СЛЕПЧЕВИЋ ГЛИГОР
ПРОФЕСОР ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

У РАВНИ

ЗА СРЕДЊЕ ШКОЛЕ

Овај уџбеник одобрио је Господин Министар Просвете својом одлуком Снбр. 14340 од 2 маја 1935 године на основу препоруке Главног просветног савета Сбр. 1271|34 од 28 марта 1935 године

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1935

Штампарија Драг. Поповића, Луја Бартуа бр. 3.

Аналитичка геометрија је математска дисциплина која проучава:

1) геометриске фигуре помоћу алгебарске анализе;

2) одређује геометриске слике алгебарских једначина и

3) испитује везе између геометриских особина фигура и алгебарских облика њихових једначина.

Она је састављена из два дела: Аналитичке геометрије у равни и Аналитичке геометрије у простору. Прва од њих проучава геометриске слике у равни, а друга геометриске фигуре у простору.

Аналитичка геометрија претставља терен из кога су изникли и на коме су се развили диференцијални и интегрални рачун као највеће творевине људскога ума.

НАПОМЕНА:

У класичној гимназији учи се градиво које је означено са знаком ◎

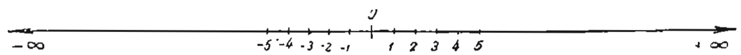
У реалној гимназији учи се градиво које се учи у класичној гимназији и градиво без икаквих нарочитих ознака.

У реалци се учи градиво које се учи у реалној гимназији и градиво које је означено са *

Глава I.

©§ 1. КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ.

Ако посматрамо природни ред бројева, ми видимо, да га можемо графички претставити на једној правој линији. Нека нам је на сл. 1. претстављена једна права линија.



Сл. 1.

Ако сада узмемо ма коју тачку на посматраној правој и обележимо је са нулом (0), онда можемо узети произвољну дуж m и ту дуж преносити на једну и на другу страну од утврђене тачке 0. Крајње тачке пренетих дужи одговарају узастопним бројевима природнога бројнога реда. Ми ћемо у нашем случају пренете дужи на десну страну од утврђене тачке 0 означавати са плус т.ј. сматрати их за позитивне величине, док ћемо дужи пренете на леву страну од утврђене тачке 0 обележавати са знаком минус т.ј. сматрати их за негативне величине.

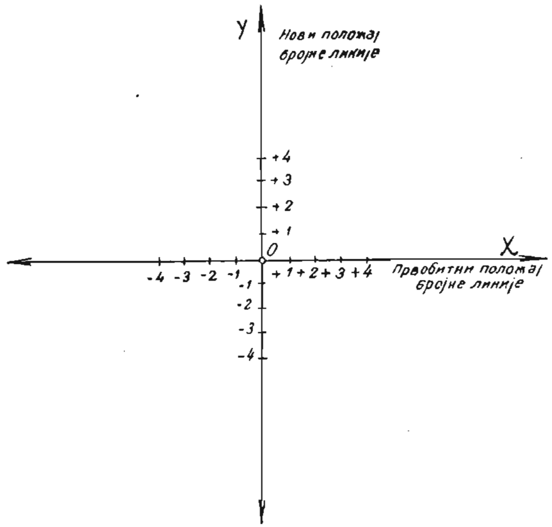
Могли бисмо радити и обрнуто, т.ј. десну страну од утврђене тачке узети као негативну и по њој преносити негативне величине, а леву као позитивну и по њој преносити позитивне величине. У суштини се неби ништа изменило, али се обично узима онако како смо ми узели.

Величина једном пренете дужи m на десну страну од утврђене тачке 0 одговара броју $+1$. Величина два пута узастопно пренете дужи m на десну страну од утврђене тачке 0 одговара броју $+2$ и т. д. као што се види на самој слици. Величина пак једном пренете дужи m на леву страну од утврђене тачке 0, одговара броју -1. Величина два пута узастопно пренете дужи m на леву страну од утврђене тачке 0 одговара броју — 2 и т. д. као што се такође види на приложеној слици.

Оваква линија назива се бројна линија природнога реда бројева. Она се простире од $-\infty$ до $+\infty$.

Ако сада замислимо, да смо бројну линију са сл. 1. заокренули у равни слике за 90^0 супротно кретању казаљки на часовнику; онда ћемо добити са њеним првобитним положајем сл. 2.

Овде смо добили систем од двеју бројних линија који се назива *координатним системом;* а бројне линије називају се *коордитним осама* или *осовинама*. Хоризонтална бројна



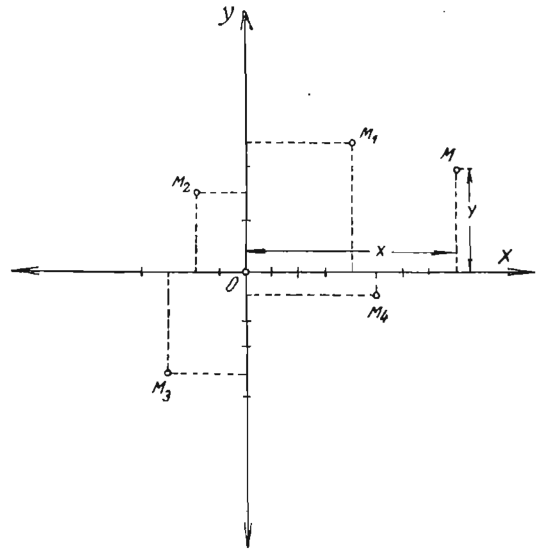
Сл. 2.

линија на сл. 2. назива се *апсцисном осом* и обично се обележава са X, а ветрикална бројна линија на истој слици назива се *ординатном осом* и обично се обележава са Y.

Има много координатних система који се употребљавају у аналитичној геометрији, али овај описати на сл. 2. је један најпростији и најједноставнији, па ћемо са њиме и почети изучавање дисциплина аналитичке геометрије. Он се назива *правоугли координатни систем,* јер му осе захватају прав угао. Координатне осе деле раван у којој се налазе на четири дела који се називају *квадрантима* правоуглог координатног система.

§ 2. ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ У ПРАВОУГЛОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ.

На сл. 2. види се, да свака координатна оса има два дела, свој позитивни и негативни део. То својство координатних осовина даје могућности да се одреди положај сваке тачке која се налази у равни координатног система.



Сл. 3.

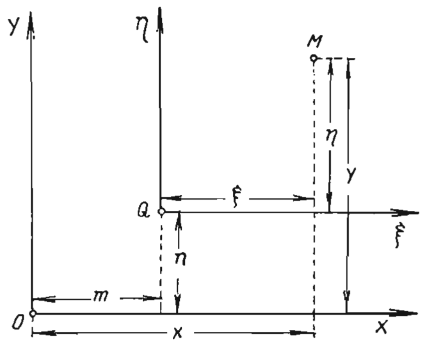
Узмимо на сл. 3 тачку M_1 и одредимо њен положај у координатном систему. Тачка M_1 отстоји од ординатне осовине за 4 дужинске јединице, а од апсцисне осовине за 5 дуж. јединица. Отстојање тачке M_1 од ординатне осе назива се *апсцисом* тачке M_1, а отстојање од апсцисне осе назива се *ординатом* тачке M_1 и бележи се симболички $M_1(4,5)$.

Апсциса и ордината неке тачке уједно се називају *координатама те тачке.*

Тако ће тачка M_2 имати координате -2 и $+3$ односно $M_2(-2,3)$. Тачка M_3 има координате -3 и -4 односно $M_3(-3,-4)$. Тачка M_4 има координате $+5$ и -1 односно $M_4(5,-1)$. Или у опште нека тачка M имаће координате x и y односно $M(x, y)$.

§ 3. ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА.

1 чл. Ако узмемо у посматрање два правоугла координатна система који немају заједнички координатни почетак, а чије осе теку паралелно, у истом смислу, онда једну тачку можемо посматрати с обзиром на један координатни систем, а можемо је посматрати и с обзиром на други координатни систем. Тада ће координате посматране тачке имати једну вредност у једном систему, а сасвим другу вредност у другом систему. Може понекад наићи потреба да се пређе из једног координатног система у други. Тај прелаз врши се помоћу трансформације координата. Трансформовати координате, значи помоћу утврђеног односа између координата два координатна система, израчунати једне из других. Да бисмо нашли утврђени однос између координата два координатна система, узмимо у посматрање таква два координатна система.



