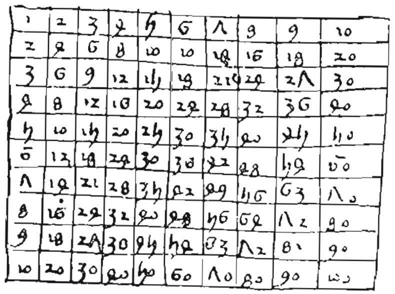
$$a^n = a \times a \times a \times a \ldots\ldots \text{ do } n \text{ članova}$$

(ili n a-ova pomnoženih međusobno) jeste tvrđenje koje nam kaže šta se od nas očekuje da uradimo kad je neki broj stav-



TABLICA MNOŽENJA ZA POSEBNE SLUČAJEVE

(Uvek kad se njom služite imate da računate površinu nekog pravougaonika).



SOCIJALIZIRANA TABLICA MNOŽENJA

ljen gore desno. U ovoj jednačini *n* je operator, a *a* je broj. Isti recept mogao bi se izraziti ako se stavi:

$$n^a = n \times n \times n \times n \ldots\ldots \text{ (a puta)}$$

ili n^a = *a* enova pomnoženih međusobno.
U ovom poslednjem slučaju *n* je broj, a *a* je operator. Ova druga rečenica takođe vam kazuje šta da radite kad je neki broj napisan gore desno.

Rečenički jezik može da izrazi mnogo štošta što se nikad ne bi moglo izraziti samo hijeroglifima. Isto tako brojni jezik može da izrazi uputstva koja se ne mogu uvek izraziti slikovnim jezikom. To možete odmah videti kad ispitate šta znače 10^2, 10^3, 10^4 kao u ovoj tablici:

Operator	*Grčki jezik slika*	*Indiski rečnički jezik*
2	Naći površinu kvadrata sa stranom 10 tj. (100 kvadratnih jedinica).	Pomnoži 10 sa 10 (dve desetice međusobno pomnožene) = 100.
3	Nađi zapreminu kocke sa ivicom 10. (=1000 kubnih jedinica).	Pomnoži 10 sa 10 sa 10. (tri desetice pomnožene međusobno) = 1000.
4	Nema značenja.	Pomnoži 10 sa 10 sa 10 sa 10 (četiri desetice međusobno pomnožene) = 10 000.

Rečenica (ili »izraz«) kao što je 7^3 daje nam još jedan primer o tome kako je matematički glagol socijaliziran. Operator 3 napisan gore desno može da izrazi jedan od ova tri zahteva:

a) Naći zapreminu kocke čija je ivica duga 7 santimetara.
b) Izmnožiti međusobno tri sedmice.
c) U tablici »kubova« traži pod 7.

Iz jedne veoma davnašnje knjige o aritmetici u kojoj su upotrebljene arapske cifre (prepis iz Holivudova *Algorizma* iz petnaestog veka).

Sl. 25.

U socijaliziranoj tablici množenja površina se svakog pravougaonika vidi odmah u broju koji odgovara vertikalno jednoj strani i horizontalno drugoj strani. Broj kvadratnih jedinica izračunat je jednom za svagda. Sve što imate da uradite to je da pročitate rezultat i da ga naučite. U petnaestom veku ljudi nisu to učili, oni su se služili tablicom kao što se danas savremeni matematičar služi logaritamskim tablicama.

U desetoj glavi naći ćemo drugo jedno značenje mnogo više kolektivizirano nego što je ovde značenje pod c). Ono će biti izraženo rečenicom sa četiri glagola:

$$7^3 = \text{antilog } (3 \log 7).$$

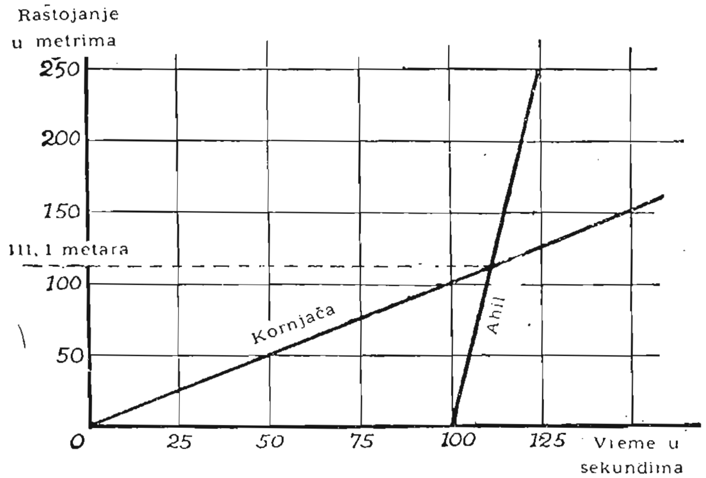
A ovo znači: »T r a ž i pod 7 u logaritamskim tablicama, to što nađeš p o m n o ž i sa 3, pa taj rezultat traži u tablicama antilogaritama, da dobiješ 7^3«. Ako je u pitanju 7^3, nećete uštedeti mnogo vremena tražeći po dvema tablicama, ali ćete uštedeti mnogo vremena ako želite da saznate koliko je 777^3.

Videli smo da slovo, kao na primer »x«, u nekom »izrazu« (ili u nekoj rečenici) kao što je 10^x nije zbirna ili mislena imenica. Ono je glagol koji sadrži značenja mnogih drugih glagola. Ono stoji mesto posebnih glagola kao što su 2 i 5 u izrazima 10^2 i 10^5. I u običnom govoru se upotrebljavaju zbirni i apstraktni glagoli. Kad kažem »otseo sam u hotelu«, time uopšte mislim da kažem da tamo s p a v a m, p e r e m s e, o b l a č i m s e, o b e d u j e m i p l a ć a m račun krajem svake nedelje.

Mogu da idem i u još opštije apstrakcije. Matematičari rade to isto. Ako kažem da hoću da provedem neko vreme u Beogradu, mislim, između ostaloga, da uzmem kartu kod turističke agencije, da spakujem kofere, da uzmem parobrod, da o t s e d n e m (sa svim onim što to sadrži u sebi) u Beogradu. Sad još nije potrebno da navodimo odgovarajući primer za te više apstrakcije na matematičkom jeziku. Naići ćemo na njih docnije.

Kad teramo ovu stvar predaleko uvek postoji opasnost da se izgubimo u lavirintu oznaka. Matematičar onda radi ono što radi pametan urednik. On osvetljava diskusiju time što unosi sliku. Vraća se svojim hijeroglifima, geometriji, kad god može. »Vraća se« nije baš najzgodniji izraz, pošto su novi hijeroglifi, kao što su »grafici«, pronađeni da (poput poslovnih oglasa) živo pretstave računske radnje koje se ne bi mogle izraziti starijim vrstama hijeroglifa. Slika 26 pokazuje kako je geometrija iz doba Reformacije mogla jasno da nam naslika Ahilovo utrkivanje s kornjačom. Euklidova geometrija to nije mogla. Ona je prenebregla *vreme*. Računska radnja x^2 — dizanje iksa na kvadrat — može se pretstaviti u grčkoj geometriji koja međutim nije mogla da načini dijagram ili model za x^5. Kad budemo došli do geometrije iz doba Reformacije (u devetoj glavi) videćemo da je isto tako lako nacrtati grafik izraza x^5 kao i izraza x^2.

Ova težnja jezika brojeva da se vrati na čvrsto tlo slika i modela čim se pojavi sumnja, igrala je veliku ulogu u izgrađivanju pravila za ono što matematičari zovu d o k a z. U izvesnom smislu naučni dokaz je gotovo u istome odnosu prema



SL. 26. — TRKANJE AHILOVO S KORNJAČOM

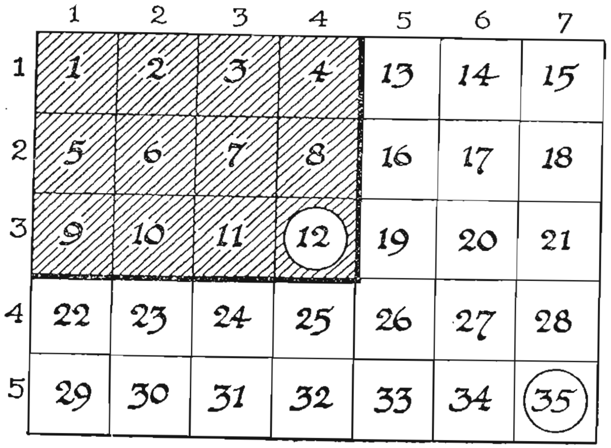
Grčka geometrija, kao ni grčki jezik brojeva, nisu mogli da izađu na kraj sa Zenonovom kornjačom. To je došlo otuda što je grčka geometrija uzela *prostor* od neimara hramova i zemljomera — poreznika, a vreme prepustila sveštenicima koji su pravili kalendare. Reformacija koja je uklonila dane svetaca pojavila se nekako u ono doba kad su se trgovci bogatili od velikih prekookeanskih plovidbi. Velika prekookeanska putovanja postala su mogućna kad je izrađena karta sveta sa geografskim širinama i dužinama. Nova geometrija Reformacije osnivala se na metodi mapâ. Ona je uvela vreme u geometriju. Zato vam ona može odmah reći kad je Ahil prestigao kornjaču. Ovo će biti objašnjeno u IX glavi.

pronalasku kao što je umetnička kritika prema umetničkom stvaranju. Matematičke se istine obično p r o n a l a z e na taj način što se najpre prave ogledi s pojedinačnim slučajevima, pa se posle to »d o k a z u j e«. Dokaz izlaže u kakvoj je vezi to tvrđenje sa ostalim matematičkim pravilima kojima već umemo da se služimo. Pošto stalno učimo nova pravila, matematičari koji tek nailaze, gotovo uvek nalaze da metode ranije upotrebljavane za opravdanje nekog matematičkog pravila nisu dovoljno naučno »stroge«. Evo kako jedan od najapstraktnijih engleskih matematičara, Dž. H. Hardi[1]) govori o jednoj od najapstraktnijih matematičkih grana: »Teorija brojeva, više nego ma koja druga matematička grana, počela je time što je bila eksperimentalna nauka. Njene najslavnije teoreme bile su postavljene ponekad sto i više godina pre nego što su dokazane; očevidnost mnogih proračuna ljude je prosto navela na njih«! Dokaz je ispitivanje posebnih rezultata dobivenih upotrebom novog načina pisanja u vezi sa ranijim metodama za dobijanje sličnih rezultata.

Na primer, merenje površina proučavano je mnogo vekova pre nego što su pronađena pravila za rad s razlomcima. Dokaz pravila koja prikazuje ova jednakost:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

pokazuje kako su Arapi i prve račundžije tražili da opravdaju pravila o radu s razlomcima. Vraćamo se na geometrisko izvođenje radnje »x« da nađemo površinu (sl. 27). Da bismo to



SL. 27. — IZRAŽAVANJE POMOĆU SLIKE MOŽE DA SE UPOTREBI DA BI SE PROVERILA TAČNOST PRAVILA IZRAŽENOG MATEMATIČKOM REČENICOM (»JEDNAKOST«)

$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

[1]) Umro 1950 godine. — Prev.

izveli, uzimamo da razlomak $\frac{3}{5}$ pretstavlja tri otsečka jedne duži podeljene na 5 otsečaka od kojih je svaki jednak s nekom jedinicom dužine, a da razlomak $\frac{4}{7}$ pretstavlja 4 otsečka jedne duži podeljene na 7 otsečaka, od kojih je svaki jednak s istom jedinicom dužine. Primer koji pretstavlja slika jeste prikaz opšteg recepta izraženog rečenicom (ili jednačinom):

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

U kom smislu može crtež da se nazove dokazom? On iznosi istoriski odnos između onoga što je već poznato, (način kako se mere površine) i onoga što tek postaje poznato, (tačan način na koji treba upotrebiti razlomke). Videli smo da takvi razlomci mogu samo približno da pretstave površine. A šta onda mislimo kad kažemo da je pravilo dokazano crtežom. Znači da pravilo odgovara crtežu u onolikoj meri u kolikoj naša metoda crtanja može tačno da nacrta crtež. U tome odnosu nema ničega apsolutnoga. Isto toliko nam koristi crtež kao kad gledamo kakvu dobru sliku.

U gramatikama evropskih jezika glagoli su razvrstani prema tome na koji način izražavaju vreme u kome se dešava glagolska radnja. Razne vrste matematičkih glagola ne mogu se razvrstati na taj način. Kad je vreme izraženo operatorima (glava deveta) moramo upotrebiti razne operatore, isto onako kao što se u našem jeziku mesto glagola »ići« mora upotrebiti sasvim drugi glagol »stići«, ako hoćemo da izrazimo svršenu radnju (»stigoh«). Ne moramo se plašiti kad vidimo da gramatika dimenzija i gramatika vrsta ne odgovaraju potpunce jedna drugoj u svima pojedinostima. Englez će se začuditi kad vidi kako u srpskom jeziku glagoli imaju rodove[1]). Gramatika dimenzija nije potpunce jednaka s gramatikom vrsta u svima pojedinostima. Otuda se ni njihove sličnosti ne smeju uzimati kao nešto čvrsto i nepromenljivo.

[1]) »Ja sam kazao« (kad govori muškarac) i »ja sam kazala« (kad govori žena). Toga kod Engleza nema. — Prev.

Ima nekoliko načina za razvrstavanje matematičkih glagola. Dva takva načina korisno je poznavati već sada. Pre nego ih prikažemo, možemo pribeležiti da u matematici nema neprelaznih glagola. Svi matematički glagoli moraju imati predmet, pošto jezik dimenzija nije jezik za razmišljanje, već jezik za učestvovanje u radu ljudske zajednice. Prvo razvrstavanje matematičkih glagola zasniva se na njihovom odnosu prema ostalom delu rečenice. Jedna klasa operatora može se približno uporediti sa povratnim glagolima. Rečenice »3 + 4« ili »3 × 4« znače potpuno isto što i »4 + 3« ili »4 × 3«. Dovoljno je da znamo samo pola tablice množenja! Međutim $\frac{3}{4}$, ili »3 : 4« i »3 — 4« ne znače isto što i $\frac{4}{3}$, ili »4 : 3« i »4 — 3«. Ako volite analogiju, možemo reći da to nisu povratni glagoli. Rečenica kao što je ova:

$$4:3=1\frac{1}{3}$$

ili:

$$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

iste je prirode kao i: »Nečim uradi nešto na nečemu da dobiješ neki rezultat«. To potseća na rečenice kao što je ova: »Odnesi ovo pismo na poštu i preporuči ga«. Takva rečenica nije iste prirode kao jednakost

$$3 \times 4 = 12$$

ili kao

$$3 + 4 = 7$$

pošto odneti pismo na poštu nije isto što i odneti poštu na pismo. Operatore kao što su »×« i »+« matematičari zovu komutativni operatori, a operatore kao što su »:« i »—« nekomutativni operatori. Izvesne matematičke grane služe se samo ovim poslednjima isto onako kao što su izvesni jezici, kao na primer engleski, gotovo sasvim izbacili povratne glagole. U vezi s ovim treba napomenuti da operator : i crta — sa jednim brojem nad njom i jednim ispod nje znače jedno te isto, kao što i »razgovarati« i »voditi razgovor« (s nekim) znače isto[1]).

Drugi važan način za razvrstavanje operatora osniva se na njihovom međusobnom odnosu. To je važno da se zna. Kao i

[1]) Jedno je i isto $5:12$ i $\frac{5}{12}$. — Prev.

prvi način, ni ovaj drugi nema svoje tačne paralele u gramatici. U izvesnom smislu potseća na razlikovanje između aktivnog glagolskog oblika i pasivnog. U drugom smislu više liči na razliku između glagola kao što su »tvrditi« i »poricati«. Mi kažemo da je operator »:« obrnut (inversan) operatoru »×«, i da je operator »—« obrnuti operator operatoru »+«. Šta to znači veoma je lako razumeti, ako se setite šta vi to ustvari radite kad oduzimate. Ako je

$$3 + 4 = 7$$

isto tako je istina da je

$$7 - 4 = 3$$

i da je

$$7 - 3 = 4$$

Mesto da poslednju rečenicu prevedete ovako: »Od 7 oduzmite 3 da dobijete 4« možete je ovako izraziti: »Nađite broj koji treba dodati na 3, da bi se dobilo 7«. Sa ovog gledišta to pretstavlja sabiranje u pasivnom obliku. Isti odnos postoji između množenja i deljenja. Pomnožiti 3 sa 4 je isto što i sabrati četiri trojke. Podeliti 4 sa 3 znači naći koliko se puta može 3 oduzeti od 4 dok više ne možete da oduzmete celu trojku na računaljci. Izražavajući to na drugi način možemo prevesti jednakost

$$4:3=1\frac{1}{3}$$

ili

$$\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

rečenicom »4 se dobija kad se $1\frac{1}{3}$ pomnoži sa 3«. Ako ovu rečenicu prebacite u aktivno stanje ona glasi: »Pomnoži $1\frac{1}{3}$ sa 3, da dobiješ 4«, ili

$$1\frac{1}{3}\cdot 3=4.$$

Verovatno znate i drugi primer za operator i njegov obrnuti operator. U jednakosti:

$$7^2 = 49$$

operator je 2. Jednačina glasi: »Pomnoži međusobno dve sedmice, da dobiješ 49«. Potpuno isto to tvrđenje može se prevesti ovako:

$$\sqrt{49}=7.$$

To znači »Nađi broji koji pomnožen samim sobom daje 49, pa ćeš dobiti 7«. Operator $\sqrt{\ }$ zove se kvadratni koren. $\sqrt{49}$ je kvadratni koren iz 49. Slično tome $\sqrt[4]{\ }$ je obrnuti operator za operator 4 napisan gore desno. »Ja sam napisao ovu glavu« (aktivni oblik) znači isto što i »ova je glava napisana mnome« (pasivni oblik[1]). Isto se misli u ovim dvema rečenicama: $2^5=32$ i $\sqrt[5]{32}=2$.

Postoji ipak druga jedna gramatička sličnost koja je u praksi važnija. Kad je neki obrnuti operator stavljen ispred svoga operatora, on poništava značenje svoga operatora. To je tako, kao što rečenica »Poričem što tvrdim« ostavlja mog sagovornika na onome na čemu je i bio, jer posle nje on ne zna moje mišljenje. Ako se držite ovog poslednjeg objašnjenja, neće vam biti teško da shvatite da je

$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$$

ili

$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2.$$

To znači: obrnuti operator $\sqrt[n]{\ }$ briše značenje operatora n stavljenog gore desno. Mi smo već ranije naišli na jedan ovakav primer. »Antilog (log 5)« znači »potraži broj koji odgovara u logaritamskim tablicama broju 5, pa onda u tablicama antilogaritama nađi broj koji tome broju odgovara«. Broj koji hoćete do dobijete biće 5. *Antilog* stavljeno pred *log* ostavlja vas onde gde ste i bili. Možete prevesti za sebe na rečnički jezik tablica za kvadrate i kvadratne korene tvrđenje kao što je ovo:

$$\sqrt{289}=\sqrt{17^2}=17$$

[1]) Ovo je na našem jeziku rogobatno, ali smo dali tu rečenicu da bi se razumela piščeva misao. — Prev.

Dosad još nismo objasnili kako da se nađu brojevi u tablicama logaritama i antilogaritama. To će biti objašnjeno u desetoj glavi. Inače možete i sami sebi načiniti tablicu kvadrata ($1^2=1$; $2^2=4$; $3^2=9$ itd.).

Ovo nas navodi da i sa druge strane pogledamo obrnuti operator. Tablica kvadratnih korena može se načiniti čim ste načinili tablicu kvadrata time što ćemo je prosto izvrnuti. Uradite to radi vežbe. Pomoći će vam da shvatite nešto što smo zasad tek nagovestili, a što ćemo objasniti potpunije u narednoj glavi. U hijeroglifskoj matematici kvadratni je koren dužina jedne duži koja odgovara površini koju pretstavlja broj čiji kvadratni koren tražimo. To znači da je kvadratni koren iz 49, (znači 7), (sl. 20) broj dužinskih jedinica sadržanih u strani jednog kvadrata koji obuhvata 49 kvadratnih jedinica. Valjda se sećate da smo rekli da su Grci, proučavajući slike, došli do dimenzija koje nisu mogle biti tačno opisane celim brojevima ili razlomcima stare vrste. To važi i za kvadratni koren iz 2. Možemo naći broj koji kvadratnom korenu iz 2 odgovara sa tačnošću kolika nam je potrebna, da bismo kvadrat čija je površina 2 kvadratna desimetra nacrtali onoliko tačno koliko tačno uopšte umemo da crtamo. Ipak ne možemo tačno da izrazimo rečenicu $\sqrt{2}$ pomoću ovčijih i kravljih brojeva. A i nema razloga za to, kad ograda na toru ili na govedarniku nije načinjena od jedinki ovaca ili krava (sl. 75, gl. 5).

Pošto će vam tablice kvadratnih korena biti uskoro potrebne, može vam se ovde pokazati jedan način na koji se one prave. Sa tablicama kvadrata kao što je ona priložena na kraju ove knjige, neće vam biti teško da nađete približnu vrednost za $\sqrt{2}$ koja će biti dovoljno tačna za praktične potrebe. Vi znate da je $\sqrt{1}=1$, a $\sqrt{4}=2$. Zato je $\sqrt{2}$ manji od 2, a veći od 1. Kao prvo nagađanje uzmimo 1,5. Tablica pokazuje da je $15^2=225$, dakle $1{,}5^2=2{,}25$. Znači da je 1,5 mnogo. $14^2=196$, dakle $1{,}4^2=1{,}96$; to je 1,4 malo. Kako je 1,96 mnogo bliži do 2 nego 2,25, bolje je 1,4 nego 1,5. Ako pomnožite 1,42 sa 1,42 dobićete 2,0164. Znači da je 1,42 mnogo. Ako pomnožite 1,41 sa 1,41 dobićete 1,9881. Znači da je 1,41 malo. Ako vam je potrebna približna vrednost koja odgovara tačnosti običnog pribora za crtanje (koji ne registruje greške manje od 1 od sto) dovoljno je uzeti $1{,}415 \pm 0{,}005$. Ako hoćete da vam greška bude manja od 1 od sto, možete uzeti svaki broj između 1,414 i 1,415.

Drugi način da se dobije povoljna vrednost za ove korene, koje matematičari zovu iracionalni brojevi, jeste ovaj. Ako želite da nađete kvadratni koren iz 10, potražite u tablici kvadrata dva broja od kojih je jedan približno deset puta veći or drugog. Na primer, 9604 je 98^2, a 961 je 31^2. Međutim, jedna desetina od 9604 je 960,4. A taj broj se razlikuje od 961 za 0,6, što je, grubo uzevši, 6 na 10 000, ili 0,06 procenta. Zato je $\frac{9604}{961}$ vrlo blizu 10, tj. $\left(\frac{98}{31}\right)^2$ vrlo blizu 10. Zato je kvadratni koren iz 10 vrlo blizu $\frac{98}{31}$. To daje za kvadratni koren iz 10 vrednost 3,16. Kad 3,16 pomnožimo sa 3,16 dobivamo 9,9856. Vidi se da je taj broj veoma blizu 10.

Sintaksa. — Gramatike dele svoja pravila na dve vrste. Pravila koja govore o pojedinačnim delovima govora, o imenicama, glagolima itd. zovu se nauka o oblicima. Sem tih pravila postoje i druga koja govore o tome kako se reči sklapaju u rečenicu. Ta pravila čine *sintaksu.* Osnovna pravila matematičke sintakse su vrlo prosta. To dolazi otuda što jezik dimenzija, kao što smo videli, nije jezik na kome se mogu izraziti neka osećanja. Zato su uglavnom sve matematičke rečenice iste prirode. One uvek sadrže reči »da se dobije«, što se piše ovako: »=«. To deli rečenicu na dva dela, koje mi zovemo strane jedne jednačine. Osnovna pravila matematičke sintakse kažu vam kako možete da izmenite jednu stranu jednačine, ili obadve jednovremeno.

Jedina stvar koju treba da zapazimo kod promene samo jedne strane jeste red reči. Neke reči mogu da razmene mesta, a neke ne mogu. Na srpskom rečenica »Papa je glava katoličke crkve« znači isto što i »Katoličke crkve papa je glava«. To ne znači isto što i »Glava je papa katoličke crkve«, ili »Katolička crkva je glava papina«. Slična teškoća koja bi nas mogla zbuniti kad radimo s jezikom dimenzija već je razjašnjena. Kad su brojevi povezani znacima »×« i »+«, mogu da razmenjuju mesta. Na primer

$$ab = ba$$

s posebnim brojevima

$$3 \times 7 = 21 = 7 \times 3$$

$$a(b + c) = a(c + b) = (b + c)\,a = (c + b)a$$

s posebnim brojevima

$$7(3 + 2) = 7(2 + 3) = (3 + 2)7 = (2 + 3)7 = 35$$

Promene *na jednoj strani samo* mogu da se vrše isključivo tako da ne menjaju značenje te izmenjene strane. Ako menjaju značenje, ista izmena ima da se sprovede i na drugoj strani. Na primer, ako je $x = y$, možemo pisati i ovo:

(1) $x + a = y + a$

(2) $x - a = y - a$

(3) $ax = ay$

(4) $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$ (sem ako je $a = 0$).[1]

Prevođenje na jezik dimenzija sastoji se baš u tome, da se na jednu stranu jednačine (obično desnu) stave sve količine koje znate, a na drugu količine koje ne znate. Ovo uređivanje količina (ili »izraza«) može se izvesti na taj način, što će se primeniti jedno od četiri gore data pravila. Primena prva dva pravila može se sažeti u jedno pravilo: količina dodata na jednoj strani jednačine može se prebaciti na drugu stranu, ako joj se znak (+ ili —) promeni. Na primer, ako je

$$p + b = q$$

posebnim brojevima

$$3 + 4 = 7$$

isto tako je istina da je

$$p + b - b = q - b$$

ili

$$p = q - b$$

posebnim brojevima

$$3 + 4 - 4 = 7 - 4$$
$$3 = 7 - 4$$

Slično tome ako je

$$p - c = q$$

[1]) Ako je $a = 0$, ne smemo deliti sa a. Deljenje nulom nema smisla. Deljenje nulom nije dopušteno. — Prev.

posebnim brojevima

$$9-5=4$$

isto tako je istina da je

$$p=q+c$$

posebnim brojevima

$$9=4+5$$

Sažeto pravilo koje obuhvata (3) i (4) ilustrovaćemo čitavim nizom količina koje takoreći karakterišu naš društveni život. Pre nego što to uradimo, zapazite da (3) može i ovako da se napiše: $\frac{ax}{1}=\frac{ay}{1}$. Videćemo docnije da se mnogo vremena i rada može uštedeti pri izučavanju geometrije, ako ne dozvolimo da nam smetaju razmere koje su za matematičare staroga doba pretstavljale veliku teškoću. Reč »razmera« se upotrebljava za količine vezane rečima »na«, ili »prema«, ili »od«. Poznati primeri su: p r i h o d (toliko i toliko n a godinu), n a d n i c e (toliko i toliko n a nedelju), k a m a t a (toliko i toliko o d sto). Druge razmere iz svakodnevnog života su cene, naknada za prekovremeni rad, potrošnja benzina (litri p r e m a kilometrima), brzina (toliko i toliko kilometara n a sat) itd.

Da uzmemo najpre potrošnju benzina. Prodavac automobila tvrdi da izvestan automobil troši na 100 kilometara 10 litara benzina. Uzmimo, ma da nije mnogo verovatno, da trgovac ne laže. To onda znači, ako podelite broj pređenih kilometara *(k)* brojem utrošenih litara *(l)*, rezultat je 10:

$$k:l=10$$

ili

$$\frac{k}{l}=10$$

Detektivu amateru može ovo da posluži kao uputstvo u ovim trima prilikama: (a) Ako goni nekog begunca na putu bez zastajanja od Londona do Brajtona, ili od Vuds Hola do Bostona, on zna koliko će kilometara begunac moći da tera, a da ne uzima benzin, i može da izračuna koliko litara mora da sipa u rezervoar, tj.

$$l=\frac{k}{10}$$

Drugim rečima »Podeli sa 10 broj kilometara koje imaš da pređeš, da bi dobio broj litara benzina koje treba da sipaš u rezervoar«.

b) Ako želi da sazna da li »sumnjivo lice« laže kad kaže da je toliko i toliko kilometara teralo kola te noći, a zna od sopstvenika garaže koliko je litara bilo u rezervoaru sinoć, može da pogleda na kazaljku za benzin, pa da odatle izvede koliko je kilometara automobil putovao te noći, tj.

$$k=10\cdot l$$

Drugim rečima »Pomnoži sa 10 broj litara utrošenog benzina, dobićeš koliko je »sumnjivo lice« zbilja putovalo«.

c) Pretpostavimo da »osumnjičeni« kaže da je te noći išao u Brajton ili u Boston, (što može biti) i da se potrošnja benzina slaže s njegovim tvrđenjem. Detektiv posumnja u taj alibi[1]), pa želi da se uveri ne curi li rezervoar. On to može da proveri tako, što će sam da se proveze malo istim autom. Alibi važi ako broj pređenih kilometara podeljen brojem litara utrošenog benzina daje 10, ako je prvobitno tvrđenje tačno:

$$10=\frac{k}{l}$$

Sve ove tri formule o potrošnji benzina mogu se sažeti ujedno pomoću strelica:

$$\frac{k}{l}\;\substack{\nwarrow\nearrow\\ \swarrow\searrow}\;\frac{10}{1}$$

Lakše je služiti se ovim pravilom nego da rešite kad mogu da razmene mesta podmet, neposredni predmet i posredni predmet u rečenicama kao što su ove tri:

a) Vladika dade zemičku psoglavu.

b) Zemička bi data psoglavu od vladike[2]).

c) Psoglavu bi data zemička od vladike.

---

[1]) Dokaz da je neko u trenutku izvršenja nekog zločina bio na drugom mestu, a ne tamo gde je zločin izvršen. — Red.

[2]) Na našem je jeziku to veoma rogobatno, ali smo to ipak dali, da se vidi piščeva misao. — Prev.

Sve ove tri rečenice znače jedno isto, a ne znače »Psoglav[1]) je dao vladici zemičku«.

Kuvarski recepti bolje objašnjavaju ono malopređašnje pravilo, jer nam pokazuju zašto smo broj 10 napisali na neobičan način $\frac{10}{1}$. U razmerama »toliko prema nečemu« ono »toliko« može da bude i razlomak. Na primer, može nam se reći da je za drhtalicu (»sulc«) od dunja na $1\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$ litra soka od dunja potreban 1 kg šećera. Sažmimo sad sva tri uputstva za rad u ovu jednu rečenicu:

$$\frac{l}{k} = \frac{3}{2}$$

što znači

$$\frac{\text{litri soka}}{\text{kilogrami šećera}} = \frac{3}{2}$$

a) Pretpostavimo da smo najpre merili šećer. Broj litara soka koji treba sipati na taj šećer je $\frac{3}{2}$ broja kilograma šećera, tj.

$$l = \frac{3}{2}\,k = \frac{3k}{2}$$

b) Ako imam izvesnu količinu soka, pa želim da načinim onoliko drhtalice koliko mogu od toga soka, moram da odmerim izvestan broj kilograma šećera koji će iznositi $1 : \frac{3}{2}$ ili dve trećine broja litara soka. A to je isto kao kad napišemo:

$$k = \frac{2}{3}\,l = \frac{2l}{3}$$

c) Ako nisam dobar račundžija, a imam recept u kome stoji da na 3 litra soka dolaze 2 kilograma šećera, onda odmerim 3 litra soka i 2 kilograma šećera, pa opet isto, sve dok ima soka. Onda će dvostruki broj litara iznositi koliko i trostruki broj kilograma. A to će biti isto kao kad napišemo:

$$2l = 3k$$

[1]) Jedna vrsta majmuna. Zove se i babuin. — Prev.

Svi ovi načini upotrebe kuvarskog recepta mogu se »skuvati« u jedno jedino dijagonalno pravilo:

$$\frac{l}{k} \begin{smallmatrix}\nwarrow\nearrow\\ \swarrow\searrow\end{smallmatrix} \frac{3}{2}$$

Ostali sastavni delovi govora. — Vi ste se možda već upitali da li u jeziku dimenzija postoji nešto što odgovara i drugim delovima govora. Razume se, u matematici nema usklika, pošto usklicima nema mesta u radnome jeziku. Oni su preostaci dreke koju su dizali naši majmunasti preci pre nego što su se naučili na društvenu upotrebu zvukova.

Ima stvari koje tačno odgovaraju pridevima i prilozima, ali bi onda trebalo da odemo u oblasti do kojih još nismo stigli, pa ih ne bismo mogli jasno izložiti. Ako ste baš mnogo radoznali, evo vam jednog primera za priloge. Oznaka 3 u znaku $\sqrt[3]{\ }$ menja značenje znaka $\sqrt{\ }$. Jer ovaj znak znači da neku količinu treba uzeti nekoliko puta i to izmnožiti među sobom da bi se dobio broj ispod znaka $\sqrt{\ }$. Broj 3 nam kazuje *koliko* puta treba uzeti tu količinu. Kad nije napisan broj levo gore na znaku $\sqrt{\ }$, to znači da je tu broj 2. U jednoj od narednih glava videćete kako se imenice mogu menjati. Dalje, ako upotrebim x za sve količine merene duž jedne prave linije, a y za količine merene duž druge prave, mogu da napišem x_a ili y_b da mi znače izvesne posebne vrednosti iksa ili ipsilona, kao što mi »siva« krava kazuje koja je krava, te se a i b napisani dole desno mogu smatrati kao pridevi. Ali zasad nemojte lupati glavu o tome. Postoji još jedna »vrsta reči« koja zaslužuje da se pomene. Postoje izvesne reči koje sadrže u sebi karakteristike i imenica i glagola. Mi ih zovemo glagolske imenice (neodređeni način). Primer za to je reč »raditi« u rečenici »Raditi više od četiri sata dnevno neće biti potrebno u jednom razumno organizovanom društvu«. Matematičari često govore o jednoj sličnoj vrsti matematičkih reči, kao što su negativni brojevi, kao na primer —3, ili uobraženi *(imaginarni)* brojevi, kao na primer $\sqrt{-3}$. Međutim —3 nije prosto samo broj. To je broj sa smislom prikačenim uz njega. On ima u sebi karakteristike i matematičkog glagola i matematičke imenice. To je matematička glagolska imenica. Imaginarnim brojevima se služimo kad se bavimo naizmeničnom strujom u mreži za električno osvetljenje, međutim oni su okruženi izvesnom tajanstvenošću koja dolazi prosto otuda što smo se navikli da o njima govorimo kao da su oni prosto samo brojevi. Kako oni nisu stvarni brojevi, a o njima se govori kao da jesu, oni izgledaju da su potpuno uobraženi, kraj svega što obavljaju težak posao u električnoj centrali. Postoje i dve sveze koje se ponekad upotrebljavaju u matematici. To su $\therefore$ (dakle) i druga $\because$ (zbog[1]). Upamtite ih.

Stil. — Lako je zapaziti poslednju sličnost između jezika dimenzija i običnog govora. Poznata mana našeg svakidašnjeg govora je njegova opširnost, tj. kad se upotrebi nekoliko reči onde gde je dovoljna jedna jedina. Kad se to desi u istoj rečenici, uvek se zamagli njeno značenje. Matematika se ne upotrebljava u diskusiji na masovnim zborovima. Zato opširnost u njoj nije nikad dopuštena. Tri dosetke koje se upotrebljavaju da se otkloni brbljivost zovu se svođenje, potiranje i skraćivanje. Svođenje članova vidi se iz ove rečenice:

$$3a - c + b + a - 2c + b = 4a + 2b - 3c$$

Videćete da je to tačno, ako mesto a, b, i c, stavite posebne brojeve. Druga dosetka zove se potiranje, tj. uklanjanje jedne količine koja je i dodata i oduzeta. Na primer:

$$3a + b - b = 3a$$

Pravilo je tako prosto, da ga smatramo kao nešto što se po sebi razume. Ako dodate i oduzmete jednu istu količinu, ostajete gde ste i bili. Treća dosetka je skraćivanje, tj. uklanjanje jedne količine kojom ste jednovremeno i pomnožili i podelili. To se javlja kod razlomaka. Na primer:

$$\frac{6}{16} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

Slično tome, kad upotrebimo opšte brojeve (slova), da bismo izveli pravilo, imamo:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$$

[1]) U Evropi (na kontinentu) se one ne upotrebljavaju. — P r e v.

Lako je videti zašto je to tako; to proizilazi iz pravila o množenju razlomaka. Ovako:

$$\frac{b}{b} = 1$$

Prema tome je:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a}{c} \cdot 1 = \frac{a}{c}$$

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a}{c} \cdot 1 = \frac{a}{c}$$

Na samom početku ima da se zapazi još nešto kod stila. U svakodnevnom govoru mi imamo i da zabavimo i da poučimo slušaoce; oni će se inače početi vrpoljiti, biće im dosadno. Kad se upotrebljava često jedna ista reč postaje zamorno, kao kad odnekud curi voda kap po kap. Mi to izbegavamo kad postoje razne reči koje isto znače. Žrtvujemo logičku prostotu za ljubav psihološke podesnosti. Jaka predrasuda protiv jednog uprošćenog međunarodnog jezika, kraj sve hitne potrebe za njim, ima izvesnog opravdanja u tome, što su stari jezici bogati u izboru reči koje isto znače. U međunarodnom matematičkom jeziku žrtvujemo sve, samo da izvesno tvrđenje bude što jasnije. To znači da izbegavamo da pišemo istu računsku radnju na razne načine. U poslednjem primeru pogazili smo to pravilo. Opravdanje je u tome što vi možda još niste svikli da na dva razna načina prevodite reč »pomnožiti«.

Elipsa. — U svakodnevnom govoru ponekad izbacujemo neke reči[1]). U srpskom jeziku se u sadašnjem vremenu izbacuje podmet pošto se jasno vidi šta je podmet. Isto tako u matematici izbacujemo broj 1 kad se on javlja kao množilac ili kao delilac, pošto množenje ili djeljenje jedinicom ne utiče na rezultat. Na primer:

$$\frac{a}{1} = a \qquad 1 \cdot a = a \qquad a^1 = a.$$

[1]) U srpskom jeziku obično izbacujemo ličnu zamenicu u sadašnjem vremenu: »idem« (ja), »polazi (on) sutra«. U poslovicama se to još bolje vidi: »bez neke nije« (tj. ima uzroka tome), »glava *ä*, a u glavi *nä*« i dr. — P r e v.

Kad to znate, možete dijagonalno pravilo $\nwarrow\!\!\nearrow\!\!\swarrow\!\!\searrow$ napisati i ovako:

$$ax = by$$

$$\frac{ax}{1} = \frac{by}{1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$$

Drugi jedan tekst u kome je važno da se setimo ovog izostavljanja jeste tekst u kome tražimo vezu između članova nekog niza:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48, \ldots \text{ tj.}$$
$$3,\ 2\cdot 3,\ 4\cdot 3,\ 8\cdot 3,\ 16\cdot 3, \ldots$$

Brojevi 2, 4, 8, 16 ... zovu se koeficienti (sačinioci) broja 3. Ako prvi broj (3) napišemo ovako: $1 \cdot 3$, biće nam jasnija veza između koeficienata[1]).

I u nizu

$$x,\ 3x^3,\ 5x^5,\ 7x^7, \ldots$$

jasnije ćete videti vezu između članova niza, ako ih napišete ovako:

$$1x^1,\ 3x^3,\ 5x^5,\ 7x^7, \ldots$$

Drugo nešto važno o broju 1 što treba da upamtite ovo je:

$$\frac{a}{a} = 1$$

Tako ćemo videti vezu između brojeva

$$1,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7}$$

[1]) Oni će onda biti: 1, 2, 4, 8, 16, ... Vidi se da je svaki koeficienat dva puta veći od prethodnog. — P r e v.

Mnogo je bolje ako ih napišemo ovako:

$$\frac{4}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{4}{7}$$

Poslednja stvar koju treba upamtiti o broju 1 ova je:

$$1^n = 1 = \sqrt[n]{1}$$

Dakle, ako je $a = 1$, $b = 1$ u jednačini

$$d^2 = a^2 + b^2$$

imaćemo:

$$d^2 = 1 + 1$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}.$$

Duh jezika. — Usretsređujući pažnju na osnovne sličnosti između jezika dimenzija i jezika vrsta, propustili smo jednu važnu stvar — pitanje kojim se redom pišu reči. O tome će se govoriti u sedmoj glavi, gde ćemo dati istoriske primere i pokazati kako je simbolizam jezika dimenzija izrastao u neprimetnim stupnjevima iz svakodnevnog jezika. Vredi uočiti kako se prevodi pre nego što pođemo dalje, jer se prevođenje javlja čim počnemo izražavati zakone naučnog merenja (na primer, kako se u električnom kolu menjaju volti i amperi, odnosno amperi i omi; ili, kako se menja zapremina nekog gasa kad pritisak raste odnosno opada). Kad kažemo da je potražnja benzina pravo p r o p o r c i o n a l n a sa pređenom daljinom, mislimo time da kažemo da je odnos tih dveju količina neka utvrđena količina, ili k o n s t a n t a, u ovom slučaju broj pređenih kilometara na 1 litar benzina. I tako tvrđenje da je x proporcionalno sa y znači $x : y = \mathit{konstanta}$, ili $x = y \times \mathit{konstanta}$, što se kratko piše u ovome obliku

$$x = ky$$

Slično tome, ako kažemo da je nešto o b r n u t o proporcionalno sa nečim, to znači da ako jedno raste, drugo opada, tako da im je proizvod stalan. Kad kažemo da je u električnom sprovodniku broj ampera obrnuto proporcionalan broju omova (otporu), onda to znači da ako jedno raste drugo opada tako i da im zbog toga proizvod ostaje stalno isti. Ako utrostručimo broj omova, struja će se svesti na jednu svoju trećinu. Da je iks obrnuto proporcionalno ipsilonu pišemo ovako:

$$x = \frac{1}{y},$$

a to je isto što i

$$xy = \text{konstanta},$$

ili još kraće

$$xy = k$$

Bekn kaže dok »se bezrazložno divimo moći ljudskoga uma i preuveličavamo je, propuštamo da se postaramo za pomoćna sredstva, koja je podržavaju«. Ako želite da se istinski koristite ovom knjigom, ne upadajte u grešku koju čine nastavnici koji nam samo uvećavaju teškoće time što veličaju moć ljudskoga uma. Upotrebite u najvećoj meri dva pomoćna sredstva od kojih je jedno prikazano u ovoj glavi. Ako tražite neko računsko pravilo, ili želite da ga primenite da biste rešili praktičan problem, proverite pravilo ili njegovu primenu time što ćete sami sklopiti jedan prost primer odnosno analogan problem i na njemu se uveriti da li dobijate odgovor koji treba. To će vam pomoći da utvrdite da li ste dobro shvatili pravilo, a shvatiti ga dobro znači umeti ga primeniti. Mnogi zadaci dati na kraju glava ove knjige mogu da se provere. Zato i nisu dati odgovori na njih. Slično pomoćno sredstvo imate kod problema iz hijeroglifske matematike. Nemojte crtati lošije nego što umete! Dobar crtež, sam po sebi, već daje neko uputstvo. Ono će vam izmaći iz vida na lošem crtežu. Ako je zadatak u tome da se pronađe neko pravilo za merenje, izmerite traženu veličinu, da se uverite da li pravilo važi.

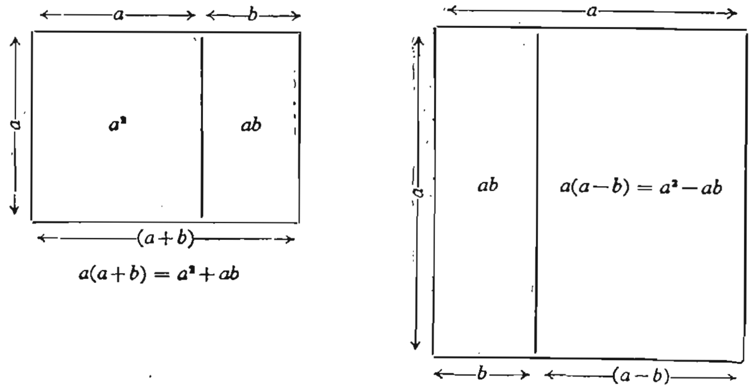
VEŽBANJA UZ TREĆU GLAVU

PRONALASCI

1. — Dijagrami kao što su oni sa slika 24 i 27 mogu da se upotrebe za objašnjenje značenja mnogih i raznovrsnih izraza. Na primer, sledeći dijagrami objašnjavaju značenje izraza $a\,(a + b)$ i $a\,(a - b)$.

Na hartiji sa sitnim kvadratićima nacrtajte dijagrame koji objašnjavaju ove izraze:

$$(a + b)\ (a + b)$$
$$(a - b)\ (a - b)$$
$$(a + b)\ (a - b)$$



SL. 27 A.

Na svojim dijagramima uzmite za a i b cele brojeve. Napišite dobivene rezultate u obliku

$$a\,(a + b) = a^2 + ab \text{ itd.}$$

Proverite dobivene rezultate na dva načina.

(a) Zamenite a i b u svojim obrascima kojim hoćete brojevima, pa vidite da li su vam obe strane jednakosti potpuno jednake vrednosti.

(b) Prebrojte kvadratiće na površinama koje prikazuju vaši dijagrami.

2. — Nacrtajte slike koje će objasniti ova tvrđenja:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$
$$(a + b + c + d)\ (g + f) = (a + b + c + d)\ g + + (a + b + c + d)\ f$$
$$(a + b + c + d)\ (g + f) = ag + bg + cg + dg + + af + bf + cf + df$$

Proverite to sve stavljajući $x = 2$, $y = 4$, $z = 7$, $a = 2$, $b = 3$ itd.

3. — Naći zbir svih brojeva

(a) od 7 do 21

(b) od 9 do 29

(c) od 1 do 100.

Sabiranjem proverite dobivene rezultate.

4. — Nađite prvo pomoću obrasca, a zatim neposrednim sabiranjem zbirove brojeva iz ovih nizova:

(a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35

(b) 5, 14, 23, 32, 41, 50

$$(c)\quad 7 \quad 5\frac{1}{2} \quad 4 \quad 2\frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}$$

5. — Nacrtajte ugao od 30°. Iz proizvoljne tačke na jednome kraku povucite pravu liniju pod pravim uglom s tim krakom, pa je produžite do drugoga kraka. Dobili ste pravougli trougao s jednim uglom od 30°. Strane pravouglog trougla imaju naročita imena. Najveća strana, ona naspram pravog ugla, zove se hipotenuza. Druge dve strane zovu se katete. Zasad nas zanima ugao od 30° i mi ćemo stranu naspram njega nazvati naspramna kateta, a drugu nalegla kateta. Nacrtajte više pravouglih trouglova s jednim uglom od 30°, sa različitim stranama i u različitim položajima na crtežu, pa gledajte da li možete odmah raspoznati hipotenuzu, naspramnu i naleglu katetu na tim svojim truglovima, ma u kome položaju oni bili.

6. — U svakome od tih trouglova izmerite ove odnose:

$$\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}, \quad \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}}$$

7. — Nacrtajte na isti način nekoliko pravouglih trouglova s jednim uglom od 60°. Nacrtajte nekoliko takvih trouglova s jednim uglom od 45°. Izmerite odnose u svakome od njih. Tim odnosima su data imena. Ako je A jedan oštar ugao u pravouglom trouglu, hipotenuza i nalegla kateta njegovi kraci, onda je treća strana n a s p r a m n a k a t e t a. Razmera ili odnos $\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}$ se tada zove s i n u s

ugla A. Odnos $\frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}$ zove se k o s i n u s ugla A. Odnos $\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}}$ zove se t a n g e n s ugla A. Kratkoće radi ti se odnosi pišu ovako: *sin A*, *cos A* i *tang A* (ili *tg A*). Ako nacrtamo oštar ugao i pomoću njega nacrtamo nekoliko pravouglih trouglova razne veličine, videćemo da svaka ova razmera u svima tim trouglima ima istu vrednost[1]).

8. — Nacrtajte dva ili tri pravougla trougla, izmerite im strane i izračunajte sinuse uzimajući srednju vrednost[2]), pa načinite tablicu sinusa, kosinusa i tangensa ovih uglova: 15°, 30°, 45°, 60° i 75°.

Zagledajte nacrtane pravougle trougle pa vidite zašto je

(a) $\sin(90° - A) = \cos A$[3]) ili $\sin(90° - 60°) = \cos 60°$

(b) $\cos(90° - A) = \sin A$ ili $\cos(90° - 60°) = \sin 60°$

(c) $\text{tang}\ A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

9. — Nacrtajte krug proizvoljnim poluprečnikom. Povucite dva poluprečnika koji zaklapaju ugao od 15°. Ugao možemo meriti i ovako: izračunamo odnos dužine odgovarajućeg luka i poluprečnika. Taj broj je broj *radiana* tako da ugao iznosi *jedan radian* kad je njegov luk jednak s poluprečnikom. Vi ste već našli približnu vrednost razmere kružnog obima i kružnog prečnika. Znate da je vrednost te razmere broj π. Ako pogledate na svoj crtež videćete da možete na krugu dobiti 24 ugla od 15°. Zato luk koji odgovara uglu od 15° iznosi $\frac{1}{24}$ kružnog obima. Prema tome taj luk će biti $\frac{\pi}{24}$ puta prečnik. Pošto je poluprečnik polovina prečnika, taj luk

---

[1]) U svima će sinusi imati istu vrednost, kosinusi istu vrednost, tangensi istu vrednost. — P r e v.

[2]) Nacrtajte ugao od 60°. Nacrtajte dva pravougla trougla s tim uglom. Izmerite sinuse u oba. Ako vam je desimetar jedinica, možete meriti približno i u delovima od milimetra. Neka ste u prvome merenju dobili da je sinus 0,865, a u drugome 0,867. Srednja vrednost biće (0,865 + 0,867) : 2. To je 0,866. Tu vrednost ćete uneti u svoje tablice pod sin 60°. — P r e v.

[3]) Ako je u pravouglom trouglu jedan oštar ugao 70°, drugi oštar ugao je 90° — 70° = 20°. — P r e v.

će biti $\frac{\pi}{12}$ puta poluprečnik. Mi sad merimo uglove poluprečnikom. Otuda vidimo da ugao od 15^0 iznosi $\frac{\pi}{12}$ radiana.

10. — Na isti način nađite koliko u radianima iznose uglovi od 30^0, 60^0, 90^0, 120^0, 150^0.

11. — Koliko stepeni ima u jednome radianu? $\left(\text{Uzmite da je } \pi = 3\frac{1}{7}\right)$. Koji je deo radiana jedan stepen?[1]).

PROVERAVANJE MERENIH DUŽINA

1. — Pretpostavimo da želite tačno da izmerite dužinu nekog vrta. Da biste dobili približno njegovu dužinu koračaćete duž nje. Zemljomeri to mere vrvcom s podeocima na njoj Prosečni korak uzima se da je $\frac{2}{3}$ metra. To znači 3 koraka iznose dva metra. Ako izmerite dužinu u koracima, dužina u metrima biće $\frac{2}{3}$ od toga. Neka ste iskoračili 90 puta. Tih 90 koračaja iznosiće u metrima $90 \cdot \frac{2}{3} = 60$ m.

(a) Uzmimo da ste iskoračili 100 puta. Dužina vrta biće onda $100 \cdot \frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}$ m. Sad iskoračite jedanput, obeležite kredom dužinu svoga koraka, pa tu dužinu izmerite lenjirom na kome su obeleženi santimetri. Za koliko se razlikuje vaš korak

[1]) Uzmimo na krugu jedan luk koji odgovara uglu od 60^0. Taj luk će biti $\frac{1}{6}$ kružne periferije, merili mi njegov ugao stepenima, ili ga merili radianima. Obeležimo radiane sa rd. Periferija iznosi u stepenima 360^0 a u radianima 2π. Dakle:

$$\frac{A^0}{360^0} = \frac{rd}{2\pi}; \quad \text{odatle } A^0 = \frac{rd}{2\pi} \cdot 360 = \frac{rd}{\pi} \cdot 180.$$

Za 1 radian biće $A^0 = \frac{1}{\frac{22}{7}} \cdot 180 = \frac{7}{22} \cdot 180 = \frac{7}{11} \cdot 90 = \frac{630}{11} = 57^0$ (približno). U 1 radianu ima oko 57^0. Koji je deo radiana 1^0? — P r e v.

od prosečnog koraka? Kako ćete izvršiti popravku u dobivenoj dužini vrta?

(b) Ponekad se upotrebljava metalna pantljika. Ona je obično duga 20 metara. Vi ste se poslužili tom pantljikom, a niste znali da je ona pre toga upotrebljavana po mokroj travi, te je spala na 19 metara i 90 santimetara. Kako sad da popravite rezultat merenja dobiven tom pantljikom?

2. — Podeoci na krojačkoj pantljici za merenje (na »santimetru« kako se ona obično zove) debeli su oko $\frac{5}{8}$ milimetra. Ko je nepažljiv meri čas s unutrašnjih strana podelaka čas sa spoljašnjih. Kad se tako meri, kolika će biti najveća, a kolika najmanja dužina

(a) jedne zavese dugačke 3 metra;

(b) rastojanje od 4 santimetra između dva dugmeta na dečjoj haljinici? Koliko prosečno iznosi u procentima razlika u merenjima pod (a)?

PRAVLJENJE TABLICA

1. — Metodom određivanja približnih vrednosti koja je pokazana u ovoj glavi načinite tablicu kvadratnih korena svih brojeva od 1 do 20 zaključno, sa 3 decimala.

2. — Načinite tablicu vrednosti za 2^n od $n = 1$ (za $n = 1$ je $2^n = 2^1 = 2$) do $n = 12$; za $n = 12$ je $2^n = 2^{12} = 4096$. Uradite isto za 3^n od $n = 1$ do $n = 10$. Iskoristite te rezultate, pa načinite tablice za $\left(1\frac{1}{2}\right)^n$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ od $n=1$ do $n=8$ sa tačnošću do tri decimala.

PREVOĐENJE NA JEZIK DIMENZIJA

1. — Prevedite ovo na matematički jezik:

(a) Da biste našli šta staje ograda oko jednog pravougaonog imanja uzmite dvostruku dužinu, dodajte tome dvostruku širinu, pa sve to pomnožite cenom ograde za jedan metar.

(b) Uzmite kašičicu čaja za svakog gosta i još jednu kašičicu za čajnik, pa ćete videti koliko vam treba čaja za sve goste. (Neka ima n gostiju).

(c) Ako znate da je korpa sa n jaja teška K, a prazna k, morate oduzeti k od K i rezultat podeliti sa n, ako hoćete da znate koliko je prosečno teško jedno jaje.

(d) Da biste dobili površinu trougla, pomnožite osnovicu visinom, pa sve to podelite sa 2. (Visina stoji upravno na osnovici).

(e) Napišite pravilo po kome se može izračunati na koju sumu naraste neki kapital (od k dinara) za n godina i p procenata prostog interesa.

RAD SA ALGEBARSKIM IZRAZIMA

1. — Dok se učite kako se upotrebljavaju oznake veoma je korisno da proverite računski sve što radite, kao u sledećem primeru.

Uprostiti: $a + 2b + 3c + 4a + 5c + 6b$

U algebri uprostiti jedan izraz znači izmeniti ga tako, da dobije oblik zgodniji za dalji rad. Ovaj izraz možemo uprostiti ako saberemo aove, pa sve beove, pa sve ceove. Onda ćemo imati:

$$a + 2b + 3c + 4a + 5c + 6b = 5a + 8b + 8c.$$

Proverimo ovaj svoj rad aritmetički i uzmimo da je $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Tada će biti:

$$a + 2b + 3c + 4a + 5c + 6b = 1 + 2.2 + 3.3 + 4.1 + 5.3 + 6.2 = 1 + 4 + 9 + 4 + 15 + 12 = 45$$

Isto tako (da proverimo rezultat):

$$5a + 8b + 8c = 5.1 + 8.2 + 8.3 = 5 + 16 + 24 = 45$$

Na isti način proverite dobivene rezultate u narednim vežbanjima. Uvek ovako proveravajte kad god posumnjate da ste pravilno radili s nekim aglebarskim izrazom.

Uprostiti:

(a) $x(x + 2y) + y(x + y)$.

(b) $(x + 2y + 3z) + (y + 3x + 5z) + (2z + 3y + 2x)$.

(c) $(a + 1) + (a + 2) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 3) + (a + 1) + 1$.

(d) $(x - 1)^2 - (x - 2)^2$.

(e) $a^2 - ab - (b^2 + ab)$.

(f) $(zx)(xy) + (xy)(yz) + (yz)(zx)$.

(g) $(2ab)(3a^2b^3)$.

(h) $(x^3)^2 + (x^2)^3$.

(i) $(a - b)(a + 2b) - (a + 2x)(a + x) - (a - 2x + 2b)(a - x - b)$

(j) $\frac{2x^4y^5}{4x^3y^2}$ (k) $\frac{(3ab^2)^3}{9a^2b^5}$ (l) $\frac{2ab}{3c} \cdot \frac{4cd}{8b}$

2. — Uverite se da su oba ova tvrđenja:

(I) x je obrnuto proporcionalno sa y kad z zadržava stalnu vrednost i

(II) x je pravo proporcionalno sa z kad y zadržava stalnu vrednost

sažeta u ovu jednu jednačinu

$$xy = kz$$

To je veoma važno zapamtiti. (Uputstvo. — Količinu koja zadržava stalno istu vrednost zamenite drugim nekim slovom, na primer slovom C, ili slovom c, da pretstavlja *konstantu*[1]).

[1]) Latinski se »stalan« kaže »constans«. Otuda slovo c za reč konstanta, tj. stalna količina. Ako je y stalno, imaćemo $xc = kz$, a odatle $x = \frac{k}{c}z$. — *Prev.*

PROSTE JEDNAČINE

1. — Rešite naredne jednačine. U svakome slučaju uverite se da vrednost dobivena za x zadovoljava jednačinu.

(a) $3x + 7 = 43$[1]

(c) $17 = x + 3$

(b) $2x - 3 = 21$

(d) $3(x + 5) + 1 = 31$

(e) $2(3x - 1) + 3 = 13$

(f) $x + 5 = 3x - 7$

(g) $4(x + 2) = x + 17$

(h) $\frac{x}{4} = \frac{1}{8}$

(i) $\frac{x+2}{5} = \frac{x-1}{2}$

(j) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 7 = \frac{5x}{6} - 5$

(k) $\frac{3}{x} = 3$

(l) $4 + \frac{15}{x} = 7$

(m) $-2x - 5 + 12x - 3 - 4 = 8$

---

[1]) Da rešimo ovakvu jednu jednačinu:

$$3x + 8 = 23$$

Imaćemo:

$3x + 8 - 8 = 23 - 8$ (Na obema stranama oduzeli smo 8)

$3x = 15$ (Sveli smo na obema stranama)

$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$ (Obe strane podelili smo sa 3)

$$x = 5$$

Da vidimo da li vrednost 5 za x zadovoljava datu jednačinu.

$$3x + 8 = 23$$
$$3 \cdot 5 + 8 = 23$$
$$15 + 8 = 23$$
$$23 = 23$$

Jednačina je zadovoljena. To znači da je leva strana jednaka desnoj za $x = 5$. Gornju jednačinu mogli smo rešiti mnogo brže ovako:

$$3x + 8 = 23$$
$$3x = 15$$

$x = 5$. — P r e v.

Izrazi x pomoću a i b u ovim jednačinama:

(n) $x - a = 2x - 7a$[1])

(o) $2(x - a) = x + b$

(p) $a(a - x) = 2ab - b(x + b)$.

PROSTI PROBLEMI ZA KOJE JE DOVOLJNA JEDNA JEDNAČINA

Proverite sve dobivene rezultate!

1. — Podelite svotu od 5 400 dinara licima A i B tako, da A dobije 300 dinara više nego B. (Označite deo lica B sa x. Tada će A dobiti $x + 300$[2]).

2. — Podelite 6 270 dinara na tri lica A, B i C tako, da A dobije dva puta toliko koliko B, a tri puta toliko koliko C. (Označite deo lica C sa x[3]).

3. — Pavle prelazi 6 km na sat, a Stojan 5 km. Polaze sa istog mesta, ali Stojan polazi pola časa ranije. Kad će ga Pavle stići? (Obeležite sa x vreme od Stojanova polaska do stizanja).

---

[1]) Uzmimo jednačinu:

$$5x + 7a = 23a - 3x$$

Imaćemo:

$$5x + 3x = 23a - 7a$$
$$8x = 16a$$
$$x = 2a$$

Sad smo izrazili x pomoću a. To znači, kad znamo vrednost za a možemo izračunati x. Na primer, za $a = 3$, $x = 6$; za $a = 5$, $x = 10$. Mi za ovakav posao kažemo da smo datu jednačinu r e š i l i p o i k s u. — P r e v.

[2]) Izrazimo algebarski koliko dobijaju oba lica zajedno!

$$(x + 300) + x$$

A koliko imaju da podele?

$$2x + 300 =$$

Sad rešite jednačinu! — P r e v.

[3]) Tada će dobiti:

lice C	x dinara	
„ A	$3x$ „	
„ B	$\frac{3x}{2}$	(pola od onoga što dobije A)

Sva tri lica zajedno dobijaju 6 270 dinara:

$$x + 3x + \frac{3x}{2} = 6270$$

A koliko dobija svako od njih? — P r e v.

4. — Jedna strana štampana krupnijim slogom sadrži 1 200 reči, a sitnijim slogom 1 500 reči. Jedan rukopis štampan je krupnijim slogom na 25 strana. Koliko bi strana zauzeo da je štampan sitnijim slogom? Koliko ima reči u tome rukopisu?

5. — Automobil marke A troši 1 litar benzina na 10 kilometara i 1 litar ulja na 180 kilometara. Automobil marke B troši 1 litar benzina na 12 kilometara, a jedan litar ulja na 150 kilometara. Na kome je automobilu putovanje jevtinije, kad litar benzina staje koliko litar ulja?

6. — Jedna leja ranoga graška duga 60 metara daje 12 vrećica graška. Druga leja običnog graška, duga 80 metara daje 18 takvih vrećica. Ako vrećica običnog graška staje 600 dinara, pošto bi trebalo prodavati vrećicu ranog graška, da on bude isto toliko rentabilan kao i običan grašak?

Da se upamti!

1. $$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Za svaki oštar ugao (A) u pravouglom trouglu je:

$$\sin A = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos A = \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}} \qquad \operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}\text{[1]}$$

[1] $\operatorname{Tang} A = \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}} = \frac{\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}}{\frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}} = \frac{\sin A}{\cos A}$. Prev.

GLAVA IV

EUKLIDOVA GEOMETRIJA BEZ SUZA

ili

Šta možete da uradite s geometrijom

Pokušali smo, oslanjajući se delimično na pretpostavke, da dočaramo sliku staroga sveta u kome su se ljudi tek učili da govore o dimenzijama. Sve do 2 000 godina pre n. e. ljudi su veoma malo napredovali na polju pronalaženja opštih načela brojanja i merenja stvari. Tek tada je početak jezika dimenzija. Zasad se teško može reći da je dotle bilo neke literature. Neimarska ostvarenja toga sveta prave mnogo jači utisak nego ono malo tablica iz trgovačke računice koje su iskopane u Nipuru ili papirusi koji nam pružaju jedina obaveštenja o tome šta su sve sveštenici znali o Nilu. Velika Keopsova piramida jeste trajni spomenik koji su oni podigli istinama o trouglima. One su išle od usta do usta, prenošene od kaluđera na manastirskog đaka, od majstora na šegrta, od roba majstora na njegovu decu. Možda će piramide stojati i kad budemo prestali učiti kako su Grci izgradili veliku piramidu logike isto tako krutu i nesavitljivu. Neimari hramova i poreski zemljomeri su svakako već davno bili počeli da crtaju modele na pesku, da bi im ti modeli bili putokaz u primeni njihove veštine u izračunavanju senki i u drugim merenjima; radili su oni to mnogo pre nego što se našlo ljudi koji su se dali na posao da crtaju dijagrame i da svedu u jednu celinu rukovodna načela. Crtanje na pesku vekovima je pretstavljalo jedinu metodu za rešavanje geometriskih problema. Arhimeda, tog najvećeg matematičara staroga sveta, iskasapili su rimski »jurišni odredi«[1]) koji su ga zatekli gde crta geometriske slike po pesku.[2]) Više vredi posmatrati stupnjeve preko kojih su ljudi izvodili prve geometriske konstrukcije užetom i klinovima, olovnim viskom i vodenom ravnjačom, nego pisati knjige o njima.

Kinezima se mora priznati izvesna zasluga što su udarili osnove književnosti dimenzija. Što vreme više odmiče, to, možda, sve više saznajemo koliko im dugujemo. Sl. 19 je dovoljna da opravda naše mišljenje da su oni utvrdili važna opšta pravila o geometriskim figurama čitavih pet vekova pre Grka. Oni su tačno pogodili izvesne veoma zanimljive stvari o brojevima, mešajući uz to i mnogo besmislica. Oni su verovatno znali za familije brojeva koje igraju jednu od glavnih uloga u modernoj statistici. Najvećim delom njihovo znanje je izgubljeno. Kao i one dve biblioteke u Aleksandriji, najstarije kineske biblioteke su spaljene. Ta se nesreća nije desila u nekom ratu. Ona je svesno izvedena kao što je Hitler svesno rušio nemačku kulturu. Da se knjige spale naredio je jedan car koji je verovao, kao i Bernard Šo, da bi ljudi bolje pisali kad bi manje čitali. U početku Kinezi su bili odmakli ispred prvobitne evropske civilizacije. Njihovi graditelji kalendara su u manjoj meri sačinjavali posebnu kastu za vršenje svečanih obreda. Oni su bili više svetovnog tipa. Nama je nepoznato zašto Kinezi nisu ispunili svoja rana obećanja; možemo samo da nagađamo.

Kod Grka, koji su verovatno naučili mnogo od Kineza, nije bilo ni popovske kaste ni skupog školovanja da im smetaju. Kad su Kinezi pisali prve matematičke udžbenike, na grčko kopno su bili navalili nomadski divljaci sa severa. Ti su arijevski osvajači došli sa stepa gde nije bilo sjajnih zvezda na nebu bez oblaka. Oni nisu znali za pisanje. Nisu bili izučili ni veštinu neimarstva ni trgovine, nisu imali ni tegova ni merâ. Oni su pregazili morsku obalu Male Azije i tu ustanovili male kraljevine, kao što je bila Lidija, i gradove-državice, kao Milet, na ivici jednog lanca trgovačkih pristaništa što su ih bili osnovali najveći trgovci i moreplovci staroga doba. Kod tih semitskih Feničana severnjak je naučio da čita i da piše i da računa.

[1]) Ovde autor, upotrebivši upravo ovaj izraz, aludira na fašističke »jurišne odrede« — S. A. Sturm Abteilung — i njihovu protivkulturnu rabotu u svetu. — Red.

[2]) Euklid je živeo oko 300 g. pr. n. e. Arhimed je živeo od 287 do 212 g. pr. n. e. — Prev.

Njegovo veliko neznalaštvo pomoglo mu je da se otrgne od nezgrapnog pisanja pomoću slika i od izražavanja čitavih misli pomoću crteža (ideograma) što je kočilo razvoj starijih civilizacija Misira i Kine. On je upotrebio stare znake i njima izrazio zvuke svoga rođenog prostog jezika. Stekao je glasovnu azbuku pomoću koje je počeo pisati proste, jasne rečenice. Pošto nije imao od starina izrađene verske obrede, on se prema popovskim tajnama odnosio radoznalo, a ne kolenopriklono. Njega nisu bili naučili da veruje da »u početku beše bog«. U početku je bio haos. On je počeo da zavodi red u onome što je poznao bio kao haos.

Nama je nepoznato da li su ovi severni divljaci što su pregazili severoistočni deo Sredozemlja zbilja imali plave oči i da li su zbilja imali plavu kosu. Znamo samo da nema ni trunke opravdanja verovanju da su naučne tekovine grčke civilizacije plod njihove rasne sposobnosti. Dva čoveka koji se smatraju osnivačima grčke geometrije, Tales (640—546 pre n. e.) i Pitagora (582—507 pre n. e.) bili su obojica feničanskog porekla. Prirodne nauke i matematika javljaju se na grčkom kopnu tek kad su Grci gotovo već završili svoje formiranje. One su bile donete na Periklov dvor sa obala Male Azije po nalogu Aspazije, njegove dragane, koja je i sama bila iz Mileta. Iz Mileta, u kome se rodio i sam Tales, došao je, na njen poziv, Anaksagora.

Pitagora i Empedokle, koji je prvi pisao o praznom prostoru *(vacuum)*, živeli su u Italiji i Siciliji. Demokrit koji je razmišljao o atomima, živeo je u Abderi, na obali morskoj nasred puta između Male Azije i Grčke. Zvezda Grčke nauke bila je već zašla kad je počelo obožavanje atinske filozofije. Ta nauka nije nikad bila grčka u geografskom smislu, a na svome početku nije bila grčka ni u rasnom smislu.

Pitagora je poreklom iz Tira i to njegovo poreklo nam objašnjava zašto se jasno vidi kineski uticaj u njegovom učenju o kojem ćemo govoriti u narednoj glavi. On je putovao po Aziji. Dok se još učio bio je u dodiru sa velikom trgovačkom zajednicom koja je pretstavljala prilaz trgovačkim putevima na aziskom kopnu. Tales je bio trgovac koji je imao izvesnih znanja iz mehanike. On je daleko putovao i bio je i u Misiru. Na tim putovanjima poslužio se načelima koja je on pronašao i izračunavao visinu Velike Piramide; pretskazao je Sunčevo pomračenje od 28 maja 585 pre n. e.; pravio je oglede s ćilibarem i time izveo prva poznata posmatranja električnog privlačenja; proučavao je i prirodni magnet. Nije se bavio matematikom kao sredstvom za duhovno usavršavanje. Verovatno bi se začudio da je čuo kako matematika služi i tome. Jonski Grci, kao što je bio Tales, imali su veliko preimućstvo nad svojim kineskim savremenicima u tome, što su živeli po ostrvskim i po obalskim zajednicama gde nije postojala od ranije utvrđena kasta verskih službenika. To jasno vidimo iz jednog odlomka iz dela prvog velikog materijaliste Demokrita, o kome je Karl Marks napisao svoju doktorsku tezu. Evo šta kaže Demokrit:

»Od svih svojih savremenika ja sam proputovao najveći deo zemlje, video najudaljenije krajeve, proučavao najraznovrsnije klime, zemlje međusobno veoma različite, i čuo najviše ljudi. Nema toga ko bi me nadmašio u geometriskim konstrukcijama i geometriskim dokazima, pa čak ni među misirskim geometrima, među kojima sam proveo pet punih godina«.

Platon je učio da je geometrija vežbanje bestelesnog duha, pa je razumljivo da je mogao izraziti želju da se spale sva Demokritova dela. Kada je za vreme Cezara spaljena čuvena prva Aleksandriska Biblioteka, s njom su propali osamdeset Demokritovih dela i sva velika astronomska postignuća Aleksandrinaca. Možda je tu propalo i mnogo koještarija, ali je zlo grčkog intelektualizma preživelo pustoš požara. Ono što je dobro bilo sahranjeno je zajedno sa njihovim pepelom. Uglavnom su pretekle iskvarena nauka Aristotelova i Platonova geometrija, što ju je Euklid doneo u Aleksandriju. Euklid je taj što je rekao da nema kraljevskih puteva za ulaz u matematiku. On je to rekao jednom vladaocu[1]), ali je bez sumnje to govorio i svojim učenicima. Kad je jedan od njegovih učenika hteo da zna čemu služi geometrija, naredio je jednome od svojih robova da tome mladiću da nešto novca, kad već taj smatra da svaki trud mora da mu se plati. Vredna kosmopolitska zajednica u Aleksandriji našla je ipak primenu za Euklidovu geometriju, uprkos shvatanjima njihovog učitelja. Naći ćemo je i mi.

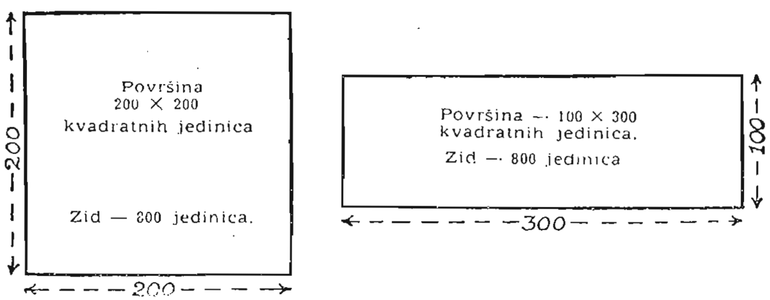
[1]) On je, priča se, to rekao Ptolomeju I, kad je ovaj u 84 svojoj godini počeo kod Euklida da uči geometriju, pa je napustio. — Prev.

GRANICE EUKLIDOVE GEOMETRIJE

U naše doba izmenila su se shvatanja o geometriji. Ta je promena naročito u vezi sa imenima Ernsta Maha i Alberta Ajnštajna. Mi danas znamo da nam Euklidova geometrija ne pruža najbolji način za merenje prostora. To ne znači da ona nije korisna naučna grana. Ona je to bila i ona je to i dandanji. Novi su nam pronalasci pokazali samo to, da ta geometrija ima svojih granica. Za mnoge stvari grčka geometrija ostaje i dalje najbolji alat koji imamo. Obične bakalske terazije korisnije su u kući nego najosetljivije hemiske terazije. Baš ta osetljivost, koja im omogućuje da nam mere atome, čini ih nepodesnim za domaću upotrebu. Mi ćemo tek imati da učimo Euklidovu geometriju za domaću upotrebu u najbukvalnijem smislu te reči. Geometrija Euklidovih jonskih učitelja osnivala se u početku baš na tome, što su ljudi posmatrali kako se gradi i kako se zemlja deli na imanja. Ona prestaje da bude korisna kad poželimo da saznamo položaj najdalje magline u sazvežđu Velikog Medveda. Ta je maglina daleko od nas više od trista svetlosnih godina. Pošto svetlost prelazi oko osamnaest miliona kilometara u minutu, potrebno joj je trista godina da pređe od te magline do zemlje na kojoj živimo.

Danas nas ne smeju iznenaditi granice preko kojih grčka geometrija nije mogla, treba samo da pogledamo kako je ta geometrija bila uslovljena, kakvom društvenom sredinom. Videli smo već kako grčka aritmetika nije mogla da izađe na kraj s kornjačom. A nije mogla ni grčka geometrija. To je dolazilo otuda što su se ljudi bili svikli da prave crteže na pesku o gotovo nepromenljivim stvarima kao što su građevine, zemljište i brodovi. Pri tome crtanju v r e m e se nije uzimalo u obzir. Linije, uglovi i slike grčke geometrije bili su utvrđeni. Zato, ako se u premeravanju sveta koji se menja rukovodimo nepromenljivim slikama grčke geometrije, moramo dobro da se obazremo, šta smo sve izostavili iz računa. Ništa nije tako čvrsto da doveka ostaje onako kako je bilo. Kad kažemo da površina FNRJ iznosi 256 943 kvadratna kilometra, smatramo da se njene granice neće menjati za ono vreme za koje nameravamo da upotrebljavamo taj podatak i da se zapremina zemlje nije primetno izmenila za to vreme. Međutim svet se smanjuje hladeći se. Zemlja se smežurava poprilično u vremenu koje obuhvata nekoliko geoloških doba.

Kad kažemo da je zapremina nekog sanduka tolika i tolika, onda je to na osnovu podataka koji se ne menjaju od trenutka kad je sanduk načinjen pa do trenutka kad biva iscepan za gorivo. Pri ovoj društvenoj primeni podataka o zapremini vreme ne igra ulogu. Zato mi izdvajamo čvrsti prostor od vremena. Kad kažemo da jedna njiva ima toliku i toliku površinu, mi i tu izostavljamo činjenicu da se zemlja smežurava hladeći se, i nastojimo da damo što tačniju približnu vrednost površine. Čak i ako smo, recimo, poslovno zainteresovani na kopanju ruda, ne možemo kopati do zemljinog centra i mešati se u rudarske poslove svojih suseda s one strane zemljine lopte. Zato izostavljamo dubinu. Prve ljude koji su merili površinu nije zanimalo pitanje rudnika i njihove eksploatacije. Njih je zanimalo koliko se žita može posejati ili požnjeti sa jedne njive, i koliko ovaca ili krava napasati na nekoj livadi. Drugi su problem imali da rešavaju kad im je valjalo sagraditi zid da zaštite stada ili vinograde, ili neki hram u kome će umilostiviti bogove koji upravljaju kišom, godišnjim dobima i Suncem. Na sl. 28 videćete kako



SL. 28. — MERA U DRUŠTVENOJ PRIMENI

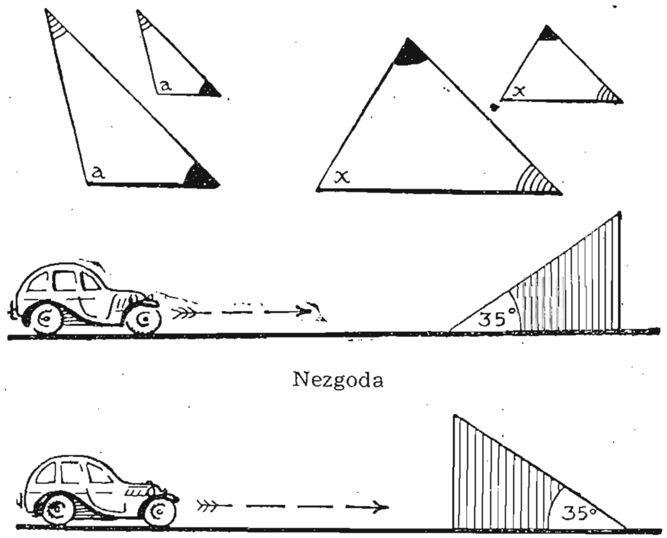
zid iste dužine može da ogradi dve njive ili dva imanja različite površine. Količina žita koju možete proizvesti ili broj stoke koju možete napasati veći su za jednu trećinu na jednome imanju nego na drugom. Kad merite dužinu vi to ne uzimate u obzir. Društveno posmatrano, to ne igra nikakvu ulogu kad se gradi zid. Dužina je mera koja se upotrebljava pri građenju zida. Površina je mera koja se upotrebljava za određivanje zemljišta za žito ili za vinograd. Zapremina je mera koja se upotrebljava u trgovini mlekom i vinom. Grčki intelektualac

nije shvatao taj odnos između mere i društvene koristi. Prvi anatomi geometriskih slika mislili su da su doprli do samog dna kad su izdvojili duž, ugao i tačku, a to znači kad su ustvari odredili tek »polazni položaj« za crtanje jedne linije. U tome je bilo nečeg nepromenljivog i bezvremenskog, a otuda i nečeg večnog. Na toj čvrstoj osnovi ostatak istine je mogao da se izgradi samo čistim razumom. Linija je bila mera čista i prosta. Tačka je bila položaj čist i prost.

Naše shvatanje je drukčije. Za nas, kao što je rekao Oskar Uajld, istina nije nikad prosta, a retko je čista. Grci su se bavili anatomijom mrtvog predmeta. Izučavanje anatomije moralo je prethoditi fiziologiji živog, pokretnog, promenljivog tela. Anatomija nas uči gde se nalaze pojedini delovi tela, kako da se snađemo u unutrašnjosti nekog tela. Geometrija ravnih slika uči nas kako da nađemo put kroz ravne slike. Anatomija nam sekcijom prikazuje prirodu leša. Geometrija nam sekcijom prikazuje prirodu ravnih slika. Udžbenici anatomije ne počinju uvek na istome mestu. Ne mora ni proučavanje geometrije da počne uvek na istome mestu. Kad vidimo kako su međusobno povezani organi ravne slike — linije, uglovi i površine — ostaje nam na volju odakle ćemo početi, tj. šta ćemo primiti kao nešto što se po sebi razume. Nema večite istine o tome odakle treba početi. Pravila o ravnim figurama ili o prostornim figurama pretstavljaju približne istine ukoliko se uopšte mogu koristiti pri merenju promenljivog sveta. Ona su dobri modeli kojima se rukovodimo pri građenju ili pri delenju zemljišta. Do izvesne tačke ona su dobri modeli za opisivanje i onog velikog sveta zvezda. Demokrit nije uludo traćio vreme kad je proveo punih pet godina posmatrajući kako te stvari izvode Misirci, jer je posle mogao te iste principe izložiti svojim zemljacima. Geometrija u ovoj glavi jeste isključivo geometrija slika koje možete nacrtati lenjirom i šestarem (kao što je propisivao Platon). U njoj nema ni pomena o onoj savršenoj jednakosti koja u grčkoj aritmetici postoji između muških i ženskih celih brojeva. Uglovi, linije i površine koje ova obuhvata mogu se izraziti samo brojevima one rastegljive vrste koji se upotrebljavaju za stvarna premeravanja. Tvrđenje $AB = CD$ ne znači »duž AB je potpuno jednaka sa duži CD«, pošto niko živi ne zna kako da nacrta potpuno jednake duži šestarem i lenjirom kojima se mi služimo. Tačan prevod gornjeg tvrđenja je »i z m e r i AB d a b i d o b i o dužinu CD onoliko tačno koliko ti je potrebno«.

Grci nisu bili svikli na korenite i brze promene društvenih običaja. Oni su vreme računali pomoću sunčanika i peščanika. Nisu imali fizičkih instrumenata za merenje vremena u kraćim razmacima nego što je vreme potrebno da se obari jaje. Sasvim je bilo prirodno shvatanje da merenje prostora i merenje vremena nemaju nikakve veze.

Neimarstvo, zemljomerstvo i trgovina izvršili su »sekularizaciju« prostora[1]). U zemljama po kojima su putovali grčki



Sl. 29.

Gore. — Trougli mogu imati isti oblik, tj. imati jednake uglove, ali biti razne veličine.

Dole. — Trougli mogu imati isti oblik i istu veličinu, a da ne budu potpuno jednaki u svakom pogledu, sem ako imaju i isti položaj.

matematičari određivanje vremena pretežno je i dalje bilo isključivo pravo sveštenika. Grčka geometrija im je prepustila vreme da se njime i dalje oni bave. Čak i sam Arhimed, koji je geometriju učio u Aleksandriji i koji ju je primenio pri kon-

[1]) Istrgli ga iz ruku sveštenstva. — Red.

strukciji poluga i kotura, mislio je da duž mora biti prava pošto je ona najkraće rastojanje između dveju tačaka. Za većinu praktičnih poslova to je tačno. Ali to nije neizbežna i večita istina. U stvarnome svetu nerazdvojni su prostor i pokret u vremenu.

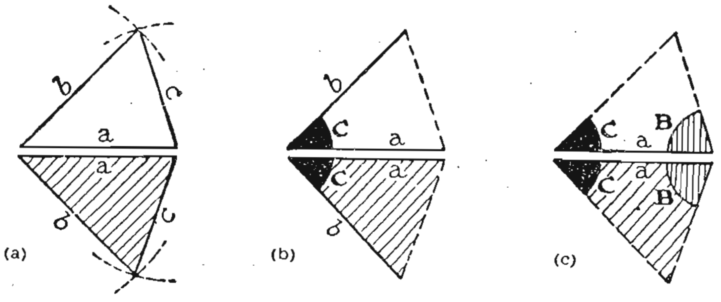
Činjenica je da je Euklid izostavio vreme, a s tom činjenicom je u tesnoj vezi još jedna granica njegove metode. Ta će se granica opet pojaviti kad budemo videli kako su Arapi počeli da prave matematičke rečenice na rečeničkom jeziku. Kad su se Arapi za grafičko rešavanje računskih problema, poslužili ravnim slikama, kakve su Grci crtali, brzo su zapazili jedno zanimljivo neslaganje. Njihovi su modeli samo na jedan način mogli da dadu odgovor na izvesno pitanje. Na neka pitanja međutim moguće je dobiti nekoliko odgovora, a Arapi su dosta znali o brojevima, te im je bilo poznato da od dva broja mogu oba da budu pravilan odgovor na neka postavljena pitanja. Ova se neprilika pojavila iz jednog prostog razloga. Pojedinačne Euklidove slike nemaju svoj posebni položaj. I zbilja je grčka geometrija tvrdila za izvesne stvari da su jedno te isto iako su očevidno različite. Iz geometrije je zajedno s *vremenom* izbačen i *položaj*. Kad je to pitanje položaja broda koji se kreće na pučini upućivalo na novu geometriju, ona nam je istovremeno ukazala i na to kako da pretstavimo vreme. Na slici 26 videli ste da je Ahil stigao kornjaču u doba Reformacije koja je izbacila svece iz kalendara i otela vreme od popova.

Ova ograničenja u Euklidovoj geometriji dovode nas do prve tri definicije koje će nam poslužiti kad počnemo da raščlanjavamo ravne figure. To su naša prva uputstva kako da pristupimo predmetu i kako da rukujemo svojim anatomskim nožem. U Euklidovoj geometriji se kaže da slike mogu biti jednake ili po obliku, ili po veličini, ili po obliku i veličini. Kad su jednake i po obliku i po veličini Euklid kaže za njih da su jednake u svakom pogledu[1]). Slike ograničene pravim linijama jednake su po obliku, one su »slične« (upamtite u kom je smislu ta reč upotrebljena) samo kad su im uglovi redom jednaki. One su jednake po veličini kad su im jednake i strane i uglovi i kad obuhvataju jednake površine. Dva trougla mogu obuhvatati jednake površine, a da nemaju jednake strane i jednake uglove. Dovoljno je da pogledate sl. 29, pa da vidite da sem veličine i

[1]) Mi to danas kažemo »podudarne«. — Prev.

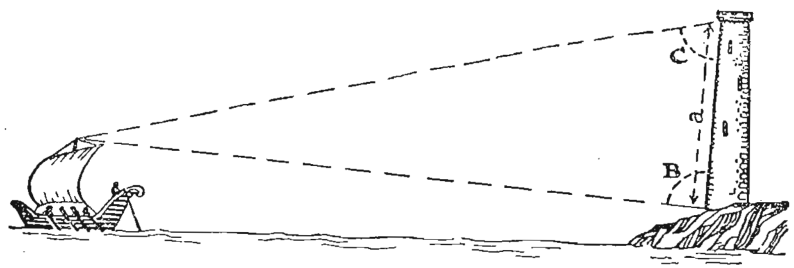
oblika, moramo da uzmemo u obzir i drugu jednu važnu karakteristiku slike kad njome hoćemo da pretstavimo stvarni svet oko sebe.

Ne moramo lupati glavu o tome kako je Euklid pokušavao da dokaže kada trougli imaju istu veličinu. On je počeo sa »sekciranjem« na najtežem mestu. Kad hoćemo da crtamo neki trougao i kad smo se rešili kakav će mu biti položaj, blizu je



KAKO SE CRTA TROUGAO

a) Poznate dužine sve tri strane.
b) Poznate dužine dve strane i veličina zahvaćenog ugla.
c) Poznata dužina jedne strane i dva ugla što ih one druge dve strane grade s poznatom stranom.



JEDNA OD NAJSTARIJIH PRIMENA SLUČAJA POD (C). PRIPISUJE SE TALESU

Sl. 30.

pameti da se upitamo koji su nam podaci za to potrebni. Čak i kad smo utvrdili položaj jedne trouglove strane (sl. 30), uvek postoje četiri trougla koja možemo nacrtati pre nego što nam se kaže nešto više o položaju u kome ima da se nacrta taj tro-

ugao. Dva, jedan nad drugim, data su na sl. 30, a i druga dva koji odgovaraju trouglovima koji se dobijaju kad se ona dva izvrnu sleva nadesno. Grčki prikaz ravnih figura koristan je jer pruža model stvarnoga sveta na kome su lako merljive dužine, uglovi i površine jednake sa drugim dužinama, uglovima i površinama koje možda nije lako izmeriti. Grčka metoda izlaganja ovih približnih istina velikim delom se oslanja na jednu dosetku. Ta se dosetka sastoji u tome, da se jedna slika izdeli na trougle, da se utvrdi koji su trougli »jednaki u svakom pogledu« i da se tako pokaže koje su duži i koji uglovi međusobno jednaki. Iz razloga već objašnjenih nikad ne možemo znati da li su delovi slika nacrtanih lenjirom i šestarem jednaki potpunce. I pošto smo praktični ljudi, odbacićemo izraz »jednaki u svakom pogledu«, pa ćemo reći da su trougli slični ili nisu slični (jednaki uglovi); da trougli imaju ili nemaju jednake površine; da su trougli podudarni ili da nisu podudarni (jednake strane, jednaki uglovi i jednake površine). Da bi bili jednaki u svakom pogledu, dva trougla moraju imati i četvrtu karakteristiku: isti položaj. U tome slučaju oni ustvari pretstavljaju jedan jedini trougao. Ako dva podudarna trougla nisu identični, te zbog toga zauzimaju dva razna položaja, oni se mogu razlikovati na dva načina prema tome da li su ogledalske slike jedan drugome ili nisu.

Ako smo odlučili u koji će položaj da se stavi neki trougao, možemo ga nacrtati ako znamo jednu od tri vrste podataka (sl. 30). Prva je: dužina sve tri strane. Kad smo nacrtali jednu stranu, opišemo krug čije je središte na kraju već nacrtane strane, a poluprečnik mu je dužina jedne od onih drugih dveju strana. Zatim opisujemo drugi krug s centrom na drugom kraju nacrtane strane i poluprečnikom koji je jednak sa trećom stranom. Gde se ta dva kruga preseku nalazi se jedino mesto u kome se mogu sastati strane datih dužina. Ako je njihov zbir manji od prve strane, te dve strane se ne sastaju i trougao se ne može nacrtati. Ovo uputstvo za crtanje trougla osniva se na činjenici da je rastojanje od kružnog središta do neke tačke na kružnom obimu jednako s rastojanjem kružnog središta do ma koje druge tačke na kružnom obimu. Ova definicija kruga je ustvari jednostavan opis prvobitnog crtanja kruga (sl. 18): zategnuto je uže između dveju motki pobodenih u pesak, i dok je jedna motka utvrđena druga se okreće.

Po drugom »receptu« za crtanje trougla treba da su date dužine dveju strana i ugao što ga one zaklapaju. Ovo je lako, pošto imamo samo da spojimo krajeve datih strana. Ako je ugao veći od dva prava ugla, (veći od 180°) onda ne možemo nacrtati trougao u kome bi to bio jedan od uglova. Treći način crtanja trougla je: nacrtati trougao kad je data jedna strana i uglovi što ih one druge dve strane zaklapaju sa njom. U tome slučaju možemo nacrtati trougao sve dotle dok je zbir dva data ugla manji od 180°. Kad nacrtamo ta dva ugla imamo samo da im produžimo krake do preseka. Sl. 30 pokazuje kako je to uputstvo primenjivano još u davno doba da se načini srazmerna slika na osnovu koje se može naći rastojanje broda od obale.

Sad možemo da iskažemo tri pravila koja prikazuju veze između delova slika kad smo ih rasekli na trougle:

P r v o p r a v i l o o p o d u d a r n o s t i t r o u g l o v a. — Dva trougla su podudarna ako su im jednake strane.

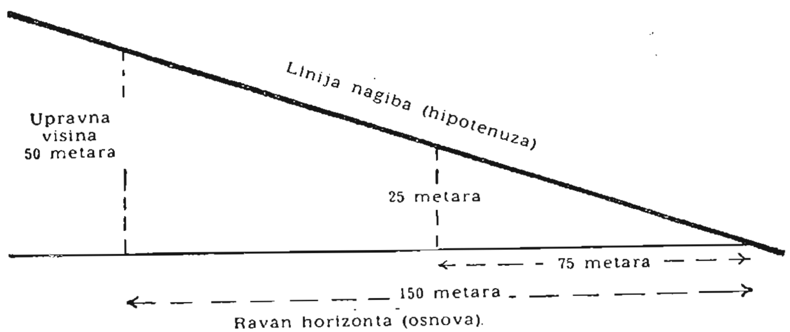
D r u g o p r a v i l o o p o d u d a r n o s t i t r o u g l o v a. — Dva trougla su podudarna, ako su u jednome trouglu dve strane i njima zahvaćeni ugao jednaki s dvema stranama i njima zahvaćenim uglom u drugom trouglu.

T r e ć e p r a v i l o o p o d u d a r n o s t i t r o u g l o v a. — Dva trougla su podudarna, ako su u jednome trouglu jedna strana i uglovi što ih one druge dve strane grade s njom jednaki s jednom stranom i uglovima što ih druge dve strane grade s njom u drugom trouglu.

Treće ograničenje u Euklidovoj geometriji pravi je mnogo težom nego što bi ona morala biti. Jonski geometar Tales dokazao je jednu osnovnu istinu o trouglovima. Ona je u ovome: odnos dužina ma kojih dveju odgovarajućih strana u sličnim trouglima (tj. trouglovima koji imaju jednake uglove) uvek je isti, bez obzira na dužinu strana. Mi ćemo videti docnije kako je on to iskoristio da nađe visinu Velike Piramide. Mi primamo tu istinu u većini slučajeva kad se služimo geometrijom da u razmeri nacrtamo neku sliku na kojoj ima trouglova. Čim usvojimo tu istinu, možemo brzo napred ka donošenju drugih korisnih zaključaka. Glavni razlog što je Euklidova geometrija tako dosadna u tome je, što je Euklid u svom izlaganju sve o razmerama stavio na kraj, mesto da to stavi na početak. Postoji sasvim prost uzrok. Njegova je geometrija bila uslovljena društvenom kulturom u kojoj je nastala. Grci nisu živeli u svetu kamata

i potrošnje benzina i računanja verovatnoće. Razmere nisu bile obična stvar. One su pretstavljale zametan posao deljenja, koji se izvodio na jednom vrlo krutom instrumentu, na računaljci. Euklidovim đacima nije bilo lako da savladaju proporcije.

Lako nam je shvatiti muke Euklidovih đaka. Pretpostavimo da znamo da neki auto troši na 100 kilometara 10 litara benzina. Broj kilometara koji mogu da pređem bez novog punjenja, dobiću kad broj litara benzina koji se nalazi u rezervoaru pomnožim sa deset. Mogu da izračunam koliko mi litara treba, kad podelim sa deset broj kilometara koje hoću da pređem. Oba su ta posla laka u našoj aritmetici. Drukčija je aritmetika na računaljci. Kad pomnožite neki ceo broj drugim celim brojem imate tačan rezultat; dobićete ga sabirajući više puta (sl. 6). Deliti

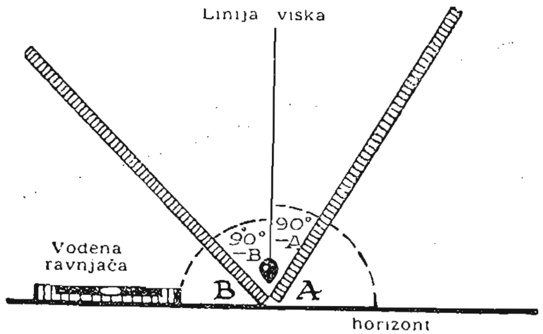


SL. 31. — NAGIB JEDAN PREMA TRI

Ako je A ugao između linije nagiba i ravni horizonta, biće tang $A = 1/3$. Ova je slika u isto vreme hijeroglif za deljenje sa 3. Da biste ga iskoristili, označite duž osnove broj jedinica koje imaju da se dele, pa izmerite upravnu. — Prev.

jedan ceo broj drugim znači naći koliko se puta drugi broj može oduzeti od prvoga. Obično vam pri tome oduzimanju pretekne nekoliko zrnaca na računaljci. Retko ćete dobiti tačan odgovor. Zato je deljenje bilo mnogo teže shvatiti u doba kad su ljudi mislili da su svi stvarni brojevi celi brojevi. Euklid je posvetio celu jednu glavu (petu »knjigu«) objašnjenju vrlo prostih pravila o proporcijama, koja su u našoj knjizi sva obuhvaćena dijagonalnim pravilom iznetim u poslednjoj glavi. Nacrtajte dva pravougla trougla čije su katete 3 santimetra i 4 santimetra i drugi čije su katete $1\frac{1}{2}$ santimetar i 2 santimetra. Uporedite ih. Videćete da je lako zapaziti kakvi su to trougli čije odgovarajuće strane imaju isti odnos, kao što je lako zapaziti da motorcikl troši istu količinu benzina na veliki petak kao i prvog aprila.

Razmera strana jednog trougla jeste danas nešto sasvim obično. Ona se nalazi označena duž železničke pruge i blizu opasnih uspona. Nagib izražen kao odnos 1 prema 10 znači ovo: Nacrtajte pravougli trougao u kome je jedna strana deo strmoga puta, ili uspona (hipotenuza), druga strana vodoravna (nalegla kateta), a treća upravna na njoj (naspramna kateta)



SL. 32. — KAKO SE UČI SABIRANJE UGLOVA

ali tako da nalegla kateta bude deset puta veća od naspramne katete, tj. da naspramna kateta bude jedan deseti deo nalegle katete. To znači:

$$\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}} = \frac{1}{10}$$

U matematici se ovaj odnos često zove *tangens* ugla (A) koji nagib zaklapa s horizontom, pa se onda piše tang A. To znači »Pogledaj u tablici za tangense koji broj odgovara uglu A«[1]). Dve matematičke grane koje ćemo docnije proučavati

[1]) Kad pogledate u tablice, videćete da je tang 5°43' skoro tačno 0,1. I tako razmera 1 : 10 odgovara nagibu od 5°43'.

(glava 6 i 11) uglavnom se odnose na razmere. Trigonometrija ih svrstava u tablice, tako da možemo izračunati neko rastojanje koje je teško ili čak i nemoguće meriti (kao što je naše rastojanje od Meseca). Tako rastojanje ćemo dobiti ako možemo da izmerimo neki ugao (A) i neko drugo rastojanje (na primer rastojanje između dva mesta na Zemlji). To je kao kad se poslužimo brojem potrošenih litara benzina na jedan kilometar, da saznamo koliko kilometara možemo da pređemo s benzinom što ga imamo u rezervoaru, ili koliko nam benzina treba za broj kilometara koji želimo da pređemo. Matematička grana koja se zove diferencijalni račun meri nagibe koji se menjaju, kao kad bi se računalo koliko smo kilometara prešli prema potrošenom benzinu — kad rezervoar curi. Da je Euklid slutio koliko će postati važni ovi odnosi, on bi zapeo da ih, kao mi ovo danas, uvede malo ranije u svoj tečaj.

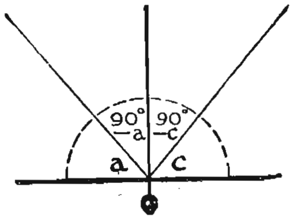
EUKLIDOVA METODA

Kad je Šerlok Holms po svom običaju govorio: »Vi znate moje metode, Vatsone«, dr. Vatson je trebalo da mu odgovori: »Ne znam. Molim vas objasnite mi ih«. Već smo zapazili glavnu dosetku kojom se Euklid poslužio da bi otkrio veze između organa (duži, uglova, ili površina) mrtvih slika. On ih je »seckirao« rasecao na trougle. Ako znamo veličinu jedne ili samo dveju njihovih strana, moramo znati i to da li imaju i jednakih uglova, pa tek onda da ustanovimo jesu li ti trouglovi jednaki i kako. Pastirski stepen, koji se osniva na kalendaru godišnjih doba, ne može nam pomoći da saznamo kad su uglovi jednaki. Geometri gradova-državica služili su se varoškim uglom neimarâ kad su upoređivali uglove (sl. 32). Euklidova definicija pravog ugla kazuje samo toliko da je zev između viska i horizonta isti na obema stranama. Ovo je toliko očigledno, da se na to ne moraju straćiti punih pet godina u Misiru. Dva ugla sačinjavaju zajedno prav ugao ako jedan pretstavlja nagib prema horizontu, a drugi nagib prema visku. Ako proučite tekst uz sl. 33, lako ćete zapaziti dva pravila kojima su se služili grčki geometri da bi saznali kad su dva ugla jednaka. Ovo su ta pravila:

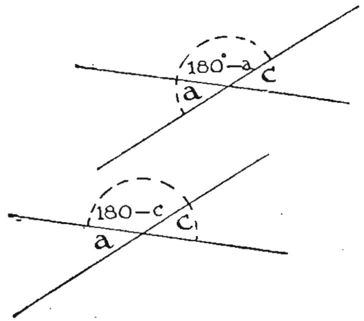
P r v o p r a v i l o o u g l o v i m a. — Kad se dve prave stiču u jednoj tački na trećoj liniji grade tri ugla koji zajedno iznose 180°.

D r u g o p r a v i l o o u g l o v i m a. — Kad se dve prave seku naspramni uglovi su jednaki[1]).

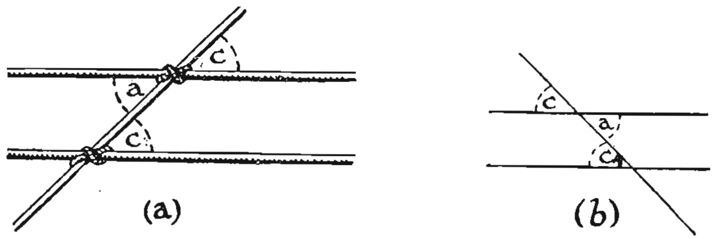
Dva druga pravila koja nam pomažu da utvrdimo da li su dva ugla jednaka, potsećaju na četvrto ograničenje Euklidove



Prvo pravilo o uglovima. Srednji je ugao $90° - a + 90° - c$ ili $180° - a - c$
Sva tri zajedno iznose: $(180° - a - c) + a + c = 180°$



Drugo pravilo o uglovima. Ista slika je nacrtana dvaput. Kad ih uporedimo, vidimo: $180° - a = 180° - c$. Uglovi a i c zovu se unakrsni uglovi.



Dva pravila o paralelnima.
(a) Kako se proverava jesu li dve motke paralelne.
(b) Da se nauči kako se poznaje jesu li jednaki uglovi koji su nacrtani na razne načine.

Sl. 33.

geometrije. Euklid je ovako definisao paralelne prave. Dve su prave paralelne ako se ne seku ma koliko ih mi produžavali. Ova nas definicija diže u oblake i ostavlja nas u vazduhu kao

[1]) Mi ih zovemo »unakrsni« uglovi. — P r e v.

Platon. Mi prosto ne znamo nijednu tako ravnu površinu na kojoj bismo mogli do mile volje produžavati prave linije, a da one uvek ostanu prave. Mi izvodimo crteže na jednom komadiću zemlje, odveć malom prema čitavoj Zemlji, koji nam stoga izgleda kao da je zbilja ravan. Moderna astronomija nas uči da prave linije, paralelne u Euklidovom smislu, nisu te koje bi dospele do najdaljih zvezda, kad bismo mogli dospeti do njih. Mnogo je pametnije da se upitamo kako raspoznajemo da li su prave paralelne. Jedan način bi bio ovaj. Dve su prave paralelne ako se i jedna i druga razjape za istu uglovnu veličinu prema nekoj trećoj pravoj, tj. kad su o d g o v a r a j u ć i uglovi jednaki (sl. 33). Ako se vratite na sl. 12 i uporedite je sa sl. 33, videćete da je to načelo na kome se osniva upotreba astrolaba za merenje nagiba brda ili zvezde prema horizontu. D r u g o p r a v i l o o u g l o v i m a kaže nam da su onda i naizmenični uglovi jednaki (a i c_1 na sl. 33). To nam daje dva nova pravila za jednakost uglova.

P r v o p r a v i l o o p a r a l e l n i m a. — Kad treća prava seče dve paralelne prave, jednaki su o d g o v a r a j u ć i uglovi što ih ona zaklapa s njima.

D r u g o p r a v i l o o p a r a l e l n i m a. — Kad treća prava seče paralelne prave, n a i z m e n i č n i uglovi su jednaki.

Dve su duži jednake ako pretstavljaju odgovarajuće strane u podudarnim trouglima; ako pretstavljaju kvadratove strane; ako pretstavljaju krake ravnokrakog trougla. Ali postoji još jedan važan način da raspoznamo kad su dve duži jednake. Već smo se njime poslužili. Drugo pravilo može izgledati toliko očevidno, da ga ne treba ni iznositi, ali ćemo ga izneti zato što nam ono pomaže da se izvučemo iz jedne velike teškoće. Da bismo ustanovili da su dva trougla podudarna, moramo biti sposobni da utvrdimo da li imaju bar po jednu stranu jednaku. Ako ispitujemo geometrisku sliku na kojoj ne možemo da nađemo jednake strane, možemo je raseći na dva trougla tako što ćemo je preseći jednom duži. Ta dva trougla imaju onda jednu zajedničku stranu. To znači: jedna strana u jednom trouglu jednaka je s jednom stranom u drugom trouglu. Euklid je upotrebljavao i treću desetku koja nama neće biti potrebna. Nama je potrebno da postavimo samo dva pravila. Prvo se izvodi iz načina kako se crta krug na pesku pomoću konopca i dva štapa.

Prvo pravilo o dužima. — Dve su duži jednake, ako su poluprečnici jednog istog kruga.

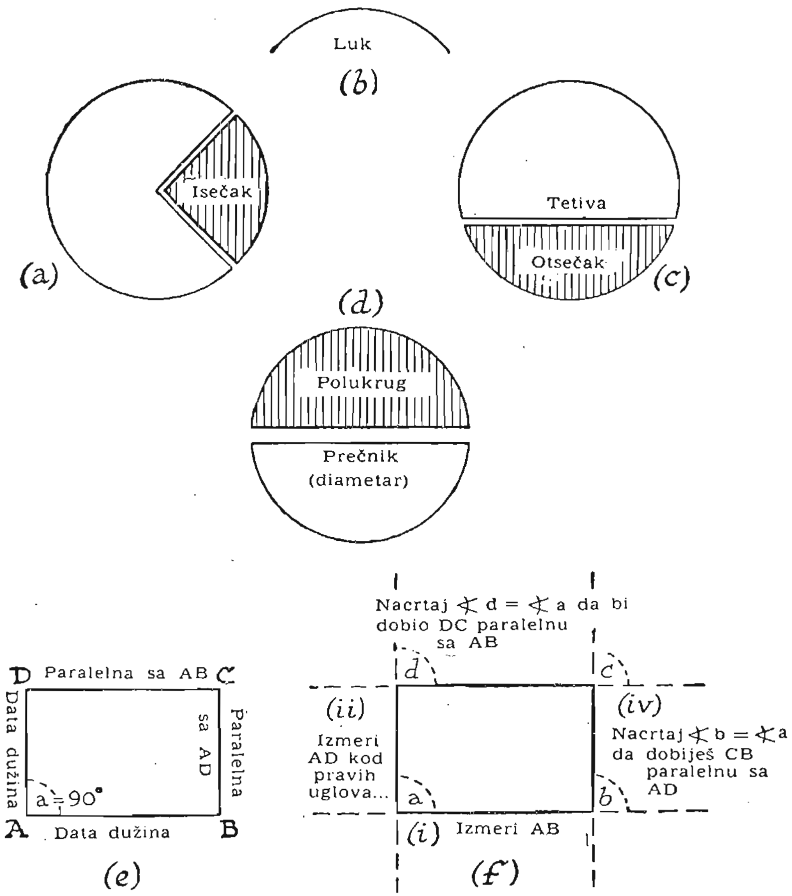
Drugo pravilo o dužima. — Ako povučete duž koja spaja dva temena jedne pravoliniske slike, time sliku delite na dve slike koje imaju jednu zajedničku stranu, tj. tu duž što ste je vi povukli. I tako je bar jedna strana jedne slike jednaka s jednom stranom druge slike.

Jedino još uputstvo potrebno da nam kaže gde da počnemo rasecanje jeste uputstvo kako da rasecamo krug. Krug se može iseći na zasebne režnjeve ili sektore (isečke) povlačenjem dva ili više poluprečnika; ili na segmente (otsečke) povlačenjem duži od jedne tačke na obimu do neke druge. Kriva strana na isečku ili na otsečku zove se luk. Duž povučena od jedne tačke na obimu kroz središte do naspramne tačke na obimu zove se diametar (prečnik). Prečnik deli krug na dva jednaka dela. Svaki takav deo zove se *polukrug*.

Dosad ništa nismo rekli o pravougaoniku. Sve što treba da znamo da bismo nacrtali pravougaonik jeste ovo: to je zatvorena slika, ograničena sa četiri duži, na kojoj su suprotne strane paralelne i jedan ugao prav. Kad upotrebite prvo pravilo o paralelima da biste nacrtali pravougaonik, iz toga pravila izlazi da, ako je jedan ugao prav, svi uglovi pravougaonikovi moraju biti pravi (sl. 34, f).

Veoma je mali broj onih geometriskih pravila koja su onima što su došli posle Grka omogućila da izgrade korisnije i lakše jezike dimenzija — trigonometriju i algebru. Dvanaest će nam biti dovoljno. Mi ćemo ih poređati u tri poglavlja koja obeležavaju društvene uslove u kojima su se ta pravila pojavila. Euklid je izlaganje pravila o nekoj figuri zvao teorema. Idući za materijalistom Demokritom, mi ćemo to zvati dokaz (demonstracija). Prema načinu na koji su oni prvi put upotrebljeni ili prvi put zapaženi, mi ćemo ih podeliti u ove tri grupe: četiri dokaza u zemljomerstvu, četiri dokaza o merenju senki pri podizanju građevina, i četiri dokaza pri posmatranju zvezda ili četiri dokaza iz kalendarskog znanja. Ipak moramo najpre upotrebiti tri pravila o podudarnosti trouglova, da bismo

objasnili tri metode rasecanja kojima ćemo se služiti kad ih budemo dokazivali. Pre nego što postanete anatom, morate naučiti kako da se služite priborom za sekciranje.

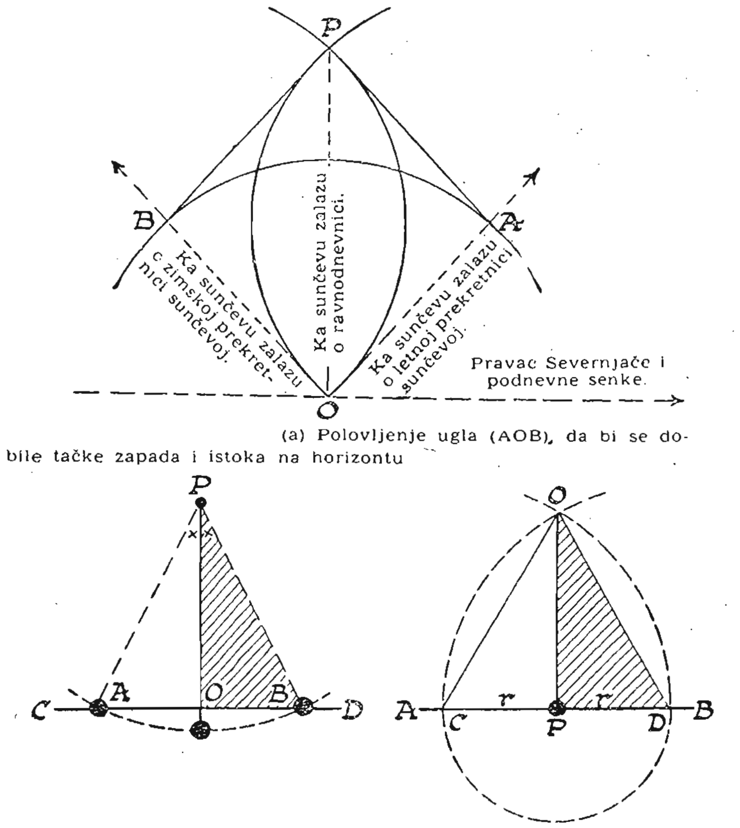


SL. 34. — ELEMENTI KRUGA I PRAVOUGAONIKA

NAPOMENA. — Da biste nacrtali paralelne strane primenite prvo pravilo o paralelnima. Počnite time što ćete nacrtati ugao $a = 90°$. Odatle ćete saznati da su svi uglovi pravi.

PRAVILA ZA RASECANJE

(a) Kako da se raseče ugao na dva jednaka ugla (bisekcija ugla). — Videli smo u drugoj glavi da se ovo osniva na poslu koji su neimari hramova imali da obave crta-



(a) Polovljenje ugla (AOB), da bi se dobile tačke zapada i istoka na horizontu

(b) Spuštanje upravne iz tačke P iznad prave.

(c) Dizanje upravne u određenoj tački P na pravoj

SL. 35. — PRAVILA ZA RASECANJE

jući na pesku meridijane, da bi hram bio pravilno postavljen. Uporedite prvi deo (a) na sl. 35 sa sl. 9. Sl. 35 nam pokazuje

kako su oni mogli dobiti pravu liniju upravljenu tačno na zapad, da uhvate zalazak Sunca na dan velike svečanosti plodnosti o prolećnoj ravnodnevici. Trouglovi BOP i AOP su podudarni, jer su tri strane jednog trougla jednake s trima stranama drugog trougla (prvo pravilo o podudarnosti trouglova). Pošto su poluprečnici krugova opisanih iz A, B i O jednaki (isti komad užeta upotrebljen za sva tri), izlazi:

$$BP = AP$$
$$BO = AO \quad \text{(Prvo pravilo o dužimа)}$$

i

$$OP = OP \quad \text{(Drugo pravilo o dužima)}$$

Ako su trouglovi BOP i AOP podudarni, ugao BOP zahvaćen stranama OB i OP jednak je uglu AOP zahvaćenom odgovarajućim stranama AO i OP. Ugao na slici je od 90^0. Ova se metoda može primeniti i na svaki drugi ugao.

(b) Kako da se spusti upravna na neku pravu. — Ovo se osniva na posmatranju klaćenja viska. Visak je vertikalan kad je na sredini puta između svoja dva krajnja položaja pri klaćenju. Na slici 35 (b) hoćemo da spustimo upravnu iz tačke P na pravu CD. Najpre opišite proizvoljan krug s centrom u P, a da seče CD. Naš krug seče CD u A i B. Prepolovimo ugao klaćenja pravom PO, služeći se prvom metodom rasecanja. Tako ćemo dobiti dva jednaka ugla: OPA i OPB. Kad uporedimo trouglove AOP i BOP videćemo da je:

$PA = PB$ (prvo pravilo o dužima)

$PO = PO$ (drugo pravilo o dužima)

zahvaćeni ugao $\sphericalangle APO = \sphericalangle OPB$ (prepolovili smo ugao APB).

Po drugom pravilu o podudarnosti trouglova ova su dva trougla podudarna. Otuda je ugao POA, zahvaćen stranama PO i OA, jednak s uglom POB zahvaćenim odgovarajućim stranama PO i OB. Kad jedna prava pada na neku drugu pravu tako, da gradi jednake uglove s obeju strana, ti su uglovi pravi. I tako je PO upravna na CD, tj. gradi s njom prave uglove.

(c) Kako da dignemo upravnu na neku pravu u nekoj njenoj datoj tački. — Imamo da nađemo tačku u koju treba obesiti visak. Na sl. 35(c) P je tačka na pravoj AB u kojoj ćemo dići upravnu, tj. povući jednu pravu pod pravim uglovima sa AB. Opišite krug poluprečnikom r iz centra P, koji seče AB u C i D. Zatim s centrom u C opišite krug većim poluprečnikom R i krug istim poluprečnikom iz centra D. Trouglovi COP i DOP su podudarni po prvom pravilu podudarnosti, pošto je

$$CO = R = DO$$

$$CP = r = DP$$

$$OP = OP$$

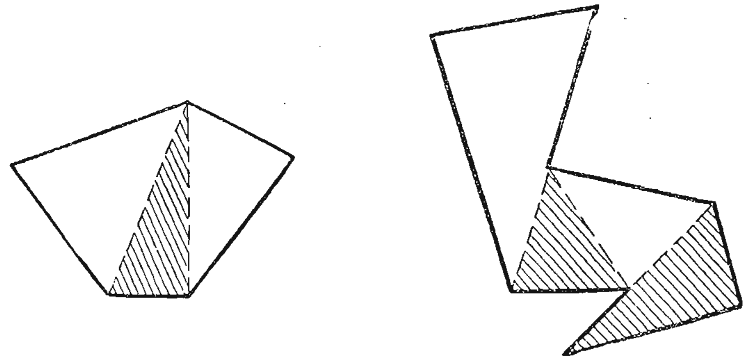
U ovim podudarnim trouglima uglovi OPD i OPC leže prema jednakim stranama. Zato su oni jednaki. I tako OP pod pravim uglovima seče AB.

Pre nego što počnemo dokaze upamtite devet pravila koja smo već izneli: tri Pravila o podudarnosti trouglova, dva pravila o uglovima, dva pravila o paralelama i dva pravila o dužima.

ČETIRI DOKAZA U ZEMLJOMERSTVU

Prva tri dokaza koja je Euklid dao u svojoj drugoj, prvoj i šestoj knjizi bili su poznati Misircima i Sumercima dve hiljade godina ranije. Poslednji dokaz, koji je dat u drugoj Euklidovoj knjizi, verovatno je grčki i mnogo docnijeg datuma. Oni se odnose na merenje površina i potekli su iz premeravanja zemljišta. Počećemo time što ćemo za jedinicu mere uzeti ravnu površinu ograničenu kvadratom. Zatim ćemo pokazati kako možemo dobiti površinu pravougaonika kao zbir jedne mreže kvadrata. Vidimo i to kako se može načiniti pravougaonik koji ima dva puta veću površinu od datog pravouglog trougla. Na taj način možemo dobiti površinu pravouglog trougla. Zatim pokazujemo kako se svaki trougao može rastaviti na dva pravougla trougla. I tako možemo dobiti površinu ma kakvog trougla. Svaka slika ograničena dužima može se rastaviti na trougle (sl. 36). Kad to znamo možemo meriti površinu ma koga komada zemljišta, ma kakav mu bio oblik, samo ako su mu strane duži. I tako je Euklidova dosetka postala metoda praktičnog zemljomera.

Sem toga što ovi dokazi pokazuju kako se meri zemljište, oni istovremeno pokazuju i kako se izvode računi. Drugi dokaz, poslednji, daje nekoliko prostih uputstava kako da se skrati posao na računaljci. Docnije su ovi dokazi naveli Arape da



Sl. 36.

Ako možemo da izračunamo površinu trougla, onda možemo izračunati i površinu komada zemljišta kakvog god oblika, pod uslovom da mu ograda ide pravo.

postave računska pravila kojima se mi i dandanji služimo. Ova se pravila zovu algebra. Može izgledati da je bolje početi od veze između pravougaonika i kvadrata, ali mi moramo da upotrebimo nešto što se osniva na vezi između pravougaonika i pravouglog trougla, da bismo pokazali kako se dobija površina pravougaonika. Zato počinjemo pravouglim trouglom i pravougaonikom.

P r v i d o k a z

»Pravougaonikova dijagonala deli pravougaonik na dva podudarna pravougla trougla«.

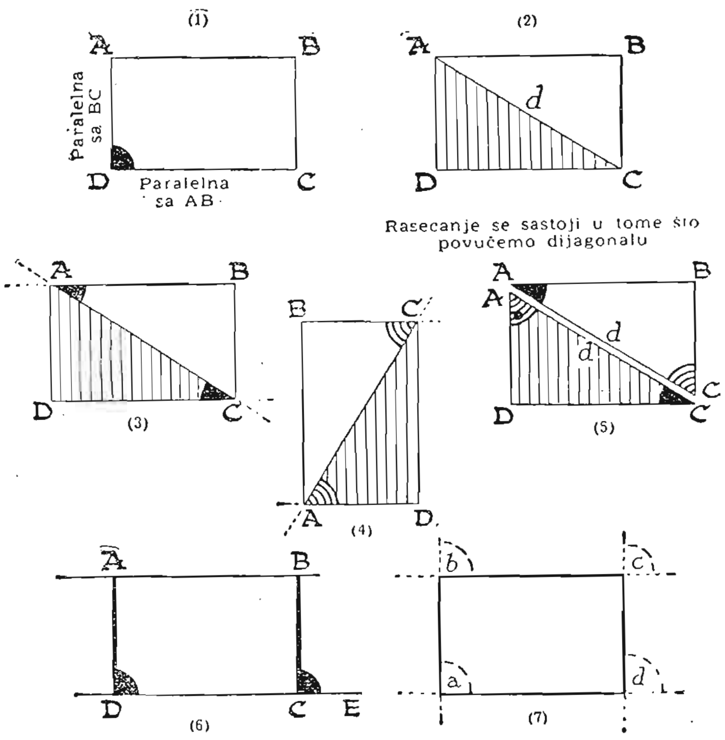
Na sl. 37 duž AC je dijagonala pravougaonika $ABCD$. Videli smo da su svi pravougaonikovi uglovi pravi (sl. 34). Zato su trougli ABC i ADC pravougli trougli u kojima je:

(1) $AC = d = AC$ (drugo pravilo o dužima).

(2) $\sphericalangle\ CAB = \sphericalangle\ ACD$ (drugo pravilo o paralelama, sl. 33 (3);

(3) $\sphericalangle\ BCA = \sphericalangle\ CAD$ (drugo pravilo o paralelama);

Kad uporedimo (5) na sl. 37 sa (c) na sl. 30, vidimo iz trećeg pravila o podudarnosti trouglova da su trougli ABC i ADC podudarni. Ovaj zaključak možemo iskazati i ovako: površinu pravougla trougla možemo naći ako možemo naći



SL. 37. — PRVI DOKAZ

površinu pravougaonika kod koga su dužina i širina jednake sa stranama pravog ugla u pravouglom trouglu. Dva važna rezultata proizlaze iz ovog dokaza.

(a) U pravougaoniku su naspramne strane jednake. Pošto su ova dva trougla podudarna, odgovarajuće strane AB i AC, DC i AC koje zaklapaju jednake uglove

CAB i ACD jednake su. Zato su jednake i odgovarajuće strane AD i BC.

(b) Upravne prave koje spajaju paralelne duži jednake su. Zašto je to tako videćemo iz (6) sl. 37. Duži AB i DE su paralelne. Ako su AD i BC dve upravne na njima, one grade jednake odgovarajuće uglove (prvo pravilo o paralelnima), te su zato paralelne. Zato su u $ABCD$ naspramne strane paralelne. A pošto ta slika ima i jedan prav ugao, mora biti pravougaonik. Zato su naspramne strane AD i BC jednake.

Drugi dokaz

»Ako je jedna pravougaonikova strana izdeljena na nekoliko otsečaka ma koje dužine, površina mu je jednaka zbiru površina pravougaonika kod kojih je jedna strana ona nedeljena strana, a druga neki otsečak na deljenoj strani«.

Strana AB dužine B na sl. 38 (1) podeljena je u P i Q na tri otsečka AP, PQ, QB čije su dužine l, m i n jedinica. Rasecanje je pokazano na sl. 38 (2), gde su iz P i Q spuštene upravne na naspramnu stranu. Time je slika podeljena na tri pravougaonika. Pošto su suprotne strane pravougaonikove jednake (dokaz 1, a) upravne su jednake sa H, tj. sa drugom stranom datog pravougaonika.

Sad možemo videti ovo:

Površina celog pravougaonika H sa B = zbir površina pravougaonika H sa l, H sa m, H sa n.

Pokušajte da zamislite da smo mi stari Misirci ili Sumeri. Imali bismo da pronađemo da ovo »sa« znači isto što i množenje na srpskom. Da bismo to pronašli, načinićemo jedan pravougaonik u izvesnoj razmeri (3), sl. 38, podelićemo jednu stranu na x dužinskih jedinica, drugu na y dužinskih jedinica (uporedi sl. 24, na kojoj je $x = 4$, $y = 3$). Ako pogledate (4), (5) i (6) na sl. 38, videćete da možemo napisati:

HB površinskih jedinica = $(Hl + Hm + Hn)$ površinskih jedinica.

A pošto je

$$B = l + m + n$$

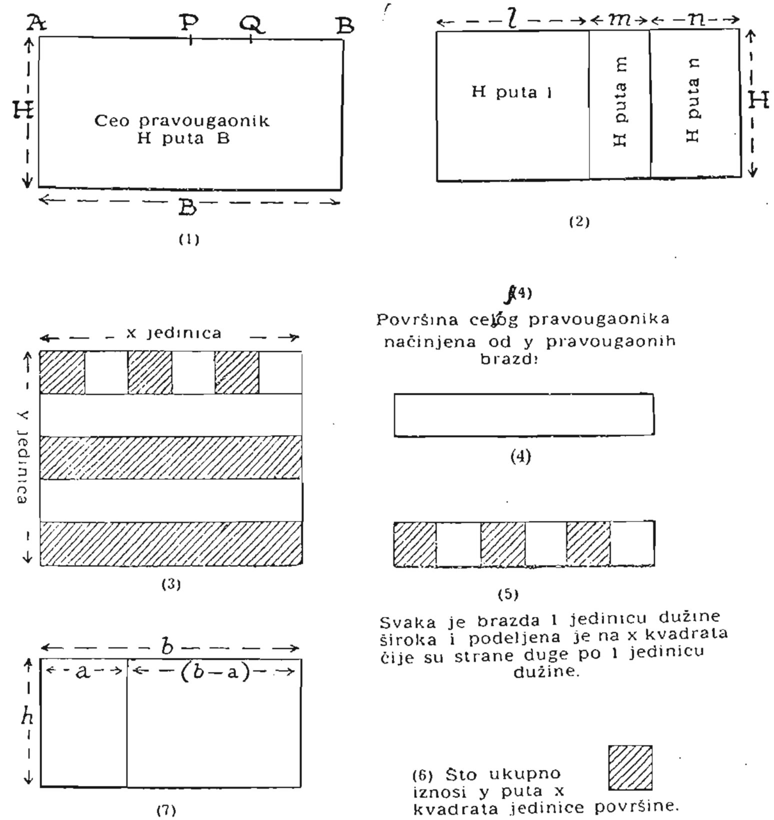
ovo se može napisati:

$$H(l + m + n) = Hl + Hm + Hn \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Ako na sl. 38 (7) od celog pravougaonika h sa b oduzmemo mali pravougaonik h sa a, dobijamo na isti način:

$$h(b-a) = hb - ha \qquad \text{(b)}$$

Ova dva zaključka mogu da se iskoriste da se skrati posao oko množenja na računaljci. Pomnožiti 36 sa 25 značilo je u početku



SL. 38. — DRUGI DOKAZ

25 puta izdvojiti po 36 zrnaca ne vraćajući ih na njihovo mesto. U Srednjem veku, kad su ljudi počeli upotrebljavati arapske cifre, nije bio običaj da se uči cela tablica množenja. Naučili

bi napamet samo množenje sa 2, pa su se time služili pri jednoj gruboj metodi koja se zvala »udvajanje«. Služeći se odnosom (a) možemo napisati:

$$36 \times 25 = 36\,(16 + 8 + 1).$$

Onda su dalje radili ovako:

$$\begin{aligned}
36 \times 2 &= 36 + 36 = 72\\
36 \times 4 &= 72 + 72 = 144\\
36 \times 8 &= 144 + 144 = 288\\
36 \times 16 &= 288 + 288 = 576\\
36 \times 16 &= 576\\
36 \times 8 &= 288\\
36 \times 1 &= 36\\
\hline
 & 900
\end{aligned}$$

U staro vreme izgleda da je bila omiljena druga jedna metoda za množenje, pošto su se stari narodi potrudili, kao što se vidi iz nipurskih tablica, te su načinili tablice kvadrata.

Možemo napisati 36×25 i ovako:

$$25 \times 36 = 25\,(25 + 11).$$

pa tako nastaviti dalje:

$$\begin{aligned}
25 \times 36 = 25\,(25 + 11) &= 25^2 + 25 \cdot 11 =\\
25^2 + 11 \cdot 25 &= 25^2 + 11\,(11 + 14) =\\
25^2 + 11^2 + 11 \cdot 14 &= 25^2 + 11^2 + 11 \cdot (11 + 3) =\\
25^2 + 11^2 + 11^2 + 3 \cdot (11) &= 25^2 + 11^2 + 11^2 +\\
&\quad + 3 \cdot (3 + 3 + 3 + 2) =\\
25^2 + 11^2 + 11^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3 \cdot 2
\end{aligned}$$

Tablice kvadrata pokazale bi da je to jednako sa:

$$625 + 121 + 121 + 9 + 9 + 9 + 6$$

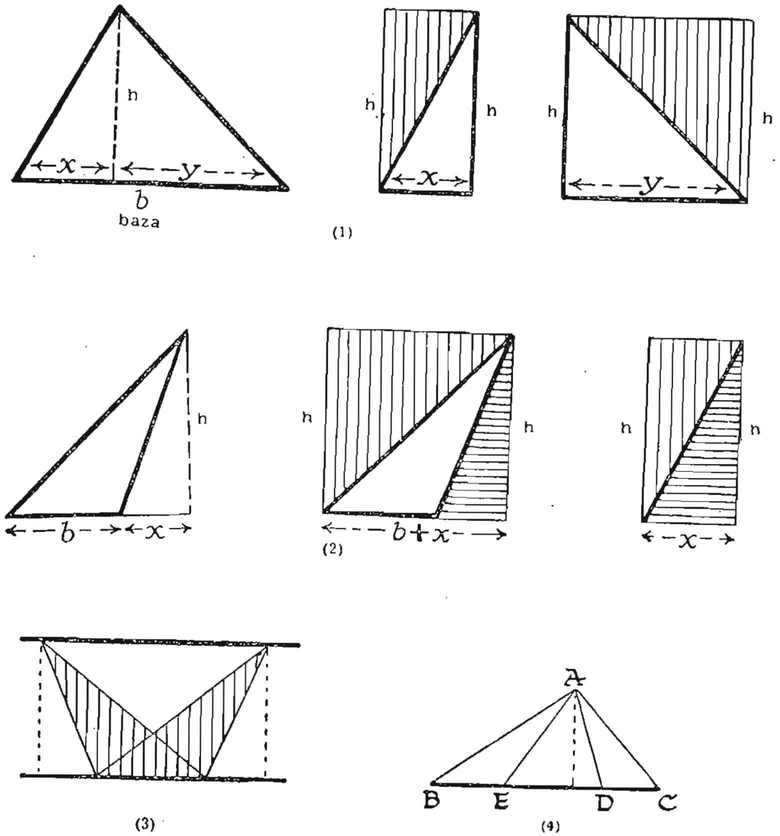
gde je poslednji proizvod $(2 \cdot 3)$ dat napamet.

Najzad je na računaljci proračunat taj zbir i dobiveno je 900.

T r e ć i d o k a z

»Površina trougla je polovina proizvoda jedne strane i visine spuštene iz naspramnog temena«.

Mi smo za jedinicu površine uzeli ravnu površinu ograničenu kvadratom, pa smo, polazeći odatle, naučili da izračunavamo površinu pravougaonika, i onda i površinu pravouglog trougla. Da bismo pošli korak dalje, da izračunamo površinu ma koga trougla (p), vršimo jedno vrlo prosto rasecanje (sl. 39).



SL. 39. — DOKAZ 3

(1) Ako nijedan ugao nije veći od pravog ugla, spustimo upravnu iz jednog temena na osnovicu. Ona deli trougao na dva pravougla trougla. Svaki je od njih, prema prvome dokazu,

jednak s polovinom jednog pravougaonika. Iz drugog dokaza za površinu pravougaonika imamo

$$p=\frac{1}{2}\,xh+\frac{1}{2}\,yh$$

Ali mi smo već videli da je

$$\frac{1}{2}\,xh+\frac{1}{2}\,yh=\frac{1}{2}\,h\,(x+y) \qquad \text{dokaz 2 (a)}$$

$$p=\frac{1}{2}\,h\,(x+y)$$

$$p=\frac{1}{2}\,hb$$

(2) Ako je jedan ugao veći od pravog ugla, spustimo upravnu iz temena na produžetak jedne strane, kao što je pokazano na sl. 39 (2). Onda je

$$p=\frac{1}{2}\,h\,(b+x)-\frac{1}{2}\,hx=\frac{1}{2}\,hb+\frac{1}{2}\,hx-\frac{1}{2}\,hx=\frac{1}{2}\,hb$$

(a) Ovaj dokaz ne samo da nam pokazuje kako da izračunamo površinu trougla, već nam pomaže da izložimo jedno veoma važno načelo pri izračunavanju senki (dokaz 7). Ako trougao čija je površina P ima osnovicu B jedinica dugačku i visinu h, a drugi trougao čija je površina p ima osnovicu b jedinica dugačku i istu visinu, odnos njihovih površina može se ovako napisati:

$$\frac{P}{p}=\frac{\frac{1}{2}\,hB}{\frac{1}{2}\,hb}=\frac{B}{b}$$

To znači: *odnos površina dva trougla koji imaju jednake visine jednak je sa odnosom njihovih osnovica.* Za vrlo važan dokaz koji smo već pomenuli moramo se najpre osposobiti da pronađemo kad dva trougla imaju jednake visine. Ovo su dva sredstva:

(b) K a d o s n o v i c e d v a t r o u g l a l e ž e n a j e d n o j p r a v o j l i n i j i, a n a s p r a m n a t e m e n a i m s e p o k l a p a j u, o n i i m a j u z a j e d n i č k u v i s i n u.

To možemo videti sa sl. 39 (4). Trougli *ABC, ABE, AED, ADC, AEC* i *ABD* imaju zajedničku visinu.

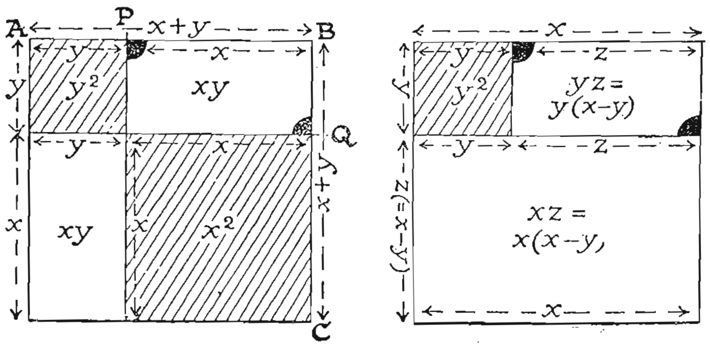
(c) T r o u g l i k o j i i m a j u z a j e d n i č k u o s n o v i c u, a n a s p r a m n a t e m e n a i m l e ž e n a p r a v o j p a r a l e l n o j s o s n o v i c o m, i m a j u j e d n a k e v i s i n e.

To je pokazano na sl. 39 (3). Naučili smo kod prvog dokaza (b) da su jednake upravne koje spajaju dve paralelne prave.

Č e t v r t i d o k a z. (Kako se raseca kvadrat).

»Ako je jedna kvadratova strana podeljena na dva otsečka, površina toga kvadrata jednaka je zbiru površina dva kvadrata čije su strane ti otsečci i dvostruke površine pravougaonika čije su strane ti otsečci«.

Kvadrat je pravougaonik čije su strane jednake. Jedina teškoća da se to uvidi jeste u značenju reči. Na sl. 40 (1) strana



SL. 40. — DOKAZ 4

AB velikog kvadrata podeljena je u *P* na dva otsečka x i y. Zato dužina *AB* iznosi $(x + y)$. Susedna strana *BC* podeljena je u *Q* na isti način. Iz *P* i *Q* povučene su upravne na suprotne strane. Svaka ta upravna deli kvadrat na dva pravougaonika. Dobivene su četiri slike. Strane tih slika znamo na osnovu pravila da su suprotne pravougaonikove strane jednake među

sobom. Površina velikog kvadrata je $AB \times AB$ ili $(x + y)^2$. Otuda slika pokazuje da je:

$(x + y)^2$ jedinica površine $= (x^2 + 2xy + y^2)$ istih jedinica površine.

$$\text{tj. } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Sasvim sličan ogled pokazan na sl. 40 (2) daje:

$$x^2 - y^2 = (x - y)\, x + (x - y)\, y$$

Kad primenimo drugi dokaz (a) imamo:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

U sedmoj glavi ćemo videti da su ove vrste množenja koje su pretstavljene u hijeroglifskom obliku na ovim slikama igrale veoma važnu ulogu u pronalasku algebre. Proverite i sami sva ta pravila o množenju, na primer:

(a) $(3 + 4)^2 = 7^2 = 3^2 + 2\,(3 \times 4) + 4^2 = 9 + 24 + 16 = 49$

(b) $7^2 - 4^2 = 33 = (7 - 4)\,(7 + 4) = 3 \cdot 11 = 33$

Ovaj ogled je prosta primena pravila o iznalaženju pravougaonikove površine. Nije verovatno da je ikad primenjen u zemljomerstvu. Njegova praktična primena u staro doba bila je u tome da se skrati posao oko množenja na računaljci pre nego što su ljudi dobili pisane brojeve pomoću kojih su mogli neposredno da računaju kao što to mi danas radimo. *Nikomah* iz Aleksandrije (100 g. naše ere) navodi primere iz kojih se vidi kako su matematičari — da ostavimo na stranu prost narod — upotrebljavali tablicu množenja da izračunaju zbirove na hartiji. Evo dva primera.

(a) Da bi se pomnožilo 37 sa 25 najpre treba naći broj koji je na sredini između njih, tj. 31, pa onda:

$37 \times 25 = 25 \times 37 = (31 - 6)\,(31 + 6) = 31^2 - 6^2 = 925$ (Proverite i sami).

Sve što imate da uradite ovo je: da nađete kvadrate od 31 i od 6 u tablicama kvadrata kao što su tablice nađene u Nipuru (2000 g. pre naše ere) i da oduzmete drugi od prvoga. To je mnogo kraće nego one metode pokazane da objasne primenu drugog dokaza. Raniji primer bio je 36×25. Nema cela broja na sredini između njih. Zato ćemo upotrebiti najbliži veći ili najbliži manji broj od 36, na primer:

$$36 \times 25 = (37 - 1) \times 25 = (37 \times 25) - 25 \text{ (Dokaz 2 (b))}$$
$$= 31^2 - 6^2 - 25 = 900.$$

Srednji broj između dva broja zove se aritmetička sredina ili srednja vrednost. Ona je od strane političara i drugih, više zloupotrebljavana nego ma koja druga količina u jeziku dimenzija. Ako su a i b brojevi, njihova aritmetička sredina je $\frac{1}{2}(a+b)$, tj. za 37 i 25 aritmetička sredina je $\frac{1}{2}(37+25) = \frac{1}{2}(62) = 31$. Za 36 i 25 a. s. je $30\frac{1}{2}$.

(b) Zbog te dosetke kojom je skraćen posao na računaljci bilo je veoma važno imati dobre tablice kvadrata. Isti obrazac može da posluži da se uprosti posao oko izrade tih tablica. Pretpostavimo da imamo kvadrate svih brojeva do 100, pa želimo da nastavimo. Evo šta je Nikomah preporučivao. Da bismo dobili kvadrat nekog broja većeg od 100, recimo broja 118, radićemo ovako:

$$118^2 - 18^2 = (118 - 18)\ (118 + 18)$$
$$118^2 = (100 \times 136) + (18)^2 = 13924$$

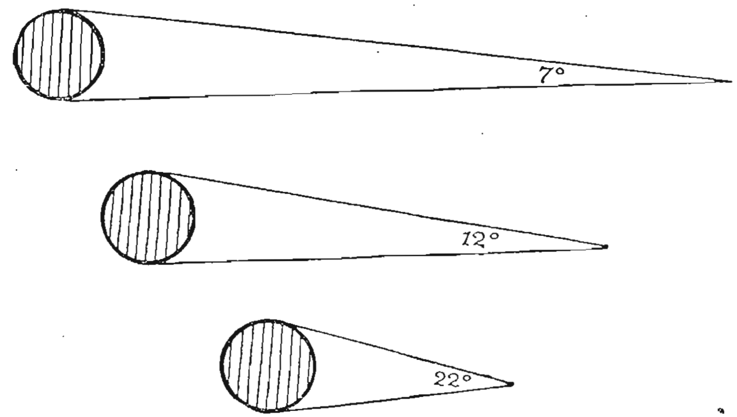
Za ma koji sistem brojeva koji se osniva na nekom sadržaocu broja deset, a gotovo svi se osnivaju na tim sadržaocima, mnogo je lakše množiti na računaljci sa deset, nego ma kojim drugim brojem. I tako se rezultat dobiva vrlo brzo.

CETIRI DOKAZA PRI RAČUNANJU POMOĆU SENKE

Za nas koji smo gradski proizvod jedne severnjačke civilizacije, a koji smo naviknuti da stanujemo u kućama s velikim staklenim prozorima, sa gasnim ili električnim osvetljenjem, sa satovima, i, ako nam sredstva dozvoljavaju, i sa hladnjačama i električnim skupljačima prašine, za nas je malo poteže da zamislimo šta su značili svetlost i senka u kolevkama civilizacije gde su bili podignuti prvi gradovi od kamena. Danas imamo da pronalazimo oglede kako da pokažemo učeniku ili učenici da se zrak kroz neku pukotinu prostire po pravoj liniji

i da su Sunčevi zraci paralelni. Prvi gradski stanovnici, čiji su prozori bili jedino one pukotine kroz koje su se Sunčevi zraci i Mesečeva svetlost igrali po prašljivom vazduhu, živeli su na žarkom suncu koje je bacalo dugačke jasne senke sa oštrim ivicama na pesku. Njima nije bilo potrebno da čuju kako svetlost »putuje po pravim linijama« ili da su svetlosni zraci što dolaze sa nekog veoma udaljenog predmeta tako malo zakošeni, da možemo smatrati kao da su paralelni. Oni su i sami mogli to da vide svakog dana po ceo bogovetni dan (sl. 41).

Kad je Tales posetio Misir i upotrebio metodu računanja senki da bi pronašao visinu Velike Piramide, ova starija civili-



Sl. 41.

Što je jedno nebesko telo dalje sve je manji ugao između svetlosnih zrakova koji dolaze sa njegovih krajnjih ivica. Zato zraci izgledaju paralelni kad je telo veoma daleko. Ugao između dveju najdaljih tačaka na obimu Sunca ili Meseca, kad se gleda sa Zemlje, iznosi tako oko pola jednog stepena. Približna paralelnost Sunčevih ili Mesečevih zrakova bila je nešto što je bilo svima poznato iz svakidašnjeg života kad još nije bilo stakla, a prozori bili uzani i visoki.

zacija na Nilu već je postepeno bila podlegla Asircima i Hititima. Ma da nam je rečeno da je on iznenadio Misirce, veoma je verovatno da se on poslužio onim istim prostim načelom neimarskog merenja kojim su se poslužili i sami gradioci piramida. Veština računanja pomoću senke smatrala se velikom veštinom u staro doba. Geometrija trouglova otkriva nam kako je izračunavanje senke primenjivano u građevinarstvu, kao što se geometrija pravougaonika javila u vezi s premeravanjem zemljišta zbog oporezivanja imanja sitnog posednika. Geometrija je cvetala u Misiru i u Mesopotamiji kad su severni narodi podizali kamene cirkuse i kamene ulice, kojih još ima mnogo po baruštinama u Devnu i Kornuolu, gde su dolazili feničanski brodovi po kalaj. Razvaline grdnih sela od grubih kamenih koliba još se nalaze rasturene po krajevima gde ima mnogo kalaja. Kao ni plemena Bantu[1]) severni narodi nikad nisu sami podizali ni gradove ni hramove. Čovek iz Severne Evrope nije bio zaostao zbog svoje gluposti, kao što je mislio Aristotel, taj apostol ropstva, ili kao što je propovedao učeni Said iz Toleda kad su Mavri podizali kupatila, a rušili ih severni osvajači koji su progonili Jevreje i doneli miris svetosti. Aristotel i Said imali su potpuno iste razloge za odbranu svojih predrasuda, kao i oni što u našoj generaciji ukazuju na zaostalost plemena Bantu. Ti ljudi ne vode računa o materijalnim uslovima koji su omogućili da počne civilizacija. Severnjak je imao da nauči od starijih civilizacija kako se podižu građevine. Pre nego što je mogao dalje da napreduje imao je isto tako da nauči kako se određuje vreme. U zemljama u kojima je sunčanik mogao biti samo vrtni ukras, uređeni varoški život i držanje stoke po stajama napredovali su vrlo malo sve dok nije došlo strano sveštenstvo da zavede sat pomoću sveće koji je kazivao kad treba oglasiti jutrenje, a kad večernje.

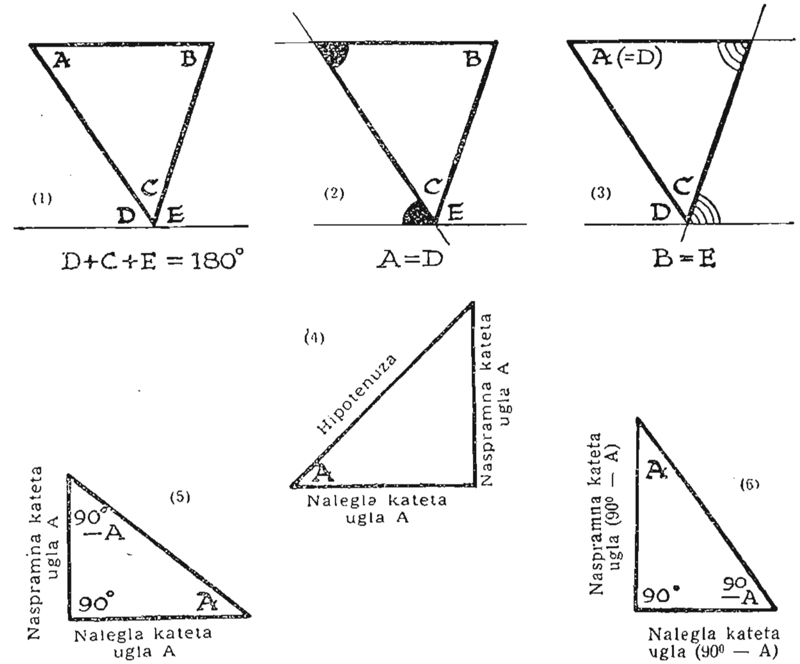
Sledeća četiri dokaza dati su u prvoj (5, 6, 8) i šestoj (7) glavi Euklidove knjige. Prva tri bila su poznata Feničaninu Talesu. Poslednji još nosi ime Feničanina Pitagore, ma da imamo mnogo razloga da verujemo da je on to naučio od Kineza. Kad ih budemo iznosili navodićemo primere kako se oni primenjuju u arhitekturi i u zemljomerstvu, a pominjaćemo i naredni korak Aleksandrinaca, koji su te dokaze primenili na merenja po nebu. Prvi dokaz koji će vam izgledati vrlo lak, nije neposredno koristan. Njegova je važnost u tome, što nam pomaže da zapazimo da su tačna ostala tri.

[1]) Crnačka plemena u Africi južno od polutara. — Prev.

Peti dokaz

»Tri ugla u trouglu zajedno iznose dva prava ugla«.

Sve što imate da uradite ovo je: da pomerate jedno trouglovo teme po pravoj liniji koja je paralelna sa naspramnom stranom. Na sl. 42 (1, 2 i 3) vide se postupci koji se svi mogu izraziti ovako:



SL. 42. — PETI DOKAZ

$A + B + C = D + C + E$ (drugo pravilo o paralelnima)

$D + C + E = 180^0$ (prvo pravilo o uglovima, sl. 33(1)).

To je tako prosto, da ćemo mi koristiti ovu priliku da iznesemo kako se to primenjuje za objašnjenje načela računanja pomoću senki koja su izneta u naredna tri dokaza.

(a) *Dva su trougla podudarna ako imaju jednake po jednu stranu i po dva odgovarajuća ugla.*

To je u vezi s onim što smo naučili kod trećeg pravila o podudarnosti trouglova (sl. 30 (c)), koje nam kazuje da možemo nacrtati trougao ako znamo jednu stranu *a* i uglove B i C. Ako su nam dati uglovi A (naspramni ugao strane *a)* i B, možemo odmah dobiti ugao C na ovaj način:

$$A + B + C = 180^0$$

tj. $$C = 180^0 - (A + B).$$

Na primer, ako A iznosi 60^0 i B iznosi 60^0, ugao C biće: $180^0 - (60^0 + 60^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Ako A iznosi 45^0, a B iznosi 90^0, ugao C biće: $180^0 - (45^0 + 90^0) = 45^0$. Ako A iznosi 30^0, a B iznosi 90^0, C će biti 60^0. Slično tome, ako znamo A i C, možemo naći B. Na primer, ako A iznosi 60^0 i C iznosi 90^0, biće: $B = 180^0 - (A + C) = 180^0 - (60^0 + 90^0) = 30^0$.

(b) *Ako znamo u pravouglom trouglu jedan ugao (A) koji nije prav, znamo i treći ugao (90^0 — A).*

To ste već videli. Ako su tri ugla A, 90^0 i $90^0 - A$, njihov je zbir 180^0, tj.

$$A + 90^0 + 90^0 - A = 180^0.$$

Postoje naročita imena za strane pravouglog trougla. Strana — najduža — naspram pravog ugla zove se hipotenuza, a strane prema onim drugim uglovima zovu se katete[1]).

(c) *Svi pravougli trougli koji imaju jednak po jedan ugao koji nije prav, slični su, tj. imaju sve odgovarajuće uglove jednake.* Sl. 43 (1).

(d) *Svi pravougli trougli koji mogu da se postave tako da im se poklopi jedno teme, a da im dve strane koje ne zaklapaju prav ugao padnu na iste prave, slični su* sl. 43 (2).

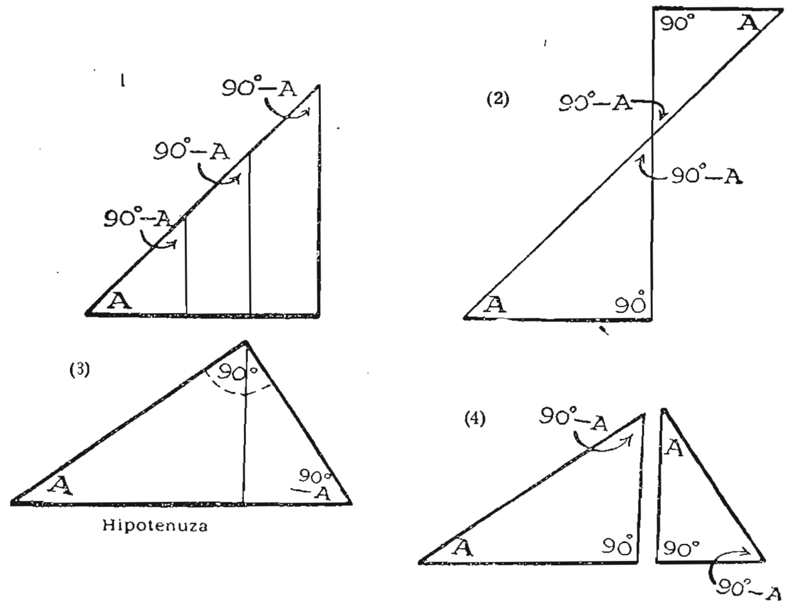
(e) *Upravna spuštena iz temena pravog ugla na hipotenuzu deli pravougli trougao na dva pravougla trougla koji su slični s njim, pa prema tome i među sobom.*

To je pokazano na sl. 43 (3 i 4). Ova je jedna od najvažnijih dosetki pri rasecanju pravouglog trougla.

[1]) Strana koja leži naspram nepravog ugla zove se *naspramna kateta*, a ona uz sam ugao zove se *nalegla kateta*. — Red.

Šesti dokaz

»*Ako su u trouglu dve strane jednake, jednaki su i njihovi naspramni uglovi. Ako su u trouglu dva ugla jednaka, jednake su i njihove naspramne strane*«.



Sl. 43.

Ovde imaju da se pokažu dve stvari. Rasecanje je isto kod obeju. Podelićemo trougao na dva trougla time što ćemo prepoloviti ugao između jednakih strana ili ugao koji nije jednak sa ona dva jednaka. Služićemo se prvim pravilom o rasecanju.

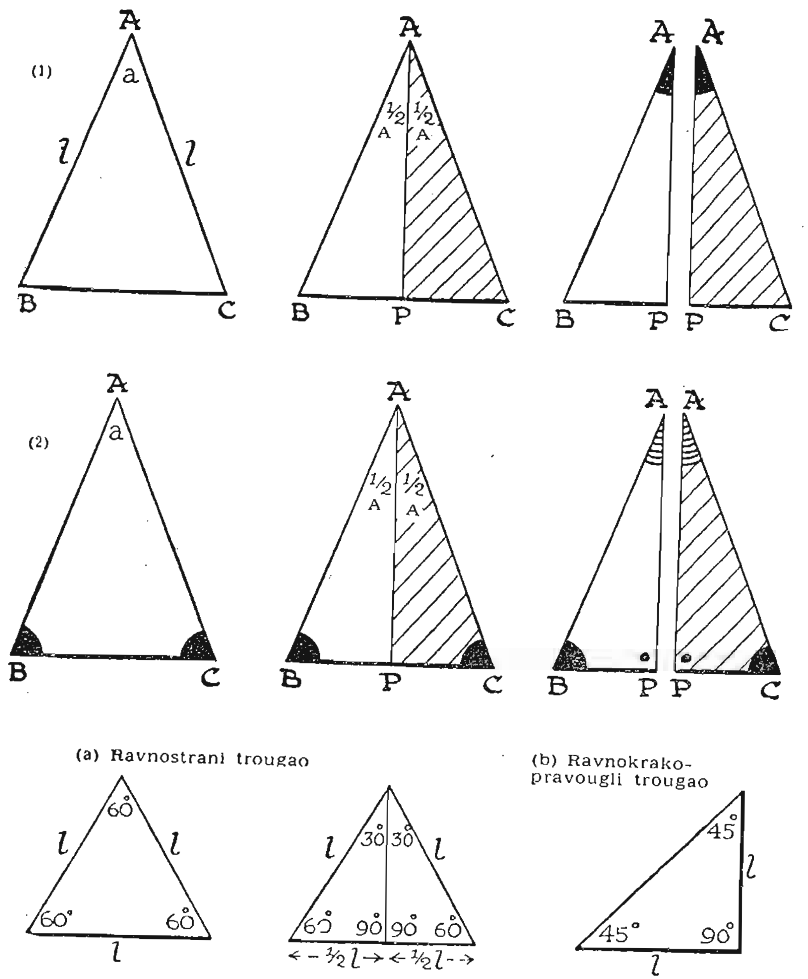
(1) Ako nam se kaže da je $AB = l = AC$ (sl. 44 prvi red ozgo), kad uporedimo trouglove ABP i PAC, vidimo da je:

$$AB = l = AC$$

Zahvaćeni ugao $BAP = \frac{1}{2} A =$ zahvaćen ugao PAC.

AP = AP (zajednička strana).

Drugo pravilo o podudarnosti trouglova kaže nam da su ovi trouglovi podudarni. To znači da su im jednaki svi odgovarajući uglovi i sve odgovarajuće strane. I tako je ACB prema strani AB jednak s uglom ABC prema jednakoj strani AC.



SL. 44. — ŠESTI DOKAZ

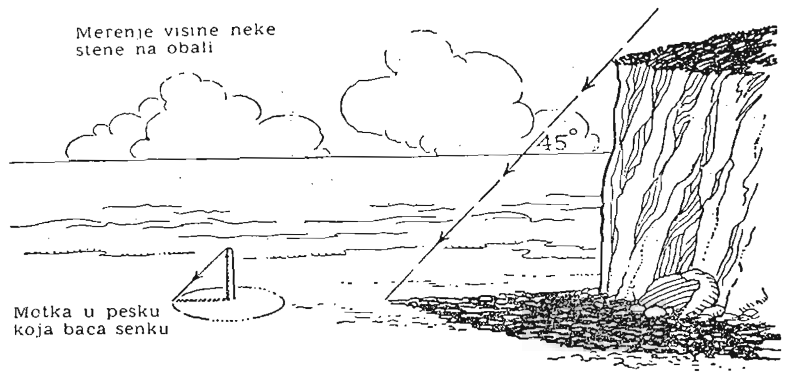
(2) Ako nam se kaže (sl. 44, srednji red) da su uglovi B (tj. ABC) i C (tj. ACB) jednaki, vidimo da je:

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ (kao što nam je rečeno)

$\sphericalangle BAP = \frac{1}{2} A = \sphericalangle CAP$ (mi smo prepolovili ugao A)

$AP = AP$ (zajednička strana).

Ali mi smo videli iz dokaza 5 (a) da su dva trougla podudarna ako imaju jednake po jednu stranu i po dva odgovarajuća ugla. Tako su podudarni trougli APB i ACP. Otuda je strana AB naspram ugla ACB jednaka s odgovarajućom stranom AC prema jednakom uglu ABC. To se može iskoristiti da se iz senke



SL. 45. — IZRAČUNAVANJE VISINE POMOĆU SENKE

Krug oko motke što baca senku ima poluprečnik dugačak koliko i sama motka. Kad je Sunce pod 45° iznad horizonta vrh senke motke dodiruje obim kruga.

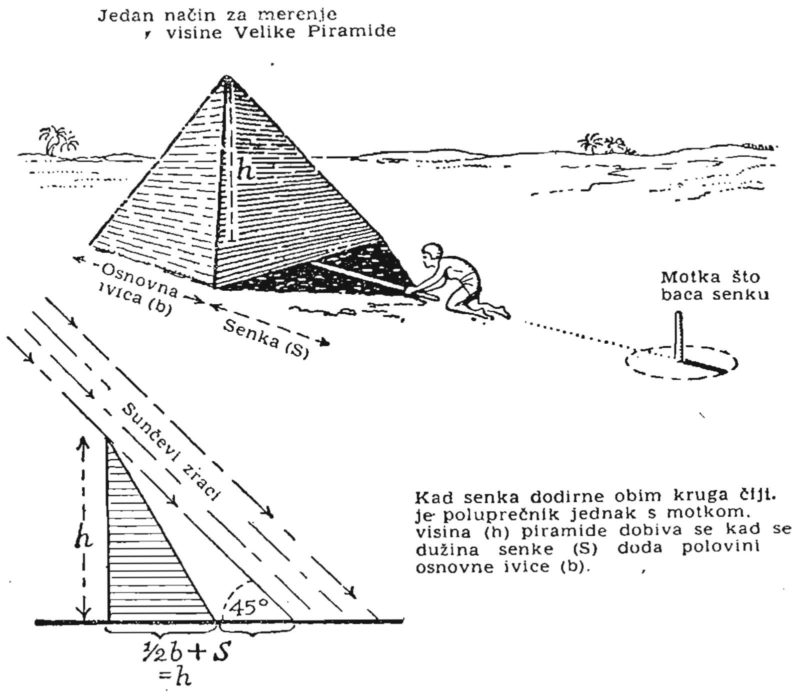
neke stene izračuna njena visina, ili da vidimo jesmo li jednu građevinu već izgradili do željene visine. Ali pre nego što to pokažemo moramo zastati da vidimo kako nam ovaj dokaz pruža jedan prost način za građenje uglova od 30°, od 60° i od 45° (sl. 44, najdonji red).

(a) *Kako da se načine uglovi od 30° i od 60°.* — Možemo načiniti ravnostran trougao (sve tri strane međusobno jednake) pomoću konopca na kome su čvorovi na jednakim rastojanjima i kad kroz čvorove provučemo klince. Iz onoga što smo već naučili izlazi da kad su sve tri strane jednake (dužine l), moraju i sva tri ugla biti jednaka. Pošto sva tri ugla zajedno iznose 180°, svaki je jedna trećina od 180°, znači 60°. Ako opet pogledate na najviši red sl. 44, videćete da kad su trougli ABP i ACP podudarni, strana BP je jednaka sa odgovarajućom stranom CP, tj. P deli BC na dva jednaka dela. U ravnostranom trouglu (u najdonjem redu sl. 44) rasečenom na isti način vidimo da zbog toga strane prema uglovima od 30° $\left(\frac{1}{2}\text{ od } 60^0\right)$ iznose po $\frac{1}{2}l$. Kad spojimo teme ravnostranog trougla sa sredinom naspramne strane dobivamo ugao od 30°, a drugi ugao je prav ugao (dokaz 5).

(b) *Kako da se načini ugao od 45°.* — Dokaz 5 (a) pokazao nam je da ako je u pravouglom trouglu jedan ugao od 45°, treći ugao mora biti od 45°. I tako pravougli trougao s uglom od 45° ima dva jednaka ugla po 45° i prema tome i dve jednake strane. Kad načinimo prav ugao možemo načiniti ugao od 45° time, što ćemo od temena pravog ugla odmeriti po kracima jednake duži l, pa spojiti dve krajnje tačke tih duži. Misirski zemljomeri bi to uradili konopcem i klincima na pesku. Vi to možete na stolu pomoću konca i ekserića.

Na sl. 45 vidi se primena ovoga dokaza. Njega su obično zvali *pons asinorum* (m a g a r e ć i m o s t), pošto su magarci koji su to predavali učinili sve što su mogli da razore most koji spaja ovaj dokaz sa stvarnim životom. Kada je Sunce pod 45° nad horizontom (ili 45° od zenita), Sunčev zrak, stena i senka, ili Sunčev zrak, senka i m a k o j i uspravan predmet grade ravnokraki pravougli trougao. To znači da je tada dužina senke jednaka s visinom stene. Da biste to iskoristili, zabodite štap u pesak, pa sednite i čekajte dok dužina senke ne postane ista kao i dužina štapa. Onda izmerite dužinu senke one stene i to vam daje njenu visinu. Kako se to može iskoristiti za izgradnju piramide pokazano je na narednoj slici, gde postavljeno pravilo važi na podne samo dva dana u godini. Ali čekati podne u ta

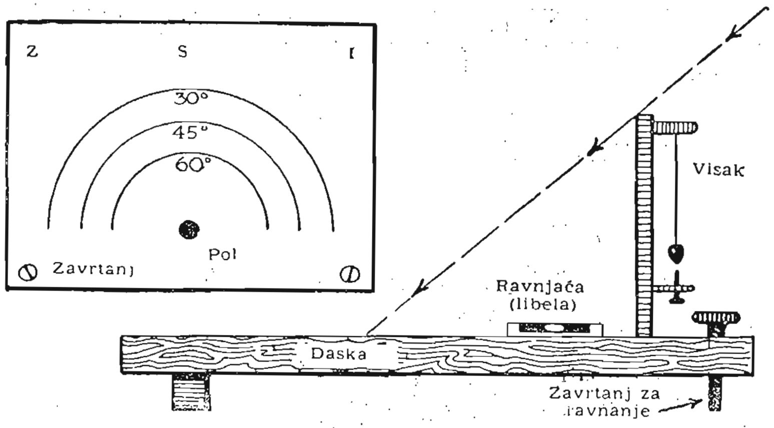
dva dana bilo bi poprilično glupo. Mnogo više vremena treba da se džonja oko štapa i vreba kad će piramidina senka biti jednaka s njenom visinom, nego da se nauči naredni dokaz koji vam pokazuje kako da uradite to isto kad su Sunčevi zraci pod nekim uglom.



Sl. 45 A

Kad je podnevno Sunce visoko 45° visina piramide je jednaka sa dužinom senke uvećanom za polovinu osnovne ivice.

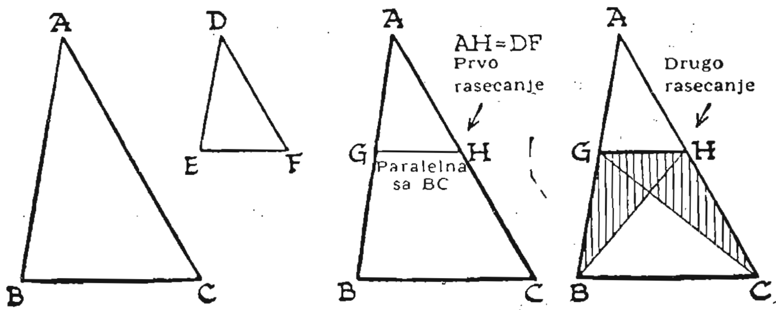
Ako imate pristupa na neki krov, u neki vrt ili u neko dvorište, sl. 46 vam pokazuje jednu motku za bacanje senke, kojom možete, kao što ćete docnije videti, pronaći visinu svoje kuće, geografsku širinu i dužinu svoga mesta, vreme u toku dana, i za koliko se Zemlja prividno »klati« svojom osovinom u toku godine (radi se o nagibu Zemljine putanje prema ekvatoru, koju astronomi zovu nagib ekliptike).



SL. 46. — CRTEŽ ZA IZRADU MOTKE KOJA BACA SENKU, A ŠTO SE MOŽE KOD KUĆE NAČINITI

Sedmi dokaz

»U sličnim trouglima odnos odgovarajućih strana je isti«. Ovde je rasecanje prepredeno izvedeno. Mi ćemo to izvesti u tri stupnja. Levo na slici 47 nacrtana su dva slična trougla ABC



SL. 47. — DOKAZ 7

i DEF tako, da možemo odmah videti koji su uglovi jednaki. Kad hoćemo da dokažemo nešto novo, prvo se pitamo šta znamo već o toj stvari koju hoćemo sad da nađemo. Mi ovde hoćemo da nađemo odnose (razmere). Jedino što smo već naučili o odnosima jeste to da se površine trouglova iste visine odnose kao i njihove osnovice (Dokaz 3). Zato treba da nađemo trouglove čije su osnove odgovarajuće strane dva trougla koje upoređujemo. Da bismo to postigli, moramo staviti oba trougla u jednu istu sliku.

(1) Slika desno: AH odmereno po AC jednako je sa DF, a GH je povučeno paralelno sa BC. Kad uporedimo trouglove AGH i ABC vidimo najpre da je

$\sphericalangle GAH = \sphericalangle BAC$ (zajednički ugao)

tj. $\sphericalangle GAH = \sphericalangle EDF$ (trouglovi ABC i DEF su slični

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle AHG = \sphericalangle ACB \\ \sphericalangle AGH = \sphericalangle ABC\end{array}\right\} \text{(prvo pravilo o paralelnima)}$$

tj. $\sphericalangle AHG = \sphericalangle DFE$ i $\sphericalangle AGH = \sphericalangle DEF$ (trougli ABC i DEF su slični).

I tako, kad uporedimo trouglove DEF i AGH

$\sphericalangle EDF = \sphericalangle GAH$

$DF = AH$ (mi smo tako nacrtali)

$\sphericalangle DFE = \sphericalangle AHG.$

Po trećem pravilu o podudarnosti trouglova trougli DEF i AGH su podudarni.

tj. $GH = EF$ i $AG = DE \ldots$ (a)

(2) U trećem dokazu naučili smo da trouglovi imaju jednake visine kad su im osnovice na jednoj pravoj liniji, a naspramna temena na pravoj paralelnoj s njom. To nas navodi na dalji korak. Povucite duži koje spajaju G sa C i B sa H (desno, sl. 47). Da bismo imali sliku u položaju podesnijem za ono što ćemo sad da radimo, pogledajte na tu sliku ozgo nadole (kao u (2) na sl. 48). Sad možete videti (dokaz 3 (c), sl. 39 (3)):

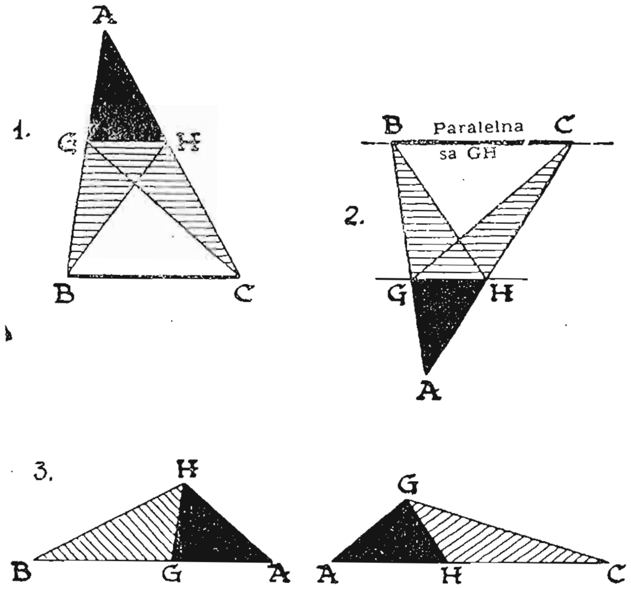
Površina $\triangle BGH$ = površini $\triangle GCH \ldots\ldots$ (b)

(3) U trećem dokazu naučili smo i to, da trougli imaju istu visinu ako su im osnovice na istoj pravoj liniji, a naspramna temena im se poklapaju. Možemo dobiti dva para takvih tro-

uglova kad dodamo trougao AGH na GHB, a zatim na GHC, tj. površina trouglova AGH + GBH = površini trouglova AGH + + GCH

ili površina $\triangle AHB$ = površini $\triangle AGC$ .... (c)

Trouglovi *AHB* i *AHG* imaju istu visinu, a i trouglovi *AGH* i AGC imaju istu visinu (treći dokaz pod *b*). Dokaz 3 (a) kazuje



SL. 48. — DOKAZ 7 (NASTAVAK)

nam da su površine dva trougla iste visine u istom odnosu kao i njihove osnovice. Otuda je:

$$\frac{\text{Površina } AHB}{\text{Površina } AGH} = \frac{AB}{AG}$$

i

$$\frac{\text{Površina } AGC}{\text{Površina } AGH} = \frac{AC}{AH}$$

Pošto su površine AHB i AGC jednake, biće:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$$

Iz (a) imamo:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Ili, iz dijagonalnog pravila

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

Služeći se sličnim rasecanjem možemo dokazati da je

$$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF} \text{ ili } \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$$

Kako je Tales to iskoristio da izmeri visinu Keopsove velike piramide, a da ne čeka ona dva dana kad je podnevno Sunce pod 45^0, vidi se na sl. 49. On je pobo motku uspravno na vrhu piramidine senke; motka, Sunčev zrak i senka daju baš trougao s uglovima od 90^0, *A*, i 90^0 — *A*. Visina piramide, Sunčev zrak i piramidina senka na koju je dodata polovina širine njene osnove, daju vam drugi trougao sa istim uglovima. Pošto su ta dva trougla slična, odgovarajuće strane imaju isti odnos, tj.

$$\frac{H}{\frac{1}{2}b + S} = \frac{h}{s}$$ [1]

Na osnovu dijagonalnog pravila dobijamo visinu piramide:

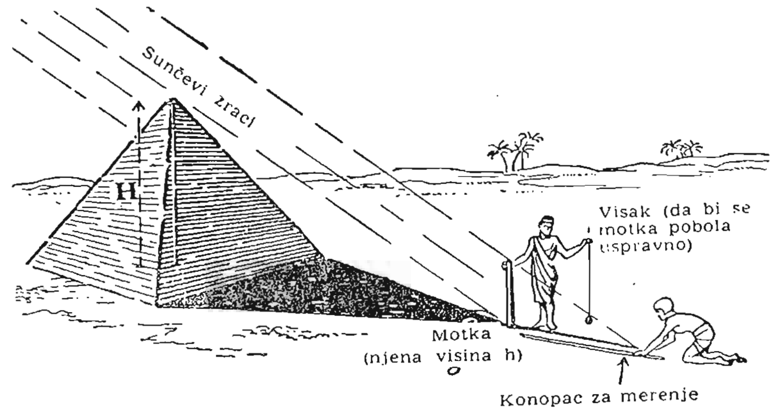
$$H = \frac{h}{s}\left(\frac{1}{2}b + S\right)$$

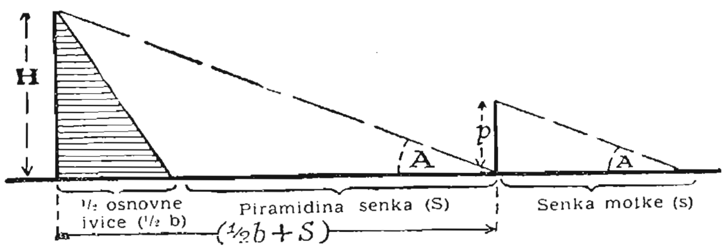
Dužina motke *(h)*, širina piramidine osnove *(b)* i dve senke *(s* i *S)* mogu lako da se izmere na podne ma koga dana.

U glavnome mogla bi ista metoda da se upotrebi za određivanje visine ma koga nepristupačnog predmeta. Možemo naći koliko je udaljen ako možemo izmeriti ugao koji njegov vrh

[1]) Ovde je *H* piramidina visina, *b* širina piramidine osnove, *S* piramidina senka, *h* dužina motke, *s* dužina njene senke. — Prev.

zaklapa s horizontom pomoću kakvog teodolita kao što je onaj na sl. 12. Najgrublji način bio bi da naslikamo jednu sliku u razmeri. To je ona metoda *laissez faire* iz grčke geometrije. Postoji bolja metoda, socijalizirana geometrija, ili trigonome-





SL. 49. — KAKO JE TALES MERIO VISINU VELIKE PIRAMIDE

Ugao *A* je nagib podnevnog Sunca prema horizontu, te je zato isti u oba trougla.

trija kako je mi obično zovemo, trigonometrija Aleksandrinaca. Ona se sastoji u tome, da se načini jednom zasvagda tablica odnosa motke i njene senke za ma koji nagibni ugao. Ako pogledate nazad na sl. 31 videćete da je odnos motke prema njenoj senci za neki nagibni ugao A ono što se zove *tang* A na rečničkom jeziku trigonometrije. To znači: »Nađi broj u rečniku

(tablice tangensa) koji je načinjen jednom za svagda, mesto da se mučiš da crtaš zasebnu srazmernu sliku uvek kad imaš nešto da računaš«. Ako pogledate nazad na sl. 43 (1), setićete se da su slični svi pravougli trougli koji imaju neki zajednički ugao A. I tako je odnos naspramne katete prema nalegloj (motka prema senci ili *gradient*, uspon, nagib) uvek isti ako je ugao A isti. Postoji samo jedan broj koji pretstavlja taj odnos kad znamo ugao A. Sedmi dokaz pokazuje nam da je odnos m a k o j i h dveju odgovarajućih strana u pravouglom trouglu stalan ako je ugao A stalan.

