НИКОЛА ЛАТКОВИЋ
ПРОФЕСОР

АРИТМЕТИКА

ЗА II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Овај уџбеник је препоручио Главни просветни савет С.бр. 1511/34 од 21 марта 1935 год. и одобрио Г. Министар просвете одлуком С.н.бр. 12296 од 12 априла 1935 год.

ДРУГО ИЗДАЊЕ

ИЗДАЊЕ КЊИЖАРНИЦЕ РАДОМИРА Д. ЋУКОВИЋА
БЕОГРАД — ТЕРАЗИЈЕ

Штампарија „Давидовић", Павловића и Друга.
Београд, 1937. — Таковска 32.

НАСТАВНИ ПРОГРАМ

II РАЗРЕД

АРИТМЕТИКА

Писање и читање великих бројева закључно са билионима (милијардама) (1 билион = 1 милијарда = 1 000 000 000).

Појам обичних разломака и мешовитих бројева. Сабирање и одузимање разломака једнаких именилаца. Дељивост бројева. Најмањи заједнички садржалац. Сабирање и одузимање разломака различитих именилаца. Зависност вредности обичног разломка од вредности бројиоца и имениоца. Промене набројиоцу и имениоцу које не мењају вредност разломка. Множење и дељење обичних разломака. Претварање коначних десетних разломака у обичне и обичних разломака у десетне. Приближне вредности, али без рачунских радња са скраћеним бројевима. Просто правило тројно. (Свођење на јединицу). Процентни рачуни (израчунавање само процентног износа).

ПРВИ ДЕО

ПРОШИРЕЊЕ ДЕКАДНОГ БРОЈНОГ СИСТЕМА

1. Читање и писање бројева већих од милиона

У првом разреду смо научили писати и читати бројеве до милиона. Ми можемо и даље проширити декадни бројни систем. Настављамо извођење као оно у првом разреду.

Додајмо броју 900 000 000 број 100 000 000 добићемо нову јединицу 1 000 000 000 коју ћемо назвати билион или милијарда (хиљаду милиона).

Начинимо сада десети ред бројева природног декадног система (Узимамо за јединицу 1 билион = 1 000 000 000):
1 000 000 000; 2 000 000 000; 3 000 000 000; 4 000 000 000; 5 000 000 000; 6 000 000 000; 7 000 000 000; 8 000 000 000; 9 000 000 000.

Билион је према томе јединица десетог реда или степена.

Продужујући даље тако добићемо, додајући броју 9 000 000 000 број 1 000 000 000 нову јединицу 10 000 000 000, коју ћемо назвати десетице билиона, и то је јединица 11-реда. Према томе 11-ти ред био би:
10 000 000 000; 20 000 000 000; 30 000 000 000; 40 000 000 000; 50 000 000 000; 60 000 000 000; 70 000 000 000; 80 000 000 000; 90 000 000 000. Додајмо броју 90 000 000 000 број 10 000 000 000 долазимо до нове јединице 12-ог реда: 100 000 000 000 коју називамо стотине билиона. Према томе је дванаести ред бројева:

100 000 000 000; 200 000 000 000; 300 000 000 000;
400 000 000 000; 500 000 000 000; 600 000 000 000;
700 000 000 000; 800 000 000 000; 900 000 000 000.

Посматрајући добро ове бројеве, видимо да је и код ових, као и код оних што смо прошле године научили, сваки број у једном реду, постао од претходног додајући му 1 јединицу дотичног реда. Ми бисмо могли наградити таквих редова колико хоћемо, али у практичном рачунању не употребљавају се већи бројеви од стотине билиона.

За читање и писање бројева већих од милиона важе иста правила као и за бројеве мање од милиона које смо раније научили.

Пример 1. — Прочитај 608 232 428 325; то читамо 608 билиона 232 милиона 428 хиљада и 325 (место 608 билиона можемо казати 608 милијарди).

Пример 2. — Напиши 432 билиона 28 милиона 302 хиљаде и 5. Пишемо: 432 028 302 005. (Понови све о бројевима декадног система ар. за I раз.).

2. Преглед бројева до стотине билиона

	класа билиона (милијарди)			класа милиона			класа хиљада			класа јединица		
	XII ред	XI ред	X ред	IX ред	VIII ред	VII ред	VI ред	V ред	IV ред	III ред	II ред	I ред
итд.	стотине билиона	десетице билиона	јединице билиона	стотине милиона	десетице милиона	јединице милиона	стотине хиљада	десетице хиљада	јединице хиљада	стотине	десетице	јединице

Према овом прегледу, ми смо бројеве поделили у класе. Свака класа садржи три реда. Класу јединица чине: јединице, десетице и стотине. Класу хиљада: јединице хиљада, десетице хиљада и стотине хиљада. Класу милиона: јединице милиона, десетице милиона и стотине милиона. Класу билиона (милијарди): јединице билиона, десетице билиона и стотине билиона.

Поједине класе при писању бројева не треба одвајати никаквим нарочитим знаком (запетом, тачком или цртицом), већ их писати мало одвојено једну од друге.

Задаци:

1. Како постаје десети а како једанаести, а како дванаести ред бројева?
2. Која је јединица десетог, једанаестог, а која дванаестог реда бројева?

3. Како смо поделили све бројеве?
4. На шта треба пазити при писању бројева?
5. Прочитај ове бројеве:
   а) 4 035 702 835 б) 1 207 000 702
   в) 3 200 035 400 г) 8 000 027 005
6. Напиши: а) 5 билиона 28 милиона 325 хиљада и 26; б) 7 билиона 203 хиљаде 237; в) 6 милијарди 328 милиона и 26; г) 2 билиона 235 милиона 326 хиљада и 8.
7. Прочитај: а) 26 238 275 582 б) 34 000 250 035
   в) 70 028 000 275 г) 98 328 075 700
8. Напиши: а) 42 билиона 302 милиона 235 хиљада и 111; б) 73 милијарде 870 хиљада и 4; в) 89 билиона 200 милиона и 45; г) 90 билиона и 7.
9. Прочитај: а) 127 287 623 728 б) 328 005 003 008
   в) 400 200 300 700 г) 978 037 000 028
10. Напиши 108 билиона 230 милиона 230 хиљада 321; б) 532 милијарде 45 хиљада и 28; в)758 билиона 273 милиона и 27; г) 880 милијарди 25 милиона 4 хиљаде и 39.

ДРУГИ ДЕО

РАЗЛОМЦИ

1. Појам обичних разломака и мешовитих бројева

Пример 1. Поделимо $14 : 3 = 4,66$

20

20

2

Добили смо 4 као резултат и 2 као остатак. Имамо посла са непотпуним дељењем. Ми бисмо могли и даље делити, ако хоћемо да добијемо десетни број као количник. Ми то радимо, дописујући нулу остатку (2) а у количнику пишемо десетну запету, пре него што напишемо први децимал. Тако дељење можемо наставити колико хоћемо, и на колико хоћемо децимала.

Пример 2. $14 : 3 = 4\frac{2}{3}$

Количник непотпуног дељења можемо и друкче написати. Знамо да 14 : 3 даје 4 цела и 2 за остатак. Овај остатак (2) је мањи од делиоца, а требало би делити даље 2 : 3, а то пишемо и овако $\frac{2}{3}$ (ако не желимо продужити дељење), па нашем целом делу количника (4) допишемо још вредност израза $\frac{2}{3}$. Ако количник 14 : 3 напишемо $\frac{14}{3}$ и назначимо колико даје као резултат па изједначимо, добијемо: $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$. Ако знак „+" изоставимо у резултату имамо, $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.

Изразе $\frac{14}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $4\frac{2}{3}$ зовемо разломцима.

Кад год имамо посла са непотпуним дељењем, у количнику се увек јавља разломак.

2. Постанак обичног разломка

Пример: Неко поклони четворици дечака 3 јабуке, да их поделе на једнаке делове. Колико ће добити сваки од њих? Сваки од њих не може добити по једну целу јабуку, јер има више дечака (4) него што је јабука (3). Они приступе дељењу јабука на тај начин што сваку јабуку поделе на четири једнака дела. Па од сваке јабуке по један део (управо четврти део) јабуке добија сваки дечак. Како је било свега три јабуке, то ће сваки дечко добити по три четврта дела од јабуке.

Ми то пишемо овако: „$\frac{3}{4}$" : наиме број 3 који показује колико једнаких делова добија сваки дечак, пишемо изнад једне водоравне цртице; а број 4 који показује на колико смо једнаких делова поделили једну (односно сваку) јабуку, пишемо испод цртице.

3. Дефиниција разломка

Разломком називамо уопште један или више делова јединице која је подељена на неколико једнаких делова.

У примеру чл. 2 поделили смо јединицу (тј. јабуку) на 4 једнака дела, и од та четири једнака дела узели смо 3 па смо то написали „$\frac{3}{4}$".

4. Читање разломка

Разломак $\frac{3}{4}$ читамо 3 кроз 4 или са 4 или најобичније 3 четвртине.

Уопште разломак се чита тако да се најпре прочита број изнад водоравне цртице, па се дода „кроз" или „са" и каже се број који је испод цртице, а чита се најчешће тако да се спомене број који је изнад цртице, па број који је испод цртице и овом се дода наставак „ина-е" на пр. $\frac{5}{7}$ (пет седмина), $\frac{7}{9}$ (седам деветина), $\frac{4}{33}$ (четири тридесет—трећине итд.). Разломак „$\frac{1}{2}$" чита се „једна половина".

5. Називи код разломка

Број који показује колико се делова узело од једне јединице зове се *бројилац*, а број који показује на колико смо једнаких делова поделили јединицу зове се *именилац*. Водоравна црта, која се пише између бројиоца и имениоца, зове се разломачка црта.

У разломку $\frac{5}{7}$ је 5 бројилац, а 7 именилац, а између њих је разломачка црта. Разломачка црта је знак дељења.

6. Подела разломака

У члану 1 имали смо разломке: $\frac{14}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $4\frac{2}{3}$. Ако добро загледамо, овде имамо три врсте разломака:

а) „$\frac{2}{3}$" је разломак у коме је бројилац мањи од имениоца. Такав разломак зовемо *„прави"*. На пример: прави су разломци $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{27}{85}$, $\frac{124}{271}$ итд.

б) „$\frac{14}{3}$" је разломак у коме је бројилац већи од имениоца. Такав разломак зовемо *„неправи"*. На пример: неправи разломци су: $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{38}{15}$ итд.

в) $4\frac{2}{3}$ је разломак, који је састављен од целина и једног правог разломка. Такав разломак зовемо „мешовити број". Мешовити бројеви су: $2\frac{1}{3}$, $15\frac{1}{2}$, $128\frac{7}{8}$, $1\,208\frac{15}{16}$, итд.

Имамо још једну четврту врсту разломака:

г) Разломци облика $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{2}$, $\frac{15}{3}\ldots$ у којих је бројилац једнак имениоцу, или у којих је бројилац 2, 3, 4, 5.... пута већи од имениоца, зову се „*привидни разломци*“.

7. Претварање неправих разломака у мешовити број

Пример: Претворити разломак $\frac{27}{8}$ у мешовити број.

Напишемо разломак у виду дељења 27 : 8 и поделимо га:

$$\begin{array}{l} 27:8 = 3 + \frac{3}{8} \text{ или } \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}. \\ \;\;\;3 \end{array}$$

Сваки неправи разломак да̑ се претворити у мешовити број, ако се подели бројилац имениоцем.

Увек неправи разломак садржи и целих.

8. Претварање мешовитог броја у неправи разломак

Пример: Напиши у виду неправа разломка $3\frac{3}{8}$. Овде имамо обрнут поступак од горњега (чл 7).

Ми смо писали $\frac{27}{8} = 27:8 = 3 + \frac{3}{8}$. Ако количник $3 + \frac{3}{8}$ помножимо делиоцем, добићемо дељеник;

значи: $\left(3 + \frac{3}{8}\right) \cdot 8 = 27$, а то је исто што и

$\frac{8 \cdot 3 + 3}{8} = \frac{24 + 3}{8} = \frac{27}{8}$. Отуд правило: *Мешовити се број претвара у неправи разломак, ако се именилац помножи целим бројем, том производу дода бројилац, и то буде бројилац неправа разломка, а именилац мешовита броја се потпише као именилац неправа разломка.* На пр. $4\frac{3}{5} = \frac{23}{5}$.

9. Претварање привидног разломка у цео број

Пример: Колико је $\frac{32}{4}$? Поделимо бројилац имениоцем 32 : 4 = 8, према томе $\frac{32}{4} = 8$. Сваки привидан разломак претставља известан цео број.

Задаци: 1. Шта се зове уопште разломак?
2. Шта је бројилац код разломка?
3. Шта је именилац код разломка?
4. Како се пише разломак?
5. Како се чита разломак?

6. Како постаје обичан разломак?
7. Колико врста разломака имамо?
8. Шта је прави разломак?
9. Шта је неправи разломак?
10. Шта је мешовити број?
11. Шта је привидан разломак?
12. Како се неправи разломак претвара у мешовит број?
13. Како се мешовит број претвара у неправи разломак?
14. Зашто се привидан разломак зове „привидан“?
15. Кажи какав је разломак: $\frac{4}{5}$; $2\frac{3}{7}$; $\frac{18}{7}$; $\frac{32}{16}$; $\frac{17}{19}$; $18\frac{1}{7}$; $\frac{104}{4}$; $\frac{35}{68}$; $208\frac{3}{14}$; $\frac{208}{104}$; $\frac{28}{37}$; $\frac{72}{28}$; $1\frac{2}{3}$.
16. Прочитај разломке и кажи које је бројилац а које је именилац: $\frac{7}{8}$; $\frac{14}{25}$; $\frac{17}{2}$; $\frac{128}{34}$; $\frac{72}{68}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{35}{3}$; $\frac{29}{9}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{27}{5}$.
17. Напиши: девет седмина; осам целих и четири петине; двадесет осам деветина; један цео седамнаест осамнаестина; двеста осам целих и две трећине; петнаест тридесет-трећина.
18. Претвори у мешовит број: $\frac{18}{5}$; $\frac{37}{4}$; $\frac{208}{35}$; $\frac{1\,032}{65}$; $\frac{2\,008}{15}$; $\frac{1\,236}{137}$; $\frac{8\,765}{237}$; $\frac{7\,777}{555}$; $\frac{8\,076}{375}$; $\frac{7\,000}{432}$; $\frac{9\,807}{5\,032}$; $\frac{17\,632}{845}$.
19. Претвори у неправи разломак: $2\frac{5}{8}$; $12\frac{3}{4}$; $203\frac{1}{5}$; $38\frac{7}{9}$; $3\,028\frac{1}{2}$; $472\frac{6}{7}$; $5\,803\frac{2}{3}$; $378\frac{5}{6}$; $2\,038\frac{1}{13}$; $72\frac{32}{85}$; $16\frac{17}{74}$.
20. Претвори у целе: $\frac{2}{2}$; $\frac{6}{3}$; $\frac{54}{9}$; $\frac{81}{27}$; $\frac{64}{8}$; $\frac{243}{81}$; $\frac{72}{18}$; $\frac{70}{70}$; $\frac{108}{18}$; $\frac{1\,215}{405}$; $\frac{792}{198}$; $\frac{881}{297}$; $\frac{300}{60}$; $\frac{825}{165}$.

10. Упоређење разломака једнаких именилаца

Пример: Који од ових разломака $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$ има већу вредност? Кажемо да је од разломака $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{7}$ већи $\frac{5}{7}$, јер је једна јединица подељена на седам једнаких делова и то седмина, али од тих седмина има у првом разломку (5) пет, а у другом (3) три; ради тога је $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

Отуд правило: *Од два разломка једнаких именилаца већи је онај коме је већи бројилац.*

11. Упоређење разломака једнаких бројилаца

Пример: Који од ових разломака $\frac{5}{8}$ и $\frac{5}{11}$ има већу вредност?

Кажемо да од разломака $\frac{5}{8}$ и $\frac{5}{11}$ има већу вредност $\frac{5}{8}$, јер оба разломка претстављају подједнаки број једнаких делова, али су делови првог осмине, док су другог једанаестине. Како је осмина увек већа од једанаестине неке јединице, то је и $\frac{5}{8} > \frac{5}{11}$; дакле: *Од два разломка једнаких бројилаца, већи је онај коме је именилац мањи.*

12. Реципрочна вредност разломка

Пример 1. — Која је реципрочна вредност разломка $\frac{2}{3}$?

Кажемо да је реципрочна вредност неког разломка, вредност коју добијемо ако бројилац и именилац размене своја места; према томе реципрочна вредност разломка $\frac{3}{4}$ је $\frac{4}{3}$.

Пример 2. — Која је реципрочна вредност броја 7?

Можемо цео број написати у виду обичног разломка, ако број напишемо у бројиоцу, а у имениоцу јединицу, према томе је $7 = \frac{7}{1}$, а реципрочна вредност $\frac{1}{7}$; *дакле, реципрочна вредност сваког целог броја је разломак, у коме је бројилац јединица, а именилац сам број.*

13. Сабирање разломака једнаких именилаца

Пример: Колико је $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$? Према самом појму разломака: $\frac{4}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$; а $\frac{2}{7}$ значи $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$, ако сад саберемо $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

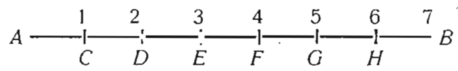
Отуд правило: Разломци једнаких именилаца сабирају се кад се збир њихових бројилаца подели заједничким имениоцем.

На пр. $\frac{7}{12} + \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$.

14. Графичко претстављање збира разломака једнаких именилаца

Пример: $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$;

Нека нам дуж AB (сл. 1) претставља једну јединицу. Поделимо дуж AB на 7 једнаких делова.



Сл. 1

Из слике се види да дуж AF претставља $\frac{4}{7}$. Ако дуж FH која претставља $\frac{2}{7}$ додамо на дуж AF, добићемо дуж AH, која претставља $\frac{6}{7}$, као коначни збир сабирака $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

15. Одузимање разломака једнаких именилаца

Пример: Колико је $\frac{7}{10} - \frac{3}{10}$.

Према појму о разломку $\frac{7}{10}$ значи $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$; али од тих $\frac{7}{10}$ треба одузети $\frac{3}{10}$, а то је исто као да од горњих седам сабирака прекрижамо три последња, као: $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \cancel{\frac{1}{10}} + \cancel{\frac{1}{10}} + \cancel{\frac{1}{10}}$;

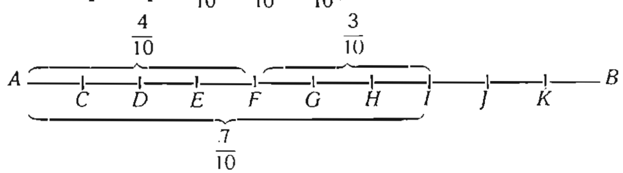
$$\text{дакле } \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Отуд правило: Разломци једнаких именилаца одузимају се, кад се разлика њихових бројилаца подели заједничким имениоцем.

На пр. $\frac{14}{15} - \frac{8}{15} = \frac{6}{15}$.

17. Графичко претстављање разлике разломака једнаких именилаца

Пример: $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$.



Сл. 2

Нека нам дуж AB (сл. 2) претставља једну јединицу. Поделимо дуж AB на 10 једнаких делова.

Умањеник нашег примера $\frac{7}{10}$ је претстављен дужином $AI = \frac{7}{10}$; од те дужине треба узети IF, која претставља умањилац $\frac{3}{10}$, а то радимо ако од тачке I пођемо натраг (на лево) за $IF = \frac{3}{10}$. Долазимо до тачке F, па нам дужина $AF = \frac{4}{10}$ претставља разлику $\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$.

