ГЕОМЕТРИЈА

ЗА V РАЗРЕД
СРЕДЊИХ ШКОЛА

ПРИРЕДИО
ВЛАДИМИР ЛАПАЈНЕ
професор I држ. реалне гимназије у Љубљани

СА 182 СЛИКЕ

Овај је уџбеник одобрен одлуком г. Министра просвете Снбр. 24786 од 10/VII-1935 и Снбр. 3173 од 24/II-1936 год.

БЕОГРАД
1936

Превео са словеначког
ТАТОМИР П. АНЂЕЛИЋ
професор II мушке реалне гимназије у Београду

Штампарија Драг. Поповић, Луја Бартуа 3. — Тел. 22-413.

САДРЖАЈ

УВОД

Још стари Египћани су се бавили земљомерством, јер су били приморани због свакогодишњих поплава реке Нила да земљу увек поново мере и да је деле међу поседнике. Код Асираца и Вавилонаца је била високо развијена астрономија и њихов начин изражавање угаоне вредности је још данас у важности. Грци су преузели од тих народа основне принципе геометрије и употпунили је. Пошто су њихови мудраци геометрију систематски уредили, поставили и доказали много важних ставова, то су јој они дали научну подлогу. Њихов начин учење геометрије зовемо по главном заступнику Еуклиду: Еуклидов систем. Још данас тај систем чини подлогу све геометрије.

I. По Еуклидовом систему геометрија није само наука о земљомерству, иако то реч „геометрија“, буквално значи већ наука о просторним облицима, који су тела, површине, линије и тачке.

1. Тела су делови простора, који су ограничени равним или кривим површинама. Ако њихов облик задовољава одређене геометриске услове или су постала по геометриским законима, зовемо их геометриска тела. Тако су на пример: коцка, квадар, призма, пирамида, ваљак, купа, лопта, елипсоид геометриска тела.

Какве геометриске услове задовољавају наведени примери тела с обзиром на начин њиховог постанка. Дефиниши коцку, квадар, призму итд.

2. Површине су равне (ра̂вни) и криве. Део равни, ограничен једном или више линија, зовемо слика или лик. Ако граница слике задовољава неки геометриски услов, говоримо о равној геометриској слици. На пример: троугао, квадрат, паралелограм, многоугао, круг, елипса су равне геометриска слике. Наведи њихове дефиниције,

3. Линије су праве или криве. Линије се добивају као пресек двеју површина. На пример: пресечна линија двеју

равни је права линија, пресечна линија равни с кривом површином је права или крива линија, пресечна линија двеју кривих површина је најчешће крива линија. Код тела зовемо пресек двеју суседних, граничних површина „ивица“. На цртаћој хартији писаљком или мастилом повучена линија даје нам само преставу геометриске линије, која има сама дужину.

4. Тачку можемо само да замислимо, па ипак је њено постојање одређено на пример као теме рогља коцке, призме или пирамиде, као врх пирамиде или купе или као средиште лопте; у равни је тачка одређена као пресечна тачка две равне линије или као средиште круга. Кад хоћемо да означимо у равни положај тачке, која није производ пресека двеју линија, тада притиснемо писаљком или пером на хартију и добивени траг нам претставља геометриску тачку.

II. Еуклидов систем поставља на чело основне појмове, дефиниције и основне ставове или аксиоме. Основни појмови су тела, површине, линије и тачке. Аксиоми су истине, које су саме по себи разумљиве и не треба их доказивати. Као пример аксиома наведимо овај:

Аксиом 1. *Тачка нема простирања или димензија, линија је једнодимензионална, јер има само дужину, површина се простире у два правца (дводимензионална), јер има дужину и ширину, а тело је тродимензионално, јер има дужину, ширину и висину.*

III. Научним ставовима или кратко ставовима зовемо истине, чију тачност доказујемо на основу аксиома и већ познатих ставова.

IV. *Подела геометрије.* Геометрију делимо на два дела: на геометрију равни или науку о облицима, који леже у једној истој равни, и геометрију простора или науку о облицима, који не леже у једној истој равни. Геометрију равни делимо на планиметрију, равну тригонометрију и аналитичку геометрију равни. Просторна геометрија се дели на стереометрију, сферну тригонометрију, и аналитичку геометрију простора.

V. *Означавање.* Због јединста обележаваћемо у цртежима и рачунима тачке (темена) великим словима: A,B,C..., праве и дужи малим словима: a,b,c..., углове малим грчким словима: $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ...; а равни и површине великим грчким словима: Φ,Ψ....

Напомена: Звездицом (*) означени одељци (параграфи) и задаци су намењени за реалке.

I. УВОД У ПЛАНИМЕТРИЈУ

§ 1. ПРАВА, ЗРАК И ДУЖ

Права линија је основни појам. Права линија може бити неограничена или ограничена с једне или са обе стране. У првом случају је зовемо права, у другом зрак или полуправа, а у трећем дуж. Зрак има један крај, дуж има два краја.

Тачка може да иде по правој у два смисла, који су супротни. Зато можемо да сматрамо једно кретање тачке за позитивно, а друго за негативно, ако покретна тачка иде у позитивном, односно у негативном смислу. Код зрака је крај почетак позитивнога или крај негативнога кретања тачке.

§ 2. ОСНОВНЕ ОСОБИНЕ ПРАВЕ И ДУЖИ

Аксиом 2. *Кроз две тачке се може повући само једна права (аксиом праве).*

Став је јасан, сасвим разумљив па не захтева никакав доказ.

Исти став се да изразити и у овом облику:

Права је одређена двема тачкама.

Отуда следује:

1. Ако две праве имају две тачке заједничке, оне се тада поклапају. Кажемо: праве су идентичне и пишемо $p_1 \equiv p_2$.

2. Две неидентичне праве могу имати само једну заједничку тачку.

Аксиом 3. *Дуж је најкраћа спојница двеју тачака. (Најкраће растојање двеју тачака).*

§ 3. РАВАН И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ

Равна површина је основни појам. Свака раван дели простор на два одвојена полупростора.

Аксиом 4. *Ако права има две заједничке тачке са равни, тада она лежи потпуно у равни (аксиом равни).*

Свака права дели раван на две полуравни. Равне слике су делови равни.

§ 4. ПОЛОЖАЈ ПРАВИХ У РАВНИ

1. Ако две права у истој равни имају две тачке заједничке, тада имају све тачке заједничке. Праве се поклапају (идентичност).

2. Ако две праве имају једну тачку заједничку, тада се секу. Заједничка тачка је пресечна тачка обе праве.

Примедба: Две паралелне праве можемо да сматрамо и као да се секу са пресечном тачком у бесконачности. Колико пресечних тачака има у бесконачности?

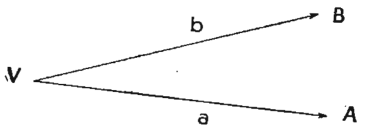
§ 5. ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ

Аксиом 5. *Кроз тачку изван праве може се тој правој повући само једна паралелна права (аксиом паралела).*

§ 6. ДЕФИНИЦИЈА УГЛА

Угао је величина обрта који мора направити зрак око свога краја, да се покрије с другим зраком с истим крајем. Зраке зовемо *краци*, а заједнички крај зрака *теме* угла.

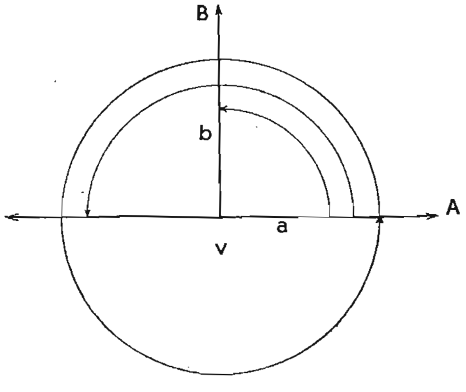
Углове обележавамо малим грчким словима, α, β, γ δ, ε.. . . . . , са ∢ *ab* (*a* и *b* су краци угла) или са ∢ *AVB*, или великим словом код темена, кад то не ствара забуну.



Сл. 1.

§ 7. ВРСТЕ УГЛОВА

Крак *VA*=*a* нека буде сталан, а крак *VB*=*b* нека се врти око темена *V* у супротном смислу кретања казаљке на часовнику. Отвор оба крака се при том степенасто повећава и достиже своју највећу вредност (максимум) кад се крак *b* после пунога обртаја поклопи са краком *a*. Крак *b* је при том направио пун угао. При полуобрту добијамо испружен



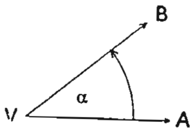
Сл. 2.

или раван угао, а при четвртини обрта прав угао. Ако краци граде прав угао, кажемо да стоје управно или нормално један на другом. Величину правога угла означаваћемо са R; отуда следује да је раван угао $2R$ и пуни угао $4R$.

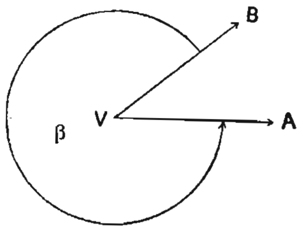
Угао који је мањи од правога угла јесте оштар угао; већи од правога угла, а мањи од равнога угла је тупи угао; и већи од равнога угла је испупчен угао. Оштре, тупе и испупчене углове зовемо коси углови.

Углови који су мањи од равнога угла јесу издубљени углови. Који су то?

Два зрака с истом полазном тачком дале раван на два дела и одређују два угла α и β (Слике 3 и 4). Који од оба угла узимамо у обзир, показују кружни луци, односно ознаке α и β. Ако сматрамо да су оба угла настала обртањем крака *b* у супротном смислу кретања казаљке на часовнику, тада се може обележити угао α и са ∢ *AVB* и угао β са ∢ *BVA*.



Сл. 3.



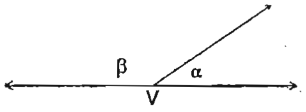
Сл. 4.

У нашем примеру је угао α оштар угао и β испупчен угао. И кад би α био туп угао, његова би допуна до пунога угла била испупчен угао. Отуда следује:

Став 1. *Два зрака с истом полазном тачком граде у равни издубљени и испупчени угао.*

§ 8. СУПЛЕМЕНТНИ СУСЕДНИ УГЛОВИ

Ако поделимо раван угао на два угла, добијамо два суплементна суседна угла.



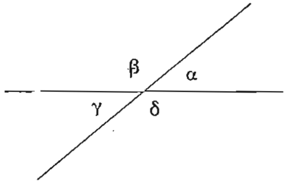
Сл. 5.

Став 2. *Суплементни суседни угао оштрога угла је тупи угао и обратно.*

$$\alpha + \beta = 2R \ .$$

§ 9. УНАКРСНИ УГЛОВИ

Две праве, које се секу граде у равни 4 угла; по два суседна угла су суплементни (α , β), (β , γ), (γ , δ), (δ , α); по два супротна угла су унакрсни углови. (α , γ и β , δ).



Сл. 6.

Став 3. *Унакрсни углови су једнаки.*

Доказ:

$$\begin{array}{c} \alpha + \beta = 2R \\ \beta + \gamma = 2R \\ \hline \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha = \gamma \end{array}$$

§ 10. ДЕФИНИЦИЈА КРУГА

Кружна линија је геометриско место* свих тачака у равни које су подједнако удаљене од сталне тачке S те равни. Кружном линијом ограничен део равни зовемо круг, а кружну линију — обим или периферија круга и S средиште круга. Растојање средишта од обима круга је полупречник или radius круга. Сви полупречници су једнаки.

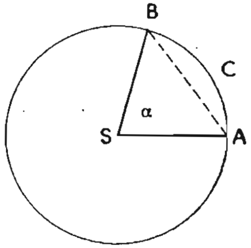
У обичном животу се употребљава уместо „кружне линије“ израз „круг“. У складу с тим говоримо тада место о „кругу“ — о „кружној површини“.

§ 11. ЛИНИЈЕ, ПОВРШИНЕ И УГЛОВИ У КРУГУ

Тетива је дуж која спаја две тачке кружнога обима. Пречник је тетива која иде кроз средиште круга. Сваки пречник је двоструки полупречник. Сечица или секанта је права која сече круг. Тангента или дирка је права која додирује круг. Полупречник у додирној тачки стоји управно на тангенту. Лук је део кружнога обима. Кружни исечак или сектор је део круга омеђен са два полупречника и луком. Кружни отсечак или сегмент је део круга ограничен тетивом и луком. Средишни угао је угао с теменом у средишту круга; његови краци су кружни полупречници. Средишном углу α припада тетива $\overline{AB}$, лук $\overset{\frown}{AB}$, сектор $SACB$, и сегмент ACB.

---

* Напомена: Скуп свих тачака које задовољавају одређене услове зовемо геометриско место. Те тачке могу да чине праву, круг или какву било другу линију. (Види § 43. ст. 2).



Сл. 7.

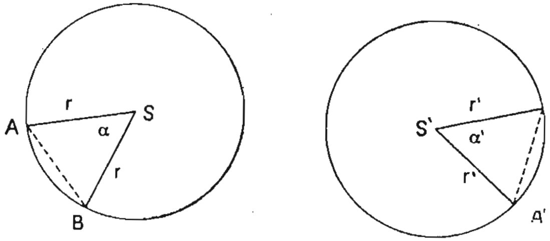
Став 4. *Кругови с једнаким полупречницима могу се поклопити. Због тога су подударни.* (За подударностт употребљавамо знак ≌).

Став 5. *Једнаким луцима истога круга или једнаких кругова припадају једнаки средишни углови и обратно.*

Доказ путем поклапања.

Став 6. *Једнаким тетивама истога круга или једнаких кругова припадају једнаки средишни углова и једнаки луци.*

Оба круга имају једнаке полупречнике (r = r′); због тога су подударни и поклапају се, ако их положимо један на други.



Сл. 8.

Ако се поклапа A са A', тада се поклапа и B са B', зато што је $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Тада су једнаки и луци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A'B'}$ и средишни углови α и α′.

§ 12. СРЕДИШНО РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ

Средишно растојање тачке је њено растојање од средишта круга. Отуда следује:

Став 7. *Тачка лежи у кругу, на кругу или изван круга, ако је њено средишно растојање мање, једнако или веће од полупречника круга.*

Задаци:

1. На колико делова деле праву (дуж) n тачака ($n = 1, 2, 3, 4 \ldots$)?
2. Колико правих одређује n тачака ($n = 2, 3, 4, \ldots$?
3. Колико пресечних тачака има n правих?
4. Четири угла с истим теменом граде пун угао. Сваки угао је два пута већи од претходнога. Колики је сваки угао?

II. СИМЕТРИЈА

§ 13. ОСНА СИМЕТРИЈА, ДЕФИНИЦИЈА

Свака права дели раван на две полуравни. Ако обрћемо једну полураван око те праве тако да покрије другу, кажемо да смо направили полуобрт.

Две слике у равни леже симетрично у односу на праву, ако се при полуобрту око те праве поклапају. Такву симетрију зовемо осна симетрија, и праву, око које смо обртали, оса симетрије. Обе слике су подударне (симетрична подударност).

Геометриска слика је осно симетрична, ако се да правом преполовити тако, да се обе половине при полуобрту око праве која слику полови поклапају. Ту праву зовемо симетрала слике.

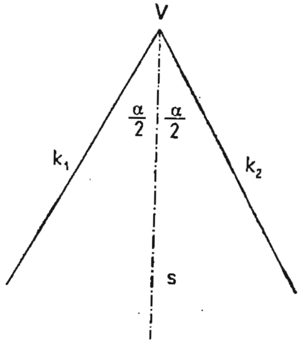
Став 8. *Угао је осно симетричан; симетрала је права која полови угао.*

Доказ: Изрежимо угао и превијмо га тако, да се оба крака k_1 и k_2 покрију; при том запажамо да је права која полови угао симетрала угла (види слику 9).

Став 9. *Дуж је осно симетрична; њена симетрала је права која полови дуж и стоји на њој управно.*

Доказ: ако s стоји управно на $\overline{AB}$, тада се при полуобрту ако s покрију краци a и b. Пошто пак s стоји у средини дужи, раздаљине $\overline{AR}$ и $\overline{BR}$ су једнаке, морају се при полуобрту покрити и крајеви A и B зато што леже на a и b (види слику 10). Отуда следује:

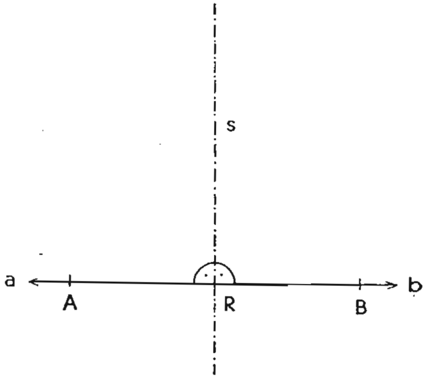
Права која стоји управно на дужи и иде кроз њену средину јесте њена симетрала. Пресечну тачку нормале са дужи зовемо подножје нормале.



Сл. 9.

Став 10: *Симетрала дужи је геометриско место свих тачака у равни, која су једнако удаљене од оба краја дужи.*

Доказ: Изаберимо ма какву тачку T на симетрали и спојимо T са крајевима дужи A и B. При полуобрту око s поклапају се A и B, док тачка T остаје на својем месту. Због тога се поклапају и растајања $\overline{TA}$ и $\overline{BT}$, дакле $\overline{AT}$ је једнако $\overline{BT}$. Пошто је T ма која тачка симетрале, важи за све њене тачке да су једнако удаљене од оба краја A и B дате дужи (види слику 11).



Сл. 10.

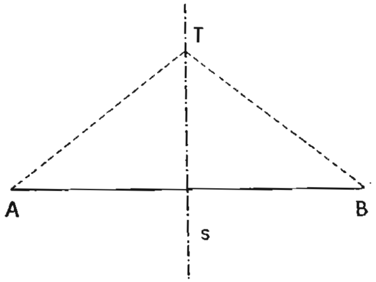
Обележимо са R подножје симетрале дужи AB (сл. 12) и пренесимо из тачке R на сваку страну дужи једнаке отсечке:

$\overline{RA_1} = \overline{RB_1}$, $\overline{RA_2} = \overline{RB_2}$

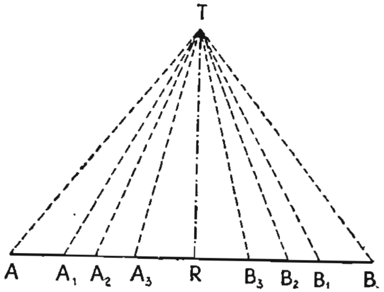
тада су и растојања:

$\overline{TA_1} = \overline{TB_1}$ $\overline{TA_2} = \overline{TB_2}$...

Та растојања се према тачки R све више и



Сл. 11.



Сл. 12.

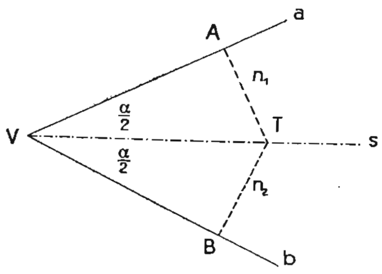
више смањују, док не достигну у тачки R своју најмању вредност (минимум). Пошто је дуж TR симетрала дужи $\overline{AB}$ и стоји управно на њој, следује:

Став 11. *Нормала из тачке на праву је најмање растојање тачке од праве.*

Став 12. *Из једне тачке се може повући само једна нормала на праву.*

Доказ: Ако би се дале повући две нормале, тада би морали на дужи $\overline{AB}$ чији крајеви су једнако удаљени од тачке T, имати две средине R_1 и R_2, што је немогуће.

Став 13. *Симетрала угла је геометријско место свих тачака које су подједнако удаљене од оба крака.*

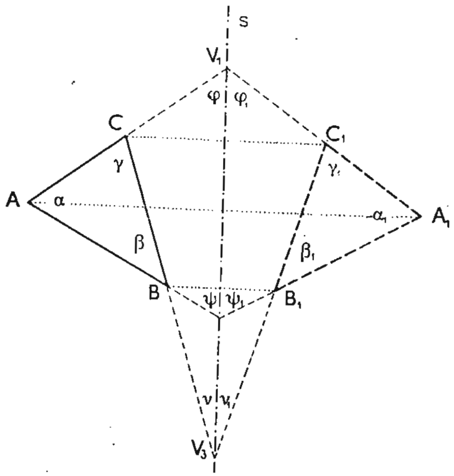


Сл. 13.

Доказ: Ако изаберемо на симетрали s угла α ма коју тачку T и повучемо из ње нормале n_1 и n_2 на краке, добијамо два правоугла троугла VAT и VBT. При полуобрту око s поклапају се краци a и b. Пошто се пак из једне тачке може повући само једна нормала на праву, морају се при полуобрту поклопити и тачке A и B и нормале n_1 и n_2. Отуда следује, да је $\overline{TA} = \overline{TB}$.

§ 14. ОСОБИНЕ СЛИКА, КОЈЕ ЛЕЖЕ ОСНО СИМЕТРИЧНО

Превијмо лист хартије и прободимо шестаром обе половине на више места и потом поново развијмо лист. По две тачке, које су постале од истога убода, леже симетрично према правој, око које смо превили лист. Спајањем симетричних тачака по реду добијамо две симетричне слике. На слици 14 су обе слике троугли ABC и $A_1B_1C_1$. У вези са пређашњим видимо да обе слике имају ове особине:



Сл. 14.

1. Спојнице тачака које леже симетрично међу собом су паралелне и стоје управно на симетрали која их полови.

$$\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1} \perp s$$

2. Дужи које леже симетрично једнаких су дужина и продужене секу се на оси симетрије која полови угао између њих.

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1},\ \overline{BC} = \overline{B_1C_1},\ \overline{AC} = \overline{A_1C_1},\ \varphi = \varphi_1,\ \psi = \psi_1,\ \nu = \nu_1.$$

3. Углови који леже симетрично једнаки су:

$$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \text{и}\ \gamma = \gamma_1.$$

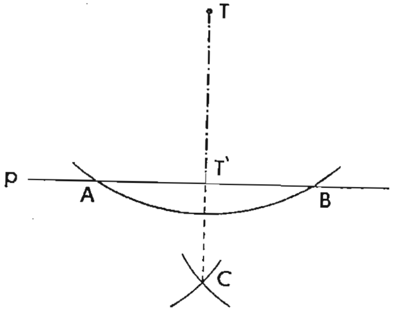
4. Слике које леже симетрично поклапају се при полуобрту. Кажемо да су симетрично подударне:

$$\Delta\ ABC \cong \Delta\ A_1B_1C_1.$$

Исте особине имају обе половина осно симетричне слике. Именуј слике (троугле, паралелограме итд.), које су осно симетричне.

§ 15. КОНСТРУКЦИЈА НОРМАЛЕ ИЗ ТАЧКЕ НА ПРАВУ

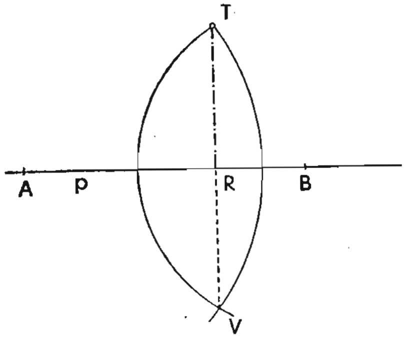
1. начин: Опишемо круг са средиштем T ма каквим полупречником. Он сече праву у тачкама A и B. A и B сматрамо за средишта двају произвољних, а једнаких кругова који се секу у тачки C. Пошто је $\overline{TA} = \overline{TB}$ и $\overline{CA} = \overline{CB}$, то су T и C тачке симетрале дужи $\overline{AB}$, која је сече у тачки T'. По пређашњим ставовима стоји симетрала нормално на дужи, због тога је $\overline{TT'}$ управно на правој p.



Сл. 15.

2. начин: На правој p изаберемо две ма какве тачке A и B које ћемо узети за средишта два круга кроз T. Кругови се други пут секу у V. По конструкцији је:

$$\overline{AT}=\overline{AV} \text{ и } \overline{BT}=\overline{BV}.$$

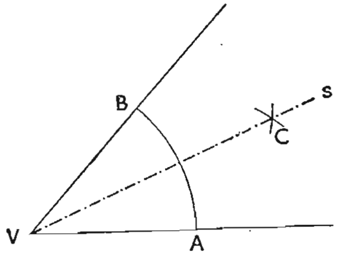


Сл. 16.

Због тога је према пређашњем права p симетрала дужи $\overline{TV}$, коју полови у тачки R и стоји управно на њој. $\overline{TR}$ је стога нормала на праву p.

Напомена. Први начин конструкције захтева три помоћна круга, а други само два. Други начин је економичнији. На први начин можемо да конструишемо и нормалу у датој тачки праве.

§ 16. КОНСТРУКЦИЈА СИМЕТРАЛЕ УГЛА



Сл. 17.

Са средиштем у V и ма каквим полупречником опишемо лук, који сече оба крака у тачкама A и B; A и B нека буду опет средишта два нова лука с ма каквим, а једнаким полупречницима, који се секу у тачки C.

Пошто су растојања $\overline{VA}=\overline{VB}$ и $\overline{CA}=\overline{CB}$ то је права $\overline{CV}$ симетрала тетиве $\overline{AB}$; због тога су и углови ABC, BVC једнаки: $\overline{VC}$ полови угао α, и стога је његова симетрала.

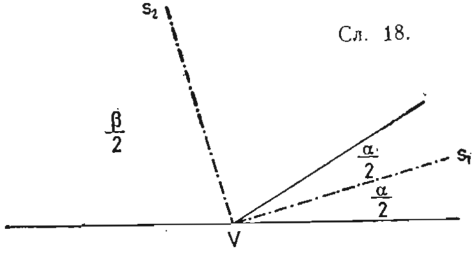
§ 17. СИМЕТРАЛА УГЛА И СУПЛЕМЕНТНОГ СУСЕДНОГ УГЛА

Став 14. *Симетрале угла и суседног суплементног угла секу се управно.*

Доказ: $\alpha+\beta=2R$.

Симетрала s_1 полови угао α, а s_2 угао β. Између s_1 и s_2 добијамо угао

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=R.$$

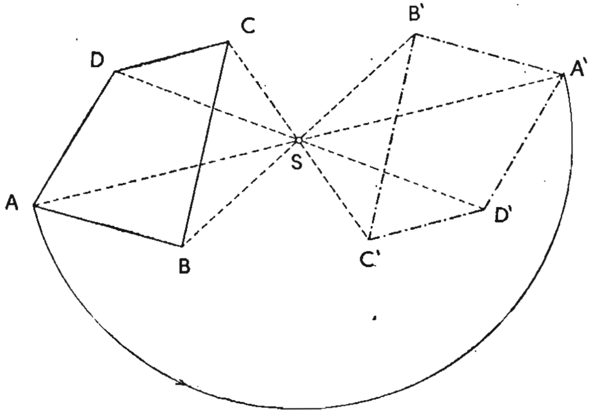


Сл. 18.

---

§ 18. СРЕДИШНА ИЛИ ЦЕНТРИЧНА СИМЕТРИЈА, ДЕФИНИЦИЈА

Две слике у равни леже средишно или центрично симетрично, ако се после обртања око једне тачке за 180⁰ поклапају. Такву симетрију зовемо средишна или центрична, а тачку, око које смо извршили полуобрт, средиште или центар симетрије. Две слике, које леже центрично симетрично су подударне.



Сл. 19.

За геометриску слику кажемо да је центрично симетрична, ако се може поделити на два подударна дела тако, да се после обртања једне половине око једне тачке за 180⁰ она поклапи са другом половином. Ту тачку зовемо средиште или центар слике.

§ 19. ОСОБИНЕ СЛИКА КОЈЕ ЛЕЖЕ ЦЕНТРИЧНО СИМЕТРИЧНО

На основу дефиниције средишне симетрије имају две слике које леже центрично симетрично ове особине (види сл. 19):

1. Спојнице тачака које леже симетрично иду кроз исту тачку, која их полови. Та тачка је центар симетрије: $\overline{AS}=\overline{A'S}$ $\overline{BS}=\overline{B'S}$, $\overline{CS}=\overline{C'S}$, $\overline{DS}=\overline{D'S}$.

2. Дужи које леже симетрично јесу једнаке дужине и антипаралелне (паралеле супротнога смисла) $\overline{AB}\#\overline{A'B'}$, $\overline{BC}\#\overline{B'C'}$, $\overline{CD}\#\overline{C'D'}$, $\overline{DA}\#\overline{D'A'}$.

3. Углови који леже симетрично једнаки су: $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\delta=\delta'$.

4. Слике које леже симетрично подударне су.

$$ABCD \cong A'B'C'D'$$

Доказ поклапањем.

Исте особине има центрично симетрична слика.

Именуј слике које су центрично симетричне.

Задаци:

1. Нацртај симетралу оштрога, правога, тупога и испупченога угла.

2. Нацртај две слике које леже симетрично с обзиром на дату праву.

3. Кад два једнака круга леже симетрично у односу на праву?

4. Две тачке A и B леже на разним странама праве p. За коју тачку праве је збир растојања од A и B најмањи (минимум)?

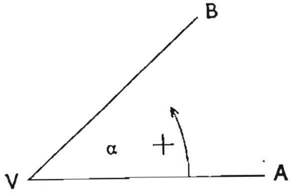
5. Конструиши две слике које су средишно симетричне у односу на дату тачку.

6. Где лежи средиште симетрије два једнака круга?

III. УГЛОВИ

§ 20. ПОЗИТИВНИ И НЕГАТИВНИ УГЛОВИ

Постанак угла се може замислити на два начина: 1. обртањем покретнога крака у смислу од A ка B (како показује стрелица) и 2. у супротном смислу од B ка A. Ту супротност у постанку угла изражавамо тако, што сматрамо прво обртање за позитивно (супротно кретању казаљке на часовнику), а друго за негативно. Угао је позитиван, односно негативан, ако је смисао обртања покретвога крака позитиван, односно негативан.



Сл. 20.

Код углова код којих није назначен начин постанка, рачунаћемо само њихову апсолутну величину.

§ 21. ОПЕРАЦИЈЕ С УГЛОВИМА

Једнакост и преношење углова.

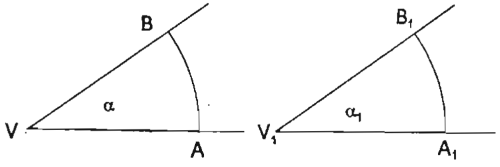
Два угла су једнака, ако је величина обрта код оба једнака. Ако опишемо код два једнака угла луке с једнаким

полупречницима и са средиштем у теменима, добијамо два подударна кружна исечка. Због тога су и луци једнаки: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_1}B_1$.

Став 15. *Два угла су једнака, ако имају код једнаких полупречника једнаке луке и једнаке тетиве.*

Отуда следује:

1. Углове преносимо, кад пренесемо луке с једнаким полупречницима или тачније изражено кад направимо тетиву $\overline{A_1B_1}$ једнаку тетиву $\overline{AB}$, јер једнаким тетивама припадају једнаки луци и једнаки углови.



Сл. 21

2. Углове сабирамо, кад саберемо луке с једнаким полупречницима.

3. Углове одузимамо, ако одузмемо луке с једнаким полупречницима.

4, Угао повећавамо или смањујемо 2, 3, 4 . . . n - пута, где је n цео број или разломак, ако исто толико повећамо или смањимо кружне луке које им одговарају.

§ 22. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУПЛЕМЕНТНИ УГЛОВИ

Два угла су комплементна, ако њихов збир износи R а суплементна, ако њихов збир износи $2R$.

Комплементни углови су на пример:

$$\alpha \text{ и } R - \alpha, \left(\frac{R}{2} + \alpha\right) \text{ и } \left(\frac{R}{2} - \alpha\right)$$

Суплементни углови су на пример:

$$\alpha \text{ и } 2R - \alpha, \qquad R - \alpha \text{ и } R + \alpha.$$

§ 23. МЕРЕ УГЛОВА, ДЕФИНИЦИЈА

Под изразом мерење разумемо упоређивање истородних величина. На пример: дужине меримо дужинским, површине површинским, а запремине просторним јединицама. Исто тако меримо углове јединицама, које су такође углови. Јединицу за мерење угла добијамо кад разделимо пун угао на одређени број једнаких делова. Практично ми то вршимо тако, што разделимо круг, описан око темена пунога угла, на n једнаких лукова, где је n цео број. Угао коме припада добијени лук је основни угао. При упоређивању основнога угла са датим углом добијамо неименован мерни број, који нам казује колико је пута већи, односно колико је пута мањи дати угао од угаоне јединице, Да бисмо по мерењу знали коју смо основну јединицу употребљавали, додајемо мерном броју име основне јединице.

У употреби су два начина поделе пунога угла: 1. Стара асирско-вавилонска подела пунога угла, по којој је пун угао подељен на 360 делова, који се зову степени (^{0}); сваки степен је подељен на 60 минута ($'$) и сваки минут на 60 секунада ($''$). За разлику од температурних степена, часовних минута (^{m}) и часовних секунада (^{s}) зовемо их тачније и лучни степени, лучни минути и лучни секунди. Прав угао има 90^0 ($R = 90^0$), раван угао 180^0 ($2R = 180^0$) и пун угао 360^0 ($4R = 360^0$).

2. По другом начину, који је у употреби у новије време, посебно у астрономији, подељен је пун угао на 400 делова. Сваки део зовемо град и обележавамо га са . Сваки град има 100 минута ($`$) и сваки минут 100 секунада ($``$). $1^g = 100` = 1000``$.

Примери: $42^g, 37$ читај 42 града 37 минута,
$213^g, 0635$ читај 213 гради 6 минута 35 секунада,
$150^g, 0070$ читај 150 гради—минута 70 секунада,

3. У геометрији често узимамо за основу јединицу угао, код кога је дужина лука једнака полупречнику: $AB = r$.

Тај се угао зове *радијан*.

Дужина кружнога обима је $2\pi r$, где је π

Лудолфов број: $\pi = 3{,}14159\ldots = 3\frac{1}{7}$. (прибл.).

Ако стога обим поделимо са r, добијамо број радијана које има пун угао. $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. То значи да пун угао има 2π радијана, раван угао π радијана, а прав угао $\frac{\pi}{2}$ радијана.

§ 24. ПРЕТВАРАЊЕ МЕРА ЗА УГЛОВЕ

Величина правога угла, изражена на сва три начина, јесте;

1. 90^0 (степена),
2. 100^g (гради),
3. $\frac{\pi}{2}$ радијана.

Изразимо угао α на сва три начина:

1. α има S степена,
2. α има G гради,
3. α има R радијана.

Однос лука $\overset{\frown}{AB}$ и обима круга мора бити исти код сва три начина изражавања угла:

$$\frac{S}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi}$$

или ако све три размере скратимо за 2, добијамо:

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}}$$

Тај образац нам је потребан, да претварамо једну меру у другу.

Примери:

1. Изрази 45^0 у градима. ($S = 45$)

$$\frac{S}{180} = \frac{G}{200} \quad \text{или} \quad \frac{45}{180} = \frac{G}{200}$$

отуда $\quad G = \frac{45 \cdot 200}{180} = 50^g$.

2. Изрази $49^0\,26'$ у градима. $\left(S = 49\,\frac{26}{60}\right)$

$$\frac{S}{180} = \frac{G}{200}.$$

$$G = \frac{200}{180}\left(49 + \frac{26}{60}\right) = \frac{200}{180 \cdot 60}\,(2940 + 26) = \frac{1}{18 \cdot 3} \cdot 2966 =$$

$$= \frac{1483}{27} = 54^g{,}9259.$$

3. Изрази 38^g у степенима $\cdot$ ($G = 38$)

$$\frac{S}{180} = \frac{G}{200}$$

$$S = \frac{38 \cdot 180}{200} = \frac{9}{10} \cdot 38 = \frac{342}{10} = 34\frac{2}{10}^0 =$$

$$= 34^0\,12'.$$

4. Изрази у радијанима угао 25^0 · ($S = 25$)

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{25 \cdot \pi}{180} = 0;017453 \cdot 25 = 0,436325 \text{ радијана.}$$

$$(\pi = 3,14159 \text{ и } \frac{\pi}{180} = 0,017453)$$

5. Изрази у радијанима угао $45^g,25$ · ($G = 45,25$)

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\pi \cdot 45,25}{200} = \frac{1,570796 \times 45,25}{100} = 0,7007 \text{ радијана.}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} = 1,570796\right) .$$

6. Изрази у градима угао 0,45 радијана · ($R = 0,45$)

$$\frac{G}{200} = \frac{\mathrm{R}}{\pi}$$

$$G = \frac{200 \cdot \mathrm{R}}{\pi} = 0,3183\,.. \times 200 \times 0,45 = 28^g,6370.$$

$$\left(\frac{1}{\pi} = 0,3183\ldots\right)$$

7. Изрази у степенима, минутима и секундима 1,5 радијана · ($\mathrm{R} = 1,5$) ·

$$\frac{S}{100} = \frac{R}{\pi}$$

$$S = \frac{1,5 \times 180}{\pi} = 0,3183\ldots \times 180 \times 1,5 =$$

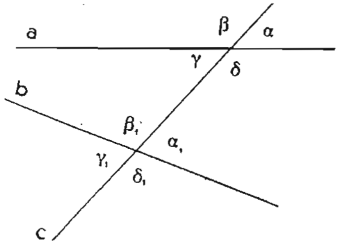
$$= 0,3183 \times 270 = 58,9410^0 = 58^0\, 56,\, 46' = 58^0\, 56'\, 27,6''.$$

$$0,9410 \times 60 = 56,46 \qquad 0,46 \times 60 = 27,6$$

§ 25. ТРАНСВЕРЗАЛНИ УГЛОВИ

Ако пресечемо две праве *a* и *b* трећом, коју зовемо трансверзала, добијамо осам углова. Од тих су четири спољашњи углови: $\alpha, \beta, \gamma_1, \delta_1$, а четири унутрашњи $\gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1$.

По два угла на разним теменима чине скупове које зовемо сагласни или напоредни углови, наизменични углови и супротни углови.



Сл. 22.

Сагласни углови су унутрашњи и спољашњи угао на истој страни трансверзале:

$\alpha, \alpha_1\ \beta, \beta_1\ \gamma\ \gamma_1$ и $\delta\ \delta_1$.

Наизменични углови су: два унутрашња или два спољашња угла на разним странама трансверзале:

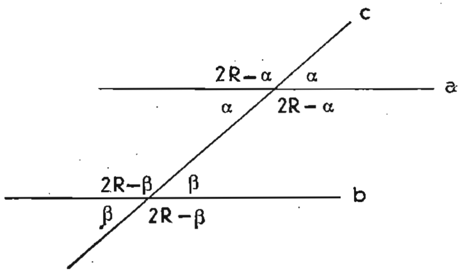
$\alpha_1\ \gamma, \beta_1\ \delta, \alpha\ \gamma_1, \beta\ \delta_1$.

Супротни углови су: два унутрашња или два спољашња угла на истој страни трансверзале: $\alpha_1\ \delta$, $\beta_1\ \gamma$, $\beta\ \gamma_1$, $\alpha\ \delta_1$.

§ 26. ОСОБИНЕ ТРАНСВЕРЗАЛНИХ УГЛОВА

Став 16. *Ако две праве чине са трансверзалом један пар једнаких сагласних углова или једнаких наизменичних углова или суплементних супротних углова, онда су по два и два сви сагласни и сви наизменични углови једнаки, а по два супротна угла — суплементна.*

Доказ: Углови, које трансверзала чини са *a* су: $\alpha, 2R - \alpha, \alpha$ и $2R - \alpha$ и са *b* : β, $2R - \beta$, β и $2R - \beta$.



Сл. 23.

1. Узмимо прво да су по горњој претпоставци једнака два сагласна угла, на пример: $\alpha = \beta$. Због тога можемо да заменимо β са α и добијамо правилност горње тврдње.

2. Узмимо друго, да су два наизменична угла једнака, на пример: $\alpha = \beta$. И сада важи исти закључак, као под 1.

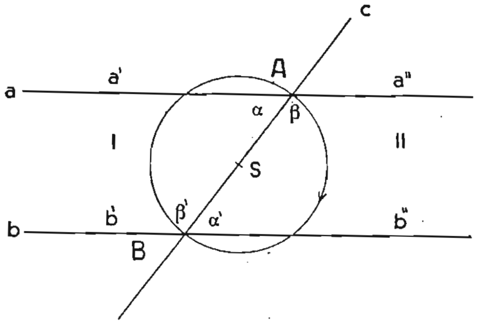
3. Узмимо треће, да су два супротна угла суплементна, на пример: α и $2R - \beta$ или $2R - \alpha$ и β.

a) $\alpha + 2R - \beta = 2R$. Отуда следује, да је $\alpha = \beta$.

b) $2R - \alpha + \beta = 2R$. И отуда следује да је $\alpha = \beta$

§ 27. ТРАНСВЕРЗАЛНИ УГЛОВИ НА ПАРАЛЕЛНИМ ПРАВИМА

Став 17. *Ако две праве граде са трансверзалом један пар једнаких сагласних углова, једнаких наизменичних углова или суплементних супротних углова, оне су паралелне.*



Сл. 24.

Доказ: Пресечене праве састоје се из зрака a', a'' и b', b'' с крајевима у A и B. Ако постоји један пар једнаких сагласних углова или једнаких наизменичних углова или суплементних супротних углова, онда су по пређашњем ставу по два сви сагласни и наизменични углови једнаки и супротни углови суплементни. Стога је $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Ако обележимо део равни између a' b' и трансверзале са I, а део равни између a'' b'' и трансверзале са II, тада се може доказати да су оба дела подударна. Преполовимо трансверзалу AB тачком S и обрнимо раван II око S у равни цртања дотле док се α не поклопи са α' и док се β не поклопи са β' тада се морају поклапати и a'' са b' и b'' са a'. Због тога се оба дела равни потпуно поклапају.

Напомена. Прецртај сл. 24. на провидну хартију, прережи је од A до S и од B до S, забоди у тачку S шестар и изврши горе означено обртање.

Узмимо да праве a и b нису паралелне, него да се секу у делу равни I. Због потпуне једнакости оба дела равни обе праве би морале имати и пресечну тачку у делу равни II. По аксиому, да се кроз две тачке може повући само једна права, морале би се праве покрити, што је супротно претпоставци. Обе праве не смеју имати ни једне заједничке тачке и стога су паралелне.

Став 18. *Паралелне праве, пресечене трансверзалом, чине по два и два једнака сагласна угла, једнака наизменична угла, суплементна супротна угла.* (Обрнути став ставу 17).

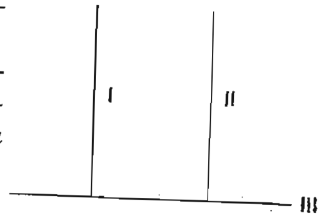
§ 28. СТАВ О ПАРАЛЕЛНИМ НОРМАЛАМА

Став 19. *Ако две праве стоје на трећој нормално, оне су паралелне међу собом.*

Доказ: Обе праве чине с трећом једнаке сагласне углове.

Став 20. *Ако једна од две паралеле стоја нормално на трећој правој, онда стоји и друга паралела управно на трећој.*

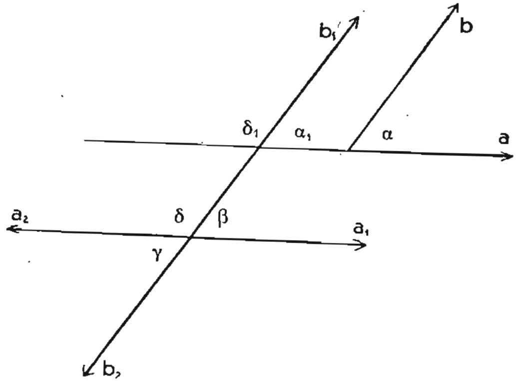
Доказ: Паралелне праве чине с трећом правом једнаке сагласне углове. Ако је један угао прав, мора бити и други.



Сл. 25.

§ 29. ПАРАЛЕЛНИ УГЛОВИ

Паралелним угловима зовемо оне углове, код којих су краци једнога угла паралелни крацима другога угла.



Сл. 26.

Став 21. *Паралелни углови су једнаки или суплементни. Једнаки су тада, када су оба пара крака паралелни у истом смислу или оба у супротном смислу (антипаралелни), суплементни пак тада, када је један пар крака паралелан у истом смислу, а други пар у супротном смислу.*

Доказ: Ако продужимо крак a, добијамо на краку b_1 угао α_1. Из слике следује:

1. $\alpha = \alpha_1$ зато, што су сагласни углови, и $\beta = \alpha_1$, зато што су такође сагласни углови. Због тога је $\alpha = \beta$.

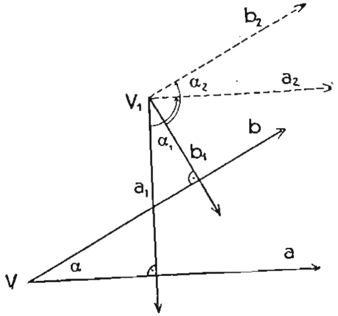
2. $\gamma = \alpha_1$, зато што су наизменични углови; пошто је $\alpha = \alpha_1$, то је и $\gamma = \alpha$.

3. $\delta = \delta_1$, зато што су сагласни углови. α_1 и δ_1 су суседни суплементи углови, и тада је $\alpha_1 + \delta_1 = 2R$. У вези са пређашњим следује $\alpha + \delta = 2R$.

§ 30. УГЛОВИ, ЧИЈИ КРАЦИ СТОЈЕ УПРАВНО НА КРАЦИМА ДРУГОГА УГЛА

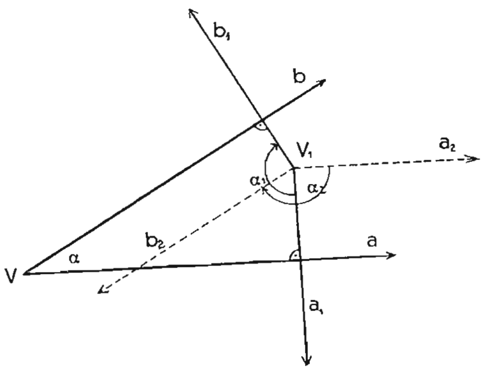
Два угла, код којих краци једнога угла стоје управно на крацима другога угла, зовемо нормални углови.