Grci nikad nisu iskoračili taj korak od *laissez faire* do kolektivističke ekonomije slika. Videćemo docnije kako su Aleksandrinci to uradili kad se budemo time poslužili da lakše izmerimo razdaljinu do Meseca nego rastojanje od Edinburga do Londona. To će nam docnije pomoći kad se budemo dobro upoznali s imenima tri rečnika koji se upotrebljavaju za taj posao. To su tablice tangensa, sinusa i kosinusa. Obično se upotrebljavaju tri odnosa iz pravouglog trougla:

$$\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}} = tang\ \text{A (izgovara se: tangens A)}$$

$$\frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}} = sin\ \text{A (izgovara se: sinus A)}$$

$$\frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}} = cos\ \text{A (izgovara se: kosinus A)}$$

Recipročne vrednosti[1]) ovih odnosa imaju posebna imena: *cotg* A, *cosec* A i *sec* A. Prema tome je

$$cotg\ \text{A} = \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{naspramna kateta}} = \frac{1}{\text{tg A}}$$

$$cosec\ \text{A} = \frac{\text{hipotenuza}}{\text{naspramna kateta}} = \frac{1}{\sin \text{A}}$$

$$sec\ \text{A} = \frac{\text{hipotenuza}}{\text{nalegla kateta}} = \frac{1}{\cos \text{A}}$$

[1]) Za $\frac{2}{3}$ recipročna vrednost je $\frac{3}{2}$; za $\frac{1}{5}$ recipročna vrednost e $\frac{5}{1}$ tj. 5; za 4 recipročna vrednost je $\frac{1}{4}$. — P r e v.

Postoje tablice za svih šest ovih odnosa. Njima se služimo lako, kao sa redom vožnje. U tablici za sinuse jedan stubac daje uglove A. Drugi stubac daje broj koji želite *(sin A)*. Kako su te tablice izrađene videće se u drugoj jednoj glavi. Možda biste želeli da još sad saznate nešto o tome. Jedan način bio bi da se nacrtaju mnogo pravouglih trouglova sa različitim vrednostima za ugao A, da se veoma tačno izmere strane, pa da se ispišu dobiveni rezultati. To bi zahtevalo mnogo vremena. To ne bi bilo korisno, pošto mi tražimo što savršenije tačne vrednosti u ovom nesavršenom svetu, gde prvi pokušaji ne moraju biti i najbolji. Mi smo, istina je, već nakupili izvesna obaveštenja koja mogu da učine da dobijemo i brže i tačnije rezultate. I ne zapažajući to, mi smo već uopštili odnose kod nekih uglova, ali ih nemamo dovoljno da bismo mogli načiniti potpunu tablicu.

Dokle smo dospeli može se videti na prvi pogled iz ove poznatije tablice koja pokazuje odlazak vozova iz Beograda:

Polazak iz Beograda	DOLAZAK U MESTO		
	Vinkovci	Slavonski Brod	Zagreb
9^h 45^m	—	13^h 42^m	—
12^h 35^m	15^h 22^m	—	—
16^h	—	—	23^h 15^m

Ako uporedite brojeve sa sl. 50 sa brojevima najdonjeg reda sa sl. 44, moći ćete načiniti ovakvu tablicu:

Ugao A (u stepenima)	*tang A*	*sin A*	*cos A*
30	—	$\frac{1}{2}$	—
45	1	—	—
60	—	—	$\frac{1}{2}$

Zapazićete još dve stvari koje olakšavaju sastavljanje tablica:

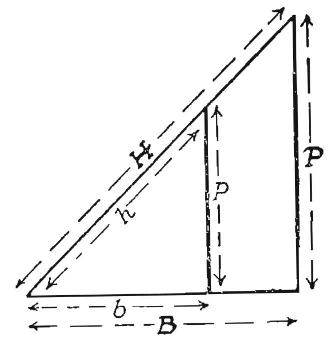
(1) $\sin A = \cos (90^0 - A)$[1]. Vidi dokaz 5 (b)

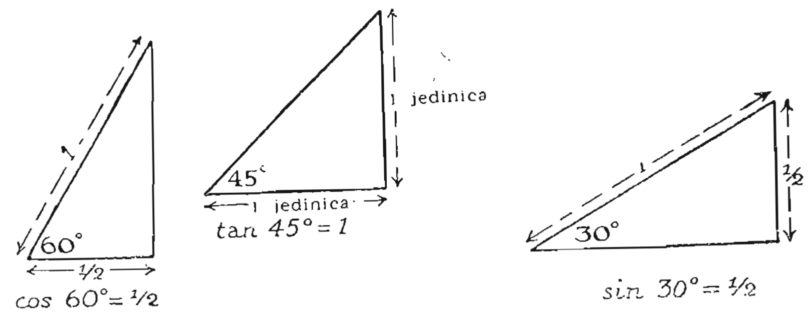
$\cos A = \sin (90^0 - A)$

$$(2)\ \text{tang}\, A = \frac{\sin A}{\cos A},\ \left[\frac{p}{b} = \frac{\frac{p}{h}}{\frac{b}{h}} = \frac{\sin A}{\cos A} = \text{tang}\, A\right].$$

Osmi dokaz

»Kvadrat hipotenuze jednak je sa zbirom kvadrata obeju kateta«.

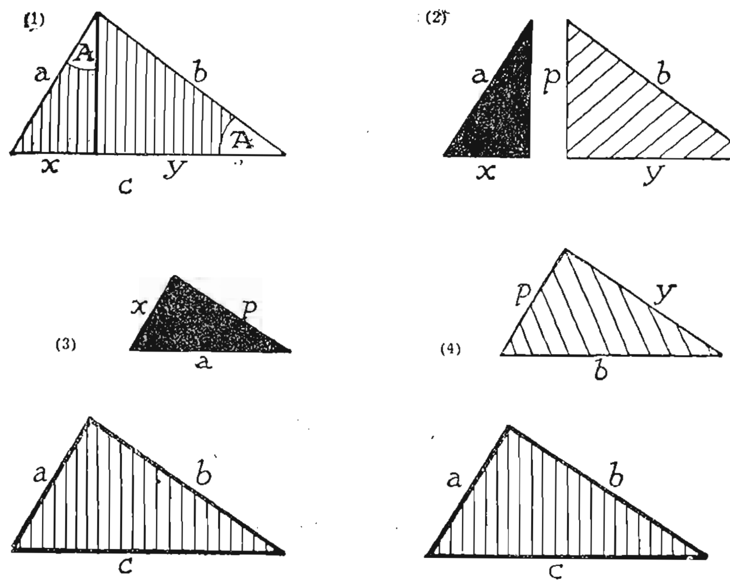




Sl. 50.

[1]) *sin* 70° = *cos* 20°, *cos* 82° = *sin* 8°. — Prev.

Rasecanje za ovaj dokaz već je objašnjeno u dokazu 5 (e) na sl. 43. Upravna spuštena iz temena pravog ugla na hipotenuzu seče pravougli trougao na dva pravougla trougla koji su slični među sobom, a slični i sa velikim trouglom. Na sl. 51



SL. 51. — OSMI DOKAZ

poređali smo ih tako da se odmah vide odgovarajuće strane i odgovarajući uglovi. Iz (3) sa sl. 51:

$$\frac{a}{c}=\frac{x}{a} \quad \text{(Dokaz 7)}$$

tj. $a^2 = cx$ (Dijagonalno pravilo)

Iz (4) na istoj slici, a sa sličnih razloga, izlazi:

$$\frac{b}{c}=\frac{y}{b}$$

tj. $b^2 = cy$

Kad sastavimo te rezultate i setimo se da je $c = x + y$, imamo:

$$a^2 + b^2 = cx + cy$$
$$a^2 + b^2 = c(x + y)$$
$$a^2 + b^2 = c(c)$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Zapazite još jednu stvar na ovoj slici.

$$\frac{p}{x}=\frac{y}{p}$$

tj. $p^2 = xy$ ili $p = \sqrt{xy}$

U poslednjem izrazu p se zove geometriska sredina za x i y. Geometriska sredina za 3 i 27 je $\sqrt{3 \times 27}$ tj. $\sqrt{81}$ ili 9. Aritmetička sredina za 3 i 27 je $\frac{1}{2}(3 + 27) = 15$.

Ovaj je dokaz od najveće važnosti za određivanje odnosa kod uglova. Vi ćete se setiti (a ako se ne sećate, pogledajte opet sl. 44) da, ako su uglovi pravouglog trougla od 30°, 60° i 90°, hipotenuza (c) dva puta je veća od strane (a) naspram ugla od 30°. Da bismo dobili treću stranu (b) mesto

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ili

$$c^2 - a^2 = b^2$$

uzmimo da je hipotenuza 1, pa ćemo imati:

$$1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = b^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = b^2$$

$$\frac{3}{4} = b^2$$

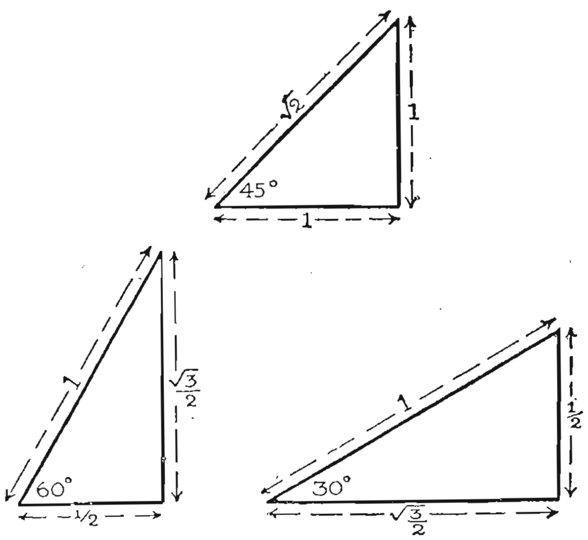
$$b = \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{ili} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

U pravouglom trouglu gde je jedan od oštrih uglova 45°, katete su jednake. Zato, da bismo dobili hipotenuzu, možemo napisati:

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

$$c^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$



Sl. 52

$\text{tang } 45^0 = 1$	$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\text{tang } 60^0 = \sqrt{3}$	$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$
$\text{tang } 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$	$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sad već možemo da popunimo praznine u svojoj tablici za tangense, sinuse i kosinuse. Ovako (sl. 52):

Ugao	*tangens*	*sinus*	*cosinus*
30°	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Grčki geometri nikad nisu učinili taj korak da načine ovakvu tablicu, ili da je prošire do potpune tablice za sve stepene. Zato ćemo mi to sad ostvariti i tek docnije pokazati kako se to može uraditi. Za to vreme zapazite da više nismo vezani za motku koja baca senku. Grčki geometri imali su sredstva da nađu visinu, a da se ne služe senkom. Ako imate neki prost teodolit (sl. 12) možete se odmaći od stene (sl. 45) x metara dok ne vidite vrh stene pod uglom od 30°. Ako je h visina stene, biće:

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ili} \quad \frac{x}{\sqrt{3}} = h$$

Ako se odmaknete od stene za y metara dok joj vrh ne sagledate pod uglom od 60°, imaćete:

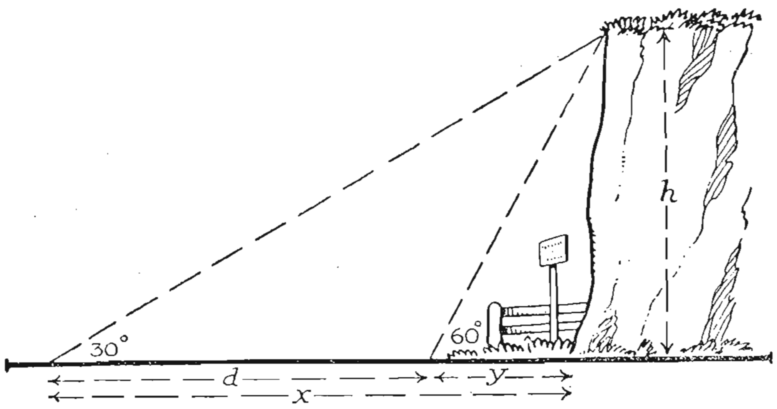
$$\frac{h}{y} = \sqrt{3} \quad \text{ili} \quad h = y \cdot \sqrt{3}$$

Možete da uradite i nešto više. Uzmimo da ne možete da priđete do same stene. Onda vam je potrebno samo ono rastojanje d između mesta sa kojih ste videli stenu jednom pod uglom od 30°, a drugi put pod uglom od 60° (sl. 53).

Na kraju ove glave upitaćemo se zašto su Grci došli tako blizu do toga da izgrade uglovni rečnik, a nisu ga izgradili. Ovde mora da se zapazi jedna stvar. Matematičar je naišao na količine kao što su $\sqrt{2}$ (približno 1,414) i $\sqrt{3}$ (približno 1,732) koje nisu mogle biti izražene brojevima kojima je on raspolagao. Praktičan čovek mogao je rešiti taj problem samo crtežem na pesku prikazanom na sl. 55, ili crtežem na pesku pomoću geometriske sredine. To ćemo pokazati docnije.

ČETIRI DOKAZA IZ ASTRONOMIJE

Da bismo nastavili da merimo nepristupačna rastojanja pomoću poznatih rastojanja i poznatih uglova, kao što smo našli visinu stene, potrebno je da znamo nešto o krugu. Geometriju o krugu počeli su tvorci kalendara. Koliko su Grci naučili od njih ne znamo tačno. Drugi dokaz koji ćemo sad izneti pripisuje se Talesu. Prva tri su izneta u trećoj Euklidovoj knjizi, a poslednji u dvanaestoj. Načelo koje se nalazi u poslednjem dokazu



SL. 53. — MERENJE VISINE NEKE STENE KAD JE ZABRANJENO PRIĆI JOJ BLIZU

Ne možete naći x ili y, ali možete izmeriti $d = x - y$. Odatle je $x - d = y$. Imamo dalje:

$$\frac{h}{x} = \text{tang } 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Odatle je: } h\sqrt{3} = x$$

$$\frac{h}{y} = \text{tang } 60^0 = \sqrt{3} \quad \text{Odatle je: } y = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Sad dalje:

$x - d = y$. Smenimo dobivene vrednosti za x i y:

$$h\sqrt{3} - d = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Pomnožimo obe strane sa $\sqrt{3}$:

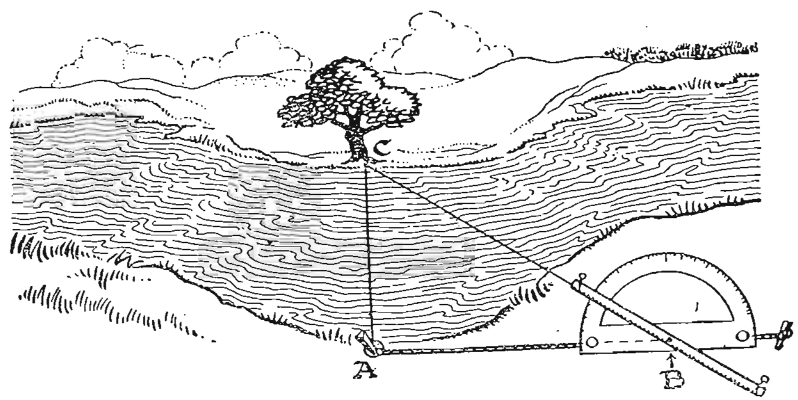
$$3h - d\sqrt{\ } = h$$

$$2h = d\sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

Rastojanje do Meseca računa se uglavnom isto tako.

izvesno je bilo poznato još od najstarijih vremena, kad su ljudi stali praviti točkove za volovska kola ili za ratničke dvokolice. Misirski sveštenici i veštaci znali su to već oko 1500 pre n. e.



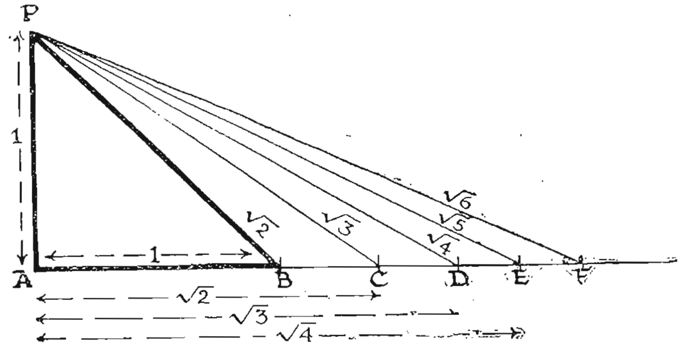
SL. 54. — MERENJE ŠIRINE NEKE REKE

Može se načiniti jedna prosta sprava time što će se jedna daščica prikovati u centar uglomera tako da može slobodno da se okreće oko njega. Na oba kraja te daščice uvrnite zavrtnje sa okcima (kakvi su upotrebljavaju za vrvce na rastegljivim zavesama) da bi služili za viziranje. Stojeći kod A na jednoj obali izaberite tačno prema sebi na drugoj obali neki predmet (recimo drvo kod C). Postavite pokretnu ručicu na $90°$, pa napravite jednu katetu pod $90°$ sa AC time što ćete zategnuti uže duž uglomerove osnove. Idite tom linijom do B, gde se C vidi tačno pod uglom od $30°$ prema AB. Izmerite dužinu AB. Onda je ABC pravougli trougao u kome je $AC = \frac{1}{2} BC$ i $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$. Odatle je $BC = \frac{2AB}{\sqrt{3}}$

I tako je širina reke:

$$AC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = AB : \sqrt{3}$$

Kad je Feničanin Tales pronašao kako da upiše pravougli trougao u polukrug s temenima na kružnom obimu, prineo je bogovima na žrtvu jednog vola. To je bilo zlo za vola. Zlo je to bilo najzad i za same bogove. Plovidba po pučini odakle se obale ne vide postala je mogućna kad su ljudi počeli da iskorišćavaju kretanje zvezda, da bi se po njemu upravljali pri krmarenju brodovima po moru. Feničani su popovsku Severnjaču pretvorili u mornarsku Severnjaču. Oni su počeli da oduzimaju kalendar od popova i da ga predaju narodu. Ljudi su merili širinu i dužinu zvezdane nebeske lopte pre nego što su izradili njene dobre karte. Jonski Grci su zaveli sistem u merenju kruga i time udarili temelje aleksandriskoj geografiji i povukli graničnu liniju između astrologije i astronomije.



SL. 55. — CRTANJE NA PESKU DA SE NAĐE JEDAN KVADRATNI KOREN

$$1^2+1^2=2$$
$$1^2+(\sqrt{2})^2=1+2=3$$
$$1^2+(\sqrt{3})^2=1+3=4 \text{ itd.}$$

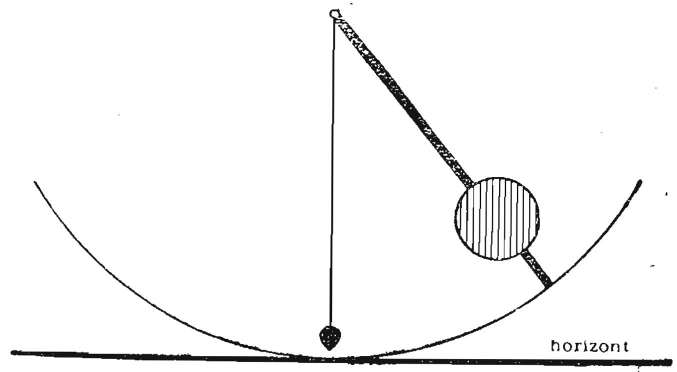
Još u veoma davno doba, kod naroda moreplovaca postojalo je ubeđenje da je Zemlja loptasta. To je bila glavna tačka u učenju Feničanina Pitagore. Znali su to i tvorci kalendara, pošto su već svikli bili da gledaju kružnu ivicu Zemljine senke pri Mesečevom pomračenju. Moreplovcima nije trebalo mnogo vremena da uvide nešto što veoma prosto objašnjava ono što svaki putnik primećuje kad se napreže da nazre kopno, ili kad gleda kako se obala polako gubi. Gledali su oni kako se planine dižu iz mora kad se oni približavaju luci. Gledali su kako vrhovi zgrada tonu u more što oni više odmiču na pučinu (sl. 59). U doba kad je veštačka svetlost bila raskoš, putovanje preko Sredozemnog Mora bilo je dovoljno da utiče na putnikovu maštu, te da on zapazi kako leti dužaju dani, a zimi noći, što brodovi odmiču sve više na sever. Mnogo pre nego što su feničanski brodovi dospeli do Baltičkog Mora ili do Devna[1]), Bion, jedan

[1]) Jugozapadna Engleska. — Prev.

od učenika materijaliste Demokrita, govorio je svojim učenicima o nekoj zemlji gde Sunce nikad ne zalazi. Geometrija je ispitala polarni krug pre nego što je ijedan brod dovezao ijednog civilizovanog čoveka da posmatra ponoćno Sunce u Polarnoj Oblasti. U to doba grčka je geometrija već bila postala zabavna igra imućne klase koja je imala robove koji obavljaju njene poslove. Umni rad i ručni rad pretstavljali su dva različita sloja u klasnome društvu. Baš u trenutku kad je bilo stvoreno novo oruđe kojim je čovek imao da osvoji svet u kome živi, geometrija se izopačila u čistu igračku. Tek kad je opadajuća grčka civilizacija bila razorena, požnjeveni su plodovi grčke geometrije.

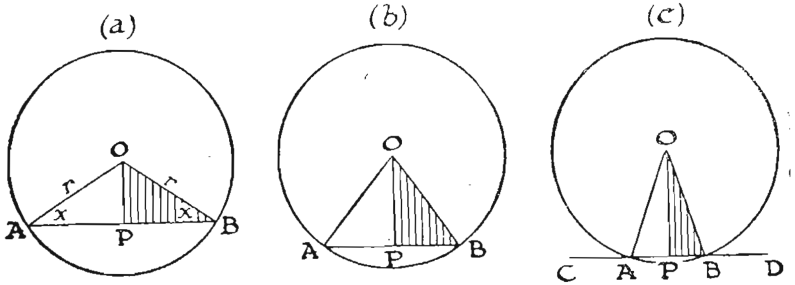
Deveti dokaz

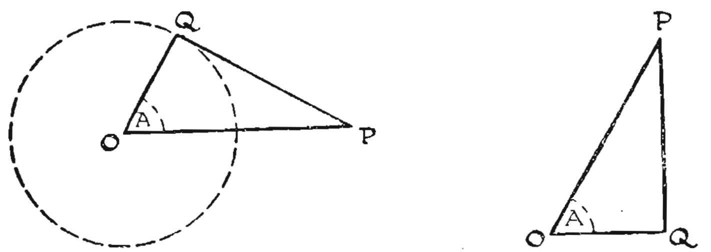
»Prava linija koja samo dodiruje krug leži pod pravim uglom prema duži koja spaja središte kruga s tačkom gde ta prava dodiruje kružni obim«.



SL. 56. — KRUG I NJEGOVA DIRKA PRIKAZANI POMOĆU VISKA I KLATNA

To je pokazano na sl. 56. Kad visak koji miruje samo dodiruje horizont, nalazi se pod pravim uglom prema njemu. Ako zanišemo visak (ili zanišemo klatno iste dužine obešeno o istu tačku), on opisuje kružni luk koji samo dodiruje horizont. Kad žbica na točku iz položaja upravljenog u tačku gde obruč dodiruje površinu po kojoj se kotrlja, krene da dostigne položaj u kome je paralelna s tom površinom (putem), ona će opisati prav ugao. Na slici 57 dat je i formalni dokaz koji se može naći u nekim udžbenicima elementarne geometrije. Iznet je onakav kakav je. Ako vas on gnjavi, ne dajte se dalje gnjaviti. Istina je to da je ovaj dokaz manje ubedljiv nego ono što vidimo u svakidašnjem životu.





SL. 57. — DEVETI DOKAZ
ZAŠTO SE TANGENS NEKOG UGLA TAKO ZOVE[1])

Tangenta dolazi od latinske reči *tangere*, dodirnuti. Ovo pokazuje zašto je uzeta reč tangens za odnos nekog ugla, a za pravu koja dodiruje krug reč tangenta.

$$\text{tang } A = \frac{PQ}{OQ}$$

Ako je krug s poluprečnikom 1 (tj. OQ = 1 jedinica dužine),

$$\text{tang } A = \frac{PQ}{1} = PQ$$

(1) Najpre gledajte na (a) sa sl. 57. OP je upravna spuštena iz središta na tetivu AB. U trouglovima AOP i BOP je AO =

[1]) Dirka se zove i *tangenta*. — Prev.

$= r =$ BO. Prema dokazu 6 je $\sphericalangle$ OAP $= x =$ $\sphericalangle$ OBP. Kad uporedimo ta dva trougla imamo

$$\sphericalangle \text{OPA} = 90^0 = \sphericalangle \text{OPB}$$

$$\text{OP} = \text{OP}$$

$$\sphericalangle \text{BOP} = (90^0 - x) = \sphericalangle \text{AOP}$$

Prema trećem pravilu o podudarnosti trouglova ova su dva trougla podudarna, te je AP = PB.

(2) Gledajte na sliku (b) sa iste slike. Sad vidite da je tetiva AB bliža kružnom obimu i kraća; AO i OB su i ovde jednaki, ali OP nije mnogo manje od OA ili od OB; a uglovi *OAP* i *OBP* su i ovde jednaki, ali su sad bliži pravom uglu.

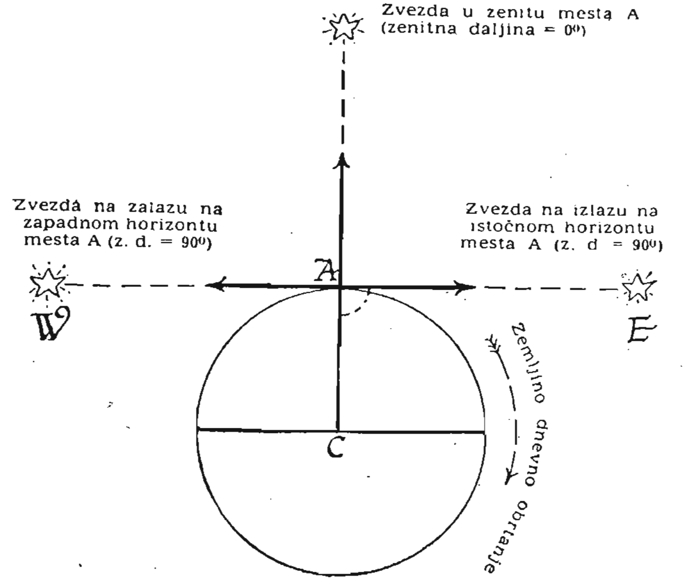
(3) Na slici (c) tačke A i B su mnogo bliže jedna drugoj. Razaznavanje tačaka A, P i B postaje sve teže. Naša prava skoro dodiruje krug. Kad je dodirne nećemo moći razlikovati OP od OA i OB. Tada se ugao OAP neće moći razlikovati od pravog ugla, sliće se ujedno s uglom OPB, te će zbog toga i ugao OAC postati prav ugao. Isto tako nećemo moći razlikovati od pravog ugla ni ugao OBP koji se bliži uglu OPA na isti način. Isto tako i ugao OBD.

Bezbrojne su primene ovog dokaza. Dve naročito zaslužuju da ih zapazimo. Znamo da se svetlost prostire u pravim linijama. Na toj činjenici osniva se ovo: ako je posmatračevo oko na morskoj površini, p r a v a k o j a s p a j a p o s m a t r a č a s m a k o j o m t a č k o m n a h o r i z o n t u z a k l a p a p r a v u g a o s a l i n i j o m k o j a s p a j a p o s m a t r a č a s a Z e m l j i n i m s r e d i š t e m. Otuda se zenit, posmatrač i Zemljino središte nalaze u jednoj pravoj liniji (sl. 58). Iz istog je razloga konac viska, u svima tačkama na Zemljinoj površini upravljen ka Zemljinom središtu.

Ovaj se dokaz može upotrebiti da se izračuna rastojanje na kome se telo poznate visine jedva nazire na horizontu, a odatle (sem još drugih nekih stvari) da se proceni koliko je brod daleko od obale.

RASTOJANJE NA HORIZONTU

Na slici 59 posmatrač je u *A*, a *BC* je udaljeni predmet (na primer brdo ili brod), od koga posmatrač vidi samo najvišu tačku *B*, pošto mu je sve ostalo ispod njegove linije horizonta



Sl. 58.

Pri ulazu u Zemljinu atmosferu svetlosni zraci se malo saviju (refrakcija). Zato prava z. d. neke zvezde na izlazu ili na zalazu nije tačno 90°.

AB. Pošto se svetlost prostire u pravim linijama, *AB* prolazi kroz B i samo dodiruje Zemljin obim u A. Zato je ugao BAD prav ugao. Kad primenimo dokaz 8, imamo:

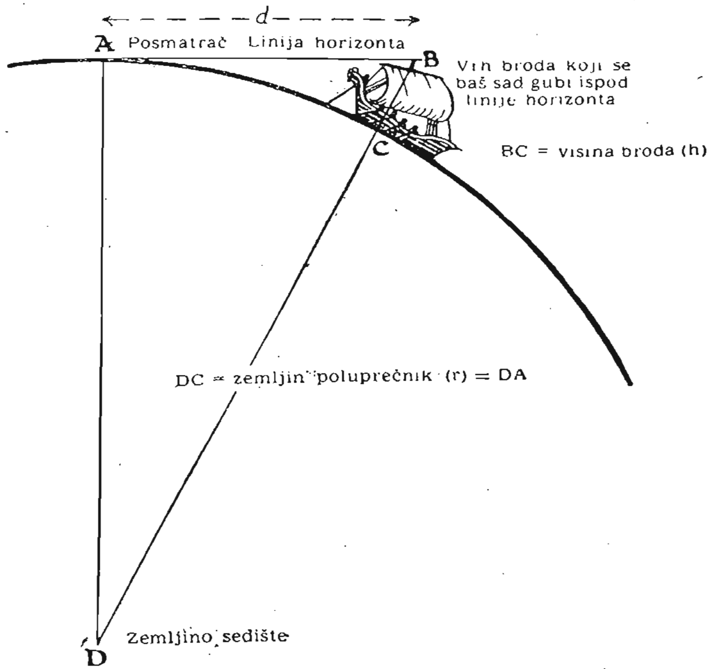
$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{DB}^2=(DC+CB)^2=\overline{DC}^2+2\,DC\cdot CB+\overline{CB}^2.$$

Pošto su AD i DC Zemljini poluprečnici, AD $= r =$ DC, biće:

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{AD}^2+2\,DC\cdot CB+\overline{CB}^2, \quad \text{tj.} \quad \overline{AB}^2=2\,DC\cdot CB+\overline{CB}^2.$$

Ako dužinu AB (rastojanje do predmeta koji tek što nije iščezao s horizonta, obeležimo sa *d*, a dužinu *BC* (visinu predmeta kad bi bio potpuno vidljiv) sa *h*, imamo:

$$d^2 = 2\ rh + h^2 = h(2r + h).$$



SL. 59. — LINIJA HORIZONTA KAO DIRKA

Pošto su najviše planine na Zemlji visoke oko 9 kilometara[1]), a poluprečnik Zemljin je oko 6370 kilometara, dužina $(r + h)$ ne može se razlikovati od r više od jednog hiljaditog. Visina h nekog brda je zbog toga veoma mala prema r. Zato možemo staviti da je $(2r + h) = 2r$. Otuda je

$$d^2 = 2hr$$

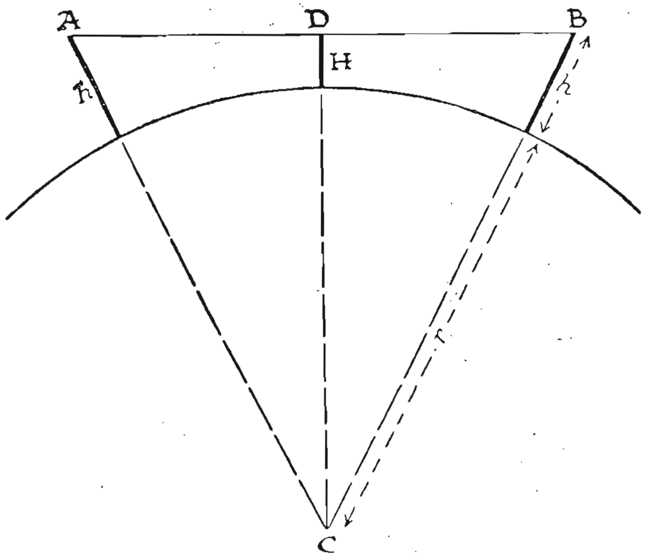
[1]) Mont Everest (Gaurisankar) na Himalajima u Indiji ima 8882 metra. — Prev.

Ovo pokazuje koliko je daleko jedna planina visoka 2 000 metara u trenutku kad se baš gubi u moru, kada je posmatračevo oko u visini morske površine.

$$d^2 = 2 \times 2 \times 6\,370 = 4 \cdot 6\,370$$

$$d^2 = 2 \times 2 \times 6370 = 4 \times 6370$$

$$d = \sqrt{4 \cdot 6370} = 2\sqrt{6370} = 2 \cdot 80 = 160 \text{ km (približno).}$$



SL. 60. — KANALSKA METODA ZA IZRAČUNAVANJE ZEMLJINOG OBIMA

ZEMLJIN OBIM

A. R. Voles, Darvinov drug u velikoj raspri o evoluciji, koji je počeo kao zemljomer, preporučio je jednu veoma prostu metodu za merenje Zemljinog poluprečnika.

Uzmu se dve motke i pobodu u jedan p r a v kanal tako, da za istu dužinu h štrče iz vode. Njihovi vrhovi A i B udaljeni su jedan od drugoga za dužinu AB, koja se izmeri. Tačno na sredini između tih dveju motki pobode se treća motka tako da njen vrh D bude na pravoj liniji AB. Pošto je Zemljina površina kriva, biće kriva i vodena površina u kanalu. Zato će visina H tačke D iznad vodene površine biti nešto manja od h. Ako tačno izmerimo h, H i BD, možemo naći veličinu Zemljinog poluprečnika primenom dokaza 6 i 8. Pošto je:

$$AC = (r + h) = BC.$$

Trougao ABC je ravnokrak, te je u njemu

$$AD = \frac{1}{2} AB = DB.$$

Znači da je CD upravno na AB (dokaz 6) i $\triangle$ DBC je pravougli. Otuda (dokaz 8)

$$\overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$DB^2 + (r + H)^2 = (r + h)^2$$

$$DB^2 + r^2 + 2rH + H^2 = r^2 + 2rh + h^2$$

$$DB^2 + H^2 - h^2 = 2rh - 2rH = 2r(h - H).$$

Otuda je

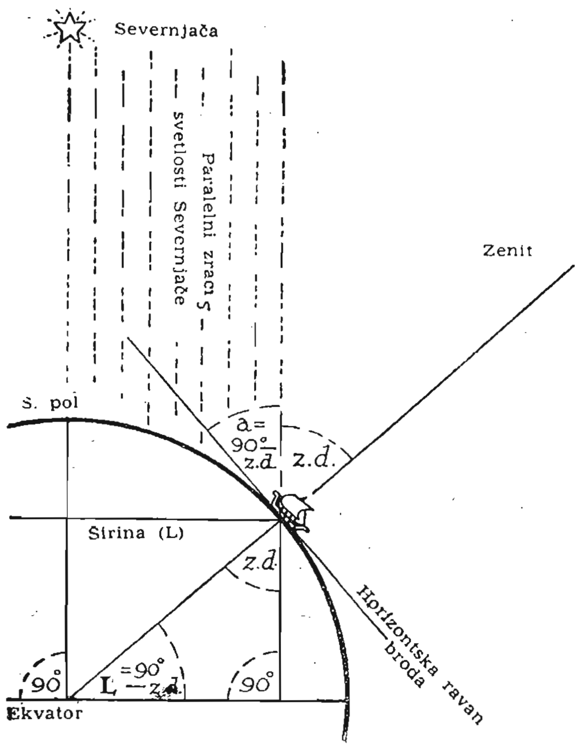
$$r = \frac{DB^2 + H^2 - h^2}{2(h - H)}$$

Pošto je rastojanje DB veoma veliko prema visini motke možemo zanemariti $(H^2 - h^2)$, pa će biti:

$$r = \frac{1}{2} DB^2 : (h - H) = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 : (h - H) = \frac{1}{8} AB^2 : (h - H).$$

DA NAĐETE GEOGRAFSKU ŠIRINU SVOJE KUĆE

Zvezde se prividno obrću po krugovima izlazeći od istoka a zalazeći na zapad. Obrću se oko osovine koja prolazi kroz tačku koja se zove nebeski pol. Danas mi to objašnjavamo tako, što kažemo da se Zemlja obrće oko osovine koja prolazi kroz njeno središte, kroz njene polove i kroz nebeski pol, u suprotnom smislu prividnog kretanja nebeskih tela. Većina zvezda zalaze ispod horizonta i vidljive su samo noću u izvesnom delu godine, ali zvezde koje su blizu pola, kao one iz sazvežđa Velikog Medveda, Malog Medveda, Lire, Zmaja i Kasiopeje na našoj geografskoj širini nikad ne zalaze ispod horizonta i vide se skoro cele noći ispod pola u izvesnim dobima godine, a iznad pola u drugim delovima godine. Jedna zvezda, Severnjača ili Polara nalazi se tako blizu nebeskog pola, da izgleda kao da se uvek nalazi na istome mestu. Ona se nalazi gotovo u pravoj

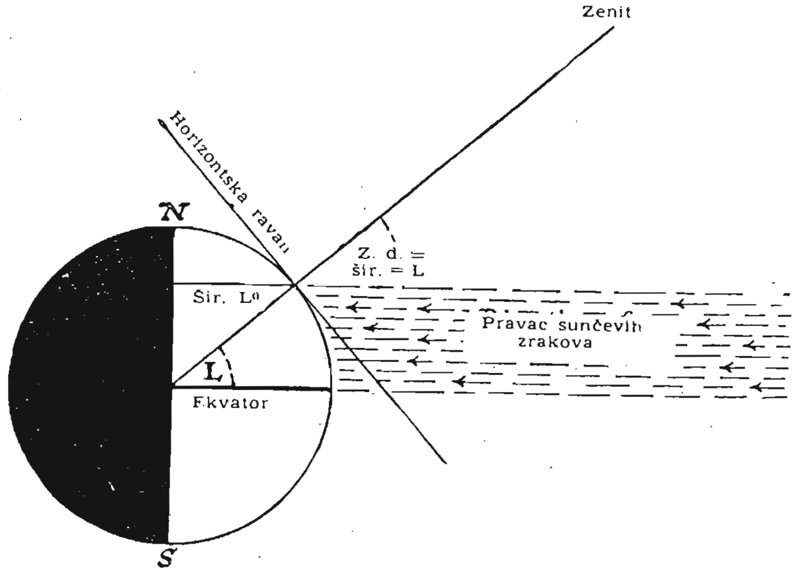


SL. 61. — ŠIRINA PREMA SEVERNJAČI

Visina (ugao prema horizontu) Severnjače pretstavlja geografsku širinu posmatračeva mesta, a obe su jednake sa 90° manje zenitna daljina Severnjače.

liniji sa Zemljinim severnim polom i Zemljinim središtem. Pošto su zvezdani zraci paralelni, zraci koji dopiru do nas sa Severnjače paralelni su sa Zemljinom osovinom. Na sl. 61 videćete da je geografska širina nekog mesta ugao (»visina«) koji nebeski

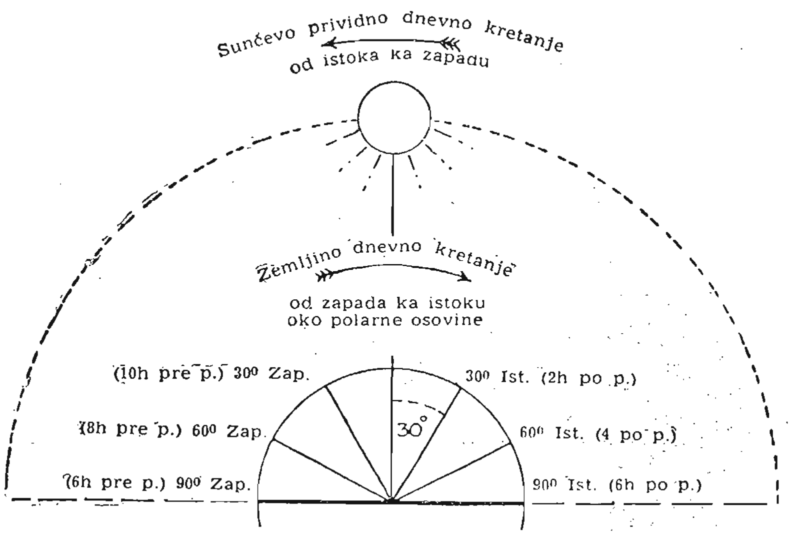
pol gradi s horizontom. Zato možete dobiti geografsku širinu svoje kuće svake vedre noći, ako odete u vrt i izmerite visinu Severnjače pomoću astrolaba koji ste sami načinili (sl. 12). Severnjača se sad obrće po krugu udaljenom za jedan stepen od nebeskog pola. Zato njena visina ne može biti više od jednog



SL. 62. — ŠIRINA IZ SUNČEVE PODNEVNE Z. D. O RAVNODNEVICAMA

21 marta i 23 septembra dan i noć su jednaki širom celog sveta. Dakle, sunce je iznad ekvatora. Na podne se sunce nalazi na liniji koja na horizontu spaja sever i jug, što znači da se nalazi na posmatračevu meridianu. Zato se nalaze na istoj ravni u prostoru: Sunce, polovi, posmatrač, zenit i Zemljino središte. Pošto su ivice Sunčeva zraka paralelne, Sunčeva z. d. na podne o ravnodnevicama pretstavlja geografsku širinu posmatračeva mesta.

stepena veća ili manja od vaše geografske širine, čak i ako se desi da budete toliko nesrećni, da je vidite pri njenom gornjem ili donjem prolazu kroz meridijan. Pošto je Zemljin obim oko 40 000 kilometara, to vam daje vaše rastojanje od ekvatora s greškom ne većom od 40 000 : 360, ili, približno 111 kilometara. Ako želite da budete zbilja tačni, uzmite aritmetičku sredinu od dva merenja izvršena u isto doba noći, u razmaku od šest meseci, kad je Severnjača tačno onoliko iznad nebeskog pola koliko je pri prvom merenju bila ispod njega, ili obrnuto.



SL. 63. — NALAŽENJE GEOGRAFSKE DUŽINE

Na podne je Sunce tačno nad linijom što spaja severnu i južnu horizontsku tačku, tj. nad dužinskim meridijanom na kome se vi nalazite. Na slici ono je upravo nad griničkim meridijanom i zato je podne u Griniču. Ako ste vi 30° istočno od Griniča Zemlja se obrnula za 30° od vremena kad je vaš sunčanik pokazivao podne. Zato je ona time izvršila jednu dvanaestinu svoga dvadesetčetvoro-časovnog obrta, te je sad dva časa na sunčaniku. Ako ste 60° zapadno, Zemlja ima tek da se obrne za 60° dok Sunce dođe nad vaš meridijan, tj. ima da se obrne za jednu šestinu svoga dvadesetčetvoro-časovnog obrta, te će na vašem sunčaniku biti 8h pre p.

U isto vreme možda želite da saznate kako da nađete svoju geografsku dužinu (sl. 63). Danas je to veoma prosta stvar, pošto brodovi imaju tačne časovnike koji mogu tačno da pokazuju griničko vreme na dugoj plovidbi, a i mi možemo dobiti griničko vreme na radiju. Podne je ono vreme kad je Sunce tačno iznad meridijana u svojoj najvišoj tački na nebu. Ako

naš sunčanik pokazuje podne jedan čas posle podneva u Griniču, Sunce ima da putuje, kako bi to stari rekli, 15° dalje na zapad, ili naša Zemlja ima da se okrene ka istoku za 15° oko svoje osovine, za to vreme između ta dva podneva. Zato smo mi 15° zapadno od Griniča. Stari su narodi primetili da sunčani časovnici ne pokazuju isto vreme u raznim mestima. Oni su to otkrili posmatrajući neko pomračenje ili neku pojavu kad kakva planeta prolazi iza Mesečevog kruga. Vavilonci su imali peščane časovnike i mogli su da posmatraju vreme koje protekne između podneva nekog naročitog dana i početka ili svršetka nekog pomračenja ili okultacije[1]). Pre nego što su pronađeni hronometri to je bio glavni način određivanja geografske dužine. Ako je u nekome mestu zapaženo da je Mesečevo pomračenje počelo u 8 časova posle mesnog podneva, a u drugom nekom mestu u $9\frac{1}{2}$ posle mesnog podneva, podne je u drugome mestu nastupilo $1\frac{1}{2}$ čas ranije nego podne u prvome mestu (sl. 116 A). I tako je drugo mesto bilo $\frac{11}{2} \times 15^0 = 22\frac{1^0}{2}$ istočnije od prvog. Grci nisu nikad uspeli da načine mape koje bi se osnivale na geografskoj širini i dužini. To je urađeno tek onda kad je grčka geometrija preneta u veliko središte moreplovstva staroga sveta, u Aleksandriju.

Deseti dokaz

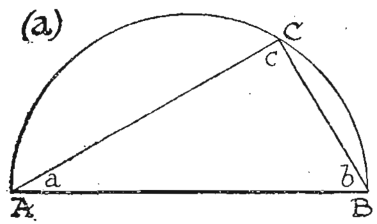
»Duži koje spajaju krajnje tačke prečnikove s ma kojom tačkom na obimu polukruga grade prav ugao«.

Kako treba deliti sliku, korak po korak, pokazano je na (b), (c) i (d) slike 64. Poluprečnik polukruga na sl. 64 je dug r jedinica. Dokaz se može izvesti ovako:

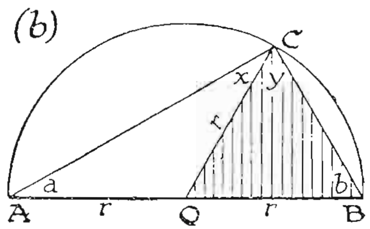
$$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 180^0$$
$$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle (x+y) = 180^0 \quad \text{[sl. (b)]}$$
$$\sphericalangle a = \sphericalangle x \quad \text{[sl. (c)]}$$
$$\sphericalangle b = \sphericalangle y \quad \text{[sl. (d)]}$$
$$\sphericalangle (x+y) + \sphericalangle (x+y) = 180^0$$
$$\sphericalangle (x+y) = \sphericalangle c \quad \text{[sl. (b)]}$$

[1]) Okultacija (zaklanjanje) nastupa kad nam jedno nebesko telo zakloni neko drugo telo. Na primer, kad nam Mesec zakloni neku planetu, ili neku zvezdu. — Prev.

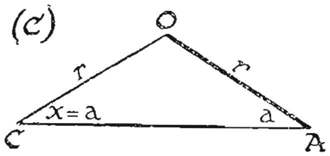
$$\sphericalangle c + \sphericalangle c = 180^\circ$$
$$\sphericalangle 2c = 180^\circ$$
$$\sphericalangle c = 90^\circ.$$



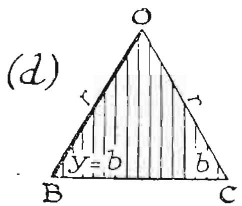
Dokaz 5 pokazuje da je $a + b + c = 180^\circ$



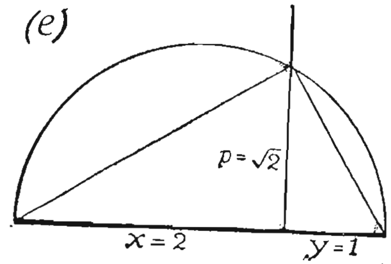
OC spaja *C* s centrom *O*.



Dokaz 6 pokazuje zašto je $x = a$.



Dokaz 6 pokazuje zašto je $y = b$.



Poluprečnik kruga $= \frac{1}{2}(x+y)$ ili $\frac{1}{2}$ od 3 tj. $1\frac{1}{2}$

Da nađete geometrisku sredinu za 1 i 2 (tj. $\sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$) upišite pravougli trougao u jedan polukrug čiji je poluprečnik aritmetička sredina ta dva broja (tj. $r = \frac{1+2}{2} = 1\frac{1}{2}$)

Da biste tom metodom našli vrednost za $\sqrt{6}$, stavite $x = 3$, $y = 2$. (Tada je $r = \frac{2+3}{2} = 2\frac{1}{2}$).

SL. 64. — DOKAZ 10

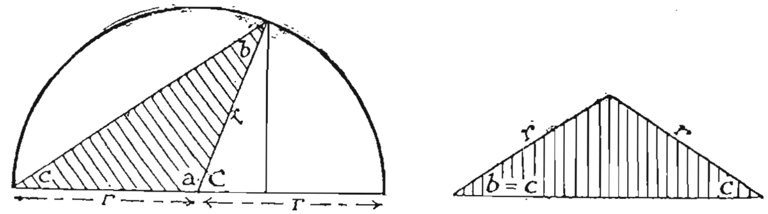
Ovaj nam dokaz pokazuje kako da nacrtamo na pesku geometrisku sredinu dva broja sl. 64 (e). Time se možemo poslužiti kao hijeroglifom da dobijemo kvadratne korene tačnije nego što smo ih dobijali metodom pokazanom na slici 55. U dokazu 8 (sl. 51) našli smo da je

$$p = \sqrt{xy}$$

Da bismo našli $\sqrt{xy}$ (sl. 51) potrebno nam je da konstruišemo pravougli trougao čija je hipotenuzina visina[1]) p jedinica tako da ona deli hipotenuzu na otsečke x i y. Uzmimo da hoću da dobijem $\sqrt{7}$. Ako je $x = 7$, $y = 1$, biće $xy = 7$. Ja onda nacrtam duž od 8 jedinica, pa na njoj dignem upravnu u tački udaljenoj 1 jedinicu od kraja (ili 7 jedinica od drugoga kraja). Iz tačke na sredini duži od 8 jedinica opišem polukrug poluprečnikom od 4 jedinice. Spojim krajeve duži s tačkom u kojoj polukrug seče onu upravnu. Imaćemo kod te tačke prav ugao i ova konstrukcija daće vam $p = \sqrt{xy}$.

Jedanaesti dokaz

»Ako dignemo upravnu na prečniku jednoga polukruga pa spojimo presek te upravne i polukružnog obima sa središtem



SL. 65. — DOKAZ 11

$C = 180^\circ - a$ (sl. 33)
$b = c$ (dokaz 6)
$b + c = 2c$

kruga i sa krajem prečnika tako da obe spojnice budu s iste strane upravne duži, ugao kod središta biće dva puta veći od ugla kod kraja prečnika«.

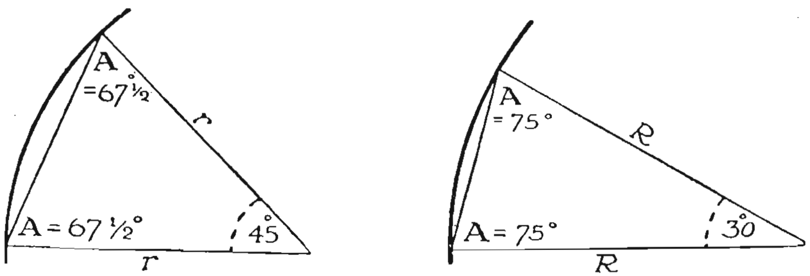
Stupnjevi ovog dokaza potpuno su izneti na sl. 65.

[1]) Visina spuštena iz temena pravog ugla na hipotenuzu. — Prev.

Imaćemo:

$$\sphericalangle C = 180^\circ - \sphericalangle a.$$
$$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 180^\circ$$
$$\sphericalangle b + \sphericalangle c = 180^\circ - \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle b = \sphericalangle c$$
$$\sphericalangle c + \sphericalangle c = 180^\circ - \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle 2c = 180^\circ - \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle (180^\circ - \sphericalangle a) = \sphericalangle C$$
$$\sphericalangle 2c = \sphericalangle C$$
$$\sphericalangle c = \sphericalangle \frac{C}{2}$$

Ovaj je dokaz veoma važan, pošto se primenjuje kao što ćemo docnije videti, pri izradi prvog aleksandriskog »rečnika« *sinusa*. Sl. 66 vam pokazuje kako možete opisivati krugove na mestu gde motka baca senku (sl. 46) za čitav niz uglova počevši od



SL. 65A. — KAKO DA SE DOBIJU UGLOVI OD 67 $\frac{1}{2}$ I OD 75°

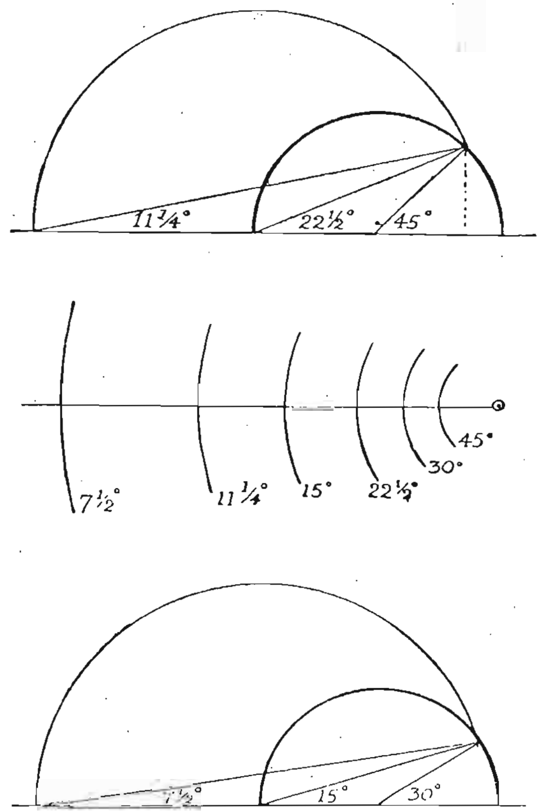
Na obema slikama uglovi *A* su jednaki. Vidi dokaz 6. Njihove vrednosti su pokazane pomoću dokaza 5.

koga bilo ugla koji umete da nacrtate (na pr. 60°, 30°, 45°). Na sl. 65 A imate i druge uglove od kojih možete početi da biste dobili nov niz krugova za merenje sunčanog ugla pomoću motke koja baca senku.

D v a n a e s t i d o k a z

»Odnos kružnog obima i kružnog prečnika isti je kod svih krugova«.

To je isto kao da smo rekli da je obim »toliko i toliko puta« veći od prečnika ma koliki bio krug. Taj broj se proteže kao i broj $\sqrt{2}$ jer se ne može premeriti. On se ne može pretstav-



SL. 66. — ODREĐIVANJE UGLOVA POMOĆU MOTKINE SENKE

Kad pođemo od 67 $\frac{1}{2}^\circ$ i 75° kao na slici 65A možemo isto tako dobiti i $67\frac{1}{2}^\circ, 33\frac{3}{4}^\circ$ . . . 75°, $37\frac{1}{2}^\circ, 18\frac{3}{4}^\circ$ . .

ljati u kratkome obliku kao periodični decimali[1]), te njega zato pretstavlja zamenica π. Docnije ćemo videti da se vrednost broja π nalazi blizu broja $3\frac{1}{7}$. Dokaz koji nas vodi tome vezuje merenje trougla sa merenjem kruga. On nam pokazuje kako da nađemo obim točka ako znamo dužinu žbice ili kolika nam je žbica potrebna da načinimo točak koji se obrne toliko i toliko puta dok pređe jedan kilometar. Na tome se osniva ciklometar[2]) (čiji je prvi model izrađen u Aleksandriji 100 godina pre n. e.) i brzinometar. Na tome se osnivaju sva velika merenja Zemlje i proračunavanja veličine Sunca i Meseca. Pošto znamo Zemljin obim, to nam daje Zemljin poluprečnik i obim ma koga kruga određene geografske širine. Bez broja π ne bi bilo ni Hristofora Kolumba[3]), ni Džordža Stivensona[4]).

Zbilja je zavodljiva pomisao da su ljude na merenje kruga naveli nacrtani poligoni i krugovi što ih svojim točkom tako lako povlači grnčar na mekoj ispupčenoj površini ilovače. Slike kao što su one sa sl. 67 potsećaju na Sunce i senku, na Sunce i Mesec, pomračenje i podne, na te svakodnevne pojave pri radu i vršenju verskih obreda u starome svetu. One izazivaju sećanje na geometriske šare koje su ukrašavale starinsko posuđe, kao što su kiparske vaze (oko 1000 godina pre n. e.). A možda je merenje kruga pronađeno posmatranjem šestougaonika što su ga Vavilonci upisali u krug, verovatno zato da bi pojas ekliptike podelili na šest prvobitnih sazvežđa Zodijaka.

Kad gledate sl. 67 vidite odjednom tri stvari: (a) obim i površina kruga su manji nego obim i površina mnogougaonika koji ga obuhvata, a veći od obima i površine mnogougaonika koji je obuhvaćen tim krugom; (b) mnogougaonik koji obuhvata

[1]) Broj 0,444 ... = $0,\dot{4}$ — periodični decimalni razlomak — možemo i ovako napisati: $0,\dot{4}=\frac{4}{9}$. Broj $0,\dot{2}\dot{5}=\frac{25}{99}$. Periodične razlomke 0,444.... i 0,25252525... pretstavili smo kratko običnim razlomkom. To ne može da se izvede ni sa $\sqrt{2}$, ni sa π. — Prev.

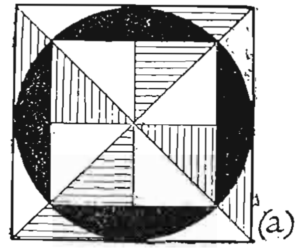
[2]) Sprava za merenje krugova. — Prev.

[3]) Moreplovac Hristofor Kolumbo, rođen u Italiji 1446, umro u Španiji 1506. Pronašao Ameriku 1492 godine. — Prev.

[4]) Džordž Stivenson (1781—1848), Englez, konstruktor prve železničke lokomotive. — Prev.

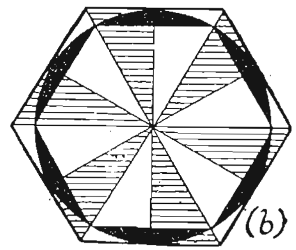
neki krug (strane mu dodiruju taj krug) ili mnogougaonik obuhvaćen krugom (temena su mu na kružnom obimu) može se podeliti na dva puta veći broj pravouglih trouglova nego što je broj mnogougaonikovih strana; (c) središni uglovi tih trouglova čine zajedno 360°.

Krug između dva kvadrata (poligona sa 4 jednake strane)



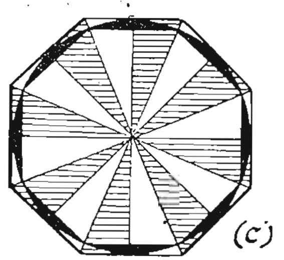
Poligon sa 4 jednake strane načinjen od 8 pravouglih trouglova čiji su središni uglovi po $\frac{360°}{8}=45°$.

Krug zatvoren između dva poligona od 6 jednakih strana



Poligon od 6 jednakih strana načinjen od 12 pravouglih trouglova čiji su središni uglovi po $\frac{360°}{12}=30°$.

Krug između dva poligona od 8 jednakih strana.

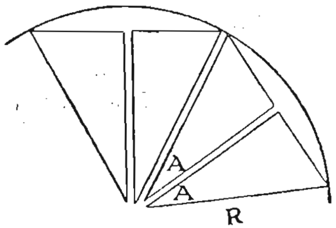


Poligon od 8 jednakih strana načinjen od 16 pravouglih trouglova čiji su središni uglovi po $\frac{360°}{16}=22\frac{1}{2}°$.

SL. 67. — OD GRNČAREVA TOČKA DO π

Na slici 68 vidite kako se dobija mnogougaonik od proizvoljnog broja (n) jednakih strana obuhvaćen krugom čiji poluprečnik iznosi R dužinskih jedinica, ili mnogougaonik koji obuhvata krug čiji poluprečnik iznosi r dužinskih jedinica. Ako stavimo teme ugla A u kružno središte, možemo ređati $2n$ podudarnih pravouglih trouglova da im se naizmenično

(a) Kako se gradi poligon od n strana obuhvaćen krugom poluprečnika R

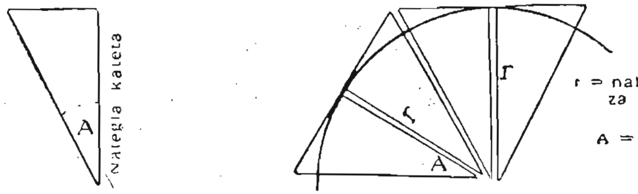


R = hipotenuza

$A = \frac{360^0}{2n}$

(b) Kako se gradi poligon od n strana koji obuhvata krug poluprečnika r.

Naspramna kateta



r = nalegla kateta za ugao A

$A = \frac{360^0}{2n}$

Sl. 68.

poklope nalegle katete, a zatim hipotenuze, sve dok ne dođemo odakle smo pošli. Ako je zbir svih središnih uglova 360^0, i ako su svi ti uglovi jednaki, imaćemo:

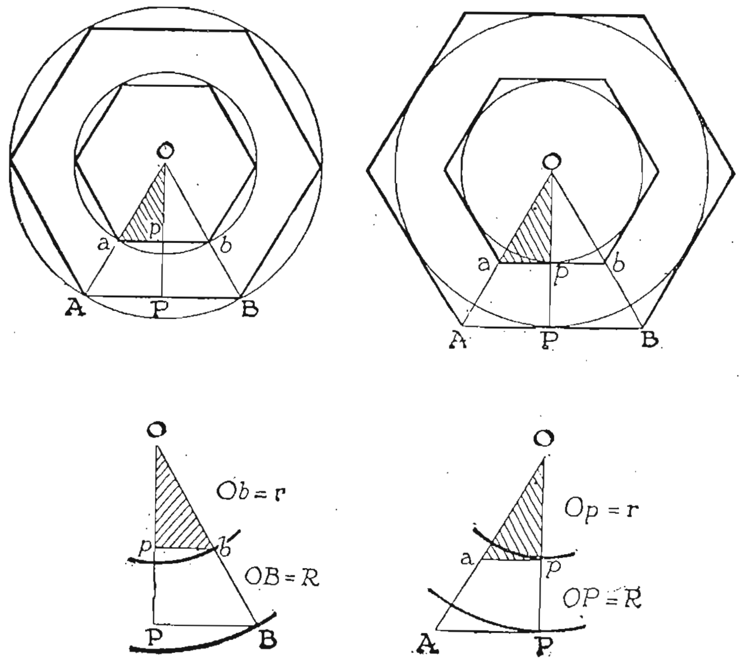
$$A = \frac{360°}{2n}$$

Sad gledajte sl. 69. Levo su dva kruga koji obuhvataju dva mnogougaonika s jednakim stranama. Desno su dva mnogougaonika s jednakim stranama koji obuhvataju dva koncentrična kruga. Na slici je $n = 6$. Na svakoj slici veći i manji mnogougaonici su nacrtani tako, da 12 pravouglih trouglova na koje oni mogu biti rasečeni leže sa temenima u istoj tački. Pošto su slični svi pravougli trougli koji imaju jednak po jedan oštar ugao [dokaz 5 (c)], isti je odnos odgovarajućih strana većih i manjih trouglova (dokaz 7).

Ako obeležimo sa r poluprečnik malog kruga, a sa R poluprečnik velikog kruga, slika levo pokazuje da je:

$$\frac{PB}{pb} = \frac{OB}{Ob}, \text{ tj. } \frac{PB}{pb} = \frac{R}{r}, \text{ tj. } \frac{2n \times PB}{2n \times pb} = \frac{2R}{2r}$$

Pošto su ovi obuhvaćeni mnogougaonici načinjeni od $2n$ takvih trouglova, njihovi su obimi $2n$ puta pb (maloga) i $2n$



SL. 69. — DA SE PRIKAŽE STALAN ODNOS OBIMA OBUHVAĆENOG I OPISANOG PRAVILNOG MNOGOUGAONIKA PREMA PREČNIKU

puta PB (velikoga). Ako obeležimo sa C'' obim većeg mnogougaonika, a sa c'' obim manjeg mnogougaonika, sa D prečnik većeg kruga, i sa d manjeg, imaćemo:

$$\frac{C''}{c''} = \frac{D}{d} \quad \text{ili} \quad \frac{C''}{D} = \frac{c''}{d}$$

što znači: odnos obima obuhvaćenih mnogougaonika sa n jednakih strana i prečnika obuhvatnog kruga uvek je isti, ako je n isti.

Sa desne slike dobivamo:

$$\frac{pa}{pO} = \frac{PA}{PO}, \quad \text{ili} \quad \frac{PO}{pO} = \frac{PA}{pa}, \quad \text{tj.}$$

$$\frac{2\,n\,x\,(PA)}{2\,n\,x\,(pa)} = \frac{2\,R}{2\,r} = \frac{D}{d}$$

Ako označimo sa C' i c' obime većeg i manjeg obuhvatnog poligona, imaćemo:

$$\frac{C'}{c'} = \frac{D}{d} \quad \text{tj.} \quad \frac{C'}{D} = \frac{c'}{d}$$

I tako je istina i ovo: odnos obima mnogougaonika od n jednakih strana i prečnika kruga koji je njima obuhvaćen isti je za sve krugove koje možemo nacrtati.

Ako opet pogledate na sl. 67 videćete da, ako je broj strana veći, obim (a i površina) unutrašnjeg poligona bliži je obimu (a i površini) spoljnjeg poligona, i da se oba sve manje razlikuju od obima (a i površine) kruga koji leži negde između tih dveju granica. Ako nastavimo da crtamo opisane i upisane poligone sa sve većim brojem jednakih strana, sve ćemo se više približavati slici dva poligona gde se krug više i ne zapaža među njima. Kako je odnos obima sličnih opisanih poligona prema prečniku isti za sve krugove koje možemo nacrtati, i odnos obima sličnih upisanih poligona prema prečniku isti za sve krugove koje možemo nacrtati, odnos i samog obima kruga (c) prema njegovom prečniku isti je za sve krugove. Taj odnos mi zovemo π, tj.

$$\frac{c}{d} = \pi \quad \text{ili} \quad c = \pi\,d = \pi \times 2\,r = 2\,r\,\pi.$$

Docnije ćemo videti kako dobijamo posebnu vrednost za π, kad budemo videli za šta se on upotrebljava. Pošto ćete verovatno želeti da posle ovolike muke nešto saznate o tome, daćemo prvu približnu vrednost broja π. Euklid nije upotrebio ovaj dokaz, ma da su Misirci dospeli oko 1500 godine pre n. e. do vrednosti 3, 16, koja je dovoljno tačna, ako se radi s tačnošću do 1 stotog. Ako biste Misirca upitali: a zašto je dobro da to čovek zna, on bi vam poklonio neki sitan novac, da vam plati

trud. Evo toga sitnog novca. Obim kvadrata koji obuhvata krug prečnika d iznosi $4\,d$ [sl. 67 (a)]. Nacrtajte ga, pa ćete videti zašto je to tako. I tako je obim kruga manji od $4\,d$. Poligon od 6 jednakih strana sastavljen je od 12 pravouglih trouglova sa po jednim uglom od 30^0. Videli smo da u takvom pravouglom trouglu kateta prema uglu od 30^0 iznosi pola hipotenuze. Kod poligona obuhvaćenog krugom čiji je poluprečnik $\frac{1}{2}d$ hipotenuza je jednaka s poluprečnikom (gore na sl. 68). Zato je kateta prema središnom uglu $\frac{1}{4}$ d. Obim poligona od 6 jednakih strana je 12 puta toliko, tj. $\frac{1}{4}\,d \times 12 = 3\,d$.

Zato je obim kruga manji od $4\,d$, a veći od $3\,d$. To znači da se π nalazi između 3 i 4 ($\pi = 3{,}5 \pm 0{,}5$). Čim pogledamo sliku vidimo da je obim kruga bliži šestostranom upisanom poligonu nego opisanom kvadratu. Znači da je π veće od 3 i bliže 3, nego 4. Drugim rečima, ono se nalazi između 3 i 3,5 ($\pi = 3{,}25 \pm 0{,}25$).

Kad imamo neku vrednost za π, možemo lako dobiti površinu kruga. Kad pogledate gore desno na sl. 69 videćete da je površina opisanog poligona od n strana ovo:

$$2\,n\,\frac{PB \times PO}{2} \quad \text{tj.}$$

$$2\,n\,\frac{PB \times r}{2} \quad \text{tj.}$$

$$2\,n \times PB \times \frac{r}{2}$$

To je dalje

$$\frac{r}{2} \times (2\,n \times PB) \quad \text{tj.}$$

$$\frac{r}{2} \times \text{ obim poligona}$$

Kad je n toliko veliko, da više ne možemo razlikovati obim poligona od obima kruga, površina kruga (p) biće:

$$p = \frac{1}{2}\,r \times \text{ obim kruga, tj.}$$

$$p = \frac{1}{2}\,r \times \pi\,d.$$

A pošto je $d = 2r$, biće

$$p = \frac{1}{2} r \times 2 r \pi$$

$$p = \pi r^2$$

Ako znamo poluprečnik Zemljin, π nam pomaže da joj nađemo obim. Euklid daje jedan dokaz koji nam omogućuje da to uradimo. Mi smo u ovoj glavi izostavili svako pominjanje grčke geometrije o telima iz jednog prostog razloga. Isti se rezultat može postići jednom drugom vrstom matematike koja je zamenila grčku geometriju. Ovo što smo dosad naučili dovoljno je da nam ocrta početke toga docnijeg razvoja. Rastojanje do Meseca možemo da nađemo metodom koju smo nagovestili, a koju ćemo prikazati tek docnije. Istom metodom možemo da nađemo Mesečev poluprečnik. I tako možemo dobiti obim Mesečev.

VRHUNAC GRČKE GEOMETRIJE

Grčka geometrija koju je Euklid doneo u Aleksandriju oko 300 g. pre n. e. već je bila dostigla vrhunac. Ona je sadržavala u sebi sve potrebne principe iz kojih su Aleksandrinci i Arapi izveli prosta pravila za računanje i mnogo ekonomičniji način merenja, astronomskog i geografskog, kao i neimarskog i domaćeg. Zašto su Grci propustili da pronađu neštó značajno na putu koji im je otvorio Anaksagora svojim smelim i sjajnim postavkama i Aristarh i Eratosten svojim stvarnim merenjima (glava VI)? To se da objasniti činjenicom da je geometrija postala bila zabavna igra intelektualaca koji su bili ravnodušni prema društvenom životu zanatlija i mornara. Kad su naišli na brojeve kao što su $\sqrt{3}$ i π, koji se ne mogu izraziti ovčim i kravljim brojevima, pojmovima njihovog društva, našli su se pred dilemom, da li da popune svoj rečnik brojeva kao što je to Arhimed docnije pokušao, i da ga tako podese za praktične poslove, ili da se sklone u apstraktne sfere savršenstva iz kojih su prognana geometriska merenja. Oni su se odlučili za ovo drugo. Euklid ne govori u istom smislu kao mi o stranama i o površinama ili o kvadratima brojeva koji (približno) pretstavljaju dužine. On govori o stranama, linijama i figurama. On ne upotrebljava opšte brojeve kao što mi

činimo, da stoje mesto nekoliko jedinica za merenje. On je samo upotrebljavao slova da mu služe kao natpisi na pravama i na figurama, isto onako kao što je mogao upotrebljavati brojeve samo za računanje koje je obavljao na računaljci.

Platonovo učenje da su lenjir i šestar jedini instrumenti koje geometričar sme da upotrebljava kad crta slike potpuno je u skladu s njegovim ostalim pogledima na matematiku. Geometrija je pomagala da se dođe do duhovnog savršenstva. Ne očekuje se od nas da postižemo duhovno savršenstvo i da pri tome uživamo. Zato nije nikakvo čudo što su sledbenici takvih shvatanja načinili geometriju onako teškom i neprijatnom kakvom su je osetila čitava pokolenja učenika. Geometrija je bila najviša kulturna razonoda. Išlo se, pre svega, na to da se dadu što zapletenija pravila za tu igru. Bridž sa licitiranjem bi bio i suviše mirna igra za besposlene intelektualce poklonike platonizma. Ljudi koji su pronalazili sprave za crtanje novih vrsta linija, kao Atinjanin Arhitas iz staroga doba, nisu nailazili na dobar prijem, te je tako bio zatvoren put ka novim pronalascima.

Za sve to vreme ostala je skrivena jedna protivurečnost. Slike su uostalom stvari koje imaju da izvode nesavršena ljudska stvorenja nesavršenim instrumentima, čak i kad su dopuštena samo dva instrumenta[1]). I sam je Euklid stvorio učenje po kome se ne sme upotrebiti konstrukcija (ono što smo mi nazvali rasecanjem) ako se prethodno ne dokaže da se ona može izvesti sa ova dva nesavršena instrumenta. Mi smo to uradili u svojim prethodnim pravilima o rasecanju. Cela je istina da se duž ne može podeliti na proizvoljan c e o broj sasvim jednakih delova. Isto je tako istina da grčki materijal za geometriske oglede, značke na hartiji, ili zarezi na vosku i pesku, nije bio ni najmanje podesan da se njime pretstavi nešto što je potpuno jednako s nečim drugim.

Posle osnivanja univerziteta u Aleksandriji oko 320 g. pre n. e. grčka matematika je nešto krenula napred. Naš poslednji pogled na matematiku na grčkom kopnu pre nego što je Carigrad pao pod Turke, pokazuje obožavanje mađiskih kvadrata (sl. 70). Njih je Vizantinac Moskopulos doneo u Italiju u šesnaestom veku n. e. Gramatika brojeva završila se onde odakle je

[1]) Šestar i lenjir. — P r e v.

počela: u mešavini praznoverice i »ukrštenih reči«. U idućoj glavi videćemo da se grčki intelektualac, kad je pred njim izbila kriza njegove društvene kulture, latio »ukrštenih reči«, pre nego što je prognao brojeve iz geometrije.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

SL. 70. — MAĐISKI KVADRAT

Videćete da svaki stubac, vrsta ili dijagonala daju zbir 34. ($1 + 12 + 8 + 13 = 34$ — prvi stubac, $1 + 15 + 14 + 4 = 34$ — prva vrsta, $1 + 6 + 11 + 16 = 34$ prva dijagonala). Upisan na srebrnom tanjiru iz šesnaestog veka ovaj kvadrat je branio svoga gazdu od kuge. Ovaj način lečenja nije primenjivan samo na bolesti izazvane bacilima. On je smatran i kao psiho-analitički lek. Na jednom zidu gde se nalazi jedna od najčuvenijih rezbarija Albrehta Direra[1]) urezan je i jedan mađiski kvadrat.

VEŽBANJA UZ IV GLAVU

PRONALASCI I OGLEDI

1. — Dve prave se seku i grade četiri ugla *A*, *B*, *C* i *D*. Nacrtaj takve dve prave i odredi tri ostala ugla kad je A: 30^0, 60^0, 45^0.

2. — Jedan trougao ima strane *a*, *b* i *c* prema uglovima *A*, *B* i *C*. Produži *a* preko *C* do *E*, pa nađi $\sphericalangle\ A\ C\ E$, kad je: (1) $A = 30^0$, $B = 45^0$, (2) $A\ 45^0$, $B\ 75^0$. Ako $\sphericalangle\ A\ C\ E$ nazovemo spoljnim uglom kod *C*, kako glasi opšte pravilo koje vezuje spoljni trouglov ugao sa ona dva unutarnja nenalegla ugla?

[1]) Albreht Direr, nemački slikar i bakrorezac, 1471—1528. — Prev.

3. — Nacrtaj ravnostrani trougao čije su strane dugačke *1* jedinicu. Iz jednog temena spusti visinu na naspramnu stranu. Izrazi trouglovu površinu pomoću (1) sin 60^0, (2) cos 30^0. Ako dužina strane iznosi *a*, kolika će biti visina? A površina?

4. — Nacrtaj ravnokraki trougao s jednim uglom od 120^0. Ako su kraci (jednake strane) jednaki s jedinicom dužine, naći izraz za površinu trougla. Kolika je površina, ako krak ima dužinu od *a* jedinica?

5. — Nacrtaj slike koje objašnjavaju ova tvrđenja:

$$(2\,a + 3\,b)^2 = 4\,a^2 + 12\,ab + 9\,b^2$$

$$(3\,a - 2\,b)^2 = 9\,a^2 - 12\,ab + 4\,b^2$$

$$(2\,a + 3\,b)\ (3\,a - 2\,b) = 6\,a^2 + 5\,ab - 6\,b^2$$

$$(2\,a + 3\,b)\ (2\,a - 3\,b) = 4\,a^2 - 9\,b^2$$

6. — U poslednjoj glavi pronašli ste kako da pišete izraze $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ na drugi način. Ti računski izrazi mogu da posluže da se pomoću njih dignu na kvadrat razni drugi izrazi. Na primer

$$\left(\boxed{x+y} + 1\right)^2 = \boxed{x+y}^2 + 2 \cdot 1 \cdot \boxed{x+y} + 1^2 =$$
$$= x^2 + 2\,xy + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1.$$

To se obično piše ovako:

$$[(x + y) + 1]^2 = x^2 + 2\,xy + y^2 + 2\,x + 2\,y + 1$$

Ovde treba zapaziti da kad imamo dva para zagrada, jednu u drugoj, one su različitog oblika da ne bi bilo zabune[1]). Na taj način napiši vrednost ovih izraza:

$(x + y + 2)^2$	$(x + 1)^2$
$(x + y - 2)^2$	$(x - 1)^2$
$(2\,a^2 + 3\,y^2)^2$	$(4\,a - 5\,b)^2$
$(x^2 + y^2)^2$	$(xy - 1)^2$

$$(x^2 - y^2)^2$$

[1]) Zagrada ( ) zove se mala zagrada; zagrada [ ] zove se srednja zagrada; zagrada { } zove se velika zagrada. — Prev.

7. — Ako taj postupak izvrnete, možete napisati kvadratni koren ma koga izraza ovoga oblika:

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Načinite kvadratni koren ovih izraza:

$$9x^2 + 42xy + 49y^2 \qquad a^2 + 6a + 9$$
$$4a^2 - 20ab + 25b^2 \qquad x^2 - 2x + 1$$
$$16a^2 - 72ab + 81b^2 \qquad x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 + 24xy + 144y^2$$

8. — Služeći se jednakošću $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, nađite vrednost ovih izraza:

$$(x+1)(x-1) \qquad (x+3)(x-3)$$
$$(ab+1)(ab-1) \qquad (a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$(x+y-2)(x+y+2)$$

9. — Veoma je korisno umeti rastavljati složene izraze na činioce. Već ste videli kako možete naći činioce izraza ovog oblika: $a^2 + 2ab + b^2$. Jednakost $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$ može da se iskoristi da se nađu činioci svakog izraza koji pretstavlja razliku dva kvadrata. Na primer:

$$64x^4 - 81y^2 = (8x^2)^2 - (9y)^2 = (8x^2 - 9y) \times (8x^2 + 9y)$$

Na taj način napišite činioce ovih izraza:

$$x^2 - 1 \qquad x^2 + 2xy + y^2 - 2^2$$
$$(a+b)^2 - c^2 \qquad a^2 - (b+c)^2$$
$$a^2 - (b-c)^2 \qquad (x+y)^2 - 1$$
$$x^8 - y^8 \qquad a^4 - b^4$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 1 \qquad 81 - x^2$$
$$(x+2)^2 - (x-1)^2$$

10. — Napišite koliko iznosi treći ugao u trouglu kad su ovo njegova dva ugla:

15^0 i 75^0 $\qquad$ 30^0 i 90^0

49^0 i 81^0 $\qquad$ 110^0 i 60^0

90^0 i 12^0.

11. — Ako zagledate sl. 13 videćete šta se podrazumeva pod izrazom »zenitna daljina« (z. d.) i visina (a) jednog nebeskog tela. Objasnite zašto je $a = 90^0 - z.\ d.$ i zašto je $z.\ d. = 90^0 - a$.

12. — Ako je visina Severnjače u Memfisu 30^0, u Njujorku 41^0, a u Londonu $51\frac{1^\circ}{2}$, kolike su zenitne daljine na tim mestima?

13. — Zvezda Sirius je udaljena za $106\frac{1^\circ}{2}$ od Severnjače na istom meridijanu. Nacrtajte sliku da pokažete njen položaj prema Severnjači kad se bude nalazila na meridijanu jednog, pa drugog, pa trećeg mesta iz prethodnog zadatka. Kolika je zenitna daljina i visina u svima tim slučajevima?

14. — Nacrtajte četiri pravougla trougla koji imaju po jedan ugao od 10^0, 30^0, 45^0, 75^0. U svima tim trouglima spustite visinu na hipotenuzu. Izračunajte uglove na koje ta visina deli prav ugao.

15. — Lestvice naslonjene na vertikalan zid zgrade zaklapaju sa zidom ugao od 30^0. Lestvice su odmaknute od zida 2 metra. Koliko su dugačke lestvice i dokle su doprle na zidu?

16. — Jedan orman visok 1,5 m nalazi se u potkrovnoj sobi sa zakošenim krovom. Orman ne može da se primakne zidu bliže od 0,6 m. Koliki je nagib krova?

17. — Trščani krov je nagnut pod uglom od 60^0. Dopire do 4,5 m iznad zemlje. Zgrada je proširena tako da je sad krov 1,8 m od zemlje. Za koliko je zgrada proširena?

18. — Telegrafski direk visok 5,185 m baca na podne senku od 5,187 m. Kolika je približna Sunčeva zenitna daljina? (Poslužite se tablicom tangensa).

19. — Na podne, kad je Sunčeva zenitna daljina bila 30^0, senka jednog nosača ulične sijalice tačno je dodirivala podnožje lestvica dugih 3,60 m, koje su dopirale do vrha nosača. Za koliko se produžila senka kad je Sunčeva zenitna daljina postala 90^0? (Nacrtajte sliku! Računanje nije potrebno).

20. — Senka jedne motke od 110 cm bila je 150 cm u četiri časa po podne. U isto vreme senka jedne stene bila je 55 m. Koliko je visoka stena?

21. — Zemljomer želi da izmeri širinu reke koju ne može da pređe. Na suprotnoj obali jasno se vidi predmet P. Sa svoje obale iz tačke A levo od P on nađe merenjem da je ugao pravca AP i reke 30^0. Iz tačke B sa svoje obale, desno od P, pravac BP zaklapa s rekom ugao od 45^0. On izmeri AB i nađe da je dužina 18 m. Nacrtajte sliku svega toga, pa nađite širinu reke. (Uputstvo. Upravna spuštena iz P na AB. Nađite odnose te upravne prema otsečcima na AB[1]), pa saberite otsečke).

22. — Petodinarka postavljena na rastojanju od 2,75 m od oka zakloniće Sunce ili Mesec. Uzmite da je rastojanje do Sunca 149 miliona kilometara, a prečnik petodinarke 25 milimetara, pa nađite prečnik Sunca.

23. — Ako je sin A = cos 60^0, koliki je ugao A?
Ako je sin A = cos 45^0, koliki je ugao A?
Ako je cos A = sin 15^0, koliki je ugao A?
Ako je cos A = sin 8^0, koliki je ugao A?

24. — Ako je sin $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a cos $x = \frac{1}{2}$, koliki je tang x?
Ako je sin $x = 0{,}4$, a cos $x = 0{,}9$ koliki je tang x?
Ako je cos $x = 0{,}8$, a sin $x = 0{,}6$, koliki je tang x?
Ako je sin $x = 0{,}8$, a cos $x = 0{,}6$, koliki je tang x?

25. — Poslužite se tablicama kvadrata i kvadratnih korena, pa nađite treću stranu u pravouglom trouglu kod koga su ovo dve strane:

(1) 17 m i 5 m	(2) 3 m i 4 m
(3) 5 m i 12 m	(4) 1 cm i 12 cm.

Koliko vrednosti možete dobiti za traženu treću stranu?

26. — Načinite dve geometriske slike u tačnoj razmeri, da biste dobili tablicu kvadrata celih brojeva od 1 do 7.

27. — Izvedite geometriske konstrukcije kojima ćete naći aritmetičke i geometriske sredine brojeva 2 i 8, 1 i 9, 4 i 16.

28. — Kolika je zenitna daljina neke zvezde u trenutku kad ona dodiruje horizont? Kad je najsjajnija posle Siriusa zvezda Kanopus, neposredno nad meridijanom, ona je u okolini Velike Piramide (geograf. širina 30^0) $7\frac{1^0}{2}$ iznad južne tačke horizonta. Koliki je ugao između Kanopusa i Severnjače? Pod pretpostavkom da je utvrđen ugao između dveju zvezda kad se one nalaze nad meridijanom, koja je najveća severna širina sa koje se uopšte još može videti Kanopus?

[1]) Iz tih odnosa nađite otsečke na AB. — Prev.

29. — Ako je Sunce upravo nad severnim povratnikom $\left(\text{severna širina } 23\frac{1^0}{2}\right)$ na dan 21 juna pokaži pomoću slike kao što su sl. 61 i 62 kolika je njegova visina, a kolika zenitna daljina u Njujorku (sev. šir. 41^0), u momentu kad je ono nad meridijanom (tj. na podne). Koja je najjužnija širina sa koje se još može videti Sunce o ponoći toga dana?

30. — Kolika je zenitna daljina Severnjače u Njujorku (sev. šir. 41^0) i Londonu $\left(51\frac{1^0}{2}\text{ sev. šir.}\right)$ i visina podnevnog Sunca 23 septembra?

31. — U jednome selu u Engleskoj senka telegrafskog direka bila je 25 decembra najkraća u trenutku kad je radio program javio da je po Griničkom vremenu $12^h\ 14^m$. Kolika je geografska dužina toga sela?

32. — Poligon od x jednakih strana podelite na x podudarnih trouglova, pa dokažite da je ugao između dveju strana toga poligona $\frac{2x-4}{x}$-ti deo pravog ugla.

33. — Kolika je visina kule svetilje kad se njena svetlost vidi sa daljine od 20 kilometara?

34. — Sa vrha jarbola nekog broda koji je 18 metara iznad morske površine samo se nazire vrh jedne stene visoke 30 metara. Koliko je daleko brod od te stene?

35. — Na podne jednog dana senke dveju vertikalnih motki A i B, svaka po 150 cm, iznose 90,8 cm i 90,4 cm. Ako se A nalazi 125 km severno od B, koliki je Zemljin poluprečnik?

36. — Ako je kvadrat nacrtan oko kruga s poluprečnikom od 1 dm tako da mu strane samo dodiruju krug, pokažite da mu je obim 8 tang 45^0. Ako je kvadrat ucrtan u krug tako, da su mu temena na kružnom obimu, pokažite da mu je obim 8 sin 45^0. Isto tako pokažite da je obim opisanog šestougao-

nika 12 tang 30°, a upisanog šestougaonika 12 sin 60°. Šta mislite koliki će biti obim upisana i obim opisana osmougaonika (8 strana) i dodekagona (dvanaestougaonika — 12 strana)?

37. — Izračunajte brojne vrednosti obima opisana i upisana kvadrata, šestougaonika, osmougaonika i dvanaestougaonika. Načinite tablicu od svojih rezultata da pokažete između kojih vrednosti leži π, služeći se tablicama sinusa i tangensa.

38. — Pokažite da je površina opisanog kvadrata 4 tang od 45°, a upisanog kvadrata 4 sin 45° cos 45°. Kolike su površine opisanog i upisanog pravilnog šestougaonika? Dajte opšti izraz za površinu opisanog i upisanog poligona sa n jednakih strana, vodeći računa da je kod opisanog kvadrata površina 4 tang $\frac{360^0}{8}$.

39. — Pošto površina kruga čiji je poluprečnik jedinica, iznosi π (jer je tada $\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \cdot 1 = \pi$), iskoristite opšte izraze koje ste maločas dobili, pa nađite granice između kojih se nalazi π, kad uzmete da je π između površina opisanog i upisanog mnogougaonika od 180 strana.

40. — Ako se uzme da je poluprečnik Zemljin 6370 kilometara[1]), koliko je rastojanje između dva mesta na istoj geografskoj dužini, kad im je razlika geografskih širina svega jedan stepen?

41. — Koliko je rastojanje dva mesta na ekvatoru čije se geografske dužine razlikuju za jedan stepen?

42. — Pošto je brod preplovio 300 kilometara pravo na zapad, konstatuje se da mu se geografska dužina promenila za 5°. Kolika mu je geografska širina?

43. — Na dan svoje letnje prekretnice Sunce se nalazi tačno iznad severnog povratnika $\left[\text{geogr. šir. } \left(23\frac{1}{2}\right)^0 \text{ severno}\right]$. Na dan svoje zimske prekretnice ono se nalazi tačno iznad južnog povratnika $\left[\text{južna geogr. šir.} \left(23\frac{1}{2}\right)^0\right]$. Nacrtajte sliku

[1]) Poluprečnik Zemljin do pola je 6 357 kilometara, a do polutara (ekvatora) 6 378 kilometara. — Prev.

kojom ćete pokazati pod kojim je uglom Sunce nagnuto prema horizontu u podne u Londonu $\left(\text{sev. šir. } 51\frac{1^0}{2}\right)$ na dan 21 juna i 21 decembra.

44. — Pokažite slikom da je podnevna senka u Njujorku uvek upravljena ka severu. (Njujork ima sev. geogr. šir. 41°).

45. — Pošto posmatrate podnevnu senku tokom cele godine, kako ćete znati da li ste:

a) Severno od severne širine $66\frac{1^0}{2}$?

b) Između severnih širina $66\frac{1^0}{2}$ i $23\frac{1^0}{2}$?

c) Između severne širine $23\frac{1^0}{2}$ i ekvatora?

d) Tačno na Severnom Polu?

e) Tačno na Polarnom Krugu?

f) Tačno na Severnom Povratniku?

g) Tačno na Ekvatoru?

46. — Na kojoj će geografskoj širini Sunčeva podnevna senka neke motke biti jednaka s dužinom same motke 21 juna, 21 marta, 21 decembra?

47. — Brodski hronometar pokazao je 23 septembra po griničkom vremenu $10^h\ 44^m$ pre podne kad je Sunce preseklo meridijan pod uglom od 56° iznad severnog horizonta. Kome li se to pristaništu približava brod? (Uzmite mapu!)

48. — Kad se Njujork nalazi na meridijanu 47° zapadne dužine, a Moskva na $37\frac{2^0}{3}$ istočne dužine, koliko će biti časova u Moskvi, a koliko u Njujorku, kad je griničko vreme 9^h uveče?

49. — Znamo definiciju kruga. To je slika kod koje je svaka tačka njenog obima podjednako udaljena od jedne stalne tačke zvane središte. Iskoristite sad deveti dokaz, pa pokažite da je kružno središte isto tako ona tačka u kojoj se seku sve prave koje su kroz sredine tetiva povučene upravno na te tetive.

50. — Kako ćete to iskoristiti ako želite da napravite osnovu za svoj domaći teodolit (kao što je onaj na sl. 12) od kružnog sedišta jednog starog tronošca, ili ako želite da probušite središte kakve kružne metalne kutije?

51. — Ako se strana BC trougla ABC produži preko C do tačke D, pokažite da je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC$. Ako dva posmatrača u B i C mere visinu nekog nebeskog tela u A, ugao CAB je njegova *paralaksa* u odnosu na ta dva posmatrača. Objasnite pomoću petog dokaza zašto je paralaksa nekog tela razlika između njegovih visina u B i C, ako A ima isti azimut za oba posmatrača?

DA SE UPAMTI!

1. — U trouglu čija je osnovica b prema uglu B, strana a prema uglu A, strana c prema uglu C, a h visina iz temena B na osnovicu b:

(1) Površina $= \frac{1}{2} bh$ (2) $A + B + C = 180^0$

Ako je $B = 90^0$:

(1) $C = 90^0 - A$
$A = 90^0 - C$

(2) $b^2 = a^2 + c^2$

(3) $\sin A = \frac{a}{b} = \cos C$

$\cos A = \frac{c}{b} = \sin C$

$\operatorname{tang} A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\operatorname{tang} C} = \operatorname{cotg} C$ [1]

2. — U krugu čiji je poluprečnik r (prečnik d):
Obim $= 2 \cdot \pi \cdot r$ (ili $\pi \cdot d$)
Površina $= \pi r^2$

3. — Dva su trougla podudarna:
(1) Ako su im sve tri strane jednake.
(2) Ako su dve strane i zahvaćeni ugao jednog trougla jednaki s dvema stranama i zahvaćenim uglom drugog trougla.
(3) Ako je jedna strana i uglovi što ih druge dve strane grade s njom iz jednog trougla jednaka s jednom stranom i odgovarajućim uglovima u drugom trouglu.

[1]) U razlomku $\frac{a}{c}$ podelimo i brojilac i imenilac sa a:

$$\frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\operatorname{tang} C}.$$ — Prev.

GLAVA V

OD KRIZE DO UKRŠTENIH REČI

ili

Početak aritmetike

Racionalno obrazovanje imaće da pokaže da je znanje geometrije stvar na koju imamo pravo, pošto je ono pripomoglo da se osposobimo da organizujemo takvo društvo u kome svako može da učestvuje u zadovoljavanju svojih opštih potreba. Kad smo se donekle upoznali s matematičkim delom Grka, možemo početi da shvatamo kako se matematika može predavati tako da to doprinese da narod dođe do što veće slobode. Svešteničke praznoverice koje su se množile što se kalendar više razvijao, zahtevale su da hramovi budu takvi, da svojim izgledom pozdravljaju pojavu svojih preuzvišenih nebeskih gospodara. Da bi hram za gostovanje zvezdanih bogova načinili što udobnijim i što raskošnijim, robovi su se mučili na usijanom pesku. Otuda je potekao red ljudi koji su znali tajnu kako se mogu izgraditi kuće podesne za čovekovo stanovanje. Grčka literatura je to njihovo znanje čvrsto uključila u opštu svojinu čovečanstva. Cela docnija istorija ljudske misli može se smatrati kao borba između ova dva gledišta na svet. Jedno je gledište čoveka koji se služi znanjem da bi izmenio svet; drugo je kultura jedne dokone kaste koja ima vremena da posmatra svet.

Među jonskim Grcima bilo je ljudi, kao što je Demokrit, koji su uviđali, kao i mi danas, da je znanje nešto što imamo pravo i dužnost da podelimo s drugima. Prvi su matematičari želeli da rasprostiru svoje znanje. Pitagora koji je došao posle Talesa, putovao je i držao predavanja o geometriskim slikama i o brojevima pred mnogobrojnim slušaocima u šestom veku pre n. e. Tom se prilikom oženio Teonom, jednom od svojih učenica. Uskoro vidimo kako se javlja drugo shvatanje. Bilo je i drugih koji su više ličili na naše eugeniste i Južnoafrikance za koje je znanje nešto što morate kriti od ljudi crne kože ili od ljudi tanke kese. I sami Pitagorini učenici razdelili su se u tajna društva i matematici dali neki božanstven i strašno tajanstveni izgled, koji ona ima otada pa sve do naših dana. Matematički pronalasci su saopštavani pod zakletvom da će tajna biti sačuvana. U četvrtom veku pre n. e. kažu da je udavljen u svome kupatilu Hipas, član jednog od tih društava, što je »odao« matematičke istine. On je javno govorio da je listi pravilnih tela koju je bio sastavio osnivač[1]) dodao još jedno pravilno telo sa dvanaest strana. Ima mnogo razloga koji navode na misao da je ceo raspored Euklidovih »Elemenata« podešen tako da upravo vodi ka toj ideji. Kad su pitagorejska bratstva dovoljno popustila u svojim zavetima i dopustila da se pišu knjige, geometrija i proučavanje brojeva bili su izgubili dodir sa svetom. Platon koji je preneo njihovo predanje naučio je geometriju od Pitagorejca Filolausa.

Mada je sam Pitagora, izgleda, voleo da i drugima saopštava svoje znanje, sudbina njegovog učenja bila je sasvim prirodni rezultat načina na koji je on mislio. Ljudi kao Tales i Demokrit išli su u Misir, gledali šta rade sveštenici, pa su odbacili mađiju, a poslužili se njihovom veštinom, kao što socijalizam odbacuje američku ekonomiju, a može da se služi američkim inženjerima. Posetioci Pitagorinih skupova zahtevali su pogađalice. On im je dao najbolje i najsjajnije pogađalice. Samo je još jedan korak bio potreban do nastranih molitvenih obreda koje su njegovi učenici priređivali mađiskim brojevima. »Blagoslovi nas, božanstveni broju, koji si rodio bogove i ljude, o sveti *tetraktise*, koji nosiš u sebi koren i izvor stvaranja koje večito struji«. Tako su njegovi učenici bajali broju četiri.

Silan je svet dolazio da čuje Pitagoru kad izlaže svoje idealističko učenje. Ono se može videti iz toga kako je brojevima i geometriskim slikama pridavao moralne osobine. *Jedan* je smatran ne toliko kao broj koliko kao izvor svih brojeva, te je pretstavljao razum. *Dva* je pretstavljao mišljenje, *četiri* pravdu, *pet* brak, pošto je on načinjen od prvog muškog broja 3 i prvog ženskog broja 2. U osobinama broja pet ležala je tajna boja; u broju šest tajna hladnoće; u broju sedam tajna zdravlja;

[1]) Pitagora. — Prev.

u broju osam tajna ljubavi, tj. 3 (muškost) dodato je na 5 (brak). Telo sa šest strana imalo je u sebi tajnu zemlje. Piramida je sadržavala tajnu vatre (docnije ono stoičko *logos spermatikos*, svetlost koja obasjava svakog čoveka). Telo sa dvanaest strana nosilo je u sebi nebesku tajnu. Lopta je bila najsavršenije telo. Smatralo se da rastojanja do zvezda grade harmonični niz poput žica razne dužine na muzičkim instrumentima toga doba, te otuda izraz »harmonija sfera«. Brojevi su bili podeljeni u klase veselih i umiljatih, ili sumornih i naburenih, mladića i devojaka. Bilo je tu *savršenih* brojeva čiji su svi celi činioci sabrani davali taj broj. Prvi je takav broj 6. Njegovi celi činioci su 1, 2 i 3. (Kad ih saberemo, imamo $1 + 2 + 3 = 6$). Drugi je 28, čiji su svi celi činioci: 1, 2, 4, 7 i 14. (Kad ih saberemo, imamo: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$). Novo-pitagorejac Nikomah iz Aleksandrije proveo je mnogo vremena dok je ulovio naredna dva takva broja: 496 i 8128. Dalje ih nema sve dok ne dođemo do 33 550 336. Pošto se besplodno naprezao da ode tako daleko, Nikomah je otkrio »da dobro i lepo su nešto retko, što je lako prebrojati, dok su ružno i loše mnogobrojni«. Bilo je i brojeva prijatelja. Kad su Pitagoru pitali šta je to prijatelj, on je odgovorio: »Onaj što je drugo ja. Takvi su 220 i 284«. Kad se to protumači, izlazi da svi činioci broja 220 kad se saberu daju 284. (Njegovi su činioci: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, i 110. Kad se saberu daju 284. Činioci broja 284 su brojevi: 1, 2, 4, 71 i 142. Kad se saberu daju 220). Možete se i vi zabavljati kao Pitagorini slušaoci, pa potražiti još koji par brojeva prijatelja. Druga klasa dobrih pretskazanja bila je klasa trouglastih brojeva (sl. 76)[1]). Nekoliko vekova docnije, kao što ćemo videti, to se ispostavilo kao nešto korisno. Na primer, prva četiri trouglasta broja su 1, 3 (tj. $1 + 2$), 6 (tj. $1 + 2 + 3$) i 10 (tj. $1 + 2 + 3 + 4$). Priča o tim brojevima pokazuje nam kako je matematika počela prestajati da bude instrument kojim su grčki trgovci i grčke zanatlije mogli da se služe, kao što se Tales služio svojim znanjem. U jednome dijalogu kod Lucijana[2]) neki trgovac pita Pitagoru čemu bi on mogao da ga nauči. »Naučiću te da brojiš«, — kaže mu Pitagora. — »Pa ja to već znam«, — odgovara mu trgovac. — »Kako ti to brojiš?« — pita ga filozof. Trgovac počinje: »Jedan,

[1]) Zovu se još i triangularni brojevi. — Prev.
[2]) Grčki satirist, pisac čuvenih *Dijaloga;* živeo od 120 do 180 g. n. e. — Prev.

dva, tri, četiri . . .« — »Stoj!« — viče Pitagora, — »To što ti smatraš da je četiri jeste deset, dakle potpun trougao i naše znamenje«.

Iz daleke starine vuče se ovo obožavanje mađiskog broja pa se proteže daleko, daleko duž kopnenih trgovačkih puteva koji se na sve strane šire iz stare sumerske civilizacije. Indusi i Jevreji su imali svoje savršene brojeve i brojeve prijatelje pre nego što je Pitagora počeo izlagati svoje učenje. Šest dana stvaranja i dvadeset i osam dana Mesečevog meseca pokazuju savršenstvo plana Proviđenja. Sv. Augustin[1]) je shvatio staru ljubav Hitita prema savršenstvu, kada je rekao: »Bog je stvorio sve stvari za šest dana zato što je taj broj savršen«. Istočnjački uticaj na Pitagorino učenje odavno je utvrđen u njegovom učenju o metapsihozi, tj. da svaka duša ima godišnju kartu za putovanje po telima[2]). Ima razloga da se posumnja da je jedan deo njegove geometrije, a s tim i obožavanje izvesnih brojeva, došao iz kineskih izvora mnogo starijeg datuma. Znanje o brojevima u staroj Kini daje nam ključ za otkrivanje prvih mađiskih početaka jezika dimenzija koji pretstavlja osnovu moderne statistike. Sad ćemo otići pet hiljada i više godina unazad i videti kako su ljudi prvi put počeli da klasifikuju osobine brojeva.

Prastaro kinesko znanje o brojevima odlikuje se time što su u njemu brojevi s l i k e. Brojevi su pretstavljeni prostim slikama sastavljenim iz crta, kružića ili tačaka. Ova karakteristika baca izvesnu svetlost na put kojim su Indusi išli te se osposobili da mesto ranijeg pisanja brojeva slovima uvedu racionalno pisanje brojeva. Za naš sadanji zadatak to je važno, pošto nam to pomaže da rekonstruišemo početke jedne veoma korisne matematičke grane, proučavanje »nizova«. U kineskoj *Knjizi o permutacijama*[3]), pisanoj oko pet stotina godina pre Pitagore, prvih osam brojeva su pretstavljeni kombinacijama horizontalnih crtica, celih ili prelomljenih — da pokažu muškost (—) neparnih brojeva i ženskost (— —) parnih brojeva. Svaki broj nosi u sebi tajnu nekog predmeta, — neba, zemlje, vatre (razume se, broj tri), vode, vazduha, vetra i planine. Ove

[1]) Najveći teolog, živeo je 354 do 430 g. n. e. Bio vladika u Hipu u Sev. Africi. Čuveni pisac. — P r e v.

[2]) To je t. zv. »seljenje duša«. — P r e v.

[3]) Permutacija je promena mesta u slogu, napr. abc, acb, cab itd. — P r e v.

su se horizontalne crtice opet pojavile kad su ljudi počeli označavati brojeve drvcima, što je i navelo Induse da stvore oznake za brojeve (od = postalo je 2, od ≡ postalo je 3). I u brojevima u kalendaru plemena Maja koji je jedini brojni jezik osnovan na istom načelu kao i indusko označavanje, upotrebljene su horizontalne crtice stavljene jedna iznad druge. Drugi način pisanja brojeva, i za naš sadanji zadatak značajniji, bio je u tome da se brojevi označavaju crtanjem tačaka i kružića (beli kružići za muške brojeve i crni za ženske). Taj je način upotrebljen u prvome mađiskom kvadratu na koji nailazimo u istoriji. Mađiski kvadrat pokazan na našoj slici 71 i označen našim obeležavanjem brojeva, potiče iz doba bar 1000 godina pre n. e. On je u starom kineskom tekstu pretstavljen uglavnom onako kako ga vidite na sl. 72, gde su neparni ili muški brojevi pretstavljeni belim kružićima, a parni ili ženski brojevi crnim.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Prvi mađiski kvadrat s našim oznakama

	9	
3	5	7
	1	

Isto takva mađija koja krije u sebi Jehovino ime

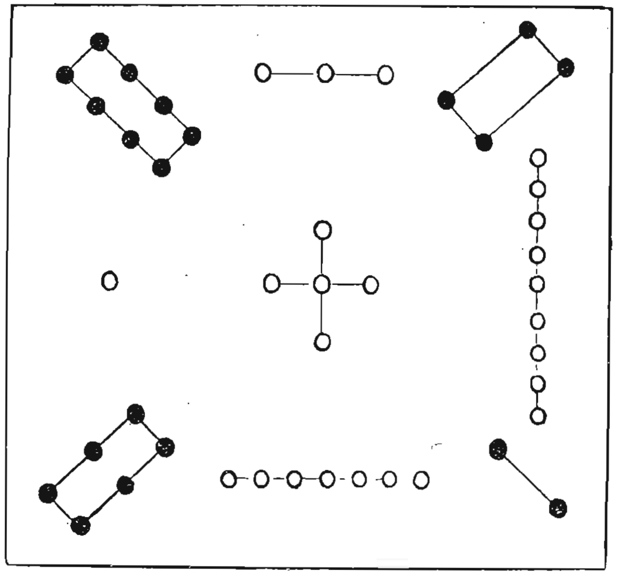
Sl. 71

Širom staroga sveta obožavan je mađiski kvadrat. Nešto docnije počela ga je potiskivati nova mađija zvana »gematrija«[1]). Iz nje je izvesno poteklo srazmerno mnogo docnije mađiski krst načinjen od srednjeg stupca i od srednje vrste mađiskog kvadrata (sl. 71)[2]). Gematrija je naziv čudnih praznoverica koje su se pojavile u vezi sa upotrebom pismena iz azbuke za označavanje brojeva kod Jevreja i kod Grka. U tim danima kad su se ljudi tek počeli učiti da upotrebljavaju znake

[1]) Objašnjenje reči iz biblije pomoću aritmetike i geometrije. — P r e v.

[2]) Na kvadratu sa sl. 71 stupci su: 4, 3, 8 i 9, 5, 1 i 2, 7, 6; vrste su: 4, 9, 2 i 3, 5, 7 i 8, 1, 6. — P r e v.

za brojeve, zaglibili su se pri prvim pokušajima da pronađu oznake koje zauzimaju manje mesta nego one ranije hijeroglifske slike. Kad je svako slovo počelo pretstavljati neki broj, svaka je reč imala svoj karakteristični broj koji se dobijao kad se saberu svi brojevi koje pretstavlja svako slovo u toj reči. Kad bi dve reči imale isti broj, čitave gomile tumača iznosile su povodom toga svoja mračna pretskazanja o nekim skrivenim tajnama. Ahil je bio jači od Hektora zbog toga što je zbir brojeva u njegovom imenu iznosio 1276, dok je taj zbir u Hekto-



SL. 72. — LO ŠU U »KNJIZI O PERMUTACIJAMA«
Ova slika koja pretstavlja prvi mađiski kvadrat u istoriji matematike izrađena je tako oko 1 000 g. p. n. e.

rovom imenu doterao samo do 1225. U jevrejskoj reči *Eliazar* zbir brojeva je 318. Jevrejska legenda nam priča da je Avram rasterao 318 robova dok je spasao Eliazara. U astrološkim spisima teozofa i astrologa Srednjega veka, gematrija je zvezde i planete dovodila u vezu sa nagoveštajima. Jedna latinska poslovica pokazana na sl. 73 prikazuje sličnu igru.

Platonov mračni broj koji je »gospodario nad tim hoće li se neko roditi dobar ili loš«, potsticao je u velikoj meri platoni-

ste na nekoristan umni napor. Životinjski broj u Knjizi otkrovenja pružio je docnijim istraživačima mnogo prilika da se vežbaju u toj vrsti aritmetike. Isto je to radila i Danilova knjiga, kojoj je Njutn posvetio umne napore svojih poslednjih godina. Petar Bungus, katolički teolog, napisao je knjigu od 700 strana da dokaže da je životinjski broj 666 kriptogram imena Martin Luter[1]). Luter je odgovorio time što je taj broj protumačio

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Sator arepo tenet opera rotas

SL. 73. — LATINSKA IZREKA IZRAŽENA SLOVIMA U KVADRATU

(Sejač Arepo zaustavlja točkove svojim radom. — Natpis u Sajrensesteru u Glosterširu u Engleskoj).

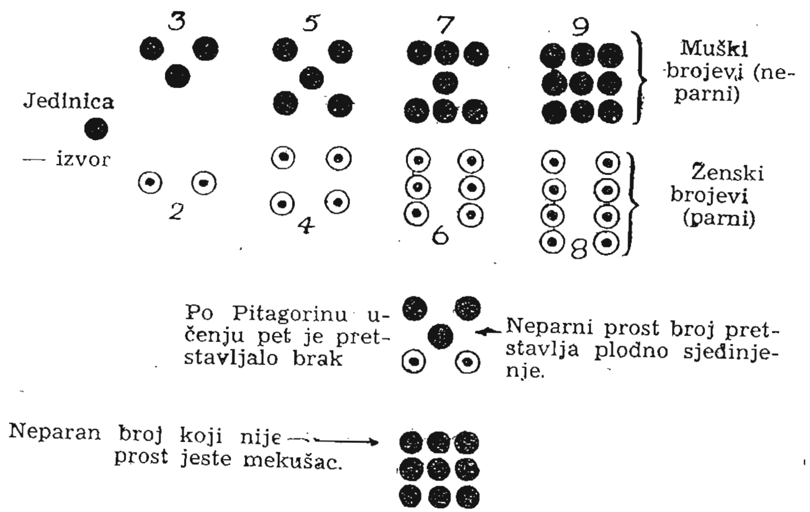
kao vek trajanja papske sile, koja se, srećom, bliži svome predodređenom kraju. Protestanti, koji su kumovali novoj trgovačkoj aritmetici, mnogo su bolje umeli da se služe tom propagandnom metodom. Štifel[2]), koji je prešao u Luterovu veru, i koji je prvi od svih matematičara upotrebio znake $+$, $-$ i $\sqrt{\ }$ u jednoj svojoj algebri, objašnjavao je svoj prelazak Luteru time, što se broj 666 odnosi na papu Lava X. Kad se papino ime ispiše na latinskom, dobija se **Leo Decimus**. Dokaz je veoma prost, te

[1]) Martin Luter (1483—1546), najpre katolički kaluđer avgustinskog reda, a docnije isključen iz katoličke crkve. Veliki borac protiv papstva i osnivač protestantske vere. — Prev.

[2]) Mihael Štifel (1487—1567), matematičar. — Prev.

zaslužuje da ga ovde iznesemo. Štifel je najpre zapazio da *E* i *S* nisu brojevi u rimskom pisanju brojeva. Zato su ta dva slova došla tu samo omaškom. Kad se poređaju slova koja znače brojeve dobije se MDCLVI, tj. 1656. To je 666 + 990. Red je, dokazivao je dalje Štifel, da se na to doda X kako se na drugi način i piše reč **decimus**. A onda se dobija 666 + 1000. Latinski se 1000 piše M, a to je prvo slovo latinske reči *mysterium*[1]). Otuda u Knjizi otkrovenja i potiče ona »tajanstvenost« životinje. Ne treba mnogo da nas iznenađuju intervjui koje prilično renomirani savremeni matematičari daju saradnicima nedeljnih listova, kad se setimo da je Neper, koji je danas čuven sa svojih logaritama, pridavao isti značaj svojoj metodi kojom je utvrđivao da su papa i antihrist jedno isto.

Razdvajanje neparnih i parnih brojeva na muške i ženske u prvobitnom kineskom znanju o brojevima, potseća na to da se čovek u prastaro doba vrlo mnogo bavio pitanjem plodnosti stada i njiva, i pitanjima patrijarhalne porodične zajednice. Animističko gledanje na brojeve (sl. 74) u najstarijim kineskim



SL. 74. — ANIMIZAM[2]) I POL U KINESKOM I PITAGOREJSKOM UČENJU O BROJEVIMA

[1]) Tajna. — P r e v.

[2]) Shvatanje prvobitnih naroda po kome svaka stvar ima dušu. — P r e v.

matematičkim knjigama očevidno je u vezi sa otkrićem jedne naročite klase neparnih brojeva, koji se danas zovu p r o s t i b r o j e v i[1]). Ti brojevi ne mogu da se podele na tačan (ceo) broj jednakih celih brojeva. Kad ih nacrtamo (sl. 74) ne možemo ih pretstaviti jednakim redovima tačaka. Tako su 3, 5, 7, 11 i 13 prosti brojevi. Zapažanje ove klase brojeva nije bio neki mnogo koristan pronalazak, sem što je uprostio određivanje kvadratnog korena kada još nisu bile pronađene nove metode.

Da biste dobili sve proste brojeve između 1 i 100, najpre izbacite sve parne brojeve (brojeve koji su deljivi sa 2), i sve brojeve koji se svršavaju na 5 u našem označavanju (pošto su ti brojevi deljivi sa 5), izuzevši, razume se, brojeve 2 i 5. To daje:

1 2 3 5 7 9 11 13 17 19 21 23 27 29 31 33 37 39 41 43 47 49 51 53 57 59 61 63 67 69 71 73 77 79 81 83 87 89 91 93 97 99

Sad možete izbaciti sve brojeve koji su deljivi sa 3 ili sa 7. (To znači sve brojeve koji se mogu bez ostataka podeliti sa 3, ili sa 7). Onda ostaju:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Već smo izbacili sve brojeve koji su deljivi sa 9, pošto su svi takvi brojevi deljivi i sa 3, a mi smo takve već izbacili. Izbacili smo i brojeve deljive sa 6, 8 i 10, pošto su svi takvi brojevi deljivi sa 2. Svaki broj između 1 i 100 koji je deljiv sa 11 ili nekim većim brojem deljiv je i nekim od prvih deset brojeva, pošto dobijamo broj veći od 100, ako 11 množimo nekim brojem većim od 9[2]). Zato su svi ovi brojevi što su nam pretekli prosti brojevi.

Primena prostih brojeva za određivanje kvadratnog korena osniva se na jednom važnom pravilu na koje ćete često još naići. Kako izgleda ta primena vidi se na ovim primerima:

$$\sqrt{4\times 9} = \sqrt{36} = 6 = 2\times 3 = \sqrt{4}\times\sqrt{9}$$
$$\sqrt{4\times 16} = \sqrt{64} = 8 = 2\times 4 = \sqrt{4}\times\sqrt{16}$$
$$\sqrt{4\times 25} = \sqrt{100} = 10 = 2\times 5 = \sqrt{4}\times\sqrt{25}$$

[1]) To su brojevi koji su deljivi samo sa 1 i samim sobom. Oni se zovu još i prim brojevi. Napr.: 7. On je deljiv samo sa 1 i 7. Broj 6 je složen broj, pošto je deljiv sa 1 i 6, ali i sa 2 i 3. — P r e v.

[2]) 33 : 11 = 3. Znači 33 je deljiv sa 11, ali je deljiv i sa 3, te je već izbačen. 11 × 12 = 132 (veći od 100). — P r e v.

$$\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=12=3\times4=\sqrt{9}\times\sqrt{16}$$
$$\sqrt{4\times49}=\sqrt{196}=14=2\times7=\sqrt{4}\times\sqrt{49}$$
$$\sqrt{9\times25}=\sqrt{225}=15=3\times5=\sqrt{9}\times\sqrt{25}$$
$$\sqrt{9\times49}=\sqrt{441}=21=3\times7=\sqrt{9}\times\sqrt{49}$$

Ovi primeri objašnjavaju pravilo:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

Zato možemo napisati:

$$\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$$
$$\sqrt{8}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$
$$\sqrt{12}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{24}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

Drugim rečima, ako znamo $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ možemo dobiti kvadratni koren ma koga broja sastavljenog množenjem dvojaka i trojaka. Takvi su brojevi napr. 32, 48, 72, 96. Ako znamo i $\sqrt{5}$ možemo dobiti kvadratne korene svih brojeva načinjenih množenjem petica, dvojaka i trojaka, napr. 10, 15, 30, 40, 45, 50, 60. Možemo probati ovo:

Ako uzmemo da je $\sqrt{2}=1{,}414$ i $\sqrt{3}=1{,}732$, biće $\sqrt{6}=$ $=1{,}414\times1{,}732=2{,}449$ (sa tačnošću do tri decimala). Kad izmnožimo, dobijamo:

1,414 ×	1,732 ×	2,449 ×
1,414	1,732	2,449
1,414	1,732	4,898
0,5656	1,2124	0,9796
0,01414	0,05196	0,09796
0,005656	0,003464	0,022041
1,999396	2,999824	5,997601

Greška je, kao što je trebalo i da očekujemo, veća kod trećeg proizvoda, pošto smo za $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ uzeli vrednosti tačne do

trećeg decimala, pa su se pri množenju greške uvećale. Krajnji rezultat je s greškom manjom od $\frac{1}{2000}$ [1].

Ovo ćemo pravilo često upotrebljavati u narednim glavama. Morate se osposobiti da ga poznate i onda kada se ono primenjuje na razlomke. Na pr.:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{a\times\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\times\sqrt{\frac{1}{b}}=\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\quad \sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zagledajte kako se ovo pravilo može upotrebiti kad se vrši skraćivanje:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\quad\text{ili}\quad\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zagledajte kako se ovo pravilo može primeniti u ovim rečenicama na koje ćemo naići kad budemo tražili neku vrednost za π:

$$\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{2^2}{3^2}}=\sqrt{\frac{3^2-2^2}{3^2}}=\frac{\sqrt{3^2-2^2}}{\sqrt{3^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Animističko verovanje da je ceo broj živo stvorenje i da mora imati pola, kao ovan i krava, potseća na jedan dokaz što ga je Euklid dao u desetoj knjizi svojih *Elemenata*, da bi pokazao da dijagonala kvadrata čije su strane izražene celim brojevima ne može biti izražena celim brojem. To je verovatno poteklo od Pitagore. Da biste pratili taj dokaz treba da se setite triju tvrđenja koja vam neće izgledati teška:

---

[1]) Greška je: $6-5{,}997601=0{,}002399<0{,}0024$

Sad ovako:

Na 6 greška je manja od 0,0024
„ 100 „ „ „ „ x

$x : 0{,}0024=100 : 6$

$x=0{,}04\%$, a to je $\frac{0{,}04}{100}=\frac{0{,}4}{1000}=\frac{0{,}8}{2000}<\frac{1}{2000}$. — Prev.

(a) Kvadrati parnih brojeva su parni brojevi (na pr. $6^2 = 36$), a kvadrati neparnih brojeva su neparni brojevi (na pr. $7^2 = 49$).

(b) Udvojeni svaki broj je paran broj (na pr. $2 \times 5 = 10$), a svaki paran broj je uvek udvojeni neki drugi broj ($2 = 2 \times 1$, $4 = 2 \times 2$, $12 = 2 \times 6$).

(c) Ako su dva broja parna, imaju zajednički činilac 2. Ako dva broja imaju samo 1 kao zajednički činilac, kao što su dva broja koji pretstavljaju razlomak u njegovom najprostijem obliku, oni ne mogu oba biti parni[1]). Ako je jedan paran, drugi mora biti neparan.

Kad pođemo od tih tvrdnji, grčki dokaz ovako izgleda: Uzmimo da smo nacrtali kvadrat sa stranom od 1 jedinice. Tada iz dokaza 8 izlazi:

$$1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$$

To znači da je dijagonala $\sqrt{2}$. To je neki razlomak veći od 1, a manji od 2. Neka je $\frac{a}{b}$ taj razlomak dat u svome najprostijem obliku. Tada je:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$a^2 = 2b^2 \ldots (1)$$

Ali pošto je a^2 jednak s dvostrukim nekim brojem, mora biti paran broj. Otuda je a paran broj. Pošto $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, a razlomak je u svome najprostijem obliku, mora b biti neparan, pošto je a parno. Ako je a parno, tada ono mora biti jednako s dvostrukim nekim brojem. Neka je taj broj n. Tada je:

$$a = 2n$$

$$a^2 = (2n)^2 = 2^2 \cdot n^2 = 4n^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ali kad spojimo (1) i (2) dobivamo:

$$4n^2 = 2b^2$$

$$2n^2 = b^2$$

Sad je b^2 jednako s dvostrukim nekim brojem. Znači da je i b^2 paran broj[1]). Kako smo već utvrdili da b mora biti neparno, negde nešto nije u redu. To znači da smo mi negde uzeli pogrešnu pretpostavku. Ako, kao ono Pitagorejci, uzmemo da svaki broj mora biti muško ili žensko, onda $\sqrt{2}$ nije uopšte broj. I zato napuštamo nadu da nam geometrija može u nečemu koristiti i izbacujemo broj i merenje iz nje.

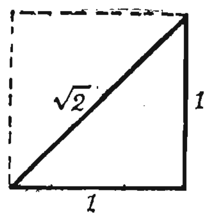
Platonovi učenici koji su imali velike prihode te su bili nezavisni i ismevali nastavnike koji su živeli od poučavanja đaka, mnogo su polagali na taj duhoviti dokaz. Ali to nas sve neće toliko da ljuti koliko je njih obradovalo, niti će nas naterati, kao što je nateralo Platona, da smatramo geometriju kao neko nepraktično i zbog toga veoma uzvišeno zadovoljstvo u dokolici. Pošto smo mi dobri građani, interesujemo se za praktičnu stranu umnog rada, koji nam kaže kako se može postići nešto za razliku od ukrasne »kulture« koja se trudi da pokaže ono što je nemoguće postići. Vi ćete zapaziti da je Euklid (ili još verovatnije Eudoks) prvi tvrdio da se strana kvadratova može pretstaviti celim brojevima koji odgovaraju zrnima na računaljci. Kao praktični ljudi mi smo već došli do zaključka da su celi brojevi koji odgovaraju zrnima na računaljci svi vrlo podesni da se pomoću njih broje ovce svakog pojedinog odeljenja u toru, ali da oni nisu ta vrsta brojeva koja bi bila podesna da se izraze *dimenzije* nekog zida, ili dimenzije neke slike na pesku, ili dimenzije nacrta nekog zida nacrtanog mastilom na hartiji Euklidovim lenjirom i šestarom (sl. 75).

Zabuna je proizašla otuda što su Pitagorejci crtali duž kao niz tačaka zbijenih jedna uz drugu kao zrnca u uspravnim redo-

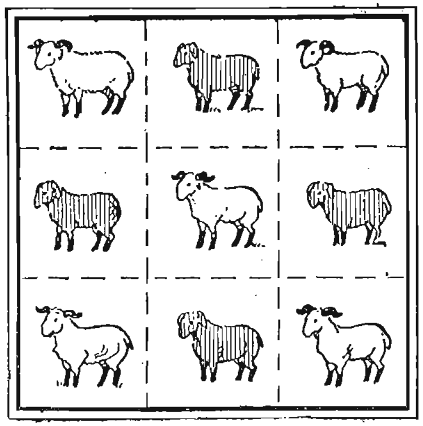
[1]) 6 i 8 su deljivi sa 2. Imamo 2×3 i 2×4. Znači da je broj 2 činilac i broja 6 i broja 8. Broj 2 je zajednički činilac za 6 i 8. — Brojevi 8 i 9 imaju 1 kao zajednički činilac: $8 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $9 = 1 \cdot 3 \cdot 3$. — Razlomak $\frac{112}{168}$ nije u svom najprostijem obliku. Dovešćemo ga na najprostiji oblik: $\frac{112}{168} = \frac{56}{84} = \frac{28}{42} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Sad se više ne može skraćivati, pošto brojilac i imenilac nemaju više zajedničkih činilaca. Razlomak $\frac{112}{168}$ u svome najprostijem obliku glasi $\frac{2}{3}$. Ako je razlomak sveden na svoj najprostiji oblik, on pretstavlja odnos jednog neparnog i jednog parnog broja (napr.: $\frac{3}{4}$) ili odnos dva neparna broja (napr.: $\frac{3}{7}$). — Prev.

[1]) To odmah znači da je i b paran broj. — Prev.

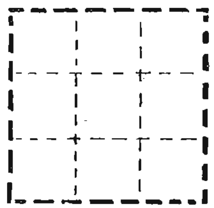
vima na računaljci. Polazeći odavde, oni su smatrali sliku kao mrežu takvih uspravnih linija zbivenih jedna uz drugu od jedne strane do druge. Fizički model bio je nesavršen, pošto tačka kod Pitagorejaca nije imala određeni oblik.

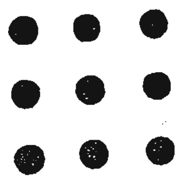


Kvadratova dijagonala.



Ovce i zid





Nesavršen kvadrat (zid) Savršen kvadrat (ovce)

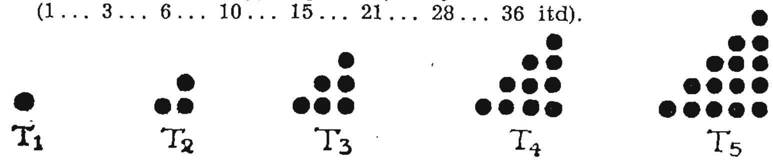
SL. 75. — PITAGOREJSKA DILEMA[1])

Da bismo fizičke predmete sastavili, moramo im dati naročiti oblik. Pravougli trougao možemo načiniti od onoliko njemu sličnih pravouglih trouglova koliko ih možemo iz njega iseći. Pravougaonik možemo načiniti stavljajući jedan uz drugi mnogo malih pravougaonika čije strane imaju isti odnos kao i strane pravougaonika koji hoćemo da načinimo. Pravougaonik možemo

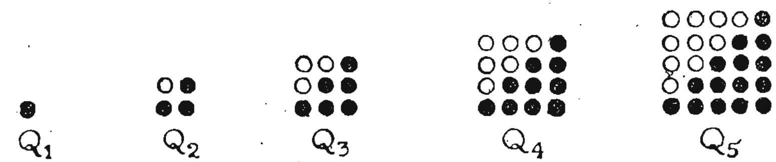
[1]) Težak izbor između dveju stvari. — Prev.

načiniti pomoću pravouglih trouglova sličnih sa pravouglim trouglima na koje dijagonala deli pravougaonik. Kad tako uradimo, odnos hipotenuze ili dijagonale prema stranama svakog sastojka te slike isti je kao i odnos dijagonale ili hipotenuze prema stra-

(*a*) *Prosti trouglasti (triangularni) brojevi.*
(1... 3... 6... 10... 15... 21... 28... 36 itd).



(b) *Kvadratni brojevi*
(1... 4... 9... 16... 25... 36... 49... 64... 81... 100 itd.)



Sl. 76.

Zapazite da se kvadratni brojevi mogu obrazovati sabiranjem. Ovako:

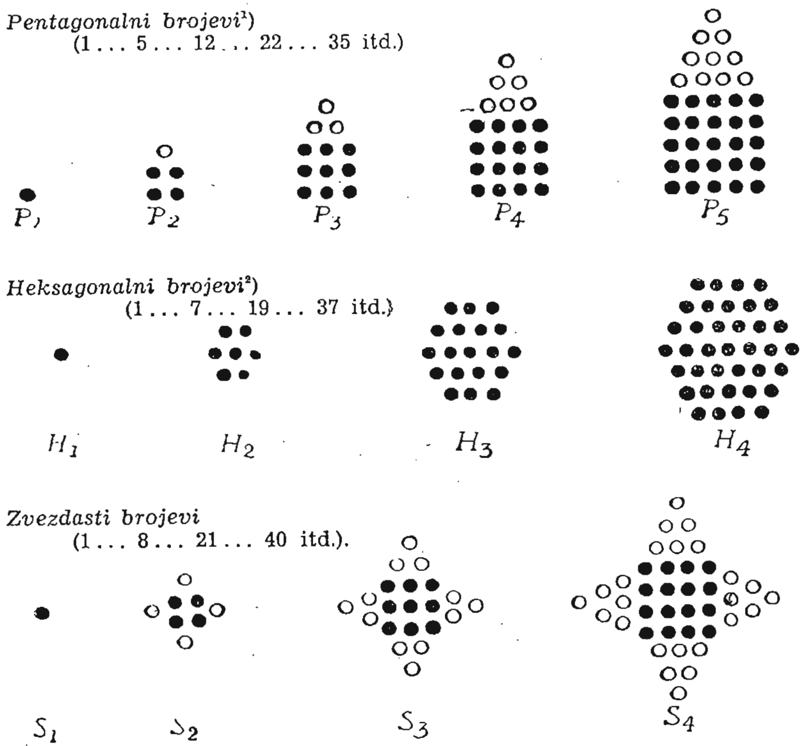
	1	3	6	10	15	21	28	36...
1	3	6	10	15	21	28	36	45...
1	4	9	16	25	36	49	64	81

nama slike koju sklapamo. Stvarni broj elemenata dijagonale je isti kao i broj elemenata ma kojih dveju strana i nema nikakve veze s njihovim odnosom. Pitagorini materijalistički kritičari kao što su Leukip i Demokrit, nisu i sami zapali u ove teškoće. Da bi pretstavili prostor kao skup posebnih atoma videli su da mora biti praznina među njima, a pošto se ne može načiniti ni jedno telo koje želite pomoću atoma raspoređenih u jednakim rastojanjima jedan od drugoga, brojevi atoma brojani u raznim pravcima odnose se na razne skale merenja, razna merila.

Pometnja koja je nastala usled brkanja brojeva koje smo nazvali *stadni brojevi* sa *poljskim brojevima*[1]) urodila je i jednom zanimljivom uzgrednom pojavom. Pitagorejci su se zabavljali jednom vrstom slika načinjenih od posebnih tačaka

[1]) Brojevi za označavanje dimenzija. — Red.

kao što su bile tačke na kineskom mađiskom kvadratu. Brojevi tačaka na tim slikama bili su podeljeni u porodice. Proučavanjem porodične sličnosti na tim slikovitim brojevima, od kojih su neki pokazani na sl. 76 i 77, došlo se do otkrića nizova. Tokom



Sl. 77.

vremena to je dovelo do saznanja da brojevi podesni da pretstave dimenzije čine nizove koji se protežu do mile volje. Doći ćemo na njih u desetoj glavi.

Takozvana grčka aritmetika uglavnom se zanimala ovim slikovitim brojevima. Malo je pažnje obraćala na to da pronađe

[1]) Petougaonični brojevi. — P r e v.
[2]) Šestougaonični brojevi. — P r e v.

pravila za računanje kakva mi imamo danas. To je ostavljeno računaljci. Grčki intelektualac Platonova doba potcenjivao je veštinu računanja bez koje ne bismo mogli imati modernu matematiku. Proučavanje slikovitih brojeva[1]) nije odmah dalo korisne rezultate. Ono je važno jer je odvelo ka proučavanju nizova, a to je najzad dalo ključ za razumevanje brojeva koji nisu potpuno razvijeni. Sve do kraja ove glave proučavaćemo način na koji je počelo zapažanje nizova.

Niz je sledovanje brojeva poređanih po izvesnom utvrđenom redu tako, da je svaki član vezan s narednim članom po nekom utvrđenom pravilu. Najprostiji primer za to je »prirodni« niz brojeva. Kad se celi brojevi poređaju uobičajenim redom

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \ldots$$

odmah zapažamo da je svaki član za 1 veći od prethodnog ili za 1 manji od narednog. Prva dva prosta niza koji se imaju dodati prirodnom nizu brojeva, kao što smo videli, jesu ovi nizovi:

$$3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15\ 17\ 19 \ldots$$

i

$$2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12\ 14\ 16\ 18 \ldots$$

U obadva ova niza svaki se član razlikuje za 2 od svog prethodnog ili od svog narednog člana, budući za 2 veći od prethodnog, a za 2 manji od narednog. Nizovi u kojima se članovi razlikuju jedan od drugoga za istu veličinu zovu se a r i t m e t i č k i nizovi (ili aritmetičke *progresije*). Drugi jedan niz iste vrste je

$$3\ 10\ 17\ 24\ 31\ 38\ 45\ 52 \ldots$$

Drukčije su vezani članovi u nizu na koji smo već naišli:

$$\frac{6}{10}\quad \frac{6}{100}\quad \frac{6}{1000}\quad \frac{6}{10000}\quad \frac{6}{100\,000}\quad \frac{6}{1\,000\,000}\ \text{itd.}$$

Ovde je svaki član deset puta veći od svog narednog člana, a deset puta manji od prethodnog. Niz u kome je svaki član izvestan broj puta veći od svog prethodnog (ili gde je svaki član izvestan razlomak svog prethodnog člana), bilo da su članovi

[1]) Oni se zovu i »figurirani brojevi«, tj. brojevi pretstavljeni nekom figurom. — P r e v.

poređani u opadnom nizu (kao ovde) ili u porastnom zove se geometriski niz (ili geometriska progresija)[1]). Pravila o vezi između brojeva u ovim dvema porodicama nizova — a postoje i mnoge druge — mogu se ovako utvrditi. Ako je m ma koji broj jednog niza, naredni broj u aritmetičkom nizu je $m + b$, a naredni broj u geometriskom nizu je mb(b puta m). U jednom određenom nizu, b je uvek isti broj. On može biti ceo broj ili razlomak. Tako b iznosi $2\frac{1}{2}$ u ovom aritmetičkom nizu:

$$3 \quad 5\frac{1}{2} \quad 8 \quad 10\frac{1}{2} \quad 13 \quad 15\frac{1}{2} \quad 18\ldots\ldots$$

Po našoj dosadašnjoj definiciji nizova ne bismo mogli razlikovati ova dva aritmetička niza:

1 5 9 13 17 21 25 29...

i

3 7 11 15 19 23 27 31...

ili ova dva geometriska niza:

0,6 0,06 0,006 0,0006 0,00006...

0,7 0,07 0,007 0,0007 0,00007...

Drugi način da pronađemo vezu između brojeva u nekom nizu jeste u tome, da taj niz smatramo kao porod prirodnog niza brojeva (brak između »muških« i »ženskih« brojeva). I tako, ako stavimo roditeljski niz gore, možemo pretstaviti parne brojeve kao niz kćeri:

Roditelji	1	2	3	4	5	6	7	8.....
Kćeri	2	4	6	8	10	12	14	16.....

[1]) Porastni geometriski niz: 1 2 4 8 16 ... Opadni geometriski niz: 243 81 27 9 3 1 $\frac{1}{3}$... U prvome nizu svaki član je 2 puta veći od svog prethodnog. U drugome nizu svaki je član $\frac{1}{3}$ svog prethodnog člana. $\left(\text{Na primer } 3=\frac{1}{3}\times 9\right)$ — Prev.

A možemo napisati i niz sinova:

Roditelji	1	2	3	4	5	6	7	8.....
Sinovi	3	5	7	9	11	13	15	17.....

U ovoj patrijarhalnoj porodičnoj grupi svaka je sestra 2 godine mlađa od svoje naredne starije sestre, a svaki je dečak mlađi 2 godine od svog narednog starijeg brata. Drugim rečima, ako je m ma koji broj u ta dva niza, prvi naredni je $m + 2$. I tako, po onom kako smo već opisali niz, ne bismo mogli da pravimo razliku između dečaka i devojčica. Mi bismo to mogli da uradimo tek kad bismo datume njihova rođenja određivali od početka »braka« kao u staromodnoj porodici u kojoj je prinova dolazila redovno svake godine. Kad pogledamo na niz kćeri i niz roditelja vidimo da je svaki broj u nizu kćeri dva puta veći od odgovarajućeg člana u nizu roditelja. Ako jedan broj (ili član kako se to obično kaže) u roditeljskom nizu obeležimo sa n, odgovarajući član(ili *enti* član) u nizu kćeri biće $2n$[1]). Slično tome svaki član u muškome nizu može se dobiti kad se dvostrukom odgovarajućem članu iz roditeljskog niza doda 1. Drugim rečima, enti član muškog reda je $2n + 1$[2]). Ako uradite isto to s nizom

7 9 11 13 15 17 19...

videćete da je *enti član* (n-ti član) $5 + 2n$[3]). Ovakav način opisivanja niza vodi nas na jednu veoma neobičnu osobinu geometriskog niza. Videćemo docnije kako je to dovelo do pronalaska logaritama. Evo jednog geometriskog niza stavljenog ispod roditeljskog niza prirodnih brojeva:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024...

[1]) Neka je $n = 7$. To je broj 7 u roditeljskom nizu. Njemu odgovara broj 2n u nizu kćeri, tj. broj $2 \times 7 = 14$. I zbilja je ispod 7 broj 14. — Prev.

[2]) Uzmimo opet $n = 7$. To je broj 7 u roditeljskom nizu. Njemu odgovara broj $2n + 1$ u nizu sinova, tj. $2 \times 7 + 1 = 14 + 1 = 15$. I zbilja je ispod 7 broj 15 u nizu sinova. — Prev.

[3]) Prvi član je 7. Za $n = 1$ imamo $5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7$. Za šesti član 17 imaćemo: $n = 6$. Dakle: $5 + 2 \times 6 = 5 + 12 = 17$. — Prev.

Mi to možemo napisati ovako:

Roditelji:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
Porod:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}...

Na isti način možemo pisati:

Roditelji:	1	2	3	4	5	6...
Deca:	10	100	1000	10000	100000	1000000...

ili to isto u drugom obliku:

Roditelji:	1	2	3	4	5	6...
Deca:	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6...

Među nizovima koje su proučavali Pitagorejci bili su i geometriski nizovi. Da su im brojevi služili za opisivanje stvarnog sveta, oni bi možda došli do jednog pronalaska koji je osnova našeg sistema periodičnih razlomaka. To bi omogućilo Ahilu da stigne kornjaču. Jedna stvar koju su oni bili obradili jeste način da se nađe zbir svih brojeva jednoga niza, kao što je na primer:

4   12   36   108   324   972   2916...[1])

Sedam članova ovoga niza mogu se i ovako napisati:

Roditelji:	1	2	3	4	5	6	7
Deca:	4	$4(3^1)$	$4(3^2)$	$4(3^3)$	$4(3^4)$	$4(3^5)$	$4(3^6)$

Ako prvi član stavimo na kraj, zbir S može se ovako napisati:

$$S = 4(3^1)+4(3^2)+4(3^3)+4(3^4)+4(3^5)+4(3^6)+4$$

Međutim trostruki ovaj niz kako smo ga prviput napisali biće:

$$3S = 4(3^1)+4(3^2)+4(3^3)+4(3^4)+4(3^5)+4(3^6)+4(3^7)$$

Dvostruki zbir možemo dobiti ako od trostrukog zbira oduzmemo jednostruki zbir:

$$4(3^1)+4(3^2)+4(3^3)+4(3^4)+4(3^5)+4(3^6)+4(3^7)$$
$$4(3^1)+4(3^2)+4(3^3)+4(3^4)+4(3^5)+4(3^6)+4$$

[1]) Kad matematičar upotrebi reč »zbir« u vezi s nizom, on misli na neko prosto pravilo koje čoveku uštеđuje trud da ne mora tu vazdan da sabira član po član da bi sabiranjem našao »zbir«. — Pisac.

razlika $= 2S = 4(3^7) - 4$

Zato je jednostruki zbir pola od toga dvostrukog zbira, tj.

$$S = \frac{4(3^7)-4}{2} = \frac{4(3^7-1)}{2} = 2(3^7-1) = 2(2187-1) = 2\cdot 2186 = 4372$$

Proverite to sabiranjem ovako:

$$4 + 12 + 36 + 108 + 324 + 972 + 2916 = 4372$$

Kad se poslužimo modernom stenografijom brojeva možemo izraziti pravilo prikazano na ovome primeru time što ćemo upotrebiti slova ili *opšte brojeve.* Broj članova obeležićemo sa *n;* broj kojim se član množi da bismo dobili naredni član obeležićemo sa *b;* prvi član obeležićemo sa *a.* Imaćemo:

$$S = \frac{a(b^n-1)}{b-1}$$

Upotrebljena metoda je ista kao kad hoćemo da nađemo običan razlomak koji je jednak s nekim periodičnim razlomkom.

$$0{,}\dot{1} = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \dots \text{ itd.}$$

Slično tome:

$$\frac{1}{10} \times 0{,}\dot{1} = 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \dots \text{ itd.}$$

Ako oduzmemo donji red od gornjeg dobivamo:

$$\frac{9}{10}\times 0{,}\dot{1} = 0{,}1 \quad \text{ili} \quad 0{,}\dot{1} = \frac{10\times 0{,}1}{9} = \frac{1}{9}$$

Već smo govorili o prostim trouglastim brojevima:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 itd.

Slikom su ti brojevi pretstavljeni u gornjem redu sl. 76. Ovaj niz kome su Pitagorejci pripisivali mađiske osobine, nije u njihovim rukama doveo ni do kakvih korisnih rezultata. Da su Pitagorejci manje čitali molitve, a više se bavili time da stvore brojeve koji su podesni za nesavršena posmatranja nesavršenih ljudskih bića, oni bi videli gde je greška u Zenonovom paradoksu[1]). Oni bi se možda primakli i počecima matematičkog proučavanja »verovatnoće«. Trouglasti brojevi su postali važni tek dve hiljade godina docnije, kad je propadajuća aristokracija proćerdala svoje prihode za kartaškim stolom, a bogati trgovci zaključavali svoju zaradu kombinovanim bravama. U istoriji ranog znanja o brojevima, trouglasti su brojevi verovatno igrali važnu ulogu jer su navodili na pravila o obrazovanju i sabiranju članova nizova, koji su docnije mnogo proučavani, naročito kod Indusa. Jedna stvar koja je pomogla da se razvije potreba za stenografijom računskih pravila, ili kako je mi danas zovemo, za *simboličkom algebrom,* bilo je veliko poštovanje koje je ukazivano pronalaženju zbira nekog niza. Čudesni bi bili uspesi Indusa na poslu pronalaženja tih pravila, da im nije smetalo što su istočnjački narodi već bili svikli na način rada koji je danas izbačen iz udžbenika elementarne matematike.

Na sl. 76 i 77 videćete da se raznoliki brojni nizovi, na primer nizovi trouglastih brojeva, mogu pretstaviti slikama. Isto onako kao što se pravoliniske slike u grčkoj geometriji mogu uvek rastaviti na trougle, figurirani brojevi se mogu rastaviti na trouglaste brojeve. To znači ovo: ako znamo kako je obrazovan niz trouglastih brojeva, lako možemo zapaziti pravilo koje vezuje brojeve u svakom nizu figuriranih brojeva. Pravilo za obrazovanje niza prostih trouglastih brojeva lako se vidi kad se oni poređaju ispod roditeljskog niza prirodnih brojeva:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55...

Najpre zapažate da su svi članovi na neparnim mestima deljivi odgovarajućim članom u roditeljskom nizu[2]). Ako ispišemo samo neparne članove, vidimo drugo nešto:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 · 1	....	3 · 2	....	5 · 3	....	7 · 4	....	9 · 5	....

[1]) Misli se na Ahila i kornjaču. — R e d.

[2]) Na prvome mestu je 1. On je deljiv brojem 1 iznad njega. Na trećem mestu je broj 6. On je deljiv brojem 3 iznad njega. Na petom mestu je 15. On je deljiv brojem 5 iznad njega. Članovi na neparnim mestima prvom, trećem itd. matematičari zovu neparni članovi. Članove na parnim mestima zovu parni članovi. Ovde su parni članovi 3, 10, 21, 36 i 55, a neparni 1, 6, 15, 28, 45. — P r e v.

Svaki je neparan član u trouglastom nizu obrazovan tako, što je o d g o v a r a j u ć i č l a n i z r o d i t e l j s k o g n i z a p o m n o ž e n p o l o v i n o m n a r e d n o g č l a n a u r o d i t e l j s k o m n i z u[1]). Tako bi se izrazili Pitagorejci. Ako ma koji član iz roditeljskog niza obeležimo sa n, odgovarajući član u nizu prostih trouglastih brojeva, kad se poslužimo svojom stenografijom, biće:

$$T_n = n \cdot \frac{n+1}{2} \quad \text{tj.}$$

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad {}^{2})$$

Lako ćete videti da ovo pravilo važi i za parne članove:

$$36 = \frac{8(8+1)}{2} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 4 \cdot 9 = 36.$$

U gore datom opštem pravilu prvi put smo upotrebili jednu novu vrstu reči, matematički pridev. Ako T označava ma koji trouglasti broj, ono n desno dole kazuje nam o kome to T govorimo, naime da govorimo o trouglastom broju koji odgovara broju n u roditeljskom nizu, ili, kako mi to obično kažemo, da govorimo o n-tom trouglastom broju. Da smo napisali T_{n-1}, to bi značilo $(n-1)$-vi (enminusprvi) trouglasti broj, tj. trouglasti broj koji neposredno prethodi n-tom broju. To bi bio broj:

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} \quad \text{ili}$$

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Otuda je sedmi trouglasti broj: $\frac{(8-1)(8-1+1)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 7 \cdot 4 = 28$

[1]) Broj 28 je ovako dobiven:
Iznad njega je 7, a do 7 je u roditeljskom nizu 8. Dakle:
$7 \times \frac{8}{2} = 28.$ – P r e v.

[2]) Ovde smo sa T_n obeležili enti član (tj. član koji stoji na n-tom mestu), u nizu prostih trouglastih brojeva. Ovde ćemo dobiti, na primer, peti član ovako:

$$T_5 = \frac{5(5+1)}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \qquad \text{P r e v.}$$

Kako se može iskoristiti niz trouglastih brojeva da se izvede pravilo za obrazovanje drugih nizova vidi se po najprostijem njegovom obliku na sl. 76 koja pokazuje niz potpunih kvadrata (kvadratnih brojeva), tj.

Roditeljski niz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	itd.
Deca	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	itd.

U ovome slučaju odmah vidimo pravilo po kome se iz roditeljskog niza dobiva niz sinova i kćeri. U nizu dece n-ti član je n^2. (To je član Q_n). Da brojeve iz toga niza nismo odmah prepoznali, mogli smo pravilo izvesti i iz slike toga niza (sl. 76). Kvadratni broj se pravi od odgovarajućeg (naspramnog) trouglastog broja i trouglastog broja neposredno ispred njega:

$$Q_n = T_n + T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

Ako se poslužimo drugim dokazom možemo to napisati i ovako:

$$Q_n = T_n + T_{n-1} = \frac{n}{2}(n+1+n-1) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

Prema pentagonalnim brojevima može se postupiti na isti način. Njihov je niz:

Roditelji	1	2	3	4	5	6...
Deca	1	5	12	22	35	51...

Ovde sa slike imamo:

$$P_n = T_{n-1} + n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n^2}{2} = \frac{n}{2}(n-1+$$
$$+2n) = \frac{n}{2}(3n-1).$$

Izvedite slična pravila i za niz heksagonalnih brojeva:

1 7 19 37 61 91...

ili niz zvezdastih brojeva sa sl. 77:

1 8 21 40 65 96...

Ako imate klikere ili druge loptice sa odgovarajućim ležištima biće vam prijatno da načinite niz figuriranih brojeva koji odgovaraju **telima** čije su strane sastavljene od tačaka poređanih poput atoma u modernoj teoriji o strukturi kristala. Tu se mogu razlikovati tri opšte klase: a) piramide, b) prizme i c) pravilni poliedri koji se mogu upisati u loptu ili opisati oko nje. Piramidalna klasa se obrazuje postepenim dodavanjem slojeva u kojima je prvi sloj iznad n-tog sloja, $(n-1)$-vi član istog niza figuriranih brojeva. Ti brojevi imaju ovaj opšti obrazac: $(F_n + F_{n-1} + \ldots + 1)$. Na taj se način tetraedar (trostrana piramida, osnova trougao) gradi dodavanjem slojeva od sve manjih i manjih trouglastih brojeva. Četvrti je član toga niza $20 = (10 + 6 + 3 + 1)$. Pomoću kvadrata dobijamo piramidu s četvorostranom osnovom. Četvrti piramidalni broj toga tipa je $30 = (16 + 9 + 4 + 1)$. Prizme se grade od m slojeva istog figuriranog broja koji je i na osnovi. To se može napisati ovako: $[m] \cdot F_n$, gde zagrada [..] znači »nastavi da ređaš slojeve sve do m-tog sloja«. Ako je roditeljski niz od kvadratnih brojeva, telo je kuboid[1]), a ako je $m = n$, telo je kocka. Ako je niz od trouglastih brojeva, telo je trostrana prizma. Poliedri se grade na taj način što se piramide stave jedna uz drugu, tako da im se dve strane poklope, isto onako kao što se viši figurirani brojevi mogu načiniti sastavljanjem trouglastih brojeva. Možete pokušati da i sami načinite neke od njih ako imate kuglica i malo žice.

Pitagorejci su proučavali uglavnom nizove ove ornamentalne vrste. Oni su se uglavnom ograničili na cele brojeve, a vrlo su malo pažnje poklanjali nizovima razlomljenih količina čiji članovi što idemo dalje sve više opadaju, kao na primer:

Roditelji	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Deca	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

Mi smo već videli da se ovakvi nizovi ponekad zaguše, ma da se ovaj ovde ne guši. Ako se guše, oni ne mogu nikad da pređu izvesnu količinu, ma koliko ih mi nastavljali. Matematičari to kažu da zbir toga niza teži »graničnoj vrednosti«, kao na primer zbir niza $0,\dot{6}$. tj. $\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10\,000}$ itd.

[1]) Telo koje ima oblik sličan kocki. — Prev.

Kad se to desi, može se lako videti između kojih se granica nalazi taj *granični razlomak*, čak i kad ne možemo da kažemo koliko iznosi. U drugome primeru granični razlomak je naravno $\frac{6}{9}$ tj. $\frac{2}{3}$. Čak i kad ne bismo umeli da nađemo prost razlomak koji pretstavlja graničnu vrednost, mogli bismo da kažemo gde se nalazi. U ovome primeru on leži između 0,6 i 0,7, između 0,66 i 0,67, između 0,666 i 0,667 itd. Možemo se zaustaviti gde god hoćemo, prema tome kolika nam je tačnost potrebna s obzirom na naše instrumente. Nizovi ove vrste su baš ti brojevi koji su nam potrebni pri merenju stvari. Oni prikazuju način na koji moderni matematičar pretstavlja količine kao što su π i $\sqrt{2}$, koji su za grčke intelektualce bili zagonetka pred kojom su morali ustuknuti. Grčki intelektualci koji su napustili svaku nadu da će moći pronaći smisao ovih količina *umno su bili* opremljeni da to učine, ali ih je njihova društvena kultura sprečila da učine taj korak napred.

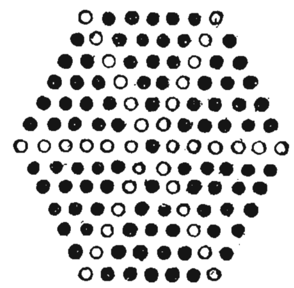
Posle svega što je dosad rečeno nepažljivi čitalac može već početi da se pita da li se i obični brojevi, »prirodni« brojevi, mogu uopšte upotrebiti za nešto. Razume se da mogu, pod uslovom da budu upotrebljeni za onu vrstu stvari, kojoj oni odgovaraju po svojoj prirodi. U prirodi su oni bili prvo upotrebljeni za pojedinačne ovce u stadu, ili za pojedinačna goveda u čoporu i za druge slične stvari. To su ti brojevi koji se moraju upotrebiti u statistici stanovništva. Najveće raspre u modernoj matematici izbile su pri proučavanju statistike osnovane većinom na onoj vrsti nizova koja je najpodesnija da se njome izraze merenja (dimenzije). Kao što Grci nisu mogli da vide zid zbog ovce izvesni statističari ne mogu da vide ovcu zbog zida. Već je ukazano na to da trouglasti brojevi igraju važnu ulogu kod osnovnih principa ove matematičke grane. Kinezi su, izgleda, imali pomalo pojma o naročitom značaju koji mi danas pridajemo tim brojevima u teoriji verovatnoće.

Da bismo videli šta oni znače sa toga gledišta, pomoći će nam jedan primer sa kartama za igranje. Taj je primer na svome mestu, pošto je celokupno proučavanje matematičke »verovatnoće« niklo u atmosferi kineskih zagonetki i u kartanju, a neke matematičke veštine koje se primenjuju u toj oblasti imaju mnogo zajedničkog sa mađiskim kvadratom i zagonetkom u ukrštenim rečima. Možda će naši unuci smatrati da one

još i nisu prerasle mađiski kvadrat. Svima nam je poznato ovakvo jedno pitanje: Kolika je verovatnoća da ću izvući keca pika i keca erca, ako od četiri keca izvučem dva? Matematičar to ovako objašnjava. Dve karte od četiri mogu da izvučem na šest načina:

(a) Pik, erc (c) Pik, tref (e) Erc, tref
(b) Pik, kara (d) Erc, kara (f) Kara, tref

Jedan od ovih izbora je ono što se traži (pik, erc). Ostalih pet su promašaji. Izgledi su ovde pet protiv jednog uspešnog.



Sedmi heksagonalni broj

Sl. 78.

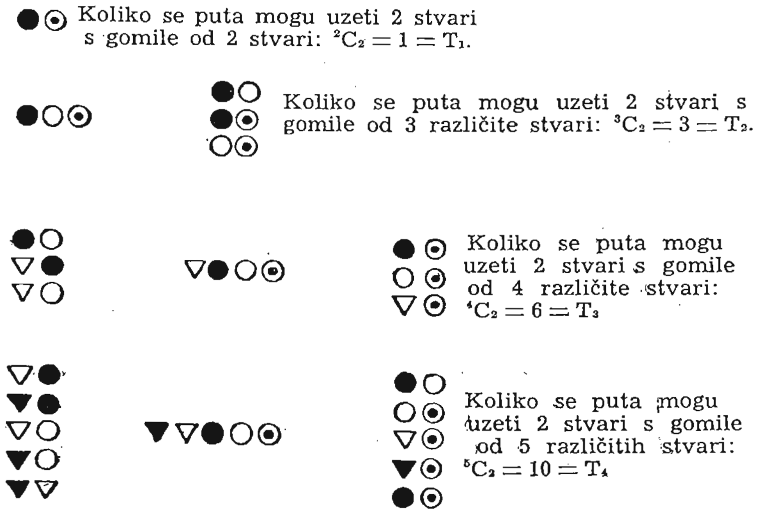
$6(T_5) + 6(6) + 1$ ili $6(T_{n-2}) + 6(n-1) + 1$

Zasad ćemo mi ovo smatrati kao čisto gramatičko izlaganje o tome kako matematičari govore među sobom o izgledima. To ne mora da znači isto kao kad bismo rekli da ako ja vučem više puta, da ću dobre karte izvući jednu šestinu, loše pet šestina puta od broja izvlačenja[1]). Ovakvo jedno tvrđenje pretpostavlja da znamo i neke druge stvari o realnome svetu: kao, na primer, kako su karte promešane; da nisu tako izrađene da jedna karta dođe na isto mesto isto toliko puta koliko i druga; da onaj ko izvlači karte raspoznaje karte po nepravilnom štampanju, po nepravilnom materijalu od koga su one načinjene, po raznoj debljini, sem i drugih činjenica iz iskustva s kojima matematika nije u neposrednoj vezi. Kad budemo docnije govorili o verovatnoći, moraćemo povući veoma jasnu razliku

[1]) Izvlačili smo recimo, 30 puta. To ne znači da ćemo $\frac{1}{6}\times 30$ tj. 5 puta izvući dobre karte, a $\frac{5}{6}\times 30$ tj. 25 puta loše karte. — P r e v.

između matematičke verovatnoće koja samo tvrdi nešto o svim slučajevima koji mogu da nastupe kod neke stvari ako su ispunjeni potrebni uslovi, i stvarne verovatnoće kod koje se pre radi o tome kako da se pomognemo kad ne znamo da li su svi uslovi ispunjeni.

Kad utvrđujemo mogućnost izbora iz jedne grupe podvojenih predmeta kao što su karte ili stanovništvo, nailazimo na dve klase brojeva koje odgovaraju tim dvema vrstama izbora. Prvu klasu čine kombinacije. One se upotrebljavaju onda, kad nas zanimaju samo kvaliteti izabranih stvari, na primer kod izvlačenja karata, da li je karta erc ili pik. Kombinacije su brojevi koji nam kažu broj raznih stvari koje možemo uzeti iz jednog skupa od toliko i toliko predmeta kad nam je dopušteno da odjednom uzmemo toliko i toliko predmeta. One se označavaju slovom C sa dva »prideva«, jedan levo gore, drugi desno dole. Levi kazuje koje je veličine skup iz koga uzimamo, a desni koliko predmeta smemo odjednom



SL. 79. — TRIANGULARNI BROJEVI KAO KOMBINACIJE

uzeti iz toga skupa. Tako $^5C_2$ označava broj raznih načina na koje mogu da izaberem dva predmeta iz skupa 5 raznih predmeta. Kad pogledate sl. 79 neće vam biti teško da nastavite niz

brojeva koji pretstavljaju kombinacije od 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... raznih predmeta, od kojih uzimamo po dva odjednom. Dobićete ovaj rezultat:

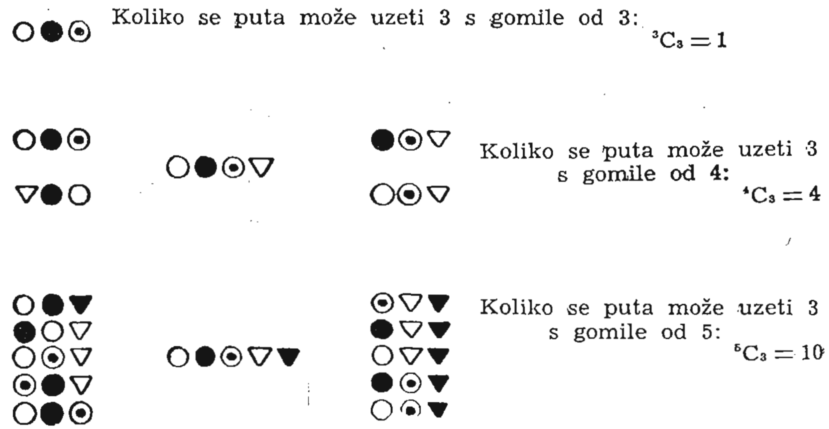
$^1C_2$	$^2C_2$	$^3C_2$	$^4C_2$	$^5C_2$	$^6C_2$	$^7C_2$	$^8C_2$ ...
0	1	3	6	10	15	21	28 ...

Odmah ćete zapaziti da je

$$^nC_2 = T_{n-1} = \frac{n}{2}(n-1).$$

To znači da broj načina na koje mogu da izvučem dve karte iz špila od 52 karte iznosi $\frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 51 = 1326$. Verovatnoća da ću izvući dve određene karte, na primer, damu pik i puba karu, jeste 1 protiv 1325. Ako nam je dopušteno da izvlačimo tri karte, moramo znati pravilo za ovaj niz:

$$^3C_3 \quad ^4C_3 \quad ^5C_3 \quad ^6C_3 \quad ^7C_3 \text{ itd.}$$



Sl. 80.

Lako ćete naći nekoliko prvih članova ovoga niza; ako se poslužite slikama kao sl. 80, ili, ako vam se više sviđa, slovima, na primer da uzmete po tri slova od ovih pet: abcde. Imaćete:

abc	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*
	bcd	*bce*	*bde*	*cde*	

Niz ovako glasi:

$$\begin{array}{ccccccc} ^3C_3 & ^4C_3 & ^5C_3 & ^6C_3 & ^7C_3 & ^8C_3 & ^9C_3\ldots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84\ldots \end{array}$$

Ovaj je niz obrazovan od prostih trouglastih brojeva na isti način kao što se prosti trouglasti brojevi obrazuju od prirodnih. Međutim, prirodne brojeve možemo obrazovati na isti način od jedinica (ili »razuma«, kako bi rekli Pitagorejci), »izvora svih brojeva«.

	1	1	1	1 itd.
1	(1 + 1)	(1 + 1 + 1)	(1 + 1 + 1 + 1)	itd.
1	2	3	4	itd.

Na sličan način možemo obrazovati proste trouglaste brojeve

1	2	3	4	itd.
1	(1 + 2)	(1 + 2 + 3)	(1 + 2 + 3 + 4)	itd.
1	3	6	10	itd.

Niz koji smo tražili ovako je obrazovan:

1	3	6	10	itd.
1	(1 + 3)	(1 + 3 + 6)	(1 + 3 + 6 + 10)	itd.
1	4	10	20	itd.

Ove ćemo brojeve nazvati »trouglasti brojevi drugog reda« (**^{2}T**). Kao što je ranije izneto, oni pretstavljaju geometriska tela, naime *tetraedre* (piramide s trostranom osnovom). Pravilo po kome se oni grade vidi se kad ih ovako napišemo:

Niz dedova	1	2	3	4	5...
	1	4	10	20	35 ..
	$\frac{3}{3}\times 1$	$\frac{4}{3}\times 3$	$\frac{5}{3}\times 6$	$\frac{6}{3}\times 10$	$\frac{7}{3}\times 15$

Otuda imamo ovo prosto pravilo:

$$^2T_n = \frac{n+2}{3}\cdot T_n = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2}$$

Zapazite da broj n stavljen kao pridev desno dole kod T označava naspramni broj u dedovskom nizu (1, 2, 3, 4, . . .).

Kad opet pogledate niz $^nC_3$ videćete da je

$$^nC_3 = {}^2T_{n-2}$$

Dobićete $^2T_{n-2}$ ako stavite $(n-2)$ mesto n u prethodnoj rečenici, tj.

$$^nC_3 = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2}$$

To znači: ako vam je dopušteno da vučete tri karte iz špila od 52 karte, broj mogućih načina — kombinacija je

$$\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2} = 22100$$

To znači: izgledi — verovatnoća — da ćete izvući odjednom keca pika, keca erca i keca karu biće 1 protiv 22 099.

Možete ići i dalje, pa obrazovati više trouglaste brojeve po istome planu, kao što pokazuju ovi trougli:

Prirodni brojevi:

```
            1 = 1
          1 1 = 2
        1 1 1 = 3
      1 1 1 1 = 4
    1 1 1 1 1 = 5
  1 1 1 1 1 1 = 6
1 1 1 1 1 1 1 = 7
```

Prosti trouglasti brojevi:

```
            1 =  1
          1 2 =  3
        1 2 3 =  6
      1 2 3 4 = 10
    1 2 3 4 5 = 15
  1 2 3 4 5 6 = 21
1 2 3 4 5 6 7 = 28
```

Trouglasti brojevi drugog reda:

```
                    1 =  1
                  1 3 =  4
                1 3 6 = 10
             1 3 6 10 = 20
          1 3 6 10 15 = 35
       1 3 6 10 15 21 = 56
    1 3 6 10 15 21 28 = 84
```

Trouglasti brojevi trećeg reda:

```
                       1 =   1
                     1 4 =   5
                  1 4 10 =  15
               1 4 10 20 =  35
            1 4 10 20 35 =  70
         1 4 10 20 35 56 = 126
      1 4 10 20 35 56 84 = 210
```

Trouglasti brojevi četvrtog reda:

```
                       1 =   1
                     1 5 =   6
                  1 5 15 =  21
               1 5 15 35 =  56
            1 5 15 35 70 = 126
        1 5 15 35 70 126 = 252
```

Trouglasti brojevi petog reda:

```
                          1 =   1
                        1 6 =   7
                     1 6 21 =  28
                  1 6 21 56 =  84
              1 6 21 56 126 = 210
          1 6 21 56 126 252 = 462
```

Iz ovih trouglova možemo izvesti ova pravila:

$$^{n}C_1 = n$$

$$^{n}C_2 = \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}$$

$$^{n}C_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$^{n}C_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(u-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$^{n}C_5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Sad smo naišli na jedan zanimljiv niz koji igra važnu ulogu u statistici. Taj je niz bio poznat Euklidu, koji ga je upotrebio da dođe do nekih potpuno nekorisnih zaključaka o prostim brojevima. Niz

1 2 6 24 120 720 5040...

zove se *faktorijelni niz* ili *faktorijel*. On je rođen ovako:

Roditelji:	1	2	3	4	5
	1	2·1	3·2·1	4·3·2·1	5·4·3·2·1
Deca:					
	1	2	6	24	120

Svaki je član obrazovan množenjem naspramnog člana roditeljskog niza svima prethodnim članovima roditeljskog niza. Enti član se često piše ovako $n!$. Znak čuđenja ovde nije nikakav uzvik. U matematici nema uzvika. Ovde je taj znak glagol koji znači »pomnoži taj broj svakim celim brojem manjim od njega dok ne dođeš do 1«.

Faktorijelni brojevi pretstavljaju drugi jedan način izbora osnovan na razmeštaju ili redu brojeva. Brojevi pri takvom izboru zovu se proste permutacije, a pišu se $^{n}P_n$. To znači broz razmeštaja n stvari kad se uzmu sve te stvari. Na primer, postoje šest permutacija od sva tri ova slova *ABC*, naime *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*. Pravilo za dobijanje prostih permutacija glasi:

$$^{n}P_n = n!$$

Ovo se pravilo objašnjava sledećom činjenicom: ako imamo, recimo, četiri različita predmeta, svaki od njih može biti stav-

ljen na prvo mesto. To nam daje četiri razna razmeštaja, kao početak. Kad je jedan stavljen na prvo mesto, svaki od ona tri može biti stavljen na drugo mesto. I tako svaki od ona prva četiri razmeštaja može biti udešen na tri načina, što iznosi svega $4 \times 3 = 12$ načina. Kad smo popunili prvo i drugo mesto na sve te načine, možemo popuniti treće mesto onim dvoma preostalim članovima na dva načina. I tako svaki razmeštaj od 3×4 razmeštaja sa prva dva mesta može na dva načina da se udesi kad se popunjava treće mesto, tj. imamo svega $4 \times 3 \times 2$ načina da popunimo prva tri mesta. Svaki takav razmeštaj može sad da se kombinuje na jedan jedini način kad se popunjava četvrto mesto, pošto su tri predmeta već upotrebljena za prva tri mesta. I tako je:

$$^{4}P_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{ ili } ^{4}P_4 = 4!$$

Sledeći dijagram može da vam pomogne da konstruišete i druge dijagrame koji prikazuju pravilo za brojeve veće od 3.

	Prvo mesto	Drugo mesto	Treće mesto
abc	*a*	*ab*	*abc*
		ac	*acb*
	b	*ba*	*bac*
		bc	*bca*
	c	*ca*	*cab*
		cb	*cba*
	(Tri načina)	(Dva načina za svaki)	(Jedan način za svaki)

Svi mogući načini na koje mogu da se razmeste karte iz špila od 52 karte iznosi 52! Ovaj je broj i suviše veliki da ga mi ovde ispisujemo. To je 80 a iza njega još šeset i šest drugih cifara. To je broj milja koje bi svetlost, sa 186 000 milja brzine u sekundu, prešla za otprilike $13{,}7 \times 1\,000\,000^9$ godina. Ako vas ovo navede da se nadate da ćete upamtiti sve načine na koje se mogu razmestiti 52 karte, bolje bi vam bilo da napustite poker, pa da se prihvatite biologije. Živčanih vlakana ima u čovečjem telu svega oko tri milijarde.

Sve razmeštaje koje možemo da izvedemo kad uzmemo sve brojeve jedne grupe zovemo *proste permutacije* i njihov broj, kad je u grupi n različitih predmeta, obeležavamo sa $^{n}P_n$. Možemo razmeštaje vršiti na dva načina: da uzmemo sve predmete n iz grupe od n predmeta, ili da od n predmeta uzimamo samo r i da njih razmeštamo. Ovde je r manje od n. Takve se permutacije pišu ${}^nP_r$[1]. Tako ${}^4P_3$ znači mogući broj raznih razmeštaja četiri razna predmeta, kad smemo odjednom da uzmemo samo 3. Da biste dobili pravilo da nađete te brojeve, vratite se na kombinacije. Videćete da je

$$ {}^nC_5 = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{5!} $$

To objašnjava ovo opšte pravilo:

$$ {}^nC_r = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} $$

Ako nam je dopušteno da u svakoj takvoj kombinaciji od r raznih predmeta razmeštamo te predmete na sve moguće načine, imaćemo od svake takve kombinacije $r!$ permutacija, pa će biti:

$$ {}^nP_r = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}\cdot r! $$

a to je dalje:

$$ {}^nP_r = n(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots(n-r+1). $$

Kao primer da uzmemo jednu složenu bravu koja se otvara na reč *ris*. Od naših 30 slova možemo dobiti 30^3 reči od tri slova, tj. 27 000 reči. Ali tu ćemo imati i ovakvih »reči«: rrr, sss, iii. Ako nam nije dopušteno da se slova ponavljaju, imaćemo $30\cdot 29\cdot 28$ »reči«[2]. Ako zahtevamo da ta reč ima i neki smisao u našem jeziku, taj se broj znatno smanjuje. A da biste uštedeli vreme za nalaženje te reči, moraćete da se pozabavite osnovama filologije.

Dok ste još kod ovih brava što se otvaraju pomoću kombinacija, zapazite još nešto. Nije isto da se utvrdi koliki su izgledi da se izvuku četiri keca iz jednoga špila i da se utvrdi kakvi su izgledi da prvo izvučemo keca pika, pa keca karu, pa keca

[1]) Takvi se slogovi zovu *varijacije*. Ako u jednome slogu ima r elemenata, a svega ima n elemenata, to se piše ${}^nV_r$. (To je isto ovo što pisac obeležava sa ${}^nP_r$). — Prev.

[2]) To je po obrascu

$$ {}^nV_r = {}^nP_r = 30(30-1)(30-3+1) = 30\cdot 29\cdot 28. \text{ — Prev.} $$

erca i najzad keca trefa. Za prvi slučaj imamo ${}^{52}C_4$ što znači

$$ \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 270\,725. $$

Izgledi su dakle, 1 protiv 270 724. U drugom slučaju imamo naročite razmeštaje u tim kombinacijama, te će broj biti ${}^{52}P_4$ što iznosi

$$ 52\cdot 51\cdot 50\cdot 49 = 6\,497\,400 $$

Znači da su izgledi 1 protiv 6 497 399.

Pre nego što napustimo mađisko doba u razvoju upotrebe brojeva možemo se pozabaviti još jednom klasom brojevskih trouglova. Oni nisu bili važni u matematici sve do Njutna. Sasvim je verovatno da su za njih znali narodi Istoka, — koji su pronašli broj nulu (0) oko 100 godina pre n. e. — i to mnogo ranije nego što su postali poznati u Evropi. Izneli smo »pretke« izvesnih brojnih nizova pa smo počeli nizom jedinica, ili nizom prirodnih brojeva koji se iz niza jedinica izvodi. Svi nizovi koji se obrazuju poput trouglastih nizova mogu se svesti na trougao čiji je vrh završetak načinjen od nule. Takvi se trougli zovu prolazni trougli. Prolazni trougli od prostih trouglastih brojeva mogu se ovako pretstaviti:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \\
1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21
\end{array}
\qquad \text{ili} \qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 2 & & 3 & & 4 & \\
1 & & 3 & & 6 & & 10
\end{array}
$$

Ovakvi se trouglovi prave tako, što se najpre ispiše na osnovici izvestan broj članova jednog niza. Naredna gornja linija obrazuje se na taj način, što se u ispisanom nizu oduzimaju po dva i dva susedna člana[1]. Naredni red se dobiva na sličan način iz reda ispod njega. To se radi sve dok ne dobijemo sve same nule. Lako je videti zašto trouglasti niz iščezava (tj. zašto je prolazan). Uzastopni nizovi trouglastih brojeva osnivaju se na tome što se sabiraju susedni članovi roditeljskog niza. Svi oni imaju iste »pretke«. Tako je roditeljski niz trouglastih brojeva, drugog reda niz prostih trougla-

[1]) U prvom trouglu, u drugom redu ozdo, dobivamo njegove članove iz najdonjeg niza ovako: $3-1=2$, $6-3=3$, $10-6=4$, $15-10=5$, $21-15=6$. — Prev.

stih brojeva, čiji je roditeljski niz niz prirodnih brojeva. A on se može smatrati kao dete niza jedinica. Razlika između dva neposredna susedna člana u nizu jedinica je očevidno nula. Evo jednog prolaznog trougla trouglastih brojeva drugog reda da se što jasnije prikaže poreklo takvog niza:

0
1 1
3 4 5
3 6 10 15
1 4 10 20 35

Kad brojeve poređamo ovako u obliku trougla dolazimo do jedne majstorije koja nam pomaže da pronađemo na koji je način obrazovan neki niz. To ćemo opširnije objasniti u jednoj od narednih glava. Majstorija se osniva na ovome načelu. Veliki broj nizova, u stvari svi nizovi koji se mogu figurirano pretstaviti, mogu se smatrati da su izgrađeni od trouglastih brojeva. A kako uvek možemo da prikažemo poreklo trouglastih brojeva pomoću prolaznog trougla možemo za svaki niz figuriranih brojeva obrazovati prolazni trougao. Možete probati to i sami sa nizovima figuriranih brojeva kao što su oni sa slika 76 i 77. Na primer, prolazni trougao za niz kvadrata prirodnih brojeva jeste ovaj:

0
0 0
2 2 2
3 5 7 9
1 4 9 16 25

Evo jednog novog niza koji veoma brzo odaje svoje poreklo, ma da po njegovim brojevima, ovako kako stoje, ne možete ništa da vidite:

1 2 3 4 5 6 7 . . .
1 5 14 30 55 91 140 . .