Сл. 4

Како се чешће пута ради једноставности, координатни системи претстављају само са позитивним деловима њихових осовина, а негативни делови се могу замислити, то нека нам сл. 4. претставља таква два правоугла координатна система који се налазе у истој равни и чије осе теку паралелно у истом смислу. Обележимо један систем са XOY а други са $\xi Q \eta$.

Почетак координатног система $\xi Q \eta$ означили смо тачком Q. Тачка Q налази се у координатном систему XOY те и она као и свака друга тачка у равни овога система има своје координате. Из слике се види, да су m и n координате тачке Q у односу на координатни систем XOY. Тачка M у систему XOY има координате (x, y). Под тачком M подразумевамо ма какву тачку у овом систему, па зато и њене координате обележавамо са општим променљивим величинама x и y, где

нам x може претстављати апсцису, а y ординату ма које тачке истог координатног система.

Тачка M налази се и у систему $\xi Q \eta$. Нека нам она и у овом координатном систему претставља ма коју тачку са општим променљивим координатама ξ и η.

Из слике се види да је:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + m \\ y &= \eta + n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1).$$

Решавањем ових једначина по величинама ξ и η добивамо једначине:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - m \\ \eta &= y - n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 2).$$

Једначине 1) и 2) претстављају нам односе између одговарајућих координата оба посматрана координатна система. Помоћу једначина 1) можемо прећи из система $\xi Q \eta$ у систем XOY и обратно, помоћу једначина 2) из система XOY у систем $\xi Q \eta$.

Пример: Тачка A има координате (6,5) у правоуглом координатном систему XOY; наћи њене координате у правоуглом координатном систему $\xi Q \eta$, кад су координате тачке Q(3,2) у систему XOY.

Решење: Према једначинама 2) имамо да је:

$$\xi = 6 - 3 = 3$$

и

$$\eta = 5 - 2 = 3.$$

Дакле тачка A у систему $\xi Q \eta$ има координате (3,3).

Други пример: Тачка B има координате (—3,1) у правоуглом координатном систему $\xi Q \eta$, наћи њене координате у правоуглом координатном систему XOY, кад су координате тачке Q(4,3) у систему XOY.

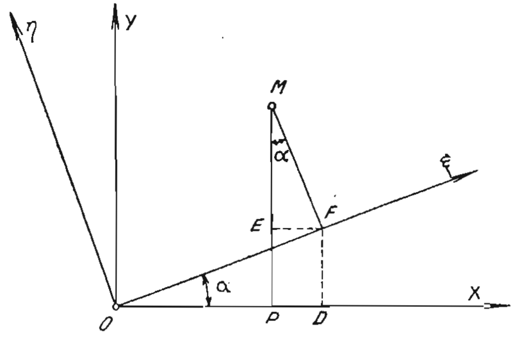
Решење: Према једначинама 1) имамо да је:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 4 = 1 \\ y &= 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$

Дакле тачка B у систему XOY има координате (1,4).

* 2 ЧЛ. ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМИ СА ИСТИМ ПОЧЕТКОМ, ЧИЈЕ ОСЕ ЗАКЛАПАЈУ ИЗВЕСТАН УГАО.

Можемо имати два правоугла координатна система у истој равни, који имају заједнички почетак, а осе им захватају известан угао α. Нека су нам таква два координатна система претстављена на сл. 5, од којих ћемо један обележити са XOY а други са $\xi O \eta$.



Сл. 5.

Узмимо сада у посматрање ма коју тачку M, која се налази у равни оба поменута координатна система.

Нека су њене координате (x, y) у систему XOY, а координате (ξ, η) у систему $\xi O \eta$,

Из приложене слике види се да је:

$$x = OP = OD - PD = OD - EF = \xi cos\alpha - \eta sin\alpha$$

и

$$y = PM = PE + EM = DF + EM = \xi sin\alpha + \eta cos\alpha$$

т. ј.

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi cos\alpha - \eta sin\alpha \\ y = \xi sin\alpha + \eta cos\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Једначине 3) дају нам могућности да помоћу координата (ξ, η) и сталног угла α израчунамо координате (x, y) неке посматране тачке, која се налази у оба задата координатна система.

Ако сада прву од једначина 3) помножимо са $cos\alpha$, а другу са $sin\alpha$ онда добивамо:

$$x.cos\alpha = \xi cos^2\alpha - \eta sin\alpha\, cos\alpha$$
$$y.sin\alpha = \xi sin^2\alpha + \eta sin\alpha\, cos\alpha$$

Сабирањем овако добивених једначина излази да је:

$$x.cos\alpha + y.sin\alpha = \xi(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$$

или

$$\xi = x.cos\alpha + y.sin\alpha.$$

Ако прву од једначина 3) помножимо са $sin\alpha$ а другу са $cos\alpha$, тада добивамо:

$$x.sin\alpha = \xi sin\alpha\, cos\alpha - \eta sin^2\alpha$$
$$y.cos\alpha = \xi sin\alpha\, cos\alpha + \eta cos^2\alpha$$

Кад прву од ових двеју једначина одузмемо од друге онда добивамо:

$$y.cos\alpha - x.sin\alpha = \eta(cos^2\alpha + sin^2\alpha)$$

или

$$\eta = y.cos\alpha - x.sin\alpha.$$

На тај смо начин добили следеће једначине:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = y.sin\alpha + x.cos\alpha \\ \eta = y.cos\alpha - x.sin\alpha \end{array}\right\} \ldots\ldots 4).$$

Једначине 4) дају нам могућности, да помоћу координата (x,y) и сталног угла α израчунамо координате (ξ,η) неке посматране тачке која се налази у оба задата координатна система.

Пример: Координате тачке M су $(2, \sqrt{3})$ у правоуглом координатом систему XOY; наћи њене координате у правоуглом координатном систему $\xi O \eta$, ако је угао $\alpha = 30^0$, који захватају одговарајуће осе ова два система.

Решење: Према једначинама трансформације 4) излази да је:

$$\xi = \sqrt{3}.sin\, 30^0 + 2\, cos\, 30^0 = \sqrt{3}.\frac{1}{2} + \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta = \sqrt{3}.cos\, 30^0 - 2\, sin\, 30^0 = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} - 2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Дакле тачка M ће имати координате $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ у систему $\xi Q \eta$;

Други пример: Координате тачке N су $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ у правоугом координатном систему $\xi Q \eta$; наћи њене координете у правоуглом координатном систему XOY, ако је угао, који захватају одговарајуће осе ова два система, једнак 45^0.

Решење: Према једначинама трансформације 3) излази да је:

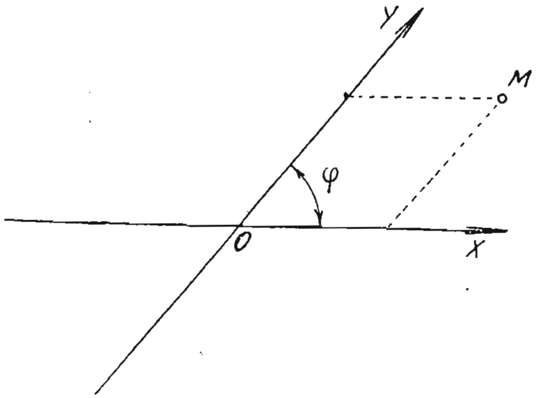
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 45^0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

Дакле тачка N ће имати координате (0,1) у систему XOY. Нека ученици у оба примера изврше и обрнут процес.

◎ 3. ЧЛ. КОСОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ.

Положај тачке у равни може бити одређен на више начина, т.ј. сем правоуглог координатног система, има још координатних система помоћу којих се може одредити положај тачке у равни. Такав је косоугли координатни систем, који нам је претстављен на сл. 6.



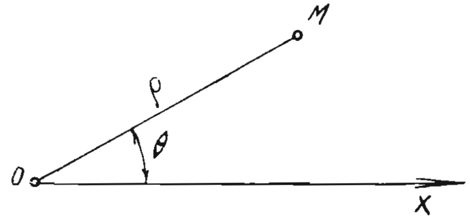
Сл. 6.