Став 22. *Два нормална угла су једнаки, ако су оба оштри углови, а суплементни, ако је један оштар, а други туп угао.*



Сл. 27.

Сл. 28.



Доказ првога дела (сл. 27): Ако повучемо кроз V_1 паралелне краке, онда су углови α и α_2 једнаки по ставу 21 зато што су оба пара паралелних крака истосмерни. Ако сада угао α_2 обрнемо за 90^0, тада се он поклапа с углом α_1. Зато је угао $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

Доказ другога дела (сл. 28): Ако повучемо кроз V_1 паралелне краке, тада су углови α и α_2 суплементни, јер је један пар паралелних крака истосмеран, а други пар супротан. Ако оба крака обрнемо за 90^0, поклапају се углови α_1 и α_2. Због тога су и углови α и α_1 суплементни.

Задаци:

1. Нацртај углове 60^0, 75^0 и $37^0 30'$.
2. Нацртај углове 15^0, $7^0 30'$, 105^0, $97^0 30'$, 135^0, 165^0.
3. Израчунај за угао $\alpha = 37^0 15' 27''$ комплементни угао.

4. Израчунај за угао $\alpha = 127^0 45' 27''$ суплементни угао.
5. Помножи угао $\alpha = 21^0 17' 34''$ са 4, 5, 6, 8, 10 (рачунски и геометриски).
6. Подели угао $\alpha = 132^0 15' 47''$ на 2, 3, 4, 5, 6, 8 једнаких делова (рачунски, а геометриски само на 2, 4, 8 делова).

Напомена. При геометриском решењу узимај у обзир само степене датих углова.

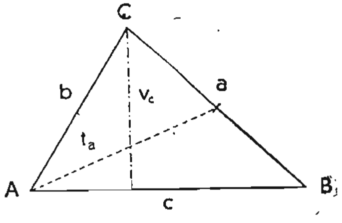
7. Помножи угао $\alpha = 15^0 24' 36''$ са $\frac{3}{4}$ (рачунски и геометриски).
8. Подели угао $\alpha = 219^0 15' 36''$ са $\frac{3}{4}$ (само рачунски).
9. Помножи угао $\alpha = 35^0 15' 26''$ са 1,8 (само рачунски).
10. Подели угао $\alpha = 189^0 15' 24''$ са 2,5 (само рачунски).
11. Изрази у градима, минутима и секундима:
    a) $1^0, 2^0, 3^0, 5^0, 10^0, 20^0, 25^0, 30^0, 90^0, 100^0, 180^0$;
    b) $5^0 17', 35^0 12', 67^0 45', 137^0 5', 269^0 55''$;
    c) $4^0 5' 27'', 56^0 46' 47'', 135^0 49' 7'', 206^0 0' 36''$.
12. Изрази у степенима, минутима и секундима углове:
    a) $1^g, 2^g, 3^g, 5^g, 7^g, 10^g, 20^g, 30^g, 50^g, 60^g, 100^g$; $150^g, 200^g, 300^g, 315^g, 360^g, 372^g$;
    b) $5^g, 407$; $16^g, 7625$; $47^g, 0625$; $120^g, 1571$; $215^g, 15$.
13. Изрази у радијанима углове:
    a) $1^0, 2^0, 3^0, 5^0, 7^0, 10^0, 30^0, 60^0, 90^0, 100^0, 150^0$;
    b) $5^0 17', 26^0 32', 39^0 37', 97^0 15', 116^0 34', 245^0 47'$;
    c) $5^0 27' 15'', 34^0 7' 32'', 97^0 37' 46'', 226^0 14' 36 '$.
14. Изрази у степенима, минутима и секундима углове:
    a) $1R, 2R, 3R, 4R, 7R$;
    b) $2\pi R, \pi R, \frac{\pi}{2} R, \frac{\pi}{4} R, \frac{\pi}{8} R$;
    c) $0{,}2R, 1{,}25R, 2{,}58R, 4{,}347R$.
15. Изрази у радијанима углове;
    a) $1^g, 2^g, 3^g, 10^g, 100^g, 120^g, 150^g, 180^g, 200^g, 220^g$;
    b) $2^g{,}6$; $3^g{,}34$; $12^g{,}78$; $69^g{,}1056$; $227^g{,}459$.
16. Изрази у градима, минутима и секундима углове:
    a) $0{,}1 R, 0{,}2 R, 0{,}3 R, 1 R, 1{,}3 R, 2R, 2{,}36 R, 4{,}82 R$;
    b) $2\pi R, \pi R, \frac{\pi}{2} R, \frac{\pi}{4} R, \frac{\pi}{8} R$.
17. Одреди комплементни и суплементни угао углу:
    a) $\alpha = 47^0 41'$
    b) $\alpha = 17^0 37' 44''$
    c) $\alpha = 47^g$,
    č) $\alpha = 36^g, 1576$
    d) $\alpha = \frac{\pi}{4} R$
    e) $\alpha = \frac{1}{2} R$
    f) $\alpha = R$
    g) $\alpha = 0{,}6785 R$.

IV. ТРОУГАО

§ 31. ДЕФИНИЦИЈА ТРОУГЛА

Троугао је геометриска слика, која је ограничена са три стране.

Темена обележавамо по обичају са A, B, C, стране са a, b, c, и то тако, да је теме A наспрам стране a, теме B наспрам стране b и теме C наспрам стране c.



Сл. 29.

Сваки троугао има три унутрашња угла и то код темена A угао α, код темена B угао β и код темена C угао γ.

На свакој страни леже два налегла угла; страни a су налегли углови β и γ; страни b су налегли углови a и γ и страни c су налегли углови α и β.

Свакој страни лежи по један угао насупрот; страни a лежи насупрот угао α, страни b лежи насупрот угао β и страни c лежи насупрот угао γ.

Све три стране чине обим троугла.

Сваку страну можемо да сматрамо као основицу или базу троугла.

Висина троугла је растојање темена од супротне стране. Троугао има три висине: v_a v_b и v_c.

Тежишна линија је дуж, која спаја теме троугла са срединoм наспрамне стране. Троугао има три тежишне линије: t_a, t_b и t_c.

Троугао обележавамо знаком Δ.

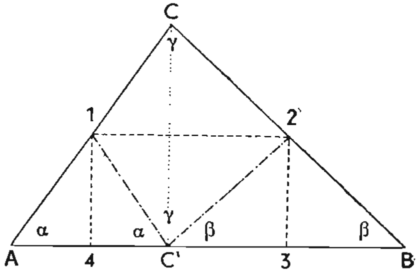
§ 32. ЗБИР УНУТРАШЊИХ УГЛОВА У ТРОУГЛУ

У нижим разредима смо показали, да је збир унутрашњих углова у троуглу једнак 2R, на следеће начине:

1. Троуглу од хартије отсечемо сва три угла и положимо их на сто тако, да сви углови имају исто теме и да им се краци дотичу. При том запажамо, да два крајња крака чине праву црту, то јест, да сва три угла чине раван угао.

2. У троуглу који смо изрезали од хартије, одредимо средине страна $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$ (види сл. 30) и спојимо их; даље нацртамо из средина нормале на страну $\overline{AB}$. Око те три линије обрнем сва три угла тако, да се сва три темена стичу у C'. При том запажамо, да сва три угла чине раван угао.

Такве и сличне очигледне доказе зовемо експерименталним доказима, они нису строго геометриски, јер би нас незнатне нетачности у извођењу огледа могле довести до погрешног закључка. Због тога ћемо отсада доказе изводити на овакав начин:



Сл. 30.

1. Изрећи ћемо тврђење то јест изразићемо мисао, да постоји одређени однос међу појединим геометриским облицима или да геометриски облик има одређене особине.

2. У циљу доказа ми ћемо најпре учинити потребне припреме, то јест, употребићемо помоћна сретства и особине геометриских слика, које су нам већ познате, као паралелност правих, једнакост, комплементност и суплементност углова итд.

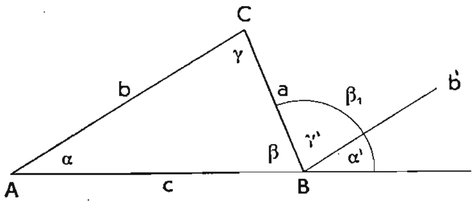
3. По припреми прелазимо на сам доказ, где из већ познатих ставова доказујемо правилност тврђења или пак доказујемо да је супротно тврђење немогућно. У првом случају кажемо да је доказ непосредан или директан, у другом пак је посредан или индиректан.

4. По довршеном доказу расправљамо још о последицама става.

На тој основи извешћемо геометриски доказ за:

Став 23. *Збир унутрашњих углова у сваком троуглу је 2R.*

Доказ: 1. Тврђење: $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.



Сл. 31.

2. Припрема за доказ: Кроз B повучемо паралелну праву b' страни b и продужимо страну $\overline{AB}$.

3. Доказ: Угао γ' је једнак углу γ ($\gamma'=\gamma$) зато, што су наизменични углови, а угао α' је једнак α ($\alpha'=\alpha$) зато, што су сагласни углови. Пошто пак $\alpha'+\beta+\gamma'$ чине заједно раван угао, њихов је збир $2R$, па је и $\alpha+\beta+\gamma=2R$, што је требало доказати.

4. Последице: 1. Ни у једном троуглу не може бити испупчених углова.

2. Кад су дата два угла троугла трећи је потпуно одређен [$\alpha=2R-(\alpha+\beta)$].

3. Ако су два угла једнога троугла једнака са два угла другога троугла, тада су и трећи углови међу собом једнаки: (Из $\alpha_1=\alpha_2$ и $\beta_1=\beta_2$ следује $\gamma_1=\gamma_2$).

4. У троуглу је могућ само један прав угао. Остала два угла су комплементни углови. (Из $\alpha=R$ следује $\beta+\gamma=R$).

5. У троуглу је могућ само један тупи угао. Из $\alpha>R$ следује $\beta+\gamma<R$ и $\beta<R$ и $\gamma<R$).

§ 33. СПОЉАШЊИ УГЛОВИ ТРОУГЛА

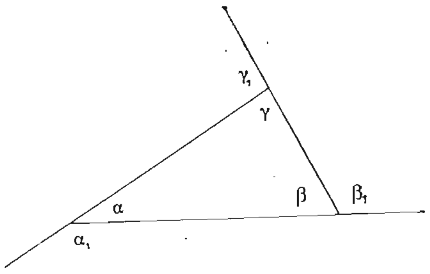
Сваком унутрашњем углу припада његов суплементни суседни угао као спољашњи угао. Сваки унутрашњи угао има код сваког темена два једнака спољашња угла. Код ставова о спољашњим угловима рачунаћемо само по један спољашњи угао.

Став 24. *Спољашњи угао је једнак збиру оба унутрашња угла на супротној страни.*

Доказ: $\alpha'=\alpha$ (сагласни углови). (Види слику 31).
$\gamma'=\gamma$ (наизменични углови).

Отуда следује: $\alpha'+\gamma'=\beta_1=\alpha+\gamma$

Став 25. *Збир спољашњих углова троугла је* $4R$



Сл. 32.

Доказ:

1. начин
$$\begin{array}{l} \alpha_1+\alpha=2R \\ \beta_1+\beta=2R \\ \gamma_1+\gamma=2R \\ \hline \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+2R=6R \\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=4R \end{array}$$

2. начин
$$\begin{array}{l} \alpha_1=\beta+\gamma \\ \beta_1=\alpha+\gamma \\ \gamma_1=\alpha+\beta \\ \hline \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2\alpha+2\beta+2\gamma=2(\alpha+\beta+\gamma)=4R \end{array}$$

§ 34. ВРСТЕ ТРОУГЛОВА

А) По дужини страна разликујемо:

1. равностране троугле, који имају све стране једнаке,
2. равнокраке троугле, који имају две стране једнаке,
3. разностране троугле.

Код равнокраког троугла зовемо једнаке стране крацима, а трећу страну основицом. Теме, које је наспрам основице, јесте врх; нормала од врха до основице је висина равнокраког троугла.

В) По величини углова разликујемо:

1. оштроугле троугле, који имају само оштре углове,
2. правоугле троугле, који имају по један прав угао,
3. тупоугле троугле, који имају по један туп угао.

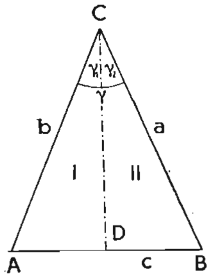
Оштроугли и тупоугли троугли се зову и косоугли троугли.

Код правоуглог троугла зовемо страну која лежи наспрам правога угла хипотенуза, остале две су катете. Хипотенузу по обичају бележимо са *c*, а катете са *a* и *b*.

Под висином правоуглог троугла разумемо увек висину на хипотенузу.

§ 35. ОСОБИНЕ РАВНОКРАКОГА ТРОУГЛА

Став 26. *У равнокраком троуглу је симетрала угла при врху уједно симетрала троугла.*



Сл. 33.

Доказ: У троуглу ABC је $a=b$. Симетрала угла при врху полови угао γ: $\gamma_1=\gamma_2=\frac{\gamma}{2}$. Том симетралом је троугао подељен на I и II. Ако обрнем II око $\overline{CD}$ тада се због једнакости углова γ_1 и γ_2 крак a поклапа с краком b. Такође и крајеви A и B оба крака се поклапају, јер су растојања $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ по претпоставци једнака. Тада се пак мора и $\overline{BD}$ поклапати са AD, пошто се између две тачке може повући само једна права. Права $\overline{CD}$ је стога оса симетрије равнокракога троугла.

Последице: 1. Равнокрак троугао је осно симетрична слика.

2. Равнокрак троугао је симетралом угла при врху подељен на два подударна троугла (I $\cong$ II).

3. Код равнокраког троугла су углови на основици једнаки. (Оба угла се при обрт у око осе симетрије поклапају). Сваки угао на основици је оштар угао. Зашто?

4. У равнокраком троуглу је симетрала угла при врху уједно симетрала основице и висина троугла.

5. У равнокраком троуглу је спојница врха са средином основице симетрала троугла.

§ 36. ОДНОСИ ИЗМЕЂУ СТРАНА И УГЛОВА У ТРОУГЛУ

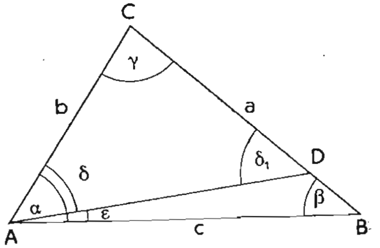
Став 27. I. *Наспрам једнаких страна у троуглу леже једнаки углови; наспрам веће стране лежи већи угао.*

Исти став важи и обратно:

II. *Наспрам једнаких углова леже једнаке стране, наспрам већега угла лежи већа страна.*

Доказ прве половине првога става: наспрам једнаких страна леже једнаки углови. Тај део става је само други облик става 26, последица 3.

Доказ другог дела првога става: наспрам веће стране лежи већи угао.



Сл. 34.

У троуглу ABC нека буде $a > b$, а треба да се докаже да је $\alpha > \beta$. У том циљу пренесимо страну b на a и добијамо тачку D, коју спојимо са A. Троугао ADC је равнокрак и добијамо:

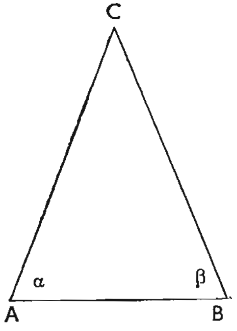
$\alpha > \delta$

$\delta = \delta_1$ (јер оба угла леже на основици равнокраког троугла).

$\delta_1 = \beta + \epsilon$ (по ставу о спољашњем углу у троуглу), стога је $\delta_1 > \beta$. Из $\alpha > \delta = \delta_1 > \beta$ следује $\alpha > \beta$, што је требало доказати.

Доказ прве половине другога става: наспрам једнаких углова леже једнаке стране (посредно), (слика 35):

У троуглу нека буде $\alpha = \beta$; тада треба да се докаже, да је $a = b$. Узмимо да је $a \neq b$, тада је $a > b$ или $a < b$. У првом случају је по пређашњем ставу (I) $\alpha > \beta$ и другом пак $\alpha < \beta$; оба случаја су у противуречности са претпоставком да је $\alpha = \beta$. Због тога се не може узети $a \neq b$, већ само $a = b$.



Сл. 35.

Доказ друге половине другога става: наспрам већега угла лежи већа страна (посредно).

Узмимо да је $\alpha > \beta$. Ако a није веће од b тада је $a = b$ или $a < b$. У првом случају мора бити $\alpha = \beta$, и другом пак $\alpha < \beta$. Оба случаја су у противуречности са претпоставком, да је $\alpha > \beta$. Због тога је могуће само $a > b$.

Последице: 1. Једним углом у равнокраком троугла су одређена остала два угла.

2. У равнокрако-правоуглом троуглу износи сваки оштар угао 45°.

3. У правоуглом троуглу је хипотенуза дужа од сваке катете. Због тога је хипотенуза најдужа страна правоуглог троугла.

4. У равностраном троуглу су сви углови једнаки н сваки износи 60°.

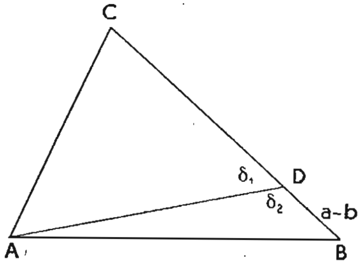
5. У тупоуглом троуглу је страна, која лежи наспрам тупога угла, најдужа.

6. У разностраном троуглу су углови на најдужој страни оштри углови.

§ 37. ОДНОСИ ИЗМЕЂУ ДУЖИНА ТРОУГЛОВИХ СТРАНА

Став 28. *Свака страна троугла је мања од збира и већа од разлике остале две стране.*

Доказ првога дела става: Збир две стране, на пр. $a + b$ не претставља праву спојницу двеју тачака A и B, док је трећа страна c најкраће растојање истих двеју тачака. Због тога је $a + b > c$.



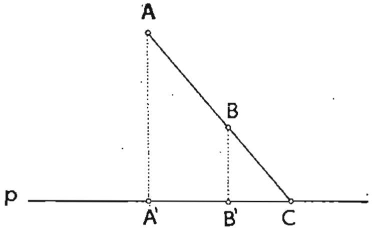
Сл. 36.

Доказ другога дела става:
1. начин (геометриски): Ако је $a > b$, тада направимо $\overline{CD} = b$, и онда је $\overline{DB} = a - b$. Угао δ_1 је угао на основици равнокракога троугла и због тога је по ставу 26 последица 3 мањи од R. Суплементни угао δ_2 је већи од R (тупи угао). По ставу 27 последица 5 у троуглу ABD је страна c најдужа страна и добијамо $a - b < c$, што је требало доказати.

2. начин (аритметички): Из $a + b > c$ следује, ако одузмемо од леве и десне стране b: $a > c - b$. Исто тако добијамо из $a + c > b$, $c > b - a$ и из $b + c > a$, $b > a - c$.

§ 38. ПРОЈЕКЦИЈА ТАЧКЕ И ДУЖИ

Ако нацртамо из неке тачке управну на праву, зовемо њено подножје нормалном пројекцијом тачке на праву. A', B' су нормалне пројекције тачка A и B на праву p. Ако се тачка налази на самој правој, тада је нормална пројекција идентична са самом тачком ($C' \equiv C$),



Сл. 37.

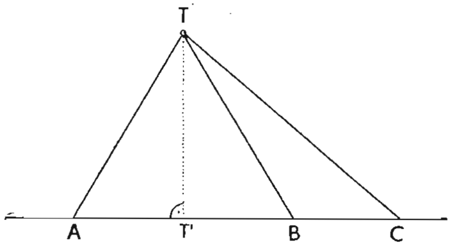
Нормалну пројекцију дужи добијамо, ако одредимо нормалне пројекције њених крајева. Тако су нормалне пројекције дужи $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, дужи $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C}$ и $\overline{A'C}$.

Став 29. *Ако повучемо из једне тачке више дужи које имају своје друге крајеве на правој, тада важе правила:*

1. једнаким пројекцијама одговарају једнаке дужи и

2. већој пројекцији одговара већа дуж.

Доказ: Из тачке T повучемо дужи $\overline{TA}$, $\overline{TB}$, $\overline{TC}$... итд.



Сл. 38.

Ако је $\overline{TT'}$ управно на праву p, тада је $\overline{T'A}$ пројекција дужи $\overline{TA}$, $\overline{T'B}$ пројекција дужи $\overline{TB}$ и $\overline{T'C}$ пројекција дужи $\overline{TC}$.

1. Нека буде пројекција $\overline{T'A}$ једнака пројекцији $\overline{T'B}$, троугао ABT је равнокрак троугао са висином $\overline{TT'}$, због тога је дуж $\overline{TA}$ једнака дужи $\overline{TB}$.

2. $\overline{T'C} > \overline{T'B}$. Пошто је троугао $TT'B$ правоугли троугао, то је угао код B оштар угао. Његов суплементни суседни угао, који је угао троугла CBT, јесте туп угао. По ставу 27/II је $\overline{CT}$ најдужа страна тога троугла, стога је $\overline{CT} > \overline{BT}$.

Став 29. важи и обратно (доказ посредан).

§ 39. КОНСТРУКЦИЈА ТРОУГЛА ИЗ ДАТИХ СТРАНА И УГЛОВА. ПОДУДАРНОСТ ТРОУГЛОВА И СТАВОВИ О ПОДУДАРНОСТИ

Троугао је уопште одређен са три независне величине. Те величине се могу тако изабрати, да дају једно или више решења, то јест добијамо један или више троуглова, који садрже исте дате величине.

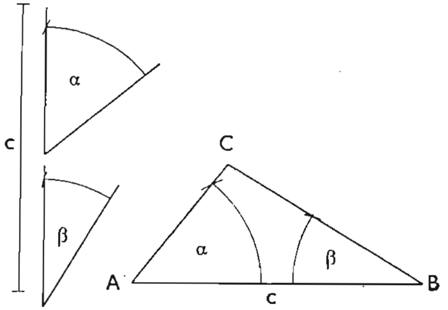
Пре свега морају подаци бити тако изабрани, да се не противе особинама троугла. На пример: из $a = 3$, $b = 4$ и $c = 9$ или из $a = 8$, $\alpha = 87^0$ и $\beta = 99^0$ је немогуће конструисати троугао. (Зашто?)

За равнострани троугао је довољна само једна величина, на пр. страна.

Ако су дате три величине, тада су могуће ове комбинације:

1. Једна страна и два угла.
2. Две стране и угао, који оне заклапају.
3. Две стране и угао наспрам једне стране.
4. Све три стране.

1. пример: Дата је једна страна и два налегла угла (у примеру, где би био дат налегли угао и угао наспрам стране, може се други налегли угао одредити као суплементни угао за збир оба дата угла).



Сл. 39.

На пр.: дато c, α, β.

Нацртамо страну $c = AB$ и пренесемо углове α и β. Тамо, где се оба крака секу, налази се теме C.

Добијамо само једно решење под условом, да је

$$\alpha + \beta < 2R$$

Два троугла су подударна, ако се, положени један на други, потпуно покривају. Кажемо да су по две тачке, стране или углови, који се при том поклапају, одговарајући или хомологни.

Из дефиниције подударности два троугла следује непосредно:

1. Подударни троугли се слажу у свима странама и угловима.

2. У подударним троуглима су хомологни делови међу собом једнаки, дакле не само хомологне стране и углови, већ и хомологне висине, тежишне линије итд.

Подударност два троугла се може изразити са шест једначина:

$$a = a_1,\ b = b_1,\ c = c_1,\ \alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1.$$

Обично је довољно за подударност два троугла, да докажемо постојање трију именованих једначина. Како те једначине морају бити изабране и какве услове морају испунити, одредићемо постепено у вези са конструкцијом троугла из датих величина.

У нашем примеру је троугао нацртан помоћу стране c и налеглих углова α и β. Ако конструишемо произвољан број троуглова из истих података, добијамо троугле који се при полагању једног на други покривају зато, што се поклапају стране c и углови α и β, Троугли су стога подударни и ми добијамо први став о подударности:

Став 30/1. *Два троугла су подударна, ако имају по једну страну и два налегла угла једнака* (1 ≌).

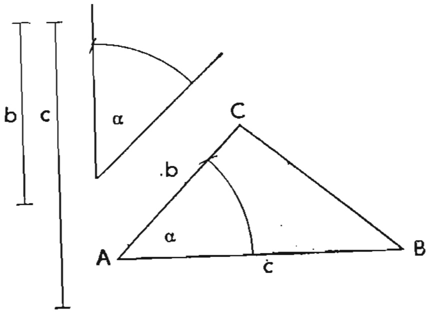
[Са знаком (1 ≌) означавамо 1. став о подударности, што ћемо касније често употребљавати].

2. пример: Дате су две стране и угао који оне заклапају.

На пример: b, c и α.

Нацртамо страну $c = \overline{AB}$, пренесемо на теме A угао α па отсечемо на новом краку страну b. Тим одређујемо теме C.

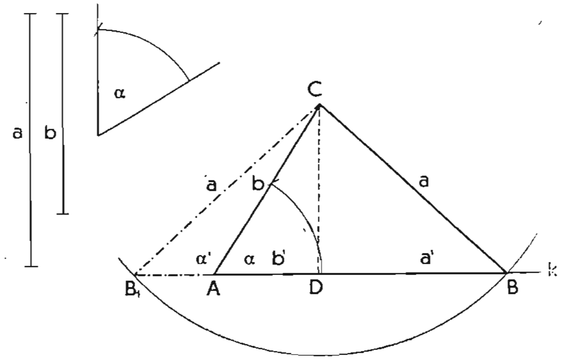
Добијамо само једно решење под условом, да је $\alpha < 2R$.



Сл. 40.

Ако из истих података нацртамо више троугла добијамо подударне троугле, јер се при покривању једнога другим поклапају углови α и стране b и c. Отуда следује други став о подударности.

Став 30/2. *Два троугла су подударна, ако имају по две стране и угао који оне заклапају једнаке.* (2 ≌).



Сл. 41.

3. пример: Дате су две стране и угао наспрам једне стране.

a) a, b и α ($a > b$).

Нацртамо најпре угао α па пренесемо на један крак страну b. Тако добијамо теме C. Око C опишемо круг са полупречником a. Он сече други крак у тачки B, тако да је једино решење троугао ABC, што ћемо доказати.

Ако продужимо крак k угла α на другу страну, круг га сече у тачки B_1 и ми добијамо троугао AB_1C, који што се тиче страна a и b одговара подацима, али не што се тиче угла. Угао α' је суседни суплементни угао датом угла α. Стога то решење не долази у обзир, кад се B_1 налази на продужењу корака k. Да се B_1 увек налази на продужењу крака доказујемо овако: Из темена C повучемо нормалу на крак k, тада су a' и b' пројекције дужи a и b на крак k. Пошто је $a > b$, тада је по ставу 29/2. и $a' > b'$, a' је такође једнако пројекцији стране $\overline{CB_1}$ (став 29/1). Отуда следује, да је $\overline{DB_1} > \overline{DA}$ и стога мора бити друга просечна тачка на продуженом краку угла α, што је требало доказати.

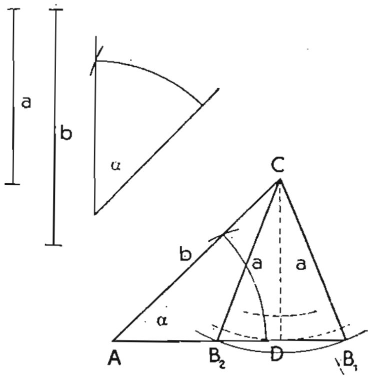
b) $a = b$, α

У том примеру мора бити $\alpha < R$, јер добијамо равнокрак троугао. Добијамо само једно решење, јер круг други пут иде кроз теме А (по ставу 29/1).

c) a, b, α ($a < b$).

У том примеру мора бити $\alpha < R$, јер мора бити угао, који лежи наспрам b, већи од α, а њихов збир не сме прекорачити $2R$.

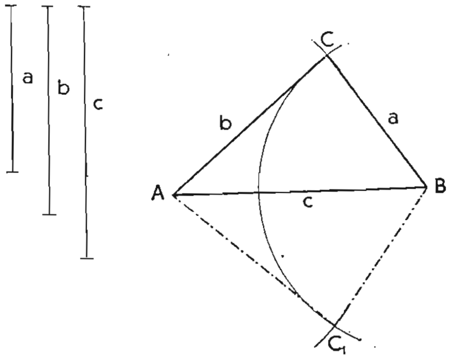
Нацртамо угао α и пренесемо на један крак страну b. Тако добијамо теме C, око којега опишемо круг полупречником a. Тај круг или сече други крак угла α у двема тачкама B_1 и B_2, или га додирује у тачки D или га пак не сече. То зависи од растојања $\overline{CD}$. У првом примеру је $a > \overline{CD}$, у другом је $a = \overline{CD}$ и у трећем је $a < \overline{CD}$. Добијамо стога два, једно или ниједно решење.



Сл. 42.

Из наведених примера следује: Троугао је одређен двема странама и углом наспрам веће стране, јер само у том случају добијамо увек само једно решење.

Два троугла, код којих су две стране првога троугла једнаке двема странама другога троугла, нису увек подударни, иако се подударају и у углу, који лежи насупрот једној страни (види пример c: $\triangle AB_1C$ и $\triangle AB_2C$). Подударност је у том случају потпуно одређена, само ако се троугли подударају у двема странама и углу, који лежи наспрам веће стране (види пример a). Отуда следује трећи став о подударности.



Сл. 43.

Став 30/3. *Два троугла су подударна, ако имају једнаке по две стране и угао наспрам веће стране* ($3 \cong$).

4. пример: Дате су све три стране a, b и c.

У том примеру мора бити збир двеју страна већи, а њина разлика мања од треће стране.

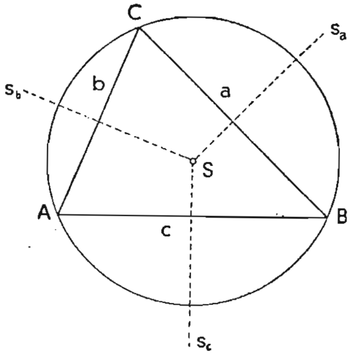
Нацртамо најпре страну c и обележимо темена A и B. Око A и B опишемо кругове с полупречницима b и a. Пошто се оба круга два пут секу, добијамо два решења. Оба троугла ABC и ABC_1 леже симетрично у односу на страну c као осу симетрију. Због тога су подударни.

Два троугла који се слажу у свим трима странама подударни су. Отуда следује четврти став о подударности.

Став 30/4. *Два троугла су подударна, ако имају све три стране једнаке* ($4 \cong$).

§ 40. СРЕДИШТЕ ОПИСАНОГА КРУГА (1. значајна тачка троугла)

Став 31. *Симетрале троуглових страна се секу у једној тачки, која је подједнако удаљена од сва три темена. Та тачка је средиште (центар) описанога круга.*

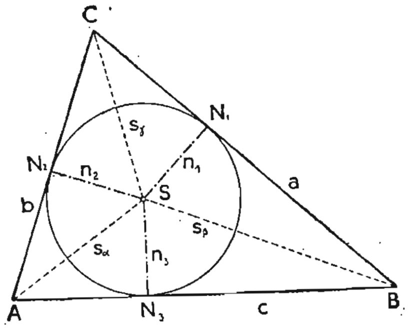


Сл. 44.

Доказ: Све тачке симетрале s_a су једнако удаљене од темена B и C и све тачке симетрале s_b су једнако удаљене од темена A и C. Због тога су растојања пресечне тачке S обе симетрале од темена једнака: $\overline{SA} = \overline{SC}$ и $\overline{SB} = \overline{SC}$. Отуда следује, да је и $\overline{SA} = \overline{SB}$ и да је S такође и тачка треће симетрале s_c. Пошто је S једнако удаљено од сва три темена, то је оно средиште круга, које иде кроз A, B, C и чији је полупречник $r = \overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC}$.

§ 41. СРЕДИШТЕ УПИСАНОГА КРУГА (2. значајна тачка троугла)

Став 32. *Симетрале углова троугла се секу у једној тачки, која је подједнако удаљена од све три стране. Та тачка је средиште (центар) уписанога круга.*

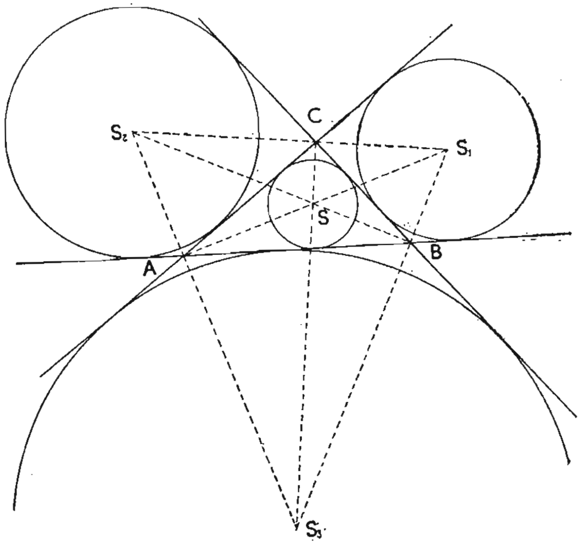


Сл. 45.

Доказ: Пресечна тачка симетрала s_α и s_β је S. Пошто S лежи на s_α то су његова растојања од страна b и c једнака ($n_2 = n_3$). Исто тако је $n_1 = n_3$, зато што лежи на симетрали s_β. Из обе једначине следује да је $n_1 = n_2$. То значи да је S тачка и треће симетрале s_γ. Из једначина $n_1 = n_2 = n_3$ видимо да је тачка S једнако удаљена од све три стране и стога се да нацртати круг с полупречником $\rho = n_1 = n_2 = n_3$, који додирује све три стране у тачкама N_1, N_2, N_3. Тај круг је уписан у троуглу ABC.

§42. СПОЉНИ УПИСАНИ КРУГ ТРОУГЛА

Став 33. *Симетрала унутрашњега угла и симетрале спољашњих углова на остала два темена секу се у једној тачки. Та тачка је средиште круга, који све три троуглове стране додирује споља. Тај круг се зове спољни уписани круг, Сваки троугао има три таква круга.*



Сл. 46.

Доказ је сличан као код уписаног круга.

---

§ 43. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

Геометрија се бави и задацима. Они су рачунски или конструктивни. У рачунским задацима се одређује величина геометриског облика помоћу рачуна. Код конструктивних задатака се геометриски облик нацрта лењиром и шестаром тако, да задовољава дате услове. Задатак је одређен, ако има одређени број решења, а неодређен, ако има бескрајно много решења.

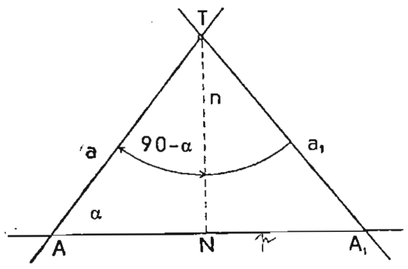
У неодређене задатке спадају геометриска места, а то су праве или криве линије или површине, чије тачке задовољавају одређене услове. Геометриска места се употребљавају обично за одређивање појединих тачака (пресечне тачке геометриских места).

Неки задаци су врло прости и могу се решити помоћу ставова. Решавање тежих геометриских задатака зависи од употребе и међусобне везе двају или више ставова. Код тежих конструктивних задатака разликују се ови делови. 1. Подаци који морају бити тако изабрани, да се не противе геометриским ставовима и већ унапред не искључују решење. 2. Анализа задатка. При томе нацртамо одговарајућу слику па узмемо у њој у обзир све аналогне услове. Потом испитамо како се помоћу датих саставака могу нацртати или поједини делови тражене слике или саставни делови, који је потпуно одређују или пак помоћна слика, из које се може извести тражена слика. Тако изводимо начин конструкције. 3. Конструкција или решење задатка. 4. Доказ, који изводимо помоћу анализе и конструкције. 5. Дискусија или детерминација, којом установљавамо, колико решења има задатак, кад је решење могуће и да ли су познате величине међу собом зависне или не.

1. пример: Конструиши кроз тачку T праву која сече другу праву под углом α.

a) Подаци: тачка T, права p и угао α.

b) Анализа: Ако повучемо из тачке T на праву p нормалу n, добијамо подножје N. Права a кроз тачку T сече праву p у тачки A под углом α. Троугао TNA је правоугли троугао и угао код T је $90^0 - \alpha$



Сл. 47.

c) Конструкција задатка: Из тачке *T* повучемо нормалу *n* на праву *p* и пренесемо на *n* са теменом у *T* угао $90^0 — \alpha$. Други крак *a* је већ тражена права.

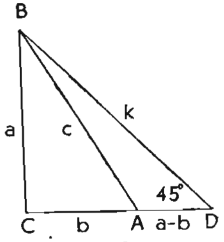
ć) Доказ следује из анализе.

d) Дискусија: Пошто је могуће на *n* пренети два угла величине $90^0 — \alpha$, има задатак два решења (a и a_1). Из правоуглога троугла *TNA* следује, да мора бити $\alpha < 90^0$.

*2. пример: Конструиши правоугли троугао, ако је дата хипотенуза и разлика обе катете.

a) Подаци: хипотенуза $c = 3$ *cm*, разлика обе катете $a — b = 1$ *cm*.

b) Анализа: Ако пренесемо на катету $\overline{CA}$ дуж $a — b$, тада је дужина $\overline{CD} = a$ и троугао *BCD* је равнокрако правоугли троугао. Због тога је угао код *D* једнак 45⁰. Отуда следује да је помоћни троугао *ABD* дат странама $a — b$ и c и углом код *D*.



Сл. 48.

c) Конструкција: Прво нацртамо страну $a — b = 1$ *cm* помоћнога троугла и повучемо кроз *D* крак *k* под углом 45⁰. Потом опишем круг са центром у *A* и полупречником *c*, који сече крак *k* у тачки *B*. Ако из те тачке повучемо нормалу на продужену страну $\overline{AD}$, добијамо теме *C* правоуглог троугла *ABC*.

č) Доказ следује из анализе.

d) Дискусија: Задатак се може решити само, ако је $c > a — b$.

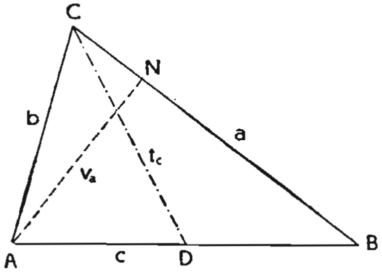
*3. пример: Конструиши троугао, ако су дате: страна *c*, тежишна линија t_c и висина v_a.

a) Подаци: $c = 5$ *cm*, $t_c = 4$ *cm* и $v_a = 3$ *cm*.

b) Анализа (слика 49):

1. Помоћни троугао *ANB* је правоугли троугао с правим углом код *N*, хипотенузом *c* и катетом v_a; због тога се троугао може нацртати.

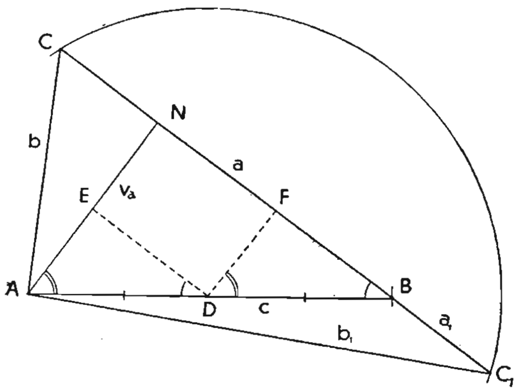
2. Теме *C* се налази на катети *a* или на њеном продужењу, зато што сви троуглови с основицом на *a* и врхом у *A* имају исту висину v_a. То можемо овако да изразимо: права *a* је геометриско место свих темена *C*.



Сл. 49.

3. По дефиницији тежишне линије средина *D* стране $\overline{AB}$ јесте крај тежишне линије t_c, која иде кроз теме *C*. Због тога се теме *C* налази на кругу са центром у *D* и полупречником t_c. Тај круг је стога геометриско место темена свих троуглова, који имају исту основицу и једнаке тежишне линије на тој страни.

c) Конструкција (слика 50):



Сл. 50.

1. Прво нацртамо прав угао и пренесемо на један крак висину v_a те добијамо теме *A*. Из *A* отсечемо на другој катети теме *B* тако, да је $\overline{AB} = c$.

2. Преполовимо страну c тачком D, која је центар круга полупречника t_c. Круг и права a секу се у двема тачкама C и C_1. Добијамо два решења: троугле ABC и ABC_1. Оба решења задовољавају услове.

c) Доказ следује из анализе.

d) Дискусија:

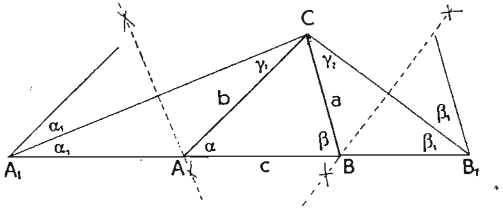
1. Пошто је v_a катета правоуглог троугла, мора бити мања од стране c, која се јавља у помоћном троуглу као хипотенуза ($v_a < c$).

2. Да добијемо пресек круга са a, мора бити његов полупречник већи од растојања тачке D до a, које је $\frac{v_a}{2}$. Ако повучемо кроз D паралеле странама правоуглог троугла ANB, добијамо два подударна троугла ADE и DBF. $(1 \cong)$. Због тога је $\overline{AE} = \overline{DF}$. Пошто је пак $\overline{DF} = \overline{EN} = \overline{AE}$ тада је $\overline{DF} = \frac{v_a}{2}$. Отуда следује, да мора бити $t_c \geqslant \frac{v_a}{2}$. Само једно решење добијамо, кад је $t_c = \frac{v_a}{2}$ или $t_c = \frac{c}{2}$, јер тада круг тангира a, односно иде други пут кроз B.

* 4. пример: Конструиши троугао с обимом $2s = a + b + c$ и угловима α и β.

a) Подаци: $2s = a + b + c = 13\,cm$, $\alpha = 45^0$ и $\beta = 75^0$.

b) Анализа: Ако продужимо основицу и пренесемо на једну страну a и на другу b добијамо троугао A_1B_1C са основицом $\overline{A_1B_1} = 2s$, Троугли A_1AC и B_1BC су равнокраки троугли. Због тога су углови на свакој основици једнаки ($\alpha_1 = \gamma_1$, $\beta_1 = \gamma_2$,). Пошто је угао α спољашњи угао троугла A_1AC, он је једнак збиру унутрашњих углова на супротној страни: $\alpha = \alpha_1 + \gamma_1 = 2\alpha_1$. Слично доказујемо да је $\beta = 2\beta_1$.



Сл. 51.

Отуда следује $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$ и $\beta_1 = \frac{\beta}{2}$. Помоћни троугао $A_1 B_1 C$ се може нацртати, јер је дата основица ($2s$) и два налегла угла (α_1 и β_1). Темена A и B се налазе на висини равнокраких троуглова AA_1C и BB_1C.

c) Конструкција: Нацртамо дуж $\overline{A_1B_1} = 2s$, на крају A_1 угао $\frac{\alpha}{2}$ и на крају B_1 угао $\frac{\beta}{2}$. Потом одредимо симетрале страна $\overline{A_1C}$ и $\overline{B_1C}$, које исецају на страни $\overline{A_1B_1}$ темена троугла A и B,

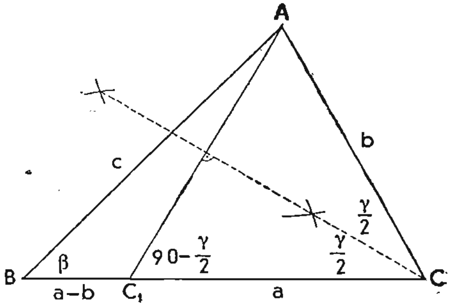
c) Доказ следује из анализе.

d) Детерминација: Задатак има једно решење и могућ је само тада, кад је $\alpha + \beta < 2R$.

*5. пример: Конструиши троугао кад је дата разлика двеју страна и два угла.

a) Подаци: $a - b = 3\,cm$, $\alpha = 75^0$, $\beta = 45^0$,
($\gamma = 180 - (\alpha + \beta) = 60^0$)

b) Анализа: Помоћни троугао ABC_1, је дат страном $a - b$, углом β и углом $90 + \frac{\gamma}{2}$. Из слике се види, да је троугао $C_1\,CA$ равнокрак троугао с углом γ код C. Висина тога троугла полови угао при врху и тада је угао на основици $\overline{AC_1}$ једнак $90^0 - \frac{\gamma}{2}$. Тај угао је суплементни суседни угао угла код темена C_1 троугла BC_1 A. који износи $90^0 + \frac{\gamma}{2}$,



Сл. 52.

c) Конструкција: Нацртамо страну $a - b$ и пренесемо на крајеве углове $\beta = 45^0$ и $90^0 + \frac{\gamma}{2} = 120^0$. Пресечна тачка оба крака даје теме A. Симетрала стране $\overline{AC_1}$ сече продужење стране $\overline{BC_1}$ у тачки C.

č) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Задатак има увек једно решење под условом, да је $\alpha + \beta < 180^0$ и $\alpha > \beta$, пошто је $a > b$.

Задаци:

1. Израчунај углове троугла из збира и разлике два угла.

a) $\alpha + \beta = 117^0\,45'\,46''$, $\alpha - \beta = 34^0\,15'\,57''$;
b) $\alpha + \beta = 147^g,1503$, $\alpha - \beta = 78^g,9658$;
c) $\alpha + \beta = 2{,}34\,R$, $\alpha - \beta = 0{,}78\,R$.

2. Колики су углови троугла, ако је један једнак збиру остала два угла? Је ли задатак одређен или неодређен?

3. Ако спојимо центар уписанога круга са теменима троугла, добијамо углове $90^0 + \frac{\alpha}{2}$, $90^0 + \frac{\beta}{2}$, $90^0 + \frac{\gamma}{2}$. Докажи.

4. Повуци све висине у троуглу и израчунај све углове, који при том постају.

5. Од троугла је дат угао $\alpha = 38^0\,15'\,47''$ и спољашњи угао $\beta_1 = 136^0\,17'\,26''$; израчунај све унутрашње углове.