Trougao koji iščezava dovodi vas odmah do niza kvadrata prirodnih brojeva:

0
0 0
0 0 0
2 2 2 2
5 7 9 11 13
4 9 16 25 36 49
1 5 14 30 55 91 140

Priroda ovoga niza je:

$$1^2 \quad (1^2+2^2) \quad (1^2+2^2+3^2) \quad (1^2+2^2+3^2+4^2)$$
$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) \quad (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$$
$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2) \text{ itd.}$$

Lako je videti da razlike uzastopnih članova takvog jednog niza pretstavljaju niz kvadrata, kao što vam kazuje drugi red u prolaznom trouglu. Prost zakon po kome ćete iz prolaznog trougla odrediti prirodu nekog niza biće objašnjen kad budemo govorili o pronalasku broja »0«. Kad smo govorili o prolaznim trouglima unapred smo rešili buduću krizu u matematici. Pri tome su učestvovali i ti trougli, pošto su se oni sasvim prirodno pojavili iz iste društvene sredine kao što su se figurirani brojevi pojavili iz svečanih obreda koje su Pitagorejci priređivali brojevima. Određivanje porekla nekog niza pomoću prolaznog trougla bio je vrhunac ogleda s brojevima, koji se sasvim prirodno pojavio iz ideologije jedne civilizacije koju je uglavnom stvorio stočarski narod koji je živeo u zadrugama.

Kad se potsmevamo ovim prastarim društvima koja su se upinjala da nešto-nešto natucaju na jeziku brojeva u detinjstvu civilizacije, red bi bio da se upitamo: a jesmo li i mi sami odmakli od mađije? Opreznost se utoliko više nameće kad se setimo čudnih teozofskih[1]) poslova ljudi kao što su bili jedan Paskal i jedan Njutn, koji su tako mnogo doprineli onoj vrsti matematike koja je najkorisnija pri rešavanju problema merenja u mašinsko doba. Za evropske civilizacije brojevi u kojima ima mađiskih osobina naročito su brojevi sedam i tri. Teologija nam je zaveštala zlatni svećnjak sa sedam grana, sedam zlih duhova isteranih iz Magdalene, sedam nevolja, sedam smrtnih grehova, sedam (još smrtnijih) vrlina, sedmerostruko amin. Broj sedam nisu zanemarivali ni nezvanični teolozi, koji su nam obično pretstavljani kao filozofi. One godine kad je Pjaci[2]) pronašao Cereru bile su poznate ovih sedam planeta: Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn

[1]) Teozofija je religiozna mistika sa sujevernim shvatanjima da se može doći u neposredan dodir s »onim svetom«. — Prev.

[2]) Đuzepe Pjaci (1746—1826) italijanski astronom pronašao je prvi planetoid (malu planetu) u noći 1 januara 1801 godine. On je nazvan *Cerera* (ili *Ceres*). Veoma je mali: prečnik mu iznosi svega 350 kilometara. — Prev.

i Uran. Iste te godine pruski filozof Hegel napisao je prekor naučnicima, što zanemaruju filozofiju. Svoj je prekor obrazlagao time što naučnici troše grdno vreme tražeći po nebu novu neku planetu, kad je filozofija jasno utvrdila da ih može biti svega sedam. Od toga doba pronađene su i druge planete. Neptun je došao ubrzo zatim (1846); Pluton je pronađen 1930 godine, pošto astronomi ostaju materijalisti dok se drže svojih zvezdara.

Mađiski sadržaj broja tri, koji je bio obožavani broj u evropskoj kulturi, izgleda da je semitskog porekla. Može se tvrditi da je obožavanje trouglastih brojeva, i ono pripisivanje tajanstvenosti samome trouglu u pitagorejskoj kulturi, verovatno poteklo iz trouglastog znamenja starih Hitita, koje danas vidimo u ona dva trougla u znamenju cionizma[1]). Danas je u većini usvojeno da trostruka figura ima veze sa seksualnim značenjem kao i grb u obliku tri ljiljana, kao i zanimljivi filološki zaključci iz samog toga broja. Sem osnovnih trouglova pomenutih u prvoj glavi, Platonov *Timeus* otkriva opšte trojstvo boga, tj. stvarni svet, naš sopstveni svet ili svet senki i *logos* ili reč, koja je božje otkrovenje u svetu. Stoici su govorili o *logos spermatikos*, il o semenoj reči, »svetlosti koja osvetljava svakog čoveka«, o božanskoj (piramidalnoj) vatri. U prvim godinama naše ere kada se tek sastavljalo Jevanđelje, Filon, starešina aleksandriske sinagoge, uneo je Platonovo učenje u ortodoksno jevrejsko učenje time što je mesiju izjednačio s Platonovim *logosom*. Tajanstvenost trojstva ovaplotila se u Aleksandriji, toj velikoj tvornici svetskih veroispovesti, kad su jevrejske nacionalne nade bile pripremljene za dolazak obećanog spasitelja. Razrađenu nebesku aritmetiku, koja je dovela do bezbroja jeresi i isključenja iz crkve, pa čak ponekad i do pogubljivanja, gde je verovatno palo više žrtava nego u gladijatorskim borbama, izveli su u velikoj meri oni što su napustili platonizam i prišli hrišćanstvu, kao i docnije pitagorejske zajednice (ili neopitagorejci) u rimskome svetu. Kad je Aristotelova platonska logika došla i zauzela počasno mesto u katoličkoj teologiji kraj kanona svetog pisma, doktori sa Sorbone uveli su mađiske osobine broja tri u psihologiju, počevši od trojstva misli, volje i osećanja, pa su svaku tu oblast podelili

[1]) Cionizam — pokret Jevreja za njihovo naseljavanje u Palestini. — Red.

u tri kategorije. To se još često provlači kroz neke savremene udžbenike psihologije.

Mađija brojeva ne privlači ljude s naučnim obrazovanjem tako lako kao što privlači teologe i političare. Naučnici su skloni jednom prepredenijem obliku Pitagorina učenja, koji gleda da u brojevima pronađe tajnu sveta. Na primer, često je puta rečeno da je matematika gramatika nauke. Ovo tvrđenje navodi na sasvim pogrešan put, utoliko više što se greška u njemu ne vidi jasno. Reći da je matematika gramatika nauke znači reći da se nauka ne bavi ničim sem prebrajanjem i merenjem. Prosta je činjenica da je prva dužnost nauke da razazna kakve se sve razne *vrste* stvari nalaze u svetu. Zgodno je prikriti ovu osnovnu i jasnu istinu iz prostog razloga što ona pomaže da se zaboravi da se ljudska priroda, kao i spoljna priroda, može naučno proučavati. Do nedavna biologija i psihologija, dve mlađe nauke koje su bile preterano bezočne prema nasleđenim verovanjima, nisu upotrebljavale matematiku. One tek sada dolaze na stupanj kad shvataju koja je merenja najkorisnije izvršiti, pa dolaze u matematičke kabinete i mole za pomoć. Kad odemo daleko nazad u istoriju, vidimo da je prvobitni čovek verovatno utrošio najmanje dvadeset hiljada godina dok je razaznao razne vrste zvezda na nebu, pa mu je tek onda postalo mogućno da meri njihove položaje i da brojevima izrazi vreme kad se one pojavljuju. Posle pojave prve kalendarske civilizacije prošlo je više od tri hiljade godina pre nego što su u proučavanje astronomije uvedene matematičke metode kao što su metode koje ćemo sad opisati u narednoj glavi. Čvrst osnov nauke je u tome da pozna kako izgleda svet. Samo je zabuna nastupala i samo zabuna može da nastupi, kad se matematika upotrebi pre nego što nam postane sasvim jasno s kakvom vrstom stvari imamo posla i kakva bi merenja bilo korisno izvršiti. Tek onda možemo odlučiti koja je vrsta matematike koristan instrument za razvijanje znanja. Ogroman uspeh je postignut primenom matematike na proučavanje sveta kad su izvesne njegove crte bile jasno povučene posle brižljivog posmatranja. Taj je uspeh izazvao slepo poštovanje prema matematici, a ono ubrzava krizu naše kulture. Prema upotrebi brojeva mi smo zauzeli instrumentalno držanje[1]), ali ono još nije potpuno potislo religiozno držanje.

[1]) Gledište da je matematika samo sredstvo. — Red.

VEŽBANJA UZ V GLAVU

1. Kad je dato:

$$\sqrt{2}=1{,}4142$$
$$\sqrt{3}=1{,}7321$$
$$\sqrt{5}=2{,}2361$$

naći sa tri decimala tačno $\sqrt{27}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{10}$ i $\sqrt{30}$.

2. Kad hipotenuza pravouglog trougla iznosi 1 jedinicu, a jedna kateta je

a) $\frac{3}{4}$ hipotenuze, b) $\frac{2}{3}$ hipotenuze, c) $\frac{4}{5}$ hipotenuze, nađite drugu katetu.

3. — Načinite proizvoljnu aritmetičku progresiju od 5 članova. Označite zbir sa S. Ispišite sad tu progresiju natraške (tj. da peti član dođe pod prvi, četvrti pod drugi itd.). Saberite te dve progresije. Dobićete $2S$. Pokažite aritmetički da zbir aritmetičke progresije od n članova, kad je prvi član a_1 a krajnji a_n iznosi $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

4. — Ponovite to s još jednom progresijom.

5. — Ispišite ovaj niz opštih brojeva: a_1, a_1+d, a_1+2d itd. Ako u njemu ima n članova, izrazite a_n pomoću a_1, n i d. Izrazite a_1 pomoću n, a_n i d. Izrazite pretpretposlednji član[1]).

(I) pomoću n, a_1 i d,

(II) pomoću n, a_n i d. Radeći tako izvedite opšte pravilo, a da ne upotrebite posebne brojeve.

6. — U aritmetičkim progresijama napisanim ovde nađite peti član, deseti član, zbir od deset članova. Najpre upotrebite obrasce koje ste pronašli, a onda proverite rezultate time što ćete ispisati svih deset članova i sabrati ih.

$1 \quad 3 \quad 5 \ldots \qquad -6 \quad -2 \quad +2 \ldots$

$1 \quad 4 \quad 7 \ldots \qquad a \quad +0 \quad -a \quad -2a \ldots$

$5 \quad 10 \quad 15 \ldots \qquad 3 \quad +\frac{4}{3} \quad -\frac{1}{3} \ldots$

$\frac{1}{2} \quad 1 \quad 1\frac{1}{2} \qquad 1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \ldots$

[1]) To je član a_{n-2}. U nizu 2, 5, 8, 11, 14, 17 biće: $a_n=17$, $a_{n-1}=14$, $a_{n-2}=11$. — Prev.

7. — U gornjim aritmetičkim progresijama nađite zbir od n članova, i n-ti član.

8. — Nađite prvi član i razliku između dva uzastopna člana aritmetičke progresije kod koje je šesti član 13, a dvanaesti 25.

9. — Nađite zbir prvih n prirodnih brojeva (1, 2, 3, 4 . . .)

10. — Nađite 4 takva broja između 6 i 15, koji zajedno sa 6 i 15 čine 6 članova jedne aritmetičke progresije (AP)[1]).

11. — Između 1 i 3 naći 3 člana koji sa 1 i 3 čine aritmetičku progresiju.

12. — Pokazati kako da se između brojeva a i b umetnu n članova tako da to bude aritmetička progresija od $(n+2)$ člana gde je a prvi, a b poslednji član.

To se ponekad zove umetanje n aritmetičkih sredina između a i b. Prilično glup naziv, ali ga je korisno znati. To vas osposobljava da, na primer, na jednoj duži postavite izvestan dati broj tačaka na jednakim međusobnim rastojanjima.

13. — Izvedite obrazac za zbir geometriske progresije od n članova u kojoj je a prvi član, aq drugi član, aq^2 treći član i tako dalje.

Dokažite da taj obrazac glasi

$$S=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

14. — Nađite peti član i zbir od pet članova ovih geometriskih redova:[2])

$$1+2+4+\ldots$$
$$0{,}9+0{,}81+0{,}729+\ldots$$
$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\ldots$$
$$x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+a^3x^{n-3}+\ldots$$
$$1+3+3^2+3^3+3^4+\ldots$$

Dobivene rezultate proverite aritmetički.

[1]) To znači ovo. Sad imate prvi član a_1. On je 6. Imate i šesti član a_6. Znači da imate prvi (6) i krajnji član (15) i broj članova (6). Treba da odredite razliku između uzastopnih članova. — Prev.

[2]) Niz napisan u obliku zbira zovemo red. Ovo je niz: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots$ Ovo je *red*: $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ — Prev.

15. — Nađite u gornjim geometriskim redovima enti član i zbir od n članova.

16. — Umetnuti dva broja između 5 i 625 tako, da ta četiri broja čine geometrisku progresiju (GP). To se ponekad kaže: umetnuti dve geometriske sredine između 5 i 625[1].

17. — Umetnuti tri geometriske sredine između $\frac{1}{3}$ i $\frac{16}{243}$.

18. — Nađi obrazac po kome se umeću n geometriskih sredina između dva broja od kojih je prvi a, a drugi b.

19. — Načinite GP (geometrisku progresiju) u kojoj je prvi član a, dok je q (iz obrasca u vežbanju 13) razlomak manji od 1. Napišite deset članova te progresije. Šta mislite kako će glasiti krajnji član ako progresiju nastavite u nedogled?

20. — Ako neku količinu možemo da smanjimo koliko god nam je volja, onda je možemo i zanemariti pored količina koje imaju određenu vrednost. Zagledajte obrazac u vežbanju 13, pa — imajući u vidu gore rečeno — proverite može li zbir jedne opadajuće GP koja se neprekidno nastavlja (prvi član a, međusobni količnik susednih članova q) biti veći od $\frac{a}{1-q}$.

21. — Svaki periodičan razlomak može se ovako napisati:

$$0{,}666\ldots = 0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots$$

Iskoristite rezultat iz prethodnog vežbanja, pa izrazite ove periodične razlomke u obliku običnih razlomaka:

$$0{,}\dot{6}$$

$$0{,}\dot{2}\dot{5}$$

$$0{,}\dot{7}9\dot{1}$$

22. — Izraz $\frac{a}{1-q}$ zove se zbir beskonačnog opadajućeg reda $a + aq + aq^2 + \ldots$, jer ako jednako sabiramo sve više i više članova sve smo bliže zbiru $\frac{a}{1-q}$, ali ga ne možemo preći.

[1]) Ovaj se posao, i kod aritmetičke i kod geometriske progresije, obično zove *interpolacija*, ili *interpolovanje*. — Prev.

Nađite zbir ovih beskonačnih geometriskih redova:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$1 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1\,000} + \ldots$$

23. — Nađite enti član

a) u nizu heksagonalnih brojeva pokazanih na sl. 77 i enti član ovih heksagonalnih brojeva: 1, 6, 15, 28, 45 itd.

b) u nizu zvezdanih brojeva (sl. 77).

Proverite dobivene rezultate time što ćete nacrtati treće i pete brojeve.

24. — Nađite ogledom (diagramom) i obrascem koliko raznih razmeštaja postoje za četiri keca, za četiri keca i četiri kralja, za sve slike u kartama (kralj, dama, pub), za sve karte manje od 6 (sem kečeva).

25. — Upotrebite diagram da proverite formulu, pa nađite koliko različitih grupa, bez obzira na red karata u njima (tj. kombinacija) mogu da se dobiju kad se iz »špila« od 52 karte uzimaju po tri karte gde jedna mora da bude kralj ili dama; ili četiri karte gde jedna mora da bude kralj, dama ili pub; ili pet karata gde jedna mora da bude kralj, dama, pub ili kec.

26. — Koliko raznih zvonjenja možete izvesti sa šest raznih zvona, kad zvonite na sva zvona?

27. — Koliko različitih zbirova možemo dobiti kad bacamo kocku:

a) tri puta, b) pet puta?

28. — Jedan odbor ima pretsednika, sekretara, blagajnika i četiri člana. Na tribini iza govornika postavljen je prav sto. Nađite na koliko načina mogu oni da sednu za taj sto:

a) kad mesto nije nikome određeno;

b) kad je srednje mesto određeno za pretsednika;

c) kad sekretar i blagajnik moraju sedeti jedan s jedne, drugi s druge strane uz pretsednika koji sedi na srednjem mestu;

d) kad pretsednik sedi u sredini, sekretar desno, a blagajnik levo.

29. — U jednoj kesi ima šest lopti raznih boja. Koliko raznih parova lopti mogu da se izvuku iz nje a) ako se izvučeni parovi vraćaju u kesu; b) ako se izvučeni parovi ne vraćaju u kesu?

DA SE UPAMTI!

1. — U aritmetičkom redu čiji je prvi član a_1, a poslednji a_n, zbir od n članova je $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$. Ako je prvi član a_1, a razlika između svaka dva uzastopna člana d, zbir od n članova je

$$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

2. — U geometriskom redu u kome je prvi član a, a zajednički količnik uzastopnih članova q, zbir od n članova je

$$\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

Ako je q pozitivan razlomak manji od 1, beskonačan zbir jednog geometriskog reda je

$$\frac{a}{1-q}$$

3. — Broj kombinacija od n stvari od kojih uzimamo po r odjednom, iznosi:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \quad \text{ili} \quad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

4. — Broj permutacija od n stvari gde uzimamo po r komada odjednom iznosi

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

GLAVA VI

DIMENZIJE SVETA

ili

Šta možemo da postignemo trigonometrijom

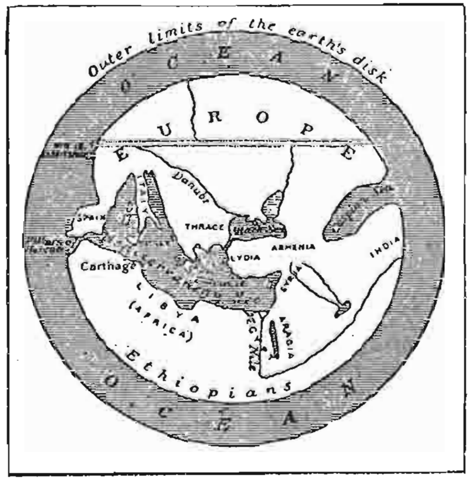
Godine 332 pre n. e. Misir (Egipat) se predao Aleksandru Velikom. U slavu osvajačevu podignuta je varoš onde gde se sveta reka uliva u Sredozemno More. U njoj se nastanilo mešovito stanovništvo od Misiraca, Grka i Jevreja. Aleksandrija je prikupila sve znanje staroga sveta: veštinu lečenja, bojenje, mašinsku tehniku i moreplovstvo. Aleksandar je umro 323 godine pre n. e. Misir je onda postao nezavisna država pod Aleksandrovim vojskovođom Ptolomejem. Ptolomejeva dinastija vladala je sve dok Misir nije podlegao rimskim armijama. Ptolomej je svoj dolazak na presto obeležio osnivanjem u istoriji čovečanstva prvog organizovanog središta izričito svetovnog učenja: muzej, biblioteku i univerzitet. Trista godina je proteklo od toga doba do navale Cezarovih legija, kada je došlo do spaljivanja prve aleksandriske biblioteke. U tih trista godina zablistao je ljudski duh odvažnošću i poletom. Jedino doba koje se može uporediti s njim jesu one četiri stotine godina što su protekle između istovremenog objavljivanja Kopernikova dela *De Revolutionibus* i Vezaliusova dela *De Fabrica Humani Gorporis*, 1543 godine, i požara u nemačkom Rajhstagu 1933 godine. Pod Rimljanima Aleksandrija je zadržala svoj položaj umnoga središta civilizovana sveta, kao što je i dalje ostala veliko središte zanatstva, i važno pristanište za sredozemnu trgovinu. Stvorena je i druga biblioteka. Naglo je nastupila druga, kratka smena živoga rada na matematici i medicini u drugom i trećem veku n. e., sve dok hrišćanstvo nije postalo zvanična veroispovest u Imperiji. Kad su kaluđeri razorili škole mnogobožačke nauke, iz druge biblioteke su opljačkane sve korisne stvari, a biblioteka pretrpana praznovernim tričarijama, mnogo pre nego što su muslimanski osvajači razorili samu biblioteku. U svojim postepenim stupnjevima aleksandriska nauka je pretstavljala kulturu različitu i od grčke i od rimske. Bila je izrazito kosmopolitska. Nju su negovali kadrovi poreklom od veoma različitih nacija i rasa.

Požar u prvoj aleksandriskoj biblioteci bio je potpuna nesreća. Propast druge faze aleksandriske kulture ne treba gledati istim očima. Ona je bila dostigla granice razvoja u okviru svojih društvenih mogućnosti. Za dalji razvoj bila je potrebna nova sinteza, a muslimanski vulkanski proboj pokazao se kao njen potrebni instrument. Arapska je kultura donela sobom jednovremeno dve struje ljudskog delanja: novi govor brojeva sa Istoka i klasičnu matematiku sa Zapada. Prvi stupanj aleksandriskog doprinosa tome obeležen je pronalaskom trigonometrije. Ona je vratila u geometriju broj i merenje. Drugi je stupanj prirodna posledica prvoga stupnja. Ljudi su se služili veoma velikim brojevima. Pored novih merenja po nebu, Aleksandrovi pohodi i čudesna svota od tri stotine talenata što ih je on utrošio na grobnicu Hefestionovu[1]) postali su sasvim obične stvari. Postalo je neophodno pronaći novu aritmetiku. Kad se zavesa spušta na kraju poslednjeg stupnja aleksandriske kulture, matematika je zauzeta problemom računanja, traži pipanjem nove metode, ali još u okovima zastarelog načina pisanja brojeva, što joj pregrađuje put ka istinskom napretku.

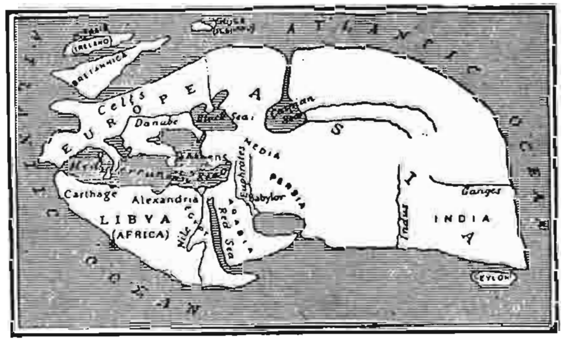
Činjenica da je matematika ponovo stupila u tesan dodir sa životom objašnjava oba ova razvoja. Veoma se ističu dva imena vezana za početke univerziteta u Aleksandriji: Aristarh iz Samosa (310—250 pre n. e.) i Arhimed iz Sirakuze (287—212 pre n. e.). Aristarh je prvi izračunao relativne daljine od Zemlje do Sunca i do Meseca. Arhimed je prvi pokazao kako možemo izračunati broj π sa željenom tačnošću. On se naročito bavio mehanikom. Među drugim njegovim važnim doprinosima nauci naročito pamtimo njegov princip poluge i princip plovnih tela. Kad je dokazivao kakav odnos postoji između težine i rastojanja od tačke oslonca, time Arhimed nije samo zadovoljavao svoje platonske težnje ka duhovnom savršenstvu i umnoj prefinjeno-

[1]) Hefestion je bio jedan od velikih Aleksandrovih vojskovođa. Aleksandar ga je veoma svečano sahranio. — Prev.

sti, jer je on svoje znanje primenio u izradi planova za katapulte koji su upotrebljavani protiv rimske vojske i — kojima se služila i rimska vojska. Svoje znanje o specifičnoj težini isko-

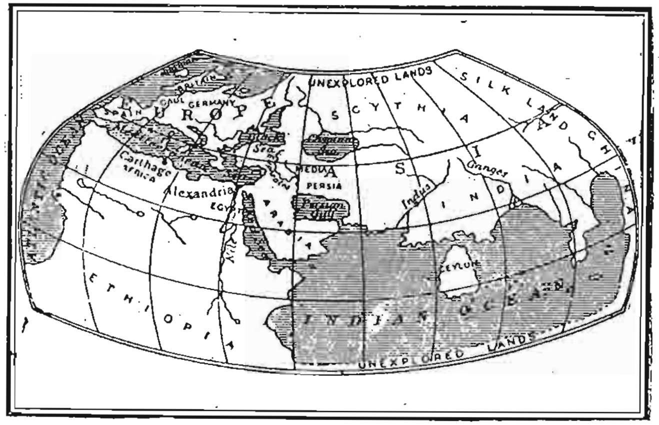


Mapa sveta od Hekateusa, 517 pre n. e. Ona pokazuje primitivne pojmove o svetu kojih su se ljudi držali u Pitagorino doba.



Mapa sveta po Eratostenu, oko 250 g. pre n. e.
SL. 81. — POČECI KARTOGRAFIJE

ristio je za određivanje čistoće plemenitih metala. Do određivanja vrednosti broja π došao je uporedo sa svojim radom na konstrukciji jedne nove mašine koja se osnivala na primeni točka. Arhimed je olakšao spuštanje broda u more time što je upotrebio čekrke. Za zalivanje pronašao je crpku koja se



Ptolomejeva mapa sveta, oko 250 g. n. e.
SL. 81A. POČECI KARTOGRAFIJE.

osniva na obrtanju zavrtnja. Malo ih je koji znaju da su u aleksandriskom svetu mehaničke veštine stojale veoma visoko. Oko 100 g. pre n. e. Heron iz Aleksandrije je napisao knjigu u kojoj je opisao principe oko stotine mehaničkih naprava, među kojima su bili ciklometar, teodolit, crpka s dvostrukim dejstvom i prvi model parne mašine. Društvena kultura toga doba služila se naukom. Umni radnik nije bio sputavan ideologijom uništavanja mašina koja zamračuje kulturu Zapadne Evrope. Pronalasci su bili dobrodošli.

Koliko je aleksandriska matematika bila čvrsto vezana za stvarni život vidi se i iz ove činjenice. Hiparh je sastavio spisak od 1080 zvezda nekretnica. Sam Arhimed je izradio prvi poznati model na kome su obrtanje nebeske lopte i promenljivi položaji zvezda bili pretstavljeni pomoću jednog pokretnog točka. Verovatno je on prvi upotrebio tablice trigonometriskih funkcija uglova kao što je ona u glavi IV. Hiparh, aleksandriski astronom, koji je živeo oko sto godina docnije (oko 150 pre n. e.) načinio je takvu tablicu i služeći se njome našao rastojanje Meseca od Zemlje. U doba kada je Aleksandrija postala

sastavni deo Rimskog Carstva, određena su rastojanja od Sunca i Meseca do Zemlje, kao i poluprečnik i obim Zemlje, Meseca i Sunca. Obim Zemljin kako su ga odredili Eratosten (275—194 pre n. e.) i Posejdonije (oko 100 g. pre n. e.) bio je samo oko 80 kilometara veći od stvarnog njenog obima. Hiparh je načinio mapu zvezda prema geografskoj dužini i širini. Marin iz Tira (oko 150 g. n. e.) počeo je da izrađuje mape na kojima su bile povučene linije zemaljskih geografskih dužina i širina. Ako uporedite tri prikaza sveta na slikama 81 i 81a, postaće vam očigledna tesna veza između brzog razvoja astronomije i praktičnih uspeha u pomorstvu i zemljomerstvu u to doba. Prva slika pretstavlja svet kakvog su ga znali Grci. Druga je svet kakvog su ga znali u doba (oko 200 g. pre n. e.) kad je Eratosten merio Zemljin obim. Treća je mapa Ptolomeja (oko 150 g. n. e.) koji je živeo u drugoj fazi aleksandriske kulture. Ptolomejevo delo (ali naravno ne Ptolomeja vojskovođe) je uglavnom kompilacija iz dela Hiparha i njegovih savremenika.

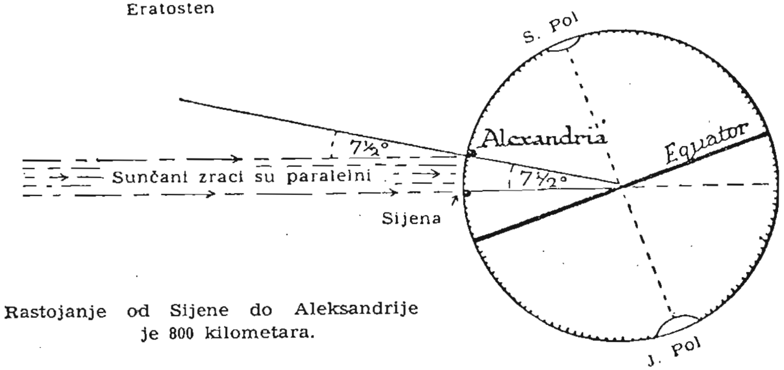
Vratite se na sl. 53, pa se setite kako možemo da izmerimo visinu neke stene kad je zabranjen prilaz njenom podnožju. Odmah ćete videti da je moguće izmeriti rastojanje do nebeskih tela ako možemo astrolabom da izmerimo uglove pod kojima to nebesko telo vidimo na jednoj, pa posle na drugoj tački Zemljine površine, pa posle izmerimo rastojanje između te dve tačke. Istina je i to da čak ne moramo meriti tu dužinu, ako znamo poluprečnik i obim Zemlje i geografsku širinu i dužinu ta dva mesta. Eratostenovo merenje Zemlje povezuje geometriska pravila s geografijom i astronomijom. Nešto veoma neobično kod njegovog dela jeste to što je ono sasvim prosto. Za njega nije potrebna nikakva matematička sprema sem četiri stvari koje se moraju uzeti u obzir: a) svetlosni zraci koji dolaze sa velike daljine izgledaju paralelni, što je u staro vreme bila iz iskustva poznata stvar; b) prava koja seče dve paralelne prave gradi jednake odgovarajuće uglove (prvo pravilo o paralelnima); c) kad se neko nebesko telo nalazi tačno nad našom glavom (»kad je u svome zenitu«), prava koja spaja to nebesko telo s posmatračem prolazi kroz Zemljino središte. (sl. 58); d) na podne se Sunce nalazi iznad neke tačke na meridijanu posmatračeve geografske dužine (sl. 62 i 63). Eratosten je bio bibliotekar aleksandriske biblioteke. Na tome položaju njemu su bili dostupni zapisi o važnim događajima u vezi sa kalendarskim svetkovinama. On je bio obavešten da se na podne jednog dana u godini Sunce ogleda u vodi jednog dubokog bunara blizu Sijene (danas Asuan) kod prvog nilskog vodopada. To se mesto nalazi baš na granici tropskog pojasa. Zato u izvesno doba godine senka potpuno iščezava kad je Sunce na podne u svome zenitu. Odblesak u bunaru javlja se kad je Sunce baš nad glavom, tj. kad je vertikalno prema horizontu. Istoga dana u Aleksandriji, 800 kilometara severno od Sijene, jedan stub na podne baca senku južno od vertikale pod uglom od $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$. Ako su Sunčevi zraci paralelni (sl 82 i 107) to znači da polu-prečnici koji spajaju krajeve (Aleksandrija i Sijena) luka od 800 kilometara sa Zemljinim središtem, zaklapaju ugao od $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ Ugao od $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ nalazi se u 360^0 celoga kružnog obima približno 50 puta. Zato je ceo Zemljin obim 50 puta po 800 kilometara, znači 40 000 kilometara. Poluprečnik Zemljin može se dobiti kad se za π uzme prva njegova približna vrednost koju je dao Arhimed. Videli smo da je kružni obim π puta prečnik. Drugim rečima, poluprečnik (r) se može dobiti kad se obim podeli sa 2π. Ako je $\pi = 3\frac{1}{7}$, a obim (c) iznosi 40 000 kilometara, biće:

$$40\,000 = 2 \times 3\frac{1}{7} \times r, \quad \text{tj.}$$

$$r = \frac{40\,000}{2 \times 3\frac{1}{7}} = \frac{40\,000}{2 \times \frac{22}{7}} = \frac{7 \times 40\,000}{2 \times 22} = \frac{7 \cdot 10\,000}{1 \cdot 11} = \frac{70\,000}{11}$$

To je približno 6 363 kilometra.

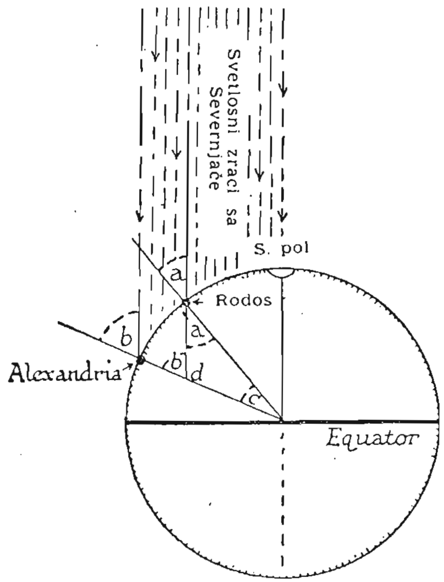
Posejdonije je iskoristio ovu činjenicu: zvezda Kanopa dodiruje horizont na Rodosu u trenutku kad je u Aleksandriji nad horizontom pod uglom od $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$. Princip je uglavnom isti kao i metoda arapskih astronoma koji su odredili Zemljin obim prema visini Severnjače. Rezultat ovog računa razlikovao se samo veoma malo od broja koji je dao Eratosten. Primenjujući geometriju na stvarni svet čovečanstvo je iznalazilo koliki je taj deo Zemlje koji tek ima da se otkrije.



Rastojanje od Sijene do Aleksandrije je 800 kilometara.

Napominjemo da je na ovoj slici ugao između Aleksandrije i Sijene povećan, kao i ugao između Aleksandrije i Rodosa, na donjoj slici, da bi stvar bila jasnija.

Kad se poslužimo Polarnom zvezdom (Severnjačom)



$a + d + c = 180^0$ (dokaz 5)

$a + c = 180^\circ - d = b$

$a + c = b$ ili $c = b - a$

Otuda ugao kod zemljinog središta što ga gradi luk s krajevima u Rodosu i u Aleksandriji (ili u ma koja druga dva mesta jedno toliko milja tačno na sever od drugoga) iznosi koliko i razlika visina Polarne zvezde u ta dva mesta. Ako je D rastojanje pravo na sever, obim zemljin je

$$\frac{D \cdot 360}{c}$$

SL. 82. — MERENJE ZEMLJE (Vidi i sl. 107).

Treba napomenuti da se ne zna tačno da li »stadia« kojima je Eratosten merio rastojanje od Aleksandrije do Sijene odgovaraju po dužini olimpiskim ili misirskim stadiumima. Najverovatnije je da je on mislio na misirske stadiume. Ako je tako, njegov proračun je prebacio tako oko 80 kilometara, kao što smo već rekli. Kad su Kopernik i Kepler izvršili nove pronalaske u vezi kretanja planeta, pojavilo se teoriško interesovanje za Aristarhovo, a to znači i za Pitagorino učenje. Time je malo zanemarena velika praktična vrednost Ptolomejeve astronomije, koja je predavana na mavarskim[1]) univerzitetima u Kordovi, Sevilji i Toledu i kojom su se služili jevrejski astronomi koji su ostali u Portugaliji i u Španiji pošto su Mavri potisnuti iz Evrope. Na njoj su se osnivale astronomske tablice koje su jevrejski učenjaci spremili za upotrebu na brodovima Henriha Moreplovca i Hristifora Kolumba.

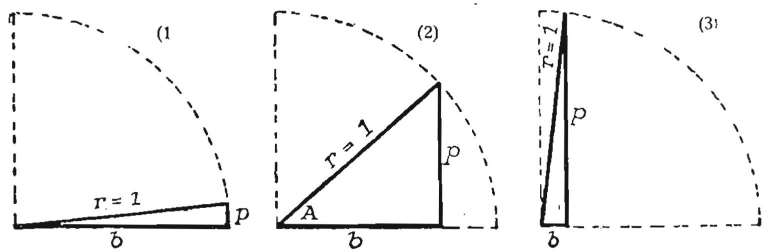
Izračunavanje Zemljinog obima osniva se na jednoj veoma prostoj primeni elementarne geometrije. Taj posao zahteva da smo u stanju da merimo rastojanje između dva mesta na Zemlji. Kad pokušamo da izračunamo rastojanje do Meseca ili do Sunca, imamo da počnemo s trouglom u kome je jedna strana to rastojanje i u kome možemo da izračunamo odnose drugih dveju strana prema tome rastojanju do Meseca ili do Sunca. To možemo uraditi kad se poslužimo dokazima 7 i 8, pod uslovom da možemo da izmerimo dva ugla toga trougla, ili, ako je on pravougli, da možemo meriti jedan ugao toga trougla. Kad su ljudi jednom uvideli da je to moguće, pa legli na posao, postalo je neizbežno da se učini baš onaj korak koji su Grci propustili. Aleksandrinci su počeli da grade tablice odnosa strana u pravouglom trouglu. Oni su tekovine grčke geometrije načinili društvenom svojinom stvorivši nov matematički jezik — trigonometriju. Izlaganje o tome kako da se mere rastojanja do nebeskih tela ostavićemo na stranu dok najpre ne objasnimo kako su sastavljeni prvi trigonometriski rečnici — tablice sinusa, kosinusa itd.

Kako je načinjena prva tablica trigonometriskih funkcija. —
Pogledajte slike 42 i 50, da se potsetite da je

$$sin\ A = cos\ (90^0 - A)\ \text{i}$$
$$cos\ A = sin\ (90^0 - A).$$

[1]) Arapskim. — Red.

Funkcije uglova veoma bliskih 0^0 i 90^0 se izvode bez teškoća iz gornjih pravila. Na sl. 83 nacrtan je pravougli trougao



SL. 83. — ODNOSI KOD MALIH UGLOVA ITD.

Krug je opisan poluprečnikom koji je jedinica dužine. Hipotenuza (r) je u svima slučajevima 1 jedinica ($r = 1$).

$$\sin A = \frac{p}{r} = p \ \text{ i } \ \cos A = \frac{b}{r} = b$$

s uglom A u središtu četvrtkruga čiji je poluprečnik hipotenuza pravouglog trougla i koji iznosi 1 jedinicu dužine. Tada je

$$sin\ A = \frac{p}{r} = \frac{p}{1} = p$$

$$cos\ A = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

Ako smanjujemo ugao sve više i više tako da se praktično može uzeti da je on 0^0, kao na sl. 83 (1), b se sve više bliži veličini r. Zato, kad je $A = 0$ biće $b = 1$. Otuda:

$$cos\ 0^0 = 1.$$

U isto vreme iščezava p, i zato je

$$sin\ 0^0 = 0.$$

Ako pustimo ugao da raste, kao na sl. 83 (3) tako da se praktično može uzeti da je 90^0, p se sve više bliži veličini r. Kad je $A = 90^0$ biće $p = 1$, te je

$$sin\ 90^0 = \frac{1}{1} = 1.$$

Za to vreme b biva sve manji i manji i iščezava kad je već $A = 90^0$. Otuda je:

$$cos\ 90^0 = 0.$$

Mora da vam je čudno da se govori o odnosu strana u pravouglom trouglu kad mu je jedan ugao 0^0, ili kad mu je još jedan ugao 90^0, pošto trougao tada prestaje da postoji kao trougao. To će samo izazvati teškoće, ako vi idealno zamišljate trougle. Ako se setite da ćemo te brojeve upotrebiti za merenja nesavršenim instrumentima u jednom nesavršenom svetu, teškoće nestaju. Nas ne zanima nešto što je apsolutno ništa. Nas zanima samo to da saznamo šta biva kad je ugao toliko mali da ga ne možemo meriti, ili kad se razlikuje od 90^0 za neku tako malu količinu da je ne možemo izmeriti. Da biste se uverili da rezultat nije besmislen, uzmite u obzir činjenicu da je *cos* A veoma blizu jedinice kad je ugao A veoma mali. Pošto je $sin\,(90^0 - A) = cos\,A$, $sin\,(90^0 - A)$ mora biti veoma blizu jedinice, kad je $(90^0 - A)$ veoma blizu pravog ugla, tj. kad je A veoma malo. Obrnuto, ako je *sin* A veoma blizu jedinice, kad je A veoma blizu 90^0, onda *cos* A mora biti veoma blizu jedinice, kad je A veoma malo, pošto je $cos\,A = sin\,(90^0 - A)$. Tangens ugla A je $\frac{p}{b}$. Pošto p postaje sve manje kad se A bliži uglu od 0^0, biće

$$tang\;0^0 = 0.$$

Ako se A približava ka 90^0, p postaje sve veće, a b sve manje. To znači da odnos $\frac{p}{b}$ raste preko svih granica. Znak da jedna količina postaje toliko velika da se više ne može meriti jeste ∞. Zato je[1]:

$$tang\;A \to \infty,$$

[1]) Uzmimo jedan proizvoljan razlomak $\frac{a}{b}$ gde brojilac proizvoljno jednako raste, a imenilac proizvoljno jednako opada.

Za $a=1,\; b=\frac{1}{2}$, imaćemo $\frac{a}{b}=2$

„ $a=10,\; b=\frac{1}{10}$, „ $\frac{a}{b}=100$

„ $a=1000,\; b=\frac{1}{1000000}$, imaćemo $\frac{a}{b}=1\,000\,000\,000$ itd.

Oznaku: $tang\;A \to \infty$ čitamo: Tangens A *teži* beskonačnome, kad $A \to 90^0$ A *teži* ka 90^0.

Jedna količina teži beskonačnome (postaje beskonačno velika) kad neprekidno raste i može da bude veća od ma kako velike unapred date količine. — Prev.

kada

$$A \to 90^0$$

A i ovo se slaže s onim što već znamo. Videli smo da je

$$tang\,A = \frac{sin\,A}{cos\,A}$$

Kad je $A=0$, biće

$$tang\;A = \frac{sin\;0^0}{cos\;0^0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Kad A teži ka 90^0, biće

$$tang\;A = \frac{sin\;A}{cos\;A}.$$

Imenilac cos A teži nuli. To dalje znači ovo:

$$sin\,A : cos\,A = tang\,A$$
$$1 : cos\,A = tang\,A$$
$$cos\,A\;.\;tang\,A = 1.$$

Ta količina *cos A*, pošto teži nuli, može dati jedinicu samo tako, ako je pomnožimo nečim toliko velikim da se ne može meriti. Otuda:

$$tang\,A \to \infty$$
$$A \to 90^0$$

Sad možemo popuniti novim podacima svoju raniju tablicu funkcija:

Ugao (A^0)	*sin A*	*cos A*	*tang A*
90	1	0	$\to\infty$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
0	0	1	0

Mnogo je podesnije da ispišemo ove brojeve u obliku u kome ćemo ih upotrebljavati. Ako pogledate tablicu kvadratnih korena naći ćete da je $\sqrt{2} = 1{,}414$ sa tri decimala tačno, tj. kad radimo s instrumentima koji daju pouzdane rezultate do jednog hiljaditog, ali ne i preko toga. U istom cilju uzećemo mesto $\sqrt{3}$ broj 1,732. Zato je zgodnije da se gornja tablica napiše ovako:

Ugao (A^0)	*sin* A	*cos* A	*tang* A
90	1,000	0,000	$\to \infty$
60	0,866	0,500	1,732
45	0,707	0,707	1,000
30	0,500	0,866	0,577
0	0,000	1,000	0,000

Da bi se ova tablica popunila novim podacima praktična metoda bila bi u tome, da se načine slike u krupnoj razmeri kao kad smo upisivali podeoke na motci za senku (sl. 66). To je bilo na osnovu XI dokaza. Na sl. 84 je

$$sin\ 30^0 = \frac{AB}{AC} \quad \text{i} \quad sin\ 15^0 = \frac{AB}{AD}. \text{ To je dalje:}$$

$$\frac{sin\ 15^0}{sin\ 30^0} = \frac{AC}{AD}.$$

Pošto je $sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$, biće:

$$\frac{sin\ 15^0}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{AD}$$

$$sin\ 15^0 = \frac{\frac{1}{2}AC}{AD}$$

Dok sam prvi put crtao u krevetu[1]) sl. 84, kada nisam ni pokušao da crtež izvedem s velikom tačnošću, AC je bilo 6,3 mm, a AD je bilo 12,2 mm. To je dalje:

$$sin\ 15^0 = 0{,}258.$$

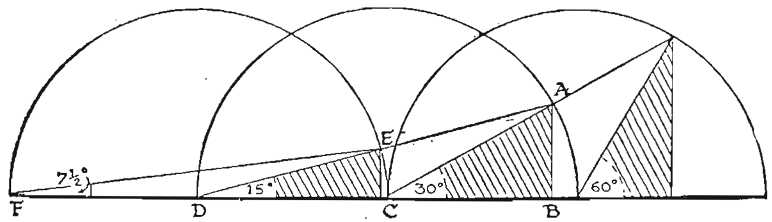
[1]) Pisac je pisao ovu knjigu u bolnici. — Prev.

Slično tome biće:

$$sin\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{0{,}258 \cdot ED}{EF}$$

Na prvobitnoj slici bilo je $ED = 6{,}3$ mm, $EF = 12{,}4$ mm. To daje $sin\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}131$.

Nema boljeg načina da se naviknete na rad sa sinusima, kosinusima i tangensima nego da sami sebi izradite tablicu za sve uglove pokazane na sl. 65 i 66 u IV glavi. Kad budete to uradili, bolje ćete razumeti važnost narednog koraka, te će nam



SL. 84. — METODA ZA IZRADU TABLICE SINUSA POMOĆU DIAGRAMA S PODEOCIMA

biti ušteđen trud, jer nećemo morati onda to da radimo. Kad još bolje proučimo istu sliku doći ćemo do dokaza koji nam omogućuje da izračunavamo trigonometriske funkcije, a da ne moramo crtati dijagram, čim imamo nekoliko uglova od kojih možemo poći. Te smo uglove već uneli u poslednju tablicu. Dokaz koji ćemo sad izvesti osniva se uglavnom na Hiparhovom postupku pri izradi prvih trigonometriskih tablica.

Dokaz iznet na sl. 85 pokazuje nam kako da nađemo sinus ili kosinus polovine nekog ugla kad znamo sinus i kosinus toga ugla. Ovaj dokaz osniva se na XI dokazu. Jedino novo rasecanje jeste u tome, što je trougao POQ rasečen duži OS, upravnom na PQ, na dva pravougla trougla. Ta su dva pravougla trougla podudarna po drugom pravilu o podudarnosti trouglova pošto je

$$SO = SO$$

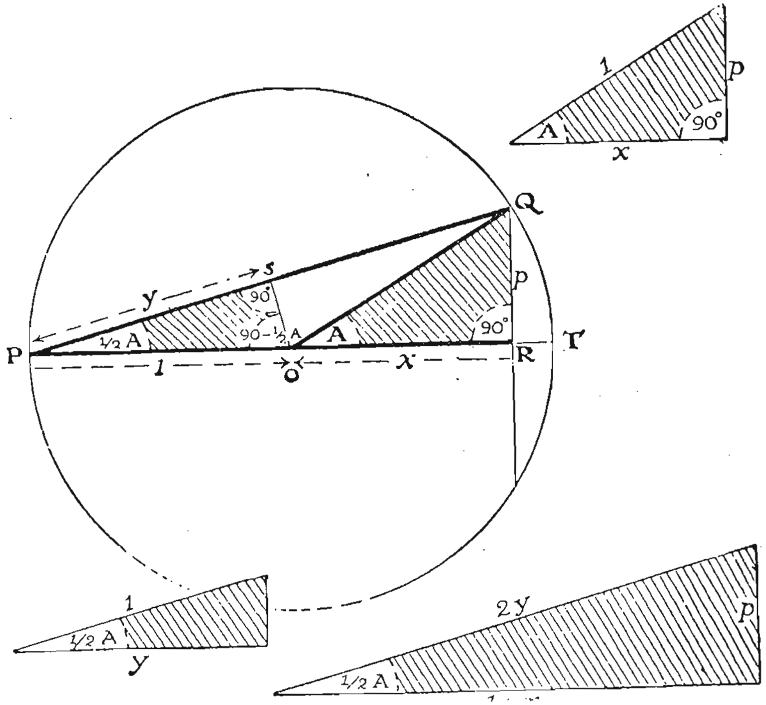
zahvaćen ugao $SOP = 90^0 - \frac{1}{2}A = \sphericalangle SOQ$

$$OP = 1 = OQ$$

Ako je PS dugačko y jedinica, biće $PS = \frac{1}{2} PQ$ i $PQ = 2y$. Pošto je poluprečnik kruga 1, biće $OP = OQ = 1$. Slika pokazuje da je:

$$\cos A = \frac{x}{OQ} = x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{PR}{PQ} = \frac{1+x}{2y} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$



SL. 85. — SINUSI POLUUGLOVA.

Konstrukcija se osniva na XI dokazu. Ona pokazuje da je $\sphericalangle\ QPO$ polovina središnog ugla QOR, tj. $\frac{1}{2}\ A$. Poluprečnik kruga (OP, OQ, OT) je jedinica dužine. Pošto su OP i OQ međusobno jednaki, biće, prema VI dokazu,

$\sphericalangle PQO = \sphericalangle QPO = \frac{1}{2} A$. Prema tome je $\sphericalangle POS = \sphericalangle SOQ = 90^0 - \frac{1}{2} A$.

Ali iz toga trougla POS imamo da je

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{y}{PO} = y \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Kad spojimo (1), (2) i (3), imamo:

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2\ \cos\frac{A}{2}}$$

$$2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \cos A$$

$$\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos A}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (a)$$

Pre nego što idete dalje proverite to. Znate već da je $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ i da je $\cos 30^0 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}$. Iz novog pravila imamo:

$$\cos 30^0 = \cos\frac{60^0}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 60^0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ tj.}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pravilo za sinus poluugla dobija se na isti način. Za $\sin A = p$ imaćemo:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{p}{2y} = \frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Možete proveriti ovo pravilo za sinus poluugla najpre pomoću onoga što već znate, naime, da je sin $60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$sin\ 30^0 = \frac{1}{2} \text{ i } cos\ 30^0 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}.$$

Otuda će biti:

$$sin\ 30^0 = sin\frac{60^0}{2} = \frac{sin\ 60^0}{2\ cos\ 30^0} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Na sličan način možete proveriti oba pravila pomoću rezultata dobivenih na dijagramu sa sl. 84. Ovako:

$$sin\ 15^0 = sin\ \frac{30^0}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2\ cos\ 15^0}$$

$$cos\ 15^0 = cos\frac{30^0}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\ 30^0}{2}} = \sqrt{\frac{1+0,866}{2}} = \sqrt{0,933}$$

tj.

$$cos\ 15^\circ = 0,966.$$

Poslednji stupanj gornjeg računa možete dobiti iz tablica kvadratnih korena. Tako je

$$sin\ 15^0 = \frac{0,5}{2\cdot 0,966} = 0,259.$$

Ovaj se rezultat razlikuje od vrednosti koju smo dobili sa dijagrama za nešto manje od jednog stotog.

Ako ste se sad uverili da su dobra ova pravila o poluuglovima, možete načiniti tablicu sinusa kakvu je načinio Hiparh u Aleksandriji oko 150 g. pre n. e. samo još s tom prednošću, što mi danas imamo tačnije tablice kvadratnih korena i sistem decimalnih razlomaka. Dobili smo cos $15^0 = 0,966$. Onda je sin 75^0 = sin $(90^0 - 15^0)$ = cos $15^0 = 0,966$. Dobili smo i sin $15^0 = 0,259$. Onda je cos 75^0 = cos $(90^0 - 15^0)$ =

= sin $15^0 = 0,259$. Dobićemo odmah i cos $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ kad se, kao ranije, poslužimo tablicom kvadratnih korena:

$$cos\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = cos\frac{15^0}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\ 15^0}{2}} = \sqrt{\frac{1,966}{2}} = \sqrt{0,983} = 0,991.$$

$$sin\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{sin\ 15^0}{2\ cos\left(7\frac{1}{2}\right)^0} = \frac{0,259}{2\times 0,991} = 0,131.$$

To nam daje:

$$cos\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = 0,991 = sin\left(82\frac{1}{2}\right)^0$$

$$sin\left(7\frac{1}{2}\right)^0 = 0,131 = cos\left(82\frac{1}{2}\right)^0$$

Iz $cos\ 75^0 = 0,259$ i $sin\ 75^0 = 0,966$ imamo:

$$cos\left(37\frac{1}{2}\right)^0 = cos\frac{75^0}{2} = \sqrt{\frac{1+cos\ 75^0}{2}} = \sqrt{\frac{1,259}{2}} = \sqrt{0,629} = 0,793$$

$$sin\left(37\frac{1}{2}\right)^0 = sin\frac{75^0}{2} = \frac{sin\ 75^0}{2\ cos\left(37\frac{1}{2}\right)^0} = \frac{0,966}{2\times 0,793} = 0,609$$

To nam daje:

$$cos\left(37\frac{1}{2}\right)^0 = 0,793 = sin\left(52\frac{1}{2}\right)^0$$

$$sin\left(37\frac{1}{2}\right)^0 = 0,609 = cos\left(52\frac{1}{2}\right)^0$$

Iz $cos\ 45^0 = 0,707 = sin\ 45^0$ imamo:

$$cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = cos\frac{45^0}{2} = \sqrt{\frac{1,707}{2}} = \sqrt{0,853} = 0,924$$

$$sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{0,707}{2\times 0,924} = 0,383$$

To nam daje:

$$\cos\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}924 = \sin\left(67\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\sin\left(22\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}383 = \cos\left(67\frac{1}{2}\right)^0$$

Sad možemo složiti u tablicu sve svoje rezultate, pošto četvrti stubac za tangense izračunamo po obrascu

$$tang\ A = \frac{\sin A}{\cos A}:$$

Tablica trigonometriskih funkcija u razmacima od $7\frac{1^0}{2}$

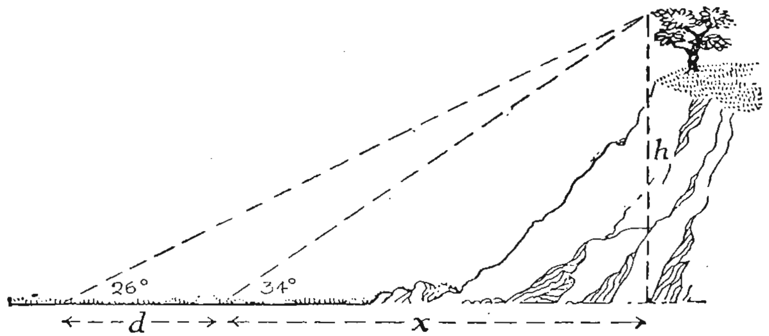
Ugao (A^0)	*sin A*	*cos A*	*tang A*
90	1,000	0,000	$\rightarrow \infty$
$82\frac{1}{2}$	0,991	0,131	7,60
75	0,966	0,259	3,73
$67\frac{1}{2}$	0,924	0,383	2,41
60	0,866	0,500	1,73
$52\frac{1}{2}$	0,793	0,609	1,30
45	0,707	0,707	1,00
$37\frac{1}{2}$	0,609	0,793	0,77
30	0,500	0,866	0,58
$22\frac{1}{2}$	0,383	0,924	0,41
15	0,259	0,966	0,27
$7\frac{1}{2}$	0,131	0,991	0,13
0	0,000	1,000	0,00

Razume se, vi možete nastaviti sa još užim razmacima:

$$\frac{\left(7\frac{1}{2}\right)^0}{2} = \left(3\frac{3}{4}\right)^0; \quad \frac{\left(3\frac{3}{4}\right)^0}{2} = \left(1\frac{7}{8}\right)^0; \quad \frac{\left(1\frac{7}{8}\right)^0}{2} = \left(\frac{\frac{15}{8}}{2}\right)^0 = \left(\frac{15}{16}\right)^0 \quad \text{itd.}$$

Hiparh, koji je, koliko nam je poznato, objavio prve tablice sinusa, nije išao dalje nego što smo mi došli. Ako ste zbilja proverili sve ove račune dosad, uhvatili ste kako se može načiniti tablica trigonometriskih funkcija i nije verovatno da ćete to brzo zaboraviti.

Hajde sad da zastanemo da vidimo šta smo ovim dobili. Da počnemo ovako: omogućili smo naučnu izradu karata i premeravanja Zemlje u tolikoj meri da to dozvoljava dalekosežne geografske radove. Metoda koju smo upotrebili da izmerimo visinu stene na sl. 53 pretpostavlja: prvo, da možemo prići steni dovoljno blizu, da bismo izabrali uglove koje želimo (od 30^0 i od 60^0) i drugo, da imamo dovoljno vremena da se šetamo tamo-amo tražeći tačno mesto odakle se vrh stene vidi pod uglom od 30^0 ili od 60^0. Prvo se često puta ne može izvesti, a drugo je nepotreban trud. Sa tablicama sa dovoljno malim razmacima sve što imate da uradite jeste to, da izmerite s nekog mesta ugao pod kojim vidite izvestan udaljen predmet, zatim da se otšetate od tog mesta u pravoj liniji za p r o i z v o l j n u dužinu koju ćete izmeriti, da stanete i da odatle opet izmerite ugao pod kojim vidite taj predmet. Na sl. 86 merena dužina je



Sl. 86.

d, a uglovi su 34^0 i 26^0. Da bismo nacrtali kartu, možemo odatle dobiti što hoćemo, naime, visinu stene i horizontalno rastojanje od mesta gde stojimo do podnožja vertikale spuštene s vrha te stene. Označimo sa h visinu stene i sa x horizontalno rastojanje do mesta bližeg steni; pogledamo u tablice i nađemo:

t a n g 34^0 = 0,674 t a n g 26^0 = 0,488.

Uzećemo da je mereno rastojanje od $d = 64$ m. Odmah ćete videti da je

$$\frac{h}{x} = tang\ 34^0 \text{ ili odatle } x = \frac{h}{0{,}674} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Isto tako:

$$\frac{h}{x+64} = tang\ 26^0 \text{ ili odatle } h = 0{,}488\ (x+64) \ldots. \quad (2)$$

Kad vrednost (1) unesemo u (2), dobijamo:

$$h = 0{,}488\left(\frac{h}{0{,}674} + 64\right) = \frac{0{,}488}{0{,}674}h + 64 \times 0{,}488.$$

To je dalje:

$$h - \frac{0{,}488}{0{,}674}h = 64 \times 0{,}488$$

$$h\left(1 - \frac{0{,}488}{0{,}674}\right) = 64 \cdot 0{,}488$$

$$h\left(1 - \frac{244}{337}\right) = 31{,}232$$

$$h \cdot \frac{93}{337} = 31{,}232$$

$$h \cdot 0{,}276 = 31{,}232$$

$$h = \frac{31{,}232}{0{,}276}$$

$$h = \frac{31232}{276} = 113{,}16 \text{ metara.}$$

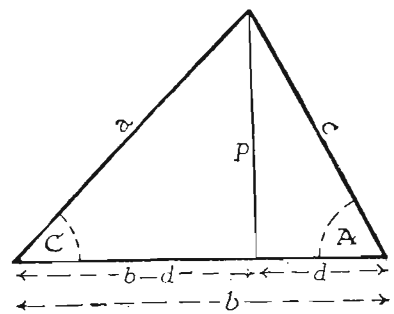
Kad već imamo h, možemo odmah dobiti x iz (1):

$$x = \frac{113{,}16}{0{,}674} = 167{,}9 \text{ metara.}$$

Probajte opet sa vrednostima sa četiri decimala za tang 34^0 i tang 26^0. Dobićete bolje vrednosti $h = 112{,}76$ metara i $x = 167{,}2$ metara. To vam pokazuje do koje se mere može verovati vašim prethodnim rezultatima.

REŠAVANJE TROUGLOVA

Poslednji primer nam pokazuje kako da izračunamo stranu u trouglu kad mu znamo drugu stranu i dva ugla. Možemo izvesti proste obrasce pomoću kojih možemo, ne crtajući sliku toga trougla, izračunati uglove ili strane, ako o tome trouglu znamo dovoljno podataka da ga iz njih možemo nacrtati. To znači, ako znamo *(a)* dužine svih triju strana, ili *(b)* dužine dveju strana i njima zahvaćeni ugao i *(c)* dužinu jedne strane i dva nalegla ugla. Rasecanja su pokazana na sl. 87.



Sl. 87

$$\sin A = \frac{p}{c} \text{ tj. } p = c \sin A$$

$$\sin C = \frac{p}{a} \text{ tj. } p = a \sin C$$

$$\cos A = \frac{d}{c} \text{ tj. } d = c \cos A$$

Ako znamo tri strane a, b i c jednog trougla (sl. 87), vidimo (dokaz 8) da je:

$$p^2 = c^2 - d^2$$

$$p^2 = a^2 - (b-d)^2, \text{ tj.}$$

$$c^2 - d^2 = a^2 - b^2 + 2bd - d^2, \text{ tj.}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bd$$

Pošto je $\cos A = \frac{d}{c}$, tj. $d = c \cdot \cos A$, biće dalje:

$$c^2 = a^2 - b^2 + 2bc \cos A \text{ ili:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Na isti način možemo pokazati da je

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ako dakle znamo a, b i c, možemo dobiti $\cos A$, $\cos B$ i $\cos C$. Tablica kosinusa kazaće nam koliki su uglovi A, B i C.

Ako znamo dužine dveju strana a i b i njima zahvaćeni ugao C, možemo naći dužinu treće strane c kad potražimo $\cos C$ u tablicama kosinusa, pošto je:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Da bismo našli i ostale uglove, možemo se poslužiti istim obrascem, a možemo upotrebiti i jedan prostiji. Na sl. 87 vidimo da je:

$$\sin A = \frac{p}{c}$$

$$p = c \sin A$$

$$\sin C = \frac{p}{a}$$

$p = a \sin C$. Otuda je

$c \sin A = a \sin C$, tj.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

tj.

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

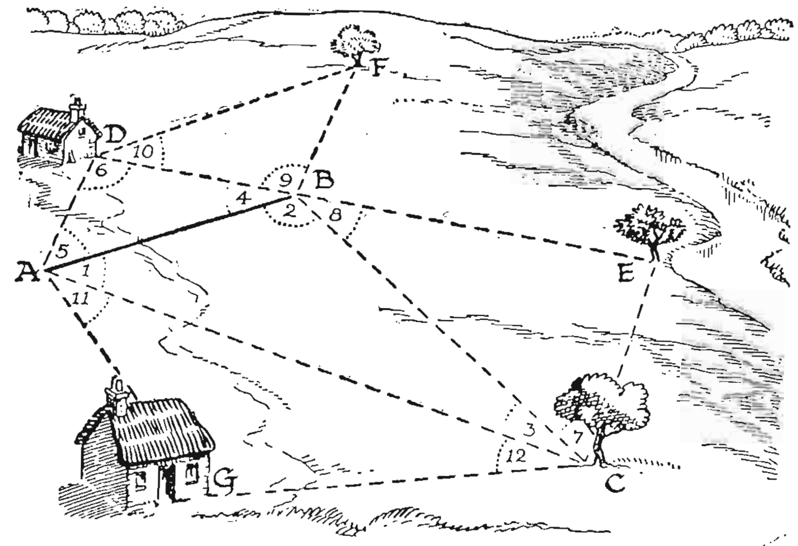
Tako možemo naći ugao A, a odatle B, pošto je $B = 180^0 - (A + C)$.

Slično tome, ako znamo dva ugla (A i C) i stranu a, možemo dobiti stranu c, pošto je

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Pošto je $B = 180^0 - (A + C)$, možemo sad dobiti stranu b, jer je

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

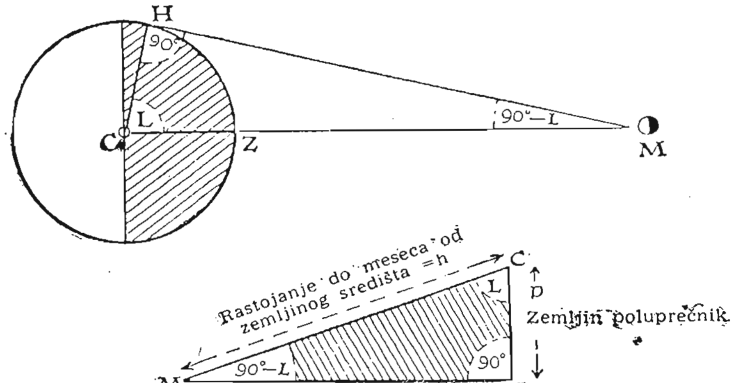


Sl. 87 A

Pri premeravanju nekog zemljišta zemljomer najpre izmeri tačno jedno određeno rastojanje AB svojim lancem ili čeličnom pantljikom. To je jedino potrebno merenje dužine. Sa kraja A izmerene dužine AB on vizira teodolitom na tačku B, pa onda na neki jasno vidljivi predmet kao što je drvo u C. Tako odredi ugao (1). Zatim se premesti u tačku B, pa iz nje vizira na A i C i tako odredi ugao (2). Sad su u trouglu ABC poznati: jedna strana(AB) i dva ugla na njoj. Tako sad može on da izračuna strane AC i BC pomoću sinusnog obrasca i tablica sinusa. Taj se posao može nastaviti, da se izračunaju strane trouglova BEC i ACG. Da to izvede, on iz B vizira na tačke C i E (ono drvo) i tako odredi ugao (8). Zatim tako određuje ugao (7). Tako sad zna dva ugla trougla BCE i već izračunatu dužinu BC. Slično tome od vizira na G iz A i C. Isto tako vizira na tačku D (seljačka kućica) iz A i B kao i na drvo u F. Tako može da izradi plan celoga toga kraja.

RASTOJANJE DO MESECA

Hiparh je izračunao da je rastojanje do Meseca približno 400 000 kilometara[1]). Njegov je račun netačan za manje od pet procenata. Metoda je uglavnom slična s metodom određivanja visine neke stene kad se mere njeni uglovi sa dva razna mesta čije je rastojanje poznato. U praksi je to malo teže. Za taj su posao potrebna poslednja dva obrasca, koje smo doneli, da vam posluže ako biste se slučajno zainteresovali za pojedinosti i obratili se na knjige iz astronomije. Vi ćete moći da shvatite princip na kome se osniva ovo merenje ako zamislite kako se sve to može izvesti raznim sredstvima kojima raspolaže moderna radio-tehnika. Uzećemo da jedna zvezdara *Z* vidi Mesec tačno u svom zenitu, tj. vertikalno nad glavom tačno u istome trenutku kad druga zvezdara *H*, na istoj geografskoj širini, ali za *L* stepeni odmaknuta prema zapadnoj dužini, vidi Mesec gde izlazi na horizontu. (Zvezdara *H* može biti



Sl. 88.

i istočno za *L* stepeni, ali će u tome trenutku videti Mesec gde zalazi). Na sl. 88 videćete da se radi o pravouglom trouglu i da je

$$\sin\,(90^{\circ} - L) = \frac{\text{Zemljin poluprečnik}}{\text{rastojanje do Meseca}}$$

[1]) Kad je Mesec najbliži Zemlji daleko je od nje približno 360 000 kilometara. Taj njegov položaj zove se perigeum. Kad je Mesec najdalje od Zemlje daleko je od nje približno 410 000 kilometara. Taj njegov položaj zove se apogeum. — Prev.

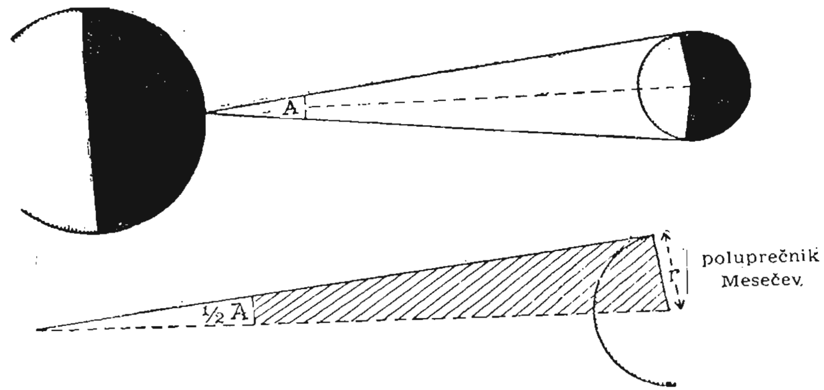
$$\cos L = \frac{\text{Zemljin poluprečnik}}{\text{rastojanje do Meseca}}$$

Pretpostavimo da je *L* u ovom slučaju $\left(89\frac{1}{16}\right)^{0}$. Kad pogledamo u tablice sa skalom u kojoj su razmaci od $\left(\frac{15}{16}\right)^{0}$, naći ćemo da je $\cos\left(89\frac{1}{16}\right)^{0} = 0{,}0163$. Sada možemo staviti:

$$0{,}0163 = \frac{6400}{\text{rastojanje do Meseca}} \text{ u kilometrima.}$$

$$\text{Rastojanje do Meseca} = \frac{6400}{0{,}0163} = 392\,000 \text{ kilometara (približno).}$$

Kad već imamo rastojanje do Meseca, lako je dobiti Mesečev poluprečnik i obim. Kako se to radi pokazano je na sl. 89.



Sl. 89.

Sve što imate da uradite to je, da izmerite ugao između naspramnih tačaka na obimu punog Meseca. Ako taj ugao označimo sa **A**, imaćemo:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\text{Mesečev poluprečnik}}{\text{rastojanje do Meseca}}$$

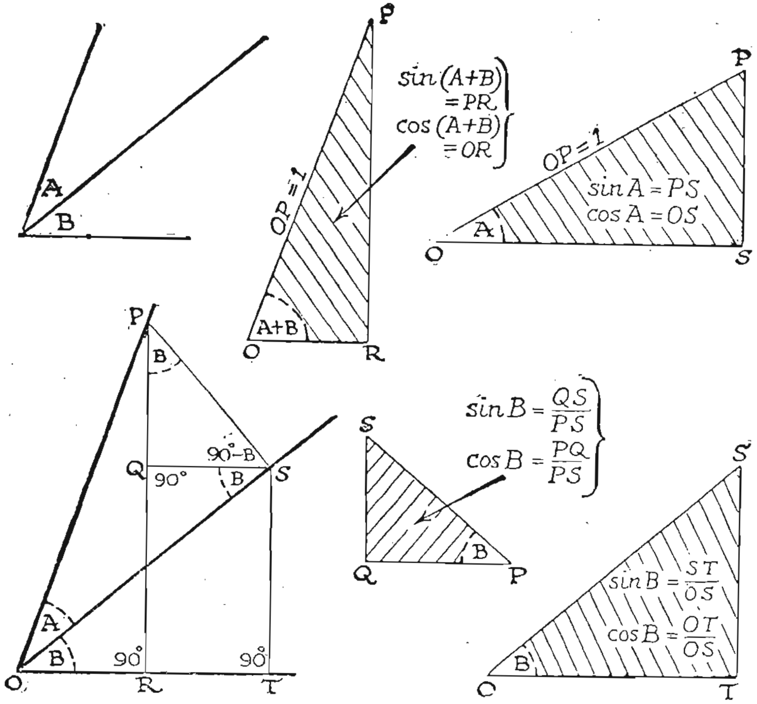
Ako nađemo da ugao *A* iznosi pola stepena, imaćemo $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{0}$ i $\frac{1}{2}A = \left(\frac{1}{4}\right)^{0}$. U tablicama nalazimo da je $\sin\left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \sin 15' = 0{,}0044$, tj.

$$0{,}0044 = \frac{\text{Mesečev poluprečnik}}{392\,000}$$

To daje 0,0044 × 392 000 kilometara, ili, približno, 1725 kilometara za Mesečev poluprečnik. Najtačnija merenja daju 1736,6 kilometara. Sad možemo ispuniti ranije dato obećanje i naći π na nebu. Obim Mesečev biće 2π puta veći od poluprečnika, tj.

$$2 \cdot 3\frac{1}{7} \cdot 1725 = 10840 \text{ kilometara (približno).}$$

Tako je Mesečev obim samo oko četiri i po puta veći od rastojanja od Londona do Moskve.



Sl. 90.

Ugao *POT* između pravih *PO* i *OT* jednak je sa zbirom uglova *A* i *B*. Rasecanje ide ovako:

(*a*) Iz P spustite upravnu (PS) na srednju pravu OS.
(*b*) Iz P spustite upravnu (PR) na OT.
(*c*) Iz S spustite upravnu (SQ) na PR.
(*d*) Iz S spustite upravnu (ST) na OT.

Docnije ćemo imati da kažemo o merenjima koja su vršili Aleksandrinci s grubljim instrumentima nego što su naši i sa manje mogućnosti nego što su naše da posmatranja vršimo na raznim mestima daleko udaljenim jedno od drugoga s tačno izmerenim rastojanjima. Na ovome mestu u ovom našem izlaganju vi ste već zapazili da su za astronomske račune potrebne tablice sa veoma malim razmacima da bi rezultati bili tačni. Pronađeni su razni obrasci da zadovolje ovu potrebu. Obrasci za poluuglove su samo posebni slučajevi dva opštija pravila. Izvođenje tih pravila dato je na sl. 90. To su dva pravila:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

Važno je znati ova dva obrasca, pošto će oni biti upotrebljeni docnije, kada budemo rasmatrali kako je geometrija u doba reformacije otkrivala novu primenu za uglovne odnose (funkcije). Izvođenje ovih obrazaca je teško upamtiti, pošto oni ne potsećaju ni na jedan raniji slučaj, ali ga je lako pratiti. Da bismo uprostili posao, mi smo uzeli da je jedna dužina (*OP*) dugačka 1 jedinicu. Kad gledate na sliku 90 vidite da je:

$$\sin(A+B) = PR = PQ + QR = PQ + ST = PS \cos B +$$
$$+ OS \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = OR = OT - QS = OS \cos B -$$
$$- PS \sin B = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Proverite ove rezultate za svoj račun. Na primer ovako:

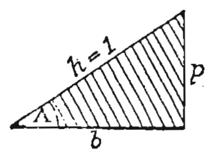
$$\sin 75^0 = \sin(30^0 + 45^0) =$$
$$= \sin 30^0 \cos 45^0 + \cos 30^0 \sin 45^0$$
$$0{,}500 \cdot 0{,}707 + 0{,}866 \cdot 0{,}707 =$$
$$= 0{,}707\,(0{,}500 + 0{,}866) = 0{,}966$$[1]

[1] Druga jedna veza između uglovnih odnosa ponekad je korisna i biće primenjena u IX glavi. Ona nam omogućuje da neposredno nađemo kosinus nekog ugla kad znamo njegov sinus i o b r n u t o. U pravo-

Nalaženje jedne vrednosti za π. — Kad smo tražili poluprečnik Zemlje i Meseca uzimali smo za π vrednost $3\frac{1}{7}$. U stvari jedina vrednost za π za koju smo dosad pokazali kako se dobija, bila je u blizini vrednosti $3\frac{1}{4}$. U Starome Zavetu, u drugoj knjizi Dnevnika, glava četvrta, stih 2, stoji: »I sali more, deset lakata bješe mu od jednoga kraja do drugoga, okruglo unaokolo, pet lakata visoko, a unaokolo mu bješe trideset lakata«. Prema tome je obim bio šest puta veći od poluprečnika, ili tri puta veći od prečnika. To će reći da su se stari Jevreji, kao i Vavilonci, zadovoljili brojem 3 kao vrednošću za π. Sumnje nema, taj broj je dovoljan da se načini točak na volovskim kolima, da teturaju po bibliskom putu. Kad su Aleksandrinci, kao Arhimed i Heron, počeli crtati mašine s točkovima, bila im je potrebna tačnija vrednost.

Kad već imamo tablice za sinuse i tangense, lako je dobiti vrednost za π onoliko tačno koliko nam je potrebno. Metoda kojom se poslužio Arhimed lepo pokazuje da je on imao neke takve tablice pre Hiparhovih. Istorija nauke nikad ne potvrđuje ono rasprostranjeno verovanje da pronalaske stvaraju samo osamljeni geniji. Njih redovno stvara u isto vreme veći broj ljudi. Ovo je nešto sasvim obično u istoriji nauke, ma da istoričari retko daju prosto objašnjenje za to. Pronalasci se ponav-

uglom trouglu uzmimo za jedinicu hipotenuzu ($h = 1$). Tada je $\sin A = p$, $\cos A = b$. Iz 8. dokaza imamo:



$1^2 = p^2 + b^2$, tj.

$1 = \sin^2 A + \cos^2 A$.

Po udžbenicima se kvadrati sinusa i kosinusa pišu ovako: $(\sin A)^2 = \sin^2 A$ i $(\cos A)^2 = \cos^2 A$

Zato gornji izraz treba pisati ovako: $1 = \sin^2 A + \cos^2 A$.

Ovo možemo isprobati za $\sin 30° = \frac{1}{2}$. Imaćemo:

$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30°$. Odatle je

$\cos^2 30° = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. To daje

$\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. — Pisac.

ljaju zato što se umni rad kreće pravcima koje postavlja društvena kultura koju zatiču pojedinačni pronalazači.

Iz XII dokaza naučili smo da je odnos kružnog obima prema prečniku isti za sve krugove. Naučili smo i da dužina kružnog obima leži između *a)* obima poligona od n jednakih strana opisanog oko kruga (samo dodiruje krug svojim stranama) i *b)* obima poligona od n jednakih strana upisanog u krugu (dodiruje krug samo svojim temenima). Ako je c obim kruga, a d prečnik, imamo:

$$c = d\pi.$$

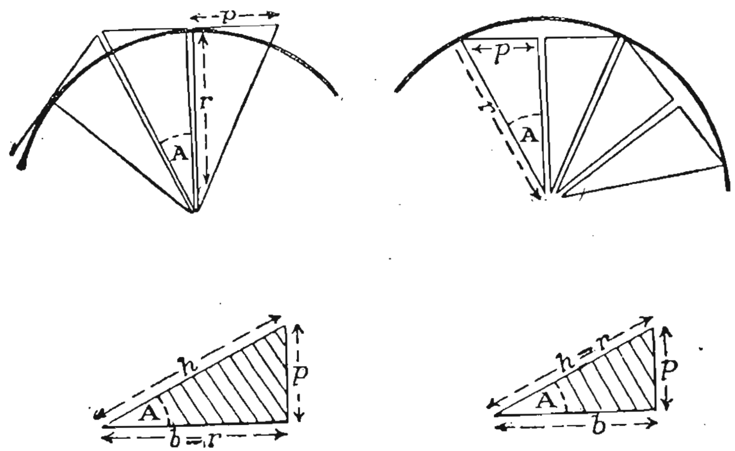
Ako prečnik iznosi 1 jedinicu $\left(\text{tj. poluprečnik je } \frac{1}{2}\right)$, obim $c = \pi$. Ako osvežite znanje ponovnim zagledanjem slika što objašnjavaju XII dokaz u IV glavi, nećete imati teškoća na sl. 91. Nalevo je delimično nacrtan poligon od n jednakih strana

SL. 91. — KAKO JE ARHIMED NAŠAO JEDNU VREDNOST ZA π

Ugao $A = \frac{360°}{2n}$

kad poligon ima n jednakih strana.

Veći ili opisani poligon. Manji ili upisani poligon.



$\frac{p}{r} = \text{tang } A$ $\frac{p}{r} = \sin A$

Ako je $r = \frac{1}{2}$, biće $p = \frac{1}{2}$ tang $\frac{360°}{2n}$ Ako je $r = \frac{1}{2}$, biće $p = \frac{1}{2}$ sin $\frac{360°}{2n}$

opisan oko kruga čiji je prečnik 1 jedinica $\left(r=\frac{1}{2}\right)$. Poligon je načinjen od $2n$ podudarnih pravouglih trouglova. U njima je p naspramna strana središnog ugla $A\left(\frac{360^0}{2n}\right)$ i pretstavlja sastavni deo obima opisanog poligona. Tako je obim opisanog poligona (O_0) $2n$ puta veći od p. Na slici vidite da je

$$p=\frac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{360^0}{2n}$$

O_0 (obim opisanog poligona) je $2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{tang}\ \frac{360^0}{2n}=n\ \text{tang}\frac{360^0}{2n}$.

Na primer, ako je poligon šestougaonik, biće:

$$0_0=6\ \text{tang}\ \frac{360^0}{12}=6\ \text{tang}\ 30^0=6\cdot 0{,}58=3{,}48.$$

Slično tome videćemo desno na sl. 91, da se obim upisanog poligona sa n jednakih strana može naći pomoću ove jednačine:

$$O_u=n\cdot\sin\ \frac{360^0}{2n}.$$

Na primer, ako je poligon šestougaonik,

$$O_u=6\cdot\sin\ \frac{360^0}{12}=6\ \sin\ 30^0=6\cdot 0{,}50=3.$$

Zato π leži između 3 i 3,48. Ako uzmemo aritmetičku sredinu, možemo to napisati ovako: $3{,}24\pm 0{,}24$.

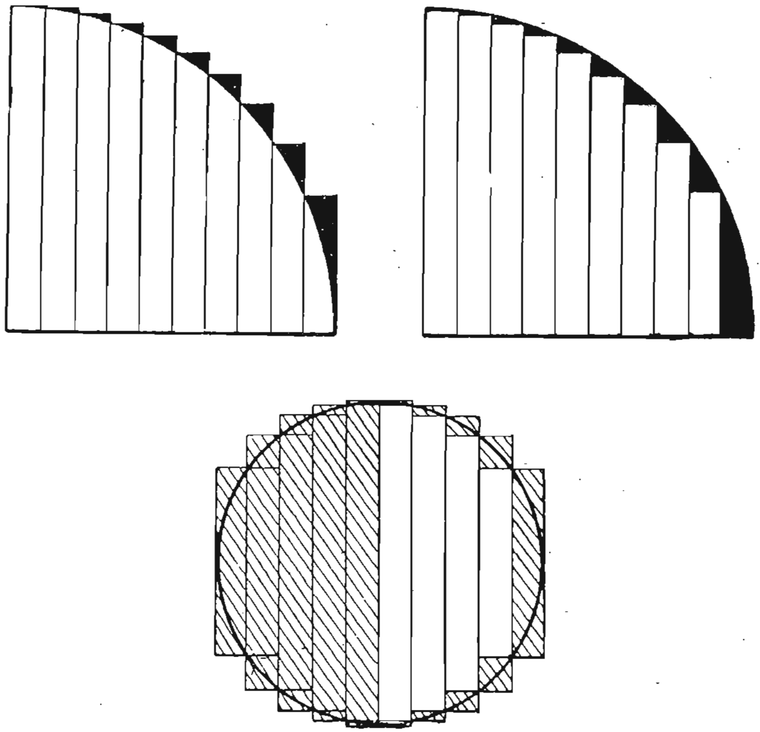
Naučili smo u dokazu 12 da mi ovaj razmak uz plus i minus možemo da smanjimo koliko hoćemo ako uzmemo da je broj poligonovih strana *(n)* dovoljno veliki. Sa tablicama za sinuse i kosinuse to se postiže brzo. Možete za praktičnu upotrebu izvesti ovo:

Broj strana (n)	O_u $n\cdot\sin\frac{360^0}{2n}$	O_0 $n\cdot\text{tang}\frac{360^0}{2n}$	Srednja vrednost za π	Greška u procentima
3	2,598	5,196	3,90	24
4	2,828	4,000	3,41	8,5
6	3,000	3,464	3,23	2,8
8	3,062	3,314	3,19	1,5
12	3,106	3,215	3,16	0,6
18	3,125	3,173	3,150	0,3
36	3,139	3,150	3,144	0,07

Arhimed se zadovoljio time što je uzeo za π vrednost između $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{10}{71}$. Ahmesov papirus pokazuje da su oko 1 500 g. pre n.e. Misirci upotrebljavali $\sqrt{10}$ ili 3,16. Ovoliko tačnu vrednost za π možete dobiti ogledom i sami, ako merite obim i prečnik kutija od konzervi, tanjira i tiganja po kući pomoću santimetarske pantljike. Ista je vrednost bila u modi kod kineskih tvoraca kalendara i tehničara. Oko 480 g. n. e. nailazimo na jednog tehničara za navodnjavanje, Tsu Čang Čia, koji je konstruisao kao nekakvi »motorni čamac«, i ponovo zaveo kompas (instrument »koji pokazuje jug«). On je dospeo do tačnosti neverovatne za ono vreme. U našim oznakama njegova vrednost za π bila je između 3,1415926 i 3,1415927. Ne znamo kako je došao do toga. Nije lako poverovati da je on do toga došao crtanjem dijagrama u krupnoj razmeri. Objašnjenje može nam dati možda činjenica da su Japanci upotrebljavali metodu sličnu onoj koja se upotrebljavala u Evropi oko 1700 g. n. e. Ona se osniva na Kineskoj teoremi o pravouglom trouglu (takozvana Pitagorina teorema). Ona je dakle mogla da bude izvedena postupkom za koji su Kinezi već znali u doba nešto docnije od Arhimedova doba. To je naročito zanimljivo, što će se pokazati docnije. Japanska se metoda sastoji u tome, da se krug razdeli na sićušne pravougaonike. Ona se osniva na činjenici da je površina kruga πr^2 ako je r poluprečnik; kad poluprečnik ima 1 jedinicu dužine, površina kruga ima π jedinica površine.

Čovek je u iskušenju da se upita da nisu Japance na taj metod naveli crteži s pločica, kao što je onaj u II glavi, uzet iz jednog veoma starog kineskog dela. Ako nacrtate krug na providnoj hartiji, videćete da površina kruga leži između dve grupe duguljastih pravougaonika stavljenih jednih preko drugih (beli i osenčeni na sl. 92 dole). Na svakom polukrugu biće za jedan više spoljnih, dužih pravougaonika, nego što ima unutrašnjih, kraćih, kako je to nacrtano na dva četvrtkruga gore na sl. 92. Četvrtkrug na sl. 93 obuhvaćen je sa pet pravougaonika iste širine, a sam obuhvata četiri pravougaonika iste širine jedan uz drugog. Iz samoga načina kako su pravougaonici nacrtani videćete zašto iščezava peti unutarnji pravougaonik. Ako poluprečnik kruga iznosi 1 jedinicu dužine, širina svakog pravougaonika $\frac{1}{5}$. Površina svih pravougaonika iz spoljnjeg niza je:

$$\frac{1}{5}y_0+\frac{1}{5}y_1+\frac{1}{5}y_2+\frac{1}{5}y_3+\frac{1}{5}y_4=\frac{1}{5}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4)$$



SL. 92. — JAPANSKA METODA ZA DOBIJANJE VREDNOSTI ZA π

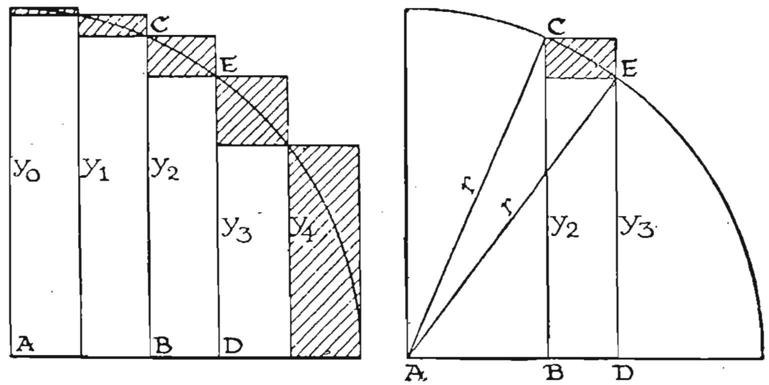
U celome krugu odgovarajući pravougaonici iznosiće četiri puta toliko[1]), tj.:

$$P_o{}^{1}) = \frac{4}{5}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4)$$

[1]) Uzimamo ove znake: P_o = površina svih opisanih (spoljnih) pravougaonika; P_u = površina svih *upisanih* (unutrašnjih) pravougaonika. — Prev.

Slično tome površinu svih unutrašnjih pravougaonika u celome krugu možemo napisati:

$$P_u = \frac{1}{5}(y_1+y_2+y_3+y_4)$$



Sl. 93.

Vrednosti za y_1, y_2 itd. mogu se dobiti primenom dokaza 8, tj. primenom kineske teoreme o pravouglom trouglu. U trouglu *ABC* je:

$$r^2 = y_2^2 + (AB)^2$$

Pošto poluprečnik r iznosi 1, a AB pretstavlja dva koraka po $\frac{1}{5}$, možemo napisati:

$$1 = y_2^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = y_2^2, \text{ tj.}$$

$$y_2 = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{5^2-2^2}{5^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2-2^2}$$

Slično tome, iz trougla AED imamo:

$$1^2 = y_3^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2, \text{ tj.}$$

$$y_3 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2}$$

Isto tako

$$y_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2}$$

$$y_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2} \quad \text{i}$$

$$y_0 = \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 0^2} = \frac{1}{5}\sqrt{5^2} = \frac{1}{5}\cdot 5 = \frac{5}{5} = 1$$

Tako možemo sad da pišemo:

$$P_0 = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 1^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 2^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 3^2} + \frac{1}{5}\sqrt{5^2 - 4^2}\right) =$$

$$= \frac{4}{5^2}\left(5 + \sqrt{5^2 - 1^2} + \sqrt{5^2 - 2^2} + \sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{5^2 - 4^2}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Slično tome:

$$P_u = \frac{4}{5^2}\left(\sqrt{5^2 - 1^2} + \sqrt{5^2 - 2^2} + \sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{5^2 - 4^2}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

To nam daje

$$P_0 = \frac{4}{25}(5 + \sqrt{24} + \sqrt{21} + 4 + 3) = 3{,}44$$

i

$$P_u = \frac{4}{25}(\sqrt{24} + \sqrt{21} + 4 + 3) = 2{,}64$$

Površina kruga čiji je poluprečnik jedna jedinica dužine nalazi se između P_0 i P_u a π je površina kruga čiji je poluprečnik dugačak 1 jedinicu dužine. Prema tome π se nalazi između 3,44 i 2,64. Kao prvu približnu vrednost imaćemo: $\pi = 3{,}04 \pm 0{,}40$.

Možete sad za sebe izraditi sličnu sliku gde je poluprečnik deljen na 10 jednakih delova tako da ima 10 spoljnih i 9 unutrašnjih pravougaonika. Onda ćete moći dobiti:

$$P_0 = \frac{4}{10^2}(10 + \sqrt{10^2 - 1^2} + \sqrt{10^2 - 2^2} + \sqrt{10^2 - 3^2} + \sqrt{10^2 - 4^2} +$$

$$+ \sqrt{10^2 - 5^2} + \sqrt{10^2 - 6^2} + \sqrt{10^2 - 7^2} + \sqrt{10^2 - 8^2} + \sqrt{10^2 - 9^2})$$

$$P_u = \frac{4}{10^2}(\sqrt{10^2 - 1^2} + \sqrt{10^2 - 2^2} + \sqrt{10^2 - 3^2} + \sqrt{10^2 - 4^2} +$$

$$+ \sqrt{10^2 - 5^2} + \sqrt{10^2 - 6^2} + \sqrt{10^2 - 7^2} + \sqrt{10^2 - 8^2} + \sqrt{10^2 - 9^2})$$

Ako označimo sa π_n vrednost za π kad je poluprečnik podeljen na n jednakih delova i poslužimo se tablicama kvadratnih korena, možemo izraditi ovakvu tablicu:

$$\pi_5 = 3{,}04 \pm 0{,}40$$
$$\pi_{10} = 3{,}10 \pm 0{,}20$$
$$\pi_{15} = 3{,}12 \pm 0{,}14$$
$$\pi_{20} = 3{,}13 \pm 0{,}10$$

Ako to izradite, i sami ćete pronaći da nije potrebno svaki put crtati novu sliku. Pravilo za dobijanje vrednosti za π može se izraziti u obliku dva niza, pošto je zbir spoljnih pravougaonika:

$$\frac{1}{n^2}(n + \sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \sqrt{n^2 - 3^2} + \sqrt{n^2 - 4^2} + \ldots\ldots)$$

Zbir unutrašnjih pravougaonika biće isti samo što je u njemu iz zagrade izbačen prvi član. Poslednje pravilo za spoljne pravougaonike može da se napiše i ovako:

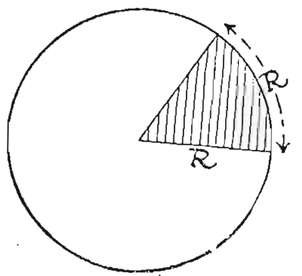
$$\frac{4}{n^2}\cdot\sum_{r=0}^{r=n}\sqrt{n^2 - r^2}$$

Glagol (ili »operator«) Σ sa svoja dva priloga $r = n$ gore i $r = o$ dole znači »Saberite sve količine kao što su . . . načinjene na taj način što su broju r davane vrednosti svih celih brojeva od o do n«. Razume se, kad je $r = o$ imamo $\sqrt{n^2 - r^2} = n$; kad je

$r = n$ imamo $\sqrt{n^2 - r^2} = o$. Odgovarajuće pravilo za unutarnje pravougaonike bilo bi:

$$\frac{4}{n^2} \cdot \sum_{r=1}^{r=n} \sqrt{n^2 - r^2}$$

Ako se sećate ranijeg raspravljanja o upotrebi redova (nizova), (glava V), upitaćete da li je moguće dobiti ovaj red u takvom obliku, da ga, kad je n veoma veliko, možete prekinuti po potrebi na svakom mestu, kao što možete zanemariti od izvesnog decimala dalje sve članove u progresiji koja pretstavlja periodičan razlomak. Japanci su zbilja uspeli da to urade, sasvim nezavisno od uticaja sa Zapada, krajem sedamnaestog veka. Matsunaga je izračunao jednu vrednost za π, koja je, u našim oznakama, decimalni broj sa pedeset decimala. Zasad ćemo ostaviti rešenje toga problema sve dok ne uzmognemo da mu priđemo u njegovom istoriskom razvoju; to ćemo učiniti kad se u jednoj docnijoj glavi vratimo na izlaganje o redovima. Ovo što smo dosad uradili dovoljno je da pokaže da se može naći red za π koji se može protezati do onolike tačnosti koliku zahteva merenje.



SL. 94. — MAŠINSKA JEDINICA ZA MERENJE UGLOVA

Radijan je jedinica za merenje uglova koja pretstavlja dužinu za koju se točak obrnuo dok je šina prešla daljinu jednaku sa žbicom. I otuda su 2π radijana jednaki sa 360 vavilonskih stepeni

Treći način na koji možemo postići vrednost za π uvodi nas doslovno u revoluciju u merenju uglova. Mi smo stepenom nazvali jedinicu koju su uveli sveštenici, graditelji kalendara; a pravim uglom jedinicu neimara po gradovima-državicama. Drugi način za merenje uglova mogao bi se nazvati kolarski način, a mi ga možemo nazvati jedinicom mašinskog doba. Mašinska jedinica, koja se zove *radijan* jeste ugao koji spaja s centrom krajeve luka koji je, kad se ispravi, jednak po dužini poluprečniku kruga kome pripada (sl. 94). Kad bismo ispravili

polukrug ta bi dužina bila π puta poluprečnik, pošto je ceo obim $2\pi r$. Tako su dva prava ugla jednaka sa π radijana, ili jedan prav ugao $= \frac{\pi}{2}$ radijana. Jedan stepen vavilonske mere je $\frac{\pi}{180}$ radijana. Obrnuto, 1 radijan je $\frac{180}{\pi}$ stepeni ili $\left(57\frac{1}{2}\right)^0$ vavilonskih stepeni (približno). Dobro je upamtiti ove jednakosti, upotrebljujući »r« i »^{0}« kao prideve:

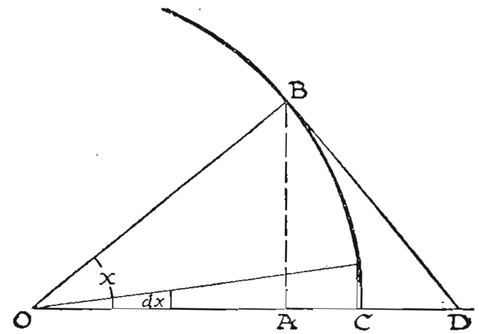
$$180^0 = \pi^r \text{ (tj. } \pi \text{ radijana)}$$

$$90^0 = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^r$$

$$1^0 = \left(\frac{\pi}{180}\right)^r$$

$$1^r = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

Ovakav način merenja ugla osniva se na obrtanju točka kad obim pređe rastojanje jednako sa žbicom. Ako je žbica (poluprečnik) jednaka s jedinicom dužine, 1 jedinica dužine odgovara 1 jedinici uglovnog obrtanja. Tako je dužina luka (u istim jedinicama) isti broj kao i broj radijana ugla koji se dobiva kad se krajevi toga luka spoje s osovinom (s centrom). Tako je na sl. 95. ugao $x = BC$, ako je $r = 1$.



Sl. 95.

Poluprečnik iznosi jedinicu dužine. Zato je:

$\sin x = AB$ $\cos x = OA$ $\tan x = BD$

Ako uporedite sl. 95 sa sl. 57, videćete da, ako je poluprečnik kruga jedinica, onda je tangens ugla x jednak broju jedinica dužine tangente BD na krugu u tački B, a pošto je $OB = r = 1$, onda je sin $x = AB$ (naspramna kateta), a cos $x = OA$ (nalegla kateta). Ali pošto je

$$\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x = \frac{\sin x}{\text{tang } x} = \frac{AB}{BD}\,^{1)}$$

Kao što je već objašnjeno, ako je $r = 1$, onda je, mereno radijanima, $x = BC$. Dužina BC je veća od AB. Ako podelite neku količinu količinom većom od nje, rezultat je manji od jedinice. Zato je $\frac{AB}{BC}$ manje od jedinice, tj. $\frac{\sin x}{x} < 1$. Ali BD je veće od BC. Zato će $\frac{AB}{BC}$ biti veće od $\frac{AB}{BD}$, pošto sad delimo AB većom količinom (BD) nego što je količina BC. Imaćemo:

$$\frac{AB}{BC} > \frac{AB}{BD} \quad \text{tj.}$$

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x$$

I tako, ako x merimo u radijanima, $\frac{\sin x}{x}$ leži između cos x i 1[2]). Ako x postane veoma malo (dx na sl. 95), cos x praktično uzevši postaje 1. Isto tako možemo videti da se naspramna kateta i luk praktično ne mogu više razlikovati, tj. praktično uzev, $\frac{\sin x}{x}$ postaje 1. I tako je za $\frac{\sin x}{x}$ gornja

---

[1]) U pravouglom trouglu ABD, ugao $ABD = x$, a $\frac{AB}{BD} = \cos x$. — Prev.

[2]) To pišemo ovako:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \text{ — Prev.}$$

granica 1, a donja cos x. Odatle možemo izvesti granice između kojih leži π.

Drugim rečima, sin x leži između x i x puta cos x, kad je x mereno radijanima[1]). Tako sin 5^0 ili sin $\left(\frac{5\pi}{180}\right)^r$ leži između $\frac{5\pi}{180}$ i $\frac{5\pi}{180}$ puta cos $\left(\frac{5\pi}{180}\right)^r$ ili $\frac{5\pi}{180}$ puta cos 5^0. Iz tablica imamo: sin $5^0 = 0{,}0872$ a cos $5^0 = 0{,}9962$. Ako je

$$\sin x = x \times \cos x$$

dobivamo

$$0{,}0872 = 0{,}9962 \times \frac{5\pi}{180}$$

Odatle imamo:

$$\pi = 3{,}15$$

Isto tako, ako je

$$\sin x = x$$

dobivamo

$$0{,}0872 = \frac{5\pi}{180}$$

$$\pi = 3{,}14$$

Pomoću aritmetičke sredine dobivamo:

$$\pi = 3{,}145 \pm 0{,}005$$

Gornja vrednost je dobivena pomoću tablica sa četiri decimala. One nisu podesne za uglove manje od 5^0, pošto broj vredećih cifara u sinusu ugla nije dovoljan da dâ više od tri vredeće cifre u rezultatu. Dosad smo na tri načina utvrdili da π leži veoma blizu do $3\frac{1}{7}$ ili 3,143. Sa pet decimala, ako se potrudimo da istrajemo, vrednost mu je 3,14159 ... Ako tu vrednost upotrebite da dobijete ugao u radijanima (ili u kružnoj meri), dobijate tačne vrednosti za sinuse malih uglova, ako uzmete da je sin $x = x$. Istoriski pregled vrednosti davanih broju π može vas zanimati, pošto vam on pokazuje kako se π sve više isteže što se približujemo mašinskome dobu.

---

[1]) Uzmimo nejednakost $3 < 5 < 10$. Pomnožimo sve sa 2. Imaćemo: $6 < 10 < 20$. Odnos nejednakosti nije promenjen.

Uzmimo nejednakost: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Pomnožimo sa x. Imaćemo: $x \cos < \sin x < x$. — Prev.

Tablica vrednosti za π

Vavilonci i Jevreji i najstariji Kinezi		3,0
Misirci (oko 1 500 pre n. e.)		3,16
Arhimed (240 g. pre n. e.) (bavio se točkovima)	između	3,140 i 3,142
Kineski sastavljači kalendara i tehničari:		
Liu Hsing (oko 25 g. n. e.)		3,16
Veng Fan (oko 250 g. n. e.)		3,15
Cu Čang Či (oko 480 g. n. e.) (bavio se mašinama)	između	3,1415926 i 3,1415927
Indusi i Arapi:		
Ariabhata (oko 450 g. n. e)		3,1416
Al Kaši (oko 1430 g .n. e.)		3,1415926535897932
Evropljani:		
Fransoa Viet (oko 1593 g. n. e.)	između	3,1415926537 i 3,1415926535
Ludolf van Cojlen (oko 1610 g. n. e.)		tačno do trideset i petog decimala.
Džon Volis (oko 1650 g. n. e.) Gregorije (oko 1658 g. n. e.)		beskonačni red
Japanci:		
Tekibi (oko 1690 g. n. e.)		beskonačni red
Macunaga (oko 1 720 g. n. e.)		tačno do pedesetog decimala u našim oznakama

Danas je π poznato sa sedam stotina tačnih decimala. Viet[1]) je dobio svoju vrednost za π tražeći granice na poligonu od 393216 strana. Docnije vrednosti za π osnivaju se na redovima. Istina deset decimala su dovoljni da dadu obim Zemljin s greškom manjom od dva santimetra, a trideset decimala dali bi obim cele vidljive vasione s greškom tako sitnom, da je ne bi mogli izmeriti ni najjači moderni mikroskopi. Rezultati koje smo dobili za π neće vas, dakle, razočarati kod većine praktič-

[1]) Francuski matematičar *Fransoa Viet,* 1540—1603. On je matematici dao njenu azbuku (slova). — Prev.

nih poslova. Da se izrade nacrti za najbolje avionske motore dovoljno je znati četiri decimala (3,1416).

Aleksandriska astronomija. — Već smo nešto pokazali o čudesnim postignućima u merenju Zemlje za vreme prve faze aleksandriske kulture. Merenje rastojanja po nebu danas je veoma uprošćeno time što imamo pouzdane časovnike koji rade pomoću točkova. Aleksandriski majstori su poboljšali metode svojih prethodnika za merenje vremena na taj način, što su pronašli časovnike koji su se osnivali na stalnom toku vode kroz jedan sud koji je kao nategačom izvlačio vodu, slično spravi na sl. 2. Ma da su ovi pronalasci bili veoma duhoviti, nisu zadovoljavali potrebe moreplovstva. Te se sprave nisu mogle nositi. Zato su za merenje geografske dužine morali da se služe mnogo zapletenijim astronomskim posmatranjima nego što je prosta metoda kojom se danas služimo. Hiparh je, kao što smo ranije pomenuli, izračunao rastojanje od Zemlje do Meseca s tačnošću koja se može prihvatiti. Dovitljivost metoda kojima su se služili ovi astronomi lepo se vidi na pionirskom delu Aristarhovom[1]).

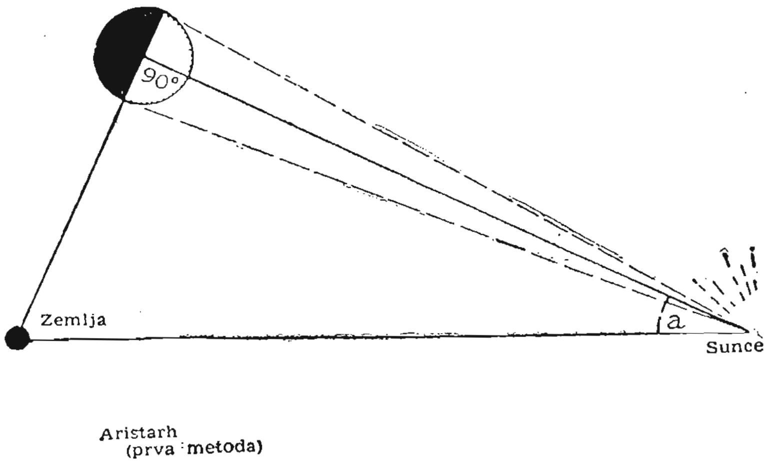
Aristarh je pokušao da izračuna relativno rastojanje od Zemlje do Sunca i do Meseca i da utvrdi njihovu relativnu veličinu. On je to radio ovako: Posmatrao je ugao a sa sl. 96 između Meseca kad se on vidi u ranim jutarnjim časovima, Sunca i Zemlje, kad se vidi tačna polovina Mesečeva, tj. za vreme polumeseca. Na novom rečničkom jeziku koji smo sad naučili, slika pokazuje da je:

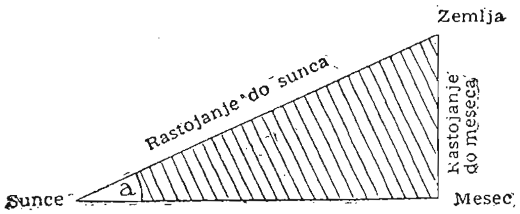
$$\sin a = \frac{\text{Mesečevo rastojanje do Zemlje}}{\text{Sunčevo rastojanje do Zemlje}}$$

S drugim instrumentima kojima je raspolagao zaključio je da je taj ugao $a = 3^0$. On nije imao tablice trigonometriskih funkcija, te je na veoma duhovit način, koji nam danas izgleda zaobilazan, primenio Euklidovu geometriju i pokazao da je Sunčevo rastojanje osamnaest do dvadeset puta veće od Mesečevog rastojanja do Zemlje. Nezadovoljan ovom metodom, upotrebio je drugu da proveri svoj rezultat. Nije teško pratiti princip te njegove metode. Smela dovitljivost na tome poslu prosto oča-

[1]) Aristarh sa ostrva Samosa, astronom iz trećeg veka pre n. e. On je prvi došao na misao da se Zemlja okreće oko svoje osovine i oko Sunca. Zbog toga je optužen da huli na bogove. — Prev.

rava čoveka, kad samo pomislimo kad je to rađeno. To je prvo veliko putovanje čovekovog uma po neispitanom okeanu prostora. Aristarh je zapazio da se polumesec javlja tačno pre prve Mesečeve četvrti tj. tačno pre nego što je Mesec prešao četvrtinu puta po svojoj putanji, polazeći od jednog položaja između

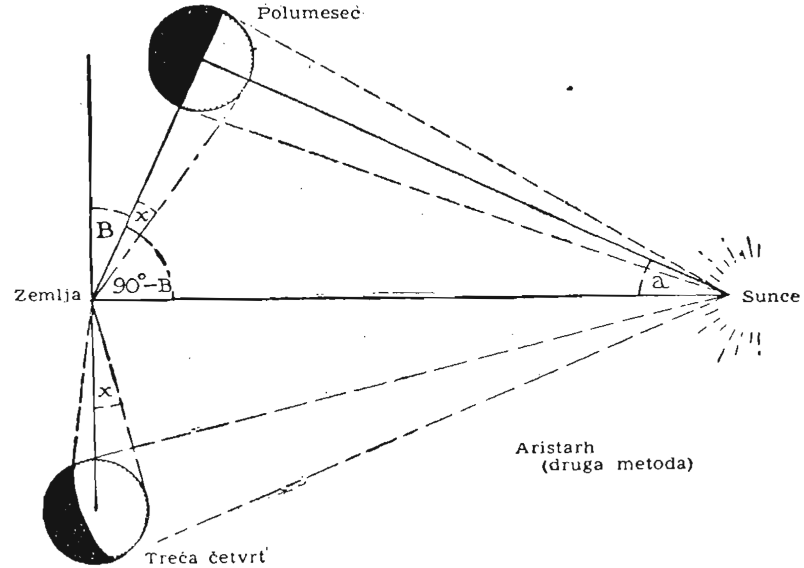




Sl. 96

Sunca i Zemlje. Pri četvrti vidi se nešto malo više od polovine Mesečeve, kao što ćete zapaziti na sl. 97. Na njoj su zajedno pretstavljeni polumesec blizu prve četvrti i Mesec kad je tačno na trećoj četvrti, tj. tačno na tri četvrti svog puta od novog meseca. Ako ugao punog meseca sa sl. 89 obeležimo sa $2x$, ugao polumeseca biće x. Kad je Mesec tačno na svojoj prvoj ili (kao

na sl. 97) na svojoj trećoj četvrti, ugao između dveju najviše razmaknutih tačaka na Mesečevoj ploči iznosi samo nešto malo više od x. Ako označimo sa B ugao za koji se obrne Mesec od polumeseca do prve četvrti, ugao između Meseca, Zemlje i Sunca je $90^0 - B$. Ali taj ugao istovremeno iznosi $90^0 - a$. Zato je



Sl. 97.

$a = B$. Aristarh je stavio da je vreme od polumeseca do prve četvrti šest časova ili četvrtina dana; ako uzmemo da lunarni[1]) mesec ima 28 dana, onda to vreme iznosi $\frac{1}{4 \cdot 28}$ celoga kruga, po kome se mesec obrće za 360^0. Prema tome B iznosi $\left(\frac{360}{4 \cdot 28}\right)^0 = \left(\frac{360}{112}\right)^0$ ili grubo 3^0. A pošto je $a = B$, to znači da je raniji proračun tačan. Ako uzmemo da je rastojanje do Meseca 386 000 kilometara, vidimo da je Aristarh našao da je rastojanje do Sunca 7 240 000 kilometara. Ono je ustvari oko 149 000 000 kilometara. Njegovi instrumenti nisu bili podesni

[1]) Latinski se mesec zove *luna*. — Prev.

za merenje veoma malog ugla između polumeseca i prve ili treće četvrti, ili između Meseca, Sunca i Zemlje, što na isto izlazi. Nešto što je još važnije jeste ova činjenica: pre nego što su pronađeni teleskopi da se pomoću njih izradi karta Mesečevih planina, bilo je potpuno nemoguće da se tačno izračuna obim polumeseca. U oba Aristarhova proračuna nalazi se ista instrumentalna greška. Za visok stupanj tačnosti u astronomskim merenjima potreban je visok stupanj razvoja u mašinskoj tehnici.

Ne možemo ulaziti u dalje pojedinosti o ovim prvim merenjima po Zemlji i po nebu. Navedeni izvod iz knjige »*World Machine*« Karla Snajdera daće vam živu sliku o uspesima aleksandriske astronomije.

»Ptolomej u svome delu opisuje drugu jednu prostu metodu, a nesumnjivo ih je bilo još. One se nisu potpunce slagale; u stvari nije lako izračunati rastojanje, jer se ono menja... A kad su već jednom utvrdili koliki je Zemljin obim, znali su da je Mesec oko 386 000 kilometara od Zemlje. Isto tako oni su mogli zapaziti da je njegov prividni prečnik, ili vizuelni prečnik, pola stepena, pa su, kad im je bila poznata Mesečeva daljina, mogli izračunati da je ova tako mala lopta ustvari nešto ogromno — da je telo od 3200 kilometara u prečniku, što iznosi jednu četvrtinu prečnika naše glomazne Zemlje... U isto čudesno doba živeo je još jedan džin, Apolonije iz Perge, zvani »veliki geometar«. Njegova je slava, kažu, u tome »što je primenio geometriju na nebeski problem«. Očevidno je da se pod tim podrazumevala viša geometrija, pošto su, kao što smo videli, Bion, Aristarh i Eratosten i mnogi drugi već bili izašli na glas sa svoje primene geometriskih metoda. Apolonije je razvio teoriju kupinih preseka i uveo pojam o epiciklima[1]) u objašnjenje kretanja planeta. Ovu poslednju ideju pozajmio je Hiparh, »najveći astronom-posmatrač staroga doba«. Nesumnjivo ga je Apolonijev primer naveo na otkriće paralakse koja se obično njemu pripisuje... Bilo kako bilo, problem senke u obliku kupe, koja se jasno vidi iz Ptolomejeve knjige, razradio je Hiparh, očevidno s velikom tačnošću, pri čemu je ipak čudno, da je potvrdio rezultat Aristarhovih proračuna. I on je našao da je Sunce oko dvadeset puta dalje od Zemlje nego Mesec, odnosno da to otstojanje iznosi 1379 do 1472 poluprečnika naše planete. Posle nekoliko vekova i Ptolomej pokušava istu stvar, ali ne postiže bolji uspeh; on čak svodi to rastojanje na 1210 Zemljinih poluprečnika... Hiparhova teorema omogućila je izračunavanje ne samo relativnog, već i apsolutnog rastojanja do Sunca i Meseca, a time i neposredno izračunavanje njihove veličine. Kleomed nam kaže da je Hiparh izračunao da je Sunčeva zapremina 150 puta veća od Zemljine

[1]) Krug po kome se kreće jedna tačka dok se njegovo središte kreće po drugom jednom krugu. — Prev.

zapremine; Ptolomej je izračunao da je 170 puta veća. Ali Aristarh je izračunao, (kako, to nam ne kaže!) da je Sunčev prečnik između šest do sedam puta veći od Zemljinog prečnika[1]), te mu je zapremina veća oko trista puta[2]). On uzima da je Mesečev prečnik jedna trećina Zemljinog prečnika, — u ovom poslednjem greši samo za jednu dvanaestinu. Ma da su još nesavršene, te su približne vrednosti sjajne. Krenula je ljudska misao!... U jednoj veoma zbrkanoj knjizi, *Mišljenja filozofa*, pripisuje se, s malo verovatnosti, starome poznatome Plutarhu jedno mesto gde se kaže da se i sam Eratosten bavio tim problemom. Veran svojoj ljubavi za stvarna merenja, on daje rastojanje do Meseca u 780 000 stadija, a do Sunca 804 000 000 stadija. Sjajno predviđanje istine! On uzima Mesečevo rastojanje kao približno dvadeset Zemljinih poluprečnika — za dve trećine manje nego što je ustvari; ali Sunčevo rastojanje on uzima kao 20 000 poluprečnika i, ukoliko mi možemo tačno da procenimo dužinu stadija, to praktično pretstavlja rastojanje koje je postavljeno kao tačno posle tri veka strpljivih istraživanja mikrometrima i heliometrima... Sa sve većim interesovanjem, koje prelazi u divljenje, nailazimo na još jednog istraživača staroga doba koji je objavio ovakve ali ipak sasvim različite rezultate. To je Posejdonije, učitelj Ciceronov i Pompejev... Već smo izneli da se njegovim merenjima Zemlje, koja je usvojio Ptolomej, služio i Kolumbo. Posejdonije je temeljito proučavao odbijanje svetlosti i ostavio nam jedan zaista divan proračun visine Zemljine atmosfere. Na stranicama Kleomedova dela vidimo da je on pokušavao da nađe rastojanje i do zvezda. On stavlja Mesec na dva miliona stadija daleko, a Sunce na pet stotina miliona. Prema njegovim ranijim izračunavanjima dužine Zemljinog prečnika, to bi stavilo Mesec na pedeset i dva poluprečnika od Zemlje, što bi bilo bliže stvarnom rastojanju nego Hiparhov rezultat. Sunčevo rastojanje bi tada iznelo 13 000 poluprečnika. Ako uzmemo njegov docniji rezultat (180 000 stadija), to bi rastojanje postalo 17 400 poluprečnika, a to je rezultat, koji se, s obzirom na nužno široke granice greške, ne razlikuje mnogo od Eratostenovog, a malo se razlikuje i od istine. Uporedite to sa hiljadu i trista poluprečnika njegovih prethodnika! Uporedite ga sa pojmovima Euklida, gotovo njegovog savremenika, čoveka veoma mudra i širokih pogleda na svome poslu, koji je ipak mislio da Sunce može biti telo tako od dve stope širine!«

Aristarhov je uspeh u tome što je pokazao da je Sunce *najmanje* 7,2 miliona kilometara daleko od Zemlje, a to je epohalan napredak u čovekovom poznavanju vasione u kojoj živi. Iz toga što Aristarh nije uspeo da dođe do boljeg rezultata, vidi se koliko je pogrešio Platon što je izdvojio umni rad od pri-

[1]) Ustvari je ovako s prečnicima: Zemljin prečnik je 12757 kilometara; Sunčev prečnik 1391107 kilometara. Dakle: oko 109 puta je Sunčev prečnik veći od Zemljina prečnika. — Prev.

[2]) Ako je 6 puta veći onda je zapremina veća 216 puta (to je 6^3). Ako je 7 puta veći, onda je zapremina 343 puta veća (to je 7^3). — Prev.

mene njegove. Eratosten i Apolonije su dali izvrsne procene, koje su otkrile pred očima onih koji su za njima dolazili, ogromno carstvo koje čeka na naučne podvige. Njihov uspeh još više ističe bedu idealizma kao sredstva za bogaćenje čovekovog duhovnog života. Aleksandriski materijalizam je vratio merenje u geometriju i time vratio geometriju na Zemlju. Na taj način je stvorio novu pretstavu o veličanstvenosti neba. Prostranstvo novih vidika progutalo je »nebesko pleme bogova« iz koga je Platon izveo poreklo filozofa. Po savetu Sozigena, aleksandriskog astronoma, Cezar je naredio te je izmenjen kalendar. Sozigen je uveo prestupnu godinu da se nadoknade onih šest časova koliko Zemlja provede više od 365 dana na svome putu oko Sunca. Tom promenom kalendara ušlo se u novo društveno doba. Stare religije, sa svojim verovanjem u zvezde, prestale su da vrše društvenu ulogu određivanja vremena. Astrologija je ustupila mesto svetovnoj nauci astronomiji u velikom sredozemnom središtu pomorstva, gde je najistaknutiji miljokaz koji postoji i dan-danji — »Mornarev stub«. Duhoviti plodovi ovih otkrića razvijeni su dalje u sistematskom obliku u Ptolomejevom *Almagestu*, oko 150 g. n. e. Ta je knjiga igrala važnu ulogu u astronomiji kod Arapa koji su je preveli i posle predali Evropi. Sa njenih stranica su pioniri prekomorskih putovanja naučili veštinu kako da prave geografske karte i kako da odrede položaj broda na moru. Otuda su naučili i to koliko je još ostalo sveta da se ispita.

Aleksandriska aritmetika. — Astronomija je korisna pomorcu da odredi položaj broda na moru, a vrednost za π je korisna u mašinstvu. Ali vi ste verovatno već zapazili, možda sa žaljenjem, da je za oba ta posla potrebno poprilično aritmetike. Kao što smo već opisali u poslednjoj glavi, ona vrsta aritmetike što su je potsticali grčki idealisti, ne pomaže nam da izvršimo teške račune. Atinjani su prezirali logistiku kako su zvali sredstva koja pomažu da se brzo računa na računaljci. Praktičniji Aleksandrinci morali su usvojiti drugo gledište. Na početku nailazimo na Arhimeda gde se nosi s problemom kako da osposobi brojeve da rade poslove za koje su pozvani. On je izgleda uvideo da je korisno izraziti π kao red i on je prvi matematičar koji je otkrio da opadajući red razlomaka može da se zaguši. On je dao zbir jednog neograničenog geometriskog niza kao što je ovaj:

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{16}\quad\frac{1}{32}\quad\frac{1}{64}\quad\frac{1}{128}\cdots$$

Poslužio se istom metodom kojom se služimo i mi kad dokazujemo da periodični razlomak $0,\dot{1}$ iznosi $\frac{1}{9}$. Svaki član gornjeg niza je polovina svog prethodnog člana. Oduzećemo pola reda od celoga reda. Ovako:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

$$\frac{1}{2}S=\ldots\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

Odatle je

$$S-\frac{1}{2}S=\frac{1}{2};\text{ ili }\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\text{ tj. }S=1.$$

Ma koliko daleko mi išli, zbir toga niza se zaustavlja kod 1. Koliko je ovakav red koristan da se izraze merenja sa tačnošću kakva se želi, vidi se kad se uporedi zbir od pet sa zbirom od deset prvih članova ovoga reda:

0,5	0,5
0,25	0,25
0,125	0,125
0,0625	0,0625
0,03125	0,03125
0,96875	0,015625
	0,0078125
	0,00390625
	0,001953125
	0,0009765625
	0,9990234375

Kad uzmemo prvih pet članova dobijamo 0,97 sa dva decimala. To je, grubo uzeto, 3 stota manje od 1. Kad uzmemo deset članova, dobijamo 0,9990 što je netačno samo za jedan hiljaditi. Uskoro ćete videti da je Aleksandrincima, s brojevima kojima su se oni služili, bilo mnogo teže da uoče kako se ovaj red brzo zagušuje, nego nama koji se služimo desetnim razlomcima. Antički grčki brojni sistem upotrebljavao je prvih devet slova grčke azbuke za 1 do 9, narednih devet slova za 10 do 90, narednih devet slova za 100 do 900. Da bi raspolagali sa 27 slova za ovu svrhu, oni su na svoju azbuku od 24 slova dodali 3 nekadašnja slova (digama, san, kopa). Ako upotrebimo latinicu, izlazi na isto kao kad bismo napisali:

a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
j	k	l	m	n	o	p	q	r
10	20	30	40	50	60	70	80	90
s	t	u	v	w	itd.			
100	200	300	400	500	itd.			

Pri tome načinu označavanja broj 17 bio bi napisan *j g;* broj 68 bio bi *o h;* broj 259 bio bi *t n i.* Biće vam sad jasnije kako su Platonisti mešali svoje pojmove o bogu s brojem 3. Kad su išli preko 999 morali su sve da počnu iznova sa istim pismenima, sa potezima uz njih da bi označili da je to sad viša dekadna jedinica. Arhimed je pisao raspravu u kojoj je proračunavao broj zrna peska u svetu. To nikako nije bio nekoristan posao u doba kad su pojmovi o velikim stvarima bili kod ljudi ograničeni brojem slova koja su im stajala na raspoloženju. U *Računaru peska* Arhimed je nagovestio dve vanredno važne pojedinosti koje se nalaze i u modernom načinu pisanja brojeva. On je predložio da se veliki brojevi pišu kao sadržaoci prostih stepeni od 10. On je nagovestio zakon koji čini osnovu modernom računskom pronalasku koji se zove *logaritam.* To se pravilo može videti kad se stave jedan uz drugog ma koji geometriski niz i njegov roditeljski niz, kao na primer:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024

Hoćete da pomnožite ma koja dva broja iz donjeg niza. Nađite njihove naspramne brojeve u roditeljskom nizu, saberite ih, taj zbir nađite u roditeljskom nizu, pa pročitajte ispod njega broj koji mu odgovara u geometriskom nizu. To je traženi rezultat. Znači, ako hoćemo da pomnožimo 16 sa 32, sabraćemo njihove naspramne brojeve iz roditeljskog niza (logaritme, kako ih mi danas zovemo), $4 + 5 = 9$. U donjem nizu broju 9 odgovara broj (antilogaritam kako ga mi danas zovemo) 512, koji pretstavlja traženi odgovor. Isprobajte ovo pravilo obrazovanjem drugih nizova, na pr. 3, 9, 27, 81, 243, 729 itd. Ovo pravilo se može ispisati stenografijom moderne algebre u obliku ove matematičke rečenice:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Arhimed nije uspeo da reformiše način pisanja svojih savremenika, niti da načini tablicu logaritama pomoću kojih se svako množenje može brzo izvršiti. Izvesti takvu promenu značilo bi iščupati iz korena društvenu kulturu svoga doba. Ljudi su još upotrebljavali stare oznake za »niske« brojeve[1]). Njihov sjajni propust pokazuje da ne smemo dopustiti da narodne mase ostanu neobrazovane, ma koliko se neki super-intelektualci prsili svojom nadmoćnošću nad svojom okolinom. Napredak poput onoga koji je predlagao Arhimed, može da proizađe samo iz osećanja zajedničkih potreba. Nije dovoljno da nekoliko učaurenih genija vide šta je potrebno. Matematičaru je neophodna saradnja običnog čoveka, isto onako kao što je običnom čoveku potreban matematičar ako želi, na primer, da uživa u tačnom saobraćaju koji se odvija na točkovima.

Za Aleksandrince je ova atička azbuka bila kao vodenični kamen okačen o vrat. Prvi stupanj aleksandriske kulture ispoljio se u silnim postignućima u oblasti veštine merenja, primenjene na astronomiju i na mehaniku. U to doba uvedeni su tako krupni računi da se čovek zaprepasti; i sve to kod ljudi koji se služe takvim načinom pisanja brojeva koji zahteva da se za svaku višu dekadu (za stotine, za hiljade itd.) uvede nov red oznaka. Drugo doba aleksandriske kulture odlikuje se time, što je ozbiljno pokušano da se reši problem kako da se dođe do prostih i brzih sredstava za računanje. To je također, no na drugi način, vratilo **broj** u geometriju. Geometriske slike, kao što su one iz II i IV dokaza, upotrebljavane su da bi navele ljude na računske pronalaske. Mi smo već pominjali aritmetiku Nikomaha iz Aleksandrije, da bismo prikazali praktičnu važnost tih dokaza. Mnogo su većeg značaja imena Diofant (oko 250 g. n. e.) i Teon (oko 350 g. n. e.).

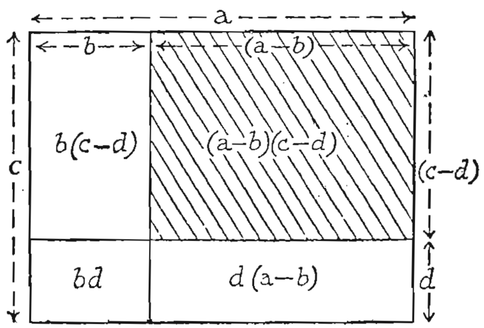
Diofant je dobrim delom pretekao algebru Indusa i Arapa. Kako matematika Indusa počinje oko sto i pedeset godina posle njegove smrti, ima razloga da se posumnja da su njegovo delo upoznali na Istoku preko Persije. Mi ćemo se docnije vratiti na

[1]) Brojevi koji nisu dignuti ni na kakav stepen. — Prev.

njegovo delo. Zasad će biti dovoljno pomenuti da je Diofant bio prvi čovek koji je u p o t r e b i o matematički gerundium, koji ima osobine i imenice i glagola (vidi III glavu). Pre Diofanta množenje je bilo ograničeno samo na brojeve smatrane kao imenice. Još nije bilo jasno zapaženo da se jednačinama (dokaz II) kao što su ove koje slede, uvodi nova »gramatička konvencija« u matematiku.

$$a(b+c) = ab + ac$$
$$a(b-c) = ab - ac$$
$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a+b)(c-d) = ac + bc - ad - bd$$

Ove su jednačine postavile problem čije se rešenje nalazi u z a k o n u o z n a c i m a koji je Diofant prvi primenio pri računanju. Pomoću geometriske slike možemo načiniti model količine $(a+b)$ ovako: spojićemo duž dugačku a jedinica sa duži dugačkom b jedinica. Možemo pretstaviti i $(a-b)$ kao broj jedinica dužine za koji jedna duž od a dužinskih jedinica premaša neku kraću duž od b jedinica. U drugom dokazu poka-



Diofantov zakon o znacima.
Sl. 98.

zali smo da možemo proizvode kao što su $a(b+c)$ ili $a(b-c)$ pretstaviti pravougaoničnim slikama. Pokazali smo u IV dokazu da možemo pretstaviti proizvode kao što su $(a+b)$ $(a+b)$ i $(a+b)$ $(a-b)$ ili što na isto izlazi, $(a+b)$ $(c+d)$ i $(a+b)$ $(c-d)$. Kakav li je rezultat kad se pomnože $(a-b)$ $(a-b)$ ili $(a-b)$ $(c-d)$? Geometriski pretstavljen ovaj problem se vidi na sl. 98. Veliki pravougaonik čija je površina $a \times c$ sastavljen

je od četiri pravougaonika čije su površine: $b(c-d)$, bd, $d(a-b)$ i $(a-b)$ $(c-d)$, to jest:

$$(a-b)(c-d) + bd + b(c-d) + d(a-b) = ac$$
$$(a-b)(c-d) + bd + bc - bd + ad - bd = ac$$
$$(a-b)(c-d) + bc + ad - bd = ac$$

Sa obeju strana oduzećemo bc i ad i obema stranama dodaćemo bd. Tada imamo:

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd.$$

Sad uporedite taj izraz sa ovima:

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$
$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd.$$

Videćete da su u oba slučaja brojevi u rezultatu dobiveni kad se svaki broj množenikov pomnoži svakim brojem množiteljevim. Znaci ispred tih proizvoda idu po ovome zakonu[1]):

$$+ \cdot + = +$$
$$- \cdot + \text{ ili } + \cdot - = -$$
$$- \cdot - = +$$

Ovo je novo pravilo za uprošćavanje posla na računaljci. Ako treba da pomnožimo 19 sa 28 imaćemo:

$$19 \cdot 28 = (20-1)(30-2) = 20 \cdot 30 - 30 - 20 \cdot 2 + 2 =$$
$$= 600 - 30 - 40 + 2 = 532.$$

Teon iz Aleksandrije množio je brojeve ne služeći se računaljkom, ili služeći se njome samo na završnom stupnju pomoću tablice množenja. Kad se brojevi pišu slovima postoje tri dekadna reda, te je potpuna tablica množenja imala za množenje devet grupa od devet redi i devet stubaca mesto jedne grupe od deset redi i deset stubaca kao naša tablica. Jedan

[1]) Kad primenjujete pravilo o znacima setite se da $-(a+b-c)$ znači isto što i $-1(a+b-c) = -a-b+c$. Na primer:

$$x^2 + y^2 + 2cx + (x^2 + y^2 - 2cx) = 2x^2 + 2y^2$$
$$x^2 + y^2 + 2cx - (x^2 + y^2 - 2cx) = 4cx.$$ — P i s a c.

deo takve tablice dat je na slici 99 i ona je dovoljna da se prati sledeći primer. Da se pomnoži 13 sa 18, ovo bi bili stupnjevi:

$$13 \cdot 18 = (10 + 3)(10 + 8) \qquad \mathrm{jc} \times \mathrm{jh}^{1)} =$$
$$= (\mathrm{j} + \mathrm{c})(\mathrm{j} + \mathrm{h}) =$$
$$= 10^2 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 8 + 3 \cdot 8 \qquad = \mathrm{j(j)} + \mathrm{c(j)} + \mathrm{j(h)} + \mathrm{c(h)} =$$
$$= 100 + 30 + 80 + 24 = \qquad = \mathrm{s} + \mathrm{l} + \mathrm{q} + \mathrm{kd} =$$
$$= 234. \qquad = \mathrm{tld}.$$

Kad budete sami računali ovakve zbirove, pa ih onda budete određivali pomoću tablice kao što je ona na sl. 99, vi još možete i zavoleti Aleksandrince. Naravno, ako želite da množite prilično velike brojeve, morate povećati svoju tablicu.

Teon se bavio i jednim praktičnim problemom, koji se pojavio kad smo pokušali da načinimo tablicu trigonometriskih funkcija. Morali smo se služiti tablicom kvadratnih korena. Metoda po kojoj se mogu dobiti brojevi kao što su $\sqrt{3}$ i $\sqrt{2}$, — videli smo — veoma je zametna. Evo metode kojom se poslužio Teon. Ona se vidi na sl. 100. Desno je ista ona slika što je data u IV dokazu i ona pretstavlja $(x + a)^2$:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Slika levo je uglavnom ista, samo što smo mesto a stavili dx. To ne znači d pomnoženo sa x, već pretstavlja jednu količinu veoma malu prema x (kepec x). I ovde je:

$$(x + dx)^2 = x^2 + 2x\,(dx) + (dx)^2$$

ili

$$(x + dx)^2 - x^2 = 2x\,(dx) + (dx)^2$$

Slika vam pokazuje da je $(dx)^2$ veoma malo prema pravougaonicima $x\,(dx)$. Zato nećemo mnogo pogrešiti ako stavimo:

$$(x + dx)^2 - x^2 = 2x\,(dx) \text{ ili}$$

$$dx = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{2x}$$

[1]) Stavili smo *jc* pošto su aleksandriski brojevi pretstavljali sabiranje kad se stave jedan uz drugog. Da bi se takvo sabiranje razlikovalo od množenja koje se u modernoj algebri označava stavljanjem dva broja jedan uz drugi, mi smo umetnuli zagrade gde je označeno množenje. — P i s a c.

JEDAN DEO ALEKSANDRISKE TABLICE MNOŽENJA
(Slova iz latinice stavljena su mesto grčkih slova)

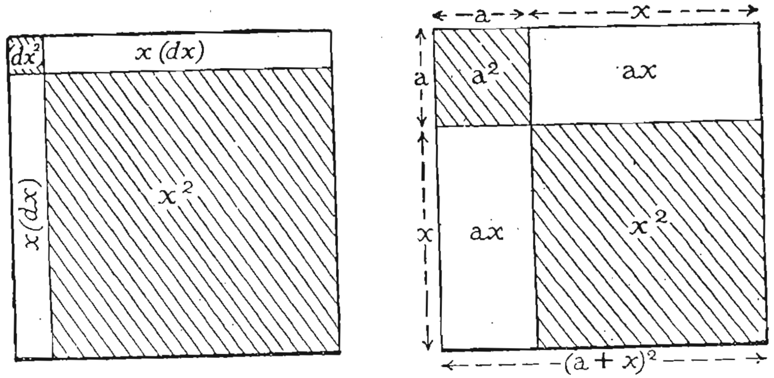
	1 a	2 b	3 c	4 d	5 e	6 f	7 g	8 h	9 i	10 j	20 k	30 l	40 m	50 n	60 o	70 p	80 q	90 r
2 = b	b	d	f	h	j	jb	jd	jf	jh	k	m	o	q	s	sk	sm	so	sq
3 = c	c	f	i	jb	je	jh	ka	kd	kg	l	o	r	sk	sn	sq	tj	tm	tp
4 = d	d	h	jb	jf	k	kd	kh	lb	lf	m	q	sk	so	t	tm	tq	uk	uo
5 = e	e	j	je	k	ke	l	le	m	me	n	s	sn	t	tn	u	un	v	vn
6 = f	f	jb	jh	kd	l	lf	mb	mh	nd	o	sk	sq	tm	u	uo	vk	vq	wm
7 = g	g	jd	ka	kh	le	mb	mi	nf	oc	p	sm	tj	tq	un	vk	vr	wo	xl
8 = h	h	jf	kd	lb	m	mh	nf	od	pb	q	so	tm	uk	v	vq	wo	xm	yk
9 = i	i	jh	kg	lf	me	nd	oc	pb	qa	r	sq	tp	uo	vn	wm	xl	yk	zj
10 = j	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	—

Sl. 99.

Da je greška mala možete se uveriti na ovome aritmetičkome primeru. Količinu 1,01 možemo i ovako napisati: $(1 + 0{,}01)$. Tu može 0,01 stajati mesto dx, a 1 mesto x, pošto je 0,01 veoma malo prema 1. Onda ćemo dobiti približno:

$$dx = \frac{(1{,}01)^2 - 1^2}{2} = \frac{1{,}0201 - 1}{2} = 0{,}01005$$

Dobivena vrednost (0,01005) razlikuje se od prvobitne vrednosti ($dx = 0{,}01$) samo za 0,00005.



Teonova diferencijalna metoda za dobijanje kvadratnog korena.
Sl. 100.

Da bismo po ovome obrascu izvukli kvadratni koren, najpre pogađamo. Na primer, znamo da je $\sqrt{2}$ negde između 1 i 2, pošto je $1^2 = 1$, te je manje od 2, a 2^2 je 4, te je veće od 2. Pošto je $14^2 = 196$, dobro je ako pri pogađanju uzmemo da $\sqrt{2}$ iznosi 1,4. To je nešto manje, te možemo staviti $2 = 1{,}4 + dx$.

$$(1{,}4 + dx)^2 = 2$$

A onda po malopređašnjem obrascu:

$$dx = \frac{(1{,}4 + dx)^2 - 1{,}4^2}{2 \cdot 1{,}4} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 1{,}4^2}{2 \cdot 1{,}4} = \frac{2 - 1{,}4^2}{2{,}8} =$$

$$= \frac{2 - 1{,}96}{2{,}8} = 0{,}014 \quad \text{(približno).}$$

Tako imamo približno:

$$(1{,}4 + 0{,}014)^2 = 2$$

ili

$$1{,}414 = \sqrt{2}$$

Ovo će, razume se, biti pomalo netačno. Zato mi to uzimamo kao drugu približnu vrednost, pa prelazimo na treću. Stavljamo d^2x kao novi kepec[1]) iksa, tj.

$$(1{,}414 + d^2x)^2 = 2$$

$$d^2x = \frac{2 - 1{,}414^2}{2 \cdot 1{,}414}$$

To daje $d^2x = 0{,}0002$. I tako, kao treću približnu vrednost možemo dati $\sqrt{2} = 1{,}4142$. Kad uporedimo ove tri uzastopne približne vrednosti, imamo:

$1{,}4^2 = 1{,}96$	greška		od 2	stota
$1{,}414^2 = 1{,}999396$	„	manja	„ 0,04	„
$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$	„	„	„ 0,002	„

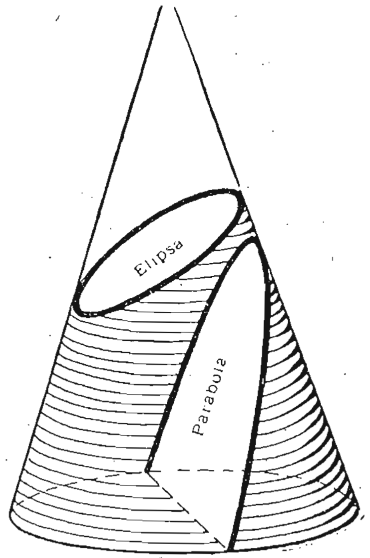
Možemo ovo nastaviti dokle god nam je potrebno.

Teon je poslednji značajni matematičar u Aleksandriji. Njegova je kći Hipatija izdala Diofantova dela i predavala matematiku u Aleksandriji. Nju su ubili hrišćanski kaluđeri koji su više važnosti pridavali filozofiji nego čistoj nevinosti. Gibon opisuje kako su njeno golo telo grebali ljušturama od ostriga.

Teonova metoda da se dođe do kvadratnog korena uvodi nas u pojmove koji će odigrati veoma važnu ulogu u modernoj grani matematike koja se zove *diferencijalni račun*. Arhimedova metoda za dobijanje vrednosti π osvetljava načelo na kome počiva *integralni račun*. Hiparhov pronalazak geografske širine i dužine, zatim krive linije Apolonija (sl. 101), toga drugog sjajnog Aleksandrinca, pretstavljaju temeljne pojmove *geometrije iz doba Reformacije*. Diofant je udario temelje algebri.

[1]) Pazite dobro! Ovo d^2x ne znači d dignuto na kvadrat, pa pomnoženo sa x. Ovo d^2x je stenografski napisano: »drugi kepec iksa«. Ono ^{2} kod d^2x je pridev, a ne glagol. — Pisac.

Klice gotovo svakog važnog pronalaska u šesnaestom i sedamnaestom veku naše ere mogu se naći u naučnim tekovinama Aleksandrinaca. Što nisu mogli dalje, ma da su otišli tako daleko u znanju, ne objašnjava dovoljno činjenica, da je aleksandrisku civilizaciju Rimska Imperija povukla sa sobom u propast. Objašnjenje je pre u tome da je ona u svome razvitku dostigla bila granice društvene kulture koju je nasledila.



SL. 101. — KUPINI (KONIČNI) PRESECI

Apolonije koji je živeo oko 230 g. pr. n. e. napustio je Platonovo pravilo, pa je proučavao krive koje se ne mogu nacrtati samo šestarom i lenjirom. On je naročito proučavao tri krive koje se dobijaju kad se dvojna kupa seče jednom ravni koja ne prolazi kroz teme i nije upravna na osovinu. Dve su takve krive prikazane ovde. Elipsa je kriva linija koja pretstavlja putanje planeta. Parabola pretstavlja putanju topovskog zrna. Treći kupin presek biće prikazan kad budemo opisivali (glava XI) širenje gasa kod mašine s unutarnjim sagorevanjem. Služeći se Euklidovom geometrijom tela Apolonije je prvi izneo neka osnovna načela reformaciske geometrije. Kad su ljudi počeli da lupaju glavu o putanjama planeta uz nova posmatranja postignuta tek pronađenim teleskopom, i kad su ušli u opštu upotrebu artilerija i mašine koje pokreću točkovi, oni su u moreplovstvu počeli upotrebljavati projekciske mape. Ove projekciske mape, osnovane na načelu geografske dužine i geografske širine, bile su smrtni udarac za Platonovu geometriju i zametak reformaciske geometrije koju ćemo proučavati u IX glavi.

Naredni veliki napredak nastupio je tek kada su nastupili manje izopačeni narodi, opremljeni načinom pisanja brojeva koji je mogao da zadovolji zahteve aleksandriske matematike. Bitno novi oblik induske kulture bio je u tome što su ljudi koji nisu bili istaknuti matematičari pronašli su ono što su najsjajniji matematičari u Aleksandriji propustili da pronađu — oznaku za *ništa* — nulu ili ništicu. Nema boljeg natpisa za grob aleksandriske nauke i matematike nego što su ova dva reda iz pesme Omara Kajjama, prvog među arapskim matematičarima, koji je spojio plodove induskog i aleksandriskog doprinosa ljudskom znanju:

»... zvezde se gube, a karavan
Kreće ka Svitanju Ništice, o, požurite...«

VEŽBANJA UZ GLAVU VI

PRONALASCI I OGLEDI

1. — Iskoristite obrazac $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, pa nađite

a) $\cos 40^0$ i $\sin 50^0$, kad je $\sin 40^0 = 0{,}6428$

b) $\cos 75^0$ i $\sin 15^0$, kad je $\cos 15^0 = 0{,}9659$.

2. — Upotrebite obrazac za poluuglove, pa izračunajte: $\sin 10^0$, $\cos 10^0$, $\tan 20^0$, $\tan 10^0$, kad je $\sin 20^0 = 0{,}3420$, $\cos 20^0 = 0{,}9397$.

3. — Kad je $\sin 40^0 = 0{,}6428$ i $\cos 40^0 = 0{,}7660$ nađite $\sin 50^0$, $\cos 50^0$, $\tan 50^0$, $\sin 20^0$, $\cos 20^0$, $\tan 20^0$.

4. — Kad je $\sin 50^0 = 0{,}7660$, $\sin 43^0 = 0{,}6820$, $\sin \left(23\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}3987$, nađite:

$\cos 50^0$ $\quad \tan 50^0$ $\quad \cos\left(21\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad \tan\left(21\frac{1}{2}\right)^0$

$\cos 25^0$ $\quad \tan 25^0$ $\quad \cos 43^0$ $\quad \tan 43^0$

$\cos 47^0$ $\quad \tan 47^0$ $\quad \cos 40^0$ $\quad \tan 40^0$

$\cos\left(23\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad \tan\left(23\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad \cos\left(66\frac{1}{2}\right)^0$ $\quad \tan\left(66\frac{1}{2}\right)^0$

5. — Kad je $\cos 40^0 = 0{,}7660$, $\sin 40^0 = 0{,}6428$, $\cos 15^0 = 0{,}9659$, $\sin 15^0 = 0{,}2588$, $\cos \left(26\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}8949$ i $\sin \left(26\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}4462$, upotrebite obrazac za $\sin (A+B)$ i $\cos (A+B)$, pa nađite:

$$\cos 55^0 \quad \sin 55^0 \quad \cos\left(66\frac{1}{2}\right)^0 \quad \sin\left(66\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\cos\left(41\frac{1}{2}\right)^0 \quad \sin\left(41\frac{1}{2}\right)^0 \quad \cos\left(56\frac{1}{2}\right)^0 \quad \cos\left(56\frac{1}{2}\right)^0$$

6. — Koristite vrednosti iz prethodnih vežbanja, pa vidite možete li naći kako glasi tačan obrazac za $\sin (A-B)$ i $\cos (A-B)$. Proverite rezultat u vezi sa slikom 164 u IX glavi.

7. — U trigonometrijama se $\frac{1}{\sin A}$ zove cosec A, a $\frac{1}{\cos A}$ se zove sec A, a $\frac{1}{\operatorname{tang} A}$ zove se cotang A.

To su skraćenice za reči kosekans, sekans i kotangens. Iskoristite metodu kojom je dokazan obrazac $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, pa izvedite obrasce koji se ponekad upotrebljavaju u višoj matematici:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

$$1 + \operatorname{tang}^2 A = \sec^2 A$$

8. — Rešite problem stene sa sl. 53 primenom sinusnog obrasca za rešavanje trouglova, najpre da nađete rastojanje od bliže osmatračke tačke do vrha stene, a zatim visinu.

9. — Na sl. 87 načinite A većim od 90^0 pa spustite upravnu p na produžetak strane b preko temena A. Pokažite da kosinusni obrazac onda postaje:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos (180^0 - A).$$

a sinusni obrazac postaje:

$$\frac{\sin (180^0 - A)}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

10. — Ovo su obrasci za rešavanje trouglova kad je A manje od 90^0,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad i$$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{a \sin C}{c}$$

a ovo kad je A veće od 90^0:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos (180^0 - A) \ i$$

$$\sin (180^0 - A) = \frac{a \sin B}{b} \quad \text{itd.}$$

Kakva onda veza postoji između

(a) . . . . . . $\cos A$ i $\cos (180^0 - A)$

i (b) . . . . . . $\sin A$ i $\sin (180^0 - A)$?

Ako možete da nađete šta geometriski pretstavljaju sinusi i kosinusi uglova većih od 90^0, šta mislite kolike su brojne vrednosti za sinuse, kosinuse i tangense uglova od 150^0, 135^0 i 120^0? Proverite dobivene rezultate iskorišćujući Diofantovo pravilo o znacima i obrazac $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$.

11. — Dva čoveka krenu u šetnju jednovremeno s jednog raskršća i prelaze obojica po 4,8 kilometra na čas. Njihovi se putevi razilaze pod uglom od 15^0. Koliko su oni daleko jedan od drugoga posle 2 časa?

12. — Sa osnovice $AB = 500$ metara, vidi se jedna zastava iz A pod uglom od 112^0, iz B pod uglom od 63^0. Koliko je ta zastava daleko od A?

13. — Sa čamca na pučini vidi se vrh stene pod uglom od 24^0. Brodar odvesla 25 metara u pravcu stene i sad vidi vrh stene pod uglom od 47^0. Koliko je visoka ta stena?

14. — Tri sela A, B i C su vezana sa tri prava, ravna puta. $AB = 9{,}6$ km, $BC = 14{,}4$ km, a ugao između AB i BC je 130^0. Koliko je rastojanje između A i C?

15. — Čamac jedri 8 milja na jug. Onda promeni pravac i jedri 11 milja pravcem koji je 54^0 istočno od severa. Koliko je sad daleko od svoje polazne tačke?

16. — Iz obrazaca za $\sin (A+B)$ i $\cos (A+B)$ izvesti obrasce za $\sin 2A$, $\sin 3A$, $\cos 2A$ i $\cos 3A$.

17. — Iz obrazaca za $\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$, $\sin(A-B)$ i $\cos(A-B)$ izvesti da je

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

Odatle pokazati kako se obrazac za poluuglove može izvesti iz obrasca za zbir uglova. (Uputstvo: $C+D=2A$, $C-D=2B$).

18. — Služeći se trigonometriskim tablicama pokazati između kojih se granica nalazi π, posmatrajući obime i površine upisanog i opisanog poligona od 72 strane.

19. — Iskoristite činjenicu da je $\sin x$ skoro jednak sa x kad je x veoma mali ugao meren u radijanima, pa nađite vrednost za $\sin\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\sin 1^0$, $\sin\left(1\frac{1}{2}\right)^0$, uzimajući za π vrednost 3,1416.

20. — Pošto se Mesečev obim gotovo potpuno poklapa sa Sunčevim obimom za vreme potpunog pomračenja, može se, grubo uzevši, smatrati da je Sunčev uglovni prečnik (v. sl. 89) pola stepena. Uzmite za Sunčevu daljinu 149 miliona kilometara, nađite Sunčev prečnik, iskorišćujući činjenicu da je za male uglove merene u radijanima $\sin x=x$ i $\cos x=1$.

21. — Načinite tablicu uglova od 1^0 do 10^0, u razmacima od 1^0, izražavajući te uglove u radijanima.

22. — Načinite tablicu uglova od 0 do 2 radijana, u razmacima od $\frac{1}{4}$ radijana, izražavajući te uglove u stepenima.

23. — U narednim primerima uzmi za poluprečnik Zemlje 6368 km.

Nekadanja prestonica Inka[1]) Kvito, pa Kizumu na jezeru Viktorija u Keniji i Pontianak na Borneu udaljena su sva tri od

---

[1]) Nekada veoma napredan narod u oblasti države Peru u Južnoj Americi. Uništili ga španski osvajači u XVI veku. — Prev.

polutara oko pola stepena. Geografska dužina varoši Kvito je 78^0 zapadno od Griniča, Kizumu 35^0 istočno, a Pontiaka 109^0 istočno. Naći najkraće rastojanje između dva i dva od ta tri mesta, uzimajući za π vrednost $3\frac{1}{7}$.

24. — Arhangelsk, Zanzibar i Meka su oko jedan stepen udaljene od 40^0 istočne dužine. Širina Arhangelska je $\left(64\frac{2}{3}\right)^0$ severno. Širina Meke $\left(21\frac{1}{3}\right)^0$ severno, a Zanzibara 6^0 južno. Kolika su rastojanja između tih mesta?

25. — Pomoću slike pokaži da dužina jednog stepena, merenog duž geografske širine x iznosi $x\cos L$, ako je x dužina jednog stepena na polutaru.

26. — Vinipeg i Plimut su oko $\frac{1}{3}$ stepena udaljeni od 50^0 severne širine. Naći rastojanje među njima, kad je Plimut 4^0 zapadno od Griniča, a Vinipeg 97^0 zapadno.

27. — Riding i Grinič imaju istu širinu, $51^0\,28'$ severno, a dužina Ridinga je $59'$ zapadno. Koliko je daleko Riding od Griniča?

28. — Dva su mesta na istom meridijanu dužine. Širina mesta A je 31^0 severno. Mesto B je 320 km udaljeno od A. Kolika je širina mesta B?

29. — Saberite n članova ovih geometriskih progresija:

(a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\ldots$ (b) $3-9+27-81+\ldots\ldots$

(c) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots\ldots$ (d) $2\frac{1}{4}-1\frac{1}{2}+1-\ldots\ldots$

(e) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\ldots\ldots$

Proverite dobivene rezultate aritmetički, uzimajući zbir od pet članova.

30. — Naći (a) 2n-ti član i (b) $(2n+1)$-vi član ovoga niza: $a, -aq, aq^2, -aq^3$, itd.

DA SE UPAMTI!

1) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}, \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

2) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1, \quad \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A},$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

3) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B.$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$

4) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos (180^0 - A)$

5) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin(180^0 - A)}{a}$

6) Kad je x mereno u radijanima i veoma malo:

$\sin x = x = \operatorname{tang} x$

$\cos x = 1$

7) $- \cdot - = + \qquad - \cdot - = +$

$- \cdot + = - \qquad - \cdot + = -$

$+ \cdot + = + \qquad + \cdot - = -$

8) $\sin 0^0 = 0 = \operatorname{tang} 0^0 \qquad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^0$

$\cos 0^0 = 1 = \operatorname{tang} 45^0$

$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0 \qquad \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^0$

GLAVA VII

SVITANJE NIŠTICE

ili

Kako je počela algebra

U toku poslednjih vekova pre i prvih vekova posle naše ere, u Kini su se brojevi obeležavali drvcima. To je bilo uglavnom hijeroglifsko beleženje brojeva i računskih radnji. Oznake kao što su ≡ i = za 3 i 2 bliže su gruboj stvarnosti računaljke nego zamršenije obeležavanje brojeva slovima kod Jevreja, Rimljana i Grka, koji su uvodili nove oznake za svaki stubac na računaljci (sl. 6). Tako u rimskome pisanju brojeva znaci I, X, C i M stoje da označe stupce jedinica, desetica, stotina i hiljada. Kad se X ponovi tri puta (XXX) to je značilo tri zrnca u stupcu desetica, a ponavljanje znaka I dva puta (II) značilo je dva zrnca u stupcu jedinica. Da su Rimljani pisali 32 ovako: (III) (II), ne bi taj broj nikako mogli razlikovati od broja 320, 302, 3200, 3002. Isto to važi i za označavanje brojeva drvcima. Ako napišete 32 ovako: ≡ = po čemu bi se taj broj razlikovao od pomenutih brojeva? Postoji prost način da se savlada ta teškoća; treba da se upotrebi neki znak, najpre tačka, a onda kružić (o) da stoji mesto *praznoga* stupca na računaljci. Onda bi 320 bilo ≡=· a 302 bi bio v ≡·=. Pre nego što je uvedena tačka ili kružić ≡ je postalo ᶻ₂, a = je postalo Z što pretstavlja prvobitni oblik naših cifara 3 i 2. Taj je običaj zaveden u Indiji negde između 100 g. pre n. e. i 150 g. n. e. To u početku nije bio matematički pronalazak u akademskom smislu. To je bio samo praktičan pronalazak. Induska reč za nulu je *sunja* što znači p r a z n o. Tek docnije se došlo na misao da su nula, »ništa« ili »ništica« jedno isto. Nezavisno od toga, isti je pronalazak učinjen za vreme kalendarske civilizacije Maja koja je cvetala oko 500 g. n. e. Na kamenim spomenicima Maja su upotrebljavali sistem izražavanja brojeva pomoću drvaca; oznake za brojeve su bile vertikalno poređane.

Ceo svet je priznao da ovaj korak ima epohalni značaj. Laplas[1]), sjajni matematičar-astronom, koji je rekao Napoleonu da bog nije potrebna hipoteza u prirodnim naukama, pominje to u jednom svome veoma značajnom odeljku:

»Indija nam je dala oštroumnu metodu da izražavamo sve brojeve pomoću deset znakova, gde svaki znak ima mesnu vrednost i apsolutnu vrednost. Duboka je i važna ta misao koja nam danas izgleda tako prosta, da i ne znamo njenu pravu vrednost. Ali baš ta njena prostota, ta velika lakoća koju je ona unela u sve račune, učinile su da naša aritmetika postane tekovina prvoga reda. Koliko je veliko to postignuće ocenićemo tek onda, kad se setimo da je ona izmakla genijima kao što su jedan Arhimed i jedan Apolonije, dvojici od najvećih ljudi antike«.

Odgovor na pitanje zašto su Grci promašili, te nisu oni dali algebru, i zašto su Indusi i Arapi uspeli onde gde su Grci promašili — pojaviće se u toku ove glave. Pronalazak *sunje* ili nule (0) skinuo je preprečne računaljkine poluge sa rešetke zatvora u kome se nalazio ljudski um. Čim se pojavio znak za prazan stubac na računaljci, »prenošenje« u viši stubac bilo je isto tako lako izvršiti na tablici, na hartiji ili na kakvom drugom materijalu za pisanje, kao što je bilo lako izvršiti ga na računaljci. Novi način pisanja brojeva pretstavljao je savršen model matematičke akcije, a imao je jedno preimućstvo koje je nedostajalo mehaničkome modelu. Brojevi su mogli sad da se protežu na obe strane koliko god je potrebno. Ako imate računaljku sa, recimo, četiri stupca, (na primer M, C, X i I), zapadate u teškoću ako imate da računate s brojevima većim od 9 999. Na hartiji je isto tako lako rukovati brojem

9 999 999 999 999 999

kao i brojem 9 999. Sem toga, odmah padaju u oči neke proste osobine nizova brojeva, kakve smo pokazali na Zenonovom paradoksu u prvoj glavi. Njihovo značenje ne ostaje sahranjeno u tmini brojeva označenih pomoću slova. Istina je i to da su se

[1]) Laplas, Francuz, astronom (1749—1827). — Prev.

osamljeni geniji u Aleksandriji, kao Diofant i Teon, bili uhvatili u koštac s istom vrstom problema kao i Indusi i Arapi koji su uspeli u tome. Njihova je algebra bila beznadno zapletena time što su upotrebljavali jedne iste oznake za reči kao i za opšte brojeve. I tako nisu mogli da upotrebe slova samo za opšte brojeve. Plodonosno interesovanje da se pronađu pravila zgodna za upotrebu brojeva pojavilo se tačno onda, kad je jedna nova društvena kultura stvorila aparat za lako rukovanje brojevima, i postavljala praktične probleme čije se rešenje moralo dobiti u brojevima. A ta je kultura iznikla iz radnog života jedne zajednice koja nije nosila okove vekovnih običaja. Grcima je nedostajao društveni potsticaj da stvore algebru. Aleksandrinci su osetili potrebu, ali im je nedostajala društvena oprema. Indusi su raspolagali društvenom opremom kad se pojavila potreba! U ovoj glavi raspravljaćemo o trima strujama koje su dale svoje priloge algebri Indusa i Arapa. Prva: potreba za prostim pravilima računanja, ili za *algoritmom,* kako su aritmetiku zvali u trinaestom veku po arapskom algebristi Al Khvarizmi. Druga: rešenje praktičnih problema s brojevima, tj. »rešavanje j e d n a č i n a«. Treća: vraćanje na proučavanje n i z o v a.

Matematiku Indusa poznajemo tek od *Lilavati* od Arjabhate, oko 470 g. n. e. Ovaj pisac raspravlja o aritmetičkim pravilima; služi se Diofantovim zakonom o znacima; daje tablicu sinusa u razmacima od $\left(3\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ i za π uzima vrednost 3,1416. Ukratko, induska matematika počinje onde gde aleksandriska prestaje. Nešto malo docnije, u šestom veku, dolazi Brahmagupta, koji se bavi istim pitanjima kao i Arjabhata: računanje, nizovi, jednačine. Ovi su ráni induski matematičari već bili postavili zakone o »ništici« ili s u n j i, na kojima se osniva cela aritmetika, naime:

$$a \cdot 0 = 0$$
$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$

Oni su se sasvim slobodno služili razlomcima. Pri tome se nisu pomagali metaforskim jedinicama, kao što su minuti i sekundi, već su razlomke pisali kao i mi, samo što nisu upotrebljavali crticu. Na primer sedam osmina oni su pisali $\begin{matrix}7\\8\end{matrix}$.

Oko 800 g. n. e. Bagdad je, pod muslimanskim kalifatom, bio postao središte učenosti. Izgnanici iz aleksandriskih škola, koje su zatvorene kad se uzdiglo hrišćanstvo, bili su još ranije preneli pagansku nauku u Persiju. Grčka filozofska dela doneli su tamo prognani nestorijanski jeretici. Jevrejske učenjake odredio je Kalif da prevedu siriske i grčke tekstove na arapski. Dela Ptolomeja, Euklida, Aristotela i mnogih drugih klasičnih autora kružila su od Bagdada do mavarskih univerziteta koji su u toku devetog i desetog veka uspostavljeni u raznim zemljama, naročito u Španiji.

Arapski nomadi koji su osvojili razvaline Rimskog Carstva i preplavili ih, nisu imali sveštenički stalež. U islamskom svetu određivanje vremena je potpuno odeljeno od neke već postojeće kaste. Jevrejski i arapski učevnjaci imali su dužnost da prave kalendare. Oni su popravili astronomske tablice Aleksandrinaca i Indusa, a u tom poslu su imali veliko preimućstvo, što su se služili prostim načinom pisanja brojeva koji su Indusi bili pronašli. Među čuvenim matematičarima na prvo mesto dolazi Al Khvarizmi, koji je živeo u devetom veku n. e. Drugi veliki matematičar, Omar Khajjam, živeo je u dvanaestom veku n. e. Tesnu vezu između ovog novog buđenja interesovanja za matematiku i vekovne dužnosti da se određuje vreme videćete u rečima *Rubaijata:*

»Kažu ljudi da su moji računi
Doterali godinu na ljudsku meru, je l'?
Ako je tako, izbacismo iz kalendara
Nerođeno »sutra« i umrlo »juče« . . .

Ovaj navod nas potseća da je naučno, pa čak i književno buđenje Evrope u četrnaestom i petnaestom veku imalo vrlo malo veze sa vizantiskim obožavanjem dekorativne umetnosti. Poezija savremene Evrope, kako u pogledu slika (rime), tako i u pogledu metrike, kao i naša hemija i naša algebra, pokazuju da za svoje društveno nasleđe dugujemo mavarskoj okupaciji Španije i Južne Francuske. Provansalske balade stvorene su prema pesmama što su ih pevali trubaduri u doba kad su dela arapskih matematičara bila prevođena na evropske jezike. Od docnijih arapskih pisaca naročito su važni Al Karki i Al Kajami iz jedanaestog veka. Docniji induski aritmetičar, Bhaskara, iz dvanaestog veka, isto tako je dostojan pomena. Prevodi ovih dela poslužili su kao osnova za evropsku matematiku.

Glavne dve žiže za uvođenje arapske i induske matematike među zaostale evropske severne narode bili su mavarski univerziteti i sicilijanska trgovina na Sredozemlju. Jedan sicilijanski novac sa oznakom godine 1134 jeste najstariji poznati spomenik kod Hrišćana o zvaničnoj upotrebi takozvanih gobarskih brojeva, tj. induskih brojeva kako su ih zapadni Arapi bili izmenili. U Engleskoj je, kažu, najstariji takav spomenik jedan svitak o dohocima svešteničkog kolegijuma sv. Andreje iz 1490 godine. Italijanski trgovci su ih upotrebljavali u trinaestom veku očevidno na svoju korist u trgovačkim računima. Ova novina se širila, ali je nailazila na smetnje od strane pretstavnika starinske misli. Jedan ukaz iz 1259 g zabranjivao je florentinskim bankarima da se služe neverničkim oznakama, a crkvene vlasti na univerzitetu u Padovi naredile su godine 1348 da se cenovnik knjiga izradi ne »ciframa«, već »prostim« slovima. Tri su društvena elementa doprinosila širenju mavarske kulture. Prvi je u tome, što je hrišćanska religija, došavši na mesto Rimskog Panteona, preuzela društvenu ulogu sveštenika graditelja kalendara kao što ćemo jasnije videti u narednoj glavi. Kao čuvari kalendara, kaluđeri su bili zainteresovani za matematiku. Tako se Adelar od Basa prerušio u muslimana (1120 g. n. e.) i studirao u Kordovi i preveo dela Euklida i Al Khvarizmija, zajedno s arapskim astronomskim tablicama. Djerardo iz Kremone studirao je u isto vreme u Toledu. On je preveo oko devedeset arapskih tekstova, među kojima i arapsko izdanje Ptolomejeva Almagesta. Jeretik sveštenik Paćulo, koji je imao sreće te ga nisu pronašli, preveo je Bhaskarinu aritmetiku i uveo Teonovu metodu za dobijanje kvadratnih korena. Od iste je vrednosti i nezavisna kultura trgovačke klase koja se sve više dizala. Najistaknutija ličnost među trgovačkim matematičarima je Leonardo Fibonaći. Njegova knjiga *Liber abaci* (1228 g.) bila je prva trgovačka aritmetika. Njegovog se imena sećamo kod jednog čuvenog brojnog niza koji se zove Fibonaćijev niz. Evo ga:

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{8}{32} \quad \frac{13}{64} \quad \frac{21}{128}\,^{1)} \quad \text{itd.}$$

---

[1]) Ako je enti član $\frac{u_n}{v_n}$ njegova veza s prethodnim članovima je: $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2\,v_{n-1}}$ — Pisac.

Za njegovog tvorca ovaj niz je, izgleda, bio samo duhovna zabava. Fibonači koji je kao dečak bio muka živa za svoje učitelje, našao je da je matematika zanimljiva kad se primenjuje u vezi društvenih potreba njegove klase. On je pravio brojne nizove prosto radi zabave, kad je bio naučio da se služi jednačinama u rešavanju praktičnih zadataka u vezi kamata i dugova. Leonarda je pomagao bezbožni Federiko II, na čije je potsticanje univerzitet u Salernu postao središte iz koga su jevrejski lekari preneli mavarsku nauku u crkvena središta učenosti u Severnoj Evropi. Dakle, treću struju kojom se rasprostirala nauka pretstavljaju ovi jevrejski lekari. Gotovo sve do skora se u Španiji upotrebljavao izraz »lekar i algebrist«, kao što je hirurg i berberin jedno te isto lice u Srednjem Veku.

Pre nego što nastavimo svoj prikaz nove aritmetike ili algoritma, dobro će nam doći na jednom docnijem stupnju da malo zastanemo kod pitanja, kakve su skrivene mogućnosti ovi novi brojevi razvili u mašti neizopačenih učenika mavarske kulture. Štifel, na koga smo već naišli kao na objašnjavača »tajne« otkrovenja, nije mislio na broj 666 kad je pisao: »Mogao bih napisati celu jednu knjigu o čudesnim stvarima koje se odnose na brojeve«. Mislio je na nove veze koje su se same nametale kad je čovečanstvo steklo takvo pismo za brojeve, kojim se mogao obaviti sav posao kao i na računaljci, a da se ne mora upotrebiti računaljka. Uzmimo broj MMCCCXXXII što je 2332 u našim oznakama. Rimski broj označuje dva zrnca u prvome stupcu (jedinice), tri zrnca u drugome, tri u trećem i dva u četvrtom stupcu (hiljade). Bitno je u starome sistemu bilo to, da je svaki znak (M, C itd.) stojao mesto jednog odgovarajućeg stupca, ili, kod Jevreja i antičkih Grka, posebno zrnce u posebnom stupcu. Napisano gobarskim brojevima, a čitajući sleva nadesno, 2332 nam daje broj zrnaca u uzastopnim stupcima a da ne moramo upotrebiti još i neke nove oznake. Za praktične poslove oznake stoje samo mesto zrnaca. Stupci se raspoznaju po položaju cifara, pri čemu je prazan stubac pretstavljen »nulom«. Ipak se i sam položaj može prikazati upotrebom cifara, kao što ćete videti kad razgledate značenje broja 6 666 666. To znači, kad bismo imali računaljku koja ide do miliona tj. računaljku sa sedam stubaca, bilo bi šest zrnaca u sedmom stupcu (milioni), šest u šestom (stotine hiljada), šest u petom (desetine hiljada), šest u četvrtom (hiljade) i tako dalje. Međutim milion je $(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)$, tj. šest desetica međusobno pomnoženih, ili 10^6. Slično tome, sto hiljada je 10^5. Drugim rečima, svako zrnce u sedmome stupcu stoji mesto 10^6. Svako zrnce u šestome stupcu stoji mesto 10^5; svako zrnce u petome stupcu mesto 10^4; svako zrnce u četvrtome stupcu mesto 10^3; svako zrnce u trećem stupcu mesto 10^2. Ako to izrazimo jednim prostim pravilom, možemo reći da je 10^n vrednost svakog zrnca u $(n + 1)$ stupcu. Posledice ovog pravila, koje je Štifel pronašao, očevidno su ga uzbudile gotovo isto toliko kao i broj 666, koji ga je naveo da pređe u veru reformisanog crkvenog učenja[1]).

Razmislite samo, od kolikog je ovo značaja. Pre svega našli smo fizički model za 10^n koji nas nosi daleko preko granica grčke geometrije. Grčka geometrija mogla nam je dati model za 10^1, tj. za duž od 10 jedinica; model za 10^2, tj. kvadrat čija je strana od 10 jedinica; model za 10^3, tj. kocku čija je ivica od 10 jedinica. Preko toga broj n stavljen gore desno, (onde gde ga mi stavljamo da nam pretstavi računsku radnju pri kojoj se međusobno množe n desetica) nije imao svog fizičkog pretstavnika u stvarnom svetu. Po novom načinu pisanja 10^{12} (trilion) znači vrednost koja bi bila data svakom zrncu u trinaestom stupcu neke računaljke sa trinaest i više stubaca, ako bi se takve pravile. Vidik velikih brojeva proširio se eto u beskraj. A šta je s manjim brojevima? Ništa nismo rekli o prvome stupcu. Da bismo videli primenu novog načina prevođenja izraza 10^n, treba da poređamo članove geometriskog niza u opadajuću progresiju u kojoj se indeksni brojevi (n) javljaju u samom pisanju brojeva. Ovako:

7 stubac	6 stubac	5 stubac	4 stubac	3 stubac
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100
10^6	10^5	10^4	10^3	10^2

2 stubac
10
10^1

Vidite kako n silazi za jedan stepen kad se vrednost zrnaca smanjuje time što se podeli sa deset. Indeksni broj n prvog stupca imao bi da bude za jedan manji od 1, tj. 0. Međutim možemo ići i dalje. Jedan manje od 0 je — 1 i tako 1 podeljeno

[1]) Protestantsku. — Red.

sa 10 iznosi 10^{-1}. Tako možemo proširiti vidik indeksnih brojeva nazad do ma koga stepena »malenkosti«. Ovako:

$$\ldots 10\,000 \quad 1\,000 \quad 100 \quad 10 \quad 1 \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1000} \ldots$$

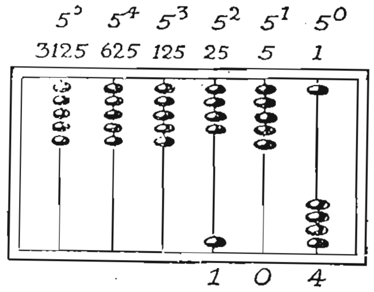
$$10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2} \quad 10^{-3}$$

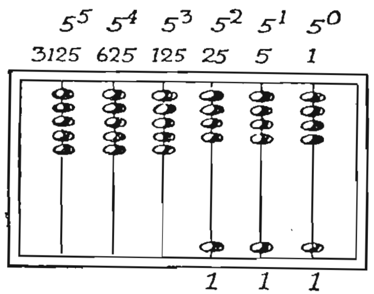
Druga čudna stvar kod ovih brojeva je u tome što oni mogu isto tako da nam izraze značenje a^n i kad je a neki drugi broj a ne 10. I ovo pokazuje da prednosti induskog pisanja brojeva nemaju nikakve veze sa tajanstvenim osobinama broja 10. Naprotiv, tajanstvene osobine broja 10 proizlaze prosto iz toga što su indeksni brojevi povećavani za 1, kad je vrednost zrnaca postajala deset puta veća. Sama desetica je izabrana prva prosto zato što je čovek upotrebljavao deset prstiju pri brojanju. Pretpostavimo da smo mi jednoruki, kako to žele naši militaristi. Onda bismo brojali u peticama kao što su donekle radili ratoborni Rimljani, upotrebljavajući međubrojeve (između punih dekada) V, L, D za 5, 50 i 500. Prvi stubac na računaljci imao bi pet zrnaca, svako zrnce bi vredelo jedan; drugi stubac pet zrnaca gde svako vredi pet; treći stubac pet zrnaca gde svako vredi pet puta pet; četvrti stubac pet zrnaca gde svako vredi pet puta pet puta pet. Kad bismo nabrojali pet zrnaca u prvome stupcu, imali bismo da ih sve uklonimo, pa da stavimo jedno zrnce u drugi stubac, a prvi da ostavimo prazan. Kad bismo nabrojali pet zrnaca u drugome stupcu, imali bismo da ih sve uklonimo, pa da stavimo jedno zrnce u treći stubac. I tako, ako bismo upotrebili 0 mesto praznoga stupca, pisali bismo, 1, 2, 3, 4 kao što radimo u dekadnom sistemu, samo što bi pet bilo 10, a dvadeset i pet bi bilo 100. Ako upotrebimo baš reči za označavanje brojeva, imali bismo ove oznake:

Jedan do pet	1	2	3	4	10
Šest do deset	11	12	13	14	20
Jedanaest do petnaest	21	22	23	24	30
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Dvadeset i jedan do dvadeset i pet	41	42	43	44	100
Sto dvadeset i jedan do sto dvadeset i pet	441	442	443	444	1000

Tablica množenja u ovom sistemu data je na sl. 102, sa tablicom sabiranja. Pošto ste lupali glavu i izradili za svoj račun tablicu, možete pomnožiti broj 104 koji odgovara broju 29 u našim oznakama s brojem 111 koji odgovara broju 31

u našim oznakama, služeći se tačno istom metodom koju i mi upotrebljavamo, sem što će tablica množenja i tablica sabiranja biti one sa sl. 102.





	1	2	3	4	10
1	1	2	3	4	10
2	2	4	11	13	20
3	3	11	14	22	30
4	4	13	22	31	40
10	10	20	30	40	100

(*a*) Tablica množenja za jednoruku računaljku (pet prstiju — osnova 5).

	1	2	3	4	10
1	2	3	4	10	11
2	3	4	10	11	12
3	4	10	11	12	13
4	10	11	12	13	14
10	11	12	13	14	20

(*b*) Tablica sabiranja za istu računaljku.

SL. 102. — RAČUNALJKA ZA JEDNORUKOG ČOVEKA

Načelo ove računaljke je u tome da je vrednost jednog zrnca u uzastopnim stupcima sleva nadesno data ovim izrazima:

$$\ldots x^5 \; x^4 \; x^3 \; x^2 \; x^1 \; x^0$$

U našim oznakama je $x = 10$. Za računaljku pokazanu ovde $x = 5$.