Задаци:

1. Од два разломка једнаких именилаца који је већи?
2. Од два разломка једнаких бројилаца који је већи?
3. Шта је реципрочна вредност разломка?
4. Шта је реципрочна вредност целог броја?
5. Како се сабирају разломци једнаких именилаца?
6. Како се одузимају разломци једнаких именилаца?

7 Који разломак има већу вредност: а) $\frac{8}{9}$ или $\frac{5}{9}$; б) $\frac{17}{24}$ или $\frac{29}{24}$; в) $\frac{173}{81}$ или $\frac{137}{81}$; г) $\frac{1\,236}{728}$ или $\frac{1\,326}{728}$?

8. Који разломак има већу вредност: а) $\frac{7}{15}$ или $\frac{7}{12}$; б) $\frac{23}{28}$ или $\frac{23}{27}$; в) $\frac{308}{528}$ или $\frac{308}{625}$; г) $\frac{10\,236}{535}$ или $\frac{10\,236}{653}$?

9. Напиши реципрочне вредности: а) целих бројева: 8; 9; 18; 37; 156; 276; б) разломака: $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{17}{24}$; $\frac{35}{72}$; $\frac{238}{576}$; $\frac{737}{1\,000}$; $\frac{9\,876}{15\,375}$.

10. Сабери: а) $\frac{7}{12} + \frac{5}{12} + \frac{11}{12} = \frac{23}{12} = 1\frac{11}{12}$. (Увек треба у резултату неправ разломак претворити у мешовити број).

б) $\frac{8}{42} + \frac{12}{42} + \frac{1}{42} + \frac{29}{42} = ?$ в) $\frac{3}{72} + \frac{15}{72} + \frac{12}{72} + \frac{19}{72} + \frac{35}{72} = ?$

г) $\frac{78}{144} + \frac{82}{144} + \frac{37}{144} + \frac{3}{144} + \frac{102}{144} + \frac{87}{144} = ?$

11. Сабери:

а) $5\frac{8}{15} + 3\frac{12}{15} + 15\frac{7}{15} = \frac{83}{15} + \frac{57}{15} + \frac{232}{15} = \frac{372}{15} = 372 : 15 = 24\frac{12}{15}$.
72
12

При сабирању могу се мешовити бројеви, ако их има, претворити у неправе разломке па извршити радњу сабирања.

б) $4\frac{5}{24} + 5\frac{7}{24} + 2\frac{13}{24} = ?$ в) $1\frac{6}{75} + \frac{8}{75} + \frac{150}{75} + 3\frac{73}{75} = ?$

г) $4\frac{8}{120} + 15\frac{78}{120} + 123\frac{53}{120} + \frac{47}{120} + \frac{23}{120} + 23\frac{73}{120} = ?$

д) $7\frac{3}{100} + \frac{72}{100} + 15\frac{78}{100} + \frac{47}{100} + 203\frac{1}{100} + \frac{99}{100} + 98\frac{77}{100} = ?$

12. Одузми: а) $\frac{18}{25} - \frac{12}{25} = ?$ б) $\frac{27}{32} - \frac{15}{32} = ?$ в) $\frac{108}{120} - \frac{78}{120} = ?$

г) $\frac{283}{75} - \frac{225}{75} = ?$ д) $\frac{658}{1\,000} - \frac{325}{1\,000} = ?$

13. Одузми: а) $17\frac{5}{8} - 5\frac{3}{8} = \frac{141}{8} - \frac{43}{8} = \frac{141-43}{8} = \frac{98}{8} = 12\frac{2}{8}$ (Кажи сам поступак);

б) $23\frac{17}{28} - 20\frac{23}{28} = ?$ в) $102\frac{1}{9} - 40\frac{5}{9} = ?$

г) $5\frac{7}{32} - 2\frac{5}{32} = ?$ д) $238\frac{33}{50} - 178\frac{47}{50} = ?$

14. Одузми: а) $2\frac{3}{7} - \frac{5}{7} = ?$ б) $14\frac{9}{12} - \frac{8}{12} = ?$

в) $23\frac{7}{12} - 18\frac{5}{12} = ?$ г) $25\frac{17}{35} - \frac{29}{35} = ?$

15. Изради:

а) $\left(18\frac{3}{12} + 14\frac{5}{12}\right) - 7\frac{4}{12} = ?$ б) $\left(72\frac{52}{72} - 60\frac{32}{72}\right) + 14\frac{15}{72} = ?$

16. Изради:

а) $\left(13\frac{13}{23} + 14\frac{15}{23}\right) + \left(18\frac{7}{23} - 8\frac{14}{23}\right) = ?$ б) $\left(124\frac{7}{8} - 23\frac{5}{8}\right) - 28\frac{3}{8} = ?$

17. Изради: а) $\left(238\frac{5}{9} - 72\frac{4}{9}\right) - \left(14\frac{1}{9} + 3\frac{5}{9}\right) = ?$

б) $\left(75\frac{5}{32} - \frac{29}{32}\right) - \left(23\frac{17}{32} - 18\frac{19}{32}\right) = ?$

18. Изради: а) $\left(3\frac{7}{75} + 5\frac{12}{75}\right) - \left(1\frac{63}{75} + \frac{42}{75}\right) = ?$

б) $\left(14\frac{6}{35} + 17\frac{15}{35}\right) - \left(23\frac{23}{35} - 18\frac{17}{35}\right) = ?$

17. **Дељивост бројева**

Пример 1. $24 : 6 = 4$ **2.** $81 : 27 = 3$.

Код потпуног дељења остатак је нула. Ми кажемо у том случају да је дељеник садржалац делиоца. У примеру 1, 24 је садржалац броја 6, а у примеру 2. 81 је садржалац броја 27. Уопште: *Садржалац неког броја је производ тога броја са ма којим целим бројем.* На пр.: Нађи садржаоце броја 5. Има их врло много; колико год хоћеш: 15, 40, 60, 75, 400, 700, 1 200, итд., јер сваки од ових бројева је производ броја 5 са неким целим бројем, као: $15 = 5 \cdot 3$; $40 = 5 \cdot 8$; $60 = 5 \cdot 12$; $75 = 5 \cdot 15$; итд. Према самом постанку бројева 15, 40, 60, 75 итд., јасно је да садржалац мора бити дељив бројем од кога је постао, без остатка, као $15 : 5 = 3$; $40 : 5 = 8$; $60 : 5 = 12$; $75 : 5 = 15$ итд. Садржалац неког броја, помножен ма којим целим бројем, опет је садржалац тога броја.

На пр. ако је $15 : 5$, то је и $2 \cdot 15 : 5 = 30 : 5 = 6$; $8 \cdot 15 : 5 = 120 : 5 = 24$ итд.

18. Заједнички садржалац бројева

Пример: а) $\mathbf{75 : 25 = 3}$; б) $\mathbf{75 : 15 = 5}$;
в) $\mathbf{75 : 5 = 15}$; г) $\mathbf{75 : 3 = 25}$.

Овај пример нам показује да један број може бити дељив без остатка са неколико целих бројева. За такав број кажемо да је заједнички садржалац свих оних бројева који се у њему садрже без остатка.

19. Апсолутно прости бројеви

Пример: Којим су целим бројевима дељиви без остатка ови бројеви: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 37?

$2 : 2 = 1$; $3 : 3 = 1$; $5 : 5 = 1$; $7 : 7 = 1$; $11 : 11 = 1$;
$13 : 13 = 1$; $23 : 23 = 1$; $37 : 37 = 1$.

$2 : 1 = 2$; $3 : 1 = 3$; $5 : 1 = 5$; $7 : 1 = 7$; $11 : 1 = 11$;
$13 : 1 = 13$; $23 : 1 = 23$; $37 : 1 = 37$.

Ови су бројеви дељиви без остатка једино са самим собом и са јединицом.

Такви бројеви који нису дељиви без остатка, ни са једним другим бројем сем са самим собом и са јединицом, зову се *апсолутно прости бројеви.*

20. Знаци дељивости

Постоје извесни знаци по којима можемо лако закључити да ли је неки број дељив без остатка са неким другим бројем.

1) Знаци дељивости бројева декадном јединицом

Пример 1.

а) $\mathbf{82 : 82 = 1}$; $\mathbf{135 : 135 = 1}$; $\mathbf{2\,786 : 2\,786 = 1}$;
б) $\mathbf{820 : 10 = 82}$; $\mathbf{73\,200 : 100 = 732}$; $\mathbf{5\,876\,000 : 1\,000 = 5\,876}$.

Правило 1. *Сваки је број дељив са самим собом и са јединицом.*

2. *Сваки број који се свршава са 0, 00, 000, итд. дељив је са 10, 100, 1 000 итд.*

2) Знаци дељивости бројева са 2

Пример: Да ли је 278 дељиво са 2?

Можемо 278 написати овако $(270 + 8)$, па ако оба сабирка буду дељиви са 2, то ће и цео број бити дељив са два (2). Први сабирак је $270 = 10 \cdot 27$. То је довољно да један од чиниоца буде дељив са 2, па да цео производ буде дељив са 2.

Знамо да је 10 дељиво са 2, па мора и 270 бити дељиво са 2; дакле први сабирак је дељив са 2. Други сабирак је 8, и он је дељив са 2; те према томе је број 278 дељив са 2. Заиста $278 : 2 = 139$.

Правило. Сваки је број дељив са 2 коме је цифра јединица 0 или дељива са 2 (парна цифра).

3) Знаци дељивости бројева са 5

Пример: Пробати да ли је 2 335 дељиво бројем 5. Радећи као код 2): $2\,330 + 5 = 10 \cdot 233 + 5$, и први $(10 \cdot 233)$ и други (5) сабирак је дељив бројем 5, па је и број 2 335 дељив са 5. Заиста $2\,335 : 5 = 467$.

Правило. Сваки је број дељив са 5 коме је цифра на месту јединица 0 или 5.

4) Знаци дељивости бројева са 4

Пример: Да ли је број 5 736 дељив са 4? Можемо број 5 736 раставити на два сабирка $5\,700 + 36$, па ће број 5 736 бити дељив са 4 ако оба сабирка 5 700 и 36 буду дељиви са 4. Први сабирак је производ: $100 \cdot 57$ па је дељив са 4, јер је 100 дељиво са 4 $(100 : 4 = 25)$, а знамо да је и други сабирак 36 дељив са 4 $(36 : 4 = 9)$; те према томе је и број 5 736 дељив са 4 (увери се сам).

Правило. Сваки је број дељив са 4 коме су две крајње цифре (цифра десетица и цифра јединица), узете као један број, дељиве са 4, или су две нуле.

5) Знаци дељивости бројева са 25

Пример: Да ли је број 1375 дељив бројем 25 Радећи као код 4) $1\,375 = 1\,300 + 75 = 100 \cdot 13 + 75$. Први сабирак 1 300 је дељив са 25, јер је 100 дељиво са 25 $(100 : 25 = 4)$, и други је сабирак дељив са 25 ($75 : 25 = 3$), то је и број 1 375 дељив са 25. Заиста је $1\,375 : 25 = 55$.

Правило. Сваки је број дељив са 25 коме су две крајње цифре (цифра десетица и цифра јединица), узете као један број, дељиве са 25, или су две нуле.

6) Знаци дељивости бројева са 3

Пример: Кушати да ли је број 73 224 дељив бројем 3. $73\,224 = 70\,000 + 3\,000 + 200 + 20 + 4$. Поједине сабирке напишимо оваким редом:

$$\begin{aligned} 70\,000 &= 7 \cdot 10\,000 = 7 \cdot (9\,999 + 1) \\ 3\,000 &= 3 \cdot 1\,000 \;\; = 3 \cdot (999 + 1) \\ 200 &= 2 \cdot 100 \;\;\;\; = 2 \cdot (99 + 1) \\ 4 &= \cdots\cdots\cdots = 4 \end{aligned}$$

Применимо правило о множењу збира неким бројем.

$$\begin{aligned} 70\,000 &= 7 \cdot 9\,999 + 7 \\ 3\,000 &= 3 \cdot 999 + 3 \\ 200 &= 2 \cdot 99 + 2 \\ 20 &= 2 \cdot 9 + 2 \\ 4 &= \cdots\cdots + 4 \end{aligned}$$

$$73\,224 = (7 \cdot 9\,999 + 3 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (7+3+2+2+4).$$

Види се да су сви сабирци у првој загради дељиви бројем 3 јер су 9 999, 999, 99 и 9 дељиви са 3, па дељивост броја 73 224 бројем 3 једино зависи од сабирака у другој загради. Збир тих сабирака у другој загради је 18, а како је 18 дељиво са 3, то је заиста и број 73 224 дељив са 3. Ако у другој загради избришемо знаке „+“, добили бисмо задани број 73 224, то значи да дељивост броја зависи само од дељивости збира цифара тога броја бројем 3. Заиста: $73\,224 : 3 = 24\,408$.

Отуд правило: *Сваки је број дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3.*

7) Знаци дељивости броја са 9

Пример: Да ли је број 29 574 дељив бројем 9? Радећи као и код 6) $29\,574 = 20\,000 + 9\,000 + 500 + 70 + 4$.

$$\begin{aligned} 20\,000 &= 2 \cdot 10\,000 = 2 \cdot (9\,999 + 1) = 2 \cdot 9\,999 + 2 \\ 9\,000 &= 9 \cdot 1\,000 = 9 \cdot (\;999 + 1) = 9 \cdot \;999 + 9 \\ 500 &= 5 \cdot \;100 = 5 \cdot (\;\;99 + 1) = 5 \cdot \;\;99 + 5 \\ 70 &= 7 \cdot \;\;10 = 7 \cdot (\;\;\;9 + 1) = 7 \cdot \;\;\;9 + 7 \\ 4 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + 4 \quad (+) \end{aligned}$$

$$29\,574 = (2 \cdot 9\,999 + 9 \cdot 999 + 5 \cdot 99 + 7 \cdot 9) + (2 + 9 + 5 + 7 + 4).$$

Сви сабирци у првој загради су дељиви са 9, па дељивост броја 29 574 зависи од збира сабирака у другој загради; а тај је збир: $2 + 9 + 5 + 7 + 4 = 27$. Он је дељив са 9, значи да је и број 29 574 дељив са 9 (Увери се сâм). Ако избришемо знаке „+“ у другој загради, добићемо сâм број. Отуд правило:

Сваки је број дељив са 9 коме је збир цифара дељив са 9.

8) Знаци дељивости бројева са 8

Пример: Да ли је број 42 624 дељив бројем 8? Број 42 624 можемо раставити на два сабирка $42\,000 + 624$ или $1\,000 \cdot 42 + 624$. Како је први сабирак дељив са 8 (јер је $1\,000 : 8 = 125$), то нам остаје да пробамо да ли је други сабирак 624 дељив са 8. Како је $624 : 8 = 78$ дељиво са 8, то је и број 42 624 дељив са 8 (Увери се сâм).

Правило. Сваки је број дељив са 8 коме су три крајње цифре (цифре јединица, десетица и стотина), узете као један број, дељиве са 8, или су три нуле.

9) Знаци дељивости бројева са 125

Пример: Видети да ли је број 32 375 дељив са 125.

Радећи као у 8) $32\,375 = 32\,000 + 375 = 1\,000 \cdot 32 + 375$.

Први је сабирак $1\,000 \cdot 32$ дељив са 125 (јер је $1\,000 : 125 = 8$), а како је други сабирак ($375 : 125 = 3$) дељив са 125, то је и број 32 375 дељив са 125. Заиста $32\,375 : 125 = 259$

Правило. Сваки је број дељив са 125 коме су три крајње цифре (цифре јединица, десетица и стотина), узете као један број,дељиве са 125, или су три нуле.

Напомена. Постоје правила за дељивост бројева са 7, 11, 13 итд. али за практично рачунање лакше је пробати дељењем неголи примењивати правило дељивости бројева са 7, 11, 13 итд.

Задаци:

1. Кад кажемо да је један број дељив другим бројем?
2. Шта је садржалац, а шта заједнички садржалац?
3. Шта су апсолутно прости бројеви?
4. Којим је бројевима дељив сваки број?
5. Који су бројеви дељиви са 10, 100, 1 000 итд.?
6. Који су бројеви дељиви са 2, а који са 5?
7. Који су бројеви дељиви са 4, а који са 25?

8. Који су бројеви дељиви са 3, а који са 9?

9. Који су бројеви дељиви са 8, а који са 125?

10. Како се може добити више садржалаца једног броја?

11. Зашто се 28 зове садржалац бројева 4 и 7?

12. Напиши 5 садржалаца броја а) 12; б) 25; в) 32; г) 73.

13. Који су од ових бројева дељиви са 2 а који са 4: 372, 1 258, 3 270, 12 737, 15 878, 19 532, 75 873, 63 700, 25 836 142 572?

14. Који су од ових бројева дељиви са 3 а који са 9, а који нису: 279, 8 832, 7 325, 13 827, 32 883, 45 729, 53 243, 287 118, 2 538 494, 4 375 823?

15. Који су од ових бројева дељиви са 5 а који са 25, а који нису: 2 432, 75 750, 32 700, 257 275, 358 735, 128 760, 587 640, 287 337, 999 900, 4 372 525?

16. Који су од ових бројева дељиви са 8 а који са 125, а који нису: 432, 27 125, 76 000, 832 325, 738 475, 238 686, 3 276 540, 2 570 064, 2 587 500?

17. Који су од ових бројева дељиви са 6: 780, 5 812, 8 052, 1 814, 80 822, 43 106, 756 012, 49 331?

Пример: 780 је дељив са 2 и са 3, па је дељив и са 2 × 3 = 6. Уочи сâм поступак и кажи правило.

18. Кажи за сваки од ових бројева којим су бројевима дељиви: 8 154, 735, 2 143, 8 109, 3 800, 167 310, 43 650, 301 332.

19. Који су од ових бројева дељиви са 12: 3 300, 5 424. 7 325, 12 632, 427 200, 587 623, 586 244, 43 026, 28 007, 453 372?

Пример: 3 300 је дељив са бројем 4 и бројем 3, дакле и бројем 4·3 = 12. Увери се сâм и кажи правило.

20. Који су од ових бројева дељиви са 15: 3 735, 27 450, 42 545, 48 705, 270 000, 832 752, 427 275, 203 440, 1 233 255, 4 633 855?

Пример: 3 735 је дељив бројем 3 и бројем 5, па и бројем 3·5 = 15. Увери се и кажи правило.

21. Који су од ових бројева дељиви бројем 18: 792, 8 154, 12 636, 25 724, 720 972, 450 936, 207 792, 4 538 724, 5 235 354, 7 209 306?

Пример: Број 792 је дељив са 2 и са 9, па је дељив и са 2·9 = 18. Увери се сâм и кажи правило.

22. Кажи правило кад је један број дељив производом два друга броја.

23. У следећим примерима попуни тачку једном цифром, да тако образовани број буде дељив са а) 2, б) 3, в) 4, г) 6: 23·, 2 35·, 7 38·, 27 60·, 573 28·, 270 25·.

24. Попуни тачке у следећим бројевима једном цифром да тако образован број буде дељив са а) 5, б) 25, в) 9: 7 62·, 87 35·, 287 63·, 2 765 73·, 26 30·, 762 38·, 678 23·.

25. Напиши сâм пет бројева који су дељиви са а) 2; б) 4; в) 5; г) 25.

26. Напиши сâм пет бројева који су дељиви са: а) 3; б) 9; в) 8; г) 125.