Косоугли координатни систем разликује се од правоуглог координатног система само тиме, што његове осе захватају неки угао који је мањи или већи од 90°.

И код косоуглог координатног система могу настати сви случајеви трансформације координата као и код правоуглог координатног система. Ми се овде нећемо задржавати на овом систему пошто га нећемо употребљавати у даљем излагању.

◎ 4. ЧЛ. ПОЛАРНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ.

Ако из једне утврђене тачке у равни повучемо праву у једном смислу, онда ће нам положај ма које тачке у тој равни бити одређен отстојањем између ових двеју тачака и углом који то отстојање заклапа са задатом правом.

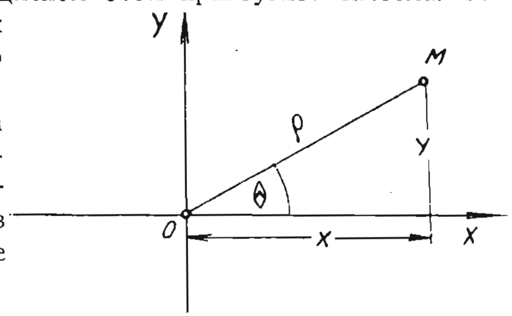


Сл. 7.

Нека нам је један такав случај претстављен на сл. 7. Стална тачка 0 зове се *поларним почетком*, а стална права OX *поларном осом*. Остојање $\rho = OM$ назива се *потегом* тачке M, а угао θ *поларним углом*. Цео пак овај систем назива се *поларним координатним системом*. Координате тачке M у овом систему су ρ и θ где се ρ узима увек позитивно као отстојање између двеју тачака, а θ позитиван угао од 0° до 360°. Једној тачки у равни одговара само једна вредност ρ - а и једна вредност угла θ и обратно, једна вредност ρ - а и једна вредност угла θ одређују само једну једину тачку у равни овога координатног система.

◎ 5 ЧЛ. ТРАНСФОРМАЦИЈА ПОЛАРНИХ КООРДИНАТА У ПРАВОУГЛЕ И ОБРАТНО.

Узмимо у посматрање један правоугли и један поларни координатни систем код којих се поларна оса поларног система поклапа са апсцисном осом правоуглог система. Сем тога, нека се почетак правоуглог система поклапа са почетком поларног система. Нека су на сл. 8 претстављена таква два координатна система. Из приложене слике се види да је:



Сл. 8.

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots 7).$$

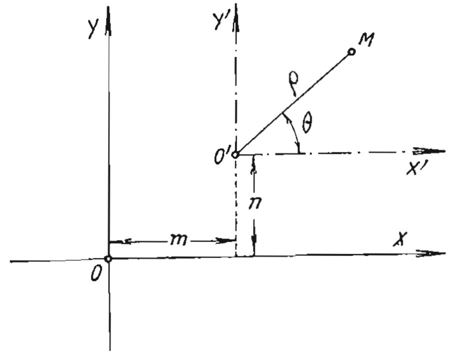
Помоћу једначина 7) можемо увек израчунати правоугле координате (x, y) неке тачке М кад су нам познате њене поларне координате (ρ, θ).

Тако исто из сл. 8 се види да је:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 8).$$

Кад је познат тангенс неког угла онда се и угао може израчунати. Помоћу једначина 8) можемо увек израчунати поларне координате (ρ, θ) неке тачке М, ако су нам познате њене правоугле координате (x, y)

Може се десити случај да се почетак поларног система не поклапа са почетком правоуглог координатног система и да је поларна оса паралелна са апсцисном осом правоуглог координатног система. Нека нам је такав један случај претстављен на сл. 9. и нека почетак 0′ поларног система у правоуглом координатном систему има координате (m, n)



Сл. 9.

Узмимо један помоћни правоугли координантни систем $X'O'Y'$ чији се почетак поклапа са полом поларног система и чија се апсцисна оса поклапа са поларном осом поларног система.

На основу једначина 1) излази да је:

$$\left.\begin{aligned} x &= m + x' \\ y &= n + y' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 9),$$

Према једначинама 7) можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \rho cos\theta \\ y' &= \rho sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 10).$$

Ако у једначинама 9) сменимо величине x' и y' њиховим вредностима из једначина 10) онда добивамо следеће једначине:

$$\left.\begin{aligned} x &= m + \rho cos\theta \\ y &= n + \rho sin\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 11).$$

Једначине 11) дају нам везу између координата неке тачке која се налази у равни оба посматрана координантна система. Кад су нам познате координате задате тачке у једном координантном систему, помоћу једначина 11) можемо израчунати координате исте тачке у другом од посматраних координантних система.

Сем наведених има још велики број координатних система и још више трансформација координата из једних у друге.

§ 4. РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ДВЕЈУ ТАЧАКА.

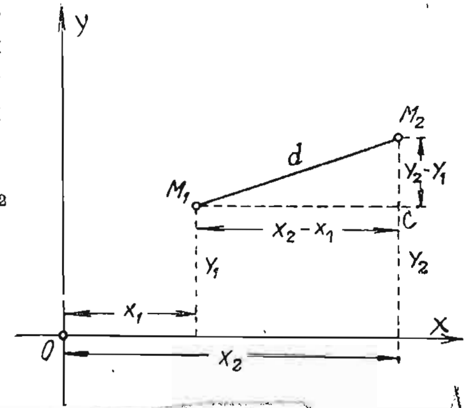
Нека су нам у правоуглом координатном систему на сл. 10 дате тачке: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Отстојање између ових двеју тачака налази се по Питагорином правилу. Из правоуглог троугла M_1CM_2 излази да је:

$$M_1M_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

или

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

одакле је



Сл. 10.

$$d = + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \ldots\ldots 1).$$

Величина d се узима увек са позитивним знаком.

Пример: Наћи раздаљину између тачака А (3, 5) и В (—1, 2) које се налазе у правоуглом координатном систему.
Решење: Према обрасцу 1) излази да је:

$$d = \sqrt{(3+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

т. ј.

$$d = 5.$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1\,.\,x_3 + 2\,\dfrac{x_1+x_2}{2}}{1+2} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y &= \frac{1\,.\,x_3 + 2\,\dfrac{y_1+y_2}{2}}{1+2} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1).$$

Пример: Одредити координате тежишта онога троугла чија темена имају координате (4,—1). (—1,3) и (3, —5) у правоуглом координатном систему.

Решење: Према обрасцима 1) излази да је:

$$x = \frac{4 - 1 + 3}{3} = 2$$

$$y = \frac{-1 + 3 - 5}{3} = -1.$$

* § 7. ПОВРШИНА ТРОУГЛА.

Нека је на сл. 13. претстављен правоугли координатни систем у чијој се равни налази троугао $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Из посматране слике се види, да је површина троугла ABC једнака збиру површина трапеза ADEC и CEFB мање површина трапеза ADFB. Ако површину задатога троугла обележимо са P онда је:

$$P = ADEC + CEFB - ADFB$$

или

$$P = \frac{(y_3+y_1)(x_3-x_1)}{2} + \frac{(y_2+y_3)(x_2-x_3)}{2} - \frac{(y_2+y_1)(x_2-x_1)}{2}$$

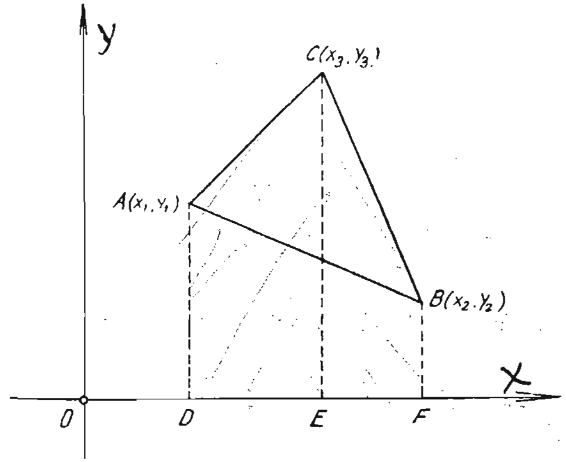
одакле је:

$$= \frac{x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)}{2} \ldots\ldots 1).$$

Бројитељ овога обрасца је састављен од три сабирка који садрже по три елемента. Елементи тих сабирака су координате троуглових темена. Они су поређани у сабирцима по извесном реду који треба уочити.