6. Нацртај кроз дату тачку праву, која сече другу праву под углом 72^0.

7. Конструиши троугао, код је дата висина $v_a = 6\,cm$ и оба угла $\alpha_1 = 15^0$ и $\alpha_2 = 45^0$, који су постали деобом угла α висином v_a.

8. Повуци кроз тачку T праву тако, да је њено растојање од дате тачке A што је могуће веће.

9. Докажи, да је свака страна троугла мања од половине обима ($a < s$).

10. Конструиши равнокрак троугао (основица c, крак a, висина на крак v_a, висина на основицу v_c, угао на основици α и угао при врху γ) из:

a) $v_a = 4\ cm$, $c = 6\ cm$,
b) $v_a = 4\ cm$, $a = 7\ cm$,
c) $v_a = 4\ cm$, $\gamma = 105^0$,
* č) $a + c = 9\ cm$, $\alpha = 75^0$,
* d) $a - c = 4\ cm$, $\alpha = 75^0$,
* e) $a + v_c = 11\ cm$, $c = 4\ cm$,
* f) $a - v_c = 2\ cm$, $c = 4\ cm$,

11. Конструиши равнокрако правоугли троугао ($\gamma = 90^0$) из:

a) $v_c = 4\ cm$, * b) $a + c = 13\ cm$.

12. Конструиши равностран троугао из:

a) $v = 4\ cm$, * b) $a + v = 12\ cm$, * c) $a - v = 1\ cm$.

13. Конструиши правоугли троугао (a и b катете, c хипотенуза, ϱ полупречник уписанога круга) из:

* a) $a + b = 12\ cm$, $\alpha = 60^0$,
* b) $a - b = 3\ cm$, $\alpha = 60^0$,
* c) $c + a = 12\ cm$, $\alpha = 30^0$,
* č) $c - a = 4\ cm$, $\alpha = 30^0$,
* d) $b + c = 10\ cm$, $a = 6\ cm$,
* e) $a - b = 3\ cm$, $c = 8\ cm$,
* f) $a + b = 10\ cm$, $c = 8\ cm$,
* g) $c - a = 4\ cm$, $b) = 6\ cm$,
* h) $a + v = 10\ cm$, $\alpha = 30^0$,
* i) $a + b + c = 15\ cm$, $\alpha = 37^0\,30'$,
* j) $a = 5\ cm$, $\rho = 2\ cm$.

14. Конструиши косоугли троугао (a, b, c стране, α, β, γ углови, t_a, t_b, t_c тежишне линије, v_a, v_b, v_c висине, s_α, s_β, s_γ симетрале углова и s_a, s_b, s_c симетрале страна) из:

a) $a = 6\ cm$ $b = 5\ cm$ $v_a = 4\ cm$,	b) $a = 6{,}5\ cm$ $b = 5\ cm$ $v_c = 3{,}5\ cm$,	c) $b = 5.5\ cm$ $\alpha = 75^0\ cm$ $v_b = 4\ cm$,
č) $a = 7\ cm$ $b = 5\ cm$ $t_a = 5\ cm$,	d) $b = 6\ cm$ $\alpha = 45^0\ cm$ $s_\gamma = 5\ cm$,	e) $a = 7\ cm$ $v_a = 4{,}5\ cm$ $\gamma = 75^0\ cm$,
f) $b = 6\ cm$ $c = 4\ cm$ $t_b = 4\ cm$,	g) $a = 6\ cm$ $b = 4{,}5\ cm$ $v_c = 4\ cm$,	h) $b = 6\ cm$ $v_a = 5{,}5\ cm$ $t_b = 7{,}5\ cm$,
i) $b = 6\ cm$ $v_a = 5\ cm$ $s_\gamma = 4{,}5\ cm$,	j) $v_b = 4\ cm$ $\alpha = 75^0\ cm$ $\gamma = 60^0\ cm$,	k) $c = 6\ cm$ $v_a = 5\ cm$ $v_b = 4\ cm$,
l) $c = 6\ cm$ $v_c = 4\ cm$ $v_a = 5\ cm$,	m) $a = 6\ cm$ $t_a = 4\ cm$ $v_c = 4\ cm$,	n) $\alpha = 60^0\ cm$ $v_b = 5\ cm$ $t_c = 4\ cm$,
o) $a = 7\ cm$ $v_b = 5\ cm$ $\beta = 30^0$,	p) $v_a = 6\ cm$ $v_b = 4{,}5\ cm$ $\beta = 75^0\ cm$,	r) $c = 6\ cm$ $v_a = 4\ cm$ $t_a = 4{,}5\ cm$,
s) $\alpha = 105^0$ $v_b = 5{,}5\ cm$ $v_c = 4\ cm$,	š) $b = 5\ cm$ $v_b = 3{,}5\ cm$ $v_c = 4\ cm$,	t) $c = 6\ cm$ $\alpha = 105^0$ $t_b = 7{,}5\ cm$.

15. Конструиши косоугли троугао из:

* a) $a + b = 13\ cm$, $c = 8{,}5\ cm$, $\gamma = 75^0$,
* b) $a - b = 2{,}5\ cm$, $c = 8{,}5\ cm$, $\gamma = 75^0$,

* $c)\ a + b = 13\ cm$, $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$,

* $č)\ a - b = 2\ cm$, $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$,

* $d)\ 2s = a + b + c = 13\ cm$, $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$,

* $e)\ 2s = 13\ cm$, $v_c = 3\ cm$, $\alpha = 75^0$,

* $f)\ b - c = 2\ cm$, $v_b = 4\ cm$, $\gamma = 45^0$.

16. Докажи да је за сваку тачку основице равнокракога троугла збир растојања од оба крака сталан, наиме, једнак висини на крак.

17. Докажи да је за сваку тачку продужене основице равнокракога троугла разлика растојања од оба крака стална, наиме, једнака висини на крак.

18. Повуци праву кроз одређену тачку, која сече оба крака датога угла под једнаким угловима.

19. Кроз тачку T повуци праву тако, да је једнако удаљена од две дате тачке A и B (на два начина).

20. Конструиши симетралу угла у троуглу кроз теме, које се налази изван хартије цртања.

21. Конструиши симетралу угла две праве, које се не секу на хартији цртања.

22. На правој p одреди такву тачку, чије су спојнице са две одређене тачке A и B подједнако нагнуте према p (A и B на истој или на разним странама праве; одбијање у физици).

23. Две тачке A и B споји тако, да је пут, који додирује две дате праве p и q, најкраћи.

V. ЧЕТВОРОУГАО

§ 44. ДЕФИНИЦИЈА ЧЕТВОРОУГЛА

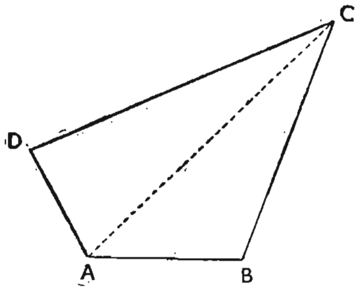
Четвороугао је геометриска слика, која је ограничена са четири стране. Четвороугао има четири темена и четири угла (унутрашња). Суплементни суседни угао унутрашњега угла је спољашњи угао. На сваком темену су два спољашња угла, који су међу собом једнаки. Узимаћемо у обзир увек само један.

Дуж, која спаја два супротна темена, зовемо дијагонала. Четвороугао има две дијагонале.

§ 45. ЗБИР УНУТРАШЊИХ И СПОЉАШЊИХ УГЛОВА ЧЕТВОРОУГЛА

Став 34. *Збир унутрашњих углова четвороугла је* $4R$.

Доказ: Дијагонала $\overline{AC}$ дели четвороугао на два троугла. Збир свих шест углова је збир унутрашњих углова четвороугла. Пошто је пак збир унутрашњих углова у сваком троуглу $2R$, збир унутрашњих углова у четвороуглу је $4R$.



Сл. 53.

Додатак: Из става следује могућност, да је у четвороуглу један угао испупчен угао ($>180^0$). Такав четвороугао зовемо конкаван или издубљен четвороугао. Четвороугао, чији су сви углови тупи и оштри, зовемо конвексан или испупчен четвороугао.

Став 35. *Збир спољашњих углова четвороугла износи* $4R$.

Доказ: Ако унутрашње углове означимо са α, β, γ, δ и спољашње са α_1, β_1, γ_1, δ_1, тада је:

$$\begin{array}{l} \alpha + \alpha_1 = 2R \\ \beta + \beta_1 = 2R \\ \gamma + \gamma_1 = 2R \\ \underline{\delta + \delta_1 = 2R} \end{array}$$

$$4R + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 8R \text{ или}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 4R, \text{ што је требало доказати.}$$

§ 46. ВРСТЕ ЧЕТВОРОУГЛОВА

По међусобном положају супротних страна делимо четвороугле на паралелограме, трапезе и трапезоиде.

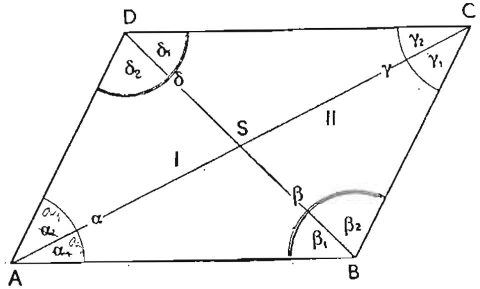
Паралелограм је четвороугао који има два пара паралелних страна.

Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страна.

Трапезоид је четвороугао који нема паралелних страна. Осим тога ту спада и делтоид, који има два пара једнаких суседних страна.

§ 47. ОСОБИНЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Став 36. *У сваком паралелограму су супротне стране једнаке, супротни углови једнаки и дијагонале се полове.*



Сл. 54.

Доказ:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1=\delta_1\\ \beta_2=\delta_2\end{array}\right\}\text{наизменични углови}$$

$$\beta_1+\beta_2=\delta_1+\delta_2$$

$$\beta=\delta$$

Пошто је $\overline{BD}$ заједничка основица оба троугла I и II, то су оба та троугла подударна по 1 $\cong$ (став 30/1). Из тога следује $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ и $\alpha=\gamma$.

Из $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $\alpha_2=\gamma_2$ и $\beta_1=\delta_1$ (наизменични углови) следује да су троугли ABS и CDS подударни по 1 $\cong$. Стога је $\overline{AS}=\overline{CS}$ и $\overline{BS}=\overline{DS}$. Дакле, S полови обе дијагонале, што је требало доказати

Напомена: Уместо $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ и $\overline{AB}=\overline{CD}$ пишемо краће $\overline{AB}\#\overline{CD}$.

Додатак: 1. Једнакост двеју супротних страна у паралелограму је изражена ставом: паралелне између паралелних једнаке су.

2. Нормале међу паралелним правима су једнаке.

3. Растојање две паралелне праве је нормала из ма које тачке једне паралеле на другу и зовемо је висином. Она је за све тачке једнака.

4. Паралелограм има две висине, јер има два пара паралелних страна.

§ 48. ВРСТЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Паралелограми који имају све стране једнаке јесу једнакострани, а остали су разнострани.

Ако су у паралелограму два суседна угла једнака, онда су сви углови једнаки: Сваки је угао тада $1R$. Такав паралелограм је правоугли.

Укупно разликујемо четири врсте паралелограма: квадрат, правоугаоник, ромб, и ромбоид.

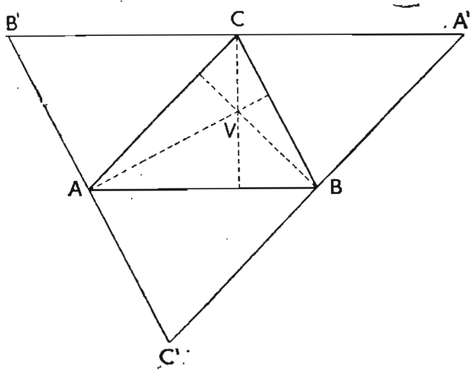
1. Квадрат је једнакострано — правоугли паралелограм.
2. Правоугаоник је разнострано — правоугли паралелограм.
3. Ромб је једнакострано — косоугли паралелограм.
4. Ромбоид је разнострано — косоугли паралелограм.

§ 49. ПРЕСЕК ВИСИНА У ТРОУГЛУ (3. значајна тачка троугла)

Став 37. *Све висине троугла секу се у једној тачки. Та тачка је пресек висина троугла.*

Гаусов доказ (види слику 55).

Повуцимо кроз свако теме троугла праву, паралелну супротној страни. При томе добијамо нов троугао $A'B'C'$. У том троуглу је $\overline{AB'}=\overline{BC}$ зато што је $ABCB'$ паралелограм, и $\overline{AC'}=\overline{CB}$, зато што је и $ACBC'$ паралелограм. Одатле следује $\overline{AB'}=\overline{AC'}$. На исти начин доказујемо да је $\overline{CB'}=\overline{CA'}$ и $\overline{BA'}=\overline{BC'}$. Стога тачке A,B,C полове стране троугла $A'B'C'$.



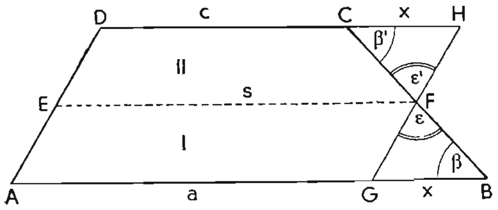
Сл. 55.

Ако повучемо у тачкама A,B,C симетрале страна новога троугла, оне се секу у једној тачки и то у средишту описаног круга око новога троугла. Симетрале стране стоје управно на странама великога троугла. Услед паралелности страна великога троугла са странама малога троугла стоје ове симетрале управно и на странама малога троугла. Дуж која стоји управно на страни и иде кроз супротно теме, јесте висина троугла. Отуда следује, да су симетрале страна великога троугла идентичне са висинама малога троугла. Пошто се прве увек секу у једној тачки, морају се сећи и друге. Ту тачку зовемо пресек висина троугла.

§ 50. ВРСТЕ ТРАПЕЗА

У трапезу се паралелне стране зову основице; њихова раздаљина је висина трапеза. Непаралелне стране су краци трапеза. Равнокраки трапез има једнаке краке. Ако један крак стоји управно иа основици, кажемо, да је трапез правоугли.

§ 51. СРЕДЊА ЛИНИЈА ТРАПЕЗА



Сл. 56.

Средња линија (медијана) је дуж која спаја средине оба крака.

Став 38. *Средња линија трапеза је паралелна основицама и једнака аритметичкој средини обе основице.*

Доказ првога дела (види слику 56).

Дато: $a \parallel c, \overline{AE} = \overline{DE}$ и $\overline{BF} = \overline{CF}$

Тврђење: $s \parallel a \parallel c$.

Доказ: Повуцимо кроз F праву паралелну краку $\overline{AD}$. Тада је по ставу о паралелним правима међу паралелним правима $\overline{GH} = \overline{AD}$. Троугли BFG и CFH су подударни, пошто се подударају у једној страни $(\overline{CF} = \overline{BF})$ и два налегла угла ($\beta = \beta'$ [наизменични углови], $\epsilon = \epsilon'$ [унакрсни углови]) (1 $\cong$). Одатле следује, да је $\overline{FG} = \overline{FH}$. Спојница $s = \overline{EF}$ полови стога паралелограм $AGHD$ на два подударна паралелограма и због тога је $s \parallel a \parallel c$.

Доказ другога дела: Из подударности оба троугла BFG и CFH следује и, да је $\overline{GB} = \overline{HC} = x$. У првом паралелограму је средња линија $s = a - x$, у другом је $s = c + x$. Ако саберемо обе једначине добијамо:

$$2s = (a - x) + (c + x) = a + c, \text{ стога је}$$

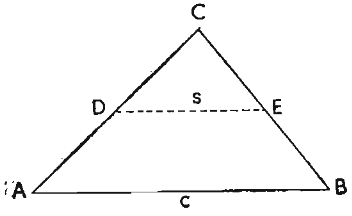
$$s = \frac{a + c}{2}$$

§ 52. СРЕДЊА ЛИНИЈА ТРОУГЛА

Став 39. *Ако спојимо средине двеју троуглових страна, добијамо средњу линију, која је паралелна трећој страни и једнака половини ње.*

Доказ следује из пређашњег става, ако се троугао сматра за трапез, јер је друга основица једнака нули.

$$s = \frac{c}{2}$$

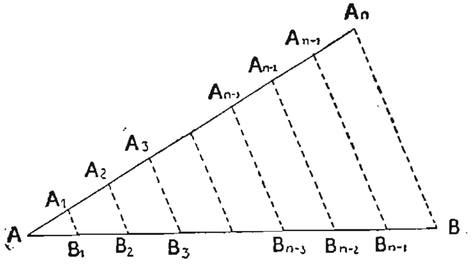


Сл. 57.

---

§ 53. ДЕОБА ДУЖИ НА n — ЈЕДНАКИХ ДЕЛОВА

Ако хоћемо да поделимо дуж $\overline{AB}$ на n једнаких делова, повуцимо кроз крај A (или B) ма какву праву и пренесимо на њу n произвољних и једнаких делова. Крај последњег дела спојимо са B и повучемо кроз сваки поделак паралелу првој спојници. Све паралеле деле троугао ABA_n на трапезе. Узмимо последња два трапеза: $BA_n A_{n-1} B_{n-1}$ и $B_{n-1} A_{n-1} A_{n-2} B_{n-2}$. Оба трапеза заједно чине један трапез са средњом линијом $\overline{B_{n-1} A_{n-1}}$. Пошто су раздаљине $\overline{A_{n-2} A_{n-1}}$ и $\overline{A_{n-1} A_n}$ једнаке, то су и раздаљине $\overline{B_{n-2} B_{n-1}}$ и $\overline{B_{n-1} B}$ једнаке.



Сл. 58.

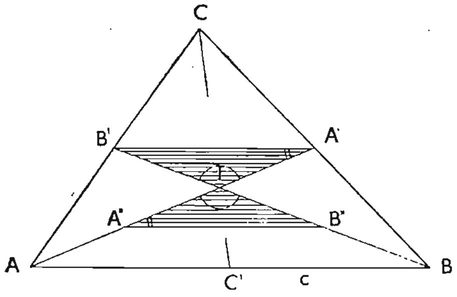
На исти начин показујемо да су у трапезу $B_{n-3} B_{n-1} A_{n-1} A_{n-3}$ једнаке раздаљине $B_{n-3} B_{n-2}$ и $B_{n-2} B_{n-1}$.

Ако тако продужимо, добијамо:

$$\overline{BB_{n-1}} = \overline{B_{n-1}\, B_{n-2}} = \overline{B_{n-2}\, B_{n-3}} = \ldots\ \overline{B_2\, B_1} = \frac{\overline{AB}}{n} .$$

§ 54. ТЕЖИШТЕ ТРОУГЛА (4. значајна тачка троугла)

Став 40. *Тежишне линије троугла се секу у једној тачки, која се зове тежиште троугла. Та тачка дели сваку тежишну линију на два дела тако, да је већи отсечак два пута већи од мањега.*



Сл. 59.

Доказ: A' је средина стране $\overline{BC}$, а B' је средина стране $\overline{AC}$. Тада су $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ тежишне линије а T пресечна тачка обе тежишне линије. Дуж $\overline{A'B'}$ која спаја тачке A' и B' је паралела страни $\overline{AB}$ и њена је дужина $\frac{\overline{AB}}{2}$ (по ставу 39).

Ако направимо $\overline{TA''} = \overline{TA'}$ и повучемо $\overline{A''B''}$ паралелно $\overline{B'A'}$, то је $\overline{A''B''}$ паралелно и са $\overline{AB}$. Оба троугла $A''TB''$ и $B'TA'$ су подударна зато, што имају по једну страну и два угла једнака (унакрсне и наизменичне углове). Отуда следује да је $\overline{A''B''} = \overline{A'B'} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$. Пошто је $\overline{A''B''}$ паралелно $\overline{AB}$, полови по ставу 39 стране $\overline{AT}$ и $\overline{BT}$ троугла ATB и ми добијамо:

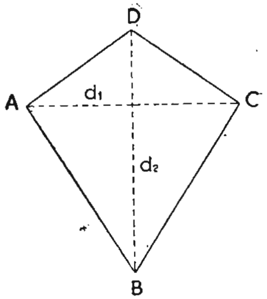
$$\overline{AA''} = \overline{TA''} = \overline{TA'} \text{ и } \overline{BB''} = \overline{TB''} = \overline{TB'}.$$

Из тога следује да је тежишна линија пресечена од друге тежишне линије тако, да су отсечци $\frac{2}{3}$, односно $\frac{1}{3}$ њене дужине. Већи део иде од темена до тежишта. На исти начин мора и трећа тежишна линија сећи тежишну линију $\overline{AA'}$, то јест, мора ићи кроз тежиште.

§ 55. ОСОБИНЕ ДЕЛТОИДА

Став 41. *У делтоиду је дијагонала која спаја темена једнаких страна симетрала друге дијагонале и оба угла која сече; та дијагонала је симетрала делтоида.*

Отуда следује да је делтоид састављен из два равнокрака троугла са заједничком основицом.



Сл. 60.

§ 56. ПОДАЦИ ЗА ЧЕТВОРОУГАО

Дијагонала дели четвороугао на два троугла. За конструкцију свакога троугла потребне су три независне величине (§ 37). Пошто је дијагонала заједничка тим троуглима, потребно нам је за конструкцију четвороугла у општем случају $2 \times 3 - 1 = 5$ величина.

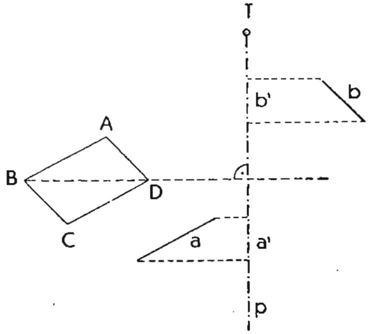
Код трапеза је довољно 4 (паралелност основица), а код паралелограма у општем случају 3 величине. (Дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла).

§ 57. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример: Повуци кроз дату тачку T праву тако, да пројекције две дате дужи на ту праву буду једнаке.

a) Дато: тачка T и дужи a и b.

b) Анализа: Ако нацртамо ма какав паралелограм $ABCD$ тако, да су његове стране једнаке и паралелне датим дужима a и b, и повучемо дијагоналу $\overline{BD}$, тада су пројекције страна паралелограма на сваку праву, која стоји управно на тој дијагонали, једнаке зато, што су пројектујући зраци паралелни дијагонали $\overline{BD}$. Пошто су дате дужи a и b паралелне странама паралелограма, имају једнаке пројекције.



Сл. 61.

c) Конструкција: Прво нацртамо ма какав паралелограм $ABCD$, чије су стране паралелне и једнаке дужима a и b. Ако повучемо праву p кроз тачку T управно на дијагоналу BD, тада су пројекције a' и b' дужи a и b на ту праву једнаке.

c) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Пошто паралелограм има две дијагонале, задатак има два решења. Ако су дужи a и b једнаке, тада је паралелограм ромб, и дијагонале се секу под правим углом. У том случају је довољно кроз тачку T повући две праве под правим углом, на којима су пројекције дужи једнаке.

2. пример: Нацртај трапез,ако су дате све четири стране.

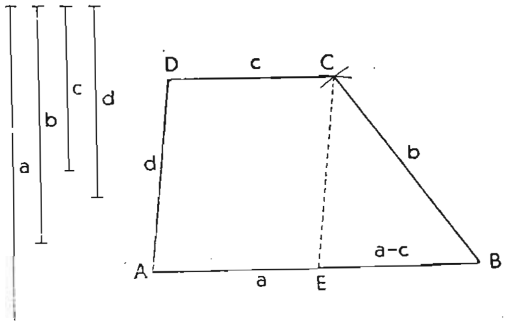
а) Подаци: $a = 4,5$; $b = 3,3$; $c = 2,3$ и $d = 2,7$.

b) Анализа: Ако повучемо кроз теме C (сл. 62) паралелу страни d, добијамо троугао EBC, који има стране $(a - c)$, b и d; на тај начин делимо трапез на троугао и паралелограм, који се могу из датих података конструисати.

c) Конструкција: Нацртамо прво троугао EBC и затим паралелограм $AECD$.

č) Доказ следује из анализе и конструкције.

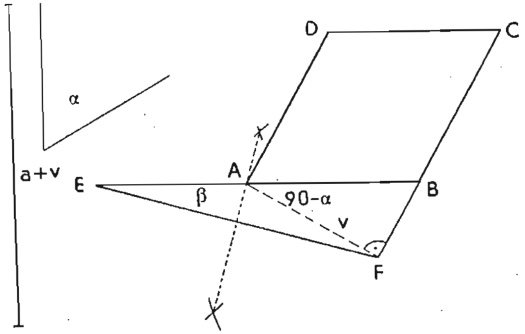
d) Детерминација: Задатак се може решити ако стране $(a - c)$, b и d задовољавају услове, које морају испуњавати троуглове стране. Који су то услови?



Сл. 62.

*3. пример: Нацртај ромб, ако је дат збир стране и висине и угао α.

a) Подаци: $a + v = 9\ cm$, $\alpha = 60^0$.



Сл. 63.

b) Анализа: Помоћни троугао EBF је дат страном $\overline{EB} = a + v$, углом $\alpha = 60^0$ и углом $\beta = \frac{90^0 - \alpha}{2}$ зато што је троугао EAF равнокраки троуга и оба су угла на основици $\overline{EF}$ једнака и њихов је збир једнак $90^0 - \alpha$. Симетрала стране $\overline{EF}$ исеца нам теме A и $\overline{AB}$ је страна ромба.

c) Конструкција: Нацртамо троугао EBF, који је дат страном $\overline{EB} = a + v$ и налеглим угловима $\alpha = 60^0$ и $\beta = 15^0$. Симетрала стране $\overline{EF}$ одређује на $\overline{EB}$ теме A. $\overline{AB}$ је страна ромба.

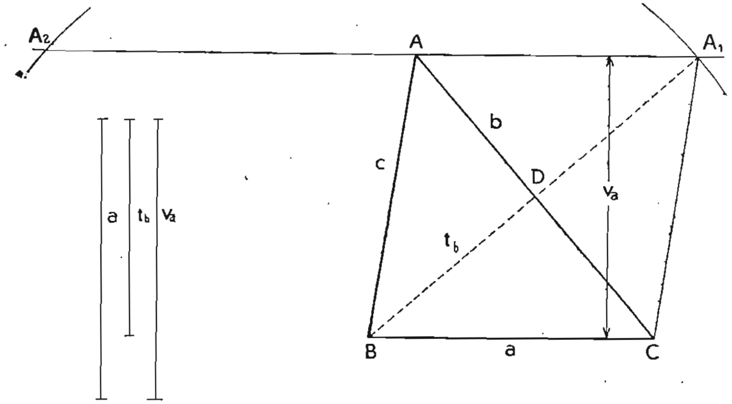
č) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Задатак има само једно решење.

4. пример: Конструиши помоћу паралелограма троугао ABC, који је дат страном a, тежишном линијом t_b и висином v_a.

a) Подаци: $a = 4cm$, $t_b = 3cm$, $v_a = 4cm$.

b) Анализа: Тежишна линија t_b спаја теме B са средином стране b. Ако удвостручимо тежишну линију t_b, могу да се сматрају b и $2t_b$ за дијагонале паралелограма, чије су стране a и c, а висина v_a. Тај паралелограм се да нацртати, јер је дата дијагонала $2t_b$, страна a и висина на страни a.



Сл. 64.

c) Конструкција. Нацртамо паралеле на раздаљини $v = 4cm$. На једну од обе паралеле пренесемо страну $a = 4cm$ и обележимо крајеве са B и C, потом опишемо круг за центром у B и полупречником $2t_b = 6cm$ и пресечемо га са паралелом у тачкама A_1 и A_2. Ако узмемо у обзир најпре први пресек A_1 и повучемо $\overline{BA} \parallel \overline{CA_1}$, тада је дијагонала $\overline{AC}$ трећа страна троугла ABC. Друго рашење добијамо на сличан начин.

č) Доказ: *a*) Растојање обе паралеле је висина v_a троугла ABC.

b) $\overline{BA_1}$ је дијагонала паралелограма; због тога полови другу дијагоналу $\overline{AC}$, која је уједно страна троугла. $\overline{BD}$ је стога тежишна линија троугла ABC и њена је дужина $\frac{1}{2}\ \overline{BA_1}$.

d) Детерминација: Задатак има два решења, ако је $2t_b > v_a$, једно решење, ако је $2t_b = v_a$, и ниједно решење ако је $2t_b < v_a$.

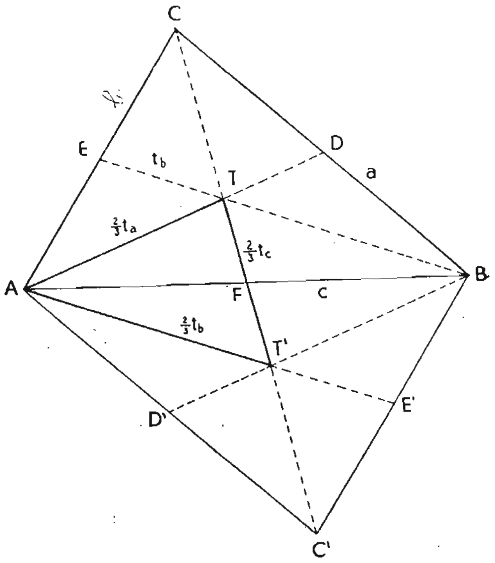
*5. пример: Нацртај троугао, ако су дате све три тежишне линије.

a) Подаци: t_a, t_b, t_c.

b) Анализа (слика 65): Ако повучемо у троуглу *ABC* праве, кроз *A* и *B*, паралелне странама *a* и *b* добијамо паралелограм *ACBC'*. Тежишна линија $2t_c$ је дијагонала тога паралелограма. Повучемо у оба троугла *ABC* и *ABC'*, који су подударни, још остале две тежишне линије и добијамо троугао *A T T'*. Стране тога троугла су

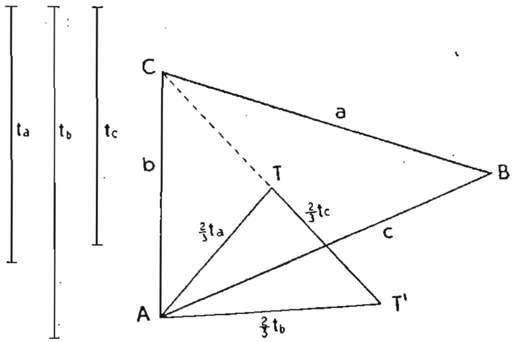
$$\frac{2}{3}t_a, \frac{2}{3}t_b, \frac{3}{3}t_c.$$

Због тога се може нацртати помоћни троугао. Темена *B* и *C* траженога троугла је тада лако одредити.



Сл. 65.

c) Конструкција (слика 66): Нацртамо прво троугао



Сл. 66.

A T T' са странама $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_c$, и направимо $\overline{TC} = \overline{TT}$. Даље преполовимо $\overline{TT'}$ у тачки *F* и пренесемо $\overline{AF} = \overline{FB}$ на спојници $\overline{AF}$.

ABC је тражени троугао.

c) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Троугао са странама $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_c$ се да конструисати под условом, да је збир двеју страна већи а разлика мања од треће стране. Из тога следује.

Став 42. *Збир двеју тежишних линија је увек већи и њихова разлика увек мања од треће тежишне линије.*

Задаци:

1. У четвороуглу су три угла:

a) $\alpha = 105^0\,37'\,42''$ $\beta = 65^0\,46'\,27''$ $\gamma = 98^0\,6'\,35''$
b) $\alpha = 106^g,\ 1564$ $\beta = 890^g,\ 654$ $\gamma = 137^g,\ 4761$
c) $\alpha = 1,2R$ $\beta = 0,9R$ $\gamma = 1,7R$

колики је четврти угао?

2. У паралелограму износи угао:

a) $\alpha = 127^0\,15'\,47''$
b) $\beta = 134^g,1706$
c) $\gamma = 2,16R$

колики су остали углови?

3. Какве особине имају квадрат, правоугаоник, ромб и ромбоид?

4. Колико података је потребно, да се конструише квадрат, правоугаоник, ромб и ромбоид?

5. Нацртај кроз дату тачку *T* паралелу датој правој *p*. Употреби паралелограм (ромб).

6. Именуј четвороугле, који су осно и централно симетрични, само осно симетрични или само централно симетрични.

7. Шта је геометриско место свих тачака, које су подједнако удаљене од двеју паралела?

8. Нацртај кроз дату тачку праву тако, да пројекције двеју датих дужи на ту праву стоје у размери 1 : 2.

9. Конструиши четвороугао (*a, b, c, d,* стране; *e,f* дијагонале) од:

a) $a = 7\ cm$
$b = 5\ cm$
$e = 8\ cm$
$\alpha = 100^0$
$\gamma = 60^0$,

b) $a = 4\ cm$
$b = 6\ cm$
$c = 7\ cm$
$f = 7\ cm$
$\alpha = 90^0$.

10. Конструиши квадрат, кад је дато:
* *a)* $e - a = 2\ cm$ * *b)* $e + a = 10\ cm$

11. Конструиши правоугаоник, кад је дато:

a) $e = 7\ cm$
$\sphericalangle ef = 105^0$,

b) $a = 7\ cm$
$\sphericalangle ae = 30^0$,

* *c)* $a + b = 12\ cm$
$e = 10\ cm$,

* *ć)* $a - b = 3\ cm$
$e = 6\ cm$,

* *d)* $b + e = 10\ cm$
$a = 6\ cm$,

* *d)* $a = 6\ cm$
$e - b = 3{,}5\ cm$.

12. Конструиши ромб, кад је дато:

a) $\alpha = 105^0$
$e = 6\ cm$,

b) $e = 5\ cm$
$f = 7\ cm$,

c) $v = 4\ cm$
$\alpha = 75^0$,

ć) $v = 5\ cm$
$a = 7\ cm$,

d) $v = 5\ cm$
$e = 8\ cm$,

* *e)* $e + f = 13\ cm$
$\alpha = 75^0$,

* *f)* $e - f = 3\ cm$
~~$e - f - 3\ cm$~~
$a = 5\ cm$,

* *g)* $a + v = 9\ cm$
$\alpha = 75^0$,

* *h)* $a - v = 2\ cm$
$\alpha = 75^0$.

13. Конструиши ромбоид, кад је дато:

a) $a = 8\ cm$
$b = 5\ cm$
$e = 12\ cm$,

b) $a = 7\ cm$
$f = 10\ cm$
$\alpha = 105^0$,

c) $b = 5\ cm$
$e = 12\ cm$
$f = 7\ cm$,

ć) $c = 8\ cm$
$f = 12\ cm$
$v_1 = 6\ cm$.

14. Реши помоћу паралелограма троугле ABC из:

a) $a = 8\ cm$
$t_a = 4{,}5\ cm$
$\alpha = 85^0\ cm$,

b) $a = 5\ cm$
$c = 7\ cm$
$t_b = 5{,}5\ cm$,

c) $c = 8\ cm$
$v_c = 4{,}5\ cm$
$t_a = 5{,}7\ cm$.

15. Дат је угао α и у њему ма која тачка T. Повуци кроз тачку T праву тако, да њени отсечци између оба крака буду једнаки.

16. Какве особине има равнокраки трапез?

17. У равнокраком трапезу износи угао на основици:
a) $\alpha = 73^0\,45'\,46''$ *b)* $\alpha = 82^g,4762$
c) $\alpha = 1,23R$;
колики су остали углови?

18. Нацртај равнокраки трапез (a, c основице, $b = d$ краци) од:

a) $a = 7\ cm$
$b = 4{,}5\ cm$
$c = 4\ cm$,

b) $a = 7\ cm$
$c = 4\ cm$
$\alpha = 75^0$,

c) $a = 7\ cm$
$c = 4\ cm$
$v = 3{,}5\ cm$,

č) $a - c = 3\ cm$
$v = 3\ cm$
$e = 6{,}5\ cm$,

d) $a = 8\ cm$
$b = 4\ cm$
$v = 3\ cm$,

e) $c = 4\ cm$
$v = 4\ cm$
$e = 7{,}5\ cm$.

19. Конструиши трапез, кад је дато:

a) $a = 8\ cm$
$b = 4\ cm$
$c = 3\ cm$
$d = 5\ cm$,

b) $a = 7\ cm$
$b = 6\ cm$
$d = 4{,}5\ cm$
$\alpha = 75^0$,

c) $a = 7\ cm$
$c = 3{,}5\ cm$
$v = 4\ cm$
$\beta = 60^0$,

ć) $a = 4\ cm$
$b = 4\ cm$
$d = 4{,}5\ cm$
$v = 3{,}5\ cm$.

20. Конструиши троугао, ако су дате средине све три стране.

21. Докажи да се добије паралелограм, ако се споје средине страна ма каквог четвороугла.

22. Подели дуж на 7 једнаких делова.

23. Конструиши троугао ABC, кад је дато:

a) $a = 5\ cm$
$t_b = 6\ cm$
$t_c = 4\ cm$,

* *b)* $t_a = 90\ mm$
$t_b = 45\ mm$
$t_c = 80\ mm$.

24. Конструиши делтоид $ABCD$ ($\overline{AB} = \overline{AD} = a$, $\overline{CB} = \overline{CD} = b$, $\overline{AC} = c$ и $\overline{BD} = f$), кад је дато:

a) $a = 3\ cm$
$e = 8\ cm$
$\alpha = 75^0$,

b) $e = 8\ cm$
$\alpha = 45^0$
$\gamma = 75^0$,

c) $e = 8\ cm$
$f = 6\ cm$
$\alpha = 105^0$,

* *ć)* $b + a = 9{,}5\ cm$
$e = 8\ cm$
$\beta = 105^0$,

* *d)* $b - a = 3\ cm$
$e = 8\ cm$
$\beta = 105^0$,

* *e)* $a + b = 10{,}5\ cm$
$e = 9\ cm$
$\gamma = 45^0$,

* *f)* $a - b = 2{,}5\ cm$
$e = 9\ cm$
$\gamma = 45^0$.

VI. МНОГОУГАО

§ 58. ДЕФИНИЦИЈА МНОГОУГЛА

Многоугао или полигон је равна геометриска слика која је ограничена са више страна; број страна је једнак броју углова, односно темена.

Многоугли су конвексни или конкавни. Конвексни су они који имају само оштре и тупе унутрашње углове; конкавни пак они код којих се јављају и испупчени углови.

Спољашњи угао је суплементни суседни угао унутрашњег угла. Сваки унутрашњи угао има два спољашња угла, који су једнаки. Рачунаћемо стога само један спољашњи угао. Кад се говори о „угловима“ многоугла, тада се мисли на унутрашње углове.

По броју страна разликујемо: троугао, четвороугао, петоугао, шестоугао . . . n-угао.

Једнакострани многоугао има све стране једнаке; једнакоугли има све углове једнаке; правилни или регуларни многоугао има све стране и све углове једнаке.

Дијагонала је спојница два темена.

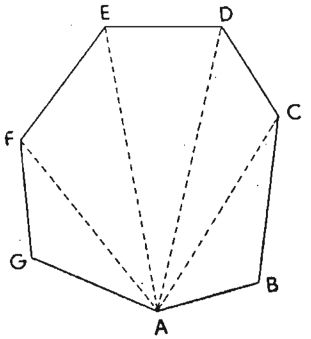
§ 59. БРОЈ ДИЈАГОНАЛА У n - УГЛУ

Став 43. *Број дијагонала у n-углу* је

$$\frac{n\ (n-3)}{2}.$$

Доказ: Из свакога темена се могу повући $n-3$ дијагонале, тј. из свих темена $n\,(n-3)$. Али пошто се свака дијагонала двапута црта, то је прави број дијагонала

$$\frac{n\ (n-3)}{2}$$



Сл, 67.

Напомена: Тај број је увек цео број. Зашто?

§ 60. ЗБИР УНУТРАШЊИХ УГЛОВА У n - УГЛУ

Став 44. *Збир унутрашњих углова у n - углу је* $(n-2)\,2\,R$.

Доказ: Дијагонале из тачке A деле n- угао у $n-2$ троугла. Сви углови тих троуглова чине збир свих унутрашњих углова многоугла. У сваком троуглу је збир сва три угла $2R$. Стога је збир свих унутрашњих углова n- угла

$$(n-2) \cdot 2R.$$

§ 61. ЗБИР СПОЉАШЊИХ УГЛОВА У n - УГЛУ

Став 45. *Збир спољашњих углова n - угла је* $4R$.

Доказ: У сваком темену је збир спољашњега и унутрашњега угла $2R$. Отуда следује:

$$n \cdot 2R - (n-2) \cdot 2R = n \cdot 2R - n \cdot 2R + 4R = 4R.$$

§ 62. УГАО ПРАВИЛНОГА МНОГОУГЛА

Став. 46. *Угао правилнога многоугла је* $2R - \dfrac{4R}{n}$.

Доказ: Збир унутрашњега и спољашњега угла је $2R$, спољашњи угао сам је $\dfrac{4R}{n}$, зато што су сви спољашњи углови једнаки међу собом. Отуда следује, да је унутрашњи угао правилнога n- угла:

$$2R - \frac{4\ R}{n}.$$

Шта примећујемо, ако n расте?

§ 63. СИМЕТРАЛЕ ПРАВИЛНОГА МНОГОУГЛА

Став 47. *Свака симетрала угла и свака симетрала стране правилнога многоугла је његова симетрала.*

Доказ: Ако нацртамо симетралу стране или угла и обрнемо једну половину правилнога многоугла око ње, оба дела се поклапају, јер на обема странама симетрале следују једнаке стране и једнаки углови у истом реду величина.

§ 64. БРОЈ ОСА СИМЕТРИЈЕ ПРАВИЛНОГА n- УГЛА

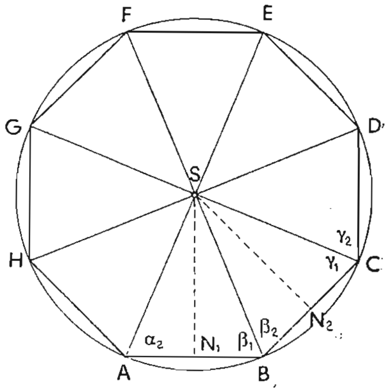
Став 48. *Сваки правилан n-угао има n оса симетрије.*

Доказ: Ако је n паран број, имају по две супротне стране заједничку симетралу стране и стога укупно $\frac{n}{2}$ симетрала страна и по два супротна угла једну заједничку симетралу угла, што опет даје $\frac{n}{2}$ симетрала углова. Стога је укупно n симетрала.

Ако је n непаран број свака симетрала стране је уједно и симетрала угла који лежи насупрот те стране. Стога имамо укупно опет n симетрала.

§ 65. СРЕДИШТЕ ПРАВИЛНОГА МНОГОУГЛА

Став 49. *Све симетрале страна и углова правилнога многоугла секу се у једној тачки, која је подједнако удаљена од свих темена и од свих страна. Та је тачка средиште описанога и уписанога круга и зове се* **средиште** *правилнога многоугла.*



Сл. 68.

Доказ: Сви углови $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ једнаки су и све стране $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD} \ldots$ су такође једнаке. Симетрале страна $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ секу се у тачки S. Та тачка спојена са A, B и C даје два равнокрака троугла ASB и BSC, који су подударни зато, што се слажу у свима трима странама ($4 \cong$). Због тога су и углови на основици једнаки: $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1$. Из $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ следује, да је $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\beta}{2}$, тј. да је угао на основици равнокракога троугла једнак половини унутрашњега угла многоугла. Стога је и $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$. Отуда следује да је троугао CSD подударан са троуглом $\overline{BSC}$, јер имају две стране једнаке $(\overline{CS}$ и $\overline{CB} = \overline{CD})$ и угао који обе стране заклапају $\left(\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}\right)$, ($2 \cong$). Дакле и троугао CSD је равнокрак и његова симетрала стране иде кроз S.

Ако на тај начин продужимо, делимо n- угао на n равнокраких и подударних троуглова, који имају заједнички врх у S и чије се симетрале страна секу такође у S. Пошто су стране равнокраких троуглова $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ симетрале углова многоугла, секу се стога и све симетрале углова у истој тачки S. Све су једнаке дужине и зато круг са средиштем у S и полупречником $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \ldots = r$ иде кроз сва темена многоугла. Кажемо да је круг описан око многоугла. Даље видимо такође да су растојање $\overline{SN_1} = \overline{SN_2} = \overline{SN_3} = \ldots = \rho$ и да круг с полупречником ρ и средиштем у S додирује све стране. Тај круг је у правилном многоуглу уписан.

§ 66. ПОДАЦИ ЗА МНОГОУГАО

Дијагонале из једнога темена деле многоугао на $(n-2)$ троугла. За конструкцију свакога троугла потребне су три величине. Пошто свака дијагонала припада двама троуглима, морамо $(n-3)$ величине одузети од укупнога броја величина, које су потребне за конструкцију свих троуглова. Стога је:

$$3(n-2) - (n-3) = 3n - 6 - n + 3 = 2n - 3.$$

Напомена: При тријангулацији је обично дата само једна страна, а остале величине су углови.

Задаци:

1. Колико дијагонала има 10, 12, 15, 30, 100-угао?
2. Који многоугао има исто толико дијагонала колико страна?
3. Ако се број страна некога многоугла удвоји, број дијагонала се повећа шест пута. Који је то многоугао?
4. Колики је збир свих углова 5, 6, 8, 10, 20-угла?
5. Израчунај угао правилнога 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 100-угла.
6. Ако се број страна некога правилнога многоугла удвоји, удвоји се и угао. Колико страна има тај многоугао?
7. Отсеци стране равностранога троугла тако, да постане правилан шестоугао.
8. Конструиши правилан шестоугао, ако је дуж $a = 6$ cm његова

   a) краћа дијагонала, *b*) дужа дијагонала.

VII. КРУГ

§ 67. ДЕФИНИЦИЈА КРУГА И ЊЕГОВО ОДРЕЂИВАЊЕ

Круг је геометриско место свих тачака у равни које су једнако удаљене од једне сталне тачке те равни; та тачка је средиште круга.

Став 50. *Круг је одређен са три тачке које не леже на једној правој.*

Доказ: Узмимо три тачке које не леже на једној правој; можемо их увек сматрати као темена троугла. У § 40 доказали смо да се око троугла може описати круг, чије се средиште добија, ако одредимо симетрале страна.