27. Напиши сâм три броја који су дељиви са: а) 6; б) 12; в) 18.

Примедба. Упамти: Сваки је број дељив производом два броја којима је посебице дељив, ако један од њих не садржи овај други као чинилац. На пр. Бр. 774 је дељив са 2, дељив са 3 и дељив са 9, па је дељив и са 6 (јер је дељив и са 2 и 3). Дељив је и са 18 (јер је дељив са 2 и са 9, а 9 не садржи у себи 2 као чинилац). Али није дељив са 27, ма да је 9·3 = 27 (јер 9 садржи у себи 3 као чинилац).

Број 174 је дељив са 2 и са 3 па је дељив и са 6; али није дељив са 18 (иако је 3·6 = 18), јер 6 садржи у себи 3 као чинилац.

21. Растављање на просте чиниоце

1) Појам

Пример: Раставити број 72 на чиниоце.

Тражимо бројеве који помножени међу собом дају 72. Ми можемо писати: 72 = 9·8; како је 9 = 3·3, а 8 = 2·2·2, то можемо писати: 72 = 3·3·2·2·2. Ми знамо да је број 72 = 6·6·2 или 72 = 12·6. Из овога се види да један број као производ можемо претставити на више начина; тако је:

$$72 = 3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2 \qquad 72 = 12\cdot2\cdot3$$
$$72 = 8\cdot9 \qquad 72 = 4\cdot3\cdot6$$
$$72 = 6\cdot6\cdot2 \qquad 72 = 24\cdot3$$
$$72 = 12\cdot6 \qquad 72 = 36\cdot2$$

Према томе чиниоци броја 72 су 1) 3·3·2·2·2; 2) 8·9; 3) 6·6·2; 4) 12·6; 5) 12·2·3; 6) 4·3·6; 7) 24·3; 8) 36·2.

Све чиниоце можемо поделити на две групе:

а) На групу сложених чинилаца. То су они чиниоци који се могу опет раставити на чиниоце. Такви су чиниоци: 9 (3·3); 8 (2·4 или 2·2·2); 6 (2·3); 12 (3·4 или 3·2·2); 4 (2·2); 24 (6·4 или 3·8 или 12·2); 36 (6·6 или 4·9 или 2·2·3·3 итд.).

Такви чиниоци зову се *сложени чиниоци*.

б) На групу простих чинилаца. То су они чиниоци који се не могу више раставити на просте чиниоце (сем на два чиниоца, од којих је један јединица).

Такви су чиниоци броја 72: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; ($3 = 3 \cdot 1$, $2 = 2 \cdot 1$).

Такви чиниоци зову се *прости чиниоци*. Они се могу према примеру и понављати. Тако се у нашем примеру чинилац 3 понавља два пута, и то пишемо „3^2", а чинилац 2 три пута па пишемо 2^3 (Шта значи 3^2, а шта 2^3?).

2) *Растављање броја на просте чиниоце*

Раставити неки број на просте чиниоце значи написати тај број као производ од самих простих чинилаца.

Пример: Раставити број 72 на просте чиниоце.

Подели број 72 најмањим бројем којим је дељив, $72 : 2 = 36$. Затим количник 36 опет најмањим бројем којим је дељив, $36 : 2 = 18$. Нови количник 18 опет најмањим бројем којим је дељив, $18 : 2 = 9$. Нови количник 9 опет најмањим бројем којим је дељив, $9 : 3 = 3$; најновији количник 3 опет најмањим бројем којим је дељив $3 : 3 = 1$.

Тај се поступак врши све док се не добије количник 1.

Сви делиоци узети као чиниоци јесу прости чиниоци броја 72, а то су: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. У практичном рачунању тај се поступак пише тако што се напише број који се раставља, а уз њега с десне стране повуче вертикална црта. На пр.

$$\begin{array}{r|l} 2\,520 & 2 \\ 1\,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Делиоци се пишу с десне стране црте, а количници сви један испод другог с леве стране црте. И тако сви нађени делиоци с десне стране вертикалне црте јесу прости чиниоци заданог броја; дакле $2\,520 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Још један пример. Раставити на просте чиниоце 756.

$$\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 756 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Задаци:

1. Шта значи раставити један број на чиниоце?
2. Шта су прости а шта сложени чиниоци?

Раставити на просте чиниоце:

3.	а)	12;	б)	84;	в)	120;	г)	138.
4.	а)	130;	б)	184;	в)	172;	г)	470.
5.	а)	105;	б)	231;	в)	312;	г)	408.
6.	а)	1 080;	б)	1 760;	в)	1 250;	г)	3 960.
7.	а)	5 786;	б)	13 833;	в)	24 000;	г)	16 696.
8.	а)	9 999;	б)	10 240;	в)	3 888;	г)	3 968.
9.	а)	5 060;	б)	24 336;	в)	11 840;	г)	14 812.
10.	а)	71 680;	б)	67 680;	в)	37 023;	г)	71 060.

22. Најмањи заједнички садржалац

1) *Појам:*

Пример 1. Нађи неколико садржалаца броја 2, а затим броја 3.

Садржалац једног броја је производ тога броја са ма којим целим бројем.

Према томе су садржаоци броја 2: 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, 20, 22, **24**, 26, 28, **30** итд.

Садржаоци броја 3: **6**, **12**, **18**, 21, **24**, 27, **30** итд. Ако добро загледамо видећемо да бројеви 2 и 3 имају једнаких садржалаца: 6, 12, 18, 24, 30 итд.

Ти једнаки садржаоци двају бројева зову се *заједнички садржаоци* тих бројева, а онај који је по бројној вредности најмањи зове се *најмањи заједнички садржалац* заданих бројева. У нашем примеру је за бројеве 2 и 3 најмањи заједнички садржалац **6.**

Прáвило. Најмањи заједнички садржалац двају или више бројева јесте онај најмањи број у коме се задани бројеви садрже без остатка.

2) *Изналажење најмањег заједничког садржаоца*

Пример 1. Нађи најмањи заједнички садржалац бројева: 70, 120, 216.

Раставити ове бројеве на просте чиниоце:

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 70 = 2 \cdot \mathbf{5} \cdot \mathbf{7} \\ 120 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3 \cdot 5 \\ 216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

Образујмо сада производ од простих чинилаца, узимајући сваки од њих онолико пута колико се пута највише појављује у ма којем од заданих бројева, као: 2 као прост чинилац јавља се највише три пута (код 120); а 3 се као прост чинилац јавља највише 3 пута (код броја 216); 5 се највише јавља једанпут и 7 се такође јавља једанпут, па пишемо: Н. З. С.

$$(70, 120, 216) = 2\cdot\overset{(8)}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\overset{(27)}{3}\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot = 8\cdot 27\cdot 35 = 216\cdot 35 = 7\,560.$$

$$\begin{array}{r} 216\cdot 35 \\ \hline 1\,080 \\ 6\,48 \end{array}$$

Тако добивени производ (7 560) јесте најмањи заједнички садржалац заданих бројева.

Ми ћемо показати практичан начин како се то обично ради. Напишу се сви задани бројеви један поред другога, али мало одвојено као:

70	120	216	2
35	60	108	2
35	30	54	2
35	15	27	3
35	5	9	3
35	5	3	3
35	5	1	5
7	1	1	7
1	1	1	

Повуче се вертикална црта. С десне стране црте се пишу заједнички чиниоци заданих бројева. Испод бројева који се могу поделити пишу се односни количници, а они који се не могу поделити препишу се испод самог себе. Почињемо увек са најмањим простим чиниоцем, па најближим већим итд.

Н. З. С. (70, 120, 216) $= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 7\,560$.

У последњем реду остану све сами прости чиниоци. Производ свих простих чинилаца у последњем реду и оних с десне стране црте јесте најмањи заједнички садржалац заданих бројева. Још један пример:

18	60	48	2
9	30	24	2
9	15	12	2
9	15	6	2
9	15	3	3
3	5	1	3
1	5	1	5
	1		

Н.З.С. (18, 60, 48) $= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 16\cdot 45 = 720$

Задаци: 1. Шта је најмањи заједнички садржалац двају или више бројева?

2. Нађи Н.З.С. бројева а) 4 и 8; б) 5 и 10; в) 15 и 45.
3. „ Н.З.С. „ а) 25 и 50; б) 17 и 34; в) 15 и 75.
4. „ Н.З.С. „ а) 6 и 15; б) 6 и 10; в) 4 и 5.
5. „ Н.З С. „ а) 30 и 45; б) 12 и 18; в) 10 и 15.
6. „ Н.З.С. „ а) 2, 4, 6; б) 3, 4, 6; в) 3, 4, 10.
7. „ Н.З.С. „ а) 2, 8,5, 7; б) 4,5,8,10, 16; в)6,8,10.
8. „ Н.З.С. „ а) 4, 6, 9; б) 2, 7, 12; в) 6, 8, 12.
9. „ Н.З.С. „ а) 3, 5, 8, 11, 15; б) 4, 8, 12, 16.
10. „ Н.З.С. „ а) 126 и 168; б) 21 и 49; в) 27 и 36.

11. Нађи Н.З.С. бројева а) 120 и 144; б) 48 и 60; в) 90 и 120.
12. „ Н.З.С. „ а) 270 и 300; б) 162 и 180; в) 140 и 180.
13. „ Н.З.С. „ а) 14, 28 и 126; б) 36, 126 и 189; в) 77, 121 и 143.
14. „ Н.З.С. „ а) 21, 186 и 280; б) 14, 98 и 140.
15. „ Н.З.С. „ а) 5, 9 и 21; б) 3, 7 и 17; в) 29, 37 и 7.
16. „ Н.З.С. „ а) 3, 4, 8, 70 и 84; б) 3, 9, 12, 45 и 57.
17. „ Н.З.С. „ а) 12, 22, 24, 48 и 36; б) 4, 5, 7, 12, 15, 21 и 42.
18. „ Н.З.С. „ 12, 16, 20, 36, 48 и 60.
19. „ Н.З.С. „ а) 528 и 792; б) 756 и 984.
20. „ Н.З.С. „ а) 6, 15, 20, 30 и 45; б) 5, 12, 16, 20 и 48.
21. „ Н.З.С. „ а) 2, 5, 8, 16 и 25; б) 2, 3, 5, 10 и 30.
22. „ Н.З.С. „ а) 484 и 1 248; б) 3 432 и 3 861.
23. „ Н.З.С. „ а) 3 080 и 3 465; б) 3 388 и 4 368.
24. „ Н.З.С. „ а) ~~126, 144 и 180~~; б) 144, 216 и 264.
25. „ Н.З.С. „ а) 120, 160 и 200; б) 120, 135 и 375.
26. „ Н.З.С. „ а) 60, 81 и 90; б) 70, 130 и 190.
27. „ Н.З.С. „ а) 506, 759 и 1 771; б) 3 168, 6 048 и 4 896.
28. „ Н.З.С. „ а) 15, 30, 48, 56, 88 и 350. 65
   б) 72, 135, 216 и 648. 65
29. „ Н.З.С. „ а) 36, 54, 72, 108 и 144; 65
   б) 7, 12, 24, 21 и 42. 65

23. Промене на бројиоцу и имениоцу које не мењају вредност разломка

1) Проширивање разломка

Пример 1. Поделимо једну јабуку на 4 једнака дела. Узмимо од тих делова 3. То пишемо $\frac{3}{4}$. Ако сад сваки од ових делова расечемо на пола, то ће јабука у ствари бити подељена на 8 једнаких делова, а од тих делова узећемо 6, па бисмо то писали $\frac{6}{8}$. Да ли је свеједно: $\frac{3}{4}$ и $\frac{6}{8}$? Лако се уверавамо да је то свеједно, па напишемо $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

Пример 2. Колико је $\frac{4}{2}$ а колико $\frac{8}{4}$? То знамо: $\frac{4}{2} = 2$ а $\frac{8}{4} = 2$. То значи да је $\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$.

Како у 1 примеру можемо доћи од разломка $\frac{3}{4}$ до облика $\frac{6}{8}$? Ако добро разгледамо, видећемо да је и бројилац и именилац разломка $\frac{3}{4}$ помножен са 2, па се дошло до $\frac{3\times 2}{4\times 2}=\frac{6}{8}$, па се ипак вредност разломка није променила, јер је $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ (1 пример). У 2 примеру је свеједно $\frac{4}{2}$ и $\frac{8}{4}$. Лако се овде уверавамо да је од $\frac{4}{2}$ постало $\frac{8}{4}$ тако ако смо и бројилац и именилац разломака $\frac{4}{2}$ помножили са 2, па смо добили $\frac{4\times 2}{2\times 2}=\frac{8}{4}$. Ови примери нам показују да се *вредност разломка ништа не мења ако и бројилац и именилац помножимо истим бројем. То се зове проширавање разломка.*

2) Скраћивање разломка

Видели смо у претходном одељку да је $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ (1 пример) и $\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$ (2 пример), па се питамо како од $\frac{6}{8}$ можемо доћи до облика $\frac{3}{4}$ или од $\frac{8}{4}$ до облика $\frac{4}{2}$. Ако добро загледамо, видећемо да је $\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$ или $\frac{8:2}{4:2}=\frac{4}{2}$. Отуд правило: *вредност разломка се не мења, ако и бројилац и именилац поделимо истим бројем.* То се зове *скраћивање разломка.*

3) Довођење разломка на исти именилац

Правило о проширивању разломка згодно се примењује при довођењу разломака на исти именилац.

Пример 1. Довести разломак $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ на исти именилац.

Нађимо Н.З.С. именилаца 3 и 4; то је 12. Разломак $\frac{2}{3}$ доведимо на именилац 12; то значи треба разломак $\frac{2}{3}$ проширити тако да му именилац буде 12, а то је могуће ако и бројилац и именилац помножимо са 4 (јер је 12 : 3 = 4), па ће бити $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$. На исти начин доведимо и разломак $\frac{3}{4}$ на именилац 12. Треба и именилац и бројилац помножити са 3 (јер је 12 : 4 = 3), па имамо: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$. Тако су разломци:

$\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ доведени на исти именилац 12, а да се вредност њихова није променила, јер је $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$; $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$.

Пример 2. Довести на исти именилац разломке: $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{9}{20}$. Треба наћи Н.З.С. за све имениоце.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{3} & 8 & 12 & 20 & 2 \\ & 4 & 6 & 10 & 2 \\ & 2 & 3 & 5 & \end{array} \qquad \text{Н.З.С. } (3,\ 8,\ 12,\ 20) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 120$$

Сад се сваки именилац садржава у заједничком имениоцу (120), а количник множи са бројиоцем дотичног разломка; тако:

$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 40}{3\cdot 40}=\frac{80}{120}$, $\left(3 \text{ у } 120 = 40\right)$; $\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 15}{8\cdot 15}=\frac{75}{120}$, $\left(8 \text{ у } 120 = 15\right)$;

$\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 10}{12\cdot 10}=\frac{70}{120}$. $\left(12 \text{ у } 120 = 10\right)$ $\frac{9}{20}=\frac{9\cdot 6}{20\cdot 6}=\frac{54}{120}$, $\left(20 \text{ у } 120 = 6\right)$.

Тако су сви разломци доведени на исти именилац. Из ова два примера можемо извести овај *поступак за довођење разломака на исти именилац: Треба наћи Н.З.С. за све имениоце. Затим се именилац сваког разломка садржава у Н.З.С., а количник множи са дотичним бројиоцем. Н.З.С. буде именилац сваког разломка, а бројилац је производ бројиоца и количника Н.З.С. и имениоца дотичног разломка.*

Пример 3. Довести разломке: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{12}$, на исте-имениоце.

Решење:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{3}\ 15, 25, 8, 9, 12 & 2 \\ 15, 25, 4, 9,\ \ 6 & 2 \\ 15, 25, 2, 9,\ \ 3 & 3 \\ 5, 25, 2, 3,\ \ 1 & 5 \\ 1,\ \ 5\ \ 2\ \ 3, & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Н. З. С. } (3,\ 15,\ 25,\ 8,\ 9,\ 12) = \\ 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 2\cdot 3 = 60\cdot 30 = 1800. \end{array}$$

$\frac{2}{3}=\frac{1\,200}{1\,800}$ $\left(3 \text{ у } 1\,800 = 600\right)$; $\frac{8}{15}=\frac{960}{1\,800}$ $\left(15 \text{ у } 1\,800 = 120\right)$;

$\frac{5}{8}=\frac{1\,125}{1\,800}$ $\left(8 \text{ у } 1\,800 = 225\right)$; $\frac{4}{9}=\frac{800}{1\,800}$ $\left(9 \text{ у } 1\,800 = 200\right)$.

Задаци:

1. Шта се зове проширење разломка?
2. Шта је скраћивање разломка?
3. Како се могу више разломака довести на један исти именилац?
4. Доведи на најмањи заједнички именилац ове разломке:

а) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$; б) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{10}$; в) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$.

5. а) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}$; б) $\frac{7}{3}, \frac{5}{6}, \frac{14}{10}, \frac{5}{12}, \frac{9}{20}, \frac{17}{30}$.

6. а) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{20}, \frac{3}{35}$; б) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{17}{12}, \frac{24}{48}$.

7. а) $\frac{5}{12}, \frac{8}{15}, \frac{7}{24}$; б) $\frac{17}{30}, \frac{1}{48}, \frac{27}{60}$.

8. а) $\frac{7}{15}, \frac{21}{60}, \frac{31}{42}; \frac{71}{84}, \frac{125}{132}$; б) $\frac{1}{5}, \frac{7}{8}, \frac{7}{15}, \frac{11}{20}$.

9. а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{15}, \frac{8}{25}, \frac{31}{60}$:

10. а) $\frac{1}{4}, \frac{7}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{31}{32}$; б) $\frac{21}{40}, \frac{37}{60}, \frac{11}{30}, \frac{13}{15}$.

11. а) $\frac{5}{16}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{13}{36}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{7}{15}, \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{12}{18}$.

12. а) $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{15}, \frac{9}{25}, \frac{4}{5}, \frac{13}{15}, \frac{5}{9}, \frac{17}{20}$; б) $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{7}{25}, \frac{11}{12}, \frac{7}{18}$.

13. а) $\frac{27}{31}, \frac{13}{48}, \frac{7}{18}, \frac{33}{50}, \frac{27}{45}$; б) $\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{6}{7}, \frac{9}{21}, \frac{3}{8}, \frac{8}{15}$.

Поређај следеће разломке тако да најпре дође најмањи по величини, па редом први већи итд.

14. а) $\frac{3}{2}, \frac{5}{7}, \frac{4}{8}, \frac{13}{16}$; б) $\frac{7}{15}, \frac{11}{12}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}$.

15. а) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}$; б) $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}, \frac{5}{10}, \frac{7}{20}$.

Скрати следеће разломке:

16. $\frac{12}{18}, \frac{16}{24}, \frac{30}{75}, \frac{4}{12}, \frac{6}{8}, \frac{36}{60}$.

17. $\frac{72}{36}, \frac{90}{60}, \frac{105}{175}, \frac{162}{189}, \frac{240}{360}, \frac{108}{144}$.

18. $\frac{1\,200}{3\,200}, \frac{720\,000}{840\,000}, \frac{2\,700}{1\,800}, \frac{4\,400}{5\,400}, \frac{18\,600}{30\,900}$.

19. $\frac{765}{2\,748}, \frac{3\,333}{4\,444}, \frac{24\,750}{69\,300}, \frac{6\,336}{9\,900}, \frac{576}{1\,664}$;

20. $\frac{1\,712}{5\,136}, \frac{2\,550}{4\,770}, \frac{1\,250}{1\,000}, \frac{819}{3\,717}, \frac{576}{720}$.