Посматрајмо истовремено и образац 1) и троугао на сл. 13. У сваком сабирку бројитеља обрасца 1) елементи су поређани на следећи начин:

Први елеменат је апсциса једног темена, други елеменат је ордината следећег темена, а трећи елеменат је ордината идућег темена по реду, ако се кретање по обиму троугла



Сл. 13.

врши у супротном смислу кретања казаљки на часовнику. Површина троугла на овај начин добивена има увек позитиван знак.

Међутим ако бисмо са сл. 13. од трапеза ADFB одузели трапезе ADEC и CEFB, онда бисмо добили површину троугла са негативним знаком. Тако радећи дошло би се до обрасца који би имао форму обрасца 1) само би у њему елементи координата троуглових темена били поређани у смислу кретања казаљки на часовнику.

Површина троугла је сама по себи позитивна величина, а ако се у задатку добије са негативним знаком, то не значи да је површина негативна, него само, да су елементи координата троуглових темена узимати таквим редом, који одговара кретању казаљки на часовнику.

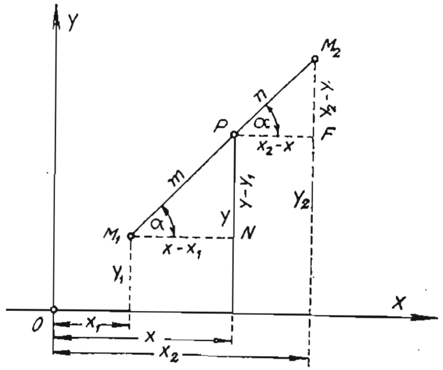
Пример: Наћи површину троугла чија темена у правоуглом координатном систему имају координате: (2, 4), (6, 2) и (3, 7).

Решење: према обрасцу 1) излази да је:

$$P = \frac{2(2-7) + 6(7-4) + 3(4-2)}{2} = 7.$$

* § 5. КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ КОЈА ДЕЛИ НЕКУ ДУЖ ПО ДАТОЈ РАЗМЕРИ

Нека је у правоуглом координатном систему на сл. 11 претстављена дуж M_1M_2, коју дели тачка P по размери $m{:}n$. Ако су нам задате координате тачака $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, онда ћемо координате тачке $P(x, y)$ одредити на следећи начин:



Сл. 11.

Из правоуглог троугла M_1NP види се да је:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x-x_1}{m} \\ \text{и} \\ \sin\alpha &= \frac{y-y_1}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1).$$

Тако исто из правоуглог троугла PM_2F излази да је:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_2-x}{n} \\ \text{и} \\ \sin\alpha &= \frac{y_2-y}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 2).$$

Ако сада у првој од једначина 2) сменимо величину $\cos\alpha$ њеном вредношћу из прве од једначина 1) онда добивамо:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{x_2-x}{n}$$

одакле је:

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n} \ldots\ldots 3).$$

Кад пак у другој од једначина 2) величину $\sin\alpha$ сменимо њеном вредношћу из друге од једначина 1) онда добивамо:

$$\frac{y-y_1}{m} = \frac{y_2-y}{n}$$

одакле је:

$$y = \frac{my_2+ny_1}{m+n} \ldots\ldots 4).$$

Изрази 3) и 4) претстављају нам координате тачке P изражене помоћу координата тачака M_1 и M_2 и величина m и n од којих је прва бројитељ а друга именитељ задате размере. Из истих би се израза могле израчунати координате тачке M_2 кад би биле познате координате тачака M_1 и P.

Ако тачка P дели дуж M_1M_2 на два једнака дела, онда је $m = n$ те се њене координате своде на изразе:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{y_1+y_2}{2} \ldots\ldots 5).$$

Пример: наћи координате тачке P која дели дуж између тачака A (7,7) и B (—5, —2) по размери 1:2.

Решење: Према обрасцима 3) и 4) излази да је:

$$x = \frac{-5\,.\,1 + 7\,.\,2}{1+2} = 3 \text{ и } y = \frac{-2\,.\,1 + 7\,.\,2}{1+2} = 4$$

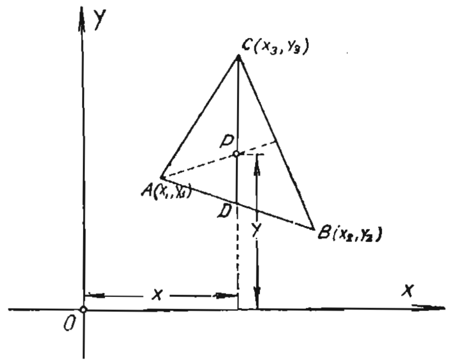
односно P (3,4)

* § 6. КООРДИНАТЕ ТЕЖИШТА ТРОУГЛОВА.

Нека је на сл. 12 претстављен правоугли координатни систем XOY у чијој се равни налази троугао са теменима у тачкама A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) и C (x_3, y_3).

Ако средину троуглове стране AB обележимо са D, онда ће координате те тачке, према обрасцима 5) § 5 бити:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$



Сл. 12.

Тежиште посматранога троугла P (x,y) налази се на средњој линији троугловој која пролази кроз тачке C и D и оно дели дуж DC по размери 1:2. Према обрасцима 3) и 4) § 5 координате тачке P (x,y) морају бити:

* § 8. УСЛОВ ДА ТРИ ТАЧКЕ ЛЕЖЕ НА ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ.

Ако би се на сл. 13. теме C примицало страни AB, онда би се и површина троугла ABC смањивала. Кад би теме C доспело на страну AB онда би површина троугла ABC била једнака нули јер би му у том случају висина била једнака нули.

Дакле да би три тачке лежале на једној правој, потребно је и довољно, да површина троугла који оне сачињавају, буде једнака нули, т.ј.:

$$\frac{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)}{2}=0$$

или

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$$

Ако левој страни ове једначине и додамо и одузмемо изразе: $x_1(y_3-y_1)$ и $x_1(y_1-y_2)$, онда добивамо следећу једначину:

$$x_1(y_2-y_3)+x_1(y_3-y_1)+x_1(y_1-y_2)+x_2(y_3-y_1)-$$
$$-x_1(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)-x_1(y_1-y_2)=0.$$

Прва три сабирка ове једначине једнаки су нули, а остале сабирке можемо написати у следећем облику:

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)+(x_3-x_1)(y_1-y_2)=0$$

или

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=0$$

одакле је

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}\;.....\;1).$$

Једначина 1) претставља нам услов, који мора постојати између координата трију тачака, које леже на истој правој линији.

Пример: Испитати, дали тачке, које у правоуглом координатном систему имају координате (1, 1), (2, 4) и (—1, —5), леже на истој правој.

Решење: Да би дате тачке лежале на истој правој, њихове координате морају задовољавати образац 1) т.ј. треба да буде:

$$\frac{2-1}{-1-1}=\frac{4-1}{-5-1}$$

Како је заиста лева страна овога израза једнака његовој десној страни, то значи, да задате три тачке леже на истој правој линији.

Задаци:

◎ 1) Одредити положај тачака у правоуглом координатном систему чије су координате:

a) $x=2,\ y=5$; b) $x=-4,\ y=3$; c) $x=-5$ $y=-1$ и d) $x=0,\ y=-6$.

2) Тачка M има координате (5,2) у правоуглом координатном систему $\xi Q\eta$, наћи њене координате у систему XOY кад су одговарајуће осе у оба система међу собом паралелне у истом смислу и кад тачка Q има координате (3,4) у систему XOY.

3) Тачка N има координате (2,—1) у правоуглом координатном систему XOY; наћи њене координате у систему $\xi Q\eta$ кад су одговарајуће осе у оба система међу собом паралелне у истом смислу и кад тачка Q има координате (4,5) у систему XOY.

◎ 4) Координате тачке A су $(\sqrt{8},\ \sqrt{8})$ у правоуглом координатном систему XOY; наћи њене координате у оном поларном систему, чији се почетак налази у почетку правоуглог система и чија се поларна оса поклапа са позитивном граном апсцисне осе правоуглог система.

◎ 5) Координате тачке B у поларном систему су: $\rho=\sqrt{3}$ $\theta=60^\circ$; наћи њене координате у правоуглом координатном систему XOY чији се почетак налази у почетку поларног система и чија се позитивна грана апсцисне осе поклапа са поларном осом поларног система.