Ако све три тачке леже на једној правој, симетрале су паралелне и секу се у бесконачности. Лук кроз све три тачке има бесконачно велики полупречник, тј. прелази у праву. Отуда следује:

Став 51. *Права не може имати са кругом више од две заједничке тачке.*

§ 68. ТАЧКА И КРУГ

Положај тачке с обзиром на одређени круг је зависан од средишног растојања, тј. од дужи која спаја тачку са средиштем круга. Тачка лежи ван круга, на кругу или у кругу, ако је њено средишно растојање веће, једнако или мање од полупречника круга.

§ 69. КРУГ И ПРАВА

Средишно растојање праве с обзиром на круг је управна, повучена из средишта круга на праву. Права не сече круг, ако је средишно растојање већа од полупречника; права додирује круг, ако је средишно растојање једнако полупречнику и сече круг, ако је мање од полупречника. (Зашто?)

У другом случају зовемо праву дирка или тангента и подножје нормале из средишта круга на праву је заједничка тачка круга и праве, додир праве с кругом. У трећем случају зовемо праву сечица или секанта и њен део који лежи у кругу зовемо тетива круга.

§ 70. ТЕТИВА И ЊЕНЕ ОСОБИНЕ

Тетиву и овако дефинишемо.

Тетива је дуж која спаја две тачке кружне линије.

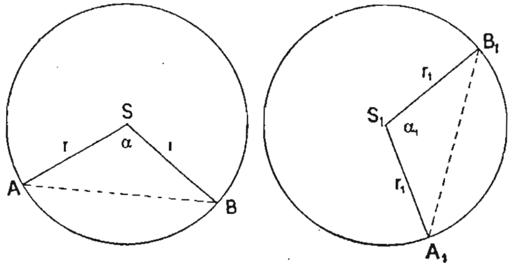
Став 52. *Симетрала сваке тетиве иде кроз средиште круга.*

Доказ: Седиште круга има од крајева тетиве једнака растојања и стога лежи на симетрали тетиве. Пошто симетрала стоји управно на тетиви, следује:

Став 53. *Паралелне тетиве истога круга имају исту симетралу.*

Став 54. *Једнаким тетивама истога круга или једнаких кругова припадају једнаки средишни углови и једнаки луци.*

Доказ: Троугли ASB и $A_1S_1B_1$ подударни су, јер имају све три стране једнаке (4 $\cong$); због тога су једнаки међу собом средишни углови α и α_1 и једнаки су такође и луци $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$

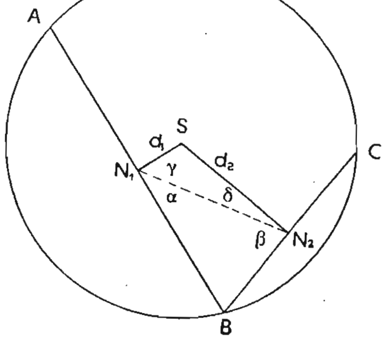


Сл. 69.

Став 55. *Једнаке тетиве истога круга или једнаких кругова имају једнака средишна растојања.*

Доказ: Пошто су оба троугла ASB и $A_1S_1B_1$ равнокраки и подударни, то су и висине за основице $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$ једнаке.

Став 56. *Неједнаке тетиве истога круга или једнаких кругова имају различна средишна растојања и то већој тетиви припада мање средишно растојање и обрнуто.*

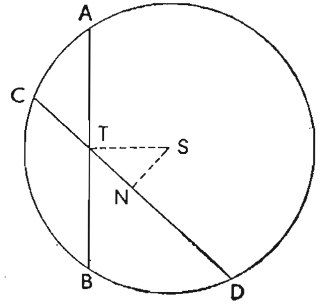


Сл. 70.

Доказ: Узмимо две различите тетиве са заједничким крајем B. Подножје средишног растојања d_1 на $\overline{AB}$ је N_1, а средишног растојања d_2 на $\overline{BC}$ је N_2. У троуглу BN_1N_2 угао α је мањи од угла β зато, што лежи наспрам мање стране. Пошто су углови γ и δ комплементни угловима α и β, то је γ већи од δ. Отуда излази да је у троуглу SN_1N_2 страна d_2 већа од стране d_1, јер лежи наспрам већега угла. Пошто d_1 припада већој а d_2 мањој тетиви, тачност става је доказана.

Став 57. *Од свих тетива које иду кроз дату тачку T у кругу најмања је она која стоје управно на средишном растојању дате тачке.*

Доказ: Ако повучемо кроз тачку T тетиве $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, од којих $\overline{AB}$ стоје управно на средишном растојању тачке T, па нацртамо и другој тетиви средишно растојање $\overline{SN}$, добијамо правоугли троугао TNS. $\overline{TS}$ је хипотенуза троугла, стога је већа од $\overline{NS}$. По пређашњем ставу је $\overline{AB}$ мање од $\overline{CD}$ зато, што је средишно растојање тетиве $\overline{AB}$ веће од средишног растојање тетиве $\overline{CD}$.



Сл. 71.

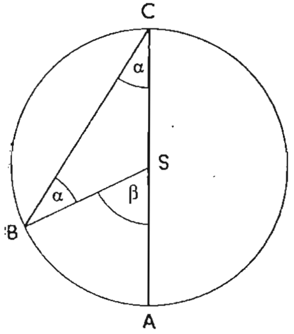
§ 72. ПЕРИФЕРИСКИ И СРЕДИШНИ УГАО

Периферски угао је угао с теменом на периферији круга. За лук који исецају оба крака каже се да припада периферском углу.

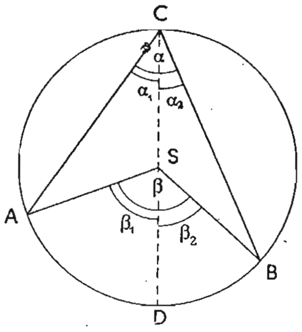
Средишни или централни угао је угао с теменом у средишту круга; његови краци се поклапају с полупречницима круга.

Став 58. *Периферски угао је половина средишнога угла над истим луком.*

Доказ:



Сл. 72, *a*.



Сл. 72, *b*.

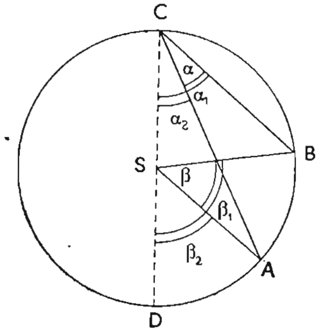
1. случај (слика 72, *a*): Средиште круга лежи на једном краку угла.

Троугао BSC је равнокрак троугао и због тога су оба угла на основици једнака. Пошто је средишни угао спољашњи угао тога троугла, то је његова величина једнака збиру углова на основици (став 24). Стога је $\beta = 2\alpha$ или $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

2. случај (слика 72, *b*): Средиште круга лежи у углу. У том примеру разделимо оба угла пречником $\overline{CD}$ и добијамо:

$$\begin{array}{l} \beta_1 = 2\,\alpha_1 \\ \beta_2 = 2\,\alpha_2 \\ \hline \beta_1 + \beta_2 = 2\,(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \beta \;= 2\,\alpha \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{\beta}{2}. \end{array}$$

3. случај (слика 72, *c*): Средиште круга лежи ван угла. Ако повучемо пречник $\overline{CD}$, добијамо:



Сл. 72, *c*.

$$\begin{array}{l} \beta_1 = 2\,\alpha_1 \\ \beta_2 = 2\,\alpha_2 \\ \hline \beta_1 - \beta_2 = 2\,(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \beta \;= 2\,\alpha \ \text{или} \ \alpha = \frac{\beta}{2}. \end{array}$$

Узмимо да је средишни угао β сталан. Лук тога угла нека буде уједно и лук периферских углова, чије се теме налази на осталом делу круга.

Тада наступају сва три наведена случаја. Сваки периферски угао $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ једнак је половини средишнога угла β, стога су и међу собом једнаки. Добијамо:

Став 59. *Периферски углови над истим луком су једнаки међу собом.*

Ако узмемо уместо лука тетиву која му припада добијамо троугле с једнаким угловима на темену C.

Став 60. *Геометриско место темена свих троуглова који имају исту основицу и једнаке углове на темену, јесте круг, чије је средиште теме равнокракога троугла с истом основицом и двоструким углом на врху.*

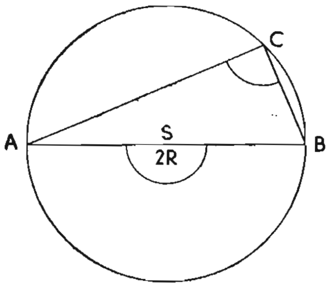
Доказ следује из пређашњег.

§ 72. УГАО У ПОЛУКРУГУ

Угао у полукругу је периферски угао, коме припада лук једнак полукругу.

Став 61. *Угао у полукругу је прав угао.*

Доказ: Одговарајући средишни угао износи $2R$ (раван или положен угао).



Сл. 73.

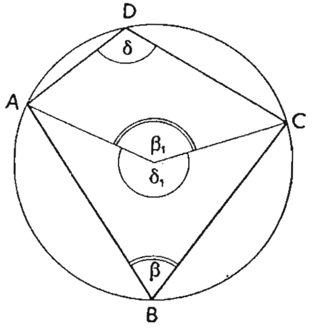
Став 62. *Геометриско место темена свих правоуглих троуглова са заједничком хипотенузом јесте круг, чији је пречник хипотенуза.*

§ 73. СУПЛЕМЕНТНИ ПЕРИФЕРИСКИ УГЛОВИ

Став 63. *Два периферска угла, чији луци заједно чине круг, суплементни су.*

Доказ:

$$\beta_1 = 2\,\beta$$
$$\delta_1 = 2\,\delta$$
$$\beta_1 + \delta_1 = 2\,(\beta + \delta) = 4\,R$$
$$\beta + \delta = 2R$$



Сл. 74.

§ 74. ТЕТИВНИ ЧЕТВОРОУГАО

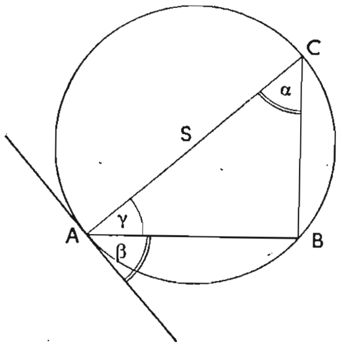
Став 63. се може и овако казати: Краци два суплементна периферска угла граде четвороугао; пошто су његове стране тетиве, зовемо га тетивни четвороугао.

Став 64. *У тетивном четвороуглу је збир два наспрамна угла 2R.*

Став 65. *Ако су у четвороуглу два супротна угла суплементна, може се око четвороугла описати круг. Све симетрале страна се тада секу у једној тачки, то је средиште описанога круга.*

§ 75. УГАО ИЗМЕЂУ ТАНГЕНТЕ И ТЕТИВЕ

Став 66. *Угао између тангенте и тетиве која иде кроз тачку додира тангенте јесте једнак периферском углу над том тетивом, чије теме не лежи у углу, који граде тангента и тетива.*

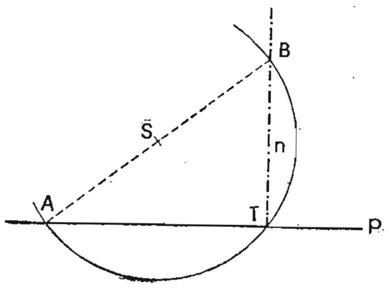


Сл. 75.

Доказ: Сви периферски углови над истом тетивом су једнаки. Узмимо такав периферски угао α, чији крак иде кроз средиште S, тада је троугао ABC правоугли троугао с правим углом код B (став 61). Угао γ је комплементан углу α, али је комплементан и углу β зато, што тангента стоји управно на пречник $\overline{AC}$. Отуда следује, да је $\alpha = \beta$, што је требало доказати.

§ 76. ЗАДАЦИ

1. пример: У тачки T праве p повуци управну. Нацртамо макакав круг кроз тачку T, који сече праву још у тачки A. Пречник круга кроз A сече круг други пут у тачки B. $\overline{BT}$ је тражена нормала (зашто?)



Сл. 76.

(Упореди ту конструкцију с пређашњим).

2. пример: Одреди геометриско место темена свих троуглова, који имају исту основицу и једнаке углове на темену.

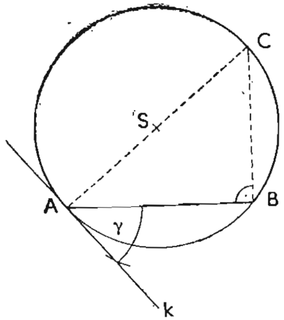
a) Подаци: $c = 4\ cm$, γ.

b) Анализа: По ставу 60 је тражено геометриско место круг са средиштем у темену равнокракога троугла, који има за основицу c и угао на темену 2γ, и с полупречником, који је једнак краку троугла. За упрошћавање конструкције узимамо у обзир став 66.

c) Конструкција: На дужи $\overline{AB}$ пренесемо у темену A угао γ и повучемо на крак k у тачки A и на дуж AB у тачки B управне, које се секу у тачки C. $\overline{AC}$ је пречник и његова средина S средиште круга, чији је лук BCA тражено геометриско место.

č) Доказ следује из ставова 59, 60 и 66.

d) Детерминација: Задатак има једно решење за $\gamma < 180^0$ и може се успешно употребљавати при одређивању троуглова, који су дати једном страном, углом наспрам те стране и још каквом трећом величином.



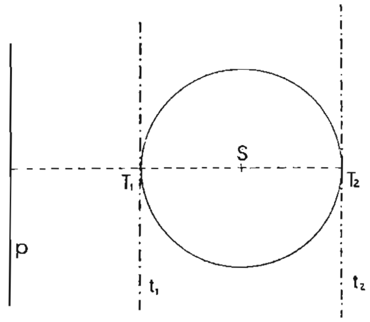
Сл. 77.

§ 77. ПРОБЛЕМИ О ТАНГЕНТАМА

Под проблемима о тангентама разумемо ове три конструкције:

1. конструкцију тангенте у датој тачки круга,
2. конструкцију тангената које су паралелне датој правој и
3. конструкција тангената из дате тачке на круг.

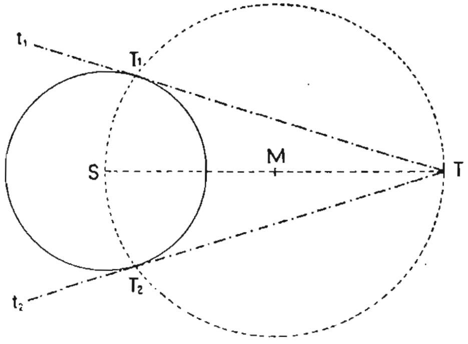
Ad 1. У тачки додира стоји тангента нормално на додирни пречник.



Сл. 78.

Ad 2 (слика 78). Кроз средиште круга S повуцимо нормални пречник на дату праву p. На оба краја тога пречника повуцимо паралелне тангенте правој p (два решења).

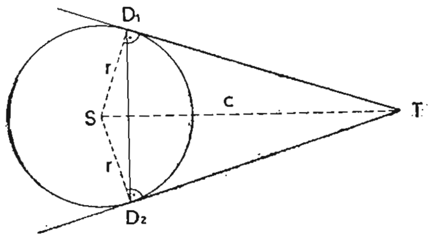
Ad 3 (види слику 79). Повучемо средишно растојање и преполовимо га у тачки M. Око M опишемо круг полупречника $\overline{MS}$. Оба круга се секу у двема тачкама T_1 и T_2, а то су тачке додира тангената TT_1 и TT_2 (зашто?).



Сл. 79.

§ 78. ДУЖИНА ТАНГЕНТНИХ ОТСЕЧАКА ИЗ ЈЕДНЕ ТАЧКЕ

Став 67. *Из једне тачке изван круга повучемо на круг две тангенте. Отсечци између те тачке и тачака додира једнаки су. Кажемо: тангентни отсечци су једнаки.*



Сл. 80.

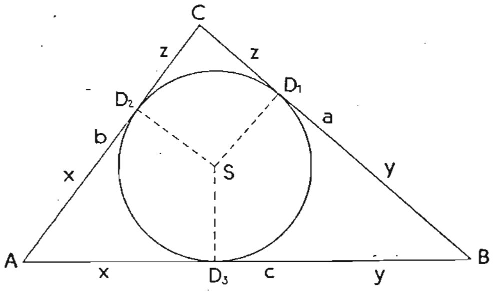
Доказ: D_1 и D_2 су тачке додира тангената. $\overline{SD_1} \perp \overline{TD_1}$ и $\overline{SD_2} \perp \overline{TD_2}$. Отуда следује да су троугли SD_1T и SD_2T подударни (3 ≌) и да је $\overline{TD_1} = \overline{TD_2}$. Због тога леже D_1 и D_2 симетрично у односу на $\overline{ST}$ као симетриску осу. Спојница $\overline{D_1D_2}$ се зове додирна тетива и стоји управно на $\overline{ST}$.

§ 79. ТАНГЕНТНИ ТРОУГАО

Став 68. *Ако су a, b, c стране троугла и s полузбир свих страна, тада деле додирне тачке уписанога круга стране на отсечке, чије су дужине $s—a$, $s—b$, и $s—c$.*

Доказ:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$$



Сл. 81.

$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=s$. Пошто је $y+z=a$,

добијамо

$x+a=s$ или

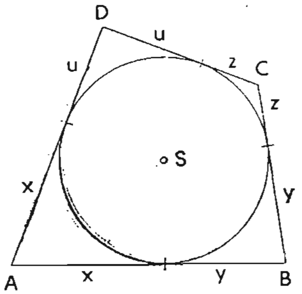
$x=s-a$ · Исто тако добијамо:

$y=s-b$

$z=s-c$

§ 80. ТАНГЕНТНИ ЧЕТВОРОУГАО

Став 69. *У сваком тангентном четвороуглу је збир двеју наспрамних страна једнак збиру осталих двеју страна.*



Сл. 82.

Доказ:

$a=x+y$ $\quad b=y+z$

$\underline{c=z+u}$ $\quad \underline{d=x+u}$

Из: $a+c=x+y+z+u$ и

$b+d=x+y+z+u$

следује $a+c=b+d$.

§ 81. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ДВА КРУГА

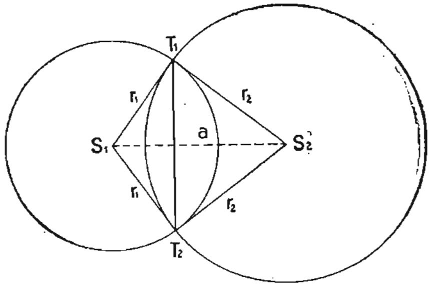
Два круга имају две тачке или једну тачку заједничку или ниједну. Ако имају две тачке заједничке, кажемо, да се кругови у тим тачкама секу. Ако имају само једну заједничку тачку, кругови се додирују и заједничка тачка је њин додир. Додир је спољашњи, кад су кругови један покрај другога, а унутрашње, кад је мањи у већем. Кад се два круга не секу, лежи мањи круг потпуно у већем кругу или је изван њега.

§ 82. СРЕДИШНО ИЛИ ЦЕНТРАЛНО РАСТОЈАЊЕ ДВА КРУГА

Средишно или централно растојање два круга је растојање њихових средишта.

Пошто је сваки пречник круга уједно и његова симетрала, то је средишно растојање оба круга заједничка симетрала. Ако имају оба круга на једној страни симетрале заједничку тачку, имају је симетрично и на другој страни. Спојница обе заједничке тачке је заједничка тетива, која стоји управно на симетралу.

Став 70. *Заједничка тетива два круга стоји нормално на средишном растојању и преполовљена је њим.*

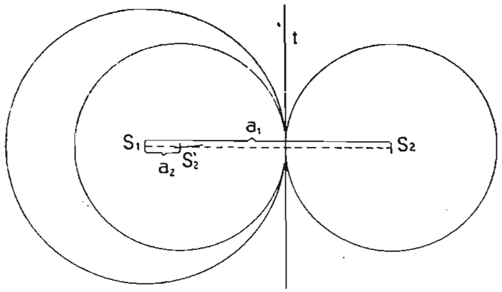


Сл. 83.

Доказ: Троугли $S_1 T_1 S_2$ и $S_1 T_2 S_2$ су подударни по 4$\cong$ и због тога се, после обртања око $\overline{S_1 S_2}$, поклапају.

Код два круга, који се секу, средишно растојање је мање од збира оба полупречника.

Последице: Ако се два круга додирују, лежи тачка додира на средишном растојању. Два круга се додирују споља или изнутра. Ако се додирују споља, средишно растојање је једнако збиру оба полупречника, ако се додирују изнутра, средишно растојање је једнако разлици оба полупречника.



Сл. 84.

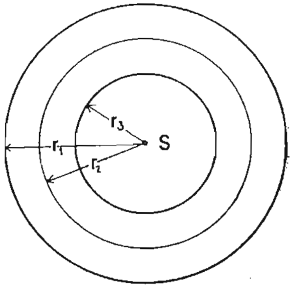
$$a_1=r_1+r_2, \quad a_2=r_1-r_2$$

Заједничка тетива прелази у заједничку тангенту у тачки додира оба круга и стоји управно на средишном растојању.

§ 83. КОНЦЕНТРИЧНИ КРУГОВИ. КРУЖНИ ПРСТЕН

Два круга се зову концентрични, ако имају исто средиште и ексцентрични, ако имају различита средишта.

Кружни прстен је површина између два концентрична круга. Ширина кружног прстена је разлика оба полупречника. Код кружног прстена разликујемо унутрашњи, средњи и спољни круг. Полупречник средњега круга је аритметичка средина осталих двају полупречника.



Сл. 85.

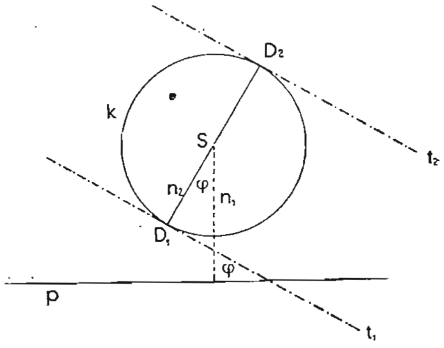
§ 84. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример: Конструиши на дати круг тангенту, која гради с правом p угао φ.

a) Подаци: Круг k, права p и угао $\varphi = 30^0$.

b) Анализа: Нормале из средишта круга на праву p и тангенту t заклапају угао φ, (Углови са нормалним крацима: став 22).

c) Конструкција: Повучемо кроз средиште круга управну n_1 на праву p и пренесемо угао φ на ту управну са теменом у средишту круга. Пресечне тачке другога крака n_2 с кругом јесу додирне тачке тангената, које стоје управно на тај крак и граде с правом p угао φ.



Сл. 86.

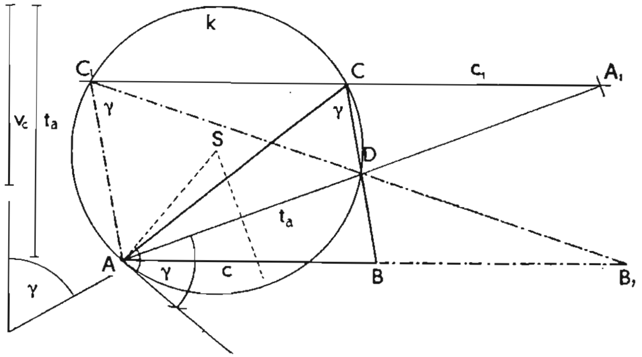
č) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Задатак има четири решења (Зашто?).

*2. пример: Конструиши троугао из: γ, v_c и t_a · (Сл. 87).

a) Подаци: $\gamma = 60^\circ$, $v_c = 5\,cm$ и $t_a = 7\ cm$.

b) Анализа: Ако продужимо тежишну линију за њену дужину, добијамо тачку A_1, која се налази на паралели c_1 са основицом $\overline{AB}$ на отстојању v_c. Тачка D полови $\overline{AA_1}$ и $\overline{BC}$ те су $\overline{AA_1}$ и $\overline{BC}$ стога дијагонале паралелограма са паралелним странама $\overline{AB}$ и $\overline{CA_1}$ на растојању v_c. Тежишна линије $t_a = \overline{AD}$ је основица троугла ADC са углом при врху $\gamma = 60^\circ$. Геометриско место свих темена C са углом γ је круг k, чија је тетива $\overline{AD}$ са средишним углом 2γ. (Види § 76, задатак 2)˙ Пресечне тачке круга k са правом c јесу темена C, односно C_1 троуглова с основицама $\overline{AB}$ односно $\overline{AB_1}$.



Сл. 87.

c) Конструкција: Прво нацртамо паралеле c и c_1 на растојању $v_c = 5\ cm$ и на c тачку A. Из те тачке отсечемо на паралели c_1 тачку A_1 тако, да је $\overline{AA_1} = 2\,t_a = 14\,cm$. Тачка D је средина дужи $\overline{AA_1}$. Потом одредимо круг, чија је тетива $\overline{AD}$ и одговарајући средишни угао 2γ. У том циљу пренесемо угао γ на теме A тако, да је $\overline{AD}$ један крак угла. Ако повучемо управну у A на други крак угла γ и одредимо симетралу тежишне линије $\overline{AD}$, онда се обе праве секу у средишту круга S, који иде кроз A и D и сече праву c_1 у тачкака C и C_1. Спојница тачака C и C_1 са D одређује темена B и B_1

č) Доказ следује из анализе и конструкције.

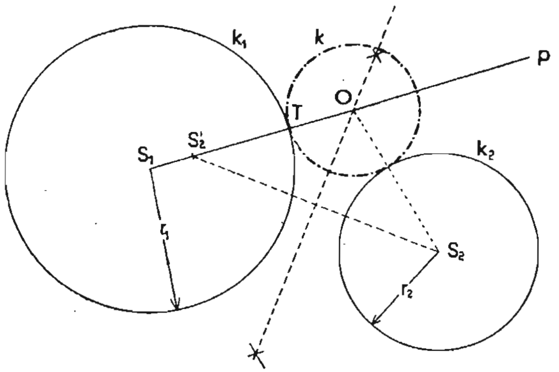
d) Детерминација: Задатак има два решења, јер круг k сече праву C_1 двапута (троугли ABC и AB_1C_1).

3. пример: Конструиши круг, који додирује два круга, и то један у датој тачки.

a) Подаци: Круг k_1 с тачком T и круг k_2.

b) Анализа (види слику 88).

Геометриско место центара свих кругова, који додирују круг k_1 у тачки T, је права p кроз T и S_1. Ако повећамо полупречник круга, који додирује оба круга, за полупречник r_2, иде концентрични круг кроз тачку S_2 и исеца на правој p тачку S_2'. При томе је $\overline{TS_2'} = r_2$. Због тога се може тачка S_2' унапред одредити и симетрала дужи $\overline{S_2S_2'}$ исеца на правој p центар круга кроз S_2 и S_2', који је уједно центар концентричног круга, који додирује оба круга.



Сл. 88.

c) Конструкција: Кроз средиште S_1 и тачку обима T положимо праву p и пренесемо на њу из тачке T полупречник r_2. Добијену тачку S_2' спојимо са средиштем другога круга S_2. Симетрала дужи $\overline{S_2S_2'}$ исеца на правој p средиште круга O, који додирује оба круга.

č) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Пошто се полупречник r_2 може пренети на праву p са обе стране тачке T, има задатак два решења. У чему се разликују?

Задаци:

1. Подели кружни обим на 6, 8, 12 и 16 једнаких делова.

2. Конструиши круг, који иде кроз три дате тачке.

3. Конструиши круг, који иде кроз тачку A и додирује праву a у тачки T.

4. Конструиши круг с полупречником r, који иде кроз тачке A и B.

5. Конструиши на дати круг тангенту, која гради с правом p угао φ.

6. Конструиши тангенту на кружни лук у датој тачки T, ако центар круга лежи изван хартије цртања.

7. Конструиши у датом кругу тетиву тако, да је паралелна и једнака датој дужи a.

8. Конструиши круг, који додирује праву t у тачки T и чије средиште лежи на правој p.

9. Конструиши круг, који иде кроз тачке A и B и додирује праву t, која је паралелна са $\overline{AB}$.

10. Конструиши круг с полупречником r, који додирује две праве које се секу.

11. Конструиши геометриско место свих тачака у равни, из којих се види дуж $\overline{AB} = 5\ cm$ под углом $\alpha = 30^0$, (45^0, 60^0, 75^0, 90^0, 120^0).

12. Темена четвороугла, који је уписан у кругу, деле обим круга у размери 1:2:4:5; *a*) колики су углови четвороугла, *b*) колике углове граде дијагонале са странама?

13. Конструиши правоугли троугао с хипотенузом $c = 7\ cm$ и висином $v = 2{,}5\ cm$.

14. Конструиши равнокрак троугао с основицом $c = 6\ cm$ и висином која одговара краку $v_a = 5\ cm$.

15. Конструиши троугао од:

a) $a = 7\ cm$ $v_b = 6\ cm$ $v_c = 5\ cm$,
b) $a = 6\ cm$ $b = 7\ cm$ $v_c = 5\ cm$,
c) $a = 4{,}5\ cm$ $v_a = 5\ cm$ $v_c = 4\ cm$,
č) $c = 6\ cm$ $v_c = 4\ cm$ $\gamma = 45^0$,
d) $t_a = 6\ cm$ $a = 6\ cm$ $\alpha = 45^0$,
e) $b = 8\ cm$ $\beta = 60^0$ $t_b = 6\ cm$,
f) $b = 7\ cm$ $\beta = 60^0$ $v_b = 5\ cm$,
g) $c = 5\ cm$ $t_c = 7{,}5\ cm$ $\gamma = 30^0$,
h) $\gamma = 60^0$ $v_c = 5\ cm$ $t_a = 7\ cm$.

*16. Одреди ону тачку у троуглу, из које видиш све стране датога троугла под једнаким угловима.

*17. Конструиши троугао, ако је дата: страна $c = 5\ cm$, угао $\gamma = 60^0$ и пресек D симетрале угла γ са страном c ($\overline{AD} = 3\ cm$).

18. У тетивном четвороуглу дата су два угла:

a) $d = 75^0 17' 24''$ и $\beta = 104^0 27' 30''$
b) $\alpha = 66^g{,}1745$ и $\beta = 109^g{,}0653$
c) $\alpha = 1{,}2R$ и $\beta = 1{,}8R$

Колики су остали углови?

19. Конструиши троугао од:

a) $r = 3,5\ cm$ $a = 5,5\ cm$ $t_a = 5\ cm$,
b) $\rho = 25\ mm$ $\alpha = 75^0$ $\beta = 45^0$,
c) $\rho = 2\ cm$ $a = 8\ cm$ $\beta = 45^0$,
č) $\rho = 2\ cm$ $v_a = 7\ cm$ $\beta = 45^0$.

20. Конструиши четвороугао од:

a) $r = 4\ cm$ $a = 4\ cm$ $c = 5,5\ cm$ $\alpha = 105^0$
(тетивни четвороугао)
b) $\rho = 3\ cm$ $a = 6\ cm$ $b = 5\ cm$ $\beta = 105^0$
(тангентни четвороугао)

21. Конструиши круг, који додирује праву *p* у тачки *P* и круг *k*.

22. Конструиши круг с полупречником *r*, који додирује круг *k* и праву *p*.

23. Конструиши круг, који додирује две паралелне праве и круг, који лежи бар делимично међу њима.

VIII. СЛИЧНОСТ

§ 85. МЕРЕЊЕ ДУЖИ. ДЕОНА РАЗМЕРА ДУЖИ

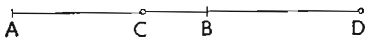
Дуж упоређујемо или меримо другом дужи на тај начин, што одредимо колико пута се мања дуж садржи у већој дужи. При том добијамо „мерни број" или „количник", који је неименован број.

Ако је дуж, с којом упоређујемо дату дуж, основна дужинска јединица, на пр. *m*, *dm*, *cm*, *mm* итд., тада додајемо количнику знак основне јединице и пишемо на пр. 3,6 *m*, $2^1/_2$ *m* итд.

Упоређивање две дужи изражавамо у облику $\frac{a}{b} = a : b = k$ (читај *a* према *b* је *k*), где је *k* количник или модуо размере.

Дуж $\overline{AB}$ је ма којом својом тачком подељена у размери растојања те тачке до крајева дужи.

Деоба је унутрашња, ако се тачка налази између крајева дужи $(\overline{CA} : \overline{CB})$, и спољашња, ако се тачка налази на продужењу дужи $(\overline{DA} : \overline{DB})$.



Сл. 89.

Количник размере две дужи није увек цео број, него може бити и разломак или ирационалан број, што ћемо видети у следећем параграфу.

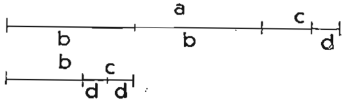
§ 86. КОЛИЧНИК РАЗМЕРЕ ДВЕ ДУЖИ

Став 71. *Количник k је цео број, ако се дуж b може пренети n-пута на дуж a тако, да при том не добијемо никакав остатак, k је тада n и дуж b заједничка мера обе дужи a и b (на пр.: $a = 5b$)*

Став 72. *Количник k је разломак, ако обе дужи a и b имају заједничку меру тако, да је на пр. $a = n_1 M$ и $b = n_2 M$, где су n_1 и n_2 цели бројеви. Количник k је тада $\frac{n_1}{n_2}$.*

За одређивање заједничке мере двеју дужи конструктивним начином служимо се Еуклидовим начином верижнога дељења двеју дужи. На пример: $a = 91\ mm$ и $b = 35\ mm$.

Пренесемо дуж *b* на *a* колико пута је могуће (у нашем случају 2 пута) и добијамо остатак *c*; потом пренесемо *c* на *b* и добијемо остатак *d*, даље *d* на *c* и добијемо остатак *e* и *e* на *d* два пута без остатка. Из тога следује:



Сл. 90.

$$d = 2e$$
$$c = d + e = 3e$$
$$b = c + d = 3e + 2e = 5e$$
$$a = 2b + c = 10e + 3e = 13e;$$

e је стога заједничка мера обе дужи и то је $a = 13e$, а $b = 5e$. 13 и 5 су њихови мерни бројеви,

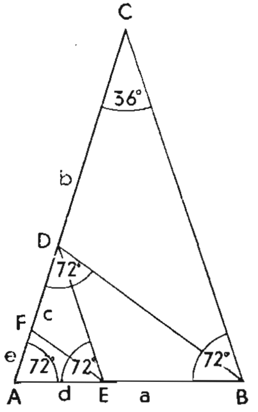
$$k = \frac{a}{b} = \frac{13e}{5e} = \frac{13}{5}\ .$$

На исти начин добијамо и заједничку меру лукова једнаких полупречника, два угла, две равне површине итд., уопште две једнородне просторне величине.

Две једнородне просторне величине које имају заједничку меру називамо самерљиве или комменсурабилне.

Став 73. *Количник k је ирационалан број, ако дужи немају заједничке мере.*

По пређашњој методи тражена заједничка мера се не да одредити, јер остатак, који се стално смањује, никад се не може измерити пређашњим остатком. Размера обе дужи се може само приближно одредити, и то толико тачније, уколико је неурачунати остатак при прекидању верижнога дељења незнатији. Практично таквих остатака нема, јер се већ $\frac{1}{10}$ *mm* не може више делити са мањом дужи. Да ипак постоје несамерљиве количине, показаћемо на овом примеру.



Сл. 91.

Нацртамо равнокрак троугао са углом при врху $\gamma = 36^0$. Тврдимо да је размера крака и основице $b : a = k$ ирационалан број.

Доказ: Ако преполовимо угао код *B*, добијамо равнокраке троугле *BDC* и *ABD*. Из оба троугла следује:

$a = \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ и $b = a + c$

Ако преполовимо угао код *D* у троуглу *ABD*, добијамо опет два равнокрака троугла, јер је

$c = \overline{AD} = \overline{ED} = \overline{EB}$ и $a = c + d$,

Пошто преполовимо угао код *E*, добијамо опет два равнокрака троугла и

$d = \overline{AE} = \overline{FE} = \overline{FD}$ и $c = d + e$.

Тај се поступак може теориски лако продужити у бесконачност и тако постали троугли, иако се остаци на обема странама a и b стално смањују, никад не ишчезавају. Из тога следује да дужи немају заједничке мере и зато је и њихов количник размере ирационалан број. Такве дужи зовемо несамерљиве или инкомензурабилне.

§ 87. РАЗМЕРА ТРИ ИЛИ ВИШЕ ДУЖИ

Ако хоћемо да одредимо размеру три или више дужи, морамо одредити њихову заједничку меру M и њихове мерне бројеве n_1, n_2, n_3, . . . По пређашњем следује:

$a = n_1 M, \quad b = n_2 M, \quad c = n_3 M, \ldots$ и

$a : b : c : \ldots\ldots = n_1 : n_2 : n_3 : \ldots\ldots$

§ 88. СРАЗМЕРА

Ако изједначимо две размере, које имају исти количник, добијамо сразмеру или пропорцију. На пример, ако је $a : b = k$ и $c : d = k$, тада је $a : b = c : d$.

При том није потребно да су обе размере истих величина, већ могу бити и размере разних величина. На пример, прво је размера две тежине, а друго две дужи. Главно је, да је количник исти.

Ако ставимо наместо величина бројеве, добијамо бројну сразмеру. Сва четири броја се зову чланови. Први и четврти члан су спољни, други и трећи унутрашњи чланови сразмере. Четврти члан се зове и четврта геометриска пропорционала прва три члана.

Код сразмере истоимених величина смемо замењивати унутрашње и спољашње чланове, на пример:

$8 : 4 = 24 : 12$ и по замени унутрашњих чланова:

$8 : 24 = 4 : 12$ или по замени спољашњих чланова:

$12 : 24 = 4 : 8$.

Сразмера код које су оба унутрашња члана једнака, зове се непрекидна сразмера, на пример: $a : b = b : c$. Унутрашњи члан непрекидне сразмере је средња геометриска пропорционала или геометриска средина спољашњих чланова, четврти члан је трећа геометриска пропорционала првога и унутрашњега члана.

Решити сразмеру значи из три позната члана израчунати четврти члан

Став 74. *Две сразмере које имају по три члана који стоје на истим местима, једнака, имају и четврте чланове једнаке.*

Доказ: Ако израчунамо из сразмера: $a : b = c : d$ и $a : b = c : e$ четврте чланове d и e, они су једнакн зато, што су размере $c : d$ и $c : e$ једнаке размери $a : b$.

§ 89. УПРАВО И ОБРНУТО СРАЗМЕРНЕ КОЛИЧИНЕ

Став 75. *Ако су две величине тако зависне једна од друге, да се једна величина толико пута повећа (смањи), колико пута се друга повећа (смањи), кажемо да су* **управо** *или* **директно сразмерне**; *количник зависних величина је сталан.*

Доказ: Ако су a, a_1, a_2 . . . бројне вредности прве величине и b, b_1, b_2 . . . бројне вредности друге величине, тада мора бити:

$a : a_1 = b : b_1, \quad a : a_2 = b : b_2, \quad a : a_3 = b : b_3 \ldots$

Ако разменимо унутрашње чланове, следује:

$a : b = a_1 : b_1, \quad a : b = a_2 : b_2, \quad a : b = a_3 : b_3 \ldots.$

Све наведене сразмере имају исту вредност и то m; из тога следује: $m = \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots\ldots$, што је требало доказати.

Константни број m зовемо **модуо** или **пропорционални фактор**, јер је $a = mb$, $a_1 = mb_1$, $a_2 = mb_2 \ldots$

Став 76. *Ако су две величине тако зависне једна од друге, да се једна величина толико пута повећи (смањи), колико пута се друга величана смањи (повећа), кажемо, да су величине* **обрнуто** *или* **индиректно сразмерне;** *производ зависних величина је константан.*

Доказ: Ако су a, a_1, a_2, $a_3 \ldots$ бројне вредности прве количине *и* b, b_1, b_2, b_3, b_4, $\ldots$ бројне вредности друге количине, тада мора бити

$$a : a_1 = b_1 : b, \quad a : a_2 = b_2 : b, \quad a : a_3 = b_3 : b \ldots$$

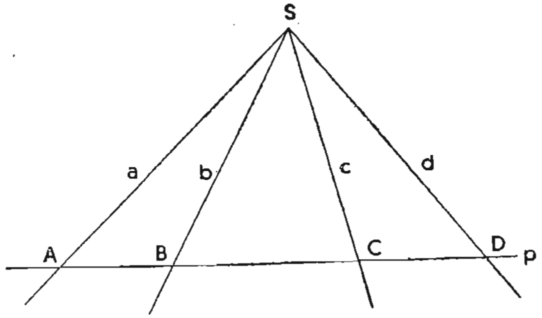
Ако помножимо спољашње чланове међу собом и унутрашње чланове међу собом, добијамо:

$$ab = a_1b_1, \quad ab = a_2b_2, \quad ab = a_3b_3 \ldots$$

Из тога следује: $m = ab = a_1b_1 = a_2b_2 = \ldots$, што је требало доказати.

§ 90. ПРАМЕН, ТРАНСВЕРЗАЛА, ИНЦИДЕНТНИ ЕЛЕМЕНТИ

Скуп свих правих у равни, које иду кроз једну тачку S, зовемо **прамен зрака** или само **прамен**. S зовемо центар или теме прамена. Ако се центар налази у бесконачности, онда су све праве паралелне међу собом и ми говоримо о паралелном прамену.



Сл. 92.

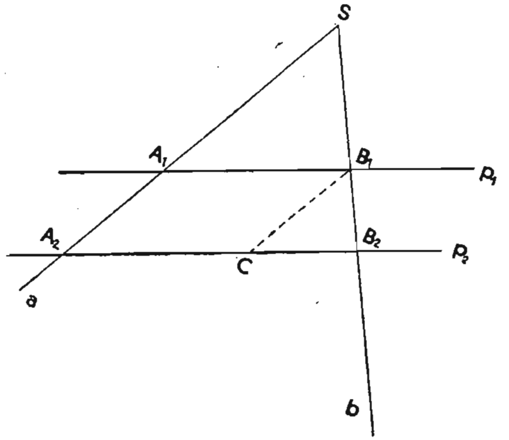
Праву, која не иде кроз центар прамена, зовемо **трансверзала**. Она сече све праве прамена, које стварају на њој низ тачака. Зашто трансверзала сече све праве прамене? Тачку тога низа и праву прамена, која иде кроз њу, зовемо инциденти елементи. На пример: a и A, b и B, c и C, d и $D \ldots$ (види слику 92).

Дужи $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD} \ldots$ јесу отсечци на правој p који одговарају тачкама низа A, B, C.

§ 91. СРАЗМЕРНЕ ДУЖИ

Став 77. *Ако пресечемо две праве прамена паралелним правима, онда су:*

1. *Отсечци на једној правој сразмерни с одговарајућим отсечцима на другој правој.*
2. *Отсечци на паралелама сразмерни одговарајућим отсечцима који леже на истим правима.*



Сл. 93.

Доказ првога дела: Праве a и b прамена пресечемо трансверзалама p_1 и p_2. Међу отсечцима, који при том настају, постоји сродство и и ми кажемо: отсечак $\overline{SA_1}$ одговара отсечку $\overline{SB_1}$, $\overline{SA_2}$ одговара $\overline{SB_2}$, $\overline{A_1A_2}$ одговара $\overline{B_1B_2}$, и $\overline{A_1B_1}$ одговара $\overline{A_2B_2}$. Ако отсечци $\overline{SA_1}$ и $\overline{SA_2}$ које леже на правој a имају заједничку меру $\overline{M_1}$, то је $\overline{SA_1} = n_1M_1$, $\overline{SA_2} = n_2M_1$ и $\overline{A_1A_2} = (n_2 - n_1)\, M_1$, јер су n_1 и n_2 мерни бројеви. Поделимо отсечак $\overline{SA_2}$ на n_2 једнаких делова, тада је дужина свакога таквога дела једнака заједничкој мери M_1, због тога је $\overline{SA_1}$ подељено на n_1 и $\overline{A_1A_2}$ на $(n_2 - n_1)$ једнаких делова. Ако кроз деоне тачке повучемо паралеле правима p_1 и p_2, добијамо, на правој b, n_2 једнака дела (види § 53). Дужина свакога дела је M_2, што је заједничка мера отсечака $\overline{SB_1}$, $\overline{SB_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ на правој b. Зато је $SB_1 = n_1M_2$, $\overline{SB_2} = n_2M_2$ и $\overline{B_1B_2} = (n_2 - n_1)\, M_2$. Из тога следује:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{M_1}{M_2}, \quad \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}} = \frac{M_1}{M_2}, \quad \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{M_1}{M_2}$$

Ако ставимо за $\frac{M_1}{M_2} = m$, пишемо:

$\overline{SA_1} = m \cdot \overline{SB_1}$, $\overline{SA_2} = m \cdot \overline{SB_2}$ и $\overline{A_1A_2} = m \cdot \overline{B_1B_2}$ тј. сваки отсечак на правој a је m пута дужи (краћи) од одговарајућег отсечка на правој b; m зовемо пропорционални фактор и одређује га већ један пар одговарајућих дужи.

Доказ другога дела: Ако нацртамо кроз тачку B_1 паралелу правој a и пренесемо теме прамена у B_2, важи по тек доказаном првом делу стара сразмера

$$\overline{A_2C} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

Пошто је $\overline{A_2C} = \overline{A_1B_1}$ (по ставу 36, додатак 1), заменимо дуж A_2C са $\overline{A_1B_1}$ и добијамо:

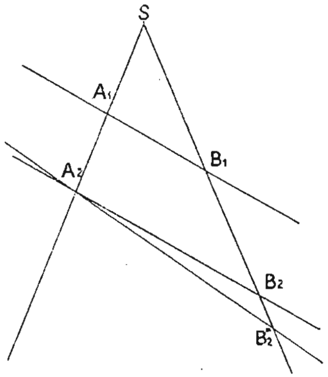
$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2},$$

што је требало доказати.

Став 77. важи и ако отсечци немају заједничке мере, тј. ако су несамерљиви.