104 u oznakama jednoruke računaljke bilo bi $1 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 4 \cdot 1$ tj. 29 u oznakama desetoprstne računaljke kojom se mi danas služimo.

111 u oznakama jednoruke računaljke bilo bi $1 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1$ tj. 31 u oznakama desetoprstne računaljke kojom se mi danas služimo.

$$\begin{array}{r} 104 \\ \underline{111} \\ 104 \\ 104 \\ \underline{104} \\ 12044 \end{array} \qquad \text{ili, ako ste više svikli na drugi način} \qquad \begin{array}{r} 104 \\ \underline{111} \\ 104 \\ 104 \\ \underline{104} \\ 12044 \end{array}$$

Broj »12044« znači 1 · 625 plus 2 · 125 plus 0 · 25 plus 4 · 5 plus 4 · 1, tj. broj 625 + 250 + 0 + 20 + 4 = 899, a taj se broj dobija kad se pomnože 29 sa 31:

$$\begin{array}{r} 29 \\ 31 \\ \hline 87 \\ 29 \\ \hline 899 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 29 \\ 31 \\ \hline 29 \\ 87 \\ \hline 899 \end{array}$$

Kad bi se ljudi sparivali kao stoka, moglo bi se odabiranjem udesiti da svi imaju onu poznatu bolest zvanu *račje makaze*[1]). Ljudska zajednica sa takvom unakaženošću mogla bi se služiti računaljkom od dva prsta. *Jedan* bi bilo 1, *dva* bi bilo 10, *tri* bi bilo 11, *četiri* bi bilo 100, *pet* bi bilo 101, *šest* bi bilo 110, *sedam* bi bilo 111, *osam* bi bilo 1000. Od cele tablice množenja imalo bi da se nauči samo 1 · 1 = 1 a jedino sabiranje bi bilo 1 + 1 = 10. Kvadratni bi koreni bili veoma laki, a jedina nezgoda bi bila, što bi se trošilo mnogo hartije.

Algoritmi. — Opseg nove aritmetike prikazan je u uvodu jednog od najstarijih dela napisanih na engleskom o novom načinu računanja »*Craft of Nombrynge*« (g. 1300 n. e.). »Ovde se priča kako ima 7 vrsta ili delova ove veštine. Prva se zove sabiranje, druga se zove oduzimanje. Treća se zove duplikacija. Četvrta se zove raspolovljivanje. Peta se zove umnožavanje. Šesta se zove deljenje. Sedma se zove izvlačenje korena«.

Vi ste već zapazili da se induske brojne oznake razlikuju od svih drugih oznaka pre njih. Oznake njihovih prethodnika bile su etikete kojima se obeležava račun koji hoćete da izvedete na računaljci, ili ste ga već izveli na njoj. Induski brojevi su kao metlom počistili taj glomazni instrument. Sabiranje i oduzimanje mogu da se izvrše »u pameti« isto tako lako kao i na računaljci. Razlog zašto je to mogućno leži u tome što je upotrebljena nula, ili *sunja*, za prazan stubac, te se broj cifara izjednačio s brojem stubaca na računaljci.

Algoritam množenja kojim se mi služimo osniva se na istome principu kao i misirsko udvajanje. Ono je, kao što poka-

[1]) Samo dva prsta na ruci. — Prev.

zuje naš navod, išlo rame uz rame s njim neko izvesno vreme. U II dokazu naučili smo da je

$$(b + c + d)\,a = ab + ac + ad$$

Zato je množiti 532 sa 7, tj. 7 puta (500 + 30 + 2) isto što i

$$500 \cdot 7 + 30 \cdot 7 + 2 \cdot 7$$

U početku to bi se pisalo:

$$\begin{array}{r} 532 \\ 7 \\ \hline 14 \\ 210 \\ 3500 \\ \hline 3724 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 532 \\ 7 \\ \hline 3500 \\ 210 \\ 14 \\ \hline 3724 \end{array}$$

To je ubrzo skraćeno na ovo:

$$\begin{array}{r} 532 \\ 7 \\ \hline 3724 \end{array} \qquad \text{ili} \qquad \begin{array}{r} 532 \\ 7 \\ \hline 3724 \end{array}$$

Kad je već učinjen taj korak »prenošenja«, sasvim je prirodno što je za tim došao jedan prost način za množenje svih brojeva. Tako na primer:

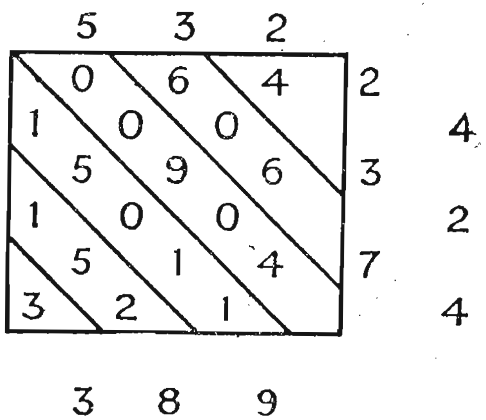
$$532 \cdot 732 = 532 \cdot 700 + 532 \cdot 30 + 532 \cdot 2$$

Ovo se može izvesti u obliku podesnom za sabiranje na dva načina. Desni način je bolji pošto je zgodan za približne vrednosti, naročito kad se upotrebljavaju desetni razlomci:

$$\begin{array}{rl} 532 & \\ 732 & \\ \hline 1064 & 532 \cdot 2 \\ 15960 & 532 \cdot 30 \\ 372400 & 532 \cdot 700 \\ \hline 389424 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 532 & \\ 732 & \\ \hline 372400 & 532 \cdot 700 \\ 15960 & 532 \cdot 30 \\ 1064 & 532 \cdot 2 \\ \hline 389424 & \end{array}$$

U najranijim trgovačkim aritmetikama koje su se služile arapsko-induskim algoritmima ovako su beleženi brojevi koji su se »prenosili«.

Odgovor se začas može pročitati na taj način što se sabiraju stupci dijagonalno. Za množenje kako ga mi vršimo pretpostavlja se da imamo neku tablicu množenja. Izjednačavanje brojnih oznaka sa zrncima mesto sa stupcima sasvim prirodno



smanjuje tablicu. Moramo biti sposobni da množimo samo do deset puta deset, a to je posao mnogo manje strašan za ljudsko pamćenje nego da se nauči aleksandriska tablica množenja kojom se služio Teon. Udvajanje se vuklo rame uz rame s našom metodom množenja zbog toga što se od nje ima koristi tek onda, kad je tablica množenja naučena napamet, tako da se ne mora jednako gledati u nju. To je pak moglo biti tek onda, kad su došle nove škole da zadovolje potrebe trgovačke klase. Nemačka je povela kolo u tome razvoju. »Veština računanja« je bila tako važna u Nemačkoj tokom četrnaestog veka, da se Nemačka mogla razmetati time, što u njoj postoji esnaf Rechenmeister-a[1]). Nemojte misliti da se razni algoritmi koji su danas u upotrebi upotrebljavaju na isti način. U Evropi se oba načina za izvođenje množenja (zdesna nalevo i sleva nadesno) upotrebljavaju veoma mnogo kako su ih i Arapi upotrebljavali. Manje je ujednačenosti u metodama deljenja i jedna metoda koja se uči po engleskim školama ne liči potpuno ni na jednu arapsku metodu. To je srazmerno skori

[1]) Računara. — Prev.

pronalazak: prvi put ga je upotrebio, koliko je nama poznato, Kalandri 1491 g. Ako ne znate zašto delimo ovako kako delimo, najbolje ćete razumeti ako upotrebite opšte brojeve za svako zrnce na računaljci, a prvome stupcu date vrednost 1, drugome x, trećem x^2, četvrtom x^3 itd. Onda možemo ponovo ispisati ranije množenje ovako:

$$\begin{array}{r} 5x^2 + 3x + 2 \\ \underline{7x^2 + 3x + 2} \end{array}$$

$35x^4 + 21x^3 + 14x^2$ (Zato što je $7x^2 \cdot 5x^2 = 7 \cdot x \cdot x \cdot 5 \cdot x \cdot x = 35x^4$ itd.)

$$\begin{array}{r} 15x^3 + \ 9x^2 + \ 6x \\ \underline{10x^2 + \ 6x + 4} \\ 35x^4 + 36x^3 + 33x^2 + 12x + 4 \end{array}$$

(Ako je $x = 10$, ovo je 389424).

Deljenje na računaljci je ponavljano oduzimanje. Podeliti 389 424 sa 732 znači naći koliko se puta može 732 oduzeti od 389 424, a da ništa ne pretekne. Kako metoda deljenja kojom se mi služimo odgovara radu na računaljci vidi se kad deljenje $(35x^4 + 36x^3 + 33x^2 + 12x + 4) : (7x^2 + 3x + 2)$ napišemo u ovome obliku:

$$\begin{array}{l} 7x^2 + 3x + 2) \qquad\qquad\qquad\qquad (5x^2 + 3x + 2 \\ \quad 35x^4 + 36x^3 + 33x^2 + 12x + 4 \\ \quad \underline{35x^4 + 15x^3 + 10x^2} \\ \qquad\qquad 21x^3 + 23x^2 + 12x + 4 \\ \qquad\qquad \underline{21x^3 + \ 9x^2 + \ 6x} \\ \qquad\qquad\qquad 14x^2 + \ 6x + 4 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{14x^2 + \ 6x + 4} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad 0 \quad\ 0 \end{array}$$

Kad oduzmemo $5x^2$ puta $7x^2 + 3x + 2$ ispražnjujemo peti stubac na računaljci.
Kad oduzmemo $3x$ puta $7x^2 + 3x + 2$ ispražnjujemo četvrti stubac na računaljci.
Kad oduzmemo 2 puta $7x^2 + 3x + 2$ ispražnjujemo i ostale stupce.

Mi i dandanji upotrebljavamo trgovački izraz »pozajmljujem jedan« pri oduzimanju i deljenju. To nas potseća da su se zakoni računanja razvili kao društvena potreba trgovačke klase. Upotreba opštih brojeva mesto zrnaca pokazuje nam zašto su aritmetički zakoni potpuno isti za jednoruku računaljku kao i za »desetoprstnu«. Upotreba brojnih oznaka koje mogu pretstavljati računaljku s onoliko stubaca koliko nam je potrebno znak je sve većeg razvoja trgovine kojoj su bile potrebne računske radnje s velikim brojevima. Nova je metoda postajala sve omiljenija kad je Evropa uzela od Istoka društvenu tekovinu koja joj je zgodno poslužila da se sasvim otrese računaljke. Hartija i štampanje, kao i *sunja,* došli su sa Istoka. »Svitanje Ništice« bilo je u isto vreme i svitanje jevtinog materijala za pisanje.

Mi smo unapred pomenuli neke pronalaske koji su došli posle ovog arapskog pronalaska pominjući neke »čudesne stvari«, kako ih ono naziva Štifel, u vezi sa induskim brojevima. Time smo hteli dati prost odgovor na pitanje koje je postavljeno u jednom odeljku na početku ove glave. Sve algoritme za rad s razlomcima koji se danas upotrebljavaju pronašli su Indusi. To pokazuje kako je posao oko istraživanja opštih pravila o ponašanju brojeva ubrzan čim su nove oznake bacile čitavo more svetlosti na brojeve. U raspravljanju o razlomcima Grci nisu nikad dalje makli od misirskog Rajndovog papirusa[1]). Na razlomke su gledali metaforički: zamišljali su sve manje i manje jedinice, kao što mi delimo tone na cente, ove na kilograme, a njih na gramove. Ljudi su bili nesposobni da razlomak shvate kao samostalan broj i otuda onakva praksa s razlomcima kakva se provlači hiljadama godina. Matematičari staroga doba su sve svoje napore ulagali u jalov posao da rastave razlomak kao na primer $\frac{2}{43}$ na zbir jediničnih razlomaka. Na primer:

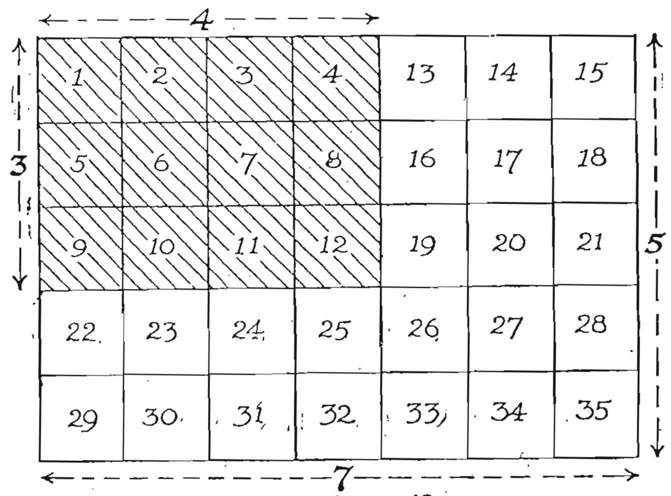
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{30}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645} \quad \text{ili} \quad \frac{2}{43}=\frac{1}{43}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{258}$$

Kao što se vidi na ovome primeru ovaj je posao bio i nekoristan i zamršen. Prosto objašnjenje ove prividne varke u tome je, što su prve račundžije pokušavale da stave dva razlomka jedan uz drugi, da bi videli koji je veći, kao što bismo mi mogli sravnjivati i dve težine kao što su 1 tona, 1 centa i 1 dekagram sa 1 centom, 1 kilogramom, 1 hektogramom. Kad se setimo da su Grci i Aleksandrinci nastavili taj neobični posao nećemo se čuditi što su postigli tako malo uspeha u svojoj aritmetici.

[1]) Godine 1850 pronašao je engleski naučnik A. H. Rajnd (Rhind) jedan papirus koji se sad nalazi u Britanskom muzeju u Londonu. Na njemu je »Ahmesova računica« iz doba između 2000 i 1700 g. pre n. e. — Prev.

Međutim moramo se čuditi kako su ono malo njih, kao Arhimed, mogli pronaći uopšte ma šta o brojnim nizovima čiji su članovi razlomci.

Opremljeni ovim svojim prostim ali rečitim brojnim oznakama Indusi su sasvim raskinuli sa metaforskim načinom postupanja s razlomcima. Oni su pisali razlomke kao što ih i mi danas pišemo, a kako su imali aritmetiku koja je bila podesna za brzo računanje bez upotrebe mehaničkih sredstava, oni su radili s razlomcima kao s celim brojevima. Tako je Mahavira (850 g. n. e.) naše pravilo za deljenje razlomka razlomkom izrazio istim rečima kojim se i danas služi nastavnik u školi: »Načini imenilac brojiocem, pa onda množi«. Tri osnovna pravila vide se odmah kad pogledamo geometriske slike kao što je ona data u III glavi (v. sl. 103) čim raspolažemo razumnim



$$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

SL. 103. — MNOŽENJE RAZLOMAKA

načinom pisanja razlomaka. Mi smo objasnili pravilo za množenje, naime:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \quad \text{Na primer} \quad \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$$

Pravilo za deljenje dobivamo prosto time što se setimo da je deljenje „obrnuta" računska radnja množenja, tj. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ znači: „Naći broj koji pomnožen sa $\frac{c}{d}$ daje $\frac{a}{b}$". To se može ovako napisati opštim brojevima:

$$x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \text{ tj.}$$

$$\frac{cx}{d} = \frac{a}{b}$$

Kad primenimo dijagonalno pravilo dobivamo:

$$bcx = ad$$

$$x = \frac{ad}{bc}$$

Na primer:

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} = \frac{21}{20}$$

Pravilo za sabiranje i oduzimanje takođe izlazi iz pravila za množenje, ovako:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{1}{b}\left(a \pm \frac{bc}{d}\right) = \frac{1}{bd}(ad \pm bc) = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Na primer:

$$\frac{3}{5} \pm \frac{4}{7} = \frac{21 \pm 20}{35}$$

Ukoliko se algebra razvijala u vezi s potrebom da se nađu pravila za brzo i lako računanje, ona je brzo napredovala čim su ljudi počeli da upotrebljavaju i da pišu brojeve tako, da je ta pravila bilo lako zapaziti, a kad se već zapaze, lako ih je bilo primeniti. Videli smo kako je Štifel računaljku na hartiji s induskim brojevima produžio unazad i pretstavio desete, stote, hiljadite itd. pomoću zamišljenih stubaca sa indeksnim brojevima[1]) —1, —2, —3 itd. desno od stupca, ili jedinica. Ako ostavimo prazninu desno od stupca jedinica, ili stavimo

[1]) Stepenim izložiteljima, u ovom slučaju. — Red.

zapetu, da bismo pokazali gde je stubac jedinica, cifre broja 125 u izrazu *0,125* znače 1 deseti, 2 stota i 5 hiljaditih. Isto tako iste cifre u broju 5210,1 znače: pet hiljada, dve stotine, 1 desetica i 1 deseti. Način na koji se ovaj posao razvijao bio je u neposrednoj vezi s pravilom o upotrebi prostih brojeva radi uprošćavanja izvlačenja kvadratnih korena. Indusi i Arapi su mnogo poboljšali proste trigonometriske tablice Aleksandrinaca svojim sopstvenim proučavanjima u astronomiji. Za taj je posao, kao što smo već videli, potrebna tablica kvadratnih korena. Arapski su matematičari u principu shvatili korist od toga što je računaljka produžena desno od stupca jedinica, da pretstavi razlomke u opadajućem nizu koji pri svakom stupnju postaju deset puta manji. Kad im je bio potreban $\sqrt{2}$, oni bi ga napisali kao $\sqrt{\frac{200}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{200}$ kao prvu približnu vrednost, kao $\sqrt{\frac{20000}{10000}}$ ili $\frac{1}{100}\sqrt{20000}$ kao drugu približnu vrednost, kao $\sqrt{\frac{2\,000\,000}{1\,000\,000}} = \frac{1}{1000}\sqrt{2\,000\,000}$ kao treću približnu vrednost itd. Proba odmah pokazuje da je $\sqrt{200}$, grubo uzevši, 14, što je, podeljeno sa 10, pisano 1 4 (sa razmakom između 1 i 4). Slično tome, najbliži ceo broj za $\sqrt{2\,000\,000}$ je 1414, a on je podeljen sa 1000 bio pisan ovako 1 414, da bi se pokazalo da je 414 decimalni razlomak, deo toga kvadratnog korena. Tablice kvadratnih korena štampane u ovome obliku dao je *Rechenmeister* Adam Rize u 1522 g. Nezavisno od toga, a kao prirodno čedo istog ovog postupka, dao je Al Kaši iz Samarkanda oko 1400 g. svoju vrednost za π ovako: 3 14159 ... sa tačnošću do devetog decimala. Decimalnu tačku[1]) da se njome obeleži onaj razmak uveo je Pelaci iz Nice oko 1492 g. U Engleskoj se ona piše iznad linije, a u Americi na liniji. U Evropi zapeta na liniji obeležava taj razmak. Otkako ja zavedena mašina za pisanje sasvim je sigurno da će engleski način biti zamenjen američkim ili evropskim kontinentalnim načinom. U doba Adama Rize ljudi su bili shvatili osnovnu istinu da pravila koja važe za aritmetiku brojnog sistema na principu mesnih vrednosti ostaju uvek ista ma kakvu vrednost (x) davali zrncima pojedinih stubaca. Drugim

[1]) Mi pišemo decimalnu zapetu. — Prev.

rečima, sabiranje, oduzimanje, množenje, delenje itd. isti su za desetne razlomke kao i za cele brojeve. Jedino što se mora paziti da se brojevi tako poređaju, da se vidi gde ima da dođe desetna zapeta (na pr. pri množenju sleva nadesno), ili da se po zdravoj pameti desetna zapeta stavi gde treba.

Stevinus koji je bio knjigovođa, a kome je Viljem Oranski poverio snabdevanje svoje vojske, tražio je još 1585 da se zakonom usvoji decimalni sistem. Tu su misao oživeli Bendžamin Franklin i drugi u doba Američke Revolucije, a do kraja je to sprovela Narodna skupština Francuske Revolucije. Engleska se i dalje čvrsto drži jedne zastarele zbrke mera i još nije sasvim uspela da uvede arapske cifre u Donji Dom. Engleski političari slabo stoje s naukom. U tom pogledu stanje je isto kao u doba kad visoki pretstavnici vlasti još nisu bili zamenili raboše naših paleolitskih predaka računaljkama naših neolitskih predaka. Čarls Dikens[1]) govori u jednom zanimljivom odeljku o ovoj zadocneloj reformi:

»Pre mnogo godina u ministarstvu finansija bio je zaveden običaj da se računi vode kao kod divljaka: na štapićima; računi su se vodili gotovo sasvim onako kako je Robinson Kruse vodio svoj kalendar na pustom ostrvu. Mnogo računovođa, knjigovođa i stručnjaka za osiguranje su se rodili i pomrli... Samo se zvanični šablon i dalje čvrsto držao za ove štapiće kao da su to stubovi Ustava; i dalje su se računi u ministarstvu finansija vodili na nekakvim brestovim štapovima zvanim raboši. Za vlade Džordža III nekakav revolucionarni duh pokrenuo je pitanje: kad već postoje pero, mastilo i hartija, tablice i pisaljke, da li bi trebalo i dalje se držati tvrdoglavo toga zastarelog običaja? Ne bi li tu trebalo izvršiti neku promenu? Sav se šablon u zemlji još više ušablonio pri samom pomenu tog drskog i originalnog shvatanja i trebalo je da dođe čak 1826 godina, pa da se ti raboši ukinu. Godine 1834 našlo se da se tih raboša mnogo nakupilo, te je iskrslo pitanje šta će sa tim isluženim crvotočnim, istrulelim, starim komadićima drveta? Štapići su smešteni u Vestminster; svaki bi se pametan čovek dosetio da nema ničeg prostijeg već da se dozvoli da ih sirotinja što je živela u tom kraju raznese kućama da se greje. Ti štapići nisu nikad ni za šta koristili, a birokratski šablon je, eto, sprečio da se iskoriste, pa je izašla naredba da se tajno

[1]) Veliki engleski književnik (1812—1870). — Prev.

spale. I tako se desilo da su oni spaljeni u jednoj peći Doma Lordova. Peć je bila pretrpana ovim smešnim drvenim komadićima, te se od nje zapale zidne obloge od daščica: daščice prenesu vatru u Donji Dom; od dva doma ostao je samo pepeo; pozvani su arhitekti da ih ponovo sagrade; zbog toga nama isteraše iz džepova i drugi milion«.

Neuspeh Stevinusov da ubedi Holandsku Republiku da treba da uvede sistem desetnih razlomaka jeste istoriski presedan i pouka i za naše dane. Holandski su trgovci bili i suviše zauzeti teologijom, te nisu obratili pažnju na jednu nužnu praktičnu reformu koja je ponikla iz njihovih sopstvenih društvenih potreba. Svet je imao da pričeka dok srednje klase prerastu i prevaziđu doktrinarnu raspru protestantskih reformatora. Danas možemo isto tako jasno da vidimo da je potrebno izvesti reforme u obrazovanju koje proističu iz radnog života druge jedne društvene grupe koja je na putu da postane vladajuća klasa.

Jednačine. — Aleksandriski matematičari su zbog problema na koje su nailazili u astronomiji i u mehanici bili primorani da obrate pažnju na računske veštine. Rani induski matematičari su posvetili mnogo pažnje problemima s brojevima u vezi sa porastom trgovine. Kad govorimo o *algebri*, tome drevnom delu Indusa, treba imati na umu da se reči aritmetika i algebra upotrebljavaju u jednom smislu po školskim udžbenicima, a drugome u istoriji matematike. Ono što se danas zove aritmetika ne odgovara grčkoj reči *arithmetika,* o kojoj smo govorili u V glavi. Aritmetiku po našim školama sačinjavaju delom računska pravila proistekla iz algoritama Indusa i Arapa, a delom rešavanja računskih problema pri čemu se ne upotrebljavaju opšte brojne oznake, po kojima se taj deo matematike obično i zove algebra. Prosta i sigurna pravila za upotrebu opštih brojeva i stenografski znaci za matematičke glagole i operacije razvijali su se veoma sporo. Diofant je prvi pokušao tako nešto; posle njega u toku nekoliko vekova matematičari su na potpuno individualistički način prilazili problemima u kojima je bilo brojeva. Svaki je pisac upotrebljavao stenografiju koju je razumevao samo on, a nije ni pokušavao da uvede oznake koje bi važile za sve, pa je bio primoran da se obrati svakodnevnom jeziku ako je svoje metode hteo da objasni drugima. Za matematičare izraz »algebra« znači skup pravila za rešavanje problema s brojevima, bilo da su pravila potpuno ispisana rečima (*retorska* algebra) ili manje-više uprošćena skraćivanjima (*sinkopirana* algebra), ili izražena isključivo slovima i operativnim znacima (simbolična algebra). Problemi trgovačke aritmetike čije rešavanje učimo po školama odgovaraju onome što matematičari zovu retorska algebra. U upotrebi oznaka za skraćivanje nije bilo neprekidne linije razvoja. Razni pisci upotrebljavali su razne oznake, stavljajući ponekad slova mesto brojeva. Arapi su upotrebljavali sinkopirane izraze koji su odgovarali našim današnjim jednačinama. Pojedini pisci među prvim novim privrženicima arapske nauke, kao dominikanski monah Jordanus (1220 g.) sasvim su zamenjivali reči oznakama. Jordanusov savremenik Leonardo iz Pize (Fibonaći) radio je to isto. Naredne primere koji pokazuju prelaz od čisto retorske algebre do moderne algebarske stenografije ne navodimo zato da bi prikazali ceo lanac u istoriskom razvitku, nego više zato da se u jasnoj istoriskoj perspektivi osvetli činjenica da je jezik dimenzija izrastao u neprimetnim stupnjevima iz svakodnevnog jezika.

Regiomontanus, godine 1464:

3 census et 6 demptis 5 rebus aequatur zera.

Paćoli, godine 1494:

3 census p 6 de 5 rebus ae 0.

Viet, godine 1591:

3 census p 6 de 5 rebus ae 0.

Stevinus, godine 1585:

$$3\,\textcircled{2} - 5\,\textcircled{1} + 6\,\textcircled{0} = 0$$

Dekart, godine 1637:

$$3x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Za Grke koji su već bili iscrpli sva slova svoje azbuke za posebne brojeve bilo je gotovo nemoguće da pređu sa »retorske« diskusije o pravilima za rešavanje problema na simbolizam u modernom vidu. Ma da su induske cifre uklonile tu smetnju na putu ka napretku, nije pre svega bilo društvene

mašine koja bi terala na to da se uvedu u opštu upotrebu pronalasci za pretstavljanje operatora. Jedina operativna oznaka koju su nam Arapi doneli sa induskih izvora jeste znak kvadratnog korena ($\sqrt{\ }$). Društvena mašina koja je ravnala put za ovu ogromnu ekonomiju u jeziku dimenzija pojavila se u srednjovekovnoj Evropi na malo čudan način. Naša reč »više« jeste skraćenica od reči »višak«. Po srednjovekovnim trgovinama označavano je kredom na džakovima, korpama ili na buradi »+« i »—« da se pokaže da je u njima više odnosno manje robe nego što je označeno. Te je znake uvela u opštu upotrebu jedna od prvih štampanih knjiga — Vidmanova *Trgovačka aritmetika*, izdata 1489 u Lajpcigu. Prvi koji je upotrebio te znake pri rešavanju jednačina bio je Stevinus, koji je, kao što je već rečeno, bio trgovački knjigovođa. U svojoj engleskoj trgovačkoj aritmetici, izdatoj jedan vek docnije, Rikord je uveo znake »×« i »=«. Otuda je ušla u opštu upotrebu matematička stenografija koju je prvi upotrebio Dekart. Tako je matematika oslobođena glomaznih okova svakodnevnog govora. Opet možete videti u istoriji matematike kako je preokret potekao pre iz zajedničkog društvenog nasleđa nego iz glave kakvog »osamljenog genija«. Jedna od najvažnijih stvari koju treba razumeti u matematici jeste prelaz sa retorske na simboličku algebru. Ono što se zove rešavanje jednačine to znači dovođenje jednačine na takav oblik u kome njeno značenje postaje očevidno. Algebarska nam pravila kažu kako se to radi. Najteži korak je u tome da se problem prevede sa svakodnevnog jezika na algebarski. Na tome mestu i sam matematičar može da udari pogrešnim putem, jer mu problem dat na svakodnevnom jeziku može biti teže shvatljiv nego prostom čoveku koji nije matematičar. Kad je već problem izražen matematičkom rečenicom (ili jednačinom) možemo je slobodno poveriti matematičaru da dovrši posao. To što ima da se uradi to već spada u oblast posebne, matematičke gramatike. Opasnost je jedino u tome da se matematičaru poveri prevod na algebarski jezik.

Da bismo razumeli veštinu prevođenja sa svodnevnog na matematički jezik imamo da savladamo jednu poznatu teškoću koja se javlja pri učenju stranih jezika. Jednostavnim iznalaženjem reči u rečniku ne možemo lako uhvatiti smisao neke rečenice na stranom jeziku. Svaki jezik ima svoju posebnu idiosinkraziju[1]) reda reči ili idiom[2]). Ako ne znamo ništa o idiomima nekog jezika možemo gadno da zalutamo. Zato ćemo dopuniti ono što smo rekli o gramatici običnih jezika u jednoj ranijoj glavi ovim trima pravilima i dvema opomenama.

Pravila. — (1). — Svaki poseban stav datih podataka (izričitih ili podrazumevanih) prevedite zasebno u obliku »Nečim uradi nešto da dobiješ nešto«.

(2). — Tvrđenje kombinujte tako da se oslobodite svih količina o kojima ne želite ništa da znate. Da biste to izveli, izričitim tvrđenjima treba dodati ona koja se podrazumevaju.

(3). — Poslednje tvrđenje napišite u obliku »Broj koji želim da dobijem (x) može se dobiti (=), kad stavimo neki običan broj«.

Opomene. — (1). — Pazite da svi brojevi koji pretstavljaju istu vrstu količina budu izraženi istim jedinicama, na primer, ako je novac, onda sve u hiljadarkama, ili sve u dinarima itd.; ako je dužina, sve u metrima, ili sve u kilometrima itd; ako je vreme, sve u sekundima, ili sve u časovima itd.

(2). — Proverite rezultat.

Da bismo pokazali kako se rečenice koje govore o brojevima prevode na jezik algebarskog simbolizma, daćemo sad šest problema. Ti se problemi mogu izraziti najprostijom vrstom jednačina i za njih su induski matematičari dali retorska pravila za rešavanje. Pre nego što pređemo na njih neće biti na odmet da kažemo još neku reč radi objašnjenja. Kad se lako služite nekim stranim jezikom, vi manje više odmah prevodite na taj jezik i to tako da je to u duhu tog jezika. Kad ste početnik, morate ići korak po korak. U narednim problemima ići ćemo korak po korak, da bismo vam pokazali da za rešavanje problema nije potreban neki naročiti dar, već prosto veština da primenjujete utvrđena gramatička pravila. Razume se da nećete morati prevoditi rečenicu po rečenicu kad budete uhvatili u čemu je majstorija pri prevođenju. Onda ćete rečenicu iz običnog govora prevesti u jednom ili u dva poteza.

[1]) Naročita osetljivost organizma prema nekom leku ili prema nekom jelu. — Prev.

[2]) Posebna osobina svojstvena samo jednom jeziku. — Prev.

Primer I. — Tekući račun jednog mesnog sindikalnog veća je četiri puta veći od računa uloga, a obadva računa zajedno iznose 35 funti. Koliko ima novaca na svakom računu posebice?

Prvo tvrđenje: Tekući račun je četiri puta veći od računa uloga, tj. »Sa 4 pomnoži broj funti sa računa uloga (u) pa ćeš dobiti broj funti na tekućem računu (t)«

$$4u = t \ldots (1)$$

Drugo tvrđenje: Oba računa zajedno iznose 35 funti, tj. »Broj funti s tekućeg računa mora se dodati broju funti sa računa uloga da bi se dobilo 35 funti«.

$$t + u = 35 \ldots (2)$$

Kad saberemo (1) i (2) imamo:

$$4u + t + u = 35 + t$$
$$4u + u = 35$$
$$5u = 35$$
$$u = \frac{35}{5} = 7$$

Račun uloga je 7 funti, a tekući račun je (35 — 7) funti, tj. 28 funti.

Proba: $4 \cdot 7$ funti = 28 funti.

Primer II. — Voz polazi iz Londona za Edinburg u 1 čas i prelazi 50 milja[1]) na čas. Drugi voz polazi iz Edinburga za London u 4 časa i prelazi 25 milja na čas. Kad je Edinburg 400 milja daleko od Londona, kad će se sresti ta dva voza?

Na osnovu onoga što nam je rečeno možemo za svako vreme naći koliko su vozovi odmakli. Mi želimo da odredimo vreme kad će oba voza biti podjednako daleko od Edinburga ili podjednako daleko od Londona. Pošto to mora da se desi tek posle polaska drugog voza, mi ćemo traženo vreme računati od 4 č, tj. traženo vreme (t) je toliko i toliko časova posle 4 č.

Prvo tvrđenje: Voz A polazi iz Londona u 1 čas, tj. »Dodajte 3 (vreme od 1 do 4 časa) na broj časova posle 4 časa kad se

[1]) Milja ima 1609 metara. — Prev.

vozovi susretaju, pa ćete dobiti broj časova (T) za koje je voz A bio na putu«.

$$3 + t = T \ldots (1)$$

Drugo tvrđenje: Voz A putuje iz Londona brzinom od 50 milja, tj. »Brojem 50 pomnožiti vreme (T) za koje je taj voz putovao do susreta na rastojanju (D) od Londona, dok se nisu sreli«.

$$50\,T = D \ldots (2)$$

Treće tvrđenje: Drugi voz polazi iz Edinburga u 4 časa i ide brzinom od 25 milja, tj. »Brojem 25 pomnoži vreme (t) posle 4 časa kad se vozovi sretnu da dobiješ rastojanje od Edinburga (d) na kome se oni sretaju«.

$$25\,t = d \ldots (3)$$

Četvrto tvrđenje: Rastojanje od Londona do Edinburga je 400 milja tj. »Od 400 oduzmi rastojanje (d) do Edinburga od mesta susreta, pa ćeš dobiti rastojanje od mesta susreta do Londona«.

$$400 - d = D \ldots (4)$$

Spojimo (1) i (2) množeći levu stranu levom, desnu desnom:

$$(3 + t)\,50\,T = DT$$

$$50\,(3 + t) = D \ldots (5)$$

Iz (3) uzmimo vrednost za d, pa ga unesimo u (4):

$$400 - 25\,t = D \ldots (6)$$

U (5) i (6) su jednake desne strane.

Pokažite sad da su u (5) i (6) jednake i leve strane:

$$50\,(3 + t) = 400 - 25\,t$$

Delimo obe strane sa 25 da bismo uprostili račun:

$$2\,(3 + t) = 16 - t$$

Dalje je:

$$6 + 2t = 16 - t$$

$$2t + t = 16 - 6$$

$$3t = 10$$

$$t = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ (časa posle 4 časa)} = 3^h\ 20^{min} \text{ posle 4 časa.}$$

Vozovi će se sresti u $3^h\ 20^{min}$ posle 4 časa, tj. u $7^h\ 20^{min}$.

Proba:

$$50\left(3 + 3\frac{1}{3}\right) + 25 \cdot 3\,\frac{1}{3} = 400$$

$$150 + 150\frac{50}{3} + 75\frac{25}{3} = 150 + 150 + 75 + \frac{75}{3} = 375 + 25 = 400$$

Primer III. — Koliko čaja od 1080 dinara po kilogramu treba pomešati sa 100 kg čaja od 1441 d kilogram, da bi se dobila smeša od 1170 d 1 kg?

Prvo tvrđenje: Izvesna količina (x) čaja ima da se doda na 100 kg čaja koji već imamo, tj. »x kg se moraju dodati na 100 kg da se dobije broj kilograma (N) smeše«.

$$100 + x = N \ldots (1)$$

Drugo tvrđenje. — Taj čaj ima da se prodaje po 1170 d kilogram, tj. »Sa 1170 pomnoži težinu (u kilogramima) smeše da dobiješ celokupnu vrednost (T)«.

$$1170\,N = T \ldots (2)$$

Treće tvrđenje. — Cena dodatog čaja je 1080 d kilogram, tj. »Sa 1080 pomnoži broj dodatih kilograma da dobiješ u dinarima vrednost (v) dodate količine čaja«.

$$1080\,x = v \ldots (3)$$

Četvrto tvrđenje. — Prvih 100 kg čaja staju 1440 d kilogram, tj. »Pomnoži sa 1440 broj 100 da dobiješ u dinarima vrednost (V) tih 100 kg čaja«.

$$1440 \cdot 100 = V \ldots (4)$$

Zdrav razum dodaje i *peto tvrđenje* koje nije rečeno, ali se podrazumeva: Dodaj vrednost dodatoga čaja na vrednost onih uzetih 100 kg čaja, pa ćeš dobiti celokupnu vrednost smeše:

$$v + V = T \ldots (5)$$

Spajamo (1) i (2) množenjem strana:

$$1170\,N(100 + x) = TN \quad \text{Delimo sa } N:$$

$$1170\,(100 + x) = T \ldots (6)$$

Spajamo (3) i (4) sabiranjem strana:

$$1080x + 144\,000 = v + V \ldots (7)$$

Spajamo (7) i (5)

$$1080x + 144\,000 = T \ldots (8)$$

Spajamo (6) i (8)

$$1170\ (100 + x) = 1080x + 144\,000.$$ Delimo sa 10:

$$117\,(100 + x) = 108x + 14\,400$$

Delimo sa 9:

$$13\,(100 + x) = 12x + 1600$$

$$1300 + 13x = 12x + 1600$$

$$13x - 12x = 1600 - 1300$$

$$x = 300$$

Proba:

Smeša ima (100 + 300) = 400 kg. Prodaje se po 1170 din.:

1170 · 400 =	468 000 dinara
I vrsta: 300 kg po 1080 d =	324 000 dinara
II vrsta: 100 kg po 1440 d =	144 000 dinara
	468 000 dinara

Primer IV. — Ahilovo utrkivanje s kornjačom.

Prvo tvrđenje. — Ahilova brzina je deset puta veća od kornjačine brzine. »Sa 10 pomnoži kornjačinu brzinu (*c*) da dobiješ Ahilovu brzinu (*C*).

$$10 \cdot c = C \ldots (1)$$

Drugo tvrđenje. — Ahil daje kornjači 100 metara »fore«, tj. »Na 100 dodaj rastojanje (*d*) koje je kornjača prešla dok ju je Ahil stigao, da dobiješ rastojanje (*D*) koje je Ahil prešao (u metrima) dok ju je stigao«.

$$100 + d = D \ldots (2)$$

Da bismo povezali ova dva tvrđenja moramo se setiti da je brzina rastojanje podeljeno vremenom (*t*), koje je očevidno isto u oba slučaja (to jest vreme za koje će kornjača biti dostignuta jeste vreme za koje Ahil dođe do nje). Zato možemo dodati dva tvrđenja koja se podrazumevaju.

Treće tvrđenje. — Da bismo dobili kornjačinu brzinu moramo dužinu koju ona pređe dok je Ahil stigne podeliti vremenom za koje se ona kreće.

$$\frac{d}{t} = c \ldots\ldots (3).$$

Četvrto tvrđenje. — Rastojanje koje pređe Ahil dok stigne kornjaču mora se podeliti vremenom za koje on trči, da bi se dobila njegova brzina.

$$\frac{D}{t} = C \ldots\ldots (4)$$

Iz (3) imamo $c = \frac{d}{t}$. To unosimo u (1)

$$10 \cdot \frac{d}{t} = C \ldots\ldots (5)$$

Iz (2) imamo $D = 100 + d$. To unosimo u (4):

$$\frac{100 + d}{t} = C \ldots\ldots (6)$$

U (5) i (6) su desne strane jednake. Onda moraju biti jednake i leve strane:

$$\frac{10 \times d}{t} = \frac{100 + d}{t}$$

Množimo obe strane sa *t*:

$$10d = 100 + d$$

Sad dalje:

$$10d - d = 100$$

$$9d = 100$$

$$d = \frac{100}{9}$$

$$d = 11\frac{1}{9} \text{ (metara)}$$

Primer V. — Kad meni bude onoliko godina koliko je sad mome ocu, imaću pet puta više godina nego što ih sad ima moj sin. Onda će moj sin imati osam godina više nego što ih ja imam sad. Moj otac i ja imamo zajedno 100 godina. Koliko je godina mome sinu?

Prvo tvrđenje. — Kad meni bude onoliko godina koliko je sad mome ocu imaću pet puta više godina nego što ih sad ima moj sin. tj. moj otac je sad pet puta stariji od moga sina. To znači: »Sa pet pomnoži godine moga sina (g) da dobiješ godine moga oca (G)

$$5g = G \ldots (1)$$

Drugo tvrđenje. — Kad meni bude onoliko godina koliko je sad mome ocu, mome sinu biće osam godina više nego meni sad. To rastavite ovako:

(A) Od godina moga oca (G) oduzmite moje godine (m) da vidite koliko meni treba još godina (l) da dođem u godine u kojima je sad moj otac.

$$G - m = l \ldots (A)$$

(B) Ovih l godina moraju se dodati godinama moga sina (g), da bi se videlo koliko će njemu biti godina (S) kad meni bude toliko godina koliko je sad mome ocu.

$$l + g = S \ldots (B)$$

(C) Osam se mora dodati na moje sadanje godine da dobijemo godine koje će imati moj sin posle l godina.

$$m + 8 = S \ldots (C)$$

U (B) i (C) jednake su desne strane. Zato moraju biti jednake i leve strane:

$$l + g = m + 8 \ldots (D)$$

Iz (A) uzmimo vrednost za l, pa je unesimo u (D):

$$G - m + g = m + 8 \ldots (2)$$

Treće tvrđenje. — Otac i ja imamo zajedno 100 godina:

$$m + G = 100 \ldots (3)$$

Iz (1) uzmimo vrednost za G, pa je unesimo u (2):

$$5g - m + g = m + 8 \text{ tj.}$$

$$6g = 2m + 8 \ldots (4)$$

Iz (1) uzmimo vrednost za G, pa je unesimo u (3):

$$m + 5g = 100, \text{ tj}$$

$$m = 100 - 5g \ldots (5)$$

Vrednost za m iz (5) unesimo u (4):

$$6g = 2\,(100 - 5g) + 8$$

A sad dalje delimo sa 2.

$$3g = 100 - 5g + 4$$

$$8g = 104$$

$$g = 13 \text{ (godina)}$$

Mome je sinu sad 13 godina[1]).

Primer VI. — (Jedan stari induski problem iz dela *Lilavati* od Ariabhata, oko 450 g. n. e.). — »Trgovac plati carinu na svoju robu u tri mesta. U prvome da $\frac{1}{3}$ od onoga koliko vredi njegova roba; u drugome $\frac{1}{4}$ od onoga što mu je ostalo; u trećem $\frac{1}{5}$ od onoga što mu je preteklo posle drugog mesta. Celokupna carina iznosi 24 rušpije. Koliko je vredela celokupna njegova roba?«

Prvo tvrđenje. — U prvome mestu platio je koliko jedna trećina njegove robe, tj. »Od onoga što je imao (x) odbij $\frac{1}{3}$ te vrednosti, da dobiješ ono što mu je ostalo (y) kad je stigao u drugo mesto«.

$$x - \frac{1}{3}x = y, \text{ ili :}$$

$$\frac{2}{3}x = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

---

[1]) U (1) stavimo 13 mesto g. Imamo odmah dedove godine: G = 65. Stavimo u (5) g = 13. Imamo m = 100 — 65, tj. m = 35 godina. Dobili smo ovo: Ded 65, otac 35 g, sin 13 g.

Proba: 13 × 5 = 65. Kad ocu bude 65 godina sin će imati 43, tj. 8 godina više nego što otac ima sad. Otac i ded imaju zajedno 35 + 65 = 100 godina. Problem je pravilno rešen. — P r e v.

Drugo tvrđenje. — U drugome mestu platio je $\frac{1}{4}$ vrednosti preostale robe, tj. »Od onoga što je imao kad je stigao u drugo mesto oduzmi $\frac{1}{4}$ te vrednosti, da dobiješ koliko je imao (z) kad je pošao iz drugog mesta«.

$$y - \frac{1}{4} y = z, \text{ tj.}$$

$$\frac{3}{4} y = z \qquad (2)$$

Treće tvrđenje: U trećem mestu platio je $\frac{1}{5}$ vrednosti ostatka i tako je platio svega 24 rušpije carine, tj. »Na $\frac{1}{5}$ od onoga što je imao kad je stigao u treće mesto dodaj carine što ih je platio u prvome mestu $\left(\frac{1}{3} x\right)$ i u drugome mestu $\left(\frac{1}{4} y\right)$, pa češ dobiti 24 rušpije«.

$$\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} y + \frac{1}{5} z = 24 \qquad (3)$$

Vrednost za z iz (2) unesimo u (3):

$$\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} y + \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} y\right) = 24, \text{ tj.}$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} y + \frac{3}{20} y = 24$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{5}{20} y + \frac{3}{20} y = 24$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{8}{20} y = 24$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{2}{5} y = 24 \qquad (4)$$

Vrednost za y iz (1) unesimo u (4):

$$\frac{1}{3} x + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} x\right) = 24$$

$$\frac{1}{3} x + \frac{4}{15} x = 24$$

Pomnožimo sa 15:

$$5x + 4x = 360$$

$$9x = 360$$

$$x = 40.$$

Njegova je roba vredela 40 rušpija.

Ovi su primeri izrađeni sve stupanj po stupanj sa sitnim pojedinostima, da vam se pokaže da rešavanje problema pomoću algebre jeste prosto prevođenje prema utvrđenim gramatičkim pravilima. Kao što je rečeno, ne morate prolaziti kroz sve ove stupnjeve kad se već budete lako izražavali jezikom brojeva. Kad sasvim ovladate njime videćete da se ovaj posao može i mnogo brže raditi. Pre svega obeležite opštim brojem (slovom) onaj broj koji želite naći, pa onda pišete sve što vam se o njemu kaže, dok ne dobijete rečenicu koja ima smisla. Na primer, peti primer može se izraditi mnogo kraće ovako:

Neka unuk ima x godina.

Onda ded ima $5x$ godina.

Otac ima $(100 - 5x)$ godina.

Dedove godine umanjene za sinovljeve i uvećane za unukove godine daju očeve godine uvećane za 8:

$$5x - (100 - 5x) + x = 100 - 5x + 8$$

$$16x = 208$$

$$4x = 52$$

$$x = 13.$$

Svi problemi koje smo dosad preveli mogu najzad da se izraze matematičkom rečenicom koja sadrži jedan opšti broj koji pretstavlja nepoznatu količinu koju tražimo. To se često može uraditi čak i kad problem ima dve nepoznate količine ako je veza među njima prosta i očigledna. Na primer, evo jednog problema s dvema nepoznatima gde nema teškoća.

Primer VII. — U kutiji za alate ima tri puta više drvenih klinaca nego metalnih i tri puta više metalnih klinaca nego zavrtanja. Svega ima 1872 koje klinaca koje zavrtanja. Po koliko ima komada od sve tri vrste? To možete prevesti ovako. Broj metalnih klinaca (m) je tri puta manji od drvenih klinaca (d). Dakle: $m = \frac{1}{3}d$. Broj zavrtanja (z) je jedna trećina broja metalnih klinaca: $z = \frac{1}{3}m$. Svega ih ima 1872:

$$d + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}m = 1872 \text{ tj.}$$

$$d + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}d\right) = 1872$$

$$d + \frac{1}{3}d + \frac{1}{9}d = 1872$$

Pomnožimo sa 9:

$$9d + 3d + d = 1872 \cdot 9$$

$$13d = 1872 \cdot 9$$

$$d = \frac{1872 \cdot 9}{13} = 144 \cdot 9 = 1296$$

Drvenih klinaca ima 1296; metalnih klinaca ima $\frac{1}{3}$ od toga, tj. 432; zavrtnja ima $\frac{1}{3}$ od 432 tj. 144.

Proba $\quad 1296 + 432 + 144 = 1872.$

Ako u problemu imamo više od jedne nepoznate, možemo zadatak izraziti matematičkom rečenicom s jednom nepoznatom pod uslovom da je jedna nepoznata izvestan broj puta ona druga, ili da se jedna nepoznata razlikuje od druge za poznatu količinu. Ako nije taj slučaj, ipak možemo da rešimo problem pod uslovom da možemo načiniti onoliko posebnih jednačina koliko ima nepoznatih. Sad ćemo pokazati jedan prost problem te vrste.

Primer VIII. — Dva kila masla i tri kila šećera staju 2550 dinara. Tri kila masla i dva kila šećera staju 2700 dinara. Šta staje maslo, a šta šećer? Ovaj problem znači: (1) Dvostruka cena masla (m) i trostruka cena šećera (s) iznosi zajedno 2550 dinara, tj.

$$2m + 3s = 2550$$

(2) Trostruka cena masla i dvostruka cena šećera zajedno iznose 2700 dinara, tj.:

$$3m + 2s = 2700$$

Imamo sad dve jednačine i dve nepoznate (m i s). Možemo se osloboditi obeju jednom prostom dosetkom koja se zove »rešavanje simultanih jednačina«. Možemo s jednom stranom jednačine raditi što god hoćemo pod uslovom da to isto uradimo i s drugom stranom. Ako obe strane prve jednačine pomnožimo sa 3, a obe strane druge jednačine pomnožimo sa 2, imaćemo dve jednačine u kojima je jedan član s jednom nepoznatom isti u obema jednačinama.

$$6m + 9s = 7650$$

$$6m + 4s = 5400$$

Ako oduzmemo levu stranu $6m + 4s$ od leve strane $6m + 9s$ isto je kao kad oduzmemo 5400 od 7650. Rezultati ta dva oduzimanja su jednaki:

$$5s = 2250$$

Odavde je $s = 450$ (dinara). Možemo dobiti m ako dobivenu vrednost s ($s = 450$) unesemo ma u koju od onih dveju jednačina. I tako:

$$2m + 3s = 2550$$

$$2m + 1350 = 2550$$

$$m = \frac{1200}{2}$$

$$m = 600 \text{ (dinara)}$$

Šećer staje 450 dinara, a maslo 600 dinara

Opšte pravilo za rešavanje dveju simultanih jednačina gde $a, b, c, d, e, f,$ stoje mesto poznatih količina, a x i y mesto nepoznatih kad je obavljeno prevođenje, može se ovako izvesti. Neka su jednačine:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Da se oslobodimo iksa pomnožimo prvi sa d, a drugi sa a:

$$adx + bdy = cd$$
$$adx + aey = af$$

Oduzmimo drugu od prve:

$$(bd - ae)\, y = cd - af$$

Sad imamo prostu jednačinu samo s jednom nepoznatom y, pošto su ostali opšti brojevi (slova) d a t i u problemu. Možemo, razume se, ako imamo da množimo manjim brojevima, množiti prvu sa e, a drugu sa b, i tako se osloboditi ipsilona, a ostaviti x:

$$aex + bey = ce$$
$$bdx + bey = bf$$

Kad oduzmemo, imamo:

$$(ae - bd)\, x = ce - bf$$

Indusi i Arapi su malo upotrebljavali operativne znake koji u modernoj algebri stoje mesto matematičkih glagola kad prevodimo neki problem iz svakodnevna života na jezik dimenzija i reda, kao što smo radili u prethodnim vežbanjima. Ipak su oni dali gramatička pravila koja su uglavnom ona ista, koja su data u III glavi. Al Khvarizmi je zapazio dva opšta pravila. Prvo je nazvao *al-mukabalah,* ili, kako to stoji u našim udžbenicima, *svođenje sličnih članova.* U modernoj stenografskoj algebri pravilo za izbegavanje izlišnosti vidi se na ovome primeru:

$$q + 2q = x + 6x - 3x, \text{ tj. kratko:}$$
$$3q = 4x$$

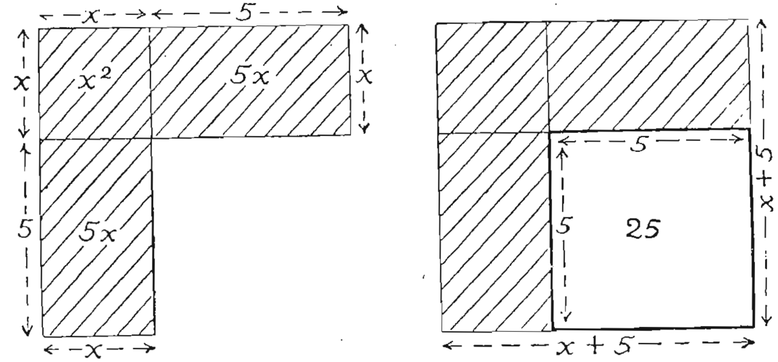
Drugo pravilo, čije je ime ušlo i u naš jezik, bilo je *al-gebra,* tj. prebacivanje količina s jedne strane jednačine na drugu. Jedan primer, ispisan našom stenografijom:

$$bx + q = p$$
$$bx = p - q$$

Al Khvarizmi daje pravilo za rešavanje jednačina u kojima se nalazi kvadrat nepoznatog broja koji gledamo da nađemo. Tim se pravilom služimo i dandanji. Njegova je metoda uglavnom ista kao i ona koju je prvi upotrebio Diofant. Ovo je primer koji je dao sam Al Khvarizmi:

$$x^2 + 10x = 39$$

Pravilo koje daje Al Khvarizmi osniva se na prostoj primeni IV dokaza iz IV glave, a slikom je pretstavljeno na sl. 104. Nacrtamo kvadrat (x^2, sl. 104, levo) čija je strana x; produ-



SL. 104. — REŠAVANJE KVADRATNE JEDNAČINE ALKHVARIZMIJEVOM METODOM DOPUNE KVADRATA

$x^2 + 10x = 39$

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$
$(x + 5)^2 = 64$
$x + 5 = 8$

žimo mu dve susedne strane za 5 jedinica, pa dopunimo tu sliku do dva pravougaonika čije su strane x i 5 jedinica. Sad imamo sliku u obliku slova Γ. Njena je površina

$$x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x.$$

Ako sad tu sliku levo dopunimo kvadratom čija je strana 5 jedinica, kao što smo je dopunili desno, površina će biti:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

kao što znamo iz IV dokaza. Jednačina nam kazuje da je

$$x^2 + 10x = 39$$

Odatle je dalje:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$
$$x^2 + 10x + 25 = 64$$
$$(x + 5)^2 = 8^2$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5$$
$$x = 3$$

Na taj način Al Khvarizmi daje pravilo za rešavanje takvih jednačina. Broj kojim je pomnoženo x (broj 10 u ovome primeru) on naziva »koren«. »Prepolovite broj »koren«. To vam u ovom slučaju daje 5. To pomnožite tim samim brojem. Proizvod je 25. Dodajte to na 39. Zbir je 64. Sad izvucite kvadratni koren iz toga; to daje 8, pa od 8 oduzmite polovinu broja »korena« koja iznosi 5. To je koren kvadrata koji ste tražili«.

Broj koji stoji uz x, kao ovde broj 10, danas mi zovemo *koeficient iksa.* Njega ćemo zameniti nekim slovom (opštim brojem) sa početka azbuke da pokažemo da je to broj koji već znamo, pa kad još i 39 zamenimo na isti način, mi kažemo: ako je

$$x^2 + bx = c, \text{ onda je}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$$

U izrazu $\frac{b^2}{4}$ poznajete kvadrat polovine koeficienta uz x $\left[\frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$, ili, kako bi Al Khvarizmi rekao, rezultat od množenja polovine »korena« tom istom polovinom.

Ovo pravilo za nalaženje vrednosti za x u jednačini koja sadrži x^2 mi zovemo »dopunjavanje do kvadrata«. To ima da nas opominje da je algebra jednačina proizišla iz hijeroglifskog načina rešavanja problema pomoću dijagrama kao u IV dokazu. Jednačine kao što je ova koju smo sad rešili mi i danas zovemo »*kvadratne jednačine*«, od latinske reči *quadratum* za četvorostranu sliku, ma da moderne algebre više ne donose sliku kad prikazuju pravilo. Evo jednog problema koji možete rešiti po pravilu što smo ga maločas izneli. Na kraju ove glave ima za vežbanje i lakših problema.

Primer IX. — Dva čoveka krenu jednovremeno peške na jednodnevni izlet. Jedan prelazi na čas četvrtinu kilometra više nego drugi. Brži stigne na zajednički cilj pola časa pre onog drugog. Obojica su prešli po 34 kilometra. Kojom brzinom se kreće jedan izletnik, a kojom drugi?

Prvo tvrđenje. — Onaj što prvi stiže ide $\frac{1}{4}$ kilometra na čas brže od drugoga, tj. »Brzini sporijeg izletnika (m kilometara na čas) dodaj $\frac{1}{4}$ kilometra, da dobiješ brzinu onog drugog izletnika (n kilometara na čas)«. To daje:

$$m + \frac{1}{4} = n, \text{ tj.}$$

$$n = \frac{4m+1}{4} \qquad (1)$$

Drugo tvrđenje. — Brži izletnik je proveo na putu pola časa manje, tj. »Od vremena (h časova) koje je proveo na putu sporiji izletnik, oduzmi $\frac{1}{2}$, da dobiješ vreme (H časova) koje provodi na putu onaj brži«. To daje:

$$h - \frac{1}{2} = H \qquad (2)$$

Treće tvrđenje. — Onaj brži, prelazeći n kilometara na čas, pređe put od 34 km za h časova. To znači: »Podeli 34 km vremenom koje izletnik provede na putu, pa ćeš dobiti njegovu brzinu«. To daje:

$$n = \frac{34}{H}, \text{ tj.}$$

$$H = \frac{34}{n} \qquad (3a)$$

$$= \frac{34}{h}$$

$$h = \frac{34}{m} \qquad (3b)$$

Vrednosti za h i H iz (3) unesimo u (2):

$$\frac{34}{m} - \frac{1}{2} = \frac{34}{n} \quad \ldots\ldots (4)$$

Vrednost za n iz (1) unesimo u (4):

$$\frac{34}{m} - \frac{1}{2} = \frac{34}{\frac{4m+1}{4}}$$

$$\frac{34}{m} - \frac{1}{2} = \frac{136}{4m+1}$$

$$\frac{68-m}{2m} = \frac{136}{4m+1}$$

Primenimo dijagonalno pravilo:

$$272\text{m} - 4\text{m}^2 + 68 - \text{m} = 272\text{m}$$

$$-4\text{m}^2 + 68 - \text{m} = 0$$

$$-4\text{m}^2 - \text{m} = -68$$

$$4\text{m}^2 + \text{m} = 68$$

$$m^2 + \frac{1}{4}m = 17$$

Primenimo Al Khvarizmijevo pravilo:

$$m = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 17} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{17 \cdot 64}{64}} - \frac{1}{8}$$

$$m = \sqrt{\frac{1+1088}{64}} - \frac{1}{8}$$

$$m = \sqrt{\frac{1089}{64}} - \frac{1}{8}$$

$$m = \frac{33}{8} - \frac{1}{8}$$

$$m = 4$$

I tako sporiji izletnik prelazi 4 km na čas, a brži $4\frac{1}{4}$ km na čas.

Proveravanje. — Brži provede na putu $34 : 4\frac{1}{4}$ časova. To je:

$$34 : \frac{17}{4} = 8 \text{ časova.}$$

Sporiji provede na putu $8\frac{1}{2}$ časova. On prelazi 4 km na čas:

$$8\frac{1}{2} \cdot 4 = 34 \text{ kilometra}$$

Rešavanje jednačina na osnovu ovog pravila dovelo je Arape do granice koju smo već zapazili i u grčkoj geometriji. Kad smo rešavali ove dve jednačine da pokažemo kako se primenjuje pravilo, dali smo uvek samo jedan odgovor. Međutim jednačina ne mora imati samo jedan odgovor. Kvadratna jednačina ima dva odgovora: odgovor koji tražimo, i njegovu senku. Arapski matematičari koji su umeli da se služe zakonom o predznacima veoma su se iznenadili kad su naišli na ovu zagonetku. Prema zakonu o predznacima:

$$(-a)\,(-a) = a^2$$

ali i

$$(+a)\,(+a) = a^2$$

Odatle je

$$\sqrt{a^2} = +a \text{ i } -a$$

ili, kao što se obično piše:

$$\sqrt{a^2} = \pm a$$

Zato svaki znak kvadratnog korena pretstavlja računsku radnju koja daje dva rezultata. Na pr.:

$$100 = (\pm 10)^2$$

$$49 = (\pm 7)^2$$

Ako se vratite na jednačinu kojom se poslužio Al Khvarizmi da prikaže pravilo, videćete da je

$$x = 8 - 5$$

ili

$$x = -8 - 5$$

tj.

$$x = 3 \text{ i}$$

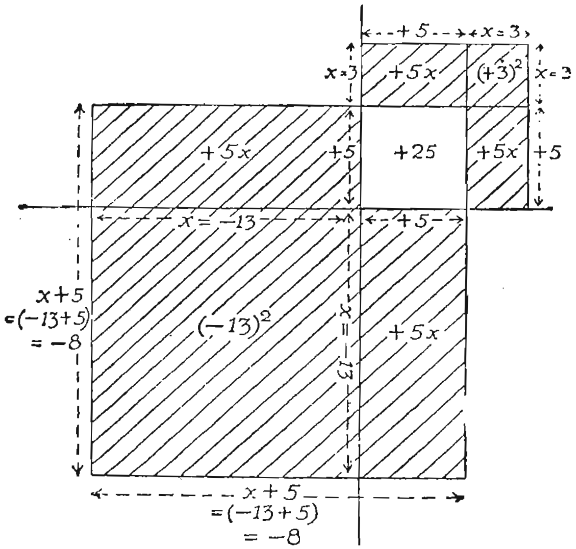
$$x = -13$$

Arapi su zapazili da oba ova rezultata zadovoljavaju ako se provere. Ovako:

$$3^2 + 10 \cdot 3 = 9 + 30 = 39$$

$$(-13)^2 + 10\,(-13) = 169 - 130 = 39$$

Mi smo prosto zanemarili drugi odgovor, pošto još nismo našli fizičko značenje za matematičke gerundiume kao što su -3 ili -13, što pretstavlja drugu varijantu rešenja jednačine prikazane na sl. 105. Videćete docnije da su ovi delovi matematičkoga govora postali jasni tek kad je geometrija



SL. 105. — ALKHVARIZMIJEV PROBLEM U REFORMACIJSKOJ GEOMETRIJI

Na prethodnoj slici mi ne znamo šta je x. Slika je upotrebljena prosto zato da pokaže brojno rešenje. U reformaciskoj geometriji u narednoj glavi videćete da ako količine nacrtane naviše i nadesno nazovemo

Reformacije pokazala kako se određuje položaj neke slike. Euklidova geometrija daje samo jedan odgovor. To dolazi otuda što se slike u toj geometriji smatraju jednakima u svakom pogledu i onda kad se nađu u dva sasvim različita položaja. Ovde ćemo se zadovoljiti time što ćemo primetiti da oba odgovora kvadratne jednačine mogu biti obični brojevi, tj. pozitivni brojevi, na koje se može primeniti Al Khvarizmijevo pravilo. Možda ste već čuli ovakvu zagonetku: »Broj je pomnožen samim sobom. Rezultat je dodat šestici. Ako od toga oduzmemo petostruki taj broj, ne ostaje ništa. Koji je taj broj?« Algebarskom stenografijom ova se zagonetka može ovako prevesti:

$$6 + x^2 - 5x = 0$$

To možemo napisati ovako:

$$x^2 - 5x = -6$$

Kad primenimo Al Khvarizmijevo pravilo i zakon o znacima, rešenje je ovo:

$$x = \sqrt{-6 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} - \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$x = \sqrt{-6 + \frac{25}{4}} + \frac{5}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}$$

$$x = \pm\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$$

$$x = +3 \text{ i } x = +2$$

pozitivnim količinama, moramo količine nacrtane nadole i nalevo nazvati negativnim količinama. Jednačina nam kaže da je

$$x + 5 = 8 \text{ ili } -8$$

To znači da površina celog kvadrata čija je strana $x + 5$ iznosi 64 kvadratne jedinice. Donji veliki kvadrat načinjen je od dva jednaka pravougaonika i dva različita kvadrata. Njegova je površina:
dva jednaka pravougaonika: $2 \times 5 \cdot (-13) = -130$ kvadratnih jedinica;
dva različita kvadrata: $(-13)(-13) + (5 \times 5) = 169 + 25 = 194$ kvadratne jedinice.
Celokupna površina toga donjeg velikog kvadrata je:

$$194 - 130 = 64$$

Videćete da oba ova broja zadovoljavaju u gornjoj zagonetki:

$$6 + 3^2 - 5 \cdot 3 = 6 + 9 - 15 = 0$$

$$6 + 2^2 - 5 \cdot 2 = 6 + 4 - 10 = 0$$

U rukama Indusa i Arapa i njihovih neposrednih sledbenika algebra je toliko porasla da su joj postale tesne Euklidove haljine. Počela je da zebe. Imalo je da dođe još i nešto gore. Neke jednačine ne omogućavaju odgovor koji je pozitivan broj; druge ne omogućavaju ni pozitivan ni negativan broj. Taj je zaplet mučio Italijana Kardana[1]) pri kraju prelaznog perioda između aleksandriskog doba i pronalaska reformaciske geometrije. Zabavljajući se zagonetkama kao što je ova gore, Kardano se spotakao o jednu novu vrstu odgovora koji dobijamo kad u gornjoj zagonetci izmenimo brojeve. Ovako: »Broj je pomnožen samim sobom. Rezultat je dodat petici. Ako od toga oduzmemo dvostruki taj broj, ne ostaje ništa. Koji je taj broj?« Prevod glasi:

$$5 + x^2 - 2x = 0 \text{ tj.}$$

$$x^2 - 2x = -5$$

$$x = \sqrt{(-1)^2 - 5} - (-1)$$

$$x = \sqrt{1 - 5} + 1$$

$$x = \sqrt{-4} + 1$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-4}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{4(-1)}$$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

Odatle proističe pitanje: ama šta to može značiti kvadratni koren iz —1? Po čisto gramatičkoj pogodbi jasno je da je to broj koji pomnožen samim sobom daje —1. Broj koji bi to uradio pretstavljao bi tačan odgovor. To možete videti

[1]) Italijanski matematičar Djeronimo Kardano (1501—1576). — Prev.

iz dve donje probe, jedne gde ± znači skroz +, a druge gde ± znači skroz —.

$$x^2 = (1 \pm 2\sqrt{-1})^2$$

$$x^2 = (1 \pm 2\sqrt{-1})\,(1 \pm 2\sqrt{-1})$$

Izvršićemo množenje:

$$(1 \pm 2\sqrt{-1})\,(1 \pm 2\sqrt{-1}) =$$

$$= 1 \pm 2\sqrt{-1} \pm 2\sqrt{-1} + 4(-1)$$

$$x^2 = 1 \pm 4\sqrt{-1} - 4$$

$$x^2 - 2x + 5 = 1 \pm 4\sqrt{-1} - 4 - 2(1 \pm 2\sqrt{-1}) + 5 =$$

$$= 1 \pm 4\sqrt{-1} - 4 - 2 \pm 4\sqrt{-1} + 5 = 0$$

Ma da nam ovo pokazuje da je naš odgovor gramatički sasvim tačan, ne pomaže nam da damo odgovor na pitanje šta je kvadratni koren iz — 1. Po zakonu o znacima $(+a)$ pomnoženo samim sobom daje $(+a^2)$, a $(-a)$ pomnoženo samim sobom daje opet $(+a^2)$. Znači, broj koji pomnožen samim sobom daje neku minus količinu nije običan broj, ni gerundium kao — 2. Sve što zasad možemo reći o njemu to je, da je to deo govora koji se može upotrebiti gramatički u onim vrstama rečenica što ih zovemo kvadratne jednačine. Prvi matematičari koji su naišli na ove brojeve nazvali su ih imaginarni (uobraženi) brojevi, što ih je i dalje ostavilo u magli. I zbilja će ostati u magli, u bukvalnom smislu, kad pređemo na geometriju Reformacije. Kao — 1, tako je i $\sqrt{-1}$ matematički gerundium. U geometriji Reformacije u IX glavi videćemo da je (— 5) i pravac i broj (sl. 105). On znači da treba uzeti pet mernih jedinica odmernih jedinica nazad, a $\sqrt{-5}$ znači $\sqrt{5}$ mernih jedinica odmerenih pravo gore u vazduh. Oba ova matematička gerundiuma mogu sad da se upotrebe da prikažu kretanje u stvarnome svetu, pošto nam je duga plovidba dala geometriju u kojoj se stvari mogu kretati oko nas i imati određen položaj kao brod na moru. Danas nije teže množiti sa $\sqrt{-100}$ nego reći šta biva kad brod bude bačen 10 metara u vazduh, ili potopljen na dubini od 10 metara kad naiđe na minu.

Al Khvarizmijevo pravilo za rešavanje kvadratne jednačine ponekad se daje u potpunijem obliku za rešavanje jednačina u kojima koeficient uz x^2 nije *jedinica* kao što je bio u već navedenim primerima. Jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0$$

može se napisati i ovako:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Kad primenimo Al Khvarizmijevo pravilo imamo:

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da navedemo jedan primer s posebnim brojevima gde možemo izvršiti probu.

$$3x^2 - 7x = 6 \quad \text{tj.} \quad 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm 11}{6}$$

$$x = 3 \quad \text{i} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Redovi. — Novi govor brojeva izneo je na videlo nove stvari o istoriji prirode prirodnih brojeva[1]). Nije nikakvo čudo što su Indusi i Arapi oživeli interesovanje za staro kinesko znanje o brojevima, a i sami otkrili neke zanimljive stvari. Tako Ariabhata daje pravilo za izračunavanje zbirova raznih nizova kao što su:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots$$

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \ldots$$

$$1^3 \quad 2^3 \quad 3^3 \quad 4^3 \ldots$$

Već smo videli (V glava) da zbir od n članova reda koji ima n prirodnih brojeva, jeste *enti* trouglasti broj. To navodi na objašnjenje zašto su induski matematičari tako lako pronalazili izraze za zbir nizova. Za prirodne brojeve imamo:

Zbir od prvih n članova:

n			
1	1	$= 1$	T_1
2	$1 + 2$	$= 3$	T_2
3	$1 + 2 + 3$	$= 6$	T_3
4	$1 + 2 + 3 + 4$	$= 10$	T_4
5	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	$= 15$	T_5 itd

U ovoj se tablici može izvršiti sabiranje kad upotrebimo operator i priloge, adverbe, kao što je:

$$\sum_{1}^{n} (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = T_n = \frac{n(n+1)}{2}{}^{*})$$

[1]) To su brojevi koje ste učili u nižim razredima osnovne škole: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... itd. — Prev.

*) To se obično piše ovako:

$$\sum_{1}^{n} (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \sum_{n=1}^{n} n = T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Izraz $\sum\limits_{n=1}^{n} n$ čita se: »suma en od $n = 1$ do $n = n$«. — Prev.

Da bismo našli zbir kvadrata prirodnih brojeva moramo najpre složiti dosadašnje svoje rezultate u ovu tablicu:

n	$\sum_{1}^{n}$	
1	1	$= 1$
2	$1 + 4$	$= 5$
3	$1 + 4 + 9$	$= 14$
4	$1 + 4 + 9 + 16$	$= 30$
5	$1 + 4 + 9 + 16 + 25$	$= 55$
6	$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$	$= 91$ itd.

Sad možemo ove zbirove rastaviti na trouglaste brojeve kao što pokazuje ova tablica:

n	Σ
1	$1 = 1 + 0 = 1 + 0$
2	$5 = 3 + 2 = 3 + 2 \cdot 1$
3	$14 = 6 + 8 = 6 + 2 \cdot 4$
4	$30 = 10 + 20 = 10 + 2 \cdot 10$
5	$55 = 15 + 40 = 15 + 2 \cdot 20$
6	$91 = 21 + 70 = 21 + 2 \cdot 35$ itd.

Sad smo dobili dva niza trouglastih brojeva:

1 3 6 10 15 21 . . .

1 4 10 20 35 . . .

U nizu koji čine kvadrati prvih n prirodnih brojeva, pojedine članove toga niza dobićemo ako n-tom prostom trouglastom broju dodamo dvostruki trouglasti broj drugog reda koji prethodi n-tom, znači dvostruki $(n-1)$-vi trouglasti broj drugog reda.

$$T_n + 2 \cdot {}^2T_{n-1} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n-1)\,n\,(n+1)}{3 \cdot 2} = \frac{n}{2}(n+1)\left(1 + \frac{2n-2}{3}\right) =$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)\left(\frac{2n+1}{3}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tako je zbir prvih 7 članova u nizu kvadrata prirodnih brojeva:

$$\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 7 \cdot 4 \cdot 5 = 140$$

Da je to tačno videćete kad saberete $49 = 7^2$ sa $91 = \sum_{r=1}^{6} r^2$.

Možete postupiti na isti način i dobiti zbir kubova prirodnih brojeva. Niz o kome se tu radi jeste:

1^3, (1^3+2^3), $(1^3+2^3+3^3)$, $(1^3+2^3+3^3+4^3)$, $(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3)$, . . .

1 9 36 100 225. . . .

Verovatno ste odmah primetili da je to ovaj niz:

$$1^2,\ 3^2,\ 6^2,\ 10^2,\ 15^2,\ \ldots$$

Zato možemo staviti:

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = (T_n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Naredni član u gornjem nizu 1, 9, 36, 100, 225 . . . tj. zbir od prvih 6 kubova biće, prema tome:

$$\frac{36 \cdot 49}{4} = 9 \cdot 49 = 441.$$

Da je to tačno možete se uveriti kad na 225 dodate 6^3 (216).

Čar ovih trouglastih brojeva verovatno je navela na takozvani Paskalov trougao. On se tako zove po francuskom matematičaru Paskalu[1] koji je prvi obratio pažnju na matematičku verovatnoću, tu osnovu savremene statističke nauke. Ustvari niz iz Paskalovog trougla pronašao je Omar Kajjam. On je pretstavljen u Dragocenom ogledalu četiri elementa, što ga je oko 1300 g. n. e. napisao kineski matematičar Ču Ši Kei koji je živeo u doba kad se Mongolsko Carstvo proširilo na Istočnu Evropu. Na tome se delu vidi koliko je veliko bilo interesovanje u istočnim zemljama za trouglaste brojeve. Time

[1]) Blez Paskal (1623—1662), matematičar, fizičar i filozof. — Prev.

se objašnjava zašto su induski matematičari tako lako rukovali nizovima za koje je potrebna velika darovitost kad se služimo formalnim metodama algebarskih udžbenika. Evo takozvanog Paskalovog trougla, koji je, kao i Pitagorina teorema, u stvari proizvod jedne mnogo ranije kulture Istoka.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Kad čitamo dijagonalno odozgo naniže zdesna nalevo, imamo niz »jedinica, izvora svega«, prirodne brojeve, proste trouglaste brojeve, i postepeno sve više redove trouglastih brojeva, kao što možete videti u glavi V. Kad čitamo horizontalno, imamo:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Kako bi rekao Mihael Štifel, na ovim brojevima ima mnogo čudesnih stvari. Prva je ova: oni nam kazuju kako da razvijemo izraz $(x + a)^n$, a da ne moramo da množimo. Videćete da uzastopno množenje sa $(x + a)$ dovodi do jednog prostog pravila, čim zagledate ovo:

$$
\begin{array}{ll}
(x + a) & \\
\underline{(x + a)} & = (x + a)^1 \\
x^2 + ax & \\
\underline{\qquad ax + a^2} & \\
x^2 + 2ax + a^2 & = (x + a)^2 \\
\underline{\qquad (x + a)} & \\
x^3 + 2ax^2 + a^2x & \\
\underline{\quad + \ ax^2 + 2a^2x + a^3} & \\
x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 & = (x + a)^3 \\
\underline{\qquad\qquad (x + a)} & \\
x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + a^3x & \\
\underline{\quad + \ ax^3 + 3a^2x^2 + 3a^3x + a^4} & \\
x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 & = (x + a)^4 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad (x + a)} & \\
x^5 + 4ax^4 + 6a^2x^3 + 4a^3x^2 + a^4x & \\
\underline{\quad + \ ax^4 + 4a^2x^3 + 6a^3x^2 + 4a^4x + a^5} & \\
x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 & = (x + a)^5
\end{array}
$$

Kad ove rezultate poređamo u tablicu dobijamo:

$$(x + a)^1 = x + a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2\,ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3\,ax^2 + 3\,a^2\,x + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4\,ax^3 + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a^3\,x + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5\,ax^4 + 10\,a^2\,x^3 + 10\,a^3\,x^2 + 5\,a^4\,x + a^5$$

Brojevi pred svakim članom — »koeficijenti« u ovim izrazima su nizovi u trouglu Omara Kajjama. Zato možemo očekivati da će biti

$$(x + a)^6 = x^6 + 6\,ax^5 + 15\,a^2\,x^4 + 20\,a^3\,x^3 + 15\,a^4\,x^2 + 6\,a^5\,x + a^6$$

Proverite pa ćete videti da je to tako. Postoji prosto pravilo za pisanje $(x + a)^n$. Zove se *binomna teorema*. Ako se vratite na V glavu, str. 242, setićete se da je niz

$$\begin{array}{lccccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \text{isto što i} & & & & & \\ & {}^4C_0 & {}^4C_1 & {}^4C_2 & {}^4C_3 & {}^4C_4 \\ \text{tj.} & 1, & \frac{4}{1}, & \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}, & \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}, & 1. \end{array}$$

Slično tome, koeficienti izraza $(x + a)^6$ mogu da se napišu ovako:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ {}^6C_0 & {}^6C_1 & {}^6C_2 & {}^6C_3 & {}^6C_4 & {}^6C_5 & {}^6C_6 \\ 1, & \frac{6}{1}, & \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}, & \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}, & \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, & \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, & 1 \end{array}$$

Rezultat množenja izraza $(x + 2)^n$ možemo napisati ovako:

$$x^n + n\cdot ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}a^3x^{n-3} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^4x^{n-4} + \ldots\ldots + a^n$$

Omar Kajjam, pronalazač binomne teoreme, bio je uporan materijalist. Verovao je da se razum može primeniti u stvarnome svetu i svet planski preurediti da »bude više po želji srca«. Nije nam poznato da li se ovom teoremom poslužio da izračuna koliko je mrtvih jučerašnjica izbačeno iz kalendara. Možda se on njome samo zabavljao kao što se Leonardo iz Pize igrao Fibonaćijevim nizom. U novoj matematici koja je naišla kolosekom reformaciske geometrije ona se pokazala kao neobično koristan instrument u mnogim poslovima. Jedan takav posao možete i vi sami pokušati da uradite. To je jedan aritmetički pronalazak. Da se dobije $(4{,}84)^8$ nije potrebno izvršiti sva ona silna množenja. Možemo staviti:

$$(4{,}84)^8 = (4\cdot 1{,}21)^8 = 4^8\cdot 1{,}21^8 = 4^8\cdot\left(1 + \frac{21}{100}\right)^8$$

Kad primenimo binomnu teoremu imamo:

$$\left(1+\frac{21}{100}\right)^8 = 1 + 8\cdot\frac{21}{100} + \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\left(\frac{21}{100}\right)^2 + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{21}{100}\right)^3 +$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{21}{100}\right)^4 \text{ itd.}$$

$$= 1 + 8\cdot 0{,}21 + 28\cdot 0{,}0441 + 56\cdot 0{,}009261 \text{ itd.}$$

Korist je ovde u tome što imamo niz sve manjih i manjih brojeva i možemo prekinuti dodavanje novih članova na svakom podesnom mestu. Na primer:

$$(1{,}01)^{10} = 1 + 10(0{,}01) + \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot(0{,}01)^2 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot(0{,}01)^3 \text{ itd.}$$

$$= 1 + 10\cdot 0{,}01 + 45\cdot 0{,}0001 + 120\cdot 0{,}000001 \text{ itd.} =$$

$$= 1 + 0{,}1 + 0{,}0045 + 0{,}000120 + 0{,}0000021 + \text{ itd.}$$

Odgovor tačan do sedmog decimala je:

1,1046221

Trouglasti se brojevi dakle upotrebljavaju kad se ispituje kako je neki niz izgrađen. To je navelo Njutna i njegove sledbenike na jednu dosetku koja se upotrebljava u fizičkim naukama da se izvedu zakoni koji prikazuju kvantitativne promene u stvarnom svetu. Ta se dosetka osniva na prolaznim trouglima o kojima smo već govorili u jednoj ranijoj glavi gde se govorilo o starinskome znanju o brojevima. Setite se da prolazni trougao niza trouglastih brojeva d r u g o g reda ovako prikazuje svoje rodoslovlje:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 3 & & 4 & & 5 & & \\ & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & \\ 1 & & 4 & & 10 & & 20 & & 35 \end{array}$$

Ako načinimo prolazni trougao za niz koji iščezava u istoj tački, možemo to pretstaviti pomoću opštih brojeva na ovaj način:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & D^3_1 & & D^3_2 & & & \\ & & D^2_1 & & D^2_2 & & D^2_3 & & \\ & D^1_1 & & D^1_2 & & D^1_3 & & D^1_4 & \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 \end{array}$$

Svaki član D u ovome trouglu je razlika između člana desno i člana levo od njega u redu ispod njega. Prilozi n i m u izrazu D^n_m odnose se na red razlika i na mesto u horizontalnom redu. Tako D^2_3 znači član u drugom redu razlikâ (ozdo) i treći sleva u svom horizontalnom redu.

Prolazni trougao ima svoje posebne odlike nezavisne od toga koja ga grupa brojeva sačinjava. Da biste te odlike videli, najpre zagledajte u ovaj prolazni trougao od tri reda:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & D^1_1 & & D^1_2 & \\ x_1 & & x_2 & & x_3 \end{array}$$

Možemo pronaći poslednji član u prvome redu (dole) kad znamo prvi. Ovako:

$$x_2 - x_1 = D^1_1$$

$$x_3 - x_2 = D^1_2$$

Ali je $\quad D^1_2 - D^1_1 = 0 \quad$ Otuda je

$D^1_2 = D^1_1$, te je

$$x_3 = x_2 + D^1_2 = D^1_2 + x_1 + D^1_1 = x_1 + 2\,D^1_1$$

Nađimo sad poslednji član u redu iksova iz prvog dijagonalnog stupca u prolaznom trouglu od 4 reda:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & D^2_1 & & D^2_2 & & \\ & D^1_1 & & D^1_2 & & D^1_3 & \\ x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 \end{array}$$

Imaćemo:

$$x_2 = x_1 + D^1_1$$

$$x_3 = x_2 + D^1_2 = x_2 + D^1_1 + D^2_1$$

$$x_4 = x_3 + D^1_3 = x_3 + D^1_2 + D^2_2 = x_3 + D^1_1 + D^2_1 + D^2_1 =$$

$$= x_2 + D^1_1 + D^2_1 + D^1_1 + D^2_1 + D^2_1 =$$

$$= x_2 + 2\,D^1_1 + 3\,D^2_1 = x_1 + D^1_1 + 2\,D^1_1 + 3\,D^2_1 =$$

$$x_4 = x_1 + 3\,D^1_1 + 3\,D^2_1.$$

Ako obrazujete prolazni trougao od 5 redi na isti način, naći ćete da je

$$x_5 = x_1 + 4\,D^1_1 + 6\,D^2_1 + 4\,D^3_1.$$

Slično tome za prolazne trougle od 6 odnosno 7 redi:

$$x_6 = x_1 + 5\,D^1_1 + 10\,D^2_1 + 10\,D^3_1 + 5\,D^4_1$$

$$x_7 = x_1 + 6\,D^1_1 + 15\,D^2_1 + 20\,D^3_1 + 15\,D^4_1 + 6\,D^5_1$$

Lako možete proveriti poslednja dva izraza ako ih upotrebite da pomoću njih pronađete šesti i sedmi član niza s prethodne strane. Ovako:

$$x_7 = 1 + 6 \cdot 3 + 15 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 84$$

Koeficienti dijagonalnih članova mogu se ovako složiti u tablicu:

n	x_n	Koeficient					
2	x_2	1					
3	x_3	1	2				
4	x_4	1	3	3			
5	x_5	1	4	6	4		
6	x_6	1	5	10	10	5	
7	x_7	1	6	15	20	15	6

Zapazili ste sigurno da ovi koeficienti nisu ništa drugo do brojevi iz trougla Omara Kajjama i iz *Ogledala dragocenih elemenata*. Jedino što bi ovde moglo da vas buni to je, što su koeficienti za enti član, napr. za sedmi, u stvari koeficienti binomnog izraza $(x+a)^{n-1}$, tj. $(x+a)^6$. Znači možemo napisati za svaki niz koji daje prolazni trougao od n redova, da je

$$x_n = ax_1 + bD_1^1 + cD_1^2 + dD_1^3 + eD_1^4 + fD_1^5 + \dots$$

Niz se nastavlja sve dok razlike ne iščeznu, a koeficienti a, b, $c, \dots$ itd. su koeficienti izraza

$$(x+a)^{n-1}$$

Ako je

$$(x+a)^{n-1} = (x+a)^m,$$

koeficienti su:

$$1, \frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{2\cdot 1}, \frac{m(m-1)(m-2)}{3\cdot 2\cdot 1}, \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \text{ itd.}$$

a ako stavimo $(n-1)$ mesto m, možemo te koeficiente ponovo ovako napisati

$$1, \quad \frac{n-1}{1}, \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}, \quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1}, \quad \dots\dots\dots$$

Zakon za prolazni trougao od n, redi je, dakle,

$$x_n = x_1 + (n-1)D_1^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}\cdot D_1^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot D_1^3 + \dots$$

Enminusprva razlika $(n-1)$ iščezava. Tako ovaj red ima $(n-1)$ član, i svršava se enminusdrugom $(n-2)$ razlikom (D_1^{n-2}). Ako primenimo ovo pravilo saznajemo kako je obrazovana izvesna grupa brojeva koja može da obrazuje prolazni trougao. Uzmite, na primer, ovaj niz:

1 5 12 22 35 51...

Potrebna su nam samo prva četiri člana da obrazujemo prolazni trougao:

0

3 3

4 7 10

1 5 12 22

Zakon ovog trougla dobija se kad se unesu prave vrednosti za x_1, D_1^1, D_1^2, D u obrazac:

$$x_n = x_1 + (n-1)D_1^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}D_1^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1}D_1^3 \text{ itd.}$$

Pošto je $D_1^3 = 0$, poslednji član iščezava i svi za njim, te ostaje:

$$x_n = x_1 + (n-1)\cdot 4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1}\cdot 3 =$$

$$x_n = 1 + 4n - 4 + \frac{3n^2 - 9n + 6}{2} = 4n - 3 + \frac{3n^2 - 9n + 6}{2} =$$

$$= \frac{8n - 6 + 3n^2 - 9n + 6}{2} = \frac{3n^2 - n}{2} = \frac{n}{2}(3n-1)$$

Ovo je zakon za obrazovanje pentagonalnih (petougaonih) brojeva koji su u V glavi dobiveni hijeroglifskom ili figuralnom metodom. Da biste se vežbali možete primeniti ovaj postupak, pa naći kako su izrađene ove grupe brojeva i onda proveriti rezultate:

1	7	19	37	61 ...
1	8	21	40	65 ...
0	3	8	15	24 ...
0	2	6	12	20 ...
4	7	12	19	28 ...
2	5	15	33	60 ...

Da biste upamtili binomnu teoremu možete naći vrednost za $(1{,}02)^7$, $(1{,}03)^4$, $(2{,}006)^6$, tačno do petog decimala bez množenja, pa načiniti tablicu kvadrata između 1,000 i 2,000 u razmacima od 0,001 tačno do treće decimale. Kad to budete shvatili, videćete Svitanje Ništice u

»Lepoti i svetloj veri onih
Koji su izveli zlatno putovanje u Samarkand«.

Budućnost brojnih oznaka. — Pokazali smo kako se napredak odmah pojavio čim je ljudski rod bio opremljen rečitijim brojnim sistemom, nego što su bile mračne slovne oznake Grka i Semićana, ili glomazne figure Sumeraca i Misiraca.

Osnova dekadnog sistema nije najbolja računska o s n o v a koja se mogla izabrati. Videli smo da nema ničega svetoga oko broja 10, nema svetog *tetraktisa* kako su pojali Pitagorejci. Aritmetika s poziciskim[1]) brojnim sistemom sa osnovom 5 (sl. 102) bila bi isto tako laka. Tablicu množenja do 5 bilo bi lakše upamtiti nego tablicu do 10.

Kad razumno planiramo budućnost ljudske zajednice moramo se uvek upitati da nema jednog zrnca istine u konzervatizmu koji je smetao napretku. Istina je da su sasvim pametni razlozi, ma da nedovoljni, bili navođeni protiv dekadnog sistema od strane matematičara koji su se dugo držali starinskih seksagezimalnih[2]) razlomaka stepena, minuta i sekundi. Te su razloge iznosili i praktični ljudi koji su bili navikli na mere (kao engleski novčani sistem) koje su sa osnovom 12. Za računanje je 10 loš broj, kraj svih njegovih svetih veza i kraj svih njegovih visoko uvaženih bioloških predaka. On ima samo tri tačna delioca: 1, 2, 5. Broj 12 ima ove delioce: 1, 2, 3, 4, 6, a broj 60: ove: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30. Veliki broj delilaca (činilaca) je veoma koristan pri brzome računanju. Zato bi se naše mere popravile kad bi se načinio hegelijanski sporazum između engleskog i francuskog sistema time što bi se dodale još dve cifre induskim ciframa i stvorio jedan poziciski brojni sistem na računaljci »s dvanaest prstiju« i sa merama podešenim prema tome. Možete sami izraditi sebi zbirove i tablice u brojnom sistemu sa osnovom 12.

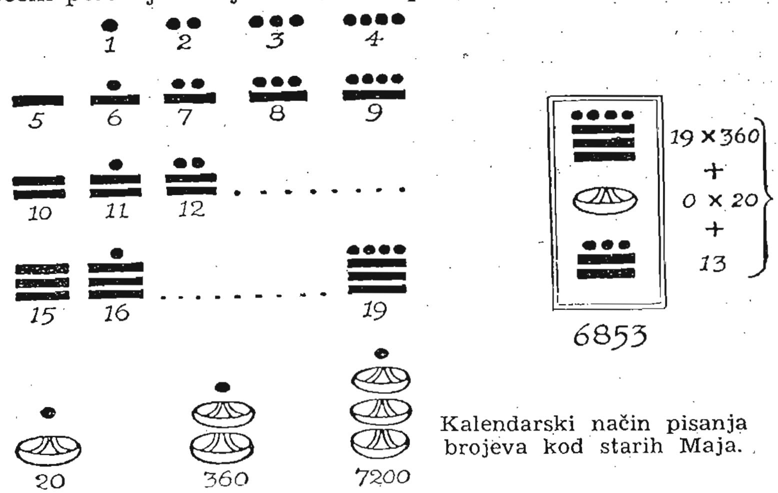
1	2	3	4	5	6	7	8	9	♀	♂	10
(1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12)

Kao što smo već govorili, sumerski sveštenici su gotovo sasvim uspeli da pronađu brojni sistem na osnovi 60 i sa glavnim prednostima induskog sistema. Tvorci kalendara iz doba ugašenih civilizacija Srednje Amerike otišli su još dalje.

[1]) Poziciski sistem u kome vrednost zavisi od položaja brojne oznake; u dekadnom sistemu, na primer: da li je u redu desetica, stotina itd. — R e d.

[2]) Sistem sa osnovom 60. — R e d.

Oni su se služili principom vertikalnog položaja i nulom. Osnova 20 je ponekad dosledno upotrebljavana. Uzastopni redovi bili su onda 1, 20, 400 i 8 000. Znaci za 400, 8 000 i 7 613 odgovarali su znacima za 360, 7 200 i 6 853 na sl. 106. Nedoslednost u trećem položaju odaje društveno poreklo brojnog sistema. Ka-



Kalendarski način pisanja brojeva kod starih Maja.

Sl. 106.

Ovakav je princip mesne vrednosti upotrebljen u brojnom sistemu Maja kod koga je osnova dvadeset.

Najniža grupa oznaka pretstavlja stubac jedinica (na računaljci), onaj viši stubac dvadesetica, onaj još viši stubac 360-ica, onaj gornji stubac 7 200-ica.

lendar Maja imao je mesece od 20 dana i mesece od 30 dana i prostu godinu od 360 dana kao i godinu od 365 dana. Najvećma uobičajene vrednosti uzastopnih redova izgleda da su bile 1, 20, 360, 7 200 što je pre odgovaralo primitivnoj društvenoj ulozi brojeva kod njih nego li vešto izvedenim koristima pri brzom računanju.

Videli smo kako je gramatika brojeva usavršena da bi odgovorila novim društvenim potrebama kad je muslimanski svet proširio svoje granice od Indije do Španije. Videli smo šta su naši varvarski preci dugovali ovim pesnicima i matematičarima s tamnijom kožom nego što je naša. Sada okrećemo pogled ka Severnoj Evropi, da vidimo šta je ona doprinela gramatici dimenzija.

VEŽBANJA UZ GLAVU VII

PRONALASCI I OGLEDI

1. — U jednoj Velsovoj priči lenjivac sa dva nožna prsta bio je glavna životinja na ostrvu Rampolu. Pretpostavimo da se u dvoprstnom lenjivcu razvio valjan mozak. Onda bi on imao brojni sistem sa osnovom 2, 4, 8. Načinite tablicu množenja potrebnu za taj sistem. Pomnožite 24 sa 28 u sva tri sistema i proverite rezultate. Lakše će vam biti ako pretpostavite da je lenjivac najpre na računaljci učio da računa, pa načinite dijagrame za tri razne vrste računaljki.

2. — Vi već znate da je

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab, \text{ i}$$

umete to da proverite množenjem.

Izraz x^2+5x-6 je načinjen na isti način. U njemu je $a=-1$, $b=6$. Zato je taj izraz proizvod ova dva činioca: $(x-1)(x+6)$. Možete to proveriti kad podelite x^2+5x-6 sa $(x-1)$ ili sa $(x+6)$, ili kad pomnožite $(x-1)$ sa $(x+6)$. Pogledajte kako su načinjeni donji izrazi i napišite njihove činioce. Rezultate proverite deljenjem i množenjem.

(*a*) p^2+5p+6	(*h*) $q^2-10q+21$
(*b*) $a^2+10a+24$	(*i*) $c^2-12c+32$
(*c*) x^2-3x+2	(*j*) $n^2+8n-20$
(*d*) m^2+4m+3	(*k*) $h^2+12h+20$
(*e*) $x^2-10x+16$	(*l*) z^2+z-42
(*f*) f^2+f-20	(*m*) y^2-y-42
(*g*) $t^2-3t-40$	(*n*) $b^2-b-20.$

3. — Neposrednim množenjem možete pokazati da je

$$(ax+b)(ax-b)=a^2x^2-b^2$$

$$(ax+by)(ax-by)=a^2x^2-b^2y^2$$

Izraz $4x^2-25$ je načinjen na isti način od $(2x-5)(2x+5)$ itd. Uzmite to u obzir, pa napišite činioce ovih izraza:

(*a*) x^2-36	(*h*) $49p^2-169^2$
(*b*) $9x^2-25$	(*i*) $256t^2-169s^2$
(*c*) $4x^2-100$	(*j*) $4p^2-9q^2$
(*d*) $100y^2-25$	(*k*) p^2-81q^2
(*e*) $64x^2-49$	(*l*) $25n^2-9$
(*f*) $81x^2-64$	(*m*) $36t^2-16s^2$
(*g*) $25x^2-16$	(*n*) $9a^2-49b^2$

Koristite znak kvadratnog korena, pa napišite činioce ovih izraza:

(*o*)[1] $3-x^2$	(*r*) x^2-2
(*p*) $2-3x^2$ *)	(*s*) $2a^2-3$
(*q*) $5x^2-3$	(*t*) $7a^2-3b^2$

4. — Neposrednim množenjem pokažite da je

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

Izraz $6x^2-7x-20$ načinjen je takođe od dva činioca $(3x+4)(2x-5)$, gde je $a=3$, $b=4$, $c=2$, $d=-5$. Istim putem nađite činioce donjih izraza, pa proverite zamenivši slova posebnim brojevima:

(*a*) $3x^2+10x+3$	(*h*) $20x^4+x^2-1$
(*b*) $6x^2+19x+10$	(*i*) $15+4x-4x^2$
(*c*) $6p^2+5p+1$	(*j*) $6n^2-n-12$
(*d*) $3t^2+22t+35$	(*k*) $15x^2+7x-2$
(*e*) $6n^2+11n+3$	(*l*) $7x-6-2x^2$
(*f*) $6q^2-7q+2$	(*m*) $15-4x-4x^2$
(*g*) $11p^2-54p+63$	(*n*) $7x-6x^2+20$

---

[1] $3-x^2=(\sqrt{3})^2-x^2=(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$. — Prev.

*) $3x^2=(x\sqrt{3})^2$. — Prev.

5. — Neposrednim množenjem možete pokazati da je

$$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)\,xy+bdy^2$$

Izraz $6x^2+7xy-20y^2$ načinjen je množenjem ova dva činioca: $(3x-4y)(2x+5y)$, gde je $a=3$, $b=-4$, $c=2$, $d=5$. Ispišite na isti način činioce donjih izraza, pa proverite množenjem i deljenjem:

(a) $6a^2+7ax-3x^2$
(b) $15a^2-16abc-15b^2c^2$
(c) $6a^2-37ab-35b^2$
(d) $2a^2-7ab-9b^2$
(e) $6f^2-23fg-18g^2$
(f) $21m^2+13ml-20l^2$
(g) $12n^2-7mn-12m^2$
(h) $36p^2+3pqr-5q^2r^2$
(i) $14d^2+11de-15e^2$
(j) $3t^2-13ts-16s^2$
(k) $9m^2+9mn-4n^2$
(l) $6q^2-pq-12p^2$
(m) $4l^2-25lm+25m^2$

6. — Razlomak $\frac{14}{21}$ je postao od $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}$, te se može svesti na prostiji oblik $\frac{2}{3}$. Iskoristite svoje znanje o tome kako se nalaze činioci, pa uprostite sledeće razlomke, a rezultat proverite time što ćete mesto slova staviti posebne brojeve:

(a) $\dfrac{x+y}{x^2+2xy+y^2}$
(b) $\dfrac{(x-y)}{x^2-y^2}$
(c) $\dfrac{(x+y)}{x^2-y^2}$
(d) $\dfrac{x-y}{x^2-2xy+y^2}$
(e) $\dfrac{ax+ay}{ax^2-ay^2}$
(f) $\dfrac{42x^2yz}{56xyz^2}$
(g) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$
(h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$
(i) $\dfrac{x^2-1}{2x^2+3x-5}$
(j) $\dfrac{9x^2-49}{3x^2+14x-49}$
(k) $\dfrac{a^4b+ab^4}{a^4-a^3b+a^2b^2}$
(l) $\dfrac{8a^3-1}{4a^2-4a+1}$
(m) $\dfrac{2x^3-3x^2+4x-6}{x^3-2x^2+2x-4}$

7. — Izrazite ovo dole u najprostijem obliku:

(a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$
(b) $\dfrac{a^2b+ab^2}{a+b}$
(c) $x+y-\dfrac{9x^2-4y^2}{3x+2y}$
(d) $a+2b+\dfrac{4b^2}{a-2b}$
(e) $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{3a}{2x+2}-\dfrac{5a}{4x+4}$
(f) $\dfrac{a+2b}{3}-\dfrac{a-3b}{4}$
(g) $\dfrac{7a}{4x+8y}-\dfrac{3a}{2x+4y}$
(h) $x^2+2xy+y^2-\dfrac{x(x^2+3xy+4y^2)}{x+y}$

8. — Izrazite jednim jedinim razlomkom u njegovom najprostijem obliku ove izraze:

(a) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$
(b) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$
(c) $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}$
(d) $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}$
(e) $\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}$
(f) $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{xy}{x^2-y^2}$
(g) $\dfrac{x}{2y}-\dfrac{x-y}{2(x+y)}$
(h) $\dfrac{y-5}{y-6}-\dfrac{y-3}{y-4}$
(i) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}$
(j) $\dfrac{x+p}{x+q}+\dfrac{x+q}{x+p}-\dfrac{2(x-p)(x-q)}{(x+p)(x+q)}$
(k) $\dfrac{1}{t^2-6t+5}-\dfrac{2}{t^2+2t-3}+\dfrac{1}{t^2-2t-15}$
(l) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2n}{n^2-1}$
(m) $\dfrac{t}{t^2-1}+\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}$

9. — Ako poslušamo Stevinusov savet i mesto $\frac{1}{100}$ stavimo 10^{-2}, objasnite donja pravila time što ćete mesto a i b staviti posebne brojeve:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$$

$$10^a : 10^b = 10^{a-b} \ (a \text{ veće od } b \text{ ili manje od } b)$$

$$(10^a)^b = 10^{ab} = (10^b)^a$$

Proverite opšta pravila:

$$n^a \cdot n^b = n^{a+b} \text{ itd.}$$

time, što ćete mesto a, b i n staviti posebne brojeve, ali ne 10.

10. — Služeći se dijagonalnim pravilom i metodama iz prethodnih vežbanja, rešite ove jednačine:

$$(a)\ \frac{x+2}{3} - \frac{x+1}{5} = \frac{x-3}{4} - 1$$

$$(b)\ \frac{x+a}{a+b} + \frac{x-3b}{a-b} = 3$$

$$(c)\ \frac{1}{2x-3} + \frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3}$$

$$(d)\ \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} = \frac{1}{x-3}$$

$$(e)\ \frac{2x-1}{x-2} - \frac{x+2}{2x+1} = \frac{3}{2}$$

$$(f)\ \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+2}$$

11. — (a) Neki čovek je proveo na putu $1\frac{3}{4}$ časa i prešao za to vreme 8 milja. Jedan deo puta prešao je pešice brzinom od 3 milje na čas, a drugi deo puta je prejahao brzinom od 12 milja na čas. Koliki je put prešao pešice?

(b) Voz ide prosečnom brzinom od 60 km. Na jednome putu od 195 km morao je da se zadrži na jednoj stanici nepredviđeno 15 minuta više. On od te stanice poveća brzinu na 75 km i opet stigne na vreme. Koliko je daleko od polazne stanice do stanice na kojoj se voz prinudno zadržao?

(c) Jedna fabrika spusti cene svojim proizvodima za $2\frac{1}{2}$ od sto. Za koliko procenata se povećala potrošnja robe pri toj sniženoj ceni, kad se bruto prihod povećao za jedan procenat (1 od sto)?

12. — Rešite ove jednačine:

$$(a)\ x^2 + 11x - 210 = 0$$

$$(b)\ x^2 - 3x = 88$$

$$(c)\ 12x^2 + x = 20$$

$$(d)\ (3x+1)(8x-5) = 1$$

$$(e)\ 3x^2 - 7x - 136 = 0$$

$$(f)\ 2(x-1) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(g)\ x(x-b) = a(a-b)$$

$$(h)\ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2+x} = \frac{1}{x+10}$$

13. — (a) Naći tri uzastopna cela broja čiji je zbir kvadrata 110*.

(b) Igralište u obliku kvadrata ima jednu stranu koja ide tačno pravcem sever—jug. S južne strane toga igrališta, duž cele njegove strane, morao je da se oduzme komad zemljišta širok 3 metra. Zato je igralištu dodata, duž cele zapadne strane (koja je sad skraćena), komad zemljišta širok 8 metara. Kolika je bila površina igrališta ranije kad sad iznosi 6776 kvadratnih metara?

(c) Obim zadnjeg točka nekih kola je za 1 stopu veći od obima prednjeg točka. Prednji točak na putu od 1 milje

*) Ako je jedan ceo broj n, prvi manji od njega biće $(n-1)$, a prvi veći $(n+1)$. — Prev.

načini 22 obrta više od zadnjeg. Koliki su poluprečnici tih točkova?[1]).

(d) U pravouglom trouglu ABC hipotenuza je za 2 cm duža od katete AC. Druga kateta je za 10 cm manja od polovine katete AC. Kolike su strane toga trougla?

14. — Tamo, gde smo u ovoj glavi objašnjavali prevođenje na jezik dimenzija i dali devet problema, peti se može i drukčije izraziti. Ovo su tri tvrđenja, (radi se o starosti deda, sina i unuka...):

(1) $5g = G$ (2) $2m + 8 = G + g$ (3) $m = 100 - G$

Vrednost G iz (1) unesite u (2) i u (3)

(2) $2m + 8 = 5g + g$ (3) $m = 100 - 5g$

To je dalje:

$$2m - 6g = -8 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$m + 5g = 100 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Imamo ovde dve nepoznate količine i dve jednačine. Možemo se osloboditi jedne nepoznate spajajući ove dve jednačine. Oduzećemo levu stranu od leve, a desnu od desne. Pre nego što to uradimo moramo da odlučimo koje nepoznate želimo da se oslobodimo. Lakše je izbaciti m. Pomnožićemo (5) sa 2. Tada imamo:

$$2m - 6g = -8 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$2m + 10g = 200 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Oduzimanjem dobijamo:

$$-16g = -208$$

$$16g = 208$$

$$g = 13$$

Ako želimo da saznamo koliko je m, stavimo u (4) broj 13 mesto g, ili to isto u jednačini (5); tada dobijamo jednačinu s jednom nepoznatom koju možemo rešiti po m.

[1]) 1 stopa = 30,48 cm; 1 milja = 1609 m. — Prev.

Obično je dovoljno pomnožiti obe jednačine raznim brojevima, kao u ovome primeru:

$$3x + 4y = 15 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$2x + 5y = 17 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Da bismo izbacili x, množimo (1) sa 2, a (2) sa 3.

$$6x + 8y = 30$$

$$6x + 15y = 51$$

Oduzmimo na obema stranama:

$$-7y = -21$$

$$y = 3$$

Ovu vrednost za y unesemo u (1)

$$3x + 4 \cdot 3 = 15$$

$$3x + 12 = 15$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Unosimo vrednost za x i y u (2), da bismo izvršili proveru

$$2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 17$$

$$2 + 15 = 17$$

Da nađemo dve nepoznate količine moramo imati dve jednačine koje izražavaju dva različita tvrđenja o tim količinama.

Metoda za rešavanje simultanih jednačina može se ukratko izneti ovako:

Prvi stupanj. — Uredite jednačine tako da slični članovi (napr. članovi sa iksom) dođu jedan ispod drugog.

Drugi stupanj. — Rešite se koju ćete nepoznatu izbaciti.

Treći stupanj. — Pomnožite sve članove prve jednačine koeficientom izabrane nepoznate u drugoj jednačini i obrnuto.

Četvrti stupanj. — Oduzmite levu stranu od leve i desnu od desne.

Peti stupanj. — Rešite dobivenu jednačinu s jednom nepoznatom.

Šesti stupanj. — Uvrstite dobivenu vrednost u jednoj od prvobitnih jednačina i tako nađite drugu nepoznatu.

Sedmi stupanj. — U drugoj jednačini zamenite vrednosti za obe nepoznate, da izvršite proveru.

Jednačine sa tri nepoznate mogu se rešiti na sličan način. Potrebne su tri jednačine. Uzmimo po dve jednačine, pa iz svakog para izbacimo istu nepoznatu. Tako dobijamo dve jednačine s dvema nepoznatima.

$$2x + 3y = 4z$$
$$3x + 4y = 5z + 4$$
$$5x - 3z = y - 2$$

Uređujemo ih:

$$2x + 3y - 4z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$3x + 4y - 5z = 4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$5x - y - 3z = -2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Iz (1) i (3) izbacujemo y množenjem sa 3 u jednačini (3):

$$2x + 3y - 4z = 0$$
$$15x - 3y - 9z = -6$$

Sabiramo:

$$17x - 13z = -6 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Iz (2) i (3) izbacujemo y množenjem sa 4 u jednačini (3):

$$3x + 4y - 5z = 4$$
$$\underline{20x - 4y - 12z = -8}$$
$$23x - 17z = -4 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Sad se (4) i (5) mogu rešiti po x i z kao ranije. Dobivene vrednosti za x i z zamenićemo u (1) i rešiti po y. Sve tri vrednosti unesimo i u (2) i u (3) da izvršimo proveravanje.

Rešite ove jednačine:

(a) $x = 5y$, $x - y = 8$

(b) $3y = 4x$, $8x - 5y = 4$

(c) $x = 5y - 4$, $10y - 3x = 2$

(d) $60x - 17y = 285$, $75x - 19y = 390$

(e) $x + y = 23$, $y + z = 25$, $z + x = 24$

(f) $2x + 7y = 48$, $5y - 2x = 24$, $x + y + z = 10$

15. — Ovi problemi vode na simultane jednačine:

(a) Treći član jedne aritmetičke progresije je 8, a deseti 30. Naći sedmi član.

(b) Četvrti član jedne AP je $-\frac{1}{8}$, a sedmi $\frac{1}{64}$. Naći prvi član.

(c) U jednoj sobi dužina je tri puta veća od širine. Da je soba šira tri stope, a kraća 3 stope, bila bi kvadrat. Naći dimenzije te sobe.

(d) U jednoj dvorani ima 600 sedišta koja idu skroz preko cele dvorane. Iz svakog reda uklonjeno je po 5 sedišta, da se načini prolaz kroz sredinu. Da bi stao isti broj gostiju morali su dodati još 6 redi. Koliko je ranije bilo sedišta u svakom redu?

(e) Dva grada P i Q, udaljena jedan od drugoga 100 km vezuje železnička pruga. Između njih su dve stanice R i S. Rastojanje od R do S je za 10 km veće od rastojanja između P i R, a rastojanje od S do Q je 20 km veće od rastojanja između R i S. Koliko je rastojanje od R do S u kilometrima?

16. — Nađite enti član u ovim nizovima:

(a) služeći se trougaonim brojevima

(b) služeći se prolaznim trouglima:

(1) 1, 6, 15, 28, 45 (4) 1, 7, 19, 37, 61, 91
(2) 1, 6, 18, 40, 75 (5) 1, 4, 10, 19, 31, 46
(3) 1, 20, 75, 184, 365, 636 (6) 1, 5, 13, 25, 41, 61

17. — Razviti ove izraze:
(a) po binomnoj teoremi,
(b) neposrednim množenjem:

(1) $(x+2)^5$ (4) $(2x+1)^6$
(2) $(a+b)^3$ (5) $(3a-2b)^4$
(3) $(x+y)^4$ (6) $(x-1)^7$

Proverite rezultate ponavljanim množenjem.

18. — Primenjujući binomnu teoremu izračunajte sa četiri decimala:

(1) $1{,}04^3$ (3) $1{,}12^4$
(2) $0{,}98^5$ (4) $5{,}05^3$

19. — Pretstavite 272 i 8573 u brojnom sistemu kalendara Maja, pa pomnožite 27 sa 343 u tome istom sistemu, kao što bi to uradili Arapi da su pre Kolumba stigli u Ameriku.

DA SE UPAMTI!

1. — Ako je $x^2 + ax + b = o$ onda je

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

2. $a^0 = 1$. To je tako za svako a, sem za $a = 0$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1} a^{n-2}b^2 +$

$$+ \frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1} a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots + b^n.$$

ZABAVNE IGRE S BROJEVIMA KOJE PRIMERIMA PRIKAZUJU ALGEBARSKI SIMBOLIZAM

1. — Zamislite jedan ceo broj. Pomnožite prvi od njega veći ceo broj prvim manjim brojem od njega. Dodajte 1. Šta ste dobili?

— Dobio sam 25.

— Zamislili ste broj 5.

— Jeste.

(Ovde je zamišljen broj uvek kvadratni koren iz odgovora).

Objašnjenje ove pogađalice je u ovome. Neka je zamišljen broj x. Prvi veći je $x+1$, a prvi manji je $x-1$, a njihov proizvod $(x+1)\ (x-1) = x^2 - 1$. Dodajte 1, dobićete x^2. Izvucite kvadratni koren iz toga. Dobićete broj koji ste zamislili, dakle x.

Igre ove vrste mogu se ređati u beskraj. One su zgodne da se vežbate i u rastavljanju na činioce. Evo ih još.

2. — Zamislite broj manji od 10. Pomnožite ga sa 2. Dodajte 3. Pomnožite sve to sa 5. Dodajte drugi neki broj manji od 10. Koliko ste dobili? Da biste odgovorili koji su brojevi zamišljeni, oduzmite 15 od onoga broja koji vam dadu kao odgovor. Desetica poslednjeg rezultata je prvi zamišljen broj, a jedinica drugi.

Algebarskim jezikom:

Zamišljeni brojevi: prvi x, drugi y:

$$(2x+3)\,5 + y = N$$
$$10x + 15 + y = N$$
$$10x + y = N - 15^{*})$$

3. — Zamislite jedan broj. Dignite ga na kvadrat. Oduzmite 9. Podelite to što ste dobili brojem koji je za tri veći od broja koji ste zamislili. Šta ste dobili? Koji ste broj zamislili? Objasnite to algebarskim izrazom.

4. — Zamislite jedan broj. Dodajte 2. To što ste dobili dignite na kvadrat. Od toga oduzmite četvorostruki zamišljen

*) $10x + y$ je opšti izraz dvocifrenog broja. Naprimer $75 = 7\cdot 10 + 5$, tj. $10\cdot 7 + 5$. Broj x pretstavlja desetice (7), a broj y jedinice (5). — Prev.

broj. Dajte odgovor. Koji je zamišljeni broj? Objasnite to algebarski, pa smislite i sami nekoliko ovakvih pogađalica.

5. — Izrazite pomoću algebarskog izraza ovo tvrđenje: Ako su dva različita broja tačno deljivi nekim celim brojem x, njihov zbir i njihova razlika moraju isto tako biti deljivi sa x. Iskoristite to, pa ispitajte ova pravila za brojeve dekadnog sistema.

(a) Broj je bez ostatka deljiv sa 5, ako mu je krajnja cifra 5 ili 0.

(b) Broj je bez ostatka deljiv sa 3, ako mu je zbir cifara deljiv sa tri, a sa 9, ako mu je zbir cifara deljiv sa 9.

(c) Broj je deljiv sa 4 ako su mu deljive sa 4 poslednje dve cifre zdesna, uzete kao jedan broj; sa 8, ako su mu poslednje tri cifre, uzete kao jedan broj, deljive sa 8; sa 16 ako su mu poslednje četiri cifre, uzete kao jedan broj, deljive sa 16. N. B. — Iskoristite (b) i (c) u poslednjem primeru, pa nađite pravilo za deljivost sa 6 i sa 12.

(d) Broj 1001 je deljiv sa 7, 11 i 13. Izvedite odatle ovo pravilo: Broj od šest cifara je deljiv sa 7, 11 i 13, ako je razlika broja od prve tri cifre i broja od zadnje tri cifre deljiva tim brojevima. Proširite to pravilo na ma koji broj veći od trocifrenoga.

GLAVA VIII

OBUHVAĆENI SVET

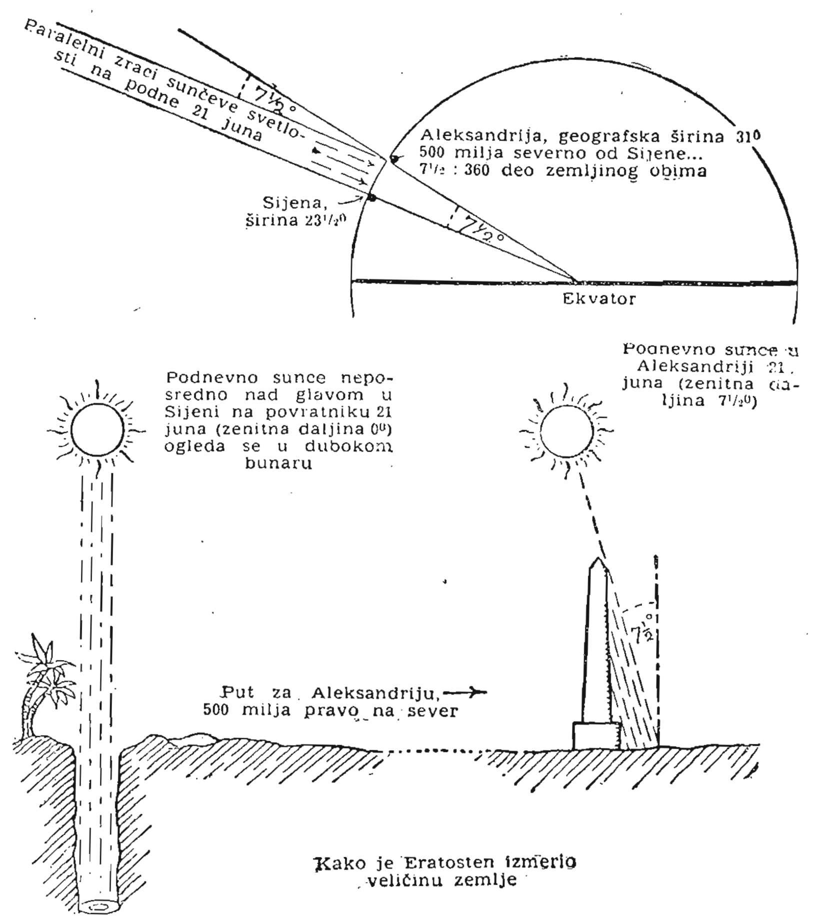
ili

Sferni trougli

Još u doba kada su bile građene Velike Piramide, možda još i mnogo ranije, sveštenici u Misiru i Sumeriji bili su dobro upoznati s dvema činjenicama o zvezdama. Prva je da uvek prođe isto vreme između trenutaka kada dve određene zvezde presecaju meridijan, znači kada dostižu svoju najveću tačku na nebu, na velikom zamišljenom krugu koji prolazi kroz severnu tačku na horizontu, kroz Severnjaču, kroz zenit i kroz južnu tačku[1]). Druga je činjenica da je ugao između neke zvezde i linije horizonta (njena visina) ili između nje i zenita (njena zenitna daljina) na određenom mestu uvek isti u trenutku kad zvezda prolazi kroz meridijan. Stari sveštenici tvorci kalendara imali su da se oslanjaju na čaše-časovnike kao što su one koje su se nekada prodavale da se odredi vreme za koje se obari jaje. Time su oni određivali vreme prolaza kroz meridijan, a kako nisu mnogo putovali, nisu potpuno ni shvatili koliko vredi to što oni znaju. Kad su sveštenici prestali biti praktični ljudi i kad je druga jedna kategorija praktičnih ljudi, feničanski pomorci, počela prikupljati nove podatke o nebu, učinjen je korak napred od velike važnosti. Grci su kao pomorci već znali da je razlika meridijanskih zenitnih daljina dveju određenih

[1]) Pre nego što čitate ovu glavu, pogledajte sl. 4, 8 i 13 u II glavi, i proverite da li još znate šta znače visina, zenitna daljina i azimut. — Pisac.

zvezda, merena na dva razna mesta, uvek ista. Tako u Memfisu (šir. 30⁰ S) Sirius prolazi kroz meridijan pod $\left(46\frac{1}{2}\right)^0$ J, a Alde-



Sl. 107.

Zapazite da se na podne sunce nalazi tačno nad posmatračevim meridijanom dužine. Sijena i Aleksandrija imaju gotovo istu dužinu. Zato Sunce, zatim obe te varoši i zemljino središte mogu da se nacrtaju na istoj ravni.

baran, grubo uzevši, pod 14⁰ J. U Londonu $\left[\text{šir.}\left(51\frac{1}{2}\right)^0 \text{S}\right]$ Sirius prolazi pod 68⁰ J, a Aldebaran pod, grubo uzevši $\left(35\frac{1}{2}\right)^0$ J. U oba slučaja mesna razlika je $\left(32\frac{1}{2}\right)^0$. Pomorski narodi staroga sveta zapazili su da je to zato što je među zvezdama stalan odnos i što je i sama Zemlja okrugla. Jedan razlog zašto su oni znali da je svet okrugao u tome je što se kružna Zemljina senka mogla videti kad se Zemlja na nebu našla u takvom položaju za vreme pomračenja Meseca da je u pravoj liniji sa Suncem i Mesecom. Oni su iz svakodnevnog iskustva znali da brodovi »tonu« na horizontu, a na putovanjima su naučili kako se javljaju nova sazvežđa, i kako poznata sazvežđa sve više nestaju iza horizonta dok oni plove na jug ili na sever. Sve tako do 250 g pre n. e. veoma malo su znali o rastojanjima. Nekako, u to vreme Eratosten je prvi proračunavao dimenzije Zemlje. Zatim je došao pronalazak geografskih karata. Prve su karte bile karte neba. Zemaljske karte osnivale su se na kartama zvezda, i iz njih su se one postepeno razvile. Hiparh, koga smo pomenuli u VI glavi, uneo je u kartu položaje hiljadu i osamdeset zvezda nekretnica.

Izrada karata zvezda stvorila je potrebnu tehničku osnovu za velika prekomorska putovanja. Docnije ćemo videti da je izrada karata dala jakog potstreka otkrivanju novih matematičkih alatki u periodu koji je dolazio. Godine 1420 n. e. Henrik, onda prestolonaslednik u Portugaliji, podigao je zvezdaru na rtu Sagresu, jednome od predgorja koja se završavaju kod Rta Svetog Vincenca, toj krajnjoj tački na evropskom jugozapadu. Tu je ustanovio i pomorsku školu pod upravom nekog maestra Djakoma sa Majorke, i četrdeset godina bavio se kartografskim studijama. Za sve to vreme opremao je i organizovao ekspedicije koje su mu donele nadimak Henrik Moreplovac. Za izradu karata, pomorskih tablica i instrumenata uzeo je u svoju službu Arape kartografe i Jevreje astronome. Oni su mu obučavali pomorske kapetane i pomagali u pilotiranju njegovih brodova. Petar Nunes izjavljuje da su prestolonaslednikovi kapetani bili dobro opremljeni instrumentima i znali sva astronomska i geometriska pravila »koja moraju znati izrađivači karata«. Razvoj astronomije opet je postao sastavni deo čovekovog svakidanjeg života. Novi potstrek koji je astronomiji dao porast prekomorske trgovine pojačan je još i time što su uvedeni časovnik i teleskop, ta dva nova tehnička pronalaska koji su se pojavili iz čovekovog svakodnevnog rada u izmenjenim društvenim uslovima.

U vremenu između propasti aleksandriske civilizacije i rađanja evropskog pomorstva snažan napredak u kartografskoj matematici ili, kao što se ona ponekad zove u *sfernoj trigonometriji,* izveli su Arapi, ma da su joj svi osnovni principi bili postavljeni ranije. Ponešto će u ovoj glavi verovatno izgledati teško shvatljivo. Ostale glave ne zavise od ove, i ona je umetnuta samo zato da vam pomogne da shvatite kako se matematika razvila da zadovolji praktične potrebe čovekovog života. Ako imate imalo smisla za drvodeljstvo, to će vam pokazati kako možete da primenite matematiku na astronomske probleme, za koje možete sebi skupiti podatke pomoću instrumenata izrađenih kod kuće.

IZRADA ZVEZDANE KARTE

Kad izađemo van grada u šetnju mi se snalazimo pomoću poznatih nam predmeta na zemljištu. Za pomorca su zvezde te poznate tačke. Ako biste bili iskrcani na neko nenaseljeno ostrvo posle nekoliko nedelja provedenih u groznici, mogli biste prema pojavama na nebu utvrditi da li ste južno ili severno od polutara. Severno od polutara mogli biste videti Severnjaču; a u izvesno doba godine i »Velikog Medveda«. Južno od polutara ne biste videli Severnjaču; videli biste Južni Krst, a i druga sazvežđa koja se ne vide na geografskim širinama Londona, Njujorka i Beograda. Ako živite južno od ekvatora ne možete naći svoju širinu pomoću Severnjačine visine, kao što je već objašnjeno u IV glavi, pošto tamo nema neke sjajne zvezde koja bi sijala blizu Južnoga Pola. Zvezdane karte koje su Aleksandrinci prvi izradili pokazuju vam kako da nađete svoju širinu na kome god mestu na Zemlji, prema držanju ma koje zvezde koja nije pomračena oblacima, kao što je to često slučaj sa Severnjačom. Njihovom pomoću i uz tačno poznavanje griničkog vremena, može i pomorac da pronađe svoju geografsku dužinu u svako doba noći prema položaju ma koje zvezde. On ne mora da čeka podne svakog dana da bi utvrdio gde mu se brod nalazi.

Na običnom globusu položaj nekog mesta je određen sa dva kruga (iz dve različite grupe) koji se u tom mestu seku. Jednu grupu »velikih« krugova čine oni koji se svi seku na polovima i koji imaju isti poluprečnik kao i sam globus. To su meridijani geografske dužine koji se broje prema uglovima koji oni zaklapaju jedan s drugim na polovima kad se globus gleda ozgo ili ozdo. Oni se, naravno, isto tako broje prema delu (luku) ekvatorova obima (ili ma koga kruga koji okružuje ravnu ploču paralelnu sa pločom koju opasuje ekvator) koji zahvataju. Tako je ugao između 15^0 zap. dužine i 45^0 zapadne dužine na Polu isti što i ugao koji se dobija kad se sa središtem spoje krajevi luka koji je $\frac{45^0 - 15^0}{360}$ ili $\frac{1}{12}$ od obima ma koga kruga paralelnog sa ekvatorom.

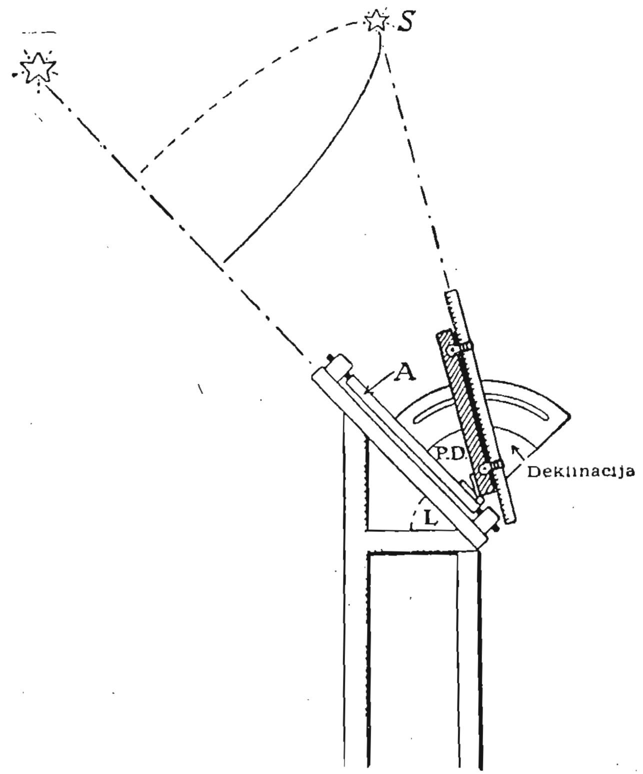
Druga grupa krugova zove se »mali[1]) krugovi širine«. Oni se broje prema uglu koji zaklapa izvesna tačka na Zemljinom obimu, zatim Zemljin centar i jedna tačka na ekvatoru na istom dužinskom meridijanu na kome je i ona tačka što je izabrana na obimu. Tako je ugao između 15^0 sev. šir. i 45^0 sev. šir. ugao kod Zemljinog centra što ga gradi luk koji je jedna dvanaestina obima dužinskog kruga (ili samoga ekvatora).

Krugovi širine pretstavljaju obime raznih ploča (»ravnina«) povučenih pod pravim uglom na polarnu osovinu oko koje se Zemlja okreće, tj. na osovinu oko koje se prividno okreću Sunce i zvezde. Krugovi dužine obvijaju obim ravnih ploča (»ravnina«) koje se seku na polovima.

Zato su ljudi na ovaj način pravili karte sveta što su bili otkrili da se sve zvezde nekretnice prividno okreću jednakom brzinom po kružnim lucima što leže u paralelnim ravnima pod pravim uglom na pravoj koja spaja oko s polom na nebu (tj. približno govoreći, sa Severnjačom na severnoj Zemljinoj polulopti). Uzdignutost ove linije iznad horizonta (koja, kao što smo već videli, pretstavlja geografsku širinu posmatračeva mesta) različita je na raznim mestima. Ona postaje sve veća kad plovimo pravo na sever, tj. prema Severnjači, a sve manja što idemo pravo na jug, tj. dalje od Severnjače. Na svakom posebnom mestu jedna ista zvezda uvek je za isti ugao dignuta

[1]) Jedan krug geografske širine (0°, ekvator) je veliki krug, tj. krug sa istim poluprečnikom koji ima lopta na kojoj je nacrtan. — Pisac.

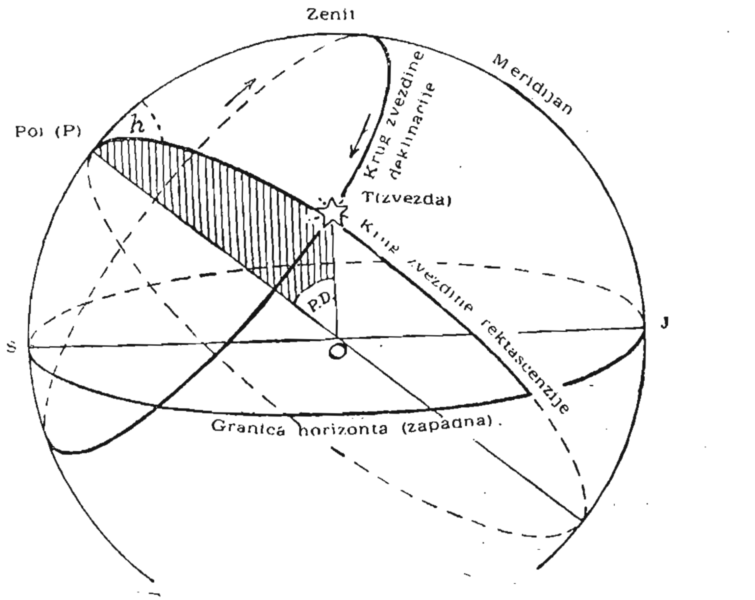
iznad pola i zato zaklapa isti ugao sa zenitom kad prolazi kroz meridijan. Da se zvezde prividno kreću po kružnim lucima koji pretstavljaju deo obima paralelnih ravni nanizanih pod pravim uglom na polarnoj osovini vidi se iz činjenice da je razlika između meridijanskih zenitnih daljina ma koje zvezde u dva mesta ista kao i razlika između uzdignutosti pola merenih u ista ta dva mesta; ovo se može i eksperimentom pokazati:



Sl. 108.

Jedan prosti »ekvatorijal« načinjen od drveta i jedne gvozdene cevi. Cev služi kao teleskop i obrće se oko osovine A koja je utvrđena pod uglom L (geografska širina = *latitudo* na latinskom) i upravljena pravo na sever. Kad je ona pričvršćena pod uglom PD (»polarna daljina« zvezde, ili 90° — deklinacija), možete je obrtati oko A kako se zvezda (S) obrće, ne puštajući S iz vida.

utvrdi se štap upravljen pravo na nebeski pol i utvrdi teleskop (ili komad čelične cevi) tako da se pod proizvoljnim uglom može obrtati oko štapa kao svoje osovine (sl. 108). Ako je teleskop tako uzgobljen da je upravljen na neku posebnu zvezdu, možemo pratiti tok te zvezde cele noći prostim obrta-

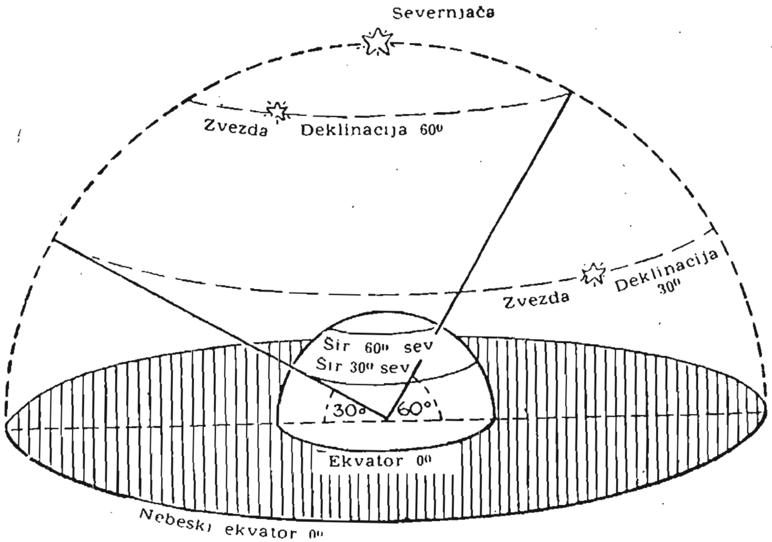


Sl. 109.

PRIVIDNO OBRTANJE NEBESKE LOPTE

Položaj zvezde (*T*) na nebeskoj lopti može se pretstaviti tačkom u kojoj jedan mali krug deklinacije koji pokazuje njenu uzdignutost iznad nebeskog ekvatora, seče jedan veliki krug rektascenzije (R. A.). Sve zvezde na istom deklinacionom krugu moraju prolaziti kroz meridijan pod istim uglom prema zenitu i zadržavaju se nad posmatračevim horizontom za istu vremensku dužinu u svakih dvadeset i četiri časa. Luk *PT* ili ugao *POT* pretstavlja ugao zvezde prema polu (polarnu daljinu) i otuda iznosi 90°—deklinacija. Sve zvezde na istom velikome krugu rektascenzije prolaze kroz meridijan u istom trenutku. Ugao između dva kruga rektascenzije pokazuje razliku njihovih vremena prolaza kroz meridijan. Ugao *h* između meridijanske ravni i kruga rektascenzije jedne zvezde jeste ugao za koji se zvezda obrnula otkako je prošla kroz meridijan. Ako *h* iznosi 15°, ona je prošla kroz meridijan pre jednog časa. Zato se *h* zove časovni ugao zvezde. Ako je časovni ugao *h* stepeni, zvezda je prošla kroz meridijan (*h* : 15) časova ranije.

njem teleskopa oko njegove slobodne osovine, a da ga ne moramo ni spuštati ni dizati. Ako je postavljen u vezu sa nekim vrlo tačnim modernim časovnim mehanizmom tako da se može okretati za 360° u toku sideralnog dana (tj. vremena od jednog do drugog prolaska izvesne zvezde kroz meridijan), on će uvek biti upravljen na jednu istu zvezdu. Jedna određena zvezda preseca meridijan tačno isti broj minuta posle ili pre jedne druge određene zvezde. To je navelo astronome staroga doba



Sl. 110.
Mali krugovi geografske širine na zemaljskoj lopti i deklinacije na nebeskoj lopti.

na shvatanje da su zvezde raspoređene po velikim nepokretnim krugovima koji se svi seku na nebeskim polovima.

Svakoj se zvezdi može, dakle, dati neki položaj na velikoj zamišljenoj lopti nebeskoj. Taj je položaj utvrđen presekom dva kruga (sl. 109), velikoga kruga *rektascenzije* (koji se može uporediti s našim meridijanom dužine) koji seče sve ostale takve krugove na nebeskim polovima i maloga kruga *deklinacije* (koji se može uporediti s našim paralelama širine), koji se svi nalaze u ravnima upravnim na polarnu osovinu. Krug deklina-

cije, poput krugova geografske širine, dobija svoj broj po uglu koji se dobija kod Zemljinog središta kad se s njim spoje one dve tačke gde meridijan seče taj krug i nebeski ekvator (sl. 110). To što mi zovemo Zemljinom polarnom osovinom jeste prosto ona osovina oko koje se prividno obrću zvezde. Otuda je ono što mi zovemo ravan Zemljinog ekvatora samo »ploča« po kojoj Zemlju seče ravan nebeskog ekvatora. Prava koja spaja posmatrača sa Zemljinim središtem prolazi kroz njegov zenit i seče njegovu paralelu širine i odgovarajući deklinacioni krug na nebu. Svaka zvezda na takvom deklinacionom krugu proći će neposredno iznad posmatrača negde na odgovarajućem krugu širine jednom u dvadeset i četiri časa. I kad su tako zvezde stavljene na kartu da u moreplovstvu služe kao miljokazi, lako je bilo poći dalje i na sličan način izraditi kartu Zemlje.

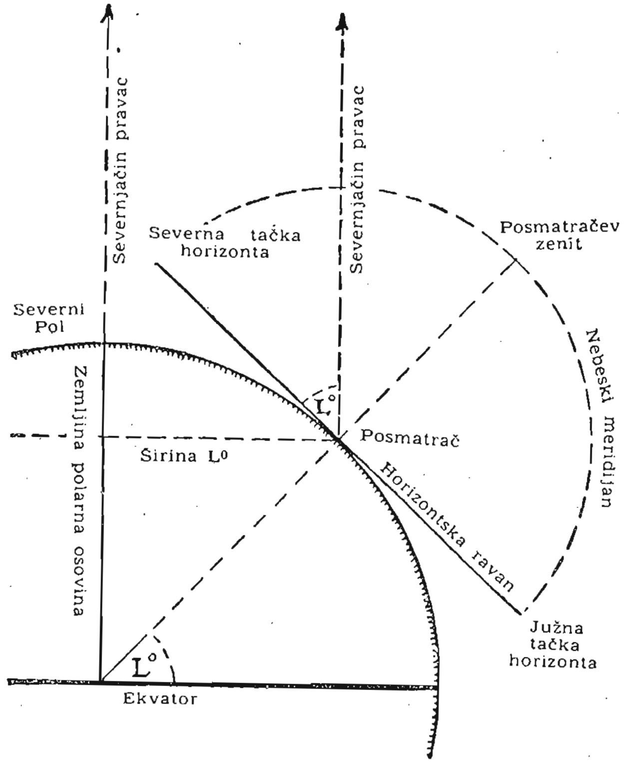
Na podne Sunčeva senka nalazi se na liniji koja spaja tačke severa i juga na horizontu. To je u isto vreme posmatračev meridijan geografske dužine koji spaja Severni i Južni Pol. Samo Sunce se nalazi u podne na zamišljenom kružnom luku ili nebeskom meridijanu koji prolazi kroz nebeski pol i kroz zenit. Nebeski je pol na pravoj liniji sa posmatračem i Zemljinim središtem. Zenit (glava IV), se nalazi na pravoj liniji sa posmatračem i Zemljinim središtem. Nebeski meridijan, Zemljino središte i posmatračev meridijan geografske dužine svi se, dakle, nalaze u istoj ravni u prostoru (sl. 111). U trenutku kad »prolaze« kroz meridijan Sunce i zvezde su na svom »najvišem« položaju na nebu. Zato mi tada možemo da primenimo pravila ravne geometrije koja kazuju (sl. 61 i 62) da je posmatračeva širina na veoma prost način vezana sa deklinacijom ma koga nebeskog tela i njegovom zenitnom daljinom. Posmatranjem zenitne daljine neke zvezde pri njenom prolazu kroz meridijan možemo odmah naći njenu deklinaciju ako znamo geografsku širinu svoga mesta, i obrnuto, ako smo već utvrdili njenu deklinaciju možemo uvek odrediti širinu svoga mesta. Pošto se uvek nađe neka zvezda u blizini meridijana, mornar može odrediti širinu svoga mesta u svako doba noći pomoću zvezdane karte, ili pomoću tablica u kojima se nalaze deklinacije zvezda. Za neku zvezdu koja prolazi kroz meridijan severno od zenita (sl. 112 i 113) u severnoj širini, obrazac prosto glasi ovako:

Deklinacija = posmatračeva širina plus meridijanska zenitna daljina.

Za zvezdu koja prolazi kroz meridijan južno od zenita obrazac glasi:

Deklinacija = posmatračeva širina minus meridijanska zenitna daljina.

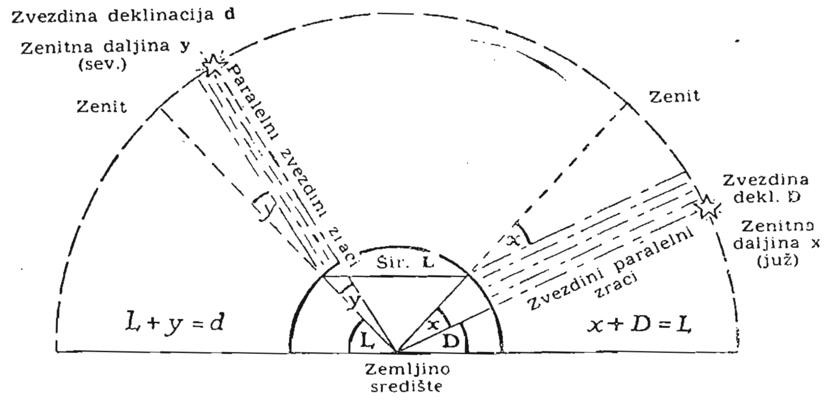
Prvi obrazac važi za sve slučajeve ako zenitne daljine merene južno od zenita računamo kao negativne, a širine ili



Sl. 111.

Zvezda pri prolazu kroz meridijan nalazi se u istoj ravni kao i posmatrač, Zemljini polovi, zenit, južna i severna tačka na horizontu i Zemljino središte.
Jedna prava koja ne leži na izvesnoj određenoj ravni u prostoru može prodirati kroz tu ravan samo na jednome mestu. Prava linija koja

deklinacije južno od Zemljinog ekvatora ili od nebeskog ekvatora kao negativne. Posmatračeva širina je isto što i uzdignutost pola iznad horizonta (gl. IV). Kad nije bilo sjajne Sever-



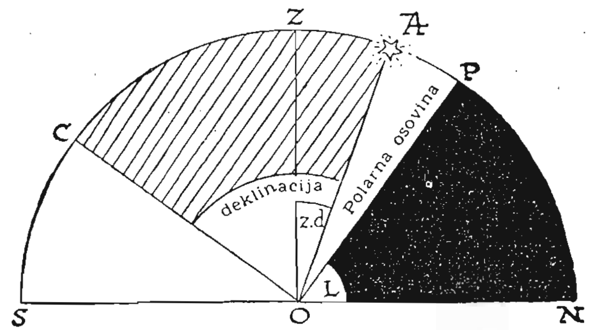
Sl. 112.

Dve zvezde u severnoj polovini nebeske lopte; jedna prolazi kroz meridijan severno, a druga južno od zenita. Ako zvezda prolazi severno: deklin. = posmatračeva širina + meridijanska zenitna daljina. Ako prolazi južno: posmatračeva širina = deklinacija + meridijanska zenit. daljina, tj. deklin. = posmatračeva širina — meridijanska zenitna daljina.

njače, kao na pr. u aleksandrisko doba, to je rađeno ovako: uzimali su prosečnu visinu ma koje zvezde blizu pola, tj. sre-

prolazi kroz dve i više tačaka jedne ravni i sama se nalazi na ravni na kojoj su te tačke. Ravan određena posmatračevim velikim krugom geografske širine i Zemljinom osovinom sadrži u sebi Zemljino središte, posmatračevu tačku i Zemljine polove. Prava koja spaja zenit i posmatračevu tačku prolazi i kroz Zemljino središte, tj. prolazi kroz više od jedne tačke u toj ravni. Zato se ona cela nalazi u toj ravni. Severna i južna tačka horizonta jesu prosto one tačke u kojima prave povučene iz Zemljinog središta kroz meridijan geografske dužine seku horizontsku ravan. Prema tome one moraju biti u istoj ravni kao i ove prave. Zato se južna tačka i severna tačka, zenit i posmatrač nalaze svi u istoj ravni sa Zemljinim središtem i sa polovima. Krug koji ne leži u jednoj ravni može seći tu ravan samo u dvema tačkama. Krug povučen kroz severnu tačku, južnu tačku i zenit prolazi kroz više od dve tačke jedne iste ravni. Zato mora ležati ceo u toj ravni. Zato se svaka tačka toga zamišljenog kruga (nebeskog meridijana) takođe nalazi na toj ravni.

Posmatračeva širina (O) jeste ugao između horizonta i nebeskog pola (P), tj $\sphericalangle$ *PON*. Otuda ugao *ZOP* iznosi 90° — šir. (*L*).



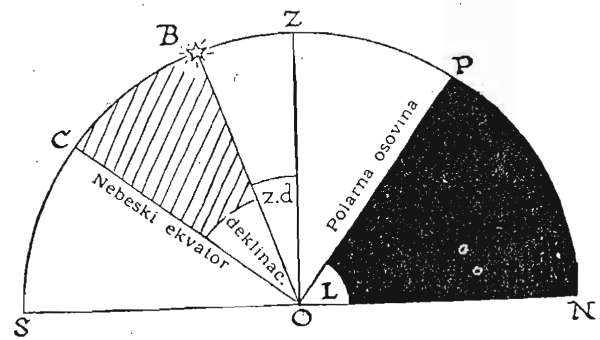
Zvezda A prolazi kroz meridijan severno od zenita.

Za neku zvezdu (*A*), koja prolazi severno od zenita:

$$ZOP = AOP + \text{zen. dalj. (z. d.)}$$

Otuda je zvezdina deklinacija ugao što ga zvezda zaklapa sa nebeskim ekvatorom koji je pod pravim uglom prema polarnoj osovini:

Dekl. $= 90° - AOP = 90° - (ZOP - \text{z. d.}) = 90° - (90° - \text{šir.}) + \text{z. d.}$
Dekl. $=$ šir. $+$ z. d.



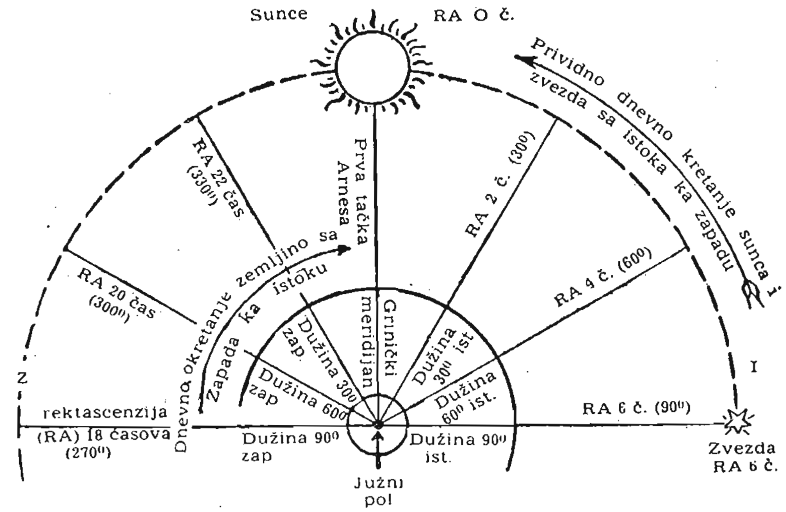
Zvezda B prolazi kroz meridijan južno od zenita.

Za neku zvezdu (*B*) koja prolazi južno od zenita:

Dekl. $+$ z. d. $= 90° - ZOP = 90° - (90° - \text{šir.})$. Dekl. $=$ šir. $-$ z. d.

SL. 113. — ŠIRINA, DEKLINACIJA I ZENITNA DALJINA PRI PROLAZU KROZ MERIDIJAN

dinu između položaja kad je bila u svojoj najvišoj tački i u svojoj najnižoj tački pri prolazu kroz meridijan.

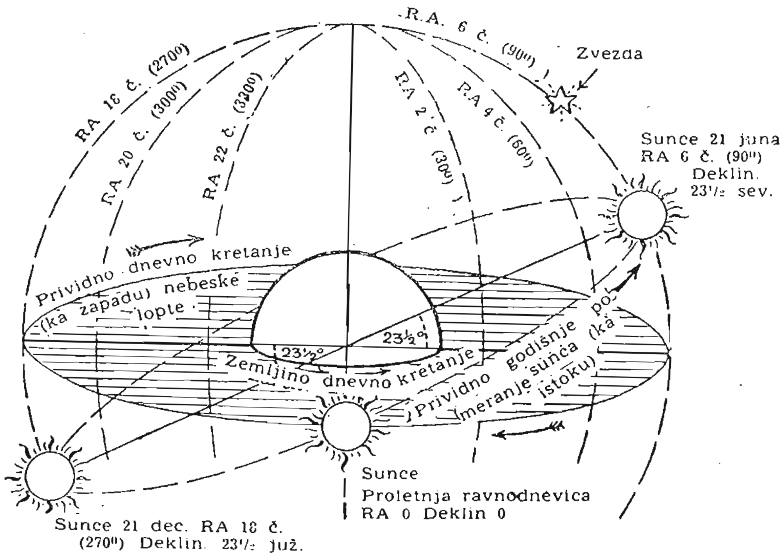


Sl. 114.

Podne u Griniču 21 marta. Slika pokazuje odnos rektascenzije *(RA)*, dužine i vremena. U podne meridijan Sunčeve *RA* na nebeskoj lopti nalazi se u istoj ravni kao i dužinski meridijan posmatrače v. Ako ste vi 30° zap. od Griniča, Zemlja mora da se obrne za 30° ili za $\frac{1}{12}$ punog obrtanja, ona se okreće 2 časa dok se vaš meridijan ne nađe u istoj ravni sa Sunčevim meridijanom, ili Sunce mora prividno da putuje 30° dok mu se njegov meridijan ne nađe u istoj ravni s vašim meridijanom. Zato će vaše podne biti 2 časa posle griničkog podneva.

Časovnik doteran na griničko vreme pokazaće 2 čas. po podne kad Sunce prolazi kroz vaš meridijan, tj. u podne po mesnom vremenu. Ako je datum 21 mart, kad Sunčeva *RA* iznosi nulu, zvezda sa *RA* od 6 časova proći će kroz meridijan u 6 č. posle podne po mesnom vremenu. Ako ona prođe u 8 č. posle podne po griničkom vremenu, vaš časovnik zaostaje 2 časa od Griniča, te će vaša geografska dužina biti 30° zap. Slika prikazuje obrtanje zvezda u suprotnom smislu kretanja sahatne kazaljke gledajući u p r a v c u s e v e r a, te vam je južni pol bliži.

Širinu svakoga mesta možemo naći ako utvrdimo zenitnu daljinu jedne zvezde pri prolazu kroz meridijan kad znamo njenu deklinaciju sa zvezdane karte. Isto tako možemo odrediti geografsku dužinu svoga mesta kad znamo vreme prolaza kroz meridijan za neku zvezdu, kad znamo njenu rektascenziju (sl. 114, 115 i 116) sa zvezdane karte i imamo hronometar doteran na standardno vreme (na pr. griničko). Krugovi geografskih

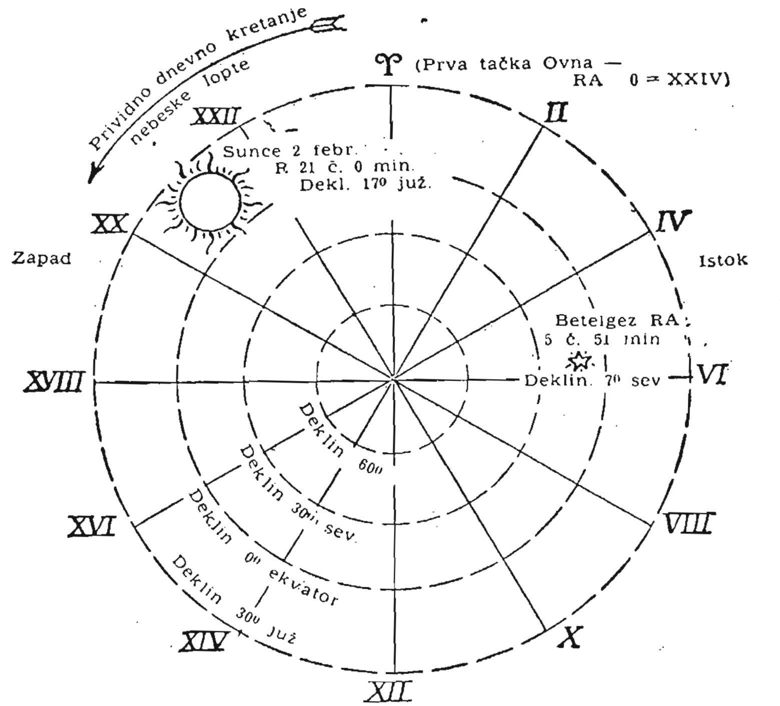


Sl. 115.

Pokazana zvezda (*RA* 6 časova) prolazi gore kroz meridijan na podne 21 juna i o ponoći 21 decembra, što znači da je to zimska zvezda kao Betelgez.

dužina označeni su danas stepenima od 0° do 180° istočno i zapadno od griničkog početnog meridijana (0°). Rektascenzija se uvek računa i s t o č n o od nebeskog meridijana na kome se nalazi »Prva tačka Ovna«. To je nebeski Grinič, i obeležava se astronomskim znakom ♈. To je položaj u kome se nalazi Sunce za vreme prolećne ravnodnevice (21 marta). Nebeska lopta se prividno okreće za 360° za 24 časa. Zato je zgodnije računati krugove rektascenzije u časovima i minutima, od 0 do 24 časa. Pošto se nebeska lopta prividno okreće sa istoka na zapad, zvezda koja ima rektascenziju od 13 časova i 21 minut (napr. Spika u sazvežđu Devojke) prolazi kroz meridijan 13 časova i

21 minut posle onog vremena kad Sunce prođe kroz meridijan na istome mestu na dan prolećne ravnodnevnice. To znači ona prolazi kroz meridijan u $1^h\ 21^{min}$ po ponoći po lokalnom vremenu. Ako u trenutku njenog prolaza kroz meridijan radio



SL. 116. — MAPA ZVEZDA (ILI PLANISFERA) DA POKAŽE ODNOS REKTASCENZIJE PREMA MESNOM VREMENU PROLAZA KROZ MERIDIJAN

Ako je Sunčeva rektascenzija x, ono prolazi posle x časova krug nulte rektascenzije ili kroz prvu tačku Ovna. Ako je zvezdina rektascenzija y, ona prolazi posle y časova kroz tačku ♈. Zvezda dakle prolazi $(y - x)$ časova posle Sunca, tj. njeno mesno vreme prolaza je $(y - x)$. Otuda je:

Zvezdina *RA* — Sunčeva *RA* = mesno vreme prolaza

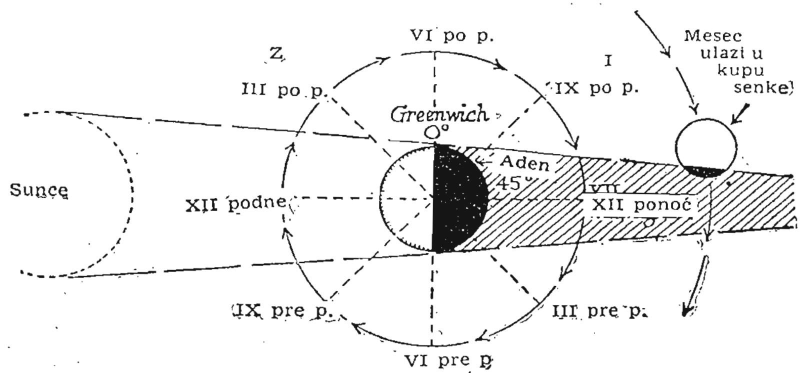
Može se desiti da ova razlika bude negativna, kao što je u primeru na slici, pošto je mesno vreme prolaza — 15,9, tj. 15 časova i 9 minuta *pre* podneva, što je isto što i 8 časova i 51 minut posle podneva ($8^h\ 51^m$ po p.). Slika pokazuje da Sunce prolazi 3 časa pre ♈, a zvezda 5 časova i 51 minut posle, prema utvrđenom vremenu prolaza kao što je već objašnjeno. Orijentacija je ista kao na sl. 114.

javlja da je tad po griničkom vremenu $10^h\ 21^{min}$ uveče, znaćete da je vaše vreme tri časa ispred griničkog vremena i da je u vašem mestu $3^h\ 00^{min}$ po podne kad je u Griniču podne. Tako će vaša dužina (v. sl. 63), biti 3 puta $15^0 = 45^0$ *istočno* od Griniča.

U drugo doba godine morate voditi računa o tome da se Sunčev položaj prema Zemlji i zvezdama nekretnicama menja u toku 360^0 ili 24 časa rektascenzije za $365\frac{1}{4}$ dana. Tačne vrednosti Sunčeve rektascenzije svakoga dana u godini date su u pomorskim kalendarima, koje se pišu u državnim zvezdarama što ih održavaju sve savremene vlade. Bez tablica možete približno izračunati vreme računajući od lokalnog podneva, na ovaj način (sl. 116). Pošto zvezde stižu na meridijan nešto malo ranije svake noći, Sunce se prividno pomera(zaostaje) ka istoku, i njegova se rektascenzija povećava približno za $\frac{360}{365}$ — ili 1^0 ili — u vremenskim jedinicama — $\frac{1}{15}$ časa (4 minuta) za 1 dan. Pretpostavimo onda da zvezda Betelgez prolazi kroz meridijan u izvesno vreme 1 marta. Suncu je onda potrebno 20 dana zaostajanja ka istoku, da dostigne Prvu Tačku Ovna, tj. ono će proći kroz meridijan 80 minuta (1 čas i 20 minuta) pre Prve Tačke Ovna. Ako je rektascenzija zvezde Betelgez 5 časa i 21 minut, ona prolazi kroz meridijan 5 časa i 51 minut docnije nego Υ, i otuda 1 čas + 20 minuta + 5 časova + 51 minut = 7 časova i 11 minuta posle podne. Znači lokalno vreme je 7 časova 11 minuta posle podne[1]). Sunčeva deklinacija se isto tako menja od $+\left(23\frac{1}{2}\right)^0$ na dan letnje Sunčeve prekretnice do $-\left(23\frac{1}{2}\right)^0$ na dan sunčeve zimske prekretnice. Njene vrednosti nalaze se u tablicama u *Pomorskom almanahu.* Iz njih možete dobiti širinu svoga mesta na osnovu Sunčeve zenitne daljine na podne svakoga dana u godini, isto onako kao što ste je mogli dobiti iz zenitne daljine neke zvezde kad ona prolazi kroz meridijan.

[1]) Da bi stvar bila prostija ne pominjemo popravku zvanu *»vremensko izjednačenje«* koje se objašnjava po kalendarima. Radio — vreme je griničko srednje vreme više 1 čas u »letnjem vremenu« koje se razlikuje od griničkog lokalnog vremena za nekoliko minuta čiji se broj menja u toku godine. Srednje vreme je uzeto zato što sunčani dan (od podneva do podneva) menja svoju dužinu tokom godine i ne može se načiniti časovnik koji bi išao u korak sa njim. Tako je prosečni sunčani dan uzet za onsovu vremena i podnevno vreme se vraća ili tera napred za izvestan broj minuta u raznim godišnjim dobima. Ta se razlika uvek nalazi u tablicama. — Pisac.

Kad gledate kroz prozor voza u pokretu na voz koji stoji, niste sigurni, da li se kreće vaš voz, ili onaj drugi, ili se u odnosu na okolne predmete kreće i vaš voz i onaj drugi. Zato i ne postoji ništa što bi nam na prvi pogled reklo da li se nebeska lopta okreće svakodnevno i Sunce tokom godine otstupa oko Zemlje, ili se okreće naša Zemlja svakodnevno oko svoje osovine i tokom godine ide po svojoj putanji oko Sunca. Pošto su zvezde bestraga daleko, svi naši računi važe i za jedan i za drugi slučaj i gledišta Hiparha i Arabljana mnogo su prikladnija za većinu praktičnih slučajeva. Ali to ne važi kad imamo



Sl. 116 A

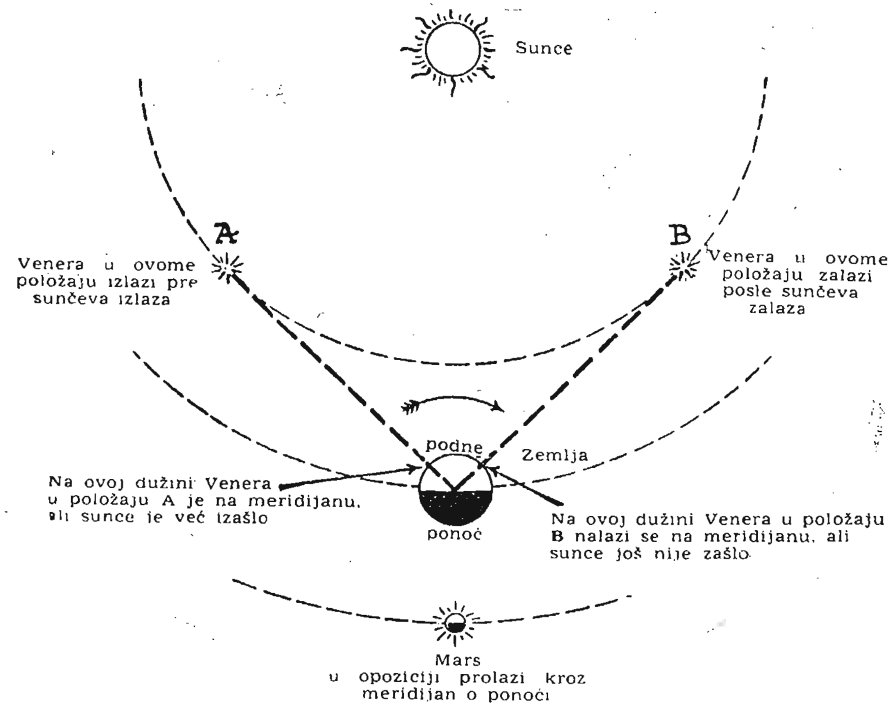
Pre nego što je pronađen hronometar, poznavanje mesnog vremena i određivanje geografske dužine zavisilo je od posmatranja razmaka između podneva i nekog nebeskog znaka kao što su Mesečevo pomračenje, ili okultacija (skrivanje, zaklanjanje) neke planete ili neke zvezde Mesečevom pločom. Razmak je meren staklenim peščanim satom ili grubim časovnicima koji ne bi pokazali tačno vreme na kakvom dugom putovanju. Princip te metode pokazan je na ovoj slici, koja je nacrtana kao i sl. 114 sa Južnim Polom najbliže posmatraču. Vidite meridijane na kojima se nalaze Aden i Grinič u trenutku kad počinje Mesečevo pomračenje. Ako vam vaš Almanah kaže da je sračunato da to pomračenje počinje u 6 č. po p. po griničkom vremenu, a vi ga opazite u devet časova posle mesnog podneva u Adenu (9 č po p. po adenskom vremenu), znate da adensko vreme ide tri časa napred prema griničkom vremenu i da je, zbog toga, Aden 45° istočno od griničkog meridijana.

posla sa drugom jednom klasom nebeskih tela. Ako ma koja zvezda nekretnica prolazi kroz meridijan toliko i toliko časova i minuta posle podneva ona će to isto da uradi i posle jedne godine, kad će Sunce opet biti u istom položaju prema njoj i prema Zemlji. To ne važi za planete koje menjaju svoj položaj prema zvezdama tako, da rektascenzija i deklinacija jedne planete nisu stalne. Iz nekoliko razloga još u prastaro vreme privukao je na sebe pažnju način na koji planete menjaju svoj položaj. Jedan razlog je u tome što su neke od njih suviše upadljive — mnogo sjajnije nego najblistavije zvezde. Drugi razlog je u tome što se one sve okreću blizu pojasa kroz koji se obrću Sunce i Mesec. U izvesno vreme one mogu da imaju istu rektascenziju kao Mesec, i kada i one imaju istu deklinaciju sa razlikom do $\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$, njih Mesec zaklanja ili »skriva«. Takve su pojave posmatrane još u staro doba. Kad nije bilo časovnika koji su se mogli nositi, jedini časovnik koji je stajao na raspoloženju da se utvrde jednovremeni trenuci na dva međusobno udaljena mesta na Zemlji bilo je nebo, a kazaljka je bio Mesec ili planeta. Pomračenja i okultacije[1]) su najpre iskorišćeni, u početku one u kojima je učestvovao Mesec. Na taj način moglo se videti da podne nije jednovremeno u svim mestima. Kad su bile izrađene tablice Mesečevog položaja, moglo se koristiti uglovno rastojanje između ma koje svetle zvezde i Meseca.

Pre nego što su hronometri pronađeni nije bilo drugog praktičnog načina za određivanje geografske dužine na moru sem da se iskoristi Mesečev položaj. Većina tih metoda su zapletene, ali se lako može objasniti metoda koja se osnivala na Mesečevom pomračenju. Pomoću nje su krmanoši Kolumba, Ameriga Vespučija i Magelana, koji su učili arapsku astrologiju, bili sposobni da odrede položaj Amerike na Zemljinoj karti (sl. 116 A). Znači u praksi je bilo prilično važno da se tačno zna gde se nalaze planete u doba velikih moreplovskih putovanja kada su Kopernik i Kepler pokazali da se položaji planeta mogu izračunati tačnije i mnogo prostije ako odbacimo gledišta koja su na osnovi zdravog razuma stvorili sveštenici-astronomi.

[1]) *Okultacija* je pojava pri kojoj Mesec zaklanja (»skriva«) neko nebesko telo. — Prev.

Da izračunamo putanje planeta gotovo ništa nam ne pomaže *ravna* geometrija koju smo već učili. Ne pomaže iz prostog razloga koji ćete dosta lako shvatiti ako posmatrate kretanje planete *Venere*. Jedne noći u godini razlika između rektascenzije Sunca i izvesne određene zvezde biće 12 časova. Zato će ona proći kroz meridijan u ponoć. U takvim prilikama Zemlja i nebeski polovi nalaziće se u istoj ravni sa Suncem i



Sl. 117.

Donje planete, Merkur i Venera, uvek su već prešle meridijan kad postanu vidljive, ili još nisu stigle na meridijan kad prestanu biti vidljivima. Na slici je Zemlja sa Južnim Polom prema čitaocu.

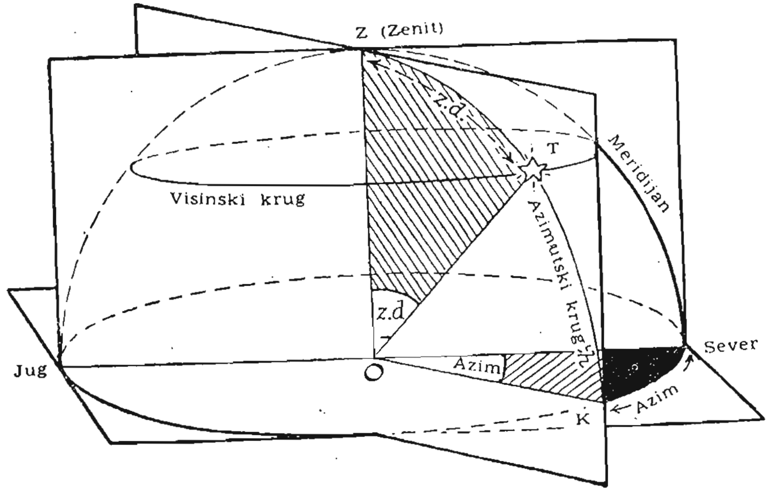
sa tom zvezdom. Venera nikad ne prolazi kroz meridijan posle sumraka. Ona uvek zalazi odmah posle Sunčeva zalaza, ili izlazi baš pred Sunčev izlaz (sl. 117). Prema modernom ili Kopernikovom shvatanju to je prosto zato što se ona obrće između Sunca i Zemlje. Kad se Zemlja pri svome okretanju udaljuje od Sunca Venera postaje vidljiva tek pošto je pređe naš meridijan. Kad se Zemlja pri svom obrtanju približuje Suncu, Venera se više ne može videti golim okom, pošto Sunce izlazi pre nego što naš meridijan nju dostigne. I zato ne možemo da nađemo Venerinu rektascenziju ili deklinaciju, ni da nacrtamo njen put tako što ćemo naći njenu meridijansku zenitnu daljinu i vreme prolaska kroz meridijan. Možemo ih izračunati pomoću zenitne daljine kad se njen položaj na nebeskoj lopti bude prividno skrenuo od meridijana za izvestan merljiv ugao, ako se pri računanju budemo poslužili drugom jednom vrstom geometrije.

Videli smo kako se položaj neke zvezde na nebeskoj lopti određuje pomoću malih krugova deklinacije paralelnih sa nebeskim ekvatorom i velikim krugovima rektascenzije koji se seku na nebeskim polovima. Takva je karta tačna za sva mesta i podesna je za ma koje vreme[1]). Slično tome u svakom utvrđenom trenutku i na svakom određenom mestu možemo pretstaviti položaj neke zvezde pomoću malih krugova visine paralelnih sa kružnom ivicom horizonta i pomoću velikih krugova azimuta koji se seku u zenitu (sl. 118). Brojevi visinskih krugova određuju se prema njihovom uglu uzdignutosti iznad ravni horizonta, kao što se brojevi krugova deklinacije ili širine određuju prema uglu njihove uzdignutosti iznad ekvatorske ravni. Azimutski krug se računa u stepenima počevši od meridijana, kad se sa posmatračem spoje krajevi jednog luka na ravni horizonta koji otsecaju meridijan i azimutski krug. Na isti način se krug dužine numeriše uglom između krajeva jednog ekvatorskog luka koji određuju taj krug dužine, Zemljino središte i tačka gde je ekvator presečen griničkim meridijanom. Azimut jedne zvezde je prema tome njen položaj istok—zapad prema meridijanu. Postavite svoj astrolab ili teodolit domaće izrade sa sl. 119, tako da može da se okreće vertikalno na osnovi, sa zarezima za stepene, i namestite ga

[1]) Ovo poslednje tvrđenje je samo približno tačno i uz njega su potrebna neka ograničenja. Najvažnije je ograničenje pojava »ravnodnevnične« precesije koju su otkrili vavilonski astronomi. Zemljina obrtna osovina menja postepeno svoj pravac u toku vekova tako da ono što se danas zove Polarna Zvezda (Severnjača) tj. zvezda koja je gotovo neposredno nad severnim polom, nije Polarna Zvezda u doba kad su građene Piramide. — Pisac.

tako da je zarez od 0^0 upravljen pravo na jug ili na sever. Tada će azimut neke zvezde biti ugao za koji morate cev kroz koju gledate (ili teleskop) da obrnete na njegovoj osnovi, a visina se dobija kad od 90^0 oduzmete zenitnu daljinu. Ako je uglomer obeležen i od 0^0 do 90^0 i od 90^0 do 0^0, vi ćete, razume se, moći odmah na njemu da pročitate visinu.

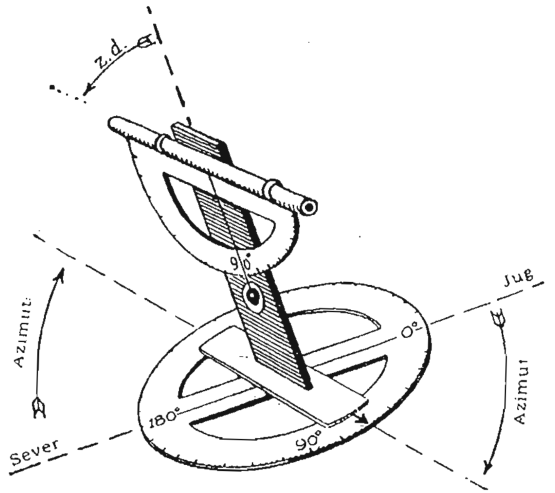
Ako upravite teleskop na neku zvezdu, pa ga malo docnije okrenete i upravite ka mestu na kome se zvezda tad vidi, time ste opisali luk na nebeskoj lopti kakav opisuje brod na pučini. Ako razmislite o tome kojim putem brodovi stvarno plove, videćete da oni nikad ne plove po pravim linijama Euklidove



Sl. 118. Mesne koordinate jedne zvezde

Položaj prema horizontu ili visina je 90° — Z. d. Zenitna daljina (Z. d.) meri se lukom *TZ* ili ravnim uglom *ZOT* u azimutskoj ravni. Položaj prema meridijanu ili azimut je luk *SK* koji je u stepenima ravan uglu *SOK*, ili uglu između meridijanske ravni *SZJ* i azimutske ravni *ZOK*.

geometrije. Oni plove po kružnim lucima na krivoj Zemljinoj površini. Najkraći luk između dveju tačaka jeste onaj koji je najmanje savijen, prema tome luk sa najvećim polupečnikom, a to je poluprečnik same Zemlje... Zato u moreplovstvu najkraće rastojanje između dveju tačaka nije Euklidova prava linija, već »veliki« krug koji prolazi kroz njih. Ako dva broda putuju iz A u B i to jedan pravo na B, a drugi ne menja geografsku širinu dok ne stigne na meridijan mesta B, a onda plovi tim meridijanom sve do B, ta dva puta grade jednu trostranu sliku čije su strane kružni luci. Slično tome, kad se neka zvezda prividno kreće po svom deklinacionom krugu po nebu, da bismo pratili njen tok imamo da obrćemo oči horizontalno duž jednog luka visine i vertikalno duž jednog azimutskog luka. Prividno kretanje zvezde i kretanje našeg oka ili teleskopa opisuju trougao s krivim stranama na nebeskom svodu. Da bi došla na neko mesto na nebu zvezda ima da se obrne



SL. 119. — APARAT KUĆNE IZRADE ZA MERENJE AZIMUTA I Z. D., ILI VISINE JEDNE ZVEZDE

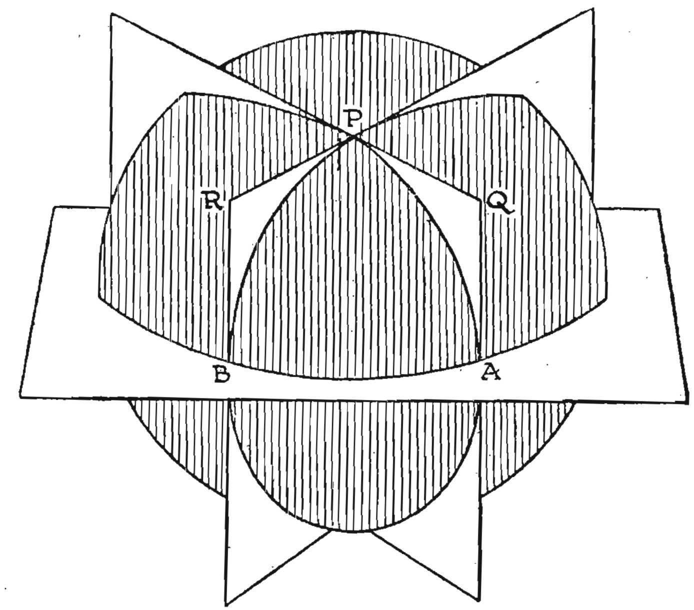
Materijal pretstavljaju tri uglomera za merenje uglova na tabli (možete ih sami načiniti pomoću pribora za duborez), komad gvozdene cevi i visak.

oko polarne osovine za izvestan ugao udaljujući se od meridijana, dok se naš teleskop obrne za izvestan određen ugao oko zenitne osovine. Dok se pak zvezda okrenula za izvestan ugao duž svoga deklinacionog kruga, naš teleskop je pomaknut za izvestan određen ugao prema ravni horizonta. Kako polarna osovina zaklapa stalno utvrđeni ugao sa ravni horizonta, mogli bismo očekivati da sve te količine budu u nekoj vezi, isto onako kao što je najkraći put nekog broda u vezi sa širinom

i dužinom njegovog polaznog i njegovog dolaznog pristaništa. Za obadva ta problema potrebno nam je da znamo kakve veze možemo očekivati između delova slika koje imaju krive strane.