◎ 6) Израчунати раздаљину између две тачке у правоуглом координатном систему, ако су њихове координате:

a) (3,4) и (7,1), b) (3,—7) и (—2,5); c) $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{3}\right)$ и d) (0·3,1·4) и (1·1,0·8).

◎ 7 Наћи обим троугла чије су координате темена: (—1,1); (2,1) и (—1,—3).

◎ 8) Наћи координате тачке која подједнако отстоји од тачака (5,2); (1,6) и (5,8).

⊚ 9) Координате темена једног четвороугла су: (1,2); (4,—3); (—3,—1) и (—4,3); израчунати његове дијагонале.

⊚ 10) Координате темена једног четвороугла су: (7,1); (4, — 3); (—5,6) и (—8,2); израчунати његове стране и одредити какав је то четвороугао.

⊚ 11) Координате трију темена једног паралелограма су: (—1,3); (—4,—1) и (4,—7); одредити координате четвртог темена.

⊚ 12) Координате два супротна квадратова темена су: (4,2) и (—3,1); наћи координате она друга два темена.

⊚ 13) Теме једног правоугаоника налази се у почетку правоуглог координатог система, друго му је теме у тачци (3,4); наћи координате она друга два темена кад је страна између задатих тачака два пута мања од оне друге стране.

* 14) Дуж чије крајње тачке имају координата: (—5,—5) и (4,7) подељена је тачком P по размери: a) 2:1, b) 1:2; наћи координате тачке P.

* 15) Дуж чије крајње тачке имају координате: (—1,2) и (4,7) подељена је тачком M по размери 2:3; наћи координате тачке M.

* 16) Дуж чије крајње тачке имају координате: (2,2) и (7,7) подељена је тачком N по размери 3:2; одредити координате тачке N.

* 17) Кад су координате крајњих тачака једне дужи: (—3,4) и (5,2) одредити координате оне тачке која ту дуж полови.

* 18) Ако су координате крајњих тачака једне дужи: (2,—3) и (—4,—1); наћи координате оне тачке која ту дуж полови.

* 19) Одредити тежиште троугла ако су координате његових темена: (6,—2); (3,4) и (—1,2).

* 20) Одредити тежиште троугла ако су координате његових темена: (1,1); (3,2) и (5,—3).

* 21) Координате троуглових темена су: (2,1); (6,3) и (4,5); наћи површину тога троугла.

* 22) Координате темена једнога четвороугла су: (4,2); (3,6); (—1,4) и (—2,—2); наћи његову површину.

* 23) Координате темена једног петоугла су: (5,2); (3,6); (—2,4); (—4,—2) и (1,—4); наћи његову површину.

* 24) Испитати дали тачке: (1,—1); (2,1) и (3,3) леже на истој правој.
* 25) " " " (1,2); (3,5) и (—2,—1) " " " "
* 26) " " " (0,—1); (1,1) и (—1,—3) " " " "
* 27) " " " (1,0); (4,2) и (—2,—3) " " " "

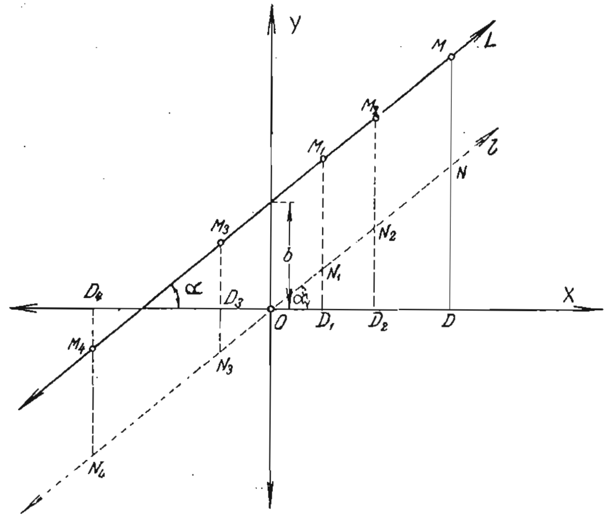
Глава II

ПРАВА ЛИНИЈА

⊚§ 9. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ.

1. чл. *Експлицитни облик једначине праве линије.*

Нека нам је на сл. 14 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему права линија L која од ординатне осе отсеца величину b. Узмимо још једну помоћну праву линију l, која пролази кроз координатни почетак и која је паралелна са задатом правом L. Обележимо са α онај угао који ове праве захватају са позитивним смислом апсцисне осе.



Сл. 14.

Узмимо у посматрање неколико тачака на задатој правој линији L и обележимо их са: $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$;

$M_4(x_4\, y_4)$ и т. д. Ако из посматраних тачака повучемо нормале на апсцисну осу, оне ће сећи помоћну праву у тачкама $N_1, N_2, N_3, N_4 \ldots$ а апсцину осу у тачкама: $D_1, D_2, D_3, D_4 \ldots$

Из приложене слике се види да је:

$$tg\alpha = \frac{N_1D_1}{OD_1} = \frac{N_2D_2}{OD_2} = \frac{N_3D_3}{OD_3} = \frac{N_4D_4}{OD_4} = \ldots\ldots\ldots$$

или

$$tg\alpha = \frac{M_1D_1 - b}{OD_1} = \frac{M_2D_2 - b}{OD_2} = \frac{M_3D_3 - b}{OD_3} = \frac{M_4D_4 - b}{OD_4} \ldots\ldots$$

Ако у овом изразу величине: M_1D_1; M_2D_2; M_3D_3; M_4D_4;.. и OD_1; OD_2; OD_3; OD_4;.... сменимо њиховим вредностима y_1; y_2; y_3; y_4;.... и x_1; x_2; x_3 x_4;... и још ставимо да је: $tg\alpha = m$ онда добивамо;

$$m = \frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2} = \frac{y_3 - b}{x_3} = \frac{y_4 - b}{x_4} = \ldots\ldots$$

Из овог израза се види, да постоји известан сталан однос између ординате и апсцисе сваке посматране тачке на задатој правој линији L. Овај сталан однос не само да важи за до сада посматране тачке, него се лако да закључити, да важи и за све тачке на правој, које се налазе и између њих и ван њих. То значи да тај сталан однос постоји између координата сваке тачке која се налази на задатој правој линији L.

Узмимо сада неку покретну тачку М, са промењљивим координатама (x,y) која се креће по задатој правој линији L. Покретна тачка М је једна од тачака посматране праве линије па и за њене координате важи утврђени стални однос т.ј.:

$$m = \frac{y - b}{x}$$

или

$$mx = y - b$$

одакле је

$$y = mx + b \ldots . 1).$$

Како покретна тачка М може заузети положај ма које тачке на задатој правој линији, а за њене координате увек важи однос изражен једначином 1) то значи да тај исти однос важи за све тачке на тој правој линији. *Тако нам једначина 1) претставља закон свију тачака на посматраној правој L и она се у аналитичкој геометрији назива једначином те праве линије.*

У једначини 1) фигуришу величине: x, y, m и b. Величине x и y су промењљиве количине и оне претстављају координате ма које тачке на посматраној правој линији и зато се зову текућим координатама. Величине m и b су сталне количине за једну те исту праву линију. Оне се мењају само у оном случају кад права промени положај према координатном систему. Величина b нам претставља дуж коју посматрана права отсеца од ординатне осе изнад или испод координатног почетка; а величина m је тангенс онога угла који задата права заклапа са позитивним смислом апсцисне осе и назива се *коефицијентом правца* те праве линије.

Мењањем величина m и b права која је изражена једначином $y = mx + b$ може заузимати све могуће положаје у правоуглом координатном систему XOY; због тога нам једначина 1) претставља општи облик једначине праве линије. Како је једначина 1) решена по промењљивој величини y то ћемо је звати *експлицитним обликом једначине праве линије.*

2 чл. Ако узмемо координате неке тачке и сменимо их у једначини 1) место промењљивих величина x и y, па ако и после смене остане лева страна једначине једнака њеној десној страни, онда се каже, да координате посматране тачке задовољавају једначину задате праве. Кад пак узмемо координате неке друге тачке и сменимо их у једначини 1) место промењљивих величина x и y, па ако после смене не остане лева страна једначине једнака њеној десној страни, онда се каже да координате посматране тачке не задовољавају једначину задате праве линије.