Важи и обрнути став:

Став 78. *Две праве су паралелне, ако су одговарајући отсечци на зрацима сразмерни.*



Сл. 94.

Доказ: По претпоставци постоји сразмера:

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}.$$

Та сразмера важи, кад су трансверзале паралелне. Узмимо да трансверзале нису паралелне. Тада би важила сразмера:

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}^*.$$

Сразмерама су једнака по три члана. По ставу 74. морају бити једнаки и четврти чланови $\overline{SB_2}$ и $\overline{SB_2}^*$; а то је само тада могуће, ако су обе трансверзале паралелне.

§ 92. СЛИЧНЕ СЛИКЕ

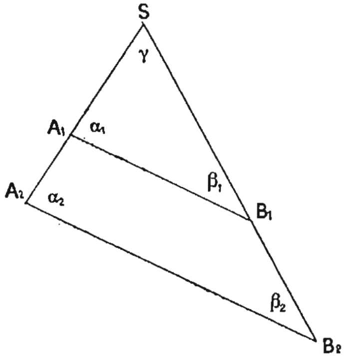
Две слике су сличне, ако су ма које узете две дужи прве слике сразмерне одговарајућим дужима друге слике и ако одговарајуће дужи у обе слике граде једнаке углове.

Две ма које дужи a и b граде на првој слици размеру s; исту размеру граде одговарајуће дужи a' и b' на сличној слици. Добијамо $a : b = a' : b' = s$.

То је само тада могуће, ако је

$$a' = k\,a,$$
$$b' = k\,b,$$

где је k количник или модуо размере повећања (смањења). За сличност ћемо употребљавати знак $\backsim$. (Почетно слово латинске речи similis = сличан).



Сл. 95.

Ако пресечемо два ма која зрака паралелним правима, добијамо два троугла A_1SB_1 и A_2SB_2, чије су стране по ставу 77. међусобно зависне, и то:

$$\overline{SA_1} = k \,.\, \overline{SA_2},$$
$$\overline{SB_1} = k \,.\, \overline{SB_2},$$
$$\overline{A_1B_1} = k \,.\, \overline{A_2B_2}.$$

По дефиницији о сличности две слике, која захтева једнаке размере одговарајућих дужи, троугли A_1SB_1 и A_2SB_2 су слични, што овако означавамо: $\Delta A_1SB_1 \backsim \Delta A_2SB_2$. Из саме слике видимо, да су углови у оба троугла једнаки: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, (сагласни углови) а угао γ је заједнички у оба троугла.

Став 79. *У два слична троугла су углови једнога троугла једнаки угловима другога троугла.*

Две стране које у оба троугла леже наспрам једнаких углова зовемо одговарајуће или хомологне стране.

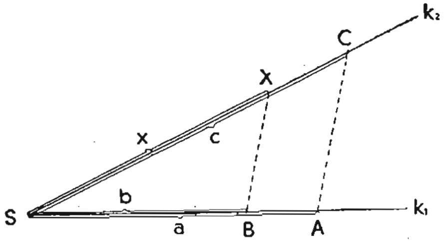
Став 80. *Два троугла су слични, ако по две стране једнога троугла чине исту размеру као одговарајуће стране другога угла.*

Доказ:
$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{k\,.\,\overline{SA_2}}{k\,.\,\overline{SB_2}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SB_2}}$$
$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{k\,.\,\overline{SA_2}}{k\,.\,\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{A_2B_2}}$$
$$\frac{\overline{SB_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{k\,.\,\overline{SB_2}}{k\,.\,\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{A_2B_2}}$$

§ 93. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример: Одреди четврту геометриску пропорционалу дужима: $a = 4\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$.

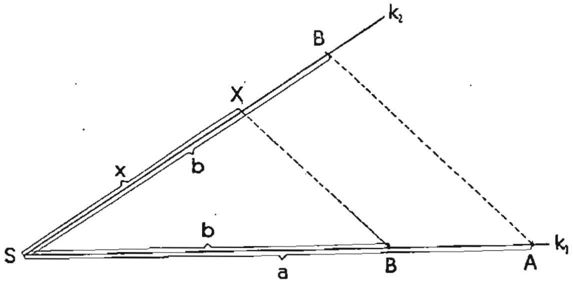
Означимо са x четврту геометриску пропорционалу тада постоји сразмера: $a : b = c : x$.



Сл. 96.

Нацртамо ма какав угао и пренесемо на крак k_1 дужи a и b тако, да је $\overline{SA} = a$ и $\overline{SB} = b$, и на крак k_2 трећу дуж $c = \overline{SC}$. Ако спојимо C са A и повучемо овој спојници паралелу кроз B, добијамо на k_2 тачку X. Дуж $\overline{SX}$ је тражена четврта геометриска пропорционала x.

2. пример: Одреди трећу геометриску пропорционалу дужи: $a = 7\,cm$ и $b = 5\,cm$.

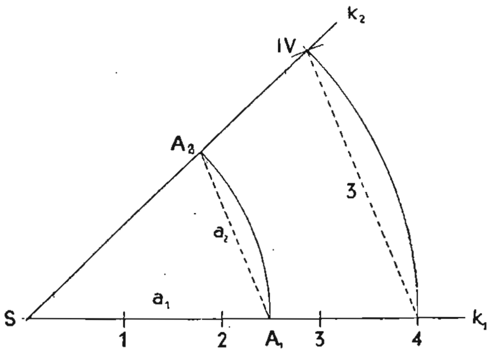


Сл. 97.

Из сразмере $a : b = b : x$ следује конструкција аналогно горњој конструкцији, ако ставимо за $c = b$.

3. пример: Умањи дужи a_1, b_1, c_1, ... у размери $4 : 3$. За тај циљ нам служи „пропорционални угао“. (Слика 98).

На крак пренесемо 4 произвољне јединице, опишемо лук са средиштем у S и полупречником $\overline{S4}$ и отсечемо на њему тетиву $\overline{4IV} = 3$ јединице. $\overline{SIV}$ је други крак пропорционалнога угла.



Сл. 98.

Ако пренесемо дату дуж $a_1 = \overline{SA_1}$ на крак k_1 и полупречником a_1 опишемо лук са средиштем у S, он сече знак k_2 у тачки A_2. Луци $\widehat{4IV}$ и $\widehat{A_1 A_2}$ су концентрични и стога су тетиве $\overline{4IV}$ и $\overline{A_1 A_2}$ паралелне; зато постоји сразмера:

$$\overline{S4} : \overline{4IV} = \overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = 4 : 3$$

Тетива A_1A_2 је тражена смањена дуж a_2, Исто тако поступамо с осталим дужима b_1, c_1, ...

Задаци:

1. Одреди на дужи $\overline{AB}$ тачку T тако, да је размера дужи $\overline{AT} : \overline{TB}$ *а*) $1:5$, *б*) $3:1$, *ц*) $5:7$, *ћ*) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

2. Одреди количник размере дужи $a = 48\,m$ и $b = 27\,m$.

3. Одреди конструкцијом највећу заједничку меру следећим дужима: *а*) $a = 104\,mm$, *б*) $a = 39\,mm$, *б*) $a = 33\,mm$, $b = 121\,mm$, *ц*) $a = 152\,mm$, $b = 95\,mm$, $c = 57\,mm$.

4. Колика је четврта геометриска пропорционала дужи: $a = 3{,}3\,m$; $b = 7{,}7\,m$ и $c = 5{,}4\,m$?

5. Колика је трећа геометриска пропорционала дужи: $a = 15\,m$ и $b = 29\,m$?

6. Колика је средња геометриска пропорционала дужи: $a = 36{,}5\,cm$ и $b = 25{,}4\,cm$?

7. Подели одређену дуж $\overline{AB}$ у размери $2:3:5$.

8. Повећај дуж $\overline{AB}$ у размери $3:5$ ($\overline{AB} = 42\,mm$).

9. Умањи дуж $\overline{AB} = 74\,mm$ у размери $5:3$.

10. Нацртај трима одређеним дужима четврту геометриску пропорционалу: $a = 4\,cm$, $b = 5\,cm$ и $c = 2\,cm$.

11. Нацртај двема одређеним дужима трећу геометриску пропорционалу: $a = 7\,cm$, $b = 5\,cm$.

12. Збир две дужи је 12 *cm* и њихов однос 3 : 5; колике су дужине тих дужи (рачун и конструкција)?

13. Разлика две дужи је 4 *cm* и њина размера 5 : 3; колике су дужи (рачун и конструкција)?

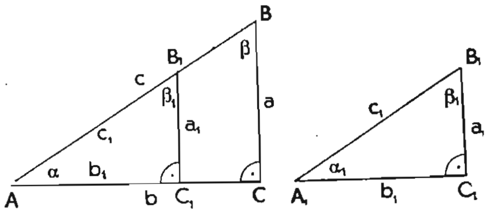
14. Дата је права p и на њој тачка T. Шта је геометриско место свих тачака које су од тачке T три пута толико удаљене колико од праве p?

IX. ТРИГОНОМЕТРИСКЕ ФУНКЦИЈЕ

§ 94. СЛИЧНИ ПРАВОУГЛИ ТРОУГЛИ

Нацртајмо два правоугла троугла ABC и $A_1B_1C_1$ разне величине, који имају једнаке углове на хипотенузи: $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$. (Слика 99). Ако положимо мањи троугао на већи тако, да се угао α_1 поклопи с углом α, катета $\overline{A_1C_1}$ са катетом $\overline{AC}$ и хипотенуза $\overline{A_1B_1}$ с хипотенузом $\overline{AB}$, тада су катете $\overline{B_1C_1}$ и $\overline{BC}$ паралелне; обе катете стоје управно на заједничкој катети $\overline{AC_1}$ односно $\overline{AC}$ и због тога су по ставу 19 о паралелним управним правима паралелне међу собом. Отуда следује, по § 92 да су троугли ABC и $A_1B_1C_1$ слични и да постоје по ставу 77 сразмере хомологних страна:

$$a : c = a_1 : c_1$$
$$b : c = b_1 : c_1$$
$$a : b = a_1 : b_1$$

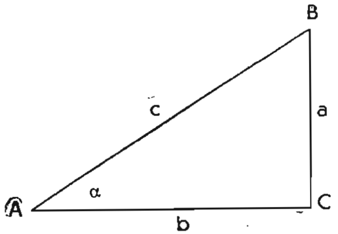


Сл. 99.

Став 81. *Правоугли троугли који имају једнаке углове на хипотенузи, слични су. Размера двеју страна једнога троугла једнака је размери хомологних страна другога троугла.*

§ 95. ДЕФИНИЦИЈА СИНУСА

По ставу 81 је размера катете, која лежи према углу α, и хипотенузе стална или константна за све правоугле троугле с једнаким углом α на хипотенузи:



Сл. 100.

$a : c = m_1$ (константа).

Ту размеру називамо синус угла α и добијамо:

Став 82. *Синус угла је однос катете супротне том углу и хипотенузе.*

§ 96. ДЕФИНИЦИЈА КОСИНУСА

Употребом пређашње слике по ставу 81 добијамо:

$b : c = m_2$ (константа за одређени угао α).

Константу m_2 зовемо косинус.

Став 83. *Косинус угла је однос катете налегле том углу и хипотенузе.*

§ 97. ДЕФИНИЦИЈА ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

Даље постоје још ове размере:

$a : b = m_3$ (константа за одређени угао α)

и обрнуто $b : a = m_4$.

Константу m_3 зовемо тангенс, а m_4 котангенс угла α.

Став 84. *Тангенс угла је однос катете супротне углу и налегле катете.*

Став 85. *Котангенс угла је однос налегле катете и катете супротне углу.*

Синус, косинус, тангенс и котангенс означавамо са sin, cos, tg и cotg.

§ 98. ДЕФИНИЦИЈА ФУНКЦИЈЕ

У природним наукама, као и другим научним областима, запажамо често зависност једне појаве од друге појаве. Само неколико примера: брзина воде је „зависна“ од пада речног корита, дужина дана је „зависна“ од кретања Земље око сунца, успех ученика је „зависан“ од марљивости итд. реч „зависан“ се може заменити речју „функција“ и тада кажемо: брзина воде је „функција“ пада речног корита, дужина дана је „функција“ кретања земље око сунца, успех ученика је „функција“ његове марљивости итд..

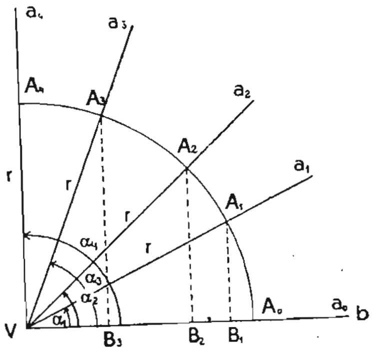
И у геометрији је лако навести примере међусобне зависности: површина квадрата је функција његове стране; обим круга је функција полупречника; површина и запремина коцке су функције дужине ивице, итд..

У математици изражавамо зависност двеју количина овако:

$$y = f(x)$$

и читамо „y је функција x—a“. При том је x аргуменат, а y одговарајућа вредност функције.

§ 99. СИНУС КАО ФУНКЦИЈА ОШТРОГА УГЛА



Сл. 101.

За угао α_1 је размера $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{VA_1}} = m'_1 = sin\,\alpha_1$ стална или константна, ма где ми изабрали тачку A_1 на краку a_1. Ако изаберемо тачку A_1 на растојању r од врха V, тада је

$$\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{r} = m_1'.$$

Обрнимо крак a око V у смислу супротном кретању казаљке на часовнику. При том се угао α повећа и тачка A описује круг са средиштем у V и полупречником r. Узмимо за сад у обзир само оне углове који су мањи од R. Добијамо:

$$m_1'' = \sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{r}$$

$$m_1''' = \sin\alpha_3 = \frac{\overline{A_3B_3}}{r}$$

$$\vdots$$

При томе опажамо, да бројилац расте, док именилац остаје непромењен; стога је $m_1' < m_2' < m_3 < \ldots$ или $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < \sin\alpha_3 < \ldots$. Синус је стога зависан од угла α или синус је функција угла α.

Ако хоћемо да дознамо вредност синуса за различите углове, тада је најбоље да изаберемо тачку A на краку a на

раздаљини 1 од врха V (1 cm, 1 dm, 1 m ... јединица каквог било мерила). При обртању крака a око врха V описује тачка A круг, који зовемо јединични или тригонометрички круг.

Пређашње једначине се стога упрошћавају и ми добијамо:

$$\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{1} = \overline{A_1B_1}$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{1} = \overline{A_2B_2}$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{\overline{A_3B_3}}{1} = \overline{A_3B_3}$$

$$\vdots$$

Дужи $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, ... графички нам престављају апсолутну вредност синуса углова α_1, α_2, α_3, ... Та апсолутна вредност је најмања код угла $\alpha_0 = 0^\circ$, јер је једнака нули, а највећа код угла $\alpha_n = 90^\circ$, јер је 1.

Став 86. *Вредност синуса оштрога угла расте од 0 до 1, ако угао расте од 0° до 90°.*

§ 100. КОСИНУС КАО ФУНКЦИЈА ОШТРОГА УГЛА

За угао α_1 је и размера $\frac{\overline{B_1V}}{\overline{A_1V}} = m'_2 = \cos\alpha_1$ стална или константна, ма где изабрали тачку A_1 на краку a_1. Ако узмемо тачку A_1 на растојању r од врха, тада је

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{B_1V}}{r} = m_2'.$$

Обрнимо крак a око V у супротном смислу обртања казаљке на часовнику. При том се угао α повећа и тачка A описује круг са центром у V и полупречником r. Узмимо у обзир сад само углове, који су мањи од 90°. Добијамо:

$$m_2'' = \cos\alpha_2 = \frac{\overline{B_2V}}{r}$$

$$m_2''' = \cos\alpha_3 = \frac{\overline{B_3V}}{r}$$

$$\vdots$$

Запажамо, да се бројилац смањује, док именилац остаје непромењен, ако угао расте; стога је $m_2' > m_1'' > m_3''' > \ldots$

или $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2 > \cos\alpha_3 > \dots$ Стога је косинус зависан од угла α или косинус је функција угла α.

Ако хоћемо да одредимо вредност косинуса за различите углове, поступаћемо као код синуса. Употребићемо јединични или тригонометриски круг. Пређашње једначине се упрошћавају и ми добијамо:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{VB_1}}{1} = \overline{VB_1}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{VB_2}}{1} = \overline{VB_2}$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\overline{VB_3}}{1} = \overline{VB_3}$$

$$\vdots$$

Дужи $\overline{VB_1}$, $\overline{VB_2}$, $\overline{VB_3}$, . . . графички нам престављају апсолутну вредност косинуса углова α_1, α_2, α_3, ... Та је највећа код угла $\alpha_n = 0^0$, јер је 1, и најмања код угла $\alpha_0 = 90^0$, јер је 0.

Став 87. *Вредност косинуса оштрога угла опада од 1 до 0, ако угао расте од 0^0 до 90^0.*

§ 101. ТАНГЕНС КАО ФУНКЦИЈА ОШТРОГА УГЛА

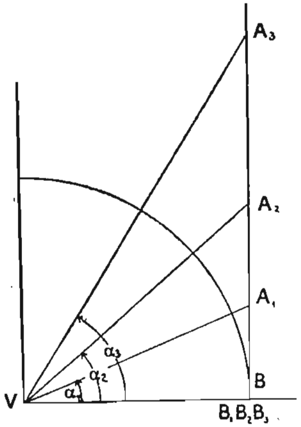
За угао α_1 је размера $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{VB_1}} = m_3' = \operatorname{tg}\alpha_1$ стална или константна, ма где изабрали тачку A_1 на краку a_1. Узмимо, да све тачке A_1, A_2, A_3, . . . леже тако на крацима a_1, a_2, a_3, ..., да је права која их спаја управна на крак b; тада је

$$m_3' = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\overline{A_1\,B_1}}{r}$$

$$m_3'' = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\overline{A_2\,B_2}}{r}$$

$$m_3''' = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\overline{A_3\,B_3}}{r}$$

$$\vdots$$



Сл. 102.

и $m_3' < m_3'' < m_3''' \dots = \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3 \dots$ узимају разне вредности, које су зависне од величине угла α. Кажемо тангенс је функција угла α. Да одредимо вредност тангенса за различне углове, повуцимо нормалу на крак b, на којој леже тачке A_1, A_2, $A_3 \dots$, на растојању 1 од V. Та нормала је стога тангента тригонометриског круга у тачки B.

Пређашње једначине се упрошћавају и ми добијамо:

$$m_3' = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\overline{A_1B}}{1} = \overline{A_1B},$$

$$m_3'' = \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\overline{A_2B}}{1} = \overline{A_2B},$$

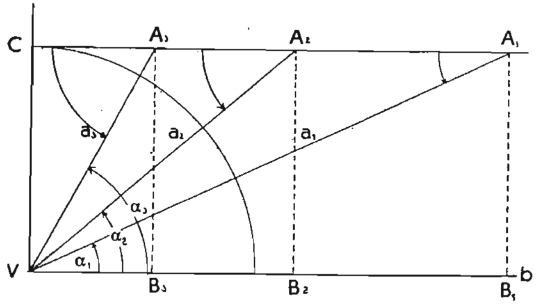
$$m_3''' = \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{\overline{A_3B}}{1} = \overline{A_3B},$$

Дужи $\overline{A_1B}$, $\overline{A_2B}$, $\overline{A_3B}$,... графички нам престављају апсолутну вредност тангенса углова α_1, α_2, α_3,... Та је најмања код угла $\alpha_0 = 0^0$, наиме $= 0$, а највећа код угла $\alpha_n = 90^0$, наиме бескрајно велика (∞).

Став 88. *Вредност тангенса оштрога угла расте од* 0 *до ∞, ако угао расте од* 0^0 *до*^{0} 90^0.

§ 102. КОТАНГЕНС КАО ФУНКЦИЈА ОШТРОГА УГЛА

За угао α_1 је размера $\frac{\overline{VB_1}}{\overline{A_1B_1}} = m_4 = \operatorname{cotg}\alpha_1$ стална или константна, ма где изабрали тачку A_1 на краку a_1. Узмимо, да све тачке A_1, A_2, A_3,... леже тако, да је права која их спаја паралелна краку b на раздаљини r, тада су сва растојања $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \dots = r$ и



Сл. 103.

$$m_4' = \text{cotg } \alpha_1 = \frac{\overline{VB_1}}{r} = \frac{\overline{CA_1}}{r}$$

$$m_4'' = \text{cotg } \alpha_2 = \frac{\overline{VB_2}}{r} = \frac{\overline{CA_2}}{r}$$

$$m_4''' = \text{cotg } \alpha_3 = \frac{\overline{VB_3}}{r} = \frac{\overline{CA_3}}{r}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$m_4' > m_4'' > m_4''' \ldots = \text{cotg } \alpha_1 > \text{cotg } \alpha_2 > \text{cotg } \alpha_3 \ldots$ узимају разне вредности, које су зависне од величине угла α. Кажемо, да је котангенс функција угла α.

Да одредимо вредност котангенса за различне углове, изабраћемо тачке A_1, A_2, $A_3, \ldots$ на крацима a_1, a_2, $a_3 \ldots$ тако, да леже на правој паралелној краку b на раздаљини $r = 1$, тј. паралела је тангента тригонометрискога круга у тачки C.

Пређашње једначине се упрошћавају и ми добијамо:

$$m_4' = cotg\, \alpha_1 = \frac{\overline{CA_1}}{1} = \overline{CA_1}$$

$$m_4'' = cotg\, \alpha_2 = \frac{\overline{CA_2}}{1} = \overline{CA_2}$$

$$m_4''' = cotg\, \alpha_3 = \frac{\overline{CA_3}}{1} = \overline{CA_3}$$

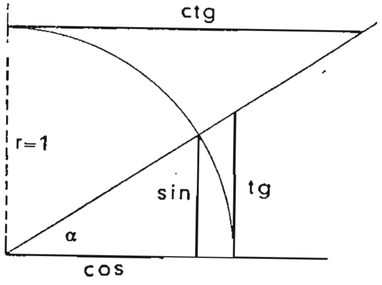
$$\cdot$$

$$\cdot$$

Дужи $\overline{CA_1}$, $\overline{CA_2}$, $\overline{CA_3}$ . . . . графички нам престављају апсолутне вредности котангента углова α_1, α_2, α_3. . . . . Апсолутна вредност је највећа код угла $\alpha_0 = 0^0$, наиме ∞, и најмања код угла $\alpha_n = 90^0$, кад је 0.

Став 89. *Вредност котангенса оштрога угла се смањује од ∞ до 0, ако угао расте од 0^0 до 90^0.*

§ 103. ПРЕСТАВЉАЊЕ Sin, Cos, Tg и Cotg ОШТРОГА УГЛА НА ТРИГОНОМЕТРИСКОМ КРУГУ



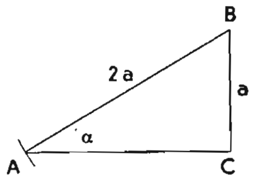
$0^0 < \alpha < 90^0$

Сл. 104.

§ 104. КОНСТРУКЦИЈА УГЛА, КАД ЈЕ ДАТА ФУНКЦИЈА

1. пример: $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. То можемо лако написати и у облику $\sin \alpha = \frac{a}{2a}$, где a значи дуж.

Нацртамо прво угао, пренесемо на један крак дуж $a = \overline{CB}$ и отсечемо потом шестаром хипотенузу $\overline{BA} = 2a$ троугла ABC. Угао $BAC = \alpha$ је тражени угао, зато што је однос супротне катете a и хипотенуре $2a$ једнак $\frac{1}{2}$.



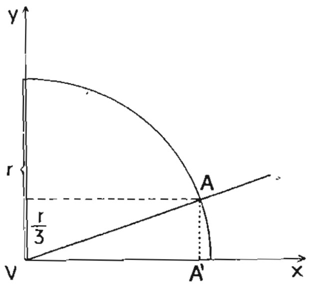
Сл. 105.

2. пример: $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Задатак се лако решава на пређашњи начин или овако:

Нацртамо координатне осе и круг са ма каквим полупречником са средиштем у V, па пренесемо на ординатној оси y $\frac{1}{3}$ полупречника.

Паралела апсцисној оси x кроз добијену тачку сече круг у тачки A. $\sphericalangle A'VA$ је тражени угао α, јер је размера $\frac{\overline{AA'}}{VA} = \frac{1}{3} = \sin \alpha$.

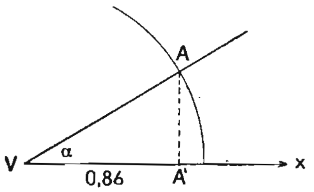


Сл. 106.

Напомена: Уместо ма каквог круга употребљаваћемо у даљим примерима због упрошћења конструкције тригонометриски круг с полупречником 1.

3. пример: $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} . 1{,}73 = 0{,}86 = \frac{0{,}86}{1}$.

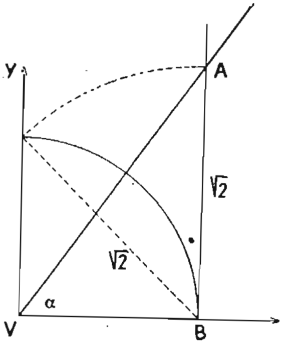
На x-осу пренесемо 0,86 јединице и у добијеној тачки повучемо управну на x-осу. Ако пресек ове нормале с тригонометриским кругом спојимо с врхом V, добијамо угао $\alpha = A'VA$.



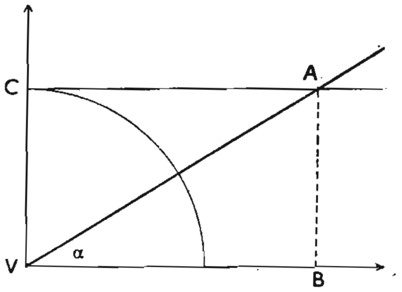
Сл. 107.

4. пример: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} = 1{,}41$.

На тангенту круга с полупречником $r = 1$ у B пренесемо дуж $\overline{BA} = \sqrt{2} = 1{,}41$ јединица па добијамо тачку A. BVA је тражени угао α.



Сл. 108.



Сл. 109.

5. пример: $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}61$.

На тангенту круга у тачки C пренесемо дуж $\overline{CA} = 1{,}61$. AVB је тражени угао α.

§ 105. ОДРЕЂИВАЊЕ АПСОЛУТНЕ ВРЕДНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Ако у правоуглом троуглу измеримо све три стране a, b, c и угао α, одређујемо апсолутну вредност свих функција угла α једначинама.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\ \text{и}\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Узмимо, да смо при мерењу датога правоуглог троугла добили за $a = 271\ cm$, за $b = 153\ cm$, са $c = 311\ cm$ и за угао $\alpha = 60^0 33'$. Тада је.

$$\sin\ 60^\circ 33' = \frac{a}{c} = \frac{271}{311} = 0{,}871\ \ldots$$

$$\cos\ 60^\circ 33' = \frac{b}{c} = \frac{153}{311} = 0{,}491\ \ldots$$

$$\operatorname{tg}\ 60^\circ 33' = \frac{a}{b} = \frac{271}{153} = 1{,}771\ \ldots$$

$$\operatorname{cotg}\ 60^\circ 33' = \frac{b}{a} = \frac{153}{271} = 0{,}564\ \ldots$$

Тачност је утолико већа уколико је већи троугао и уколико су тачније измерене стране и углови прецизним инструментима. Тај начин одређивања функција зовемо експериментални начин, чија тачност је због употребе инструмената ограничена. Таблице природних тригонометриских функција, које су у логаритамским таблицама, израчунате су на основу више математике.

§ 106. УПОТРЕБА ТАБЛИЦА ПРИРОДНИХ ТРИГОНОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА

У логаритамским таблицама се налазе табеларно састављене апсолутне вредности кружних функција за углове од 0° до 90° и то за сваких десет минута. Приложени лист нам показује већ израчунате вредности синуса, косинуса, тангенса и котангенса углова од 35° до 40° и од 50° до 55° за сваких 10 минута.

На основу таквих таблица могуће нам је свакој функцији одредити одговарајући угао и обратно за сваки угао наћи апсолутну вредност тражене функције. Како при томе поступамо, нека нам покаже неколико примера.

А) Дат је угао $\alpha = 35^\circ 27'$; одреди вредност свих угаоних функција.

1. Одређивање синуса:

У таблици имамо вредност за $\sin 35'20' = 0{,}\ 57833$ и за $\sin 35^\circ 30' = 0{,}\ 58070$. Дати угао се налази између оба наведена угла. Разлика синуса за 10′ износи 0, 00237 или за 1′ 0,000237. Прираштај за 1′ није у размаку свих 10′ математички једнак, ипак је та разлика тако мала, да је можемо занемарити при употреби вредности до петога децималнога места. Ако ту разлику помножимо са 7, што даје 0, 001659, и додамо је синусу од $35^\circ 20' = 0{,}\ 57833$, добијамо

$$\sin 35^\circ 27' = \underline{0{,}\ 57999}.$$

Напомена: Рачун нам је по таблици олакшан, јер је у њој разлика за 1′ = 23,7 већ израчуната, при чему су узета у обзир последња два места вредности синуса. Ако стога ту разлику помножимо са 7 и додамо тај производ (165,9) синусу $27^0 20' = 0{,}\ 57833$, добијамо горњи резултат.

2. Одређивање косинуса:

Из таблице препишемо вредност за $\cos 35^\circ 20' = 0{,}\ 81580$. Косинус се смањује при повећавању угла. По таблици се вредност косинуса смањује за сваки минут за 16,8 ако рачунамо последња два места. За 7 минута је мањи за $16{,}8 \cdot 7 = 117{,}6$.

Ако стога од 0,81580 одузмемо
118 (с поправком на последњем месту)
добијамо $\underline{0{,}81462}$, што је вредност cos α.

Таблица природних функција:

Ст. мин.	sin	d. 1′	tang	d. 1′	cotg	d. 1′	cos	d. 1′	Ст. мин.
35	0·57358	23·8	0·70021	43·4	1·4281	8·8	0·81915	16·7	**55**
10	0·57596	23·8	0·70455	43·6	1·4193	8·7	0·81748	16·8	50
20	0·57833	23·7	0·70891	43·8	1·4106	8·7	0·81580	16‘9	40
30	0·58070	23·7	0·71329	44·0	1·4019	8·6	0·81412	16·9	30
40	0·58307	23·6	0·71769	44·2	1·3934	8·5	0·81242	17·0	20
50	0·58543	23·6	0·72211	44·4	1·3848	8·5	0·81072	17·1	10
36	0·58779	23·5	0·72654	44·5	1·3764	8·4	0·80902	17·1	**54**
10	0·59014	23·5	0·73100	44·7	1·3680	8·3	0.80730	17·2	50
20	0·59248	23·4	0·73547	44·9	1·3597	8·3	0.80558	17·3	40
30	0·59482	23·4	0·73996	45·1	1·3514	8·2	0·80386	17‘3	30
40	0·59716	23·3	0·74447	45·3	1·3432	8·1	0·80212	17·4	20
50	0·59949	23·3	0·74900	45·5	1·3351	8·1	0 80038	17·5	10
37	0·60182	23·2	0·75355	45·7	1·3270	8·0	0 79864	17·5	**53**
10	0·60414	23·2	0·75812	45·9	1·3190	7·9	0·79688	17·6	50
20	0·60645	23·1	0·76272	46·1	1·3111	7·9	0·79512	17·7	40
30	0·60876	23·1	0·76733	46·3	1·3032	7·8	0·79335	17·7	30
40	0·61107	23·0	0·77196	46·5	1·2954	7·8	0·79158	17·8	20
50	0·61337	22·9	0‘77661	46·7	1·2876	7·7	0.78980	17·9	10
38	0·61566	22·9	0·78129	47·0	1·2799	7·6	0·78801	17·9	**52**
10	0·61795	22·8	0·78598	47·2	1·2723	7·6	0·78622	18·0	50
20	0·62024	22·8	0·79070	47·4	1·2647	7·5	0·78442	18·1	40
30	0·62251	22·7	0·79544	47·6	1·2572	7·5	0·78261	18·1	30
40	0.62479	22·7	0·80020	47·8	1·2497	7·4	0·78079	18·2	20
50	0·62706	22·6	0·80498	48·1	1·2423	7·4	0·77897	18·3	10
39	0·62932	22·6	0·80978	48·3	1·2349	7·3	0·77715	18·3	**51**
10	0·63158	22·5	0·81461	48·5	1·2276	7·3	0·77531	18·4	50
20	0·63383	22·5	0·81946	48·7	1·2203	7·2	0·77347	18·5	40
30	0·63608	22·4	0·82434	49·0	1·2131	7·2	0·77162	18·5	30
40	0·63832	22·4	0·82923	49·2	1·2059	7·1	0·76977	18·6	20
50	0·64056	22·3	0·83415	49·4	1·1988	7·1	0·76791	18·7	10
40	0·64279		0·83910		1·1918		0·76604		**50**
Ст. мин.	cos	d. 1′	cotg	d. 1′	tang	d. 1′	sin	d. 1′	Ст. мин.

Напомена: Таблица је узета из логаритамских таблица проф. Содника стр. 141.

3. Одређивање тангенса:

По начину израчунавања синуса добијамо и тангенс.

$$\begin{array}{lrr} & \text{tg } 35^\circ 20' & = 0{,}70891 \\ \text{Разлика за} & 7' = 43{,}8\cdot 7 = & 307 \\ \hline & \text{tg } 35^\circ 27' & = \underline{0{,}71198} \end{array}$$

(Разлика се дода, јер тангенс расте, ако угао расте).

4. Одређивање котангенса:

$$\begin{array}{lrr} & \text{cotg } 35^\circ 20' & = 1{,}4106 \\ \text{Разлика за} & 7' = 8{,}7\cdot 7 = & 61 \\ \hline & \text{cotg } 35^\circ 27' & = \underline{1{,}4045} \end{array}$$

(Разлика се одузима јер се cotg смањује ако угао расте).

В) Дата је функција угла α; одреди угао.

1. Sin $\alpha = 0{,}59468$.

У таблици тригонометриских функција налазимо, да је тражени угао α већи од угла $36^0 20'$ и мањи од угла $36^0 30'$.

$$\begin{array}{lr} \text{Sin } \alpha & = 0{,}59468 \\ -\ \text{sin } 36^0 20' & = 0{,}59248 \\ \hline \text{Разлика за } x' = & 220 \\ \text{разлика за } 1' = & 23{,}4 \\ \hline \end{array} \text{ (узета из таблице)}$$

$$x' = \frac{220}{23,4} = \frac{2200}{234} = 9{,}4' = 9\ 24''$$

$2200 : 234 = 9{,}4'$ $\qquad 0{,}4' \cdot 60 = 24''$

940

4

$\underline{\alpha = 36^0 29' 24''}$

2. Cos $\alpha = 0{,}80\,594$.

По таблици се налази угао између $36^0 10'$ и $36^0 20'$.

$$\begin{array}{lr} \cos 36^0 10' & = 0{,}80\,730 \\ \cos \alpha & = 0{,}80\,594 \\ \hline \text{разлика за } x' = & 136 \\ \text{разлика за } 1' = & 16{,}2 \\ \hline \end{array}$$

$$x' = \frac{136}{17,2} = \frac{1360}{172} = 7{,}9' = 7'54''$$

$1360 : 172 = 7{,}9$ $\qquad 0{,}9' \cdot 60 = 54''$

1560

12

$\underline{\alpha = 36^0 17' 54''}$

3. Tg $\alpha = 0{,}75425$.

По таблици се налази угао између $37^0\,0'$ и $37^0\,10'$,

$\mathrm{tg}\, a = 0{,}75425$

$\mathrm{tg}\, 37^0\,0' = 0{,}75355$

разлика за $x' = 70$

разлика за $1' = 45{,}7$

$$x' = \frac{70}{45{,}7} = \frac{700}{457} = 1{,}53' = 1'32''$$

$700 : 457 = 1{,}53'$ $\quad 0{,}53 \cdot 60 = 31{,}8''$

2430

1450

79

$\alpha = 37^0\,1'\,32''$

4. $\mathrm{Cotg}\ \alpha = 1{,}3459$

Угао α се налази између $36^0\,30'$ и $36'\,40'$

$\mathrm{cotg}\ 36^0\,30' = 1{,}3514$

$\mathrm{cotg}\ \alpha = 1{,}3450$

Разлика за $x' = 55$

разлика за $1' = 8{,}2$

$$x = \frac{55}{8{,}2} = \frac{550}{82} = 6{,}7' = 6'42''$$

$550 : 82 = 6{,}7'$ $\quad 0{,}7' \cdot 60 = 42''$

580

6

$\alpha = 36^0\,36'\,42''$

Задаци:

1. Одреди функције улога:

a) $\alpha = 30^0$	*b)* $\alpha = 45^0$
c) $\alpha = 60^0$	*č)* $\alpha = 75^0$
d) $\alpha = 37^0\,20'$	*e)* $\alpha = 64^0\,40'$
f) $\alpha = 28^0\,15'$	*g)* $\alpha = 34^0\,26'$
h) $\alpha = 65^0\,34'$	*i)* $\alpha = 72^0\,36'$

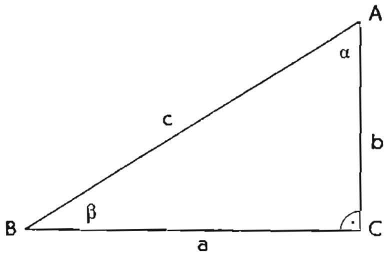
2. Одреди угао, ако је дата функција:

a) $\sin\alpha = 0{,}52\,250$	*v)* $\sin\alpha = 0{,}84\,495$
c) $\cos\alpha = 0{,}37\,999$	*ć)* $\cos\alpha = 0{,}97\,630$
d) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}21\,256$	*e)* $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}15\,108$
f) $\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}86\,419$	*g)* $\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}73\,728$
h) $\sin\alpha = 0{,}47\,637$	*i)* $\sin\alpha = 0{,}79\,169$
j) $\cos\alpha = 0{,}20\,135$	*k)* $\cos\alpha = 0{,}97\,356$
e) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}64\,753$	*m)* $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}7\,485$
n) $\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}55\,300$	*o)* $\mathrm{cotg}\,\alpha = 1{,}3\,295$

X. РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

§ 107. РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

Правоугли троугао решити значи, одредити из две дате независне величине остале величине.



Сл. 110.

Према пређашњим параграфима је:

I. $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ или $a = c\sin\alpha$ и $c = \frac{a}{\sin\alpha}$

II. $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ или $b = c\cos\alpha$ и $c = \frac{b}{\cos\alpha}$

III. $\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$ или $a = b\ \mathrm{tg}\,\alpha$ и $b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

IV. $\frac{b}{a} = \mathrm{cotg}\,\alpha$ или $b = a\ \mathrm{cotg}\,\alpha$ и $a = \frac{b}{\mathrm{cotg}\,\alpha}$

V. $\frac{b}{c} = \sin\beta$ или $b = c\sin\beta$ и $c = \frac{b}{\sin\beta}$

VI. $\frac{a}{c} = \cos\beta$ или $a = c\cos\beta$ и $c = \frac{a}{\cos\beta}$

VII. $\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta$ или $b = a\ \mathrm{tg}\,\beta$ и $a = \frac{b}{\mathrm{tg}\,\beta}$

VIII. $\frac{a}{b} = \mathrm{cotg}\,\beta$ или $a = b\ \mathrm{cotg}\,\beta$ и $b = \frac{a}{\mathrm{cotg}\,\beta}$

§ 108. ПРИМЕРИ РЕШАВАЊА ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

1. пример: Од правоуглог троугла је дата катета $a=10\ m$ и угао $\alpha = 67^0 15'$; одреди другу катету b, хипотенузу c и угао β.

1. $\frac{a}{c}$ sin α; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$

$$\begin{array}{lr} \sin 67^{0}10' \dots\dots & 0{,}92164 \\ + \text{ разлика за } 5' = 11{,}2 \cdot 5 & 56 \\ \hline \sin 67^{0}15' & 0{,}92\,220 \end{array}$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{10}{0{,}92\,220} = \frac{1000\,000}{92\,220} = \underline{10{,}84\ m}$$

2. $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$; $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$

$$\begin{array}{lr} \operatorname{tg} 67^{0}10' \dots\dots & 2{,}3750 \\ + \text{ разлика за } 5' = 19{,}5\,.\,5 & 98 \\ \hline \operatorname{tg} 67^{0}15' & 2{,}3848 \end{array}$$

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{10}{2{,}3848} = \frac{100\,000}{238\,48} = \underline{4{,}19\ m}$$

3. $\beta = 90^{0} - \alpha = \underline{22^{0}45'}$.

2. пример: Од правоуглог троугла су дати хипотенуза $c = 15\,dm$ и угао $\alpha = 35^{0}27'$; одреди катете и угао β.

1. $\frac{a}{c} = \alpha$; $a = c \cdot \sin\alpha$

$$\begin{array}{lr} \sin 35^{0}20' \quad \dots\dots & 0{,}57\,833 \\ + \text{ разлика за } 7' = 23{,}7 \cdot 7 & 166 \\ \hline \sin 35^{0}27' & 0{,}57\,999 \end{array}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha = 15 \cdot 0{,}57\,999 = \underline{8{,}70\ dm}$$

2. $\frac{b}{c} = \cos\alpha$; $b = c\,.\cos\alpha$

$$\begin{array}{lr} \cos 35^{0}20' \quad \dots\dots & 0{,}81\,580 \\ - \text{ разлика за } 7' = 16{,}8 \cdot 7 & 118 \\ \hline \cos 35^{0}27' & 0{,}81\,462 \end{array}$$

$$b = c \cdot \cos\alpha = 15 \cdot 0{,}81462 = \underline{12{,}22\ dm}$$

3. $\beta = 90 - \alpha = 54^{0}33'$.

Задаци:

1. Реши правоугле троугле:

a) $a = 17\,m$ $\alpha = 37^{0}\,15'$
b) $b = 34\,m$ $\beta = 44^{0}\,42'$
c) $a = 12{,}7\,m$ $\alpha = 57^{0}\,36'$
ċ) $b = 24{,}34\,m$ $\beta = 67^{0}\,35'$
d) $b = 37{,}15\,m$ $\alpha = 49^{0}\,15'$
e) $c = 125\,m$ $\alpha = 37^{0}\,46'$
f) $c = 19{,}08\,m$ $\beta = 68^{0}\,34'$

g) $a = 36\,m$ $b = 24\,m$
h) $a = 18{,}3\,m$ $c = 45{,}6\,m$

2. Израчунај висину равностранога троугла, ако је страна $a = 42\,cm$.

3. Равнокрак трвугао има за основицу $c = 24\,cm$ и угао на основици $\alpha = 55^{0}\,36'$; колика је висина и колики су његови углови?

4. Страна правилнога петоугла мери 38 *mm*; колики су полупречници описанога и упасанога круга?

5. Дијагонале ромба мере 24 *dm*; колика је страна и колики је угао, који заклапају стране?

6. Стране правоугаоника мере $a = 67\,dm$ и $b = 43\,dm$; колики је угао, који чине дијагонале?

XI. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА И МНОГОУГЛОВА

§ 109. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

Према ставовима 79 и 80 два троугла су слични, ако имају једнаке углове и по две стране једнога троугла чине исте размере као хомологне стране другога троугла.

Стога постоје ови услови:

$$\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1;$$
$$a : b = a_1 : b_1,$$
$$a : c = a_1 : c_1,$$
$$b : c = b_1 : c_1.$$

Да су два троугла слична, није нам потребно доказивати да постоје свих шест наведених услова, већ је довољно, ако докажемо да постоје само два услова. Како ћемо да их бирамо, казаће нам ставови о сличности

§ 110. СТАВОВИ О СЛИЧНОСТИ

Став 90. *Два троугла су слични, ако имају:*

1. по два угла једнака (1∾),

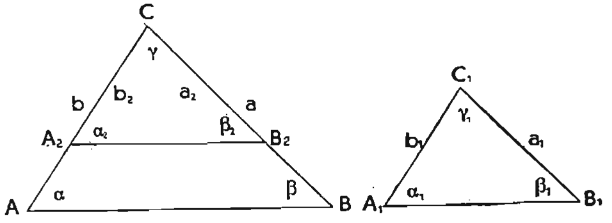
2. једнаке размере две стране и угао који те стране заклапају (2∾),

3. једнаке размере две стране и угао, који је супротан већој страни (3∾),

4. *једнаке размере све три стране* ($4\sim$),

Напомена: Са ($1\sim$) . . . означаваћемо став о сличности.

I. Први став о сличности ($1\sim$):



Сл. 111.

Троугли ABC и $A_1B_1C_1$ су слични, ако имају два угла једнака: $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$.

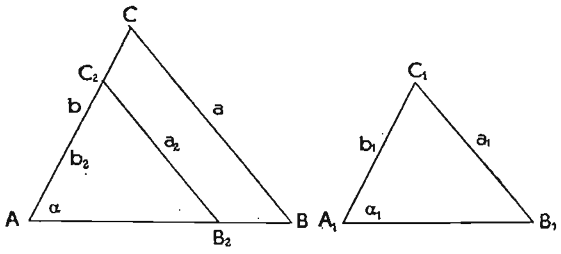
Доказ: У већем троуглу направимо $a_2 = a_1$ и повучемо $\overline{A_2B_2}$ паралелно $\overline{AB}$. Тада је $\alpha = \alpha_2$ и $\beta = \beta_2$ (сагласни углови); због тога је $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\beta_1 = \beta_2$ и троугли $A_1B_1C_1$ и A_2B_2C су по $1\cong$ подударни. Пошто је $\overline{A_2B_2}$ паралелно $\overline{AB}$, то су троугли ABC и A_2B_2C по § 92 слични; из тога следује, да је троугао ABC сличан и троуглу $A_1B_1C_1$.

* II. Други став о сличности ($2\sim$): Троугли ABC и $A_1B_1C_1$ су слични, ако имају једнаке размере двеју страна и угао, који те стране заклапају: $a : b = a_1 : b_1$ и $\gamma = \gamma_1$.

Доказ: Опет пренесемо мањи троугао на већи тако, да се угао γ_1 поклопи с углом γ. Пошто је пропорција $a : b = a_1 : b_1$ једнака пропорцији $a : a_1 = b : b_1$, односно $a : a_2 = b : b_2$, то је страна $\overline{A_2B_2}$, по ставу 78, паралелна $\overline{AB}$. Због тога су троугли A_2B_2C и ABC слични. Из подударности троуглова $A_1B_1C_1$ и A_2B_2C ($2\cong$) следује сличност троуглова ABC и $A_1B_1C_1$.