21. $\frac{675}{2\,400}, \frac{3\,330}{4\,545}, \frac{3\,185}{16\,170}, \frac{5\,121}{8\,535}, \frac{2\,705}{6\,270}$.

22. $\frac{6\,440}{7\,728}, \frac{2\,924}{5\,117}, \frac{9\,945}{12\,870}, \frac{3\,840}{768}, \frac{2\,835}{3\,240}$.

23. $\frac{9\,072}{9\,894}, \frac{1\,638}{7\,434}, \frac{5\,187}{8\,778}, \frac{1\,707}{2\,845}, \frac{9\,350}{104\,500}$.

РАЧУНСКЕ РАДЊЕ ПРВОГ СТЕПЕНА СА РАЗЛОМЦИМА

24. Сабирање разломака неједнаких именилаца

Пример 1. Сабрати: $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \frac{11}{12} = ?$

Треба све разломке довести на исти именилац

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 8 & 12 & 2 \\ & & 4 & 6 & 2 \\ & & 2 & 3 & \end{array} \qquad \text{Н.З.С.}\,(4,\ 6,\ 8,\ 12) = 2\cdot2\cdot2\cdot3 = 24$$

Према овоме је $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$; $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$, $\frac{11}{12} = \frac{22}{24}$; па

пишемо: $\frac{18}{24} + \frac{20}{24} + \frac{21}{24} + \frac{22}{24} = \frac{\overset{3}{81}}{24} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$ (члан 13 стр. 12).

Пример 2. Сабрати: $2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{8} + 5\frac{1}{4} + 1\frac{2}{9} = ?$

Овде имамо да саберемо мешовите бројеве.

Ми их можемо на два начина сабрати: а) Можемо понаособ сабрати целе па разломке, па добивене резултате сабрати. Тај је начин препоручљивији, као:

$$2 + 3 + 5 + 1 = 11 + 1\frac{25}{72} = \mathbf{12\frac{25}{72}};$$

Разломци $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{36 + 27 + 18 + 16}{72} = \frac{97}{72} = 1\frac{25}{72}$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 8 & 4 & 9 & 2 \\ & 4 & & 9 & 2 \\ & 2 & & 9 & 2 \\ & 1 & & 9 & 3 \\ & & & 3 & 3 \\ & & & 1 & \end{array} \qquad \text{Н.З.С.}\,(2, 8, 4, 9) = \frac{2\cdot2\cdot2}{8} \cdot \frac{3\cdot3}{9} = 8\cdot9 = 72$$

б) Можемо најпре све мешовите бројеве претворити у неправе разломке па их сабрати (по чл. 8 пример 1 стр. 10):

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{8} + 5\frac{1}{4} + 1\frac{2}{9} = \frac{5}{2} + \frac{27}{8} + \frac{21}{4} + \frac{11}{9} =$$

$$= \frac{5\cdot36 + 27\cdot9 + 21\cdot18 + 11\cdot8}{72} = \frac{180 + 243 + 378 + 88}{72} = \frac{889}{72} = \mathbf{12\frac{25}{72}}$$

Напомена 1. Пиши при рачунању са разломцима целе исте величине као и разломак који је иза њих.

2. Пази да пишеш све разломачке црте у истом реду са знацима радње и са знаком „=“.

3. Разломак треба скратити кад год се може.

4. Резултат доведи на мешовити број ако се може.

Пример 3. Колико је: $2\frac{1}{2}+3\frac{5}{8}+13\frac{7}{12}+4\frac{2}{3}+9\frac{5}{9}=?$

Н.З.С. $(2, 8, 12, 3, 9)=2\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3=72$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & 8, & 12, & 3 & 9 & 2 \\ & 4 & 6 & & 9 & 2 \\ & 2 & 3 & & 9 & 3 \\ & 2 & 1 & & 3 & \end{array}$$

Решење: $2\frac{1}{2}+3\frac{5}{8}+13\frac{7}{12}+4\frac{2}{3}+9\frac{5}{9}=\mathbf{31}+\mathbf{2\frac{67}{72}}=\mathbf{33\frac{67}{72}}$

$\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{7}{12}+\frac{2}{3}+\frac{5}{9}=\frac{36+45+42+48+40}{72}=\frac{211}{72}=\mathbf{2\frac{67}{72}}$.

25. Одузимање разломака неједнаких именилаца

Пример 1. $\frac{11}{12}-\frac{3}{8}=?$ Доведимо и умањеник и умањилац на исте имениоце, па их одузмимо (по чл. 15 стр. 13).

$$\begin{array}{rr|l} 12, & 8 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & \end{array}$$

Н.З.С. $(12, 8)=2\cdot2\cdot3\cdot2=24$

$$\frac{11}{12}-\frac{3}{8}=\frac{22}{24}-\frac{9}{24}=\frac{22-9}{24}=\mathbf{\frac{13}{24}}$$

Пример 2. а) $8\frac{8}{9}-2\frac{2}{3}=\mathbf{6}+\mathbf{\frac{2}{9}}=\mathbf{6\frac{2}{9}}$

$$\frac{8}{9}-\frac{2}{3}=\frac{8-6}{9}=\frac{2}{9}$$

Одузму се цели од целих, а разломак умањиоца од разломка умањеника, па разлике сабрати. (Овај се поступак примењује ако и цели и разломак у умањенику понаособ већи од целих и разломка у умањиоцу).

б) $10\frac{3}{7}-5\frac{4}{5}=?$

$\frac{3}{7}-\frac{4}{5}$ доведемо на исти именилац 35: $\frac{15}{35}-\frac{28}{35}$ показује да је разломак у умањенику мањи од оног у умањиоцу. Сад узмемо једно цело од оних у умањенику, и кад га претворимо у исто именовање са разломком који је уз њега, и пошто га додамо томе разломку, приступимо одузимању. У нашем примеру видимо да се $\frac{4}{5}$ не могу одузети од $\frac{3}{7}$, то узимамо од 10 целих 1 цело и претворимо га у седмине, тј. $\frac{7}{7}$. Сада нам остају 9 целих, а ових $\frac{7}{7}$ саберемо са оне $\frac{3}{7}$ у умањенику па тако и пишемо: $9\frac{10}{7}$; а затим одузимамо (по примеру 2 а) овог одељка).

$9\frac{10}{7}-5\frac{4}{5}=\mathbf{4}+\mathbf{\frac{22}{35}}=\mathbf{4\frac{22}{35}}$ $\qquad$ $\frac{10}{7}-\frac{4}{5}=\frac{50-28}{35}=\mathbf{\frac{22}{35}}$

Пример 3. $12\frac{5}{6}-4\frac{5}{8}=?$

Ми можемо мешовите бројеве претворити у неправе разломке па их одузети, као:

$$12\frac{5}{6}-4\frac{5}{8}=\frac{77}{6}-\frac{37}{8}=\frac{308-111}{24}=\frac{197}{24}=\mathbf{8\frac{5}{24}}$$

$$\begin{array}{rr|l} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & \end{array}$$

Н.З.С. $(6,8,)=2\cdot2\cdot2\cdot3=24$ $\qquad$ $197:24=8\frac{5}{24}$
$=5$

Задаци:

1. Како се сабирају разломци неједнаких именилаца?
2. Какс се сабирају мешовити бројеви?
3. Како се одузимају разломци неједнаких именилаца?
4. Како се одузимају мешовити бројеви?
5. а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=$ $\qquad$ б) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{7}{10}+\frac{5}{12}=$
6. а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{12}+\frac{21}{24}=$ $\qquad$ б) $\frac{7}{9}+\frac{7}{12}+\frac{11}{20}+\frac{19}{36}=$
7. а) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{10}+\frac{11}{12}=$ $\qquad$ б) $\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}=$
8. а) $\frac{7}{15}+\frac{17}{24}=$ $\qquad$ б) $\frac{35}{32}+\frac{17}{24}+\frac{7}{12}+2=$
9. а) $\frac{23}{45}+\frac{17}{18}+\frac{11}{24}=$ $\qquad$ б) $\frac{8}{15}+\frac{3}{5}+\frac{13}{25}+\frac{11}{12}=$
10. а) $7\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{3}{10}+\frac{22}{45}+\frac{14}{15}=$ $\qquad$ б) $\frac{3}{4}+\frac{7}{5}+\frac{17}{20}+8+\frac{13}{30}=$
11. а) $\frac{17}{18}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{26}{27}+\frac{5}{9}+\frac{11}{18}=$ $\qquad$ б) $\frac{31}{35}+\frac{5}{7}+\frac{13}{21}+\frac{7}{15}=$
12. а) $\frac{15}{16}+\frac{7}{9}+\frac{7}{12}+\frac{23}{24}=$ $\qquad$ б) $\frac{3}{5}+\frac{1}{12}+\frac{5}{8}+\frac{29}{30}+\frac{7}{24}=$
13. а) $\frac{7}{12}+\frac{11}{42}+\frac{3}{22}+\frac{5}{6}+\frac{17}{33}=$ $\qquad$ б) $\frac{13}{24}+\frac{29}{45}+\frac{31}{40}+\frac{59}{60}=$
14. а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{40}{81}=$ $\qquad$ б) $\frac{7}{12}+\frac{14}{15}+\frac{3}{4}+\frac{8}{27}+\frac{13}{60}=$
15. а) $\frac{5}{6}+7\frac{2}{5}+2\frac{1}{5}+4\frac{2}{3}=$ $\qquad$ б) $2\frac{3}{5}+4\frac{5}{6}+\frac{4}{9}+8=$
16. а) $1\frac{2}{3}+5\frac{1}{4}+7\frac{3}{8}+10=$ $\qquad$ б) $4\frac{2}{3}+9\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+12=$
17. $3\frac{3}{5}+18\frac{5}{6}+27\frac{4}{7}+12\frac{2}{5}+38\frac{2}{3}=$
18. $14\frac{2}{3}+27\frac{4}{5}+7\frac{2}{3}+12\frac{2}{9}=$
19. $124\frac{1}{5}+37\frac{1}{12}+14\frac{7}{18}+108\frac{37}{45}=$

20. $207\frac{5}{8} + 109\frac{5}{9} + 707\frac{3}{10} + 508\frac{5}{12} =$

21. $311\frac{3}{4} + 602\frac{1}{2} + 408\frac{1}{5} + 109\frac{1}{8} =$

22. $726 + 807\frac{5}{24} + 17\frac{2}{15} + 10\frac{8}{9} =$

23. $302\frac{1}{2} + 108\frac{1}{6} + 208\frac{5}{12} + 937\frac{3}{5} =$

24. а) $\frac{5}{9} - \frac{2}{5}$ б) $\frac{11}{12} - \frac{3}{7}$ 25. а) $\frac{13}{18} - \frac{7}{10}$ б) $\frac{3}{5} - \frac{7}{15}$

26. а) $\frac{13}{15} - \frac{3}{4}$ б) $\frac{15}{16} - \frac{11}{12}$ 27. а) $\frac{11}{24} - \frac{1}{6}$ б) $\frac{5}{8} - \frac{7}{24}$

28. а) $\frac{1}{27} - \frac{1}{29}$ б) $\frac{17}{24} - \frac{1}{6}$ 29. а) $\frac{47}{51} - \frac{17}{27}$ б) $\frac{26}{35} - \frac{9}{20}$

30. а) $\frac{15}{17} - \frac{4}{51}$ б) $\frac{43}{48} - \frac{47}{60}$ 31. а) $1\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$ б) $18\frac{7}{11} - 3\frac{7}{9}$

32. а) $17\frac{3}{5} - 8\frac{2}{3}$ б) $207\frac{8}{9} - 108\frac{3}{7}$

33. а) $307\frac{2}{7} - 109\frac{8}{11}$ б) $803\frac{17}{21} - 200\frac{19}{23}$

34. а) $42\frac{3}{8} - 15$ б) $72\frac{7}{27} - 36$

35. а) $208\frac{4}{75} - 127$ б) $328\frac{79}{81} - 279$

36. а) $273 - 82\frac{5}{12}$ б) $373 - 27\frac{7}{24}$

37. а) $100 - 37\frac{2}{3}$ б) $38 - 2\frac{3}{4}$

38. а) $700 - 569\frac{17}{36}$ б) $827 - 328\frac{5}{72}$

39. а) $18\frac{5}{6} - 9\frac{7}{19}$ б) $83\frac{5}{14} - 62\frac{13}{35}$

40. а) $37\frac{2}{11} - 18\frac{7}{17}$ б) $703\frac{1}{2} - 105\frac{5}{8}$

41. а) $74\frac{31}{144} - 56\frac{103}{112}$ б) $18\frac{17}{341} - 9\frac{16}{407}$

42. а) $27\frac{3}{35} - 11\frac{7}{15}$ б) $78\frac{11}{12} - 61\frac{15}{16}$

43. Израчунај збир четири броја од којих је први $17\frac{2}{5}$, а сваки следећи је за $1\frac{7}{15}$ већи од претходног.

44. Који је број за $17\frac{16}{27}$ већи од $237\frac{5}{9}$?

45. У једној радњи је поручено: $78\frac{3}{4}$ кг. шећера, $23\frac{5}{6}$ кг. кафе, $12\frac{7}{8}$ кг. ориза и $2\frac{5}{12}$ кг. сочива. Колико је свега кг. поручено?

46. Три брата примају месечно: најмлађи брат $738\frac{1}{4}$ динара, средњи $237\frac{3}{8}$ дин. више од најмлађег, а најстарији 22 динара више од оба млађа брата. Колико браћа укупно примају?

47. У једном подруму има $278\frac{11}{24}$ *hl* вина, $156\frac{23}{16}$ *hl* ракије и $23\frac{17}{32}$ *hl* сирћета. Колико свега *hl* пића има у том подруму?

48. Четири брата имају година толико колико и њихов отац. Први брат има $20\frac{5}{12}$ год., други $18\frac{1}{2}$ год., трећи $9\frac{3}{4}$ год., а четврти $4\frac{5}{8}$ год. Колико година има њихов отац?

49. Један сељак купи четири њиве: једну од $3\frac{1}{2}$ *ha*, другу од $5\frac{3}{4}$ *ha*, трећу од $2\frac{5}{6}$ *ha*, а четврту од $1\frac{1}{10}$ *ha*. Колико је ha укупно купио?

50. Из једног бурета оточи се $53\frac{1}{2}$ *l* вина, а затим још $24\frac{3}{4}$ *l*. Остало је у бурету $102\frac{2}{5}$ *l*. Колико је литара вина било у бурету?

51. За колико ће се вредност разломка $\frac{23}{75}$ повећавати или умањити ако а) и бројиоцу и имениоцу додамо број 5; б) ако се и од бројиоца и имениоца одузме број 6?

52. Који се број мора одузети од $17\frac{9}{20}$ да би се добило $8\frac{4}{15}$?

53. Разлика два броја је $13\frac{9}{14}$, већи је број $16\frac{5}{21}$. Колики је мањи број?

54. Који број треба одузети од 12 па да се добије $3\frac{5}{6}$?

55. За колико се повећава вредност разломка $\frac{5}{16}$ ако се бројиоцу дода 7, а од имениоца одузме 7?

57. Неко купи $3\frac{3}{5}$ *m* неке тканине за одело. Кројач му каже да треба да купи још $\frac{12}{25}$ *m*, па да буде довољно тканине за његово одело и за одело његовог сина. Колико метара тканине је било потребно за оба одела?

57. Из неког резервоара отиче кроз једну цев $86\frac{1}{2}$ *l* воде у

минуту. Кроз другу $75\frac{3}{4}$ *l*, а кроз трећу $60\frac{17}{24}$ *l*. Колико воде отиче свега за 1 минуту?

58. Неко је прешао возом $72\frac{12}{25}$ *km*, аутом $24\frac{3}{5}$ *km*, а пешице $8\frac{3}{4}$ *km*. Колико је *km* свега прешао?

59. Један сељак је засејао пшеницом $26\frac{3}{4}$ *ha*, а кукурузом $13\frac{5}{6}$ *ha*. Колико је *ha* више засејао пшеницом?

60. У једном бурету је било $42\frac{5}{12}$ *hl* вина, од тога се оточи $23\frac{7}{30}$ *hl*. Колико још преостаје *hl* у бурету?

61. Неко је прешао $38\frac{3}{20}$ *km*, од тога је прешао аутом $24\frac{7}{30}$ *km*. Колико је прешао пешице?

62. Неко прима месечно $1\,732\frac{7}{25}$ д, од тога изда за издржавање $1\,492\frac{1}{2}$ дин. Колико му преостаје?

63. Оцу је сада $36\frac{5}{12}$ година, а сину $12\frac{1}{6}$ година. Колико је отац старији од сина?

64. Сандук са шећером је тежак $63\frac{3}{4}$ *kg*; сам сандук је тежак $7\frac{3}{5}$ *kg*. Колико има шећера у њему?

26. **Агрегати разломака**

Пример 1. $8\frac{7}{9}-2\frac{2}{9}-5\frac{8}{9}+4\frac{1}{9}=\left(8\frac{7}{9}+4\frac{1}{9}\right)-$
$-\left(2\frac{2}{9}+5\frac{8}{9}\right)=12\frac{8}{9}-7\frac{10}{9}=12\frac{8}{9}-8\frac{1}{9}=4\frac{7}{9}.$

Пример 2. $3\frac{5}{6}-1\frac{7}{12}-2\frac{3}{5}+3\frac{29}{60}-4\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}=$

$$=\left(3\frac{5}{6}+3\frac{29}{60}+2\frac{1}{4}\right)-\left(1\frac{7}{12}+2\frac{3}{5}+4\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(3+3+2+\frac{50+29+15}{60}\right)-\left(1+2+4+\frac{35+36+30}{60}\right)=$$

$$=8\frac{94}{60}-7\frac{101}{60}=9\frac{34}{60}-8\frac{41}{60}=8\frac{94}{60}-8\frac{41}{60}=\frac{53}{60}.$$

Пример 3. $8\frac{12}{21}-7\frac{5}{14}+12\frac{11}{42}-5\frac{3}{27}+3\frac{15}{36}=$

$$=\left(8\frac{12}{21}+12\frac{11}{42}+3\frac{15}{36}\right)-\left(7\frac{5}{14}+5\frac{8}{27}\right)=$$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{21} & \cancel{14} & 42, & 27 & 36 & 2 \\ & & 21 & 27 & 18 & 3 \\ & & 7 & 9 & 6 & 3 \\ & & 7 & 3 & 2 & \end{array}$$

Н.З.С. $=7\cdot3\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2=$ **756**

$$=\left(8+12+3+\frac{12\cdot36+11\cdot18+15\cdot21}{756}\right)-$$

$$-\left(7+5+\frac{5\cdot54+8\cdot28}{756}\right)=\left(23+\frac{432+198+315}{756}\right)-$$

$$-\left(12+\frac{270+224}{756}\right)=\mathbf{23\frac{945}{756}}-\mathbf{12\frac{494}{756}}=\mathbf{11\frac{451}{756}}.$$

Из ових примера можемо извести овај практичан поступак при решавању агрегата: 1. Треба најпре наћи најмањи заједнички именилац за све имениоце; 2. Треба разделити све чланове агрегата на две групе: оне који имају пред собом знак „+“ и оне који имају пред собом знак „—“; 3. Треба сабирати све чланове прве групе, затим сабирати све чланове друге групе (по чл. 24 стр. 29), па збир чланова друге групе одузети од збира чланова прве групе (по чл. 25 стр. 30). Добивена разлика је уједно и резултат агрегата.