Пример: Испитати, да ли координате тачке A (3,5) задовољавају једначину праве: $y = 2x - 1$.

Решење: Сменом координата тачке A (3,5) у једначини: $y = 2x - 1$ место промењљивих количина, добивамо израз:

$$5 = 2.3 - 1$$

или

$$5 = 5.$$

Дакле координате посматране тачке задовољавају једначину задате праве, јер је и после смене лева страна једначине остала једнака њеној десној страни.

Други пример: Испитати, да ли координате тачке $B(2,4)$ задовољавају једначину: $y = 3x + 1$.

Решење: Кад у једначини: $y = 3x + 1$ место променљивих количина x и y ставимо координате тачке $B(2,4)$, онда је лева страна једначине једнака 7, а њена десна страна је једнака 4; па пошто те две величине нису међу собом једнаке, то значи, да координате посматране тачке не задовољавају једначину задате праве линије.

* 3 чл. Једначина облика: $y = mx + b$ увек претставља праву линију независно од тога какву (коначну и одређену) вредност будемо давали величинама m и b

Доказ: Ако узмемо ма које три тачке $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3\ y_3)$ чије координате задовољавају једначину $y = mx + b$, онда можемо написати следеће једначине:

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ y_3 &= mx_3 + b. \end{aligned}$$

Кад прву од ових трију једначина одузмемо од друге, а затим и од треће, онда добивамо следеће једначине:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= m(x_2 - x_1) \\ y_3 - y_1 &= m(x_3 - x_1). \end{aligned}$$

Ако прву од ових двеју једначина поделимо са другом, онда добивамо следећу једначину:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \ \ldots\ldots 2).$$

Ова нам једначина претставља однос између координата тачака $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; и $M_3(x_3\ y_3)$.

Из једначине 2) а према § 8 излази, да све три посматране тачке морају лежати на истој правој линији.

Ако бисмо сада узели у посматрање већ познате тачке $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$ и неку тачку $M_4(x_4, y_4)$ чије координате такође задовољавају задату једначину, онда бисмо на исти начин дошли до закључка, да и тачка $M_4(x_4, y_4)$ лежи на истој правој линији на којој се налазе тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тако бисмо се уверили и за сваку другу тачку, чије координате задовољавају задату једначину: $y = mx + b$, да са посматраним тачкама $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежи на истој правој линији.

На тај смо начин доказали, да је увек једначина: $y = mx + b$ аналитички претставник праве линије и обратно, да је увек права линија графички претставник те једначине.

Истовремено смо дошли до закључка, да све тачке, чије координате задовољавају једначину неке праве линије, морају лежати на тој правој.

◎ § 10. КОНСТРУКЦИЈА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ.

Како нам је права линија одређена са двема тачкама које се налазе на њој, то да бисмо конструисали неку праву, потребно је претходно из њене једначине наћи координате двеју тачака и одредити њихов положај на координатном систему. Затим треба кроз те две тачке помоћу лењира повући праву линију и на тај је начин извршена конструкција тражене праве.

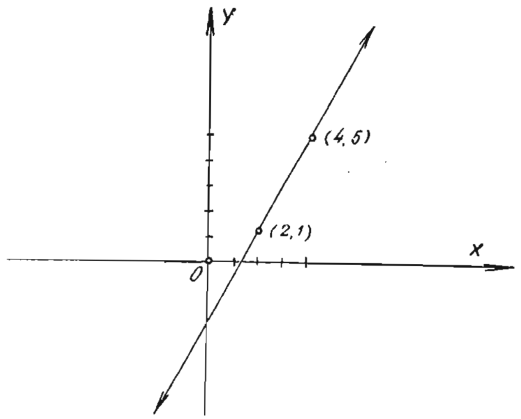
Пример: Конструисати праву линију чија је једначина: $y = 2x - 3$.

Решење: Прво треба из задате једначине одредити координате двеју произвољних тачака на траженој правој. То ћемо најлакше урадити помоћу следеће схеме изнад које ћемо написати и задату једначину:

$y = 2x - 3$

x	y
2	1
4	5

Сада ћемо у схеми испод x-осе ставити једну произвољну вредност н.пр. $x = 2$. Да бисмо нашли која вредност y-на одгорара узетој вредности x-са, ми ћемо у једначини праве место x-са ставити 2, па одатле израчунати вредност y-на. У овом случају излази да је: $y = 1$. Ову вредност ставимо у схеми испод y-на поред већ написане вредности x-са. Овако одређене вредности x-са и y-на одговарају координатама једне тачке на траженој правој линији. На исти начин одредимо и координате неке друге тачке; н.пр. за $x = 4$ излази да је $y = 5$. И ове вредности ставимо у схеми једну поред друге и то 4 испод x-са, а 5 испод y-на.



Сл. 15.

После свега овога нацртамо један правоугли координатни систем (сл. 15) и у њему одредимо тачке чије се координате налазе на поменутој схеми т.ј. (2,1) и (4,5), Затим помоћу лењира саставимо ове две тачке и продужимо на обадве стране, чиме смо конструисали тражену праву линију.

◎ § 11. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ КООРДИНАТИ ПОЧЕТАК.

Ако у једначини 1) § 9. величина b буде једнака нули, онда она добива облик:

$$y = mx \ldots\ldots 1).$$

Очевидно је да права која је претстављена овом једначином, мора пролазити кроз координати почетак, јер је отсечак који она отсеца од ординатне осе једнак нули. Тако нам једначина 1) претставља облик једначине праве која пролази кроз координатни почетак.

Пример: Наћи једначину праве линије која пролази кроз координатни почетак а са апсцисном осом заклапа угао од 45°.

Решење:

$$y = tg\,45^0\,x$$

или

$$y = x$$

Задатак:

1) Наћи једначну праве линије која пролази кроз координатни почетак, а са апсцисном осом заклапа угао од: *a*) 30°;) *b*) 60°; *c*) 120°; *d*) 150°; *e*) 135°.

◎ § 12. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ ЈЕДНУ ТАЧКУ.

1 чл. Ако права $y = mx + b$ пролази кроз тачку $P(k, l)$, онда координате ове тачке морају задовољавати једначину посматране праве, тако да се може написати:

$$y = mx + b$$
$$l = mk + b$$

Кад другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, онда добивамо једначину:

$$y - l = m(x - k)$$

Једначича 1) нам претставља једначину праве линије која пролази кроз задату тачку $P(k,l)$, јер координате ове тачке увек задовољавају ту једначину. Како је у једначини 1) коефициенат правца m неодређен т.ј. може имати безброј разних вредности, то значи да кроз једну тачку може пролазити безброј правих линија.

2 чл. *Једначина праве линије паралелне са апсцисном осом.*

Ако у једначини 1) величину m будемо смањивали све дотле док не постане равна нули онда једначина добива облик:

$$y - l = 0(x - k)$$

или

$$y - l = 0$$

одакле је

$$y = l \ldots\ldots 2).$$

Како је коефијенат правца ове праве једнак нули, то је и угао који она заклапа са апсцисном осом раван нули, што значи, да једначина 2) претставља праву линију паралелну са апсцисном осом. Величина l је растојање између те праве и апсцисне осе.

Ако у једначини 2) величину l будемо смањивали тако да на послетку постане равна нули, онда ће се и права линија која је њоме претстављена примицати апсцисној оси све дотле док се са њоме не поклопи. У томе случају једначина 2) добива облик:

$$y = 0 \ldots\ldots 3).$$

Тако нам једначина 3) није ништа друго до једначина апсцисне осе у правоуглом координатном систему XOY.

3 чл. Једначина праве линије паралелне са ординатном осовином.

Ако у једначини 1) ставимо да је $m = \operatorname{tg} 90^0$, онда је права, коју она претставља, паралелна са ординатном осом, а њезина једначина добива облик:

$$y - l = tg\, 90^0\,(x - k)$$

или

$$y - l = \infty(x - k).$$

Како у овој једначини поред коначних величина фигурише и бесконачно велика количина, то нам је иста једначина неодређена и неупотребљива. Међутим ако једначину: $y = tg\, 90^0\ (x - k)$ поделимо са величином $tg\, 90^0$, онда долазимо до следећег одређеног облика:

$$\frac{y - l}{tg\, 90^0} = x - k$$

или

$$\frac{y - l}{\infty} = x - k$$

одакле је

$$O = x - k$$

или пак

$$x = k \;\ldots\ldots 4).$$

Једначина 4) претставља нам праву линију која пролази кроз задату тачку $P\,(k, l)$ и која је паралелна са ординатном осовином. Величина k је отстојање између те праве и ординатне осовине.