* III. Трећи став о сличности ($3\sim$): Троугли су слични, ако имају једнаке размере двеју страна и угао, који је супротан већој страни: $a : b = a_1 : b_1$ за $a > b$ и $\alpha = \alpha_1$.

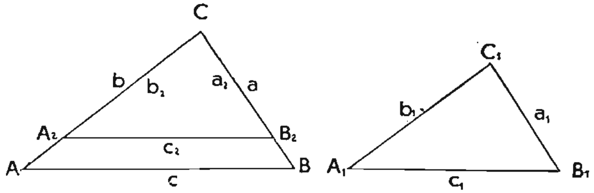
Доказ: Пренесемо мањи троугао на већи тако, да се краци угла α покрију с крацима угла α_1, и направимо $\overline{AC_2} = \overline{A_1C_1}$ и $\overline{C_2B_2} = \overline{C_1B_1}$; тада су оба троугла $A_1C_1B_1$ и AC_2B_2 подударна ($3\cong$). Из пропорције $a : b = a_2 : b_2$, која је једнака пропорцији $a : a_2 = b : b_2$, следује по ставу 78, да је страна a_2 паралелна страни a. Због тога су троугли ABC и AB_2C_2 слични а такође и троугли ABC и $A_1B_1C_1$ су слични.



Сл. 112.

Напомена: У трећем ставу о подударности два троугла доказали смо, да су два троугла само тада подударна, ако троуглови имају једнак угао који лежи наспрам веће стране. Ако два троугла имају једнак само угао, супротан мањој страни, постоји још друга могућност, да троугли нису подударни, иако имају по две стране једнаке и угао наспрам мање стране. Због тога би став о сличности два троугла без спецификације стране, према којој лежи угао, био непотпун, односно погрешан.

* IV. Четврти став о сличности ($4\sim$): Два троугла су слична, ако имају једнаке размере свих трију страна: $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$.



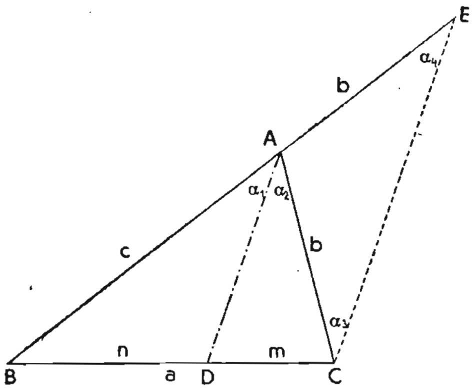
Сл. 113.

Доказ: Ако пренесемо a_1, на a, и b_1 на b тако да је $\overline{CB_2} = \overline{C_1B_1}$ и $\overline{CA_2} = \overline{C_1A_1}$, тада је пропорција $a : b = a_2 : b_2$. По ставу 78 је $\overline{A_2B_2}$ паралелна $\overline{AB}$ и $c : c_2 = a : a_2$, троугао ABC је сличан троуглу A_2B_2C.

Из пропорција: $a : a_1 = c : c_1$ и $a : a_1 = c : c_2$ следује, да је $c_1 = c_2$ и да су троугли $A_1B_1C_1$ и A_2B_2C подударни ($4\cong$). Због тога су троугли ABC и $A_1B_1C_1$ слични.

§ 111. ДЕОБА ТРОУГЛОВЕ СТРАНЕ СИМЕТРАЛОМ УГЛА

Став 91. *Симетрала угла у троуглу дели супротну страну у размери страна, које чине тај угао.*

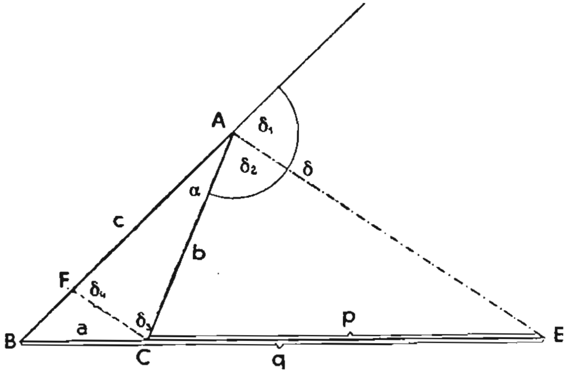


Сл. 114.

Доказ: Продужимо страну c и повуцимо кроз теме c паралелну симетрали угла α ($\overline{CE} \| \overline{DA}$). Добијамо троугао CEA. Углови α_1 и α_2 су једнаки зато што $\overline{AD}$ као симетрала угла полови угао α; α_3 је једнак α_1 (сагласни углови) и α_4 је једнак α_2 (наизменични углови); због тога је $\alpha_3 = \alpha_4$. Троугао CEA је равнокрак троугао са знацима $\overline{AC} = \overline{AE} = b$. Према ставу 77 бр. 1 следује: $m : n = b : c$, што је требало доказати.

Став 92. *Симетрала троугловог спољашњег угла дели супротну страну у размери страна које чине тај угао.*

Доказ: Симетрала спољашњег угла δ који одговара углу α полови угао δ ($\delta_1 = \delta_2$) и сече продужену троуглову страну $\overline{BC}$ у тачки F.



Сл. 115.

Паралела тој симетрали кроз C сече страну c у тачки F. Пошто је $\delta_3 = \delta_2$ (наизменични углови) и $\delta_4 = \delta_1$ (сагласни углови), то су углови δ_3 и δ_4 једнаки и троугао FAC је равнокрак троугао са крацима $\overline{AF} = \overline{AC} = b$. Ако сматрамо теме

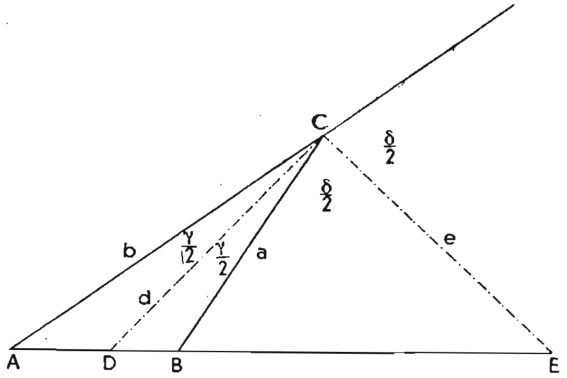
B за центар прамена, који је пресечен двема паралелама $\overline{FC}$ и $\overline{AE}$, постоји према ставу 77 бр. 1 размера:

$$\overline{BE} : \overline{CE} = \overline{BA} : \overline{FA} \text{ или } q : p = c : b,$$

што је требало доказати.

§ 112. ХАРМОНИЧНА ПОДЕЛА ДУЖИ

Дуж $\overline{AB}$ нека буде основица ма каквога троугла.



Сл. 116.

Нацртајмо симетралу угла при врху C и одговарајућег спољашњег угла. Прва сече основицу $\overline{AB}$ у тачки D, друга њено продужење у тачки E. Према ставовима 91 и 92 постоје сразмере:

$$\overline{AD} : \overline{BD} = b : a \text{ и } \overline{AE} : \overline{BE} = b : a$$

$$\text{отуда следује: } \overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AE} : \overline{BE}.$$

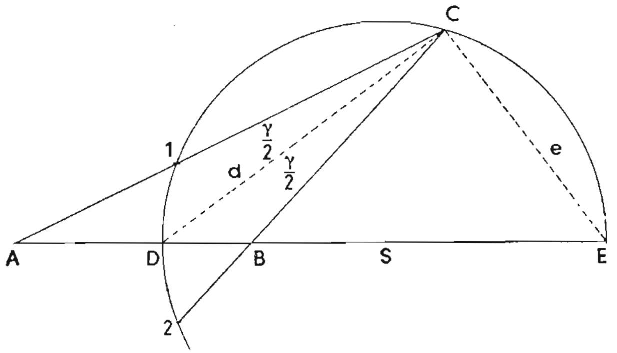
Став 93. *Када две тачке дужи (једна на дужи а друга на њеном продужењу) тако деле дуж, да су унутрашњи отсечци пропорционални спољашњим отсечцима дужи, кажемо, да је дуж тим двема тачкама хармонично подељена. Исто тако и дуж, која је одређена двема новим тачкама је хармонично подељена крајевима прве дужи.*

Ако наиме у горњој пропорцији заменимо унутрашње чланове, добијамо: $\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BE}$.

Напомена: Врх троугла смо произвољно изабрали. Због тога и симетрала унутрашњег и спољашњег угла на врху исецају сваки пут друге две тачке на правој $\overline{AB}$, ако врх троугла мења свој положај. Хармонична подела дужи је стога неодређен задатак, јер има бескрајно много решења. Само кад тражимо, да се хармонична подела дужи мора извршити у одређеној размери $a : b$ добива задатак одређени облик, пошто тада има само једно решење. (Види § 121, конструкције: задаци 5. и 6.).

* § 113. АПОЛОНИЈЕВ КРУГ

Краци d и e који отсецају на дужи $\overline{AB}$, односно на њеном продужењу тачке D и E, које хармонично леже, — стоје управно један на другом, јер су симетрале угла и њему суплементнога угла (став 14). Ако нацртамо круг, чији је пречник $\overline{DE}$, онда према ставу 62 тачка c лежи на обиму круга.



Сл. 117.

За ма какву тачку A добијамо тачку B која лежи хармонично с обзиром на дуж DE овако: на обиму круга, чији је пречник DE, изаберемо ма коју тачку C и спојимо је са A, D и E. Ако пренесемо перифериски угао $ACD = \frac{\gamma}{2}$ на другу страну крака $\overline{CD}$ ($\widehat{D1} = \widehat{D2}$), нови нам крак исеца тачку B. A, B, D и E су према пређашњем § четири хармоничне тачке.

Исту тачку B добијамо као четврту хармоничну тачку за тачке A, D и E, ако узмемо тачку C ма где на кружној периферији, на пример у C_1. И у том примеру је угао DC_1E прав угао и, ако опет пренесемо угао $\frac{\gamma_1}{2}$ на другу страну крака $\overline{C_1D}$, нови нам крак исеца четврту хармоничну тачку B_1. Да су тачке B и B_1 идентичне, доказујемо овако:

Пошто су тачке A,B,D и E хармоничне, постоји пропорција:

$$\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BE}.$$

Из истога разлога мора постојати и пропорција:

$$\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{B_1D} : \overline{B_1E}.$$

Отуда следује, да је:

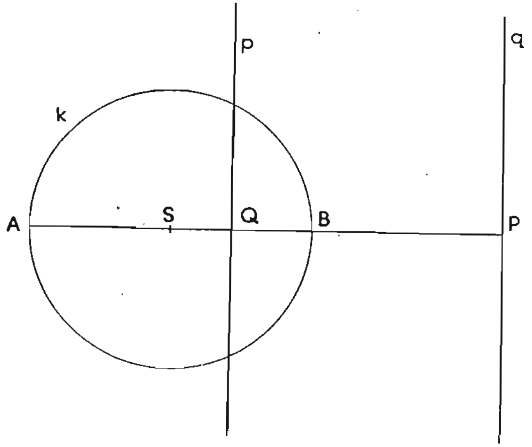
$\overline{BD} : \overline{BE} = \overline{B_1D} : \overline{B_1E}$. То је само тада могуће, ако је $B \equiv B_1$.

Став 94. *Ако су A,B и D,E два пара хармонично везаних тачака, онда је круг пречника $\overline{DE}$ геометриско место врхова свих троуглова, који имају $\overline{AB}$ за основицу и за које је размера остале две стране стална. Тај круг се зове* **Аполонијев круг.**

Доказ: $\overline{DA} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{BC}$, зато што је $\overline{CD}$ увек симетрала угла ACB, ма где ми изабрали тачку C на периферији круга. Пошто је размера $\overline{DA} : \overline{DB}$ стална, то је и размера $\overline{AC} : \overline{BC}$ стална. (Види став 91).

* § 114. ПОЛ И ПОЛАРА

P је ма која тачка у равни круга. Права која иде кроз ту тачку P и центар круга S, сече круг у тачкама A и B.



Сл. 118.

Одредимо тачки P с обзиром на тачке A и B хармоничну тачку Q и повуцимо нормалу p кроз Q на $\overline{PS}$. Права p се зове полара тачке P с обзиром на одређени круг k.

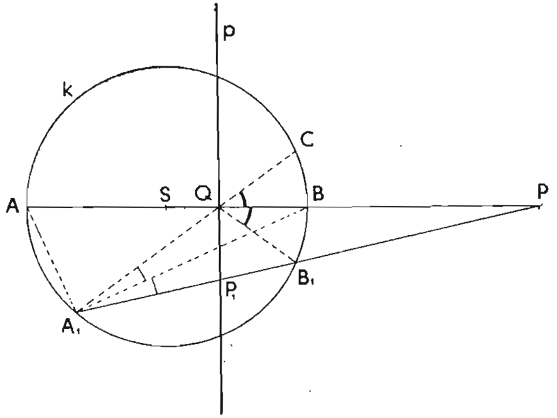
Свакој тачки у равни круга одговара само једна полара. Полара сече круг, ако се тачка налази изван круга; тангира (додирује) круг, ако тачка лежи на кругу (тангента круга је уједно и полара тачке додира) и не сече круг, ако се тачка налази у кругу (тачки Q је полара права q). Обратно видимо, да је свака права полара само једне тачке, коју зовемо пол праве с обзиром на дати круг.

§ 125. ОСОБИНЕ ПОЛА И ПОЛАРЕ

Став 95. *Ако изаберемо уместо $\overline{PS}$ ма коју другу праву кроз тачку P, лежи четврта хармонична тачка с обзиром на њене пресечне тачке с кругом и на тачку P, на полари.*

Доказ: 1. Тачка P се налази изван круга.

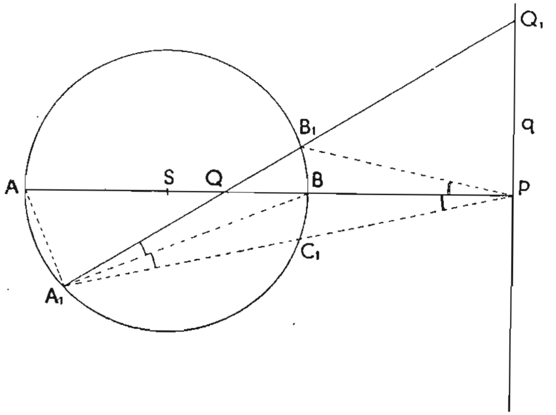
Изаберемо ма који зрак прамена кроз P, који сече круг у тачкама A_1 и B_1 и полару p у тачки P_1. Ако спојимо A_1 са A, B, Q, и P, угао AA_1B је прав угао (угао у полукругу) и периферски углови QA_1B и BA_1P су једнаки по § 113. Због тога су и луци $\widehat{CB}$ и $\widehat{B_1B}$ једнаки. Пошто Q лежи на $\overline{SB}$, то су углови CQB и B_1QB једнаки. Узмимо $\overline{A_1B_1}$ за основицу троугла с врхом у Q, тада је p симетрала угла при врху, зато што стоји управно на $\overline{QP}$, а то је симетрала суплементнога суседног угла (став 14). По § 112 исецају симетрале угла и суплементнога суседног угла при врху троугла на основици, односно на њеном продужењу две тачке, које ју деле хармониски. $A_1B_1PP_1$ су четири хармоничке тачке, што је требало доказати.



Сл. 119.

2. Тачка Q се налази у кругу.

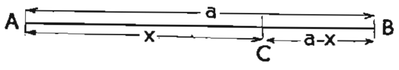
Повучемо ма коју праву кроз Q, која сече круг у тачкама A_1 и B_1 и полару q у Q_1. A_1 спојимо са A, B, Q и P па добијамо као и пре, да је лук $\widehat{BB_1}$ једнак луку $\widehat{BC_1}$. Пошто P лежи на пречнику $\overline{SB}$, то су углови BPB_1 и BPC_1 једнаки. Троугао A_1PB_1 има за основицу $\overline{A_1B_1}$, која је од симетрала угла и суплементнога суседнога угла на врху хармонично раздељена у тачкама Q и Q_1 што је требало доказати.



Сл. 120.

§ 116. ЗЛАТНИ ПРЕСЕК (sectio aurea)

Став 96. *Дуж AB је тачком C подељена по* **непрекидној пропорцији** *или* **златном пресеку,** *ако је размера мањега отсечка према већем отсечку једнака размери већега отсечка према целој дужи.*



Сл. 121.

Ако означимо већи отсечак за x а мањи са $(a—x)$, тада постоји размера: $(a-x):x=x:a$. Отуда следује:

$x^2=a^2-ax$ или

$x^2+ax=a^2$ и, ако обема странама једначине додамо $\frac{a^2}{4}$, добијамо:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=a^2+\frac{a^2}{4} \quad \text{или}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\frac{a^2}{4}$$

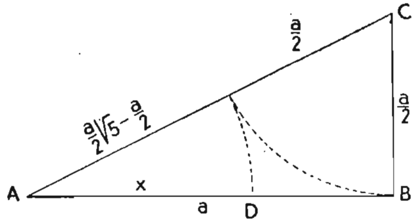
$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Испред корена с десне стране једначине долази само позитиван знак у обзир, пошто је лева страна једначине збир двеју позитивних дужи. Добијамо тада:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = a \cdot 0{,}618 \doteq$$

$$\doteq a \cdot 0{,}6 = \frac{3}{5}\, a.$$

Конструкција златнога пресека.



Сл. 122.

На крај B дужи a повучемо управну $\overline{BC} = \frac{a}{2}$, тада је $\overline{AC}$ хипотенуза правоуглога троугла.

$$\overline{AC}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

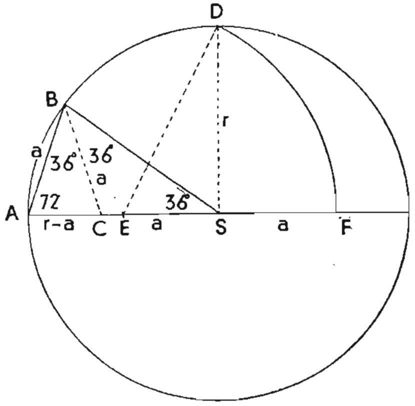
или $\overline{AC} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$

Ако од $\overline{AC}$ одузмемо $\frac{a}{2}$, добијамо $x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$, што пренесемо на дуж $\overline{AB}$. $\overline{AD}$ је тада x.

Назив „златни пресек“ потиче од Грка, специјално од Питагорејаца, касније пак и од уметника (Pacioli, Leonardo da Vinci,...). Уметници сматрају за најлепши правоугаоник онај правоугаоник, чије су стране у размери златнога пресека.

* § 117. ПРАВИЛНИ ДЕСЕТОУГАО

Став 97. *Страна правилнога десетоугла је већи отсечак по златном пресеку подељенога полупречника описанога круга око десетоугла.*



Сл. 123.

Доказ: Дијагонале правилнога десетоугла које иду кроз центар деле десетоугао на 10 равнокраких и подударних троуглова. Угао при врху једнога троугла је 36^0, а углови на основици су по 72^0. Ако повучемо симетралу угла код B, добијамо тачку C на $\overline{SA}$. Троугли ASB и ABC су слични, зато што имају једнаке углове ($1 \sim$). Пошто је троугао SCB равнокрак троугао то је $\overline{BC} = \overline{SC} = a$. Због тога добијамо сразмеру $r : a = a : r - a$. То је непрекидна сразмера, па је $a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Ако преполовимо полупречник у тачки E и то спојимо са D ($\overline{DS} \perp \overline{AS}$), то је $\overline{ED}$ хипотенуза правоуглога троугла ESD.

$$\overline{ED}^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4}$$

$ED = \frac{r}{2}\sqrt{5}$. Пренесемо ED на EF, тада је

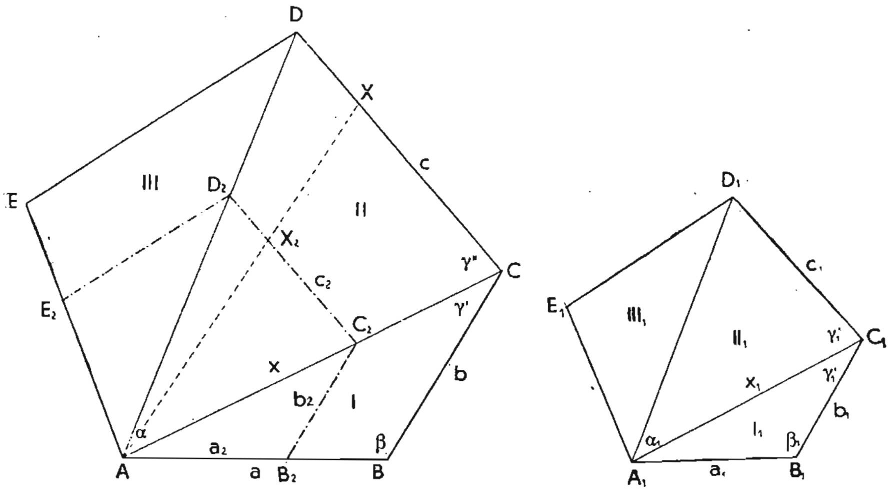
$\overline{SF} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = a$ страна правилнога десетоугла.

§ 118. СЛИЧНОСТ МНОГОУГЛОВА

Став 98. *Два многоугла су слични, ако се могу поделити на хомологне сличне троугле.*

Доказ: Ако је дат количник сличности m, тада је за троугле ABC и $A_1B_1C_1$.

$a = ma_1$, $b = mb_1$ и $\beta = \beta_1$. Оба троугла су слична по $2 \sim$. Због тога је и $x = mx_1$ и $\gamma' = \gamma_1'$. Пошто је $\gamma = \gamma_1$, $\gamma' = \gamma - \gamma'$ и $\gamma_1'' = \gamma_1 - \gamma_1'$, то је и $\gamma'' = \gamma_1''$. И троугли ACD и $A_1C_1D_1$ су слични ($2 \sim$). Ако тако продужимо, добијамо, да су хомологни троугли оба многоугла слични, стога су и оба многоугла међу собом слични.



Сл. 124.

Став 99. *Обими сличних многоуглова стоје у размери двеју хомологних страна.*

Доказ: $a = ma_1$, $b = mb_1$, $c = mc_1, \ldots$

$$a_1 + b_1 + c_1 + \ldots = m\,(a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) \text{ и } m = \frac{a\;+b\;+c+\ldots}{a_1+b_1+c_1+\ldots}$$

Напомена: Два слична многоугла најлакше нацртамо, ако положимо мањи многоугао на већи тако, да се поклопе две хомологне стране, које заклапају исти угао. (Види слику). Тада се поклапају и све дијагонале, које иду кроз заједничко теме, и хомологне стране су међу собом паралелне. Ма којој тачки X на страни c прве слике одговара тачка X_2 на страни C_2 друге слике тако, да њихова спојница иде кроз A, јер $\overline{DX} : \overline{D_2X_2} = \overline{XA} : \overline{X_2A} = \overline{DA} : \overline{D_2A} = m$.

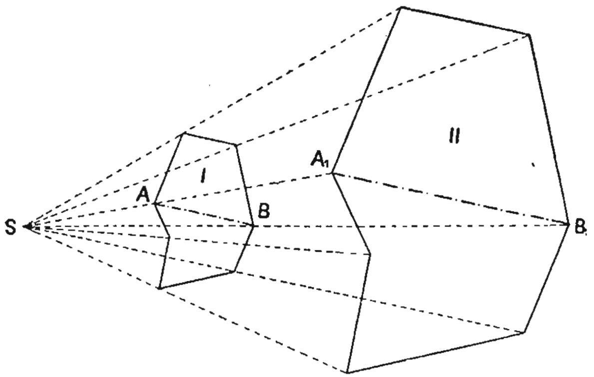
§ 119. ХОМОТЕТИЧНЕ СЛИКЕ

Две сличне слике су хомотетичне, ако спојнице хомологних тачака иду кроз једну тачку. Кажемо, да слике леже у перспективном положају. Пресек свих спојница хомологних тачака је центар сличности или хомотетије.

Став 100. *Код хомотетичних слика су хомологне дужи паралелне.*

Доказ: Ако су слике I и II хомотетичне, пролази спојница двеју хомологних тачака кроз центар сличности и размера њених отсечака је стална.

$$\frac{\overline{S\,A}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{S\,B}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{S\,C}}{\overline{SC_1}} = m,$$



Сл. 125.

Ако спојимо две ма које тачке A и B прве слике и хомологне тачке A_1 и B_1 друге слике, то је размера $\overline{AB} : \overline{A_1\,B_1}$ по дефиницији о сличности двеју слика стална. То је само тада могуће, ако постоје сразмере:

$$\frac{\overline{S\,A}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} \text{ и } \frac{\overline{S\,B}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = m.$$

По ставу 78 је дуж $\overline{AB}$ паралелна дужи $\overline{A_1B_1}$, зато што су хомологни отсечци на зрацима сразмерни.

Став 100 се може изразити и овако:

Став 101. *Ако су код две сличне слике два пара хомологних дужи паралелни, слике су хомотетичне.*

Докажи.

У § 118 су нацртана три многоугла. Јесу ли хомотетични? Где су центри хомотетије?

§ 120. ХОМОТЕТИЧНА ТЕЛА

Два тела су слична, ако се растојања којих било тачака првога тела смањују (повећавају) у одређеној размери према растојањима одговарајућих тачака на другом телу.

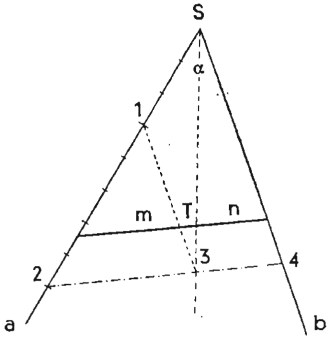
Хомотетична тела су слична тела, код којих спојнице хомологних тачака иду кроз једну тачку; ту тачку зовемо центар сличности оба тела.

§ 121. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример. Конструиши кроз дату тачку T, која лежи у унутрашњости угла, праву тако, да отсечци на правој стоје у размери 5:3 ($m:n$).

a) Подаци. Угао α, тачка T и $m:n=5:3$.

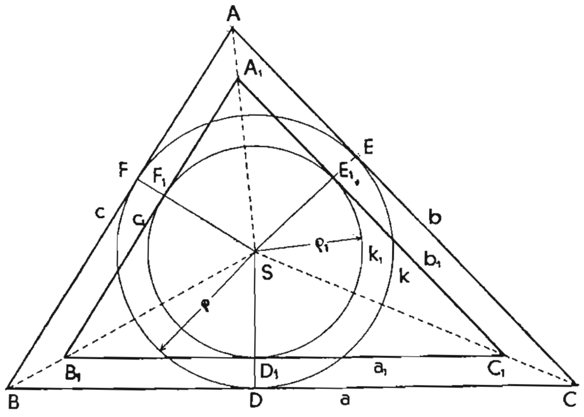
b) Решење. Пренесемо на крак a две ма какве дужи $\overline{S1}$ и $\overline{1,2}$ једну преко друге у размери 3 : 5. Кроз крај 1 прве дужи повучемо паралелу краку b и одредимо њену пресечну тачку 3 са правом $\overline{ST}$. Ако сматрамо 2 као теме прамена, тада је $\overline{2,1}:\overline{1S}=\overline{2,3}:\overline{3,4}=5:3$. Права p, паралелна правој $\overline{2,4}$ кроз T, је тражено решење и њени отсечци m и n стоје у размери 5 : 3.



Сл. 126.

2. пример. Конструиши троугао, који је сличан троуглу ABC, а чији је полупречник уписанога круга $\rho_1=1{,}5\ cm$.

a) Подаци: Троугао ABC: $a=8\ cm$, $b=7\ cm$, $c=6\ cm$ и од троугла $A_1B_1C_1$ полупречник уписанога круга $\rho_1=1{,}5\ cm$.



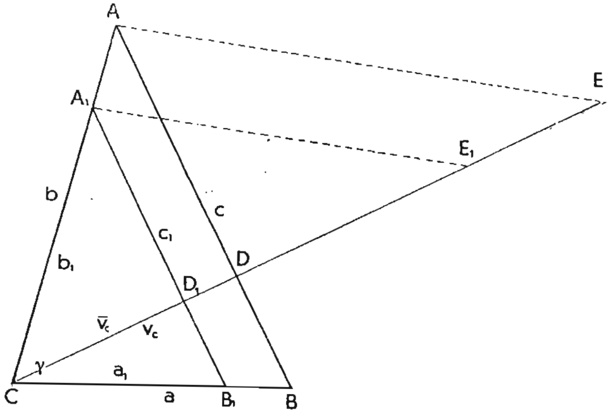
Сл. 127.

b) Решење: Нацртамо троугао ABC, одредимо средиште уписанога круга S, круг k и додирне тачке D, E и F. Ако нацртамо полупречником ρ_1 кругу k концентрични круг k_1, он сече нормале $\overline{SO}$, $\overline{SE}$, $\overline{SF}$ у тачкама D_1 E_1 и F_1, које су додирне тачке новога троугла. Стране a_1, b_1, c_1 су паралелне странама датога троугла.

* 3. пример: Нацртај троугао ABC, ако су дате: размере двеју страна $a:b$, угао γ и збир треће стране и њене висине.

a) Подаци: $a:b=3:4$, $\gamma=75^0$, $c+v_c=10\ cm$.

b) Решење: Нацртамо сличан троугао A_1B_1C са странама $a=3\ cm$, $b=4\ cm$ и углом $\gamma=75^0$. Висина $\bar{v}_c$ на c_1 има подножје у тачки D_1. Ако направимо $\overline{D_1E_1}=c_1$, онда је $\overline{CE_1}=\bar{v}_c+c_1$. На истој висини пренесемо $CE=c+v_c=9\ cm$. Спојимо $\overline{E_1A_1}$ и повучемо паралелу тој првој кроз E. A је теме траженога троугла, јер је C теме прамена, који је пресечен паралелним правима те стога постоји сразмера:



Сл. 128.

$$(\bar{v}_c+c_1):(\bar{v}_c+c)=b_1:b.$$

Троугао ABC је тражени троугао, пошто је страна $\overline{AB}$ паралелна страни $\overline{A_1B_1}$.

Да је страна $\overline{AB}$ једнака $\overline{DE}$, доказујемо овако:

Ако је C центар прамена, постоје сразмере:

$$\overline{E_1A_1}:\overline{EA}=\overline{CA_1}:\overline{CA}$$
$$\overline{A_1B_1}:\overline{AB}=\overline{CA_1}:\overline{CA}$$

Отуда следује да су троугли $A_1B_1E_1$ и ABE слични, јер су углови код A_1 и A једнаки (сагласни углови) (2∾).

Пошто је у првом троуглу $\overline{D_1E_1}=c_1$, и у другом је $DE=c$.

*4 пример: Конструиши троугао, ако је дата: страна c, угао γ и размера других двеју страна $a:b=2:3$.

a) Подаци: $c = 4$ *cm*, $\gamma = 60^0$ и $a : b = 2 : 3$.

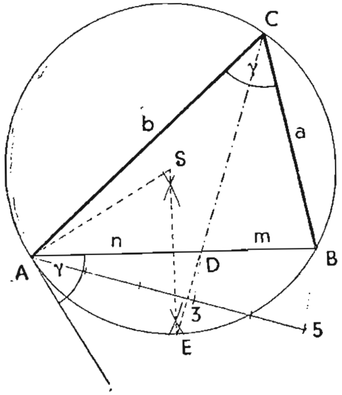
b) Анализа: 1. Врх *C* се налази на кругу, чија је тетива *c*. Тај круг има центар у *S*, где је врх равнокракога троугла над *c* с углом 2γ при врху (види § 76, 2. пример).

2. По ставу 91 дели симетрала угла супротну страну у размери осталих двеју страна. Ако обележимо пресек симетрале са страном *c* са *D* и отсечке $\overline{DB}$ и $\overline{AD}$ са *m* и *n*, тада је $m : n = a : b = 2 : 3$.

3. Симетрала перифериског угла полови одговарајући лук, јер једнаким луцима припадају једнаки перифериски углови.

c) Конструкција: 1. Нацртамо страну $c = 4$ *cm* и одредимо круг, који је геометриско место свих перифериских углова $\gamma = 60^0$ (§ 76, 2. пример).

2. Поделимо дуж $\overline{AB}$ у размери 3 : 2. То чинимо на тај начин, што повучемо кроз *A* помоћну праву, на којој пренесемо 5 ма каквих јединица. 5 спојимо са *B* и повучемо кроз 3 паралелу. Она исеца на $\overline{AB}$ тачку *D* (види § 52).



Сл. 129.

3. Преполовимо лук $\widehat{AB}$. Тачка *E* лежи на симетрали стране $\overline{AB}$.

4. Права $\overline{DE}$ је симетрала перифериског угла, стога је симетрала и угла *ACB*.

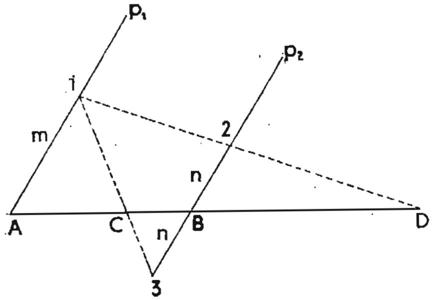
5. *ABC* је тражени троугао.

č) Доказ следује из анализе и конструкције.

d) Детерминација: Задатак има само једно решење.

5. пример: Подели дату дуж $\overline{AB}$ хармонично у размери $m : n$.

Решење: Кроз *A* и *B* повучемо две паралелне праве p_1 и p_2. На p_1 пренесемо $m = \overline{A1}$ и на a_2 на сваку страну од *B*, $n = \overline{B2} = \overline{B3}$. Спојнице $\overline{1,2}$ и $\overline{1,3}$ исецају на дужи $\overline{AB}$ тачке *C* и *D*. Ако сматрамо *C* за теме прамена, онда је $\overline{AC} : \overline{BC} = m : n$.

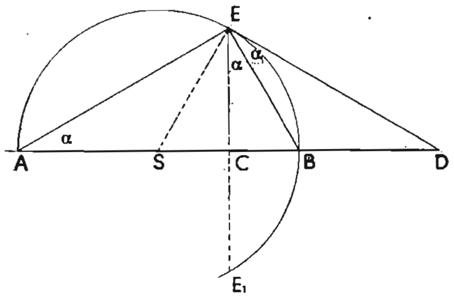


Сл. 130.

Размера унутрашњих отсечака дужи $\overline{AB}$ је једнака размери спољашњих отсечака исте дужи $\overline{AB}$. Због тога деле тачке *C* и *D* дуж $\overline{AB}$ хармонично у размери $m : n$.

6. пример: На дужи $\overline{AB}$ је одређена тачка *C*; одреди четврту хармоничну тачку *D*.

1. начин: Повучемо кроз *A* и *B* паралеле p_1 и p_2, изаберемо на p_1 ма коју тачку 1 и спојимо је са *C*. Та спојница сече праву p_2 у тачки 3. Направимо $\overline{B2} = \overline{B3}$ и повучемо спојницу $\overline{1,2}$, која сече дуж $\overline{AB}$ у тачки *D*; *D* је четврта хармонична тачка. Докажи (види слику 120).



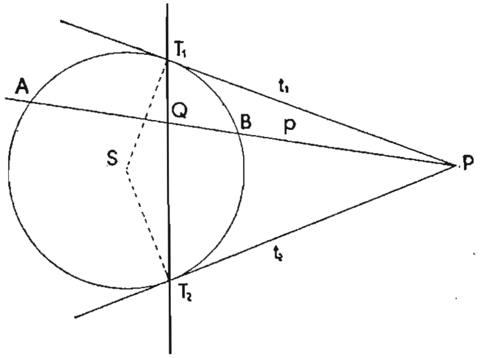
Сл. 131.

*2. начин: Преполови дуж $\overline{AB}$ у *S* и нацртај круг с полупречником $\overline{SA}$ и средиштем *S*. У тачки *C* постављена нормала на $\overline{AB}$ сече круг у тачки *E*. Тангента на круг у тачки *E* исеца на дужи $\overline{AB}$ тачку *D*. *D* је четврта хармонична тачка.

Доказ: Пошто E_1 лежи симетрично према тачки *E* с обзиром на $\overline{AB}$, то су луци $\widehat{BE}$ и $\widehat{BE_1}$ једнаки. Због тога су перифериски углови E_1EB и *BAE* једнаки. По ставу 66 је угао *DEB* једнак углу *BAE*, стога је једнак и углу BEE_1. Отуда следује, да $\overline{BE}$ полови угао $\overline{CED}$ а $\overline{AE}$ полови његов суплемент, зато што стоји управно на $\overline{EB}$. Због тога деле тачке *A* и *B* дуж $\overline{CD}$ хармонично.

По ставу 93 је и дуж $\overline{AB}$ хармонично подељена тачкама C и D. Тачка D је тада четврта хармонична тачка тачкама ABC.

*7 пример: Одреди полару p датој тачки P (P изван круга).



Сл. 132

Конструкција: Из тачке P повучемо тангенте t_1 и t_2 и одредимо њине додирне тачке са кругом. Спојница $\overline{T_1T_2}$ је тражена полара.

Доказ: Ако повучемо ма коју праву p кроз P, онда су по ставу 95 тачке A, B, P и Q четири хармоничне тачке. Ако се p удаљује од средишта круга, растојање $\overline{AB}$ се смањује, док не ишчезне у тангенти. Тада се каже, да се A и B поклапају с додирном тачком тангенте T_1, односно са T_2. Пошто се Q налази између A и B, поклапа се и Q с додирном тачком T_1, односно са T_2. Због тога су додирне тачке T_1 и T_2 тангената t_1 и t_2 кроз P тачке поларе.

Задаци:

1. Конструиши кроз дату тачку T, која лежи у унутрашњости угла α, праву тако, да отсечци на крацима стоје у размери $3:5$ $(m:n)$.

2. Конструиши кроз дату тачку T, која лежи ван угла α, праву тако, да отсечци на крацима стоје у размери $3:5$.

3. Конструиши кроз дату тачку T, која лежи у унутрашњости угла α, праву тако, да отсечци на правој стоје у размери $4:7$.

4. Конструиши кроз дату тачку T, која лежи изван угла α, праву тако, да отсечци на правој стоје у размери $4:7$.

5. Нацртај троуглу ABC ($a = 6$ *cm*, $b = 7$ *cm*, $c = 8{,}5$ *cm*) сличан троугао $A_1B_1C_1$ тако, да му смањиш стране у размери $3:2$ (помоћу пропорционалнога угла).

6. Конструиши троугао, које је сличан ΔABC ($a = 8$ *cm*, $b = 6$ *cm*, $c = 9$ *cm*) и има:

a) висину $v_c = 4$ *cm*

b) тежишну линију $t_b = 6$ *cm*,

c) полупречник описанога круга $r = 3{,}5$ *cm*,

č) полупречник уписанога круга $\varrho = 2{,}5$ *cm*.

7. Конструиши правоугли троугао ABC из следећих података:

* *a*) $\alpha = 60^0$ $\quad c + v = 11$ *cm*,
* *b*) $\alpha = 60^0$ $\quad c - v = 4$ *cm*,
c) $c = 7$ *cm* $\quad a : b = 5:7$,
ć) $v = 3$ *cm* $\quad a : b = 5:7$,
* *d*) $\beta = 30^0$ $\quad t_c = 3$ *cm*.

8. Конструиши равнокрак троугао ($a = b$) из:

a) $a : c = 2:3$ $\quad v_b = 4$ *cm*,
b) $t_b = 3{,}5$ *cm* $\quad \gamma = 30$ *cm*,

9, Конструиши троугао ABC, кад је дато:

a) $a = 7$ *cm* $\quad b : c = 3:5$ $\quad \alpha = 105^0$
b) $a = 8$ *cm* $\quad b : c = 3:5$ $\quad \beta = 30^0$
c) $b = \frac{4}{7}c$ $\quad \alpha = 45^0$ $\quad t_a = 7$ *cm*,
ć) $a : b : c = 4:5:6$ $\quad v_a = 6$ *cm*
* *b*) $\alpha = 105^0$ $\quad \beta = 30$ *cm* $\quad a + v_a = 11$ *cm*,
* *e*) $\beta = 75^0$ $\quad v_c : b = 4:7$ $\quad v_c + c = 8$ *cm*,
* *f*) $a : b = 3:5$ $\quad \gamma = 75^0$ $\quad c + v_c = 10$ *cm*,
* *g*) $a : b = 3:5$ $\quad \gamma = 75^0$ $\quad c - v_c = 3$ *cm*.

⑩ Упиши у кругу полупречника $r = 4$ *cm* правоугаоник, ако је размера страна правоугаоника $2:3$. (На колико начина?)

*11. Конструиши равностран троугао кад је дато:

a) $a + v = 8$ *cm*, *b*) $a + \rho = 8$ *cm*, *c*) $a + r = 8$ *cm*.

*12. Нацртај ромб, кад је дато: $e : f = 7:3$ и $v = 4$ *cm*.

13. Одреди тежиште троугла, ако једно теме троугла пада ван хартије за цртање. (Напомена: Тежишна линија полови и све паралеле стране којој припада).

14. Одреди центар описанога круга око троугла, ако једно теме пада ван хартије за цртање. (Напомена: одреди прво средине страна).

*15. Конструиши троугао, ако је дато: страна $c = 5$ *cm*, угао $\alpha = 45^0$ и размера отсечака које гради симетрала угла γ на страни c, $m : n = 5:3$.

*16. Конструиши троугао, ако је дат: полупречник описанога круга $r = 3$ *cm*, страна $a = 4$ *cm* и размера страна $b : c = 5:3$.

17. Подели дуж $\overline{AB} = 5$ *cm* хармонично у размери 3 : 2.

18. Потражи хармоничну тачку центру дате дужи.

19. Продужи дуж $\overline{AB} = 8$ *cm* за 4 *cm* и одреди унутрашњу хармоничну тачку.

20. Раздели дуж $\overline{AB} = 7$ *cm* у непрекидној размери (по златном пресеку).

*21. Упиши у кругу са полупречником $r = 5$ *cm* правоугаоник чије су стране у непрекидној пропорцији.

22. Умањи ма који многоугао у размери 3 : 2. (На колико начина?)

*23. Одреди тачки T полару с обзиром на дати круг; ако се тачка T налази, *a*) изван круга, *b*) на кругу, *c*) у кругу.

*24. Одреди правој p пол с обзиром на одређени круг:

a) права p сече круг,

b) права p додирује круг,

c) права p не сече круг.

*25. Одреди двема ма којим тачкама поларе. Шта је пресек обе поларе?

§ 122. РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ

1. У троуглу износи основица 3,5 *dm* и висина 4 *cm*; колика је висина сличнога троугла, чија основица износи 10 *dm*?

2. У троуглу износе стране 18, 24 и 30 *m*; у сличном троуглу износи најмања страна 6 *m*. Колике су остале стране?

3. Размера хомологних страна два слична троугла је 4 : 7; стране већега троугла су редом за 27, 39 и 51 *m* веће од хомологних страна мањега троугла. Колике су стране мањега троугла?

4. Растојања трију тачака у пољу јесу: $\overline{AB} = 420$ *m*, $\overline{BC} = 350$ *m* и $\overline{AC} = 300$ *m*; колике су стране тога троугла на слици, која је направљена у размери 1 : 5000?

5. На географској карти имају две тачке растојање $\overline{AB} = 134$ *mm*; колико километара износи то растојање у природи, ако је географска карта направљена у размери 1 : 75000?

6. Стрмина (пад-успон) пута је 1 : 25; колики је нагибни угао?

7. Обим троугла износи 255 *dm*; колики је обим сличнога троугла, кад је размера двеју хомологних страна 3 : 5?

8. Стране троугла износе $a = 6{,}73$ *m m*, $b = 5{,}85$ *m* и $c = 4{,}92$ *m*; колике су стране сличнога троугла, чији обим износи 105 *m*?

9. Обими два слична многоугла су 27 и 108 *dm*, ако једна страна једнога многоугла износи 5, 35 *dm*, колика је хомологна страна другога многоугла?

10. Подели дуж $\overline{AB} = 45$ *cm* хармонично у размери 3 : 2.

11. Подели дуж $\overline{AB} = 45$ *cm* по непрекидној размери.

12. Обими два слична многоугла јесу 37 и 101 *cm*. Страна првога многоугла је 6 *cm*: колика је хомологна страна другога многоугла?

§ 123. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ ПОМОЋУ АЛГЕБАРСКЕ АНАЛИЗЕ

Решење неких конструктивних задатака је најпростије, ако тражену величину најпре израчунамо и тако добијени образац тумачимо геометриски. Како се то ради, показаћемо на неколико примера.

1. Ако су a, b и c дате дужи, одреди дуж која одговара алгебарском изразу:

$$x = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Ако и леву и десну страну дате једначине помножимо са c, добијамо: $c \cdot x = a \cdot b$; $c \cdot x$ је производ спољашних чланова а $a \cdot b$ производ унутрашњих чланова те сразмере.

Отуда следује, да је x четврта геометриска пропорционала (види § 93, задатак 1).

2. $x = \dfrac{b^2}{a}$ или $a \cdot x = b^2$; отуда следује сразмера: $a : b = b : x$. x је трећа геометриска пропорционала (види § 93, задатак 2).

3. $x = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$. Нацртамо прво помоћну дуж $y = \dfrac{a \cdot b}{d}$ и потом $x = \dfrac{y \cdot c}{e}$.

*4. Упиши у делтоиду квадрат тако, да на свакој страни делтоида лежи по једно теме квадрата.

1. Подаци: Делтоид је одређен страном a и дијагоналама e и f.