SFERNI TROUGLI

Slika 120 pokazuje zemaljsku loptu presečenu trima ravnima: dvema kroz meridijane (po *PA* i *PB*) i jednom kroz ekvator (*AB*). Svaka ova ravan seče Zemljinu loptu po potpunome krugu, čije je središte Zemljino središte. Tamo, gde se na loptinoj površini te ravni seku, one grade temena jedne tro-



SL. 120. — PRESEK TRIJU RAVNI NA KOJIMA SE NALAZE TRI VELIKA LOPTINA KRUGA

strane slike čije su sve strane luci v e l i k i h k r u g o v a, tj. krugova čija su središta u loptinom središtu, a poluprečnici im jednaki s loptinim poluprečnikom. Takva se slika zove sferni trougao. On ima tri strane: *PA*, *PB* i *AB*, koje ćemo obeležiti sa *b* (prema *B*), *a* (prema *A*) i *p* (prema *P*). On ima i tri ugla B, A i P (tj. PBA, PAB i APB). Ono što već znate o geografskoj karti reći će vam kako se mere ti uglovi. Ugao APB je jednostavno razlika dužina tačaka A i B obeleženih na ekvatoru, a meri se nagibom dveju ravni koje se seku po osovini lopte od pola do pola. Odatle ćete videti, pošto je Zemljina osovina upravna na ravni ekvatora, da je ravan AB upravna na ravnima PA i PB. Uglove pod kojim se seku dva velika kruga na lopti merimo uglom između ravni u kojima leže ti krugovi. Zato je sferni ugao PAB prav ugao kao i ugao PBA. Međutim tri prava ugla sfernog trougla su zajedno veći od dva prava ugla, dakle veći od 180°, što pretstavlja važnu razliku između sfernih trouglova i Euklidovih trouglova. U praksi je naravno, poprilično teško da se naslika slika kao što je sl. 120 koja prikazuje ravni krugova nacrtanih na površini lopte i ugao između dva velika kruga koji se seku (tj. krugova kao što su ekvator i meridijan dužine sa središtem u loptinom središtu). Da ih izmerimo imamo tri razna načina; u sva tri se radi samo o primeni ravne geometrije koju smo već učili:

(a) Geometriska metoda: Ugao BPA između sfernih strana PA i PB isti je kao i ravan ugao RPQ između dirki RP i QP koje dodiruju PB i PA u njihovoj zajedničkoj tački, tj. u »polu« P ekvatorijalnoga kruga.

(b) Geografska metoda: Ako se setite da je BPA prosto broj stepeni dužine između A i B, videćete da je on prosto broj stepeni na luku što ga na ma kome krugu širine otsecaju veliki krugovi, na kojima leže PB i PA, znači što ga otsecaju na svakome krugu čija je ravan pod pravim uglom sa pravom koja spaja polove u kojima se veliki krugovi seku.

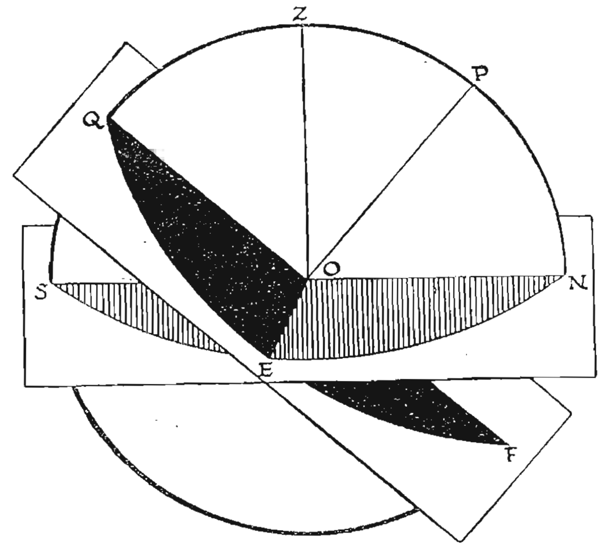
(c) Astronomska metoda: Ona je prikazana na sl. 121. Na njoj se vidi presek ravni nebeskog ekvatora $FEQO$ sa ravni horizonta $NESO$, na nebeskoj lopti, čiju osovinu seče pol nebeskog ekvatora u P i pol kruga horizonta, tj. zenit, u Z. Ugao QES između lukova QE i SE jeste ugao QOS između njihovih ravni koje se seku i

$$QOS = 90^0 - QOZ$$
$$POZ = 90^0 - QOZ$$

Tako je ugao između dva sferna luka jednak sa uglom između polova velikih krugova na kojima ti luci leže.

Sad treba naučiti kako se mere strane jednog sfernog trougla. Sferni trougao nije prvenstveno neka slika koja prikazuje

rastojanje između tri predmeta koji leže u njegovim temenima. On pre prikazuje razliku u pravcima u kojima se tri predmeta vide iz jednog centra. Strana sfernog trougla je ugao za koji treba da se pomeri oko ili teleskop, da bi došli od jednog temena najkraćim putem na drugo teme. Strane sfernog trougla kao i njegovi uglovi uvek se mere stepenima ili radijanima. Tako na slici 120 strane a (PB) i b (PA) su obe jednake širini Severnog Pola (90^0 ili $\frac{\pi}{2}$ radijana), a strana p je razlika geografskih dužina tačaka A i B; u ovom posebnom slučaju ispalo je da je jednaka sa uglom P. Na sl. 121 tačke Q, E i S



SL. 121. — UGAO IZMEĐU DVA LUKA (QE I SE) VELIKIH KRUGOVA NA LOPTI JE UGAO (ZOP) IZMEĐU POLOVA VELIKIH KRUGOVA Z I P

su temena jednog sfernog trougla na nebeskoj lopti. Dve strane su mu pravi uglovi: s (QE) i q (SE). Treća strana e (SQ) je jednaka s uglom E, koji je jednak s ravnim uglom POZ. Sferni uglovi Q i S su pravi uglovi i vi opet vidite da tri ugla sfernog trougla zajedno iznose više od 180°.

Geografska širina i dužina na ulazu u okno rudnika i na njegovom dnu iste su, pošto širina i dužina određuju pravac nekog predmeta u kome bi on bio viđen iz Zemljinog centra, a kad se ulaz i dno okna gledaju iz Zemljinog centra oni leže tačno u istom pravcu. Zato ma koje tri tačke u prostoru mogu da se pretstave kao temena jednog sfernog trougla nacrtanog na površini lopte koja prolazi kroz sve te tri tačke. Ako se desi da su sve te tri tačke na istom rastojanju od posmatračeva centra, strane takvog trougla možemo izraziti dužinskim merama, mesto da ih izražavamo u stepenima ili radijanima. Način na koji se to radi može se prikazati jednim prostim računom u koji nije upleten sferni trougao, pošto paralelni krugovi širine nisu veliki krugovi (sem ekvatora). Ako znamo broj stepeni ili broj radijana jednog ugla koji spaja krajeve nekog luka sa centrom kruga na kome je taj luk, znamo i njegovu dužinu. Dužinska razlika od jednog stepena duž ekvatora jeste jedan tristašeseti deo Zemljinog obima, tj. ako uzmemo da Zemljin poluprečnik (R) iznosi 3960 milja[1]), biće

$$(2\pi \cdot 3960) : 360 = \frac{44}{7} \cdot 11 = 69 \text{ milja (približno).}$$

Ako ne vodimo računa o neznatnoj Zemljinoj spljoštenosti na polovima, onda je ova dužina jednaka sa jednim stepenom širine merenim duž meridiana dužine, ili sa jednim stepenom merenim duž ma koga velikoga kruga na Zemljinoj površini.

Razlika dužine jednog stepena merenog duž ma koga paralelnog kruga širine lako se određuje, kao što se vidi na sl. 122. Na njoj AB iznosi n stepeni dužine merenih na širinskom krugu L, a DC je n stepeni duž ekvatora. Obim ekvatorskog kruga na kome se nalazi luk DC iznosi $(2\pi \cdot OC)$. Jedan stepen biće $(2\pi \cdot OC) : 360$, a n stepeni biće $(2n\pi \cdot OC) : 360$.

Otuda:

$$DC = (2n\pi \cdot OC) : 360, \text{ a}$$
$$OC = (360 \cdot DC) : 2n\pi.$$

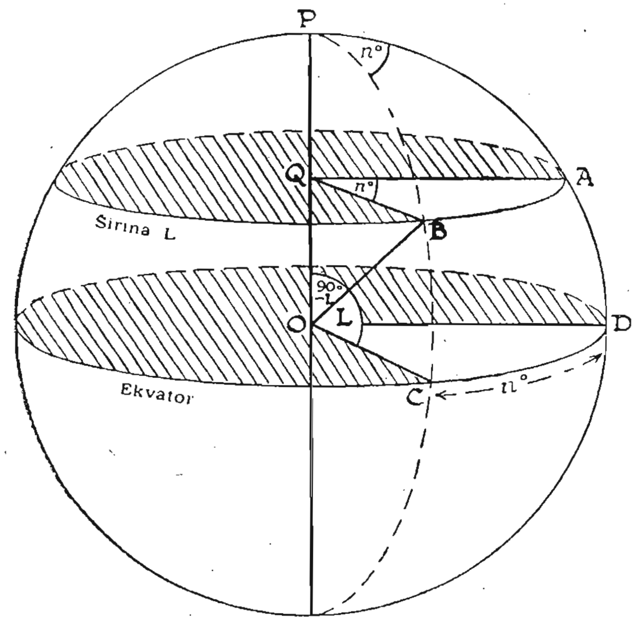
Isto tako:

$$AB = (2n\pi \cdot QB) : 360, \text{ a}$$
$$QB = (360 \cdot AB) : 2n\pi.$$

Ugao $QOB = 90^0 - L$, a pošto je ravan QAB pod pravim uglom prema polarnoj osovini, QOB je pravougli trougao u kome je $OB = OC = R$, a

[1]) Milja je 1609 metara. — Prev.

$$\sin QOB = QB : OB$$
$$\sin (90^0 - L) = QB : OB$$
$$\sin (90^0 - L) = QB : OC \text{ (Pošto je } OB = OC = R).$$
$$\cos L = QB : OC$$
$$QB = OC \cos L \qquad \text{A to je dalje:}$$
$$(360 \cdot AB) : 2n\pi = (360 \cdot DC \cdot \cos L) : 2n\pi$$
$$360 \cdot AB = 360 \cdot DC \cos L$$
$$arc^1) \; AB = arc \; DC \cos L$$
$$= n \cdot 69 \cdot \cos L \text{ (u miljama, približno).}$$



SL. 122. — KAKO DA SE IZRAČUNA DUŽINA OD n STEPENI GEOGRAFSKE DUŽINE MERENE DUŽ MA KOJE PARALELE ŠIRINE

C i D su dve tačke na ekvatoru, A i B dve tačke na paraleli širine, PO je zemljina poluosovina, COD je ekvatorska ravan, QAB je ravan širine za A i B, a OB je zemljin poluprečnik (R).

[1]) Luk. — Red.

REŠAVANJE SFERNIH TROUGLOVA

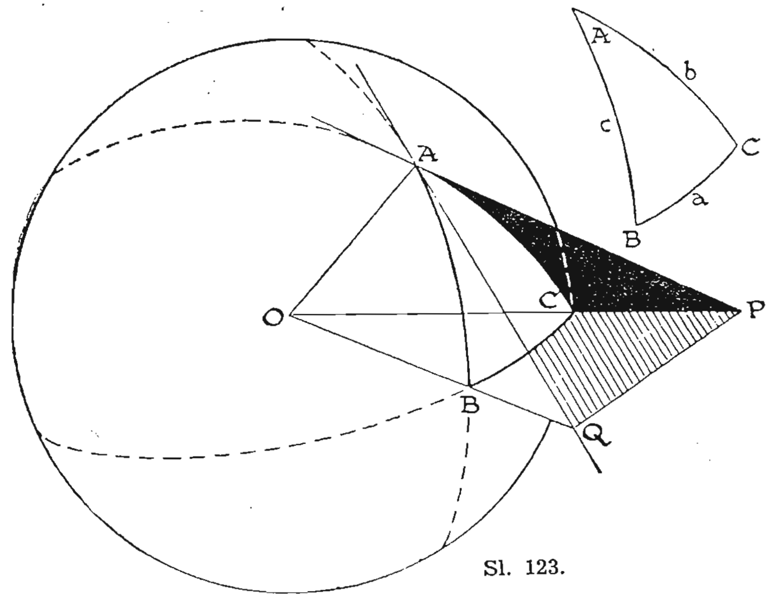
Za »rešavanje« sfernih trouglova mogu se izvesti opšti obrasci slični obrascima datim u VI glavi. Ti se obrasci iz već navedenog razloga stalno upotrebljavaju u astronomiji i matematičkoj geografiji. Oni se osnivaju na odgovarajućim obrascima za ravne trouglove. Jedina teškoća da se oni razumeju proizlazi otuda što je teško načiniti jasne slike t e l a n a r a v n o j površini. Kad bismo jedan deo od onoga što se sad baca na izgradnju ratnih brodova i aviona potrošili na to da snabdemo škole kinematografskim aparatima i da izradimo filmove o čvrstim raznovrsnim telima onakvim kakva ona stvarno jesu, sve one stvari koje danas ni bistri ljudi ne mogu da shvate bez velikog naprezanja i bez velikog gubljenja vremena, sasvim lako bi razumeli ljudi kao što smo mi na primer, koji baš i ne tvrdimo da smo mnogo bistri. Zasad ćemo imati da se poslužimo jednim vrlo prostim modelom koji možete za nekoliko minuta načiniti od providne hartije.

Najvažniji obrazac za rešavanje sfernih trouglova kaže nam kako ćemo dobiti treću stranu (a) kad su već poznate dve strane (b *i* c) i ugao između njih (A). Sličan obrazac za ravan trougao glasi:

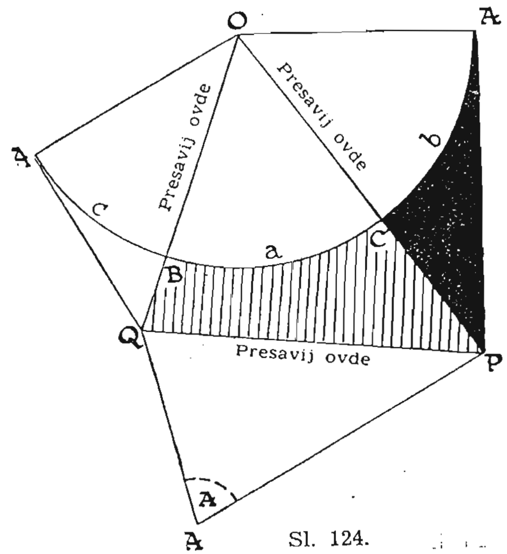
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Slika 123 pokazuje vam sferni trougao ABC koji je postao presecanjem tri kruga sa zajedničkim centrom O koji je u centru same lopte. Ravne površine na kojima leže strane a, b i c seku se duž OA, OBQ i OCP. Ivice AQ i AP dodiruju velike krugove lukova c i b u tački A. To znači da je AQ dirka na c, a AP na b. Zato su OAQ i OAP ustvari pravi uglovi, ma da je nemoguće nacrtati ih takvima na ravnoj hartiji. Ivice triju ravni u kojima se nalaze luci a, b i c grade ravan trougao PAQ u kome je temeni ugao PAQ prema onome što smo rekli o merenju uglova sfernog trougla jednak sa uglom A sfernoga trougla.

Da bismo dobili jasnu sliku o tome kako se odnose delovi sfernog trougla prema delovima četiri ravna trougla koji pretstavljaju strane jedne male piramide u kojoj je smešten (upisan) sferni trougao, napravite model od hartije kao što je pokazano na slici 124. Sve što vam je potrebno naznačeno je na slikama. Kad budete načinili model, rastavite ga kao na



Sl. 123.

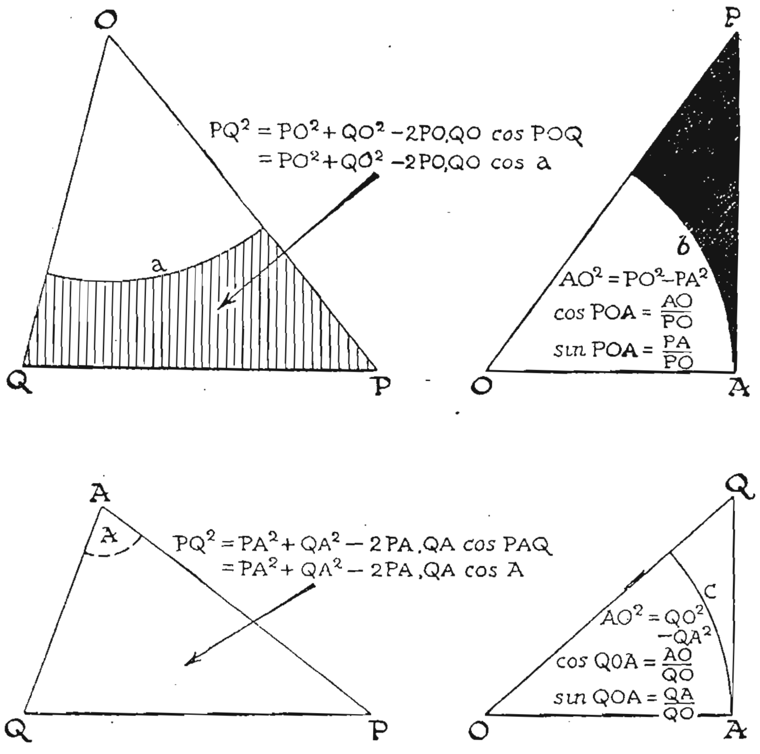


Sl. 124.

sl. 124A tako, da možete videti svaki trougao u položaju koji vam je najpoznatiji. Onda će vam biti jasno, kao što pokazuje sl. 124A, da je na osnovu pravila za ravne trougle:

$$PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2PO\ QO\ \cos a \quad \text{(sl. 124)}$$

$$PQ^2 = PA^2 + QA^2 - 2PA \cdot QA\ \cos A \quad \text{(sl. 123)}$$



Sl. 124 A

To dalje znači:

$$(PO^2 - PA^2) + (QO^2 - QA^2) - 2PO \cdot QO\ \cos a + $$
$$+ 2PA \cdot QA\ \cos A = O$$

Odatle je:

$$2PO \cdot QO\ \cos a = (PO^2 - PA^2) + (QO^2 - QA^2) +$$
$$+ 2PA \cdot QA\ \cos A$$

Na sl. 123 vidimo da je

$$PO^2 - PA^2 = OA^2 \text{ i}$$

$$QO^2 - QA^2 = OA^2. \text{ Zato je dalje:}$$

$$2PO \cdot QO\ \cos a = OA^2 + OA^2 + 2PA \cdot QA\ \cos A$$

$$2PO \cdot QO\ \cos a = 2AO^2 + 2PA \cdot QA\ \cos A$$

Podelite sa $2PO \cdot QO$. Imaćete:

$$\cos a = \frac{AO}{PO} \cdot \frac{AO}{QO} + \frac{PA}{PO} \cdot \frac{QA}{QO} \cos A = \text{(sl. 123)} =$$

$$= \cos POA\ \cos QOA + \sin POA\ \sin QOA\ \cos A =$$
$$= \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A$$

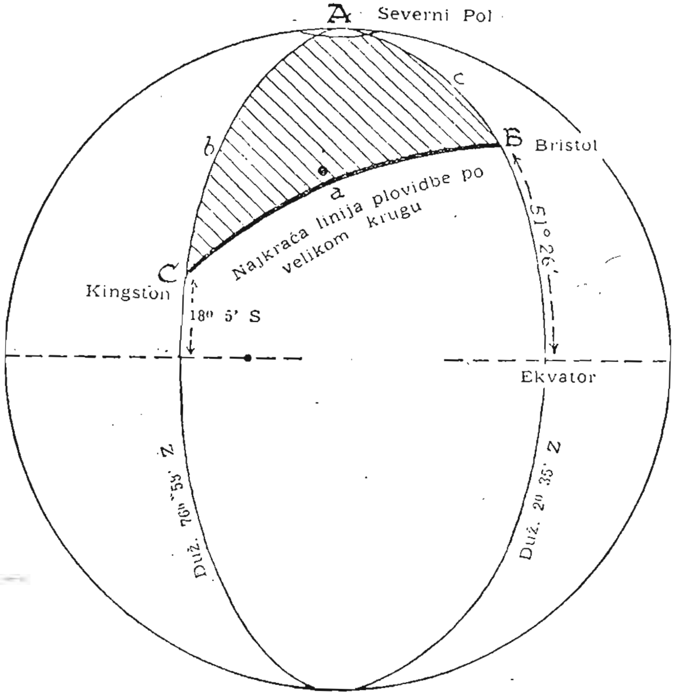
Obrazac za dobijanje treće strane (a) kad znate druge dve (b i c) i zahvaćeni ugao A, biće dakle:

$$\underline{\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A}$$

Naravno, kad već znate kako se dolazi do ovoga obrasca, vi ste ga već i napamet naučili.

IZRAČUNAVANJE DIREKTNOG PUTA NEKOG BRODA

Ako ste pametan čovek nećete hteti da idete dalje u ovoj stvari, dok prethodno ne vidite kakve »ovozemaljske« koristi ima od svega toga. Prvi primer je takav da se njime možete satima zanimati, ako imate neku geografsku kartu na kojoj su označena rastojanja na pomorskim putevima obeleženim tačkastim linijama. Ako imate tu kartu setite se da su na njoj daljine obično date u morskim miljama (60 morskih milja $= 1^0$ velikoga kruga). Vodite računa i o tome da brod ima da ševrda oko raznih tačaka pre nego što izbije na pučinu, ili priđe pristaništu. Tako vam na karti piše za put od Bristola do Kingstona na Jamajci 4003 morske milje, oko 30 milja više nego što daje račun koji ćete sad videti. On ne uzima u obzir put koji se mora preći dok se izađe iz Bristolskog Kanala i uđe u pristanište (vidi sl. 125).



SL. 125. — PLOVIDBA PO VELIKOM KRUGU

Širina Bristola je $51^0\,26'$ severno od ekvatora i zbog toga $38^0\,34'$ od Pola mereno duž velikog kruga geografske dužine $2^0\,35'$ zapadno. Širina Kingstona je $18^0\,5'$, tj. $71^0\,55'$ od Pola duž velikog kruga geografske dužine $76^0\,58'$ zapadno. Luk koji spaja Pol sa Bristolom (c), luk koji spaja Pol sa Kingstonom (b), i luk (a) velikoga kruga koji pretstavlja put broda od Bristola do Kingstona grade sferni trougao. U njemu su poznate dve strane (b i c) i zahvaćeni ugao A, koji pretstavlja razliku dužina ($76^0\,58' - 2^0\,35' = 74^0\,23'$) između ta dva mesta. Možemo naći a kad stavimo

$$\cos a = \cos 71^0\,55' \cos 38^0\,34' + \sin 38^0\,34' \sin 71^0\,55' \cos 74^0\,23'$$

Iz tablica imamo:

$$\cos a = 0{,}3104 \cdot 0{,}7819 + 0{,}6234 \cdot 0{,}9506 \cdot 0{,}2692 = 0{,}4022$$

Znači a je približno $\left(66\frac{1}{3}\right)^0$ velikoga kruga, tj. kruga potpunog Zemljinog obima. Dužina jednog stepena Zemljinog obima je približno 69 milja. Zato je ovo rastojanje približno $66\frac{1}{3} \cdot 69 = 4577$ zemaljskih milja (3980 morskih milja).

Naredni primer neće biti težak za vas, ako ste izradili nekoliko primera kao ovaj prvi uz pripomoć tablica geografske dužine i širine pristaništa, koje ćete naći na kraju mnogih atlasa. Pre nego što pređemo na nov primer, napominjemo da nije potrebno da se mučite vršeći oduzimanje za lukove b i c koji pretstavljaju »polarne daljine« (90^0 — širina) pojedinih mesta. Pošto je $\sin (90^0 - x) = \cos x$, a $\cos (90^0 - x) = \sin x$, možemo gornji obrazac napisati u drugom obliku:

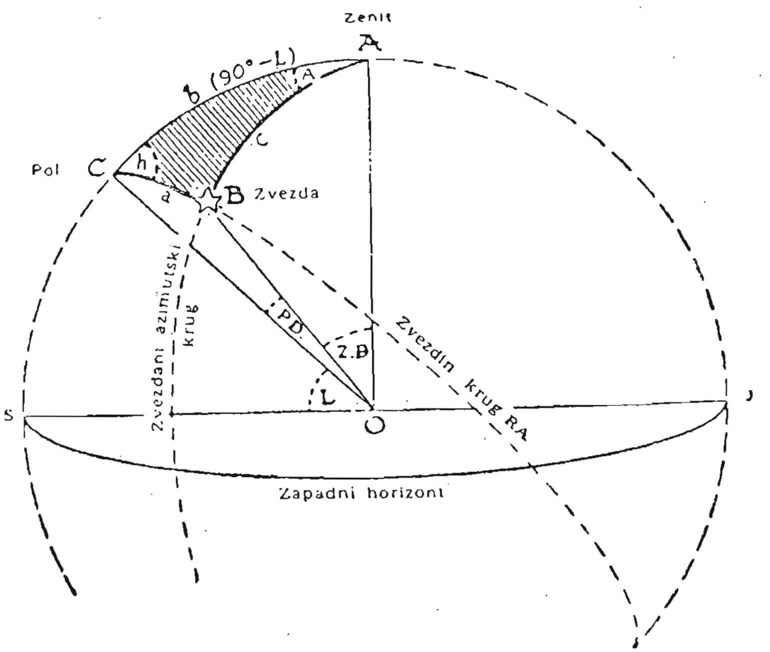
$$\cos (\text{daljina}) = \sin \text{šir}_1 \cdot \sin \text{šir}_2 + \cos \text{šir}_1 \cos \text{šir}_2 \times \times \cos (\text{duž}_1 - \text{duž}_2)$$

Ovde se pretpostavlja da su obe dužine merene istočno ili obe zapadno od griničkog meridijana. Razume se, ako je jedna merena istočno, a druga zapadno, ugao A je njihov zbir i $\cos (\text{duž}_1 - \text{duž}_2)$ ima da se zameni sa $\cos (\text{duž}_1 + \text{duž}_2)$.

DEKLINACIJA NEKE PLANETE

Kao što smo već videli deklinacija (ili rektascenzija = RA), neke planete, kao na primer Venere ili Merkura, ne može se dobiti posmatranjem meridijana. Deklinacija (ili rektascenzija) neke spoljne planete kao što su Mars ili Jupiter mogu se odrediti samo meridijanskim posmatranjem u vremenu kad ta planeta prolazi kroz meridijan za vreme pomrčine. Zato je nemoguće obeležiti položaje neke planete u svima delovima njenog puta prema zvezdama nekretnicama, sem ako odredimo njihove deklinacije i rektascenzije nekom drugom metodom. Lako je dobiti deklinacije i to potpuno na isti način kao što dobijamo kurs nekog broda kad plovi po velikom krugu.

Mesni položaj ma koje zvezde u ma kome trenutku može da se uzme kao teme sfernog trougla (sl. 126) kao kod trougla Bristol—Kingston u ranijem primeru. Jedna strana (b), slično polarnoj daljini Kingstona, jeste luk između nebeskog pola i zenita duž polaznog meridijana. Uzdignutost pola je posmatračeva širina (L). Tako je $b = 90^0 - L$. Jedna strana (c) je



SL. 126. — ZVEZDANI TROUGAO

luk između zvezde i zenita na njenom sopstvenom azimutskom velikom krugu. Taj je luk njena zenitna daljina (c = z. d.). Ugao A između njenog azimutskog kruga i polaznog meridijana koji ga seče u zenitu jeste njen azimut (A = azim.). Kroz krajnje tačke ova dva luka prolazi veliki krug rektascenzije koji spaja zvezdu sa nebeskim polom, a dužina luka između zvezde i pola na krugu njene rektascenzije jeste njena polarna daljina. Pošto je nebeski pol za 90^0 udaljen od nebeskog ekva-

tora, zvezdina polarna daljina, koja pretstavlja treću stranu u našem sfernom trouglu, jeste razlika između pravog ugla i njene deklinacije ($a = 90^0$ — deklin.). Kad primenimo obrazac, imamo:

$$\cos(90^0 - \text{deklin.}) = \cos(90^0 - \text{šir.}) \cos \text{z. d.} + \sin(90^0 - \text{šir.}) \sin \text{z. d.} \cos \text{azim.}$$

To se može i ovako napisati:

$$\sin(\text{deklin.}) = \sin \text{šir.} \cos \text{z. d.} + \cos \text{šir.} \sin \text{z. d.} \cos \text{azim.}$$

Kad primenjujete ovaj obrazac morate se setiti da smo azimut računali od severne tačke. Ako zvezda prolazi kroz meridijan južno, azimut može biti veći od 90^0 i mi ga računamo od južne tačke. Pošto

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ postaje ovo:}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^0 - C)$$

kad je C veće od 90^0, ovaj obrazac za sferni trougao postaje $\sin$ deklin. = $\sin$ šir. $\cos$ z. d. — $\cos$ šir. $\sin$ z. d. $\cos$ azim.

To znači, ako znate istovremeno azimut i zenitnu daljinu nekog nebeskog tela, možete mu izračunati deklinaciju, a da ne čekate da ono stigne na meridijan. Ne možete tako lako dobiti geografsku širinu nekog mesta posmatranjem neke zvezde sa poznatom deklinacijom primenom istog obrasca. Ali ako imate zenitnu daljinu i azimut dveju zvezda izmerene na jednom i istom mestu, možete izračunati širinu toga mesta ako imate almanah ili zvezdnu kartu da iz njih vidite deklinaciju tih zvezda. Uopšte, za aritmetički posao vam treba manje vremena nego da čekate dok prođe kroz meridijan neka svetla zvezda koja se lako raspoznaje.

Gornji obrazac može se primeniti na još jednu stvar. On daje pravac nekog nebeskog tela kad izlazi ili zalazi na nekoj poznatoj širini, ili, obrnuto, daje vam širinu iz izlaza ili zalaza neke zvezde. U trenutku kada neko nebesko telo izlazi ili zalazi njegova zenitna daljina je 90^0. Pošto je $\cos 90^0 = 0$, a $\sin 90^0 = 1$, gornji obrazac postaje:

$$\sin \text{deklin.} = \cos \text{šir.} \cos \text{azim.}$$

O ravnodnevicama, kad je Sunčeva deklinacija 0^0, imaćemo

$$\cos \text{šir.} \cos \text{azim.} = 0, \text{ tj.}$$
$$\cos \text{azim.} = 0,$$
$$\text{azim.} = 90^0.$$

To znači Sunce izlazi tačno na istoku i zalazi tačno na zapadu u svima delovima sveta toga dana. Da se nađe pravac izlaza ili zalaza Sunca na severnoj širini od $\left(51\frac{1}{2}\right)^0$ (London) na dan 21 juna, kad je Sunčeva deklinacija $\left(23\frac{1}{2}\right)^0$ severno, treba samo da stavimo

$$\sin\left(23\frac{1}{2}\right)^0 = \cos\left(51\frac{1}{2}\right)^0 \cos \text{azim.}$$

Iz tablica imamo dalje:

$$0{,}3987 = 0{,}6225 \cos \text{azim.}$$
$$\cos \text{azim.} = 0{,}6405$$
$$\text{azim.} = \left(50\frac{1}{6}\right)^0$$

Znači Sunce izlazi i zalazi na $\left(50\frac{1}{6}\right)^0$ od meridijana na severnoj strani, ili 90^0 manje $\left(50\frac{1}{6}\right)^0 = \left(39\frac{5}{6}\right)^0$ severno od istočne ili zapadne tačke. Obrnuto, možete, naravno, iskoristiti posmatrane pravce izlaza i zalaza, da dobijete širinu svoga mesta.

JOŠ NEŠTO O SFERNIM TROUGLIMA

Kako se menja deklinacija neke planete nije ni blizu tako zanimljivo kao način na koji se menja rektascenzija. To dolazi otuda što je mnogo lakše objasniti promene rektascenzije ako uzmemo da se Zemlja i planete okreću oko Sunca, kao što je smatrao Aristarh i kao što je učio Kopernik. Ova knjiga nije astronomija i ne možemo trošiti vremena na to da objasnimo šta je Kopernika navelo na taj zaključak, ali vi ćete moći da to sami pronađete u nekoj astronomiji, ako vam je jasno kako se određuje položaj jedne planete.

Ako pogledate na zvezdani trougao na sl. 126, videćete da je ugao C između luka koji pretstavlja zvezdinu polarnu daljinu i luka b, koji pretstavlja ugao između posmatrača i Zemljinog pola (90^0 — šir.) — jeste ugao za koji se zvezda obrnula otkako je poslednji put bila na meridijanu. Kako se nebeska lopta prividno obrće za 360^0 u 24 časa, tj. 15^0 na čas, taj ugao C se ponekad zove zvezdani časovni ugao, zato što možete dobiti vreme (u časovima) koje je proteklo od trenutka kad je zvezda prošla kroz meridijan, ako podelite broj stepeni toga ugla sa 15. Ako znate kad je zvezda prošla kroz meridijan po lokalnom vremenu, znate isto tako koliko je vremena prošlo otkako je Sunce prošlo kroz meridijan, pošto se vreme tako i računa, i ako znate Sunčevu rektascenziju istoga dana, znate koliko je vremena prošlo otkako je Υ prošao kroz meridijan. Zato, sve što imate da radite da biste dobili rektascenziju neke zvezde jeste to da dodate Sunčevu rektascenziju na vreme prolaza Prve Tačke Ovna kroz meridijan.

Znači, da bismo dobili rektascenziju neke zvezde iz njene visine i azimuta u ma koje doba posmatranja, imamo da odredimo jedan od ona dva druga ugla u sfernom trouglu u kome već znamo dve strane i ugao između njih. Za ravne trouglove imali bismo da upotrebimo (VI glava), ovaj obrazac:

$$\sin C = c\frac{\sin A}{a} \quad \text{ili}$$

$$\sin C = c\frac{\sin B}{b} \quad \text{(ako nam je poznato } B\text{).}$$

Za sferne trouglove odgovarajući sinusni obrasci glase:

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a} \quad \text{ili}$$

$$\sin C = \frac{\sin c \sin B}{\sin b}$$

Ovo se može izvesti sa slike (v. Dodatak I) ili iz poslednjeg obrasca primenom pravila o množenju u algebri i primenom poznatog obrasca (VI glava), koji kaže da za svaki ugao x važi ovaj odnos:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Ipak moramo najpre napomenuti, da ako su poznati b, c i A, možemo dobiti a iz obrasca:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Ali onda možemo dobiti i c kad su poznati a, b i C iz ovog obrasca:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Dokaz sinusnog obrasca izvodi se ovako. Prvi od gornja dva obrasca napišemo ovako:

$$-\cos A \sin b \sin c = \cos b \cos c - \cos a$$

Sad dižemo na kvadrat obe strane:

$$\cos^2 A \sin^2 b \sin c = \cos^2 b \cos^2 c -$$
$$- 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 a$$

Kvadrate kosinusa zamenjujemo:

$$(1 - \sin^2 A) \sin^2 b \sin^2 c = (1 - \sin^2 b)(1 - \sin^2 c) -$$
$$- 2 \cos a \cos b \cos c + (1 - \sin^2 a)$$

Izvršujemo množenje:

$$\sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \sin^2 b - \sin^2 c$$
$$+ \sin^2 b \sin^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c + 1 - \sin^2 a$$

Odbacujemo s obeju strana $\sin^2 b \sin^2 c$:

$$-\sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c = 2 - \sin^2 b - \sin^2 c - \sin^2 a -$$
$$- 2 \cos a \cos b \cos c$$

Kad zagledate ovaj rezultat, možete videti da bi desna strana bila ista da smo pošli od obrasca:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

U tome slučaju dobili bismo ovo:

$$-\sin^2 C \sin^2 a \sin^2 b = 2 - \sin^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c -$$
$$- 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Otuda možemo da stavimo:

$$-\sin^2 C \sin^2 a \sin^2 b = -\sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c$$

Podelimo sa $(-\sin^2 b)$, dobićemo

$$\sin^2 C \sin^2 a = \sin^2 A \sin^2 c, \text{ tj.}$$
$$\sin C \sin a = \pm \sin A \sin c, \text{ tj.}$$
$$\sin C = \pm \frac{\sin A \sin c}{\sin a}$$

Ovo je malo opširno, ali neće biti teško primeniti ga, kad budete malo povratili dušu. U našem prvobitnom trouglu sa sl. 126, oznaka A je azimut, c je zenitna daljina, a a je polarna daljina zvezde (90^0 — deklin.), tj. $\sin a = \cos$ deklin. Otuda imamo:

$$\sin \text{časovni ugao} = \frac{\sin \text{azim.} \sin \text{z.d.}}{\cos \text{deklin.}}$$

Uzmimo da jedna zvezda u sazvežđu Oriona ima časovni ugao od 10^0 kad je zapadno od meridijana u $8^h\ 40^m$ po podne po mesnom vremenu. Ona je prošla kroz meridijan $\frac{10}{15}$ časa = 40 minuta pre toga, tj. tačno u osam časova i njena je rektascenzija veća od Sunčeve za 8 časova. Ako je Sunčeva rektascenzija toga dana bila 21 čas 50 minutā, Sunce će proći kroz meridijan 2 časa 10 minuta pre ♈, tj. ♈ će proći kroz meridijan u $2^h\ 10^m$ po podne, a naša zvezda 8 časova i 0 minuta — 2 časa 10 minuta = 5 časova 50 minuta posle ♈. Tako će njena rektascenzija biti 5 časova i 50 minuta.

Isti obrazac vam kazuje kako da izračunate vreme izlaza i zalaza zvezda ma na kojoj širini. Pri izlazu i zalazu nekog nebeskog tela njegova zenitna daljina je 90^0, a $\sin 90^0 = 1$. Tako obrazac postaje:

$$\sin \text{časovni ugao} = \frac{\sin \text{azim.}}{\cos \text{deklin.}}$$

Azimut zvezde koja izlazi ili zalazi može se naći po već datom obrascu:

$$\cos \text{azim.} = \frac{\sin \text{deklin.}}{\cos \text{šir.}}$$

Kao primer možemo uzeti vreme Sunčeva izlaza u Londonu $\left[\text{šir.} \left(51\frac{1}{2}\right)^0\right]$ kad je Sunce u zimskoj povratnoj tački.

Po poslednjem obrascu azimut Sunca koje izlazi ili Sunca koje zalazi iznosi $\left(50\frac{1}{6}\right)^{0}$ od južne tačke na dan zimskog solsticija[1]). Znači, pri izlazu i zalazu Sunca:

$$\sin \text{časovni ugao} = \frac{\sin\left(50\frac{1}{6}\right)^{0}}{\cos\left(-23\frac{1^{0}}{2}\right)} = \frac{0{,}7679}{0{,}9171} = 0{,}8373.$$

Pošto 0,8373 pretstavlja s i n $56^{0}\ 51'$, vreme koje protekne između zalaza i izlaza i prolaza kroz meridijan (tj. podneva, pošto je ovde reč o Suncu) iznosi $56\frac{5}{6}: 15$ časova tj. 3 časa i 47 minuta. Sunce će, dakle, izaći u $8^{h}\ 13^{m}$ pre podne, a zaći u $3^{h}\ 47^{m}$ po podne. Dnevna svetlost traje, grubo uzeto, $7\frac{1}{2}$ časova. Ovaj se rezultat razlikuje od vrednosti koja se nalazi u Almanahu za oko 6 minuta. To dolazi delom otuda što su pri računima uzimane približne vrednosti, a delom i iz drugih razloga o kojima ne morate da lupate glavu. Ne morate, jer kad budete razumeli osnovne principe, neće vam biti teško da uđete i u pojedinosti.

Isti obrazac može da se primeni i za računanje Sunčeva izlaza i zalaza na dan 21 juna, kad su dužine dana i noći obrnute. Kao što je već ranije objašnjeno

$$\sin A = \sin (180^{0} - A)$$

Pošto je s i n A = s i n $(180^{0} - A)$ vrednost 0,8373 može biti ili s i n $56^{0}\ 51'$ ili s i n $(180^{0} - 56^{0}\ 51')$ tj. s i n $(123^{0}\ 9')$. Slika vam odmah pokazuje koju vrednost da uzmete. Jedna zvezda iz ekvatorijalnog pojasa izlazi tačno na istoku i pređe put od 90^{0} dok stigne na meridijan. Jedna zvezda južno od ekvatora prolazi manji luk, a zvezda severno od ekvatora veći luk. Zato, a k o j e d e k l i n a c i j a n e k o g n e b e s k o g t e l a s e v e r n o (kao što je deklinacija Sunca 21 juna) u z i m a m o s i n $(180^{0} - A)$, a a k o j e j u ž n o, u z i m a m o

[1]) Dan kada Sunce počinje da se vraća »Tačka solsticija« i »povratna tačka« znače jedno isto. — P r e v.

s i n A. Otuda će časovni ugao Sunčeva izlaza i zalaza biti 21 juna $\left(123\frac{1}{6}: 15\right)$ časova = $8^{h}\ 13^{m}$, tj. izlaz Sunca biće u $3^{h}\ 47^{m}$ pre podne, a zalaz u $8^{h}\ 13^{m}$, po podne.

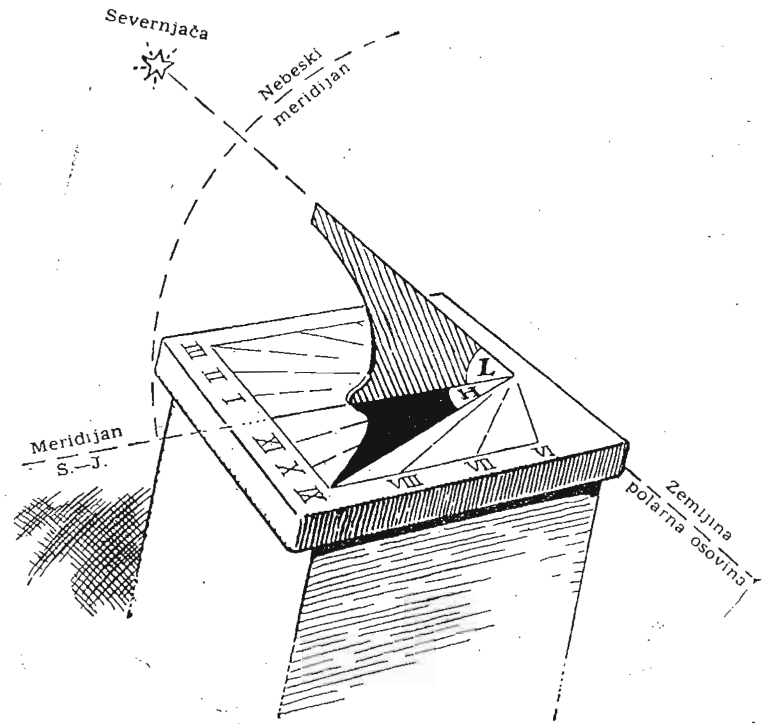
TEORIJA SUNČANIKA

Kao poslednji primer primene sfernih trouglova javlja se nešto što je danas već samo ukras po vrtovima. To je sunčani sat ili sunčanik. Sunčanik koji viđate tu i tamo po vrtovima ili na zidu neke stare crkve jeste pronalazak koji se osniva na istim principima na kojima i plovidba morem po velikom krugu.

Sunčanik su pronašli Arapi koji su bili daleko odmakli u sfernoj trigonometriji i on se mnogo razlikuje od antičkog časovnika pomoću senke. Starinski časovnik pomoću senke, ili obelisk, bio je vertikalni stub postavljen na kružnu kamenu osovinu. Ugao što ga senka neke vertikalne motke gradi s meridijanom jeste Sunčev azimut (sl. 13). Azimutski ugao za koji se senka obrne dok se Sunce okrene za dati ugao, nije isti u svako doba godine. On zavisi od Sunčeve deklinacije. Zato dužina radnoga časa koji je pokazivao sunčani časovnik nije bio isti deo dana u raznim dobima godine. Radno vreme nije imalo utvrđen odnos prema astronomovom vremenu koje su pokazivali peščani sat ili klepsidra (vodeni časovnik).

Mavarski su astronomi primetili da se to može dovesti u red, ako se motka sunčevog časovnika postavi duž Zemljine polarne osovine. Ako se motka tako postavi (sl. 127) da vi duž nje preko njene gornje ivice vidite Severnjaču, brojčanik časova može se izdeliti na podeoke koji odgovaraju jednakim razmacima u svako doba godine. To znači da je »skazaljka« ili pokazivač sunčanika postavljen duž meridijana i njegova ivica je uzdignuta za izvestan ugao, koji odgovara geografskoj širini toga mesta za koje je načinjen. Zato sunčanik koji daje tačno vreme u Sevilji, gde je u desetom veku cvetao veliki mavarski univerzitet, ne bi davao tačno vreme u Londonu.

Zašto je to tako objašnjava nam sl. 128. Bez obzira na Sunčevu deklinaciju i rektascenziju izvesnog određenog dana, Sunce se prividno obrće oko polarne osovine, gde se seku ravni svih velikih krugova rektascenzije. Pretpostavimo da se ono obrnulo za časovni ugao C. Svaki zrak koji padne na ivicu motke nalazi se potpuno u istoj ravni kao i veliki krug rektascenzije na kome se bude našlo Sunce. Ova ravan seče horizont duž prave koja spaja posmatrača O sa tačkom gde Sunčev krug rektascenzije seče veliki krug koji obvija hori-

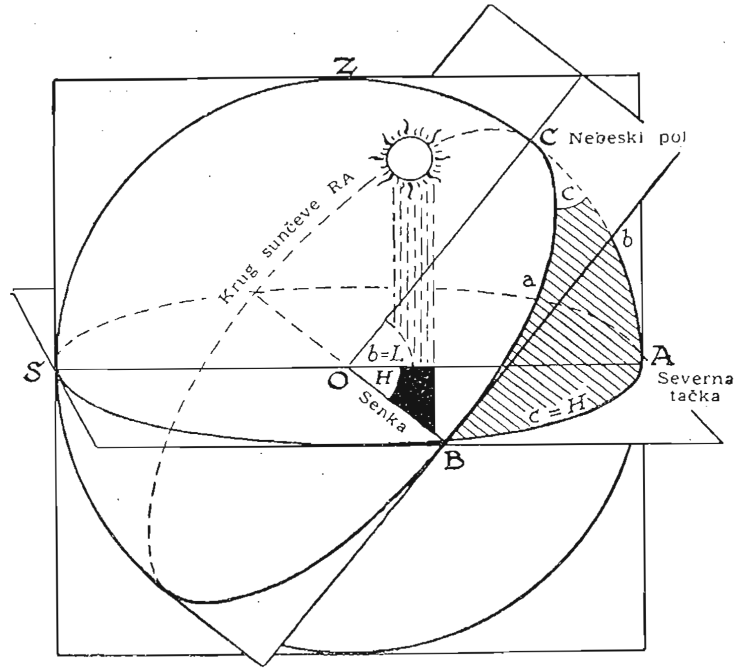


SL. 127. — MAVARSKI SUNČANIK

zont. Luk (c) na horizontskom krugu između te tačke i meridijana određen je ravnim uglom H za koji se okrene senka dok se Sunce okrene za časovni ugao C. Ako je C isto, i $c = H$ je isto. Drugim rečima, kad se Sunce obrnulo za ugao jednak sa

x časova sunčanog vremena ($15x^0$) senka se obrnula za ugao H koji je isti i leti i zimi.

Da bismo načinili sunčanik, imamo pre svega da postavimo motku tako, da joj gornja ivica bude nagnuta prema osnovi



SL. 128. — TROUGAO SUNČANIKA

COB je ravan kruga Sunčeve RA koji seče meridijansku ravan AZS po OC tako, da motka od sunčanika leži na toj pravoj. Ivica senke je onde gde ravan kruga Sunčeve RA seče horizontsku ravan ABS po OB. Ugao C je ugao za koji se Sunce obrnulo oko CO pošto je prošlo kroz meridijansku ravan.

pod uglom $L = b$, koji pretstavlja širinu mesta gde hoćemo da se služimo tim sunčanikom. Onda se osnova mora dovesti u isti pravac s meridijanom, da bi gornja ivica bila upravljena tačno na sever. Sve što nam još ostaje to je da izdelimo skalu na časove. Za vreme letnjeg raspusta biće vam prijatno da se malo vežbate u trigonometriji gradeći sunčanik. Teoriju o sunčaniku izgradili su tamnoputi osvajači Španije u doba kad su narodi u Britaniji i Nemačkoj bili varvari koji su živeli po blatnjavim zemunicama i kojima su vladali popovi neznalice i grofovi razbojnici. Ako se toga setite očistićete mozak od licemerne frazeologije generala Hercoga i drugih apostola rasne diskriminacije u Južnoafričkoj Uniji i nacional-socijalističkoj Nemačkoj.

Teorija o tome kako da se izdeli skala na podeoke osniva se na trećem obrascu za rešavanje sfernih trouglova. Na sl. 128 videćete da je sferni trougao *ABC* pravougli. Pošto je meridijanska ravan upravna na horizontskoj ravni, ugao *A*, koji je ugao između tih dveju ravni, jeste ugao od 90^0. U ovome trouglu nas zanimaju samo *C*, Sunčev časovni ugao, $c = H$, ugao senke, i $b = L$, širina toga mesta. Ovo poslednje znamo, a prvo možemo dobiti. Ono drugo hoćemo da saznamo, da bismo izbeležili skalu prema vrednostima koje dajemo broju *C*, tj. prema vremenu u toku dana.

Ako je $A = 90^0$, $\sin A = 1$, onda drugi obrazac za pravougle sferne trouglove postaje

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

A pošto je $\cos 90^0 = 0$, prvi obrazac postaje

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots (2)$$

Ako prvi obrazac primenimo na dve strane *a* i *b* i zahvaćeni ugao *C*, imaćemo:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \text{ tj.}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad \ldots\ldots (3)$$

Ako levu stranu iz (1) podelimo levom stranom iz (3) i desnu desnom, imaćemo:

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin c}{\sin a} \cdot \frac{\sin a \sin b}{\cos c - \cos a \cos b}, \text{ tj.}$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{\sin b \sin c}{\cos c - \cos a \cos b}$$

Pomnožićemo obe strane sa $\sin b$:

$$\operatorname{tang} C \sin b = \frac{\sin^2 b \sin c}{\cos c - \cos a \cos b} \quad \ldots\ldots (4)$$

Iz (2) uzimamo vrednost za $\cos a$ i unosimo je u (4):

$$\operatorname{tang} C \sin b = \frac{\sin^2 b \sin c}{\cos c - \cos^2 b \cos c} =$$

$$= \frac{\sin^2 b \sin c}{\cos c\,(1 - \cos^2 b)} = \frac{\sin^2 b \sin c}{\cos c \cdot \sin^2 b} = \frac{\sin c}{\cos c} = \operatorname{tang} c.$$

I tako sad imamo:

tang (ugla senke) = sin (širine) · tang (časovnog ugla).

Da bismo dobili ugao, imamo da obeležimo ivicu senke u $2^h\,30^m$ po p. kad je časovni ugao $2\frac{1}{2}$ časa, ili $2\frac{1}{2} \cdot 15^0 = \left(37\frac{1}{2}\right)^0$ za sunčanik koji daje tačno vreme u Londonu, te stavljamo:

$$\operatorname{tang}\ (\text{ugla senke}) = \sin \left(51\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \operatorname{tang} \left(37\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$= 0{,}7826 \cdot 0{,}7673 = 0{,}6005.$$

Prema tablicama tangensa imamo $\operatorname{tang} 31^0 = 0{,}6009$, a $\operatorname{tang} 30{,}9^0 = 0{,}5985$. Traženi ugao biće 31^0 s tačnošću do jednog desetog dela stepena.

Sad ćete moći i sami da obeležite ostale podeoke na skali, razume se, vodeći računa o širini mesta u kome živite. Ako je to slučajno Njujork, morate staviti $\sin 41^0$ za sin šir.[1]).

TRIGONOMETRISKE FUNKCIJE VELIKIH UGLOVA

U tačnoj primeni obrazaca iz ove glave iskrsavaju izvesna pitanja o kojima nije bilo govora. Jedino je bilo pomenuto u vezi s vremenom Sunčeva izlaza o solsticijama. Južna tačka na horizontu je 180^0 od severne tačke. I tako, ako azimut neke zvezde meren od severne tačke iznosi *A* onda je on $(180^0 - A)$

[1]) Geografska širina je: Beograda $44^0\,48'$, Zagreba $45^0\,49'$, Ljubljane $46^0\,3'$, Skoplja $41^0\,58'$, Cetinja $42^0\,24'$, Sarajeva $43^0\,52'$, Novog Sada $45^0\,16'$, Rijeke $45^0\,20'$, Zadra $44^0\,7'$, Hvara $43^0\,10'$, Dubrovnika $42^0\,38'$, Splita $43^0\,30'$ — sve sa tačnošću do pola minuta. — Prev.

meren od južne tačke. U trigonometriji ravnih slika videli smo da imamo, kad je ugao A nekog trougla manji od 90^0,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos\ A \ldots (1)$$

Ako je A veće od 90^0,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\ \cos\ (180^0 - A) \ldots (2)$$

Slično tome, ako su uglovi A i B obadva manji od 90^0,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Ako je jedan ugao ravnoga trougla, na pr. A, veći od 90^0

$$\frac{\sin(180^0 - A)}{a} = \frac{\sin B}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ako se složimo s tim da kažemo da c o s $(180^0 - A)$ znači isto što i — c o s A ili da — c o s $(180^0 - A)$ znači isto što i c o s A, samo pravilo (1) obuhvata i pravilo (2). Slično tome, ako se složimo da kažemo da s i n $(180^0 - A)$ znači isto što i s i n A, samo pravilo (3) obuhvata i pravilo (4), pa bilo da trougao nema jedan ugao veći od 90^0, bilo da mu je jedan ugao veći od 90^0. Ako se rešimo da to uradimo, moramo reći da c o s 45^0 iznosi $+ 0{,}7071$, a c o s 135^0 iznosi $- 0{,}7071$. Ako, dakle, odgovor na neki problem glasi c o s $A = - 0{,}7071$ a tablice nam kažu da je c o s $45^0 = + 0{,}7071$, otuda možemo zaključiti da je $A = 180^0 - 45^0 = 135^0$. Slično tome, s i n 30^0 ima istu vrednost kao s i n 150^0 $(+ 0{,}5)$; a vrednost 0,5 koja se nalazi u tablicama uglova od 0^0 do 90^0 kao s i n 30^0 ima da se čita s i n 30^0 ili s i n 150^0. Zato nam je za određivanje deklinacije zvezda potrebno samo jedno pravilo koje glasi, kad se azimutni ugao računa od južne tačke (bilo veći ili manji od 90^0), ovako:

sin deklin. = *sin*. šir. *cos* z. d. — *sin* z. d. *cos* šir. *cos* azim.

Na prvi pogled to izgleda paradoks, zato što smo naviknuti da mislimo o sinusima, kosinusima i tangensima kao o odnosima strana u pravouglom trouglu u kome nijedan ugao ne može biti veći od 90^0. Zbog toga izgleda beskorisno govoriti o sinusu ili kosinusu nekog ugla od 150^0. Da smo počeli sa slikama nacrtanim na lopti, kakve ustvari i jesu sve slike nacrtane na Zemljinoj loptastoj površini, to ne bi moralo

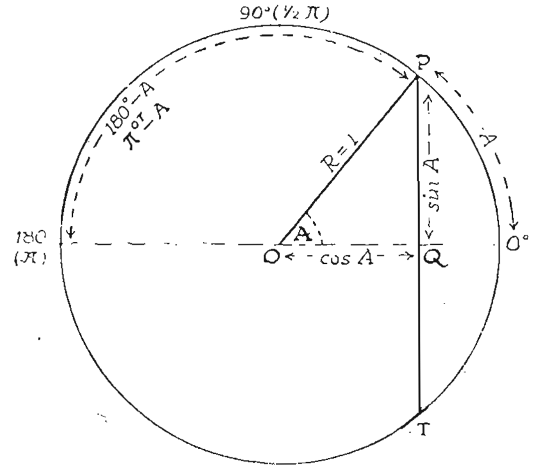
izgledati tako glupo. Tri ugla sfernog trougla iznose više od dva prava ugla i jedan ugao sfernog pravouglog trougla može biti veći od 90^0. Da pogledamo na tu stvar s druge strane, kao što smo uradili u III glavi. Lako je nacrtati geometrisku sliku da se pokaže značenje izraza a^n, kad je $n = 1$ (prava linija), $n = 2$ (ravan kvadrat), $n = 3$(kocka). Ne možemo da nacrtamo takav crtež ako hoćemo da pokažemo značenje operatora 4 u izrazu a^4. Međutim u aritmetici možemo da uradimo sa a^4 isto ono što možemo da uradimo i sa a^1, a^2, a^3. Zašto bismo onda rekli da s i n 150^0 ne znači ništa, prosto zato što ne možemo da nacrtamo ravan pravougli trougao koji ima jedan ugao od 150^0; ili da c o s 110^0 ne znači ništa, jer prosto ne možemo da nacrtamo ravan pravougli trougao sa jednim uglom od 110^0?

Posle svega možemo smatrati sinuse, kosinuse i tangense kao nova sredstva za merenje ugla, a kad je to tako, nije baš tako čudno što uglovi veći od 90^0 mogu imati sinuse, kosinuse i tangense kao što ih mogu imati i uglovi manji od 90^0. Samo što kad merimo ugao njegovim sinusom, kosinusom ili tangensom, ne moramo uopšte ni crtati trougao. Ugao je obično određen brojem dužinskih jedinica na odgovarajućem kružnom luku, čiji je poluprečnik 1 jedinica. Kad kažemo da ugao između dveju pravih iznosi jedan stepen, znači, ako nacrtamo krug poluprečnikom od 1 santimetra oko tačke u kojoj se one seku, dužina tog malog luka između tačaka u kojima one seku krug iznosiće $(2\pi : 360)$ santimetara. Sinus nekog ugla može se isto tako definisati jedinicama dužine kao što smo radili u VI glavi. Ako je PT tetiva koja spaja krajeve luka 2 A, na krugu čiji je poluprečnik jedinica, $\frac{1}{2}$ PT, (PQ sa sl. 129) polutetiva, jeste sinus polulυka A. PT ima potpuno isto toliko prava da se zove tetiva velikog luka $360^0 - 2A$ kao i maloga luka $2A$. Luk $\frac{1}{2}(360^0 - 2A) = 180^0 - A$ ima isto toliko prava da se nazove poluuglom čiji je sinus polutetiva PQ kao i sam ugao A. Prema tome, ovaj način merenja sinusa znači da je

$$\sin A = \sin(180^0 - A)$$

Da bismo nacrtali sliku kojom bismo pokazali da se c o s $(180^0 - A)$ ponaša u računima kao da je — c o s A, moramo naći neko značenje za operator: —. Već smo videli da Euklidova geometrija ne pomaže kad hoćemo crtežem da pretstavimo račune u kojima se javlja znak —. Sad ćemo proučavati jednu geometriju koja pomaže.

Pre nego što krenete dalje, dobro je da promislite još o jednoj stvari. Kad ste crtali slike da objasnite pravila iz Euklidove geometrije, verovatno ste bili pod utiskom da je Arhimed crtao na pesku r a v n e slike iz Euklidove geome-



Sl. 129.

trije kad su ga ubili rimski vojnici. Sad znate da je on ustvari crtao sferne trougle na krivoj Zemljinoj površini. Jedini razlog zašto Euklidova geometrija zadovoljava potrebe crtanja i neimarstva u tome je što su dimenzije naših crteža i naših zgrada veoma male kad ih uporedimo sa Zemljinim poluprečnikom. Ako nastavimo da povlačimo pravu liniju preko okeana dovoljno daleko, videćemo da to više nije prava linija Euklidove geometrije. U okviru maloga komada prostora koji obuhvata naš sunčani sistem, ivica svetlosnog zraka se za sve praktične poslove može uzeti kao Euklidova prava linija. Ali kad kažemo da se svetlost prostire u pravim linijama do najdaljih maglina, to ne mora značiti da se ona prostire u Euklidovim pravim linijama.

VEŽBANJA UZ GLAVU VIII

OGLEDI

1. — Kolika je Sunčeva deklinacija i rektascenzija na dan 21 marta, 21 juna, 23 septembra i 21 decembra?

2. — Kolika je *približna* Sunčeva rektascenzija u dane 4 jula, 1 maja, 1 januara i 5 novembra? (uzmite i datume ispred i posle pomenutih dana, pa i to obradite). Proverite po podacima nekog almanaha.

3. — Sa astrolabom načinjenim kod kuće (II glava) izvršena su ova posmatranja na nekom mestu 25 decembra:

Sunčeva zenitna daljina (južno)	Griničko vreme (po podne)
$\left(74\frac{1}{2}\right)^0$	$12^h\ 18^m$
74^0	$12^h\ 19^m$
74^0	$12^h\ 20^m$
$\left(73\frac{1}{2}\right)^0$	$12^h\ 21^m$
$\left(73\frac{1}{2}\right)^0$	$12^h\ 22^m$
74^0	$12^h\ 23^m$
$\left(74\frac{1}{2}\right)^0$	$12^h\ 24^m$

Koja je geografska širina, a koja dužina toga mesta? (Potražite to na karti).

4. — Nađite približnu Sunčevu rektascenziju 25 januara, a odatle mesno vreme kada će Aldebaran (rektascenzija $4^h\ 32^m$) proći kroz meridijan te noći. Ako brodski hronometar tada pokazuje $23^h 15^m$ po Griniču, kolika je dužina mesta na kome se brod nalazi?

5. — Ako je Aldebaranova deklinacija 16^0 severno (zaokrugljeno do najbližeg stepena), a njegova visina pri prolazu kroz meridijan 60^0 od južnog horizonta, kolika je širina mesta na kome je brod?

6. — Rektascenzija zvezde α u Velikome Medvedu iznosi oko 11 časova. Njena je deklinacija $62^0\ 5'$ severno. Ona prolazi kroz meridijan $4^0\ 41'$ severno od zenita 8 aprila u $1^h\ 10^m$ pre podne po brodskom hronometru. Na kome se mestu nalazi brod?

7. — Na dan 1 aprila 1895 Mesečeva rektascenzija bila je približno 23 časa i 48 minuta. Dajte približno njegov izgled, vreme njegovog izlaza i prolaza kroz meridijan toga dana.

8. — Ako su Sunce i Veliki Medved vidljivi za cela 24 časa jedanput u godini sa jednog datog mesta na griničkom meridijanu, kako biste mogli odrediti rastojanje do Londona, kad uzmete u obzir da je Zemljin prečnik veoma blizu 8000 milja, a širina Londona je veoma blizu 51°?

9. — Ako ste primetili da jednog dana u godini Sunčeva senka iščezava, a da je upravljena ka jugu drugih dana, koliko ste milja daleko od Severnog Pola?

10. — Na dan prvog januara Sunce je dostiglo svoju najvišu tačku na nebu kad je radio javio da je $12^h\ 17^m$ po podne. Sunce je onda bilo 16° iznad južnog horizonta. U kome delu Engleske se to desilo?

11. — Približna rektascenzija i deklinacija Betelgeza su 5 časova i 50 minuta i $\left(7\frac{1}{2}\right)^0$ severno. Ako je vaša soba za spavanje okrenuta istoku, i ako vi redovno ležete u 23 časa i 0 minuta, u koje doba godine ćete videti Betelgez gde izlazi baš kad vi ležete?

12. — Na dan 13 aprila 1937 najkraća senka jedne motke bila je tačno jednaka sa njenom dužinom i pružala se ka severu. To se desilo u trenutku kad je radio javio da je $12^h\ 10^m$ po podne. U kom kraju Engleske su izvršena ta posmatranja?

13. — Pomoću slike dokažite da ako je časovni ugao (h) neke zvezde ugao za koji se ona pomakla pošto je presekla meridijan (odnosno ugao za koji se ona mora pomaći da stigne na meridijan, u kom slučaju mu je predznak minus),

RA[1]) zvezde (u časovima) = Sunčeva RA (u časovima) — — (časovni ugao u stepenima : 15) + *mesno* vreme (u časovima).

14. — Pomoću karte na kojoj su označene okeanske daljine, nađite put koji brodovi treba da pređu u plovidbi »po velikim krugovima« od pristaništa do pristaništa koja su vezana putevima bez zaobilaska. Kolike su daljine između Londona i Njujorka, Londona i Moskve, Londona i Liverpula?

[1]) Rektascenzija. — Prev.

15. — Na dan 26 aprila Sunčeva RA bila je 2 časa i 13 minuta, pa su pomoću instrumenata kućne izrade nađeni sledeći podaci za ove tri zvezde:

	Azimut	Zenitna daljina	Mesno vreme
Poluks	Zapadno 80° od juga	45°	$9^h\ 28^m$ po p.
Regulus	Zapadno 28° od juga	41°	$9^h\ 39^m$ „
Arktur	Zapadno 7° od severa	31°	$12^h\ 50^m$ „

Nađite deklinaciju i rektascenziju svake zvezde.

16. — Da bi se dobio tačan položaj meridijana povučena je prava između dva stuba u pravcu Sunca kada je ono zalazilo 4 jula u jednome mestu na geografskoj širini 43° sev. Kakav ugao zaklapa meridijan sa ovom pravom? Almanah daje 23° sev. kao Sunčevu deklinaciju na dan 4 jula. Koliko je bilo približno vreme Sunčeva zalaza?

17. — Ako je RA Siriusa 6 časova 42 minuta, a njegova deklinacija $\left(16\frac{3}{5}\right)^0$ južno, nađite njegovo mesno vreme izlaza i zalaza 1 januara u

Gizeu	šir. 30° sev.
Njujorku	šir. 41° sev.
Londonu	šir. $\left(51\frac{1}{2}\right)^0$ sev.

DA SE UPAMTI!

1. — Ako je zenitna daljina merena severno od zenita onda je znak +, ako je merena južno od zenita, znak je —. Ako su širina ili deklinacija merene severno od ekvatora znak je +, ako su merene južno, znak je —. U svima prilikama je deklinacija = širina posmatračeva + meridijanska zenitna daljina.

2. — Zvezdina RA = vreme prolaska kroz meridijan + + Sunčeva RA istog dana u godini.

(Sunčeva RA 0.	Deklinacija	0	na dan 21 marta
RA 12.	„	0	„ 23 sept.
RA 6.	„	$+23\frac{1^0}{2}$	„ 21 juna
RA 18.	„	$-23\frac{1^0}{2}$	„ 21 dec.

3. — U sfernome trouglu je

(a) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(*b*) $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c}$

4. — Za jedno nebesko telo, kad se azimut meri od južne tačke:

(*a*) sin (deklin.) = cos (z. d.) sin (šir.) − − sin (z. d.) cos (šir.) cos (azim.)

(*b*) $\sin(\text{časov. ugao}) = \dfrac{\sin(\text{z. d.}) \sin(\text{azim.})}{\cos(\text{deklin.})}$

(*c*) Pri zalazu i izlazu (z. d. = ± 90°)

$$\cos(\text{azim.}) = \frac{\sin(\text{deklin.})}{\cos(\text{šir.})}$$

$$\sin(\text{časov. ugao}) = \pm \frac{\sin(\text{azim.})}{\cos(\text{deklin.})}$$

GLAVA IX

GEOMETRIJA REFORMACIJE

ili

Šta su grafici?

U četrnaestom veku program iz matematike na univerzitetu u Oksfordu završavao se kod pete teoreme u prvoj od trinaest Euklidovih knjiga. U muslimanskome svetu živo svetovno učenje napredovalo je uporedo sa mrtvačkom leksikografijom Korana, dok je u Evropi učenje iz knjiga bilo u glavnom ograničeno samo na sveštenstvo, kao što je nekada, u civilizaciji na Nilu, čuvanje kalendara bilo povereno sveštenicima. Za četiri veka Evropa je učila od svojih učitelja i malo je nešto dodala tome. Međutim, tri nova tehnička pronalaska zaverila su se da matematičarima postave nove probleme. Pri kraju petnaestoga veka počela je nova era. Izrada satova sa točkićima, uvođenje artilerije u ratovanje, izrada karata i astronomskih tablica za moreplovstvo naterali su matematiku da se uhvati u koštac sa vremenom u novoj društvenoj sredini sa novom tehničkom opremom.

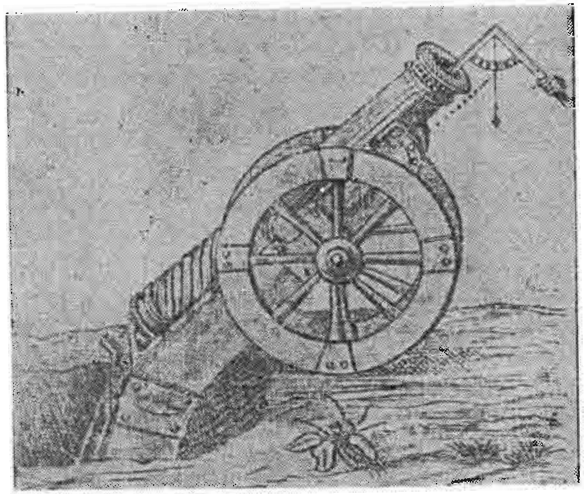
Aleksandrinci i Kinezi su pronašli razne stvari koje su zamenile sunčanik, tako na pr. *klepsidru,* koju je terala voda. Ona se osnivala u glavnom na principu koji je prikazan na sl. 2. Satovi pomoću točkova su docniji pronalazak. Najraniji za koji znamo jeste iz druge polovine 10 veka n. e. U seljačkim zajednicama Severne Evrope, kao što nas potseća postanak naše sopstvene (reči *clock*[1]) od francuske reči *cloche* (zvono), kaluđeri koji su zvonili u manastirska zvona bili su veoma važni za ekonomski život, zasnovan na poljoprivrednoj

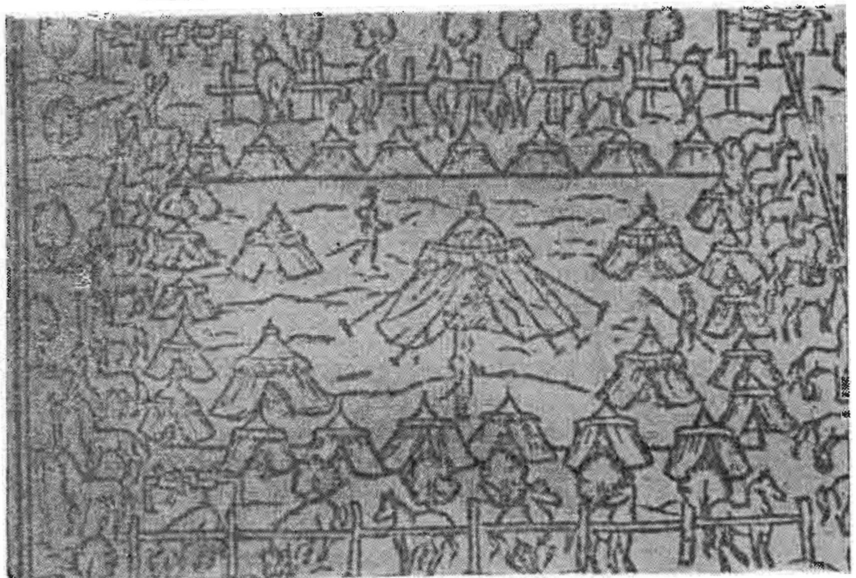
[1]) The clock — čas, časovnik. — Prev.

proizvodnji, kao što su bili važni sveštenici svetoga Nila pre 5000 god. Potisnuvši svoje prethodnike hrišćanska crkva je preuzela tu prastaru društvenu ulogu sveštenika. Panteon je bio ponovo nameštern; u njega su stavljeni sveci čija su mučenička smrt, ili rođendan, ili prelaz u hrišćanstvo, obeležavali nizanje dana, kao nekada sunčani časovnik. Najpre su držane klepsidre i sveće koje su pokazivale časove. Krajem desetoga veka po bogatijim manastirima i crkvama mogli su se naći časovnici s točkovima koje pokreću tegovi. Crkva sv. Pavla u Londonu imala je časovnik još 1286 godine. Mehanički časovnici počeli su da se prodaju za svetovnu upotrebu tek pri kraju četrnaestog veka. Ovi prvi časovnici bili su vrlo grubi instrumenti. Merenje malih vremenskih razmaka počelo je tek kad je Galilej uveo princip klatna. Primena ovoga principa za konstrukciju satova sa klatnom u sedamnaestom veku jeste jedan od ono veoma malo primera gde je u doba pre elektriciteta i hemije bojadisanja, teoriski pronalazak prethodio svojoj tehničkoj primeni. Hronometri za brodove dovoljno tačni za određivanje geografske dužine nisu bili izrađivani sve dok nije pronađena kompresovana opruga, jedan vek docnije, ma da je holandski matematičar Frisius preporučivao još 1450 god. metodu pokazanu u IV glavi.

Princip klatna bio je početak nove ere u mehanici; početak mehanike kretanja, za razliku od aleksandriske mehanike ravnoteže. Prva primena mehaničkih pronalazaka u ratne svrhe izgleda da je bila ona majstorija s katapultom koji je upotrebljavan u Aleksandrovim ratovima. Teoriski razvoj mehanike ravnoteže u rukama jednog Arhimeda i njegovih sledbenika došao je odmah posle toga. Godine 1241 Mongoli koji su pokorili Mađarsku i Poljsku upotrebljavali su barut. Uvođenjem artilerije u evropsko ratovanje u četrnaestom i petnaestom veku iskrsao je mehanički problem nove vrste — izračunavanje položaja jednog tela koje se brzo kreće, i koje se može baciti na veliku daljinu. Sat sa klatnom dao je instrument za merenje vremenskih razmaka dovoljno kratkih da se može beležiti kretanje takvog tela. U toku jednog veka od pronalaska hartije pojavili su se udžbenici vojničke nauke koji su pokazivali kako se može pomoću trigonometrije izračunati daljina do cilja, kad se izmere dva ugla kao na sl. 130 i 130 A.

Zato se matematičar od zanata, koji je učestvovao u velikim istraživačkim putovanjima na brodovima naoružanim





SL. 130. — MATEMATIKA NA VOJNIČKOM POSLU

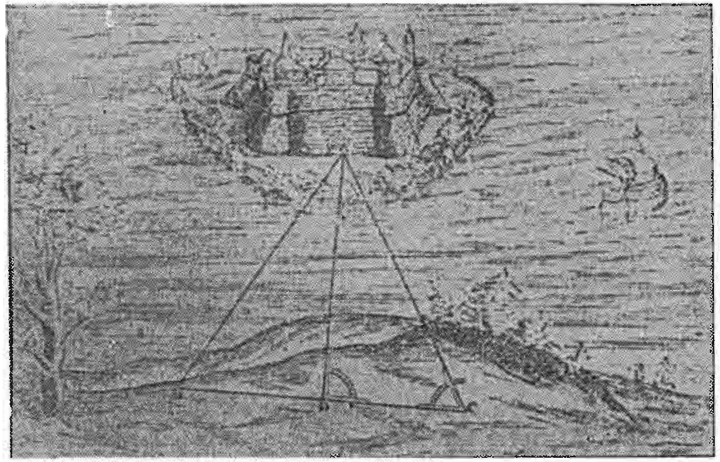
Na gornjoj slici veliki srednjovekovni matematičar Tartalja primenjuje matematiku u artileriji u jednoj knjizi objavljenoj 1546 u Mlecima. Donja slika pretstavlja naslovnu stranu knjige *Vojnička aritmetika* od braće Digz, objavljene u Londonu 1572 godine.

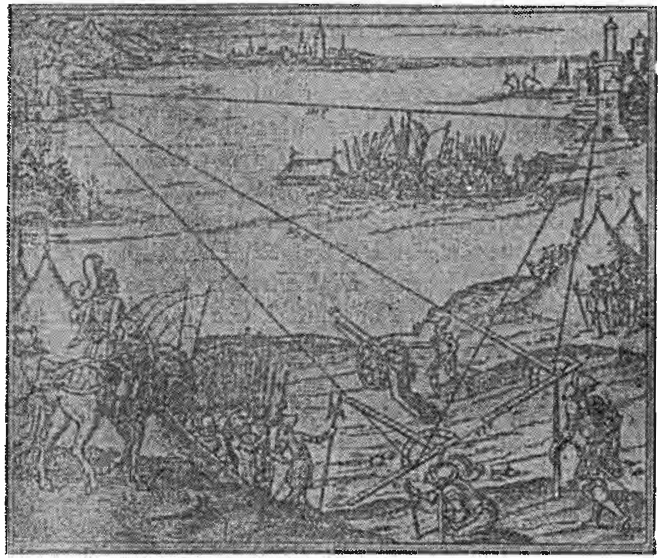
topovima u toku šesnaestoga veka, nije bavio problemom vremena i položaja iz jednog samo razloga. Astronomi koji su pratili brodove Henrika Moreplovca školovali su se na ptolomejskoj nauci, pošto je Ptolomejevo učenje preživelo propast mavarske civilizacije. Oni su upotrebljavali ravne karte sa paralelama širine, a ponekad i sa meridijanima dužine. Norvežani su se odavno bili upoznali sa instrumentom »koji pokazuje jug«, kojim su se Kinezi služili za čitavih hiljadu godina a možda i više pre toga, i to im je izgleda omogućilo duga putovanja po morima gde se zvezde retko vide. Kad su gospoda počela da ulažu novac u trgovačke pustolovine, mornarev kompas počeo je da bude od »kulturnog« kao i od praktičnog interesa. Uputstva za rukovanje kompasom i jednovremeno s njim crtanje karata pokazuju glavne odlike nove geometrije koju je Rene Rekart[1]) na početku sedamnaestog veka prvi primenio na teorisko rešavanje jednačina. U to doba proučavanjem krivih linija odmaklo se daleko od one geometrije u kojoj su upotrebljavani samo lenjir i šestar, kako je to Platon bio odredio. Kopernik, Tiho Brahe, Kepler i Galilej, poslednja dvojica opremljena teleskopom, izvršili su nove i tačne proračune planetskih putanja, crtajući njihove položaje u obliku grafika ili u obliku karte.

Suprotno Platonovom učenju da se nebeska tela kreću po krugovima, pošto je krug »najsavršenija« slika, sad je pronađeno da se planete kreću po elipsama, slikama koje je Apolonije iz Perge proučavao pomoću Euklidovih konstrukcija na osnovu kosih preseka kupe. Omar Khajjam je zbilja bio rešio kubne jednačine pomoću kupinih preseka. Marinus iz Tira i njegov savremenik Ptolomej bili su napravili karte sa paralelama širine i meridijanima. Kao što je i barut bio dugo upotrebljavan za vatromete pre nego što je izmenio taktiku ratovanja, svaki pojam koji se nalazi u Kartezijevoj (Dekartovoj) geometriji javio se u nečijoj glavi vekovima pre nego što se pretvorio u instrument koji je otvorio novu epohu u matematičkim istraživanjima.

Đaci po školama odahnu kad se okrenu od dosadnih Euklidovih dokaza i počnu upotrebljavati grafike, a mnogi pametni ljudi su izrazili čuđenje zašto je tako prost princip morao da

[1]) René Descartes, ili, latinski, Renatus Cartesius (1596—1650), veliki francuski matematičar i filozof. — Prev.





SL. 130A. — VOJNA MATEMATIKA

Ove četiri slike uzete iz starih knjiga pokazuju kako je rešenje problema kretanja postalo tehnička potreba u doba Stevinusa i Galileja. Gornja slika je iz Betinove knjige (Apiaria) (Bolonja, 1645). Donja je iz Cublerovog dela o geometriskim instrumentima (1607).

čeka tako dugo dok je priveden u delo. To njihovo čuđenje možda više laska njihovoj sujeti nego njihovom razumevanju društvenih pojava. Istina je u ovome: Plodonosan napredak nastupa tek onda, kad veliki broj ljudi počne zajedno misliti o jednoj istoj stvari. Bilo bi manje razloga čuđenju kad bismo shvatili da su pametni ljudi, i ljudi koji nisu baš tako pametni, potrebni jedni drugima i da ne možemo planirati neku budućnost višeg duhovnog progresa za ljudski rod, ako pogrešno uzmemo da su potrebe izuzetno odabranih ljudi u suprotnosti sa svakodnevnim potrebama narodnih masa. Što matematika postaje sve više apstraktna, sve jasnije vidimo vezu između duhovne nadgradnje i društvene osnove. Isti društveni uslovi proizveli su časovnik posle koga je prestala potreba za popovskim novačenjima katolicizma. Oni su proizveli i revolucionarne ratove, u kojima su pobeđivali oni koji su bili u najtešnjem dodiru sa mehaničkim korisnim spravama. Ti isti društveni uslovi naveli su na osvajanje tuđih zemalja, pri čemu se bogatila trgovačka klasa pljačkanjem novih zemalja. Oni su omogućili matematički pronalazak koji je omogućio proračunavanje kretanja klatna, putanje topovskog zrna, položaja broda na moru i putanja nebeskih tela.

POLOŽAJ I MERENJE. — Osnovna razlika između Kartezijeve (Dekartove) i Euklidove geometrije u tome je što u ovoj novoj, svaka količina (ili »veličina«) ima i svoj pravac ili položaj. Zato jedna duž nije samo dužina od nekoliko dužinskih jedinica. Ona pretstavlja nekoliko takvih jedinica nacrtanih u izvesnom pravcu u odnosu na druge prave linije. Površina ne pretstavlja samo nekoliko površinskih jedinica. Ona pretstavlja razliku između nekoliko površinskih jedinica u jednom položaju i nekoliko površinskih jedinica u drugom položaju (sl. 105). Upotreba znakova plus i minus u smislu p r a v c a ili p o l o ž a j a nije ništa drugo do primena jedne njihove prostije osobine, primena njihovog označavanja radnje sabiranja ili oduzimanja. Da bismo objasnili kako to sasvim prirodno izlazi iz sabiranja i oduzimanja, ograničićemo se najpre na kretanje po pravoj liniji. Sl. 131 pokazuje prav put koji ide pravcem istok—zapad od jedne stare engleske seoske mehane zvane »Jazavac i gajde«. Na četiri stotine jardi[1]) duž puta u istom pravcu nalazi se seoska crkva. Četiri stotine jardi od te mehane

[1]) Jard je engleska mera za dužinu. Iznosi 914,4 mm. — P r e v.

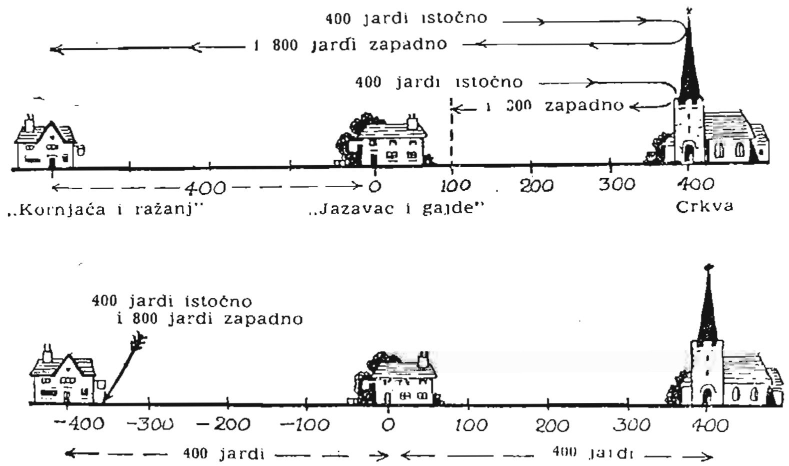
na zapad nalazi se druga mehana »Kornjača i ražanj«. Pretpostavimo da se neki putnik dobro okrepio kod »Jazavca« i krenuo sa pohvalnom namerom da prisustvuje u crkvi večernju uoči nedelje. Svaki korak što ga on iskorači d o d a j e po jedan jard njegovom rastojanju merenog istočno od mehane. Kad je stigao do crkve prešao je:

400 jardi

Ali on je sad žedan, pa se vrati da se okrepi nekom dobrom kapljicom. Kad je prešao novih 300 jardi natrag, tj. u zapadnom pravcu, gde je sad? Ako se držimo starinske upotrebe znakova znamo da je

$$400 - 300 = 100 \text{ jardi}$$

od mesta sa koga je pošao. On je oduzeo 300 jardi od istočnog rastojanja između svog prvobitnog položaja i crkve. Ako pređe



SL. 131. — ZNAČENJE GERUNDIUMA

još 100 jardi oduzeće celo to rastojanje. Njegovo rastojanje od mehane biće

$$400 - 400 = 0 \text{ jardi}$$

tj. vratiće se onde odakle je pošao. Ali u tom trenutku on se možda seti da je pivo bolje kod »Kornjače«. Ako nastavi da ide drugih 400 jardi zapadno dolazi do druge mehane, pošto je prešao 800 jardi od crkve. Da bismo ostali dosledni onome što smo dosad uradili, moramo reći da je sad njegovo rastojanje od mesta odakle je pošao:

$$400 - 800 = -400 \text{ jardi}$$

Da bismo dobili njegov krajnji položaj iz onoga što znamo o njegovim kretanjima moramo pretstaviti 400 jardi zapadno od mesta odakle je pošao kao -400, ako nazovemo $+400$ onih 400 istočno od mesta sa koga je pošao. I tako »+« zadržava svoje prvobitno značenje, a i »—« zadržava svoje prvobitno značenje, ako uzmemo da gerundium (glagol i imenica uzeti zajedno) $+a$ znači a jedinica dužine istočno, ili a jedinica nadesno, a da gerundium $-a$ znači a jedinica zapadno, ili a jedinica nalevo.

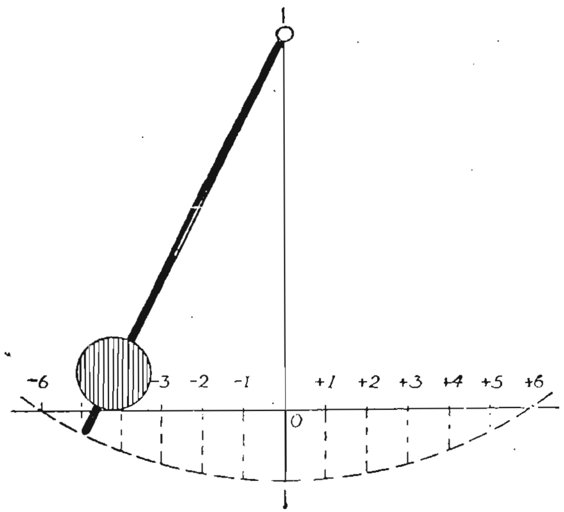
Na prvi mah možda nećete videti nikakvu naročitu korist od ovog dodatka gramatičkim pravilima. Koristi ne bi bilo ni kad bi ljudi provodili sve svoje vreme po crkvama i po mehanama, i imali samo klepsidre da im beleže neprekidni tok vremena. Ali društvena epoha u koju smo ušli počinje sa opomenom »Vreme, gospodo, vreme!« Ovo je vek časovnika s klatnom. Sl. 132 pokazuje nam klatno koje kuca svaka dva sekunda. Njegova pomeranja tj. iz jedne krajnje tačke u drugo horizontalno rastojanje od njegovog položaja kad sat stoji, pretstavljena su kao količina »+« i »—«. Celokupni razmak klaćenja je 12 santimetara ili ± 6 santimetara od položaja ravnoteže. Uzmimo da beležimo njegov položaj uzastopnim snimanjem pomoću fotografskog aparata koji ima vrlo brz prekidač. Kad pođemo od njegovog krajnjeg položaja $+6$ jedinica nadesno, možemo načiniti ovakvu tablicu svojih posmatranja:

Vreme u sekundima	Pređeno horizontalno rastojanje u santimetrima	Horizontalna udaljenost u santimetrima
0	0	$+6$
0,37	1	$+5$
0,51	2	$+4$
0,66	3	$+3$
0,80	4	$+2$
0,90	5	$+1$
1,00	6	0

Vreme u sekundima	Pređeno horizontalno rastojanje u santimetrima	Horizontalna udaljenost u santimetrima
1,10	7	-1
1,22	8	-2
1,33	9	-3
1,44	10	-4
1,62	11	-5
2,00	12	-6
2,36	13	-5
2,52	14	-4
2,64	15	-3
2,80	16	-2
2,90	17	-1
3,00	18	0
3,10	19	$+1$

Drugi stubac mogao bi se nazvati klasičnom metodom za beleženje trenutnog položaja klatna. Treći stubac je Kartezijev metod. Korist od njega je u tome što odmah vidite tačno kakvo kretanje vrši klatno. Ono se klati levo i desno simetrično prema položaju koji zauzima kad je sat zaustavljen, a vraća se u svoj prvobitni položaj kao sunčani sat koji se klati nad horizontom.

Vratimo se sad mehani i posmatrajmo nastavak kretanja onog čoveka. Putnik krene od mehanskih vrata sa ponovnom dobrom namerom, ali ne primećuje da alkohol može da izopači vesti koje naši organi prijemnici telegrafišu mozgu. On se prevari, pa misleći za Mesec koji mu je sijao iznad glave da je to crkva, pokuša da se popne uz zid mehane. Promašio je da zadovolji svoje pobožne zahteve, ali je bar pokazao značenje drugog jednog gerundiuma, $\sqrt{-1}$ ili, kako mi to obično kraće pišemo, »i«. Da biste videli zašto ai (ili $a\sqrt{-1}$) jedinica znači a jedinica merenih naviše u nebo gde je mašta našeg prijatelja bila postavila crkvu, imate samo da se setite Euklidovog hijeroglifa geometriske sredine (uporedi sl. 133 sa sl. 64). Iz VIII dokaza u IV glavi naučili smo da je dužina upravne spuštene iz temena pravog ugla na hipotenuzu kvadratni koren proizvoda ona dva otsečka na koje je hipotenuza podeljena tom upravnom. Dokaz 10 pokazao nam je da je onaj trougao pravougli čija je jedna strana prečnik polukruga a teme naspramnog ugla leži na periferiji tog polukruga. Ako nacrtamo



SL. 132. — POMERANJE SAHATNOG KLATNA POČEVŠI OD NJEGOVOG POLOŽAJA MIROVANJA

polukrug sa središtem na sredini između druge mehane i crkve, dobivamo pravougli trougao ako i mehanu i crkvu spojimo sa jednom tačkom koja leži vertikalno iznad središta. Na sl. 133 jedinica merenja je 100 jardi. Crkva je + 4, a »Kornjača« je — 4 jedinica od središta. Ako vertikalnu visinu obeležimo sa p, i ako je a prvo rastojanje, a b drugo rastojanje, biće

$$p = \sqrt{ab}$$

U Euklidovoj geometriji nismo morali voditi računa o pravcu. Ovo bi bilo isto kao kad bismo rekli

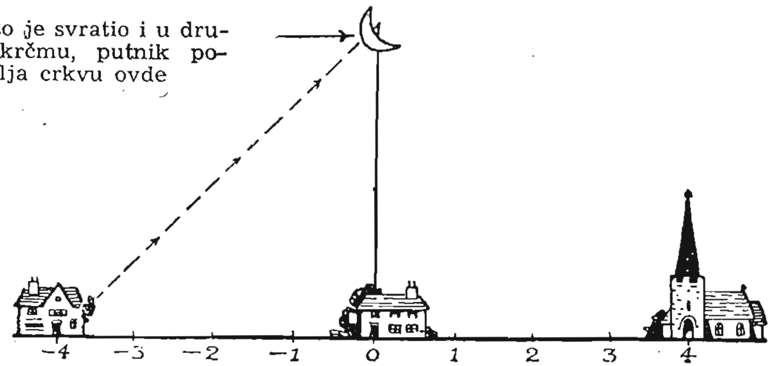
$$p = \sqrt{4 \times 4} = 4$$

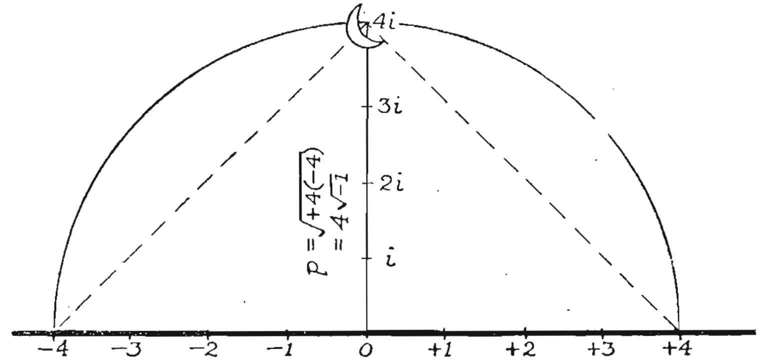
Da bismo ostali dosledni svojoj nameri da vratimo u geometriju ono što je Euklid iz nje izostavio, dolazimo do jednog drugog čudnog rezultata, naime,

$$p = \sqrt{(-4)\cdot(+4)} = 4\sqrt{(-1)\cdot(+1)} = 4\sqrt{-1} = 4i.$$

Zato izraz $4i$ jedinice ili 4 »imaginarne« (uobražene) jedinice tačno označava mesto na koje je mašta našeg putnika postavila

Pošto je svratio i u drugu krčmu, putnik postavlja crkvu ovde

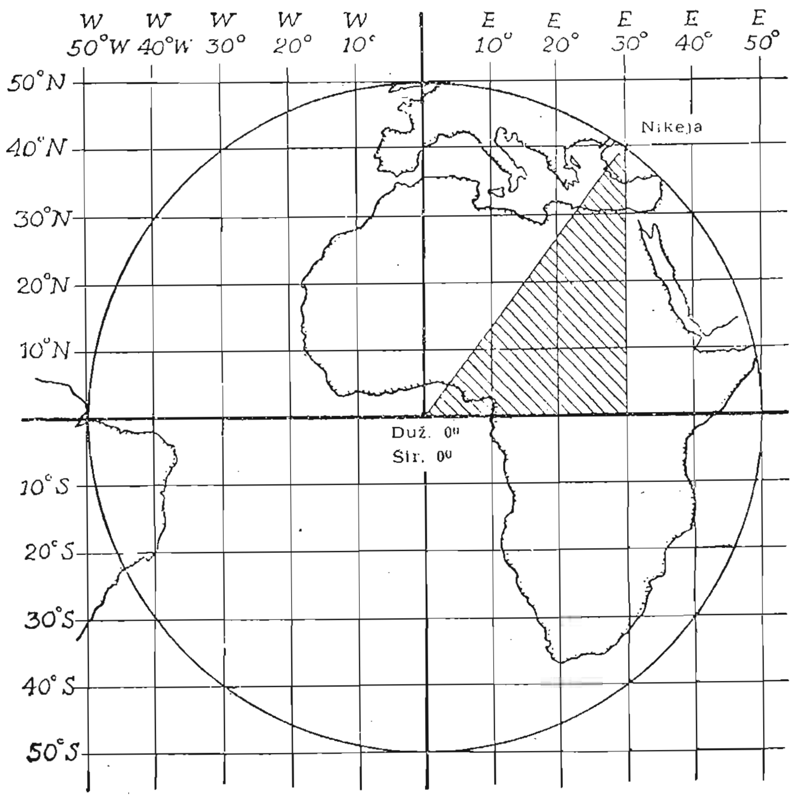




Sl. 133.

crkvu. Drugim rečima i jedinica dužine znači 1, $2i$ jedinica 2, $3i$ jedinica 3 jedinice merene naviše, u vazduh, mesto na istok kao + 1, + 2, + 3, ili na zapad kao — 1, — 2, — 3.

SVET U OBRUČIMA. — Objašnjavajući kako je primena znakova »+« i »—« za označavanje pravca i položaja sasvim prirodan rezultat načina na koji smo najpre upotrebljavali te znake, pustili smo našeg putnika da tumara po pravome putu na svojim rođenim nogama, pa smo ga čak pustili i da nađe



Sl. 134.

nebo u svojoj mašti. De da vidimo kako se ti znaci mogu upotrebiti da se opiše kretanje brodova po morskim putevima koji nemaju ivica, tako da pomorac može da krmani po svom kursu kao što vrana leti. Na sl. 134 prikazali smo svet u doba Velikih

Prekomorskih Putovanja, ucrtan u paralele širine i meridijane dužine. Ovi poslednji nisu baš sasvim paralelni na stvarnoj lopti. Oni se svi stiču na polovima. Na jednakim rastojanjima na obimu kruga opisanom oko sveta od Severnog Pola do Južnog Pola i nazad površina sveta je podeljena krugovima paralelnim sa ekvatorom. Devedeset od tih krugova su severno od Ekvatora, a 90 južno. Ako idemo od Severnog Pola do Južnog Pola i nazad imamo da presečemo 360 paralelnih linija širine, ili, kao što obično kažemo, da pređemo 360° širine. Linijama koje spajaju polove i računaju se od 0° do 180° istočno i od 0° do 180° zapadno od meridijana koji prolazi kroz Grinič, svaki krug širine paralelan sa ekvatorom podeljen je u 360 jednakih stupnjeva ili stepena d u ž i n e. Na planisferi (ili Merkartovim kartama) meridijani su obično povučeni kao paralelne prave linije, poput onih što pretstavljaju paralelne krugove širine, kao da je Zemlja ravna ploča. To dovodi do krupnih grešaka kad se računaju velika rastojanja koja se samo pomoću sfernih trouglova mogu tačno izračunati, kao što je objašnjeno u VIII glavi. Za ono što nam je sad potrebno mi ćemo zanemariti grešku i raditi kao da je svet zbilja pljosnat.

Da bismo odredili svoj položaj na moru ili na zemlji moramo imati neku utvrđenu tačku prema kojoj ćemo određivati svoja merenja, kao što je u poslednjem primeru bila mehana »Jazavac i gajde«. Za plovidbu obično uzimamo jednu tačku u Gvinejskom zalivu, gde je voda na sve strane, a nigde ničeg za piće. To je tačka gde Grinički meridijan 0° duž. preseca ekvator, 0° širine. To je središte sveta za pomorsku aritmetiku. Uzevši tu tačku za središte, na sl. 134 nacrtali smo krug sa poluprečnikom čija dužina odgovara 50° geografske dužine ili širine. Jedina značajna varoš blizu koje taj krug prolazi jeste Nikeja u Bitiniji. Nikeja, koja se nalazi približno na 30° ist. duž. i 40° sev. šir., pomoći će vam da vidite kako je crtanje karata omogućilo da se spoje geometrija i algebra. Nikeja je značajna i sa nekoliko drugih razloga. Stotinu godina posle onoga vremena kada su hrišćanski kaluđeri razorili škole aleksandriske nauke, varoš Nikeja je izabrana kao središte za aritmetička istraživanja osobina broja 3. Poznate rezultate ove poletne učenosti mnogo je teže razumeti nego tablicu prirodnih logaritama. Pošto je za svaku grešku u primeni nikejske vere izricana smrtna kazna, te je bilo ogromno žrtava, mi smo dvostruko srećni što mesto nikejske nauke možemo da učimo trgovačku računicu Reformacije. U trinaestom veku središte Istočne Rimske Imperije povuklo se iz Konstatinopolja (Carigrada) u Nikeju pred vojskom Krstaša koji su smatrali za jeres vizantiski metod rastavljanja broja 3 na činioce.

Ako uzmemo kartu sa sl. 134 onakvu kakva nam se prikazuje, koliko je daleko svetsko središte trgovačke aritmetike od svetskog središta nebeske aritmetike? Odgovor nije težak. Duž (R) što spaja te dve tačke jeste hipotenuza pravouglog trougla u kome su katete od 30^0 dužine i 40^0 širine. Ako je Zemljin obim 25000 milja, 1^0 širine ili dužine (na ekvatoru) jeste $\frac{2500}{36}$, ili $69\frac{1}{2}$ milja. Onda su katete toga trougla $30 \cdot 69\frac{1}{2}$ i $40 \cdot 69\frac{1}{2}$ milja. Prema onome što sad možemo nazvati kineska teorema[1]) ili prema dokazu 8, imaćemo

$$R^2 = \left(30 \cdot 69\frac{1}{2}\right)^2 + \left(40 \cdot 69\frac{1}{2}\right)^2 = \left(69\frac{1}{2}\right)^2 (30^2 + 40^2)$$

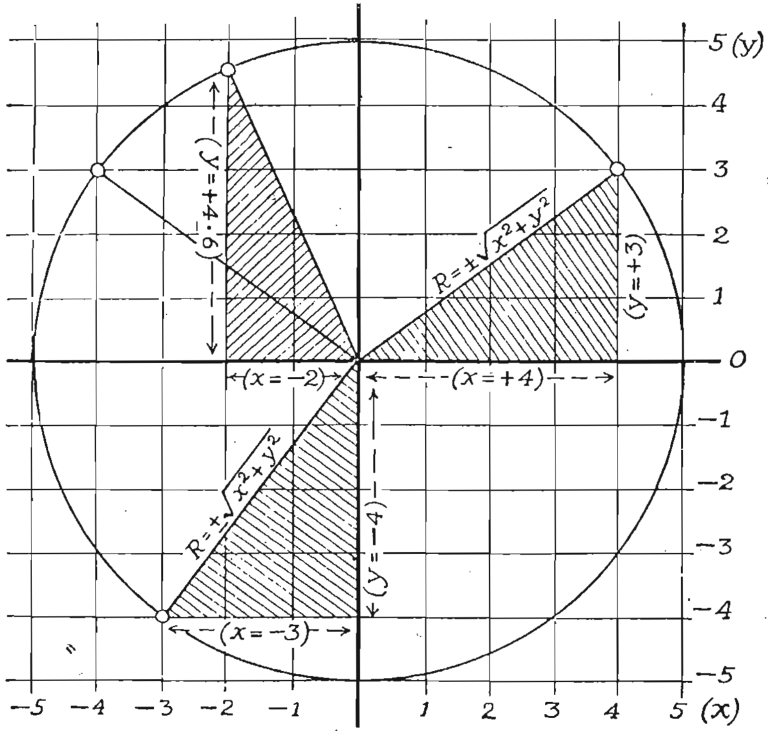
$$R = 69\frac{1}{2}\sqrt{900+1600} = 69\frac{1}{2}\sqrt{2500} = \pm 69\frac{1}{2} \cdot 50 = \pm 3475 \text{ milja}$$[2])

Dva znaka u ovom slučaju potsećaju nas da bi R, rastojanje od središta do kružnog obima, bilo isto, ako bismo ga merili u suprotnom pravcu do nekog mesta na kružnom obimu u Južnom Atlantiku. Ovaj prosti račun pokazuje kako se opisuju slike u geometriji Reformacije. Kartezijeva prava linija nije kao Euklidove prave, koje mogu biti jednake u svakom pogledu, ma da se očevidno nalaze na raznim mestima. Kartezijeva prava je naročita prava upravljena u naročitom pravcu i koja polazi sa naročitog mesta. Na sl. 135 nacrtali smo ponovo krug sa sl. 134 sa četiri poluprečnika postavljena na istoj mreži. Jedina razlika je razlika u rečniku. Dužinu merenu paralelno sa ekvatorom obeležavamo kao $\pm\, x$ jedinica, a

[1]) Pitagorina teorema. — Prev.

[2]) Greška usled Zemljine krivine je oko 3 procenta. — Pisac.

svaku dužinu merenu duž paralele dužine, sa $\pm\, y$ jedinica[1]). Na slici



SL. 135. — KARTEZIJEVA JEDNAČINA KRUGA

U svakoj tački na obimu kruga čiji je poluprečnik R, imamo $R^2 = x^2 + y^2$, tj. $x^2 = R^2 - y^2$ i $y^2 = R^2 - x^2$

$$R = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{i} \quad x = \sqrt{R^2-y^2} \quad \text{i} \quad y = \sqrt{R^2-x^2}$$

otuda, ako je $R = 5$ a $x = -2$, onda je

$$y = \sqrt{5^2-(-2)^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21} = \pm 4{,}6 \text{ (približno)}$$

10 istočno stepeni dužine stoje mesto $+1$ jedinica ($x = +1$)
10 zapadno stepeni dužine stoje mesto -1 jedinica ($x = -1$)
10 severno stepeni širine stoje mesto $+1$ jedinica ($y = +1$)
10 južno stepeni širine stoje mesto -1 jedinica ($y = -1$)

[1]) Ne brkajte y podelak sa sl. 135 sa ix podeokom sa sl. 133. Na sl. 135 podeoci pretstavljeni sa y odgovaraju rastojanjima duž puta

Morate samo da pazite da prevedete istok i zapad, sever i jug sa $\pm$, a rastojanja dužine sa x i rastojanja širine sa y. Onda ćete videti da svaki poluprečnik povučen severno od ekvatora na kome je $y = 0$, i istočno od griničkog meridijana, na kome je $x = 0$, jeste hipotenuza pravouglog trougla u kome je jedna kateta $+ x$ jedinica, a druga kateta $+ y$ jedinica tako da je

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Za druge kvadrate na krugu primenjujući Diofantovo pravilo o znacima, imamo:

Severozapad: $R^2 = (-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2$
Jugoistok: $R^2 = x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2$
Jugozapad: $R^2 = (-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2$

Znači za svaku tačku na krugu:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Uverite se da ste shvatili šta ovo znači, time što ćete ovo prevesti natrag na poznatiju vam retorsku algebru Indusa. Onda će ovo da glasi: »U Kartezijevoj geometriji krug je slika kod koje se rastojanje od obima do jedne utvrđene tačke zvane središte može dobiti kad se izvuče kvadratni koren iz zbira kvadrata horizontalnog i vertikalnog rastojanja od tog središta do ma koje tačke na obimu«. U geometriji Reformacije definicija jedne slike je algebarska jednačina. Kažemo da je krug slika čija je jednačina

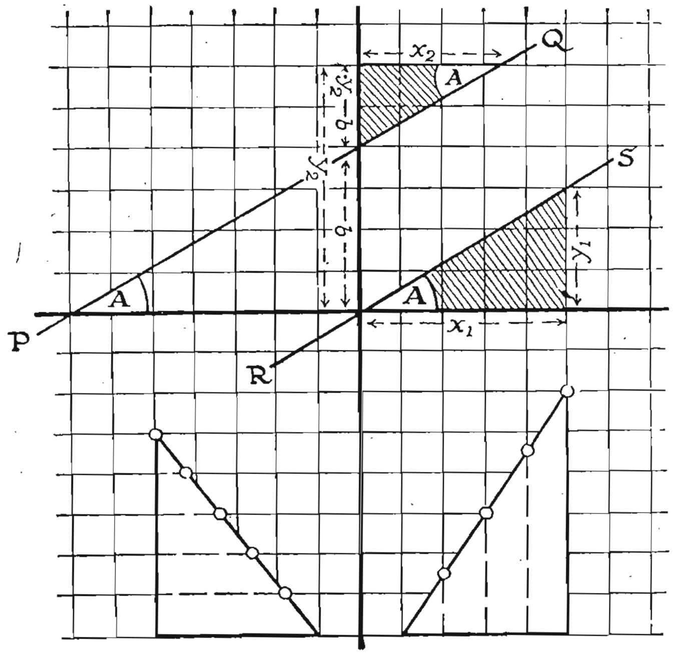
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ovo se zove Kartezijeva jednačina kruga, čije je središte u tački gde je $x = 0$ i $y = 0$.

Drugа poznata slika koja će objasniti razliku između euklidovskog i kartezijevskog gledišta jeste pravougli trougao. Svaka prava povučena na kartezijevskoj mreži dužine (x) i

koji je pod pravim uglom s putom koji spaja dve mehane sa sl. 133, a ne rastojanjima naviše (ix) u ravni pod pravim uglom sa ravni u kojoj je put što spaja mehane. Ova razlika je prosto jedna matematička pogodba. — Pisac.

širine (y) (u koordinatnom sistemu) jeste hipotenuza pravouglog trougla u kome je visina meridijan dužine, a osnovica paralela širine (sl. 136). Ako prava prolazi kroz centar sveta gde grinički meridijan seče ekvator, ili, kako ćemo mi to sad zvati, *početak* (ishodište) koordinatnog sistema, svaki pravougli trougao, ograničen delom te prave i paralelom dužine ili širine sličan je sa svakim drugim pravouglim trouglom ograničenim nekim drugim delom te prave i paralelom dužine ili širine. Ovo ćete



SL. 136. — JEDNAČINA PRAVOUGLA TROUGLA

$$y = (\text{tang } A)\, x + b$$

lako uočiti ako upotrebite dva niza trouglova desno i levo na gornjem delu slike 136 sa sl. 43 koja objašnjava dokaz 5 iz IV glave. Ako prava u koordinatnom sistemu prolazi kroz početak kao što je slučaj sa pravom RS, imaćemo pravougli trougao sa temenim uglom A u početku sa naleglom katetom x, i sa naspramnom katetom y. Njegov položaj i njegovu veličinu izražava jednačina

$$\frac{y}{x} = \text{tang } A, \text{ ili}$$

$$y = (\text{tang } A) \cdot x$$

Na dijagramu je $x = 5$ i $y = 3$. Zato tang A, koji pretstavlja *gradient* ili nagib prave RS (vidi sl. 31), iznosi $\frac{3}{5}$.

Ako se povuče jedna prava PQ paralelna se RS preko kartezijevske mreže (koordinatnog sistema) tako da seče grinički meridijan (»y« osovinu) u $y = b$,

$$\text{tang } A = \frac{y - b}{x}, \text{ ili}$$

$$y = (\text{tang } A)\, x + b$$

Mi o ovoj jednačini obično ne govorimo kao o jednačini pravouglog trougla. Ona se obično zove Kartezijeva jednačina prave linije. To je zato što u geometriji Reformacije opisati jednu sliku znači opisati liniju koja je ograničava. Jednačina koja opisuje neku liniju pravu, ili, pak krivu, kao što je obim kruga, kazuje vam kako da nađete širinu izvesne tačke na toj liniji ako znate dužinu ili obrnuto. Poslednja jednačina

$$y = (\text{tang } A)\, x + b$$

znači da možemo izračunati vertikalnu visinu izvesne tačke na toj liniji ako znamo horizontalno rastojanje te tačke od početka. Za svaku posebnu pravu moramo znati tang A i b. Ako prava prolazi kroz početak (ishodište), biće $b = 0$ i

$$y = (\text{tang } A)\, x$$

Ako je $A = 0$, biće

$$y = b$$

To znači da prava ide paralelno sa ekvatorom (»x« osovinom) sa istom vertikalnom visinom b na svakom mestu. Ako je $A = 45^0$ ili $\frac{1}{4}\pi$ radiana, tang $A = 1$, te je

$$y = x + b$$

Ako je tang $A = 1$, $b = 0$, prava prolazi kroz ishodište (početak) pod uglom od 45^0.

Dužina i širina jedne određene tačke na pravoj liniji obično se zovu koordinate te tačke. Korisno je poslužiti se jednim matematičkim pridevom da se opišu koordinate. Ako sa x obeležimo rastojanje mereno horizontalno od ishodišta, a sa y rastojanje mereno vertikalno od ishodišta, koordinate neke tačke P biće obeležene sa x_p, y_p. Ono p napisano dole desno kod x i kod y kazuje vam o kome to posebnom x ili y govorite. Obično izostavljamo ono p u jednačinama kao što su

$$y^2 = R^2 - x^2, \text{ ili}$$

$$y = (\text{tang } A)\, x + b$$

To dolazi otuda što se smatra da se podrazumeva da je y o kome govorimo upravo ono y koje odgovara iksu o kome govorimo. Pošto su slični svi pravougli trougli ograničeni delovima jedne iste prave linije i paralelama dužine i širine, na sl. 137 videćete da je

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tang } A = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

To znači da je za svake dve tačke na pravoj gradient (nagib) jednak razlici (diferenciji) između y koordinata, podeljenoj razlikom (diferencijom) između x koordinata, ili

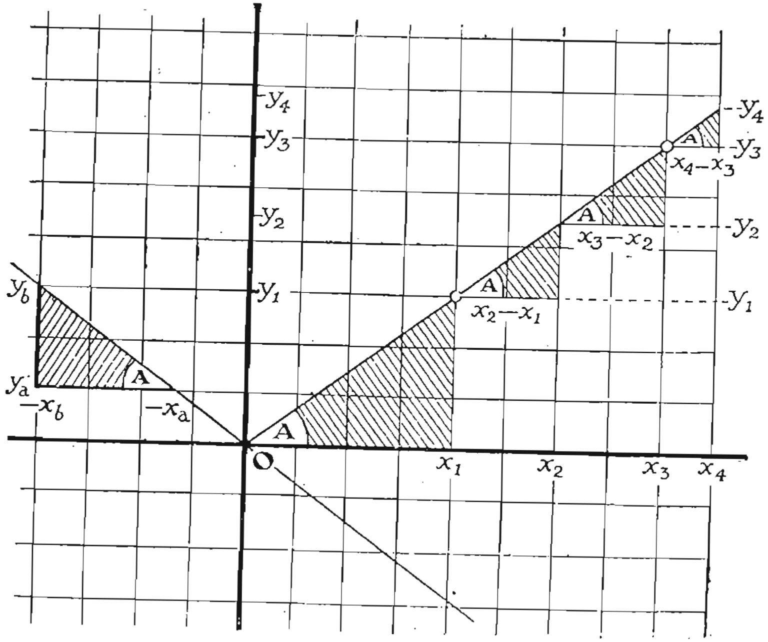
$$\text{tang } A = \frac{\text{dif. } y}{\text{dif. } x}$$

Mi ćemo pisati $\frac{dy}{dx}$ kad su dve tačke vrlo blizu jedna drugoj tako da je razlike teško meriti pošto su i suviše male. Tu morate biti obazrivi i setiti se da dy ne znači d pomnoženo sa y, već znači jedan mali komad vertikalnog rastojanja. Slično tome dx ne znači d pomnoženo sa x, već znači odgovarajući mali komad horizontalnog rastojanja. Tako se jednačina prave linije može napisati i ovako:

$$y = \frac{dy}{dx} \cdot x + b$$

U XI glavi će nam ovakvo pisanje jednačine prave dati u ruke Njutnovo sredstvo za merenje kretanja. Kad se tangens

A napiše u obliku $\frac{dy}{dx}$ on se zove d i f e r e n c i j a l n i k o l i č n i k ipsilona. Videćete sa slike da je odnos ili *gradient* $\frac{dy}{dx}$ uvek isti, ma koliko malim mi načinili ovo dy i dx.



SL. 137. — GRADIENT PRAVE LINIJE KAO DIFERENCIJALNI KOLIČNIK

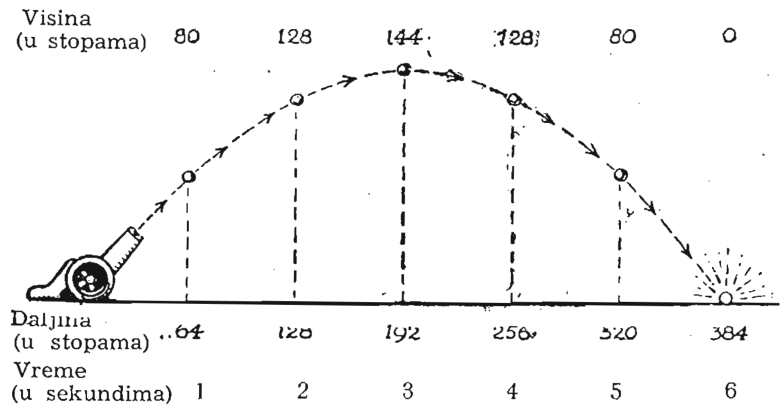
Druga vrlo važna stvar koju treba zapaziti povodom slike 137 jeste prava koja je nagnuta n a z a d p o d istim uglom A prema ekvatoru. U ovom slučaju gradient će biti

$$\frac{y_2-y_1}{(-x_2)-(-x_1)} = \frac{y_3-y_2}{(-x_3)-(-x_2)} = \text{itd.. tj.}$$

$$-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = -\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \text{itd.}$$

To znači, gradient jedne prave koja se naginje u n a z a d pod uglom A prema horizontalnoj liniji jeste b r o j n o i s t i kao gradient prave koja se naginje n a p r e d, jedino što je z n a k s u p r o t a n.

UCRTAVANJE BARUTNOG DEJSTVA. — Mi smo novu geometriju nazvali geometrijom Reformacije, da bismo obratili čitaočevu pažnju na društvene uslove u kojima se ona pojavila. Videli smo da je geometrija Rene Dekarta obuhvatila nešto što je Euklidova geometrija izostavila. Ona vam kazuje *položaj*



SL. 138. — PUTANJA TOPOVSKOG ZRNA

koji jedna slika zauzima u prostoru. Sad ćemo videti da je u njoj našlo mesto još nešto, što je Euklid izostavio iz svoje geometrije. Ona može da uzme u račun i v r e m e. I u jednom i u drugom pogledu ona je u tesnoj vezi sa velikim duhovnim promenama koje su došle sa protestantskom reformacijom, ma da je Dekart, kao i Erazmo, koji je postavio osnove protestantske bibliske učenosti i unapredio mnoge slobodoumne doktrine jednog docnijeg perioda, umro, a nije se stvarno odrekao katoličke vere.

Reformacija nije izvedena jedino pomoću bibliske učenosti. Evropu su pustošili ratovi u kojima je artiljerija igrala sve važniju i važniju ulogu. To je bilo doba u kome se mnogo razmišljalo o barutu, kad je vojnički uspeh zavisio od toga koliko će se iskoristiti nova tehnika. Kad je top prvi put uveden u trinaestom veku, njegovo dejstvo bilo je uglavnom upravljeno na to da se obori moral protivnikov. U šesnaestom veku upotrebljen je kao stvarno oružje za razaranje. Kako da se nagne top tako da zrno pogodi neko određeno mesto i kako da se oceni daljina? Za taj posao uvučena je matematička dovitljivost u veštinu ratovanja.

Sl. 138 jeste srazmerni dijagram osnovnog problema. On pokazuje kretanje topovskog zrna vertikalno i horizontalno. Ako je podesnije za crtanje, vertikalni podeoci ne moraju biti iste dužine kao i horizontalni. Videćete da svaki položaj topovskog zrna u kretanju, kao i svaki položaj broda u kretanju ima dve koordinate, horizontalno rastojanje $(+x)$ desno od toga koje odgovara istočnoj dužini, i vertikalno rastojanje naviše od zemlje $(+y)$ koje odgovara severnoj širini. Razlike između srazmernog dijagrama o kretanju topovskog zrna i jedne obične mape jeste u tome, što smo u ovaj dijagram stavili nešto što ne unosimo u mapu. Mape su načinjene za razne brodove koji plove raznim brzinama. Zato one ne vode računa o vremenu. One se samo staraju da nam pokažu položaj broda. U dijagramu putanje topovskog zrna mi smo pokazali vreme koje protekne između opaljenja i onog trenutka kad zrno pređe horizontalna rastojanja koja odgovaraju stepenima dužine. I tako možemo dati koordinate ma koje tačke na putu onog projektila ovako:

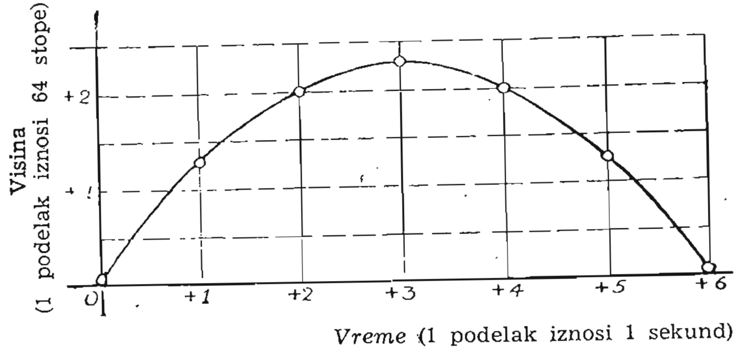
(a) vertikalna visina $= + y$, horizontalno rastojanje $= + x$

(b) vertikalna visina $= + y$, vreme od opaljenja $= + x$

Drugim rečima možemo se poslužiti ovom svojom kartezijevskom mrežom[1]) da pretstavimo tok vremena kao na sl. 139. Na njoj jedan podelak duž y-osovine pretstavlja 64 stope, podelak duž x-osovine pretstavlja 1 sekund. Kriva linija na ovoj slici zove se p a r a b o l a. Zrno se kreće putanjom koja pretstavlja parabolu gotovo sasvim onakvu kako je definiše matematičar kad se zrno kreće u bezvazdušnom prostoru. U vazdušnom prostoru ta putanja nije baš tako pravilna parabola. Zato se moraju uneti izvesne popravke, ako bismo se poslužili matematičkom parabolom kao nacrtanim modelom za izvršenje gađanja. Na nacrtanoj slici uzeli smo vrednosti koje odgovaraju matematičkoj definiciji. Kao i svi računski pronalasci i ovo je samo približni opis onoga što se

[1]) Koordinatni sistem. — P r e v.

dešava u stvarnom svetu. Kad sastavimo tablicu tih vrednosti, možemo izvesti jednačinu parabole kad izvršimo nešto malo ogleda sa brojnim podacima.



SL. 139. — VREME ULAZI U GEOMETRIJU

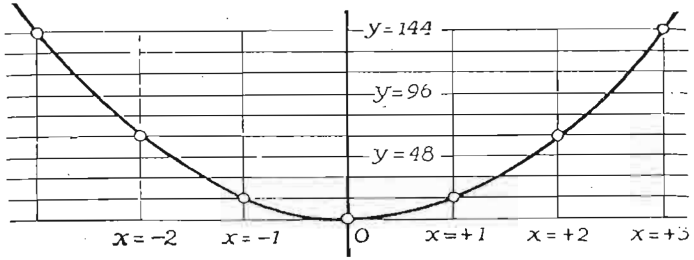
Tako imamo:

x	$\frac{3x}{2}$	x^2	$\frac{x^2}{4}$	$\left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) = y$
0	0	0	0	0
1	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$
2	3	4	1	2
3	$4\frac{1}{2}$	9	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$
4	6	16	4	2
5	$7\frac{1}{2}$	25	$6\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$
6	9	36	9	0

Jednačina na ovaj način nacrtane parabole koja ide naniže jeste

$$y = ax^2 + bx + c$$

U datom primeru kao što pokazuje tablica, biće $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 0$. Pošto jedna ipsilonska jedinica pretstavlja 64 stope, vrednost za ipsilon računata iz ove jednačine mora da se



SL. 140. — UCRTAVANJE BARUTNOG DEJSTVA

Kartezijevska jednačina parabole kad je nacrtana kao ova na slici, glasi:

$$y = ax^2$$

Na ovoj slici je $a = 16$.

pomnoži sa 64, da bismo dobili tačan odgovor u s t o p a m a. Kad pomerimo početak merenja dobijamo mnogo prostiju jednačinu. Sl. 140 je nacrtana tako da je koordinatni početak prekretna tačka[1]) na udaljenju od 192 stope od topa, a y je vertikalno rastojanje n a n i ž e od najviše tačke (144 stope) sa krive na sl. 138. Rastojanje (y) je mereno u stopama, a vreme, (x) je mereno u sekundima pre ($-x$) ili posle ($+x$) trenutka kada je topovsko zrno na najvećoj visini. Onda imamo:

x	y
-3	$144 = (-3)^2 \cdot 16$
-2	$64 = (-2)^2 \cdot 16$
-1	$16 = (-1)^2 \cdot 16$
0	$0 = 0^2 \cdot 16$
$+1$	$16 = (+1)^2 \cdot 16$
$+2$	$64 = (+2)^2 \cdot 16$
$+3$	$144 = (+3)^2 \cdot 16$

Prema tome jednačina parabole kao što je ona na sl. 140, glasi

$$y = ax^2$$

[1]) Teme putanje. — R e d.

U ovom slučaju je $a = +16$.

Dosad smo se ograničili na to da izložimo kako je geometrija Reformacije ponikla iz tehničkih problema u doba kada je prvi put ona izneta u sistematskom obliku. Pre nego što razmotrimo i s drugih strana ovu tehničku pozadinu možemo zastati da se upitamo kakva je korist od svega ovoga. Dve se koristi mogu odmah zapaziti. Prva je u tome što nam ovo omogućuje da računske probleme koji se mogu izraziti u obliku jednačine rešavamo i u takvim slučajevima, kad ne možemo da nađemo nikakvo neposredno algebarsko pravilo po kome bismo rešili problem.

Na pr., evo jedne jednačine za koju još nismo otkrili kako se rešava[1]):

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$\text{ili} \quad x^3 - 5x^2 + 4x = 8$$

Na levoj strani ove jednačine imamo jednu grupu količina čije vrednosti ne znamo. Kad stoje same za sebe one mogu da označe neki iznos prema tome koji poseban broj pretstavlja ono x. Desna strana jednačine kazuje nam da tačan posebni broj ili brojevi mesto kojih stoji x moraju biti takvi da $x^3 - 5x^2 + 4x$ iznose svega 8. Ako celokupnu vrednost za $(x^3 - 5x^2 + 4x)$ obeležimo sa y, možemo načiniti sliku koja pretstavlja sve moguće vrednosti koje može imati izraz $x^3 - 5x^2 + 4x$. To je isto kao što obim kruga nacrtanog iz koordinatnog početka kao središta na Kartezijevoj mreži[2]) pretstavlja sve moguće vrednosti za $\sqrt{R^2 - x^2}$ kad je $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Dobivena slika pokazuje nam kolika je vrednost y kad x ima neku posebnu vrednost. Kad je slika dovršena, možemo videti odgovor, ako uopšte ima odgovora. Neka tačka ili neke tačke na krivoj liniji moraju da leže na $+8$ jedinica širine, a tačna vrednost x koja »zadovoljava« jednačinu jeste odgovarajuća dužina.

Da bismo mogli nacrtati sliku, izradimo najpre tablicu vrednosti za y koje odgovaraju raznim vrednostima za x, idući sve dalje, dok neke od naših vrednosti za y ne budu veće, a

[1]) Pisac hoće da kaže da *on* još nije govorio o tome kako se rešavaju takve jednačine. — P r e v.

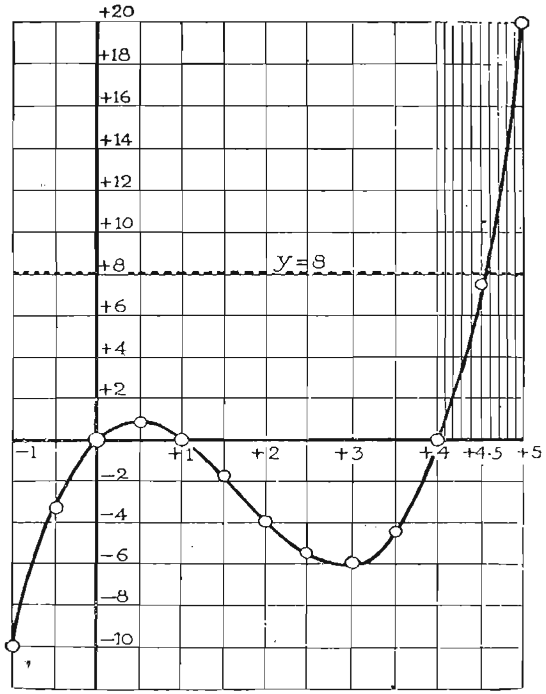
[2]) Kartezijev koordinatni sistem. — P r e v.

druge manje nego što je vrednost koju ima y prema jednačini $y = 8$. Evo jedne takve tablice:

Koordinata x				Koordinata y
x	x^3	$-5x^2$	$4x$	x^3-5x^2+4x
-2	-8	-20	-8	-36
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{45}{4}$	-6	$-20\frac{5}{8}$
-1	-1	-5	-4	-10
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{4}$	-2	$-3\frac{3}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{4}$	2	$\frac{7}{8}$
1	1	-5	4	0
$1\frac{1}{2}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{45}{4}$	6	$-1\frac{7}{8}$
2	8	-20	8	-4
$2\frac{1}{2}$	$\frac{125}{8}$	$-\frac{125}{4}$	10	$-5\frac{5}{8}$
3	27	-45	12	-6
$3\frac{1}{2}$	$\frac{343}{8}$	$-\frac{245}{4}$	14	$-4\frac{3}{8}$
4	64	-80	16	0
$4\frac{1}{2}$	$\frac{729}{8}$	$-\frac{405}{4}$	18	$7\frac{7}{8}$
5	125	-125	20	20

Kad smo to uradili, obeležimo tačke malim kružićima kao na sl. 141, čije su koordinate x (krajnji stubac levo) i y (krajnji stubac desno) na tablici. Ovo se zove crtanje krive tačku po

tačku. Spojite ove tačke krivom linijom koja se blago savija između njih.



SL. 141. — CRTANJE TAČKU PO TAČKU KRIVE
$y = x^3 - 5x^2 + 4x$

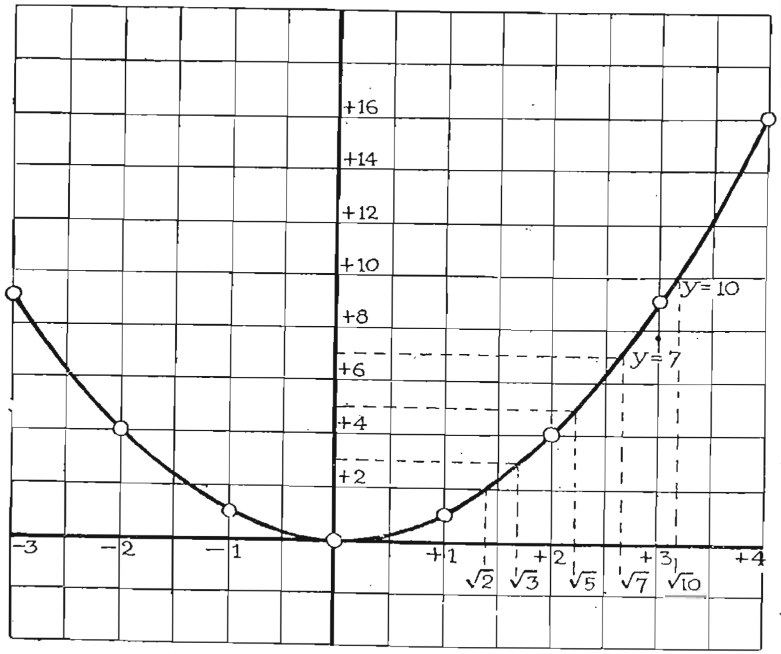
Kriva pokazuje vrednosti za x koje odgovaraju dotičnoj vrednosti za y dato ovim izrazom:

$$y = x^3 - 5x^2 + 4x$$

Jednačina vam kaže da je

$$8 = x^3 - 5x^2 + 4x$$

Zato ćemo mi povući preko ovog crteža jednu pravu čija je vertikalna visina 8 (tj. $y = 8$). Horizontalno rastojanje tačke (ili tačaka) gde ova prava seče krivu jeste vrednost (ili vrednosti) za x koja zadovoljava jednačinu. Koliko će biti tačan rezultat zavisi od toga koliko tačno crtamo krivu, koliko je sitno išpartana hartija na kojoj se crta, kao i od toga koji smo podelak izabrali. Videćete da se x nalazi između 4,5 i 4,75 i da je mnogo bliže prvoj vrednosti nego drugoj. Ako se potrudite, možete dobiti onu tačnost kolika vam je potrebna za račun koji treba da izvršite.



SL. 142. — GRAFIČKA METODA ZA NALAŽENJE KVADRATNOG KORENA

Primena na brojeve vidi se na sl. 142. Ako želimo približne vrednosti za kvadrate, kvadratne korene, kubne korene, itd., možemo nacrtati podesnu liniju, na pr. $y = x^2$ ili $y = x^3$. Kvadratni koreni mogu se naći iz parabole

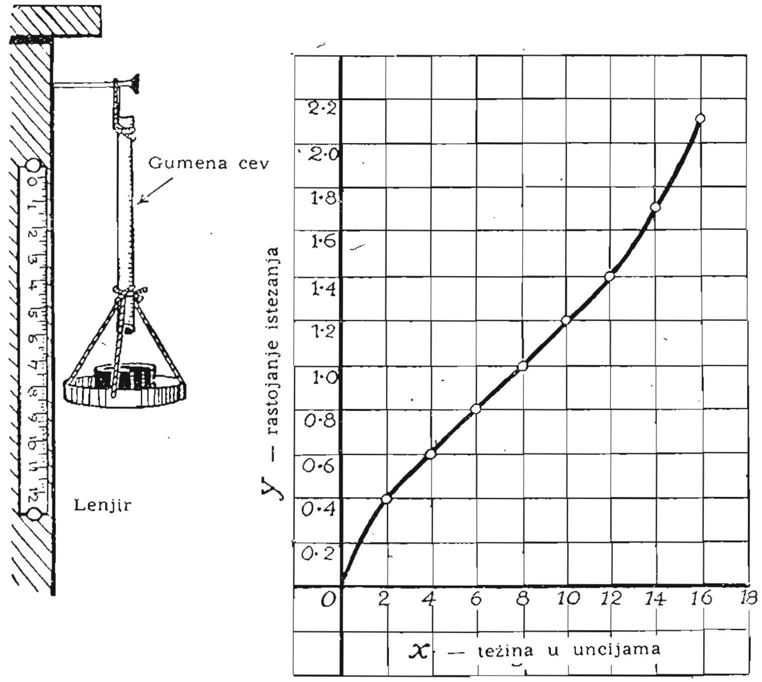
$$y = x^2$$

što je isto kao i $x = \pm\sqrt{y}$

Kad ste nacrtali krivu, imate prosto da čitate x koordinatu neke tačke čija je y koordinata broj čiji kvadratni koren tražite.

Druga prilika u kojoj je korisna geometrija Reformacije jeste u tome, što nam ona pokazuje računska pravila ili zakone koji izražavaju fizičke, biološke i društvene promene koji se mogu izraziti brojevima. Evo nekoliko primera.

Na sl. 143 je prikazano istezanje jedne gumene cevi. Ogled se može izvršiti za nekoliko minuta. Ovde je uzeta gumena cev



SL. 143. — ZAKON KANTARA S OPRUGOM

obešena o klin koji je udaren u nogu kuhinjskog stola. Na nogu je zakucan »rajsneglama« ili pomoću dva zavrtnja lenjir na kome se vide podeoci od $\frac{1}{10}$ palca. Tas za tegove je od poklopca sa metalne kutije za cigarete prikačen za četiri rupe koje se mogu izbušiti čekićem i klinom. Tegovi su uzeti od kuhinjskih terazija. Kriva linija je izrađena prema sledećem izvođenju:

x (težina u uncijama)	Dno tasa (u palcima)	y [dužina za koju se cev istegne (u palcima)][1]
0	3,0	0,0
2	3,4	0,4
4	3,6	0,6
6	3,8	0,8
8	4,0	1,0
10	4,2	1,2
12	4,4	1,4
14	4,7	1,7
16	5,1	2,1

Na takvoj krivoj možete pročitati rastojanja koja odgovaraju pojedinim težinama, ako želite da na kantaru na oprugu izbeležite podeoke koji pretstavljaju razne težine. Primetićete da je ova linija prava od $x = 2$ do $x = 12$.

U tom razmaku kad dodajemo po dve unce u tas (dif. $x = 2$) proizlazi istezanje od 0,2 palca (dif. $y = 0{,}2$). Međutim jednačina prave linije je

$$y = \frac{\text{dif. } y}{\text{dif. } x} x + a$$

Zato će jednačina ove linije u ovom delu u kome ona ide pravo biti

$$y = 0{,}1x + a$$

Ovo a možete naći ako u jednačinu uvrstite odgovarajuće vrednosti za x i y između $x = 2$ i $x = 12$. Na pr. kad je $x = 10$, biće $y = 1{,}2$. Kad to unesemo u jednačinu imaćemo

$$1{,}2 = (0{,}1)\ 10 + a \qquad \text{Odatle je}$$
$$a = 0{,}2$$

Jednačina te linije biće:

$$y = 0{,}1x + 0{,}2$$

To znači da mogu da obeležim podeoke skale na mašini za merenje težine koja istom oprugom meri dosta tačno između

[1]) Jedan palac iznosi 2,54 cm. Jedna unca 28,35 grama. — Prev.

4 i 12 uncija. Oznaka koja odgovara težini od $4\frac{3}{4}$ uncija biće zato $(0{,}1)\ (4{,}75) + 0{,}2 = 0{,}675$ palaca, ili dvadeset i sedam četrdesetih palca od oznake nula. Pravilo ili »zakon« koji pokazuje odnos između upotrebljene težine i dužine za koju se isteže opruga pronašao je Huk, pronalazač opruge za časovnik (»federa«). Huk je bio naučnik koji je, kao i mnogi Njutnovi savremenici, utrošio mnogo vremena na to da usavrši časovnik koji bi bio dovoljno tačan da pokazuje griničko vreme na pučini i da time pruži jedno prosto sredstvo za određivanje geografske dužine. To je bio jedan od glavnih razloga zašto je bilo važno da se otkriju tačni zakoni kretanja.

Lako ćete zapaziti ovo: da smo merili dužine x i y od oznake nula koja odgovara dužini opruge kad je obešen teret od dve unce, ili da smo uzeli tas teži za 2 unce, vrednosti za y koje odgovaraju vrednostima za $x = 2$, 4, 6, itd. bile bi 0,2, 0,4, 0,6 itd. Tada bi jednačina koja pretstavlja istezanje do težine od 10 uncija bila kraća i glasila bi $y = 0{,}1\ x$, ili $x = 10y$, (dodata težina u uncijama = deset puta istezanje u palcima računato od oznake nula). Hukov zakon se obično izražava ovako:

$$W = kl^{*})$$

Ovo je jednako sa $x = 10y$, ako je $k = 10$. U svakom posebnom ogledu vrednost koju će dobiti k zavisi od jedinica težine kao i od debljine opruge i materijala od koga je ona načinjena. (Na pr. ako je težina merena u funtama[1]), k bi u ovome ogledu bilo $\frac{10}{16}$). Hukovo je pravilo dovoljno tačno u dugome razmaku za metalne opruge. Za gumu je ono dobro u izvesnim granicama, a daje veoma loše rezultate kad se primene veoma velike razlike u težini. Ovo je tačno za sve fizičke zakone. Naučni zakon je približna istina i može pouzdano da se primenjuje samo onda, kad znamo granice u kojima on važi dovoljno tačno za naše potrebe.

Ovde vredi napomenuti još jednu važnu karakteristiku naučnog zakona. Da bismo mogli potpunce iskoristiti Hukovo pravilo, potrebno nam je da znamo kako vrednost za k zavisi od debljine opruge i kako zavisi od materijala. Kad uzmemo

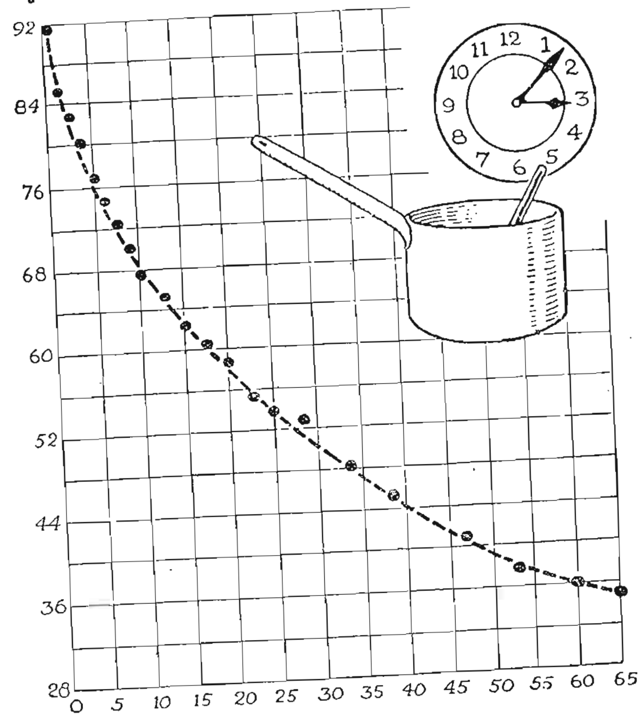
*) W = težine, l = dužine. — Prev.

[1]) Funta = 453,52 gr. Jedna funta ima 16 uncija. — Prev.

neki tipični materijal, pa izrazimo pomoću tačaka krivu liniju za opruge razne debljine, dobijamo razne vrednosti za k. I tako, ako znamo sa slike razne vrednosti za k za razne debljine opruge od nekog posebnog materijala, možemo dobiti vezu između dveju opruga u obliku jednog prostog pravila. Kad nađemo k za opruge iste debljine načinjene od raznog materijala, možemo načiniti tablicu koja pokazuje odnose vrednosti za k za poluge od raznog materijala prema vrednosti za k za poluge načinjene od nekog materijala koji služi kao tip. Pomoću jednačine koja vezuje k sa debljinom za tipski materijal i tablice za relativne vrednosti za k za opruge iste debljine možemo izračunati silu istezanja neke težine, ako znamo debljinu opruge i materijal od koga je načinjena. Tipični fizički zakon sadrži u sebi jedan opšti broj (slovo) ili *konstantu* kao što je k, koja može da se rastavi na »dimenzionalni« činilac (u ovom slučaju debljina) i na »specifični« činilac (koji zavisi od vrste materijala). Zato kad se kaže, kao što neki govore, da su fizički zakoni samo zakoni o količinama to je tačno, ukoliko se misli na izražavanje tih zakona po udžbenicima. Kad ih mi stvarno primenjujemo, imamo da zamenimo opšte brojeve koji se javljaju u njima posebnim brojevima koji odgovaraju svojstvima konkretnih predmeta.

Pre nego što je došla geometrija Reformacije matematika je bila upotrebljena za proučavanje putanja zvezda, za prelamanje i odbijanje svetlosnih zrakova i za proučavanje prostih problema mehanike ravnoteže, kao što je na pr. princip poluge. Pošto se osnivala na Euklidovoj geometriji, bavila se uglavnom prostorom. Nauka se još uvek bavila na prvom mestu oblikom stvari. Ona je bila više anatomska nego fiziološka. Dekartova geometrija mapa nije ograničena na oblike. Ona može da se primeni na veze između svih vrsta količina. Možemo da učinimo da dužina i širina s neke mape odgovaraju vremenu i prostoru merenim za crtanje krive linije projektila, ili da odgovaraju prostoru i težini kao u poslednjem primeru. Isto tako nema razloga da koordinate tačaka na nekoj liniji pretstavljaju samo merena rastojanja daljine. Naredni primer jednog prostog kvantitativnog zakona jeste Njutnov zakon hlađenja (sl. 144). Duž y osovine linija beleži temperaturu jedne šerpe vrele vode koja ima da spadne na sobnu temperaturu, a koja je zaštićena od promaje; x koordinate svake tačke pretstavljaju broj minuta koji su protekli od trenutka kad je voda ostavljena da

se hladi. Sve što vam treba za ovaj ogled jeste: termometar, šerpa, voda, peć i časovnik. Oblik ove krive nije onakav na kakav smo dosad nailazili. Docnije u ovoj glavi (sl. 154) videćete jednačinu koja daje ovakvu krivu. Vi se možda sećate da 10^{-1} stoji mesto $\frac{1}{10}$, a 10^{-2} mesto $\frac{1}{10^2}$ na računaljci od hartije koja se na obe strane proteže dokle hoćete. Kriva na sl.



SL. 144. — ZAKON HRAĐENJA

Grafik hlađenja vode u šerpi od 1 pinte između 92°C i 33°C. Sobna temperatura bila je 17°C.

154 pretstavlja jednačinu $y = 2^x$. Ona je ogledalska slika krive sa sl. 144. Jednačina koja pretstavlja hlađenje vode u šerpi je

$$y = a^{-cx} + b \quad \text{ili}$$
$$T = a^{-ct} + T_0$$

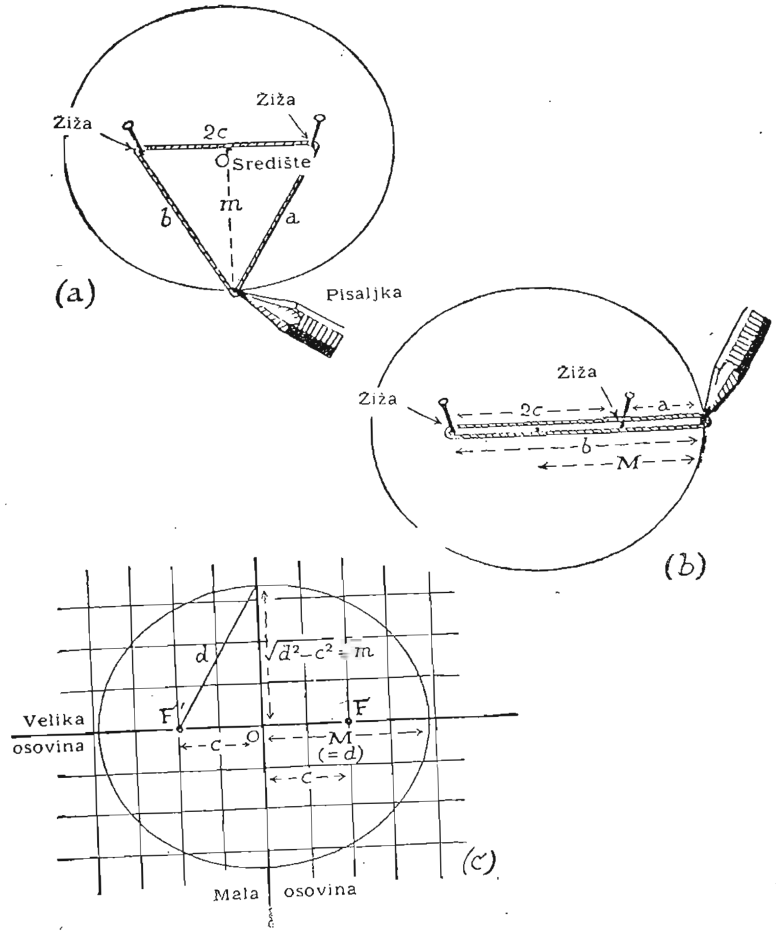
gde je T temperatura, t vreme, a T_0 temperatura okolnog vazduha.

Ima slučajeva gde kriva (grafik) ne uspeva da pokaže neko prosto računsko pravilo kao što su Hukov zakon, ili Njutnov zakon hlađenja. Ali i u tome slučaju grafička metoda može da pokaže kako zbilja postoji veza između dveju promenljivih količina. Kao što nam dobra karikatura čim je pogledamo kaže više nego neka debela knjiga političkog besedništva, grafik na prvi pogled vam kazuje više nego čitave strane opisne algebre. Grafik na kome y koordinata neke tačke pretstavlja prosečnu težinu zdrave bebe, a x koordinata vreme od njenog rođenja, ne pretstavlja grafički izraz nekog jednostavnog zakona za koji možemo napisati neku kratku jednačinu kao što je jednačina prave ili jednačina kruga. Pa ipak, taj grafik pretstavlja vrlo korisno proveravanje umiranja male dece usled biološki nedovoljne pomoći u slučaju nezaposlenosti. Grafik na kome y koordinata pretstavlja broj samoubica, ili broj lica osuđenih za zločin, a x koordinata pretstavlja broj nezaposlenih u istoj društvenoj zajednici i u isto vreme vrlo živo nam iznosi pred oči moralnu konstelaciju društva, u kome je nejednaka raspodela bogatstava.

PLOVIDBA PO NEBU. — U veku kada su ljudi oplovili oko sveta bilo je važno da se dobiju novi i tačniji podaci o kretanju planeta. U svome delu *De Revolutionibus*, objavljenom 1543, Kopernik je branio Aristarhovo učenje po kome Zemlja i planete putuju oko Sunca. Uobičajeno gledište iz Ptolomejeve astronomije bilo je da se celokupna nebeska lopta, zajedno sa Suncem i zvezdama, okreće oko Zemlje. Što se tiče Sunca i zvezda nekretnica pretpostavka je bila prihvatljiva i u skladu sa svim dotadanjim opažanjima. Teškoća se javlja oko računanja položaja planeta što je služilo za određivanje geografske dužine kada još hronometar nije bio usavršen. Posmatranja danskog astronoma, Tiha Braha, pola veka posle Kopernikove smrti, postavila su prosto pravilo za iznalaženje položaja planeta. Njihovo kretanje je lako proračunati, ako uzmemo da se Zemlja i druge planete Sunčevog sistema kreću po e l i p t i č n o j putanji oko Sunca.

Elipsa je slika koja potseća na presek unutrašnje gume kod futbalske lopte. Kad je guma spljoštena, presek pretstavljaju dve prave pritisnute tesno jedna uz drugu. Kad je guma

potpuno napumpana, presek ustvari postaje krug. Matematička definicija elipse može se dobiti na osnovu metoda na koji se elipsa crta. Metoda pokazana na sl. 145 mnogo liči na crtanje na pesku sa sl. 18. Mesto jednog utvrđenog klina potrebna su dva, a mesto jednog komada konopca potrebna je omča kao



SL. 145. — ELIPSA

gore na sl. 145 (a) i (b). Ta slika pokazuje kako treba crtati elipsu na hartiji sa dve čiode i omčom od konca, mesto konopca i klinaca. Dve tačke gde su zabodeni klinci (ili čiode) zovu se elipsine ž i ž e, a obeležene su sa F i F' na donjoj slici (sl. 145). One su na razdaljini jedna od druge za $2c$ jedinica dužine. Sredina toga rastojanja, obeležena sa O, (na rastojanju c od žiža) zove se središte (centar). Ako su žiže tako blizu jedna drugoj, da se više ne mogu razlikovati, kriva se ne može razlikovati od kruga. Ako su tako daleko jedna od druge da konac biva čvrsto zategnut između njih, onda se elipsa u stvari spljoštila u pravu liniju. Pošto je omča stalne dužine, zbir rastojanja a i b izvesne tačke do žižâ uvek je isti. Poluzbir tih rastojanja je d na slici, tj.

$$a + b = 2d$$

Elipsa je simetrična prema dva nejednaka prečnika. Jedan se zove m a n j a o s o v i n a, i stoji pod pravim uglom na pravoj koja prolazi kroz žiže. Ona spaja naspramne tačke u kojima je $a = b = d$. Ako je m polovina manje osovine sl. 145 (c) pokazuje vam da je, prema osmom dokazu,

$$m^2 = d^2 - c^2 \ldots (1)$$

Druga, zvana v e l i k a o s o v i n a, jeste produženje prave linije koja spaja žiže. Videćete sa slike na kojoj je polovina veće osovine obeležena sa M, da je

$$M = a + c$$

$$M = b - c, \text{ a to je dalje}$$

$$2M = a + b = 2d$$

$$M = d \ldots (2)$$

Ako je veća osovina približno jednaka sa manjom osovinom, kao dva jednaka kružna prečnika, elipsa se ispupčuje u krug. Tada je $c = O$. Dve žiže F i F' su onda tako blizu jedna drugoj, da se poklapaju sa središtem O. Rastojanje od središta do žiže obeležavamo sa c, a sa d obeležavamo rastojanje duž velike osovine od središta do obima. Odnos c prema d zovemo elipsin *ekscentricitet*. To obeležavamo:

$$e = \frac{c}{d}. \text{ Odatle je}$$

$$c = de$$

Krug je elipsa čiji je ekscentricitet 0, pošto je kod njega $c = 0$. Sunce se ne nalazi u središtu eliptičnih putanja Zemlje i planeta. Ono se nalazi u jednoj od žiža. Mi možemo izračunati relativni položaj Zemlje ili planeta u odnosu na Sunce, ako znamo jednačinu elipse. U VI glavi govorili smo o poluprečniku Mesečeve putanje kao da je ona krug. To je dosta dobro kao prva približna vrednost, pošto je kao što možete sad videti, ekscentricitet mali. Ako uzmemo da je najveće (b) rastojanje od Zemlje do Meseca 251947 milja, a najmanje (a) 225719 milja, polovina velike osovine biće $M = \frac{1}{2}(a + b)$ što iznosi 238833 milje. Pošto je $a + c = M = b - c$, a $c = de = Me$, izlazi da je

$$e = (b - a) : 2M$$

Zato je ekscentričnost Mesečeve putanje

$$\frac{1}{2}(251947 - 225719) : 238833 = 0{,}055.$$

Da bismo dobili jednačinu elipse, nalazimo da je bolje da jednačinu (1) napišemo ponovo u ovom obliku

$$m^2 = d^2 - (de)^2 = d^2 (1 - e^2) = M^2 (1 - e^2) \ldots (3)$$

Odatle dobijamo za m (polovina male osovine Mesečeve putanje)

$$238833 \sqrt{1 - (0{,}055)^2} = 238470 \text{ milja}.$$

Ako nalazite da je prilično zapleten ovaj način dobijanja jednačinine elipse, pročitajte najpre dodatak 2. Na sl. 146 videćete ovo: ako je P izvesna tačka na obimu elipse, njena vertikalna visina je y, a njeno horizontalno rastojanje od središta x, onda iz dva pravougla trougla čije su hipotenuze duži što spajaju P sa dvema žižama, po dokazu 8, imamo ovo:

$$a^2 = y^2 + (x + c)^2 = y^2 + x^2 + 2cx + c^2 \ldots (4)$$

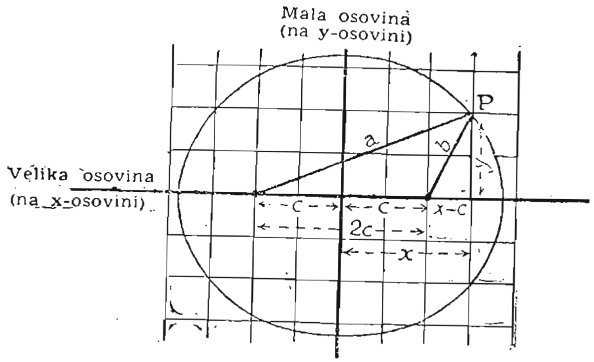
$$b^2 = y^2 + (x - c)^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2 \ldots (5)$$

Ako saberemo levu stranu jednačine (4) s levom stranom jednačine (5), a desnu stranu jednačine (4) sa desnom stranom jednačine (5) dobivamo:

$$a^2 + b^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2c^2 = 2y^2 + 2x^2 + 2d^2 e^2 \ldots (6)$$

Oduzimamo (5) od (4)

$$a^2 - b^2 = 4cx = 4dex$$



SL. 146. — JEDNAČINA ELIPSE

$$\frac{x^2}{M^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$$

Prema dokazu 4 imaćemo:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$$
$$(a+b)\,(a-b) = 4dex$$
$$2d\,(a-b) = 4dex$$
$$a-b = 2ex$$
$$(a-b)^2 = 4e^2x^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 4e^2x^2 \ldots \quad (7)$$

Oduzmite (7) od (6):

$$2ab = 2y^2 + 2x^2 - 4e^2x^2 + 2d^2e^2 \ldots \quad (8)$$

Saberite (8) i (6):

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4y^2 + 4x^2 - 4e^2x^2 + 4d^2e^2$$
$$(a+b)^2 = 4y^2 + 4x^2\,(1-e^2) + 4d^2e^2$$

Ali mi već imamo:

$$(a+b)^2 = (2d)^2$$

To je dalje

$$4d^2 = 4y^2 + 4x^2\,(1-e^2) + 4d^2e^2$$
$$d^2 = y^2 + x^2\,(1-e^2) + d^2e^2$$
$$d^2 - d^2e^2 = y^2 + x^2\,(1-e^2)$$
$$1 = \frac{y^2}{d^2\,(1-e^2)} + \frac{x^2}{d^2}$$

Iz (2) i (3) imamo

$$1 = \frac{\nu^2}{m^2} + \frac{x^2}{M^2}$$

Ovo je Kartezijeva jednačina elipse. Ona nam kazuje kako da nađemo rastojanje y paralelno sa manjom osovinom ($2m$) neke tačke čije horizontalno rastojanje duž veće osovine ($2M$) iznosi x. Da biste mogli da se poslužite ovom jednačinom, potrebno vam je da znate vrednost za m i M za svaku posebnu elipsu. U slučaju Mesečeve putanje

$$m = 238470 \text{ milja}$$
$$M = 238833 \text{ milje.}$$

Kad se uzme centar na rastojanju $c = Me$ ($= 238833 \cdot 0{,}055$ milja) i sa Zemljom kao žižom, jednačina Mesečeve putanje biće zbog toga:

$$1 = \frac{y^2}{(238470)^2} + \frac{x^2}{(238833)^2}$$

ili

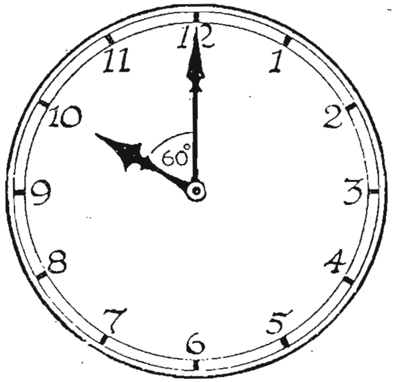
$$y = \frac{238470}{238833}\sqrt{238833^2 - x^2}$$

Po jednoj metodi, koja bi bila isuviše opširna da je ovde izložimo, srazmerno je lako nacrtati krivu liniju koja pokazuje relativna rastojanja Zemlje ili koje planete od Sunca (uzevši za jedinicu mere rastojanje od Zemlje do Sunca) iz neprekidnih posmatranja njihovih rektascenzija i deklinacija u toku jednog dugog perioda. Kad to budete uradili, možete proveriti da li je slika putanje neke planete elipsa sa Suncem u njenoj žiži. To ćete uraditi tako, što ćete najpre izmeriti njenu najveću širinu; to će biti velika osovina, ako je to elipsa. Širina te slike merena po pravoj upravnoj na njenu veliku osovinu i povučena kroz njenu sredinu biće mala osovina. Pošto znate jednačinu koja vezuje x i y tako da pretstavlja elipsu čije su osovine poznate, možete sad izračunavati uzastopne vrednosti ipsilona za različite vrednosti iksa i obeležavati tačke koje odgovaraju svakome paru koordinata. Ako je putanja zbilja elipsa, ove će tačke ležati veoma blizu linije nacrtane na osnovu neposrednih posmatranja. Kepler je morao da isproba veoma veliki broj slika, dok je našao da je elipsa najpodesnija. Time je sahranio Platonovo učenje po kome se nebeska tela kreću po krugovima pošto je krug najsavršenija slika.

OSLOBOĐENJE JEDNE KLASE OPERATORA. — U statičkim geometriskim slikama Euklidovim susrećemo samo uglove koji nisu veći od četiri prava ugla (360^0). Kad smo ono uveli *radijane*, ili kolarevu meru za uglove, možda ste zapazili da smo načinili mesta za uglove proizvoljne veličine. Kad se počela upotrebljavati geometrija Reformacije, ljudi su se prisno upoznali sa dva instrumenta koji živo prikazuju našoj mašti takve nove mogućnosti. Jedan instrument je kompas. Drugi je bio časovnik.

Sl. 147 pomoći će vam da vidite kako su ta dva pronalaska oslobodili ugao od ludačke košulje u koju su ga bile čvrsto vezale bezvremenske statičke figure Euklidove geometrije. Najpre pogledajte na časovnik. Sad je deset časova, ili modernim jezikom 22^h00^m. Koliki je ugao A stepeni ili a radijana između skazaljki? Vaš prvi utisak je da je od 60^0 ili $\frac{1}{3}\pi$. Pretpostavimo sad da smo ukočili malu skazaljku. Posle jednog časa skazaljke će biti opet u tačno istom položaju, samo što se duža skazaljka već obrnula za 360^0. I tako je sad ugao $A + 360^0$, ili u radijanima, $a + 2\pi$. Ako pričekamo još jedan čas, zev između dveju skazaljki je opet 60^0 u geometriji bezvremenskih slika. Ali kad ubacimo vreme u geometriju, ugao je $2 \cdot 360^0 + A$ ili $4\pi + a$ radijana. Posle još jednog časa skazaljka će biti u istome položaju, samo što se duža skazaljka već opet obrnula za drugih 2π radijana, ili za drugih 360^0. Ugao je sad $3 \cdot 360^0 + A$, ili $6\pi + a$ u radijanima. I tako vidite da je statički ugao od $\frac{2}{3}$ pravoga ugla $\left(60^0 \text{ ili } \frac{\pi}{3} \text{ radijana}\right)$ iz geometrije starog doba jednak sa $\pm\ 60^0$ ili $n \cdot 360^0 \pm 60^0$ ili $\left(n \cdot 2\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$ radijana, gde n iznosi 0, 1 2, 3 itd. Nije to cela priča. Ako za ceo sat vratimo

minutnu veliku skazaljku, a malu časovnu skazaljku držimo i dalje ukočenu, oduzeli smo 360^0, četiri prava ugla, ili 2π radijana, a što se tiče Euklida, vratili smo se na isti ugao. I tako je $A - 360^0$ ili $a - 2\pi$ ista stvar kao i A ili a u Euklidovoj



Sl. 147.

geometriji. Slično tome $A - n \cdot 360^0$ i $a - 2n\pi$, gde je n izvestan celi broj, izgledaju sasvim isto kad je reč o Euklidovoj geometriji. Zato je

$$A \text{ (u Euklidovoj geometriji)} = A - n \cdot 360^0 \text{ ili } n \cdot 360^0 - A = -A$$

i

$$2n\pi - a = -a.$$

Naravno, nije nam potrebno kočiti časovnu skazaljku da bismo ukazali kako ugao ima nekoliko alibi[1]) kad ga upotrebimo da opiše kretanje žbice na točku koji se obrće, mesto da ga upotrebimo da opiše nagib stuba koji mi hoćemo (ili nećemo) da ispravimo. Čak i kad ne ukočimo časovnu skazaljku, isti euklidski ugao se vidi na cifarniku u istom položaju svakih dvanaest časova, ili dva puta dnevno. Čim ubacimo vreme u geometriju imamo da se upitamo koliko puta se neka ivica obrnula oko neke osovine pre nego što je došla u položaj u kome je slučajno sad kad je mi gledamo. Ako obeležite jednu tačku pravo na severoistok, tj. 45^0 ili $\frac{\pi}{4}$ radijana od severnog

[1]) Sudski dokaz o otsutnosti u vreme izvršenja krivičnog dela — Red.

pravca, pa postavite kompas, možete obrtati kompas za 360° ili 2π radijana koliko god puta hoćete, u smislu sahatne skazaljke ili obrnuto, uvek ćete naći isti euklidski ugao između pokazivača i severoistočne oznake na skali.

Dosad sve ide lepo. Sad dolazi jedan nov rezultat, ako hoćete da proučite šta to znači da Euklidov ugao ima nekoliko »alibi«. Rekli smo

$$\text{Grčko } A = \text{Moderno } (n \cdot 360^0 + A)$$

i

$$-A = n \cdot 360^0 - A$$

ili

$$a = 2n\pi + a$$

i

$$-a = 2n\pi - a$$

A što ne bismo išli korak dalje, pa rekli

$$\text{tang } A = \text{tang } (n \cdot 360^0 + A)$$

ili

$$\text{tang } a = \text{tang } (2n\pi + a)?$$

U Euklidovoj geometriji definišemo sinus, kosinus ili tangens nekog ugla kao odnos dveju strana pravouglog trougla. Pošto nijedan ugao pravouglog trougla nacrtanog na ravnoj površini ne može da bude veći od 90°, Euklidova geometrija može samo da nam pokaže kako da se služimo sinusom, kosinusom ili tangensom za merenje uglova koji ne premašuju 90°. Ipak smo videli i to (u VIII glavi) da se pri računima mogu smatrati sin $(180^0 - A)$ i cos $(180^0 - A)$ kao da su to sin A odnosno — cos A. Tako je sin $150^0 = \frac{1}{2}$ ako je sin $30^0 = \frac{1}{2}$; a ako je cos $60^0 = \frac{1}{2}$, onda je cos $120^0 = -\frac{1}{2}$. Euklidova geometrija je promašila da nam dâ sliku sa koje bismo videli šta mi to upravo radimo kad izvodimo račune po ovim pravilima. To dolazi otuda što je ona ograničena u izvesnom smislu, što smo već zapazili. U Euklidovoj bezvremenskoj geometriji ugao je jedna utvrđena količina, unapred gotova. U geometriji Reformacije ugao ima svoju istoriju. On postaje kretanjem jedne prave oko osovine x. Smisao kretanja pretstavljen je negativnim znakom ako je kretanje u smislu kretanja sahatne skazaljke, a suprotnim znakom, ako je kretanje u

suprotnom smislu kretanja sahatne skazaljke. Već smo videli da nema ničega besmislenog u izrazu sin 150°, ako definišemo sinus kao odnos između tetive i luka. Isto tako nema ničeg besmislenog ako kažemo da se ugao od 210° tj. 180° + 30°, ili ugao od 150° tj. 180° — 30°, može meriti tangensnom metodom, ako se vratimo na prvobitnu definiciju tangensa po kojoj je on *gradijent* (nagib).

Na sl. 148 da bi bilo jasnije, povučena je pruga sa gradijentom 1 prema 2 i ona prolazi kroz tunel. Iks osovina duž koje se meri horizontalno rastojanje izvesne tačke na njoj seče y osovinu duž koje se meri vertikalna visina te tačke na pruzi kroz tunel. Tako položaj tunela odgovara u geometriji Reformacije koordinatnom početku od koga će se vršiti merenje. Na sl. 148 videćete da isto tako imamo prava da kažemo:

(a) Mereći desno od tunela pruga se naginje prema x osovini s gradijentom:

$$\frac{+y}{+x}$$

(b) Mereći levo od tunela pruga se naginje prema x osovini pod uglom 180° + A sa gradijentom:

$$\frac{-y}{-x}$$

Ali ova dva odnosa su jednaka:

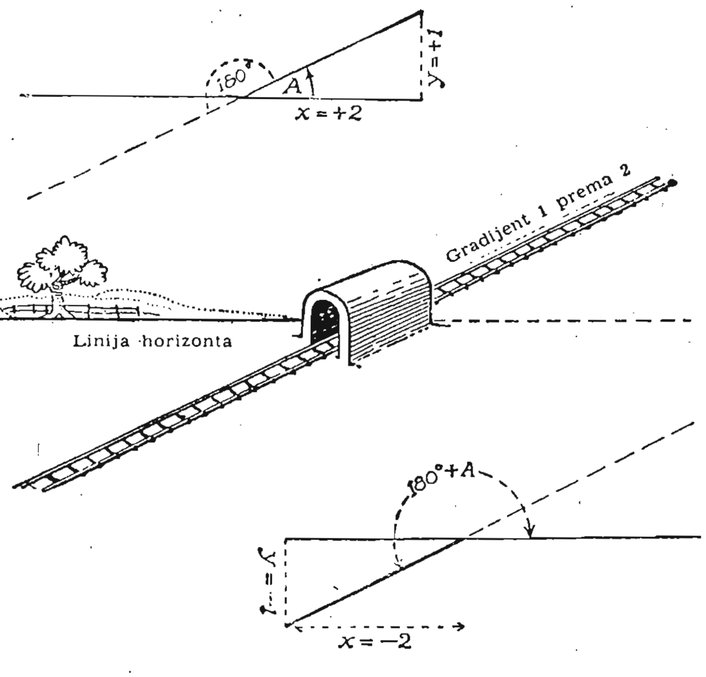
$$\frac{-y}{-x} = \frac{+y}{+x}$$

Zato ako uzmemo tangens ugla A da obeleži nagib pruge, kartezijevska geometrija može da ga pretstavi odnosom x i y koordinata izvesne tačke desno ili levo od početka. Otuda je

$$\text{tang } A = \text{tang } (180^0 + A)$$

Prilično je korisno proširiti na ovaj način našu definiciju tangensa. Tangens Euklidovog trougla ne pravi razliku između gradijenta jedne prave koja pada nazatke pod uglom A na osovinu, kao ona pruga sa sl. 149, i prave linije koja pod uglom A pada napred, kao onaj kolosek na slici 148. U Kartezijevoj geometriji pruga sa sl. 149 pada pod uglom od $(180^0 - A)$ na x-osovinu iznad tunela, a pod uglom od $(360^0 - A)$ ispod tunela. Njen gradijent nije $\frac{y}{x}$, već $(+y):(-x)$, ili što je jedno isto, $(-y):(+x)$. I tako je u geometriji Reformacije

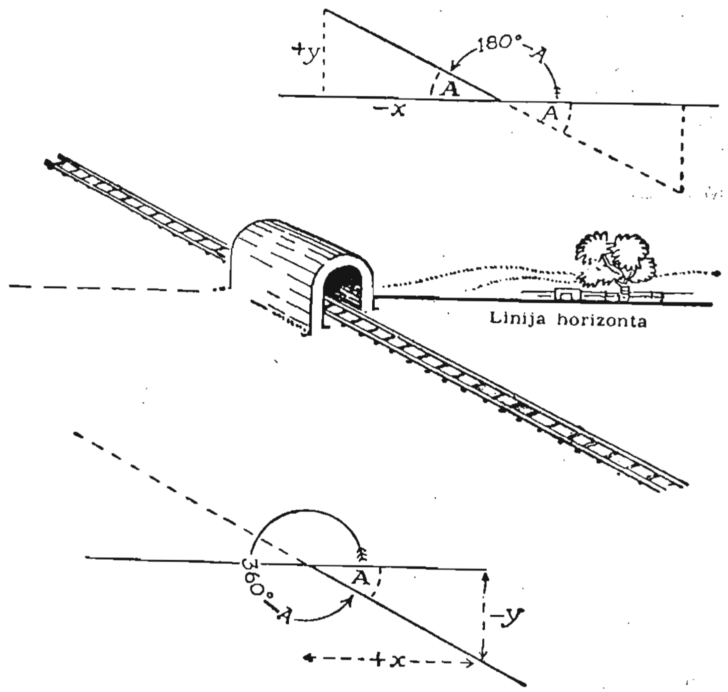
$$\text{t a n g }(180^0 - A) \text{ ili t a n g }(360^0 - A) = -\text{ t a n g } A$$



Sl. 148.

Zato, kad je t a n g $45^0 = 1$, onda je t a n g $135^0 =$ t a n g $(180^0 - 45^0) = -1$; a t a n g $225^0 =$ t a n g $(180^0 + 45^0) = +1$. Brojne vrednosti tangensa uglova ponavljaju se, dakle, u svakom kvadrantu (S. I., S. Z., J. Z., J. I.) ukoliko se kompas i predznaci menjaju i to:

S. I. —	I kvadrant		$\frac{y}{x}$
S. Z. —	II	„	$\frac{y}{-x}$
J. Z. —	III	„	$\frac{-y}{-x}$
J. I. —	IV	„	$\frac{-y}{x}$



Sl. 149.