Ако сада у једначини 4) смањујемо величину k тако да на послетку постане равна нули, онда ће се и права, која је њом претстављена, примицати ординатној оси све дотле, док се са њоме не поклопи. У томе случају једначина 4) добива облик:

$$x = O \;\ldots\ldots 5).$$

Једначина 5) није ништа друго до једначина ординатне осовине у правоуглом кординатном систему XOY.

§ 13. ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ ДВЕ ДАТЕ ТАЧКЕ.

Једначина праве линије која пролази кроз тачку $M_1\,(x_1, y_1)$ према § 12 чл. 1. дата је изразом:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \;\ldots\ldots 1).$$

Како је у овој једначини коефицијенат правца m неодређен, то нам иста може претстављати сваку праву линију која пролази кроз задату тачку $M_1(x_1, y_1)$. Од свих оних правих линија које пролазе кроз тачку $M_1\,(x_1, y_1)$ једна ће пролазити и кроз тачку $M_2\,(x_2,\ y_2)$. Да би једначина 1) претстављала баш ону праву линију која пролази и кроз тачку $M_2(x_2\ y_2)$, потребно је и довољно да координате ове тачке задовољавају једначину поменуте праве; т.ј. потребно је да буде:

$$y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

одакле је

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Сменом овако израчунате вредности величине m у једначини 1) добивамо следећу једначину:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \;\ldots\ldots 2).$$

Ова једначина претставља праву линију која пролази кроз две посматране тачке $M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$, јер координате ових тачака задовољавају поменуту једначину. Како у једначини 2) не фигурише ни једна неодређена константа, то значи да је права линија, која је њоме претстављена, потпуно одређена.

Пример: Наћи једначину праве линије која пролази кроз тачке са координатима: (3, 2) и (4, 5).

Решење:

$$y - 2 = \frac{5 - 2}{4 - 3}\,(x - 3)$$

одакле је:

$$y = 3x - 7.$$

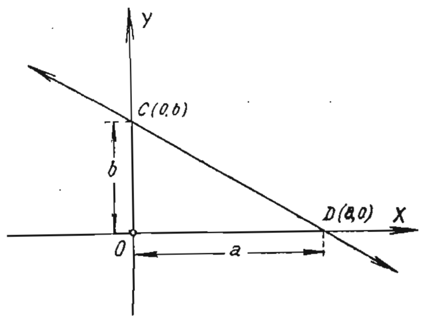
Задатак: Наћи једначину праве линије која пролази кроз тачке:

a) (—2,1) и (3,6); *b)* (3,—1) и (—1,1);

c) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ и *d)* (2,0) и $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

§ 14. СЕГМЕНТНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ.

Нека нам је на сл. 16 претстављена права линија која пролази кроз тачке $C(O, b)$ и $D(a, O)$, односно која отсеца од ординатне осе дуж b, а од апсцисне осе дуж a.



Сл. 16.

Једначина посматране праве биће претстављена изразом:

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

или

$$y = -\frac{bx}{a} + b$$

Ако ову једначину поделимо са b онда добивамо:

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

одакле је:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots\ldots 1).$$

Ова нам једначина претставља посматрану праву линију. Како је једначина 1) изражена помоћу отсечака a и b које посматрана права отсеца од апсцисне и ординатне осовине, *то се она назива сегментним обликом једначине праве линије.*

Пример: Наћи једначину праве линије која отсеца од ординатне осе отсечак: $b = 4$, а од апсцисне осе отсечак: $a = 3$.

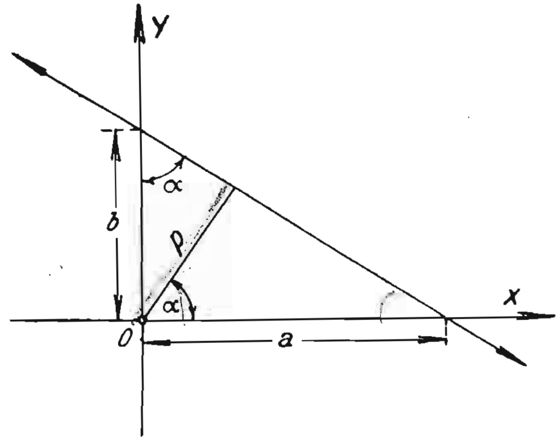
Решење:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Задатак: Наћи једначну праве линије која отсеца од апсцисне и ординатне осовине отсечке: 1) $a = -3$, $b = 2$ 2) $a = 1$, $b = -4$; 3) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ и 4) $a = 0{,}25$, $b = 0{,}75$.

§ 15 НОРМАЛНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ.

Нека је на сл. 17 претстављена права линија која отсеца од ординатне осе дуж b, а од апсцисне осе дуж a, Обележимо са p отстојање од те праве до координатног почетка, а са α онај угао који то отстојање заклапа са позитивном граном апсцисне осе.



Сл. 17.

Једначина посматране праве линије биће претстављена у сегментном облику следећим изразом:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \ldots\ldots 1).$$

Из слике се види да је:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{p}{\cos\alpha} \\ \text{и} \qquad & \\ b &= \frac{p}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 2).$$

Ако у једначини 1) место величина a и b ставимо њихове вредности из израза 2) онда добивамо следећу једначину:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$$

одакле је:

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0 \quad \ldots\ldots 3).$$

Ова нам једначина претставља посматрану праву линију. Како је једначина 3) изражена помоћу нормалног отстојања од посматране праве линије до координатног почетка и помоћу угла који то отстојање заклапа са позитивном граном апсцисне осе, *што се она назива нормалним обликом једначине праве линије.*

Пример: Наћи једначину праве линије чије је отстојање од координатног почетка $p = 5$, а угао који то отстојање заклапа са позитивном граном апсцисне осе $\alpha = 30^0$.

Решење:

$$x.\cos 30^0 + y.\sin 30^0 - 5 = 0$$

или

$$x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} - 5 = 0.$$

Задатак: Наћи једначину праве линије чије је отстојање од координатног почетка и угао који оно заклапа са позитивном граном апсцисне осе: 1) $p = 3$, $\alpha = 45^0$; 2) $p = 4$, $\alpha = 60^0$; 3) $p = 2$, $\alpha = 135^0$ и 4) $p = 6$, $\alpha = 150^0$.

§ 16. ОПШТИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ

До сада прегледани облици једначине праве линије:

$$y = mx + b; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{и} \quad x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = O,$$

могу се написати и на следећи начин:

$$mx - y + b = O$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = O$$

$$x.\cos\alpha + y\sin\alpha - p = O.$$

Код сва три наведена облика једначине праве линије, запажа се једно опште својство, а то је, да се сваки од њих може претставити једним триномом сведеним на нулу, код кога се налази по један известан коефицијенат уз променљиве величине x и y и по један слободан члан који не зависи ни од x-са ни од y-на. Према томе сваки од наведених тринома може бити изражен једним општим триномом сведеним на нулу, који би имао следећи облик:

$$Ax + By + C = O \ldots\ldots 1).$$

У овој једначини величина A може претстављати ма коју од величине: m, $\frac{1}{a}$ и $\cos\alpha$; величина B ма коју од величина, -1, $\frac{1}{b}$ и $\sin\alpha$, а величина C ма коју од величина: b, -1 и $-p$. Величине A, B и C могу имати и шире значење. Оне

могу претстављати коефицијенте наведених једначина, ако су исте претходно помножене са неким сталним бројем λ. *Тако нам једначина 1) претставља општи облик једначине праве линије.*

И краћи облици једначина појединих правих линија у принципу се могу свести на општи облик. Тако на пример једначина праве линије: $y = mx$ може се написата и на следећи начин:

$$mx - y + O = O.$$

У овој једначини величина m претставља коефицијенат A, величина -1 претставља коефицијенат B, а нула нам претставља слободан члан C. Из овога се примера види, да у једначини 1) поједини од коефицијената A, B, и C могу у специјалним случајевима бити равни и нули.