Задаци:

1. $37\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}+12\frac{7}{12}+3\frac{1}{3}-13\frac{11}{8}-3=$ ✓
2. $408\frac{1}{2}+13-203\frac{1}{4}-52+278\frac{5}{12}-39\frac{3}{5}-27\frac{7}{18}=$
3. $203\frac{2}{5}-107\frac{5}{12}+35\frac{2}{15}-39\frac{8}{9}-14\frac{7}{12}+25=$ ✓
4. $12\frac{5}{8}-3\frac{5}{9}+14\frac{3}{10}-8\frac{7}{12}+8\frac{5}{16}-3\frac{11}{18}=$
5. $23\frac{5}{6}-9\frac{2}{5}-1\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}-12\frac{9}{14}+8\frac{20}{21}=$
6. $48\frac{7}{10}-3\frac{7}{20}+\frac{7}{8}+18\frac{5}{8}+24\frac{1}{4}-7\frac{5}{6}=$
7. $25\frac{17}{48}-32\frac{23}{72}+15\frac{11}{64}-4\frac{35}{36}+20\frac{41}{96}-10\frac{35}{48}=$
8. $12\frac{5}{6}-8\frac{13}{21}-5\frac{23}{33}+13\frac{17}{18}-3\frac{29}{36}+28\frac{37}{54}=$
9. Пет сандука шећера тешки су: $48\frac{1}{8}$ *kg*, $32\frac{1}{2}$ *kg*, $52\frac{4}{5}$ *kg*, $47\frac{5}{6}$ *kg* и $38\frac{3}{10}$ *kg*. Сами сандуци су тешки $4\frac{3}{4}$ *kg*, $5\frac{3}{8}$ *kg*, 5 *kg*, $4\frac{7}{12}$ *kg* и $5\frac{1}{2}$ *kg*. Колико је самог шећера?

10. У једно буре се наточи 52 hl вина, једнога дана се оточи $14\frac{3}{4}$ hl, другог $8\frac{1}{2}$ hl, трећег $10\frac{3}{8}$ hl, четвртог $8\frac{7}{10}$ hl. Колико је још остало вина у бурету?

11. У неки басен утиче вода кроз четири цеви: кроз прву цев утиче $12\frac{3}{8}$ hl, кроз другу $15\frac{5}{12}$ hl, кроз трећу $10\frac{3}{16}$ hl и кроз четврту $11\frac{1}{2}$ hl воде на сат. Из истог басена отиче вода кроз две цеви, и то кроз једну отиче $24\frac{5}{8}$ hl, а кроз другу $17\frac{3}{4}$ hl, на сат. Колико hl воде више утиче него што отиче на сат?

12. У некој радњи се на каси примало и издавало овако: Примљено $24\frac{3}{4}$ дин. Издато $12\frac{3}{10}$ дин. Издато $3\frac{7}{20}$ дин. Примљено $18\frac{1}{4}$ дин. Издато $8\frac{4}{5}$ дин. Издато $10\frac{7}{20}$ дин. Примљено $72\frac{3}{20}$ дин. Колико је више примљено него издато?

13. Један сељак има имања $34\frac{1}{2}$ ha, од тога прода једном $12\frac{3}{4}$ ha, затим докупи још $8\frac{1}{4}$ ha па другом прода $7\frac{5}{16}$ ha. Колико ha има сељак?

14. Три брата поделе једну њиву од (једнога) 1 ha, тако да први добије $\frac{3}{4}$ ha, други $\frac{3}{5}$ ha. Колико је добио трећи брат?

15. Од збира бројева $14\frac{4}{15}$ и $17\frac{5}{24}$ одузми разлику бројева $8\frac{5}{12}$ и $5\frac{5}{24}$.

16. Збир три броја износи 372. Први је број $82\frac{7}{24}$, други је $14\frac{5}{36}$. Колики је трећи број?

17. Реши агрегат од седам (7) чланова: $8\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{4}{5}$, $11\frac{5}{6}$, $12\frac{6}{7}$, и $13\frac{7}{8}$. Други, четврти и шести члан су негативни, а остали позитивни.

РАЧУНСКЕ РАДЊЕ ДРУГОГ СТЕПЕНА СА РАЗЛОМЦИМА

27. Множење разломка целим бројем, и целог броја разломком

Пример 1. $\frac{5}{7}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$.

По члану 10 стр. 11 већа је вредност од два разломка једнаких именилаца оног чији је већи бројилац. При множењу разломка целим бројем јасно је да ћемо добити у производу разломак онолико пута већи колико показује број којим множимо разломак, а то ће бити, ако вредност бројиоца самог разломка повећамо онолико пута колики је цео број којим множимо разломак.

По закону комутације при множењу можемо наш пример писати: $\frac{5}{7}\cdot 3=3\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$.

Отуд имамо правило: *Разломак се множи целим бројем, или цео број разломком, кад се производ целога броја и бројиоца разломка подели имениоцем разломка.*

Пример 2. $\frac{7}{\cancelto{2}{8}}\cdot\cancelto{1}{4}=\frac{7}{2}$ или $\cancelto{1}{4}\cdot\frac{7}{\cancelto{2}{8}}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

По чл. 11 стр. 12, од два разломка једнаких бројилаца већи је онај коме је именилац мањи. При множењу разломка целим бројем, или целог броја разломком, треба да добијемо у резултату разломак чија ће вредност бити онолико пута већа колики је број којим множимо разломак. Ми ћемо ту вредност добити, ако именилац разломка умањимо за толико пута.

Отуд правило: *Разломак се множи целим бројем, или цео број се множи разломком, кад бројилац разломка поделимо количником имениоца разломка и целога броја.*

Према овом правилу можемо, и треба увек, при множењу скратити разломак целим бројем, цели број и именилац највише што се може, па га помножити (по чл. 27 пр. 1).

На пр. $\frac{14}{\cancelto{5}{25}}\cdot\cancelto{3}{15}=\frac{14}{5}\cdot 3=\frac{14\cdot 3}{5}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$.

Пример 3. а) $7\frac{3}{4}\cdot 5=\left(7+\frac{3}{4}\right)\cdot 5=7\cdot 5+\frac{3}{4}\cdot 5=$

$=35+\frac{15}{4}=35+3\frac{3}{4}=38\frac{3}{4}$;

или $7\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{31}{4}\cdot 5=\frac{155}{4}=38\frac{3}{4}$

б) $9\frac{5}{8}\cdot 12 = (9\cdot 12) + \left(\frac{5}{\cancel{8}_{2}}\cdot \cancel{12}^{3}\right) = 108 + \frac{5\cdot 3}{2} =$

$$= 108 + \frac{15}{2} = 108 + 7\frac{1}{2} = 115\frac{1}{2}$$

или $9\frac{5}{8}\cdot 12 = \frac{77}{\cancel{8}_{2}}\cdot \cancel{12}^{3} = \frac{231}{2} = 115\frac{1}{2}$

Мешовити се број множи целим бројем, или се цели број множи мешовитим: а) Помножи се цео број целим делом мешовитог броја, томе производу се дода производ целог броја и разломка мешовитог броја (по чл. 27 пр. 1, или 2, стр. 37). Збир тих производа је резултат; или: б) Мешовити се број претвори у неправи разломак, па се помножи целим бројем.

Упамти: 1) Разломак треба увек скратити кад год се то може; 2) Крајњи резултат треба написати у виду мешовитог броја, ако се може.

Пример 4. Шта значи разломак $\frac{5}{7}$ помножити бројем 3.

Према оном што знамо о множењу из првог разреда, разломак $\frac{5}{7}$ помножити бројем 3 значи: узети разломак $\frac{5}{7}$ три пута као сабирак: $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$ (члан 13 стр. 12).

Овај нам пример показује да можемо множење разломака целим бројем претставити као сабирање разломака једнаких именилаца.

28. Дељење разломака целим бројем

Пример 1. $\frac{5}{9}:4 = \frac{5}{4\cdot 9} = \frac{5}{36}$

Кад имамо да делимо разломак целим бројем јасно је да ће резултат бити мањи од самог разломка и онолико пута мањи колико је сâм број на који делимо (делилац). По чл. 11 стр. 12, од два разломка једнаких бројилаца мањи је онај коме је именилац већи, те према томе:

Разломак се дели целим бројем, кад се бројилац разломка подели производом имениоца разломка и целога броја.

Пример 2. $\frac{8}{9}:4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$

Како је (по чл. 10 стр. 11) од два разломка једнаких именилаца мањи онај коме је бројилац мањи то можемо при

дељењу разломка целим бројем добити у резултату разломак истог имениоца, само бројилац да буде онолико пута мањи колики је број на који се дели. Отуд правило:

Разломак се дели целим бројем, кад се количник бројиоца разломка и целог броја подели имениоцем разломка.

Ово се правило примењује увек кад год је бројилац разломка дељив целим бројем. Према овом правилу увек треба, ако се може, скратити бројилац разломка и цео број највише што се може, па после поделити (по чл. 28 пр. 1) Нпр:

$$\frac{\cancel{12}^{2}}{35}:\cancel{18}^{3} = \frac{2}{3\cdot 35} = \frac{2}{105}.$$

Пример 3. $8\frac{3}{4}:14 = \frac{8\cdot 4+3}{4}:14 = \frac{\cancel{35}^{5}}{4}:\cancel{14}^{2} = \frac{5}{8}.$

Да бисмо мешовити број поделили целим бројем, треба најпре мешовити број претворити у неправ разломак па поделити (по чл. пр. 1 и 2).

29. Дељење целог броја разломком

Пример 1. $12:\frac{5}{7} = \frac{12\cdot 7}{5} = 12\cdot\frac{7}{5} = \frac{84}{5} = 16\frac{4}{5}$.

Поделимо : $12:5 = \frac{12}{5}$.

Ми смо број 12 поделили са бројем 5 и добили $\frac{12}{5}$ Знамо из првог разреда да је количник два броја толико већи за колико пута умањимо делилац. Умањимо делилац у нашем примеру 7 пута, добићемо $12:\frac{5}{7}$, и количник ће бити 7 пута већи: дакле $\frac{12}{5}\cdot 7$ или $12:\frac{5}{7} = \frac{12\cdot 7}{5} = 12\cdot\frac{7}{5} = \frac{84}{5} = 16\frac{4}{5}$.

Правило: *Цео број се дели разломком, кад се производ целога броја и имениоца разломка подели бројиоцем разломка,* или што је свеједно: *Цели број се дели са разломком ако се, помножи са реципрочном вредношћу самога разломка.*

Пример 2. а) $14:\frac{7}{8} = \cancel{14}^{2}\cdot\frac{8}{\cancel{7}} = 16$;

б) $21:\frac{6}{7} = \cancel{21}^{7}\cdot\frac{7}{\cancel{6}} = \frac{49}{2} = 24\frac{1}{2}$.

Ови примери нам показују да можемо цео број и бројилац скратити, што треба увек урадити, па извршити дељење (по чл. 27 пр. 1).

Пример 3. $18 : 2\frac{3}{5} = 18 : \frac{13}{5} = 18 \cdot \frac{5}{13} = \frac{90}{13} = 7\frac{12}{13}$

При дељењу целог броја мешовитим бројем треба најпре мешовити број претворити у неправи разломак па извршити дељење (по чл. 29 пр. 1 или 2).

Задаци:

1. Како се множи разломак целим бројем?
2. Како се множи мешовит број целим бројем?
3. Како се дели разломак целим бројем?
4. Како се дели мешовит број целим бројем?
5. Како се дели цео број разломком?
6. Како се дели цео број мешовитим бројем?
7. а) $\frac{5}{6} \cdot 7$ б) $\frac{3}{4} \cdot 12$ в) $\frac{7}{8} \cdot 24$ г) $\frac{11}{12} \cdot 20$
8. а) $8 \cdot \frac{7}{15}$ б) $14 \cdot \frac{6}{7}$ в) $33 \cdot \frac{21}{22}$ г) $27 \cdot \frac{8}{9}$
9. а) $\frac{1}{6} \cdot 5$ б) $\frac{11}{13} \cdot 26$ в) $\frac{8}{21} \cdot 7$ г) $56 \cdot \frac{3}{7}$
10. а) $54 \cdot \frac{5}{9}$ б) $108 \cdot \frac{11}{12}$ в) $36 \cdot \frac{7}{10}$ г) $100 \cdot \frac{21}{25}$
11. а) $11\frac{7}{9} \cdot 7$ б) $23\frac{3}{4} \cdot 24$ в) $18\frac{5}{6} \cdot 3$ г) $21\frac{5}{7} \cdot 14$
12. а) $6\frac{9}{10} \cdot 8$ б) $103\frac{7}{24} \cdot 16$ в) $81\frac{81}{82} \cdot 4$ г) $15\frac{79}{81} \cdot 27$
13. а) $6 \cdot 14\frac{5}{8}$ б) $32 \cdot \frac{17}{18}$ в) $28 \cdot \frac{19}{21}$ г) $36 \cdot \frac{4}{9}$
14. а) $72 \cdot 3\frac{1}{8}$ б) $81 \cdot 2\frac{5}{21}$ в) $102 \cdot 5\frac{23}{54}$ г) $99 \cdot 8\frac{16}{77}$
15. а) $\frac{7}{9} : 3$ б) $\frac{5}{8} : 7$ в) $\frac{3}{5} : 2$ г) $\frac{11}{13} : 3$
16. а) $\frac{9}{11} : 3$ б) $\frac{14}{15} : 7$ в) $\frac{32}{43} : 16$ г) $\frac{72}{85} : 36$
17. а) $7\frac{1}{5} : 4$ б) $11\frac{2}{3} : 9$ в) $15\frac{5}{6} : 7$ г) $18\frac{4}{11} : 10$
18. а) $9\frac{1}{8} : 5$ б) $102\frac{3}{4} : 23$ в) $702\frac{5}{7} : 71$ г) $305\frac{17}{18} : 6$
19. а) $6 : \frac{2}{5}$ б) $5 : \frac{4}{9}$ в) $4 : \frac{3}{11}$ г) $12 : \frac{12}{23}$
20. а) $9 : 1\frac{1}{2}$ б) $18 : 5\frac{2}{5}$ в) $32 : 4\frac{5}{8}$ г) $54 : 5\frac{6}{7}$
21. а) $121 : 4\frac{5}{7}$ б) $33 : 5\frac{2}{9}$ в) $64 : 7\frac{7}{9}$ г) $321 : 18\frac{4}{5}$
22. а) $128 : 3\frac{1}{3}$ б) $342 : 8\frac{7}{10}$ в) $504 : 2\frac{8}{5}$ г) $725 : 3\frac{2}{3}$
23. Који број треба поделити бројем $8\frac{3}{4}$ да би се добио 142?

24. Прав угао износи 90^0. Колико степена има $3\frac{3}{4}$ правог угла?
25. Колики је 15 део од а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{3}{4}$ в) $2\frac{5}{6}$?
26. 100 *kg* неке робе стаје $2\,326\frac{1}{2}$ дин. Колико стаје 1 *kg*?
27. За једно одело потребно је $3\frac{3}{4}$ *m* штофа. Колико је потребно метара штофа за 12 одела?
28. Један *kg* кафе стаје $20\frac{1}{5}$ дин. Колико стају 15 *kg*?
29. У једном сребрном динару има $4\frac{1}{8}$ *gr* чиста сребра. Колико има сребра у 150 комада?
30. Један зупчаст точак има 62 зупца, растојање између сваka два зупца је $3\frac{5}{18}$ *cm*. Колики је обим точка?
31. Једна породица троши дневно $8\frac{3}{8}$ *kg* угља. Колико троши месечно?
32. Један завод троши зими месечно $1\frac{1}{6}$ m^3 дрва. Колико је потребно m^3 за 5 месеци?
33. Коњу је потребно дати дневно $3\frac{5}{8}$ *kg* зоби. Колико је потребно *kg* зоби за 8 коња?
34. 12 метара неког штофа стају $1\,234\frac{5}{6}$ дин. Колико стаје 1 метар?
35. Локомотива пређе $218\frac{3}{4}$ *km* за пет сати. Колико прелази на сат, а колико на минуту?
36. Производ два броја је $132\frac{5}{12}$, један од њих је 14, који је онај други?
37. Производ два броја је 76. Један од њих је $8\frac{3}{4}$, колики је онај други?
38. Дељеник је 723, а количник $12\frac{3}{5}$. Колики је делилац?
39. Неко заради дневно $42\frac{3}{4}$ дин. За колико ће дана зарадити 180 дин.?
40. Један пешак прелази дневно $8\frac{3}{8}$ *km* на сат. За колико ће сати прећи 90 *km*?
41. Неко прода своје пољско имање од $14\frac{3}{5}$ *ha* за 99 328 дин. Пошто је продао 1 *ha*?
42. Ако воз пређе $282\frac{3}{5}$ *km* за 6 сати. Колико прелази за 1 сат?

30. Множење разломка разломком

Пример 1. $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$.

Помножимо $\frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{12}{7}$. Кад помножимо $\frac{4}{7}$ са 3, добијемо $\frac{12}{7}$. Ми знамо, код производа несталног множиоца, да се и резултат мења, и то: Ако се умањи множилац за неколико пута, за толико исто пута ће се умањити и резултат. Умањимо, у производу $\frac{4}{7} \cdot 3$, множилац пет пута: $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5}$, добићемо и резултат пет пута мањи: $\frac{12}{7} : 5 = \frac{12}{7 \cdot 5}$, па пишемо $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{12}{35}$. Отуд правило:

Разломак се множи разломком, кад се производ бројилаца оба разломка подели производом именилаца.

Пример 2. $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{9 \cdot 4} = \frac{\overset{2}{\cancel{24}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{2}{3}$ или $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

Овај пример нам показује да можемо при множењу разломка разломком скратити (што треба увек радити) ма који бројилац са ма којим имениоцем, па после множити (по чл. 39 пр. 1).

Пример 3. $4\frac{5}{8} \cdot 2\frac{5}{4} = \frac{37}{8} \cdot \frac{13}{4} = \frac{37 \cdot 13}{8 \cdot 4} = \frac{481}{32} = 15\frac{1}{32}$

Ако имамо да множимо мешовити број мешовитим бројем или мешовити број разломком или разломак мешовитим бројем, морамо најпре мешовите бројеве претворити у неправе разломке па их помножити (по чл. 28 пр. 1, 2).

31. Дељење разломка са разломком

Пример 1. $\frac{7}{9} : \frac{3}{4} = \frac{7}{9 \cdot 3} \cdot 4 = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 3} = \frac{7}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$

Поделимо $\frac{7}{9} : 3$ (по чл. 28 пр. 1) добићемо $\frac{7}{9 \cdot 3}$ или $\frac{7}{27}$. Ми знамо да је количник два броја, код којих је дељеник сталан, толико пута већи, колико се пута делилац умањи. Умањимо у нашем случају делилац четири пута $\left(\frac{7}{9} : \frac{3}{4}\right)$, резултат ће бити четири пута већи, као:

$$\frac{7}{9} : \frac{3}{4} = \frac{7}{9 \cdot 3} \cdot 4 = \frac{7}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{27} = 1\frac{1}{27}$$

Тако смо наш пример дељења преобразили у множење. Други чинилац $\frac{4}{3}$ је реципрочна вредност делиоца примера 1 $\frac{3}{4}$. Отуд правило:

Разломак се дели разломком, ако се дељеник помножи реципрочном вредношћу делиоца, или ако се производ бројиоца дељеникова и имениоца делиочева подели производом имениоца дељеникова и бројиоца делиочева.