Pošto na cifarniku časovnika možemo praviti uglove kakve bilo veličine, možemo proširiti tablicu tangensa, ako stavimo

$$\text{t a n g } A = \text{t a n g } (n \cdot 180^0 + A)$$

odnosno

$$\text{t a n g } a = \text{t a n g } (n\pi + a)$$

ili

$$\mathrm{tang}\, A = -\,\mathrm{tang}\,(n\, 180^0 - A)$$

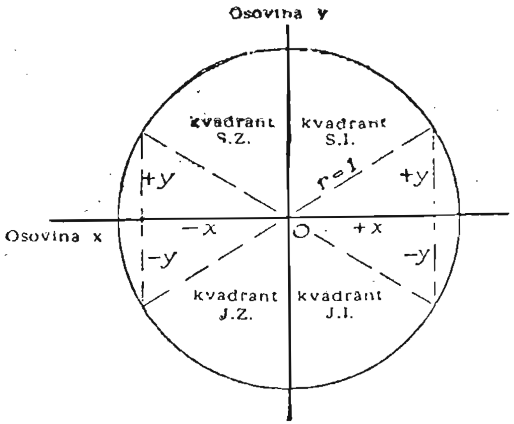
odnosno

$$\mathrm{tang}\, a = -\,\mathrm{tang}\,(n\pi - a)$$

Kad već proširujemo svoju definiciju tangensa, nema nikakva razloga da tu povlasticu ne damo i sinusu i kosinusu. Na krugu čiji je poluprečnik jedinica, sin A je y koordinata a cos a je x koordinata (vidi VIII glavu, slika 129) tačke gde poluprečnik seče krug (sl. 150). Zato se brojne vrednosti sinusa i kosinusa ponavljaju, a znaci im se menjaju po ovome pravilu:

Kvadrant	Sinus	Kosinus	Tangens
I (S. I.)	+	+	+
II (S. Z.)	+	—	—
III (J. Z.)	—	—	+
IV (J. I.)	—	+	—

Možemo proširiti svoje tablice sinusa i kosinusa, ako



SL. 150. — PROŠIRIVANJE TABLICA TRIGONOMETRISKIH FUNKCIJA

Uglovi $180° - A$, $540° - A$, itd.
$\sin\,(180° - A) = +\,y$
$\cos\,(180° - A) = -\,x$

Uglovi $180° + A$, $540° + A$, itd.
$\sin\,(540° + A) = -\,y$
$\cos\,(540° + A) = -\,x$

Uglovi: A, $A + 360°$ itd.
$\sin\,(A + 360°) = +\,y$
$\cos\,(A + 360°) = +\,x$

Uglovi: $(-A)$, $360° - A$, itd.
$\sin\,(-A) = -\,y$
$\cos\,(-A) = +\,x$
$\sin\,(360° - A) = -\,y$
$\cos\,(360° - A) = +\,x$

pođemo od jednačina

$$\sin A = \sin\,(180^0 - A) = -\sin\,(180^0 + A)$$

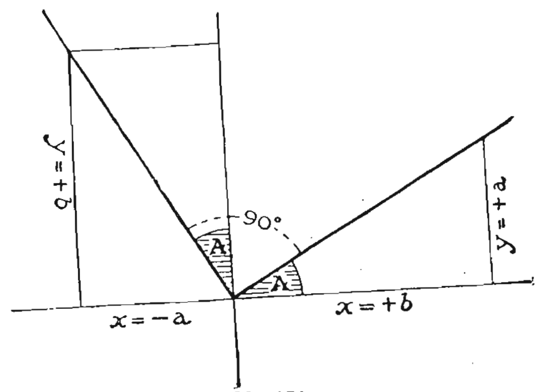
$$\cos A = -\cos\,(180^0 \pm A.)$$

Sa sl. 151 možemo zaključiti i to, da se tablice mogu proširiti primenom ovih obrazaca

$$\sin\,(90^0 + A) = +\cos A$$

$$\mathrm{tang}(90^0 + A) = \frac{-1}{\mathrm{tang}\, A}$$

$$\cos\, 90^0 + A) = -\sin A$$



Sl. 151

Ako je duž koja se obrće jednaka jedinici, biće:

$$\sin\,(90° + A) = +\,b = +\cos A \text{ i}$$

$$\cos\,(90° + A) = -\,a = -\sin A$$

$$\mathrm{tang}\, A = \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{tang}\,(90 + A) = \frac{+b}{-a} = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{\frac{a}{b}} = -\frac{1}{\mathrm{tang}\, A} = -\,\mathrm{cotg}\, A$$

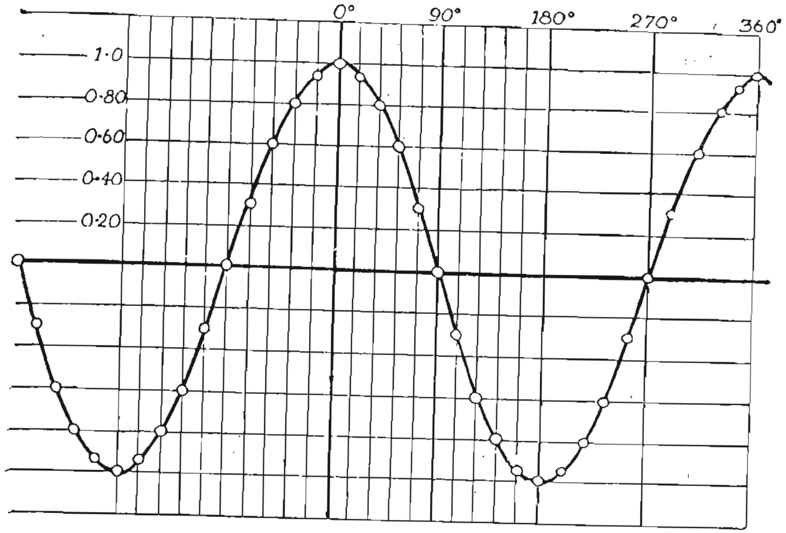
Sad više nema smetnji da odemo i korak dalje, pa da vidimo da ugao $(360^0 - A)$ pretstavlja ugao A meren ispod apscisne osovine i da ima isti položaj kao i ugao $(-A)$. Tako je

$$\sin\,(360^0 - A) = -\sin A$$

$$\cos\,(360^0 - A) = \cos A$$

$$\mathrm{tang}\,(360^0 - A) = -\,\mathrm{tang}\, A$$

Vi ćete sad s pravom upitati čemu služi ovo proširivanje naših tablica sinusa, kosinusa i tangensa preko 90^0. Čim pogledate na sl. 152 videćete odgovor. Slike bezvremenske geometrije, onakve kakve su, podesne su samo da pretstave način na koji se veličina nečega povećava ili smanjuje do izvesne mere.



SL. 152. — GRAFIK KRIVE
$y = \cos\, x$

Bila je potrebna velika oštroumnost da se one osposobe da pretstavljaju veoma veliku klasu količina koje se stalno vraćaju na istu vrednost. Ova klasa količina je vrlo velika i vrlo značajna. Merenje uzdrhtale žice na violini, ili rašćenje i opadanje broja nezaposlenih u toku cikličkih kriza u kapitalističkoj privredi pretstavljaju dva poznata primera u kojima se količina y menja periodično s vremenom, koje je izraženo podeocima na apscisnoj osovini.

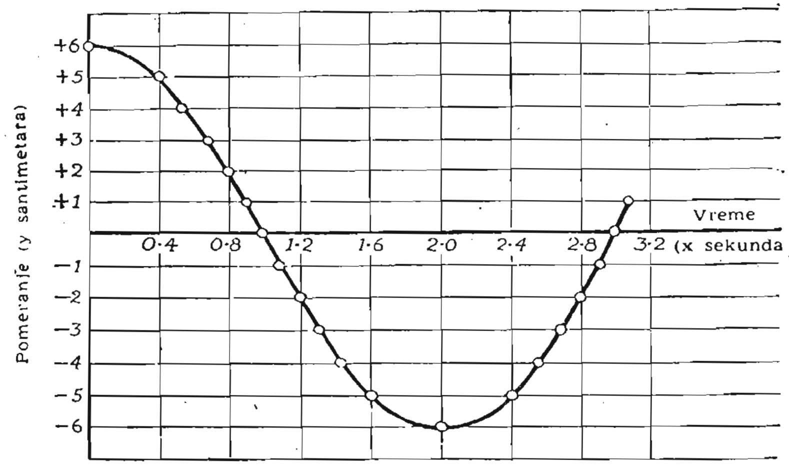
Kriva linija na sl. 152 pretstavlja jednačinu

$$y = \cos\, x$$

Kriva koja pretstavlja jednačinu $y = \sin\, x$ je potpuno istovetna, jedino što moramo početi kod koordinatnog počet-

ka ($x = 0^0$) na pola puta između najniže tačke talasne dolje i najviše tačke talasnog brega, mesto da počnemo od vrha talasnog brega. Nacrtajte za sebe krivu jednačine

$$y = \sin\, x$$



Sl. 153

Ako nacrtate krivu $y = 2\cos\frac{x}{2}$ ili $y = \frac{1}{2}\cos 2x$, otkrićete da opšti tip jednačine daje krivu kao što je i ona ranija, sem što, kad promenimo mesta brojevima 2 i $\frac{1}{2}$, kriva postaje pljosnata odnosno strmija. Još opštiji oblici su

$$y = a\cos bx$$

$$y = a\sin bx$$

Ove jednačine su roditelji matematike talasnog kretanja, što danas pretstavlja najvažniju primenu matematike na stvarni svet. Otkriće ovako jednostavnog načina za pretstavljanje talasastog ili periodičnog kretanja omogućilo je da se objasne merenja spektra i pražnjenje elektriciteta u gasovima. Bez toga ne bismo umeli da izvršimo račune koji se odnose na naizmenične struje.

Mi ćemo se vratiti na raspravljanje o »talasastom kretanju«. Ovde se morate zadovoljiti jednim letimičnim pogledom na nešto što vas je možda često začuđavalo. Čuli ste ili čitali u popularnim naučnim knjigama da se svetlost prostire u talasima; »talasne dužine« su nešto svakidašnje u doba radija. Zato ste se morali upitati, na šta li to fizičari misle kad govore o talasima. Naredna slika (sl. 153) pruža vam odgovor na to pitanje. To je grafik tablice date na početku ove glave da pokaže upotrebu znakova + i — za opisivanje položaja klatna u raznim trenucima vremena. Duž ordinatne osovine beležimo pomeranje klatna, a duž apscisne osovine vreme koje je proteklo od trenutka kad su početa posmatranja. Kriva linija klatna veoma liči na krivu čija je opšta jednačina

$$y = a \cos bx$$

Ako načinite tablicu i na crtežu obeležite tačke, videćete da kriva sa sl. 153 ide vrlo blizu krive

$$y = 6 \sin (90x)^0$$

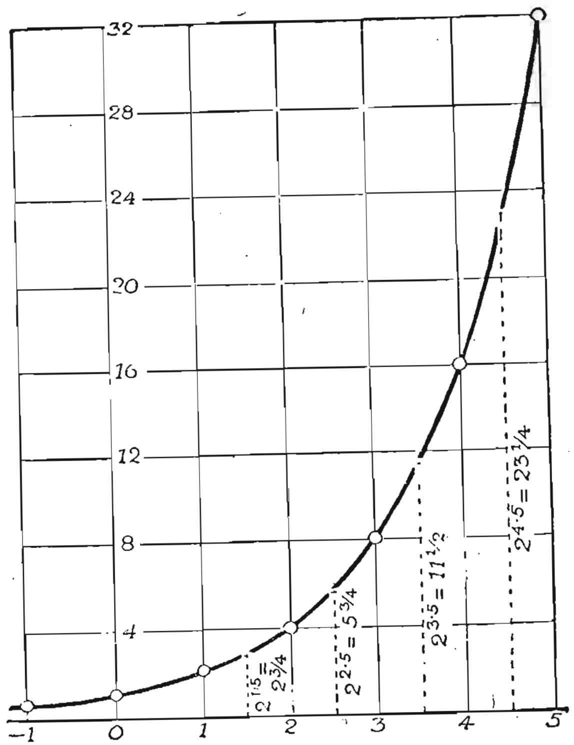
Zato ovu poslednju jednačinu možemo upotrebiti kao približnu formulu za izračunavanje položaja klatna u izvesnom trenutku. Sve što fizičar podrazumeva kad govori o talasima svetlosti ili zvuka ili elektriciteta jeste to da on računa pomoću jednačina koje se mogu pretstaviti talasastim krivim linijama poput one na sl. 152. I tako ste rasterali maglu tajanstvenosti koja je obavijala ove stvari u modernome jeziku, time što ste oslobodili operatore »sin« i »cos« od Euklidovih slika na kojima su oni mogli da rade samo sa uglovima između 0^0 i 90^0, ili, 0^r i $\left(\frac{1}{2}\pi\right)^r$.[1]

Postoji još jedna klasa operatora kojima je u geometriji Reformacije pružena prilika da budu korisni. Računaljka podseća na rasnu diskriminaciju u kolonijama. Ona dopušta operatoru n u rečenici a^n da radi s celim brojevima, ali mu postavlja — kao crncu — barijeru i zabranjuje mu da izvodi »finiji posao« sa razlomcima. Sl. 154 pokazuje da x može da svršava valjan posao kao razlomljen broj na krivoj čija je jednačina

$$y = 2^x$$

[1]) Radijana. — Red.

Vi već znate šta znači 2^x kad je x ceo broj, negativan ili pozitivan. Ni Euklidove slike, ni računaljka, ne mogu vam dati model na kome bi vam x pretstavljalo razlomak. Kad vam se kaže da x može biti razlomak, vi se čak osećate i nelagodno,



SL. 154. — KRIVA ČIJA JE JEDNAČINA

$$y = 2^x$$

kao oni u Južnoafričkoj Uniji, koji kažu da urođenici ne mogu naučiti da čitaju i da pišu. Oni to govore uprkos tome što bi mogli videti studente iz urođeničkih plemena Ksosa i Zulu kako rešavaju zadatke iz integralnog računa, samo kad bi bili toliko predostrožni da posete Fot Her Kolidž u Uiskuju. Da li urođenik može da nauči ono što mi možemo to bi se najbolje videlo onda kad bi ga učili onome čemu bi ga učio južnoafrički laburistički pokret, kad bi on bio zaista napredna stranka. Geometrija Reformacije čini za operator x u izrazu 2^x ono što bi jedna istinski napredna partija činila za urođenike Bantu. Ona mu pruža mogućnost da radi visoko stručan posao.

Na sl. 154 obeležili smo tačkama sve vrednosti krive $y = 2^x$ između $x = -1$ i $x = 5$, kad je x ceo broj, pa smo te tačke spojili da načine krivu liniju. Spajajući ih da načine krivu, mi smo iksu pružili mogućnost da »proveri sumnju«, da vidi može li da obavi koristan posao i kad nije ceo broj. U VI glavi, dali smo Arhimedovo pravilo

$$2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

Jasno je da to važi za cele brojeve, napr.

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^5$$

$$4 \cdot 8 = 32$$

Ako x možemo navesti da radi koristan posao i kad nije ceo broj, onda imamo:

$$2^{1,5} \cdot 2^{2,5} = 2^4 = 16$$

Ukoliko tačno možemo da pročitamo vrednosti za y koje odgovaraju vrednostima $x = 1,5$ i $x = 2,5$ na pokazanoj slici nalazimo da je

$$y_{1,5} = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

$$y_{2,5} = 5\frac{3}{4} = \frac{23}{4}$$ I tako je:

$$y_{1,5} \cdot y_{2,5} = \frac{253}{16} = 15,8$$

To je tako blizu 16 koliko nam je najviše mogao dopustiti grub crtež, jer je razlika manja od $1\frac{1}{2}$ procenta. Na slici možete proveriti ovo

	Merena (približna) vrednost		Teoriska vrednost
$2^{1,5} \cdot 2^{3,5}$	$\frac{11}{4} \cdot \frac{23}{2}$	31,6	32
$2^{1,5} \cdot 2^{4,5}$	$\frac{11}{4} \cdot \frac{93}{4}$	63,9	64
$2^{2,5} \cdot 2^{3,5}$	$\frac{23}{4} \cdot \frac{23}{2}$	66,1	64
$2^{2,5} \cdot 2^{4,5}$	$\frac{23}{4} \cdot \frac{93}{4}$	134,0	128
$2^{3,5} \cdot 2^{4,5}$	$\frac{23}{2} \cdot \frac{93}{4}$	267,0	256

Grafik sa sl. 154 bio je izrađen na veoma jevtinoj hartiji s kvadratićima i zato merene dužine ne mogu biti tačne za mnogo manje od 5 od sto. Kad su pomnožene mogu da budu netačne do blizu 10 od sto. Sami ćete verovatno postići mnogo bolje rezultate. Ovo što smo ovde izneli dovoljno je da nam pokaže da je x u stanju, kao što s pravom možemo očekivati, isto tako dobro da obavlja posao kad mu se odobri da radi »tanani« posao sa razlomcima u industriji koju pretstavlja 2^x. U narednoj glavi videćemo da je oslobođenje operatora x od ograničenja da radi samo sa celim brojevima otvorilo put ka najvećem pronalasku za uštedu vremena koji se ikad pojavio u istoriji računanja. Operacija a^x, kao i s i n x, ili c o s x dobila je veoma važnu ulogu u merenju naizmeničnih struja, kad smo dopustili iksu da radi poslove koje ranije nije mogao da radi zbog okova u koje ga je bio okovao Euklid i zbog »diskriminacije« na računaljci.

ZNAČENJE GLAGOLA f ( ). — Docnije će vam biti korisno ako ovde prekinemo priču i unesemo jednu novu stvarčicu u gramatiku dimenzija. Znate vrlo dobro da glagol »to do«[1]) u engleskom može da stoji gotovo mesto svakog glagola.

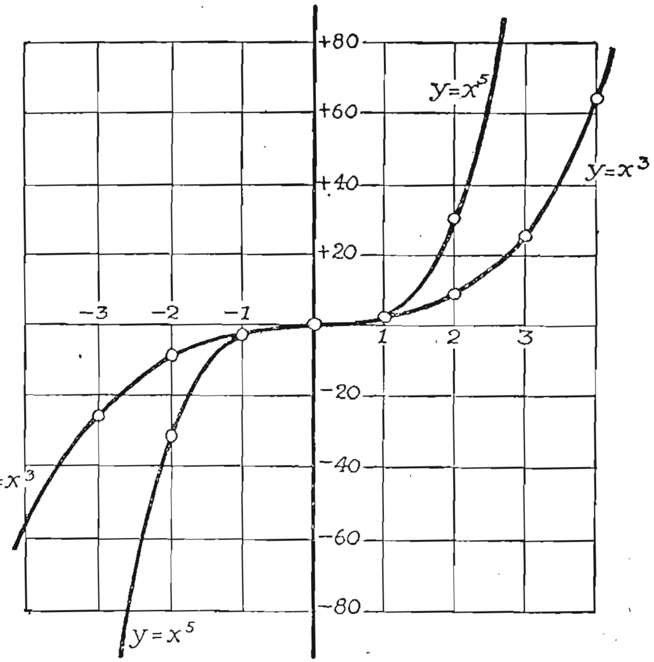
Opšti glagol koji tome odgovara u matematici i stoji mesto jednog operatora piše se $f(\ )$ ili $\varphi(\ )$. To znači »Potražite odgovarajuću vrednost za ... u nekoj tablici«. Rečenica

$$y = f(x)$$

[1]) Činiti, raditi. — P r e v.

dakle, znači »Potraži odgovarajuću vrednost za y u tablici koja daje vrednosti za x«. To znači da je x stubac »polaska« koji odgovara ipsilonu — u stupcu »dolaska« u redu vožnje koji pravimo kad crtamo neku krivu liniju u koordinatnom sistemu.

U gramatici svakodnevnog govora učimo neka pravila koja važe za sve glagole, ili gotovo za sve. Postoje izvesna pravila



SL. 155. — GRAFIK KRIVIH $y = x^3$ i $y = x^5$

koja važe za sve operatore u matematici, ili za velike porodice operatora. Jedno pravilo koje važi za sve blage krive linije koje nemaju ni jedan oštar savijutak, veoma je važno u vezi sa pronalaskom redova koji se guše za sin x, cos x, 2^x itd.

To pravilo nije teško razumeti, ako se najpre dobro upoznate, crtajući, sa oblicima krivih čije su jednačine:

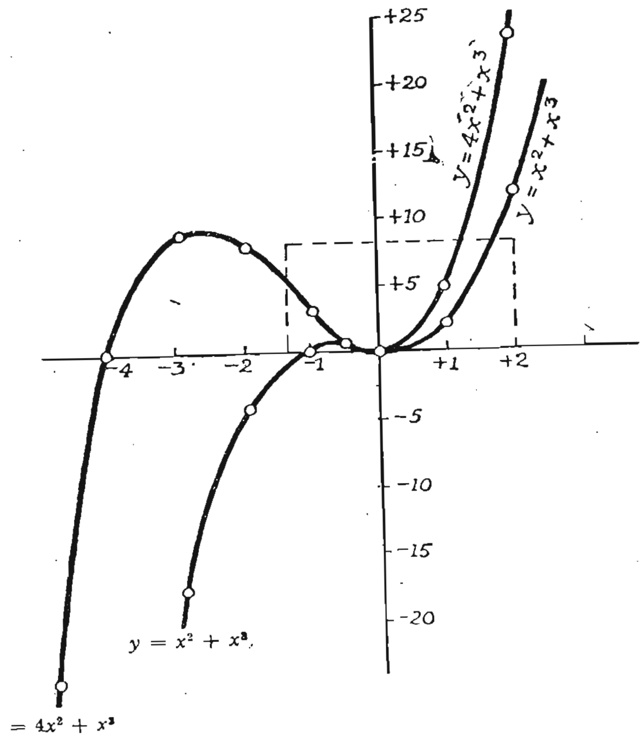
(a) $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$, itd.

(b) $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, *itd.*

Mi smo već proučili grafik jednačine

$$y = ax^2$$

Oblik krivih koje odgovaraju jednačinama $y = x^4$, $y = x^6$, itd., sličan je sa oblikom gornje krive, sem što one postaju sve strmije. Prema pravilu o predznacima $(-x)$ $(-x)$ $(-x)\ldots$



Sl. 156.

$(-x)$ do m članova iznosi x^m, kad je m paran broj. Zato kriva linija jednačine $y = x^m$, kad je m parno, uvek liči na latinsko slovo U pošto je y pozitivno i za pozitivno i za negativno x. Krive linije jednačine $y = x^m$, kad je m neparan broj, prikazane su na slici 155. One uvek prolaze kroz koordinantni početak i idu naniže levo i naviše desno, pošto $(-x)$ $(-x)$ $(-x)\ldots$ $(-x)$ do m članova ako je m neparno, iznosi $(-x^m)$. Zato je

y negativno kad je x negativno. Krive linije jednačine $y = -x^3$, $y = -x^5$, itd., istog su oblika. One prolaze kroz početak i idu naniže desno i naviše levo. Da bismo razlikovali krive linije koje pretstavljaju stepene sa parnim i neparnim izložiocima možemo prve napisati u obliku $y = x^{2n}$, a druge u obliku $y = x^{2n+1}$. Ako je $n = 1$, biće $x^{2n} = x^2$, a $x^{2n+1} = x^3$. Ako je $n = 2$ biće $x^{2n} = x^4$, a $x^{2n+1} = x^5$. Naredne dve slike pokazuju krive linije čije jednačine pripadaju ovoj porodici:

$$y = ax^{2n} + bx^{2n+1}$$

Zapazićete da za velike vrednosti iksa na sl. 156 (uporedi sa sl. 155) kriva linija postaje slična onoj koja pretstavlja jednačinu $y = bx^m$, kad je m neparno, tj.

$$y = bx^{2n+1}$$

Taman tako kao što smo mogli i očekivati. Otuda, kad je $x = 2$, x^3 je samo dva puta x^2. Ali kad je $x = 8$, x^3 je osam puta x^2. Za male vrednosti iksa, kriva više liči na krivu

$$y = ax^{2n}$$

I ovo je sasvim po zdravoj pameti. Kad je $x = 1$, $x^2 = 1 = x^3$. Kad je $x = \frac{1}{4}$, $x^2 = \frac{1}{16}$ a x^3 je $\frac{1}{64}$, tj. x^2 je četiri puta veće od x^3. Jasno je, dakle, da u blizini koordinatnog početka ($x = 0 = y$) niži stepen (x^{2n}) jeste glavna stvar koja utiče na oblik krive, a kad je x veliko, viši stepen (x^{2n+1}) je glavna stvar koja utiče na oblik krive.

Sl. 156 vam pokazuje drugo nešto. Možete proširiti oblast krive u kojoj niži stepen igra glavnu ulogu, ako pri crtanju krive ove jednačine

$$y = ax^{2n} \pm bx^{2n+1}$$

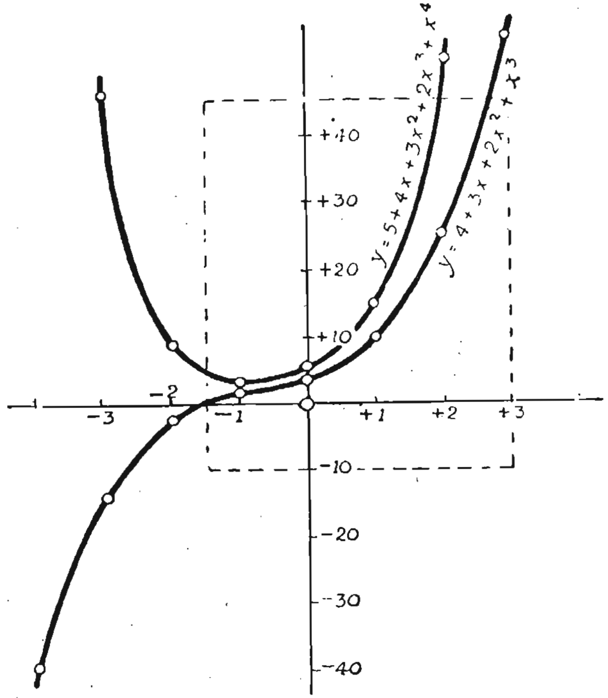
uzmete da a bude veliko u poređenju sa b.

Na obema linijama, n je 1. Na jednoj je (onoj donjoj) $a = 1 = b$ i jedva se raspoznaje onaj deo krive koji ima oblik slova U. Na gornjoj je slici a četiri puta veće od b i na njoj postoji prilično velika oblast u kojoj kriva ima oblik slova

U krive $y = x^2$, tj. onog nižeg stepena. Na narednoj slici (sl. 157) dali smo jedno malo zapletenije y. Tamo su dve krive:

$$y = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$$

$$y = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$



SL. 157. — KRIVE ČIJE SU JEDNAČINE

$y = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$

$y = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

Kad grafički pretstavite sve jednačine, uporedite njihove krive sa slikom 154 koja pretstavlja krivu jednačine

$$y = a^x$$

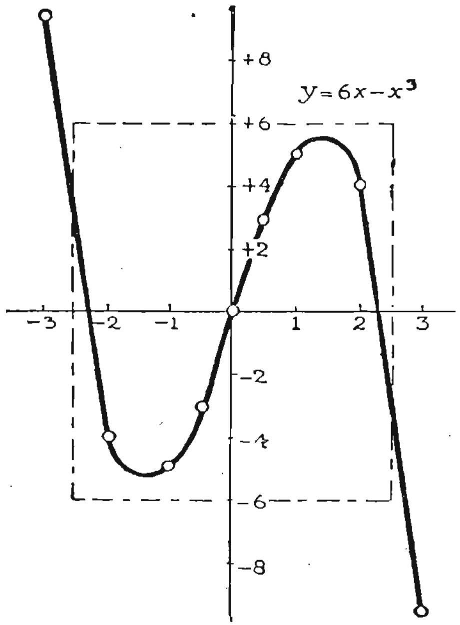
Videćete na pravougaoničnoj površini ograničenoj izreckanim pravama paralelnim sa osovinama x i y, da kriva sa sl. 154

mnogo liči na krive sa sl. 157. I zbilja, ako se broju a daju podesne vrednosti, različite od njegove vrednosti ($a = 2$) na sl. 154, onda ma koja od tih krivih može u izvesnim granicama da posluži za približno tačno čitanje vrednosti za a^x.

Ako pogledate sl. 158 i 159, videćete krive linije ovih jednačina:

$$y = 6x - x^3$$

$$y = 4 - 5x^2 + x^4$$



SL. 158. — KRIVA ČIJA JE JEDNAČINA
$y = 6x - x^3$

Ove su jednačine sastavljene tako, što su u prvoj uzeti samo neparni stepeni, a u drugoj samo parni. U blizini koordinatnog početka one su p e r i o d i č n e ili talasaste. One se približavaju krivim linijama čije su jednačine

$$y = a \text{ s i n } bx$$

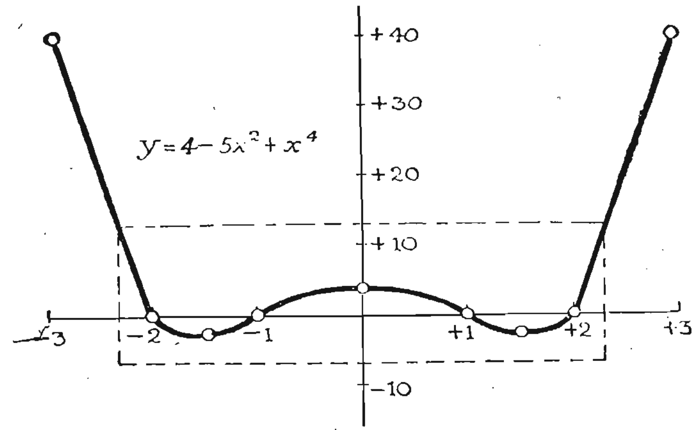
$$y = a \text{ c o s } bx$$

Kod druge krive važno je uočiti da smo, dodajući jedan viši stepen od x, dodali još jednu periodu krivoj. Sve blage krive što smo ih dosad crtali mogu se pretstaviti kao članovi jedne jedine porodice.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \text{ itd.}$$

Ako upotrebimo opšti glagol, imaćemo

$$f\ (x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \text{ itd.}$$



SL. 159. — KRIVA ČIJA JE JEDNAČINA
$y = 4 - 5x^2 + x^4$

One se razlikuju po posebnim vrednostima i predznacima brojeva a, b, c itd. koji se zovu *konstante* ove jednačine. Tako su vrednosti konstanata $b = 6$, $d = -1$ i $a = 0 = c = e$, itd., u jednačini krive

$$y = 6x - x^3.$$

Posle ovoga što smo videli možemo se s pravom nadati da ćemo, ako upotrebimo dovoljno stepena od x (tj. $x, x^2, \ldots x^5$ $x^6, \ldots x^{16} \ldots$) moći da izgradimo krivu liniju koliko god hoćemo blisku krivoj kao što je

$$y = a^x$$

ili

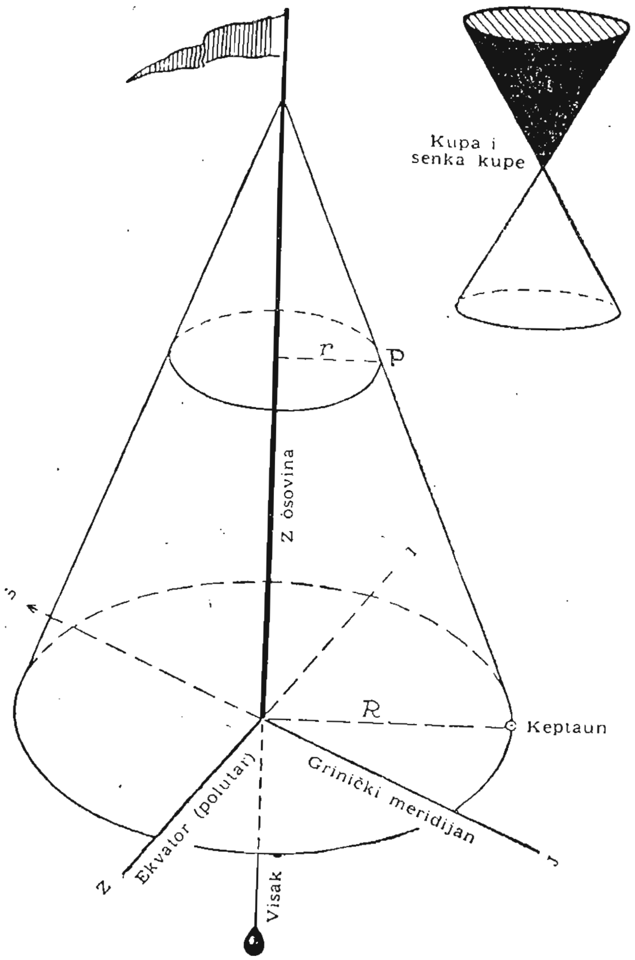
$$y = \text{s i n } x$$

Taj ćemo princip upotrebiti docnije da dobijemo za s i n x i a^x redove koji se zagušuju kao periodični razlomci.

GEOMETRIJA GEOGRAFSKIH KARATA ZA AVIONE I PODMORNICE. — Euklid je obratio izvesnu pažnju geometriji tela. Apolonije je prilagodio Euklidovu geometriju tela proučavanju krivih linija. Sećate se da smo naveli jedan razlog, zašto izostavljamo prikaz Euklidove »geometrije čvrstih tela« u IV glavi. Razlog je bio taj, što se geometriska tela mnogo lakše mogu pretstaviti i meriti docnijim metodama. U dosadanjem izlaganju geometrije Reformacije videli smo kako su geografske karte u ravnoj projekciji[1]) u doba velikih prekomorskih putovanja prokrčile put novoj metodi za proučavanje ravnih slika. Mape u ravnoj projekciji su dovoljno dobre za brodove koji se kreću po morskoj površini. Danas mi imamo podmornice koje se kreću po raznim *dubinama* i avione koji se kreću na raznim visinama iznad morske površine. I zato metoda kojom se pomoću dužine (I.—Z.) i širine (S.—J.) određuje kretanje savremenih saobraćajnih sredstava ne zadovoljava sve potrebe saobraćaja. Geometrija Reformacije može se prilagoditi potrebama podmornica i aeroplana bez mnogo teškoća tako, da kartezijevska metoda može isto tako dobro da opiše telo kao i sliku crtanu na ravnoj površini.

Sve što treba uraditi ovo je: povratiti se na »središte sveta« u Gvinejskom Zalivu, ukotviti brod, spustiti visak vertikalno naniže i istaći jarbol vertikalno naviše sa zastavom opštečovečanskog parlamenta, da nas potseti da civilizovani ljudi u modernom ratovotstvu vide samo izopačenu granu gusarstva. Jarbol i visak pretstavljaju z osovinu avionove visine i podmorničine dubine. Svaka tačka u prostoru pretstavljena je sad jednim z paralelnim sa visinom i dubinom; kao i jednim x paralelnim s geografskom dužinom i jednim y paralelnim sa geografskom širinom. Ravna slika je pretstavljena jednačinom u kojoj se vrednost za y nalazi na taj način što se u tablicu unesu sve vrednosti koje može imati x. Telo je pretstavljeno jednačinom u kojoj se vrednosti za z nalaze tako, što se unose u tablicu sve razne vrednosti koje mogu imati x i y. Drugim rečima to je jednačina koja daje z — koordinatu visine i dubine koja odgovara svakoj tački (na pr. planini ili dubini) neke posebne određene dužine ili određene širine na ravnoj površini mape u projekciji.

[1]) Takve kod kojih sferičan oblik Zemljine površine nije uzet u obzir. — Red.



Sl. 160.

Na sl. 160 smo z-osovinu jarbola sa zastavom i viska postavili u središte sveta u Gvinejskom Zalivu. Geometrisko telo čiju jednačinu hoćemo da damo, da bismo prikazali Kartezijevu metodu, jeste kupa. Ako središte njene kružne osnove (poluprečnik R) leži na površini Gvinejskog Zaliva, na šir. 0^0, dužina 0^0 svaki sloj paralelan sa morskom površinom biće opet ograničen krugom. Svaka polovina vertikalnog preseka kroz osovinu kupe jeste pravougli trougao. U tački P, koja je postavljena tamo oko polovine razmaka od kružne osnove do vrha kupe, horizontalno rastojanje je r, a vertikalno rastojanje je z. Mi već znamo vezu između vertikalnih i horizontalnih koordinata neke tačke na pravoj liniji kad x pretstavlja horizontalnu udaljenost, a y vertikalnu. To je jednačina

$$y = ax + b$$

Ako vertikalnu udaljenost obeležimo sa z mesto sa y i horizontalnu udaljenost sa r mesto sa x, možemo napisati ovo:

$$z = ar + b$$

ili

$$z - b = ar$$

Isto tako znamo da, ako je R rastojanje neke tačke na kružnom obimu od središta sveta, onda se veza između R, x (dužina) i y (širina) ispoljava u ovoj jednačini:

$$R^2 = x^2 + y^2$$

Slična veza može se primeniti na svaki krug paralelan sa morskom površinom i sa središtem tačno iznad svetskog središta u Gvinejskom Zalivu. Otuda možemo napisati:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ili

$$a^2r^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

Ali mi smo videli da je

$$a^2r^2 = (z - b)^2$$

tj.

$$a^2(x^2 + y^2) = (z - b)^2$$

Da bismo se mogli služiti ovom jednačinom pri računima moramo znati koliki su a i b. Kad je $z = h$, visini kupe, biće $r = 0$. Zato, ako je

$$z = ar + b$$

biće

$$b = h$$

Kad je $z = 0$, $r = R$, poluprečniku osnove; znači

$$0 = aR + b$$

tj.

$$a = -\frac{b}{R} = -\frac{h}{R}$$

Izraz

$$a^2(x^2 + y^2) = (z - b)^2 \text{ možemo napisati}$$

u ovom obliku $\frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2) = (z - h)^2$

ili

$$h^2x^2 + h^2y^2 = R^2(z - h)^2$$

Da biste videli kako se može primeniti ova jednačina, pretpostavite da osica mili spolja uz platno jednog kupastog šatora visokog 40 stopa, sa osnovom čiji je prečnik 40 stopa (tj.: $R = 20$ stopa). Koliko će daleko od zemlje biti osica kad se provuče kroz jednu rupu na 6 stopa istočno od šatorske motke ($x = 6$) i 8 stopa južno od nje ($y = -8$)? Jednačina nam kaže:

$$40^2(36 + 64) = 20^2(z - 40)^2$$

$$40^2 \times 10^2 = 20^2(z - 40)^2$$

Kad izvučemo kvadratni koren na obema stranama, dobivamo

$$400 = \pm 20(z - 40)$$

$$20 = \pm(z - 40)$$

$$20 = z - 40$$

ili

$$20 = -z + 40$$

$$z = 60 \text{ i } z = 20$$

Dobili smo dva odgovora. To dolazi otuda što je jednačina kupe, zapravo jednačina kupe i njene kupaste senke ili njene ogledalske slike (sl. 160). Odgovor 60 stopa naviše od kupine osnove znači $60 - 40$, ili 20 stopa naviše od vrha kupe-senke. Mi ćemo se u X glavi vratiti na to da pokažemo koliko je Kartezijeva metoda jednostavna u poređenju sa Euklidovim raspravljanjima o geometriskim telima.

RAZNE VRSTE MAPA. — Kad su ljudi jednom shvatili koliko je korisno pretstaviti položaj neke tačke na mreži koordinantnog sistema, sama po sebi se nametala mogućnost da se pronađu razne vrste geometrije mapa. Jedna vrsta koja je naročito korisna za geometriska tela, zvana sferne koordinate, jeste uglavnom globusna metoda kao nešto suprotno ravnoj mapi. Jedna metoda koja je vrlo prosta kad se primeni na krive linije osniva se na pomorskom kompasu i zove se metoda polarnih koordinata. Mesto da opisujemo položaj neke tačke pomoću vertikalnog i horizontalnog rastojanja kao što su paralele dužine i širine na projekcionoj mapi (Merkartova karta) možemo reći gde se nešto nalazi kad znamo dužinu duži (r) koja taj predmet spaja sa svetskim središtem i ugao (a) koji ta duž gradi sa ekvatorom.

To dovodi do veoma prostih jednačina zatvorenih krivih, kao što su krug i elipsa. Krug je slika na kojoj je r, rastojanje od središta do ma koje tačke na obimu, uvek isto, ma koliki bio ugao što ga r zaklapa s ekvatorom. Zato, ako je c stalna količina, polarna jednačina kruga je samo ovo:

$$r = c$$

Jedna prava zaklapa svuda isti ugao sa ekvatorom ili sa paralelama širine. Ako ona prolazi kroz koordinatni početak, njena je polarna jednačina samo ovo:

$$a = c$$

Na sl. 161 rastojanje (r) od jedne žiže jeste jedna polarna koordinata, a ekvatorijalni ugao (a) prave koja spaja istu žižu s nekom tačkom P na obimu jeste druga polarna koordinata. Pošto je zbir rastojanja do žiža neke tačke na obimu stalan broj ($2d$) drugo žižino rastojanje je ($2d - r$). Konstante c, d i e imaju isto značenje kao na sl. 145. Kad pogledate na dva pravougla trougla na sl. 161 iz (1) možete zaključiti da je

$$p = r \sin a$$

$$q = r \cos a$$

Isto tako iz (2), na osnovi osmog dokaza:

$$(2d - r)^2 = (2de + q)^2 + p^2$$

$$= (2de + r \cos a)^2 + (r \sin a)^2$$

To je dalje

$$4d^2 - 4dr + r^2 = 4d^2e^2 + 4der \cos a + r^2 \cos^2 a + r^2 \sin^2 a$$

Videli smo u VI glavi da je

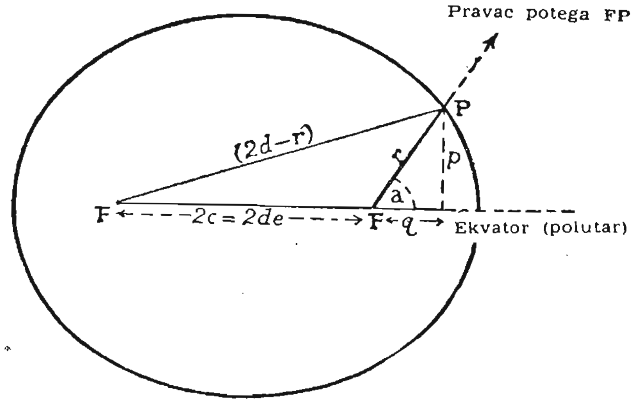
$$r^2 (\cos^2 a + \sin^2 a) = r^2$$

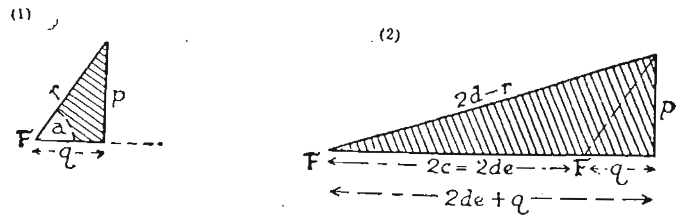
Zato je dalje

$$4d^2 - 4dr + r^2 = 4d^2e^2 + 4der \cos a + r^2$$

Odbacićemo r^2 s obeju strana, pa podeliti sa $4d$. Imaćemo

$$d - r = de^2 + er \cos a$$





$\cos a = \frac{q}{r}$, a odatle: $\sin a = \frac{p}{r}$, a odatle

$q = r \cos a$ $p = r \sin a$

SL. 161. — POLARNA JEDNAČINA ELIPSE:

$$r = \frac{m^2}{M(1 + e \cdot \cos a)}$$

tj. $$d - de^2 = r\,(1 + e \cos a).$$

Kad ponovo pogledate sl. 145, setićete se, pošto je m manja poluosovina, da je

$$m^2 = d^2\,(1 - e^2)$$

Slično tome, pošto je M velika poluosovina, biće

$$M = d$$

$$\frac{m^2}{M} = d - de^2$$

I tako možemo za polarnu jednačinu elipse uzeti ovo:

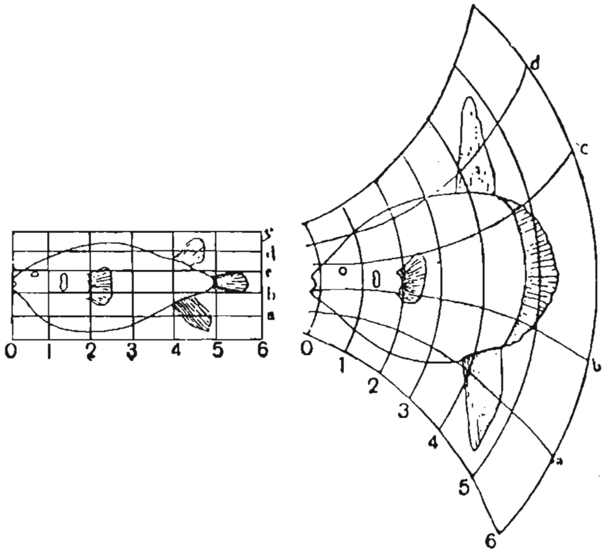
$$\frac{m^2}{M} = r\,(1 + e \cos a)$$

$$r = \frac{m^2}{M\,(1 + e \cos a)}$$

Drugi način za pretstavljanje položaja jedne tačke jeste da se poslužimo ovom vrstom mape koju geografi zovu Flemstidove ili Molvajdove projekcione mape, a matematičari ih zovu krivoliniske koordinate. Meridijani dužine na krivoj površini globusa nisu paralelni kao krugovi širine. Oni se svi stiču na polovima. Na Merkatorovoj projekcionoj mapi meridijani dužine su pretstavljeni paralelnim pravim linijama. Zato Merkatorova karta razvlači relativne veličine kontinenata i okeana. Zemlje koje su daleko severno od ekvatora, kao na pr. Grenland, izgledaju na njoj mnogo veće nego što su u stvari. Mape kao što je Flemstidova projekciona mapa, na kojoj su meridijani pretstavljeni krivim linijama koje se stiču na polovima, popravljaju to razvlačenje. Veoma sugestivna primena krivoliniskih koordinata na sl. 162 uzeta je iz knjige *Growth and Form*[1]) profesora D'Arsi Tompsona, koji je jedan od najučenijih ljudi u svetu koji govori engleski. Lobanja ili telo jedne životinjske vrste nacrtane na mreži krivoliniskih koordi-

[1]) Rašćenje i oblik. — Prev.

nata liči potpuno na lobanju ili telo neke sasvim druge vrste nacrtane na mreži kartezijevih koordinata. Primena ove metode može dati ključ za objašnjenje zakona rašćenja u evoluciji vrsta.

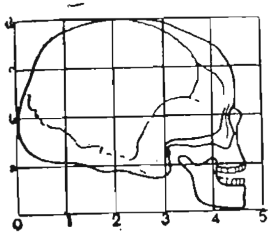


Sl. 162.

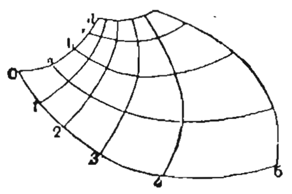
Nalevo je jedna tipična vrsta roda diodona. Desno, kaže profesor D'Arsi Tompson, »Ja sam deformisao njene vertikalne koordinate u sistem koncentričnih krugova, a njene horizontalne koordinate u sistem krivih koje su približno i po nuždi načinjene tako, da liče na neki sistem hiperbola. Stari obim, izmenjen potpunce prema novoj mreži, izgleda kao očevidno pretstavljanje veoma srodne ribe, ali veoma različitog izgleda, *orthagoriscus*-a«.

OGRANIČENOSTI GEOMETRIJE REFORMACIJE. — Za vreme ovih proučavanja imali smo stalno na umu da primenom matematike na stvarni svet možemo dobiti samo približan opis stvari koje vidimo, čujemo i dodirujemo. Videli smo kako je Euklid izostavio vreme iz geometrije, a videli smo i to kako je Dekart uključio vreme u geometriju. Znači li to da nam je geometrija Reformacije najzad dala savršen opis sveta? Odgovor glasi: Ne. Geometrija Reformacije je takođe izostavila nešto kao što je i grčka geometrija nešto izostavila. Da bismo videli šta je to nešto, vratimo se opet klatnu. Samo je poluistina kad kažemo da se klaćenje klatna može tačno opisati jednačinom

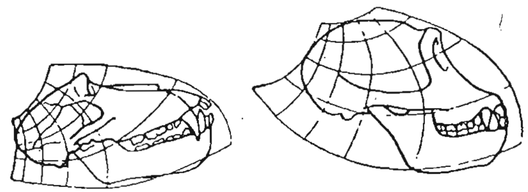
$$y = a \cos bx$$



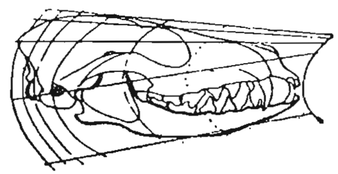
Čovečja lobanja na kartezijevskoj mreži.



Koordinate šimpanzove lobanje kao projekcija one prve lobanje.



Babunova lobanja (levo) i šimpanzova lobanja (desno).



Pseća lobanja.
Sl. 163.

Razlog što je to samo poluistina leži u tome, što se kriva koja pretstavlja onu jednačinu proteže koliko god hoće levo i desno. To znači ovo: ako x pretstavlja vreme, jednačina nam kaže da se klatno klatilo još od pamtiveka, pre nego što su počela naša posmatranja. Ako nacrtamo krivu tako, da počinje od izvesnog određenog vremena, unosimo nešto što se ne nalazi u matematičkom obliku ove krive, isto onako kao kad u jedna-

čini kupe odbacujemo jedan odgovor zato, što upotrebljavamo samo jednu od onih dveju kupa koje pretstavlja jednačina kupe. Suprotno matematici Grka, matematika Reformacije bila je dinamična. Ona je uzela vreme u račun, ali u odnosu na zahteve koje matematici postavljaju savremena znanja u njihovom celokupnom opsegu, matematika Reformacije je n e i s t o r i s k a. Ona ne uzima potpuno u račun istorisku prošlost. Ona se javlja u doba trgovačkih poduhvata, kad su se brodovi služili astronomijom da nađu sebi puta na pučini. Za ovakve astronomske ciljeve istoriska prošlost je nevažna, jer se karakteristike vasione i zvezda menjaju suviše neznatno u vremenskom otseku koji je od značaja za čovekove društvene potrebe. Zato se možemo poslužiti istim principima da izračunamo bilo pomračenje koje se d e s i l o, bilo pomračenje koje ć e s e d e s i t i. Moderna fizika, moderna hemija i moderna biologija ogromno su zauzete problemima rašćenja i opadanja. Istoriska prošlost počinje bivati najvažniji predmet raspravljanja u prirodnim naukama. U sutonu merkantilne kulture budućnost ljudskog poimanja sveta sve više i više zavisi od toga da se shvate ljudski odnosi u svetlosti istoriskog iskustva. Počinjemo uviđati da nije dovoljna matematika koja nam dopušta kretanje. Nama je potrebna matematika koja će se baviti pitanjem odakle dolazimo i kuda idemo.

VEŽBANJA UZ IX GLAVU

U svima ovim vežbanjima o graficima, ako to niste i sami zapazili čitajući tekst, vrlo je važno držati se ove napomene. Ako se služimo nekim grafikom da pretstavimo tačno o b l i k neke geometriske slike, uzimamo uvek istu mernu jedinicu za x i y. Tako je $r^2 = x^2 + y^2$ samo onda jednačina kruga, ako su i x i y mereni istom jedinicom, tj. na pr. santimetrima. Ako izvodimo grafičko rešavanje neke jednačine, naše jedinice ne moraju biti iste dužine. Tako ako je y veoma veliko prema x može biti zgodno da uzmemo za x jedinicu od 1 santimetra, a za y jedinicu od 0,01 santimetara. U tom slučaju je važno samo da ne zaboravimo da izvesna data dužina merena duž jedne osovine ima različitu vrednost od date dužine merene duž druge osovine. Razume se da isto važi i za grafike koji pretstavljaju fizičke zakone, pošto nam je do volje koje ćemo jedinice upotrebiti.

Pre nego pokušate da rešite ma koji od narednih zadataka, pokažite da je krug slika koja odgovara jednačini

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Da biste to uradili, načinite tablicu svih vrednosti za y koje odgovaraju vrednostima za x između -5 i $+5$ u razmacima od $\frac{1}{2}$, služeći se tablicom kvadratnih korena. Tako ako je $x = -4\frac{1}{2}$, biće:

$$y = \sqrt{25 - \left(\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{19} = \pm\frac{1}{2}\cdot 4{,}36$$

$$= \pm 2{,}18$$

Obeležite na svome grafiku dve tačke koje su $\pm 2{,}18$ podeoka duž ordinatne osovine i $-4\frac{1}{2}$ podeoka duž apscisne osovine. Ako se poslužite jedinicom od 1 santimetra i hartijom išpartanim pravim linijama u razmacima od 1 milimetra, praktično uzevši, y će iznositi dva velika podeoka i dva mala. Uradite to isto za sve druge vrednosti iz tablice, pa nacrtajte liniju koja ide blago se savijajući između obeleženih tačaka.

1. — U jednoj zgradi od šezdeset spratova dizalica je pošla iz prizemlja i prešla ove puteve: naviše dvadeset i osam spratova, naniže četiri, naviše deset, naniže tri, naniže devetnaest, naviše deset, naniže jedan, naviše pet, naviše jedanaest, naniže dvadeset i četiri. Gde je ona sad?

2. — Nacrtajte krug poluprečnika 4 santimetra, (*a*) sa središtem u koordinatnom početku, (*b*) sa središtem u tački $x = 2$, $y = 3$. Kako glasi kartezijevska jednačina u obadva slučaja?[1])

[1]) Treba se setiti da je rastojanje ma koje tačke (x, y na periferiji do kružnog središta (2,3) jednako s poluprečnikom (4). — Prev

3. — Pokažite da tangens ugla što ga dirka na krugu ma u kojoj njegovoj tački zaklapa sa apscisnom osovinom iznosi $-\frac{x_r}{y_r}$, gde su x_r i y_r koordinate dodirne tačke.

Na slici koju ste sad nacrtali vidite da li možete pokazati da, kad je neki pozitivni ugao a meren u radijanima, sin a je manje nego a i tang a je veće nego a.

4. — Nacrtajte $y = 3x + 4$, pa onda nacrtajte po viđenju (tj. ne praveći tablicu) ove linije

$$3y = 5x + 6 \text{ (tj. } y = \frac{5x}{3} + 2)$$

$$y = 32x + 40$$

5. — Na Farenhajtovom termometru voda se mrzne na 32^0, a ključa na 212^0. Na Celzijusovom termometru voda ključa na 100^0 a mrzne se na 0^0. Pokažite da je ovo obrazac za pretvaranje Celzijusovih stepeni u Farenhajtove.

$$F = \frac{9\,C}{5} + 32$$

Nacrtajte grafik ove jednačine i sa grafika pročitajte koliko u Celzijusovim stepenima iznosi normalna temperatura krvi ($98{,}4^0$ F).

6. — Ako su dve prave linije pretstavljene jednačinama

(a) $y = x + 3$

(b) $y = x\sqrt{3} + 2$

pod kojim uglovima seku one x-osovinu (apscisnu osovinu)?

7. — Ako je jedna grupa pravih linija pretstavljena jednačinama

$$y = mx + 1$$

$$y = mx + 2$$

$$y = mx + 3 \text{ itd.}$$

Šta znate vi o ovim pravim linijama?

8. — Šta pretstavlja količina C grafički u jednačini

$$y = mx + C?$$

9. — Kako bi izgledala jednačina prave linije povučene paralelno sa x osovinom?

10. — Drug Jovanović pođe u šetnju. Prvog časa pređe 4,8 kilometra, drugog časa pređe 4 kilometra, trećeg časa pređe 3,2 kilometra. Odmara se posle toga tri četvrti časa, a onda ide još tri časa prelazeći na sat 4 kilometra. Nacrtajte njegovu šetnju, pa sa grafika pronađite koliki je put prešao drug Jovanović za $1\frac{1}{2}$ čas, $3\frac{1}{2}$ časa, $5\frac{1}{2}$ časova. Drug Nikolić pođe sa istog mesta 2 časa docnije od druga Jovanovića, ali biciklom i prelazi 9,6 kilometara na čas. Prikažite grafikom njegovo kretanje i pronađite daljinu od polazne tačke na kojoj će drug Nikolić prestići druga Jovanovića.

11. — Nacrtajte ove dve prave:

$$2y + 3x = 31$$
$$3y + 2x = 39$$

na istom crtežu. Pročitajte sa svoga crteža kolike vrednosti moraju imati x i y da obadve jednačine budu jednovremeno istinite. Vratite se na VII glavu, pa ćete videti da ste pronašli grafičku metodu za rešavanje problema sa dvema simultanim jednačinama.

12. — Zadatke iz 14 vežbanja VII glave rešite grafički, pa uporedite rešenja sa rešenjima koja ste ranije dobili.

13. — Nacrtajte brižljivo krivu $y = x^2$, uzimajući za x vrednosti između -10 i $+10$, s tim da dužinske jedinice za x i y budu jednake, pa iskoristite svoj crtež:

(a) da načinite tablicu kvadratnih korena svih brojeva od 1 do 100;

(b) da načinite tablicu svih kvadrata od 1 do 100.

14. — Nacrtajte grafike koji vezuju

(a) površinu ravnostranog trougla sa njegovom osnovicom;

(b) površinu ravnokrakog trougla sa uglovima od 45^0 koje kraci grade sa njegovom osnovicom;

(c) površinu pravouglog trougla čiji je jedan ugao 30^0 sa naleglom katetom toga ugla.

15. — Za datu dužinu klatna u santimetrima i dati broj sekundi za jednu celu oscilaciju nađene su ove vrednosti:

sekundi	0,7	0,8	0,9	0,5	0,6	0,4
dužina	49	64	81	25	36	16

Proverite ovo jednim dugmetom, komadićem konca i časovnikom. U svakom od ovih slučajeva uzimajte prosečnu vrednost od deset celih oscilacija. Nacrtajte grafik. Kako glasi njegova jednačina?

16. — Nađite obrazac koji vezuje površinu (y) i poluprečnik (x) kruga na taj način što ćete nacrtati grafik koji se osniva na površini dobivenoj brojanjem kvadrata (japanska metoda). Pošto ste se uverili da tačni obrazac glasi

$$y = cx^2$$

pročitajte sa grafika koliko je c.

17. — Rešite grafički ove simultane jednačine:

(1) $xy = 0$, $3x + 4y = 12$ (2) $x^2 + y^2 = 25$, $x + y = 7$ (3) $(x - y)^2 = 1$, $(3x - 5y)^2 = 1$

18. — Naći krive čije su ovo jednačine:

$$y = \pm \frac{5}{4} \sqrt{16 - x^2}$$

$$y = \pm \frac{4}{7} \sqrt{49 - x^2}$$

Na koje se podeoke na slici odnose ovi brojevi?

19. — Nacrtajte grafike Kartezijeve i polarne jednačine elipse kod koje je veća osovina 3, a manja 2 dužinske jedinice.

20. — Stavite $\sin 180^0 = \sin (90^0 + 90^0)$, $\cos 180^0 = \cos (90^0 + 90^0)$, $\sin 270^0 = \sin (180^0 + 90^0)$, itd., pa primenite obrasce za $\sin (A + B)$, $\cos (A + B)$. Odatle pokažite da je

(a) $\sin 180^0 = 0$, $\sin 270^0 = -1$, $\sin 360^0 = 0$

(b) $\cos 180^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

Zamenjujući te vrednosti pokažite da je

$\sin (90^0 + A) = + \cos A, \quad \cos (90^0 + A) = - \sin A,$
$\tan (90^0 + A) = - \cot A$

$\sin (180^0 + A) = - \sin A, \quad \cos (180^0 + A) = - \cos A,$
$\tan (180^0 + A) = + \tan A.$

$\sin (270^0 + A) = - \cos A, \quad \cos (270^0 + A) = + \sin A,$
$\tan (270^0 + A) = - \cot A.$

$\sin (360^0 + A) = + \sin A, \quad \cos (360^0 + A) = + \cos A,$
$\tan (360^0 + A) = + \tan A.$

21. — Primenjujući obrasce za $\sin (A - B)$, $\cos (A - B)$ iz X glave, pokažite da je

$\sin (90^0 - A) = + \cos A, \quad \cos (90^0 - A) = + \sin A,$
$\tan (90^0 - A) = + \cot A$

$\sin (180^0 - A) = \sin A, \quad \cos (180^0 - A) = - \cos A,$
$\tan (180^0 - A) = - \tan A$

$\sin (270^0 - A) = - \cos A, \quad \cos (270^0 - A) = - \sin A,$
$\tan (270^0 - A) = + \cot A$

$\sin (360^0 - A) = - \sin A, \quad \cos (360^0 - A) = \cos A,$
$\tan (360^0 - A) = - \tan A.$

22. — Služeći se dijagramom, objasnite ovo dole, pa proverite dobivene rezultate stavljajući $\sin (-A) = \sin (0 - A)$ i tako dalje:

$\sin (-A) = - \sin A, \quad \cos (-A) = \cos A,$
$\tan (-A) = - \tan A$

23. $\sin 130^0 = \sin (2n \cdot 90^0 - 50^0)$ (gde je $n = 1$)
$= \sin (180^0 - 50^0)$
$= \sin 50^0$

Ili ovako:

$\sin 130^0 = \sin [(2n + 1)\ 90^0 + 40^0] =$ (gde je $n = 0$)
$= \cos 40^0$
$= \sin 50^0$

Na isti način nađite pomoću obe metode rezultate ovih izraza:

$\tan 210^0$	$\sin 230^0$	$\cos 300^0$
$\tan 120^0$	$\sin 150^0$	$\cos 100^0$

24. — Rešite ove kvadratne jednačine već pokazanom metodom

(1) $5x^2 + 2x = 7$
(2) $8x^2 - 2x - 3 = 0$
(3) $5x^2 - x - 6 = 0$

25. — Nacrtajte $\sin x$ i $\tan x$ za $x = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$. Sa crteža pročitajte približne vrednosti za

$\sin 15^0$	$\sin 35^0$	$\sin 75^0$
$\tan 15^0$	$\tan 35^0$	$\tan 75^0$

pa proverite u tablicama.

26. — Nacrtajte krivu $y = x^3$, pa sa crteža izradite tablicu kubova i kubnih korena brojeva od 1 do 20.

27. — Nacrtajte krive

$2^x \quad 1{,}5^x \quad 3^x \quad 1{,}1^x$

Sa svojih crteža pročitajte vrednosti za

$2^{3,5} \quad 1{,}5^{1,5} \quad 3^{2,5} \quad 1{,}1^{0,5}$

28. — Nacrtajte ove krive:

$y = x^4 \quad y = x^5 \quad y = x^6 \quad y = x^7$

29. — Nacrtajte krive

$xy = 4$ i $x^2 - y^2 = 8$

Krive što ih pretstavljaju te jednačine zovu se *hiperbole*.

30. — Nacrtajte sliku da pokažete da je jednačina lopte čije je središte u koordinatnom početku

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

31. — Služeći se tablicama nađite sinus, kosinus i tangens ovih uglova: -20^0, -108^0, 400^0, -500^0.

32. — Nacrtajte grafik da pokažete svotu (y) na koju naraste 100 dinara za x godina po 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4 i 5 od sto (a) prostog interesa (b) složenog interesa.

DA SE UPAMTI!

1. — Jednačina kruga:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 \qquad *)$$

2. — Jednačina prave linije je:

$$y = x \ \mathrm{tang}\ A + b$$

3. — Jednačina parabole je:

$$y = ax^2$$

4. — Jednačina elipse:

$$\frac{x^2}{M^2} + \frac{y^2}{m^2} = 1$$

5. $\sin(-\Theta) = -\sin\Theta; \qquad \cos(-\Theta) = \cos\Theta$

$\sin(90^0 - \Theta) = \cos\Theta; \qquad \cos(90^0 - \Theta) = \sin\Theta$

$\sin(90^0 + \Theta) = \cos\Theta; \qquad \cos(90^0 + \Theta) = -\sin\Theta$

$\sin(180^0 - \Theta) = \sin\Theta; \qquad \cos(180^0 - \Theta) = -\cos\Theta$

$\sin(180^0 + \Theta) = -\sin\Theta; \qquad \cos(180^0 + \Theta) = -\cos\Theta$

6. $\sin[n\pi + (-1)^n\alpha] = \sin\alpha$

$\cos(2n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tang}(n\pi + \alpha) = \mathrm{tang}\,\alpha$

$\sin\left[\frac{2n+1}{2}\pi \pm \alpha\right] = (-1)^n \cos\alpha$ itd.

Veoma je važno dobro znati vrednosti nekih važnijih uglova, ali njih se čovek lako seti, ne bubanjem obrazaca, već držanjem slike u glavi.

Uočite da su u dva poslednja vežbanja, 5 i 6 upotrebljena grčka slova α i Θ da pretstave uglove. Tako se u matematici obično radi, kao što se x upotrebljava da se označi nepoznata količina, a a, b, c da se njima obeleže poznate količine.

---

*) Tu *a* pretstavlja *apscisu*, a *b* *ordinatu* kružnog središta. — Prev.

GLAVA X

KOLEKTIVIZACIJA ARITMETIKE

ili

Kako su pronađeni logaritmi

Aleksandriska kultura je petnaest stoleća ranije nagovestila tri velike tekovine matematičkog buđenja koje je usledilo uporedo sa dizanjem protestantskih demokratija. Ptolomejeva kartografija i Apolonijeve krive linije pružile su najbitnije elemente kartezijevskoj geometriji o kojoj smo govorili u prethodnoj glavi. Arhimedovo izračunavanje kod kruga i Teonov pronalazak za dobijanje kvadratnih korena već su unapred naglasili dve osnovne računske radnje koje će biti primenjene u docnijoj glavi o infinitezimalnom računu. Arhimed se isto tako spotakao o princip koji je osnova logaritama. Sad ćemo se pozabaviti pronalaskom logaritama i novim poletom koji je on izazvao u proučavanju progresija. Kad se uporede sa računima što su ih bili preduzeli aleksandriski matematičari, zahtevi koji su postavljani Rechenmeister-u u petnaestom veku izgledaju ogromni. Ti su zahtevi potekli iz dužnosti koje su nametale proširena trgovina i poboljšana pomorska tehnika. Te su nove dužnosti terale ljude da pronađu kraće i lakše algoritme nego što su algoritmi koje učimo u detinjstvu od arapskih učitelja zapadne civilizacije. Rezultat je bio ogromni korak napred ka socijalizaciji aritmetike.

Ako uporedite algoritme za množenje dva broja (na pr. $324 \cdot 245$) i za sabiranje ista ta dva broja, videćete da je broj računskih radnji (operacija) pri množenju uvek veći od broja operacija pri sabiranju tih istih brojeva (sem, razume se, ako je jedan od ta dva broja između 1 i 10, ili ako je prost sadržalac broja 10), na pr.:

$$\begin{array}{rr} & 324 \\ + & \underline{245} \\ & 569 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 324 \\ \times & \underline{245} \\ & 648 \\ & 1296 \\ & \underline{1620} \\ & 79380 \end{array}$$

(Sabiranje, jedna operacija)

(Množenje, četiri operacije).

Kad su brojevi vrlo veliki, sve je veća razlika između veličine posla potrebnog za množenje (ili deljenje) i tog posla kod sabiranja (ili oduzimanja). Zato je velika ušteda u radu, ako možemo svako množenje dva broja da svedemo na sabiranje dva broja. Eto to je za nas uradio pronalazač logaritama. Navešćemo nešto iz dela Logarithmall Aritmetike[1]) od Brigsa, izdatog 1631 godine. Brigs je prvi sastavio tablice koje se danas upotrebljavaju. »Logaritmi su brojevi koji su pronađeni da se lakše obrađuju pitanja u aritmetici i geometriji.... pomoću njih se sva nužna množenja i deljenja izbegavaju i izvršuju pomoću sabiranja, mesto množenja, i pomoću oduzimanja, mesto deljenja. Čudno a mučno izvlačenje korena vrši se pomoću njih isto tako veoma lako... Jednom reči, na sva pitanja ne samo u aritmetici i geometriji, već i u astronomiji, dobijamo pomoću njih sasvim prost i lak odgovor«.

Potreba da se nađe mogućnost da se sabiraju brojevi koji se mogu naći u tablicama sastavljenim »za svagda« kao što Neper[2]) primećuje, umesto da se izvodi dugačak posao množenja, nametala se iz dva razloga koji su u početku bili nezavisni jedan od drugoga. Docnije ćemo videti kako oni mogu da se spoje upotrebom »uobraženog broja« i ili $\sqrt{-1}$. Prva se potreba pojavila u vezi sa spremanjem trigonometriskih tablica za pomorsku plovidbu. Druga je bila u tesnoj vezi sa teškim računanjem koje je imalo da se izvodi pri obračunavanju složenog interesa na uloženi kapital.

---

[1]) *Logaritamska aritmetika.* — Prev.

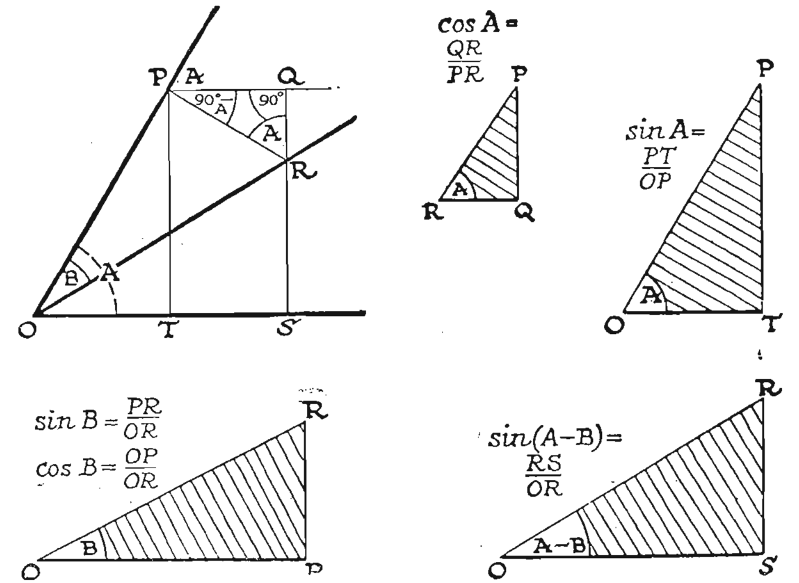
[2]) Engleski matematičari Džon Neper (1550—1617) i Henri Brigs (1556—1630). — Prev.

U drugoj polovini šesnaestog veka Danska je bila postala važno istraživačko središte za probleme vezane za pomorsku plovidbu. U Danskoj su se javila istraživanja astronoma Tiha Braha, koja su od epohalnog značaja. Dva danska matematičara Vitih (1584) i Klavius (čije je delo de Astrolabio objavljeno 1593) preporučivali su trigonometriske tablice za skraćenje računa. U VI glavi naći ćete izraz

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \ldots \quad (1)$$

Odgovarajući izraz za sinus razlike dva ugla može se dobiti pomoću slične konstrukcije (sl. 164)

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A \ldots \quad (2)$$



SL. 164. — SINUS RAZLIKE DVA UGLA

Konstrukcija. — Ugao $POT = A$; $\measuredangle\ POR = B$; $\measuredangle\ ROS = (A-B)$. Nacrtajte PT upravno na OS, PQ upravno na PT, PR upravno na OP i QS kroz R upravno na PQ i na OS.

Dokaz.
$$\sin(A-B) = \frac{SR}{OR} = \frac{QS}{OR} - \frac{QR}{OR} = \frac{PT}{OR} - \frac{QR}{OR} =$$
$$= \frac{PT \cdot OP}{OP \cdot OR} - \frac{QR \cdot PR}{PR \cdot OR} =$$
$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

Kad u (1) i (2) saberemo levu s levom, a desnu s desnom stranom, dobivamo

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

ili

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\sin(A+B)+\frac{1}{2}\sin(A-B)$$

Ova jednačina može da se upotrebi da se mesto pojedinačnog množenja dva broja uzmu socijalizirani podaci koje daju tablice sinusa i kosinusa. Tako mesto da se pomnoži

$$0{,}17365\cdot 0{,}99027$$

mi pogledamo u tablice i nađemo

$$0{,}17365=\sin 10^0$$
$$0{,}99027=\cos 8^0$$

Naš obrazac kaže da je

$$\sin 10^0\cdot\cos 8^0=\frac{1}{2}(\sin 18^0+\sin 2^0)$$

Tablice nam kažu da je $\sin 18^0=0{,}30902$

$$\sin 2^0=0{,}03490$$

$$\sin 18^0+\sin 2^0=0{,}34392$$

$$\frac{1}{2}(\sin 18^0+\sin 2^0)=0{,}17196$$

I tako će biti tačno do pet decimala

$$0{,}17365\times 0{,}99027=0{,}17196$$

Videćete da je to tačno do petog decimalnog mesta kad pomnožite ovako

$$\begin{array}{r}
0{,}17365\\
0{,}99027\\
\hline
0{,}156285\\
156282\\
34730\\
121555\\
\hline
0{,}17196\ldots
\end{array}$$

Netačnost koja se ovde pojavljuje prosto zavisi od toga koje ste tablice upotrebili. U ovom slučaju su upotrebljene

tablice sa pet decimala, a one ne daju potpunu tačnost preko četvrtog desetnog mesta. Da bismo dobili sedam decimala tačno, moramo upotrebiti tablice sa osam decimala. Ako se poslužite konstrukcijom sa sl. 164 možete pokazati i da je

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

Ako to vežemo sa

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

možemo dobiti i drugi obrazac

$$\frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)=\cos A\cos B$$

Ovo možete primeniti na isti način.

Ovaj je pronalazak verovatno naveo Nepera, koga obično zovu pronalazačem logaritama, na jednu prostu metodu po kojoj se sinusi uglova množe neposrednim sabiranjem. Neperov pronalazak su živo pozdravili Tiho Brahe i Kepler. Neperovo delo je prevedeno sa latinskog na engleski iste godine (1614) kada ga je prvi put objavio Edvard Rajt, Kembridžski matematičar koji je već bio napisao 1599 godine knjigu pod naslovom *Izvesne greške u moreplovstvu pronađene i popravljene.*

Ipak se u istoriji nauke retko dešava, ako se uopšte i desi, da jedan čovek sam samcit izvede neki veliki naučni pronalazak. Društveni uslovi su zahtevali brže metode za računanje položaja zvezda na nebu. Oni su isto tako zahtevali i brže metode za izračunavanje bogatstva koja su se gomilala posle velikih prekomorskih putovanja. Ta se putovanja opet nisu mogla izvesti, a da se ne primeni astronomija na pronalaženje položaja broda na pučini. Linija koja je vodila ka otkriću logaritama bila je linija na kojoj su se spremale tablice za računanje interesa. Računanje složenog interesa pretstavlja praktičnu primenu geometriskih progresija. Ako se na uloženu funtu plaća r interesa, jedna funta naraste za godinu dana na $(1+r)$ funti. Ako r iznosi 5 od sto $\left(\frac{5}{100}\right)$, jedna funta naraste na 1,05 funti. Na kraju druge godine svaka funta uložena na kraju prve godine vredeće 1,05 funti. Ako interes nije isplaćen na kraju prve godine, početkom druge godine biće uloženo 1,05 funti mesto svake jedne funte sa početka prve godine. I tako će ona jedna funta sa početka prve godine narasti do kraja druge godine na $1{,}05 \times 1{,}05$ funti, tj. $(1{,}05)^2$ funti. Slično tome na kraju treće godine biće $(1{,}05)^3$. Tako možemo načiniti tablicu rašćenja jedne funte na ovaj način:

Krajem	0	1	2	3	4 godine
	1	$(1+r)$	$(1+r)^2$	$(1+r)^3$	$(1+r)^4$ itd.

Gornji niz je aritmetički, a donji geometriski. Ako želimo da računamo složen interes po tromesečjima, moramo proširiti tablicu služeći se razlomljenim izložiocima:

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$ itd.
1	$(1+r)^{\frac{1}{4}}$	$(1+r)^{\frac{1}{2}}$	$(1+r)^{\frac{3}{4}}$	$(1+r)$	$(1+r)^{\frac{5}{4}}$	$(1+r)^{\frac{3}{2}}$	$(1+r)^{\frac{7}{4}}$

Da bismo dobili vrednost na koju narastu 156 funti pod složenim interesom po 3 od sto za $2\frac{3}{4}$ godine, imamo samo da izvršimo ovo množenje:

$$156 \cdot (1{,}03)^{2\frac{3}{4}} = 156 \cdot (1{,}03)^{\frac{11}{4}} \text{ funti.}$$

Stevinus, koga smo već pominjali više puta, objavio je ovakve tablice za računanje u trgovačkoj računici.

Ako odredimo interesnu stopu 100 od 100 (tj. $r = 1$), dva reda nizova iznetih gore odgovaraju koordinatama x i koordinatama y na slici 154, pošto je $(1+r) = 2$, kad je $r = 1$. Videli smo već kako se čitaju približne vrednosti za y koje odgovaraju četvrtinama za x, tj. $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$, itd. Moramo sad malo bliže da ispitamo šta znači razlomljen izložilac. Arhimed je razumeo osnovni princip logaritamskih tablica. Pođimo svojim tragom unazad do tog otkrića. Stavimo u prvi red niz prvih n prirodnih brojeva. Ispod toga, kao ispod roditeljskog niza, stavimo jedan geometriski niz. Na primer,

1	2	3	4	5	6	7
2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2	4	8	16	32	64	128

Idući za Neperom nazvaćemo brojeve iz gornjeg niza, tj. iz aritmetičkog niza, l o g a r i t m i. Brojeve iz donjeg niza, tj. iz geometriskog niza, nazvaćemo *antilogaritmi*. Arhimedov princip bio je u ovome: ako želimo da pomnožimo dva broja u donjem nizu, saberemo odgovarajuće brojeve u gornjem nizu pa za taj zbir tražimo odgovarajući broj u donjem nizu. To se pravilo može i ovako napisati:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

na pr.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$$
$$(8 \cdot 16 = 128)$$

Operator »*log*« napisan ispred broja znači »Potraži u tablicama izložilac kojim treba da se stepenuje a, da bi dalo taj broj«. »*Antilog*« napisano ispred broja znači »Potraži u tablicama vrednost dobivenu kad se osnova digne na stepen koji pretstavlja taj broj«. Tako imamo za

$$p = a^m$$
$$m = \log_a p$$
$$p = \text{antilog}_a\, m$$

Zato možemo napisati u drugom obliku pravilo za množenje. Stavićemo:

$$q = a^n \text{ tako da je } n = \log_a q$$
$$p \cdot q = a^{m+n} \text{ tako da je } m+n = \log_a (p \cdot q)$$

ili

$$p \cdot q = \text{antilog}_a\, (m+n)$$
$$= \text{antilog}_a\, (\log_a p + \log_a q)$$

Primer sa posebnim brojem dat u novim oznakama glasio bi:

$$8 \cdot 16 = \text{antilog}_2\, (\log_2 8 + \log_2 16) = \text{antilog}_2\, (3 + 4)$$
$$= \text{antilog}_2\, 7$$

Poslednji korak znači: »Potraži broj u donjem redu antilogaritama koji odgovara broju 7 u gornjem redu logaritama«. Kad pogledamo nalazimo da je to broj 128.

Razume se, ovakva tablica nije ni od kakve koristi pri množenju, sem ako je popunimo tako, da ona obuhvata sve brojeve koje bismo mogli poželeti da pomnožimo. Mi smo počeli time, što smo upotrebili operator x u izrazu a^x, gde on znači da treba pomnožiti x aova međusobno. Tada smo uočili da smo mogli i na drugi način gledati na vezu između x i a. Kad idemo zdesna nalevo u nizu iksova jedan korak, znači da broj u donjem redu ima da bude podeljen sa a. Tako ako je $2^4 = 16$ onda je $2^3 = 16 : 2$. I tako smo pronašli, da ako je a osnova mesnog obeležavanja, a^n je vrednost svake kuglice u $(n + 1)$-om stupcu na računaljci. Tako a^0 odgovara vrednosti zrnca u stupcu za jedinice tj. za svaku vrednost za a je

$$a^0 = 1$$

Stepen jedan manje nego 0 jeste (-1). Zato je

$$a^{-1} = \frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$$

Slično tome

$$a^{-2} = \frac{1}{a} : a = \frac{1}{a^2}$$

I uopšte

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Zato a^n odgovara vrednosti zrnca u entom stupcu levo od jedinica, a a^{-n} odgovara vrednosti zrnca u entom stupcu desno od jedinica, tj. vrednosti cifre koja zauzima ento decimalno mesto. I tako možemo ispisati ove logaritme i antilogaritme osnovane na geometriskoj progresiji 3^n:

log	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
Antilog	$0{,}0\dot{3}\dot{7}$	$0{,}\dot{1}$	$0{,}\dot{3}$	1	3	9	27	81

Nacrtaćemo jednu liniju pomoću ovih brojeva kao tačaka ($y = 3^x$ ili $y =$ antilog$_3$ x). Onda možemo odrediti dužinu ipsilona koja odgovara ma kojoj posebnoj vrednosti za x, bilo da je x razlomak, ili ceo broj. Tako nalazimo da Arhimedovo pravilo i dalje važi, čak i kad su m i n razlomci, u jednačini

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Da bismo proverili ovo pravilo aritmetički, potrebno nam je da nekako definišemo a^m ili a^n, kad m i n nisu celi brojevi. Ako Arhimedovo pravilo važi:

$$\sqrt[2]{a^1} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \sqrt[2]{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2} = a^{\frac{1}{2}}$$

tj. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Slično tome

$$\sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3} = a^{\frac{1}{3}}$$

tj. $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

tako je uopšte: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Otuda $3^{2,5}$ znači

$$3^{2+\frac{1}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{\varepsilon}$$

Slično tome $2\frac{4}{3}$ znači

$$2^{\frac{4}{3}} = 2^{1+\frac{1}{3}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$$

Količine kao što su $2^{\frac{3}{4}}$ i $3^{\frac{5}{2}}$, ili uopšte $a^{\frac{m}{n}}$ mogu se prevesti i na drugi način, kad iskoristimo činjenicu da je

$$\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{b} = \sqrt[2]{ab}$$

ili

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \text{ itd.}$$

Otuda možemo staviti

$$3^{2,5} = 3^{\frac{5}{2}} = 3^2\sqrt{3} = \sqrt{3^4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3^5}$$

$$2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^4}$$

Tako da pravilo glasi:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Ova dva pravila o razlomljenim i negativnim izložiocima što smo ih sad izneli prvi je objavio Oresmus u knjizi A l g o r i s m u s P r o p o r t i o n u m, objavljenoj oko 1350 godine. Ljudskom rodu bilo je potrebno hiljadu godina da premosti provaliju između Arhimedovog pravila i narednog stupnja u razvoju logaritamskih tablica. Ne morate se plašiti ako vam odu nekoliko časova ili nekoliko dana na to da se naviknete da se služite negativnim ili razlomljenim izložiocima.

Sad možemo logaritamsku tablicu proširivati do mile volje. Tako za logaritme koji se osnivaju na geometriskom nizu 2^n možemo izraditi tablicu kao što je ova koja je tačna do tri decimalna mesta

$n = \log_2 N$	$N = \mathrm{antilog}_2 n$	
0	1	1,000
0,5	$\sqrt{2}$	1,414
1,0	2	2,000
1,5	$\sqrt{2^3}$	2,828
2,0	4	4,000
2,5	$\sqrt{2^5}$	5,657
3,0	8	8,000
3,5	$\sqrt{2^7}$	11,314
4,0	16	16,000
itd.	itd.	

Logaritmi su brojevi aritmetičkog roditeljskog niza n geometriskog niza a^n. Da bismo razlikovali logaritme koji odgovaraju članovima u jednom geometriskom nizu od logaritama

koji odgovaraju članovima u nekom drugom geometriskom nizu, označavamo sa a osnovu niza i pišemo to a kao matematički pridev desno dole, da bismo pokazali kojim se logaritamskim tablicama služimo. Tako na pr.

$$\log_2 2{,}828 = 1{,}5$$

ili

$$\mathrm{antilog}_2 (1{,}5) = 2{,}828$$

Razume se da možemo nastaviti popunjavanje ove tablice dokle god nam je to potrebno. Tako možemo staviti

n	$\mathrm{antilog}_2 n$
$0{,}25 \left(\text{tj. } \frac{1}{4}\right)$	$\sqrt[4]{2}$
$0{,}75 \left(\text{tj. } \frac{3}{4}\right)$	$\sqrt[4]{2^3}$
itd.	itd.

Čim smo dobili takvu tablicu, možemo se njome poslužiti da pomnožimo brojeve na ovaj način. Pretpostavimo da želimo da pomnožimo 2,828 sa 5,657. Tablica nam kaže da je

$$\log_2 2{,}828 = 1{,}5 \quad \text{ili} \quad 2^{1,5} = 2{,}828$$
$$\log_2 5{,}657 = 2{,}5 \quad \text{ili} \quad 2^{2,5} = 5{,}657$$

Arhimedovo pravilo nam kaže da je

$$2{,}828 \cdot 5{,}657 = 2^{1,5} \cdot 2^{2,5} = 2^{1,5+2,5} = 2^4$$

I tako je broj koji tražimo broj čiji je logaritam 4, tj.

$$\mathrm{antilog}_2\, 4 = \mathrm{antilog}_2 (1{,}5 + 2{,}5) =$$
$$= \mathrm{antilog}_2 (\log_2 2{,}828 + \log_2 5{,}657)$$

Tablica pokazuje da $\mathrm{antilog}_2\, 4$ iznosi 16. Da biste to proverili pomnožite:

```
      2,828
  ×
      5,657
  ---------
    14,140
     1,6968
      14140
       19796
  ------------
  15,997996 = 16
```

Razlika je 2 na 16 000. To je greška nešto veća od 1 na 10 000. Razume se da bismo bolji rezultat dobili da smo uzeli tablice u kojima su cifre tačne do petog, sedmog, devetog, ili još i daljeg desetnog mesta. Pravilo za množenje pomoću logaritama može se ukratko ovako izraziti: »Da biste pomnožili dva broja nađite ove brojeve u stupcu antilogaritama, saberite odgovarajuće brojeve u stupcu logaritama, pa nađite broj koji odgovara rezultatu u stupcu antilogaritama«.

Mogućnost da se izradi takva tablica nagoveštena je u nekoliko dela o trgovačkoj računici u šesnaestom veku. Štifel je uočio koristi od nje. To je preporučivao i Simon Jakob, a nekoliko godina posle objavljivanja Neperovih logaritama sinusa, Jobst Birgi iz Praga objavio je Tablice aritmetičkih i geometriskih progresija, da bi se uprostili računi primenom principa logaritamskog množenja. Birgijeva tablica bila je uglavnom kao ova što smo je dali, samo što je osnova bila 1,0001. Taj je broj izabran iz razloga koji će biti docnije objašnjen. Kepler je pominjao Birgijevu tablicu kao koristan pronalazak za astronomska računanja. Ipak njen postanak nije neposredno vezan za potrebe za brzim računanjem u pomorskoj plovidbi, kao što je slučaj sa Neperovim logaritmima sinusa. Ona je samo nešto docnije unapredila primenu Stevinusove tablice složenog interesa.

Neper i Birgi su pronašli logaritme u razmaku od nekoliko godina, nezavisno jedan od drugoga. Ali nijedan od njih nije za osnovu uzeo jedan od ona dva broja na čijoj osnovi su izrađene današnje logaritamske tablice. Videli smo da se u trigonometriji upotrebljavaju dve jedinice za merenje uglova. Pri radu na praktičnim problemima još se držimo vavilonskog stepena. U teoriskim problemima upotrebljavamo radijan, pošto je veličina radijana vrlo prosto vezana sa veličinom kružnog obima. Docnije će se jasnije videti preimućstvo radijana. Kao kod ugla i kod logaritama se služimo dvema vrstama tablica: jedne za praktične potrebe, a druge zato što logaritmi tako računati imaju relativno proste matematičke osobine. Ovi drugi se zovu prirodni logaritmi. U trigonometriji, kao što ćemo videti, moderne tablice su najpre računate u radijanima, a onda su promenjene u stepene za praktičnu upotrebu primenom jednačine

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ stepena}$$

Postoji prosto pravilo po kome se logaritmi izračunati za jednu osnovu mogu pretvoriti u logaritme sa drugom osnovom. To se pravilo osniva na tome da je $(n^a)^b = n^{ab}$. Na pr. $8^3 = (2^3)^3 = 2^9$, u što se možete uveriti ako pomnožite. Pravilo se dokazuje ovako. Pretpostavite da ste izračunali logaritam i antilogaritam za osnovu 2. Kad pogledamo u tablice nalazimo da je $\log_2 10 = 3{,}322$, ili, drugim rečima, $2^{3{,}322} = 10$. Zato, ako je

$$M = 10^m \text{ tj. } m = \log_{10} M \text{ biće}$$

$$M = 2^{3{,}322\,m}, \quad \text{tj. } 3{,}322\,m = \log_2 M$$

To je dalje

$$3{,}322 \log_{10} M = \log_2 M$$

ili

$$\log_{10} M = \frac{\log_2 M}{\log_2 10}$$

Možemo ispisati to pravilo u opštijem obliku:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

Na primer, $\log_2 8 = 3$. Odatle je

$$\log_{10} 8 = \frac{3}{3{,}322} = 0{,}903.$$

Za praktične potrebe osnova je 10 zato što je 10 osnova našeg brojnog sistema. Ta činjenica uprošćuje izračunavanje logaritamskih tablica iz ovog razloga. Ako je osnova 10, osnovni brojevi su ova dva niza:

log	—2	—1	0	1	2	3	4	itd.
antilog	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	

I tako je $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$, a $\log_{10} \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = 0{,}50$. Kvadratni koren iz 10 (sa tri decimala) jeste 3,162. I tako možemo napisati:

$$\log_{10} 3{,}162 = 0{,}500$$

Međutim je $31{,}62 = 3{,}162 \cdot 10$

I tako je
$$\begin{aligned} \log_{10} 31{,}62 &= \log_{10} (3{,}162 \cdot 10) \\ &= \log_{10} 3{,}162 + \log_{10} 10 \\ &= 0{,}500 + 1 \\ &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Slično tome je
$$\begin{aligned} \log_{10} 316{,}2 &= \log_{10} (3{,}162 \cdot 100) \\ &= \log_{10} 3{,}162 + \log_{10} 100 \\ &= 0{,}500 + 2 \\ &= 2{,}5 \end{aligned}$$

I tako kad pomeramo desetnu zapetu u decimalnom broju ne menjamo decimale u njegovom logaritmu, a celi u logaritmu mogu se ispisati po zdravom razumu. Pošto je $10^0 = 1$ i $10^1 = 10$, broj levo od desetne zapete u logaritmu biće 0 za sve brojeve između 1 i 10. Pošto je $10^1 = 10$ i $10^2 = 100$ celi u logaritmu za brojeve između 10 i 100 iznosiće 1. Pošto je $10^2 = 100$ i $10^3 = 1000$, celi u logaritmu iznosiće 2 za brojeve između 100 i 1000. Slično tome 1 ispred decimala nekoga broja čiji antilogaritam tražimo, znači: »Pomnoži antilogaritam decimalnog dela sa 10«. 2 ispred decimala znači: »Pomnoži antilogaritam decimala sa 100.« itd. To znači ako imamo logaritme svih brojeva između 1 i 10 u podesnim razmacima imamo sve što nam treba za množenje. Na primer, hoćemo da pomnožimo 1,536 sa 77. Tablice nam kažu da je

$$\log_{10} 1{,}536 = 0{,}1864$$
$$\log_{10} 7{,}7 = 0{,}8865$$

Otuda
$$\log_{10} 77 = 1{,}8865$$

I tako je
$$\begin{aligned} 1{,}536 \cdot 77 &= \operatorname{antilog}_{10} (0{,}1864 + 1{,}8865) \\ &= \operatorname{antilog}_{10} 2{,}0729 \\ &= 100 \cdot \operatorname{antilog}_{10} 0{,}0729 \\ &= 100 \cdot 1{,}183 \\ &= 118{,}3 \end{aligned}$$

Kao što ćete videti kad pomnožite, rezultat je tačan do četvrte važeće cifre (do prvog desetog mesta). Pa to je sve što

ste i mogli očekivati, pošto smo upotrebili tablice sa četiri decimala.

Prve logaritme proračunate na osnovi 10 objavio je Brigs u saradnji sa Neperom. Brigs je dao logaritme svih brojeva od 1 do 1000 sa četrnaest decimala tačno. Nešto docnije (1628 g.), u Holandiji, Adrijen Vlak je objavio logaritme od 1 do 100 000 sa deset decimala tačno. Da bismo se služili logaritmima potrebne su nam tablice koje u jednom stupcu daju n (= $\log N$), a u drugom N (= $\operatorname{antilog} n$). Kad se radi s logaritmima mnogo je zgodnije da se imaju posebne tablice brojeva na jednakim razmacima sa odgovarajućim logaritmima i antilogaritmima, da bi se moglo brže naći ono što nam je potrebno. Tablica u kojoj levi stubac daje brojeve (N) u jednakim razmacima, a desni stubac daje njihove logaritme ($\log N$) zovu se logaritamske tablice. Tablice u kojima levi stubac daje brojeve (n) u jednakim razmacima a desni stubac daje odgovarajuće antilogaritme ($\operatorname{antilog} n$) zovu se tablice antilogaritama. Birgijeve tablice bile su tablice antilogaritama u ovome smislu. Brigsove tablice bile su logaritamske tablice. Da bi se sastavile logaritamske tablice, imamo da počnemo time što ćemo sastaviti tablice antilogaritama. Grube logaritamske tablice možete sastaviti približnom metodom na ovaj način. Najpre imamo

$$1 = 10^0$$
$$\log_{10} 1 = 0$$

Zatim nalazimo množenjem:

$$2^{10} = 1024$$

što se od 1000 razlikuje za $2\frac{1}{2}$ procenta.

$$\begin{aligned} 2^{10} &= 10^3 \text{ (približno)} \\ 2 &= \sqrt[10]{10^3} \text{ (približno)} \\ &= 10^{\frac{3}{10}} \text{ (približno)} \\ &= 10^{0,3} \text{ (približno)} \\ \log_{10} 2 &= 0{,}3 \text{ (približno)} \end{aligned}$$

Slično tome, dobivamo množenjem:

$$3^9 = 19681$$
$$= 20\,000 \text{ (približno)}$$
$$= 2 \cdot 10\,000 \text{ (približno)}$$
$$= 10^{0,3} \cdot 10^4 \text{ (približno)}$$
$$= 10^{4,3} \text{ (približno)}$$
$$3 = \sqrt[9]{10^{4,3}} \text{ (približno)}$$
$$= 10^{\frac{4,3}{9}} = 10^{0,48}$$
$$\log_{10} 3 = 0,48 \text{ (približno)}$$

Sad $$4 = 2^2 = 10^{0,3} \cdot 10^{0,3} \text{ (približno)}$$
$$= 10^{0,6} \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 4 = 0,6 \text{ (približno)}$$

Slično tome $$2 \cdot 5 = 10$$
$$\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 10 = 1$$
$$\log_{10} 5 = 1 - 0,30 \text{ približno}$$
$$= 0,70 \text{ (približno)}$$
$$6 = 2 \cdot 3 = 10^{0,3} \cdot 10^{0,48} \text{ (približno)}$$
$$= 10^{0,78} \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 6 = 0,78 \text{ (približno)}$$
$$7^2 = 49 = 5 \cdot 10 \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 49 = \log_{10} (7 \cdot 7) = \log_{10} 7 + \log_{10} 7 = \log_{10} 5 + + \log_{10} 10$$
$$2 \log_{10} 7 = 1,70 \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 7 = 0,85 \text{ (približno)}$$
$$8 = 2^3 = \left(10^{0,3}\right)^3 = 10^{0,9} \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 8 = 0,90 \text{ (približno)}$$
$$9 = 3^2 = \left(10^{0,48}\right)^2 = 10^{0,96} \text{ (približno)}$$
$$\log_{10} 9 = 0,96$$

I tako smo dobili grube logaritamske tablice:

N	$\log_{10}$ N	N	$\log_{10}$ N
1	0	10	1,00
2	0,30	20	1,30
3	0,48	30	1,48
4	0,60	40	1,60
5	0,70	50	1,70
6	0,78	60	1,78
7	0,85	70	1,85
8	0,90	80	1,90
9	0,96	90	1,96
		100	2,00
antilog$_{10}$ n	n	antilog$_{10}$ n	n

Ovu grubu tablicu možete ovako proveriti:

$$6 \times 8 = \text{antilog}_{10} (\log_{10} 6 + \log_{10} 8)$$
$$= \text{antilog}_{10} (0,78 + 0,90)$$
$$= \text{antilog}_{10} (1,68)$$

Antilog (1,68) se nalazi između 40 i 50. Broj 1,68 odgovara broju $\frac{8}{10}$ tj. $\frac{4}{5}$ razmaka između 1,60, logaritma od 40 i 1,70 logaritma od 50. Kad uzmemo za antilog$_{10}$ 1,68 broj koji odgovara za četiri petine ili osam desetina razmaka između 40 i 50, dobijamo 48, tačan rezultat. Ove grube tablice možete upotrebiti da se dobro upoznate s upotrebom logaritama pri deljenju, ili pri »neobičnom i mučnom izvlačenju korena«. Ako povežemo Oresmusovo pravilo o negativnim izložiocima sa Arhimedovim pravilom, dobivamo:

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \cdot 10^{-m}$$

To je dalje

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$$

Ako je

$$10^n = N, \text{ onda je } \log_{10} N = n$$
$$10^m = M, \text{ onda je } \log_{10} M = m$$

$$\frac{N}{M} = 10^{n-m}$$

i

$$\log_{10} \frac{N}{M} = n - m$$

$$\log_{10} \frac{N}{M} = \log_{10} N - \log_{10} M$$

ili

$$\frac{N}{M} = \text{antilog}_{10} (\log_{10} N - \log_{10} M)$$

Pretpostavimo da hoćemo da nađemo 20 : 5. Stavimo

$$20 : 5 = \text{antilog}_{10} (\log_{10} 20 - \log_{10} 5)$$

Kad pogledamo u grube logaritamske tablice što smo izradili maločas, nalazimo da je

$$20 : 5 = \text{antilog}_{10} (1{,}30 - 0{,}70)$$
$$= \text{antilog}_{10}\, 0{,}60$$
$$= 4$$

Izvlačenje korena osniva se na pravilu

$$\sqrt[n]{10} = 10^{\frac{1}{n}}$$

Tako, ako je $N = 10^m$

$$m = \log_{10} N$$

Slično tome

$$\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}} = (10^m)^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{m}{n}}$$

$$\log_{10} \sqrt[n]{N} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$$

$$\log_{10} \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_{10} N$$

Ako hoćemo da nađemo kubni koren iz 8, stavimo

$$\sqrt[3]{8} = \text{antilog}_{10} \left(\frac{1}{3} \log_{10} 8 \right)$$

Iz ovih grubih tablica dobijamo

$$\sqrt[3]{8} = \text{antilog}_{10} \left(\frac{0{,}90}{3} \right) =$$

$$= \text{antilog}_{10}\, 0{,}30 = 2.$$

Moći ćete sad da izvedete slično pravilo

$$N^n = \text{antilog}_{10} (n \log_{10} N)$$

Proverite to na taj način što ćete naći 2^3 iz ovih grubih tablica.

Ova četiri pravila što ste sad naučili za množenje, deljenje, izvlačenje korena i dizanje broja na ma koji stepen bila su među onim »čudesnim stvarima koje se odnose na ove brojeve« koje je pomenuo Stifel. Stifel je stavio aritmetički i geometriski niz jedan iznad drugoga, pa je primetio da:

a) Sabiranju članova u aritmetičkom nizu odgovara množenje članova u geometriskom nizu.

b) Oduzimanju članova u aritmetičkom nizu odgovara deljenje članova u geometriskom nizu.

c) Množenju nekog člana iz aritmetičkog niza nekom konstantom odgovara dizanje na neki dati stepen jednog člana iz geometriskog niza.

d) Deljenju nekog člana aritmetičkog niza nekom konstantom odgovara izvlačenje datog korena iz nekog člana geometriskog niza.

Kad je već otišao tako daleko, izgleda da je velika šteta što je Luterov preobraćenik straćio grdno vreme na aritmetička proračunavanja da dokaže da je papa Lav X ona apokaliptična životinja iz otkrovenja apostola Jovana, mesto da je preuzeo da radi društveno koristan posao, pa da sastavi tablice kao Birgi ili kao Brigs.

Da bi sastavio tačne tablice logaritama, Brigs je počeo time što je izradio tablice antilogaritama služeći se ovim jednačinama

$$10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^p}$$

$$\log_{10} \sqrt[q]{10^p} = \frac{p}{q}$$

ili

$$\text{antilog}_{10} \frac{p}{q} = \sqrt[q]{10^p}$$

Na taj način dobijamo

$n = \log_{10} N$		$N = \text{antilog}_{10}\, n$	
1,000,		10,0000,	(10,0)
0,875,	$\left(\frac{7}{8}\right)$	7,4989,	$\left(\sqrt[8]{10^7}\right)$
0,750,	$\left(\frac{3}{4}\right)$	5,6234,	$\left(\sqrt[4]{10^3}\right)$
0,625,	$\left(\frac{5}{8}\right)$	4,2170,	$\left(\sqrt[8]{10^5}\right)$
0,500,	$\left(\frac{1}{2}\right)$	3,1623,	$\left(\sqrt{10}\right)$
0,375,	$\left(\frac{3}{8}\right)$	2,3714,	$\left(\sqrt[8]{10^3}\right)$
0,250,	$\left(\frac{1}{4}\right)$	1,7783,	$\left(\sqrt[4]{10}\right)$
0,125,	$\left(\frac{1}{8}\right)$	1,3335,	$\left(\sqrt[8]{10}\right)$
0,000		1,0000,	(1,0)

Za izvlačenje viših korena možemo između brojeva (n) u levom stupcu načiniti koliko god hoćemo male razmake. Da bi

dobio logaritamske tablice, tj. tablice sa brojevima (N) podjednako razmaknute za čitanje u levom stupcu i njihove logaritme u desnom stupcu, Brigs se poslužio pravilom koje je prvi zapazio Stifel. Ispišite aritmetički niz (logaritmi) počevši s jedinicom, i jedan geometriski niz (antilogaritmi), počevši sa osnovom niza, na pr.

1 2 3 4 5, ... aritmetički niz (logaritmi)

2 4 8 16 32 ... geometriski niz (antilogaritmi)

Možda ćete se setiti da aritmetička sredina dva broja a i b iznosi $\frac{1}{2}(a+b)$, a da geometriska sredina dva broja A i B iznosi $\sqrt{AB}$. Ako uzmete ma koja tri uzastopna člana u gornjem nizu, srednji član je aritmetička sredina ona druga dva. Tako, ako su 2, 3 i 4 ta tri izabrana člana, srednji član 3 biće $3 = \frac{1}{2}(2+4)$. Slično tome za tri uzastopna člana u donjem nizu srednji član je geometriska sredina ona druga dva. Tako, ako su 4, 8 i 16 ta tri člana, srednji član 8 biće $= \sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$. To je istina i kad razmak u aritmetičkom nizu dovedemo da bude razlomak kao na pr.:

2	2,5	3
2^2	$2^{2,5}$	2^3

Srednji član u donjem nizu je $2^{2,5} = \sqrt[2]{2^5}$ i geometriska sredina ona druga dva je $\sqrt{4 \times 8} = \sqrt{32} = \sqrt[2]{2^5}$.

Brigs je iskoristio tu činjenicu, da bi antilogaritamske tablice, tj. tablice u kojima su l o g a r i t m i dati u jednakim razmacima u levom stupcu, preobratio u logaritamske tablice tj. tablice u kojima su a n t i l o g a r i t m i dati u jednakim razmacima u levom stupcu. To je težak posao. Mi ćemo ga objasniti nizom približnih vrednosti za $\log_{10} 5$, kao što se vidi iz ove tablice.

$N = \text{antilog}_{10}\, n$	$n = \log_{10} N$
$A = 1$	$a = 0{,}000$
$B = 10$	$b = 1{,}000$
$C = \sqrt{AB} = 3{,}162277$	$c = \frac{1}{2}(a+b) = 0{,}500$
$D = \sqrt{BC} = 5{,}623413$	$d = \frac{1}{2}(b+c) = 0{,}750$
$E = \sqrt{CD} = 4{,}216964$	$e = \frac{1}{2}(c+d) = 0{,}625$
$F = \sqrt{DE} = 4{,}869674$	$f = \frac{1}{2}(d+e) = 0{,}6875$
$G = \sqrt{DF} = 5{,}232991$	$g = \frac{1}{2}(d+f) = 0{,}71875$
$H = \sqrt{FG} = 5{,}048065$	$h = \frac{1}{2}(f+g) = 0{,}703125$
$J = \sqrt{FH} = 4{,}958067$	$j = \frac{1}{2}(f+h) = 0{,}6953125$
$K = \sqrt{HJ} = 5{,}002865$	$k = \frac{1}{2}(h+j) = 0{,}6992187$

Nema razloga da se ovaj posao nastavi sve dok ne dobijemo rezultat tačan sa četrnaest decimala, da bi se po tome videla metoda kojom se poslužio Brigs. Možete i sami potražiti nekoliko rezultata, pa izračunati zbirove, što možete postići pomoću tablica na kraju knjige, pa proverite rezultate neposrednim množenjem itd. Onda ćete tek shvatiti koliki je udeo marljivosti i zdravog smisla ljudi, kao što su bili Brigs i Vlak, u velikom delu društvene kulture čiji je dolazak na svet omogućila protestantska Reformacija.

U jednoj ranijoj glavi videli smo da je Stevinus podneo svoj divni predlog da se uvede decimalni sistem mera u vezi sa materijalnim potrebama nove trgovačke demokratije. Videli smo da je na taj predlog obraćeno malo pažnje i da direktan odgovor nije došao. Ideološke vođe pokreta bile su i suviše zauzete prepirkom o istrajnosti svetaca u njihovoj veri i o tzv.

»stvarnome prisustvu«[1]). Iz sličnog razloga Neperovi logaritmi su jedva izbegli da ih ne pokrije tama. Matematičari toga doba su ih dočekali oduševljeno. To je dolazilo većim delom otuda što je Edvard Rajt bio čovek praktične pameti i što je Brigs u taj posao uložio ogroman trud. Te godine kad je knjiga izišla Brigs je pisao biskupu Ašeru »Nikada nisam video knjigu koja mi se više dopala, ili kojoj sam se više začudio«. Ašer se na dokolici bavio drugom vrstom aritmetike. Godinama se mučio da pronađe geneologiju kanona starog zaveta. Najzad je uspeo da utvrdi, po rečima profesora Beria, da je čoveka stvorila »sveta trojica 23 oktobra 4004 godine pre Hrista u 9 časova ujutru«. I Neper je voleo te stvari. Na univerzitetu »divio se slepoći papista koji ne mogu da vide očevidnu stvar da je njihova varoš Rim na sedam bregova što ga je naslikao sveti Jovan i to tako živo, mati svih duhovnih bludničenja... Otada sam se odlučio uz pomoć božjeg duha da vredno prilegnem da pronađem preostale tajne te svete knjige, što sam do današnjeg časa, hvaljen budi gospod, radio u svako doba kad god mi se za to pružila podesna prilika«. Srećom, on je brzo obavljao svoje poslove i tako u potpunosti spremio za štampanje 1594 g. svoje delo P r o s t o o t k r i ć e p o t p u n o g o t k r o v e n j a s v e t o g J o v a n a. Iste te godine Tiho Brahe je bio sav srećan kad je čuo od jednog mladog Skotlanđanina koji ga je posetio, prve vesti o velikom uprošćavanju veštine računanja. Izgleda da je sudbina revolucionarne epohe da izbacuje živu lavu i mrtvi pepeo gotovo u istim količinama. Da bismo postavili osnove besklasnog društva u kome će biti obilja za svakog a bede ni za koga, moramo se mnogo poučavati iz onoga čemu nas uči istorija čovekove prošlosti.

NIZOVI ZA PRAVLJENJE TABLICA. — U prvim logaritamskim tablicama bilo je netačnosti koje su zapažane i popravljane s vremena na vreme. Ogroman je trud utrošen da se one izrade. Sasvim je prirodno što je taj rad potsticao na istraživanje podesnijih metoda za njihovo izračunavanje. Ta istraživanja dala su nov potstrek za proučavanje onoga što matematičari zovu b e s k o n a č n i r e d o v i. Na početku ove knjige upotrebili smo periodičan razlomak $0{,}\dot{1}$ da pokažemo red koji nikad ne prelazi izvesnu graničnu vrednost, ma koliko članova

[1]) Po hrišćanskom verovanju Isus Hristos je stvarno pri pričešću u hlebu i vinu. — P r e v.

mi nastavili da dodajemo. Docnije smo bili u stanju da pokažemo da svaki geometriski red sa razlomljenom osnovom manjom od jedinice ima tu zgodnu osobinu da se »zagušuje« kao i 0,i. Za pronalaskom logaritama došao je pronalazak jedne velike porodice redova koji obavljaju isti posao.

Primer kojim ćemo početi jeste binomni red za razlomljeni izložilac. Ako opet pogledate u VII glavu setićete se da je

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

Ako je n pozitivan ceo broj, red na desnoj strani ima $(n+1)$ članova. Mi smo sad našli razumljivo značenje za n kad n nije pozitivno i kad je razlomak. To izaziva pitanje: Da li binomna teorema i dalje važi, kad stavimo mesto n negativne i razlomljene brojeve? Odgovor glasi: često puta važi. Ona vodi na redove koji se ponašaju uvek kao periodičan razlomak, a takvi se redovi zagušuju kao i geometriski red sa razlomljenom osnovom ako a i b imaju određene vrednosti. Da bismo pokazali da je to tako, uzećemo binomnu teoremu da nađemo dve količine koje su nam bile potrebne za konstrukciju trigonometriskih tablica. Prva je $\sqrt{\frac{3}{4}}$ koja se može napisati

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Druga je $\sqrt{2}$ koja se može napisati

$$\sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

U oba ova izraza a je 1, te binomni red dobija prostiji oblik:

$$(1-b)^n = 1 + n(-b) + \frac{n(n-1)}{2!}(-b)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(-b)^3 + \cdots$$

$$= 1 - nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 + \cdots$$

Da bismo primenili binomnu teoremu da dobijemo redove za $\sqrt{\frac{3}{4}}$ i za $\sqrt{2}$ moramo najpre načiniti tablicu binomnih koeficijenta za $\frac{1}{2}$ (tj. 0,5) i $-\frac{1}{2}$ (tj. —0,5). Zato, kad je

$$n = \frac{1}{2}$$

imamo

$$\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

Kad je

$$n = -\frac{1}{2}$$

imamo

$$\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

I tako imamo

B_1*) $= n$	0,5	— 0,5
$B_2 = \frac{n(n-1)}{2!}$	— 0,125	+ 0,375
$B_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$	+ 0,0625	— 0,3125
$B_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$	— 0,0390625	+ 0,2734375
B_5	+ 0,02734375	— 0,24609375
B_6	— 0,0205078125	+ 0,2255859375
B_7	+ 0,01611328125	— 0,20947265625
B_8	— 0,013092041016	+ 0,196380615234
B_9	+ 0,010910034180	— 0,185470581054
B_{10}	— 0,009273529053	+ 0,176197052001
B_{11}	+ 0,008008956909	— 0,168188095092
B_{12}	— 0,007007837295	+ 0,161180257797

*) Sa B su obeleženi koeficijenti u binomnom redu. — Prev.

Da bismo dobili $\sqrt{\frac{3}{4}}$ potrebno nam je $(1+b)^n$, gde je $b=-\frac{1}{4}$, a $n=\frac{1}{2}$. Zato je binomni red ovo:

$$\sqrt{\frac{3}{4}}=\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=1-0{,}5\cdot\frac{1}{4}-0{,}125\cdot\frac{1}{16}-0{,}0625\cdot\frac{1}{64}-$$
$$-0{,}0390625\cdot\frac{1}{256}-0{,}02734375\cdot\frac{1}{1024}\cdot\cdot\cdot$$

Ako uzmemo prva dva člana ovog reda, imaćemo:

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875$$

Možemo uzeti zbirove nekoliko prvih članova i od njih načiniti tablicu:

Broj članova	Iznos zbira
1	1
2	0,875
3	0,8671875
4	0,8662109375
5	0,866058349609375
6	0,866031646728515625
7	0,8660266399383544922

Ma koliko članova uzeli njihov zbir neće nikako biti manji od 0,866025. To je vrednost za $\sqrt{\frac{3}{4}}$ tačna sa 6 decimala. Dovoljno je da uzmemo zbir od prvih sedam članova ovog reda, pa da dobijemo $\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i da tako popunimo tablicu sinusa i kosinusa sa pet decimala u VI glavi.

Red za $\sqrt{2}$ ne zagušuje se tako brzo. Vi se svakako sećate da je vrednost za $\sqrt{2}$ sa četiri cifre 1,414. Binomni red se dobiva kad se stavi $b=-\frac{1}{2}$ i $n=-\frac{1}{2}$ u izrazu $(1+b)^n$

$$(1+b)^n=1+(-0{,}5)\left(-\frac{1}{2}\right)+(0{,}375)\left(-\frac{1}{2}\right)^2+$$
$$+(-0{,}3125)\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

Uzećemo kao i u prethodnom primeru zbir od nekoliko prvih članova, i to sa tačnošću do četiri cifre. Dobićemo ovu tablicu

Broj članova	Zbir
1	1
2	1,250
3	1,344
4	1,383
5	1,400
6	1,408
7	1,411
8	1,413
9	1,414

Zbir ne postaje 1,4143, ma koliko mu članova dodavali.

Uzećemo još jedan primer da pokažemo primenu binomne teoreme kod negativnih izložilaca. Rezultat iz toga primera poslužiće nam docnije da dobijemo beskonačni red za π.

Izraz

$$\frac{1}{1+x}$$

možemo napisati u obliku

$$(1+x)^{-1}$$

Neposrednim deljenjem dobivamo:

$$1:(1+x)=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdot\cdot\cdot$$

$$\begin{array}{l}
\underline{1\pm x} \\
-x \\
\underline{\mp x \mp x^2} \\
\quad +x^2 \\
\quad \underline{\pm x^2 \pm x^3} \\
\qquad -x^3 \\
\qquad \underline{\mp x^3 \mp x^4} \\
\qquad\quad +x^4 \\
\qquad\quad \underline{\pm x^4 \pm x^5} \\
\qquad\qquad -x^5 \\
\qquad\qquad \underline{\mp x^5 \mp x^6}\cdot\cdot\cdot \\
\qquad\qquad\quad +x^6
\end{array}$$

Kad upotrebimo binomni red dobijamo:

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-1-1)}{2}x^2+$$
$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3\cdot 2}x^3+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}{4\cdot 3\cdot 2}x^4+$$
$$+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)(-1-3)(-1-4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}x^5+\dots.$$
$$=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\dots.$$

Rezultat je, dakle, kao i kad neposredno delimo.

Vi ćete, sasvim prirodno, upitati otkud znamo kad će se možda takav jedan red zagušiti. Prvi matematičari koji su upotrebili redove neograničene dužine nisu lupali glavu da nađu podesno sredstvo pomoću koga mogu odlučiti kad se red neograničene dužine zagušuje, a kad ne. Oni su bili zadovoljni što ih mogu upotrebiti, pošto su našli da oni vode ka korisnim rezultatima. Veoma je utešno setiti se čudnih grešaka koje su pravili neki od najizvrsnijih matematičara sedamnaestoga veka, pošto su takva sredstva tek kasnije pronađena. Red koji je zbunio Lajbnica[1]), o čijem ćemo ogromnom doprinosu matematici govoriti docnije, bio je gornji red $1-x+x^2-x^3\dots$ za $x=1$, znači

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

Ovo je geometriski red $(-1)^n$, gde n dobija uzastopne vrednosti 0, 1, 2, 3, 4 itd., dokle god hoćemo da nastavimo. Zbirovi prvih n članova biće:

Broj članova	Zbir
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1

[1]) Gotfrid Lajbnic, Nemac (1646—1716), veliki matematičar i filozof. — Prev.

Ovo se ne zagušuje. Lajbnic je dokazivao da je zbir ovog reda $\frac{1}{2}$, pošto je $2^{-1}=0{,}5$*). U stvari ovaj zbir nema granične vrednosti. I tako $(1+1)^{-1}$ ne može da se pretstavi na ovaj način. Trebalo je čekati sve do devetnaestog veka da se nađu valjana sredstva pomoću kojih se odlučuje da li red neograničene dužine prilazi nekoj graničnoj vrednosti kao što je granična vrednost $\frac{1}{9}$ za red:

$$0{,}1+0{,}01+0{,}001+0{,}0001+\dots$$

Lakše će vam biti da oprostite Lajbnicu kad znate da je jedan matematičar sedamnaestog veka iz ponašanja ovoga reda izveo nepobitan dokaz da je ovaj svet stvorilo božansko proviđenje ni iz čega.

Najprostije sredstvo koje nam pomaže da odlučimo da li se neki neograničeni red zagušuje jeste u tome da ga uporedimo s nekim redom kao što je onaj gore, za koji znamo da se zagušuje. Ovo sredstvo može da se upotrebi da pokaže kako se guši binomni red u izrazu:

$$(1+b)^n=1+nb+\frac{n(n-1)}{2!}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3+\dots.$$

dok je b između -1 i $+1$.

Možete videti kako se to sredstvo može primeniti na red

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots.$$

Razlog zašto se ovaj red guši osniva se na izrazu $r!$ u imeniocu člana $(r+1)$**). Taj član mi ćemo obeležiti sa t_r:

$$t_r=\frac{x^r}{r!}$$

*) $(1+x)^{-1}$ postaje za $x=1$ ovo: $(1+1)^{-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}=0{,}5$. — Prev.

**) U imeniocu trećeg člana imamo 2! U imeniocu četvrtog člana 3! Redni broj člana (3, 4) uvek je za 1 veći od broja koji stoji u imeniocu. — Prev.

Međutim, naredni član biće:

$$t_{r+1} = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!}$$

A to je dalje:

$$t_{r+1} = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = \frac{x^r \cdot x}{r!\,(r+1)} = \frac{x^r}{r!} \cdot \frac{x}{r+1} = t_r \cdot \frac{x}{r+1}$$

Ma kakvo bilo veliko x nastupiće trenutak kad će r biti veće od $10x$. Od toga trenutka svaki naredni član je manji od jedne desetine prethodnog člana. Mi već znamo da red u kome je svaki član tačno jedna desetina svoga prethodnog člana jeste desetni periodični razlomak kao $0,\dot{1}$ čija je granična vrednost $\frac{1}{9}$ ili kao 0,7 čija je granična vrednost $\frac{7}{9}$. Red u kome je svaki član tačno jedna desetina prethodnog člana ne može da raste preko izvesne mere. A onda ni red u kome je svaki član manji od jedne desetine svoga prethodnog člana ne može da raste preko izvesne mere. Takav red je uvek »k o n v e r g e n t a n« kako to matematičari kažu. Ili, da upotrebimo svoju sopstvenu metaforu, to je red koji se zaguši pod uslovom da m bude manje od x^r (za ma koje određeno x), kad pripada ovoj porodici:

$$1 + m_1 + \frac{m_2}{2!} + \frac{m_3}{3!} + \frac{m_4}{4!} + \cdots .$$

Kad je u redu ove vrste brojilac neki veoma mali razlomak veoma tačan rezultat se može dobiti kad se uzmu samo nekoliko članova. Na primer, ako želimo da nađemo peti stepen od 1,0001 (osnova Birgijevih tablica) možemo staviti

$$(1{,}0001)^5 = (1 + 0{,}0001)^5 =$$

$$= 1 + 5 \cdot 0{,}0001 + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}(0{,}0001)^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}(0{,}0001)^3 + \cdots$$

i dobijamo red koji pripada navedenoj vrsti redova jer je $m_6 = m_7 \ldots = 0$.

Zbir prva dva člana je 1,0005. Zbir prva tri člana je 1,0005001. Zbir prva četiri člana je 1,00050010001. Svaki naredni član je manji od hiljaditog dela svog prethodnog člana. I zato

je rezultat tačan do desete cifre, čak i onda, kad uzmemo samo prva tri člana.

Jedan red iz ove porodice je od ogromne važnosti u modernoj matematici. On nas vodi ka zamenici e koja pretstavlja osnovu logaritama koji se zovu »prirodni« logaritmi. Najbolje moderne logaritamske tablice izračunate su sa više od dvadeset decimala. Da se Brigsovom metodom dođe do te tačnosti, trebalo bi izvršiti gotovo natčovečanski rad. Taj se posao ogromno smanjuje kad se najpre izračunaju »prirodni« logaritmi za osnovu e, pa se onda iskoristi obrazac

$$\log_{10} a = \frac{\log_e a}{\log_e 10}.$$

Red koji vodi ka e zove se eksponencijalni red. Eksponencijalni red glasi:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \text{ itd.}$$

Ako je $x = 1$ vrednost ovog reda pretstavlja broj e. Tj.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

Posle desetog člana svaki je član manji od jedne desetine prethodnog člana. Zato, kad dodamo jedan nov član (preko desetog), unosimo novu tačnu cifru preko poslednjeg tačnog desetnog mesta zbira svih prethodnih članova do tog člana. Ma koliko članova uzeli, taj zbir ne postaje veći od 2,7182818285, sa tačnošću do desetog decimala. Dobiveni rezultat je tačan do petog decimala ako saberemo samo devet članova. Broj e se — kao i π — ne može izraziti jednim jedinim brojem. Na više načina možemo izvesti korisnu karakteristiku ovoga reda. Jedan način se osniva na binomnoj teoremi. Mi ćemo prići tome načinu oglednom metodom. Ovaj red je veoma koristan zbog toga što se pomoću njega može količina e podići na ma koji stepen po jednom prostom pravilu (vidi Dodatak 3).

Ovo pravilo glasi: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ Na primer $e^{\frac{1}{5}} = (2{,}71828\ldots)^{\frac{1}{5}}$ je

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{125} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{625} \cdot \frac{1}{4!} + \cdots .$$

Videćete i sami kako se ovaj red brzo zaguši, ako saberete prvih n članova gde je $n = 1, 2, 3, 4, 5$, a zbirovi 1 1,2 1,22 1,2213 1,22139. Dodavanjem novog člana u ovom slučaju ne utiče se nikad na novo tačno desetno mesto koje je dao prethodni član. Tako bi nam trebalo da uzmemo samo šest članova reda, da bismo dobili peti koren iz 2,71828 ... tačno do šestog decimala. Ogromno se napora uštedi pri izračunavanju logaritama, kad se upotrebi eksponencijalni red. Docnije ćemo naići na jedan red koji još više smanjuje posao. On se zove **logaritamski red** i mi ćemo ga iskoristiti da dobijemo »konvergentni« red za π.

Na eksponencijalni red naveli su ljude binomni redovi kao što su:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Kad je u takvim izrazima x vrlo malo onda će x^2, x^3 itd. biti uvek mnogo manje nego x u opadajućem redu. Ako je na primer

$$x = \frac{1}{100} = 0{,}01 \quad \text{biće}$$
$$x^2 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$
$$x^3 = 0{,}000001$$
$$x^4 = 0{,}00000001 \quad \text{itd.}$$

Zato dobivamo vrlo dobru prvu približnu vrednost kad je x vrlo malo, ako uzmemo

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x$$
$$(1 + x)^4 = 1 + 4x$$

Koliko je dobar odgovor zavisi od toga koliko je x malo i koliko je n veliko u opštem izrazu

$$(1 + x)^n = 1 + nx \ \text{(približno)}$$

Na primer ako x iznosi 0,1 biće $(1 + x)^2 = (1{,}1)^2 = 1{,}21$

Prva približna vrednost daje 1,2 što je za nešto manje od 1 procenta. Biće vam korisno ako sami proverite ove rezultate za $(1 + x)^n$:

x	n	$(1 + x)^n$	$1 + nx$	Greška u %
0,1	2	1,21	1,2	0,8
0,1	3	1,331	1,3	2,3
0,1	4	1,4641	1,4	4,4
0,01	2	1,0201	1,02	0,01
0,01	3	1,030301	1,03	0,03
0,01	4	1,04060401	1,04	0,06

Iz ovoga vidite da ako je x isto, greška koja se javlja pri upotrebi približnog obrasca uvek je veća za više nego za niže stepene. Na primer greška pri određivanju vrednosti za $(1 + x)^4$ je gotovo šest puta veća nego pri nalaženju vrednosti $(1 + x)^2$ kad x iznosi 0,1. Ipak kad načinimo x deset puta manjim $(x = 0{,}01)$ greška pri upotrebi obrasca $1 + nx$ mesto $(1 + x)^4$ je manja od jedne desetine greške pri upotrebi tog obrasca za $(1 + x)^2$ ako u ovom poslednjem izrazu x iznosi 0,1.

Kad upotrebimo $1 + nx$ kao prvu približnu vrednost za $(1 + x)^n$ mi smo time kao beznačajnu količinu zanemarili svaki stepen od x koji se ne javlja u onom izrazu u zagradi[1]). Sad ćemo to da uradimo sa

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^n.$$

Sad dobijamo kad stavimo $n = 2$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} +$$
$$+ x + x^2 + \frac{x^3}{2!} +$$
$$+ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4}$$

---

[1]) Odmah imamo u idućem redu u zagradi izraz u kome je najviši stepen iksa 2. Znači sve stepene više od 2 zanemarićemo. — Prev.

Ako odbacimo sve izraze koji sadrže stepene iksa veće od stepena u prvobitnoj zagradi, dobivamo

$$1+2x+x^2\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=1+2x+2x^2$$

$$=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}$$

Uradite isto sa izrazom

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^3$$

Naći ćete, kad odbacite sve stepene iksa veće od x^2, da se to može svesti na

$$1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}$$

Slično tome približni obrazac za

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^4$$

biće

$$1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}$$

Ako dakle odbacimo sve stepene iksa koji su viši od najvišeg stepena u zagradi, dobivamo drugi opšti obrazac za približnu vrednost, koji glasi

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^n=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}\ \ldots$$

U ovoj jednačini mnogo se više slažu leva i desna strana nego u jednačini

$$(1+x)^n=1+nx$$

To ćete videti ako izmnožite za $x=0{,}1$. Onda imamo

$$\left(1+0{,}1+\frac{0{,}1^2}{2!}\right)^2=1{,}105^2=1{,}221025$$

Ako zamenimo 0,1 mesto x u obrascu za približnu vrednost dobijamo

$$1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}=1{,}22$$

Rezultat je manji za nešto manje od 0,1 procenta. Možemo za ove približne vrednosti načiniti tablicu sličnu onoj poslednjoj:

x	n	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)^n$	$1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}$	Greška u procentima
0,1	2	1,221025	1,22	0,1
0,1	3	1,349232625	1,345	0,3
0,1	4	1,49090205	1,48	0,7
0,01	2	1,0202010025	1,0202	0,0001
0,01	3	1,0304540226	1,03045	0,0004
0,01	4	1,0408100855	1,0408	0,001

To nas ohrabruje da nastavimo i da potražimo bolju približnost iste vrste, da nam posluži za dizanje nekog broja na izvestan stepen. Ako izmnožite, naći ćete da je:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^2=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+$$

$$+x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\left(\frac{x^4}{3!}\right)$$

$$+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{2!}+\left(\frac{x^4}{2!\,2!}+\frac{x^5}{2!\,3!}\right)$$

$$+\frac{x^3}{3!}+\left(\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{2!\,3!}+\frac{x^6}{3!\,3!}\right)$$

Kad odbacite sve stepene iksa veće od x^3, dobićete:

$$1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}$$

Slično tome, kad je x malo, dobićete približne rezultate

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^3=1+3x+\frac{(3x)^2}{2!}+\frac{(3x)^3}{3!}$$

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^4=1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}+\frac{(4x)^3}{3!}$$

i opštije:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^n=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}$$

Ako sastavimo tablicu rezultata dobivenih primenom ovog približnog obrasca, kao što smo već radili, dobićemo ovo:

x	n	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)^n$	$1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}$	Greška u procentima
0,1	2	1,22139336	1,221$\dot{3}$	0,005
0,1	3	1,34984323	1,3495	0,025
0,1	4	1,49180174	1,490$\dot{6}$	0,076
0,01	2	1,0202013392	1,020201$\dot{3}$	0,0000006
0,01	3	1,0304545327	1,0304545	0,000003
0,01	4	1,0408107725	1,040810$\dot{6}$	0,00001

Sad već naslućujete šta možete i sami da nađete množenjem. To će reći, ako odbacimo članove sa x veće od četvrtog stepena, kao beznačajno male prema x^4, x^3 i x^2 kad je x manje od 1:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)^n=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+\frac{(nx)^4}{4!}$$

Kad poređamo u tablicu brojne rezultate dobivene iz ovog približnog obrasca, dobijamo:

x	n	$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)^n$	$1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+\frac{(nx)^4}{4!}$	Greška u procentima
0,1	2	1,22140257	1,2214	0,0002
0,1	3	1,34985850	1,3498375	0,0015
0,1	4	1,49182424	1,4917$\dot{3}$	0,006
0,01	2	1,020201340025	1,02020134	0,0000000025
0,01	3	1,030454533951	1,03045453375	0,00000002
0,01	4	1,040810774189	1,04081077$\dot{3}$	0,00000009

Videćete da se sve bolje slažu rezultati kad god dodamo neki nov član $\frac{x^r}{r!}$ levo i neki nov član $\frac{(nx)^r}{r!}$ desno u izrazu

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)^n=1+nx+$$
$$+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+\frac{(nx)^4}{4!}+\ldots .$$

Zato se nećete iznenaditi kad nađete da, ako dodamo dovoljno ovakvih članova, x možemo približiti jedinici koliko god hoćemo, pa ipak dobiti dobar rezultat. Ako je $x=1$ u beskonačnom eksponencijalnom redu

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots .$$

taj red postaje

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Ovaj red, kao što smo već uočili, ne može da raste preko izvesne granične vrednosti koja iznosi 2,71828 sa tačnošću od šest cifara. Zato, ako je rezultat dobar kad je $x=1$, imamo:

$$e^n=(2{,}71828\ldots)^n=1+n+\frac{n^2}{2!}+\frac{n^3}{3!}+\frac{n^4}{4!}+\ldots .$$

Rezultate na levoj i desnoj strani možemo doterati da se onoliko slože koliko nam je potrebno. To postižemo dodajući levo dovoljno decimala, a desno nove članove tipa $\frac{x^n}{r!}$, To se može ovako objasniti.

Uzmimo samo dva člana, tj.

$$(1+x)=(1+1)=2$$
$$(1+x)^2=(1+1)^2=2^2=4$$
$$1+2x=1+2=3$$

Razlika između $(1+x)^2$ i $1+2x$ je 25 procenata.

Kad postupimo kao i ranije, možemo sastaviti ovakvu tablicu:

Tačna vrednost za	Svega	Približna vrednost	Svega	Greška u procentima
$(1+1)^2$	4,0	$1+2$	3,0	25
$\left(1+1+\frac{1}{2!}\right)^2$	6,25	$1+2+\frac{2^2}{2!}$	5,0	20
$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)^2$	7,$\dot{1}$	$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}$	6,$\dot{3}$	11
$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)^2$	7,33507	$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}$	7,0	4,6
$\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\right)^2$	7,38028	$1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}$	7,2$\dot{6}$	1,5

Dovedeni smo na ovaj zaključak: ako je

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

onda je

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

Možete ovo isprobati za neki razlomljeni izložilac (eksponent). Stavite $x=\frac{1}{2}$, pa saberite šest prvih članova eksponencijalnog reda:

$$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}=\sqrt{2{,}71828\ldots}=1{,}649 \text{ (tačno do tri decimala).}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1}{2^5\cdot 5!}+\cdots=$$

$$=1+0{,}5+0{,}125+0{,}02083+0{,}00260+0{,}00026+\ldots$$

$$=1{,}649 \text{ (tačno do tri decimala).}$$

Da biste proverili gornji obrazac za negativno x, stavite $x=-1$. Kad saberemo prvih osam članova eksponencijalnog reda dobijamo:

$$e^{-1}=\frac{1}{2{,}71828\ldots}=0{,}368 \text{ (tačno do tri decimala).}$$

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots=$$

$$=(1-1)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{24}\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{720}\left(1-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$$=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{840}+\cdots=$$

$$=0{,}368 \text{ (tačno do tri decimala).}$$

Kada metodama koje smo izložili izračunavamo logaritme za osnovu koja nije e, najpre treba jednako da izvlačimo kvadratne korene ili kubne korene, da bismo dobili tablicu antilogaritama. Ako želimo osmi koren iz 10, treba tri puta uzastopce da izvlačimo kvadratni koren[1]). Da bismo dobili šesti koren, imamo da izvučemo kvadratni koren iz kubnog korena ili obrnuto. Nema pravila za izvlačenje neparnog korena sem kubnog. Svaki koren od e dobijamo time, što mesto x stavimo razlomak. Lakše je računati veće korene od e nego manje, pošto se onda red brže zaguši. To možete videti i iz izračunavanja vrednosti za $\sqrt[5]{e}$ ili $e^{\frac{1}{5}}$, koje je već prikazano. Prve logaritme sa osnovom e objavio je Spejdel 1619 g. Veoma je lako dobiti ma koji koren broja e. Ta lakoća je samo jedna od mnogih zanimljivih osobina što ga ima ovaj neobični broj. Na primer, on je u tesnoj vezi sa beskonačnim redom koji pretstavlja broj π.

Taj broj nam pomaže da dobijemo neograničene[2]) redove za sinuse i kosinuse nekog ugla, te tako uprošćuje izradu tačnih trigonometriskih tablica za astronomiju, zemljomerstvo i moreplovstvo.

UPOTREBA UOBRAŽENOG (IMAGINARNOG) BROJA. — Najzanimljiva stvar, koja na prvi pogled iznenađuje kod matematičke zamenice e jeste ta, što je ona tesno vezana sa količinama koje sretamo u trigonometriji. Kad je pravio svoje logaritamske

[1]) $\sqrt[8]{10}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$. — Ovde je $2\cdot 2\cdot 2=8$. — Prev.

[2]) To znači beskonačne. — Prev.

tablice za sinuse uglova Neper je najpre nastojao da utvrdi kako se menja dužina polutetive (v. sliku 129), kad se ona kreće duž prečnika nekog kruga, korak po korak, s tim da je svaki »korak« jednak odgovarajućem komadu obima. Na krugu čiji je poluprečnik jedinica polutetiva je sinus ugla što ga obuhvata neki luk. Praktični problem sastojao se u tome, da se sa dužinom polutetive dovedu u vezu količine čije sabiranje odgovara množenju sinusa. Rečeno na jeziku moderne matematike to je značilo da se izračunaju logaritmi sinusa sa osnovom $e^{-1} = (0{,}368\ldots)$. Neperu nije bio poznat red koji smo maločas pokazali, te nije bilo jasno zašto je broj e doveden u vezu sa ponašanjem sinusa. To je postalo jasno tek kad je Moavr otkrio prvu zaista važnu primenu uobraženog broja i.

Oko sredine šesnaestog veka širila se Reformacija u Francuskoj, kao što se socijalizam širio u Nemačkoj i Austriji završnih godina devetnaestog i početnih godina dvadesetog. Onda je došao užas Vartolomejske noći avgusta 1572 g. Zavladala je intelektualna reakcija kao ovo danas u Nemačkoj i Austriji[1]). Čak i ljudi kao što je Dekart, koji su uvek bili privrženi starome režimu, potražili su utočište u Holandiji, u Engleskoj i u njihovim kolonijama. Tako se dogodilo da se duhovni život protestantskih demokratija u naponu obogatio u sedamnaestom veku time, što je upio u sebe najtananije plodove francuskoga duha. Nesumnjivo je da Engleska, Holandija i njihove američke kolonije nisu bile idealne zemlje za život u njima. Važno je to da je novom društvenom poretku potrebno bilo istinsko duhovno delovanje i da je pružao mogućnosti za rad u tome pravcu. Među Hugenotima izbeglicama koji su se u sedamnaestom veku nastanili u Engleskoj bili su i Moavrovi roditelji. Mi Englezi izgovaramo njegovo ime po engleski, pošto možemo s pravom biti ponosni, što je nekad naša zemlja predvodila čovečanstvo u njegovom napredovanju ka velikoj zajednici znanja i nauke.

Moavr[2]) je pronašao jedno novo polje za računanje pomoću matematičkog gerundiuma i ili $\sqrt{-1}$, kao što je Diofant iskoristio matematički gerundium $(-a)$. To što se zove Moavrova teorema otvorilo je novu glavu u modernoj algebri, isto onako kao što je z a k o n o z n a c i m a otvorio novu glavu u

[1]) Ovo je delo pisano uoči Drugog svetskog rata. — P r e v.

[2]) Avram Moavr, rođen 1667 g u Vitriu, u Francuskoj od protestantskih roditelja; umro u Londonu 1754. — P r e v.

algebri staroga doba. Osnovna pravila za primenu broja $\sqrt{-1}$ osnivaju se prosto na samom tom zakonu o znacima. Znači ako je

$$i = \sqrt{-1}$$

biće

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\begin{aligned}
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i\\
i^4 &= (i^2)^2 = (-1)^2 = 1\\
i^5 &= 1^4 \cdot i = 1 \cdot i = i\\
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1\\
i^7 &= i^6 \cdot i = (-1)\, i = -i\\
i^8 &= i^7 \cdot i = (-i)\, i = -i^2 = -(-1) = 1
\end{aligned}$$

itd.

Tako ćemo imati:

$$\begin{array}{ccccccccc}
i & i^2 & i^3 & i^4 & i^5 & i^6 & i^7 & i^8 & i^9\ldots\ldots\\
+i & -1 & -i & +1 & +i & -1 & -i & +1 & +i\ldots\ldots
\end{array}$$

Pravilo koje nosi Moavrovo ime (Moavrova teorema) kao i binomna teorema Omara Khajjama, jeste pravilo za dizanje neke količine na neki stepen koji pretstavlja operator n ispisan gore desno. Ona glasi:

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na.$$

Nemojte zasad lupati glavu šta ovo znači. Značenje matematičkog pravila ili je u tome što se tvrdi da se ono slaže sa drugim pravilima, ili je prosto uputstvo o tome kako ono ima da se primeni. Najpre se uverite da se Moavrova teorema slaže sa onim što već znate o sinusima i kosinusima, o negativnim količinama, o kvadratnim korenima i o stepenima. Jedna stvar koju ćete morati da upamtite jeste dokaz koji je dat u VI glavi:

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

ili

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a.$$

Kad se toga sećate, primenite obične zakone o množenju na izraz

$$(\cos a + i \sin a)^2$$

Onda imamo:

$$
\begin{array}{r}
\cos a + i \sin a \\
\cos a + i \sin a \\
\hline
\cos^2 a + i \cos a \sin a \qquad\qquad \\
+ i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a \\
\hline
\cos^2 a + 2i \cos a \sin a + i^2 \sin^2 a
\end{array}
$$

Ali mi već znamo da je

$$\sin 2a = \sin (a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a =$$
$$= 2 \sin a \cos a$$

Prema tome $2i \cos a \sin a = i \sin 2a$

Zato dobiveni rezultat možemo ovako napisati:

$$\cos^2 a + i \sin 2a + i^2 \sin^2 a$$

A pošto je $i = \sqrt{-1}$ biće $i^2 = -1$, te će gornji rezultat dobiti ovaj oblik:

$$\cos^2 a - \sin^2 a + i \sin 2a$$

Ali mi isto tako znamo da je

$$\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a = = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

Zato gornji rezultat može dobiti nov oblik:

$$(\cos a + i \sin a)^2 = \cos 2a + i \sin 2a$$

Vidimo, dakle, da ova teorema važi za dizanje na kvadrat. Kad hoćemo treći stepen, imaćemo:

$$(\cos a + i \sin a)^3 = \cos^3 a + 3i \cos^2 a \sin a +$$
$$+ 3i^2 \cos a \sin^2 a + i^3 \sin^3 a = \cos^3 a +$$
$$+ 3i \cos^2 a \sin a - 3 \sin^2 a \cos a - i \sin^3 a$$

Izvedimo najpre obrasce za cos $3a$ i sin $3a$.

$$\cos 3a = \cos (2a + a) = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a =$$
$$= (\cos^2 a - \sin^2 a) \cos a - 2 \sin a \cos a (\sin a) =$$
$$= \cos^3 a - \cos a \sin^2 a - 2 \sin^2 a \cos a =$$
$$= \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a$$

Na isti način imamo:

$$\sin 3a = \sin (2a + a) = \sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a =$$
$$= 2 \sin a \cos a (\cos a) + (\cos^2 a - \sin^2 a) \sin a =$$
$$= 2 \cos^2 a \sin a + \cos^2 a \sin a - \sin^3 a =$$
$$= 3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a$$

Kad te vrednosti unesemo gore, dobivamo

$$(\cos a + i \sin a)^3 = \cos^3 a + 3i \cos^2 a \sin a - 3 \times$$
$$\sin^2 a \cos a - i \sin^3 a = (\cos^3 a - 3 \sin^2 a \cos a) +$$
$$+ i (3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a) = \cos 3a + i \sin 3a$$

Dakle: ova teorema važi i za dizanje na kub. Istim putem dolazimo do sledećih rezultata:

$$(\cos a + i \sin a)^4 = \cos 4a + i \sin 4a$$
$$(\cos a + i \sin a)^5 = \cos 5a + i \sin 5a$$

Ovo pravilo, poznato pod imenom Moavrova teorema, važi i za razlomljene i za negativne izložioce. I tako možemo videti da je:

$$(\cos a + i \sin a)^{-n} = \frac{1}{(\cos a + i \sin a)^n} =$$
$$= \frac{1}{\cos na + i \sin na} =$$
$$= \frac{1}{\cos na + i \sin na} \cdot 1 = \frac{1}{\cos na + i \sin na} \cdot \frac{\cos na - i \sin na}{\cos na - i \sin na}$$

Ali mi znamo da je

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Otuda je:

$$(\cos na + i \sin na)(\cos na - i \sin na) =$$
$$= \cos^2 na - i^2 \sin^2 na = \cos^2 na + \sin^2 na = 1$$

Otuda je:

$$\frac{\cos na - i \sin na}{(\cos na + i \sin na)(\cos na - i \sin na)} = \frac{\cos na - i \sin na}{1} =$$
$$= \cos na - i \sin na = (\cos a + i \sin a)^{-n}$$

Nađeno je da se razlomljeni izložilac u Moavrovoj teoremi slaže s pravilima koja smo već učili. Stavićemo $a=\frac{b}{n}$;

$$(\cos a+i\sin a)^n=\left(\cos\frac{b}{n}+i\sin\frac{b}{n}\right)^n=\cos\left(\frac{b}{n}\cdot n\right)+$$

$$+i\sin\left(\frac{b}{n}\cdot n\right)=\cos b+i\sin b.$$

Ali sad moramo paziti dobro, pošto je

$$\left(\cos\frac{b+2\pi}{n}+i\sin\frac{b+2\pi}{n}\right)^n=\cos(b+2\pi)+i\sin(b+2\pi)=$$

$$=\cos b+i\sin b.$$

Međutim, lako se možete uveriti da

$$\cos\frac{b}{n}+i\sin\frac{b}{n}\quad\text{i}\quad\cos\frac{b+2\pi}{n}+i\sin\frac{b+2\pi}{n}$$

nije jedno isto. Zato možemo da kažemo da samo jedna vrednost izraza $\sqrt[n]{\cos b+i\sin b}$, tj. izraza

$$(\cos b+i\sin b)^{\frac{1}{n}}\ \text{iznosi}\ \cos\frac{b}{n}+i\sin\frac{b}{n}$$

Ako je n ceo broj, ima još $(n-1)$ drugih vrednosti:

$$\cos\frac{b+2k\pi}{n}+i\sin\frac{b+2k\pi}{n}$$

gde je $k=0, 1, 2, 3\ldots$ sve do $(n-1)$.

U jednom Dikensovom romanu dečak iz doma za siročad doterao je do poslednjeg slova u azbuci, pa pita: vredi li se mučiti tako mnogo za tako nešto malo? Može isto pitanje pasti i vama na pamet. Zato ćemo sad pokazati kako se Moavrova teorema može iskoristiti, da se skrati posao oko izrade trigonometriskih tablica. Da bi to bilo jasno, dobro će biti da pođemo malo izdalje. Već smo videli da je

$$\cos 3a=\cos^3 a-3\sin^2 a\cos a$$

Mi to možemo i ovako napisati:

$$\cos 3a=\cos^3 a-3\cos a\,(1-\cos^2 a)=$$

$$=\cos^3 a-3\cos a+3\cos^3 a=4\cos^3 a-3\cos a$$

Isti onaj rezultat kojim smo se poslužili da pokažemo tačnost Moavrovog pravila može se naravno dobiti i kad primenimo to pravilo. Ako je, dakle,

$$x=\cos a+i\sin a$$

$$x^{-1}=(\cos a+i\sin a)^{-1}$$

$$\frac{1}{x}=\cos a-i\sin a$$

$$x+\frac{1}{x}=\cos a+i\sin a+\cos a-i\sin a=2\cos a$$

i

$$x-\frac{1}{x}=\cos a+i\sin a-(\cos a-i\sin a)=$$

$$=\cos a+i\sin a-\cos a+i\sin a=2i\sin a$$

Slično tome možemo staviti:

$$x^n=\cos na+i\sin na$$

$$\frac{1}{x^n}=\cos na-i\sin na$$

I sad dalje:

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos na$$

i

$$x^n-\frac{1}{x^n}=2i\sin na$$

I tako vidimo ovo: ako je

$$x+\frac{1}{x}=2\cos a$$

da je

$$x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos na$$

Zato, ako želimo da znamo vrednost za cos $3a$ kad znamo cos a, možemo staviti:

$$2 \cos 3a = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$2 \cos a = x + \frac{1}{x}$$

$$(2 \cos a)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$8 \cos^3 a = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} =$$

$$= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2 \cos 3a + 6 \cos a$$

Odatle je

$$4 \cos^3 a = \cos 3a + 3 \cos a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

Ovo je rezultat koji smo već upotrebili. Da biste se uverili da se imaginarne količine mogu upotrebiti za računanje, možete sad staviti:

$$(2 \cos a)^6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^6$$

$$64 \cos^6 a = x^6 + 6x^5 \cdot \frac{1}{x} + 15x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 20x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + 15x^2 \cdot \frac{1}{x^4} +$$

$$6x \cdot \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} =$$

$$= \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20 =$$

$$= 2 \cos 6a + 12 \cos 4a + 30 \cos 2a + 20$$

$$\cos 6a = 32 \cos^6 a - 6 \cos 4a - 15 \cos 2a - 10$$

Ovo možete proveriti pomoću dveju vrednosti za cos a koje već znate. To su (a) $\cos 90^0 = 0$ i (b) $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$.

$$(a) \cos 540^0 = \cos (6 \cdot 90^0) =$$

$$= 32 \cos^6 90^0 - 6 \cos 360^0 - 15 \cos 180^0 - 10.$$

Ovde će biti:

$$\cos 180^0 = \cos (2 \cdot 90^0) = \cos^2 90^0 - \sin^2 90^0 =$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\cos 360^0 = \cos (2 \cdot 180^0) = \cos^2 180^0 - \sin^2 180^0 =$$

$$= (-1)^2 - 0 = 1$$

Zato je dalje:

$$\cos 540^0 = 32 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 15 (-1) - 10 = 0 - 6 + 15 - 10 =$$

$$= 9 - 10 = -1$$

$$(b) \cos 360^0 = \cos (6 \cdot 60^0) = 32 \cos^6 60^0 - 6 \cos 240^0 -$$

$$- 15 \cos 120^0 - 10 = 32 \left(\frac{1}{2}\right)^6 - 6 \cos (180^0 + 60^0) -$$

$$- 15 \cos (2 \cdot 60^0) - 10 = 32 \cdot \frac{1}{64} - 6 (\cos 180^0 \cos 60^0 -$$

$$- \sin 180^0 \sin 60^0) - 15 (\cos^2 60^0 - \sin^2 60^0) - 10 =$$

$$= \frac{1}{2} - 6\left[(-1) \cdot \frac{1}{2} - 0\right] - 15\left[\frac{1}{4} - \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2\right] -$$

$$- 10 = \frac{1}{2} + 3 + \frac{15}{2} - 10 = \frac{16}{2} - 7 = 8 - 7 = 1.$$

Sad imamo razloga da se nadamo da ćemo naterati broj $\sqrt{-1}$ ili i da radi i one poslove koje rade obični brojevi. Kad je tako, upotrebićemo ga da izvedemo dva reda iz kojih možemo dobiti sinus ili cosinus nekoga ugla do onolike tačnosti kolika nam je potrebna. Videli smo kako je trigonometrija proučavana u vezi sa izradom astronomskih tablica za moreplovce. Tim proučavanjem ubrzano je i istraživanje brzih metoda za računanje. Videli smo dalje kako je pronalazak logaritama naveo ljude na proučavanje beskonačnih redova kao što je eksponencijalni red. Delo koje je posle velikih moreplovnih putovanja krunisalo sav taj posao jeste otkriće da eksponencijalni red stoji u vrlo jednostavnom odnosu sa Moavrovom teoremom. Posledica ovog otkrića pokazala se u tome, što je još više uprošćen posao oko socijaliziranja plodova grčke geometrije; uprošćen je posao oko izrade tablica trigonometriskih funkcija, koje se upotrebljavaju za određivanje položaja broda na pučini i za izradu generalštabnih karata.

Da biste videli vezu između eksponencijalnog reda i Moavrove teoreme, najpre stavite

$$x = \cos 1 + i \sin 1$$

To je isto kao da smo u prvobitnom izrazu Moavrovog pravila stavili $a = 1$. A kad znamo da upotrebimo a kao m za svaki broj, imaćemo:

$$x^a = \cos a + i \sin a \ldots (1)$$

i

$$x^{-a} = \cos a - i \sin a$$

Kao i ranije možemo staviti

$$x^a - x^{-a} = 2 i \sin a$$

Možemo sad pretstaviti x kao neki stepen od e, ovako

$$x = e^y$$

ili

$$y = \log_e x \ldots (2)$$

Kad upotrebimo eksponencijalni red imamo:

$$x^a = e^{ay} = 1 + ay + \frac{a^2 y^2}{2!} + \frac{a^3 y^3}{3!} + \frac{a^4 y^4}{4!} + \cdots$$

$$x^{-a} = e^{-ay} = 1 - ay + \frac{a^2 y^2}{2!} - \frac{a^3 y^3}{3!} + \frac{a^4 y^4}{4!} - \cdots$$

Kad oduzmemo donje od gornjeg dobijamo

$$x^a - x^{-a} = 2ay + 2 \cdot \frac{a^3 y^3}{3!} + 2 \cdot \frac{a^5 y^5}{5!} + 2 \cdot \frac{a^7 y^7}{7!} + \cdots$$

To je dalje

$$2 i \sin a = 2 ay + 2 \cdot \frac{a^3 y^3}{3!} + 2 \cdot \frac{a^5 y^5}{5!} + 2 \cdot \frac{a^7 y^7}{7!}$$

tj.

$$\frac{i \sin a}{a} = y + \frac{y^3 a^2}{3!} + \frac{y^5 a^4}{5!} + \cdots (3)$$

Pošto je a proizvoljan ugao, ova jednačina važi kad je a tako malo da možemo zanemariti svaki član pomnožen sa a, tj.

$$y + \frac{y^3 a^2}{3!} + \frac{y^5 a^4}{5!} + \frac{y^7 a^6}{7!} + \cdots = y.$$

Videli smo i to da kad a pretstavlja radijane (VI glava), i kad je a veoma malo i teži nuli, da je 1 granica za odnos $\frac{\sin a}{a}$.

Zato tada možemo staviti

$$\frac{i \sin a}{a} = i.$$

I tako u jednačini (3) kad je a veoma malo i teži nuli, leva strana teži ka i, a desna ka y. Otuda imamo

$$i = y$$

To je dalje

$$x = e^i$$
$$x^a = e^{ia}$$

Ako ovu vrednost za x^a unesemo u (1), imaćemo, kad je a mereno u radijanima,

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

A pošto je

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1 \text{ itd., biće:}$$

$$e^{ia} = 1 + ia - \frac{a^2}{2!} - \frac{ia^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{ia^5}{5!} - \frac{a^6}{6!} - \cdots$$

Otuda imamo

$$\cos a + i \sin a = \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \cdots\right)$$

Pre no što pođete korak dalje, zapamtite da pravi matematičari ne brkaju brojeve koji pretstavljaju jednu vrstu stvari s brojevima koji pretstavljaju drugu vrstu stvari. Naš poznanik koji nije otišao u crkvu pošto je izašao iz kafane »Kornjača i ražanj« naučio nas je da količine koje imaju ispred sebe i ne pretstavljaju istu vrstu merenja kao količine koje nemaju ispred sebe i. U geometriji Reformacije oni pretstavljaju merenja u drugom jednom pravcu. Zato kad kažemo da je

$$a \text{ krušaka i } b \text{ konja} = 30 \text{ krušaka i } 2 \text{ konja}$$

onda to znači da je $a = 30$

$$b = 2$$

Moramo isto tako reći, ako je

$$\cos a + i \sin a = p + iq$$

da je onda

$$p = \cos a$$
$$q = \sin a$$

Mi ćemo sad uraditi isto sa jednačinom

$$\cos a + i \sin a = \left(1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \cdots\right)$$

Iz nje zaključujemo, ako je a mereno u radijanima, da je

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} - \cdots$$

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \frac{a^9}{9!} - \cdots$$

To znači da možete direktno izračunati kosinus ili sinus od 1 radijana, 0,5 radijana, 0,1 radijana itd. time, što ćete u gornjim beskonačnim redovima mesto a staviti 1, ili 0,5 ili 0,1 itd. Videćete da se oni moraju zagušiti brzo, ako je a manje od 1. Da biste se uverili da je ovaj rezultat pouzdan, vratite se na VI glavu. Videćete da smo pomoću Euklidove geometrije dobili vrednost

$$\cos 15^0 = 0{,}966$$
$$\sin 15^0 = 0{,}259$$

Da bismo mogli upotrebiti maločas dobivene redove, moramo pretvoriti 15^0 u radijane. Ovako:

$$15^0 = \frac{90^0}{6} = \frac{\frac{\pi}{2}}{6} = \frac{\pi}{12} =$$

Ako uzmemo za π vrednost 3,1416 imaćemo:

$$15^0 = \frac{3{,}1416}{12} = 0{,}2618 \text{ radijana}$$

Ako dakle stavimo $a = 0{,}2618$, imamo:

$$a^2 = 0{,}0685$$
$$a^3 = 0{,}0179$$
$$a^4 = 0{,}005$$
$$\text{itd.}$$

Otuda:

$$\cos 15^0 = 1 - \frac{0{,}0685}{2} + \frac{0{,}005}{24} - \cdots$$

$$\sin 15^0 = 0{,}2618 - \frac{0{,}0179}{6} + \cdots\cdot$$

Ovi se redovi zagušuju tako brzo, da su nam u njima dovoljna samo prva dva člana, da iz njih dobijemo

$$\cos 15^0 = 0{,}966$$
$$\sin 15^0 = 0{,}259$$

VEKTORSKA ANALIZA.— Sad možete videti da uobraženi (imaginarni) broj i nije samo običan plod naše mašte. Njegovom pomoću možemo izraditi tablice iz kojih izračunavamo geografsku dužinu i širinu mesta na kome se nalazi neki prekookeanski brod. Za razne proračune u pogledu naizmenične struje, na kojoj počiva moderno osvetljenje i moderna električna energija, isto tako se upotrebljava jednačina

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

Posle Moavrovog doba pronađena je jedna nova grana matematike zvana v e k t o r s k a a n a l i z a, naročito u vezi s proučavanjem izvesnih električnih pojava koje je prvi otkrio Faradej u prvoj polovini devetnaestog veka. V e k t o r je količina za koju se uzima da ima određen pravac od izvesne tačke, kao i određeno rastojanje od nje. Temperatura, sila, magnetska privlačenja, električna privlačenja i količine slične njima mogu se pretstaviti rastojanjima. Prema tome širenje toplote, sile koje teže da poteraju neko telo u izvesnom pravcu, magnetska i električna polja mogu svi biti pretstavljeni vektorima. Upotreba vektora prikazuje jednu veoma važnu pojavu u istoriji matematike. Geometriska i algebarska pravila pronađena su tako davno, da smo skloni da zaboravimo da su ona pronađena da posluže rukovanju stvarnim predmetima u svakodnevnoj društvenoj praksi. Pravila vektorske algebre izvedena su zato, da zadovolje potrebe merenja novih pojava u društvenoj praksi. Zato nije tako lako sakriti činjenicu da su oni samo gramatička pogodba koja je uvedena zato što zadovoljava potrebe društveno organizovanog čovečanstva.

Glava I prikazala je jedan mali sud sa automatskim sifonom da pokaže kako u stvarnome svetu kad na dva dodamo dva ne dobijamo uvek četiri. Kod te slike zakoni osnovne aritmetike ne bi nam pomogli da nađemo koliko ima vode u sudu, kad se izvesna izmerena količina vode doda na količinu koja je već unutra. Ako se i dalje služimo znakom $+$ da nam znači sabiranje u fizičkom smislu, trebalo bi da dođemo do ovakvih zaključaka:

$$2 + 2 = 2$$

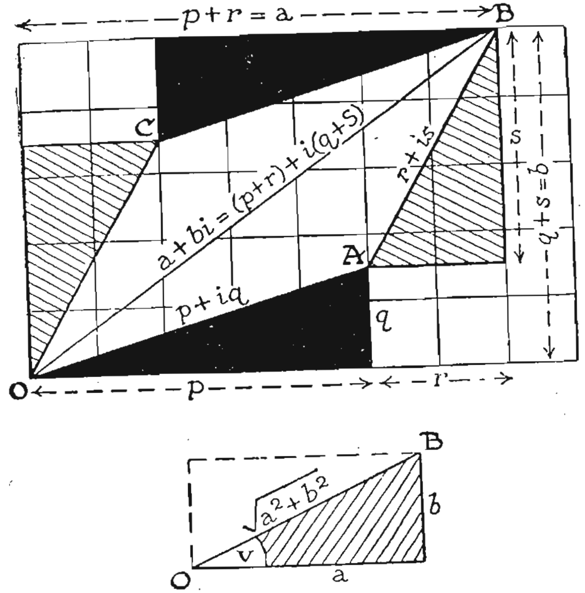
$$3 + 1 = 2$$

U vektorskoj analizi načinjeni su zakoni sabiranja, oduzimanja i množenja da odgovaraju načinu na koji mehaničke sile deluju jedna na drugu. Kako se ova grana matematike razvila uglavnom u vezi sa fizičkim problemima, nije moguće izneti njen cilj, a da se ne pribegava tehničkim primerima. Ipak se osnovni principi mogu prikazati u opštem obliku pomoću takozvanog vektorskog sabiranja. Na sl. 165 duž OA je vektor koji pretstavlja kretanje duž jednog merenog rastojanja od tačke O u pokazanom pravcu; OC je drugi jedan vektor koji pretstavlja merenu dužinu u pravcu malo više na sever od iste utvrđene tačke. Dodati vektor OA na vektor OC znači naći rastojanje i pravac od utvrđene tačke O, ako najpre izvršimo kretanje pretstavljeno vektorom OA, pa nastavimo od A da se krećemo duž vektora AB koji je jednak po veličini, pravcu i smislu sa vektorom OC. To isto kretanje možemo izvršiti ako pođemo od O u C, pa nastavimo od C do B, tj. po CB koje je

jednako po pravcu, veličini i smislu sa OA. To se piše pomoću jednog starog znaka, ma da on sad ima novo značenje. Ovako:

$$OA + OC = OB$$

Vektor OB pretstavlja rezultat koji se dobija kad se doda jednodnevno kretanje pretstavljeno vektorom OC na šetnju



SL. 165. — SABIRANJE DVA VEKTORA

koja je počela vektorom OA ili obrnuto. On pretstavlja naše krajnje rastojanje (*i pravac*) od mesta sa koga smo pošli. Brojna vrednost vektora OB, koja sadrži dužinu (rastojanje B od O) i pravac (ugao koji OB zaklapa sa osnovnom pravom što ide sa zapada na istok) — jeste i sama rezultat sabiranja jednodnevnog puta od toliko i toliko jedinica dužine na istok sa jednodnevnim putem od toliko i toliko jedinica dužine na sever, ili *obrnuto*. Na sl. 133 videli smo da kad pomnožimo neko rastojanje od x jedinica sa i da je to isto kao i rastojanje od x jedinica merenih u pravcu pod pravim uglom prema prvobitnom rastojanju. Da bismo razlikovali b jedinica merenih pravo na sever od a jedinica merenih pravo na istok, služimo se slovom i kao naslovom ispred onog prvog broja. Tako pišemo

$$OB = a + i\,b$$

Isto tako, ako je OA jednako q jedinica pravo na sever i p jedinica pravo na istok stavljamo

$$OA = p + i\,q$$

Isto tako, ako OC iznosi s jedinica pravo na sever i r jedinica pravo na istok, pišemo

$$OC = r + i\,s$$

Iz gornje slike videćete da je

$$a = p + r$$
$$b = q + s$$

Iz donje slike videćete da je rastojanje pretstavljeno vektorom OB

$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Ugao V koji pretstavlja pravac vektora jeste ugao čiji je tangens $\frac{b}{a}$. On se može naći iz tablica tangensa, ako znamo b i a. I tako je princip vektorskog sabiranja u ovome: ako počnemo da švrljamo i da menjamo pravac svakog dana, izvodimo krajnji pravac i rastojanje od polaznog mesta kad zasebno saberemo sva kretanja na sever, a zasebno sva kretanja na istok. I tako je ono uobraženo i upotrebljeno prosto kao natpis, da nas opomene da ne napravimo istu zbrku kao politiko-ekonomisti.

Kad smo definisali vektorsko sabiranje time što smo ga doveli u vezu sa fizičkim poslom šetanja za izvesnu daljinu u jednom pravcu, a za izvesnu daljinu u drugom pravcu, možemo odatle poći dalje da definišemo i druge operacije u kojima se i upotrebljava na isti način kako ga je upotrebljavao Moavr. To dovodi do nekih veoma korisnih skraćivanja poslova pri fizičkim merenjima. Takve operacije su stvorene da posluže za obeležavanje rezultata eksperimentalnih posmatranja i one su podesne za matematičku obradu one vrste pojava koje su i navele na njih. Što nauka postaje sve tačnija, ona mora da postaje nešto više nego prost skup simbola. Kojima će se pravilima pokoravati simboli, to zavisi od toga š t a naučnik istražuje.

VEŽBANJA UZ X GLAVU

KAKO DA SE SLUŽIMO LOGARITAMSKIM TABLICAMA

Treba da se uoče još neke pojedinosti o upotrebi logaritamskih tablica. Svaki broj može da se napiše kao proizvod nekog broja između 1 i 10 i broja 10 dignutog na neki stepen.

Na primer, 9876 može da se napiše kao, $9{,}876 \cdot 10^3$. Znamo da je logaritam svakog broja između 1 i 10 neki pozitivni razlomak, a da logaritam od 10^3 možemo napisati kao 3. Jasno je, dakle, da se logaritam svakog broja sastoji iz jednog celog broja koji se može napisati na prvi pogled, i iz izvesnog broja decimala koji je isti za sve brojeve koji imaju iste cifre istim redom.

Tako $\quad \log 9{,}876 = 0{,}9946$

$$\log 98{,}76 = \log 10 + \log 9{,}876 = 1{,}9946$$
$$\log 987{,}6 = \log 10^2 + \log 9{,}876 = 2{,}9946 \text{ itd.}$$
$$\log 0{,}9876 = \log 10^{-1} + \log 9{,}876 = -1 + 0{,}9946$$

i

$$\log 0{,}09876 = \log 10^{-2} + \log 9{,}876^{*)} = -2 + 0{,}9946$$

Poslednja dva logaritma pišu se ovako:

$$\log 0{,}9876 = \bar{1}{,}9946$$
$$\log 0{,}09876 = \bar{2}{,}9946$$

To je pronađeno da bi bilo lakše pri računanju. Na primer

$$\log \frac{182{,}3}{0{,}021} = \log 182{,}3 - \log 0{,}021$$
$$= 2{,}2608 - \bar{2}{,}3222$$
$$= 2 + 0{,}2608 - (-2 + 0{,}3222)$$
$$= 2 + 0{,}2608 + 2 - 0{,}3222$$
$$= 4 - 0{,}0614$$
$$= 3{,}9386$$

*) $\log 0{,}09876 = \log\left(\frac{1}{100} \cdot 9{,}876\right) = \log(10^{-2} \cdot 9{,}876) =$ itd. — P r e v.

I zbilja

$$\frac{182{,}3}{0{,}021}=\frac{182300}{21}=8681$$

$$\log 8681 = 3{,}9386$$

Pozitivni desetni razlomak u logaritmu zove se m a n t i s a. Celi u logaritmu koji mogu biti pozitivni ili negativni zovu se k a r a k t e r i s t i k a[1]).

Da bi se našao u tablicama logaritama logaritam broja 9,876, treba raditi ovako. S leve strane je stubac dvocifrenih brojeva koji počinju sa 10. Gledamo naniže niz taj stubac dok ne nađemo 98. Na vrhu tablice u položenom redu nalaze se brojevi od 0 do 9. Mi gledamo u red paralelan sa njim koji počinje sa 98. Idemo tim redom dok ne naiđemo na stubac nad kojim stoji 7. Na tome mestu dobijamo broj 9943. To je mantisa logaritma broja 9,87. Moramo voditi računa i o poslednjoj cifri 6. Onda gledamo na desnu stranu tablice gde se nalaze grupe stubaca nad kojima piše od 1 do 9. Brojevi u tim stupcima kazuju što ima da se doda na već nađeni logaritam, da bi se uzela u obzir i četvrta cifra u datome broju. U ovome slučaju mi smo ustvari našli mantisu za broj 9,870 i hoćemo da znamo koliko da dodamo da dobijemo mantisu logaritma broja 9,876. Gledajući duž reda koji počinje sa 98, vidimo na kraju desno u stupcu sa zaglavljem 6 broj 3. I tako će tražena mantisa biti 0,9943 + 0,0003, tj., 0,9946. Kad je poznat l o g a r i t a m nekog broja, t a j b r o j se može naći obrnutim putem. Na primer, možemo naći broj čiji je logaritam 2,6276. Gledamo najpre mantisu 0,6276. Bilo iz tablice logaritama, bilo iz tablice antilogaritama možemo naći da cifre koje odgovaraju toj mantisi jesu 4242. Karakteristika 2 kazuje nam da se traženi broj nalazi između 100 i 1000. Zbog toga je traženi broj 424,2.

1. — Pomnožite ove brojeve:

(a) primenom obrasca

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B)+\frac{1}{2}\sin(A-B)$$

[1]) log 8681 = 3,9386. Karakteristika je 3, a mantisa je + 0,9386 log 0,021 = $\bar{2}$,3222. Karakteristika je —2, a mantisa je opet pozitivni broj + 0,3222. — P r e v.

(b) primenom obrasca

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B)+\frac{1}{2}\cos(A-B)$$

(c) pomoću logaritamskih tablica

(1) 2,738 · 1504 (3) 5,412 · 368

(2) 8,726 · 3471 (4) 2,1505 · 46,12

Proverite rezultate običnim množenjem.

2. — Izračunajte ovo pomoću logaritama:

1) $(78{,}91)^2$ 4) $(1{,}003)^3$

2) $\sqrt{68990{,}3 : 0{,}0271}$ 5) $\sqrt[3]{0{,}0731}$

3) $9{,}437 : 484$ 6) $\dfrac{\sqrt{273}\cdot(1{,}1)^3}{0{,}48}$

3. — Naći deseti koren iz 1024, osmi koren iz 6561 i osmi koren iz 25 $\frac{161}{256}$ pomoću logaritama, pa množenjem proveriti dobivene rezultate.

4. — Nacrtajte krivu

$$y = \log_{10} x$$

5. — Ne zaboravite da su logaritmi pronalazak pomoću koga se brzo izvode množenje i deljenje. Ne postoji uprošćeni način za izračunavanje log $(a+b)$. Zato, ako na primer hoćete da izračunate $\sqrt{1{,}01}-\sqrt[3]{1{,}01}$, morate svaki član računati za sebe. Nađite vrednosti za

1) $(23{,}91)^3+(48{,}24)^3$

2) $\sqrt[4]{1001}-\sqrt[3]{101}$

3) $\dfrac{(0{,}4573)^2}{(0{,}5436)^2-(0{,}3276)^2}$

6. — Izračunajte ovo pomoću tablica:

(*a*) Nađite složen interes na 1000 dinara za 6 godina po 4 procenta godišnje.

(*b*) Koliko treba da stoji pod složenim interesom neka svota da se udvoji sa 6 procenata interesa godišnje?

(*c*) Nađite složeni interes na 400 dinara za $5\frac{1}{2}$ godina po $3\frac{1}{2}$ procenta godišnje, kad se interes uračunava polugodišnje.

7. — Ako za e uzmemo 2,718, izračunajte ovo:

$$\log_e 1{,}001 \qquad \log_e \sqrt{2} \qquad \log_e 3789$$

8. — U jednome ogledu dobivene su ove vrednosti za promenljive x i y:

x	1,70	2,24	2,89	4,08	5,63	6,80
y	320	411	491	671	903	1050

x	8,42	12,4	16,3	19,0	24,3
y	1270	1780	2250	2520	3180

Nacrtajte dve krive, jednu koja pretstavlja x i y, i drugu koja pretstavlja log x i log y. Iz ove druge pokažite da je odnos između log x i log y približno izražen jednačinom

$$\log y = 0{,}876 \log x + 2{,}299$$

Odatle izvedite jednačinu koja vezuje x i y.

9. — Razvijte po binomnoj teoremi izraz $(1 + 0{,}05)^{-4}$. Nađite mu vrednost iz pet prvih članova. Pokažite da je pri tome greška manja od 0,0000163.

10. — Služeći se beskonačnim redovima za sin a i cos a, nađite vrednosti za sin 1^0 i cos 1^0. Koliko vam je članova potrebno da nađete vrednosti za sin 1^0 i cos 1^0 date u četvorocifrenim tablicama?

11. — Služeći se beskonačnim redovima za sin na i cos na i već dobivenim vrednostima za sin 1^0 i cos 1^0, načinite tablicu sinusa i kosinusa uglova od 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 i 5^0. Dobivene rezultate uporedite sa vrednostima datim u tablicama.

DA SE UPAMTI!

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\sin(A+B) + \frac{1}{2}\sin(A-B)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B)$$

$\log_{10} 100 = 2$

$\log_{10} 10 = 1$

$\log_{10} 1 = 0$

$\log_{10} 0{,}1 = -1$

$\log_{10} 0{,}01 = -2$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$\sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots \text{ (} a \text{ je dato u radijanima)}$$

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots \text{ (} a \text{ je dato u radijanima)}$$

GLAVA XI

ARITMETIKA RAŠĆENJA I OBLIKA

ili

U čemu se sastoji infinitezimalni račun

Pronalazak logaritama i uvođenje reformaciske geometrije padaju zajedno u prve godine sedamnaestoga veka. Odmah posle njih dva tehnička uspeha privukla su pažnju matematičara i prokrčila put ka mehanici kao nauci i ka stvaranju novih metoda računanja potrebnih za dalji napredak. Jedno je bilo napredak u primeni artiljerije. Drugo, poboljšanja u konstrukciji časovnika. Kad se jedan španski kralj povukao iz spletki evropske politike i proveo kraj života crtajući modele za časovnike, ti su modeli tada bili nešto novo kao što je na pr. televizija za naše pokolenje.

Mehaničke probleme koji se javljaju u vezi sa čvrstim telima obično delimo u dve grupe. Prva, zvana s t a t i k a, bavi se pitanjem kako se dva tela drže u ravnoteži kad oba miruju. Ona se između ostalog, najviše primenjuje u rešavanju problema opterećenja prilikom projektovanja građevina. Nasuprot arhitektonskoj mehanici, ili s t a t i c i, d i n a m i k a je proučavanje tela u pokretu. Svet klasične starine stvorio je takva dela u arhitekturi i u navodnjavanju da je teško reći da su ona gora od ma čega što je izgradila naša sopstvena civilizacija. Aleksandrija je bila u tesnoj vezi sa tehničkim problemima koji su se javljali pri izradi velikih građevina i vodovodnih postrojenja. Osnovni principi statičke mehanike kako čvrstih tako i tečnih tela predavani su u Aleksandriji gotovo isto onako kako ih mi predajemo danas. Mašine upotrebljavane do pada Rimske Carevine nisu bile skoro ništa drugo do pronalasci kako da se

iskoristi telesna energija roba, vojnika, konja ili vola. Za projektovanje primitivnih mašina kao što su katapult i crpke bila je dovoljna Arhimedova statička mehanika. Kad su eksplozivi i časovnici terani pomoću tegova ili (malo docnije) pomoću opruga ušli u red ljudskih pronalazaka i našli primenu postavljene su time osnove modernoga doba. A to doba iskorišćuje energije iz drugih izvora, a ne samo iz metabolizma ljudskih bića i teglećih životinja. Pojedinačni pronalazači među Kinezima i među Aleksandrincima uviđali su mogućnost da se izrade mašine koje bi se kretale bez pomoći mišićnog rada živih bića. Heron je, na primer, izradio model parne turbine. Pa ipak je energetska osnova stare civilizacije počivala prvenstveno na upotrebi robova, ublaženoj više ili manje upotrebom teglećih životinja. Na početku šesnaestoga veka civilizacija se nalazi na pragu jednog uspeha kome je bilo suđeno da baci u zasenak sve konstruktivne uspehe od svitanja nilske civilizacije do vremena kad su ljudi oplovili Zemljinu loptu. Baš u onom trenutku kad je takmičarska gramžljivost trgovačkih preduzeća zavodila sramnu trgovinu robovima, ljudska pronicljivost pronašla je sredstvo za stvaranje društva koje bi moglo zajemčiti dokolicu i obezbeđenost bez ropstva. Rodila se dinamika ili mehanika kretanja. Ona je stvorila čitavu kulturnu provaliju između robovskih civilizacija iz prošlosti i ljudi i žena koji sad postaju istoriski svesni svoje uloge u planiranju čovekovog života na Zemlji, u planiranju zasnovanom na opštim ljudskim potrebama.