2. Рачунско решење:

Из сличности троуглова ABC и I B II добијамо сразмере $e : s = a : x$ и из сличности троуглова ABD и A I IV:

$$f : s = a : (a - x).$$

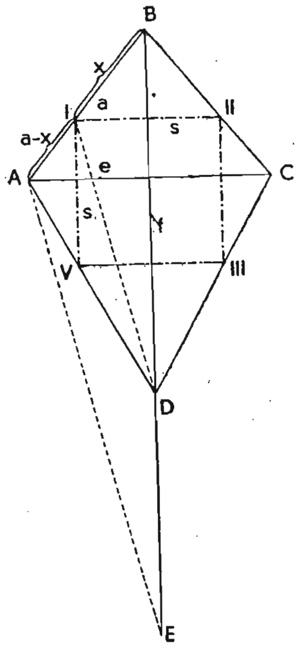
Ако из обе једначине израчунамо s, добијамо

$$s = \frac{ex}{a} = \frac{f(a - x)}{a};$$

отуда следује: $ex = fa - fx$

или $x(e + f) = fa$

и $x = \frac{fa}{e + f}$.



Сл. 133.

3. Конструкција: Продужимо дијагоналу $\overline{BD}$ за e те добијемо тачку E. E спојимо са A и повучемо кроз D паралелу, која исеца на $\overline{AB}$ теме I квадрата, чије су стране паралелне дијагоналама делтоида.

Доказ: Ако узмеме B за центар прамена, постоји сразмера:

$$(e + f) : f = a : x \text{ нли } x = \frac{af}{e + f}.$$

Задаци:

1. Конструиши дуж (израз) па упореди резултат с рачуном:

a) $x = \frac{ab}{c}$ за $a = 6\ cm$, $b = 5\ cm$ и $c = 4{,}8\ cm$;

b) $x = \frac{abc}{de}$ за $a = 6{,}2\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 4{,}8\ cm$; $d = 4{,}5\ cm$ и $e = 5{,}7\ cm$;

c) $x = \frac{a^2}{b}$ за $a = 5\ cm$ и $b = 7\ cm$.

* 2. Упиши у ромбу квадрат тако, да његова темена леже на свима странама ромба.

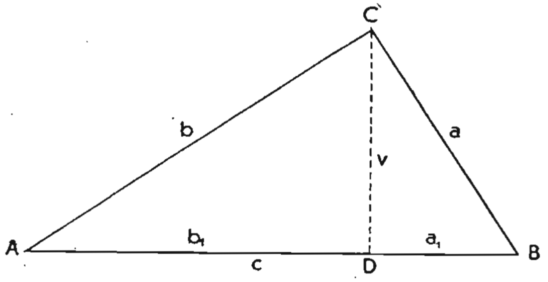
* 3. Упиши у датоме троуглу квадрат.

* 4. Основици c датога троугла повуци паралелу тако, да њена дужина буде једнака отсечку на страни b, који лежи између основице и паралеле.

XII. ПРИМЕНА СЛИЧНОСТИ НА ПРАВОУГЛОМ ТРОУГЛУ

§ 124. ЕУКЛИДОВ И ПИТАГОРИН СТАВ

Висина правоуглога троугла дели троугао на два слична правоугла троугла ADC и CDB јер имају једнаке углове на хипотенузи (став 81). Угао BAC је наиме једнак углу BCD, јер краци једнога угла стоје нормално на крацима другога угла (углови са нормалним крацима). Оба троугла су такође слични великом троуглу ABC, јер сва три имају једнаке углове.



Сл. 134.

По ставу 81 је размера двеју страна једнога троугла једнака размери хомологних страна сличнога троугла. Због сличности троуглова ABC и BCD постоји сразмера.

$$a_1 : a = a : c \text{ или } a^2 = a_1 \cdot c \qquad \text{I.}$$

и због сличности троуглова ABC и ACD постоји сразмера:

$$b_1 : b = b : c \text{ нли } b^2 = b_1 \cdot c \qquad \text{II.}$$

Ако саберемо обе једначине, добијамо:

$$a^2 + b^2 = a_1 \cdot c + b_1 \cdot c = (a_1 + b_1) \cdot c = c^2 \qquad \text{III.}$$

Сразмера с једнаким средњим члановима је непрекидна сразмера; тај средњи члан пак средња геометриска пропорционала или геометриска средина оба спољашња члана (§ 88).

Речима се једначине I и II изражавају овако:

Став 102. *Свака катета је средња геометриска пропорционала или геометриска средина хипотенузе и њене пројекције на хипотенузу* **(Еуклидов став).**

Једначину III изражавамо овако:

Став 103. *Квадрат хипотенузе је једнак збиру квадрата обе катете* **(Питагорин став).**

§ 225. СТАВ О ВИСИНИ

Због сличности троуглова ADC и CDB постоји сразмера:

$b_1 : v = v : a_1$ или $v^2 = a_1 \cdot b_1$ IV.

Став 104. *Висина је средња геометриска пропорционала или геометриска средина пројекција обе катете на хипотенузи.*

Или:

Квадрат висине је једнак производу пројекција обе катете на хипотенузу. **(Став о хипотенузиној висини).**

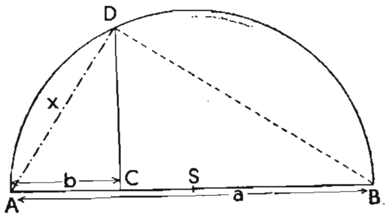
§ 126. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример. Конструиши средњу геометриску пропорционалу дужи $a = 10\,cm$ и $b = 3\,cm$ (на два начина).

Задатак напишемо овако:

$$a : x = x : b \text{ или } x^2 = a \cdot b \text{ и } x = \sqrt{ab}.$$

1. начин: *a*) Анализа: Дуж a сматрам за хипотенузу а b за пројекцију катете x на хипотенузу; катета x правоуглога троугла, који је одређен из оба податка, јесте већ решење задатка.



Сл. 135.

b) Конструкција: Опишемо над страном $\overline{AB} = a$ полукруг и пренесемо дуж b на $\overline{AB}$ тако, да је $\overline{AC} = b$ и повучемо у C нормалу на $\overline{AB}$, која сече круг у тачки D. Дуж $\overline{AD}$ је тражена средња геометриска пропорционала.

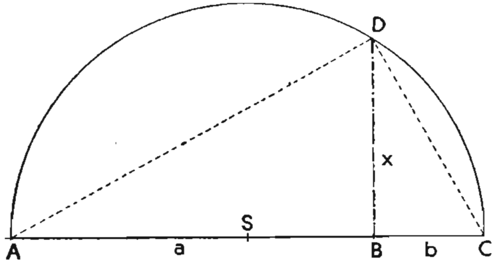
c) Доказ: Ако спојимо D са B, добијамо правоугли троугао са AB као хипотенузом. $\overline{AD}$ је катета и $\overline{AC}$ њена пројекција на хипотенузу. Због тога је $\overline{AD}$ по ставу 102 средња геометриска пропорционала дужи a и b.

č) Дискусије: Ма где узели тачку D на обиму круга, увек је троугао ADB правоугли троугао, $\overline{AD}$ тетива круга и $\overline{AC}$ пројекција те тетиве на пречник AB. Због тога добијамо:

Став 105. *Свака тетива је средња геометриска пропорционала пречника, који иде кроз њен крај и њене пројекције на тај пречник.*

2. Начин: *a*) Анализа: Дужи a и b сматрамо за пројекције обе катете на хипотенузи. Због тога је хипотенуза

једнака $a + b$. Висина x правоуглога троугла, који има за хипотенузу $a + b$ и пројекције обе катете на хипотенузи a и b, јесте решење задатка.



Сл. 136.

b) Конструкција: На праву p пренесемо дужи a и b једну поред друге, тако да је $\overline{AB} + \overline{BC} = a + b$. Одредимо средину S дужи $\overline{AC}$ и нацртамо полукруг са средиштем у S и полупречником $\overline{SA}$. Нормала у B на AC сече полукруг у тачки D, и BD је тражена средња геометриска пропорционала.

c) Доказ: Пошто се D налази на полукругу над $\overline{AC}$, троугао ADC је правоугли троугао, у којем је $\overline{AC}$ хипотенуза, $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ пројекције обе катете на хипотенузу и $x = DB$ висина. По ставу 104 је висина средња геометриска пропорционала пројекција обе катете на хипотенузу.

č) Дискусија: Ма где узели тачку D на полукругу, увек је троугао ADC правоугли троугао и нормала из D на $\overline{AC}$ висина троугла. Због тога добијамо:

Став 106. *Нормала из ма које тачке круга на пречник је средња геометриска пропорционала пречникових отсечака.*

2. пример: $x = \sqrt{5}$.

a) Анализа: $x^2 = 5$, тај израз можемо да напишемо и на ове начине: 1.) $x^2 = 2^2 + 1$, 2.) $x^2 = 3^2 - 2^2$. 3.) $x^2 = 5 \cdot 1$.

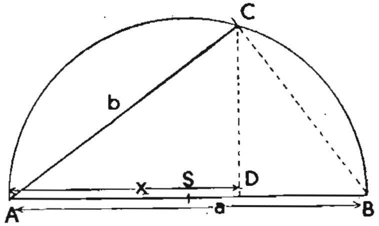
b) Конструкција: По првом начину је x хипотенуза правоуглог троугла, чије су катете 2 и 1; по другом је x катета правоуглог троугла, чија хипотенуза је 3, а друга катета је 2; по трећем је x средња геометриска пропорционала дужи 5 и 1 (види задатак 1).

3. пример: Конструиши трећу геометриску пропорционалу за дужи a и b. (Упореди § 93 задатак 2).

a) Анализа: $a : b = b : x$ или $x = \dfrac{b^2}{a}$

1. услов: $a > b$. На пример: $a = 5\,cm$ и $b = 4\ cm$.

b) Конструкција: Изаберемо a за хипотенузу правоуглог троугла, чија је катета b. Пројекција катете на хипотенузу је већ тражена трећа геометриска пропорционала x.



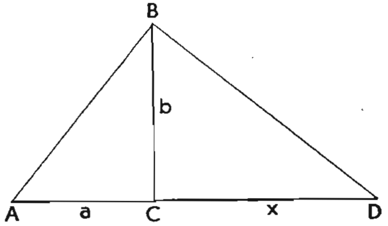
Сл, 137.

c) Доказ: Из правоуглих троуглова ACB и ADC следује сразмера хомологих страна:

$$a : b = b : x.$$

2. услов: $a < b$. На пример: $a = 2\,cm$ и $b = 2{,}5\,cm$.

b) Конструкција: Нацртамо правоугли троугао ACB с катетама a и b. У темену B повучемо нормалу на хипотенузу $\overline{AB}$, која сече продужену катету a у тачки D. $\overline{CD}$ је тражена трећа геометриска пропорционала x.



Сл. 138.

c) Доказ: Правоугли троугли ACB и BCD су слични; због тога постоји сразмера хомологних страна: $a : b = b : x$.

4. пример: Конструиши $x = \sqrt{m^2 - ab}$ за $m = 5\,cm$ $a = 5\,cm$ и $b = cm$.

Ако ставим $y^2 = ab$, добијам $x = \sqrt{m^2 - y^2}$. y је средња геометриска пропорционала дужи a и b. x је катета правоуглога троугла с хипотенузом m и катетом y.

Задаци:

1. Конструиши правоугли троугао, кад је дато:

a) $b = 4\,cm$	*b*) $a_1 = 2\,cm$	*c*) $v = 3\,cm$	*ć*) $v = 3\,cm$
$b_1 = 2{,}5\,cm$	$\beta = 75^0$	$a_1 = 5\,cm$	$\alpha = 60^0$

2. Конструиши на два начина средњу геометриску пропорционалу.

a) за стране правоугаоника $a = 3\,cm$ и $b = 2\,cm$,

b) за дужи $a = 3\,cm$ и $b = 6\,cm$,

c) за дужи m и $\frac{m}{3}$ $(m = 5\,cm)$.

3. У правоуглом троуглу износе отсечци на хипотенузи 12,2 m и 8,4 m; колике су катете?

4. У правоуглом троуглу износи једна катета 21,4 dm и висина 17,5 dm; израчунај другу катету и хипотенузу.

5. Висина троугла износи 150 cm и дели основицу на отсечке 56 cm и 110 cm; колике су стране?

6. Колика је висина равностранога троугла, ако је страна $a = 7\ cm$?

7. У равностраном троуглу је висина $v = 7{,}5\ dm$; колико је страна?

8. Колики су полупречници равностраном троуглу са страном $a = 15\ cm$ описанога и уписанога круга?

9. У троуглу износе две стране 17 cm и 14 cm и угао, који оне заклапају, је 60^0. Колика је трећа страна?

10. Колика је квадратова дијагонала, ако страна износи 85 cm?

11. Колика је страна ромба, ако дијагонале износе $e = 240\ cm$ и $f = 360\ cm$?

12. У правоугаонику износи једна страна 75 cm, друга страна је за 25 cm краћа од дијагонале. Колика је друга страна?

13. У кругу с полупречником 62 cm износи тетива 80 cm, колико је њено средишно растојање?

14. Колика је страна квадрата који је уписан у кругу с полупречника $r = 7{,}2\ cm$?

15. Конструиши следеће изразе па провери резултате рачуном:

a) $x = \sqrt{m^2 - ab}$ за $m = 7{,}5\ cm$, $a = 5{,}5\ cm$ и $b = 3{,}2\ cm$;

b) $x = \dfrac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ за $a = 6\,cm$ и $b = 4\,cm$;

c) $x = \dfrac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}$ за $a = 6\,cm$ и $b = 4\,em$;

ć) $x = \dfrac{m \cdot n}{6}$ за $m = 11$ и $n = 5$;

* *d*) $x = \dfrac{a\,(a + b)}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ за $a = cm$ и $b = 4\,cm$.

* *e*) $x = \sqrt{\dfrac{a^2b}{c}}$ за $a = 6\ cm$, $6 = 4\ cm$ и $c = 3\ cm$

16. Реши конструкцијом и рачуном:

a) $x = \sqrt{7}$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{15}$

* b) $x = a(\sqrt{7} - 2)$ за $a = 2\ cm$; стави за $a\sqrt{7} = \sqrt{7a^2} = y$.

* c) $x = a(\sqrt{11} - 2)$ за $a = 15\ cm$

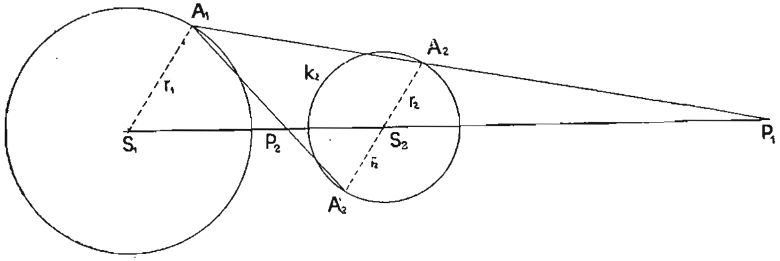
* č) $x = a(4 - \sqrt{8})$ за $a = 2\ cm$.

XIII. ПРИМЕНА СЛИЧНОСТИ НА КРУГУ

§ 127. СЛИЧНОСТ КРУГОВА

Став 107. *Два круга су увек слична и леже у перспективном положају.*

Доказ:



Сл. 139.

Узмимо два круга k_1 и k_2 с полупречницима r_1 и r_2 и средиштима S_1 и S_2. У оба круга повуцимо паралелне полупречнике ($\overline{S_1A_1} \| \overline{S_2A_2}$). Због тога су троугли $P_1S_1A_1$ и $P_2S_2A_2$ слични и постоји размера:

$$r_1 : r_2 = \overline{P_1S_1} : \overline{P_1S_2}$$

Ако средишно растојање обележимо са c, тада је $P_1S_2 = = P_1S_1 - c$.

$$r_1 : r_2 = \overline{P_1S_1} : (\overline{P_1S_1} - c)$$

Множењем унутрашњих и спољашњих чланова сразмере је:

$$r_1 \cdot \overline{P_1S_1} - cr_1 = r_2 \cdot \overline{P_1S_1} \text{ или}$$

$$(s_1 - r_2) \cdot \overline{P_1S_1} = cr_1 \text{ и}$$

$$\overline{P_1S_1} = \frac{cr_1}{r_1 - r_2}.$$

Отуда следује, да је растојање $\overline{P_1S_1}$ зависно само од полупрчника и средишног растојања оба круга, а није зависно од положаја тачака A_1 и A_2.

Ако тачка A_1 обилази круг k_1, обилази због паралелности одговарајућих полупречника и тачка A_2 круг k_2. Кругови k_1 и k_2 леже у прамену зрака с центром у P_1 тако, да су отсечци хомологних тачака пропорционални. Тачку P_1 зовемо спољна тачка сличности оба круга.

Продужимо $\overline{A_2S_2}$ на супротну страну тако, да добијамо $\overline{S_2A'_2} = r_2 \| r_1$ и спојимо A_1 са A_2'. Троугли $S_1P_2A_1$ и $S_2P_2A_2'$ су слични и добијамо:

$$r_1 : r_2 \cdot = \overline{P_2S_1} : \overline{P_2S_2} = \overline{P_2S_1} : c - \overline{P_2S_1}$$

$$r_1\, c - r_1 \cdot \overline{P_2S_1} = r_2\, \overline{P_2S_1}$$

$$r_1\, c = \overline{P_2S_1}\ (r_1 + r_2)$$

$$P_2S, = \frac{cr_1}{r_1 + r_2}$$

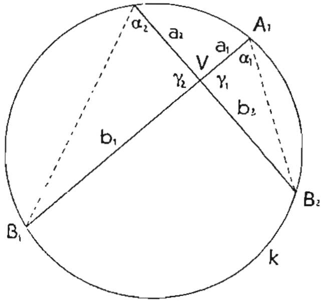
Отуда опет следује да је растојање $\overline{P_2S_1}$ зависно само од полупречника и средишног растојања оба круга, није пак зависно од положаја хомологних тачака A_1 и A_2' на круговима. Тачку P_2 зовемо унутрашња тачка сличности оба круга.

§ 128. КРУГ И ПРАМЕН

Став 108. *Ако прамен зрака пресечемо кругом, онда је производ отсечака на сваком зраку (рачунат од темена) сталан или константан.*

Доказ:

1. Центар (теме) прамена се налази у кругу.



Сл. 140.

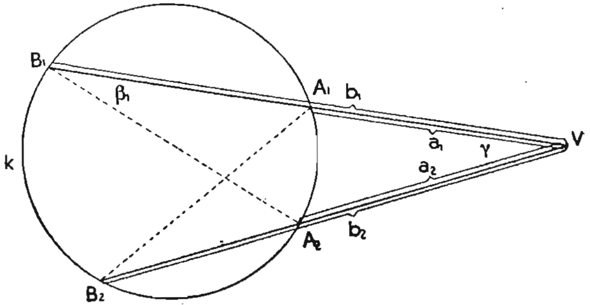
V нека буде теме, а $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ две ма које праве прамена, који је пресечен кругом k. Отсечци на правима су a_1, b_1 и a_2, b_2. Ако спојимо A_1 са B_2 и A_2 са B_1, добијамо два слична троугла $VA_1\ B_2$ и VA_2B_1 по 1∞, зато што су углови α_1 и α_2 једнаки (периферски углови над истим луком $\widehat{B_1B_2}$) и угао γ_1 је једнак углу γ_2 (унакрсни углови). Због сличности оба троугла је размера двеју страна једнога троугла једнака размери хомологних странг другога троугла и добијамо сразмеру: $a_1 : b_2 = a_2 : b_1$ или $a_1b_1 = a_2b_2$, што је требало доказати.

2. Центар прамена се налази на обиму круга.

У том примеру је један отсечак једнак нули и производи

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = 0.$$

3. Центар прамена се налази изван круга:

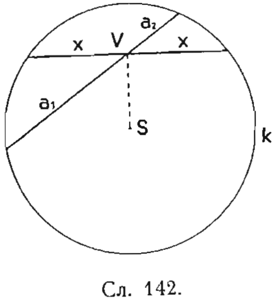


Сл. 141.

V нека буде теме и $\overline{A_1 B_1}$ и $\overline{A_2 B_2}$ два ма која зрака прамена, који је пресечен кругом k. Троугли $VA_1 B_2$ и $VA_2 B_1$ су слични, по 1 ∾ зато што су углови β_1 и β_2 једнаки као периферијски углови над истим луком $\widehat{A_1 A_2}$ а угао γ је за оба троугла заједнички. Због сличности оба троугла добијамо сразмеру хомологних страна: $a_1 : b_2 = a_2 : b_1$ или $a_1 b_1 = a_2 b_2$, што је требало доказати.

Додаци:

1. Од свих тетива кроз дату тачку V у кругу најмања је она, која стоји управно на средишном растојању (став 57).



Сл. 142.

У том примеру су оба отсечка једнака и добијамо:

$$x^2 = a_1 a_2.$$

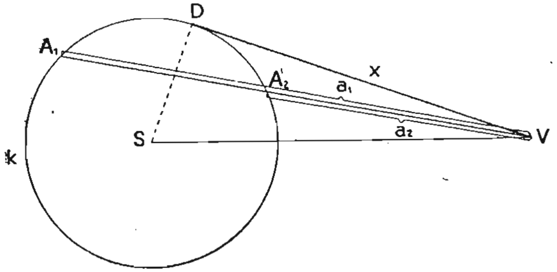
Отуда следује:

Став 109. *Половина најмање тетиве је средња геометриска пропорционала отсечака сваке тетиве, која иде кроз средину те најмање тетиве.*

Исто се може и овако изразити: *Потенција тачке у кругу је једнака квадрату половине најмање тетиве кроз ту тачку.*

2. Ако сматрамо тангенту за секанту, код које су здружена оба пресека с кругом у додирној тачки тангенте постоји

$$x^2 = a_1 a_2$$



Сл. 143.

Отуда следује:

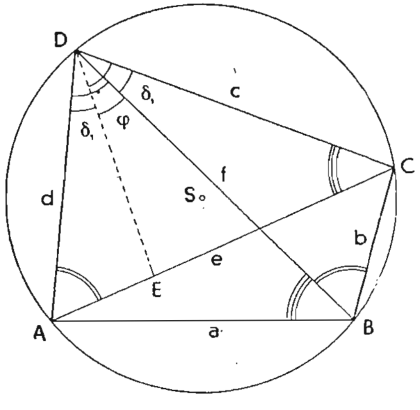
Став 110. *Тангентни отсечак је средња геометриска пропорционала отсечака сваке секанте, која иде кроз дату тачку ван круга.*

Исто се може и овако изразити: *Потенција тачке ван круга је једнака квадрату тангентних отсечака из те тачке на круг.*

§ 129. ПТОЛОМЕЈЕВ СТАВ

Став 111. *У сваком тетивном четвороуглу је производ дијагонала једнак збиру производа оба пара супротних страна.*

Доказ: Повуцимо $\overline{DE}$ тако, да је угао ADE једнак углу BDC. Угао DBC је једнак углу DAC, зато што су периферијски углови над луком $\widehat{DC}$. Због тога су троугли BDC и ADE по 1 ∾ слични и постоји сразмера хомологних страна: $x : d = b : f$ или $fx = bd$ 1.



Сл. 144.

Троугао CDE је сличан троуглу BDA по 1 ∾, зато што су углови DCA и DBA једнаки (периферијски углови над луком $\widehat{AD}$) а такође и углови EDC и ADB су једнаки $(\varphi + \delta_1)$, Због тога постоји сразмера хомологних страна.

$$(e - x) : c = a : f \text{ или } (e - x) f = ac \qquad 2.$$

Сабирањем једначина 1. и 2. добијамо:

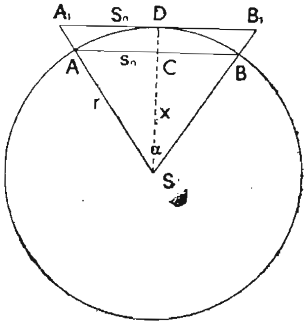
$$fx + (e - x) f = ac + bd \text{ или}$$

$$ef = ac + bd,$$ што је требало доказати.

Напомена: Ако тетивни четвороугао пређе у правоугаоник, добијамо Питагорин став.

§ 130. ПРАВИЛНИ МНОГОУГАО

По ставу 49 је средиште круга уједно и средиште правилнога многоугла, који је кругу описан или уписан. Све симетрале углова и страна секу се у средишту круга. У кругу k нацртамо средишни угао $\alpha = \frac{360^0}{n}$, где n значи ма који цео број. Краци секу круг у тачкама A и B и тетива је страна s_n правилнога n-угла, који је уписан у кругу. Тетиви паралелна тангента $\overline{A_1B_1}$ је страна S_n правилнога n-угла, који је око круга описан. Ако спојимо додирну тачку D стране $\overline{A_1B_1}$ са средиштем круга, стоји њена спојница управно на $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{AB}$ и полови их. Троугли SCA и SDA_1 јесу правоугли и слични троугли. Обележимо $\overline{SC}$ са x, $\overline{AC}$ (половину стране уписанога n-угла) са $\frac{s_n}{2}$ и $\overline{A_1D}$ (половину стране описанога n-угла) са $\frac{S_n}{2}$, добијамо сразмеру:



Сл. 145.

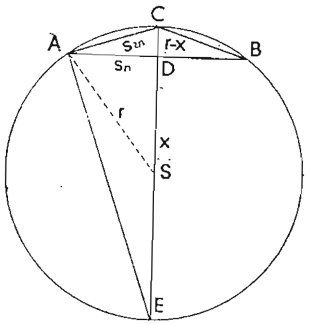
$$\frac{S_n}{2} : \frac{s_n}{2} = r : x \text{ или, пошто је } x = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2},$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2} \text{ и}$$

$$S_n = \frac{r \cdot s_n}{\sqrt{r_2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$$

---

§ 131. ОБИМ n-УГЛА И 2n-УГЛА КОЈИ СУ У КРУГУ УПИСАНИ



Сл. 146.

Страна уписанога n-угла је $\overline{AB} = s_n$ и страна $2n$-угла $\overline{AC} = s_{2n}$. Ако повучемо пречник $\overline{CE}$ и спојимо A са E, тада је троугао CAE правоугли троугао и употребом става 105 добијамо:

$$s_{2n}^{\;2} = \overline{CE} \cdot \overline{CD} = 2r (r - x).$$

Из троугла ADS израчунамо:

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{s_n^{\;2}}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^{\;2}}{r^2}}$$

Ставимо добијени образац у горњу једначину:

$$s_{2n}^{\;2} = 2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{4 - \frac{s_n^{\;2}}{r^2}}\right) = r^2\left(2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^{\;2}}{r^2}}\right) \text{ и}$$

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^{\;2}}{r^2}}}$$

Из троугла ABC видимо да је $2s_{2n} > s_n$.

Обележимо обим n-угла са o_n и $2n$-угла са o_{2n}, тада је $o_n = n \cdot s_n$ и $o_{2n} = 2n \cdot s_{2n}$. Ако у другој једначини заменимо фактор $2s_{2n}$ мањим фактором s_n, добијамо производ $n \cdot s_n$ који је мањи од производа $2n \cdot s_{2n}$. Пошто први производ значи обим n-угла, а други пак $2n$-угла, добијамо:

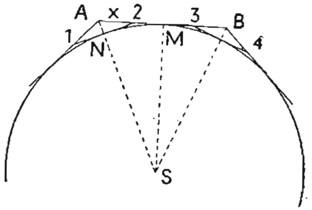
Став 112. *Обим правилнога уписанога n-угла је мањи од обима правилнога $2n$-угла, који је уписан у истом кругу.*

§ 132. ОБИМ n-УГЛА И 2n-УГЛА КОЈИ СУ ОПИСАНИ ОКО КРУГА

Стране n-угла су: $\overline{AB}$, $\overline{BC} \ldots = S_n$. Стране $2n$-угла су: $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}, \ldots = S_{2n}$ и обими: O_n и O_{2n}.

$$\frac{S_n}{2} = \overline{MA} = \frac{S_{2n}}{2} + x$$

x је хипотенуза правоуглога троугла $AN2$, чија је катета $\overline{N2} = \frac{S_{2n}}{2}$. Због тога је $x > \frac{S_{2n}}{2}$ и $\frac{S_n}{2} > \frac{S_{2n}}{2} + \frac{S_{2n}}{2} = S_{2n}$.



Сл. 147.

Из једначина $O_n = n \cdot S_n$ и $O_{2n} = 2n \cdot S_{2n}$ следује, ако ставимо за S_{2n} већи фактор $\frac{S_n}{2}$, да је O_n веће од O_{2n}. То изражавамо овако:

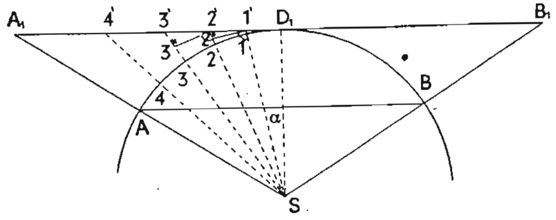
Став 113. *Обим правилнога описанога 2n- угла је мањи од обима правилнога n- угла, који је око истог круга описан.*

§ 133. ОБИМ КРУГА

По ставу 112, обими n, $2n$, $4n$, $8n$ . . . — угла, који су уписани у истом кругу, повећавају се и обрнуто се по ставу 113 обими n, $2n$, $4n$, $8n$ . . . — угла, који су око круга описани, смањују. Разлика између обима око истог круга описанога и у њему уписанога правилнога n- угла постаје све незнатнија кад број страна n расте, док скоро потпуно не ишчезне. Кажемо, да се оба обима ближе некој граници (limes). Та граница је једнака кружном обиму.

Доказ: $\overline{AB}$ је тетива круга, $\overset{\frown}{AB}$ је лук круга и $\overline{A_1B_1}$ је тангента круга.

1. Тетива $\overline{AB}$ је стално мања од одговарајућег лука $\overset{\frown}{AB}$, зато што је најкраће растојање две тачке.



Сл. 148.

2. Да је тангента $\overline{A_1B_1}$ већа од лука $\overset{\frown}{AB}$, доказујемо овако: Тангента $\overline{A_1B_1}$ је додирном тачком подељена на два једнака дела $\overline{A_1D_1}$ и $\overline{B_1D_1}$. Исто тако је и лук $\overset{\frown}{AB}$ тачком D_1 преполовљен.

Поделимо лук $\overset{\frown}{AD_1}$ на k једнаких делова (на пример на 5 делова) и повуцимо кроз деоне тачке полупречнике. Добијамо k троуглова, који имају једнаке углове при врху S. Ако нацртамо кроз $1'$ управну на $\overline{1'S}$ добијамо правоугли троугао $S1'2''$, који је сличан правоуглом троуглу SD_11' (1$\backsim$). Пошто је катета $\overline{S1'}$ већа од хомологне катете $\overline{SD_1}$ у сличном троуглу, то је и катета $\overline{1'2''}$ већа од хомологне катете $\overline{D_11'}$. У троуглу $1'2'2''$ је угао код $2''$ туп угао, зато што је суплементни угао оштрога угла. Због тога је $\overline{1'2'}$ највећа страна у троуглу $1'2'2''$ и добијамо:

$$\overline{1'2'} > \overline{1'2''} > \overline{D_11'}.$$

На сличан начин се може доказати да је

$$\overline{2'3'} > \overline{1'2'}$$
$$\overline{3'4'} > \overline{2'3'}$$
$$.$$
$$.$$

Отуда следује да се отсечци на тангенти постепено повећавају, уколико се више удаљујемо од додирне тачке.

За врло мало α, може се лук заменити тетивом $\overline{D_1 1}$. Добијамо равнокрак троугао $SD_1 1$. Углови на основици су једнаки и оштри. Због тога је суплементни угао на темену 1 туп угао и њему наспрамна страна $\overline{D_1 1'}$ је најдужа страна троугла $D_1 1' 1$. Стога је $\overline{D_1 1'} > \overline{D_1 1} \doteq \overset{\frown}{D_1 1}$.

Пошто су сви луци с обзиром на основице у свима троуглима једнаки, добијамо:

$$\overset{\frown}{D_1 1} < \overline{D_1 1'} < \overline{1'2'} < \overline{2'3'} < \ldots \overline{(k-1)'A_1} \text{или}$$
$$\overset{\frown}{AD_1} = k.\overset{\frown}{D_1 1} < \overline{D_1 1'} + \overline{1'2'} + \overline{2'3} + \ldots \overline{(k-1)'A_1} = \overline{A_1D_1} \quad \text{или}$$
$$\overset{\frown}{AB} < \overline{A_1B_1}, \text{ што је требало доказати.}$$

3. Ако је $\overline{AB}$ страна уписанога, $\overline{A_1B_1}$ пак страна описанога правилнога n-угла, тада важи за ма како велико n однос:

$$n.\ \overline{AB} < n.\ \overset{\frown}{AB} < n.\overline{A_1B_1} \quad \text{или}$$
$$o_n < o < O_n$$

Став 114. *Обим круга је већи од обима уписанога и мањи од обима описанога правилнога n-угла.*

§ 134. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ОБИМА КРУГА (РЕКТИФИКАЦИЈА)

При израчунавању обима круга почнимо с ма којим правилним многоуглом. Из практичних разлога изаберимо правилни 6-угао, који је уписан у кругу, зато што је страна $s_6 = r$. Затим израчунавамо по óбрацу $s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n{}^2}{r^2}}}$ редом s_{12}, s_{24}, s_{48}, s_{96}, s_{192}, s_{384}, s_{768}, s_{1536} . . . Тако је обим o_n за 1536-угао једнак $3{,}141590 \cdot 2r$. Потом израчунамо по обрацу

$$S_n = \frac{r \,.\, s_n}{\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$$

страну описанога 1536 угла око круга и добијамо обим $O_n = n \cdot S_n = 3{,}141597 \cdot 2\,r$. Разлика $O_{1536} - o_{1536} = 0{,}000007 \cdot 2\,r$. Обим круга је стога већи за највише $0{,}000007 \cdot 2\,r$ од обима уписанога 1536-угла или мањи за исто толико од обима описанога 1536-угла.

За круг полупречника $r = 100\,m$ износи разлика између обима описанога и уписанога 1536-угла $0{,}0014\,m$ или $1{,}4\,mm$. Аритметичка средина оба обима даје приближно дужину обима круга и износи 618,3187 m, која се разликује од праве дужине највише за неколико десетина милиметара.

Обим круга износи стога:

$$o = 2\,r \cdot 3{,}14159\ldots$$

Број 3,14159..., обележавамо грчким словом π (почетно слово „периферије“, који се зове Лудолфов број. Зато пишемо горњу једначину најпростије овако:

$$o = 2\,\pi\,r.$$

Став 115. *Обим круга је једнак производу пречника и Лудолфовог броја.*

Напомена: Први који је одредио π на научној основи био је Архимед. Он је нашао при израчунавању обима описанога и уписанога 96-угла, да се вредност π налази између $3\frac{10}{70}$ и $3\frac{10}{71}$, што даје претворено у децималан број 3,14... Пошто је често довољно да се узме за $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, нарочито, ако је полупречник круга мали, зовемо број $\frac{22}{7}$ Архимедова размера, размера између обима и пречника круга.

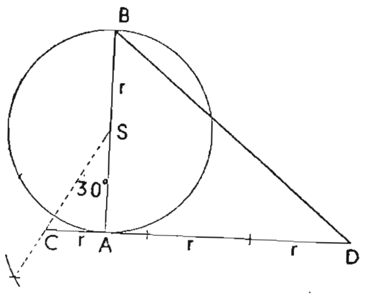
Ludolf van Ceulen је израчунао око године 1600 број π по Архимедовој методи на 35 децимала.

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288...

Помоћу више математике се да Лудолфов број релативно лако израчунати с произвољним бројем децимала. Доказано је, да тај број има бескрајно много децимала и да није периодичан. Кажемо, да је π ирационалан број.

* § 135. ОДРЕЂИВАЊЕ ОБИМА КРУГА КОНСТРУКЦИЈОМ

Најбољи познати начин одређивања обима круга конструкцијом је начин „Коханског“. (Види слику 149).



Сл. 149.

Конструкција: Повуци ма који пречник $\overline{AB}$ и постави у тачки A тангенту на круг. Пресеци ту тангенту правом кроз средиште круга, која чини са AB угао 30°. Од пресечне тачке C пренеси $3\,r$ до тачке D и спој D са B. $\overline{DB}$ је половина кружнога обима.

Доказ: Троугао CAS је половина равностранога троугла; зато је $\overline{CS} = 2\overline{AC}$ и $r^2 = \overline{CS}^2 - \overline{AC}^2 = 4.\overline{AC}^2 - \overline{AC}^2 = 3\,.\,\overline{AC}^2$. Отуда следује, да је $\overline{AC} = \frac{r}{\sqrt{3}}$. У правоуглом троуглу BAD је $BA = 2\,r$ и катета

$$\overline{AD} = \overline{CD} - \overline{CA} = 3r - \frac{r}{\sqrt{3}} = r\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = r\frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

Хипотенуза $\overline{BD} =$

$$= \sqrt{4r^2 + r^2\,\frac{(3\sqrt{3} - 1)^2}{3}} = r\sqrt{\frac{12 + 27 - 6\sqrt{3} + 1}{3}} =$$

$$= r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r\sqrt{\frac{40 - 6\,.\,1{,}73205}{3}} = r\sqrt{\frac{40 - 10{,}39230}{3}} =$$

$$= r\sqrt{\frac{29{,}60770}{3}} = r\sqrt{9{,}86923} = r\,.\,3{,}14153 \doteq r\,.\,\pi$$

Тачност конструкције:

Узмимо круг полупречника $r = 10\,m$.

По рачуну добијамо $\frac{o}{2} = r\,.\,\pi = 31{,}4159\,m$

по конструкцији $\frac{o}{2} = 31{,}4153\,m$

Разлика $= 0{,}0006\,m$ или $0{,}6\,mm$.

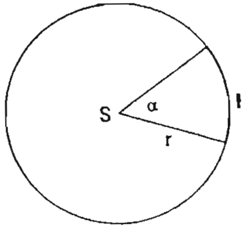
Видимо, да је тачност изванредна, пошто још код круга с полупречником од десетине метара износи разлика у обимима, које одређујемо рачунским, односно конструктивним путем, једва 1,2 mm.

§ 136. ДУЖИНА ЛУКА

Дужина лука l је код једнаких полупречника сразмерна средишном углу α; због тога постоји сразмера:

$$360^0 : \alpha = 2\pi r : l \quad \text{и}$$

$$l = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^0} = \frac{\pi r \cdot \alpha}{180^0}$$

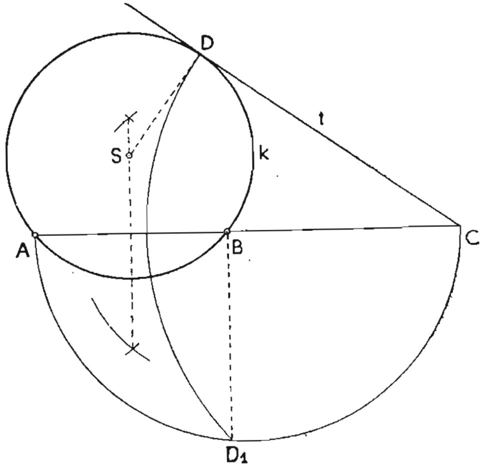


Сл. 150.

§ 137. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. пример: Конструиши круг, који је дат тангентом t и двема тачкама A и B.

a) Анализа: По ставу 110 је тангентни отсечак $\overline{CD}$ средња геометриска пропорционала тетивних отсечака $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. $\overline{CD}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{CD_1}^2$. Круг мора додиривати тангенту t у тачки D. Средиште круга се налази на нормали на тангенту у тачки додира D и на симетрали тетиве $\overline{AB}$.



Сл. 151.

b) Конструкција: Спојимо тачке A и B и одредимо пресечну тачку C њихове спојнице с тангентом t; над $\overline{AC}$ као над пречником нацртамо полукруг и поставимо у B нормалу, која га сече у тачки D_1 па направимо растојање $\overline{CD}$ на тангенти t једнако $\overline{CD_1}$. Нормала у тачки D и симетрала дужи $\overline{AB}$ секу се у средишту S траженога круга k, чији полупречник је $\overline{SD} = \overline{SA} = \overline{SB}$.

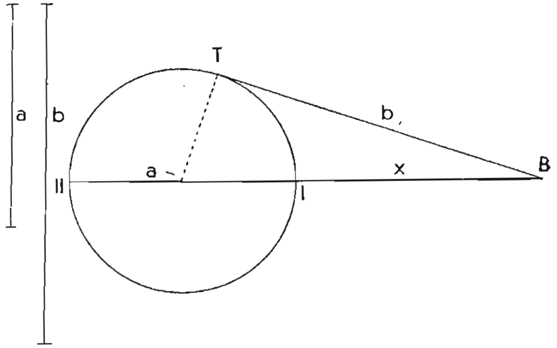
c) Доказ следује из анализе и конструкције.

č) Детерминација: Задатак има само једно решење.

* 2. пример: Реши једначину $x^2 + ax - b^2 = 0$, где су a и b дате дужи.

a) Анализа: Пишемо једначину у облику: $x(x + a) = b^2$, b је средња геометриска пропорционала између x и $(x + a)$.

b) Конструкција: Нацртамо круг пречника a и повучемо у ма којој тачки T обима круга тангенту t, на коју пренесемо дуж $b = \overline{TB}$. B спојимо са средиштем круга, тако да та права сече круг у тачкама I и II. Дуж $\overline{IB} = x$.



Сл. 152.

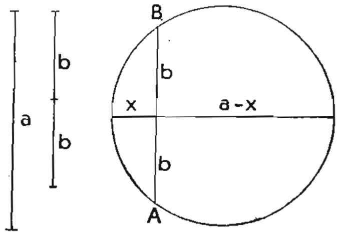
c) Доказ: По ставу 110 је: $x(a + x) = b^2$.

č) Детерминација: Задатак увек има једно решење.

* 3. пример: Реши једначину $x^2 - ax + b^2 = 0$, где a и b значе дужи.

a) Анализа: Напишемо једначину у облику: $x(a - x) = b^2$

b) Конструкција: Конструишемо круг пречника a и пренесемо тетиву $AB = b$. Управни пречник на тетиви има отсечке x и $a - x$, чији производ је $x(a - x) = b^2$ (по ставу 109).



Сл. 153.

c) Детерминација: Задатак је могуће решити само, кад је $2b < a$.

Задаци:

1. Упиши у полукругу пречника $2r = 6$ *cm* квадрат (на два начина).

* 2. Упиши у кругу полупречника $r = 4$ *cm* крст, који је састављен од пет квадрата („црвени крст“) *a*) помоћу алгебарске анализе, *b*) помоћу сличне помоћне слике.

3. Ако продужиш пречник некога круга за $4m$, износи тангента из те тачке на круг $8m$; колики је пречник круга?

4. Одреди на продужењу пречника круга тачку тако, да је тангента из те тачке на круг једнака пречнику.

5. Конструиши круг, који је дат једном тачком и двема тангентама (на два начина).

* 6. Реши једначину $x^2 - a\,x - b^2 = 0$.

* 7. Конструиши из одређене тачке ван круга секанту тако, да је обим круга преполови.

* 8. Изведи из Птоломејевога става Питагорин став.

9. По § 117 је страна правилнога десетоугла $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Израчунај страну правилнога петоугла.

10. Докажи, да постоји једначина: $s_5^2 + s_{10}^2 = r^2(s_6^2)$.

11. Израчунај полупречник из дате стране n-угла, који је око круга описан или у кругу уписан.

12. Израчунај обиме o_n уписанога и O_n описанога правилнога многоугла за a) $n = 6$, 12 и 24, и b) $n = 4$, 8, 16 и 32, као функције полупречника r.

13. Колики пут пређе точак с пречником 1,2 m после 1000 обрта?

14. Колико пута се обрне точак с пречником 70 cm на 25 km дугом путу?

15. Обим земље износи 40000 km; колики је полупречник?

16. Израчунај, колика је 1 лучна секунда земљинога меридијана.

17. Колики је полупречник круга, чија је лучна секунда 1 mm?

18. Колики је полупречник круга, чији 1^g је 1 cm?

19. Колики је средишни угао исечка круга, ако је његов обим једнак обиму круга?

XIV. ПОВРШИНЕ РАВНИХ СЛИКА

§ 138. МЕРЕЊЕ ПОВРШИНА

Површину меримо, кад испитамо колико пута се површина, коју сматрамо за јединицу, садржи у другој површини. Број n, који нам то казује, је мерни број. Он може бити цео

број, разломак или ирационалан број. Цео број је тада, кад се површинска јединица садржи у датој површини n пута без остатка, разломак, када обе површине имају заједничку меру, и ирационалан број, кад немају заједничке мере.

За површинске јединице узимамо обично квадрате, чије су стране једнаке дужинским јединицама: 1 km, 1 m, 1 cm, 1 mm, зовемо их квадратни километар (km^2), квадратни метар (m^2), квадратни десиметар (dm^2), квадратни сантиметар (cm^2) и квадратни милиметар (mm^2).

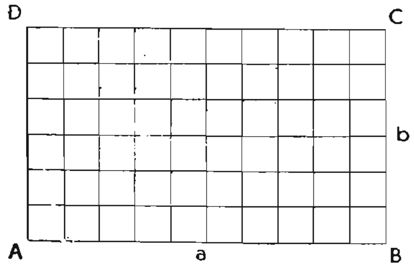
Површине слика се ретко кад дају непосредно измерити површинским јединицама. Због тога су нам потребна правила, по којима израчунавамо мерни број површине слике помоћу мерних бројева дужи, од којих зависи.

Површину слике обележаваћемо са „p".

§ 139. ПОВРШИНА ПРАВОУГАОНИКА

Став 116. *Површина правоугаоника је једнака производу мерних бројева двеју оближњих страна или производу основице и висине.*

Доказ: 1. пример: мерни бројеви основице и висине су цели бројеви. На пример $a = 10$ и $b = 6$.



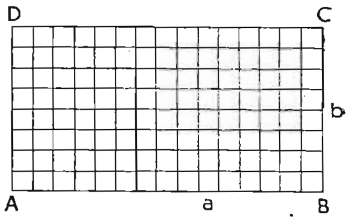
Сл. 154.

Пренесимо на основици $\overline{AB}$ a и на висини $\overline{AD}$ b дужинских јединица и повуцимо кроз деоне тачке паралеле другој страни правоугаоника. Тако раздељујемо правоугаоник на $a \cdot b$ површинских јединица (квадрата). Због тога је површина правоугаоника $p = a \cdot b$, тј. мерни број површине правоугаоника је једнак производу мерних бројева основице и висине (дужине и ширине).