Пример 2. $\frac{27}{32} : \frac{9}{14} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{16}{\cancel{32}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{9}}} = \frac{3 \cdot 7}{16} = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}$ или

$$\frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{16}{\cancel{32}}} : \frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{7}{\cancel{14}}} = \frac{3 \cdot 7}{16} = \frac{21}{16} = 1\frac{5}{16}$$

Пример 2 показује нам да можемо при дељењу разломка разломком (и треба то увек чинити кад се може) скратити бројилац и бројилац, а именилац и именилац.

Упамти: Код множења разломка разломком скраћује се унакрсно а множи водоравно, а код дељења скраћује се водоравно а множи се унакрсно.

Пример 3. $8\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{26}{3} : \frac{11}{4} = \frac{26}{3} \cdot \frac{4}{11} = \frac{104}{33} = 3\frac{5}{33}$

Мешовите бројеве при деоби треба претворити у неправе разломке, па их поделити (по чл. 31 пр. 1 или 2).

Задаци:

1. Како се множи разломак са разломком?
2. Како се поступа при множењу ако има мешовитих бројева?
3. Како се дели разломак разломком?
4. Како се поступа при дељењу ако има мешовитих бројева?
5. Како се скраћује при множењу а како при дељењу?
6. а) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}$ б) $\frac{11}{13} \cdot \frac{14}{15}$ в) $\frac{9}{17} \cdot \frac{17}{18}$
7. а) $49\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}$ б) $54\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9}$ в) $108\frac{1}{2} \cdot \frac{42}{53}$
8. а) $\frac{7}{15} \cdot 2\frac{3}{7}$ б) $\frac{9}{17} \cdot 8\frac{5}{6}$ в) $\frac{17}{25} \cdot \frac{40}{51}$
9. а) $5\frac{3}{4} \cdot 2\frac{5}{8}$ б) $17\frac{3}{4} \cdot 2\frac{7}{9}$ в) $18\frac{9}{11} \cdot 5\frac{5}{7}$
10. а) $4\frac{2}{7} \cdot 3\frac{2}{5}$ б) $6\frac{9}{10} \cdot 7\frac{3}{4}$ в) $1\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{8}$

11. а) $7\frac{2}{9} \cdot 9\frac{5}{17}$ б) $17\frac{5}{13} \cdot 13\frac{2}{7}$ в) $2\frac{4}{15} \cdot 4\frac{2}{7}$

12. а) $\frac{3}{8} : \frac{3}{4}$ б) $\frac{7}{9} : \frac{1}{12}$ в) $\frac{14}{15} : \frac{7}{10}$

13. а) $\frac{15}{17} : \frac{5}{7}$ б) $\frac{9}{14} : \frac{3}{5}$ в) $\frac{6}{7} : \frac{3}{14}$

14. а) $\frac{6}{21} : \frac{3}{7}$ б) $\frac{24}{25} : \frac{6}{7}$ в) $\frac{5}{6} : \frac{7}{18}$

15. а) $7\frac{1}{5} : 4\frac{1}{4}$ б) $3\frac{4}{5} : \frac{5}{6}$ в) $5\frac{4}{3} : \frac{3}{5}$

16. а) $11\frac{2}{3} : 9\frac{1}{8}$ б) $4\frac{5}{8} : \frac{5}{56}$ в) $5\frac{1}{4} : \frac{7}{10}$

17. а) $15\frac{5}{6} : 19\frac{10}{11}$ б) $\frac{11}{12} : 2\frac{3}{4}$ в) $\frac{8}{15} : 3\frac{13}{33}$

18. а) $13\frac{4}{11} : 1\frac{3}{8}$ б) $7\frac{1}{2} : \frac{5}{8}$ в) $4\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$

19. а) $104\frac{1}{2} : 11\frac{4}{9}$ б) $5\frac{3}{4} : 3\frac{2}{5}$ в) $3\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$

20. а) $\frac{21}{35} : 1\frac{2}{3}$ б) $\frac{37}{42} : 2\frac{5}{8}$ в) $\frac{16}{75} : 1\frac{17}{25}$

21. а) $15\frac{17}{41} : 3\frac{5}{8}$ б) $8\frac{3}{4} : \frac{7}{9}$ в) $\frac{41}{72} : 3\frac{1}{5}$

22. Колико је а) $\frac{2}{3}$ б) $\frac{3}{4}$ в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{5}{6}$ од $72\frac{3}{3}$?

23. Који број треба поделити на $\frac{5}{7}$ па да се добије $18\frac{1}{4}$?

24. Један метар неког штофа стаје $127\frac{1}{2}$ дин. Колико стају $3\frac{1}{4}$ *m*?

25. Један сељак има имање од $42\frac{2}{3}$ *ha*; $2\frac{1}{2}$ тога имања је под шумом. Колико је *ha* под шумом?

26. Један воз прелази на час $38\frac{3}{4}$ *km*. Колико ће *km* прећи за $4\frac{1}{4}$ часа?

27. Један *hl* пшенице тежи $72\frac{5}{6}$ *kg*. Колика је тежина а) $5\frac{1}{2}$ *hl*; б) $12\frac{3}{4}$ *hl* и в) $42\frac{5}{8}$ *hl* ?

28. Два броја дају производ $182\frac{3}{4}$; један је од њих $72\frac{1}{2}$. Колики је онај други број?

29. Дељеник је $75\frac{5}{6}$ а количник $18\frac{7}{8}$; колики је делилац?

30. Нека радња је платила једног месеца $534\frac{3}{4}$ дин. на име осветљења. Колико је горело сијалица кад се на сваку сијалицу плаћа месечно по $23\frac{1}{4}$ дин.?

31. Кад неки ауто пређе $98\frac{3}{4}$ *km* за $3\frac{1}{2}$ сата. Колико *km* је прелазио ауто просечно на сат?

32. Један пешак прелази $5\frac{5}{8}$ *km* на сат. За које би време прешао $42\frac{1}{2}$ *km*?

33. Неко заради дневно $72\frac{3}{4}$ дин. За колико ће дана зарадити $2\,117\frac{1}{4}$ дин ?

34. Велико буре хвата $213\frac{1}{8}$ *hl*, а мање $42\frac{5}{8}$ *hl* вина. Колико се пута може напунити мање буре вином из већег бурета?

32. **Претварање коначних децималних бројева у разломке**

Пример 1. Претвори 0,45 у обичан разломак.

Вредност децималног броја је 45 стотих, а то значи да је једна јединица подељена на 100 једнаких делова, а од тих стотину једнаких делова је узето 45.

Број на колико се једнаких делова поделила једна јединица ми пишемо у имениоцу, а број који показује колико смо од тих делова узели, пишемо у бројиоцу чл. 5 стр 9; дакле

$$0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$$

Пример 2. Напиши у виду обичног разломка 4,275.

Вредност задатог децималног броја је 4 275 хиљадитих, а то знача да смо једну јединицу поделили на хиљаду једнаких делова, па смо узели 4 јединице и 275 од тих хиљадитих делова, па пишемо:

$$4{,}275 = \frac{4\,275}{1\,000} = \frac{855}{200} = \frac{171}{40} = 4\frac{11}{40}$$

Поступак: *Да би се један коначни децимални број претворио у разломак, треба укинути децималну запету и тако добивени број написати у бројиоцу, а у имениоцу написати јединицу са онолико нула колико има децимала у задатом броју.*

33. Претварање обичног разломка у децимални број

Примери:

1) $\frac{73}{4} = 73 : 4 = 18{,}25$
10
20

2) $\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3{,}5$
10

3) $\frac{59}{8} = 59 : 8 = 7{,}375$
30
60
40

4) $\frac{81}{25} = 81 : 25 = 3{,}24$
60
100

5) $\frac{238}{75} = 238 : 75 = 3{,}1733\ldots$
130
550
250
250
250

6) $\frac{14}{3} = 14 : 3 = 4{,}66666\ldots$
20
20
20
20
20

7) $\frac{5}{11} = 5 : 11 = 0{,}454545$
50
60
50
60
50
60
50

8) $\frac{7}{22} = 7 : 22 = 0{,}31818$
70
40
180
40
180
40

9) $\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}\dot{5}7142\dot{8}571428\ldots$
40
50
10
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40 итд.

10) $\frac{22}{7} = 22 : 7 = 3{,}\dot{1}4285\dot{7}142857\ldots.$
10
30
20
60
40
50
10
30
20
60
40
50
10....

Поступак. Да би се један обичан разломак претворио у децимални број, треба поделити бројилац са имениоцем.

При претварању обична разломка у децимални број, могу се углавном појавити два случаја:

1) Деоба се свршава без остатка; тада се добивени децимални број назива коначан (Примери: 1, 2, 3, 4).

Упамти: Сваки обичан разломак може се претворити у коначан децимални број, кад му именилац чине чиниоци саме двојке или саме петице или и двојке и петице. (Пример 3: именилац $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, пример 4: именилац $25 = 5 \cdot 5$; према томе је коначан).

2) Деоба се никако не свршава без остатка, тада се добивени децимални број зове непотпун или бескрајан (пример: 6, 7, 8, 9 и 10).

У овом случају при настављеном дељењу морају се јављати остаци који су већ били, па се ради тога морају и у количнику понављати цифре и то истим редом.

Ови децимални бројеви у којима се у количнику понавља једна цифра, или више цифара (пример 6 и 7) зову се *периодични,* а саме цифре које се понављају зову се *периодне цифре* (периода).

Периодне се цифре напишу једанпут, па се над првом и последњом цифром стави тачка. Пример 6) $\frac{14}{3} = 4{,}\dot{6}$. Пример 7) $\frac{5}{11} = 0{,}\dot{4}\dot{5}$. Пример 8) $\frac{7}{22} = 0{,}3\dot{1}\dot{8}$. Пример 9) $\frac{4}{7} = 0{,}\dot{5}7142\dot{8}$. Пример 10) $\frac{22}{7} = 3{,}\dot{1}4285\dot{7}$.

Сваки бескрајни децимални број, који је постао од обичног разломка, мора имати периодних цифара.

Ако периода почиње одмах иза децималне запете, периодичан се децимални број зове *чисто периодичан.*

Чисто периодични су децимални бројеви они у примерима 6, 7, 9 и 10 ($4,\dot{6}$; $0,\dot{4}\dot{5}$; $0,\dot{5}7142\dot{8}$, $3,\dot{1}4285\dot{7}$).

Ако периода не почиње одмах иза децималне запете, такав се периодичан децимални број зове *мешовито периодичан.*

Мешовито периодичан децимални број је онај у примеру 8 ($0,3\dot{1}\dot{8}$), и онај у примеру 5 ($3,17\dot{3}$).

Упамти : Ако је именилац обичног разломка састављен из чинилаца простих бројева, међу којима нема ни двојке ни петице, онда се такав разломак може претворити у чисто периодичан децимални број. На пр. $\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} = 4,\dot{6}$.

Ако је именилац обичног разломка састављен из чинилаца каквих простих бројева и поред тога има и чинилаца двојака или петица, онда се такав разломак може претворити у мешовито периодичан децимални број. На пр. $\frac{7}{22} = 0,3\dot{1}\dot{8}$ или $\frac{238}{75} = 3,17\dot{3}$.

Све ово важи кад се обичан разломак најпре скрати докле год се може.

34. Претварање периодичних децималних бројева у разломке]

а) *Претварање чисто периодичног децималног броја у обичан разломак.*

Пример 1. Претворити у обичан разломак 0·777.....

Децимални број 0,777 има једну периодичну цифру. Помножимо га ради тога са 10, добићемо

10 струку	вредност задатог разломка			. . .	7,777.....
1 струка	„	„	„	. . .	0,777.....
9 струка	„	„	„	. . .	7

а једнострука вредност $\frac{7}{9}$ према томе је

$$0,7 = \frac{7}{9} .$$

Пример 2. Претворити у обичан разломак 0,737373. . Децимални број 0,737373 . . . . има две периодичне цифре. Помножимо га са 100. Добићемо

100 струку	вредност	заданог	децималног	броја	73 , 737373 . . . .
1 струка	вредност	заданог	децималног	броја	0 , 737373 . . . .
99 струка	„	„	„	„	73

а једнострука вредност $\frac{73}{99}$; дакле:

$$0,\dot{7}\dot{3} = \frac{73}{99}$$

Пример 3.

Претворити у обичан разломак 3 ,234 234 234.... То можемо написати 3 + 0 , 234 234 234 . . . . . Довољно је претворити сâм децимални број 0 , 234 234 234... па му затим написати целине (3).

Помножимо га са 1000, добићемо:

одузмемо	1000 струку	вредност	децималног	броја	234 , 234234 . . . .
	1 „	„	„	„	0 , 234234 . . . .
	999 струку	„	„	„	234

а једнострука вредност децималног броја је $\frac{234}{999}$, а децималног броја:

$$3,\dot{2}3\dot{4} \text{ биће } 3\frac{234}{999} .$$

Поступак: *Да би се један чисто периодичан децимални број претворио у обичан разломак, треба једну групу периодичних цифара написати у бројиоцу, а у имениоцу онолико деветица колико има периодичних цифара у заданом децималном броју.*

Ако у заданом децималном броју има и целих, треба целе преписати као целе мешовитог броја.

На пр. $0,\dot{4} = \frac{4}{9}$; $5,\dot{3}\dot{7} = 5\frac{37}{99}$; $13,\dot{8}7065\dot{} = 13\frac{87\,065}{99\,999}$

Напомена:

Ово правило не важи само за периодичан разломак $0.\dot{9}$.

б) *Претварање мешовито - периодичног децималног броја у обичан разломак*

Пример 1. Претворити 0·87777 . . . . у обичан разломак.

Претворимо мешовито-периодичан децимални број 0,87777 у чисто периодичан. То ћемо урадити ако га помножимо са 10, па добијемо $10 \times 0,87777 \ldots = 8,7777 \ldots$. Претворимо сада овај *чисто периодичан* децимални број у обичан разломак по чл. 34 а) $8,\dot{7} = 8\frac{7}{9} = \frac{79}{9}$ тј. $\frac{87-8}{9}$

10-то струка вредност разломка 8.7777је $\frac{79}{9}$,
а једнострука је десет пута мања, дакле:

$$0,87777 = \frac{79}{90} .$$

Пример 2. Напиши у виду обична разломка 0,362424....
Претворимо га најпре у чисто периодичан разломак множећи га са 100, па затим у обичан по члану 34 а):

$$100\cdot 0{,}362424 = 36{,}\dot{2}\dot{4} = 36\frac{24}{99} = \frac{3\,588}{99} = \frac{3\,624-36}{99},$$

а једнострука вредност:

$$\mathbf{0{,}36\dot{2}\dot{4} = \frac{3\,588}{9\,900}}.$$

Пример 3. Претвори у обичан разломак $4{,}76\,\dot{3}2\dot{8}$.
Ми тај разломак можемо написати овако: $4 + 0.76\,\dot{3}2\dot{8}$.
Разломак $0.76\dot{3}2\dot{8}$ претворимо у чисто периодичан
$100\cdot 0{,}76\dot{3}2\dot{8} = 76{,}\dot{3}2\dot{8}$, а овај у обичан $76\frac{328}{999} = \frac{76\,328-76}{999} =$
$= \frac{76\,252}{999}$. Разломак $0.76\dot{3}2\dot{8}$ је сто пута мањи, дакле $\frac{76\,252}{99\,900}$;
Сад пишемо целине:

$$\mathbf{4{,}76\dot{3}2\dot{8} = 4\frac{76\,252}{99\,900}}.$$

Поступак: Да би се један мешовито-периодичан децимални број претворио у обичан, разломак *треба написати у бројиоцу разлику између броја који сачињавају претпериодичне цифре и једна група периодичних цифара и броја претстављеног претпериодичним цифрама, а у имениоцу се напишу онолико деветица колико има периодичних цифара, кад им се са десне стране допишу онолике нуле колико има претпериодичних цифара* (пример 1 и 2).

Ако у мешовитом периодичном децималном броју има и целих, то се цели при претварању занемаре, па се у резултату напишу као цели мешовитог броја.

На пр. $\mathbf{7{,}5\dot{8} = 7\frac{58-5}{90} = 7\frac{53}{90}}$;

$$\mathbf{12{,}24\dot{3}2\dot{8} = 12\frac{24\,328-24}{99\,900} = 12\frac{24\,304}{99\,900}}.$$

35. Скраћени бројеви — приближне вредности

Пример 1. Један метар платна стаје 12,45 динара. Колико стају 5,25 м.?

Ми то знамо израдити $12{,}45\cdot 5{,}25 = 6225$

```
             2490
             6225
          -------
          65,3625
```

Одговор: 5,25 м платна стају **65,3625** динара.

Како у рачунима и у промету са новцем не постоји хиљадитих и десетохиљадитих делова динара, то пишемо само **65,36** динара или 65 дин. и 36 пара. Ми бисмо у ствари баш

толико платили, а 25 хиљадитих који се јављају у нашем рачуну занемарили, ради тога број 65,36 д., кажемо да је скраћен, тј. није математички тачан, јер постоји још децималних цифара; али су оне занемарене. Ми смо дакле узели приближну вредност. То означавамо тако што на место занемарених цифара стављамо тачке „65,36...“ дин. Узевши број 65,36... уместо 65,3625 учињена је грешка у рачуну која је мања од 5 хиљадитих јер је 2 мање од 5.

Пример 2. Један *kg* неке робе стаје 6,25 *д*. Колико стају 9,27 *kg?*

$9{,}27 \times 6{,}25 = 4635$

```
      1854
      5562
   -------
   57,9375
```

9.27 *kg* стају 57,9375 динара. Ми бисмо у овом случају писали $\mathbf{57{,}9\underline{4}}$ дин. Број $57{,}9\underline{4}$ је већи од броја 57,9375. Кад бисмо узели само 57,93 учинили бисмо грешку која је већа од 5 хиљадитих јер је 7 веће од 5, значи ближи је тачној вредности број $57{,}9\underline{4}$ него ли 57,93.., У овом смо случају поправили цифру стотих (пара) од 3 на 4, јер је прва занемарена децимална цифра већа од 5. Грешка је опет учињена, иако мања од 5 хиљадитих, с том разликом што је број $57{,}9\underline{4}$ већи по вредности од 57,9375. Ми смо то означили тако што смо поправљену цифру (4) подвукли једном малом цртицом, која нас упозорује да та цифра није тачна, већ је поправљена ради тога јер је следећа децимална цифра већа од 5.

Пример 3. Претвори $\frac{22}{7}$ у децимални разломак.

```
22 : 7 = 3,14285
 10
  30
   20
    60
     40
      5
```

Имамо посла са непотпуним дељењем. Ми можемо вредност разломка $\frac{22}{7}$ приближно означити у виду децималног броја, са једним, са два, са три... децимална места, према томе како нам је потребно у рачуну. Ако се здовољимо са две децималне цифре пишемо $\frac{22}{7} = \mathbf{3{,}14...}$, са три $\frac{22}{7} = \mathbf{3{,}14\underline{3}}$, са четири $\frac{22}{7} = \mathbf{3{,}1428}$ или $\frac{22}{7} = \mathbf{3{,}1429}$ (јер је следећа цифра 5).

Ако, дакле, хоћемо да један скраћени децимални број има одређени број децимала, и да грешка буде мања од пола последњег задржатог децимала, то поступамо: Ако је прва изо-

стављена цифра мања од 5, то се последња задржана децимална цифра остави непромењена, а уз њу се допише неколико тачака, ако је прва изостављена цифра већа од 5, то се последња задржана децимална цифра повећа за јединицу, и подвуче једном цртицом; а ако се деси случај (као у 3 примеру код петог децимала) да је прва изостављена децимална цифра 5, то се оставља на вољу, да се поступи по првом или по другом делу правила.