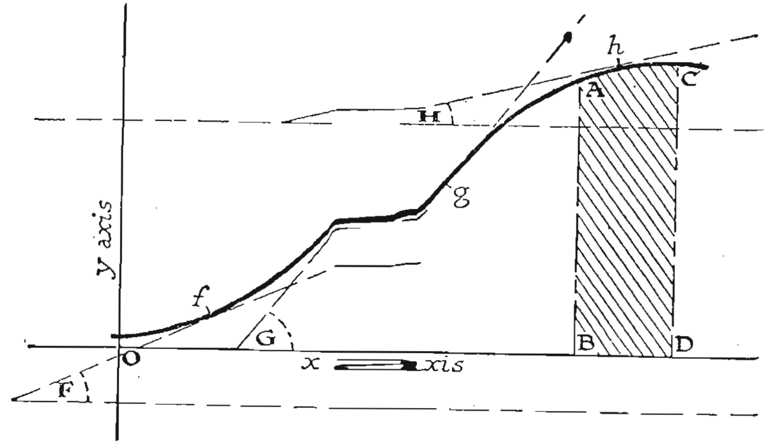
Krajem šesnaestoga veka Tiho Brahe i Kepler su proučavali zakone planetarnih kretanja. Časovnik je postajao u to doba instrument od sve veće važnosti. Ogledi činjeni da se poboljša njegov mehanizam pokazivali su zakone Zemljinog kretanja. Danas kad čujemo automobile kako menjaju brzinu uz brdo, lako nam je shvatiti šta je to ubrzanje, povećanje brzine. Ali nekada je to bilo novo iskustvo koje nije lako išlo u glavu ljudima i ženama sviklim da se lagano truckaju na kolima koja vuku konji ili volovi i koja škripe po lošim putevima. Galilej (1564—1642) je pronašao princip da uzastopne oscilacije klatna traju isto vreme. On je pokazao i to da čvrsta i srazmerno teška tela raznih veličina i gustina padaju na zemlju za isto vreme, povećavaju brzinu u istoj meri, ako se krenu sa iste tačke. Galilej je revolucionisao mehaniku uvodeći načelo da privlačna sila koja telu dolazi od njegove težine može da se meri njegovom snagom da poveća brzinu nekog drugog tela u pokretu. Hajgens (1629—1695) je prvi primenio klatno na časovnik. On je proučavao zakone sudara elastičnih tela i princip centrifugalnog kretanja i primenio ga na to da natera časovnike da na svima širinama pokazuju tačno vreme[1]). Kad se uporedi ma sa kojim prethodnim vekom, vek odmah posle velikih pomorskih putovanja izgleda kao opčinjen problemom kretanja. Njutnov zakon opšte gravitacije, krajem sedamnaestog veka, krunisao je sve dotadašnje uspehe. On je povezao ujedno planetne putanje, putanju topovskog zrna i princip centrifugalnog kretanja. Galilejev princip zemaljske gravitacije omogućio je da se pokaže zašto topovsko zrno, izbačeno pod nekim uglom prema horizontu, ide po krivoj liniji s približno stalnom horizontalnom brzinom, uslovljenom zajedničkim dejstvom početne brzine proistekle iz eksplozije i one privlačnosti Zemljine usled koje tela povećavaju brzinu pri padanju. Mogućnost da se sva materijalna tela međusobno privlače silom koja je srazmerna njihovim masama kao što vuče teg koji vezan za kraj uzice obrćemo u krug, nametala se mnogim Njutnovim savremenicima kao objašnjenje Keplerovih zakona. Njutn je uspeo da pokaže da će kriva putanja tela koje se kreće stalnom brzinom biti elipsa, ako je privlačna sila koja deluje u pravcu jedne od elipsinih žiža, izražena snagom kojom utiče na kretanje obrnuto srazmerna sa kvadratom rastojanja od te žiže. Ovaj dokaz je povezao ujedno pojavu Zemljinog kretanja sa kretanjem planeta po eliptičnim putanjama, sa njihovim veličinama i njihovim rastojanjima od Sunca u žiži elipse.

Čim su matematičari počeli da se bave problemom kretanja, arapska algebra, koja je izvodila svoje principe iz klasične geometrije, postala je za njih velika smetnja. Bili su primorani da stvore nov instrument za računanje osnovan na reformaciskoj geometriji. Ta nova algebra obično se zove i n f i n i t e z i m a l n i r a č u n. Ona je najpre primenjena u geometriji kretanja. Ali se može primeniti i na druge vrste računa, kao što su izrada logaritamskih tablica, ili dobijanje vrednosti za π. S geometriskog gledišta ona se prvenstveno bavi sa ova dva

[1]) Zemljina centrifugalna privlačna sila različita je na raznim širinama i zato se klatno ne klati istom brzinom na polu kao na ekvatoru. — P i s a c.

problema (sl. 166). Jedna gr...na, zvana d i f e r e n c i j a l n i r a č u n, jeste metoda da se n...đe koliko je strma neka kriva u nekoj tački. Tako naša kriva ...a sl. 166 počinje veoma blagim nagibom, zatim postaje veoma ...strma i najzad se »spljošti« tako, da se uopšte jedva i naginje. O...o što se zove d i f e r e n c i j a l n i k o l i č n i k nije ništa dru...o nego obrazac da se nađe koliko se kriva naginje u izvesnoj tač...i, ako znamo koordinate te tačke. Druga grana, zvana i n t e g r... a l n i r a č u n, prvenstveno se bavi pronalaženjem površine ograničene jednim delom krive (*AC* na slici), odgovarajućim ...elom x-osovine (apscise od *B* do

Nagib i površina slike oivičene krivom.



Sl. 166.

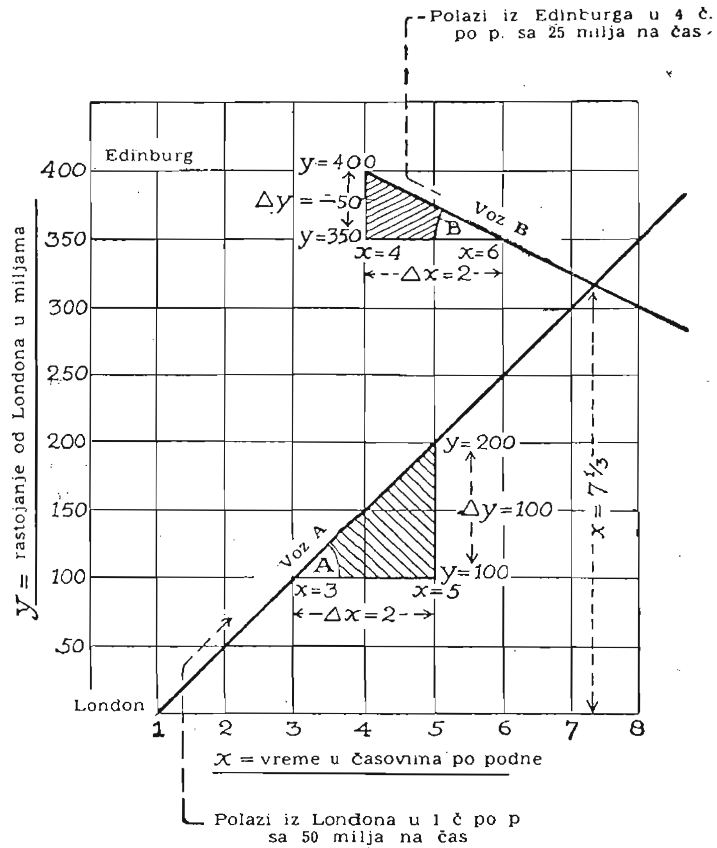
Nagib krive kod *f* je relativno bla... On postaje strmiji u sredini kod *g* pošto x raste. Zatim, na kraju, post...je više položen kod *h*. U svakoj tački nagib je pretstavljen veličinom u...a što ga dirka na krivoj zaklapa s s pozitivnim smislom apscisne oso...ne, ili s pozitivnim smislom ma koje prave paralelne s tom osovinom.

D), i dvema linijama zvanim »...ordinate« paralelnim sa y-osovinom (*AB* i *CD*). Ono što se zove i n t e g r a l jeste prosto obrazac da se nađe takva po...ršina, ako znamo x-koordinate tačaka *A* i *C*, zvane »apscise« (...*OB* i *OD*). I diferencijalni i integralni račun se služe sličnim ...metodama, jer površina između dveju ordinata neke krive i ...ama zavisi od nagiba te krive.

Pošto je infinitezimalni račun namenjen rešavanju problema kretanja, kako ćemo shvatiti njegovu svrhu, ako se prvo ne upitamo kakvu ulogu u proučavanju kretanja igraju merenje nagiba i merenje površine? Zato, pre nego što vidimo kako se ovaj račun može primeniti na druge stvari, moramo da ispitamo kako se brzina broda pretstavljala u geometriji mapâ u doba velikih prekomorskih putovanja.

GRAFIČKO PRETSTAVLJANJE BRZINE I UBRZANJA. — Kad se poslužimo starom algebrom da opišemo kretanje tela, ne nailazimo ni na kakve teškoće, pod uslovom da se tela kreću po pravoj liniji jednakim kretanjem. Problemi ove vrste javljaju se samo u udžbenicima. Njih nema u stvarnom životu. Treba samo malo bolje zagledati u te udžbeničke probleme, pa ćemo videti da oni stvarne događaje mogu samo veoma grubo pretstavljati. Takav jedan problem uzet iz jednog udžbenika, dali smo u VII glavi, da njime objasnimo prostu jednačinu. Tamo nam je rečeno da voz (A) idući brzinom od 50 milja na čas polazi u 1 čas za Edinburg koji je daleko od Londona 400 milja; drugi voz (B) koji juri brzinom od 25 milja na čas polazi iz Edinburga za London u 4 časa. Uzevši problem takav kakav je, možemo nacrtati duž ordinatne osovine, kao na sl. 167, rastojanje od Londona u miljama, a duž apscisne osovine vreme u popodnevnim časovima onoga dana kad se ovaj neverovatni slučaj desio. Kretanje ova dva voza bilo bi onda pretstavljeno dvema pravim linijama koje se ukrštaju onde gde je $x = 7\frac{1}{3}$ (tj. $7^h\ 20^m$ po p.). Taj rezultat je dobiven rešavanjem jednačine. Ako sad pogledate na narednu sliku, videćete zašto taj problem može da postoji samo u udžbeniku, a nikad ne može da se javi u železničkoj kabini za signale.

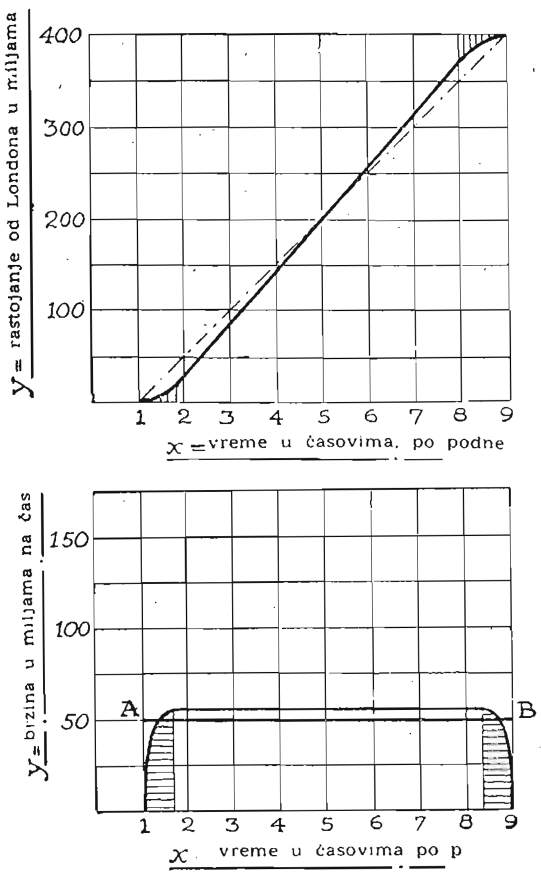
Najpre da ponovo ispitamo prvu sliku. Ako uzmemo dve tačke na pravoj koja pretstavlja kretanje voza A, njegova brzina, onakva kakva je data u problemu, odgovara nagibu prave linije prema apcisnoj osovini ili prema ma kojoj pravoj paralelnoj sa njom. Brzina je pređeno rastojanje podeljeno vremenom za koje je to rastojanje pređeno, ili brzina je »rastojanje za jedinicu vremena«. To je $\frac{\text{dif } y}{\text{dif } x}$, ili kao što ćemo sad to pisati, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. U vremenu koje prođe od tri časa ($x_1 = 3$) do pet časova



SL. 167. — STALNA BRZINA

($x_2 = 5$), voz A pređe od 100 milja ($y_1 = 100$) do 200 milja ($y_2 = 200$) od Londona. I tako je gradijent (nagib):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{200 - 100}{5 - 3}$$
$$= \frac{100}{2}$$
$$= 50$$



Zbog skale na kojoj su nacrtani, kraci koji se penju i kraci koji se spuštaju nisu onako zakošeni kakvi bi trebalo da budu.

SL. 168. — BRZINA I UBRZANJE

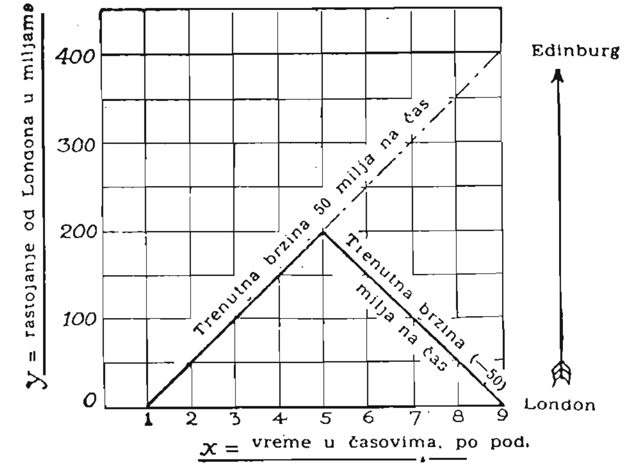
Kako je slika nacrtana, gradijent (milje na čas) je isti od trenutka kad voz pođe do trenutka kad stane. To je isto kao da smo rekli da voz odmah polazi sa krajnjom brzinom i odjednom stane u mestu. Na donjem delu sl. 168 vidi se brzina voza između početka u jedan čas i svršetka njegovog putovanja u devet časova. Kad bismo mogli poći trenutno krajnjom brzinom i stati odjednom u mestu, brzina bi mogla biti pretstavljena duži *AB*, paralelnom sa apscisnom osovinom. Nijedan stvarni voz se tako

ne kreće. Zato, čak i kad bi voz mogao da zadrži apsolutno stalnu brzinu na većem delu svoga puta, mi bismo morali da pretstavimo njegovu brzinu duž celog puta jednom krivom sa zaravnjenim vrhom. Ona bi bila nešto viša od duži AB da nadoknadi to što voz ima najpre da razvije brzinu (pozitivno ubrzanje) i da uspori kretanje (negativno ubrzanje) kad se zaustavlja. Na gornjem delu slike 168 videćete da voz u prvom i u poslednjem času neće preći tako veliku daljinu kao u međuvremenu. Zato je srednji deo linije koja pretstavlja njegovo kretanje nešto malo strmiji nego tačkasta linija koja odgovara njegovom putu na sl. 167.

Zato se upotreba proste jednačine osniva na dvema pretpostavkama. Prva je da voz može da se kreće stalnom brzinom (skazaljka na brzinometru stoji stalno na istom mestu) na većem delu svoga puta. Druga je pretpostavka da je put toliko dugačak, da vreme potrebno za razvijanje brzine na početku i za zaustavljanje na kraju ne utiče osetno na naše račune. Ustvari, vreme izgubljeno u razvijanju brzine na početku i u zaustavljanju znači, ako voz pređe 400 milja tačno za 8 časova, da on mora na izvesnom delu svoga puta da se kreće brzinom nešto većom od 50 milja na čas, ma kako bio mali taj višak. Zato se dve prave sa sl. 167 ne moraju ukrstiti tačno u $7^h\ 20^m$ popodne.

Kad je put dug, greška koja proizlazi iz druge pretpostavke može zbilja da bude tako mala, da o njoj ne vodimo računa.

U stvarnom životu malo se stvari kreću stalnom brzinom po pravoj liniji, a čak i kad se kreću tako na nekom dugom rastojanju, one za to vreme obično menjaju brzinu. U novoj algebri kretanja možemo da vodimo računa i o pravcu i o brzini isto onako kao što je u stvarnom životu važan i pravac puta i dužina koju motorni bicikl može da pređe za dato vreme. I tako imamo prosečnu brzinu i korisnu brzinu koja se zove i trenutna brzina. Prosečna brzina je prosto količnik dužine celokupnog puta i vremena provedenog na njemu, bez obzira na pravac. Trenutna (ili korisna) brzina je brzina u n e k o m d a t o m p r a v c u. Da je prvi voz produžio put ka Edinburgu po pravoj liniji, njegova trenutna brzina u pravcu London—Edinburg bila bi ista kao i njegova prosečna brzina. Kad bi se on, kao na sl. 169, okrenuo pošto je prešao 200 milja u pravoj liniji, i vratio se istom brzinom u London, njegova korisna brzina uzeta za ceo njegov put bila bi u 9 časova *0*, mesto da bude 50 milja na čas, kao što bi bila da je produžio za Edinburg.



SL. 169. — PROSEČNA BRZINA I TRENUTNA BRZINA

Ako se vratite na sl. 167 i pogledate kretanje voza B, videćete da se u vremenskom razmaku od 2 časa između četiri časa ($x = 4$) i šest časova ($x_2 = 6$) rastojanje toga voza od Londona promenilo od $y_1 = 400$ na $y_2 = 350$ milja. I tako, ako napišemo kao ranije,

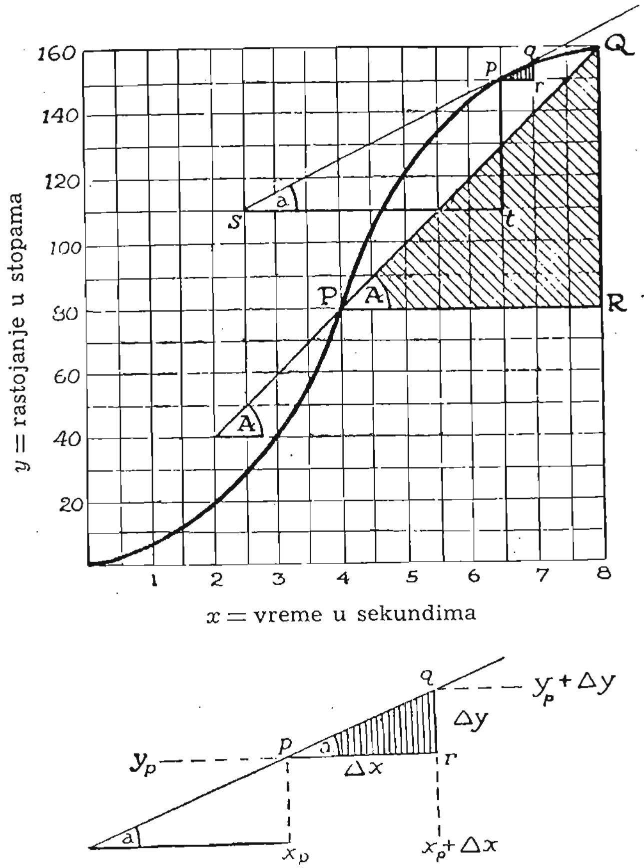
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{biće}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{350 - 400}{6 - 4} = -\frac{50}{2} = -25$$

Gradijent koji je odnos rastojanja (merenog duž neke ravne linije) i vremena, ne pretstavlja dakle opštu brzinu, već brzinu u izvesnom pravcu, tj. t r e n u t n u   b r z i n u. Voz A kreće se brzinom od +50 milja na čas, tj. brzinom od 50 milja na čas polazeći od Londona, kad se rastojanje meri od Londona. Voz B kreće se brzinom od —25 milja na čas, tj. brzinom od 25 milja na čas, gde se rastojanje meri *ka* Londonu.

Naredna slika (sl. 170) pretstavlja nešto što mnogo više liči na kretanje kakvo vidimo u stvarnom životu. Kriva pretstavlja

Promenljiva brzina



Sl. 170.
Prava *sp* je *grubo* povučena da pretstavlja dirku na krivoj u *p*.

rastojanje koje motorcikl pređe pri jednoj kratkoj probi, gde je vreme mereno »štopericom« na pravom putu od 160 stopa. Pravac ostaje isti. Zato su prosečna i trenutna brzina iste.

Cela proba od vremena polaska ($x = 0$) do zaustavljanja ($x = 8$) traje 8 sekundi. Zbog toga je prosečna brzina na celom putu:

$$\frac{160-0}{8-0} = 20 \text{ (stopa u sekundu)}$$

Ako zagledate sliku, videćete da motorcikl polazi lagano, postepeno povećava brzinu, sve tamo do pola puta, odakle brzina počinje opet da opada. Tako on pređe oko 8 stopa u prvoj sekundi. Na početku četvrtog sekunda on je 40 stopa od polazne tačke, a na kraju četvrtog sekunda stigao je do P, 80 stopa od polazne tačke. Tako on prelazi 40 stopa u četvrtom sekundu. Njegova prosečna brzina za vreme prvog sekunda je 8 stopa u sekundu, a 40 stopa u sekundu u četvrtom sekundu. Od P nadalje brzina opada. Na početku osmog sekunda prešao je 155 stopa, a na kraju osmog sekunda stigao je na cilj, 160 stopa odakle je pošao. Tako je njegova prosečna brzina u poslednjem sekundu samo pet stopa u sekundu. Možemo napraviti tablicu njegovog kretanja. Označićemo sa Δx razmak između uzastopnih stupnjeva merenih u sekundama, a sa Δy dužinu pređenu za odgovarajući vremenski razmak od Δx. Ovako:

x	Δx	y	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (stopa u sekundu)
0		0		
	2		20	10
2		20		
	2		60	30
4		80		
	2		65	32,5
6		145		
	2		15	7,5
8		160		

Uzmimo da smo posmatrali put motorciklista koji je pošao s jedne tačke malo nazad od tačke početka ove probne trke, a stao nešto malo dalje od završne tačke probne trke. On ne bi imao da ubrzava ili da usporava. On bi mogao da drži skazaljku svoga brzinometra, praktično uzevši, na istom mestu za vreme cele trke. Linija koja bi beležila njegovo kretanje bila bi onda prava linija. Kad se preobraze sekundi u časove, a stope

u milje, gradijent te linije bio bi jednak sa brojem pokazanim na brzinometru. Prosečna brzina između dveju tačaka kao što su P i Q na sl. 170, jeste opet gradijent prave linije koja ih spaja. PR jeste razmak vremena ($\triangle x$), a QR je pređeno rastojanje ($\triangle y$). Prema tome gradijent je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{QR}{PR} = \text{tang } A$$

Ako su dve tačke na krivoj vrlo blizu jedna drugoj, kao što su koordinate tačaka p i q, teško je razlikovati krivu koja ih spaja od prave linije, i pokazivač na brzinometru neće se primetno pomeriti za vreme puta koji pretstavlja razlika između x koordinata[1]) tačaka q i p. Kad su p i q sasvim blizu jedna drugoj, tako, da ih ne možemo razlikovati, prava linija kroz njih postaje dirka u tački $p = q$. Gradijent te prave odgovara broju na brzinometru u trenutku koji pretstavlja apscisa tačke p, ili rastojanje od koordinatnog početka pretstavljenim ordinatom tačke p. Ma koliko malim načinili mi trougao $p\ q\ r$, ili, drugim rečima, ma koliko blizu bile jedna drugoj tačke p i q, ugao a između $p\ q$ i $p\ r$ ostaje potpuno određena količina, pošto je to ugao što ga dirka na krivoj zaklapa sa apcisnom osovinom, ili sa ma kojom pravom paralelnom sa apcisnom osovinom.

Na grafiku brzine, kao što je ova naša slika, rastojanja su merena duž ordinatne osovine, a vreme duž apscisne osovine. Na svakoj takvoj slici možemo uvek pročitati broj na brzinometru u svakoj tački p, čija je apscisa x_p a ordinata y_p, tj. kad je pokretni predmet prešao rastojanje y_p za vreme x_p. Imamo samo da nacrtamo dirku na krivoj u tački p, da pročitamo ugao koji dirka zaklapa sa ma kojom pravom paralelnom sa apscisnom osovinom i da pročitamo tangens toga ugla u tablicama. U ovome primeru tablice nam nisu potrebne. Iz većeg pravouglog trougla na sl. 170 gore možete videti da je

$$\text{tang } a = \frac{pt}{st}$$

Međutim duži $p\ t$ odgovaraju četiri podeoka duž y, tj. 40 stopa, a duži $s\ t$ od $x = 2{,}4$ do $x = 6{,}5$ odgovaraju približno 4,1 podeoka duž x. I tako je brzina u tački p približno

$$40 : 4{,}1 = 9{,}8 \text{ stopa u sekundu}$$

[1]) x-koordinate zovu se *apscise;* y-koordinate zovu se *ordinate* — Prev.

Rezultat će tačno odgovarati pročitanom broju na brzinometru, ako je dirka nacrtana veoma tačno. Mogli bismo dobiti i jedan grubi ali dobar rezultat za brzinu u p (tj. $6\frac{1}{2}$ sekundi ili 150 stopa od početka probe), kad uzmemo prosečnu brzinu između dveju tačaka sasvim blizu tačke p, napr. između tačaka na putanji pređenih u šestom i sedmom sekundu posle početka probe. Evo tablice približnih brzina izvedenih na taj način

x	Δx	y	Δy	Približna brzina $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	u $x=$
0		0			
	1		8	8	0,5
1		8			
	1		12	12	1,5
2		20			
	1		22	22	2,5
3		42			
	1		38	38	3,5
4		80			
	1		43	43	4,5
5		123			
	1		22	22	5,5
6		145			
	1		10	10	6,5
7		155			
	1		5	5	7,5
8		160			

Sa ove tablice vidimo: ako uzmemo prosečnu brzinu između početka i kraja sedmog sekunda kao broj pročitan na brzinometru (u stopama na sekund) kad je na »štoperici« pročitano $6\frac{1}{2}$ sekundi, rezultat je 10 stopa na sekund. To je 2 procenta više od prethodnog rezultata. To dolazi delom otuda, što je dirka grubo nacrtana, a delom otuda što se brzina ne menja jednako od broja šestog do kraja sedmog sekunda. Ova tangentna metoda je isto kao kad bismo uzeli dve tačke sa apscisama x_p i $(x_p+\Delta x)$ i ordinatama y_p i $(y_p+\Delta y)$ tako blizu jedna

drugoj da su Δx i Δy i suviše male, da bi mogle biti merene. Nagib (gradijent) je onda (donji deo sl. 170):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan g\ a$$

Kad su Δy i Δx nemerljivo male, mi pišemo taj odnos

$$\frac{dy}{dx}$$

i čitamo ga »de ipsilon po de iks«.

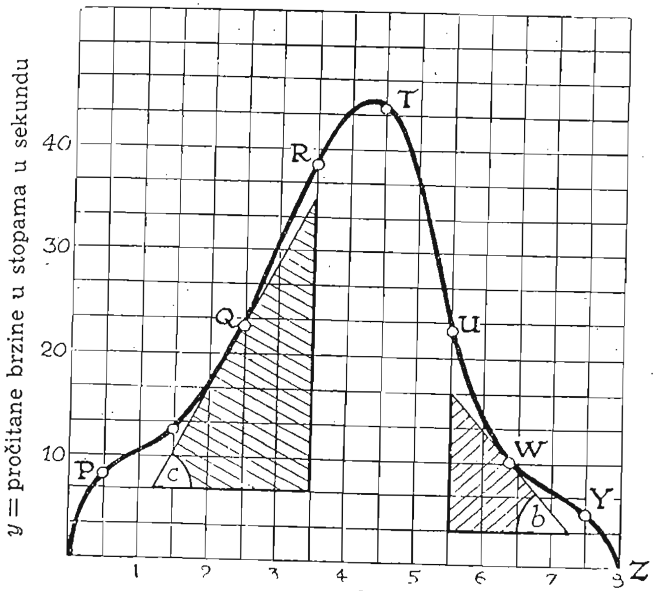
Ovaj odnos zove se diferencijalni količnik ipsilona prema iksu. On pretstavlja brzinu ili put u jedinici vremena kad količina merena duž apscisne osovine pretstavlja vreme, a količina merena duž ordinatne osovine pretstavlja put po pravoj liniji. On može da pretstavlja koju bilo grubu vrstu promene, na pr. širenje gume na točku usled pritiska crpaljke. Ako bismo grafički pretstavili dužinu jedne gvozdene šipke duž y, a temperaturu duž x, naša bi slika pretstavljala širenje ili povećanje dužine za jedan stepen temperature, kad temperatura raste ili opada. Ako bismo grafički pretstavili dužine neke opruge duž y, a težinu obešenu o nju duž x, kao na sl. 143, naša slika bi pretstavljala izduživanje opruge ili povećanje dužine na jedinicu težine, ukoliko se okačena težina povećava ili smanjuje.

Sad smo u mogućnosti da merimo ubrzanje, odnosno količinu brzine kojom pokretno telo povećava (ili smanjuje) svoju brzinu. Na slici 171 podeoci na x-osovini su od pola sekunda kao i na prethodnoj slici, ali podeoci na y-osovini pretstavljaju brojeve čitane na brzinometru u uzastopnim trenucima. To se osniva na približnim brojevima pročitanim na brzinometru i datim u poslednjoj tablici. Da bismo razlikovali podeoke duž y-osovine na ovoj slici, od podelaka na prethodnoj slici, možemo je obeležiti kao v-osovinu, gde ovo v stoji mesto reči brzina[1]). Pokazana kriva je strma od P do Q i od Q do R, gde brzina još jednako raste. Kazaljka na brzinometru ide nadesno. Motorcikl ubrzava. Kod T kriva linija se trenutno spljošti, a posle toga brzina opada. Sad motorcikl usporava. Usporavanje u običnom govoru je nešto suprotno ubrzanju, ali se

[1]) Engleski se brzina kaže *the velocity*, te otuda v kao prvo slovo ove reči. — Prev.

ono u dinamici zove *negativno ubrzanje*. Kod T, gde skazaljka na brzinometru u svom kretanju nadesno staje, ubrzanje je nula. Zato na grafiku, na kome je duž y-osovine pret-

Grafičko pretstavljanje ubrzanja.



Sl. 171.

stavljena brzina mesto daljine, — nagib krive pretstavlja količinu za koju se brzina menja. Ubrzanje je

$$\frac{dv}{dx}$$

gde je

$$v = \frac{dy}{dx}$$

Izraz

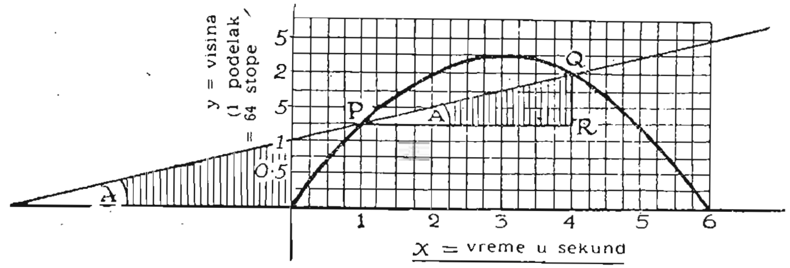
$$\frac{dv}{dx}$$

se obično piše

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

a čita se »de dva ipsilon po de iks kvadrat«.

Pošto možemo pretstaviti i druge diferencijalne količnike kao širenje na jedinicu promene u temperaturi, ili istezanje na jedinicu težine duž ordinate obično za gornji količnik upotre-



SL. 172. — BRZINA TOPOVSKOG ZRNA

bljavamo opšti izraz »*drugi diferencijalni količnik*«. To vas opominje da u ovom izrazu *broj 2 ne znači dizanje na kvadrat*, ma da je napisan na isti način. Videćete da kod Q, gde brzina raste, imamo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{tang} c$$

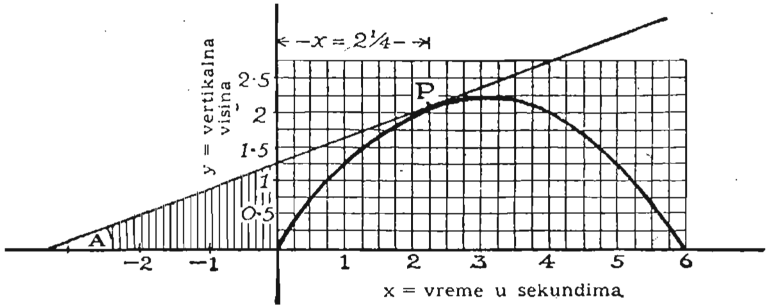
a u W, gde ona opada,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{tang} b.$$

DIFERENCIRANJE. — Dosad smo pokazali samo kako se nalazi diferencijalni količnik pomoću geometriske konstrukcije. Tačnost našeg rezultata po ovoj metodi zavisi od naše crtačke veštine. Čak i kod najveštijeg crtanja neizbežne su velike netačnosti kad je kriva strma. Prvi čovek koji je, izgleda, zapazio da nije potrebno oslanjati se na crtačku veštinu bio je Isak Baro, Njutnov učitelj. Metodu koju je on uveo možemo prikazati na putanji topovskog zrna koja se vidi na sl. 172-174. Na slici 172 prosečna brzina zrna u pravcu naviše između tačaka P i Q merena je tangensom ugla A, umesto uobičajenih jedinica za merenje. Ako je jedinica vremena (x) jedan sekund, a jedinica daljine (y) 64 stope, jednačina nacrtane krive je:

$$y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{}$$

Ako (vidi sl. 173) želimo da nađemo brzinu naviše u nekoj tački P (apscisa je x_p) posle izvesnog vremena od trenutka



Sl. 173.

opaljenja topa, mi to radimo ovako. Kad se vratimo na sl. 172 vidimo da je

$$\operatorname{tang} A = \frac{QR}{PR} = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$$

Ako razmak između x_q i x_p obeležimo sa dx (tj. $x_q = x_p + dx$), možemo pisati:

$$y_p = \frac{3}{2} x_p - \frac{1}{4} x_p^2$$

$$y_q = \frac{3}{2} (x_p + dx) - \frac{1}{4} (x_p + dx)^2 =$$

$$= \frac{3}{2} x_p + \frac{3}{2} dx - \frac{x_p^2}{4} - \frac{x_p\,dx}{2} - \frac{(dx)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} x_p - \frac{x_p^2}{4}\right) + \left[\frac{3}{2} dx - \frac{1}{2} x_p\,dx - \frac{1}{4} (dx)^2\right]$$

Otuda će biti:

$$y_q - y_p = \left(\frac{3}{2} x_p - \frac{x_p^2}{4}\right) + \left[\frac{3}{2} dx - \frac{1}{2} x_p\,dx - \frac{1}{4} (dx)^2\right] - \left(\frac{3}{2} x_p - \frac{1}{4} x_p^2\right)$$

$$y_q - y_p = \frac{3}{2} dx - \frac{1}{2} x_p\,dx - \frac{1}{4} (dx)^2$$

$$\frac{y_q - y_p}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x_p - \frac{1}{4} dx.$$

Kad su P i Q tako blizu, da se više ne mogu razlikovati (sl. 173) dx je isuviše malo da bismo ga mogli meriti, te je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}.$$

Ako pogledate na sl. 173, videćete da je x_p, tj. apscisa tačke P u ovome slučaju $2\frac{1}{4}$. Zato je u tački P:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3} - \frac{2\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Pomoću uglomera nalazimo da ugao A iznosi $20\frac{1^\circ}{2}$ s greškom do pola stepena. Logaritamske tablice daju

$$\operatorname{tang} 20\frac{1^\circ}{2} = 0{,}374.$$

Svaki podelak duž apcisne osovine je jedan sekund. Zato dobiveni broj pretstavlja brzinu u sekundu u posebnim podeocima dužine izabranim za y. Na slici je podelak na ordinati 64 stope. Zato je brzina u stopama na sekund:

$$v = 64 \cdot 0{,}375 = 24 \text{ stope u sekundu.}$$

To će nam pomoći da shvatimo jedno opštije pravilo za diferenciranje, tj. za nalaženje tangenata, ako napišemo u sličnom obliku vrednost za y i njegov diferencijalni količnik

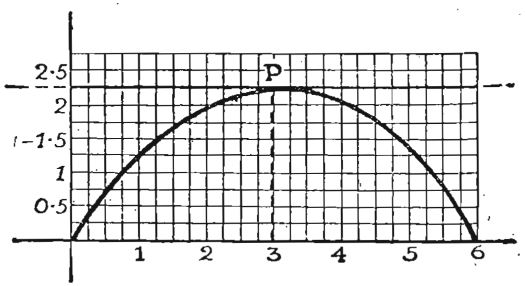
$$y = \frac{3}{2} x^1 - \frac{1}{4} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} (2x).$$

Oznaka p kod x_p može da se izostavi, pošto je bila stavljena samo zato, da razlikujemo x_p od x_q kad su P i Q bili na većem rastojanju. Pošto je $x^0 = 1$, ma kakvu vrednost davali iksu, poslednja jednačina može i ovako da se napiše:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^0}{2} - \frac{1\,(2x^1)}{4}$$

Pre nego što iznesemo pravilo na koje nas navodi sličnost između y i $\frac{dv}{dx}$ kad se ispišu na ovaj način, možemo izvući dva praktična zaključka iz izraza što smo sad dobili. Pre svega možemo ga iskoristiti da nađemo tačan trenutak u kome topovsko



sl. 174.

zrno dostiže najvišu tačku na svojoj putanji. To će biti kad ono prestane da se kreće naviše, a još nije počelo da ide naniže. U toj tački ono se trenutno kreće horizontalno u vazduhu. Njegova brzina naviše, koja se menja iz pozitivne u negativnu, biće nula. Dirka na krivoj (sl. 174) u toj tački biće paralelna s apcisnom osovinom. Zato će ugao nagiba te dirke biti nula, znači

$$\frac{dy}{dx}=0$$

tj.

$$\frac{3}{2}-\frac{1x}{2}=0.$$

Odatle je $x=3$

To znači da zrno dostiže svoju najvišu tačku 3 sekunde po opaljenju. Njegova se visina u tome trenutku može naći kad se u prvobitnu jednačinu putanje

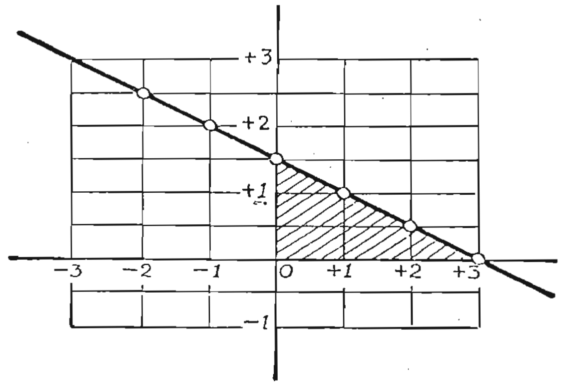
$$y=\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{4}$$

stavi $x=3$. Tada imamo

$$y=\frac{3\cdot 3}{2}-\frac{3^2}{4}=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}\ (y-\text{jedinica}).$$

Jedan podelak na ordinati pretstavlja 64 stope. Zato će visina zrna biti

$$2\frac{1}{4}\cdot 64=144\ \text{stope}^{1)}.$$



Sl. 175.

Duž x-osovine podeoci pretstavljaju vreme u sekundama. Duž y-osovine podeoci pretstavljaju brzinu, tj. rastojanje pređeno u jednom sekundu, mereno vertikalno naviše. Jedan podelak na y-osovini odgovara na 64 stope u sekundu. Prava linija se diže naviše kad idemo s desna nalevo, te je zato znak gradijenta negativan. To znači da zrno *gubi* u brzini naviše i dobija u brzini ka zemlji. Gradijent, kao što se vidi iz osenčene površine je:

$$\frac{(0-1{,}5)\ \text{podelaka}\ y}{(3-0)\ \text{podelaka}\ x}\quad \textit{ili}\quad -\frac{1{,}5\times 64\ \text{stope u sekundu}}{3\ \text{sekunda}}$$

tj. -32 stope na sekund u sekundu

Jednačinu diferencijalnog količnika možemo iskoristiti i za to da nađemo ubrzanje topovskog zrna naniže. Na sl. 175 nacrtali smo pravu

$$v=\frac{3}{2}-\frac{x}{2}.$$

Kao i ranije podeoci na x-osovini pretstavljaju sekunde, a podeoci na ordinatnoj osovini pretstavljaju odgovarajuće vrednosti za $v=\frac{dy}{dx}$. Ovde imamo pravu liniju; njen nagib pret-

1) 1 stopa = 30,48 cm. Zrno je visoko 43,89 m. — Prev.

stavlja količinu za koju se brzina topovskog zrna menja u pravcu vertikalno naviše. Nagib ove linije je drugi diferencijalni količnik. Kao što pokazuje tekst ispod same slike imamo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1{,}5}{3} \ (y\text{ - jedinica na sekund u sekundu})$$

$$= -32 \text{ stope na sekund u sekundu.}$$

To znači, na celoj svojoj putanji zrno uvek gubi od svoje brzine (negativni znak) u pravcu naviše i zato u istoj meri dobija u brzini kad ide ka zemlji. Galilej je pokazao da sva tela koja padaju ka zemlji povećavaju svoju brzinu naniže i povećanje brzine iznosi približno 32 stope na sekund u jednom sekundu, ako se ništa ne suprotstavlja kretanju[1]). U bezvazdušnom prostoru kokošije perce i dvodinarka padaju istim ubrzanjem. Perce teži da se lepršа zato što ono izlaže veliku površinu otporu vazduha koji se tare o njega. Moderno artiljerisko zrno, u obliku cigare suprotno loptastom obliku starinskog topovskog đuleta i aerodinamična linija modernoga automobila izrađeni su tako, da se smanji otpor vazduha kroz koji se kreću.

Diferencijalni račun može da se primeni za veoma različite proračune, pa i van mehaničkih problema u vezi sa kojima je pronađen. Da bi se mogao tačno primenjivati na probleme iz mehanike kretanja, veoma je važno imati na umu da ubrzanje ne znači samo ubrzavanje ili usporavanje kako mi to kažemo u svakodnevnom govoru. U mehanici ubrzanje znači promenu trenutne brzine, a trenutna brzina uvek znači brzinu merenu u naročitom pravcu duž p r a v e l i n i j e. Ako se telo kreće po pravoj liniji, njegova trenutna brzina je njegova brzina sa podesnim znakom stavljenim da se pokaže na koju se stranu ono kreće. Ako se ne kreće po pravoj liniji njegova prosečna opšta brzina između dveju tačaka na njegovoj putanji mora uvek da bude veća od njegove prosečne trenutne brzine. Tako, ako se neki voz kreće pravom linijom od A do B za jedan čas njegova trenutna brzina pravcem AB jeste $+ AB$ milja na čas, a duž pravca BA njegova trenutna brzina je $-AB$ milja na čas. Njegova opšta brzina je AB milja na čas u obadva slučaja. Ako on ide zaobilaznim putem, napr. pravom linijom od A do C i pravom linijom od C do B, njegova brzina je $(AC + CB)$

[1]) To povećanje brzine iznosi na našoj geografskoj širini približno 981 santimetar. — P r e v.

milja na čas (celokupno rastojanje podeljeno vremenom). Međutim njegova trenutna brzina merena u pravcu AB jeste i dalje AB milja na čas. Razlog što je napravljena ova razlika leži u opštem iskustvu o inerciji. Kad voz iznenada stane, mi moramo da se trgnemo nazad da ne bismo poleteli napred; kad naglo zaokrećemo biciklom oko nekog ugla, moramo da se nagnemo na unutrašnju stranu da ne bismo odleteli pravcem napred, dok bicikl skreće u stranu. Mora se zapeti da se zaustavi neko telo koje ide pravo napred, a treba snage i da se ono potera brže ili da se uspori pravcem kojim se već kreće. Ako silu ili snagu pritiska merimo količinom kretanja koju ta sila prenosi na izvesno telo, onda nam je važno da znamo kako p r a v a c u k o m e se to telo kreće tako i r a s t o j a n j e koje telo prevaljuje u toku tog svog kretanja. Kad se nešto kreće jednakom brzinom (tj. put za jedinicu vremena) po krugu, njegov se pravac jednako menja. Kad vežete kamen na kraj uzice, pa vitlate tom uzicom, kamen bi odleteo duž dirke da ga za središte kruga ne drži snaga vašeg prsta. Presecite uzicu, kamen će odleteti po pravoj liniji koja dodiruje njegovu kružnu putanju u tački u kojoj se nalazio kad je uzica presečena. Dokle god je vaš prst tu, vi savijate kamen na unutrašnju stranu, terajući ga da se kreće ka središtu. Na to se misli u mehanici kad se kaže da kamen ima ubrzanje ka središtu. Ma da tu nema ni ubrzavanja ni usporavanja u običnom smislu reči, tu postoji stalna promena trenutne brzine. Nije nam cilj da ulazimo u pojedinosti o tome kako se mere promene trenutne brzine jednog tela kad se ono kreće po krivoj putanji.

U ovoj glavi mi ćemo se služiti infinitezimalnim računom uglavnom za rešavanje računskih problema koji ne zahtevaju razumevanje mehanike. Najkorisnije primene van mehanike razumećete samo ako hoćete uporno da proučavate pravila za dobijanje nagiba raznih vrsta krivih. Pre nego što zagazimo dublje, jedan prost primer primene ovog računa na grupu problema kod kojih se obično algebra ne primenjuje, može da vam pomogne da se uhvatite u koštac sa teškim poslom koji vas očekuje. Recimo da hoćemo da nađemo visinu topovskog zrna kad je ono najdalje od zemlje. Tu imamo da nađemo najveću vrednost koju može dostići izvesna količina, kad znamo neki opšti izraz koji sadrži u sebi sva moguća merenja. Problemi ove vrste nisu ograničeni samo na kretanje. Na primer, može da vam se da 200 metara žičane mreže, pa se traži da načinite pravougaonični živinarnik, da ga ogradite tom žicom, ali da unutra stane što može više živine. Vaš je problem sad u tome da načinite pravougaonik najveće površine (najviše prostora za živinu) kad je utvrđena dužina sve četiri strane zajedno.

Kad sve četiri strane zajedno iznose 200 metara, dve susedne strane zajedno iznose 100 metara. Zato, ako je x dužina jedne strane, dužina njoj susedne strane je $(100 - x)$ metara. Ako znate x znate oblik slike koja treba da ima najveću površinu y. Vrednost za y je $x(100 - x)$ ili $100x - x^2$. Vaš je problem da nađete vrednost za x koja će učiniti da y postane maksimum. Jedan način za rešenje ovog problema je da se nacrta parabola

$$y = 100x - x^2$$

Onda možete izmeriti x koordinatu najviše tačke na toj krivoj. Drugi način vam ušteđuje trud oko crtanja. Po njemu imate da primenite pravilo da y mora da dostigne svoju najveću vrednost kad je

$$\frac{dv}{dx} = 0.$$

Kao u primeru sa topovskim zrnom

$$\Delta y = 100\,(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^2 - 100\,x + x^2 =$$
$$= 100\,\Delta x - 2\,x\,\Delta x - (\Delta x)^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 100 - 2x - \Delta x.$$

Kad je Δx isuviše malo tako da se o njemu ne mora voditi računa, ovo gore se svodi na $100 - 2x$, a kad je $100 - 2x = 0$ imamo $x = 50$. I tako je površina najveća kad je jedna strana 50 metara. Druga je onda $100 - 50$ ili 50 metara i slika postaje kvadrat. Možete proveriti rezultat pomoću tablica. Ako su susedne strane jednake, površina je 2500 kv. metara. Ako je jedna strana 20 metara duža od druge, površina je 60×40 ili 2400 kv. metara. Ako je jedna strana 40 metara duža od druge, površina je 70×30 ili 2100 kv. metara. Ako je jedna strana 99 metara duža od druge površina je $99{,}5 \cdot 0{,}5$ ili 49,75 kv. metara.

METODE DIFERENCIRANJA. — Sad ste shvatili osnovnu korist od diferencijalnog računa. Ona je u tome što nagib dirke na krivoj određuje stopu promene količine pretstavljene podeocima na ordinatnoj osovini za jedinicu promene količine

pretstavljene podeocima na apscisnoj osovini. Najveće ili najmanje y je onda kad je nagib dirke 0. Slučajno se poslednji primer osniva na istom tipu krive *(parabola)* kao i topovsko zrno. Da se reši problem nalaženja najveće ili najmanje vrednosti neke količine u određenim granicama, potrebno je umeti naći nagib dirke na krivoj ma koga oblika.

Da nađemo taj nagib za krivu čija je jednačina poznata, ili, kao što ćemo sad reći, da diferenciramo y po x, moramo znati prirodnu istoriju krivih linija. Krive linije mogu da se podele u porodice, rodove i vrste kao i insekti ili sisari. Najprostija vrsta je prava linija:

$$y = ax + b$$

Kao što smo već videli, ovde je diferencijalni količnik a ($= \tan A$), koji je uvek isti za svaku vrednost iksa, pošto ne sadrži x u sebi. Na matematičkom jeziku to je k o n s t a n t a, kao nešto suprotno p r o m e n l j i v o j k o l i č i n i. Zato kad je

$$y = ax + b$$

imaćemo

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Druga prosta vrsta, na koju smo već naišli, jeste kriva pretstavljena jednačinom

$$y = ax^2$$

Ako primenimo metodu Baroovog trougla, dobijamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax_q^2 - ax_p^2}{dx} = a \cdot \frac{(x_p + dx)^2 - x_p^2}{dx} =$$
$$= a \cdot \frac{x_p^2 + 2\,x_p\,dx + (dx)^2 - x_p^2}{dx}$$
$$= 2\,ax_p + a \cdot dx = a\,(2x_p + dx) = 2ax$$

(kad je dx isuviše malo da bismo o njemu vodili računa).

Poslednji rezultati što smo ih dobili pokazuju pravilo koje važi za jedan veliki rod koji obuhvata pravu liniju i parabolu, kao što rod felis obuhvata mačku i tigra.

Rod je

$$y = ax^n$$

Pravilo je

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

Sad možemo ponovo napisati jednačinu prave:

$$y = ax$$

u obliku $\qquad y = ax^1$

odakle imamo

$$\frac{dy}{dx} = ax^0 = a.$$

Ako primenimo binomnu teoremu, uverićemo se lako da je ovo pravilo tačno.

$$y_q = a\,(x_p + dx)^n =$$

$$= a\left[x_p^n + nx_p^{n-1}dx + \frac{n\,(n-1)\,x_p^{n-2}}{2}\,(dx)^2 + \cdots\right]$$

i

$$y_p = ax_p^n$$

Otuda je

$$y_q - y_p = a\left[n \cdot x_p^{n-1}\,dx + \frac{n\,(n-1)\,x_p^{n-2}}{2!}\,(dx)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,x_p^{n-3}\,(dx)^3 + \cdots\right]$$

$$\frac{y_q - y_p}{dx} = a\left[n \cdot x_p^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,x_p^{n-2} \cdot dx + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\,x_p^{n-3}\,(dx)^2 + \cdots\right]$$

Kad je $P = Q$ i dx postaje beskrajno malo, možemo izostaviti sve članove koji sadrže dx. Zato, kad je

$$y = ax^n$$

biće

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Na primer, ako je kriva pretstavljena jednačinom

$$y = ax^5$$

biće

$$\frac{dy}{dx} = 5\,a \cdot x^4$$

Ako je kriva $\qquad y = 12x^6$

biće

$$\frac{dy}{dx} = 72\,x^5$$

Ako je kriva $\qquad y = ax^{-3}$ tj. $y = \frac{a}{x^3}$

biće

$$\frac{dy}{dx} = -3ax^{-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3a}{x^4}$$

Posebna vrsta ovoga roda je

$$y = a$$

To je jednačina prave linije kao što je AB na sl. 168. Ona je paralelna sa apcisnom osovinom na rastojanju a merenom duž y. Ova se jednačina može napisati i ovako:

$$y = ax^0$$

Otuda je:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \cdot ax^{0-1} = 0.$$

To prosto znači da vrednost ipsilona ne raste kad x raste. Pošto je

$$\frac{dy}{dx} = a$$

kad je $\qquad y = ax + b$

drugi diferencijalni količnik od y je $\frac{dy'}{dx}$, gde je $y' = a$,*) tj.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Ovo prosto znači da nema ubrzanja kad je brzina stalna.

Kao što mačke i tigrovi, i jedne i drugi iz roda *felis*[1]) — zatim pas i šakal, oba iz roda *canis*[2]) pripadaju većoj grupi mesoždera *(carnivora)*, isto tako i sve krive o čijim je jednačinama bilo reči, pripadaju ovoj velikoj klasi krivih:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Kad su konstantama A, B, C, D, itd. date posebne vrednosti, ovakva jednačina pretstavlja jednu određenu krivu. Da bismo našli dirku na krivoj ove vrste, imamo samo da diferenciramo svaki član posebno. Kao i ranije, kad stavimo $y_q = y_p + ax$, imaćemo

$$y_q = A + B(x_p + dx) + C(x_p + ax)^2 + D(x_p + d\lambda)^3 + \cdots$$

$$y_p = A + Bx_p + Cx_p^2 + Dx_p^3 + \cdots.$$

$$\frac{y_q - y_p}{dx} = \frac{B(x_p + dx) - Bx_p}{dx} + \frac{C(x_p + dx)^2 - Cx_p^2}{dx} +$$

$$+ \frac{D(x_p + dx)^3 - Dx_p^3}{dx} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \cdots$$

Ovaj se rezultat može iskoristiti za diferenciranje mnogih izraza. Uzmimo prvo porodicu

$$y = b + a^x$$

Takva jedna kriva prikazana je na sl. 154. U njenoj je jednačini $b = 0$, $a = 2$. To jest, kriva sa sl. 154 je $y = 2^x$. U jednačini $y = b + a^x$ možemo staviti:

$$a = e^c; \quad \text{znači} \quad \log_e a = c.$$

*) Izraz y' čitamo »ipsilon prim«. — Prev.
[2]) Mačka. — Prev.
) Pas. — Prev.

Tada će ona dobiti ovaj opšti oblik:

$$y = b + e^{cx}$$

Međutim izraz e^{cx} je iz velike klase eksponencijalnih redova

$$Ax^0 + Bx^1 + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

U poslednjoj glavi videli smo da se e^{cx} može pretstaviti ovim beskonačnim redom:

$$1 + cx + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} + \frac{c^4x^4}{4!} + \cdots.$$

Zato mesto y možemo staviti:

$$(b+1)x^0 + cx^1 + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} + \frac{c^4x^4}{4!} + \cdots$$

Vrednost za $\frac{dy}{dx}$ dobija se kad se diferenciraju uzastopni članovi svaki za sebe, ovako:

$$\frac{dy}{dx} = 0 + c + \frac{2c^2x}{2!} + \frac{3c^3x^2}{3!} + \frac{4c^4x^3}{4!} + \frac{5c^5x^4}{5!} + \cdots =$$

$$= c\left(1 + cx + \frac{c^2x^2}{2!} + \frac{c^3x^3}{3!} + \frac{c^4x^4}{4!} + \cdots\right) = c \cdot e^{cx}$$

Pošto je $\qquad a = e^c$

biće

$$\log_e a = c \log_e e$$

$$\log_e a = c \qquad \text{Sem toga,} \qquad e^{cx} = a^x$$

Otuda je dalje:

$$\frac{dv}{dx} = c\,e^{cx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log_e a) \cdot a^x$$

I tako, za

$$y = b + a^x \text{ imamo}$$

$$\frac{dy}{dx} = \iota^x \cdot \log_e a.$$

Ako je $b = 0$ i $a = e$, tj. $\log_{(e)} a = 1$, jednačina

$$y = b + a^x$$

postaje

$$y = e^x$$

A otuda je:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \log_e e = e^x = y.$$

Od mnogih važnih osobina zamenice e i ovo joj je jedna zbog koje je ona tako važna stavka u matematičkom rečniku. To znači da je kod krive $y = e^x$ nagib u svakoj tački jednak s brojem jedinica koje ima njena ordinata.

Jedna još veća klasa krivih, koja obuhvata obe krive iz poslednja dva primera, pretstavljena je ovom opštom jednačinom:

$$y = e^{cx+d} + b$$

Pri diferenciranju konstanta b iščezava kao i ranije. Zato moramo da vodimo računa samo o prostijem obliku te jednačine, naime o jednačini

$$y = e^{cx+d}$$

Kad primenimo Arhimedovo pravilo, možemo da napišemo:

$$y = e^{cx} \cdot e^d$$

Ovde d pretstavlja stalan broj; e^d isto tako pretstavlja stalan broj, koji ćemo mi, kratkoće radi, obeležiti sa D:

$$e^d = D.$$

$$\text{tj. } y = De^{cx}$$

To je dalje:

$$y = D\left(1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2!} + \frac{c^3 x^3}{3!} + \frac{c^4 x^4}{4!} + \cdots\right) =$$

$$= D + Dcx + \frac{Dc^2 x^2}{2!} + \frac{Dc^3 x^3}{3!} + \frac{Dc^4 x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + Dc + Dc^2 x + \frac{Dc^3 x^2}{2!} + \frac{Dc^4 x^3}{3!} + \cdots =$$

$$= Dc\left(1 + cx + \frac{c^2 x^2}{2!} + \frac{c^3 x^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$= Dc\ e^{cx} =$$

$$= c\ e^d e^{cx}$$

$$= c\ e^{cx+d}$$

Izraz $\qquad y = a^x + b$

možemo i ovako napisati

$$y - b = a^x$$

$$\log_a (y - b) = x \log_a a = x$$

$$\text{antilog}_a [\log_a (y - b)] = \text{antilog}_a x$$

$$y - b = \text{antilog}_{(a)} x$$

Isto tako možemo napisati na dva načina jednačinu druge jedne vrste bliskog roda ovih krivih, naime:

$$y = \log_e x \text{ ili}$$

$$e^y = x.$$

Kad se setimo da je $\frac{dy}{dx}$ odnos dveju strana u Barovom trouglu, možemo staviti:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

Videli smo da je za $y = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Kad međusobno izmenjamo sve oznake rezultat će biti za

$$x = e^y:$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

Tako dobijamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

To znači da je nagib krive obrnuto proporcionalan (obrnuto srazmeran) sa x. Kriva se sve više pljošti što je x veće, kao kod krive na sl. 176 koja pripada srodnoj vrsti:

$$y = \log_{10} x$$

Ranije smo videli da je

$$\log_{(10)} x = \frac{\log_{(e)} x}{\log_{(e)} 10}$$

$$\log_{(10)} x = \frac{\log_{(e)} x}{2{,}303}$$

To je dalje:

$$2{,}303 \log_{10} x = \log_e x, \text{ tj. } 2{,}303\ y = \log_e x$$

ili:

$$e^{2{,}303 y} = x$$

Diferencijalni je količnik kao i ranije

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

Videli smo da je za $y = e^{cx} + b$

$$\frac{dv}{dx} = c\ e^{cx}$$

Kad je $x = e^{2{,}303y} + 0$ biće

$$\frac{dx}{dy} = 2{,}303\ e^{2{,}303 y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2{,}303\ e^{2{,}303 y}}$$

$$= \frac{1}{2{,}303 x}$$

I tako, kad je $y = \log_{10} x$ biće

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \log_e 10}$$

Druga važna vrsta istog roda je

$$y = \log_e (x + b)$$

ili:

$$e^y = x + b \quad \text{tj.}$$

$$x = e^y - b$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x + b$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x + b}$$

Još veća porodica krivih koja obuhvata i ovaj poslednji primer pretstavljena je ovom opštom jednačinom:

$$y = \log_e (x + b) + C$$

ili:

$$y - C = \log_e (x + b)$$

tj.

$$x + b = e^{y-C}$$

$$x = e^{y-C} - b$$

Ako x i y promene mesta, ovo postaje istog tipa jednačina kao i

$$y = b + e^{cx+d}$$

samo što je b zamenjeno sa $-b$, $c = 1$, $d = -C$. Zato možemo staviti:

$$\frac{dx}{dy} = e^{y-C}$$

$$= x + b$$

a odatle:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + b}$$

Ako je jednačina krive

$$y = a \log_e (x + b) + c$$

biće:

$$\frac{y - c}{a} = \log_e (x + b)$$

To je dalje:

$$e^{\frac{y-c}{a}} = x+b$$

$$x = e^{\frac{y-c}{a}} - b.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\, e^{\frac{y-c}{a}} = \frac{x+b}{a}$$

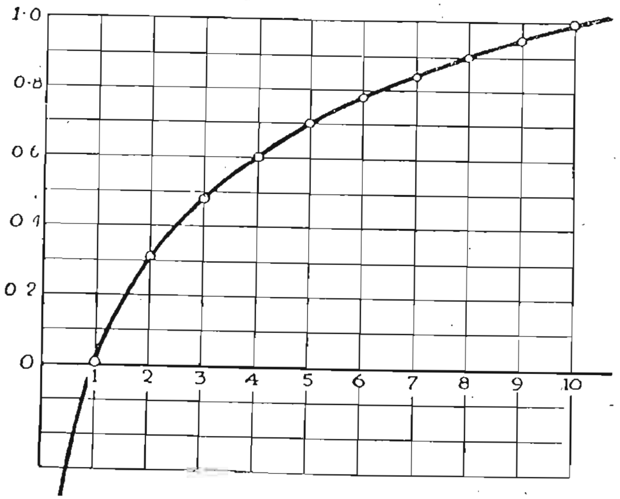
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x+b}$$

Poslednja porodica koju nam valja ispitati pretstavljena je jednačinama

$$y = \sin x$$

i

$$y = \cos x$$



SL. 176. — GRAFIČKO PRETSTAVLJANJE KRIVE $y = \log_{10} x$

Ima više načina da se dobiju diferencijalni količnici ovih krivih. Da bismo izbegli zabunu, napisaćemo diferencijalne količnike ovako:

$$\frac{d\,(\sin x)}{dx}$$

i

$$\frac{d\,(\cos x)}{dx}$$

Prvi način dobijanja diferencijalnih količnika ovih krivih osniva se na tom da je, kad je x izraženo u radijanima,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

Ovi redovi, kao i red za e^x, pripadaju velikoj porodici krivih:

$$y = Ax^0 + Bx^1 + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

I tako možemo pisati:

$$\frac{d\,(\sin x)}{dx} = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots .$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots .$$

$$= \cos x$$

i

$$\frac{d\,(\cos x)}{dx^2} = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \ldots . =$$

$$= -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .\right) =$$

$$= -\sin x$$

Odatle ćete lako videti da je

$$\frac{d^2\,(\sin x)}{dx^2} = \frac{d\,(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{d^2\,(\cos x)}{dx^2} = \frac{d\,(-\sin x)}{dx} = -\cos x$$

Možemo dobiti iste ove rezultate bez upotrebe beskonačnih redova, metodom koja se oslanja na elementarnu trigonometriju time što ćemo se poslužiti nama već poznatom jednačinom, ovako:

$$\sin(x+dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x+dx) - \sin x}{dx}$$

$$= \frac{\sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x}{dx}$$

Otuda imamo dalje:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin x \cos dx - \sin x) + \cos x \sin dx}{dx}$$

Kad dx postane beskonačno malo, biće:

$$\cos dx = 1, \sin dx = 0$$

$$\sin x \cos dx - \sin x = \sin x \cdot 1 - \sin x = 0.$$

Prema tome:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 + \cos x \sin dx}{dx} = \cos x \cdot \frac{\sin dx}{dx} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Neće vam biti teško da diferencirate $\sin ax$ i $\cos ax$ služeći se beskonačnim redovima:

$$\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \frac{(ax)^9}{9!} - \ldots$$

ili

$$\cos ax = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \ldots$$

Metoda je uglavnom ista kao i za e^{cx} koja je već pokazana.

Tako ćete naći da je:

$$\frac{d(\sin ax)}{dx} = a \cos ax$$

$$\frac{d^2(\sin ax)}{dx^2} = \frac{d(a \cos ax)}{dx} = -a^2 \sin ax$$

Ako stavimo $a = \sqrt{b}$ ovo postaje:

$$\frac{d^2 \left[\sin(x\sqrt{b})\right]}{ax^2} = -b \sin(x\sqrt{b})$$

Sl. 177 vam pokazuje da sve krive $y = \sin x$, $y = -\sin x$, $y = \cos x$, $y = -\cos x$ pretstavljaju periodično ili talasasto kretanje. Nagibi koje smo dobili za krive

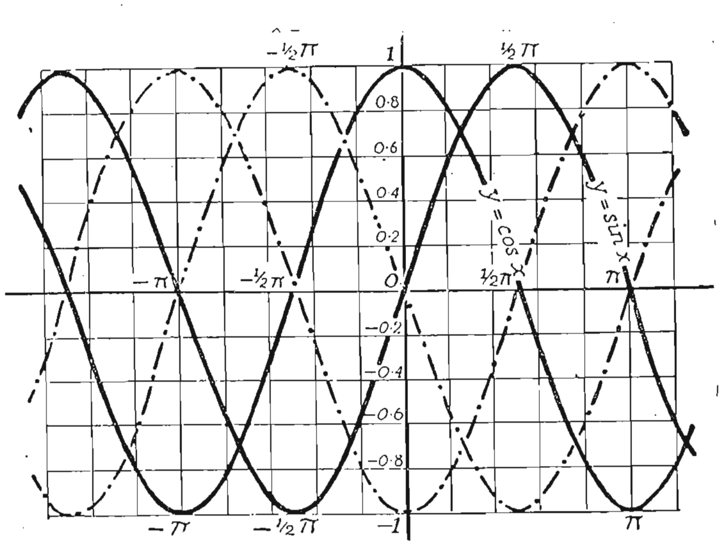
$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

kazuju da ako se mereni podaci, napr. horizontalno pomeranje klatna, menjaju periodično s vremenom, njegova brzina i njegovo ubrzanje se isto tako menjaju periodično s vremenom. Ovo nam živo ilustruje proces u kome je nova algebra Njutnovog pokolenja nove mašine povezala sa postojećom mehanikom tela u mirovanju. Sa zakonom istezanja opruge vezano je i ime Roberta Huka, Njutnovog prijatelja, i, kako izgleda, prvog čoveka koji je učio da se živa tela sastoje od ćelija koje se vide pod mikroskopom — tada novim pronalaskom. Nećete se začuditi kad čujete da su osobine opruge koja se isteže privukle toliku pažnju naučnika, jer je to bilo doba kad je sat bio pronalazak za koji su se savremenici najviše interesovali. Hukov zakon o istezanju opruge, prikazan na sl. 143 kazuje nam da između težine (W) obešene na kraju opruge i dužine (l) za koju se ona istegne postoji stalan odnos. To se može napisati:

$$W = kl$$

Težina koju može da drži elastična sila opruge zavisi od dužine na koju se opruga može da istegne. Ako se opruga izduži za dužinu x preko dužine l koja može da drži težinu W, ona stvarno može da drži težinu $k\,(l+x)$ ili $W+kx$. Tako sile koje deluju na težinu W nisu u ravnoteži, i onda ne pomaže stara statička metoda za upoređivanje uravnoteženih sila u miru. Njutn nam je pritekao u pomoć jednim novim načinom za



SL. 177. — GRAFICI KRIVIH $Y = \sin X$, $Y = -\sin X$, $Y = \cos X$, $Y = -\cos X$

merenje sile. On je za osnovu svoga sistema mehanike uzeo otpor promeni brzine, ili inerciju pokretnog tela. Njegov zakon glasi da neuravnoteženi deo, ili rezultanta sila koje deluju na jedno telo, jeste proporcionalan sa masom toga tela i sa njegovim ubrzanjem. Naprimer, sila zvana težina tela, ako ne nailazi na otpor, proizvodi ubrzanje od 981 santimetra na sekund u sekundu, ma kolika bila masa, kao što je i Galilej utvrdio. To posebno ubrzanje obeležavamo sa g, tj. početnim slovom reči gravitas[1]).

A sad opet pogledajte telo obešeno o oprugu. Ono će se klatiti zato što postoji neuravnotežena sila naviše koja deluje na njega, po veličini jednaka sili kojom vuče opruga, minus

[1]) Na latinskom znači *težina*. — Prev.

težina W, kojoj opruga ima da se usprotivi. Brzina ovoga W je $\frac{dx}{dt}$, a njegov gubitak brzine u jedinici vremena je $-\frac{d^2x}{dt^2}$. Po Njutnovom zakonu, ubrzanja što ih dve razne sile (jedna za drugom) proizvode na istu masu proporcionalna su sa silama. Zato možemo napisati:

$$\frac{\text{stvarno ubrzanje}}{\text{ubrzanje usled težine}} = \frac{\text{stvarna sila}}{\text{težina}}$$

ili
$$\frac{-\dfrac{d^2x}{dt^2}}{g} = \frac{k\,(l+x)-W}{W} = \frac{kx}{W} = \frac{kx}{kl} = \frac{x}{l}$$

(pošto je $W = kl$).

Zato, po Hukovom zakonu, nalazimo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\,x$$

Ovakva se jednačina zove diferencijalna jednačina. Da bismo je rešili, moramo naći nešto što može dva puta da se diferencira, pa da opet ostane što je i bilo, pomnoženo istom konstantom i sa promenjenim znakom. Naučili smo ovo:

Kad je $\quad y = \sin ax$

biće $\quad \dfrac{dy}{dx} = a\cos ax$

A onda je:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2 \sin ax$$

Tako, ako je

$$x = \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \quad \text{biće}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

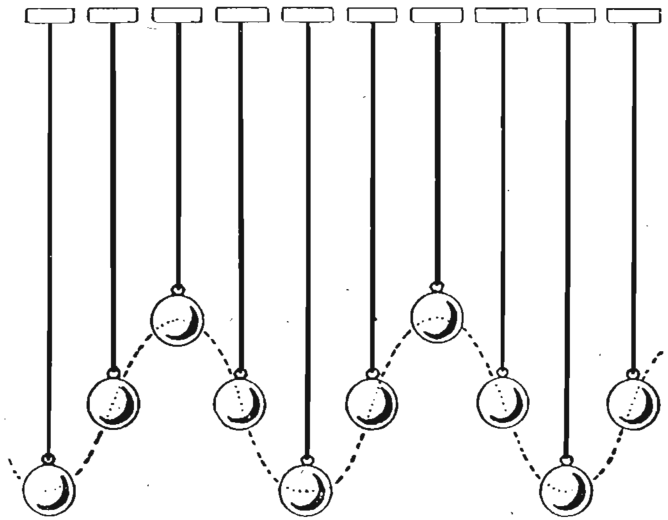
tj.:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$$

Prema tome, rešenje ove diferencijalne jednačine je:

$$x = \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

Ovo znači: ako prenesemo vreme po apscisnoj, a povećanja dužine po ordinatnoj osovini, dobićemo krivu kao što je ona na sl. 177.



SL. 178. — BIOSKOPSKE SLIKE JEDNOG TEŠKOG TELA KOJE OSCILIRA NAVIŠE I NANIŽE NA KRAJU JEDNOG ELASTIČNOG UŽETA

Ako gledate šta se tu u stvari zbiva, pa zamislite niz kinematografskih snimaka, kao na sl. 178, videćete da je to približno tačno. Ako se ovde poslužimo Njutnovom dinamičkom definicijom sile kojom opruga deluje na teg obešen o njenom kraju, nalazimo da teg na kraju opruge oscilira oko svoga težišta krećući se periodičnim kretanjem. Običnim jezikom rečeno, teg se klati gore-dole.

Pre nego što pređemo na metod integralnog računa smatramo da je korisno da uredimo rezultate dobivene u ovome odeljku. Ovako:

y	$\frac{dy}{dx}$
$ax^n + b$	anx^{n-1}
$a^x + b$	$a^x \log_e a$
$a \log_e (x+b) + c$	$\frac{a}{x+b}$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE. — Zapazićete da su i $x = \sin\left(t\frac{g}{l}\right)$ i $x = \cos\left(t\frac{g}{l}\right)$ moguća rešenja proste diferencijalne jednačine koja pretstavlja prvu približnost za izražavanje periodičnog kretanja tega obešenog o kraj opruge. Ove dve krive se razlikuju samo po tome gde seku horizontalnu osovinu, tj. razlikuju se po tome kolika je vrednost za x, kad je $t = 0$. To moramo znati, da bismo mogli da odlučimo koji ćemo odgovor izabrati. Odgovor na diferencijalnu jednačinu nije broj, već čitava porodica brojeva. Koga ćemo člana iz te porodice uzeti za praktičnu upotrebu zavisi od podataka koje nam daje praktični problem. Da bude jasnije, pogledajte u kome smo obliku napisali Hukov zakon. Taj nam zakon kaže: Količina težine dodata da bi se opruga izdužila za datu dužinu (l) ista je kao i podelak na lenjiru čiji nam podeoci daju dovoljne tačne vrednosti za ono što mi posmatramo. To se može i ovako napisati:

$$\frac{dw}{dl} = k.$$

To znači ovo: ako celokupnu dužinu (L) opruge obeležimo na apcisnoj osovini, a celokupnu upotrebljenu težinu (w) na ordinatnoj osovini, pa izbeležimo tačke za te vrednosti dužina i težina, dobićemo grafik koji pretstavlja pravu liniju čiji je nagib k. Praktično obaveštenje o ovome tvrđenju kazuje nam za koliko će biti duža opruga ako dodamo izvesnu težinu. To nije isto kao da nam kaže stvarnu dužinu kad smo dodali težinu. Nagib svake prave je k, ako je njena jednačina

$$y = kx + C$$

Dakle, pošto smo prenosili w po ordinatnoj a L po apscisnoj osovini, biće:

$$w = kL + C$$

Kad Hukov zakon napišemo u ovome obliku možemo ga koristiti da nađemo stvarnu dužinu opruge kad dodamo datu težinu. To možemo postići pod uslovom da već znamo dužinu opruge kad je neka druga težina obešena o nju. Pretpostavimo da se jedna opruga izdužuje za jednu desetinu santimetra za jedan dekagram. Onda možemo napisati jednačinu opruge ovako:

$$w = 10L + C$$

Ako nam se kaže da se opruga izduži 9 santimetara za težinu og 3 dekagrama, imaćemo:

$$3 = 10 \cdot 9 + C$$

Odatle je $\quad C = -87$

Onda jednačina postaje:

$$w = 10\,L - 87$$

Sad možemo izračunati dužinu opruge za svaku težinu koja se obesi o nju. Na primer, ako je težina 13 dekagrama,

$$13 = 10\,L - 87$$

Odatle je dužina:

$$L = 10 \text{ santimetara}$$

Rezultat diferencijalne jednačine mora biti dat u takvome obliku, da uvek sadrži u sebi neku konstantu kao ovo C u poslednjoj jednačini. To mora biti tako, ako želimo da to rešenje bude od neke koristi u računima. Jednačine koje se upotrebljavaju u modernoj nauci uglavnom pripadaju tipu o kome smo baš sad raspravljali. Metoda koja se primenjuje u njihovom rešavanju mnogo liči na ono kad školski nastavnik kaže,

»podesi« rezultat. Mi moramo znati kakve je vrste odgovor iz koga bi mogla da se obrazuje jednačina, pa da ga prema tome i podesimo. Evo nekoliko veoma prostih diferencijalnih jednačina na koje ćemo naići u narednom odeljku.

(a) Naći y kad je $\dfrac{dy}{dx} = x^n$.

Znamo ako je $\quad y = ax^n + b$

da je

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$$

Zato ako je

$$y = ax^{n+1} + b$$

biće

$$\frac{dy}{dx} = a(n+1)\,x^{(n+1)-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = a(n+1)\,x^n.$$

To će biti jednako sa x^n

ako je

$$a = \frac{1}{n+1}$$

I tako je rešenje naše diferencijalne jednačine

$$y = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + b$$

(b) Naći y kad je

$$\frac{dy}{dx} = b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$$

Ako je $\quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$

znamo da je $\quad \dfrac{dy}{dx} = B + 2\,Cx + 3\,Dx^2 + \ldots$

Ako je, dakle,

$$\frac{dy}{dx} = b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$$

biće

$$y = a + bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \frac{ex^4}{4} + \cdots$$

(c) Naći y kad je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x+b}$$

Rešenje ovoga zadatka dato je u prethodnoj tablici, tj.

$$a \log_e (x + b) + C$$

(d) Naći y kad je

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ky$$

Ako je

$$y = e^{cx+b}$$

znamo da je

$$\frac{dy}{dx} = ce^{cx+b}$$

i

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c^2e^{cx+b}$$

Zato, ako stavimo $k = c^2$, tj.

$$c = \sqrt{k}$$

i

$$y = e^{x\sqrt{k}+b}$$

dobijemo

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{x\sqrt{k}+b}\right) = ke^{x\sqrt{k}+b}$$

Pošto $\sqrt{k}$ može biti i pozitivno i negativno, imaćemo:

$$y = e^{+x\sqrt{k}+b}$$
$$y = e^{-x\sqrt{k}+b}$$

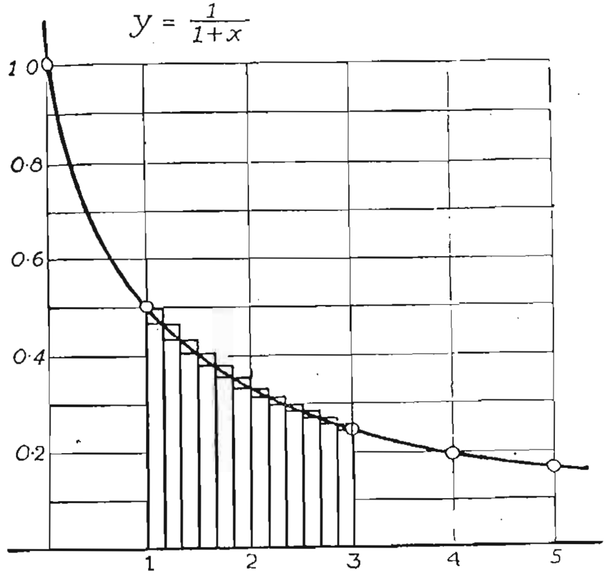
INTEGRIRANJE[1]). — Njutn je polagao pravo da ga smatraju tvorcem infinitezimalnog računa. Na isto polagao je pravo i Lajbnic njegov savremenik sa evropskog kopna. Oko toga se razvila velika raspra u kojoj nacionalno osećanje nije igralo baš tako malu ulogu. Takve prepirke pokazuju usko individualističko gledanje na istoriju matematike. Niko nije pronašao infinitezimalni račun. On je zajednički proizvod jedne grupe ljudi. Ako bi trebalo izdvojiti jedan događaj i obeležiti ga kao početak diferencijalnog računa, izgleda da bi se to moralo pripisati prvenstveno Njutnovom učitelju Barou. Ako se neki događaj mora izdvojiti i obeležiti kao početak integralnog računa, onda bi to moralo biti zapažanje da je određivanje površine isto što i rešavanje diferencijalne jednačine. Mora se priznati da je taj korak u glavnom izveo Lajbnic, koji je uveo oznaku dx. Njutnov glavni prilog bio je u tome što je pokazao kako se diferencijalne jednačine mogu iskoristiti da se protumače posmatranjem zapažene istine iz mehanike, astronomije i optike i tako osvetlio izvanredno veliku korist novih metoda.

Problem nalaženja dirke na jednoj krivoj nije bio ništa novo u doba kad je Baro izneo svoj »diferencijalni trougao«. Isto tako metoda za nalaženje površine pomoću diferencijalnog pravougonika nije bila ništa novo kad je Lajbnic dao svoj prilog ovome problemu. Gotovo u isto vreme i sasvim nezavisno, upotrebljavali su Japanci taj pravougaonik a Volis, jedan od Njutnovih učitelja, poslužio se njime da nađe jedan red za π. Kako je u glavnom izgledala njegova metoda već je prikazano u VI glavi. Ako čitalc hoće ponovo da pročita ono što je ranije rečeno o japanskoj metodi za dobijanje broja π, nemamo potrebe da tu stvar dublje obrađujemo. Integracija je već bila definisana kao nalaženje površine koja je obuhvaćena jednim delom krive, dvema pravama paralelnim sa ordinatnom osovinom koje prolaze kroz krajnje tačke tog dela krive, i delom apcisne osovine koji na njoj isecaju te dve paralelne. ($x = 1$ do $x = 3$ na sl. 179). Površina obeležena na sl. 179 izdeljena je na pravougaonične režnjeve širine Δx, isto onako kao što smo površinu četvrtine kruga delili na pravougaonične režnjeve jednakih širina. Ta površina leži između zbira unutarnjih pravougaonika i zbira spoljnih pravougaonika, koji se razlikuju za one male pravougaonične površine pokazane na slici. Ako pogle-

[1]) Kaže se još i: integrisanje, integracija. — Prev.

date pažljivo na sliku, videćete da na njoj ima dvanaest spoljnih pravougaonika (A_1, A_2, A_3, itd.) Njihova gornja desna temena nalaze se iznad krive. Na toj slici su i 12 unutrašnjih pravougaonika (a_1, a_2, a_3, itd.) čija su leva gornja temena ispod krive. Površina svih spoljnih pravougaonika iznosi

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10} + A_{11} + A_{12}$$



Sl. 179.

Zapazite da hiperbola ima dve razdvojene grane. Jedan deo takve grane sve se bliže spušta ka x-osovini što x sve više raste, a drugi postaje beskonačno blizak jednoj pravoj paralelnoj sa y-osovinom na rastojanju $x = -1$.

Površina svih unutarnjih pravougaonika je

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} + a_{11} + a_{12}$$

Isto tako možete videti da je

$$a_1 = A_2$$
$$a_2 = A_3$$
$$a_3 = A_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{11} = A_{12}$$

Ako oduzmemo manje od većeg dobijamo

$$(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{10} + A_{11} + A_{12}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10} + a_{11} + a_{12}) = A_1 + (A_2 - a_1) + (A_3 - a_2) + + (A_4 - a_3) + \ldots + (A_{10} - a_9) + (A_{11} - a_{10}) + + (A_{12} - a_{11}) - a_{12} = A_1 - a_{12}$$

Površina svakog pravougaonika je visina (y) pomnožena njegovom širinom (Δx). Zato ova razlika iznosi

$$y(1) \cdot \Delta x - y(3) \cdot \Delta x = \Delta x\,[y(1) - y(3)]$$

gde y (1) znači vrednost za y kad je $x = 1$, a y (3) vrednost za y kad je $x = 3$.

Ovo znači da, ako uzmemo obeleženu površinu kao zbir površina svih većih (spoljnih) pravougaonika, rezultat će biti veći za oko jedne polovine ove vrednosti:

$$\Delta x\,[y(1) - y(3)].$$

Ovaj izvor greške stalno se smanjuje kad povećavamo broj pravougaonika time što uzimamo širinu (Δx) svakog takvog pravougaonika sve manju i manju. Ako načinimo $\Delta x = dx$, znači tako malo, da se ne može meriti, i greška će postati veoma mala za merenje. Ako se poslužimo oznakom Σ površina će biti

$$\sum_{x=1}^{x=3} y\,dx \quad \text{ili} \quad (\text{sl. } 179) \sum_{x=1}^{x=3} \frac{1}{1+x}\,dx$$

U integralnom računu ovo se obično piše drugom jednom oznakom. Ovako

$$\int_1^3 y\,dx \quad \text{ili} \quad \int_1^3 \frac{1}{1+x}\,dx \qquad (\text{sl. } 179).$$

Ovo se čita: »integral od jedan do tri ipsilon de iks« i »integral od jedan do tri jedan sa jedan plus iks de iks«.

Grubu vrednost diferencijalnog količnika možemo dobiti i tako, što ćemo lenjirom nacrtati dirku, pa uglomerom izmeriti ugao što ga ona zaklapa sa apscisnom osovinom, i konačno naći tangens toga ugla. Isto tako možemo dobiti dobru približnu vrednost za površinu kao što je ova što je sad posmatramo. Izmerimo visine (y_1 do y_n) onih n spoljnih pravougaonika, saberemo ih, pa njihov zbir pomnožimo širinom (Δx) jednog od njih. Na slici je $n = 12$, $\Delta x = \frac{1}{6}$. Rezultat će biti veći za izvesnu količinu koja, grubo, iznosi

$$\frac{1}{2}(y_1 - y_{n+1})\,\Delta x$$

Nama nije potrebno da stvarno merimo visinu svakog pravougaonika, kad znamo jednačinu krive. Na našoj slici jednačina krive je (sl. 179):

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

Počinjemo, dakle, deljenjem jednog podeoka na apscisnoj osovini na šest jednakih delova $\left(\Delta x = \frac{1}{6}\right)$ da bismo našli površinu između $x = 1$ i $x = 3$. Prva vrednost za y dobija se kad se u jednačini zameni x sa 1. Druga se vrednost dobija kad se x zameni sa $1\frac{1}{6}$, treća kad se zameni sa $1\frac{2}{6}$, četvrta kad se zameni sa $1\frac{3}{6}$ itd. sve do $x = 2\frac{5}{6}$. Tako y_1 do y_n imaju ove uzastopne vrednosti:

$$\frac{1}{2},\ \frac{6}{13},\ldots\frac{6}{23}$$

Površina svih spoljnih pravougaonika biće

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}+\frac{6}{13}+\cdots+\frac{6}{23}\right]=0{,}714^{*})$$

To bi bilo veće tako za

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(y_1 - y_{n+1})$$

*) Da biste ovaj rezultat brzo proverili, napišite članove ovako: $\frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{14}\cdots\frac{1}{23}$ pa onda čitajte vrednosti iz tablice recipročnih vrednosti. — Pisac.

Da bismo dobili y_{n+1} treba da zamenimo $x = 3$ u jednačini krive. I tako višak koji imamo da oduzmemo, grubo uzevši, iznosi

$$\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=0{,}021.$$

Rezultat je 0,693 i on ne može biti netačan za više od gornjeg iznosa. Grešku, dakle, možemo da smanjujemo sve više i više time što ćemo Δx nacrtati sve manje i manje.

Stvarni napredak u integralnom računu počeo je onda, kad je Lajbnic pokazao kako se može naći prost obrazac za zbir kad je Δx tako malo (dx) da

$$\frac{1}{2}\,dx\,(y_1 - y_{n+1})$$

možemo da zanemarimo.

Ima još neznalica koji prosečnu veličinu mozga kod urođenika u zaostalim zemljama navode kao razlog da im treba uskratiti mogućnost da se obrazuju. Međutim ovde vredi da se setimo da je zapremina Lajbnicove lobanje kao i zapremina lobanje Anatola Fransa[1]), bila manja od zapremine prosečne lobanje čoveka iz nekog primitivnog naroda.

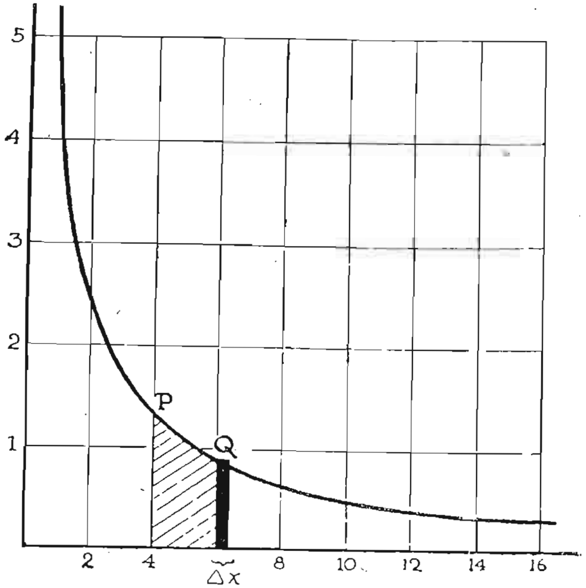
Lajbnic je hteo da izbegne rad sa uzastopnim približnim vrednostima, kojima smo se mi poslužili u VI glavi da nađemo π. On je u merenje površina uveo k r e t a n j e. Kako je to on uradio videćete na sl. 180. Tu imamo da nađemo onu osenčenu površinu ograničenu ozgo delom krive linije PQ a ozdo delom apcisne osovine između $x = 4$ i $x = 6$. Sa oznakom koju ćemo sad upotrebiti, osenčena površina biće

$$\int_4^6 y\,dx \quad \text{ili} \quad \int_4^6 \frac{5}{x}\,dx \quad \text{(sl 180).}$$

Pre svega zamislite ordinatu y kao komad nagaravljene gume rastegnute između P i $x = 4$, sa pokretnom omčom oko krive na jednom kraju i oko apcisne osovine na drugom. Kad je mi guramo pravo dok joj jedan kraj ne dođe u Q a drugi kraj u

[1]) Francuski književnik (1844—1924). — P r e v.

$x = 6$, ona će svojim tragom obeležiti osenčenu površinu na slici. Pustite je sad da se krene dalje za izvesno veoma kratko rastojanje Δx, pa obeležite taj pravougaonični režanj površine



Sl. 180.

sa ΔA, kao što je na slici onaj crni izduženi pravougaonik. Tada će biti

$$\Delta A = y \cdot \Delta x$$

ili

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = y \text{ (veoma blizu!)}$$

Ako Δx postane beskrajno malo, ovo se može napisati:

$$\frac{dA}{dx} = y \text{ (tačno!)}$$

To znači da se količina za koju površina raste kad x raste u ma kojoj tački duž apscisne osovine meri ordinatom y u toj tački.

Ovo je diferencijalna jednačina na koju smo već ranije naišli. To vidimo odmah čim je ovako potpunce napišemo:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{5}{x}$$

Da bismo je rešili, imamo da nađemo izraz koji daje $\frac{5}{x}$ kad ga diferenciramo. Znamo da je diferencijalni količnik izraza

$$C + a \log_{(e)} (x + b)$$

ovo:

$$\frac{a}{x+b}$$

Ako stavimo $a = 5$, $b = 0$, imamo

$$\frac{a}{x+b} = \frac{5}{x}$$

i

$$a \log_e (x+b) = 5 \log_e x$$

Rešenje je dakle

$$A = C + 5 \log_e^x$$

Da bismo mogli iskoristiti ovaj rezultat, treba da se setimo da je površina bila nula kad je guma spajala P sa $x = 4$, tj.

$$5 \log_e 4 + C = 0$$
$$C = -5 \log_e 4$$

Površina obeležena tragom gume koja klizi do neke druge tačke (x_q) na apscisnoj osovini biće:

$$5 \log_e x_q - 5 \log_e 4$$

U ovome slučaju posmatramo površinu između $x = 4$ i $x = 6$. Zato je ona:

$$5 \log_e 6 - 5 \log_e 4$$
$$5 (\log_e 6 - \log_e 4)$$
$$5 \log_e \frac{6}{4}$$
$$5 \log_e \frac{3}{2}$$
$$5 \log_e 1{,}5$$

Na isti način možemo sad naći površinu obeleženu na sl. 179, tj.

$$\int_1^3 \frac{1}{1+x}\, dx$$

Prema već datoj tablici znamo da je

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{1+x}$$

kad je $A = \log_e (1+x) + C$

Kad počnemo od $x = 1$, kad je površina nula, imaćemo

$$\log_e (1+1) + C = 0$$

$$C = -\log_e 2$$

To je dalje

$$\int_1^3 \frac{1}{1+x}\, dx = \log_e 4 - \log_e 2$$

$$= \log_e \frac{4}{2}$$

$$= \log_e 2.$$

Tablice nam daju $\log_{10} 2 = 0{,}301$ i $\log_e 2 = \log_e 10 \cdot \log_{10} 2 = 2{,}303 \cdot 0{,}301 = 0{,}693$. Ovaj rezultat je, dakle, tačan sa istim brojem decimala kao i približni, već dobiveni odgovor.

Možemo potpuno na isti način izraditi tablice za nalaženje ovakvih površina, služeći se rezultatima iz poslednjeg odeljka. Ako je

$$\frac{dA}{dx} = ax^n$$

biće:

$$A = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

tj. $$\int_p^q ax^n dx = \frac{a}{n+1} \cdot q^{n+1} - \frac{a}{n+1} \cdot p^{n+1}$$

$$= \frac{a}{n+1}\, (q^{n+1} - p^{n+1}).$$

Isto tako, ako je

$$\frac{dA}{dx} = \cos x$$

znamo da je

$$A = \sin x + C$$

a odatle

$$\int_p^q \cos x.\, dx = \sin q - \sin p$$

Druga napomena uz takvu tablicu javlja se otuda što diferencijalni količnik od

$$b + ae^{cx}$$

iznosi

$$ace^{cx}$$

Kad stavimo

$$a = \frac{1}{c}$$

dobijamo:

$$\frac{d\left(b + \frac{1}{c}\, e^{cx}\right)}{dx} = e^{cx}$$

Ako je

$$\frac{dA}{dx} = e^{cx}$$

biće

$$A = \frac{1}{c}\, e^{cx} + b$$

Otuda imamo

$$\int_p^q e^{cx}\,dx = \frac{1}{c}\,(e^{cq} - e^{cp})$$

Zato se može načiniti ovakva jedna mala tablica za nalaženje površine.

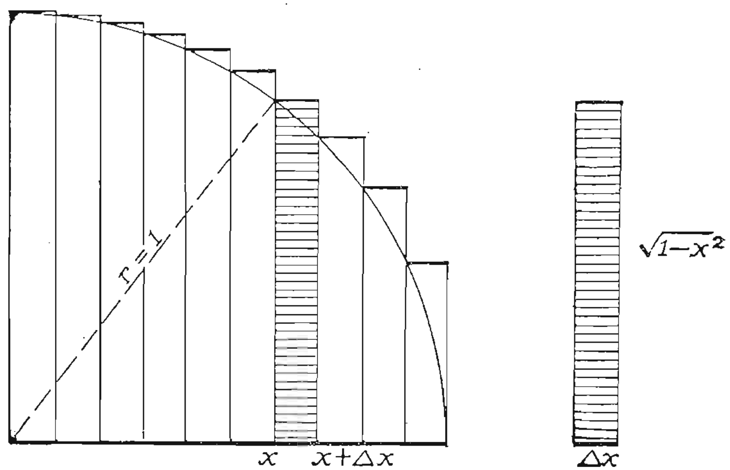
y	$\int_p^q y\,dx$
$\frac{a}{b+x}$	$a\log_{(e)}\left(\frac{b+q}{b+p}\right)$
ax^n	$\frac{a}{n+1}\,(q^{n+1} - p^{n+1})$
$\cos ax$	$\frac{1}{a}\,(\sin aq - \sin ap)$
e^{cx}	$\frac{1}{c}\,(e^{cq} - e^{cp})$

KORISTI OD INTEGRIRANJA. — Dosad nismo objasnili zašto nam je potrebno da merimo neku površinu kao što su one na sl. 166, 179 i 180. Integralni račun je postao najkorisniji u doba kad je ugalj kao izvor energije zamenio rad čoveka i rad tegleće životinje. U doba Njutna i Lajbnica on je iskorišćavan da se pronalaze redovi kao što su oni koje smo proučavali u poslednjoj glavi. Prva važna primena metode integriranja bila je u tome što je nađena vrednost za π kao beskonačan red koji se zagušuje. U šestoj glavi već smo dodirnuli metodu koju je primenio Volis da dobije jednu grubu vrednost za π. Na sl. 181 površina četvrtine kruga čiji je poluprečnik jedinica ($r = 1$) upisana je u niz pravougaoničnih režnjeva čija je površina $y.\ \Delta x$. Kao što možete videti u šestoj glavi, ovde je $y = \sqrt{1-x^2}$. Pokretna ordinata y klizi od $x = 0$ do $x = r = 1$ dok svojim tragom opisuje površinu o kojoj je reč. Kad se broj režnjeva

načini što je moguće većim, a Δx postane širina dx (znači suviše mala za merenje), imamo:

$$A = \int_0^r y\,dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{1-x^2}\,dx$$



Površina kruga

Sl. 181.

Vrednost za ovo možemo naći (gl. VII) primenom binomne teoreme. Ovako:

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - 0{,}5x^2 - 0{,}125x^4 - 0{,}0625x^6 - 0{,}0390625x^8 - 0{,}02734375x^{10} - \ldots$$

Znači da treba da nađemo A kad je

$$\frac{dA}{dx} = 1 - 0{,}5x^2 - 0{,}125x^4 - 0{,}0625x^6 - \ldots$$

Ako je

$$\frac{dA}{dx} = b + cx + dx^2 + ex^3 + fx^4 + \ldots$$

znamo da je

$$A = a + bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \frac{ex^4}{4} + \ldots .$$

Ako stavimo $b = 1$, $c = 0$, $d = -0{,}5$, $e = 0$, $f = -0{,}125$ itd. u gornjem izrazu, dobijemo binomni red $\sqrt{1-x^2}$, dat gore. Zato je rezultat integriranja izraza $\sqrt{1-x^2}$ ovo:

$$A = a + x - \frac{0{,}5\,x^3}{3} - \frac{0{,}125\,x^5}{5} - \frac{0{,}0625\,x^7}{7} - \frac{0{,}0390625\,x^9}{9} - \ldots .$$

Da bismo našli a treba da se setimo da pokretna ordinata počinje da se kreće od $x = 0$. Zato je $A = 0$, kad je $x = 0$. Otuda:

$$0 = a - 0 - 0 - \ldots$$

$$\text{tj} \quad a = 0$$

Da bismo našli površinu četvrt-kruga čiji je poluprečnik jedinica, imamo da nađemo vrednost za A kad je $x = r = 1$. Ovako

$$A = 1 - \frac{0{,}5}{3} - \frac{0{,}125}{5} - \frac{0{,}0625}{7} - \frac{0{,}0390625}{9} - \ldots .$$

Površina (A) četvrt-kruga čiji je poluprečnik jedinica iznosi $\frac{\pi}{4}$. Tako možemo staviti da je

$$\pi = 4\left(1 - \frac{0{,}5}{3} - \frac{0{,}125}{5} - \frac{0{,}0625}{7} - \frac{0{,}0390625}{9} - \ldots\right)$$

Ako uzmemo šest prvih članova ovoga reda dobijamo:

$$\pi = 4 \cdot 0{,}7926 \ldots$$

$$\pi = 3{,}17$$

Ovaj se red zagušuje dosta sporo. Ma koliko njegovih članova uzeli, on nikad ne postaje manji od 3,14159. Zato je vrednost za π (sa četiri decimala) 3,1416. Ima dosta drugih redova

za π, od kojih se neki veoma brzo zagušuju. Jedan red za π osniva se na primeni jednog od najvažnijih pronalazaka za izradu logaritamskih tablica.

Već smo videli kako da integriramo

$$\int_p^q \frac{1}{1+x}\,dx$$

Ako je $p = 0$, vrednost ovoga integrala je $\log_e (1 + q)$. Moguće je naći vrednost za takvu površinu metodom sličnom metodi koju smo sad upotrebili za krug, pošto možemo da napišemo gornji integral i ovako

$$\int_p^q \frac{1}{1+x}\,dx = \int_p^q (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots)\,dx$$

Ako je diferencijalni količnik za A ovaj red:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

imamo

$$A = a + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots .$$

Ako uzmemo površinu između $x = 0$, (tj. $p = 0$) i $x = q$, biće $A = 0$ kad je $x = 0$. Otuda je $a = 0$, te je

$$\int_p^q \frac{1}{1+x}\,dx = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \ldots .$$

I tako dobijamo logaritamski red

$$\log_e (1 + q) = q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} - \frac{q^4}{4} + \frac{q^5}{5} - \ldots .$$

Ovaj se red zagušuje pod uslovom da q nije veće od *1*. Zato ga možemo iskoristiti da izračunavamo logaritme za osnovu e za sve brojeve između 1 i 2. Da bismo dobili $\log_e 1{,}25$ stavićemo

$$\log_e (1 + 0{,}25) = 0{,}25 - \frac{(0{,}25)^2}{2} + \frac{(0{,}25)^3}{3} - \frac{(0{,}25)^4}{4} + \ldots$$

To se svodi na red koji se dosta brzo zagušuje, naime:

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{64}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{1024}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{24}\right)+\ldots\ldots$$

Slično tome, da bismo dobili $\log_e 2$ imamo:

$$\log_e(1+1)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{56}+\frac{1}{90}+\frac{1}{132}+\ldots.$$

Logaritamski red služi za izračunavanje logaritama, ali on vodi i ka jednoj drugoj metodi za izračunavanje vrednosti za π. Imamo da uvedemo uobraženi broj $\sqrt{-1}$. Kad je a mereno u radijanima, da bismo dobili redove za $\cos a$ i $\sin a$, već smo upotrebili jednačinu

$$e^{ia}=\cos a+i\sin a$$

tj.
$$\frac{e^{ia}}{\cos a}=1+i\frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\frac{e^{ia}}{\cos a}=1+i\tan a$$

To je dalje:

$$\log_e\frac{e^{ia}}{\cos a}=\log_e(1+i\,\mathrm{tang}\,a)$$

$$\log_e e^{ia}-\log_e\cos a=\log_e(1+i\,\mathrm{tang}\,a)$$

Setite se kako se nalazi logaritam stepena. Videćete da je

$$\log_e e^{ia}=ia\log_e e$$

Logaritam osnove je uvek 1. (To znači: $e^1=e$, $\log_e e=1$).
Zato je

$$\log_e e^{ia}=ia$$

Otuda

$$ia-\log_e\cos a=\log_e(1+i\,\mathrm{tang}\,a)$$

Kad se poslužimo logaritamskim redom, stavićemo $q=i\,\mathrm{tang}\,a$ i dobiti:

$$\log_e(1+i\,\mathrm{tang}\,a)=i\,\mathrm{tang}\,a-\frac{i^2\,\mathrm{tang}^2 a}{2}+\frac{i^3\,\mathrm{tang}^3 a}{3}-$$
$$-\frac{i^4\,\mathrm{tang}^4 a}{4}+\ldots.$$

Stavimo sad za stepene od i njihove posebne vrednosti:

$$\log_e(1+i\,\mathrm{tang}\,a)=i\,\mathrm{tang}\,a+\frac{\mathrm{tang}^2 a}{2}-i\frac{\mathrm{tang}^3 a}{3}-$$
$$-\frac{\mathrm{tang}^4 a}{4}+\frac{i\,\mathrm{tang}^5 a}{5}+\ldots$$

$$ia-\log_e\cos a=\left(\mathrm{tang}\,a-\frac{\mathrm{tang}^3 a}{3}+\frac{\mathrm{tang}^5 a}{5}-\ldots.\right)i+$$
$$+\left(\frac{\mathrm{tang}^2 a}{2}-\frac{\mathrm{tang}^4 a}{4}+\frac{\mathrm{tang}^6 a}{6}\ldots\right)$$

Kad se setimo pravila o kruškama i konjima imamo:

$$ia=i\left(\mathrm{tang}\,a-\frac{\mathrm{tang}^3 a}{3}+\frac{\mathrm{tang}^5 a}{5}-\ldots\ldots\right)$$

tj.
$$a=\mathrm{tang}\,a-\frac{\mathrm{tang}^3 a}{3}+\frac{\mathrm{tang}^5 a}{5}-\frac{\mathrm{tang}^7 a}{7}+\ldots.$$

Ovaj red možemo koristiti na nekoliko načina da dobijemo π. Već smo naučili da je $\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{4}$ (radijana, tj. $\mathrm{tang}\,45^0$) $=1$. Zato, ako je $a=\frac{\pi}{4}$, imamo:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\ldots.$$

$$\frac{\pi}{4}=1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)-\ldots.=$$

$$=1-\frac{2}{15}-\frac{2}{63}-\frac{2}{143}-\frac{2}{255}-\ldots.=$$

$$=1-2\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{63}+\frac{1}{143}+\frac{1}{255}+\ldots\ldots\right)$$

Ovaj se red zagušuje veoma sporo. Možemo dobiti mnogo zgodniji oblik, ako uzmemo druge vrednosti za tang a. Na primer tang 30^0, tj.

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ovde je

$$a = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 \cdot \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9 \cdot \frac{1}{9} -$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{11} \cdot \frac{1}{11} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{33}\right) + \ldots =$$

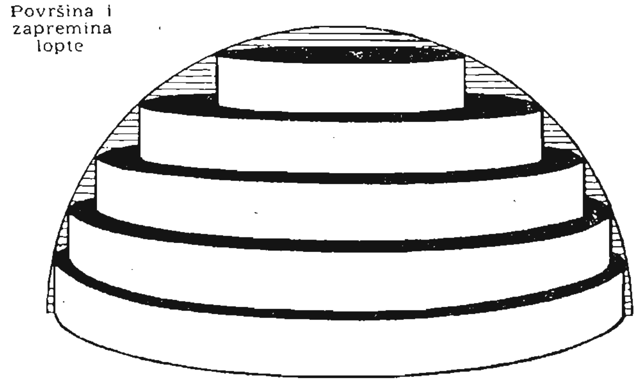
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{9\sqrt{3}} \cdot \frac{16}{105} + \frac{1}{81\sqrt{3}} \cdot \frac{24}{297} + \ldots =$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{8}{27} + \frac{16}{27 \cdot 105} + \frac{24}{243 \cdot 297} + \ldots\right)$$

Odatle je $\pi = 3{,}14 \ldots$

Kad se napiše na ovaj način vedećete da se uzastopni članovi brže smanjuju nego kod reda $1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 \ldots$ zato je poslednji rezultat izvesno tačan sa dva decimala. Metode integralnog računa su naročito korisne za rešavanje računskih problema kod geometriskih tela. Zato je i rečeno tako malo o njima dosad. U vezi sa tim izračunavanjima osnovna dosetka kojom ćemo se poslužiti vodi poreklo iz daleke starine. Arhimed je našao vrednost za π deleći krug na veliki broj približno trouglastih režnjeva. On tvrdi da je Demokrit dao tačnu vrednost za zapreminu piramide smatrajući je kao zbir velikog broja slojeva. Veoma je verovatno da je otac grčkog materijalizma svoju metodu primio od Egipćana. Papirus koji se sad nalazi u

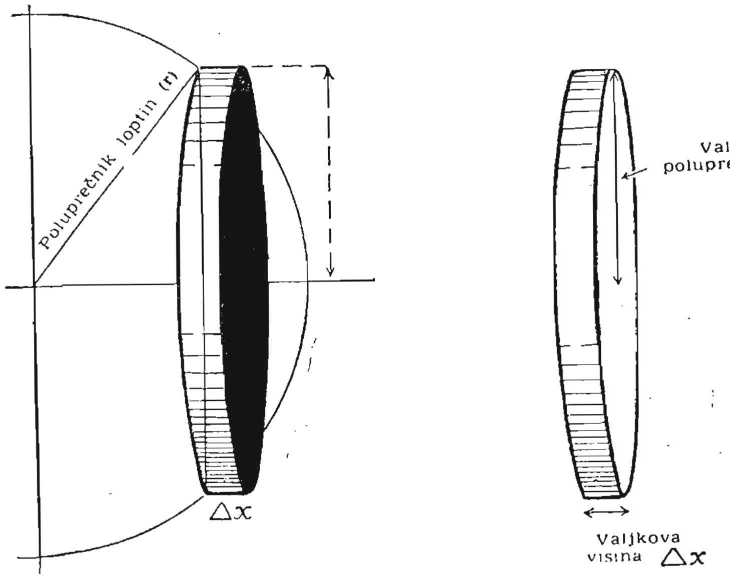
Moskvi izgleda da pokazuje da su Misirci imali još 1800 godina pre naše ere tačan obrazac za zapreminu piramide i za površinu lopte. Sjajne tekovine Aleksandrinaca treba, možda, u mnogo većoj meri pripisati preostacima misirske veštine merenja, nego što smo mi u stanju da to rasvetlimo svojom navikom da istoriju izlažemo kao niz biografskih studija. Kako se mogu naći pomoću



Sl. 182.

integralnog računa površina i zapremina geometriskih tela kao što su kupa, piramida, lopta ili elipsoid može se pokazati na primeru iznalaženja zapremine tela koje je od najveće važnosti u astronomiji. Ako želimo da nađemo zapreminu ili površinu lopte, isečemo je na ogromno veliki broj paralelnih režnjeva, i mi ćemo videti da je svaki režanj veoma blisko isti kao i režanj na kupi (za svaki režanj druga kupa), tako da je površina ili zapremina ta dva režnja gotovo ista. Da bismo našli zapreminu, ali ne i površinu, možemo stvari još uprostiti. Uzećemo valjkaste režnjeve (sl. 182) isto onako kao što smo kod kruga uzeli da je on zbir ogromno velikog broja pravougaonika (sl. 181). Zapremina tela koje ima svuda isti poprečni presek jeste proizvod površine poprečnog preseka i visine. Otuda je zapremina valjka $\pi r^2 h$. Da bismo dobili zapreminu lopte (sl. 183) postupamo kao da je čitav niz ravnih valjkastih režnjeva postavljen jedan uz drugi duž apscisne osovine, gde svaki pljosnati valjak kad ga postavimo na njegovu osnovu ima visinu Δx. Poluprečnik svakog tog valjka biće jednak sa ordinatom kružnog poprečnog preseka lopte. Ako je poluprečnik lopte r, onda ćemo poluprečnik svakog valjka (y), dobiti iz jednačine:

$$y^2 = r^2 - x^2.$$



Sl. 183.
Dobijanje zapremine lopte pomoću integralnog računa.

Zapremina svakog režnja je

$$\pi y^2 \Delta x = \pi (r^2 - x^2) \Delta x$$

Zapremina polulopte biće zbir svih valjaka kad Δx postane beskrajno malo, tj.

$$\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, dx$$

Za zapreminu polulopte moramo zbog toga rešiti diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dV}{dx} = \pi r^2 - \pi x^2$$

Rešenje takve jednačine već je dato. Ono je

$$V = a + \pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}$$

Pošto mi ovde uzimamo u obzir samo zapreminu desno od $x = 0$, biće $V = 0$, kad je $x = 0$. i zbog toga $a = 0$. Otuda se vrednost integrala dobija kad se stavi r mesto x u izrazu

$$\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}$$

tj.

$$V = \pi r^2 r - \frac{\pi r^3}{3}$$

$$V = \pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{2}{3} \pi r^3$$

Zapremina cele lopte biće dva puta toliko, tj.

$$\frac{4}{3} \pi r^3.$$

Zato je zapremina Zemlje približno $\frac{4}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 6370^3$ **kubnih** kilometara. To je približno

1083 · 10^9 kubnih kilometara

MATEMATIČKO INTEGRIRANJE I NJEGOVA DRUŠTVENA ULOGA. — Kao što smo već videli u poslednjoj glavi proučavanje redova kao novog sredstva za računanje steklo je veliku praktičnu važnost u društvenim uslovima iz kojih je proistekao integralni račun u svome modernom obliku. Primeri koje smo dosad izneli da pokažemo njegovu primenu bili su ograničeni na pronalaženje redova i na probleme računanja. Korist od integralnog računa za proračune u egzaktnim naukama nije se ispoljila u svojoj veličini sve dok nije počela proizvodnja električne energije. Eksplozija u topovskoj cevi i kucanje časovnika bili su zvona koja su oglašavala dolazak novog doba u organizaciji čovekovog društvenog života. Pre nego što se završio sedamnaesti vek pojavio se još jedan tehnički pronalazak koji je zahtevao povećanje upotrebe metala. Napredak u rudarstvu utabao je put za industrisku revoluciju, koja je u oblasti proizvodnje uvela široku primenu mašina nezavisnih od ljudskih ili životinjskih izvora energije. Integralni račun dao je matematički alat za proračunavanje korisnosti novih mašina. Kad bismo potpuno iskoristili svoje današnje naučno znanje, mogli bismo načiniti inventar svih izvora energije koji stoje na raspoloženju za planiranje novog doba, doba obilja i dokolice za svakoga. Danas se građanski ekonomisti odveć malo obučavaju u stvarnoj nauci da bi mogli shvatiti svu ništavnost beznačajnih raspri o zelenaštvu i trgovini koje se vode još većom žestinom nego ono u četrnaestom veku što su se vodila ona teološka izvrdavanja.

Kad se pojavio ugalj kao izvor energije, Njutnovo shvatanje sile počelo je da igra manje važnu ulogu u egzaktnim naukama. Na početku industriske revolucije oni što su držali industriju u svojim rukama gledali su da dobiju od mašina maksimum koristi. Hemija je počela da pruža nove mogućnosti za fabrikante. Biologija se vezala sa hemijom i izazvala veliko interesovanje toga doba za problem sagorevanja. Glavno pitanje toga doba bilo je: kako je hemiska priroda goriva i hrane vezana sa radom koji može da obavi neživa ili živa mašina? Fenomen trenja, kako su ga prikazali ogledi Remforda pri bušenju topovske cevi, izbio je u prvi red. Nova jedna reč, energija ili sposobnost za obavljanje rada, postajala je sve važnija u naučnom rečniku. Metode integralnog računa postale su osnova nove fizike i hemije u oblasti energetike (termodinamike), isto onako kao što je diferencijalni račun stvorio sredstvo za proučavanje mehaničkog kretanja *per se*[1] u prethodnom stoleću.

U Njutnovoj fizici rad što ga izvršuje neka težina koja pada, meri se proizvodom sile koju pokazuje ta težina i rastojanja na koje ta težina pada ($W = Fl$). Ako se težina spušta na maloj daljini (dl), mala količina obavljenog rada iznosi

$$dW = F \cdot dl$$

[1]) Samokretanja. — Red.

Ako se setimo da je Njutnova sila proizvod mase (m) koja se kreće, i proizvedenog ubrzanja $\left(\frac{d^2l}{dt^2}\right.$ ili $\frac{dv}{dt}$, gde je v brzina u datom trenutku$\left.\right)$ možemo staviti

$$dW = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dl.$$

Ako obe strane pomnožimo sa ($dl : dl$) tj. sa 1, imaćemo

$$dW = m \cdot \frac{dl}{dt} \cdot \frac{dv}{dl} \cdot dl$$

$$= mv \cdot dv$$

Ako počnemo brzinom 0 kad je $l = 0$ i krećemo se dok brzina ne postane V, kad je daljina sa koje se pada L, obavljeni rad biće:

$$\int_0^V mv \cdot dv = \frac{1}{2} m V^2$$

Količina $\frac{1}{2} m V^2$ zove se kinetička energija mase m kad ima brzinu V.

Ako telo pada u bezvazdušnom prostoru, njeno ubrzanje će biti približno 981 sm u sekundi. Rad obavljen padanjem sa visine L biće zbog toga

$$981\, m L = \frac{1}{2} m V^2$$

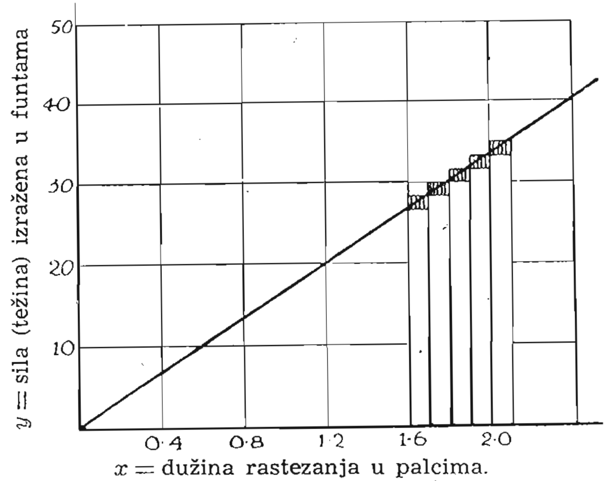
Pretpostavimo da telo ne pada u bezvazdušnom prostoru, i da, pri padu, velikom brzinom okreće točak starinskog sata sa tegovima. Prema Njutnovom shvatanju, časovnički točak nosi u sebi svu lenjost materije, ili inerciju koja se opire promeni kretanja. Telo (težina) koja pada imalo bi da natera *masu* svakog delića toga točka na izvesnu brzinu. Ako označimo celokupnu masu tela koje pada i točka sa M_2 i prosečnu vrednost kvadrata brzine svih delića tog tela i točka sa V_2^2 onda ne dobijamo da je $\frac{1}{2}M_2 V_2^2$ jednako sa 981 m L, tj. sa radom što ga pri padu obavi teško telo terajući točak, nego izlazi da je ta količina manja, kao što je i ubrzanje tela manje kad pada kroz vazduh, nego kad pada u praznom prostoru. Nešto drugo se tu umešalo. Proizvedena je i toplota i kretanje. Što je više proizvedene toplote, tim više se usporava kretanje. Njutnova matematika mogla nam je pomoći samo da izračunamo brzinu neke mašine ako se točak kreće veoma sporo (kao točkovi časovnika teranog tegovima), i ako je mašina vrlo dobro podmazana tako da se stvara vrlo malo toplote. Pre nego što se ta pojava stvaranja toplote mogla iskoristiti, morali su se vršiti novi ogledi da se pronađe način na koji se stvara toplota.

Na početku osamnaestoga veka prirodne nauke su dobile jedan nov alat, termometar. Po opštem sporazumu usvojena je jedinica toplote. To je količina toplote potrebna da se utvrđena količina nekog naročitog oblika materije digne s jedne temperature na drugu. (U međunarodnom sistemu to je gram vode i jedan stepen Celzijusov). Krajem osamnaestog i prvih godina devetnaestog veka proces sagorevanja bio je najglavniji problem od praktičnog interesa. Baš tada su tri pronalaska navela na to da se *energija* usvoji kao zajednička osnova merenja u fizici, u hemiji i u biologiji. Postoji stalan odnos između količine toplote proizvedene sagorevanjem i količine svake pojedine materije koja sagoreva. Postoji stalan odnos između količine upotrebljene hrane i količine telesne toplote koju proizvodi neka životinja. Isto tako postoji stalan odnos između količine toplote stvorene trenjem i količine rada izvršenog kretanjem nasuprot tom trenju. Tolikoj materiji odgovara toliko toplote; toj količini mehaničkog rada toliko toplote. Otuda toliko materije pretstavlja mogućnost za toliko rada. Pronalazak parne mašine značio je da je mrtva materija stekla *potencijalnu energiju*, ili sposobnost da obavlja rad koji više ne moraju — pod ropskim uslovima — da obavljaju ljudi. U stvarnom životu nikad ne dobijemo *svu* potencijalnu energiju iz materije u obliku odgovarajućih jedinica mehaničkog rada. Uvek postoji izvesna količina proizvedene toplote. Prvenstveni tehnološki problem mašinskoga doba bio je u tome, da se mašine konstruišu tako, da se iz njih izvuče što više rada. Da bismo saznali kolika je korisnost jedne mašine, moramo umeti da

izračunamo koliko se pri njenom radu gubi potencijalne energije. Rešenje ovog problema dalo je metodama integralnog računa mnogo veću praktičnu važnost nego što su njegovi pronalazači mogli i zamisliti.

Integralni račun može nam pomoći da izračunamo koliki rad može da obavi neka mašina ako se ništa ne izgubi od njenih zaliha energije. Najprostiji primer kako se to radi pruža nam

Potencijalna energija ispružene opruge



Sl. 184.

mašina Njutnovog doba. Da bismo uprostili stvar, pretpostavićemo da se opruga na časovniku vlada tačno po Hukovom zakonu, kao na sl. 184. Opruga sa sl. 184 isteže se za 0,6 palca (x) na 10 funti obešene težine (y) tj.

$$y = \frac{10\,x}{0{,}6}$$

$$= 16{,}7\,x$$

Pretpostavimo, kad je opruga izvučena za 1,6 palca, da je mi vučemo i dalje dok ne postane za 2,1 palca duža nego njena nerastezana dužina. Ako je rastegnuta za dužinu dx, izvršen rad je sila y (merena u funtama težine) pomnožena rastojanjem na kome je delovala, tj. $y \cdot dx$.

Između $x = 1{,}6$ i $x = 2{,}1$ izvršeni rad biće zbir svih onih pravougaoničnih režnjeva, tj.

$$\int_{1,6}^{2,1} y\,dx = \int_{1,6}^{2,1} 16{,}7\ x\,dx$$

To znači da imamo da rešimo jednačinu

$$\frac{dA}{dx} = 16{,}7\ x$$

tj.

$$A = \frac{16{,}7\,x^2}{2} + C$$

Kad je $x = 1{,}6$ biće $A = 0$, te je

$$C = -\frac{16{,}7}{2} \cdot 1{,}6^2$$

Zato celokupan rad koji bi mogao da se obavi istežući oprugu od 1,6 do 2,1 palca jeste:

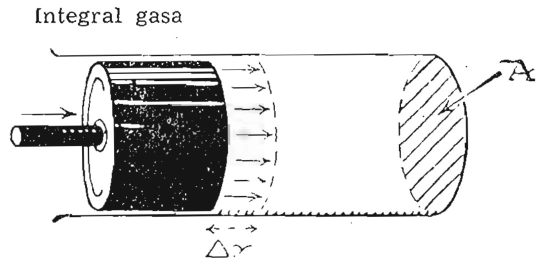
$$\frac{16{,}7}{2}\,[(2{,}1)^2 - (1{,}6)^2]$$

$$= 15{,}4 \text{ funte - palci.}$$

Ovu količinu mi zovemo količinom za koju se **potencijalna energija** opruge **povećava** kad se rastegne od 1,6 na 2,1 palca. **Korisnost** mašine koju tera opruga meri se time na koliki se rad mogu naterati točkovi da ga izvrše dok potencijalna energija poraste za izvesnu količinu. To znači da se korisnost meri odnosom rada koji dobijamo iz navijene mašine i rada koji utrošimo oko navijanja.

Korisnost u veku mašina s unutarnjim sagorevanjem osniva se na upotrebi »elastične« sile gasa mesto elastične sile opruge. Teorija mašina s unutrašnjim sagorevanjem osniva se na zakonu o elastičnosti gasova. Krajem sedamnaestoga veka tehnički problemi rudarstva već su privlačili pažnju fizičara. Među mehaničkim problemima koji se tu javljaju veoma su važni kopanje okana u dubinu, pumpanje i ventilacija. Pumpa je došla na red kad se počelo razvijati naučno proučavanje mehanike. Robert Bojl koji je bio u stalnom dodiru sa Hukom i Njutnom, pronašao je vakumsku pumpu i, koliko je zabeleženo, prvi izvršio oglede o širenju i zgušnjavanju gasova kad se smanji ili poveća pritisak. Približni zakon o širenju gasova koji je otkrio Bojl glasi, da pri stalnoj temperaturi zapreminu (v) gasa i pritisak (p) koji se na njega vrši vezuje ova jednačina:

$$p = \frac{a}{v}$$



Sl. 185.

Ako sud visine x ima svuda istu površinu poprečnog preseka (A) kao valjak, njegova je zapremina $A \cdot x$. Ako se klip utisne za dužinu Δx, zapremina gasa u sudu opadne za $A \cdot \Delta x$. U mehanici gasova pritisak se meri silom koja deluje na jedinicu površine, a rad se meri proizvodom sile i pređenog puta, tj. pritisak (F) biće:

$F = p \cdot A$, a rad:

$W = F \cdot D$

Ako je klip utisnut za dužinu Δx bez gubitka energije u trenju, izvršeni rad je $F \cdot \Delta x$. To se može napisati i ovako: $pA\,\Delta x$. Mali gubitak zapremine koji je izražen izrazom: $-\ A\,\Delta\,x$ može se napisati i ovako: Δv. Mala količina rada upotrebljena da se zapremina za toliko izmeni može se obeležiti sa ΔW. I tako će biti:

$$\Delta W = -\ p\Delta v.$$

U ovoj jednačini a je konstanta. Kad bi a bilo 5, kriva bi bila identična s krivom na sl. 180 gde je

$$y = \frac{5}{x}.$$

Kad se izračunava korisnost neke mašine s unutarnjim sagorevanjem problem je u tome da se nađe koliko rada mora da se utroši dok se potiskuje klip napred za izvesnu dužinu za koju je napon gasa gurao klip u suprotnom smislu pokrećući i klip i točkove. Iz opisa uz sl. 185 videćete da ako se gas zbije od zapremine v_1 na zapreminu v_2 to je isto što i

$$-\int_{v_1}^{v_2} p\,d\,v$$

$$= -\int_{v_1}^{v_2} \frac{a}{v}\,d\,v$$

Ako se v prenosi po apscisnoj osovini, ovo je integral:

$$-\int_{v_1}^{v_2} \frac{a}{x}\,dx$$

$$= a \log_e \frac{v_1}{v_2}.$$

Ova se vrednost dobija iz logaritamskih tablica.

MATEMATIKA U NJUTNOVO DOBA. — Njutnova dela su postigla basnoslovne razmere. Kad se to uvidi, pada u oči da je najveći njegov uspeh u tome što je on umeo da iskoristi nove metode koje su proizašle iz spajanja algebre i geometrije. Napredak u novim metodama mogao je biti brži nego što je faktički bio, da su se oni koji su razumevali novu tehniku koristili srećom što je postojao R a č u n a r p e s k a[1]) i algebra Teonova i Diofantova. Intelektualni vođi u Njutnovo doba nisu shvatili da svaki duhovni napredak izaziva neke nove probleme u vaspitanju. I sam Njutn je posvetio mnogo svoje energije pronalaženju zapletenih dokaza u Euklidovoj geometriji, mesto da je pokušao da svoje sopstvene metode načini razumljivijim za svoje savremenike. Jedna posledica bila je u tome što očevidni napredak u Njutnovoj mehanici nije bio primenjen u njegovoj rođenoj zemlji još za ceo vek posle objavljivanja njegovih Principija[2]).

[1]) Arhimedovo delo. — P r e v.

[2]) Njutnovo delo. Ko želi da se upozna s njim, neka uzme veoma popularno napisanu knjigu I s a k N j u t n i n j e g o v a P r i n c i p i j a od Milankovića i Bokšana. — P r e v.

Danas mi stalno čujemo o ograničenjima Njutnove mehanike i matematičkih metoda kojima se on služio. Kad pažljivo zagledamo u čemu su ta ograničenja, jasno je da Njutnove metode ostaju i dalje, i ostaće još za dugo, osnove računanja u prirodnim naukama. Za izvesne svrhe druge metode daju rezultate koji se bolje slažu s činjenicama. Ako i postižu to, postižu ga pomoću ogromnog umnog rada i tehnikom koju neće moći razumeti prosečan naučnik, a još manje prosečan čovek koji nije naučnik, sve dok matematičar ne dobije volju da pozove u pomoć vaspitača. Nije verovatno da ćemo mi napustiti bakalske terazije za kuhinju sve dok ne uzmognemo proizvesti isto tako jevtine hemiske terazije koje će isto tako brzo da miruju. Do nedavno Njutnove metode su koristile u velikoj meri isključivo samo za matematičara od zanata. Može se mnogo više uraditi na uprošćavanju teškoća u poimanju i primeni Njutnovih metoda, ako počnemo uočavati njihova ograničenja. To je mnogo bolje nego da se to zapazi tek na kraju nekog dugačkog i čudesnog tečaja iz mehanike u kome se savršeno glatke lopte kotrljaju niz savršeno krute ravni i točkovi se vrte ama baš bez ikakvog trenja oko svojih nepodmazanih osovina. Ništa ne bi tako snažno unapredilo međunarodno sporazumevanje među ljudima kao godišnje konferencije đaka, nastavnika i starijih naučnika. Naučnike bi trebalo naterati da im prisustvuju pod pretnjom gubitka prava na penziju.

VEŽBANJA UZ XI GLAVU

1. — Upotrebite red za $\log_e (1 + x)$ da nađete

$$\log_e 10,\ \log_e 2,\ \log_e 3,\ \log_e 4,\ \log_e 5.$$

Odatle načinite tablicu za $\log_{10} 2$, $\log_{10} 3$, $\log_{10} 4$, $\log_{10} 5$.

2. — Pomoću beskonačnog reda naći vrednost za π sa tri decimala. Uraditi to na dva načina.

3. — Nacrtajte vrlo tačno grafik jednačine

$$y = \frac{1}{5} x^2$$

Uzmite tri različite vrednosti za x, pa izračunajte nagib u tim trima tačkama. U diferencijalni količnik $\frac{2}{5} x$ uvrstite te tri vrednosti za x. Na taj način dobijate tri vrednosti toga količnika. Uzmite sad tablice tangensa, pa po njima proverite dobivene rezultate.

Uzmite površinu ograničenu krivom, apscisnom osovinom i ordinatama tačaka $x = 5$ i $x = 10$. Prebrojte kvadratiće na toj površini. Uporedite taj broj s brojem koji dobijate pomoću integrala

$$\int_5^{10} \frac{1}{5} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{15}\right]_5^{10} = \frac{10^3}{15} - \frac{5^3}{15} = \frac{1000}{15} - \frac{125}{15} = \text{itd.}$$

4. — Nacrtajte krivu $y = \sqrt{36 - x^2}$.

Nađite $\frac{dy}{dx}$ za $x = 1$, $x = 2$, $x = -2$.

Povucite dirke, pa uporedite s rezultatima dobivenim pomoću diferenciranja.

5. — Na isti način nacrtajte krivu $y = \frac{1}{x}$ između $x = 0$ i $x = 4$, pa nađite $\frac{dy}{dx}$ kad je $x = 1$ i $x = 2$.

6. — Načinite $\frac{dy}{dx}$ kad je

$$y = x^{3,6},\quad y = 5\sqrt{x},\quad y = x^{-1\frac{1}{2}},\quad y = \sqrt{x^7},\quad y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{3}}}}$$

7. — Ako je $pv = k$, gde je k konstanta, pokazati da je

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v}$$

8. — Naći tačke u kojima $\frac{dy}{dx}$ menja znak na krivoj $y = x^3 - 3x$, nacrtati krivu i obeležiti te tačke.

9. — Naći najveću moguću zapreminu jednog valjkastog tela, kad njegova dužina i njegov obim ne smeju da budu zajedno veći od 6 metara.

10. — Kod jedne dinamo-mašine je x težina armature, y težina svega ostaloga. Troškovi pogona (c) su dati izrazom:

$$c = 10x + y$$

Energija je proporcionalna sa xy. Ako je iznos troškova (c) stalan, naći odnos između x i y tako, da se dobije najveća energija.

11. — Ako je obim nekog pravougaonika stalna dužina $2L$, možemo jednu stranu obeležiti sa x. Tada će susedna strana biti $(L-x)$*). Ako obeležimo površinu sa p, biće $p = x\,(L-x)$. Ona će biti maksimum kad je $\frac{dy}{dx} = 0$. Pokažite odatle da je kvadrat pravougaonik stalnog obima koji ima najveću površinu.

Pokažite da najveći pravougaonik koji se može upisati u krug jeste kvadrat.

12. — Napišite vrednosti za y koje odgovaraju ovim vrednostima za $\frac{dy}{dx}$:

(1) $4x^3$ (2) $\frac{3}{x}$ (3) $\frac{x^n}{4}$ (4) $\sqrt{x}$ (5) $3x^2 + 2x + 1$

13. — Koje vrednosti za y odgovaraju ovim vrednostima za $\frac{d^2y}{dx^2}$?

(1) $2x$ (2) 5 (3) $\sqrt{x}$

14. — Ako je $\frac{dv}{dv} = \frac{-700}{v^{2,4}}$ a $p = 18{,}95$ dok je $v = 20$, izrazi p kao funkciju od v.

15. — Ispišite vrednost za $\frac{dv}{dx}$ kad y ima ove vrednosti: (1) $\cos a^2x$ (2) $4 \sin 3x$ (3) $a \sin nx + b \cos nx$

16. — Nacrtajte krivu $y = e^x$ uzevši da je podelak na ordinatnoj osovini desetina podeoka na apscisnoj osovini. Iz proizvoljne tačke P na krivoj spustite upravnu na apscisnu osovinu tako da je seče u M. Od M se odmaknite na apscisnoj osovini ulevo za 1 podelak. Tu tačku obeležite sa T.

Pokažite da je PT dirka na krivoj u tački P.

17. — Naći površinu ograničenu pravom $y = 4x + 3$, apscisnom osovinom i ordinatama u tačkama

(1) $x = 4$ i $x = 8$ (2) $x = 2$ i $x = 10$ (3) $x = 5$ i $x = 6$.

*) Poluobim je L. — Prev.

18. — Naći površinu ograničenu krivom $y = 2x^2 + 3x + 1$, pravom $y = 0$ i pravama $x = 3$ i $x = 7$.

19. — Ispišite vrednosti za ove integrale, pa diferenciranjem proverite pre nego što zamenite vrednost za x:

(1) $\int_2^7 2x^2\,dx$ (2) $\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)\,dx$ (3) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(4) $\int_{-3}^5 7\,dx$ (5) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

20. — U zemljomerstvu se neka površina ograničena zatvorenom krivom ponekad izračunava po Simpsonovom pravilu. Pravilo glasi: Izdeli površinu na paran broj režnjeva iste širine pomoću neparnog broja ordinata; onda je površina približno ovolika:

$\frac{1}{3}$ širine režnjeva $\times$ (zbir krajnjih ordinata $+$ dvostruki zbir onih drugih neparnih ordinata $+$ četvorostruki zbir parnih ordinata).

Pretpostavimo da se kriva koja ograničava tu površinu može izraziti jednačinom ovoga oblika $y = p + qx + rx^2 + sx^3$. Vidite da li vam Simpsonovo pravilo zbilja daje približnu vrednost te površine.

Nađite površinu ograničenu pravama $y = 0$, $x = 2$ i $x = 10$ i krivom $y = x^4$.

(a) Po Simpsonovom pravilu pomoću triju ordinata;

(b) po Simpsonovom pravilu pomoću devet ordinata;

(c) integracijom.

21. — Nađite površinu ograničenu krivom $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, apscisnom osovinom i ordinatama tačaka maksimuma i minimuma.

22. — Brzina (v) nekog tela na kraju t sekundi data je izrazom

$$v = u + at.$$

Pokažite da je put pređen za t sekundi:

$$ut + \frac{1}{2}at^2$$

23. — Nađite koliki rad obavi izvesna količina pare s pritiskom od 4 000 funti na kvadratnu stopu, kad se širi od 2 kubne stope do 8 kubnih stopa. Zapremina (v) i pritisak (p), vezani su jednačinom

$$pv^{0,9} = K \text{ (konstanta)}$$

24. — Naći zapreminu kupe s poluprečnikom $r = 5$ sm, visinom 12 sm.

25. — U lopti poluprečnika $r = 12$ sm nađite zapreminu jednoga sloja između dveju paralelnih ravni koje su za 3 sm i 6 sm udaljene od loptina središta.

26. — Nađite $\int_0^\pi \sin x\,dx$ i $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

27. — Ispišite vrednosti ovih integrala:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$

(3) $\int_0^\pi x \sin x\,dx$

28. — Ponekad na nekoj funkciji iksa možemo zapaziti da je data u obliku proizvoda dveju prostijih funkcija. Na primer $y = x^2 \log x$.

Pretpostavimo da se y može napisati u obliku $y = uv$, gde su u i v prostije funkcije iksa. Kad u postane $u + \Delta u$, a v postane $v + \Delta v$, y postaje $y + \Delta y$. Odatle pokažite da je

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Proverite ovaj obrazac ovako: izračunajte diferencijalne količnike za x^7 i x^5 kao i obično, a onda po ovom najnovijem obrascu, stavljajući

$$x^7 = x^5 \cdot x^2 \text{ i } x^5 = x^7 \cdot x^{-2}.$$

Na taj način diferencirajte:

(1) $x \sin x$ (2) $\cos x \tan x$.
(3) $(2x^2 + x + 3)(x + 1)$.

29. — Služeći se istom metodom kao u prethodnom vežbanju, pokazati da je za $y=\frac{u}{v}$ kad su u i v funkcije iksa i kad v nije nula,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Diferencirajte:

(1) $\frac{x}{x+1}$ (2) $\frac{\sin x}{x}$ (3) $\frac{1}{\cos x}$ (4) $\operatorname{tang} x$

30. — Ponekad možemo zapaziti kako je neka funkcija (na pr. $\cos^2 x$) i sama funkcija neke prostije funkcije iksa. (U ovom slučaju $\cos^2 x$ je funkcija funkcije $\cos x$). Ako je y funkcija od u, a u je neka prostija funkcija iksa, pokažite da je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Ovo se pravilo može upotrebiti da se diferenciraju ovi izrazi:

$$y=\cos^2 x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\cos^2 x)}{d(\cos x)}\cdot\frac{d(\cos x)}{dx}=$$
$$=2\cos x\cdot(-\sin x)=$$
$$=-2\sin x\cos x=-2\sin 2x$$

Isprobajte ovo pravilo tako što ćete diferencirati $\log_e x^3$ kao funkciju od x^3 ($y=\log_e x^3$, $u=x^3$, $y=\log_e u$) i kao izraz $3\log_e x$.

Na taj način diferencirajte ove izraze:

(1) $\sqrt{\sin x}$ (2) $(ax+b)^n$ (3) $\sin(ax+b)$
(4) $\log_e(ax^2+bx+c)$

31. — Ako je $y=A\cos x+B\sin x$ pokažite da je $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$.

32. — Rešite ove jednačine:

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=0$.

Nađite y kao funkciju iksa u oba slučaja ako je

$$y=5 \text{ i } \frac{dy}{dx}=4 \quad \text{za } x=0$$

DA SE UPAMTI!

(1)	y	$\frac{dy}{dx}$
	ax^n+b	$an\,x^{n-1}$
	a^x+b	$a^x\log_e a$
	$c+a\log_e(x+b)$	$\frac{a}{x+b}$
	$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
	$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
	e^x	e^x
(2)	y	$\int_p^q y\,dx$
	$\frac{a}{b+x}$	$a\log_e\frac{b+q}{b+p}$
	ax^n	$\frac{a}{n+1}(q^{n+1}-p^{n+1})$
	$\cos ax$	$\frac{1}{a}(\sin aq-\sin ap)$
	e^{cx}	$\frac{1}{c}(e^{cq}-e^{cp})$

(3) — Zapremina valjka $=\pi r^2 h$

Zapremina kupe $=\frac{\pi r^2 h}{3}$

Zapremina lopte $=\frac{3}{4}\pi r^3$

GLAVA XII

STATISTIKA

ili

Aritmetika ljudskog blagostanja

Sve do šesnaestoga veka upotreba brojeva na onaj najjednostavniji način, za prebrojavanje posebnih predmeta, igrala je sasvim sporednu ulogu u unapređenju matematike. Pojam društvene statistike bogatstava i stanovništva, koja je služila samo potrebama ratovanja i oporezivanja, u starome svetu je jedva obuhvatao nešto više od običnog prebrojavanja. Takva statistika nije zahtevala ni od matematičara više nego što je nametala potreba za jednostavnim i prikladnim metodama računanja, potstaknuta upotrebom novca i sve razvijenijim kreditnim poslovanjem. Tokom prošloga veka naročito se zaoštrila potreba za matematičkim pravilima za rad s brojevima koji pretstavljaju posebne predmete. To je bilo iz dva razloga. Jedan je ovaj: sve veća pažnja poklonjena statistici stanovništva u psihologiji, sociologiji i ekonomiji, jer se na toj statistici zasnivaju zakoni o čovekovom držanju u društvu. Na mnoga pravila za primenu brojeva u rešavanju tih problema navela je matematička teorija verovatnoće. O elementima te teorije govori se u ovoj glavi. I dandanji se vode mnoge raspre o primenljivosti matematičke verovatnoće na prilike svakidanjeg života; razna gledišta pokazuju lična mišljenja o prirodi znanja, o induktivnom zaključivanju i drugim pitanjima koja se tiču čitaoca koliko i matematičara od zanata. Razume se da stav jednog matematičara koga njegove filozofske sklonosti vode ka idealističkom shvatanju sveta neće biti isti kao i stav pisca ove knjige čije je gledište materijalističko.

U V glavi već smo pomenuli šta znači matematička verovatnoća. Bacili smo prvi pogled na nju kad smo govorili o jednom čudnom i veoma starome pronalasku, o figuriranim brojevima. To pretstavljanje slikama kao što su mađiski kvadrati i trougaoni brojevi bili su od neznatnog praktičnog značaja sve do pred ovo doba u kome i sami živimo. U staro doba oni su bili u tesnoj vezi sa tajanstvenim verovanjima i astrološkim praznovericama. Počeci moderne teorije verovatnoće u tesnoj su vezi sa negovanjem tzv. hazardnih igara (kocke) i sa razvitkom poslova osiguranja. Kao i figurirani brojevi, tako je i igranje karata poreklom iz Kine. Igranje karata bilo je u modi po evropskim dvorovima u četrnaestom veku. Štampanje pomoću drvenih ploča je verovatno najpre iskorišćeno u trgovačke svrhe za izradu karata za igranje, pa je tek onda došlo štampanje knjiga pomoću pomičnih slova (sloga). U međusobnoj prepisci dvojice francuskih matematičara, Ferme i Paskala[1]), nalazi se prvi ozbiljan prilog matematičkoj teoriji verovatnoće u vezi jedne hazardne igre. Godine 1665 objavljeno je Paskalovo posmrtno delo R a s p r a v a o f i g u r i r a n i m b r o j e v i m a. Nekoliko godina posle toga matematičko tretiranje pitanja rizika javlja se u drukčijem vidu. Godine 1693 Filozofskim raspravama u izdanju Kraljevskog društva[2]) u Londonu objavljena je »Tablica života« osnovana na podacima o rađanju i umiranju u Breslavi. Helijeva »Tablica života« imala je zadatak da »pokuša da utvrdi cenu doživotne rente«. Danas mogu izgledati bestraga daleko jedno od drugoga kartaški sto i osiguravajuće društvo. Još je čudnije što se u pozadini ove slike vide astrolozi[3]).

Osiguranje brodova bila je važna finansiska špekulacija u doba kad se širila prekookeanska trgovina u srednjevekovnoj Evropi. U istoriji flamanskog pomorstva nalaze se tragovi osiguranja još u četrnaestom veku. U 16 veku to je već ustaljeni finansiski posao. Ser Nikolas Bekn, obraćajući se prvom Jelisavetinom[4]) parlamentu pitao je: »Zar neće svaki pametan trgovac u rizičnom poslu da odvoji jedan deo i plati, da bi osigurao ono ostalo?« Raniji pisci ni blizu nisu tako jednodušni u

[1]) *Pjer de Ferma* 1601—1665, *Blez Paskal, 1623—1662.* — P r e v.
[2]) Akademija nauka. — P r e v.
[3]) Ljudi koji su po zvezdama proricali sudbinu. — P r e v.
[4]) Engleska kraljica Jelisaveta 1533—1603, mnogo je pripomogla širenju engleske trgovine. — P r e v.

tome da se osiguranje može saglasiti sa čestitom opreznošću. U početku je osiguranje bilo čista kocka koja je išla ruku pod ruku sa ne baš tako uglednim vrstama špekulacije. Počeci osiguranja života su u tesnoj vezi baš s tim ne baš tako uglednim špekulacijama. Pozajmljivanje novca vladaocima po finansiskoj interesnoj stopi sa ozbiljnim izgledima da će taj dug da se odrekne posle nekoliko godina i kreditiranje trgovaca po srednjevekovnim vašarima nisu bili jedina osnova, na kojoj je počeo kapital da zida svoju moć u četrnaestom i petnaestom veku. Uz te zajmove za vašare bilo je još uobičajeno da se ljudi klade povodom toga koliko će neko živeti, ili povodom rođenja deteta i vazdan takvih prosto neverovatnih špekulacija. Tokom šesnaestoga veka često su izdavani zakoni da se rad berzi i menjačnica na kontinentu u Evropi ograniči samo na kreditno poslovanje, a da se zabrane razne vrste kockarskog osiguranja na koje su se mrštile crkvene vlasti.

U drugoj polovini petnaestog veka osnovana je berza u Antverpenu, a u početku šesnaestoga veka Antverpen je potisnuo Bruks i postao veliko trgovačko središte Holandije. Pišući o tome Erenberger (K a p i t a l i f i n a n s i j e u d o b a R e n e s a n s e) kaže da je »u toku četrdeset godina Antverpen postao trgovačko središte kakvo svet nikad dotle a ni posle toga nije video, pošto nikad posle toga nije bilo tržišta koje bi u tolikoj meri prikupilo trgovinu svih važnih trgovačkih naroda na svetu«. Ovde se trgovci »uglavnom bave menicama i zajmovima«. Erenberger govori o poslovima koji su postali »krajnje špekulantski«. Naročito podvlači to da su »cvetala astrološka proricanja ... Veliki deo poslova bio je tako rizičan, da su pretskazivanja o poslovima bila stekla poverenje čak i najvećih trgovaca«. Astrolog Kurc služio se horoskopom pri pretskazivanju cena biberu, isiotu i šafranu i to dve nedelje unapred. Bio je, kaže se, »opkoljen mušterijama kao što je opkoljen vodom čovek na okeanu«.

Jedan pisac iz šesnaestog veka se žali kako »jedan deo plemića i trgovaca ... upotrebljava sav svoj raspoloživi kapital na trgovinu novcem ... zemlja ostaje neobrađena, trgovina namirnicama zanemarena, cene često skaču«. Za finansisko poslovanje nije bilo sigurnije osnove od astrologije. Trgovačke velmože srednjevekovnih privrednih središta bogatili su se tim poslovanjem, ali u većoj meri time što su se kockali u bukvalnom smislu reči. Po srednjevekovnim sajmištima trgovci sa

velikim kapitalom kladili su se da će još nerođeno dete biti tog i tog pola, ili da će neko umreti tad i tad. Primeri o ovakvim kockarskim osiguranjima, koja su bila prethodnica modernog osiguranja života, nalaze se kod Gorisa u njegovoj studiji o južnim trgovačkim kolonijama. Postoji tako ugovor između Dominga Simona Majara, njegovog brata Bernarda i dveju žena kojima oni pristaju da plate trideset livara, ako novorođenče bude žensko, pod uslovom da prime četrdeset osam livara iz zahvalnosti, ako se rodi sin. Godine 1542 Vilalon je pisao: »U poslednjem vremenu u Flandriji se pojavila jedna užasna stvar, jedna vrsta svirepe tiranije koju su pronašli da tiranišu jedan drugoga. Oni se klade u Antverpenu o menjačkoj stopi na španskim sajmovima. Oni ove opklade zovu »parturas« prema ranijem načinu za sticanja novca, kad su se ljudi kladili da će novorođenče biti muško ... Ljudi se klade da će menjačka stopa biti 2 procenta premije ili diskonta, drugi da će biti 3 procenta itd. Oni se obavezuju jedan drugome da će platiti razliku već prema rezultatu koji bude ispao. Ovakvo klađenje meni mnogo liči na poslove oko pomorskog osiguranja ... jer ovim poslovima se bave samo trgovci koji imaju mnogo kapitala ... Pomoću svog v e l i k o g k a p i t a l a i pomoću svojih majstorija udese oni tako, da u svakom slučaju oni zarađuju«. Poslednja rečenica omogućuje da se unapred nasluti praktična veza između matematičke teorije verovatnoće i uspeha u špekulacijama. Pronalasci o brojevima koji su dugo šegrtovali na mađiskim poslovima stvarali su osnovu za teoriju matematičke verovatnoće, kada su finansijeri koji su se kockali po berzama osetili potrebu za pouzdanijim vođom nego što im je mogao biti astrolog.

MATEMATIČKA VEROVATNOĆA. — Pre nego što počnemo proučavanje matematičke verovatnoće biće vam korisno da se vratite na odeljak o figuriranim brojevima u petoj glavi. Dobro bi bilo da još jednom pročitate odeljak o binomnoj teoremi u VII glavi. Ono što matematičari zovu verovatnoća ponekad se definiše takvim rečima, da one navode čoveka da misli da ono što matematičar podrazumeva pod verovatnoćom mora biti u čvrstoj vezi sa dubokim našim uverenjem o budućnosti, sa našim opsegom iskustva iz prošlosti, ili sa nekom našom velikom obaveštenošću o sadašnjici. Sve te stvari leže izvan domena matematičara, koga se ustvari tiče samo gramatika veličina i redosleda. Postoji nesporazum o vezi između matematičke verovatnoće i onoga što u svakidanjem životu zovemo verovatnoća. Nesporazum ćemo otkloniti ako se poslužimo rečima koje ne navode na misao o takvim stvarima. Na taj način ćemo biti u boljem položaju da razumemo kada se matematičar i prost čovek razgovaraju o jednoj istoj stvari.

Naša definicija matematičke verovatnoće biće ovo. Ako je mogućno izvršiti neki posao na N načina, od kojih n mogu da budu stavljeni u jednu klasu prema nekoj svojoj osobini i ako nema poznatog razloga da se taj posao izvede češće na jedan način nego na $N-n$ drugih načina, onda matematička verovatnoća, da će taj posao imati jednu određenu osobinu jeste $\frac{n}{N}$. Ova definicija neće vam izgledati tako strašna kad se navede primer. Uočite pažljivo da je jedno kad se kaže da ne znamo razlog zašto bi neki posao imao da se izvede pre na jedan način nego na drugi, a sasvim je nešto drugo kad kažemo da se neki postupak izvodi isto toliko puta na jedan način kao i na drugi. Tako, stvarna frekvencija (učestanost) nekog postupka u istinskom svetu još nije deo naše definicije, a o prilikama koje opravdavaju primenu ovog odnosa u stvarnom životu raspravljaće se docnije.

Naročita osobina nekog postupka može se odnositi na prirodu predmeta koji se upotrebljava u tom postupku, na lica koja ga izvode, na stvari na kojima se on izvodi, ili na kvalitet svršenog predmeta. Može se odnositi i na red po kome se postupci izvode. Ako bacim jednom neki novac u vis, taj se postupak može klasifikovati samo prema postignutom rezultatu. Tu mogu biti dve mogućnosti: može biti lice, ili može biti naličje. Ako ga bacim dvaput (sl. 186), svi mogući načini ovog postupka mogu se kvalifikovati prema postignutim rezultatima, i prema redu kojim se rezultati javljaju. J e d n a klasa rezultata je da se dobiju jedna »glava« i jedno »pismo«. Svih N načina na koji ovaj postupak može da se izvede svode se na četiri, naime:

(1) Dve »glave«

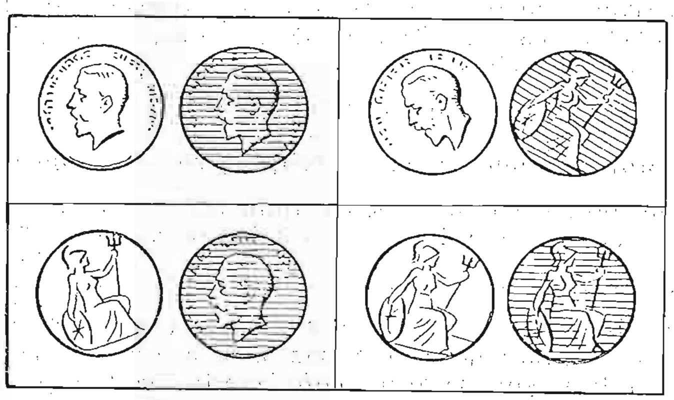
(2) Najpre »glava«, zatim »pismo«.

(3) Prvo »pismo«, pa onda »glava«.

(4) Dva »pisma«.

Od ova četiri slučaja broj načina (n) da se ovaj postupak izvede s tim da ima jednu određenu osobinu iznosi 2. I tako matematička verovatnoća da će se dobiti i »glava« i »pismo«

iznosi $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Matematička verovatnoća da će se dobiti najpre »glava«, a onda »pismo«, iznosi $\frac{1}{4}$, pošto samo jedan od četiri načina ($n=1$) ima ovu osobinu. U prvom slučaju nama je rečeno samo to kakvi predmeti »glava« i »pismo« učestvuju u



Mogući rezultati pri bacanju dva novca.

Sl. 186.

Četiri moguća rezultata pri bacanju dva novca jedanput, ili jedan novac dvaput pokazani su ovde. Da bi se jedan novac razlikovao od drugoga jedan je osenčen.

ovom postupku. To znači traženi rezultat je pretstavljen jednim od izvesnog broja kombinacija. U drugom slučaju kazan nam je red kao i vrsta predmeta, te je traženi rezultat j e d n a od izvesnog broja permutacija. Kad izvlačimo četiri keca iz potpunog »špila« karata jeste drugi primer koji prikazuje obadva načina za razvrstavanje postupaka. Izvlačenje četiri keca ma kojim redom jeste j e d a n od ${}^{52}C_4$ načina da izvučemo ma koje četiri različite karte iz »špila«. Kad izvlačimo četiri keca određenim redom (na pr: pik, herc, kara, tref) to pretstavlja j e d a n od ${}^{52}P_4$ načina da se izvuku određene četiri karte određenim redom.

Tri stvari imaju da se uoče o datoj definiciji. Prva je ova: Ovakva kakva je ona nema nikakve veze sa ponašanjem novca ili karte, ili sa našim mišljenjem o ponašanju novca ili karte. Kad nema određenog obaveštenja o tome k o l i k o s e p u t a neki posebni rezultat zbilja javlja, imamo prosto jedan odnos koji sadrži u sebi broj mogućih načina na koje se može izvesti neki postupak. Ovde gde smo možda bi bolje bilo upotrebiti skromniji naslov, matematička mogućnost, dok ne budemo videli u kojim prilikama to odgovara onome što se obično misli kad se kaže da je jedan događaj verovatan. Druga stvar koju treba uočiti jeste veza između tog odnosa i matematičkih »izgleda«. Matematička verovatnoća u izabiranju može da se izrazi ovim odnosom:

$$\frac{\text{Broj povoljnih izgleda}}{\text{Broj povoljnih izgleda} + \text{broj nepovoljnih izgleda}}$$

Zato broj povoljnih i nepovoljnih izgleda da će se dobiti dve »glave« kad se baci novac u vis dva puta jesu 1 i 3. Verovatnoća ovog rezultata izražena matematički jeste $\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$. Povoljni izgledi da će se to postići pretstavljaju odnos broja načina ($n = 1$) na koje se postupak može izvesti i broja načina ($N - n = 3$) na koje se to ne može izvesti. Sve to zajedno čini da je $N = 4$ celokupan broj rezultata koji bi se mogli dobiti, kad bi svi načini bacanja novca bili dopušteni. Ako obeležimo sa p matematičku verovatnoću da će se pojaviti predviđeni rezultat, a sa q matematičku verovatnoću da se on neće pojaviti vidimo, da je

$$p = \frac{n}{N}$$

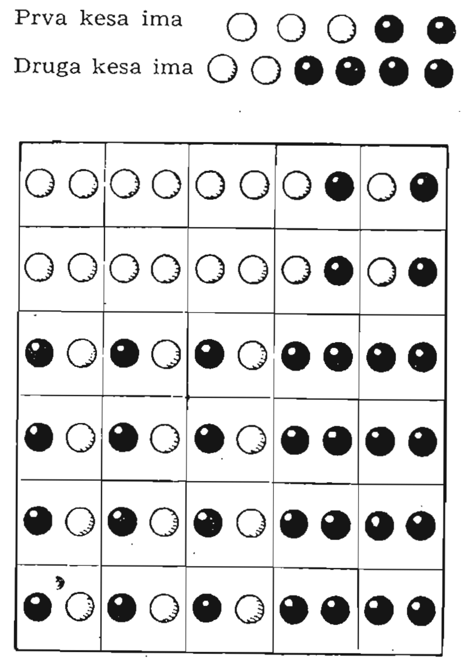
$$q = \frac{N-n}{N}$$

tj. $\quad p = 1 - q$

Matematička verovatnoća da se neće dobiti dve »glave« kad se novac baci dva puta iznosi dakle, $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Postoje dva osnovna principa na kojima počiva celokupna teorija matematičke verovatnoće. Oba su prikazana na slici 187. Ta slika pokazuje sve moguće načine na koje možemo izvući dve loptice, jednu iz kese u kojoj su 3 bele i 2 crne loptice, drugu iz kesice u kojoj su 2 bele i 4 crne. Prvo pravilo se

odnosi na verovatnoću dva jednovremena rezultata koji ne utiču jedan na drugi; drugo pak na verovatnoću grupe jednovremenih rezultata gde jedna grupa isključuje mogućnost pojave one druge.



SL. 187. — VAĐENJE PO JEDNE LOPTICE IZ SVAKE OD DVEJU KESA

Jedna kesa ima 5 loptica od kojih su 3 bele. Druga ima 6 loptica od kojih su 2 bele. Svaka loptica iz prve kese može da se izvuče sa svakom lopticom iz druge kese. To čini 30 kombinacija raznih loptica. Od ovih će biti 6 čisto belih parova, 8 čisto crnih parova, a ostali parovi biće mešoviti. Pogledajte nazad na sl. 25 u III glavi i sl. 103 u VII glavi koje prikazuju množenje u hijeroglifskom obliku. To će vam pomoći da vidite zašto (i kad) mi množimo ono što matematičari zovu verovatnoće.

(a) *Jednovremena pojava nezavisnih rezultata.* — Prvi princip tvrdi ovo: ako je n verovatnoća jednog rezultata, a m drugog koji je nezavisan od njega, verovatnoća da će se oba javiti zajedno jeste proizvod nm. Zašto je tako shvatićete sa sl. 187. Verovatnoća da će se izvući bela loptica iz kese u kojoj su 5 loptica iznosi svega $\frac{3}{5}$, pošto možemo izvući ma koju od 5 loptica od kojih su samo 3 bele. Verovatnoća da će se izvući bela loptica iz druge kese je $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, pošto možemo izvući ma koju od 6 loptica, od kojih su samo 2 bele. Svaka loptica iz prve kese može se izvući zajedno s ma kojom lopticom iz druge kese, te imamo $5 \cdot 6 = 30$ raznih izbora. Od ovih u 3 puta $2 = 6$ slučajeva imamo 2 bele loptice. Zato je verovatnoća da ćemo izvući 2 bele loptice:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

Na dobivanje dve »glave« pri bacanju novca u vis dvaput, odnosi se isto pravilo. Verovatnoća da ćemo dobiti »glavu« kad bacimo novac jedanput iznosi $\frac{1}{2}$, pošto je broj svih mogućih rezultata 2, a samo jedan od njih je onaj predviđeni. Isto važi i za drugo bacanje. Zato verovatnoća da ćemo dobiti dva lica iznosi $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Isti je problem i kad izvlačimo dva keca iz dva »špila«. Ako su oba »špila« potpuna, verovatnoća da se izvuku dva keca, jedan iz jednog, drugi iz drugog »špila« iznosi

$$\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}=\frac{1}{169}$$

Matematički izgledi da se neće dobiti taj rezultat su 168 prema 1. Ovo nije isto kao kad se izvlače dva keca iz jednog »špila«, pošto izvlačenjem jednog keca smanjujemo verovatnoću da izvućemo i drugog. Ta dva rezultata u t i č u jedan na drugoga. Oni nisu matematički nezavisni. Verovatnoća da se prvi put izvuče kec iznosi $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Sad je ostala 51 karta među kojima su samo 3 keca. Zato verovatnoća da se i po drugi put izvuče kec iznosi $\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$. Prema tome problem je isti kao da imamo da izvučemo jednog keca iz celog »špila« od 52 karte sa četiri keca i jednog keca iz nepotpunog pakla od 51 karte sa 3 keca. Zato verovatnoća da se izvuku dva keca iz jednog »špila«

iznosi $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{17}=\frac{1}{221}$. A izgledi da se neće izvući dva keca ako se vuku dve karte iz potpunog »špila« iznose 220:1. Problemu se može prići i sa druge strane. Postoje ${}^{52}C_2$ načina da se izvuku dve različite karte iz potpunog špila bez obzira na redosled. Postoje ${}^{4}C_2$ načina da se izvuku dva keca, bez obzira na redosled, iz četiri keca. Zato je verovatnoća da će se izvući dva keca iz jednog »špila«.

$$\frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{2\cdot 1}{52\cdot 51}=\frac{1}{221}$$

Princip prikazan na sl. 187 može se proširiti na ma koji broj jednovremenih rezultata. Pretpostavimo da imamo tri kese, u svakoj izvestan broj crvenih i izvestan broj crnih loptica. Ako obeležimo sa a verovatnoću da ćemo izvući crvenu lopticu iz kese A, sa b verovatnoću da ćemo izvući crvenu lopticu iz kese B, a sa c verovatnoću da ćemo je izvući iz kese C, verovatnoća da ćemo dobiti tri crvene loptice, izvlačeći po jednu iz kese, iznosi $a \cdot b \cdot c$. Razlog tome leži u samoj definiciji. Kad dobijemo dve crvene loptice vađenjem jedne iz kese A i druge iz kese B, taj rezultat odgovara matematičkoj verovatnoći $a \cdot b$. Da dobijemo tri crvene loptice izvlačeći po jednu iz svake kese je isto, kao da dobijemo dve crvene loptice iz kese A i B i jednu crvenu lopticu iz kese C. Verovatnoća prvog rezultata je $(a \cdot b)$, a drugog, koji je nezavisan od njega, iznosi c. Verovatnoća jednovremenog rezultata je $(a \cdot b) \cdot c$. Analogno ovome, možemo uzeti i jednu porodicu sa izvesnim brojem dece gde možemo da izaberemo toliko i toliko dečaka i toliko i toliko devojčica iz te »kese« sa jednakim brojem jednih i drugih. Onda možemo reći da je m a t e m a t i č k a verovatnoća $\frac{1}{2}$ da će izvesno dete u toj porodici biti žensko. Zato matematička verovatnoća da će porodica od osmoro dece biti od samih devojčica iznosi

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$$

Stvarni odnos rađanja muške i ženske dece u svetu iznosi oko 1,06. Problem se može pre uporediti sa izvlačenjem crvenih i crnih loptica iz jedne kese u kojoj su 51 crvena (muškarci) loptica i 49 crnih (ženske). Tu je verovatnoća da će novorođenče biti muškarac 0,51 a da će biti žensko 0,49.

(b) *Rezultati koji se međusobno isključuju.* — Drugi osnovni princip na kome je izgrađena teorija verovatnoće jeste u ovome. Ako se dva rezultata međusobno isključuju, verovatnoća da će izbor biti ovaj ili onaj jednaka je sa zbirom njihovih verovatnoća. Ovo lepo razjašnjava sl. 187 koja ilustruje verovatnoću da će jedna loptica biti crna i druga bela, ako iz svake kese izvlačimo po jednu. Kad izvlačimo jednu crnu i jednu belu lopticu, onda postoje dve mogućnosti. Možemo izvući najpre belu, a zatim crnu ili obratno. U prvom slučaju isključujemo mogućnost da se najpre izvuče crna pa onda bela. Pravilo tvrdi ovo: Ako je a verovatnoća prvoga izbora (tj. najpre bela, a zatim crna), a b verovatnoća drugoga izbora (tj. prvo crna, a onda bela), onda je $(a + b)$ verovatnoća da će se izvršiti ili prvi izbor ili drugi. To znači da je $(a + b)$ verovatnoća da ćemo izvući jednu belu i jednu crnu bez obzira na red. Na slici imamo kesu A sa pet loptica, od kojih su tri bele, i kesu B sa šest loptica, od kojih su dve bele. Verovatnoća (a) da ćemo izvući belu lopticu iz kese A i crnu iz kese B jeste $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$. Verovatnoća da ćemo izvući crnu iz kese A i belu iz kese B je $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{15}$ Pravilo nam kaže da verovatnoća da će biti jedan ili drugi izbor iznosi $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$. Slika nam pokazuje kako se radi po tom pravilu. Ima $5 \cdot 6 = 30$ načina na koje možemo birati od pet raznih loptica u jednoj kesi i šest raznih loptica u drugoj. Od njih su $(2 \cdot 2 + 4 \cdot 3) = 16$ od obeju vrsta, bele i crne. Tako verovatnoća da ćemo dobiti obe vrste iznosi

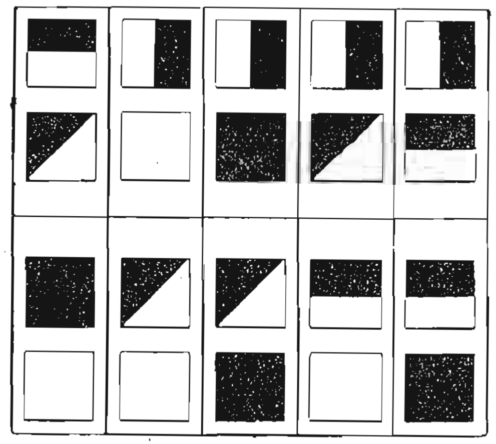
$$\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$

Isto pravilo prikazano je na drugi način na sl. 187. Svi konkretni rezultati mogu da se razvrstaju u tri kategorije koje se uzajamno isključuju, naime, (a) obe bele $\left(\frac{1}{5}\right)$, (b) bela i crna $\left(\frac{8}{15}\right)$, ($c$) obe crne $\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. Matematička verovatnoća da će se desiti jedan od ova tri slučaja mora biti 1, pošto oni obuhvataju sve mogućnosti koje postoje. Pošto rezultati isključuju

jedan drugoga, verovatnoća da će uslediti jedno, ili drugo, ili treće, biće:

$$\frac{1}{5}+\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=1.$$

Jedna vrlo važna vrsta problema koja će se pojaviti docnije prikazana je verovatnoćom da ćemo, kad jednom bacimo svaku od pet kocki (A, B, C, D, E), dobiti tačno dve šestice. Kad po-



SL. 188. — BROJ PAROVA KOJI SE MOGU DOBITI OD PET RAZLIČITIH STVARI BEZ OBZIRA NA RED

Svih deset mogućih kombinacija jesu:

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

smatramo jednu kocku A, verovatnoća da ćemo baciti šest iznosi $\frac{1}{6}$. Verovatnoća da će A i B dati šesticu iznosi $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=$

$= \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Verovatnoća da C nece dati šesticu iznosi $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ i tako dalje za D i E. Tako verovatnoća da će A i B dati šesticu, a da C, D i E neće, iznosi

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Ovo je verovatnoća da će *izvestan par* (A, B) biti šestice i da ostalo neće. Potpun broj raznih parova (sl. 188) koji se mogu izabrati od pet kocki jeste broj kombinacija od pet raznih stvari kad se uzimaju dve odjednom, tj. ${}^5C_2(= 10)$. Verovatnoća da će izvestan par biti šestice, a da će ostale tri kocke okrenuti neki drugi broj, jeste ista kao i verovatnoća da će neki od ${}^5C_2$ raznih parova biti šestice, a ostale tri kocke da će dati neki drugi broj. Prema tome to je zbir od deset članova, od kojih je svaki

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3, \quad \text{tj. } {}^5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

Sličan problem je matematička verovatnoća da će u porodici od osmoro dece najmanje četvoro biti ženska deca. To je verovatnoća da će se javiti jedan od pet rezultata koji se međusobno isključuju:

(a) Četiri muška i četiri ženska

(b) Tri muška i petoro ženskih

(c) Dva muška i šest ženskih

(d) Jedno muško i sedam ženskih

(e) Nijedno muško i osam ženskih

Kad kažemo da će u porodici od osmoro dece biti četvoro ženske i četvoro muške samo smo drugim rečima izrazili da će četvoro biti ženskog i četvoro nekog drugog pola. Ako se uzme da je $\frac{1}{2}$ verovatnoća da će svako rođeno dete biti muško, onda je to:

$${}^8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = {}^8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Slično tome, verovatnoća da će biti petoro ženske dece i troje muške jeste

$${}^8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = {}^8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Zato verovatnoća da će *najmanje* četvoro biti ženske dece u porodici od osmoro dece iznosi

$${}^8C_4\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^8 +$$

$$+ {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8(70 + 56 + 28 + 8 + 1) = \frac{163}{256}.$$

Izgledi za to da u porodici od osmoro dece bude najmanje četvoro ženske dece jesu, dakle, ovakvi: 163 za i 93 protiv (sl. 190).

Ovaj primer ilustruje pravilo koje obuhvata dva osnovna principa matematičke verovatnoće. Rezultat koji smo dobili u problemu s kockama možemo izraziti i u opštijem obliku, služeći se opštim brojevima. Ako je p verovatnoća da će se neka akcija izvršiti na određeni način (bez obzira na konkretan slučaj) i ako je q verovatnoća da se neće tako izvršiti, verovatnoća da će se to izvršiti tačno r puta u n sličnih prilika iznosi

$${}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

Ako se vratite na trouglaste brojeve, videćete da su brojevi 70, 56, 28, 8 i 1 članovi devetog reda Paskalovog, ili, tačnije rečeno, Omar Khajjamovog trougla. Oni su koeficijenti binomnog reda koji odgovara izrazu:

$$(p + q)^n$$

Izrazi — članovi — u binomnom redu koji dobijate kad ovo gore stepenujete ovako izgledaju

$${}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

kad dajemo eru uzastopne vrednosti 0, 1, 2 . . . 8 uključivo kad je $n = 8$.

I tako sad imamo ovo pravilo. Ako verovatnoća da će se neka akcija izvršiti na određeni način iznosi p, a verovatnoća da se neće tako izvršiti iznosi q, verovatnoća da će ona biti izvršena tačno 0, 1, 2 . . . n puta u n prilika data je uzastopnim članovima binomnog reda:

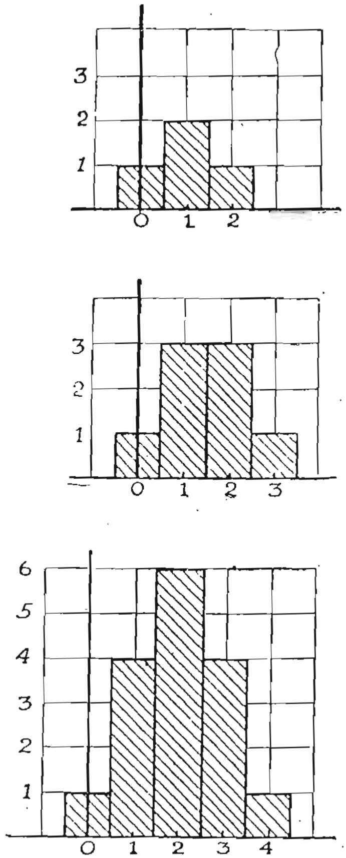
$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}\,q + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \cdot p^{n-2} \cdot q^2 + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

To je prikazano pomoću slika na narednim dvema figurama. Sl. 189 pokazuje matematičku verovatnoću da ćemo dobiti

Dva bacanja
Vertikalni podelak pretstavlja verovatnoću od $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Tri bacanja
Vertikalni podelak pretstavlja verovatnoću od $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Četiri bacanja
Vertikalni podelak pretstavlja verovatnoću od $\left(\frac{1}{2}\right)^4$



SL. 189. — HIJEROGLIFSKO PRETSTAVLJANJE IGRE »LIJO ILI TAKO«
Na svakoj slici jedan horizontalni podelak odgovara jednom uspehu (tj. glava).

(a) 0, ili 1, ili 2 »glave« kad bacimo novac u vis dva puta, (b) 0, 1, 2, 3 »glave« kad bacimo tri puta, (c) 0, 1, 2, 3, 4 »glave« kad bacimo četiri puta. Pretpostavimo da bacamo novac dvaput. U svakoj prilici verovatnoća (p) da ćemo dobiti »pismo« iznosi $\frac{1}{2}$, a verovatnoća da ćemo dobiti »glavu« (q) je takođe $\frac{1}{2}$. Verovatnoća da ćemo dobiti 2 »pisma« ili 0 »glave« jeste $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, da ćemo dobiti jednu »glavu« i jedno »pismo« jeste $2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$, da ćemo dobiti 2 »glave« ili 0 »pisma« $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Zato verovatnoća da ćemo dobiti 0 »glave«, 1 »glavu« i 2 »glave« u dvogubom bacanju iznosi:

za 0 „glave“	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
za 1 „glavu“	$2\left(\frac{1}{2}\right)^2$
za 2 „glave“	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Ako je $p = \frac{1}{2} = q$ ovi izrazi su isto što i

$$p^2,\ 2pq,\ q^2$$

a to su članovi razvijenog izraza $(p+q)^2$.