2. пример: мерни бројеви a и b су разломци. Доведемо оба разломка на исти именилац, тако да је

$$a = \frac{\alpha}{n} \text{ и } b = \frac{\beta}{n}$$

На слици је $a = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$ и $b = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$.



Сл. 155.

Стране површинске јединице (квадрата) поделимо на n делова. Паралелне странама кроз деоне тачке деле квадрат на n^2 мањих квадрата. Због тога је површина свакога малога квадрата једнака $\frac{1}{n^2}$ површинских јединица. Потом пренесемо страну мањега квадрата на $\overline{AB}$ α-пута и на $\overline{AD}$ β-пута, при чему не добијамо никакав остатак, пошто је $\frac{1}{n}\cdot\alpha = a$ и $\frac{1}{n}\cdot\beta = b$. Ако опет повучемо кроз деоне тачке паралеле другој страни правоугаоника, добијамо $\alpha\cdot\beta$ квадрата, од којих је сваки n^2 део површинске јединице. Због тога је површина правоугаоника $p = \alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{\alpha}{n}\cdot\frac{\beta}{n} = a\cdot b$, што је требало доказати.

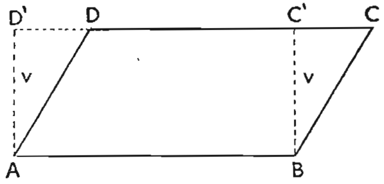
3. пример: Кад стране правоугаоника немају заједничку меру, може се на сличан начин израчунати површина правоугаоника приближном тачношћу.

Став 117. *Површина квадрата је једнака другом степену његове стране:* $p = a^2$.

Доказ: Из обрасца за површину правоугаоника $p = ab$ следује, ако ставимо за $b = a$, површина квадрата $p = a^2$.

§ 140. ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Став 118. *Површина паралелограма је једнака производу основице и висине* $p = o\cdot v$.



Сл. 156.

Доказ: У паралелограму је страна $\overline{AB}$ основица и v висина, Ако повучемо у теменима A и B управне $\overline{AD'}$ и $\overline{BC'}$, добијамо подударне правоугле троугле ADD' и BCC' (по I, II или III $\cong$). Паралелограм $ABCD$ је површински једнак правоугонику $ABC'D'$, зато што је отсечени троугао $AC'C$ једнак троуглу $AD'D$, који смо додали. Површина правоугаоника је $o\cdot v$, стога је и површина паралелограма једнака $o\cdot v$.

Став 119. *Паралелограми с једнаким основицама и једнаким висинама једнаки су по површини.*

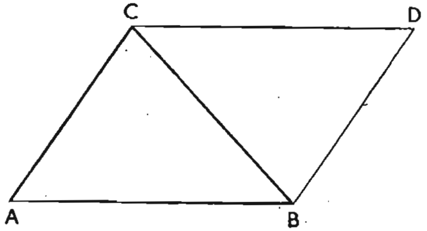
Доказ следује непосредно из пређашњег става.

§ 141. ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Став 120. *Површина троугла је једнака половини производа основице и висине:*

$$p = \frac{a\cdot v_a}{2} = \frac{b\cdot v_b}{2} = \frac{c\cdot v_c}{2} \text{ или краће } p = \frac{o\cdot v}{2}.$$

Доказ: Троугао је половина паралелограма, који има исту основицу и висину.



Сл. 157.

Последице: 1. Троугли с једнаким основицама и једнаким висинама површински су једнаки.

2. Површина правоуглог троугла је једнака половини производа обе катете.

3. Површина ромба је једнака половини производа обе дијагонале.

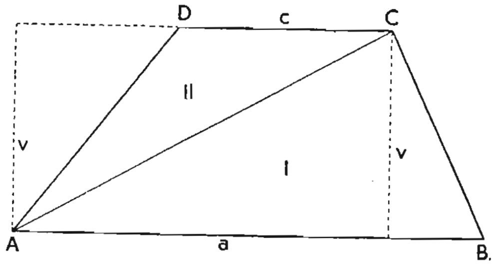
4. Површина делтоида је једнака половини производа обе дијагонале. (Докажи).

§ 142. ПОВРШИНА ТРАПЕЗА

Став 121. *Површина трапеза је једнака производу средње линије и висине (или производу полузбира обе паралелне стране и висине).*

Доказ: (види слику 158).

Дијагонала $\overline{AC}$ дели трапез на два троугла који имају основице a и c и једнаке висине. Површина првога троугла је



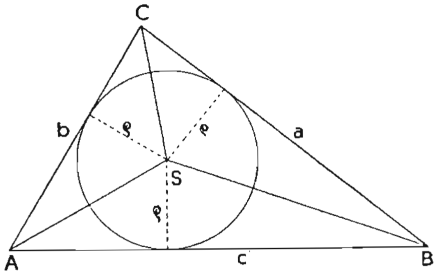
Сл. 158.

$p_{\text{I}} = \frac{a\,.\,v}{2}$ и другога $p_{\text{II}} = \frac{c\,.\,v}{2}$. Због тога је површина трапеза

$$p = \frac{a\,.\,v}{2} + \frac{c\,.\,v}{2} = v\,.\,\frac{a+c}{2}.$$

Пошто је средња линија $s = \frac{a+c}{2}$, пишемо образац за површину и овако: $p = \frac{s\,.\,v}{2}$.

§ 143. ПОВРШИНА ТРОУГЛА, АКО ЈЕ ДАТ ОБИМ ТРОУГЛА И ПОЛУПРЕЧНИК УПИСАНОГА КРУГА



Сл. 159.

Став 122. *Површина троугла је једнака половини производа обима троугла и полупречника уписанога круга.*

Доказ: Ако спојимо средиште уписанога круга с теменима A, B и C, добијамо три троугла, који имају једнаке висине. Површина троугла ABC је:

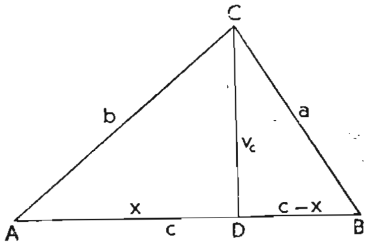
$$p = \frac{a\,\rho}{2} + \frac{b\,\rho}{2} + \frac{c\,\rho}{2} = \frac{a+b+c}{2}\,\rho = \rho\, s,$$

где s значи половину троугловог обима и

$$\rho = \frac{p}{s} = \frac{2\,p}{a+b+c}.$$

§ 144. ХЕРОНОВ ОБРАЗАЦ

Став 123. *Ако су дате све три стране троугла, површина је* $p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, *где је* s *полузбир свих трију страна.*



Сл. 160.

Доказ: Површина троугла је $p = \frac{c\,v_c}{2}$. Пошто је висина v_c непозната, морамо је изразити величинама, које су нам дате.

Из троуглова CDB и ADC израчунамо висину v_c по Питагорином ставу:

$$v_c{}^2 = a^2 - (c-x)^2 \text{ и}$$
$$\underline{v_c{}^2 = b^2 - x^2}$$

Одузимањем доње једначине од горње добијамо:

$$a^2 - (c-x)^2 - b^2 + x^2 = 0 \text{ или}$$
$$a^2 - c^2 + 2cx - x^2 - b^2 + x^2 = a^2 - c^2 - b^2 + 2cx = 0.$$

Отуда: $2cx = c^2 + b^2 - a^2$ и

$$x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

Ставимо добијену вредност за x у једначину:

$$v_c{}^2 = b^2 - x^2 = (b+x)\,(b-x) =$$
$$= \left(b + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right) =$$
$$= \frac{(2bc + c^2 + b^2 - a^2)\,(2bc - c^2 - b^2 + a^2)}{4c^2} =$$
$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b-c)^2]}{4c^2} =$$
$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}{4c^2}$$

Бројилац има четири чиниоца, које пишемо краће:

$$a + b + c = 2s$$
$$b + c - a = 2s - 2a = 2\,(s-a)$$
$$a + c - b = 2s - 2b = 2\,(s-b)$$
$$a + b - c = 2s - 2c = 2\,(s-c).$$

Ако их унесемо у једначину, добијамо за

$$v_c = \frac{2s \cdot 2\,(s-a) \cdot 2\,(s-b) \cdot 2\,(s-c)}{4c^2} = \frac{4s\,(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

и за $v_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$

Исто тако добијамо

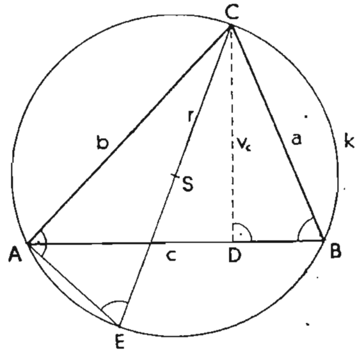
$$v_a = \frac{2}{a}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \text{ и}$$
$$v_b = \frac{2}{b}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Површина троугла је тада:

$$p = \frac{c v_c}{2} = \frac{a v_a}{2} = \frac{b\,v_b}{2} = \underline{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

§ 145. СТРАНЕ ТРОУГЛА И ПОЛУПРЕЧНИК ОПИСАНОГА КРУГА

Око троугла *ABC* је описан круг полупречника *r*. Његова површина је $p = \frac{c \cdot v_c}{2}$.



Сл. 161.

Нацртајмо описани круг и повуцимо пречник кроз врх троугла. Троугао *CAE* је правоугли троугао, зато што се теме *A* налази на обиму круга, чији је пречник $\overline{CE}$. Угао код *E* је једнак углу код *B*, зато што су перифериски углови над истим луком $\widehat{AC}$ једнаки. Због тога су и троугли *CAE* и *CDB* по 1 ∾ слични и постоји сразмера:

$$2r : b = a : v_c \text{ и}$$

$$v_c = \frac{a \cdot b}{2r}.$$

Ако ставимо у образац за површину троугла вредност за v_c, добијамо:

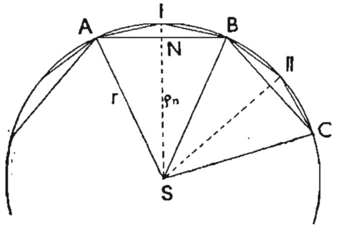
$$p = \frac{abc}{4r} \text{ и } r = \frac{abc}{4p}.$$

Пошто је по Хероновом обрасцу површина

$$p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \text{ добијамо:}$$

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}.$$

§ 146. ПОВРШИНА ПРАВИЛНОГА МНОГОУГЛА КОЈИ ЈЕ УПИСАН У КРУГУ



Сл. 162.

Правилни многоугао делимо на *n* једнаких подударних троуглова, ако спојимо темена са његовим средиштем; због тога је површина правилнога *n*-угла, који је уписан у кругу:

$$p_n = \frac{n \cdot s_n \cdot \rho_n}{2} = \frac{o_n \cdot \rho_n}{2},$$

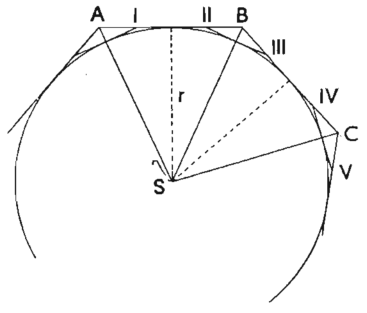
јер o_n значи обим *n*-угла и ρ_n полупречник уписанога круга.

Ако продужимо висине равнокраких троуглова до обима круга, добијамо тачке I, II..., које заједно са *A*, *B*. *C*..., граде темена 2*n*-угла. Површина 2*n*-угла p_{2n} је једнака 2*n*-струкој површини троугла *ASI*. Пошто је површина троугла *ASI* већа од површине троугла *ANS*, који је половина површине троугла *ABS*, добијамо:

$$p_{2n} > p_n$$

Став 124. *Површина уписанога 2n-угла је већа од површине n-угла, који је уписан у истом кругу.*

§ 147. ПОВРШИНА ПРАВИЛНОГА МНОГОУГЛА КОЈИ ЈЕ ОПИСАН ОКО КРУГА



Сл. 163.

Правилни многоугао делимо на *n* равнокраких подударних троуглова, ако спојимо темена с његовим средиштем. Висина свакога троугла је полупречник *r*. Због тога је површина P_n *n*-угла, који је око круга описан:

$$P_n = \frac{n \,.\, S_n \,.\, r}{2} = \frac{O_n \,.\, r}{2},$$

јер O_n значи обим *n*-ујла.

Ако повучемо у пресечним тачкама крака $\overline{AS}$, $\overline{BS}$, $\overline{CS}$... с кругом тангенте, оне граде са странама *n*-угла правилан 2*n*-угао. Површина новога многоугла је мања од првога, јер стране II, III, IV, V.. отсецају од *n*-угла троугле II *B* III, IV *C* V. Због тога је $P_{2n} < P_n$.

До истога резултата долазимо и, ако ставимо у обрасцу $P_n = \frac{O_n \,.\, r}{2}$ за *n*, 2*n*. Јер по ставу 113 $O_{2n} < O_n$, па је и

$$P_{2n} < P_n$$

Став 125. *Површина правилнога описанога 2n-угла је мања од површине n-угла који је описан око истога круга.*

§ 148. ПОВРШИНА КРУГА

Ако обележимо са *p* површину круга, с p_n површину *n*-угла, који је уписан у кругу и P_n површину *n*- угла, који је описан око круга, тада је:

$$p_n < p < P_n \text{ или } \frac{o_n \rho_n}{2} < p < \frac{O_n r}{2}.$$

По § 146 расте са растућим n површина p_n а по § 147 површина P_n опада, при чему се обими описанога и уписанога n- угла приближују обиму круга. Пошто се и ρ_n приближује полупречнику r, смањује се разлика $\frac{O_n r}{2} - \frac{o_n \rho_n}{2}$ стално, док за $n = \infty$ потпуно не ишчезне. За површину круга добијамо образац:

$$p = \frac{o \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

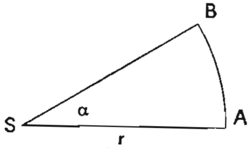
Став 126. *Површина круга је једнака квадрату полупречника, помноженом Лудолфовим бројем.*

§ 149. ПОВРШИНА КРУЖНОГА ИСЕЧКА

Површина кружнога исечка (сектора) је сразмерна средишном углу. Због тога постоји размера:

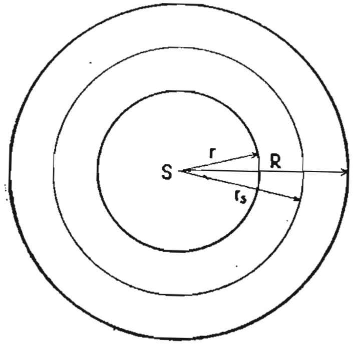
$$360^0 : \alpha = \pi r^2 : p_\alpha \text{ и}$$

$$p_\alpha = \frac{\pi\, r^2 \cdot \alpha}{360^0}.$$



Сл. 164.

§ 150. ПОВРШИНА КРУЖНОГА ПРСТЕНА



Сл. 165.

Површина кружнога прстена је:

$$p_k = \pi R^2 - \pi r^2 =$$
$$= \pi (R^2 - r^2) =$$
$$= \pi (R + r)\ (R - r) =$$
$$= 2\pi r_s\, d, \text{ где је } r_s = \frac{R + r}{2}$$

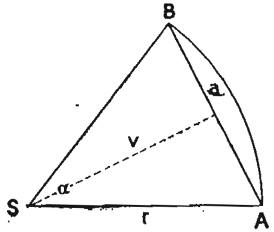
и дебљина $d = R - r$.

§ 151. ПОВРШИНА КРУЖНОГА ОТСЕЧКА

Површину кружнога отсечка (сегмента) p_s добијамо, ако од површине сектора p_α одузмемо површину троугла p_Δ.

$$p_s = p_\alpha - p_\Delta.$$

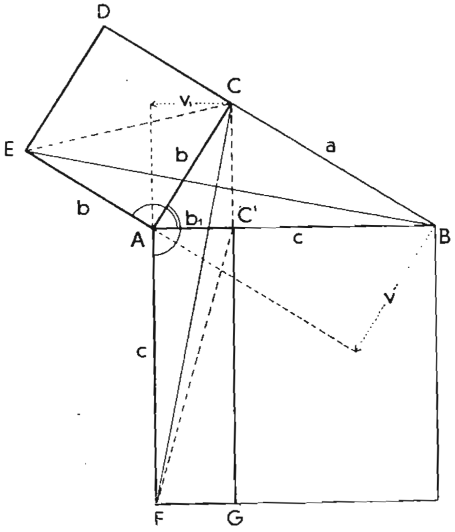
$$p_s = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{a v}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$



Сл. 166.

§ 152. ЕУКЛИДОВ СТАВ (2 ДОКАЗ)

У правоуглом троуглу ABC је c хипотенуза и b катета. Пројекција катете b на хипотенузу је $\overline{AC'}$. Ако нацртамо над b квадрат $ACDE$ и над $\overline{AC'}$ правоугаоник $AC'GF$, пошто је страна $\overline{AF}$ једнака хипотенузи c, то је површина квадрата једнака површини правоугаоника.



Сл. 167.

Доказ: Ако спојимо E са B и C са F, добијамо троугле ABE и AFC. Страна $\overline{AB}$ је једнака страни $\overline{AF}$, страна $\overline{AE}$ је једнака $\overline{AC}$ и, пошто $\overline{EA}$ стоји управно на $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ управно на $\overline{AF}$, то су и углови EAB и CAF једнаки. Због тога су троугли ABE и AFC по 2 $\cong$ подударни.

Троугао EAB је површински једнак троуглу EAC, зато што оба троугла имају исту основицу и једнаке висине ($v = b$). Површина квадрата $ACED$ је:

$$b^2 = 2\ EAC = 2\ EAB \ldots \quad 1.$$

Троугао CAF је површински једнак троуглу $C'AF$, зато што имају исту основицу и једнаке висине ($v_1 = b_1$). Површина правоугаоника $AC'GF$ је

$$b_1\, c = 2\, FAC' = 2\, CAF \ . \ . \ . \ 2.$$

Због подударности троуглова EAB и CAF следује:

$$\underline{b^2 = b_1 c.}$$

Став 127. *Површина квадрата над катетом је једнака површини правоугаоника, чије су стране хипотенуза и пројекција те катете на хипотенузу (Еуклидов став).*

§ 153. ПИТАГОРИН СТАВ (2 ДОКАЗ)

По Еуклидовом ставу је:

$$a^2 = a_1 c \text{ и } b^2 = b_1 c.$$

Отуда следује:

$$a^2 + b^2 = (a_1 + b_1)\, c = c^2.$$

Став 128. *Збир површина квадрата над катетама је једнак површини квадрата над хипотенузом. (Питагорин став).*

§ 154. СТАВ О ВИСИНИ (2 ДОКАЗ)

По Питагорином ставу је:

$$b^2 = b_1{}^2 + v^2$$

По Еуклидовом ставу је:

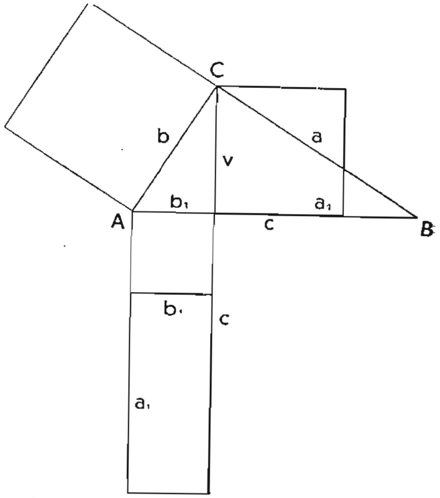
$$b^2 = b_1\, c.$$

Из обе једначине следује:

$$b_1{}^2 + v^2 = b_1 c \quad \text{или}$$

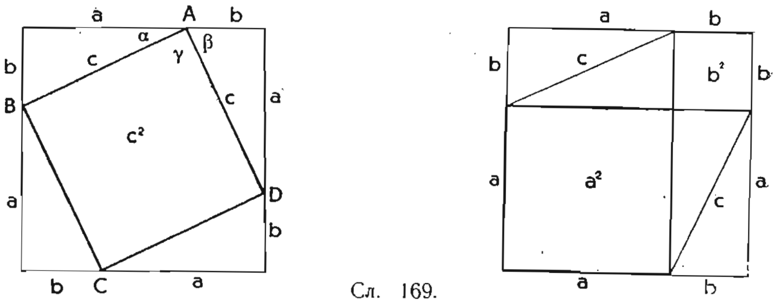
$$\underline{v^2 = b_1 c - b_1{}^2 = b_1(c - b_1) = a_1\, b_1.}$$

Став 129. *Површина квадрата над висином је једнака површини правоугаоника, чије су стране једнаке пројекцијама катета на хипотенузи.*



Сл. 168.

§ 155. ПИТАГОРИН СТАВ (3 ДОКАЗ)



Сл. 169.

Нацртамо два једнака квадрата, тако да је страна свакога $a + b$. Површина првога квадрата је $c^2 + 4\Delta$.

Углови α, β и γ граде на теменима A, B, C и D равне углове. Пошто су α и β комплементни углови, γ је прав угао. Отуда следује, да је $ABCD$ квадрат и његова површина c^2.

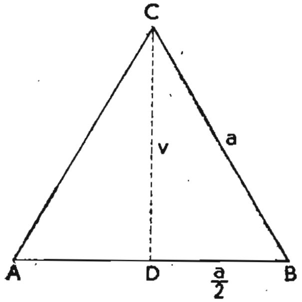
Површина другога квадрата је:

$$a^2 + b^2 + 4\Delta.$$

Пошто су сви троугли првога и другога квадрата међу собом једнаки (подударни) $(4 \cong)$, добијамо, ако уједначимо обе једначине:

$$\underline{a^2 + b^2 = c^2.}$$

§ 156. ЗАДАЦИ



Сл. 170.

1. Израчунај површину равностранога троугла.

Висину v израчунавамо по Питагорином ставу:

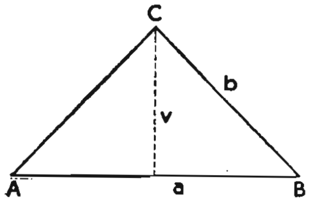
$$v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Површина равностранога троугла је:

$$\underline{p = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.}$$

2. Израчунај површину равнокракога троугла помоћу основице a и крака b.

$$\text{Висина } v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

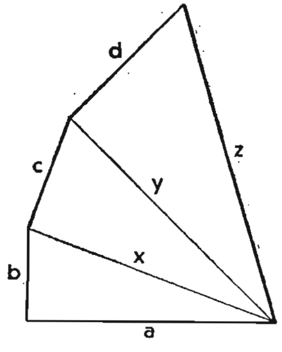


Сл. 171.

3. Конструиши квадрат, чија је површина једнака збиру четири друга квадрата.

Стране квадрата су a, b, c и d. Прво одредимо збир првих двају квадрата: $x^2 = a^2 + b^2$. Страна x траженога квадрата је хипотенуза правоуглога троугла, чије су катете a и b. Потом одредимо на исти начин: $y^2 = x^2 + c^2$ и $z^2 = y^2 + d^2$.

Конструкција (види слику 172).



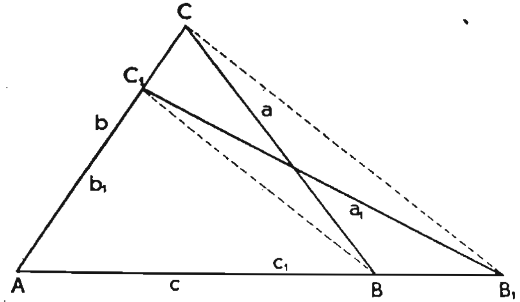
Сл. 172.

Доказ:

$$a^2 + b^2 = x^2$$
$$x^2 + c^2 = y^2$$
$$y^2 + d^2 = z^2$$
$$\overline{}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = z^2$$

4. Претвори троугао ABC у други троугао исте површине са дужом (краћом) основицом.

a) Конструкција: Направимо $\overline{AB_1} = c_1$, спојимо B_1 са C и повучемо паралелу кроз B, која сече страну $\overline{AC}$ у тачки C_1. Троугао AB_1C_1 је тражени троугао.



Сл. 173.

b) Доказ: Троугао BC_1B_1 је једнак по површини троугла BC_1C, зато што имају исту основицу и једнаке висине (висина је растојање обе паралеле $\overline{BC_1}$ и $\overline{B_1C}$).

c) Последице: Ако узмемо A за теме прамена, који је пресечен паралелним правима $\overline{BC_1}$ и $\overline{B_1C}$, постоји по ставу 77, сразмера.

$c : c_1 = b_1 : b$ или $bc = b_1\, c_1$. Добијамо:

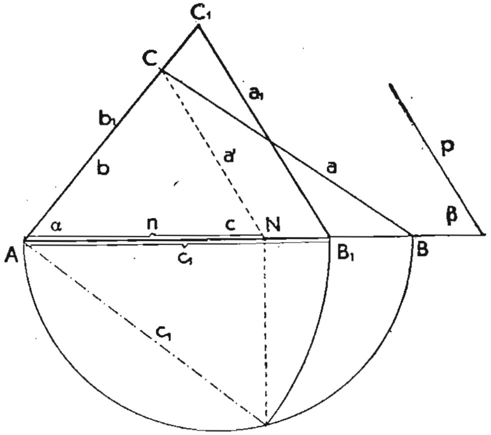
Став 130. *Код површински једнаких троуглова са заједничким углом производ страна, које захватају тај угао је сталан или константан.*

* 5. Претвори троугао ABC у други AB_1C_1 тако да остане угао α непромењен а њему супротна страна нека буде паралелна датој правој p (тј. нека страна a_1 чини са страном c одређени угао β).

a) Анализа: Ако је троугао AB_1C_1 решење задатка, тада је по пређашњем ставу:

$b \,.\, c = b_1 \,.\, c_1 \ldots \quad 1.$

Повучемо кроз теме C праву, која има одређени правац ($a' \,||\, p$). Због сличности троуглова ANC и AB_1C_1 постоји сразмера:



Сл. 174.

$n : c_1 = b : b_1$; отуда је:

$$b = \frac{n\, b_1}{c_1} \; . \; . \; . \quad 2.$$

Добијену вредност за b ставимо у једначину 1. па добијамо:

$$\frac{n\, b_1 c}{c_1} = b_1\, c_1 \text{ или } nc = c_1^2.$$

Видимо да је страна c_1 средња геометриска пропорционала дужи n и c, која се може одредити. (Види § 126. Задаци, 1. пример).

b) Конструкција: Повучемо кроз теме C паралелу a' одређеној правој p па добијамо тачку N на страни $\overline{AB}$. Потом одредимо трећу геометриску пропорционалу дужима n и c, која је страна c_1 траженога троугла $AB_1\, C_1$.

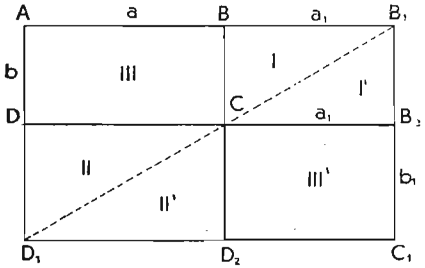
c) Доказ следује из анализе.

d) Детерминација: Задатак има једно решење.

6. Претвори правоугаоник са странама a и b у правоугаоник исте површине, чија је једна страна a_1.

1. начин:

Продужимо страну a за дуж a_1, повучемо $\overline{B_1C}$ до D_1 и нацртамо правоугаоник $AB_1C_1D_1$. Правоугаоник $CB_2C_1D_2$ је тражени правоугаоник.



Сл. 175.

Доказ: Правоугаоник $AB_1C_1D_1$ је дијагоналом B_1D_1 подељен на два правоугла и подударна троугла. Троугао I је подударан троуглу I′ и троугао II је подударан троуглу II′. Ако обележимо површину правоугаоника $ABCD$ са III и површину правоугаоника $CB_2C_1D_2$ са III′, добијамо:

$$\triangle\ AB_1D_1 - (\mathrm{I} + \mathrm{II}) = \mathrm{III} \text{ и } \triangle\ B_1C_1D_1 - (\mathrm{I}' + \mathrm{II}') = \mathrm{III}'.$$

Отуда следује: III = III′ или $ab = a_1b_1$.

2. начин: Из $ab = a_1b_1$ добијамо сразмеру:

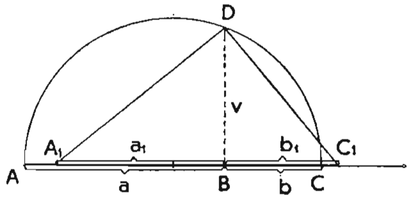
$a_1 : a = b : b_1$. b_1 је четврта геометриска пропорционала дужима a_1, a и b (види 93, пример 1).

3. начин: Употребом става о висини.

a) Анализа: Дужи a и b сматрам за отсечке на хипотенузи правоуглога троугла, чија је висина v. Због тога је по ставу о висини:

$$v^2 = ab.$$

Исти производ имају сви отсечци правоуглих троуглова који имају исте висине. Ако су стога висина и један отсечак дати, може се други отсечак одредити.



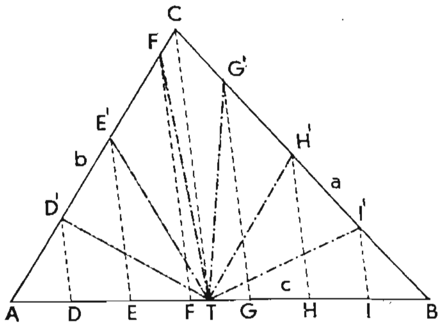
Сл. 176.

b) Конструкција: Над дужи $a + b$ конструишемо полукруг и повучемо висину у тачки B, која сече круг у тачки D. Направимо $\overline{BA_1} = a_1$, спојимо A_1 са D и повучемо на $\overline{A_1D}$ нормалу у D, која сече $\overline{AC}$ у тачки C_1. BC_1 је тражена друга страна b_1.

c) Доказ: Пошто оба правоугла троугла ADC и A_1DC_1 имају исте висине то је $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 = v^2$.

7. Подели троугао ABC из ма које тачке T стране $\overline{AB}$ на 7 једнаких делова.

Решење: Поделимо страну $\overline{AB}$ на 7 једнаких делова и спојимо деоне тачке са врхом C. Добивамо 7 површински једнаких троугла I, II . . . VII, зато што сви имају исте основице и исту висину. Спојимо T са врхом C и повучемо паралелу кроз деону тачку D, која сече AC у тачки D' па добијамо троугао $AD'T$.



Сл. 177.

$$\triangle\ ADC = \triangle\ ADD' + \triangle\ DD'C \text{ и}$$

$$\triangle\ AD'T = \triangle\ ADD' + \triangle\ DD'T$$

Троугао $DD'T$ је површински једнак троуглу $DD'C$, јер има исту основицу и једнаку висину са њим.

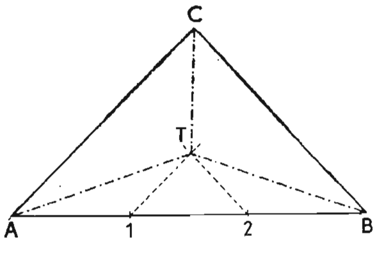
Због тога је и троугао $AD'T$ једнак по површини троуглу ADC.

На исти начин доказујемо, да је троугао BCI површински једнак троуглу $BI'T$.

Ако повучемо кроз деоне тачке E, F, G и H паралеле спојници $\overline{TC}$, добијамо на b тачке E', F' и на a тачке G', H'. Троугли $D'E'T$ и $E'F'T$ су једнаки по површини троуглу $AD'T$ и $I'H'T$ и $H'G'T$ су једнаки по површини $BI'T$; због тога су и међу собом једнаки и чине заједно $\frac{6}{7}$ површине троугла ABC. Зато је четвороугао $TG'CF'$ $\frac{1}{7}$ датога троугла. Троугао је стога дужима $\overline{TD'}$, $\overline{TE'}$ . . . . подељен на 7 једнаких делова

8. Одреди тачку у троуглу, из које га можеш поделити на 3 једнака троугла.

Поделимо основицу на 3 једнака дела па повучемо кроз 1 паралелу страни $\overline{AC}$ и кроз 2 паралелу страни $\overline{BC}$. Пресечна тачка обе паралеле је тражена тачка T. Троугли ATB, BTC и ATC су једнаки по површини. Зашто?



Сл. 178.

Докажи, да је тачка T тежиште троугла.

А) Рачунски задаци:

1. Под правоугаоне собе, која је дуга $9\,m$ и широка $6m$, треба да се покрије даскама, које су $3\,m$ дуге и $30\,cm$ широке; колико је дасака потребно?

2. Колика је површина ромба с дијагоналама $e = 24\ cm$ и $f = 52\ cm$?

3. Колика је површина и висина ромба, чија је страна $a = 29\,m$, а дијагонала $e = 42\ m$?

* 4. Докажи, да је $\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{\rho}$.

* 5. Ако одредимо мерне бројеве троуглових страна $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$ и $c = p^2 + q^2$, где су p и q цели бројеви, добијамо правоугли троугао. Докажи. Добијене мерне бројеве a, b, c, зовемо Питагорини бројеви. Направи шему Питагориних бројева.

6. Одреди површину равностранога троугла са висином $v = 15\ cm$.

7. Колика је страна квадрата, који је једнак по површини трапезу са основицама $a = 8\ m$, $c = 5\ m$ и висином $v = 5\ m$?

8. Колика је страна равностранога троугла, који је једнак по површини троуглу са странама $a = 65\ m$, $b = 57\ m$ и $c = 34\ m$?

9. Колики је полупречник уписанога круга у троуглу са странама $a = 65\ m$, $b = 57\ m$ и $c = 34\ m$?

10. Колики је полупречник описанога круга око троугла са странама $a = 65m$, $b = 57\ m$ н $c = 34m$?

11. Колике су дијагонале паралелограма с површином $420\ m^2$ и странама $17\ m$ и $28\ m$ (израчунај најпре висину)?

12. Израчунај површину правилнога шестоугла, ако је растојање двеју супротних страна $34{,}64m$.

13. Израчунај површину правилнога осмоугла са страном $a = 10\ m$.

14. Дебло дрвета мери у обиму $2{,}25\ m$; колика је површина пресека?

15. Колика је површина сегмента, који је ограничен кругом и страном правилнога n-угла (за $n = 3$, 4 или 6)?

16. Три једнака круга се додирују по два споља. Колика је површина слике ограничене са сва три круга?

В) Конструктивни задаци:

1. Докажи геометриски: 1. $(a - b)^2 = a^2 - 2\ ab + b^2$,
2. $(a - b)\ (a + b) = a^2 - b^2$.

2. Конструиши над дужи $\overline{AB}$ као над хипотенузом правоугли троугао највеће површине.

3. Конструиши над дужи $\overline{AB}$ као над основицом троугао, највеће површине и угла при врху $\gamma = 30^0$.

4. Конструиши квадрат, који је 2-, 3-, 5- 8- пута већи него дати квадрат.

5. Претвори ма какав шестоугао у правоугаоник.

6. Претвори ма какав петоугао у квадрат.

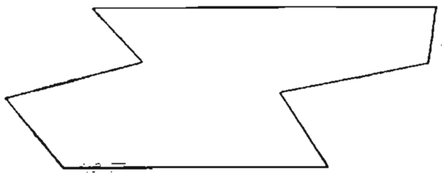
7. Претвори ма какав четвороугао непосредно у правоугаоник.

8. Претвори правоугаоник са странама $a = 7\ cm$ и $b = 4\ cm$ у правоугаоник исте површине, код којега је једна страна $5\ cm$.

9. Троугао ABC претвори у троугао једнак по површини тако, да буде теме A и положај стране $\overline{AB}$ односно $\overline{AB_1}$ заједнички за оба троугла, а теме C_1 дата тачка у троуглу или ван троугла.

10. Претвори троугао ABC ($a = 5\ cm$, $b = 4\ cm$, $c = 4{,}5\ cm$) у троугао са странама $a_1 = 7\ cm$ и $b_1 = 3\ cm$.

11. Претвори једну парцелу, која је ограничена са две паралелне стране (види слику), у правоугаоник.



Сл. 179.

12. Подели троугао ABC из темена A на пет једнаких делова.

* 13. Подели троугао ABC на 5 једнаких делова тако, да су деоне праве паралелне датој правој.

* 14. Подели трапез из темена A на 4, 5, 6 . . . једнаких делова.

* 15. Нацртај изразе, где a, b, c, d, означавају дате дужи:

a) $\sqrt{ab + c^2}$ *b*) $\sqrt{ab + cd}$ *c*) $\sqrt{a^2 - bc}$

* 16. Претвори ма који троугао у равнострани троугао.

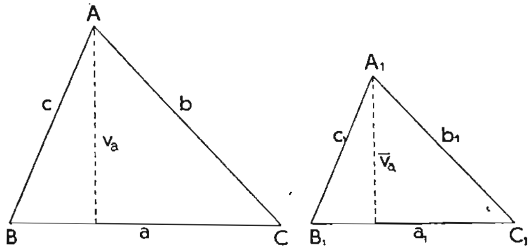
* 17. Претвори квадрат стране $a = 4\ cm$ у равностран троугао,

18. Конструиши равностран троугао, који је аритметичка средина два дата равнострана троугла ($a_1 = 5\ cm$, $a_2 = 4\ cm$).

XV. ПОВРШИНЕ СЛИЧНИХ СЛИКА

§ 157. ПОВРШИНЕ СЛИЧНИХ ТРОУГЛОВА

Став 131. *Површине сличних троуглова су пропорционалне квадратима хомологних страна.*



Сл. 180.

Доказ: Троугао ABC је сличан троуглу $A_1B_1C_1$; због тога постоје сразмере хомологних страна:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{v_a}{\overline{v}_a}=\ldots=m.$$

Површине оба троугла су:

$$p=\frac{a\cdot v_a}{2} \text{ и } p_1=\frac{a_1\cdot\overline{v}_a}{2}$$

и с обзиром, да је $\frac{v_a}{\overline{v}_a}=\frac{a}{a_1}$, добијамо:

$$\frac{p}{p_1}=\frac{a}{a_1}\cdot\frac{v_a}{\overline{v}_a}=\frac{a^2}{a_1{}^2}=m^2.$$

Пошто је размера двеју хомологних страна сличних троуглова стална, то је

$$p:p_1=a^2:a_1{}^2=b^2:b_1{}^2=c^2:c_1{}^2=v_a{}^2:\overline{v}_a{}^2,$$

што је требало доказати.

§ 158. ПОВРШИНЕ СЛИЧНИХ МНОГОУГЛОВА

Став 132. *Површине сличних многоуглова су пропорционалне квадратима хомологних страна.*

Доказ: Два слична многоугла се могу по ставу 98 поделити у сличне троугле. Због тога добијамо у вези с пређашњим §, да су површине хомологних троуглова I, II, ... и I′, II′.....:

$$\text{I} : \text{I}'=a^2:a_1{}^2=m^2$$
$$\text{II} : \text{II}=b^2:b_1{}^2=m^2$$

.

.

.

$$\text{и I}=m^2\ \text{I}'$$
$$\text{II}=m^2\ \text{II}'$$

.

.

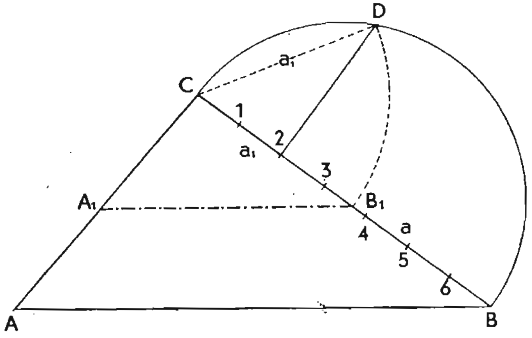
.

$$\text{I}+\text{II}+\ldots=m^2\ (\text{I}'+\text{II}'+\ldots) \text{ и}$$
$$p=m^2\ p' \text{ или}$$

$p:p'=m^2=a^2:a_1{}^2=b^2:b_1{}^2\ldots..$, што је требало доказати.

* § 159. ЗАДАЦИ

Подели троугао ABC једном дужи $\overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}$ у размери $m:n$ (2 : 5).



Сл. 181.

1. Анализа: Површине троугла A_1B_1C и трапеза ABB_1A_1 нека буду у размери $m:n$. Због тога су површине троугла A_1B_1C и ABC у односу $m:(m+n)$, па су по ставу 131 пропорционалне квадратима хомологних страна. Отуда следује:

$$p_1:p=m:(m+n)=a_1{}^2:a^2$$

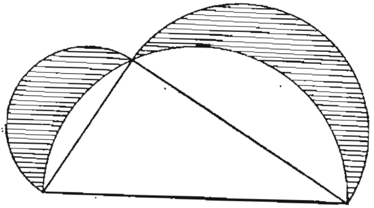
2. Конструкција: Поделимо страну a на $(m+n)$ (7) једнаких делова, опишемо над $\overline{BC}$ полукруг и повучемо у деоној тачки 2 нормалу, која сече круг у тачки D. $\overline{CD}=a_1=\overline{CB_1}$. $\overline{B_1A_1}$ повучемо паралелно $\overline{BA}$.

3. Доказ: Из цртежа следује:

$$a_1^2 = \frac{2}{7}\, a \cdot a \text{ или } a_1^2 : a^2 = 2 : 7.$$

Задаци:

* 1. Ако конструишеш над странама правоуглога троугла сличне многоугле (полукруге), тада је збир површина многоуглова (полукруга) над катетама једнак површини многоугла (полукруга) над хипотенузом. Докажи.



Сл. 182.

* 2. Ако се опишу над хипотенузом и катетама полукрузи, тада је збир месечастих рубова (види слику) једнак површини троугла. Докажи.

* 3. Подели троугао ABC ($a = 7cm$, $b = 6cm$, $c = 5{,}5cm$) на 2, 3, 4, 5 једнаких делова, тако да деоне линије буду паралелне страни a.

* 4. Подели троугао ABC ($a = 7cm$, $b = 6cm$, $c = 5{,}5cm$) у размери *a*) 1 : 2, *b*) 2 : 3, *c*) 3 : 5, тако, да деоне линије буду паралелне основици $\overline{AB}$.

Имена математичара који се помињу у овој књизи

Аполоније из Перга је живео у Александрији око 200 г. пре Х. р.

Архимед рођен око 287 г. пре Х. р. у Сиракузи и тамо умро 212 г. пре Х. р. при заузећу места од Римљана.

Еуклид, грчки математичар, је живео око 300 г. пре Х. р. и издао је „Елементе“, где је приказао све дотадашње знање геометрије у систематском облику.

Гаус рођен 30 априла 1777 г. у Брауншвајгу, умро у Гетингену као професор и директор звездарнице.

Херон из Александрије, математичар и механичар, живео је око 200 г. пре Х. р.

Питагора, филозоф, рођен на острву Самосу између 580 и 570 г. пре Х. р.; живео је касније у Италији и умро у Метапонту.

Птоломеј из Александрије живео је у 2 столећу по Х. р. Био је астроном и оснивач Птоломејевога светскога система.

ИСПРАВКЕ КРУПНИЈИХ ГРЕШАКА

На стр. 36, сл. 47 треба права кроз A и A_1 да се обележи са p.
„ „ 44, „ 54 треба разменити α_1 са α_2.
„ „ 52, „ 65 треба страна AC да се обележи са b.
„ „ 54, зад. 12 f стоји „$e = f - 3$“, а треба „$e - f = 3$“.
„ „ 63, 10. ред одозго стоји „$\beta = 2a$“, а треба „$\beta = 2\alpha$“.
„ „ 63, 13. ред одозго стоји „$\beta_1 = 2a_1$,“ а треба „$\beta_1 = 2\alpha_1$“.
„ „ 67, 5 ред одоздо стоји „*и с полузбир*“ а треба „*и s полузбир*“.
„ „ 76, 14. ред одозго стоји „$a = \overline{AD}$, а треба „$a = \overline{AB}$.“
„ „ 86, 5. ред одоздо стоји „$m_1' < m_2' < m_3 < \ldots$“, а треба „$m_1' < m_1'' < m_1''' \ldots$“
„ „ 87, 1. ред одоздо стоји „$m_2' > m_1'' > m_3''' > \ldots$“ а треба „$m_2' > m_2'' > m_2''' > \ldots$“
„ „ 88, 8. ред одозго стоји „$\cos \alpha_1$“, а треба „$\cos \alpha_2$“.
„ „ 88, 12 ред одозго стоји „α_n “, а треба „α_0 “.
„ „ 88, 13. ред одозго стоји „α_0 “, а треба „α_n “.
„ „ 89, 5. ред одоздо стоји „m_4“, а треба „m_4'.
„ „ 93, 19. ред одозго стоји „35′20′, а треба „35°20′.
„ „ 93, 9. ред одоздо стоји „27°20′, а треба „35°20′.
„ „ 96, 1. задатак стоји „улога“, а треба „углова“.
„ „ 98, 1. ред одозго стоји „$\frac{a}{c} \sin \alpha$“, а треба „$\frac{a}{c} = \sin \alpha$“.
„ „ 98, 16. ред одозго стоји „$\frac{a}{c} = \alpha$“, а треба „$\frac{a}{c} = \sin \alpha$“.
„ „ 102, 10 ред одозго стоји „α_3“, а треба „α_4“.
„ „ 102, 12. ред одозго стоји „α_4“, а треба „α_3“.
„ „ 106, стоји „§ 125“, а треба „* § 115“.
„ „ 111, стоји „§ 120“, а треба „* § 120“.
„ „ 113, 13. ред одоздо стоји „$(\bar{v}_c + c_1) : (\bar{v}_c + c)$“, а треба „$(\bar{v}_c + c_1) : (v_c + c)$“.
„ „ 120, сл. 133 треба уместо V да стоји IV.
„ „ 122, стоји „§ 225“, а треба „§ 125“.
„ „ 126, 5. ред одоздо стоји „$(s_1 - r_2)$“, а треба „$(r_1 - r_2)$.“
„ „ 126, сл. 139 треба уз већи круг да стоји k_1.
„ „ 128, сл. 141 треба угао код B_2 обележити са β_2.
„ „ 129, сл. 144 треба дуж AE обележити са x.