Задади:

1. Како се коначан десетни разломак претвара у обичан.
2. Како се обичан разломак претвара у децимални број?
3. Колико се случајева може појавити и који су, при претварању обичног разломка у децимални број?
4. Шта се зове непотпуни децимални број?
5. Шта се зове коначан децимални број?
6. Кад ће се, при претварању обичног разломка у децимални број, добити коначан а кад непотпун децимални број?
7. Шта су периодични децимални бројеви, шта периодичне цифре, а шта периоде?
8. Шта су чисто периодични, а шта мешовито периодични децимални бројеви?
9. Како се чисто периодични децимални број претвара у обичан разломак?
10. Како се мешовито периодични децимални број претвара у обичан разломак?
11. Шта су скраћени бројеви?
12. Шта се назива приближна вредност децималног броја?
13. Код каквих дељења се јављају скраћени бројеви?
14. Који је поступак кад хоћемо да један скраћени децимални број има одређени број децимала?

Претвори у обичне разломке и доведи резултат на најпростије облике:

15.	а) 0,8	б) 7,3	в) 12,4	г) 102,9
16.	а) 0,24	б) 3,32	в) 18,26	г) 304,75
17.	а) 0,275	б) 8,125	в) 17,376	г) 203,588
18.	а) 0,5875	б) 5,1125	в) 38,6652	г) 428,0025
19.	а) 0,02324	б) 8,00325	в) 40,02025	г) 500,70005

Претвори у децималне бројеве

20.	а) $\frac{3}{5}$	б) $\frac{5}{8}$	в) $\frac{12}{15}$	г) $\frac{7}{8}$
21.	а) $\frac{2}{3}$	б) $\frac{5}{7}$	в) $\frac{7}{9}$	г) $\frac{10}{11}$
22.	а) $4\frac{5}{6}$	б) $5\frac{4}{13}$	в) $8\frac{4}{45}$	г) $7\frac{11}{24}$
23.	а) $5\frac{7}{64}$	б) $7\frac{7}{60}$	в) $12\frac{6}{25}$	г) $10\frac{6}{75}$

Претвори у обичне разломке:

24.	а) $0,\dot{3}$	б) $0,\dot{6}$	в) $0,\dot{7}$	г) $2,\dot{5}$
25.	а) $0,\dot{2}\dot{3}$	б) $0,\dot{4}\dot{5}$	в) $3,\dot{9}\dot{1}$	г) $2,\dot{4}\dot{2}$
26.	а) $0,\dot{1}0\dot{8}$	б) $0,\dot{1}9\dot{8}$	в) $2,\dot{3}2\dot{4}$	г) $8,\dot{3}6\dot{7}$
27.	а) $0,\dot{2}41\dot{8}$	б) $0,\dot{3}25\dot{6}$	в) $4,\dot{7}28\dot{2}$	г) $5,\dot{0}32\dot{4}$
28.	а) $0,3\dot{2}$	б) $0,4\dot{7}$	в) $3,5\dot{6}$	г) $9,1\dot{6}$
29.	а) $0,4\dot{3}\dot{2}$	б) $0,5\dot{2}\dot{8}$	в) $3,\dot{2}\dot{5}$	г) $7,4\dot{5}\dot{2}$
30.	а) $0,01\dot{6}$	б) $0,19\dot{6}$	в) $4,00\dot{3}\dot{6}$	г) $2,14\dot{2}\dot{5}$
31.	а) $0,254\dot{3}$	б) $0,326\dot{8}$	в) $5,276\dot{5}$	г) $8,253\dot{5}$
32.	а) $0,32\dot{5}4\dot{8}$	б) $0,345678\dot{3}$	в) $0,000\dot{4}3\dot{2}$	г) $254,394\dot{7}\dot{5}$
33.	а) $3,\dot{1}432\dot{5}$	б) $0,627\dot{8}$	в) $0,0246\dot{3}$	г) $126,003\dot{2}\dot{1}$

Скрати ове бројеве на два (2) децимала:

34.	а) 4,7823	б) 0,8562	в) 12,7756	г) 8,9998

Скрати ове бројеве на 3 децимала:

35.	а) 0.87654	б) 12,78672	в) 8,88767	г) 0,23456

Скрати ове бројеве на 4 децимала:

36.	а) 0,765283	б) 1,232758	в) 3,287662	г) 5,276832

Претвори у скраћени децимални број са 2 децимала:

37.	а) $\frac{65}{9}$	б) $23\frac{1}{7}$	в) $3\frac{9}{13}$	г) 4,45 : 48

Претвори у скраћени децимални број са 3 децимала:

38.	а) $\frac{15}{7}$	б) $2\frac{12}{13}$	в) $\frac{90}{17}$	г) $\frac{13}{21}$

ПРОСТО ПРАВИЛО ТРОЈНО

36. Однос количина

Пример 1. *8 kg шећера стају 160 дин. Колико стају 12 kg шећера?*

У овом примеру имамо посла са две врсте количинâ: са количином шећера и са количином динара.

Лако се увиђа да ове две количине зависе једна од друге, јер ако се мења једна, количина шећера, мења се према првој и *друга количина*, динара. Што је већа количина шећера, веће ће требати количина динара. Од прве су нам количине позната два броја: 8 *kg* и 12 *kg*, а од друге количине само један број, 160 дин. Ми тражимо онај други број друге количине. Кад год су нам позната два броја једне количине и један број друге количине па се тражи онај други број друге количине, то имамо посла са простим правилом тројним.

Пример 2. *12 радника сврше неки посао за 36 дана. За колико дана би тај исти посао свршили 8 радника?*

У нашем овом примеру такође имамо посла са две врсте количина: количином радника и количином дана. И овде обе врсте количина зависе једна од друге. Промена једне количине повлачи за собом промену друге количине.

Лако се увиђа, ако се претпостави да сви радници подједнако раде дневно, да ће се посао пре свршити ако би више радника радило, и обрнуто: што је више радника, то ће требати мање дана, да један исти посао сврше.

И овде су позната два броја једне количине: 12 радника и 8 радника, и један број друге количине: 35 дана. Тражи се онај други број (дана) друге количине. И овде, дакле имамо посла са простим правилом тројним.

Ови примери 1. и 2. показују нам да количине једна од друге зависе на два начина. Количине у математици могу зависити једна од друге на разне начине. Ми нећемо у овом разреду имати посла са задацима у којима количине зависе једна од друге на неки други начин, сем на ова два начина:

1. *Ако количина једне врсте порасте или опадне неколико пута, то ће количина друге врсте исто толико пута порасти или опасти* (То је случај у нашем првом примеру);

2. *Ако количина једне врсте порасте или опадне неколико пута; то ће и количина друге врсте исто толико пута опасти или порасти* (То је случај у нашем другом примеру).

За две врсте количина које се понашају једна према другој тако да кад једна врста количине порасте два, три четири.... пута, и друга врста порасте или опадне два, три, четири.... пута, кажемо да су те две количине пропорционалне, и то:

1) Ако повећање или умањење једне количине два, три, четири.... пута повлачи за собом повећање или умањење два, три, четири.... пута друге врсте количине, то за тај начин односа двеју количина кажемо да су *управо (директно) пропорционалне.*

Тај је однос количинâ код: количинâ шећера и количинâ динара, количинâ часова и количинâ пређених км., лоличинâ ћа неког земљишта и количинâ hl добивене пшенице ит.д.

2. Ако повећање или умањење једне врсте количинâ два, три, четири.... пута, повлачи за собом умањење или повећање два, три, четири ... пута друге врсте количинâ, то за тај начин односа двеју количина кажемо да су *обрнуто (индиректно) пропорционалне.*

Овај однос количина имамо код: количине радника и количине дана да се један исти посао сврши, код количине добивеног платна у метрима (дужина) од одређене пређе, и количине у см ширине; код количина броја људи и количине времена за које им траје извесна количина хране.

37. Решавање задатака простог правила тројног (свођење на јединицу)

Вратимо се сада нашим примерима.

Пример 1. Поставимо задатак: 8 *kg* шећера стају 160 динара. Колико стају 12 *kg* шећера?

Ми ћемо овај задатак, као и све задатке простог правила тројног, решавати само свођењем на јединицу. То радимо простим расуђивањем: 8 *kg* шећера стају 160 дин., питамо се шта стаје 1 *kg*? Јасно је да 1 *kg* стаје 8 пута мање тј. $\frac{160}{8}$ дин. или 20 динара.

Сад знамо цену једног *kg* шећера, па нам је лако израчунати и вредност 12 *kg*: $12 \cdot 20 = 240$ динара.

Ради тога се први део задатака: 8 *kg* шећера стају 160 динара, зове погодба, а други део: шта стају 12 *kg*, питање.

При решавању оваквих задатака најпре треба писати погодбу, а испод погодбе други део, питање, пазећи да бројеви истих количина дођу један под други, а место непознатог броја количине у питању, пише се једно слово, на пр. „x".

	8 *kg*	**160 дин.** (погодба)
	12 *kg*	**x дин.** (питање)
Расуђивање	8 *kg*	160 дин.
	1 *kg*	$\frac{160}{8}$ (осам пута мање)
	12 *kg*	x дин.
	12 *kg*	$\frac{160}{8} \cdot 12$ дин. (12 пута више од 1 *kg*)

$$x = \frac{\overset{20}{\cancel{160}}}{\cancel{8}} \cdot 12 = 240.$$

12 *kg* стају 240 дин.

Пример 2. 12 радника сврше неки посао за 36 дана. За колико дана би тај посао свршили 8 радника?

12 радника	**36 дана** ... (погодба)	
8 „	**x „** ... (питање)	
расуђивање: 12 радника	36 дана	
1 „	$36 \cdot 12$ „	(1 радник би морао 12 пута више да ради да би тај посао свршио.)
8 „	x „	
8 „	$\frac{36 \cdot 12}{8}$ „	(8 радника би тај посао свршили за 8 пута мање времена).

$$x = \frac{\overset{18}{\cancel{36}} \cdot \overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{8}}} = 54 \text{ дана.}$$

8 радника би свршили тај посао за 54 дана.

Напомена. У математици уопште, кад су везане две количине тако да промена једне повлачи за собом на ма какав начин промену друге количине, кажемо да је једна количина *функција* друге количине.

Задаци:

1. Кажи две врсте количина, које зависе једна од друге.
2. Шта је просто правило тројно?
3. Како количине у математици могу зависити једна од друге?
4. Са којим количинама имамо посла у простом правилу тројном?
5. Шта су пропорционалне количине? Кажи један пример.
6. Шта су управо пропорционалне количине. Кажи један пример.
7. Шта су обрнуто пропорционалне количине? Кажи један пример.
8. Шта је погодба, а шта питање у једном задатку простог правила тројног? Покажи на једном примеру.
9. Шта у математици уопште називамо функцијом?
10. 1 *kg* кафе стаје 24,50 динара; колико стају 8 *kg?*
11. 1 *hl* вина стаје 420 динара, колико стају $4\frac{1}{2}$ *hl?*
12. 1 *ar* неког земљишта стаје 837 динара; колико стају $5\frac{1}{2}$ ари?
13. Тежак може прећи 1 *km* за $\frac{1}{4}$ часа; за колико би времена прешао 8 *km?*
14. 1 *m* неког штофа стаје 125 динара и 40 пара; колико стају $3\frac{1}{4}$ *m?*

15. Железнички воз прелази за 1 час $42\frac{1}{2}$ *km*. Колико прелази за 1 минуту?
16. Једна породица троши дневно 42 дин. 30 пара. Колико троши недељно, а колико месечно?
17. Један сељак би подигао једну ограду за 14 дана. За колико би дана тај посао свршили 8 сељака?
18. За 1 динар могу се купити 3 јабуке; колико се јабука може купити за 142 динара?
19. Из једне цеви истиче за минуту 580 *l* воде; колико литара воде истече за 1 дан?
20. 1 коњ пређе 730 *m* за једну минуту; колико пређе на сат?
21. Једна извесна количина хлеба може трајати једном човеку 8 дана; колико би дана трајао тај хлеб четворици?
22. Једно клатно учини 90 клаћења за 1 минуту; за које би време учинило 5 400 клаћења?
23. 1 cm^3 чиста злата тежак је 19,25 *gr*. Колика је тежина 1 dm^3 273 cm^3?
24. 1 cm^3 живе тежи 13,6 *gr*. Колико тежи 1 dm^3 живе?
25. 1 морска миља износи 1,852 *km*. а) Колико *km* има у 5 морских миља? б) Колико миља има у 15,742 *km?*
26. 9 *kg* леће стају 27 динара; шта стају а) 72 *kg* леће; б) 104 *kg?*
27. 8 m^2 неког плаца за грађење стају 1 936 динара. Шта стају а) 32 m^2; б) 7 282,05 m^2?
28. 1[illegible] радника сврше неки посао за 27 дана. а) За колико би дана тај посао свршили 12 радника? б) Колико радника би требало да тај посао сврше за 48 дана?
29. Један коњ поједе 54 *kg* сена за 6 дана. а) Колико ће појести за 30 дана? б) Колико би *kg* сена требало за пет коња за три зимска месеца (децембар, јануар и фебруар)?
30. 12 сељака окопају неку њиву за 10 сати. а) За колико би сати окопали ту њиву а) 8 сељака; б) 15 сељака?
31. 10 cm^3 леда теже 47 *gr*. Колико теже а) 8,326 dm^3; б) 12,732286 m^3?
32. Предњи точак на неким колима обрне се 72 пута док се задњи обрне 64 пута. Колико ће се пута обрнути предњи точак док се задњи обрне 32 пута?
33. 5 dm^3 олова теже 56,75 *kg* Колико теже 9 dm^3 750 cm^3?

34. Ако неки трговац заради на 18,5 *kg* робе 471,75 дин. Колико би зарадио на 128,75 *kg* исте робе?

35. Неки пешак дође к циљу прелазећи дневно само 3 *km* за $8\frac{1}{2}$ дана. Кад би приспео циљу да прелази дневно 24 *km?*

36. Једноме раднику плаћају недељно, кад ради 8 сати дневно, 264 динара; колико му се плаћа недељно ако ради само 6 сати дневно?

37. Неки посао сврше 8 радника за 32 дана; за колико дана ће тај посао свршити 24 радника?

38. Неко је свршио $\frac{2}{3}$ посла за 6 дана. Колико још дана треба да ради, па да тај посао сврши?

39. Сенка неког дрвета је дугачка 6,2 *m*, а сенка управног штапа од 1 *m* дуга је 5,8 *m*. Колико је високо дрво? (Дужина сенке је управно пропорционална са висином дрвета).

40. Неки косач покоси неку ливаду за 6 дана, радећи дневно $7\frac{1}{2}$ часова. За које би време покосио ту ливаду да је радио дневно $2\frac{1}{4}$ часа?

41. Златник од 20 динара тежак је $6\frac{7}{10}$ *gr*, а чистога му је 0.93. Колико грама чиста злата има у њему?

42. Један капитал доноси годишње интереса 5 842 дин. Колико доноси за а) 4 месеца; б) 8 месеци; в) 2 г. и 3 месеца?

43. Један зид су сазидали 22 зидара за 42 дана. Колико би зидара требало да тај зид подигну за 7 дана?

44. Нека железничка пруга има пењање 5/1 000 (на хиљаду метара дужине пењање је 5 метара висине). На коју се висину попне воз кад пређе 18 725 метара пруге?

45. Меридијански круг има у обиму 40 000 *km*. а) Колико метара има једна земаљска миља, кад се зна да је она 25 део дужине меридијановог лука који одговара једном степену? б) Колико метара има једна географска миља која се рачуна као 20-ти део дужине лука једног меридијанског степена?

46. 24 радника дорадили би неку кућу за 54 седмице. Колико би радника требало узети да ту кућу доараде за 36 седмица?

47. У неком гарнизону имају 4 224 војника хране за 6 месеци. Колико би војника требало отпустити па да та храна траје 8 месеци?

48. Радећи 8 сати дневно, једна група радника свршила је посао за 21 дан. Колико би морала дана радити иста група, да су радили 6 сати дневно, па да тај посао доврше?

49. 5 енглеских стопа износе 1,524 *m*. Колико износи енглеска миља у метрима? (1 енглеска миља = 5 280 стопа).

50. Један часовник заостаје за 12 часова 4 минута. Колико ће заостати за 7 дана?

51. За неки зид који је дуг 14,5 потребно је 6 380 комада опека. Колико би још требало опека па да се зид продужи за 5,5 *m?*

52. Једна њива од $14\frac{2}{5}$ *ha* може дати $93\frac{3}{5}$ *hl* пшенице. Колико пшенице може дати њива од $8\frac{1}{2}$ *ha?*

53. За 4 коња има сена за три месеца. Колика би та количина сена трајала за 6 коња?

ПРОЦЕНТНИ РАЧУН

38. Објашњења

Реч проценат је дошла од латинске речи pro centum а значи „за стотину" или „на стотину" или „од стотине". Према овоме проценат значи: од стотине јединицâ једне исте количине узети у обзир неколико јединица. Знак за проценат је „%" и он, се бележи уз број који показује колико јединица неке количине треба узети у обзир на пр. 5%, $4\frac{1}{2}$%, значи да од сто јединица исте количине треба узети у обзир 5; $4\frac{1}{2}$ итд. Зависност једне количине од друге најјасније се претставља у процентима. То ће следећи примери јасно показати.

Пример 1. У неком разреду има 20% слабих ученика. Шта то значи?

Ми претпоставимо да у разреду има 100 ученика, па би од тих 100 било слабих 20.

Како у разреду нема толико ученика, то и нема 20 слабих ученика. Ако у разреду има 50 ученика, према горњем знамо да ће бити 10 слабих ученика; ако у разреду има 25 ученика, то ће слабих бити само 5 итд.

Пример 2. Шта значи 3% од бруто тежине?

На сваких 100 *kg* бруто тежине треба узети у убзир 3 *kg*. Кад то знамо, ми размишљањем добијемо јаснију претставу, колико треба узети јединица у обзир, кад знамо бруто тежину. Ако је бруто тежина 100 *kg*, узећемо у обзир 3 *kg*; ако је бруто тежине 50 *kg*, узећемо обзир $1^1/_2$ *kg* итд.

Из ових примера видимо да је $5^0/_0$, $4^1/_2{}^0/_0$, $20^0/_0$, $3^0/_0$, све једно исто као и $\frac{5}{100}$, $\frac{4^1/_2}{100}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{3}{100}$ итд.

39. Процентни рачун

Код процентног рачуна јављају се обично три количине:

1) Број који показује количину од које треба израчунавати проценте. Тај број се зове ***„основна вредност“***, или ***„главница“***.

2) Број који показује колико јединица на сваких 100 јединица основне вредности треба узети у обзир. Тај број се зове ***„проценат“***.

3) Број који показује, колико укупно износи јединица израчунати процентни део од целе основне вредности. Тај број се зове ***„процентни износ“***.

Пример. $3^0/_0$ од 500 је 15. Овде је 500 основна вредност, 3 је проценат, а 15 је процентни износ.

Кад год су две од горњих трију количина познате, увек се може трећа израчунати. Према томе се процентни рачун бави израчунавањем једне од горњих количина, кад су оне друге две познате:

а) Може бити позната основна вредност и проценат, па се тражи процентни износ.

б) Може бити позната основна вредност и процентни износ, па се тражи проценат, или

в) Може бити познат процентни износ и процанат па се тражи основна вредност.

Ми ћемо у овом разреду показати само како се налази процентни износ, кад су дате основна вредност и проценат; док ћемо задатке који се односе на б) и в) решавати у старијим разредима.