Kada se novac baci tri puta verovatnoća da ćemo dobiti 3 »pisma«, 2»pisma« i 1 »glavu«, 2 »glave« i jedno »pismo«, 3»glave«, tj. 0, 1, 2 ili 3 »glave« iznosi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad 3\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad 3\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Kad je $p = \frac{1}{2} = q$ to su uzastopni članovi binomnog reda

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

Slično tome, verovatnoće da ćemo dobiti 0, 1, 2, 3, 4, »glave« u 4 bacanja iznose

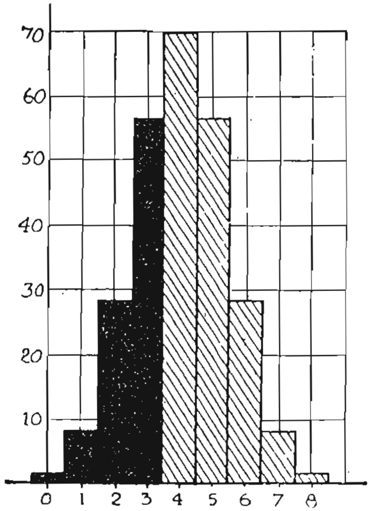
$$\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 4\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 6\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad 4\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

To su uzastopni članovi binomnog reda:

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

U hijeroglifu ovih rezultata (sl. 189) broj »glava« (r) pretstavljen je podeocima na apscisnoj osovini koordinatnog sistema. Verovatnoća broja »glava« pretstavljena je vertikalnim ordi-

Verovatnoća kao odnos dveju površina



Sl. 190.
Objašnjenje je dato u tekstu. Horizontalni podeoci pretstavljaju broj devojčica u porodici od 8 dece. Vertikalni podelak pretstavlja verovatnoću od $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

natama. Razmak između dveju ordinata podjednak je svuda. Pravougaonici čije su visine uzastopne ordinate oivičeni su. Širina (Δr) svakog pravougaonika jednaka je sa jednim podeokom na apscisnoj osovini. Zato je površina svakog pravougaonika:

$$^nC_r\, p^r\, q^{n-r} \cdot \Delta r = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} \cdot 1 = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

(pošto je $\Delta r = 1$)

Ovo znači da površina svakog pravougaoničnog elementa pretstavlja verovatnoću broja »glava« koji odgovara tački na sredini njegove osnovice. Površina cele slike je

$$\sum_0^n {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}\, \Delta r =$$

$$= \Delta r \sum_0^n {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} =$$

$$= \Delta r\, (p+q)^n.$$

Pošto je $p = 1 - q$ biće $(p+q)^n = (1 - q + q)^n = 1^n = 1$ Isto tako je i $\Delta r = 1$. Otuda površina celokupne slike iznosi 1 površinsku jedinicu i

$$^nC_r\, p^r\, q^{n-r} = \frac{^nC_r\, p^r\, q^{n-r}\, \Delta r}{\sum_0^n {}^nC_r p^r\, q^{n-r} \Delta r}$$

To znači da verovatnoća da će se dobiti r »glava«, koji broj odgovara srednjoj tački osnovice jednog pravougaonika čija je visina $^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$, može biti pretstavljena ovim odnosom:

$$\frac{\text{Površina pravougaonika}}{\text{Površina cele slike}}$$

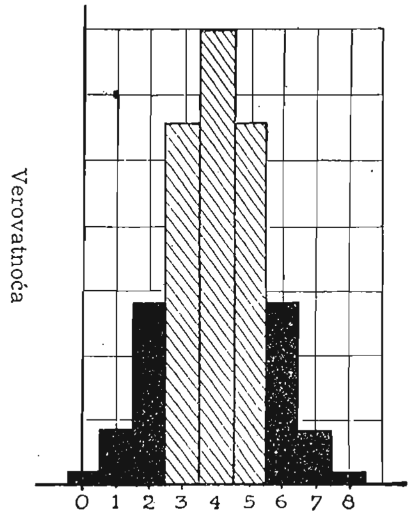
Naredna slika (sl. 191) pokazuje geometrisko pretstavljanje jednog zapletenijeg problema, naime, verovatnoću da broj ženske dece u porodici od osmoro dece neće biti manji od 3 ni veći od 5. Matematička verovatnoća biće:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 ({}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot (56 + 70 + 56) = \frac{182}{256} = \frac{91}{128}.$$

I tako su matematički izgledi 91 prema 37 da u jednoj porodici od 8 dece neće biti više od 5 ni manje od 3 ženske dece. Verovatnoća da će taj broj biti tačno 4 je

$$^8C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{256} = \frac{35}{128}$$

Ovo znači da i ako su izgledi za i protiv za svako pojedino dete da će biti muško ili žensko jednaki, izgledi za i protiv da će ženske dece biti tačno polovina sve dece u porodici od



Sl. 191.
Podeoci pretstavljaju isto kao i na prethodnoj slici. Osenčena površina u ovom slučaju pretstavlja verovatnoću da će u porodici od 8 dece biti najmanje 3, a najviše 5 devojčica.

osmoro dece su 35 : 93. Da bismo dobili verovatnoću da će biti *više* od polovine ženske dece, potrebna nam je verovatnoća da će biti 5, 6, 7 ili 8 ženske dece, tj.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 ({}^8C_5 + {}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 (56 + 28 + 8 + 1) = \frac{93}{256}$$

To znači da su izgledi 93 za i 163 protiv da će biti više od 4 ženske dece u porodici od 8 dece.

Verovatnoća u svakidanjem životu. — Kad se čovek kladi, pa kaže da su izgledi podjednaki i da je tu sreće pola i pola, on se s pravom nada da će novac pokazati isto onoliko puta »glavu« koliko puta i »pismo«. Opravdanje ovoj nadi leži u tome, što je neko već pokušao to isto sa novcem koji će on sad da baca, ili što se to pokazalo kao istinito sa novcima

bacanim na isti način. Zato nema razloga da se sumnja da novac »naginje« na ma čiju stranu. Kad praktičan čovek kaže da su izgledi podjednaki, ili da je mogućnost pola i pola $\left(p = \frac{1}{2} = q\right)$ da će novac pokazati »glavu« odnosno »pismo«, to ne znači da se on opravdano nada da će u 10 bacanja biti tačno 5 »glava« i tačno 5 »pisama«. Nijedan se novac tako ne ponaša. Šta stvarno nalazimo kad bacamo novac prikazano je u ovom ogledu, izvedenom sa jednim penijem[1]), dok je pisan ovaj odeljak. U prva dva ogleda (svaki ogled po 10 bacanja) dobili smo 5 »glava« u prvom ogledu i 4 u drugom, tj. 50 procenata »glava« u prvom i 40 procenata u drugom. Druga dva ogleda, svaki po 50 bacanja, dali su: prvi 48 procenata drugi 44 procenta »glava«. Treća dva ogleda, svaki po 100 bacanja, dali su: prvi ogled 45%, a drugi 48%. Procenat »glava« u 200 bacanja bio je 50,5. Proučavanje ponašanja novca kad se baca pokazuje da ako bacimo veoma veliki broj puta naš se rezultat razlikuje vrlo malo od izvesne granične vrednosti. Ona je u blizini broja 0,5 ili $\frac{1}{2}$, kako u slučaju ovog konkretnog novca, tako i drugih koji su izrađeni u kovnici. Ako smo utvrdili činjenicu da je to tako, možemo onda reći da relativna učestanost kojom se »glava« okreće gore jeste pri velikom broju bacanja ista kao i matematička verovatnoća $\left(\frac{1}{2}\right)$, kako smo već upotrebili taj izraz. Učestanost se može izjednačavati sa verovatnoćom samo onda kad se odnosi na oglede koji se osnivaju na velikim brojevima. Rezultati primene matematičke teorije na svakodnevni život istiniti su samo ako se radi o velikom nizu slučajeva. Učestanost koju izjednačujemo sa matematičarevom verovatnoćom osniva se na ogledu sa velikim brojevima.

Kad je ogled utvrdio tu graničnu vrednost, još nemamo puno prava da smatramo da nam matematička teorija verovatnoće, kako je dosad izložena, daje istinit račun o tome kako se novci ponašaju kad ih bacamo. Ako neki novac uvek pokazuje »glavu« kad je u prethodnom bacanju pokazao »pismo« i obrnuto, relativna učestanost »glave« ili »pisma« bila

[1]) Sitan engleski metalni novac. — Prev.

bi i dalje $\frac{1}{2}$ ako se radi o ogromnom broju bacanja. Ako se kod nekog stanovništva sa podjednakim brojem porodica sà petoro dece i sa troje dece pokaže da u svakoj porodici od petoro dece postoje tri muškarca i dve devojčice, a u svakoj porodici od troje dece dve devojčice i jedan muškarac, relativna učestanost dečaka odnosno devojčica bila bi opet $\frac{1}{2}$. Raspodela »glava« i »pisama« u uzastopnim probama od tri i od pet bacanja i raspodela muške i ženske dece u velikom broju porodica sa petoro i sa troje dece neće odgovarati računima datim na stranama 663—665. Samo ogled može da odluči da li odgovara ili ne. Dvesta bacanja iz pomenutog ogleda mogu se grupisati u probe od šest bacanja odjednom. U prvih šesnaest proba od 6 bacanja stvarna učestanost pri bacanjima u kojima su se pojavile 0, 1, 2, 3, . . . 6 »glava« bila je

»Glava«	0	1	2	3	4	5	6
Učestanost	0	2	2	9	3	0	0

Teoriska verovatnoća da ćemo dobiti, recimo, četiri »glave« iznosi

$$^6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}$$

Kad bi matematička verovatnoća bila uvek isto što i konkretna učestanost, broj koliko puta će se javiti četiri »glave« u ogledu od šesnaest bacanja bio bi

$$\frac{15}{64}\cdot 16=3{,}75$$

Na taj način možemo ovako sastaviti teoriski »raspored«

»Glava«	0	1	2	3	4	5	6
Broj	0,25	1,5	3,75	5	3,75	1,5	0,25

Kad spojimo obe tablice imamo:

»Glava«	0	1	2	3	4	5	6
Konkretno zapaženo	0	2	2	9	3	0	0
Teoriski	0,25	1,5	3,75	5	3,75	1,5	0,25

Ovaj rezultat koji se osniva na veoma malom broju ogleda (svega 16) nije vrlo ubedljiv. Bolji rezultat je dobijen kad je ogled produžen do 96 pokušaja po šest bacanja. Rezultati razvrstani kao i ranije, bili su onda ovakvi:

»Glava«	0	1	2	3	4	5	6
Konkretno zapaženo	1	6	21	28	23	16	1
Teoriski	1,5	9	22,5	30	22,5	9	1,5

Videćete da je poučno da vršite i dalje oglede; uporedite rezultate pri malom broju bacanja sa rezultatima pri velikom broju bacanja. Ako se slažete da binomna raspodela data na str. 664 daje dobar opis onoga što se dešava kad bacamo novac u vis, onda ćete lako shvatiti jedan način na koji se teorija matematičke verovatnoće može primeniti na praktične probleme. Morate se, razume se, setiti da je matematička verovatnoća razlomak. Računi osnovani na njoj obično daju razlomke. Po svojoj prirodi ona će retko odgovarati za poslove u kojima rezultati moraju biti celi brojevi, i mi ne možemo od nje očekivati da dâ čak ni približno dobre rezultate u jednom jedinom ogledu. S druge strane ona može dobro da izrazi rezultat velikog broja ogleda. Ako zapažena učestanost kojom se nešto pojavljuje iznosi 3, a teoriska 2,5 onda je taj višak 20 procenata. Ako je zapažena učestanost 300, a teoriska se za isti razlomak razlikuje od najbližeg manjeg celog broja tj. ako je teoriska učestanost 299,5, onda je višak samo 0,16 procenata i u tom slučaju se dobro slažu teorija i praksa. Sa tom ogradom možemo sad da pristupimo jednoj primeni ove teorije, ako smo se složili da ona daje tačan opis ponašanja novca. Videćete naprimer kako sopstvenik neke kockarnice može da udesi svoje uloge tako, da veliki deo njegovih mušterija bude zadovoljan, a da i on zaradi lepu paru. Ako se on kladi da će pri 6 bacanja novca dobiti najmanje 3 »glave«, izgledi su 21 prema 11 da će tako i biti. Ako ima dovoljno kapitala da tako produži dovoljno dugo on će uspeti u približno dve trećine svojih opklada, a njegove mušterije uspeće u jednoj trećini opklada.

Ako se neko reši da živi od opklada poput osiguranja opklada antverpenskih finansijera u šesnaestom veku, on to može slobodno da učini ako ima dovoljno početnog kapitala. Ako uzmemo da se u jednakom broju rađaju muška i ženska deca, onda veliki broj opklada znači da se 48 livara vraćaju u džep za svakih 30 isplaćenih, ili da čista dobit iznosi 60 procenata. Ako raspored gubitaka i dobitaka zasnivamo na pretpostavci da verovatnoća po kojoj je svako drugo novorođenče muško tačna i da ona pokazuje razvitak porodica, onda čovek sa kapitalom od 60 livara ima mnogo više izgleda da ih izgubi, nego čovek sa 300 livara. Ako ima 60 može da se kladi samo dvaput. Verovatnoća da će obadva porođaja dati žensko dete je $\frac{1}{4}$. Od velikog broja lica što imaju samo po 30 livara za klađenje, jedno lice od četiri njih izgubiće zbog toga ceo svoj kapital odmah. Sa kapitalom od 300 livara 10 opklada su mogućne. Izgledi da će od 10 uzastopnih rođenja biti sve samo ženska deca, jesu 1 prema 1023. Od velikog broja lica sa 300 livara, manje nego jedno od hiljade izgubiće sve to pre nego što dobije bar jednu opkladu. Sa velikim kapitalom špekulant može sasvim mirno da primi obavezu da plati i više nego što je njegov kapital, ako sva rođenja dadu žensku decu, a da time ne rizikuje mnogo da će bankrotirati. Zato njegov kapital stalno raste, dok njegova siromašnija braća propadaju, ili ako nisu propali, već su stavili jednu nogu na Jakovljeve lestvice[1]). Kad je već stekao dovoljno kapitala da se obezbedi od slučaja koji bi ozbiljno ličio na bankrotstvo, može da izbaci sa tržišta svoje sitne takmičare nudeći povoljnije uslove. Stvarna učestanost rađanja muške dece nešto je malo veća od polovine svih slučajeva. I tako je ona pretstavljena teoriskom verovatnoćom koja je jednaka sa verovatnoćom pri izvlačenju loptica iz jedne kese u kojoj je nešto malo više od pola crvenih loptica. Pretpostavimo da se posle posmatranja rađanja kod celokupnog stanovništva utvrdilo da je učestanost muške dece 0,51. Špekulant može onda da ponudi da vrati ulog sa 100 procenata dodatka, ako opklada ispadne protiv njega, pa ipak zaradi 2 procenta u dugom nizu opklada. Da li će uspeti zavisi dokle može da tera sa propisanim ulozima. Prema tome uspešna špekulacija osniva se na principu: »Ko ima, daće mu se, a ko nema, oduzeće mu se i ono što ima«. Velika bogatstva u doba trgovačko-zelenaškog kapitala izgrađena su na ovoj osnovi. Dok su plemići u kocki rasipali svoja bogatstva time što nisu razumevali vezu između verovatnoće i učestanosti, njihovi lukaviji savremenici zapazili su da postoji sigurniji put ka bogatstvu nego što je čista sreća ili prava zasluga. U doba kad su bogatiji trgovci istraživali nove

[1]) Jakovljeve lestvice do neba (iz Starog zaveta). — Prev.

izvore bogatstva jasno je zašto je prepiska između Paskala i Ferme morala izazvati živo interesovanje koje je daleko preraslo kockarske stolove.

ARITMETIČKA SREDINA. — Još se raspravlja o tome u kojim prilikama može teorija verovatnoće pravilno da se primeni na tumačenje rezultata dobivenih u naučnim istraživanjima. Postoji bar jedna klasa naučnih pretpostavki o kojoj nema sumnje. Pre nego što raspravljamo o tome, moramo ispitati značenje jednog odnosa na koji smo već naišli na drugom mestu. U IV glavi već smo definisali aritmetičku sredinu između dva broja. Za veliku grupu brojeva ona se dobiva kad se saberu svi brojevi te grupe i zbir podeli ukupnim brojem posebnih brojeva. Ako ima n brojeva r_1, r_2, r_3, r_4, itd. njihova aritmetička sredina[1]) je

$$\frac{r_1+r_2+r_3+r_4+\ldots}{n}$$

ili

$$\frac{1}{n}\sum r$$

Na primer, aritmetička sredina za 5, 6, 11, 5, 6, 6, 3 je

$$\frac{5+6+11+5+6+6+3}{7}=6$$

Ako se neki brojevi javljaju više od jedanput, možemo označiti sa f broj učestanosti (frekvencija) broja r, te izraz za aritmetičku sredinu dobiva ovaj oblik:

$$\frac{f_1 r_1+f_2 r_2+\ldots+f_n r_n}{n}=\frac{\sum f_s r_s}{\sum f_s}$$

U malopređašnjem primeru možemo ovako napisati rezultat:

$$\frac{1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 6+1\cdot 11}{1+2+3+1}=\frac{3+10+18+11}{7}=6$$

[1]) Takva sredina zove se »proširena aritmetička sredina«. — Prev.

Uzmimo da smo izveli veoma veliki (m) broj ogleda po n bacanja novca i da je t celokupan broj dobivenih »pisama«. Aritmetička sredina »pisama« dobivenih u svima ogledima po n bacanja je $t : m$. Ako je q relativna frekvencija »pisama« u ovom velikom broju ogleda,

$$q = t : mn \quad \text{tj.}$$

$$t : m = nq$$

To znači da je nq očekivana aritmetička sredina broja »pisama« u velikom broju ogleda po n bacanja. Kao što ste se mogli i nadati, to je u isto vreme i prosečni broj »pisama« u ogledima po n bacanja, izračunat iz binomnog rasporeda na str. 664 kao što ćemo sad videti.

Kad primenite poslednji obrazac videćete da je prosečna vrednost uspeha u »binomnom rasporedu«, koja je matematički jednaka sa relativnom frekvencijom od 0, 1, 2, 3, ... itd. uspeha u ogledu sa n izbora, ista za sve vrednosti n. Relativne frekvencije binomnog reda sve zajedno iznose 1, pošto je $(p + q) = 1$.

Otuda je

$$(p+q)^n = 1 \quad \text{tj.}$$

$$\Sigma f = 1$$

Relativne frekvencije od r uspeha u rasporedu kao što je onaj prikazan na sl. 189 i sl. 190, kad je q verovatnoća uspeha, mogu se složiti u ovu tablicu:

Frekvencija (f)	Broj »pisama« (r)
${}^nC_0\, p^n$	0
${}^nC_1\, p^{n-1}q$	1
${}^nC_2\, p^{n-2}q$	2
– – – – – – –	– – – –
${}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r$	r

Ako je M aritmetička sredina broja uspeha u ogledima gde u svakome ima n izbora:

$$M = \frac{\Sigma f r}{\Sigma f} =$$

$$= \frac{\Sigma\, {}^nC_r\, p^{n-r} q^r \cdot r}{\Sigma\, {}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r} = \frac{\Sigma\, {}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r \cdot r}{(p+q)^n} = \Sigma\, {}^nC_r\, p^{n-r}\, q^r\, r =$$

$$= {}^nC_0\, p^n \cdot 0 + {}^nC_1\, p^{n-1}\, q^1 \cdot 1 + {}^nC_2\, p^{n-2}\, q^2 \cdot 2 + + {}^nC_3\, p^{n-3}\, q^3 \cdot 3 + {}^nC_4\, p^{n-4}\, q^4 \cdot 4 + \ldots .$$

$$= 0 + n\, p^{n-1}\, q \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}\, p^{n-2}\, q^2 \cdot 2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}\, p^{n-3}\, q^3 \cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot p^{n-4}\, q^4 \cdot 4 + \ldots = n \cdot p^{n-1}\, q + n(n-1) \cdot p^{n-2}\, q^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1}\, p^{n-3}\, q^3 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot p^{n-4} q^4 + \ldots . =$$

$$= nq \left[p^{n-1} + (n-1)\, p^{n-2} q + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 1}\, q^{n-3} q^2 + + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1}\, p^{n-4}\, q^3 + \ldots . \right]$$

Ako stavimo $n - 1 = m$, možemo dalje pisati ovako:

$$M = nq \left[p^m + m\, p^{m-1} q + \frac{m(m-1)}{2 \cdot 1}\, p^{m-2}\, q^2 + \ldots . \right] = nq\,(p+q)^m$$

Pošto je $(p + q) = 1$ biće dalje:

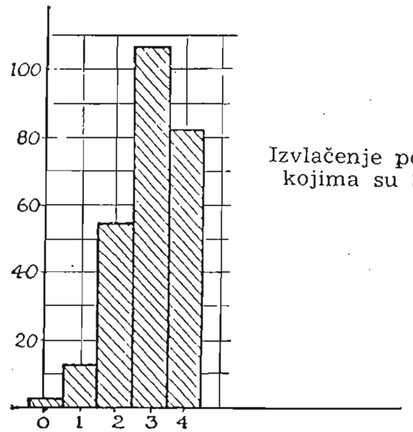
$$\underline{M = nq}$$

Problem prikazan na sl. 191 može sad da se iznese u drukčijem obliku koji će pokazati koliko je koristan u primeni statističkih pretpostavki u nauci. Ako verovatnoća q da će ma koje dete biti žensko iznosi $\frac{1}{2}$, prosečan broj ženske dece u velikom broju porodica od n lica biće $\frac{n}{2}$. Ako je $n = 8$, sredina će biti 4. Verovatnoća da će porodica od 8 dece imati bar 3 devojčice, ali ne više od 5, jeste, prema tome, istovetna sa verovatnoćom da se broj devojčica u porodici sa 8 dece neće razlikovati za više od jedan od srednjeg broja devojčica u svima porodicama od 8 dece. Zato je verovatno da će u porodici sa 8 dece broj ženske dece biti između $M - 1$ i $M + 1$, tj. $M \pm 1$.

Na sl. 189—191 matematička verovatnoća raznih kombinacija uspeha i neuspeha u ogledu koji ima izvestan određen broj pokušaja prikazana je za posebni slučaj kad je $p = \frac{1}{2} = q$. Ovaj uslov nam pruža dosta tačan opis rezultata mnogobrojnih ogleda sa bacanjem novca. Uzastopno izvlačenje jedne lopte za drugom iz kese koja ima podjednak broj crvenih i crnih loptica, ako se loptica vrati u kesu pošto joj je boja zabeležena, ili jednovremno izvlačenje po jedne lopte iz svake iz grupe sličnih kesa u kojima je podjednak broj crvenih i crnih loptica, može da pruži isto tako zgodnu priliku za primenu matematičke teorije. Zakon frekvencije po kome se upravlja izvlačenje loptica u takvom jednom ogledu veoma se približuje matematičkom modelu, pod uslovom da se pri izvlačenju iz kese ne može videti boja loptice. To ne znači da sve loptice moraju biti od istog materijala, ni imati isti oblik, ni veličinu. Materijal, oblik i veličina dveju loptica i inače nisu nikad potpuno isti. Važno je samo to, da ličnost koja izvlači loptice ne može da zapazi te razlike, ili, ako ih zapaža, da se te razlike ne odnose na boju. Na primer, ako su loptice jedne polovine veće od loptica druge polovine to neće uticati na rezultat ako je i među većim i među manjim lopticama isti broj crnih i crvenih. U ovakvom ogledu odnos crvenih i crnih loptica ne mora biti $\frac{1}{2}$. On može imati ma koju vrednost između 0 i 1. Sl. 192 pretstavlja matematičke verovatnoće da će se izvući 0, 1, 2, 3, 4 crvene loptice u jednom jedinom ogledu koji se sastoji u tome da se izvuče po jedna loptica iz svake od četiri kese u kojima su po tri crvene loptice i jedna crna. Pri izvlačenju iz jedne kese verovatnoća je

$\frac{1}{4}\left(p = \frac{1}{4}\right)$ da će se izvući crna loptica. Verovatnoća da će se izvući crvena loptica u svakoj prilici, iz svake kese, je $\frac{3}{4}$, $\left(q = \frac{3}{4}\right)$. Ako vučemo jednovremeno iz sve četiri kese imaćemo ove verovatnoće

r		P
0	(0 crvenih, 4 crne)	p^4
1	(1 crvena, 3 crne)	${}^4C_1 p^3 q$
2	(2 crvene, 2 crne)	${}^4C_2 p^2 q^2$
3	(3 crvene, 1 crna)	${}^4C_3 p q^3$
4	(4 crvene, 0 crnih)	p^4



Izvlačenje po 1 loptice iz 4 kese u kojima su 3 crvene i jedna crna.

Sl. 192.

Broj crvenih loptica izvučenih u jednom izvlačenju iz 4 kese pretstavljen je duž horizontalne osovine. Na vertikalnoj osovini su prikazane relativne frekvencije u svakoj klasi ponaosob, jedan podelak je $\left(\frac{1}{4}\right)^4$

Prema tome, ovo su verovatnoće da se dobiju 0, 1, 2, 3, 4 crvene loptice:

$$p^4 \quad 4p^3q \quad 6p^2q^2 \quad 4pq^3 \quad q^4$$

Kad unesemo posebne vrednosti za p i q dobijamo:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \quad 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4} \quad 6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad 4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3 \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

To je dalje:

$$\frac{1}{256} \quad \frac{12}{256} \quad \frac{54}{256} \quad \frac{108}{256} \quad \frac{81}{256}$$

Srednja vrednost broja crvenih loptica izvučenih u jednome ogledu sa četiri izvlačenja je:

$$n\cdot q = 4\cdot\frac{3}{4} = 3.$$

Srednji broj crnih loptica izvučenih u jednome ogledu sa 4 izvlačenja je

$$np = 4\cdot\frac{1}{4} = 1$$

Verovatnoća da se dobiju tačno 3 crvene loptice je

$$\frac{108}{256} = \frac{27}{64}.$$

Izgledi su, prema tome, 37 protiv 27 da će se dobiti tačna srednja vrednost. Verovatnoća da rezultat neće prebaciti ili podbaciti srednju vrednost za broj veći od 1 biće:

$$\frac{54}{256}+\frac{108}{256}+\frac{81}{256}=\frac{243}{256}$$

Prema tome su izgledi da se izvuku bar dve crvene loptice 243 za i 13 protiv. Ovo je takođe verovatnoća da rezultat neće prebaciti ili podbaciti očekivan srednji broj crnih loptica za broj veći od 1, pošto je isto, izvlačili mi 3 crvene loptice u ogledu od 4 izvlačenja, ili 1 crnu u ogledu od četiri izvlačenja itd.

STATISTIČKE HIPOTEZE U PRIRODNIM NAUKAMA

Možemo uglavnom razlikovati tri načina primene matematičke teorije verovatnoće. Prvi i nesumnjivo najkorisniji

način je postavljanje *statističkih hipoteza*[1]) u prirodnim naukama. Kao što možemo upotrebiti matematičku teoriju kao model na hartiji za prikazivanje nečega što se odigrava u kockanju, tako isto možemo ono što se dešava u hazardnoj igri uzeti kao fizički model za prikazivanje prirodnih pojava. Ako ogled potvrdi zaključke na koje su nas navele ove pretpostavke onda hipotezu možemo uzeti za vođu u svome daljem radu. Ovo je princip na kome su osnovane dve najplodnije naučne hipoteze koje su se pojavile sredinom devetnaestog veka. Jedna je kinetička teorija gasova. Druga je teorija *gena*. Jezgro kinetičke teorije gasova osniva se na činjenici dobivenoj ogledom da se gasovi spajaju i stvaraju nove hemiske jedinice u stalnom brojnom odnosu. To je dovelo do zaključaka da su gasovi sastavljeni iz posebnih jedinica (molekula) i da se u određenoj zapremini svih gasova, pri istoj temperaturi i pritisku, nalazi približno isti broj tih molekula. Početak teorije gena bilo je Mendelovo[2]) otkriće da hibridi[3]) od roditelja čiste rase koji pripadaju raznim varijetetima ili linijama proizvode različite linije poroda u određenom brojnom odnosu.[4]) To je dovelo do shvatanja da nasleđeni sastav jedne individue zavisi od posebnih čestica (gena) kao što su molekuli u gasovima. U kinetičkoj teoriji pretpostavlja se da se brzina raznih molekula menja na isti način kao nešto doterani binomni raspored. U teoriji gena pretpostavlja se da se posebno materino jaje-ćelija oplođava posebnim očevim spermatozoidom — ćelijom i da se to dešava sa istom frekvencijom kao što bi se dešavalo da su to obojene loptice koje se izvlače iz kese.

Primena matematičke verovatnoće u teoriji gena može se objasniti jednim od Mendelovih originalnih ogleda. Mendel je ukrstio varijetete graška čiste rase, jedan sa žutim zrnima, drugi sa zelenim. Hibridi su imali žuta zrna. Kad su ovi hibridi bili oplođeni svojim sopstvenim polenom[5]), jedna četvrtina

[1]) Statističke pretpostavke. — Prev.

[2]) Gregor Mendel, botaničar (1822—1884).

[3]) Meleži. — Prev.

[4]) Mehaničko shvatanje da su »geni« nosioci naslednih osobina živih bića danas je predmet veoma žive i još neokončane diskusije u naučnom svetu. — Red.

[5]) Cvetni prah. — Prev.

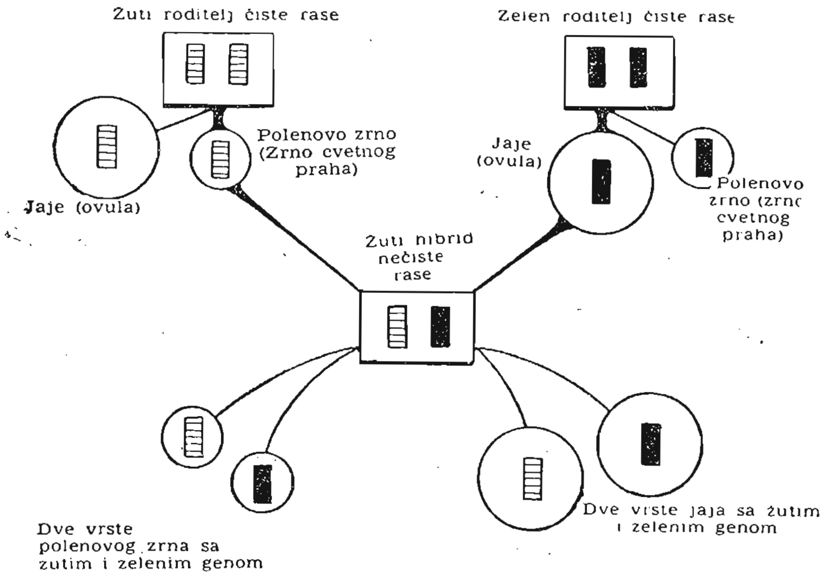
njihovog roda imala je zelena zrna i pri samooplođenju množila se kao čista rasa. Ostali su bili žuti. Jedna trećina od njih, to znači jedna četvrtina celokupnog poroda, množila se kao čista rasa, kao i njihovi žuti dedovi. Ostali porod sa žutim zrncima pri samooplođenju dao je žut i zeleni porod u istoj razmeri kao i njihovi roditelji (3 : 1). Zato ukrštanje između čistih rasa liči na hemisku reakciju i to po dvema glavnim osobinama koje su dovele do atomske teorije hemiskih kombinacija. Prva je da se karakteristike neposrednih roditelja hibrida mogu opet pojaviti u njihovoj prvobitnoj čistoti. Druga je da se razne kombinacije naslednih odlika javljaju u stalnim brojnim odnosima. Donja tablica pokazuje rezultate naučnika koji su izveli iste oglede sa istim varijetetima graška u raznim zemljama i u raznim prilikama.

(a) Istraživač	(b) Godina	(c) Porod žutih meleza kad su oplođeni sami sobom		
		žuti u procent.	zeleni u procent.	Svega
Mendel	1865	75,05	24,95	8,023
Korens	1900	75,47	24,53	1,847
Čermak	1900	75,05	24,95	4,770
Herst	1904	74,64	25,36	1,755
Betson	1905	75,30	24,70	15,806
Lok	1905	73,67	26,33	1,952
Darbšir	1909	75,09	24,91	145,246

Ogledni rezultati takvog ukrštanja dovode do dva zaključka. Boja zrna zavisi od nečega što jedinka prima od svakog od svojih roditelja. Grašak sa zelenim zrnima ili ima dva roditelja koji su imali zelena zrna, ili dva roditelja koji su oba imali pretke sa zelenim zrnima. I tako to n e š t o što hibrid[1]) dobija od svoga zelenog roditelja biće zelena zrna samo onda, ako ih jedinka primi od oba roditelja. To n e š t o oni su nazvali g e n. Ako pretpostavimo da ima čestica od kojih zavisi brojni odnos pri hibridskim ukrštavanjima, isto onako kao što ima čestica od kojih zavise zakoni hemiskih kombinacija, dve proste pretpostavke su dovoljne da objasne mnogostruke rezultate bezbrojnih ogleda o nasleđu. Prva je u

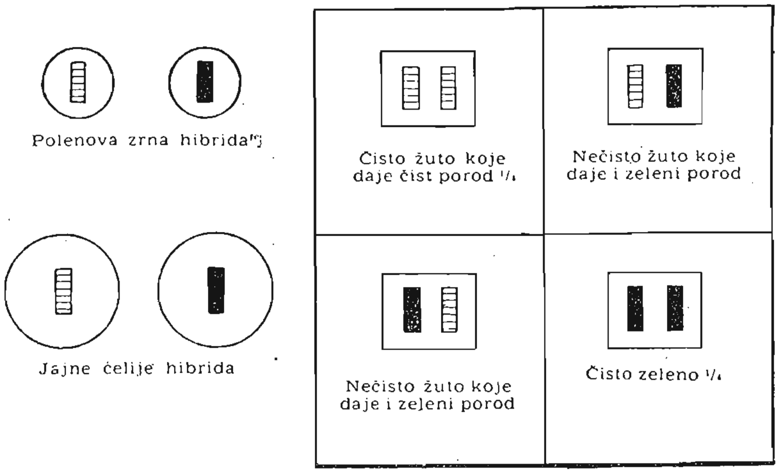
[1]) Biljka nastala ukrštanjem dveju vrsta. — P r e v.

tome, da bilo da ovula (jaje — ćelija) ima ovaj ili onaj gen, to ne utiče na verovatnoću da će ona biti oplođena polenskim zrnom koje ima ovaj ili onaj gen. Druga je pretpostavka da kad jedna jedinka stvara polenska zrna ili jajne ćelije, svako polensko zrno ili svaka jajna ćelija dobija jedan gen, ali ne dobije onaj drugi gen. Žuti melezi u ovome ogledu dobijaju jedan gen, mi ga zovemo žuti gen, od svog žutog roditelja. Drugi gen, zeleni, dobijaju od svog zelenog roditelja. Polovina polenskih zrna i polovina jaja imaju gen dobiven od jednog raditelja pri prvobitnom ukrštanju, a druga polovina ima ga od onog drugog roditelja. Primena ovih dveju pretpostavki prikazana je u obliku dijagrama na sl. 193 i 194.



SL. 193. — DIJAGRAM RASPOREDA GENA KOJI UTIČU NA BOJU ZRNA KOD GRAŠKA

Prema Mendelevoj hipotezi, nasledni faktor jedinke sastoji se od parova gena koji su dobiveni i od jednog i od drugog roditelja. Svako polenovo zrno ili svaka jajna ćelija dobija samo po jedan gen od svakog para. Polenska zrna ili jajne ćelije sa ovim ili onim genom od istog para, kao što je zeleno-žuti par koji nas ovde zanima, stvaraju se sa podjednakom frekvencijom. Ako zavisi samo od frekvencije u kojoj se javljaju razne vrste, koja će vrsta polena oploditi koju vrstu jaja, odnos žutih i zelenih u potomstvu biće 3 : 1. To je isto kao da kažemo da su dobiveni rezultati isti kao kad bacimo dvaput novac ili kad vadimo po jednu lopticu iz svake od dveju kesa u kojima ima podjednako crvenih i crnih loptica. Iz tablice se vide rezultati drugih istraživača koji su ponovo izvodili pose-



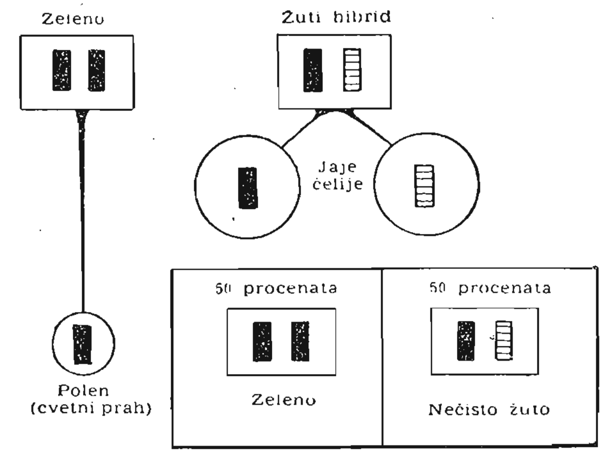
Sl. 194.
Mendelov odnos hibridnog potomstva 3 : 1.

bno ukrštavanje koje je bilo izvedeno da se prikaže osnovna teorija gena. Iz nje ćete videti da brojni odnosi raznih vrsta potomaka nisu apsolutno stalni. Oni su stalni samo u jednom s t a t i s t i č k o m smislu.

Ova oprezna ograda mora veoma brižljivo da se ispita. Stvarajući hipotezu da objasnimo pojave izabrali smo fizički model na kome se može primeniti matematička teorija. To znači da će brojevi dobiveni u ogledima istoga obima morati da se razlikuju po binomnom pravilu od srednje vrednosti neke veoma velike grupe sličnih ogleda. Sl. 195 pokazuje nam da pri ukrštavanju nečisto žute vrste i zelene vrste verovat-

noća da će se dobiti bilo zelena ili nečisto žuta biljka iznosi $\frac{1}{2}$.

Pretpostavimo da je u jednom stvarnom ogledu odgajeno samo dvanaest biljaka od takvog ukrštanja. Ne treba da očekujemo da ćemo dobiti tačno šest biljaka sa zelenim zrnima i šest sa žutim. Ako bi se za ogled uzeo neparan broj biljaka očevidno je da je nemoguće dobiti tačno podjednake brojeve jednih i drugih. U svakom posebnom ogledu u kome ima samo dvanaest



Sl. 195.

članova poroda, broj zelenih biljaka može biti ma koji broj od 0 do 12. Ako vrsta fizičkog modela koji smo izabrali dobro pretstavlja rezultate, ovi će se brojevi pojavljivati sa relativnom frekvencijom binomnih članova:

$$^{n}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ ^{n}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ ^{n}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n \ldots,\ ^{n}C_n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ako je q $\left(\text{ono iznosi}\frac{1}{2}\right)$ verovatnoća da će jedna biljka biti zelena, srednji broj zelenih biljaka u svima ogledima od 12 biljaka trebalo bi da bude

$$n \cdot q = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

Ako jedan ogled dâ 5 zelenih i 7 žutih, zapaženi rezultat razlikuje se za 1 od srednjeg broja. Verovatnoća da će broj biti u razmaku $M \pm 1$ iznosi

$$^{12}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + {}^{12}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{12} + {}^{12}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{792+924+792}{4096} = \frac{2508}{4096}$$

Znači da su izgledi 2508 za i 1588 protiv, ili, grubo uzevši, 5 za i 3 protiv, da broj dobivenih zelenih biljaka neće biti veći od 7, ni manji od 5. Verovatnoća da će taj broj biti tačno 6 iznosi

$$^{12}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{924}{4096} = \frac{231}{1024}$$

Prema tome izgledi su 231 za i 793 protiv, ili, grubo uzevši, 1 za i $3\frac{1}{2}$ protiv da će se dobiti tačno polovina. Tražiti da se zapaženi rezultati i srednji broj nekog mnogo većeg broja ogleda potpunce slože znači zbog toga tražiti nešto preterano. I zato ne smemo biti razočarani ako u ogledu utvrđeni broj bude nešto veći ili manji od srednjeg broja. S druge strane, u slučaju koji posmatramo ovde ima više izgleda **p r o t i v** nego **z a** da ćemo dobiti višak ili manjak prema srednjem broju veći od jedinice. Zato se ne smemo zadovoljiti rezultatom koji se razlikuje od srednjeg broja više od jedinice. Da se odluči da li se teorija i praksa slažu u statističkom smislu potrebno je naći razmak za vrednost koji niti tera teoriju na suviše velike napore, niti joj pak postavlja sasvim lake zadatke.

Strogo uzevši ne možemo naći razmak za cele brojeve koji zadovoljava ovaj slučaj, pošto je u ovom primeru broj potomaka i suviše mali. Razmak $M \pm 0$ je i suviše uzan. Razmak $M \pm 1$ može se smatrati kao i suviše širok. Pri ogledima o nasleđu obično se podižu stotite i hiljade poroda i potomaka, a ponekad i stotine hiljada. Ipak se javlja isti problem. Brojni odnos koji predlaže teorija jeste granična vrednost kojoj treba da se približi rezultat bezbrojnih ogleda. Teorija nam ne kazuje **t a č n e** brojeve raznih tipova u svakom posebnom ogledu. Broj 12 je izabran prosto zato što bi aritmetička proračunavanja potrebna da se prikaže kako se proverava neka statistička teorija bila veoma zametna, kad bi se uzelo, recimo, 700

biljaka. Ima više načina da se smanji računanje. Jedan ćemo pomenuti malo docnije.

Da bismo proverili neki odnos približno jednak sa 3 : 1, kao što je odnos koji dobijamo kad ukrstimo dva nečisto (hibridno) žuta graška, (sl. 194), fizički model biološkog ogleda pretstavljao bi jednovremeno izvlačenje po jedne loptice iz grupe kesa, u kojima je u svakoj jedna crna loptica i tri crvene, kao na sl. 192. Uzmimo da je q verovatnoća da će biljka imati žute semenke. U ovom slučaju q iznosi $\frac{3}{4}$. Srednji broj žutih biljaka treba da bude:

$$nq = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$$

Verovatnoća da će se dobiti baš taj rezultat bila bi:

$$^{12}C_9\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$$

Verovatnoća da se broj žutih biljaka neće razlikovati od srednjeg broja za više od 1 iznosi

$$^{12}C_8\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^8 + {}^{12}C_9\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^9 + {}^{12}C_{10}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

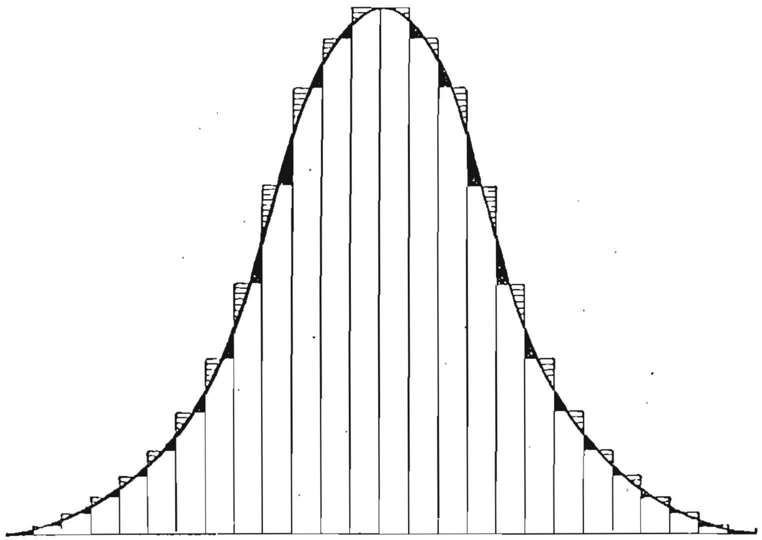
Izračunajte sami ove vrednosti.

TEORIJA GREŠAKA. — Istoriski posmatrano primena teorije verovatnoće na nauku bila je ranije vezana sa raspravom o greškama pri fizičkim merenjima, posebno u astronomiji. Ovu granu nauke razvili su Laplas[1]) i Gaus[2]). Fizička merenja jedne iste stvari, kao što smo više puta isticali, ne daju nikad apsolutno istovetne rezultate. Ti se rezultati kreću između izvesnih granica prilično dobro definisanih. Te granice zavise od osetljivosti upotrebljenih instrumenata i od toga sa kolikom se brižljivošću udešavaju uslovi posmatranja. Isti posmatrač kad izvrši ista merenja nekoliko puta, neće uvek dobiti tačno iste vredno-

[1]) Pjer Simon Laplas, Francuz, matematičar i astronom (1749 do 1827). — P r e v.

[2]) Karl Fridrih Gaus, Nemac, matematičar i astronom (1777 do 1855). — P r e v.

sti. Otuda se pri istraživanjima koja zahtevaju veoma veliku tačnost javljaju pitanja: kad se posmatranje dveju osoba razlikuju, da li ta razlika dolazi od prirode materijala, od tačnosti posmatračeve, od osetljivosti njegovih instrumenata ili od uslova pod kojima se ogled vrši? jesu li te razlike takve, da će se pri uzastopnim ogledima sa istim materijalom opet javiti? Od-



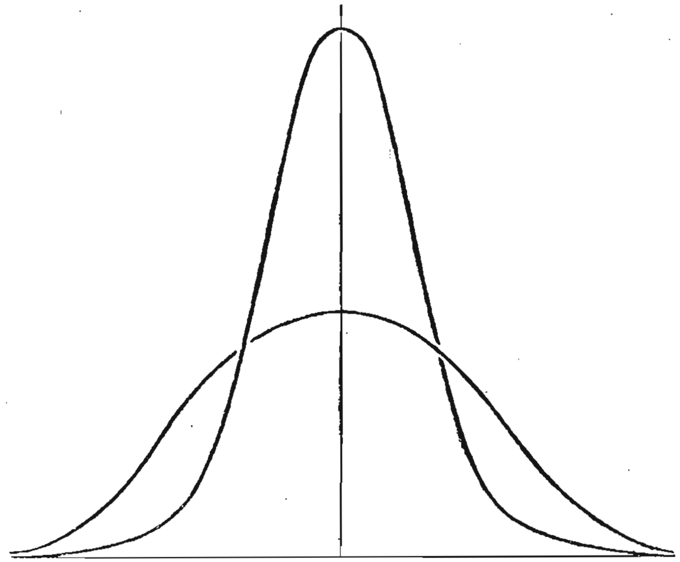
SL. 196. — NORMALNA KRIVA GREŠAKA KAO PRIBLIŽNOST BINOMNOG RASPOREDA

govor na takva pitanja nije uvek sasvim prost. A često je puta od velikog praktičnog značaja da se taj odgovor nađe.

U svima primerima binomnog rasporeda (grafički pretstavljene na sl. 191 i 192) uziman je veoma mali broj radnji (izbora) u okviru jednog ogleda. Ako grafički pretstavimo primenu matematičke teorije u ogledu u kome je broj radnji (broj izbora, n) veoma veliki, dobićemo sliku koja mnogo liči na karakterističnu krivu liniju pokazanu na sl. 196 i 197. Ako uzmemo da je n koliko je moguće veliki broj, onda će se površina slike tako malo razlikovati od površine ograničene krivom, da tu razliku možemo zanemariti. Na krivu nešto sličnog oblika često se nailazi kad izradimo grafik frekvencija (y-osov.) merenja raznih veli-

čina (x-osov.) pri naučnim posmatranjima. Ona se zove n o r m a l n a k r i v a g r e š a k a. Jednačina te krive glasi

$$y = A \cdot e^{-bx^2}$$



SL. 197. — NORMALNA KRIVA GREŠAKA

Jednačina ove krive je $y = Ae^{-bx^2}$. Da li je kriva relativno strma, ili blago nagnuta, zavisi od konstanti A i b.

Do ovakve jednačine dolazi se time što se uzmu razne pretpostavke o tome kako su vezani x i y. Jedna metoda sastoji se u tome da se prosto primeni binomni raspored

$$y = {}^nC_m \, p^m \, q^{n-m}$$

Ako je $p = \frac{1}{2} = q$, a n veoma veliko, to postaje (vidi Dodatak 4)

$$y = A\, e^{-bx^2}$$

Tačan oblik ove krive, bila ona relativno strma ili relativno spljoštena kao što je pokazano na sl. 197, zavisi od konstanata

A i *b*. Obe ove konstante zavise od neke količine koja se može pronaći iz samih ogleda. Količina od koje zavise A i *b* igra veoma važnu ulogu u statistici, a pored toga je važna i u vezi sa teorijom grešaka. Ona se zove »*varijansa*« i ako je n veoma veliko, ona pretstavlja zjedničku prosečnu vrednost svih količina koje se dobijaju kad se digne na kvadrat razlika između svake prave vrednosti za x i aritmetičke sredine (M) svih (n) merenja, tj.

$$V = \frac{\Sigma\,(M-x)^2}{n}$$

Kad je n malo, za imenilac se uzima $(n-1)$, tako da za 5 merenja izraženih brojevima 6, 7, 8, 5, 4 imamo aritmetičku sredinu 6 i varijansa je

$$\frac{(6-6)^2+(6-7)^2+(6-8)^2+(6-5)^2+(6-4)^2}{5-1} =$$

$$= \frac{0+(-1)^2+(-2)^2+(1)^2+(2)^2}{4} = \frac{0+1+4+1+4}{4} =$$

$$= \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Ako svaka tačka iz grupe tačaka koje odgovaraju frekvenciji y nekog posebnog merenja x, u nekom fizičkom ogledu, pada na krivu ove vrste o kojoj govorimo, možemo izračunati A i *b* kad smo izračunali varijansu (V) merenja[1]). Ranije smo videli kako se verovatnoća da će se neki broj nalaziti u izvesnom razmaka od — do, može pretstaviti površinom. Data jednačina pretstavlja krivu koja je nacrtana tako, da se srednja vrednost javlja kod $x = 0$. Ako srednju vrednost smatramo za najbolju, vrednosti pretstavljene na apscisnoj osovini pretstavljaju pozitivne ili negativne greške. Ako su jedinice tako izabrane da površina ograničena celom krivom iznosi 1 jedinicu površine, frekvencija sa kojom će se izvesna greška nalaziti u razmaku $M \pm E$ iznosi

$$\int_{-E}^{+E} y\,dx$$

[1]) Prave vrednosti za A i b su $A = \frac{n}{\sqrt{2\pi V}}$, $b = \frac{1}{2V}$. — Pisac.

Nije mnogo teško pokazati da površina koja odgovara razmaku $M \pm E$ iznosi tačno polovinu celokupne površine ograničene krivom kada je

$$E = 0{,}675\sqrt{V}$$

To znači da se greške manje od $\pm E$ i veće od $\pm E$ javljaju sa istom frekvencijom. Drugim rečima, jednaki su izgledi za i protiv da će greška biti veća od E. I zato se E obično zove verovatna greška dotične grupe ogleda. Prema matematičkoj teoriji, srednja vrednost raznih grupa ogleda pašće na normalnu krivu ako podaci iz jedne jedine velike grupe ogleda padaju na nju, a verovatna greška sredine dobivene iz raznih grupa od n posmatranja iznosi

$$E_m = 0{,}675\sqrt{\frac{V}{n}}.$$

Matematička teorija pokazuje i to da razlike između ma kojih dveju srednjih vrednosti padaju na normalnu krivu ako na nju padaju pojedinačna posmatranja. Verovatna greška u razlici između dveju srednjih vrednosti M_1 i M_2, gde je svaka dobivena iz n posmatranja, iznosi:

$$0{,}675\sqrt{\frac{V_1+V_2}{n}}$$

Statističari se služe raznim pogodbama pri odlučivanju da li srednja vrednost dveju različitih grupa posmatranja zavisi od samog materijala. Na primer, izgledi su oko 400 protiv 1 da će razlika između srednje vrednosti dveju grupa posmatranja biti veća od $4\frac{1}{2}$ puta verovatne greške u razlici između sredina. Pošto je lako preuveličavati važnost teorije grešaka u običnoj praksi naučnih istraživanja, bar u laboratoriji, važno je uočiti dve stvari u vezi sa rasprostranjenim shvatanjem da su svi naučni zakoni »statistički«.

Na samom početku ove knjige uočili smo da se tačna merenja ne mogu izraziti jednim jedinim brojem. Tačno merenje pruža ceo niz brojeva koji se nalaze između dveju tačno definisanih fizičkih granica. Te granice zavise od osetljivosti samog instrumenta, od istovetnosti uslova pod kojima se ogled izvodi i od stručnosti posmatračeve. Ako uzastopni rezultati dobiveni u mnogobrojnim ogledima padaju na krivu kojoj statističar može da nađe jednačinu, teorija verovatnoće mu omogućuje da utvrdi verovatnoću da se nijedan rezultat neće naći van nekog razmaka. Ako je verovatnoća veoma velika, praktičan čovek može odatle izvući zaključak, ako se takav rezultat pojavi, da se to ne može objasniti samo nedostacima njegove metode. To znači da to dolazi od prirode materijala koji on proučava. Koja mu brojna vrednost verovatnoće daje prava na tako rasuđivanje očevidno zavisi u izvesnoj meri od njegova ukusa i od njegove naravi. Ako je oprezan, nije verovatno da će se zadovoljiti statističkim receptom. Mesto da se osloni na statističku procenu, da odredi gde se *može* nalaziti tačan rezultat, on zapne da pronađe tačniju metodu koja će mu omogućiti da nađe uže granice između kojih rezultat *mora* da se nalazi.

Da uzmemo sad jedan konkretan primer da to objasnimo. Metode koje postoje u hemiji da se odrede male količine kalcijuma (odnosno krečnih soli) u malim količinama krvi date na ispitivanje, ne mogu da pruže pouzdane rezultate među kojima bi razlika bila manja od dva procenta. To znači da rezultati istog rastvora mogu da se razlikuju do 2 procenta, i neće se razlikovati za veći broj ako se preduzmu potrebne mere predostrožnosti. Da bi se proučilo kako se menja kalcijum u krvi kokoši, dok se luči ljuska za jaje, netačnosti ovakve veličine mogu se zanemariti, pošto analiza krvi vađene u trenutku kad jaje ulazi u žljezdu koja luči ljusku, može da pokaže povećanje od 200 procenata. I ovakva prilično gruba metoda odgovara za proučavanje uslova stvaranja ljuske iz kokošijih rezervi kalciuma. Zato se radnik u laboratorijama neće mučiti još i oko toga da pronalazi i primeni tačnije metode od ovih što ih već imamo. Iz istog razloga nije mu potrebno da traži pomoć od statističara. A sad uzmimo da on radi na rešavanju jednog drugog problema. Proučava, recimo, povećanje proizvodnje jaja što će se postići na taj način što će se kokoši stalno držati pod veštačkom svetlošću. On zna da paratiroidna žlezda reguliše ravnotežu između krečnih soli u kostima i u krvi, i želi da zna da li svetlost i mrak imaju neki uticaj na njen rad. Jednu grupu kokošiju drži stalno na svetlosti, a drugu stalno u mraku, nastojeći da hrana, temperatura, vlaga i drugi uslovi kod obe grupe budu slični koliko je god moguće. Rezultat ogleda može biti da se prosečna

sadržina kalciuma u krvi dveju grupa kokošiju razlikuje tako oko tri procenta. Prema tome kako su njegovi rezultati raspoređeni i prema brojevima ogleda njegovi rezultati mogu biti ili ne biti statistički značajni. Iz toga kako se razlikuju rezultati pri jednom istom ogledu statističar će biti sposoban da odredi verovatnoću da se neće javiti *prosečna* razlika te i te veličine. Statističar može izjaviti da je verovatno da je rezultat značajan dok bi praktičan čovek posle brzog pregleda brojeva odbacio taj rezultat. Uopšte govoreći, radniku na ogledima nije potrebno da bude ovako ohrabren. Ako on ima dovoljno razloga da očekuje neki određeni rezultat, on će pokušati ponovo, boljom metodom. Ne traži on statistički zakon. On želi samo da bude siguran. Može doći do zaključka da metoda analize krvi kojom se on služi nije zadovoljavajuća. On će onda leći na posao da pronađe metodu koja će mu dati veću tačnost, napr. pouzdanost merenja u razmaku od 0,5 procenta. On može ponoviti ogled, trudeći se još više da svoje životinje drži pod sličnim uslovima, da bi se uverio da na rezultat ne utiču drugi činioci sem svetlosti i mraka. On može brižljivije odabrati svoje životinje tako da se njihov naslední sastav znatno ne razlikuje. Istina je da teorija grešaka igra vrlo malu ulogu u praksi naučne laboratorije. Učenje po kome su svi naučni zakoni samo statistički zakoni pretstavlja statističarevo gledište o tome šta bi naučnik trebalo da radi. Međutim ono nije verna slika onoga što naučni radnik zbilja radi. Jedno je reći da su svi zakoni koji obuhvataju naše znanje o prirodnim pojavama samo približno izražene istine, a drugo je kad se kaže da su oni *statistički*. Naučnik se uvek trudi da dobije što bolju približnost. On se nikad ne može nadati da će jednim jedinim brojem moći izraziti rezultat merenja stvari koje on proučava, pa ipak on stalno sužava razmak u kome se ti rezultati nalaze. Taj razmak nije nikakva statistička pogodba o verovatnoći pri klađenju. Kad to znamo, sigurni smo da nijedna prava vrednost *ne može* da se nalazi van toga razmaka.

Druga stvar koje se treba setiti u vezi sa primenom verovatnoće na greške merenja jeste u tome da njena primenljivost zavisi od toga da li je utvrđen zakon frekvencije koji važi za konkretno merenje. Da se to izvede na zadovoljavajući način obično je potrebno mnogo više muke nego da se pronađe tačnija metoda merenja. A čak i kad nije tako, matematička teorija je u najboljem slučaju samo vrlo gruba približnost samih činjenica. Normalna kriva grešaka mogla bi samo onda da pretstavlja merenja do kojih se došlo u nekom ogledu, kad bi se mogao dobiti beskonačan broj raznih pročitanih rezultata. Pod sadanjim stvarnim radnim uslovima to se ne da ostvariti. Srazmerno ograničen broj raznih podataka može se dobiti u razmaku na posebnoj skali između podeoka koji se dobijaju iz stručnih posmatranja. Matematička kriva koja je najviše proučavana ima rep koji gotovo nikad ne dodiruje apscisnu osovinu (sl. 197). To znači ona dopušta mogućnost da se pojave greške ma koje veličine, ma da bi frekvencija veoma velikih grešaka morala biti vanredno mala. U laboratoriskoj praksi javljanje grešaka preko izvesne veličine nije stvar samo veoma male verovatnoće. Mi se trudimo da podesimo oglede tako, da se greške preko izvesne veličine uopšte i ne pojave. Eksperimentalnom naučniku statistika ne služi za izgovor kada su mu ogledi loše izvedeni. Kad bi on nju takvom smatrao nauka bi bila u zastoju. Gaus je najistaknutiji među onima koji su u vezi sa normalnom krivom razradili teoriju grešaka. On je pretpostavljao mogućnost da se pojavi neograničeno veliki broj grešaka pri vršenju merenja. Može biti istina da neki neograničeno veliki broj stvari dovede do pogrešnih zapažanja. Međutim nije istina da se može stvarno pojaviti neograničeno veliki broj raznih merenja (za koja se pretpostavlja da su sva pogrešna sem jednoga). I zbilja, normalna kriva je samo relativno adekvatna rasporedu rezultata dobivenih u jednom veoma lošem ogledu. Naprimer, ona srazmerno dobro pretstavlja jedno veoma nestručno gađanje.

Normalna kriva grešaka upotrebljena je u vezi sa statističkim pretpostavkama, kao što je ona Mendelova pretpostavka, da bi se izbegla teška računanja. Da bi se videlo kako se primenjuje s tim u vezi, setite se ogleda prikazanog na sl. 195. Uzmimo, da smo odgajili 300 biljaka iz jednog ukrštanja graška sa zelenim zrnima i sa hibridnim žutim, pa smo dobili 160 zelenog i 140 žutog poroda. Tačno utvrđena verovatnoća da se broj zelenih i žutih biljaka neće razlikovati za više od 10 od srednje vrednosti (150) iznosi:

$$\sum_{r=140}^{r=160} {}^{300}C_r \, p^r \, q^{300-r}$$

U ovome izrazu r pretstavlja sve cele brojeve od 140 do 160 uključivo. Aritmetički prevod ovoga izraza zahtevao bi

ogroman rad. Mi pretpostavljamo da se slika prikazana na sl. 190 razlikuje vrlo malo od krive pokazane na sl. 196, pod uslovom da n bude dovoljno veliko (kao što je u ovome ogledu). Zato se služimo integralnim obrascem koji tu istu verovatnoću pretstavlja na drugi način:

$$\int_{140}^{160} Ae^{-br^2}\, dr$$

Videli smo da i A i b zavise od jedne količine V. Nju smo već definisali kao srednju vrednost kvadrata razlika srednjih vrednosti i stvarnih vrednosti. Kad se poslužimo metodom sa str. 675 lako je pokazati da je za binomni raspored

$$V = \sum {}^nC_r \, p^r q^{n-r} (r-M)^2 = n \cdot pq = \frac{n}{4} \quad \text{kad je } p = \frac{1}{2} = q.$$

Tablice vrednosti ovoga integrala za razne granice koje se mogu primeniti za razne vrednosti V izrađene su jednom za svagda. Upotreba takvih tablica opravdana je činjenicom da je veoma tegobno računati verovatnoću t a č n o kada je n veoma veliko. U svakom slučaju vrednost koju pridajemo tačnom rezultatu verovatnoće stvar je ukusa. I zato je približna vrednost dovoljno dobra. Opšte je usvojeno da treba biti zadovoljan kada se posmatrane vrednosti (u ovom slučaju 140 i 160) ne razlikuju od teoriske sredine (150) za više od dvostruke vrednosti verovatne greške. Verovatna je greška u ovome slučaju

$$0{,}675\sqrt{npq} = 0{,}675\sqrt{300\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 0{,}675\sqrt{\frac{300}{4}} =$$
$$= 0{,}675\sqrt{75} = 3{,}375\sqrt{5} = 5{,}85 \text{ (približno).}$$

U ovom slučaju razlika je manja od dvostruke verovatne greške. Biolozi obično upotrebljavaju isto merilo i onda kada p i q nisu jednaki. U stvari teoriska kriva koja dosta tačno odražava stanje stvari drukčije izgleda u takvom slučaju, te je potrebno pristupiti traženju druge približne vrednosti.

STATISTIČKA TEORIJA U DRUŠTVENIM NAUKAMA. — Ispitali smo dva načina na koje se teorija verovatnoće primenjuje u prirodnim naukama. Jedan je postavljanje statističke hipoteze čija se predviđanja mogu proveriti ogledom. Svi se možemo složiti s tim da je to opravdano i sumnje nema da su korisni rezultati koji su odatle proizišli. Drugi način je pokušaj da se utvrdi relativna vrednost raznih grupa merenja. To može biti od izvesne koristi ako potstiče na nov ogled time što pokazuje gde mogu biti te stvarne razlike. U drugoj polovini devetnaestog veka pojavilo se novo shvatanje primene matematičke verovatnoće. Kada je 1836 izašao Kvitletov esej o *Socijalnoj fizici*, on je privukao pažnju na to da postoje društvene pojave koje pokazuju veoma interesantnu statističku postojanost. U to vreme to je bio važan doprinos naučnom saznanju. Naprimer, statistički podaci koje je pokupio Kvitlet i u kojima se pokazuju brojevi zločina u raznim zemljama i u raznim klasama pružili su neoborivi argumenat protivu onih koji su istupili sa učenjem o slobodnoj volji, koje pretstavlja prepreku u istraživanju zakona po kojima se čovek vlada u društvu. Kvitlet je obelodanio statističku zakonomernost u čitavom nizu društvenih pojava; time je stvorena neophodnost da se te pojave racionalno objasne. Taj njegov rad ohrabrio je ljude da obrate veću pažnju na statistiku privrednih bogatstava, narodnog blagostanja i raznih sektora čovekove društvene delatnosti. Pri tumačenju ovakve statistike pružila se prilika da se korisnim vežbanjem razviju aritmetičke sposobnosti. Što je više proučavana društvena statistika, sve se više i više uviđalo da nije dobra društvena mašina koja skuplja statističke podatke. Pošto pojedinačni istraživač u društvenoj statistici ne može da radi na dosta širokom planu u istraživanju društvenih procesa, lako pada u iskušenje da se obmane verovanjem da mu teorija verovatnoće može dati podatke koji se mogu dobiti samo pomoću organizovanog društvenog napora.

U proučavanju ljudskih karakteristika i društvenih poslova neposredno je primenjena matematika pod nazivom verovatnoća. Neposredna primena matematike pojavila se u vezi sa istraživanjem povezanih količina, kao naprimer kad postavljamo pitanje da li je veština u usmenom računanju deteta u nekoj vezi sa roditeljskim prihodima. Uzmimo da smo u jednome mešovitom razredu poređali dečake i devojčice najpre po redu dobivenih ocena na nekom aritmetičkom ogledu, pa kad su posle učenici poređani prema godišnjim prihodima svojih roditelja, da smo dobili isti ili obrnuti red. Odatle bi mogli da zaključimo da su u nekoj vezi sposobnost računanja i ekonom-

sko blagostanje. Takva potpuna veza pojavila bi se samo onda kada bi se dejstvo svih uzgrednih činilaca potpuno izjednačilo kod svih učenika, ili kad bi ono bilo takvo, da se može zanemariti. U praksi ne treba da se plašimo kad donosimo pozitivan zaključak iako se pokaže da nekoliko imena nisu na svom mestu. Zato, zaključak da izvesna veza između te dve pojave postoji može da se izvede ovde, ako se usvoji izvesna mera za dopušteno otstupanje koje se može pojaviti kad se upoređuju takva dva »stroja«.

Kad se takva dva »stroja« posmatraju na ovaj način, osnovna mera otstupanja zove se **d o b i t a k** ili **g u b i t a k r a n g a**[1]). Pretpostavimo da su aritmetičke oznake dečaka A, B i C 75, 52 i 39. Onda je ovo »rang« učenika A, B i C : 1, 2, 3 u opadajućem redu po uspehu. Ako su prihodi njihovih roditelja 500, 320 i 450 funti sterlinga[2]), njihov »rang« postaje 1, 3, 2. Rang učenika A je isti u oba niza. Rang učenika B povećao se za 1, a rang učenika C opao je za 1. Celokupan zbir dobitaka ranga i zbir gubitaka ranga mora uvek biti isti, a celokupan broj bilo dobitaka bilo gubitaka može se uzeti kao merilo veze. Broj svih mogućih načina da se rasporede tri stvari jeste $3! = 6$, naime (ozgo naniže)

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

Ako ma koju od ovih permutacija uzmemo kao standardnu[3]) permutaciju, biće uvek čistog gubitka ili dobitka ranga kad se ma koja od onih drugih pet uporedi sa standardnom permutacijom. Ako uzmemo prvu kao standardnu, rangovi će biti ovako poređani:

A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

[1]) Rang je red. (Bio je prvi, a sad je sedmi, ili obrnuto). — P r e v.
[2]) 1 funta ima 20 šilinga, 1 šiling 12 penija. — P r e v.
[3]) Tipična. — P r e v.

Dobici (pozitivni znaci) i gubici (negativni) iznose

0	+1	+1	+2	+2
+1	—1	+1	—1	0
—1	0	—2	—1	—2

Ovo pretstavlja 8 dobitaka[1]) i 8 gubitaka. Zato kad se 3 predmeta jedne grupe poređaju na svih 6 mogućih načina (permutacije), celokupan broj gubitaka ranga je 8 i srednja vrednost za sve moguće permutacije je $\frac{8}{6}$. Ako je l gubitak (negativni znak) ranga u ma kom odeljku gornje tablice, srednji gubitak ranga za preuređivanje n predmeta, kad je ista vrednost data svakom mogućem razmeštaju, iznosiće, prema tome,

$$\frac{\Sigma l}{n!} = S.$$

Ako se celokupan gubitak ranga (T), kad se upoređuju dva niza, ne razlikuje mnogo od srednjeg gubitka ranga, kad je svima mogućim razmeštajima data ista vrednost, nemamo razloga da pomišljamo da tu postoji ma kakva veza između ocena ili merenja od kojih zavisi red nizova. Indeks koji se zove Spirmenov koeficient ranga, ovako prikazuje tu vezu

$$R = 1 - \frac{T}{S}$$

Ako je celokupan gubitak ranga (T) jednak sa srednjim gubitkom ranga (S) onda je

$$R = 1 - \frac{T}{S}$$

$$R = 1 - 1 = 0.$$

Ako je celokupan gubitak ranga (T) ravan nuli, onda je

$$R = 1 - \frac{O}{S}$$

$$R = 1 - 0$$

$$R = 1.$$

Na taj način vrednosti za R između 1 i 0 pokazuju veće ili manje slaganje. Da bismo primenili ovaj obrazac, potrebno je

[1]) Imamo: + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8. — Prev.

samo umeti naći S za niz sastavljen od dovoljno velikog broja predmeta. Izraz glasi

$$S = \frac{n^2 - 1}{6}$$

Kad imamo 3 predmeta biće

$$S = \frac{9 - 1}{6} = \frac{8}{6}$$

kako smo već našli. Obrazac za S može se izvesti iz ove tablice:

1	1	2	2	3	3
2	3	1	3	1	2
3	2	3	1	2	1

Kao što je pokazano ranije, ima $n!$ permutacija od n predmeta i broj dobitaka ranga je isti kao i broj gubitaka ranga. Kad gledate na najgornji red u tablici, vidite da se svaki od n brojeva javlja onoliko puta koliko ima permutacija od preostalih $(n - 1)$ brojeva. To znači da se svaki broj javlja $(n - 1)!$ puta. Najveći broj (n) može da izgubi rang za 0, 1, 2, sve do $(n - 1)$ i svaki se gubitak javlja $(n - 1)!$ puta. Prvi do najvećeg $(n - 1)$ može da izgubi rang za 0, 1, 2, sve do $(n - 2)$ i svaki se gubitak javlja $(n - 2)!$ puta. Zato se svi gubici ranga mogu staviti u ovu tablicu:

n-ti broj $(n - 1)!\ [0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 1)]$

$(n - 1)$-vi broj $(n - 1)!\ [0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 2)]$

pretpretposlednji član $(n - 1)!\ [0 + 1 + 2]$

pretposlednji član $(n - 1)!\ [0 + 1]$

poslednji (najmanji) član $(n - 1)!\ [0]$

Zbir svih članova ove tablice po vertikalnim stupcima biće:

$$(n - 1)!\ [n \cdot 0 + (n - 1) \cdot 1 + (n - 2) \cdot 2 + (n - 3) \cdot 3 + \ldots] =$$

$$= (n - 1)!\ [0 + n + 2n + 3n + \ldots - (0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots)]$$

U obadva niza u zagradama ima po n članova koji počinju nulom. Znači svršavaju se sa $(n-1)$ u prvome nizu i sa $(n-1)^2$ u drugom nizu. Zato ih možemo ovako napisati:

$$(n-1)!\,[n(1+2+3+\ldots+n-1)]-[1^2+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2]$$

Videli smo već zbir n prvih prirodnih brojeva i zbir njihovih kvadrata. Kad mesto n stavimo $(n-1)$ zbir prvih $(n-1)$ prirodnih brojeva i zbir njihovih kvadrata biće:

za prvi niz $\dfrac{n(n-1)}{2}$

za drugi niz $\dfrac{n(n-1)\cdot(2n-1)}{6}$

Zato ceo zbir možemo sad ovako napisati:

$$(n-1)!\left[\frac{n\cdot n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)\,2n-1)}{6}\right]=$$

$$=(n-1)!\,n\left[\frac{n^2-n}{2}-\frac{2n^2-2n-n+1}{6}\right]=$$

$$=(n-1)!\,n\left[\frac{3n^2-3n-2n^2+2n+n-1}{6}\right]=$$

$$=(n-1)!\,n\left[\frac{n^2-1}{6}\right]=$$

$$=n!\left[\frac{n^2-1}{6}\right]$$

To je ukupni gubitak ranga. Da bismo dobili sredinu, moramo podeliti sa $n!$ I zato je srednji gubitak ranga, kao što je već rečeno:

$$\frac{n^2-1}{6}$$

Kao primer za primenu Spirmenovog koeficienta uzećemo ocene iz fizike (1) i roditeljske prihode (2) kod 8 učenika. Ovako:

	(1)	(2)		(1)	(2)
A	70	£ 720	E	60	£ 250
B	80	„ 800	F	55	„ 500
C	21	„ 750	G	24	„ 300
D	42	„ 450	H	30	„ 200

U obema skalama učenici su ovako poređani po rangu:

	(1)	(2)	Razlika u rangu		(1)	2)	Razlika u rangu
A	2	3	—1	E	3	7	—4
B	1	1	0	F	4	4	0
C	8	2	+6	G	7	6	+1
D	5	5	0	H	6	8	—2

Celokupni dobitak u rangu je +7. Celokupni gubitak u rangu je —7. Srednji gubitak je

$$\frac{8^2-1}{6}=\frac{63}{6}$$

Kad to unesemo u obrazac za R, imamo:

$$R=1-\frac{7}{\frac{63}{6}}=1-\frac{7\cdot 6}{63}=1-\frac{6}{9}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=0{,}33\ldots=0{,}\dot{3}$$

I tako je redna veza 33 procenta kad se meri ovim indeksom.

Rasmatranja koja su potekla iz teorije verovatnoće dovela su do izrade raznih indeksa brojeva koji su vrlo korisni. Oni često mogu da posluže za sabiranje kvantitativnih podataka bez obzira na njihovo posebno značenje u matematičkoj teoriji. Jedan od njih, variansa neke grupe (ili njen kvadratni koren, zvani standardna devijacija[1]), je korisna da se izvrši proba kad se izvuku pogrešni zaključci iz poređenja aritmetičkih sredina. Evo spiska godišnjih prihoda dveju grupa ljudi A i B:

A	B
£ 75	£ 950
£ 100	£ 1050
£ 350	
£ 600	£ 1075
£ 4000	

Aritmetička sredina prihoda ili »prosečni« prihod obeju grupa je isti, naime £ 1025. Uzet sam za sebe ovaj broj ne daje korisno obaveštenje o materijalnom stanju ovih dveju

[1]) Tipično skretanje. — Prev.

grupa. Jedna grupa sastoji se od tri lica koja, grubo uzevši, imaju za trošenje istu svotu novaca. Druga grupa od pet lica pretstavlja krajnosti od bede do blagostanja. Ako su ove dve grupe slučajno dve porodice koje skupe na gomilu svoje prihode tako da je tu važan c e l o k u p a n porodični prihod i broj lica koja imaju da ga troše, broj srednje vrednosti kazuje nam da su obadve grupe podjednako dobrog stanja. Bez toga ono obaveštenje ne znači ništa. Ako imamo dve grupe kao ove, aritmetička sredina nam ne kazuje ništa o tome koja je grupa boljeg stanja, sem ako znamo nešto o unutrašnjoj organizaciji te grupe, tj. o raspodeli prihoda. Uporedite, na primer, ove dve grupe:

A	C
£ 75	£ 750
£ 100	£ 650
£ 350	£ 800
£ 600	£ 700
£ 4000	

Prosečni prihod (aritmetička sredina) prve grupe je £ 1025, koji je, grubo uzevši, za 40 procenata veći od £ 725, što pretstavlja prosečni prihod druge grupe. S druge strane, svaki član druge grupe je u boljem materijalnom stanju nego 80 procenata članova prve grupe. I tako je prosečni prihod u brojnom smislu nešto sasvim drugo nego prihod »prosečnog« čoveka na jeziku svakidanjeg života. Kad govorimo o prosečnom čoveku, obično mislimo na većinu ljudi. Velika većina članova grupe *A* u ovome primeru nije tako dobrog stanja kao ma koji član grupe C.

Korist od varianse (ili njenog kvadratnog korena koji se zove standardna devijacija, ili standardna greška) u tome je, što je ona velika kad se veličine (na pr. prihodi) jedne grupe mnogo razlikuju. Obrnuto, ona je mala kad se veličine razlikuju veoma malo. Poredeći grupe *A* i *B* u pretposlednjem primeru, dobijamo variansu po već datom obrascu, naime

$$V = \frac{\Sigma\,(M-m)^2}{n-1}$$

Pošto je obično u statistikama n veliko, uobičajeno je da se ovo $(n - 1)$ u imeniocu uzme da je jednako sa n.

Kad ovaj obrazac primenimo na već date brojeve, možemo načiniti ovu tablicu za vrednosti $(M - m)$:

A		B	
$(1025 - 75)^2 =$	902500	$(1025 - 950)^2 =$	5625
$(1025 - 100)^2 =$	855625	$(1025 - 1050)^2 =$	625
$(1025 - 350)^2 =$	455625	$(1025 - 1075)^2 =$	2500
		Svega	8750
$(1025 - 600)^2 =$	180625		
$(1025 - 4000)^2 =$	8850625		
Svega	11245000		

Odatle dobijamo ove vrednosti:

$$V_A = \frac{11245000}{4} = 2811250$$

$$V_B = \frac{8750}{2} = 4375$$

Odgovarajuće standardne devijacije (obeležene u statistikama grčkim slovom σ) biće, prema tome

$$\sigma_A = \sqrt{2811250} = 1677 \text{ (približno)}$$

$$\sigma_B = \sqrt{4375} = 66 \text{ (približno)}$$

Služili se mi variansom ili standardnim skretanjem, devijacijom, velika razlika koju ovi brojevi otkrivaju pokazuje da iako je isti srednji prihod u grupama *A* i *B*, razlika između pojedinačnih prihoda i tog srednjeg prihoda mnogo je veća u jednoj grupi nego u drugoj. Drugim rečima, ovo znači da u jednoj grupi p r o s e č a n p r i h o d mnogo vernije govori o prihodu p r o s e č n o g č o v e k a, nego u drugoj grupi. Zato dok se svi prihodi ne pomešaju, niska varijansa pretstavlja relativno viši nivo o p š t e g blagostanja, kad nema znatne razlike srednjih vrednosti prihoda. Ako se srednje vrednosti mnogo razlikuju, to ne mora biti tako. Uzmite, na primer, ove brojeve:

D	E
65	650
70	700
85	850

Odmah ćete videti da je u svakoj grupi odnos odgovarajućih brojeva prema sredini grupe jedan isti. Promenljivost je proporcionalno ista u svakoj grupi. Srednja vrednost jedne grupe je 10 puta veća od srednje vrednosti druge grupe, a isto je i sa standardnim skretanjem. Da bismo uporedili promenljivost, ili, kao što statističari ponekad kažu, disperziju dveju grupa, kad su srednje vrednosti veoma različite, uobičajeno je da se standardno skretanje izražava u procentima od srednje vrednosti. Ti se procenti zovu koeficijenti varijacije. Ako ih obeležimo sa *C*, imaćemo

$$C = \frac{100\,\sigma}{M}$$

Koeficijent varijacije je isti u poslednja dva primera. Očevidno je to sigurniji dokaz promenljivosti dveju grupa nego sama varijansa ili samo standardno skretanje. Kad uporedimo grupe *A* i *C* sa srednjim prihodima od 1025 i od 725 funti iz gornje tablice, dobijamo:

$$V_A = 2811250$$

$$V_C = 4167$$

$$C_A = 100 \cdot \frac{\sqrt{2811250}}{1025} = 164$$

$$C_C = 100 \cdot \frac{\sqrt{4167}}{725} = 8{,}9$$

Promenljivost grupe *C* je, znači, mnogo manja nego promenljivost grupe *A*. Zato srednja vrednost grupe *C*, ma da je nešto manja od srednje vrednosti grupe A, bolje pokazuje šta dobija »prosečni« čovek. U ovakvim slučajevima varijansa (ili ma koja od mnogih statističkih mera disperzije kojom bismo se poslužili) je zvono za uzbunu koje nas opominje da ne izvlačimo glupe zaključke iz prosečnih vrednosti, kakva je na primer aritmetička sredina. Kad se obe uzmu zajedno, imamo koristan i veoma zbijen pregled o onome što želimo da znamo o nekoj grupi. Pa i mere disperzije nisu uvek dovoljno obezbeđenje, kao što će pokazati dva primera.

Jedan poznati razlog što ga profesori ekonomije iznose protiv racionalno planiranog društva[1]) pokazuje kako je opasno ako se uzima suviše ozbiljno prosečna vrednost. Oni nam najpre kažu da je prosečni prihod s glave na glavu toliki i toliki. Onda dalje odatle izvode da niko ne bi bio baš naročito dobrog stanja kad bi svako imao isti prihod. U stvari prosečni prihod neke društvene zajednice ne interesuje nikog sem poreznika, a i njega samo onda ako su svi prihodi podjednako oporezovani. Jedna korenita promena u raspodeli prihoda iz temelja bi izmenila način na koji je ljudski rad organizovan i njegovu primenu u iskorišćavanju prirodnih bogatstava. Mogućnost da se organizacija društvena sprovede tako, da se uzdigne čovekova životna radost, nema nikakve veze sa prosečnim prihodom pojedinaca koji, nesrećnici, moraju da žive u društvu koje ne primenjuje prirodne nauke da bi svestrano iskoristilo prirodu, niti razvija psihološku tehniku da pomoću nje angažuje ljude koji će uložiti potreban trud da se to izvede.

Drugi primer nam pružaju brojevi što ih navode eugenisti kao razlog da ne treba obrazovanjem zahvatiti sve dalje i dalje. U mnogim istraživanjima kad su vršeni ogledi da se ispita inteligencija kod dece, bile su nešto malo veće prosečne ocene dece intelektualaca nego prosečne ocene radničke dece. Razume se da takvi ogledi izvesno ne pokazuju pravu meru urođenih sposobnosti, i da primena samo prosečnih vrednosti pri raspravljanju ovakvih problema dovodi u pitanje korist od statističke metode uopšte. Razlika između dveju srednjih vrednosti u ovome slučaju znači da je s r a z m e r n o više dece s boljim ocenama u jednoj grupi nego u drugoj. Pošto uopšte ima mnogo više radničke dece nego dece intelektualaca to apsolutni broj radničke dece sa boljim uspehom može da bude mnogo veći i ako tih dobrih s r a z m e r n o ima manje. Ovo je lep primer da se vidi razlika između toga kako se istinski naučnik služi aritmetikom da bi izmenio svet i kako se njome služi metafizičar, koji zavaljen u naslonjaču »objašnjava« svet. Eugenist ne želi da izmeni današnju raspodelu mogućnosti da dete dođe do valjanog obrazovanja. Za njegove ciljeve divno mu služi aritmetička sredina. Ona mu daje formulu kojom može sebe da zavara da je društvo tako organizovano, da dete s jačom pro-

[1]) Pod »racionalno planiranim društvom« pisac misli socijalističko društveno uređenje. — R e d.

sečnom inteligencijom ima i bolje mogućnosti da napreduje. Ovakav »mudri« zaključak ista je obmana kao kad se brka prihod prosečnog čoveka sa prosečnim prihodom. Kad bi se eugenista[1]) zbilja ticalo pitanje kako da se čovekova inteligencija upotrebi, te da se isplanira društvo u kome bi se na najbolji način iskorišćavali najbolji mozgovi, kojima to društvo raspolaže, on bi priželjkivao takvu statističku metodu koja bi nam govorila kolike ljudske sposobnosti propadaju uludo pri današnjem društvenom uređenju[2]). Poređenjem samo prosečnih vrednosti nikako nećemo doći do ovakvih podataka.

Kad se prosečne veličine kod dveju grupa, kao što su ove prethodne, ne razlikuju u srazmerno velikoj meri, statističari obično računaju variansu ili standardno skretanje za svaku grupu. Iz njih se izračunava verovatna greška same sredine ili razlike između dveju sredina. Kad je razlika između dveju sredina veća od trostruke njene verovatne greške, smatra se da je značajna u statističkom smislu. To znači da razlika koju pokazuju sredine pretstavlja razliku koju možemo da očekujemo ako uzmemo sredinu čitavih grupa, koje naše statistike obično prikazuju samo u njihovom srazmerno malom deliću. Ovo se izvodi kao osiguranje protiv mogućnosti da se posmatrane razlike pojave prosto kao razlike koje bi se često mogle pojaviti ako uzmemo uzastopne primere istog obima iz jedne i iste grupe koju posmatramo. Pretpostavlja se da će frekvencija brojčanih podataka raznih osoba, kad se grafički pretstavi, pasti približno na neku statističku krivu kao što je normalna kriva grešaka. Zato, kad kažemo da je neka razlika značajna u statističkom smislu znači da se sredine raznih primera uzetih iz iste grupe neće često razlikovati onoliko koliko iznosi ta razlika u našoj statistici. Ako raspored frekvencija približno odgovara jednoj poznatoj statističkoj krivoj, onda možemo izračunati koliko često će se pojaviti srednja razlika određene veličine kad uzmemo dve stavke iz iste grupe. Ako nađemo da će se to dešavati samo veoma retko, dolazimo do pretpostavke da se zapažena razlika javlja zato što radimo sa dvema različitim grupama. Kad kažemo »veoma retko« — jednom u dvadeset

[1]) Eugenika je buržoasko reakcionarno učenje po kome će se društvo popraviti biološkim sredstvima. Iz njega su nikle fašističke »rasne teorije«. — Prev.

[2]) Pisac misli na buržoasko društveno uređenje. — Prev.

puta, ili jednom u dve stotine puta — to je čisto proizvoljna ocena koja zavisi od našeg rasuđivanja o konkretnoj materiji. Takva ocena često stvara izvesne pretpostavke koje je teško a često puta i nemoguće dokazati. Nesumnjivo je to jedna korisna zaštita od brzih zaključaka, no u isto vreme je i bedna zamena za podatke koji bi se mogli dobiti kad bismo se potrudili da ustalimo sve uslove koji dolaze u obzir kod proučavanja, kao što se trudimo da to uradimo kad izvodimo neki fizički ogled. Priznajući joj ono što u njoj valja, moramo se čuvati da ne pogrešimo, pa da uzmemo da razlika koju statističari zovu značajnom, ima zbilja neki značaj sa društvenog gledišta. U poslednjem primeru društveno važna crta statistike ne može se pretstaviti prosečnom vrednošću; zato razlika između takvih dveju prosečnih vrednosti može biti statistički značajna, a društveno beznačajna.

Tačna primena društvene statistike zavisi u velikom obimu od zdravog razuma i od proste računice. Tumačenje tablica smrtnosti zahteva istu vrstu inteligencije kao i postavljanje nekog dobrog ogleda. Ako želimo da ispitamo dejstvo mera za podizanje narodnog zdravlja, mora se uzeti u obzir veliki broj činilaca. Pre svega imamo da računamo sa činjenicom da se dve zajednice koje se razlikuju u svojoj zdravstvenoj politici mogu razlikovati i po ekonomskom stanju svojih građana i po spoljnim prilikama kao što je klima. Kad smo uzeli te činjenice u obzir, dolaze druge koje nisu tako očigledne. Naprimer, u većini raznih doba starosti žene manje umiru nego muškarci. Zato će broj žena i broj muškaraca u dvema zajednicama uticati na stopu po kojoj svet umire bez obzira na mere koje se preduzimaju da taj svet ostane u životu. Još je važnija činjenica da ljudi ne umiru isto tako često u jednom dobu života kao u drugom. Broj lica koja umiru u prvoj godini života ogromno je veliki kad se uporedi sa brojem lica koja umiru u jedanaestoj godini života. Tako isto — valjda nije potrebno ni reći — broj lica koja dožive osamdesetu godinu, a umiru pre osamdeset pete, ogromno je veliki u poređenju s brojem lica koja dožive desetu godinu, a umiru pre petnaeste. Zato, ako je broj lica koja su ili veoma stara ili veoma mlada različit u dvema zajednicama, prividni uspeh zdravstvene politike može lako da se preuveliča, odnosno da se potpuno zataška. Postoji prosta računska majstorija da se prebrode teškoće ove vrste i da se sažeto prikaže pravo stanje stvari. Mogu se upoređivati grube tablice smrtnosti dveju zajednica, tj. brojevi smrtnih slučajeva iz svih uzroka za godinu dana na 1000 stanovnika, bili oni muški ili ženski, stari ili mladi. Mesto toga možemo se poslužiti takozvanim standardizovanim stopama smrtnosti.

Standardizovana stopa smrtnosti kazuje nam kakav bi stepen smrtnosti bio, kad bi godine i polovi ličnosti toga društva bili u istom međusobnom odnosu kao kod nekog utvrđenog ili standardnog stanovništva uzetog kao uzor. Potrebna je društvena mašina koja bi posebno beležila smrtne slučajeve za obadva pola u raznim godinama starosti. U britanskoj statistici standardno stanovništvo (uzor) na koje se odnose tablice smrtnosti zasnovano je na stanju doba starosti i polova u Engleskoj i u Velsu u godini 1901. Da bi se izračunala standardna stopa smrtnosti za koju drugu godinu, potrebno je imati podatke za svaku godinu uzrasta za petogodišnji period smrtnih slučajeva na 1000 stanovnika muških i ženskih. Ako bismo te brojeve pomnožili brojem lica iz grupe i s t o g p o l a i istog uzrasta, pa sve to sabrali, rezultat bi bio isti, kao i gruba stopa smrtnosti (svi smrtni slučajevi na 1000 lica celokupnog stanovništva). Taj se rezultat ne bi mogao porediti sa grubom stopom smrtnosti stanovništva koje je i drugog doba starosti i drugog pola. Ako pomnožimo stopu smrtnih slučajeva iz svake ove grupe istih godina i istog pola brojem lica iz grupe istih godina i istog pola u standardnom stanovništvu, dobijamo standardnu stopu smrtnosti. Ona može biti nešto veća ili nešto manja nego što je ona gruba stopa smrtnosti. Ona se može tačno uporediti sa ma kojom drugom standardnom stopom smrtnosti izračunatom na istoj osnovi, ukoliko pol i godine utiču na rezultat.

Popravke ove vrste mogu da budu od koristi na razne načine. Naprimer, ako želimo da saznamo kako klima ili siromaštvo utiču na naklonjenost nekoj bolesti, ne možemo se osloniti na grube stope smrtnosti. Jer, eto, dečji proliv utiče samo na smrtnost u ranim godinama. Rak uglavnom utiče na smrtnost u docnijim godinama. Porođajna groznica utiče na smrtnost samo kod ženskih i to u vreme bremenitosti. I tako, kad uporedimo grube stope smrtnosti, tj. broj smrtnih slučajeva za godinu dana na 1000 stanovnika sveg stanovništva, koji potiču od ovih triju bolesti, to nas može dovesti do potpuno pogrešnih zaključaka, ako se sastav stanovništva mnogo razlikuje po godinama i po polu. Dobar primer za to pruža nam statistika o raku

u petogodištu 1869—73 u Engleskoj i Irskoj. Gruba stopa smrtnosti od raka bila je veća u Irskoj nego u Engleskoj. Standardna stopa smrtnosti bila je još izrazitije veća u Engleskoj nego u Irskoj. Takve standardne stope smrtnosti daju nam veoma sažetu sliku o tome kako fizička okolina i činioci na koje se može društveno delovati utiču na smrtnost raznih zajednica ili na istu zajednicu u razna razdoblja njene istorije. Potpunu sliku o evidentiranom stanju zdravlja nekog društva daju tablice smrtnosti iz kojih društva za osiguranje izračunavaju rizik koji određuje veličinu godišnjih uplata za osiguranje. Kao što smo već pomenuli, prvu tablicu smrtnosti sastavio je Heli u doba kad su osiguravajuća društva gledala da dobiju kraljevsko odobrenje za osiguravajući posao i kad je iskustvo iz doba Velike kuge i iseljavanja u Ameriku privuklo pažnju na statistiku rađanja i smrtnosti. Upotreba tablica smrtnosti pri osiguranju dala je čvrstog povoda za primenu matematičke teorije verovatnoće i naučne diskusije o tome igrale su važnu ulogu u razvoju matematičke teorije.

Tablica smrtnosti se u glavnom sastoji od dva stupca. Jedan daje brojeve godina starosti (1, 2, 3, itd.) koju dožive lica o kojima je reč. Drugi stubac nam govori o procentu lica u dotičnoj zajednici, odnosno broj lica na hiljadu rođenih (N_1, N_2, N_3, itd) koja dožive izvestan dati broj godina. Evo primera jedne skraćene tablice smrtnosti koju je dao Kušinski za Nemačku 1924—26:

Godine starosti	Preživela ženska lica
0	1000,00
1	906,23
5	882,19
10	847,50
15	868,87
20	858,24
25	842,92
30	826,14
35	808,61
40	789,34
45	767,06
50	739,70

Da se sastavi ovakva tablica iz podataka matice rođenih i umrlih dovoljno je znati osnovnu računicu i poslužiti se zdravom pameti. Na prvi pogled izgleda da je dovoljno da se izračuna broj dece koja dožive petu godinu života, recimo u 1933 god., i broj dece rođene 1928; ili da se utvrdi broj dece koja dožive desetu godinu života 1933 godine i broj dece rođene 1923, itd. To bi bilo sasvim beskorisno iz razloga koji nije teško pogoditi. Na broj stanovništva ma koga doba starosti u jednoj zajednici utiču iseljavanje i useljavanje. Postoji tu još jedna oštrija primedba. Tablice smrtnosti se sastavljaju da dadu podatke o tome kako prilike koje preovlađuju u izvesno određeno vreme utiču na to da stanovništvo doživi datu godinu starosti. U izvesnom smislu to je fikcija, ma da korisna, jer nam omogućuje da računamo na manje ili više pouzdanim pretpostavkama, kao što je, na primer, pretpostavka da se prilike neće pogoršavati u razdoblju na koje se odnose naši računi. Ako u svojim računima za određivanje broja lica koja dožive pedesetu godinu, ili prvu godinu života, pođemo od broja rođenja od pre pedeset godina ili od pre jedne godine, onda ćemo time zabeležiti uticaj veoma različitih kategorija uslova koji utiču na broj lica koja dožive dati broj godina starosti. Zato se tablice smrtnosti u stvari izrađuju iz statistike smrtnosti u nekoj posebnoj godini.

Pretpostavimo da možemo naći Q_x, broj (izražen kao deo jedinice) lica koja imaju tačno x godina starosti, a koja će umreti ne navršivši $x+1$ godinu starosti. Deo naroda koji ima tačno x godina starosti i koji će doživeti $x+1$ godinu iznosi onda $1-Q_x$. Zato, ako je N_0 broj lica rođenih u nekoj datoj godini, a N_1 broj onih koji će doživeti bar svoju prvu godinu pod uslovima smrtnosti koji preovlađuju u toj godini, biće

$$N_1 = N_0\,(1-Q_0)$$

Slično tome, ako je N_2 broj onih koji će doživeti bar dve godine prema tadanjoj stopi smrtnosti, biće:

$$N_2 = N_1\,(1-Q_1) = N_0\,(1-Q_0)\,(1-Q_1)$$

Isto tako,

$$N_3 = N_0\,(1-Q_0)\,(1-Q_1)\,(1-Q_2)$$
$$N_4 = N_0\,(1-Q_0)\,(1-Q_1)\,(1-Q_2)\,(1-Q_3)$$

itd.

Treba dakle, samo da odredimo grupu razlomaka Q_x koja pretstavlja broj lica sa tačno x godina starosti koja će umreti pre navršene $x+1$ godine. Pretpostavimo da u sredini te godine

o kojoj je reč ima y lica između x i $x+1$ godina starosti i da je u toj godini z broj smrtnih slučajeva za lica između x i $x+1$ godina starosti.

Tada z pretstavlja broj smrtnih slučajeva u grupi od y lica koja imaju prosečno $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ godina starosti pri popisivanju na dan 30 juna, dakle na polovini godine. Ta grupa od y lica pretstavlja preživele članove grupe koja je prosečno imala x godina na početku godine. Iz te grupe $\frac{z}{2}$ umrli su u toku polugodišta pre datuma popisivanja. Zato se z smrtnih slučajeva u toj godini dešavaju broju lica koji iznosi $y+\frac{z}{2}$ sa prosečnim dobom starosti od x godina na početku godine, znači

$$Q_x = \frac{z}{y+\frac{z}{2}}$$

Ma da je tablica smrtnosti prvobitno bila određena da donosi zaradu osiguravajućim društvima, ona se primenjuje i u mnogo drugih slučajeva koji su od opšte društvene važnosti. Na primer, kad se uporede tablice smrtnosti izrađene u raznim vremenima za poslednja dva veka, dobiju se jasni podaci o promenama u društvenom blagostanju koje se vide po broju preživelih u glavnoj masi stanovništva. Postoji još jedna važna primena tablica smrtnosti, kad hoćemo da osvetlimo društvene promene. To je izračunavanje priraštaja stanovništva. Potpuno pogrešne ideje o tome kako danas prirasta stanovništvo širili su propagatori maltuzijanizma[1]). Oni očevidna zla koja dolaze od lošeg društvenog uređenja usred doba obilja pripisuju tobožnjoj preterano velikoj stopi priraštaja stanovništva. Takvi nesporazumi potiču od pogrešne upotrebe grubih stopa smrtnosti i stopa rađanja.

Pomoću dva pokazača može se steći jasan pojam o tome kako prirasta stanovništvo. Prvi se zove stopa opšteg razmnožavanja. Da bi se on dobio, izradi se tablica rađanja na 1000

[1]) Teorija za odbranu buržoaskog poretka. Po njoj beda radničke klase u buržoaskom društvu dolazi od prenaseljenosti, jer dok se stanovništvo povećava po geometriskoj progresiji, dotle se proizvodnja sredstava za ishranu povećava samo po aritmetičkoj progresiji. Osnivač teorije je Englez Tomas Robert Maltus (1766—1834). — Prev.

žena datih godina starosti za svaku godinu u doba života u kome žene rađaju decu. Ako sve to saberemo, dobijemo broj dece koja bi se rodila na 1000 žena tokom celog razdoblja u kome žene rađaju, uz pretpostavku da se opšta plodnost ne menja. Ako taj broj pomnožimo brojem ženske dece među svom rođenom decom, pa podelimo sa 1000, dobijemo broj ženske dece koliko bi rodila svaka žena, ako bi plodnost ostala kao što je sad tokom njihovih života. Jasno rečeno, ako je taj broj, tj. s t o p a o p š t e g r a z m n o ž a v a n j a, manji od jedinice, to stanovništvo mora da iščezne, sem ako se nešto ne desi da povisi stopu razmnožavanja. I to je tako bez obzira na mere koje se preduzimaju da se umanji opasnost umiranja majki i dece.

Drugi pokazač priraštaja stanovništva dobija se kad se pomnože stope rađanja za svaku godinu materinstva brojem onih koji su preživeli tu godinu, a koji se broj dobija iz tablica smrtnosti. Kad se saberu proizvodi i rezultat pomnoži brojem ženskih koliko ima među ukupno rođenim, pa se to podeli sa 1000, dobijamo prosečni broj, — na 1 ženu stanovništva — ženske dece koja će i sama doživeti da postanu majke. Statistike koje imamo pokazuju da je taj pokazač manji od jedinice u većini industriskih zemalja. To znači da te zajednice nisu sposobne da održe sadanje stope rađanja i smrtnosti. U starijim industriskim zemljama čak je i stopa opšteg razmnožavanja pala ispod jedinice. I tako se ti narodi ne mogu nadati da će se pukim smanjivanjem smrtnosti održati, pa ma kakvo bilo to smanjivanje. Međutim nauka danas pruža mogućnosti za proizvodnju životnih potreba u takvom obilju, o kome nisu mogli ni sanjati Maltus i njegovi savremenici. Zato je stanje stvari sasvim obrnuto onome što su nam pričali propagandisti Maltusovog učenja.

DODATAK UZ XII GLAVU

STATISTIČKI POKAZAČI

1. MEDIJANA I NORMA

Pored aritmetičke sredine o kojoj smo već raspravljali upotrebljavaju se ponekad i druge statističke konstante da prikažu odlike nekog rasporeda. Ako se izvestan broj lica razlikuje nekom merljivom odlikom, ona se mogu poređati po veličini zapažene odlike. *Medijana* se tada može definisati kao veličina odlike

koja odgovara licu u sredini reda. Onda će biti isti broj lica koji imaju vrednost odlike veće od medijane kao i broj lica sa takvom vrednošću manjom od medijane. Ako je tih lica tako mnogo da su grupisana u klase, položaj lica koje je u samoj sredini prema svima licima može se naći interpolacijom ako su poznate granice odlike za tu grupu. Kad je broj lica paran onda se za vrednost medijane uzima sredina između vrednosti odlika dva lica koja su najbliža sredini reda.

N o r m a je vrednost najčešće zapažene promenljive odlike. Kad se promena odlike ispoljava u srazmerno malom broju jasno izdvojenih stupnjeva, na primer u broju cvetova na jednoj stabljici graška, normu je lako utvrditi. Kad se odlika menja u tako malim stupnjevima koliki se još mogu meriti, a ima veliki broj jedinki na svakom merenom stupnju, norma se čistim posmatranjem teže nalazi. U ovim slučajevima ona se može definisati kao vrednost promenljive x koja odgovara maksimalnoj vrednosti druge promenljive y. Zato može biti više od jedne norme u jednom rasporedu. Kad je raspored s i m e t r i č a n, na primer takav, da veoma blisko odgovara normalnoj krivoj greške, srednja vrednost, norma i medijana se poklapaju, ali kad je raspored nesimetričan, one se ne poklapaju. Tako je položaj medijane ili norme u odnosu na sredinu vrlo korisno sredstvo da se prikaže nesimetričnost rasporeda. Ove mere nesimetričnosti su preporučene:

$$\text{Nesimetričnost} = \frac{(\text{sredina} - \text{norma})}{\sigma}$$

ili

$$\text{nesimetričnost} = \frac{3\,(\text{sredina} - \text{medijana})}{\sigma}$$

U primeru datom na str. 700 srednji prihod grupe A je 1025 funti, dok je medijanski prihod 350 funti. S druge strane, u grupi C i srednji prihod i medijanski prihod su isti, tj. 725 funti.

2. KOEFICIJENT KORELACIJE

Aritmetičko sredstvo koje poput Spirmenovog koeficijenta ranga služi za prikazivanje međusobnog odnosa u kome se dve grupe posmatranja menjaju zove se koeficijent korelacije. On se gotovo uvek obeležava slovom r. Primenjuje se u tri oblasti.

(a) Kao pokazač društvenog blagostanja koji govori da li su dve grupe brojeva odnosno veličina u nekoj vezi. Na primer, da li su učestanost zločina i procenat nezaposlenosti u nekoj vezi, ili da li je težina školske dece u vezi sa nadnicama njihovih roditelja.

(b) Kao pokazač pouzdanosti merenja koji nam pokazuje kako se međusobno odnose razna merenja vršena na istoj grupi predmeta ali u raznim uzastopnim prilikama. Otuda, on prikazuje pouzdanost instrumenta upotrebljenog za merenje odnosno za ogled, a pokazuje i postojanost izvesne odlike merene između dva uzastopna ogleda. Na primer, možemo dati ocene licima na odgovore koje ona daju na pitanja o njihovim političkim shvatanjima. Koeficijent koleracije (*r*) može da posluži za merenje da se vidi koliko se slažu ocene što su ih lica dobila u dvema uzastopnim prilikama. Ako se one dobro slažu, moramo zaključiti da na njihov stav nisu mnogo uticale stvari koje su se odigrale između dva ogleda i da ogled prikazuje politički stav dotičnih lica orijentisan u izvesnom određenom pravcu. Dva rezultata koji se tu upoređuju mogu postati različiti kad promenimo razmak između ogleda.

(c) Kao pokazač sličnosti. Ako uzmemo parove jedinki koje se sve nalaze pod nekim istim uticajem, kao što su slična sredina ili slično nasleđe, možemo upotrebiti *r* da nam pokaže kako se izvesne merljive odlike slažu kad su merene na oba člana takvih parova. Na primer, brojna vrednost ovoga *r* za merenje visine nerazličnih bliznaca može da se uporedi sa vrednošću toga *r* kod različnih bliznaca. I tako možemo da kažemo koliko na visinu utiču nasleđe i porodične prilike u izvesnim granicama, pošto znamo da nerazlični bliznaci imaju isti nasledni sastav, a da ga različni bliznaci nemaju.

Pokazač je tako sastavljen, da se njegove vrednosti nalaze između +1 i —1. Ako se izmerene veličine podudaraju savršeno, jedna grupa raste ukoliko druga grupa raste, ovo *r* može iznositi +1. Ako to *r* iznosi —1, dve grupe merenja se slažu savršeno, ukoliko jedna raste druga opada. Ako *r* iznosi 0, to znači da se ne poklapaju veličine koje upoređujemo. Brojke nemaju nikakve veze, ogled nije pouzdan, ne postoji opšta sličnost. Primena koeficijenta korelacije i metoda njegovog određivanja mogu se najbolje prikazati na jednom konkretnom primeru. U knjizi V. H. Bevridža N e z a p o s l e n o s t, nalazi se niz statističkih podataka koji se odnose na nezaposlenost. U dva stupca su dati: *(a)* procenat zaposlenih i *(b)* broj brakova na 1000 stanovnika u Engleskoj i Velsu od 1860 do 1929 (Vidi tablicu I.).

I TABLICA

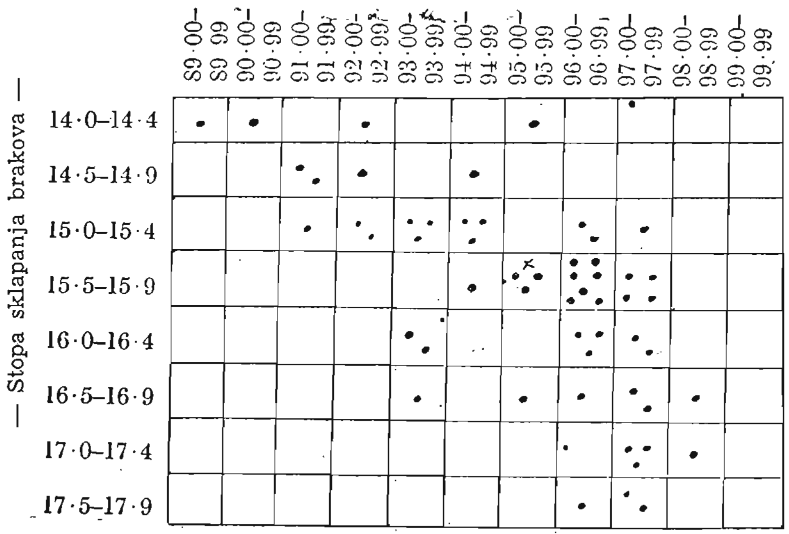
Godina	Procenat zaposlenih (*a*)	Stopa sklapanja brakova na 1000 stanovnika u Engleskoj i Velsu (*b*)	Godina	Procenat zaposlenih (*a*)	Stopa sklapanja brakova na 1000 stanovnika u Engleskoj i Velsu (*b*)
1860	98·15	17·1	1895	94·00	15·0
1861	96·30	16·3	1896	96·65	15·7
1862	93·95	16·1	1897	96·55	16·0
1863	95·30	16·8	1898	97·05	16·2
1864	98·05	17·2	1899	97·95	16·5
1865	98·20	17·5	1900	97·55	16·0
1866	97·35	17·5	1901	96·65	15·9
1867	93·70	16·5	1902	95·80	15·9
1868	93·25	16·1	1903	95·00	15·6
1869	94·05	15·9	1904	93·60	15·2
1870	96·25	16·1	1905	94·75	15·3
1871	93·35	16·7	1906	96·30	15·6
1872	99·05	17·4	1907	96·05	15·8
1873	98·85	17·6	1908	91·35	15·1
1874	98·40	17·0	1909	91·30	14·7
1875	97·80	16·7	1910	94·90	15·0
1876	96·60	16·5	1911	96·95	15·2
1877	95·60	15·7	1912	96·85	15·6
1878	93·75	15·2	1913	97·90	15·7
1879	89·30	14·4	1914	96·75	15·9
1880	94·75	14·9	1915	99·00	19·4
1881	96·45	15·1	1916	99·55	14·9
1882	97·65	15·5	1917	99·40	13·8
1883	97·40	15·5	1918	99·30	15·3
1884	92·85	15·1	1919	97·50	19·8
1885	91·45	14·5	1920	97·45	20·2
1886	90·45	14·2	1921	84·45	16·9
1887	92·85	14·4	1922	82·80	15·7
1888	95·85	14·4	1923	87·50	15·2
1889	97·95	15·0	1924	90·90	15·3
1890	97·90	15·5	1925	88·95	15·2
1891	96·60	15·6	1926	87·30	14·3
1392	93·80	15·4	1927	90·40	15·7
1893	92·30	14·7	1928	89·30	15·4
1894	92·80	15·0	1929	89·60	15·8

Iz Bevridževe knjige *Nezaposlenost*

Ako se (*a*) i (*b*) grafički pretstave kao dve zasebne krive na osnovi godina od 1860, videće se da krive pokazuju niz dizanja i padanja, i da u glavnom prekretnice na krivoj nezaposlenosti odgovaraju prekretnicama na krivoj brakova i tačno ih prate bilo iste godine bilo sa zakašnjenjem od godinu-dve. Ta se veza najbolje vidi u godinama do Prvog svetskog rata. Od 1914 pa nadalje tok obeju krivih je sve nepravilniji. Zasad ćemo se ograničiti na godine 1860 do 1914. Prvi korak je da se vrednosti grupišu u podesan broj klasa. Pravimo tablicu i u svakom njenom kvadratiću stavljamo tačku za svaku vrednost koja pada u taj kvadrat. To je pokazano u II tablici.

II TABLICA

Procenat zaposlenih



Iz tablica kao što je ova prethodna može se videti priroda korelacije. Ako procenat nezaposlenosti obeležimo kao promenljivu x, a stopu sklapanja brakova kao promenljivu y, centar najveće gustine svih tačaka ležaće u tački koja se poklapa sa sredinom svih iksova i sredinom svih ipsilona. Kad se uzmu aritmetičke sredine, videće se da se on nalazi u kvadratu 95,00—95,99 i 15,5 — 15,9 i njegov približan položaj grubo je obeležen

na tablici krstićem. Tačke pokazuju težnju da se poređaju duž jedne prave povučene dijagonalno preko tablice kroz tu tačku. Kad bi korelacija bila savršena, tj. kad bi svakoj promeni iksa odgovarala slična promena ipsilona, sve bi tačke ležale na jednoj takvoj dijagonali. S druge strane pak, kad ne bi bilo nikakve veze između tih dveju promenljivih, tada bi tačke bile nasumce rasturene po hartiji. Što je dato više vrednosti, to se lakše vidi suština korelacije. Sa nešto malo iskustva iz jedne takve slike je lako dobiti dobru približnu vrednost za korelaciju.

Da bismo dobili tačniju meru, moramo zameniti tablicu pojedinačnih vrednosti tablicom frekvencija. Već smo našli približno mesto sredina x i y. Sad možemo da ne vodimo računa o konkretnim vrednostima promenljivih, pa da ostatak svojih proračunavanja izvedemo pomoću izraza u klasnim jedinicama, uzimajući za početnu klasu onu u kojoj se nalazi sredina.

Koeficijent korelacije može se sad ovako definisati. Obeležimo sa Δx skretanja promenljive x od srednje vrednosti iksa kao početka. Obeležimo sa Δy skretanja promenljive y od srednje vrednosti ipsilona, kao početka. Ako sada obeležimo sa p sredinu svih proizvoda parova $\Delta x \; \Delta y$ imaćemo:

$$r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Ako je n ukupan broj posmatranja, ovo je isto kao da smo rekli

$$r = \frac{\dfrac{\sum \Delta x \, \Delta y}{n}}{\sqrt{\dfrac{\sum (\Delta x)^2}{n} \cdot \dfrac{\sum (\Delta y)^2}{n}}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

To se svodi na

$$r = \frac{\sum \Delta x \, \Delta y}{\sqrt{\sum (\Delta x)^2 \cdot \sum (\Delta y)^2}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

U svojoj tablici grupisali smo zajedno pojedinačne vrednosti u klase tako, da svaka vrednost Δx i Δy ima datu frekvenciju, te se naš obrazac može napisati:

$$r = \frac{\sum f \, \Delta x \, \Delta y}{\sqrt{\sum f (\Delta x)^2 \cdot \sum f (\Delta y)^2}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

III TABLICA

y \ Δx	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
− 3	1	1		1			1				
− 2			2	1		1					
− 1			1	2	3	3		2	1		
0						1	3	7	4		
+ 1					2			3	2		
+ 2					1		1	1	2	1	
+ 3										3	1
+ 4									1	2	

Δy

Nećemo ni pokušati da damo potpuno matematičko objašnjenje ovoga obrasca za r. Lako je videti da je p veličina odnosa između x i y. Kad devijacije iksa i ipsilona imaju isti znak, njihov proizvod će biti pozitivan. Kad imaju suprotne znake, njihov proizvod će biti negativan. Zato, ako je podjednako verovatno da će pri svakoj promeni ipsilona da se javi promena iksa u istom smislu ili u suprotnom, pozitivni i negativni proizvodi biće u ravnoteži, i r će biti nula, ili blizu nje. Kad se p podeli standardnim devijacijama dveju promenljivih, izbacujemo uticaj raznih promena. U praksi retko uzimamo da je početak u samoj sredini. U primeru koji posmatramo uzeto je za početak središte klase $x = 95{,}00 - 95{,}99$, a $y = 15{,}5 - 15{,}9$. U stvari srednje x je 0,054, a srednje y je 0,2 klasnih jedinica

na pozitivnim stranama od te tačke[1]). Videćemo docnije kako se vrše popravke. U praksi to retko stvara neku veliku razliku u vrednosti r. Uvek je najbolje da se najpre izračuna jedna približna vrednost za r, pa da se posle vrši popravka. Na taj način

IV TABLICA

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
Δx	Δy	f	$f\Delta x$	$f\Delta y$	$f\Delta x^2$	$f\Delta y^2$	$f\Delta x\Delta y$
− 6	− 3	1	− 6	− 3	36	9	+ 18
− 5	− 3	1	− 5	− 3	25	9	+ 15
− 4	− 2	2	− 8	− 4	32	8	+ 16
− 4	− 1	1	− 4	− 1	16	1	+ 4
− 3	− 3	1	− 3	− 3	9	9	+ 9
− 3	− 2	1	− 3	− 2	9	4	+ 6
− 3	− 1	2	− 6	− 2	18	2	+ 6
− 2	− 1	3	− 6	− 3	12	3	+ 6
− 2	+ 1	2	− 4	+ 2	8	2	− 4
− 2	+ 2	1	− 2	+ 2	4	4	− 4
− 1	− 2	1	− 1	− 2	1	4	+ 2
− 1	− 1	3	− 3	− 3	3	3	+ 3
− 1	0	1	− 1	—	1	—	—
0	− 3	1	—	− 3	—	9	—
0	0	3	—	—	—	—	—
0	+ 2	1	—	+ 2	—	4	—
+ 1	− 1	2	+ 2	− 2	2	2	− 2
+ 1	0	7	+ 7	—	7	—	—
+ 1	+ 1	3	+ 3	+ 3	3	3	+ 3
+ 1	+ 2	1	+ 1	+ 2	1	4	+ 2
+ 2	− 1	1	+ 2	− 1	4	1	− 2
+ 2	0	4	+ 8	—	16	—	—
+ 2	+ 1	2	+ 4	+ 2	8	2	+ 4
+ 2	+ 2	2	+ 4	+ 4	8	8	+ 8
+ 2	+ 4	1	+ 2	+ 4	4	16	+ 8
+ 3	+ 2	1	+ 3	+ 2	9	4	+ 6
+ 3	+ 3	3	+ 9	+ 9	27	27	+ 27
+ 3	+ 4	2	+ 6	+ 8	18	32	+ 24
+ 4	+ 3	1	+ 4	+ 3	16	9	+ 12
Ukupno		55	+3	+11	297	179	+167

[1]) Ove su sredine dobivene iz tablice frekvencija, a ne iz prvobitnih vrednosti. — Pisac.

se proverava sama aritmetička radnja. Novi korak u izračunavanju ovoga r pokazan je dalje u IV tablici.

Tablica IV je izvedena iz tablice frekvencija (III tablica). U stubac (1) stavljamo najmanju vrednost za Δx. Odmah u stubac (2) do njega stavljamo uzastopne vrednosti za Δy koje odgovaraju tim vrednostima za Δx sa odgovarajućom frekvencijom u stupcu (3). Tako nastavljamo sa svima vrednostima za Δx. Stubac (4) dobija se množenjem (1) i (3); stubac (5) množenjem (2) sa (3); stubac (6) dizanjem na kvadrat stupca (1) i množenjem sa stupcem (3); stubac (7) dizanjem na kvadrat stupca (2) i množenjem sa (3); stubac (8) međusobnim množenjem sva tri stupca (1), (2) i (3).

Prva približnost za r može se sad dobiti iz obrasca (4), tj.

$$r = \frac{167}{\sqrt{297 \times 179}} = 0{,}724$$

Da bismo izvršili popravku s obzirom što nam početak nije tačno u sredini, moramo se vratiti na obrazac (2) i napisati ga sad ovako:

$$r = \frac{\dfrac{\sum f\,\Delta x\,\Delta y}{n} - \dfrac{\sum f\,\Delta x}{n} \cdot \dfrac{\sum f\,\Delta y}{n}}{\sqrt{\left[\dfrac{\sum f(\Delta x)^2}{n} - \dfrac{(\sum f\,\Delta x)^2}{(n)^2}\right]\left[\dfrac{\sum f(\Delta y)^2}{n} - \dfrac{(\sum f\,\Delta y)^2}{(n)^2}\right]}} =$$

$$= \frac{\dfrac{167}{55} - \dfrac{3}{55} \cdot \dfrac{11}{55}}{\sqrt{\left[\dfrac{297}{55} - \dfrac{(3)^2}{(55)^2}\right]\left[\dfrac{179}{55} - \dfrac{(11)^2}{(55)^2}\right]}} = 0{,}726$$

Iz ovoga dolazimo do zaključka da postoji znatna korelacija između dveju posmatranih pojava.

Koeficijent korelacije kakav je upotrebljen u ovome primeru pretstavlja meru statističke sličnosti. On nimalo ne objašnjava mehanizam koji vezuje dve pojave. On je samo neka vrsta recepta, koji propisuje šta treba raditi na daljem putu istraživanja i u daljim ogledima.

Isti princip za uprošćavanje računanja može da se primeni kad se određuje sâmo standardno skretanje — devijacija. Za početak se uzima podesna tačka dovoljno blizu sredine. Devijacije se mere od toga početka. One se popravljaju za rastojanje između početka i sredine.

EPILOG O NAUCI

ili

Matematika i stvarni svet

U III glavi raspravljali smo o prevođenju svakidanjeg govora na govor matematičkog izražavanja. Svaki Englez koji je učio malo francuski zna da prevođenje sa francuskog na engleski pretstavlja posao sa jednim teškoćama, a da prevođenje sa engleskog na francuski pretstavlja posao sa sasvim drugim teškoćama. Na primer, za prvi posao potreban vam je poveći rečnik, a za drugi posao da što bolje poznajete gramatička pravila. Kad je rukopis za ovu knjigu bio poslat u štampariju, jedan kritičar-prijatelj savetovao je da bi trebalo nešto reći i o prevođenju matematičkih izraza na maternji jezik. I zbilja, kad radimo taj posao, treba se čuvati nekoliko jama da se ne padne u njih. Otuda je došlo ovo.

Jedna, i to sasvim očigledna opasnost je u tome ako zaboravimo da je samo približno tačno ono što kažemo o svetu na matematičkom jeziku, i ono što kažemo o svetu na svakidanjem jeziku. Pretpostavimo da smo pravili oglede sa nekim gasom da nađemo vezu između:

(a) Temperature i pritiska kad se održava stalna zapremina.

(b) Temperature i zapremine kad se održava stalan pritisak.

(c) Pritiska i zapremine kad se održava stalna temperatura.

Onda možemo odlučiti da se naša posmatranja slažu sa ovim tvrđenjima izraženim na običnom jeziku:

(1) Ako se održava na stalnoj zapremini utvrđena težina gasa, pritisak raste, odnosno opada u upravnoj proporciji sa porastom, odnosno opadanjem temperature. ($p = ct$).

(2) Kada se gas utvrđene težine drži pod stalnim pritiskom, zapremina raste ili opada u upravnoj proporciji sa temperaturom. ($V = ct$).

(3) Kad se održava stalna temperatura utvrđene težine gasa onda su pritisak i zapremina obrnuto proporcionalni ($pv = c$).

Ova prosta tvrđenja vrlo su približna stvarnom stanju stvari ako temperaturu imamo na »apsolutnoj« skali, gde se voda mrzne na 273°, a ključa na 373°. Sva su ova tvrđenja obuhvaćena ovim sažetijim pravilom:

$$\frac{pv}{t} = R$$

Ovo se može napisati:

(a) $p = \frac{R}{v} \cdot t$, što je isto kao i postavka (1) kad je v stalan broj.

(b) $v = \frac{R}{p} \cdot t$, što je isto kao i postavka (2) kad je p stalan broj.

(c) $pv = Rt$, što je isto kao i (3) kad je t stalan broj.

Vidite da se drugo tvrđenje može upotrebiti kao propis za rad, ako se ovako prevede: »Dižite temperaturu gasa pod stalnim pritiskom toliko i toliko, da biste mu povećali zapreminu za toliko i toliko«. U obliku u kome je data jednačina nema ničega što bi vas sprečilo da je prevedete ovako: »Povećavajte zapreminu gasa pod stalnim pritiskom za toliko, da biste mu povećali temperaturu za toliko«. Ogled vam pokazuje da je poslednje tvrđenje besmisleno. Tu dolazi prva opomena koju morate držati u pameti. Naime, matematičko tvrđenje sme se samo onda upotrebiti kao propis za izvođenje nekog postupka, ako uz to tvrđenje ide i neko d o p u n s k o znanje stečeno iskustvom o tome kako se jedan proces stvarno odvija.

Ako iz iskustva znate kako treba da primenite pravilo kad je ono izraženo matematičkim izrazima, i kad ste izveli oglede i njima dobili dobru prosečnu vrednost za R, možete ga onda

upotrebiti za izračunavanje ma koje od triju količina p, v i t, kad su one druge dve poznate. Na primer, ako je taj gas vodonik, i ako je njegova težina n grama, naći ćete da je R približno 0,025 n, tj.

$$\frac{pv}{t} = 0{,}0025\, n$$

Ma da je ovo tvrđenje ubedljivije, ma da je ono sažetije i jasnije, nije ono ni u kom pogledu tačnije od izraza datog običnim rečima. Kad kažemo da je pritisak obrnuto proporcionalan sa zapreminom pri stalnoj temperaturi mislimo ovo. Kad smo podesili neki ogled tako, da držimo temperaturu stalno jednu istu koliko god to možemo i kad smo izmerili zapreminu i pritisak nekog gasa pomoću sudova koje smo napravili što smo mogli tačnije i pomoću skala izdeljenih što možemo sitnije, — proizvod pritiska i zapremine ne menja se za količinu veću nego što je ona koju možemo očekivati zbog razlika između uzastopnih merenja zapremine na istom pritisku (ukoliko možemo da ga održimo da bude stalan!) ili između uzastopnih merenja pritiska kad zapremina ne pokazuje promene koje bi mi mogli uočiti! Ovo se potpuno slaže sa odgovarajućim tvrđenjem da razne vrednosti za R koje dobijamo kad izvršimo izvestan broj ogleda pod raznim pritiscima, zapreminama i temperaturama stoje tako blizu jedna drugoj koliko to možemo očekivati od instrumenata koji su podložni izvesnom iznosu greške koju dobar ogled ima da utvrdi.

Drugim rečima matematičko tvrđenje možemo upotrebiti samo sa ogradom da se rezultati izračunati pomoću njega neće razlikovati od onoga što stvarno treba da nađemo za grešku veću nego što je mogu otkriti naši instrumenti. Ovo je bilo istina u doba kad je ovo pravilo bilo stvoreno, dakle, u sedamnaestom i osamnaestom veku, a na ogledima koje su vršili Huk, Mariot, Čarlz i Gej-Lisak. Danas to nije tačno zato što imamo bolje instrumente. S druge strane, rezultati koji su dobiveni primenom toga pravila na ponašanje običnih gasova, kao što su vazduh ili vodonik, razlikuju se od rezultata dobivenih ogledom za manje od 1 procenta, i to duž dosta široke skale temperatura i pritisaka. Ma da je danas utvrđeno jedno tačnije pravilo (zvano van der Valsova jednačina), ipak je ono pravilo siguran vodič u svima vrstama procena koje ne zahtevaju veću tačnost od 1 procenta u granicama skale temperatura i pritiska koji tu dolaze u obzir. Zato, kad sada prevodimo nazad, treba da imamo na umu drugu jednu stvar. Matematička tvrđenja su izražena velikom tačnošću, ali to ipak ne znači da je opis prirodne pojave bezuslovno egzaktniji[1]) zato što je upotrebljen matematički jezik. Egzaktna nauka, kao što se one obično zovu, jeste pogrešan naziv. Nauka je »egzaktna« (tačna) onoliko koliko može da bude sa instrumentima koji joj stoje na raspoloženju, ili koliko treba da bude s obzirom na ciljeve kojima služi. Inače to nije nauka, a to što upotrebljava matematička sredstva neće je načiniti ni više tačnom, ni manje tačnom.

Druga jedna opreznost je naročito važna kada matematiku primenjujemo na društveni život ili na biološka zbivanja. Zakoni o gasovima koje smo izneli, dovoljno su tačni da izraze rezultate ogleda koje su njihovi pronalazači vršili instrumentima koje su imali. Ti zakoni ne bi ipak bili dovoljno tačni ni s obzirom na instrumente koji su im stojali na raspoloženju, da su naučnici znali kako da proizvedu veoma niske temperature u blizini tačke gde vazduh pod velikim pritiskom prelazi u tečno stanje. U toj oblasti zakoni o gasovima postaju grubo netačni. Zakoni o stvarnome svetu samo su onda tačno postavljeni — bilo običnim rečima ili matematičkim izrazima — kad nam se kaže i to pod kojim okolnostima važe. Da bismo takav zakon mogli primeniti sa sigurnošću, treba da znamo u kojim prilikama on ne važi. Izabrani primer zakona prikazuje iskustvo o tome kako se gasovi ponašaju u izvesnim granicama temperature i pritiska. Ako ostanemo u tim granicama, ti nam zakoni dobro služe kao putokazi za pravilno postupanje.

Mnogi kad hoće da izraze vezu između pravila i posmatranja činjenica kažu da nam naučni zakon omogućuje pretskazivanje izvesnih rezultata. Ako oni time ustvari misle da kažu da taj zakon propisuje šta da se radi, da bi se dobio neki rezultat, onda nema šta da im se prigovori. Međutim oni vrlo često misle nešto sasvim drugo. Naizgled se i u jednom i drugom slučaju radi o »pretskazivanju«: bilo da se kaže da Sunčeva deklinacija (vidi VIII glavu) na podne 21 juna 1938, neće biti veća od $\frac{1}{4}^{\circ}$ preko $23\frac{1}{2}^{\circ}$ severno, bilo da se kaže da će Zemlja biti još dovoljno topla da održava biljni svet i posle pet triliona godina (5 000 000 000 000). Ustvari ta dva tvrđenja nisu slična. Prvo govori pod kojim uglom da držim sektant ako želim da vidim Sunce kada na podne tog datuma krene ka zalazu. To je potvrđeno merenjima vršenim kroz čitavih pet hiljada godina, a koja su imala za cilj da pokažu kolika se proračunljiva promena javlja u položaju Sunca u kratkom vremenskom razmaku kao što je ovaj između pisanja ove strane i pomenutog datuma. Prvo se tvrđenje odnosi na vremenski razmak za koji nam je iskustvo pokazalo da je dovoljno mali da se može proveriti. Mi međutim ne raspolažemo tolikim znanjem i o tome kako se Zemlja hladi u vremenskom razmaku od pet triliona godina, i verodostojnost tvrđenja koja se odnose na tako veliki vremenski razmak ne možemo proveriti. Između ova dva tipa tvrđenja nalazi se čitava provalija. To je provalija između dva različita shvatanja i stava prema onome što ljudi zovu znanje. Jedno je društveno gledište koje smatra znanje kao instrument za aktivno učestvovanje na delu preobražavanja sveta prema ljudskim potrebama. Drugo je gledište osamljenog intelektualca sa tradicijama besposlene klase koji pasivno razmišlja o svetu, bez volje da ga izmeni.

U fizičkim i biološkim naukama ta razlika nije mnogo važna, pošto ekstrapolacije* astronoma i geologa nanose najviše štete njihovom sopstvenom ugledu. Otkako je ogromna Kelvinova greška o stopi hlađenja Zemlje izneta na videlo otkrićem radiuma od strane gospođe Kiri, specijalisti u prirodnim naukama gledaju na slične pothvate kao na neku zanimljivu i dopuštenu vrstu maštarija. U proučavanju ljudskog društva stvar stoji drukčije. Profesori ekonomije i dandanji misle da je opravdano da tvrde da će se blagostanje vratiti zato što mogu grafički da pretstave privredne depresije i konjunkture, kako su se smenjivale u prošlosti. Oni misle tako zato, što pravi naučnik crta grafike da bi ukazao na »formule« koje izražavaju prosta pravila (kao što je objašnjeno u devetoj glavi). Pravilo se može izraziti hijeroglifski grafikom, ili »rečničkim« jezikom: obrascem. U oba slučaja pravilo pretpostavlja uslove ogleda kako ih je naučnik podesio i može se upotrebiti kao pouzdani vođa

[1]) *Egzaktan*, znači tačan. *Egzaktnim* naukama nazivaju se one čiji se zakoni mogu izraziti matematičkim sredstvima, u kojima se primenjuju matematički dokazi. (To su astronomija, fizika, hemija, itd.). — Red.

* Postupak pri kome se pokušava izvođenje opšteg zakona pomoću malobrojnih podataka dobivenih ogledima. — Prev.

u radu samo onda ako se opet mogu podesiti slični uslovi. Grafici ekonomista o cikličkim krizama[1]) odnose se na promenljive uslove koje ekonomisti ne mogu unapred da utvrde. Oni nemaju iskustvenog znanja, kao što ga imaju astronomi, stečenog na velikom planu ogleda, koje bi im omogućilo oslanjanje na pretpostavku da se izvesne pojave ponavljaju sa nepogrešivom pravilnošću.

To ne znači da ljudi koji proučavaju društvene ustanove ne treba da crtaju grafike, ili da ne treba da beleže svoje rezultate brojevima. Proračunavanja Inida Čarlza pokazuju da ako razmnožavanje stanovništva Engleske i Velsa kao celine ostane na današnjem nivou, za četiri stotine godina biće samo još oko pola tuceta preživelih Engleza. Ovo je vrlo korisno obaveštenje. Ono kazuje da moramo preduzeti nešto ako želimo da sprečimo izumiranje jednog naroda. Pomenuti zakoni o gasovima pokazuju na kojoj će temperaturi prsnuti začepljena boca vazduha ako ne može da izdrži pritisak veći od 10 atmosfera. Zato, ako ne želimo da nam prsne boca, znamo do koje granice smemo da povišujemo temperaturu. Ovako isto poređenje statističkih podataka dobivenih iz raznih grupa stanovništva odnosno raznih naroda može da ukaže na neke momente koji odvraćaju ljude od rađanja dece i time da nam pomaže da nađemo pravila koja nam pokazuju kako da ljude potstaknemo da postanu roditelji.

Kad smo prevodili nazad[2]) videli smo da na dva mesta treba biti oprezan. Prvo, ne treba da mislite da upotreba matematičkog jezika čini izvestan naučni zakon ili predmet jedne nauke egzaktnijim nego što jeste. Ako u fiktivnu nauku o »slobodnoj« privredi uvedemo grafikone ponude i potražnje, time još nismo tu nauku učinili egzaktnom. Druga opreza odnosi se na ovo: odražava li neki zakon verno neko stanje u prirodi, on u sebi nosi odredbu da moraju biti ispunjeni izvesni uslovi kad ga primenjujemo. Zato, potpun prevod nekog pravila sadrži u sebi i dalje tvrđenje: »ako su ispunjeni ti i ti uslovi«. Vredi ovde dodati i treću opreznost. Ona je u ovome: oblik nekog matematičkog tvrđenja ne mora vam kazivati nešto i o zbivanju koje ono opisuje. Ono vam samo kazuje kako da izračunate rezultat.

[1]) Reč je o naizmeničnim krizama i konjunkturama u kapitalističkoj ekonomici, koje kasnije prelaze u konačnu krizu kapitalizma kao privrednog i društvenog sistema. — Red.

[2]) Sa matematičkog jezika na govorni. — Red.

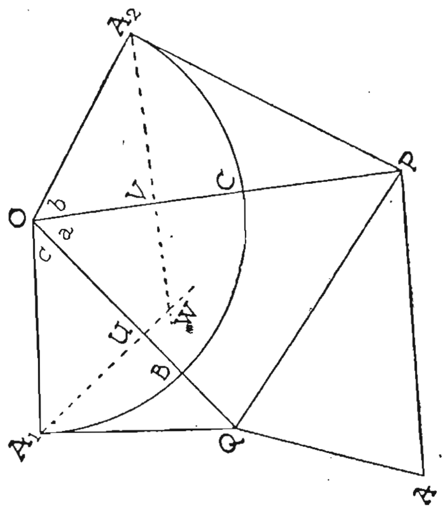
Jedan grub primer pokazaće vam tu opasnu klopku. Možemo lako zamisliti da su se u nekoj zajednici iz godine u godinu statistički podaci o smrtnosti dece (m), vodenom talogu (r) i prihodu (i) od glave menjali tako, da su prvi bili upravno proporcionalni sa drugima, a obrnuto proporcionalni sa trećima. Njihova veza bi se onda mogla izraziti obrascem $mi : r =$ konstanta. To ima tačno isti oblik kao obrazac za gasove $pv : t =$ = konstanta. Niko neće biti toliko glup da tvrdi da veza između prihoda, dečje smrtnosti i vodenog taloga mora dolaziti od gasnih reakcija. Pa ipak vidimo često čak i takvo rezonovanje.

DODACI

DODATAK I

SINUSNI OBRAZAC ZA SFERNI TROUGAO

Možemo uzeti sl. 124 da neposredno izvedemo sinusni obrazac na ovaj način. Razvijemo model sa sl. 123 i pustimo da se



Sl. 198

tačka A okreće oko prave OQ (sl. 198). Time ona opisuje kružni luk u jednoj ravni upravnoj na tu pravu OQ i na ravan OQP dok ne dođe u položaj A_1. Ona isto tako opisuje i kružni luk oko prave OP dok ne dođe u položaj A_2. Zato je

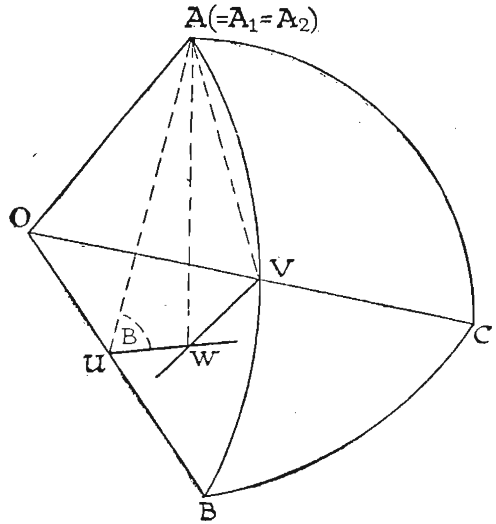
$$A_1UO = 90^0 = A_2VO$$

Kad se figura ponovo sklopi i vrati u svoj početni položaj, tačka A je tačno nad tačkom W u ravni OQP. W je tačka u kojoj se stiču poluprečnici izvodnici A_1U i A_2V. Sa slike vidimo da je

$$(1)\ldots\ \frac{A_1U}{A_1O} = \sin c \qquad \text{i da je}$$

$$\frac{A_2V}{A_2O} = \sin b$$

tj.
$$A_1U = AO \sin c; \text{ i}$$
$$A_2V = AO \sin b.$$



Sl. 199

Ugao AUW je ugao između ravni koje zahvataju lukove AB, odnosno BC. Otuda je AUW jednak s uglom B sfernog trougla. Na slici 199 vidimo da je:

$$(2)\ldots\ \frac{AW}{A_1U} = \sin B, \qquad \text{i,} \qquad \text{slčno tome } \frac{AW}{A_2V} = \sin C$$

$$\text{tj. } AW = A_1U \sin B; \text{ i} \qquad AW = A_2V \sin C$$

Kad sastavimo (1) i (2) imamo:

$$AO \sin c \sin B = AW = AO \sin b \sin C$$

tj.

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

Na isti način to je dalje ravno $\frac{\sin a}{\sin A}$, tj.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

DODATAK II

JEDNAČINA ELIPSE

Kad se matematički detektiv nađe pred ovakvim problemom, ostaju mu dva izlaza. On se prvo pita da li slika za koju on traži jednačinu liči na koju sliku čiju jednačinu on već ima. Kad nađe takvu sliku, priseća se kako je neko izveo njenu jednačinu. Elipsa je u vezi sa dvema slikama čije jednačine imamo. Ako je njen ekscentricitet beskrajno blizu jedinice, ona postaje prava linija. Ako je njen ekscentricitet beskrajno mali, ona postaje krug. Zato jednačina koju tražimo mora da je takva da se može svesti na jednačinu prave ili na jednačinu kruga, prema tome da li smo jednu količinu u njoj beskrajno približili jedinici ili nuli. Zato unapred možemo da kažemo kakva će to vrsta jednačine biti. Ako načinimo e vrlo malo, jednačina kruga je isto što i

$$R = x^2 + \frac{y^2}{1 - e}$$

Ta je jednačina ista što i ova:

$$(1 - e)\, R = (1 - e)\, x^2 + y^2$$

Kad je e veoma blizu jedinici, znači, kad je $(1 - e)$ veoma blizu nule, ovo se skupi pa ostane

$$y^2 = 0$$

ili, što je isto

$$y = 0$$

To je prava linija (sama apscisna osovina).

Ako želimo da pođemo od jednačine

$$R = \frac{x^2}{1 - e} + y^2$$

videćemo da će se i to skupiti i da će se svesti na isti krug, kad uzmemo da je $e = 0$, a da će se svesti na samu ordinatnu osovinu, ako je $e = 1$. Iste primedbe bi važile i ako stavimo $1 - e^n$ mesto $1 - e$ u istom obrascu. Zato ne treba da se čudimo što jednačina elipse ima ovakav nekakav oblik:

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R\,(1 - e^n)} = 1$$

Kad smo već stekli mišljenje o tome kakve je vrste obrazac koji tražimo, mnogo je lakše leći na posao. Ovo je veoma važna stvar koju treba uočiti. U školi nas često opominju da se čuvamo da ne „udešavamo" neki rezultat. Međutim viša matematika vrlo često „udešava" rezultat. Sad samo treba da se setimo nečega što već znamo o dobijanju ovakvog obrasca. Kako se to radi pokazao nam je krug. Da vidimo dokle ćemo dospeti, ako se poslužimo Pitagorinom teoremom. Setite se naravno da elipsa ima dve odvojene žiže mesto dve koje se poklapaju u jednoj jedinoj tački — kao što je kod kruga. Setite se i toga da mi hoćemo da nam se e javi u rezultatu zajedno sa nekom količinom kao što je R u jednačini kruga.

DODATAK III

BINOMNI DOKAZ OSOBINE EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE

Postoji još jedan način da se dokaže pravilo da je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

Taj dokaz je prvobitno potekao iz proučavanja tablica složenog interesnog računa. Uzmimo iz tih tablica jedan spisak vrednosti na koje je 1 funta narasla pod složenim interesom za nx godina pod interesnom stopom $\frac{100}{n}$ %. Evo nekoliko vrednosti za $x = 1$.

Broj godina n	Interesna stopa	Vrednost u funtama na koju je kapital narastao
20	5%	2,653
25	4	2,666
40	2½	2,685
50	2	2,692
100	1	2,705

Vidimo da su iznosi u krajnjem stupcu približno jednaki i da su veći kod većih vrednosti za n. A šta će biti ako n bude beskrajno veliko? To jest, kolika je vrednost za $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kad n postane beskrajno veliko? Odgovor je $e = 2{,}718$ i mi taj odgovor matematički pišemo u obliku

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Isprobajte to za druge vrednosti za x. Ako uzmete $x = \frac{1}{2}$, naći ćete da je kapital narastao na blizu $e^{\frac{1}{2}}$ funti posle $\frac{n}{2}$ godina po $\frac{100}{n}$ %.

A sad smo u iskušenju da ispitamo vrednost za $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ kad n postaje beskrajno veliko, ili kad $\frac{1}{n}$ postaje beskrajno malo. Kao poslednji stupanj stavićemo $\frac{1}{n} = 0$.

Kad upotrebimo binomni red imamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{nx(nx-1)}{2}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right) + \ldots.$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x\left(x-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right) + \ldots.$$

Ako je $x = 1$ onda je:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Ali mi možemo da napišemo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x \quad \text{tako da je:}$$

$$\left[1 + x + \frac{1}{2!}x\left(x-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right) + \ldots\right] =$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots\right]^x$$

Sad stavimo $\frac{1}{n} = 0$ i dobijamo:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots = \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right]^x = e^x$$

DODATAK IV

Da pokažemo da, ako je n veoma veliko, jednačina

$$y = {}^nC_m\, p^m\, q^{n-m} \text{ postaje } y = Ae^{-bx^2}$$

Ako bacimo novac u vis n puta, dobijamo raspored prikazan pravougaonicima kao na sl. 196, koji daje verovatnoću da dobijemo »glavu« 0, 1, 2, 3, ... n puta. Pretpostavimo sad da svaka »glava« iznosi jednu malu količinu$\left(-\frac{1}{2}c\right)$, a svako »pismo«$\left(+\frac{1}{2}c\right)$. Na taj način pravougaonik visine ${}^nC_m\, p^m\, q^{n-m} = {}^nC_m\left(\frac{1}{2}\right)^n$ koji pretstavlja verovatnoću da dobijemo tačno m »glava« odgovara iznosu ili »grešci«.

$$x = -\frac{1}{2}c\cdot m + \frac{1}{2}c(n-m) = \frac{1}{2}c(n-2m)$$

Isto tako pravougaonik visine ${}^{n}C_{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ odgovara grešci

$$x=-\frac{1}{2}c(m-1)+\frac{1}{2}c(n-m+1)=\frac{1}{2}c(n-2m)+c$$

Ali mi pravimo uzane pravougaonike, širine c (malo). Zato im moramo povećati visine, da bismo bili sigurni da je celokupna površina svih pravougaonika i dalje ostala 1, što odgovara izvesnosti. Greška sigurno mora imati neku vrednost, koja, naravno, može biti i nula. Uzmimo da je svaka visina pomnožena sa k.

Onda je visina y koja zavisi od iksa, takva da kad je

$$x=x_0=\frac{1}{2}c\ (n-2m)\ \text{postaje}\ y=y_0=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m$$

i kad je

$$x=x_1=\frac{1}{2}c\,(n-2m)+c\quad \text{biva}\quad y=y_1=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_{m-1}=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\frac{m}{n-m+1}$$

tako da je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\left(\frac{m}{n-m+1}-1\right):c$$

I sad, ako uzmemo da je c malo, a n veliko, onda se ovo može uzeti kao vrednost $\frac{dy}{dx}$ na sredini između (x_0, y_0) i (x_1, y_1). U toj tački je:

$$x=\frac{1}{2}(x_0+x_1)=\frac{1}{2}c(n-2m+1)$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\left(\frac{m}{n-m+1}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\frac{n+1}{n-m+1}$$

tako da je

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\frac{2m-n-1}{n-m+1}:c$$

$$=\frac{k}{2^n}{}^{n}C_m\frac{n+1}{n-m+1}\cdot\frac{-\frac{1}{2}c(n-2m+1)\cdot 2}{(n+1)\,c^2}$$

$$=2y\cdot\frac{-2x}{(n+1)\,c^2}.$$

Sad možemo da smanjimo c i da povećamo $(n+1)$ toliko, da $\frac{1}{2}(n+1)\,c^2$ postane konstanta, recimo $\frac{1}{b}$. Na primer, ako je $b=20$, uzmite $c=\frac{1}{100}$, a $n=999$, ili uzmite $c=10^{-6}$, a $(n+1)=10^{11}$ itd. Onda je

$$\frac{dy}{dx}=y\,(-2\,bx)$$

ili

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-2\,bx$$

ili

$$\log_e y=-bx^2+D$$

a odatle

$$y=e^{-bx^2+D}=e^{-bx^2}\cdot e^{D}$$

Kad stavimo

$$e^{D}=A$$

dobijemo

$$y=Ae^{-bx^2}$$

TABLICE

Napomene za upotrebu nekih tablica

Treća tablica. — Upotreba stupca razlika već je objašnjena. Vrednosti između onih što su pokazane u stupcu razlika mogu se dobiti putem srazmernih delova. Na primer, možemo tražiti kvadrat od 28,756. Tablica daje za kvadrat od 28,75 broj 826,5. U tom delu stupca razlika razlici od 1 u broju koji se diže na kvadrat odgovara razlika od 7 u kvadratu. Zato će razlici od 0,6 odgovarati približno razlika od 0,6 · 7,tj. oko 4. Zato je traženi kvadrat 826,9. Tablica III može se koristiti i za nalaženje kvadratnog korena. Na primer, hoćemo da nađemo kvadratni koren iz 123,2. Kad pogledamo, vidimo da kvadratni koren toga broja leži između 11 i 12. U tablicama vidimo da se 1232 javlja dvaput. Prvi put kod odgovora na cifre 111, a drugi put kod odgovora na cifre 351. Prema tome, kvadratni koren iz 123,2 iznosi 11,1. Da smo želeli kvadratni koren iz 12,32 jasno je da bi to bio broj 3,51.

Četvrta tablica. — U mnogim tablicama trigonometriskih funkcija delovi stepena dati su u minutima tako, da su stupnjevi 6', 12', itd. Ipak se polako uvodi običaj da se stupnjevi izražavaju kao desetni razlomci stepena.

Tablica sinusa može se iskoristiti da se nađu kosinusi po obrascu $\cos A = \sin (90^0 - A)$. Da se nađe $\cos 31{,}5^0$ gledajte pod $\sin 58{,}5^0$.

Šesta tablica. — Da bi se štedeo prostor izostavljena je tablica antilogaritama. Tablica VI može se upotrebiti za nalaženje brojeva kad su dati njihovi logaritmi. To se postiže prosto time što se izvrne postupak za nalaženje logaritma nekog broja.

I

ENGLESKE MERE

1760 jardi	= 1 milja	= 1609 metara
4840 kvadratnih jardi	= 1 jutro	= 40,43 ara
640 jutara	= 1 kvadratna milja	
112 funti	= 1 kvintal	
20 kvintala	= 1 tona	
8 pinti	= 1 galon	= 4,543 litara
1 galon	= 277 kubnih palaca	
1 kubna stopa	= 6,23 galona	

Metarske i engleske mere

1 palac	= 2,54 santimetra
1 funta	= 454 grama
1 metar	= 1,09 jardi
1 kilometar	= 0,621 milja
1 kilogram	= 2,20 funti
1 litar	= 0,22 galona

II

Konstante

$\pi = 3{,}1416$ $\qquad \log_{10} \pi = 0{,}4971$

1 radijan = 57,296 stepeni $\qquad \log_{10} e = 0{,}4343$

$e = 2{,}7183$

$\log_e N = 2{,}3026 \log_{10} N \qquad \log_{10} N = 0{,}4343 \log_e N$

Zemljin prosečni poluprečnik = 3960 milja = $6{,}371.10^8$ santimetara.

$g = 32{,}2$ stope u sekundu na sekund, ili 981 santimetar u sekundu na sekund.

1 kubni santimetar vode na 4^0 C težak je 1 gram.

KVADRATI

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000	1020	1040	1061	1082	1103	1124	1145	1166	1188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
11	1210	1232	1254	1277	1300	1323	1346	1369	1392	1416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
12	1440	1464	1488	1513	1538	1563	1588	1613	1638	1664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
13	1690	1716	1742	1769	1796	1823	1850	1877	1904	1932	3	5	8	11	13	16	19	22	24
14	1960	1988	2016	2045	2074	2103	2132	2161	2190	2220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	2250	2280	2310	2341	2372	2403	2434	2465	2496	2528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
16	2560	2592	2624	2657	2690	2723	2756	2789	2822	2856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
17	2890	2924	2958	2993	3028	3063	3098	3133	3168	3204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
18	3240	3276	3312	3349	3386	3423	3460	3497	3534	3572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
19	3610	3648	3686	3725	3764	3803	3842	3881	3920	3960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
20	4000	4040	4080	4121	4162	4203	4244	4285	4326	4368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
21	4410	4452	4494	4537	4580	4623	4666	4709	4752	4796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
22	4840	4884	4928	4973	5018	5063	5108	5153	5198	5244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
23	5290	5336	5382	5429	5476	5523	5570	5617	5664	5712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
24	5760	5808	5856	5905	5954	6003	6052	6101	6150	6200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
25	6250	6300	6350	6401	6452	6503	6554	6605	6656	6708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
26	6760	6812	6864	6917	6970	7023	7076	7129	7182	7236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
27	7290	7344	7398	7453	7508	7563	7618	7673	7728	7784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
28	7840	7896	7952	8009	8066	8123	8180	8237	8294	8352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
29	8410	8468	8526	8585	8644	8703	8762	8821	8880	8940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
30	9000	9060	9120	9181	9242	9303	9364	9425	9486	9548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
31	9610	9672	9734	9797	9860	9923	9986				6	13	19	25	31	38	44	50	57
31								1005	1011	1018	1	1	2	3	3	4	5	5	6
32	1024	1030	1037	1043	1050	1056	1063	1069	1076	1082	1	1	2	3	3	4	5	5	6
33	1089	1096	1102	1109	1116	1122	1129	1136	1142	1149	1	1	2	3	3	4	5	5	6
34	1156	1163	1170	1176	1183	1190	1197	1204	1211	1218	1	1	2	3	3	4	5	6	6
35	1225	1232	1239	1246	1253	1260	1267	1274	1282	1289	1	1	2	3	4	4	5	6	6
36	1296	1303	1310	1318	1325	1332	1340	1347	1354	1362	1	1	2	3	4	4	5	6	7
37	1369	1376	1384	1391	1399	1406	1414	1421	1429	1436	1	2	2	3	4	5	5	6	7
38	1444	1452	1459	1467	1475	1482	1490	1498	1505	1513	1	2	2	3	4	5	5	6	7
39	1521	1529	1537	1544	1552	1560	1568	1576	1584	1592	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	1600	1608	1616	1624	1632	1640	1648	1656	1665	1673	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	1681	1689	1697	1706	1714	1722	1731	1739	1747	1756	1	2	2	3	4	5	6	7	7
42	1764	1772	1781	1789	1798	1806	1815	1823	1832	1840	1	2	3	3	4	5	6	7	8
43	1849	1858	1866	1875	1884	1892	1901	1910	1918	1927	1	2	3	3	4	5	6	7	8
44	1936	1945	1954	1962	1971	1980	1989	1998	2007	2016	1	2	3	4	4	5	6	7	8
45	2025	2034	2043	2052	2061	2070	2079	2088	2098	2107	1	2	3	4	5	5	6	7	8
46	2116	2125	2134	2144	2153	2162	2172	2181	2190	2200	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	2209	2218	2228	2237	2247	2256	2266	2275	2285	2294	1	2	3	4	5	6	7	8	9
48	2304	2314	2323	2333	2343	2352	2362	2372	2381	2391	1	2	3	4	5	6	7	8	9
49	2401	2411	2421	2430	2440	2450	2460	2470	2480	2490	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	2500	2510	2520	2530	2540	2550	2560	2570	2581	2591	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	2601	2611	2621	2632	2642	2652	2663	2673	2683	2694	1	2	3	4	5	6	7	8	9
52	2704	2714	2725	2735	2746	2756	2767	2777	2788	2798	1	2	3	4	5	6	7	8	9
53	2809	2820	2830	2841	2852	2862	2873	2884	2894	2905	1	2	3	4	5	6	7	9	10
54	2916	2927	2938	2948	2959	2970	2981	2992	3003	3014	1	2	3	4	5	7	8	9	10

KVADRATI

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	3025	3036	3047	3058	3069	3080	3091	3102	3114	3125	1	2	3	4	6	7	8	9	10
56	3136	3147	3158	3170	3181	3192	3204	3215	3226	3238	1	2	3	5	6	7	8	9	10
57	3249	3260	3272	3283	3295	3306	3318	3329	3341	3352	1	2	3	5	6	7	8	9	10
58	3364	3376	3387	3399	3411	3422	3434	3446	3457	3469	1	2	4	5	6	7	8	9	11
59	3481	3493	3505	3516	3528	3540	3552	3564	3576	3588	1	2	4	5	6	7	8	10	11
60	3600	3612	3624	3636	3648	3660	3672	3684	3697	3709	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	3721	3733	3745	3758	3770	3782	3795	3807	3819	3832	1	2	4	5	6	7	9	10	11
62	3844	3856	3869	3881	3894	3906	3919	3931	3944	3956	1	3	4	5	6	7	9	10	11
63	3969	3982	3994	4007	4020	4032	4045	4058	4070	4083	1	3	4	5	6	8	9	10	11
64	4096	4109	4122	4134	4147	4160	4173	4186	4199	4212	1	3	4	5	6	8	9	10	12
65	4225	4238	4251	4264	4277	4290	4303	4316	4330	4343	1	3	4	5	7	8	9	10	12
66	4356	4369	4382	4396	4409	4422	4436	4449	4462	4476	1	3	4	5	7	8	9	11	12
67	4489	4502	4516	4529	4543	4556	4570	4583	4597	4610	1	3	4	5	7	8	9	11	12
68	4624	4638	4651	4665	4679	4692	4706	4720	4733	4747	1	3	4	5	7	8	10	11	12
69	4761	4775	4789	4802	4816	4830	4844	4858	4872	4886	1	3	4	6	7	8	10	11	13
70	4900	4914	4928	4942	4956	4970	4984	4998	5013	5027	1	3	4	6	7	8	10	11	13
71	5041	5055	5069	5084	5098	5112	5127	5141	5155	5170	1	3	4	6	7	9	10	11	13
72	5184	5198	5213	5227	5242	5256	5271	5285	5300	5314	1	3	4	6	7	9	10	12	13
73	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	5461	1	3	4	6	7	9	10	12	13
74	5476	5491	5506	5520	5535	5550	5565	5580	5595	5610	1	3	4	6	7	9	10	12	13
75	5625	5640	5655	5670	5685	5700	5715	5730	5746	5761	2	3	5	6	8	9	11	12	14
76	5776	5791	5806	5822	5837	5852	5868	5883	5898	5914	2	3	5	6	8	9	11	12	14
77	5929	5944	5960	5975	5991	6006	6022	6037	6053	6068	2	3	5	6	8	9	11	12	14
78	6084	6100	6115	6131	6147	6162	6178	6194	6209	6225	2	3	5	6	8	9	11	13	14
79	6241	6257	6273	6288	6304	6320	6336	6352	6368	6384	2	3	5	6	8	10	11	13	14
80	6400	6416	6432	6448	6464	6480	6496	6512	6529	6545	2	3	5	6	8	10	11	13	14
81	6561	6577	6593	6610	6626	6642	6659	6675	6691	6708	2	3	5	7	8	10	11	13	15
82	6724	6740	6757	6773	6790	6806	6823	6839	6856	6872	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83	6889	6906	6922	6939	6956	6972	6989	7006	7022	7039	2	3	5	7	8	10	12	13	15
84	7056	7073	7090	7106	7123	7140	7157	7174	7191	7208	2	3	5	7	8	10	12	14	15
85	7225	7242	7259	7276	7293	7310	7327	7344	7362	7379	2	3	5	7	9	10	12	14	15
86	7396	7413	7430	7448	7465	7482	7500	7517	7534	7552	2	3	5	7	9	10	12	14	16
87	7569	7586	7604	7621	7639	7656	7674	7691	7709	7726	2	4	5	7	9	10	12	14	16
88	7744	7762	7779	7797	7815	7832	7850	7868	7885	7903	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7921	7939	7957	7974	7992	8010	8028	8046	8064	8082	2	4	5	7	9	11	13	14	16
90	8100	8118	8136	8154	8172	8190	8208	8226	8245	8263	2	4	5	7	9	11	13	14	16
91	8281	8299	8317	8336	8354	8372	8391	8409	8427	8446	2	4	5	7	9	11	13	15	16
92	8464	8482	8501	8519	8538	8556	8575	8593	8612	8630	2	4	6	7	9	11	13	15	17
93	8649	8668	8686	8705	8724	8742	8761	8780	8798	8817	2	4	6	7	9	11	13	15	17
94	8836	8855	8874	8892	8911	8930	8949	8968	8987	9006	2	4	6	8	9	11	13	15	17
95	9025	9044	9063	9082	9101	9120	9139	9158	9178	9197	2	4	6	8	10	11	13	15	17
96	9216	9235	9254	9274	9293	9312	9332	9351	9370	9390	2	4	6	8	10	12	14	15	17
97	9409	9428	9448	9467	9487	9506	9526	9545	9565	9584	2	4	6	8	10	12	14	16	18
98	9604	9624	9643	9663	9683	9702	9722	9742	9761	9781	2	4	6	8	10	12	14	16	18
99	9801	9821	9841	9860	9880	9900	9920	9940	9960	9980	2	4	6	8	10	12	14	16	18

PRIRODNE VREDNOSTI SINUSA

	·0°	·1°	·2°	·3°	·4°	·5°	·6°	·7°	·8°	·9°
0°	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074
18	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239
19	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679
28	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547
41	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059

	·0°	·1°	·2°	·3°	·4°	·5°	·6°	·7°	·8°	·9°
45°	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420
48	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536
49	·7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649
50	7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869
52	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976
53	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471
58	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821
62	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960
85	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000

V

PRIRODNE VREDNOSTI TANGENSA

	·0°	·1°	·2°	·3°	·4°	·5°	·6°	·7°	·8°	·9°
0°	0·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157
1	0·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332
2	0·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507
3	0·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682
4	0·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857
5	0·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033
6	0·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210
7	0·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388
8	0·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566
9	0·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745
10	0·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926
11	0·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107
12	0·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290
13	0·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475
14	0·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661
15	0·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849
16	0·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038
17	0·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230
18	0·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424
19	0·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620
20	0·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819
21	0·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020
22	0·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224
23	0·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431
24	0·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642
25	0·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856
26	0·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073
27	0·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295
28	0·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520
29	0·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750
30	0·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985
31	0·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224
32	0·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469
33	0·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720
34	0·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976
35	0·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239
36	0·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508
37	0·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785
38	0·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069
39	0·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361
40	0·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662
41	0·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972
42	0·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293
43	0·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623
44	0·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067

	·0°	·1°	·2°	·3°	·4°	·5°	·6°	·7°	·8°	·9°
48°	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	*0057*	*0145*	*0233*	*0323*	*0413*
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	*0061*	*0237*	*0415*	*0595*
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972
77	4·3315	3662	4015	4373	4737	5107	5483	5864	6252	6646
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	*0045*	*0504*	*0970*
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140
80	5·671	5·730	5·789	5·850	5·912	5·976	6·041	6·107	6·174	6·243
81	6·314	6·386	6·460	6·535	6·612	6·691	6·772	6·855	6·940	7·026
82	7·115	7·207	7·300	7·396	7·495	7·596	7·700	7·806	7·916	8·028
83	8·144	8·264	8·386	8·513	8·643	8·777	8·915	9·058	9·205	9·357
84	9·51	9·68	9·84	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·85	24·90	26·03	27·27
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0

VI

LOGARITMI

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	·0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	·0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	·0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	·1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	·1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	·1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	·2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	·2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	·2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	·2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	·3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	·3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	·3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	·3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	·3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	·3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	·4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	·4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	·4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	·4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	·4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	·4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	·5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	·5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	·5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	·5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	·5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	·5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	·5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	·5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	·6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	·6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	·6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	·6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	·6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	·6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	·6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	·6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	·6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	·6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	·6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	·7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	·7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	·7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	·7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	·7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	·7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	·7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	·7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	·7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	·7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	·7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	·7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	·7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	·8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	·8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	·8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	·8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	·8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	·8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	·8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	·8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	·8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	·8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	·8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	·8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	·8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	·8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	·8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	·8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	·9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	·9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	·9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	·9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	·9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	·9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	·9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	·9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	·9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	·9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	·9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	·9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	·9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	·9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	·9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	·9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	·9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	·9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	·9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

REŠENJA NEKIH ZADATAKA

Setite se da neka rešenja izražena posebnim brojevima pretstavljaju samo približne vrednosti tako, da se vaša rešenja ne moraju tačno poklapati s njima, ali, razume se, ne smeju se ni mnogo razlikovati od njih.

GLAVA III.

Broj vežbanja

1. (str. 119) (a) $x^2+3xy+y^2$
(b) $6x+6y+10z$
(c) $3a^2+12a+12$
(d) $2x-3$
(e) $a^2-2ab-b^2$
(f) $x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz(x+y+z)$
(g) $6a^3b^4$
(h) $2x^6$
(i) $-a^2-4x^2$
(j) $\frac{1}{2}xy^3$
(k) $3ab$
(l) $\frac{1}{3}ad$

1. (str. 120) (a) 12, (b) 12, (c) 14, (d) 5, (e) 2, (f) 6, (g) 3, (h) $\frac{1}{2}$, (i) 3, (j) 18, (k) 1, (l) 5, (m) 2, (n) $6a$, (o) $2a+b$, (p) $a-b$.

1. (str. 121) A 2850. **2.** C 1140. **3.** Tri časa od Stojanova polaska. **4.** 20. **5.** Na B. **6.** Din. 675.

GLAVA IV.

Broj vežbanja

7. (str. 204) $3x+7y$, $(a+3)$, $(2a-5b)$, $(x-1)$ itd.

9. $(x-1)(x+1)$, $(x+y-2)(x+y+2)$, $(a+b-c)(a+b+c)$, $(a-b-c)(a+b+c)$, $(a-b+c)(a+b-c)$, $(x+y-1)(x+y+1)$, $(x^4-y^4)(x^4+y^4)=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=$ $=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$, $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$, $(a+b-1)(a+b+1)$, $(9-x)(9+x)$, $3(2x+1)$.

10. 90°, 60°, 50°, 10°, 78°.

12. 60°, 49°, $38\frac{1^\circ}{2}$.

13. $46\frac{1^\circ}{2}$, $43\frac{1^\circ}{2}$, $57\frac{1^\circ}{2}$, $32\frac{1^\circ}{2}$, 68°, 22°.

15. Lestvice $4\,m$, visina na zidu $2\sqrt{3}\approx 3{,}46$. (pribl.)

16. $68{,}2^\circ$ (pribl.)

17. $1{,}56\,m$ (pribl.)

18. $45{,}01^\circ$ (pribl.)

20. 40,33 (pribl.)

GLAVA V.

Broj vežbanja

1. (str. 250) 5,196 4,243 3,464 4,899 3,162 5,477

2. $\frac{1}{4}\sqrt{7}$, $\frac{1}{3}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}$.

5. $a_n=a_1+(n-1)d$ itd.

7. $S_n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$.

10. $7\frac{4}{5}$, $9\frac{3}{5}$, $11\frac{2}{5}$, $13\frac{1}{5}$.

11. $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$.

Broj
vežbanja

12. (str. 251) Razlika između uzastopnih umetnutih članova biće: $d = \dfrac{b-a}{n+1}$.

15. (str. 252) 2^{n-1}, $2^n - 1$, $(0{,}9)^n$, $10[0{,}9 - (0{,}9)^{n+1}]$; $\dfrac{3}{2^{n+1}}$, $\dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$; a^n, $(x^{n+1} - a^{n+1}) : (x - a)$; 3^{n-1}, $\dfrac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

16. 25; 125. **17.** (str. 252) $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{4}{27}$, $\dfrac{8}{81}$.

18. Količnik dobivenog niza biće: $\sqrt[n+1]{\dfrac{b}{a}}$

21. $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{25}{99}$, $\dfrac{791}{999}$.

22. 2, $1\dfrac{1}{4}$.

23. (a) $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$, $n(2n-1)$; (b) $n(3n-2)$.

24. $4! = 24$, $8! = 40320$, $12! = 479001600$, $16!$

25. 56; 495; 4368.

26. 720.

27. 16; 26.

28. 5040; 720; 48; 24.

29. 15; 3.

GLAVA VI.

Broj
vežbanja

11. (str. 313) 2,5 km. **12.** Oko 5111 m. **13.** 19.m.

14. 21,8 km. **15.** 9 milja.

16. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\sin 3A = 3 \sin A \cos^2 A - \sin^3 A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\cos 3A = \cos^3 A - 3 \cos A \sin^2 A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

Broj
vežbanja

23. (str. 315) Kv. – Kiz. 12571 km, Kiz. – Pon. 8233 km, Pon. – Kv. 19247 km.

24. AM = 2996 milja, AZ = 4863 milja, MZ = 1890 milja.

26. 4133 milje. **27.** 42,4 milje **28.** 28°7′ ili 33°53′.

29. (a) $\dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2}$ (b) $\dfrac{3}{4}\left[1 - \left(-3\right)^n\right]$

(c) $\dfrac{1}{6}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$ (d) $1{,}35\left[1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$

(e) $\dfrac{3}{5}\left[1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$.

30. $-aq^{2n-1}$ i aq^{2n}.

GLAVA VII.

Broj
vežbanja

2. (str. 374) (a) $(p+2)(p+3)$ (c) $(x-1)(x-2)$
(d) $(m+1)(m+3)$ (f) $(f-4)(f+5)$
(g) $(t+5)(t-8)$ itd.

3. (str. 375) (a) $(x-6)(x+6)$
(c) $(2x-10)(2x+10) = 2 \cdot 2\,(x-5)(x+5)$
(d) $25(4y^2-1) = 5 \cdot 5\,(2y-1)(2y+1)$
(o) $3 - x^2 = (\sqrt{3})^2 - x^2 = (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)$
(t) $7a^2 - 3b^2 = (a\sqrt{7})^2 - (b\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{7} - b\sqrt{3})(a\sqrt{7} + b\sqrt{3})$

4. (str. 375) (a) $(x+3)(3x+1)$ (e) $(2n+3)(3n+1)$
(f) $(2q-1)(3q-2)$ (h) $(4x^2+1)(5x^2-1) = (4x^2+1)(x\sqrt{5}-1)(x\sqrt{5}+1)$
(l) $7x - 6 - 2x^2 = -(2x^2 - 7x + 6) = -(2x-3)(x-2) = (3-2x)(x-2) = (2x-3)(2-x)$
(n) $7x - 6x^2 + 20 = -(6x^2 - 7x - 20) = -(2x-5)(3x+4) = (5-2x)(3x+4)$

Broj vežbanja

5. (str. 376) (a) $-(x-3a)(3x+2a)=(3a-x)(3x+2a)$

(b) $(5a+3bc)(3a-5bc)$

(g) $(4n+3m)(3n-4m)$

(j) $(3t-16s)(t+s)$.

6. (str. 376) (a) $\dfrac{x+y}{(x+y)(x+y)}=\dfrac{1}{x+y}$

(d) $\dfrac{x-y}{(x-y)(x-y)}=\dfrac{1}{x-y}$

(e) $\dfrac{a(x+y)}{a(x^2-y^2)}=\dfrac{x+y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{1}{x-y}$

(i) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+5)}=\dfrac{x+1}{2x+5}$

(j) $\dfrac{(3x-7)(3x+7)}{(x+7)(3x-7)}=\dfrac{3x+7}{x+7}$

(m) $\dfrac{x^2(2x-3)+2(2x-3)}{x^2(x-2)+2(x-2)}=\dfrac{(2x-3)(x^2+2)}{(x-2)(x^2+2)}=$
$=\dfrac{2x-3}{x-2}$

7. (a) $\dfrac{ac+ab}{bc}=\dfrac{a}{bc}(b+c)$ (b) $\dfrac{ab(a+b)}{a+b}=ab$

(d) $\dfrac{a^2}{a-2b}$ (e) $\dfrac{5a}{4(x+1)}$ (f) $\dfrac{a+17b}{12}$

(g) $\dfrac{a}{4(x+2y)}$ (h) $\dfrac{y^2(y-x)}{x+y}$

8. (a) $\dfrac{2x}{x^2-1}$ (b) $\dfrac{2}{1-x^2}$ (c) $\dfrac{2b}{a^2-b^2}$

(i) $\dfrac{2x}{x+y}$ (k) $\dfrac{12}{(t-1)(t-5)(t+3)}$

(l) $\dfrac{3n-1}{n(n-1)}$ (m) $\dfrac{2x-3}{x-2}$.

Broj vežbanja

10. (str. 378) (a) 19, (b) $a+2b$, (c) $\dfrac{12}{13}$, (d) 2,5, (e) $-\dfrac{4}{3}$,
(f) $\dfrac{10}{7}$.

11. (a) $4\dfrac{1}{3}$ milje, (b) 120 km, (c) 3,59%

12. (a) 10, -21, (b) 11, -8, (c) 1, 25; $-1\dfrac{1}{3}$,
(d) $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{3}{8}$, (e) 8, $-\dfrac{17}{3}$, (f) 1, $-\dfrac{1}{2}$,
(g) a, $b-a$, (h) 2, -4.

13. (a) 5, 6, 7 ili -7, -6, -5, (b) 6400 m^2,
(c) $2\dfrac{6}{11}$, $2\dfrac{17}{44}$ stopa.

14. (a) $x=10$, $y=2$, (b) 3, 4, (c) 6, 2, (d) 9,15,
(e) 11, 12, 13, (f) 3, 6, 1.

15. (a) $20\dfrac{4}{7}$, (b) $-\dfrac{17}{64}$, (c) d. 18, š. 12, (d) 25, (e) 30.

16. (1) $n(2n-1)$, (2) $\dfrac{1}{2}n^2(n+1)$, (3) $n(3n^2-2)$,
(4) $3n^2-3n+1$, (5) $\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$, (6) $2n^2-2n+1$.

18. (1) 1,1249, (2) 0,9039, (3) 1,5735, (4) 128,7876

GLAVA VIII.

Broj vežbanja

3. (str. 434) Šir. $50^0 S$, duž. $\left(5\dfrac{3}{8}\right)^0$ Z (pribl.)

4. 20^h $28^{min.}$, 8^h $1^{min.}$ veče, $\left(48\dfrac{1}{2}\right)^0 Z$.

5. 46^0 Sev.

7. Mlad mesec 5,8 ujutru, 11,8 pre p.

Broj vežbanja

9\. (str. 435) Oko 7900. **10.** Severni Divn. **11.** Oko 24 sept.

16. $57{,}7^{0}$, 7,33 po p.

17. Oko 6^{h} $40^{min.}$ pre p., 17^{h} $20^{min.}$ u Gize, 7^{h} pre p., 17^{h} u Njujorku, 7^{h} $28^{min.}$, 16^{h} $32^{min.}$ u Londonu.

GLAVA IX.

Broj vežbanja

2\. (str. 508) (a) $x^4+y^2=16$, (b) $x^2+y^2-4x-6y=3$.

6\. (a) 45^0, (b) 60^0. **7.** Paralelne na jednakim otstojanjima.

9\. $y=C$. **15.** $l=100t^2$.

17. (1) $x=0$, $y=3$ i $x=4$, $y=0$,
(2) $x=3$, $y=4$ i $x=4$, $y=3$,
(3) $x=2$, $y=1$ i $x=3$, $y=2$, i $x=-3$, $y=-2$, i $x=-2$, $y=-1$.

24. (1) 1 i $-1{,}4$, (2) 0,75 i $-0{,}5$ (3) 1,2 i -1.

GLAVA X.

Broj vežbanja

1\. (str. 570) (1) 4118, (2) 30288, (3) 1992, (4) 99,18.

2\. (1) 6227, (2) 9692, (3) 0,01950, (4) 1,009, (5) 0,4181, (6) 45,82,

3\. 2 3 1,5.

5\. (1) 125930, (2) 0,968, (3) 1,111.

6\. (1) 265 d., (2) Između 7 i 8 god., (3) 84 d.

7\. 0,0010, 0,3466, 8,240.

GLAVA XI.

Broj vežbanja

1. (str. 643) $\log_e\left(1+\frac{1}{80}\right)=4\log_e 3-4\log_e 2-\log_e 5$

$\log_e\left(1-\frac{1}{25}\right)=3\log_e 2+\log_e 3-2\log_e 5$ itd.

6. $3{,}6\ x^{2,6}, \frac{5}{2\sqrt{x}}, -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}, \frac{1}{3}x^{-\frac{8}{9}}$

8. $x=-1$, $y=2$ i $x=1$, $y=-2$.

9. $\frac{8}{\pi}$ kubn. st. **10.** $10x=3y=\frac{c}{2}$.

12. (1) x^4+C, (2) $3\log_e x+C$ (3) $\frac{\frac{1}{4}x^{n+1}}{n+1}+C$

(4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$, (5) x^3+x^2+x+C.

13. (1) $\frac{1}{3}x^3+Ax+B$, (2) $\frac{5}{2}x^2+Ax+B$,

(3) $\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}+Ax+B$.

14. $p=11,\ 41+500\,v^{-1,4}$.

15. (1) $-a^2\sin a^2x$, (2) $12\cos 3x$,
(3) $na\cos nx-nb\sin nx$.

17. $A=2x^2+3x+C$
(1) 108, (2) 216, (3) 25.

18. 380.

19. (1) $223\frac{1}{3}$, (2) $\frac{2}{3}a+2c$, (3) $4\frac{1}{2}$, (4) 56, (5) 2.

20. (1) $20266\frac{2}{3}$, (2) $19994\frac{1}{2}$, (3) 19993,6 tačno.

21. 14, **23.** 1,19, **24.** $100\pi\ cm^3$, **25.** $369\pi\ cm^3$.

27. (1) 0,5, (2) 1, (3) $\Big[\sin x-x\cos x\Big]_0^{\pi}=\pi$.

Broj
vežbanja

28. (str. 647) (1) $x \cos x + \sin x$,
(2) $\cos x \sec^2 x - \sin x \operatorname{tang} x = \cos x$,
(3) $6x^2 + 6x + 4$.

29. (1) $\frac{-1}{(x+1)^2}$, (2) $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
(3) $\frac{-\sin x}{\cos^2 x}$, (4) $\sec^2 x$.

30. (1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, (2) $na(ax+b)^{n-1}$,
(3) $a \cos(ax+b)$, (4) $\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

32. (1) $y = A \cos 2x + B \sin 2x$,
(2) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$.

Drugi deo istog zadatka:

(1) $y = 5 \cos 2x + \sin 2x$,
(2) $y = \frac{1}{2}\left(7e^{2x} + 3e^{-2x}\right)$.

S A D R Ž A J