40. Израчунавање процентног износа

Пример 1. Колико је $3^0/_0$ од 750?

Задатке ове врсте решаваћемо као и задатке правила тројног, свођењем на јединицу.

Ми можемо горњи пример овако поставити: Кад се узму у обзир од 100 јединица 3, колико се мора узети у обзир од 750 јединица, дакле:

100	3
750	x
Расуђивање: 100	3
1	$\frac{3}{100}$
750	$\frac{3}{100} \cdot 750$

$$x = \frac{3}{100} \cdot 750 = 3 \cdot 7{,}5 = 22.5$$

Од 750 јединица треба узети у обзир $22^1/_2$ јединице.

Пример 2. *У једној вароши има 72 300 становника. Годишњи прираштај становништва је $18^0/_0$. Колико ће бити становника у тој вароши након године дана.?*

Очигледно је да се и овде тражи процентни износ. Позната нам је основна вредност 72 300 и проценат 18.

на	100 стан.	18 (погодба)
„	72 300 „	x (питање)

Расуђивање: на	100 стан. је прираштај	18
на	1 „ „ „	$\frac{18}{100}$
на	72 300 „ „ „	$\frac{18}{100} \cdot 72\,300$

$$x = \frac{18}{100} \cdot 72\,300 = 18.723$$

$$\begin{array}{r} 18.723 \\ 5784 \\ \hline 13\,014 \end{array}$$

Процентни износ је 13 014 или према нашем примеру у једној години порасте број становника у вароши за 13 014, а свега ће становника после годину дана бити у тој вароши: $72\,300 + 13\,014 = 85\,314$.

Пример 3. *У некој шуми има 82 700 дрвета. Посечено је $22^0/_0$. Колико је дрвета још остало?*

Основна вредност је 82 700, а проценат је 22. Тражи се процентни износ.

Од	100 дрвета је посечено 22 дрвета	(погодба)
„	82 700 „ „ „ x	(питања)

Расуђивање:

од	100 др.	22
од	1 „	$\frac{22}{100}$
од	82 700 „	$\frac{22}{100} \cdot 82\,700$

$$x = \frac{22}{100} \cdot 82\,700 = 22 \cdot 827 = 1\,654$$

$$\begin{array}{r} 1\,654 \\ 16\,54 \\ \hline 18\,194 \end{array}$$

Процентни износ јо 18 194, тј. посечено је свега дрвета 18 194, па према томе је остало 82 700 — 18 194 = 64 506 дрвета.

Пример 4. Нека течност са бурадима тежи (бруто) 1 320 *kg*. Дара се рачуна 4%. Колика је тежина саме течности (чисто)?

Основна вредност је 1 320 *kg*, проценат је 4, а тражи се процентни износ.

бруто	100 *kg* дара	4 *kg*	(погодба)
	1 320 *kg* „	x	(питање)

расуђивање: на 100 *kg* бруто тежине рачуна се 4 *kg* даре.

„ 1 „ „ $\frac{4}{100}$

„ 1 320 „ „ „ $\frac{4}{100} \cdot 1\,320$ „

$$x = \frac{4}{100} \cdot \mathbf{1\,320} = \mathbf{4 \cdot 13{,}20 = 52{,}80} \textbf{ кг.}$$

Прецонтни износ или дара тежи 52 *kg* и 800 *gr* а нето течности је 1 320 — 52,800 = 1 267,200 или 1 267 *kg* и 200 *gr*.

Напомена: Из предњих примера се види, ако се добро загледа, да се процентни износ израчунава, кад се проценат помножи основном вредношћу, тај производ подели са 100; дакле један исти начин у свим задацима.

За овакву врсту задатака у математици се обично употребљава један образац или формула. То се ради овако: обележи се основне вредност једним словом **„*к*“**, проценат другим словом **„*р*“**, а процентни износ, опет једним словом **„*i*“**.

Према свим предњим примерима је

$$i = \frac{p \cdot к}{100}$$

и то је образац за израчунавање процентног износа (i), кад су познати основна вредност (к) и проценат (р).

Сваки задатак у коме се тражи процентни износ решава се, кад се најпре напише горњи образац, па се слова замене бројевима који су задати и затим се ради. На пр. у 1 примеру: р = 3% к = 750 i = ?

$$i = \frac{р \cdot к}{100} = \frac{3 \cdot 750}{100} = 3 \cdot 7{,}5 = 22{,}5$$

У 3 примеру: к = 82 700, р = 22%, i = ?

$$i = \frac{р \cdot к}{100} = \frac{22}{1\cancel{00}} \cdot 827\cancel{00} = 1\,654$$

$$\begin{array}{r} 1\,654 \\ \hline 18\,194 \end{array}$$

Дрвета је остало 82 700 — 18 194 = 64 506

Ми ћемо у другом разреду решавати све задатке ове врсте само свођењем на јединицу, као што смо већ напоменули.

Задаци:

1. Колико: је 1% од а) 400, б) 700, в) 900, г) 1 300, д) 12 750 и ђ) 26 750?
2. Колико: је а) 2% од 600, б) 3% од 800, в) 4% од 500, г) 5% од 1 200?
3. Колико је: а) 6% од 750, б) 7% од 800, в) 8% од 1 250, г) 9% од 11 200?
4. Колико је: а) $^1/_2$% од 600, б) $1^1/_2$% од 900, в) 2% од 1 350, г) $3^1/_4$% од 500.?
5. Колико је: а) $4\frac{3}{4}$% од 5 000, б) 5% од 700, в) $6^1/_8$% од 1000, г) $7^1/_{20}$% од 12 800?
6. Израчунај: а) 12% од 7 320, б) $18^1/_2$% од 72 320, в) $24^1/_5$% од 14 750, г) $32^1/_2$% од 104 300.
7. Израчунај: а) $22\frac{3}{4}$% од 83 709, б) $32\frac{3}{4}$% од 73 250, в) 45% од 832 500, г) 65% од 632 900.
8. Израчунај: а) 70% од 238 700, б) 75% од 832 000, в) 80% од 4 300 200 и г) 85% од 5 700 500.
9. Који је број за 3% већи од а) 400, б) 750, в) 840, г) 1 380?
10. Који је број за 742% већи од: а) 500, б) 850, в) 3 750, г) 12 700?
11. У почетку школске године уписало се у једној гимназији 880 ђака. Током године напустило је школу 5%. Колико је било ученика на крају школске године?
12. Један радник има надницу 75,50 дин. Газда му повиси надницу за $3^1/_2$%. Која је нова надница радника?
13. Једна железничка пруга дуга 12 800 *m* пење се уз брдо. Пењање је $3^1/_2$%. Колико се попне на целу дужину?
14. Један трговац купи робе за 72 830 дин. Заради при продаји 24%. Колико је ~~свега~~ зарадио?
15. Неки трговац купи пшенице за 7 230 дин., па је препрода уз $8^1/_2$% добити. Колико је динара примио?
16. Једном трговцу приспе 875 *kg* шећера у сандуцима. Тежина сандука се рачуна $3^1/_4$%. Колико је *kg* чистог шећера примио?
17. Нека роба има нето тежину 7 853 *kg*. Дара се рачуна $2^1/_2$%. Колико је било бруто тежине?

18. Један човек прода кућу за 276 500 дин. са $4^3/_4\%$ губитка. Колико је платио кућу?

19. Колико непречишћена шећера дају 87 300 *kg* шећерне репе, кад се зна да се од шећерне репе добија 5% непречишћена шећера?

20. Колики је збир два броја, кад је један 530, а други је за $^2/_3\%$ мањи од првог?

21. Неки трговац купи робе за 45 700 дин. Он хоће да заради 18%. Он ту робу раздели малотрговцима уз $^1/_2\%$ добити. а) Колико је велетрговац зарадио? б) Колико су добили малотрговци? в) Колико је динара свега примљено за робу?

22. Продато је једно имање за 525 000 дин. Државна такса се рачуна $7^1/_2\%$, а посреднику је обећано дати $4^1/_2\%$. Колико је примљено за то имање?

23. У ваздуху се налази 21% кисеоника и 79% водоника. Колико је кисеоника, а колико водоника у 428 $м^3$ ваздуха?

24. Нека фирма се поравна са повериоцима, да уместо 876 750 динара дуга плати у готову 65%. Колико мора одмах исплатити?

25. Једном трговцу је одређено 7 800 дин. пореза и $24^1/_2\%$ приреза. Колико мора свега исплатити трговац?

26. Један метар штофа за одело стаје 235 дин. Пошто се мора продавати кад се хоће да заради $10^3/_4\%$?

27. Колика је општинска такса на робу од вредности 8 700 дин. кад се рачуна $2^1/_2\%$?

28. Нека кућа је процењена 436 700 дин. Колико се мора платити осигурање од пожара кад се рачуна $7^1/_2\%$?

29. Шта стају 6 бала памука бруто тежине 1 650*k g*? Дара се рачуна $5^1/_2\%$, а 1 *kg* памука стаје 8,50 динара.

30. Једна породица попије месечно 10 *l* вина и 25 *l* пива. Колико попије отрова та породица кад се рачуна да у вину има 14% алкохола (отрова) а у пиву $5^1/_2\%$?

31. У једној радњи послуга има просечно надницу 65 динара. Она захтева од газде да се надница повиси за $8^1/_2\%$. Колику надницу тражи послуга?

32. У једном суду има 42 *l* млека. Рачуна се да у млеку има 12% воде. Колико у суду има чистог млека?

33. Комисионар купи робу неког трговца за 22 200 дин. Он исплати посреднику 4%. За колико динара мора продати робу, да би сâм зарадио $14^1/_2\%$?

34. У једној вароши је било 78 700 становника. У току године умре 8% а придође 12%. Колико ће становника имати на крају године?

35. У једној се бановини просечно рађа месечно по 850 деце. При порођају умре 2%, а од друге болести 4%. Колико остаје у животу?

МЕШОВИТИ ЗАДАЦИ

1. Од ових бројева: 135, 444, 360, 1 020, 330, 384, који су дељиви са 2, 4, 3, и 5, па са 6, 12, и 15?

2. Који су бројеви мањи од 100 дељиви у исто време са 2, са 3 и са 4?

3. Који су бројеви мањи од 1000 дељиви у исто време са 4, са 5, са 6 и са 8?

4. Напиши све четвороцифрене бројеве који су у исто време дељиви са 2, са 3, са 4, са 5, са 6 и са 7?

5. Са којим од бројева 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 25 и 125 су дељиви сваки од бројева: 1 166, 1 288, 1 928, 2 464, 2 475, 7 020, 29 935, 110 875 и 414 375?

6. Растави на просте чиниоце: 560, 5 292, 14 850.

7. „ „ „ „ 29 400, 49 005.

8. „ „ „ „ 3 356 640, 1 746 850.

9. „ „ „ „ 10 241 100.

10. Скрати: а) $\frac{546}{2\,478}$ б) $\frac{1\,875}{3\,000}$ в) $\frac{2\,664}{3\,636}$ г) $\frac{714}{1\,071}$

11. $2\frac{1}{3} + 3\frac{3}{4} + 5 + \frac{3}{5} + \frac{9}{10} + 6\frac{13}{15} + 14\frac{7}{8} + 5\frac{13}{18} =$

12. $9\frac{3}{4} + 12\frac{7}{8} + 5\frac{7}{15} + \frac{9}{25} + 18\frac{4}{5} + 9\frac{11}{15} + 17\frac{8}{9} + \frac{17}{20} =$

13. а) $8 - 3\frac{2}{3} =$ б) $14\frac{3}{4} - 9 =$

14. а) $17\frac{7}{15} - 3\frac{8}{25}$ б) $107\frac{31}{50} - 29\frac{29}{32} =$

15. а) $17 \cdot \frac{3}{4} =$ б) $32 \cdot \frac{3}{2} =$

16. а) $18\frac{11}{48} \cdot 24 =$ б) $38\frac{17}{45} \cdot 50 =$

17. а) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} =$ б) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{3}{4} =$

18. а) $14 : \frac{7}{8} =$ б) $16 : \frac{3}{5} =$

19. а) $5\frac{3}{4} : 2 =$ б) $18\frac{15}{64} : 8 =$

20. а) $28\frac{5}{6} : 19\frac{10}{11} =$ б) $104\frac{1}{2} : 11\frac{4}{9} =$

21. а) $15\frac{2}{3} : 6\frac{1}{8} =$ б) $16\frac{4}{11} : 1\frac{3}{8} =$

22. $14\frac{4}{25} + 7{,}32 + 8\frac{5}{24} + 5{,}02 =$ (Претвори најпре све у десетне разломке па ради)

23. а) $8\frac{3}{4} - 0{,}5 =$ б) $17{,}42 - 7\frac{1}{2} =$

24. а) $\left(127 + 14\frac{7}{18}\right) - \left(5\frac{3}{10} + 4\frac{7}{15}\right) =$

25. а) $\left(18\frac{4}{11} - 2\frac{8}{9}\right) + \left(8\frac{5}{33} - 5\frac{15}{36}\right) =$

26. $\left(2\frac{3}{5} + 7\frac{5}{6} + 8\frac{4}{7} + \frac{2}{5} + 1\frac{2}{3}\right) - \left(8\frac{5}{6} - 4\frac{5}{7}\right) =$

27. $728\frac{1}{4} - \left(28\frac{5}{8} + 324\frac{5}{9} + 10\frac{3}{10}\right) =$

28. $8\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} - 7\frac{3}{8} : 2 =$

29. $14\frac{7}{8} \cdot \frac{15}{16} + 7\frac{5}{8} : 3\frac{1}{8} =$

30. $104\frac{5}{6} : 19\frac{10}{11} - 11\frac{2}{3} : 9\frac{1}{8} =$

31. Израчунај на три децимала а) $8\frac{8}{21}$, б) $7\frac{7}{17}$, в) $5\frac{14}{29}$, г) 14,07 : 25, д) 0,77 : 3.

32. Који је то број чије $\frac{3}{4}$ чине 33?

33. „ „ „ „ „ $\frac{2}{5}$ „ 45?

34. Којим разломком треба помножити 12 да се добије $\frac{6}{7}$?

35. За колико се мења вредност разломка $\frac{15}{29}$ кад се и у бројиоцу и имениоцу дода број 3?

36. За колико се мења вредност разломка $\frac{47}{49}$ ако се и од бројиоца и од имениоца одузме број 7?

37. Којим бројем треба помножити $4\frac{1}{4}$ да се добије $8\frac{3}{4}$?

38. Којим бројем треба поделити $18\frac{3}{4}$ да би се добио $32\frac{3}{5}$?

39. Збир два броја је већи од 32 за $2\frac{5}{6}$. Први је број $32\frac{2}{3}$; колики је онај други?

40. Један ученик уместо $34\frac{3}{4}$ напише $43\frac{3}{4}$. Којим је бројем помножио $34\frac{3}{4}$?

41. Два ученика имају скупа 28,25 динара. Први ученик има $\frac{3}{4}$ новца другог ученика. Колико сваки има?

42. Колико је сати кад је $\frac{3}{4}$ дана већ прошло?

43. Један радник за $4^{1}/_{2}$ сата изатка $5\frac{3}{8}$ *m* платна. Колико изатка на сат?

44. Један пароброд пређе $42^{1}/_{3}$ *km* за $1\frac{3}{5}$ сата. Колико му је потребно времена да пређе 725 *km*?

45. Један радник је радио $4\frac{3}{4}$ дана, затим $8\frac{2}{3}$ дана, па $3\frac{5}{9}$ дана, и напокон $7\frac{7}{12}$ дана. Плаћало му се дневно по 42,75 динара. Колико је примио?

46. Збир два разломка је $4\frac{3}{5}$, а њихова је разлика $1\frac{2}{15}$. Који су то разломци?

47. Један дрварски трговац купи 72 m^3 дрва по $55^{1}/_{2}$ динара, 58 m^3 по $48\frac{3}{10}$, 87 m^3 по $60\frac{12}{25}$ дин. Превоз и други трошкови му износе $238^{1}/_{3}$ дин. Трговац прода сва дрва по 108 дин. кубни метар. Да ли је зарадио, и колико?

48. Један сељак купи два вола за 3 275 дин. Једнога је платио управо $^{3}/_{5}$ цене од оног другог. Колико стаје један а колико други?

49. Једна цев за 1 сат напуни $^{1}/_{8}$ басена. Друга цев за 1 сат напуни $^{1}/_{4}$ басена. После колико сати ће обе цеви напунити басен, ако их једновремено отворимо?

50. Нека сума новца се подели на 12 лица и свако добије по 360 динара. Колико би свако лице примило да их је било 8?

51. Ако коњ прелази 4 *m* у секунди и пређе одређени пут за 2 сата 14 минута и 89 секунди. Колико би му времена требало за исти пут, кад би пролазио 6 *m* у секунди?

52. 5 dm^3 платине тешки су 110 *kg*. Колико кубних десиметара запремају 330 *kg* платине?

53. Кад ће се напунити басен од 3 860 *l* водом кроз једну цев кроз коју утиче 47 *l* у секунди?

54. Ако неки радник ради дневно $7^{1}/_{4}$ часова, он доврши неки посао за 20 дана. После колико би дана посао свршио да ради дневно само по $5^{1}/_{2}$ часова?

55. Неки посао сврше 24 радника за 25 дана. За које би време тај посао свршили 15 радника?

56. За неко одело треба $4\frac{2}{5}$ *m* штофа ширине 1 *m* 35 *cm*. Колико је метара штофа потребно кад је ширина 1 *m* 10 *cm*?

57. 4 cm^3 злата теже 77 *gr*. Колико cm^3 запремају 2 *kg* злата?

58. 18 сељака покосе неку ливаду за $6\frac{3}{4}$ сата. За колико би времена покосио ту ливаду 21 сељак?

59. Један одред од 42 војника направи шанац за 5 сати. За које би време направили тај шанац, да је било 26 војника?

60. Једна цев би напунила неки басен за $\frac{3}{4}$ сата, а нека друга за $^1/_5$ сата. За колико би времена обе цеви напуниле басен, кад се једновремено отворе?

61. Неки трговац сву робу прода за 22 700 динара, од те суме изда послузи $4^1/_2\%$ и трошарине $1^1/_4\%$. Колико му је чисто остало?

62. Један метар штофа стаје 325 динара. Пошто мора продавати робу да би зарадио 22%?

63. Неки трговац купи робе 275 *q*, по 328,50 дин. За превоз плати 55 дин. Пошто мора продавати робу да би зарадио $18^1/_4\%$?

64. Неки издавач књига даје некој књижари 22% рабата (попуста). Годишњи рачун је 27 850 дин. Колико ће издавач платити књижари?

65. Возна карта Сарајево - Београд је стајала 87,60 дин. Сада је скупља вожња за 225%. Колико сад стаје вожња?

66. Београд је имао пре рата 87 320 становника. После рата је број становника повећан за 105%. Колико сада Београд има становника?

67. Нека кућа вреди 427 300 дин. Доноси кирије $14^1/_2\%$ своје вредности. За поправку се у току године изда 12 700. Колико доноси чистог прихода?

68. Неко купи кућу за 276 320 дин., па је препрода и добије $12^1/_2\%$. За колико је кућу продао?

69. У једној гимназији је било на крају школске године 845 ученика. Остаје 20% да понавља разред, а 40% упућује се на поправни испит. Остатак је прешао у старији разред.

Израчунати: а) Колико ученика понавља разред?
б) Колико ученика има поправни испит?
в) Колико је ученика прешло у старији разред?

САДРЖАЈ

стр.