Пример: Написати једначину праве линије, чији је коефицијенат уз x једнак 3, уз y једнак 4, а слободни члан је једнак 5.

Решење:

$$3x + 4y + 5 = 0.$$

§ 17. ЈЕДНАЧИНУ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ ИЗ ОПШТЕГ ОБЛИКА ДОВЕСТИ НА НОРМАЛНИ ОБЛИК.

Једначине: $Ax + By + C = 0$ и $x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0$, претстављаће исту праву линију, ако су им једнаки или пропорционални коефицијенти уз исте променљиве величине и слободни чланови. У сваком случају, да би наведене једначине претстављале једну те исту праву линију, треба да буде:

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C}.$$

Ако количник ове продужне пропорције обележимо са λ онда имамо да је:

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-P}{C} = \lambda \ldots\ldots 1).$$

Из односа 1) излазе следеће једначине:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \lambda A \\ \sin\alpha &= \lambda B \\ -p &= \lambda C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Из ових једначина можемо одредити вредност величине λ. Ако прве две од једначина 2) дигнемо на квадрат па их затим саберемо, онда добивамо:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2$$

одакле је:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Овако израчуната вредност величине λ има два знака, знак плус и знак минус. Који ћемо од њих узети, одредићемо из треће од једначина 2) т.ј. из једначине: $\lambda C = -p$. Како је десна страна ове једначине негативна, то мора и њена лева страна бити негативна, а то ће бити само у томе случају, ако њени фактори λ и C имају супротне знаке.

Из овога излази правило према коме фактору λ треба увек дати знак супротан ономе који има величина C.

Тако из једначина 2) излази да је:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\alpha &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \\ -p &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Ако у једначини: $x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0$, место величина: $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и p ставимо њихове вредности из израза 3) онда добивамо:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \ldots\ldots 4).$$

Једначина 4) нам претставља нормални облик једначине праве линије чији је општи облик: $Ax + By + C = 0$.

Пример: једначину $3x + 4y - 2 = 0$ претворити у нормални облик.

Решење: У овом случају је: $\lambda = \dfrac{1}{+\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{1}{5}$; те ће тражена једначина бити:

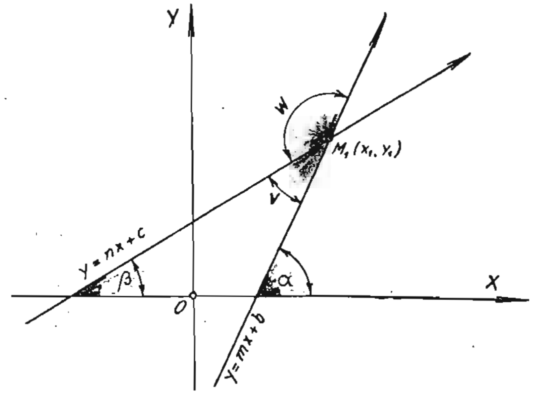
$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = O$$

Задатак:

Једначину: a) $5x - 12y + 7 = O$; b) $8x - 6y - 3 = O$; и c) $24x + 7y + 9 = O$ превести у нормални облик.

§ 18 УГАО КОЈИ ЗАХВАТАЈУ ДВЕ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ.

1 чл. Нека је на сл. 18 претстављен координатни систем XOY и у њему две праве линије, које се секу у тачки $M_1(x_1, y_1)$. Једначине тих правих линија нека су дате изразима: $y = mx + b$ и $y = nx + c$.



Сл. 18

Ако угао који ове две праве захватају обележимо са v, онда се из слике види, да је:

$$v = \alpha - \beta$$

одакле је

$$tg v = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

Како је $tg\alpha = m$ и $tg\beta = n$, то овај образац можемо изразити на следећи начин:

$$tg\, v = \frac{m-n}{1+mn} \ldots\ldots 1).$$

Ако угао који је упоредан углу v обележимо са w, онда ће бити:

$$w = 180^0 - v$$

одакле је

$$tg\, w = tg(180^0 - v) = -tg\, v$$

или

$$tg\, w = -\frac{m-n}{1+mn}.$$

Пример: Наћи угао који захватају праве линије:

$$y = 3x + 7 \text{ и } y = \frac{x}{2} - 3.$$

Решење:

$$tgv = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = 1$$

одакле је:

$$v = 45^0.$$

2 чл. Услов за паралелност двеју правих линија.

Ако претпоставимо да су две праве линије међу собом паралелне, онда је и угао који оне захватају једнак нули. У томе случају образац 1) се своди на следећи израз:

$$O = \frac{m - n}{1 + mn}$$

одакле је

$$O = m - n$$

или

$$m = n \ldots\ldots 2).$$

Из израза 2) се изводи следећи закључак:

Праве линије, чији су коефицијенти правца једнаки, морају бити међу собом паралелне.

На тај начин су међу собом паралелне праве линије претстављене следећим једначинама:

$$y = 3x + 2$$
$$y = 3x - 1933$$
$$y = 3x + 0{,}005.$$

3 чл. Услов за нормалност двеју правих линија.

Ако претпоставимо да су две праве линије нормалне једна на другој, онда оне захватају прав угао. У томе случају образац 1) се своди на следећи израз:

$$tg\, 90^0 = \frac{m - n}{1 + mn}$$

или

$$\infty = \frac{m - n}{1 + mn}.$$

Да би десна страна овога израза била бесконачно велика количина потребно је, да јој бројитељ буде бесконачно

велики, а именитељ коначан или да јој бројитељ буде коначан а именитељ једнак нули. Пошто је бројитељ поменутога израза састављен од разлике два коначна броја, то он не може бити бесконачан, те не преостаје ништа друго, него да именитељ наведенога израза мора бити једнак нули, т. ј.

$$1 + mn = O$$

одакле је:

$$\left.\begin{aligned} m &= -\frac{1}{n} \\ n &= -\frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Из израза 3) се изводи следећи закључак:

Праве линије, код којих је коефицијент правца једне једнак негативној реципрочној вредности коефицијента правца друге, морају бити нормалне једна на другој.

Тако су нормалне једна на другој линије чије су једначине дате изразима:

$$y = 2x - 5$$

и

$$y = -\frac{x}{2} + 97.$$

§ 19. КООРДИНАТЕ ПРЕСЕКА ДВЕЈУ ПРАВИХ ЛИНИЈА.

1 чл. На слици 18 претстављене су две праве линије, које се секу у тачки $M_1(x_1,y_1)$. Једначине тих линија дате су следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + b \\ y &= nx + c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Како се тачка $M_1(x_1,y_1)$ налази на обема посматраним правим линијама, то њене координате морају задовољавати једначине тих линија. На тај се начин добивају следеће једначине:

$$y_1 = mx_1 + b$$

и

$$y_1 = nx_1 + c.$$

Решавањем ових двеју једначина по величинама x_1 и y_1 добивамо изразе:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{c-b}{m-n} \\ y_1 &= \frac{mc-nb}{m-n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 2).$$

Изрази 2) нам претстављају координате пресека двеју посматраних правих линија.

Ако једначине 1) решимо по величинама x и y, онда добивамо следеће изразе:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c-b}{m-n} \\ y &= \frac{mc-nb}{m-n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 3).$$

Упоређивањем израза 2) и 3) долази се до закључка да је:

$$\text{и} \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 4).$$

Из овога пак излази, да и изрази 3) претстављају координате пресека посматраних правих линија.

На основу свега изложеног долази се до следећег правила:

Координате пресека двеју правих линија добивају се решавањем њихових једначина по променљивим величинама (x и y).

Пример: Наћи координате пресека правих линија, чије су једначине: $3x - 2y - 1 = 0$ и $2x + y - 10 = 0$.

Решење: Кад задате једначине решимо по променљивим величинама, добивамо, да је: $x = 3$ а $y = 4$ т.ј. тачка са координатама (3,4) је пресек задатих правих.

Напомена: Проверити ово решење конструкцијом задатих правих линија.

Чл. 2. Паралелне праве линије.

Ако претпоставимо, да су посматране праве линије међу собом паралелне, онда су им коефицијенти правца једнаки. У томе случају обрасци 3) се своде на следеће изразе:

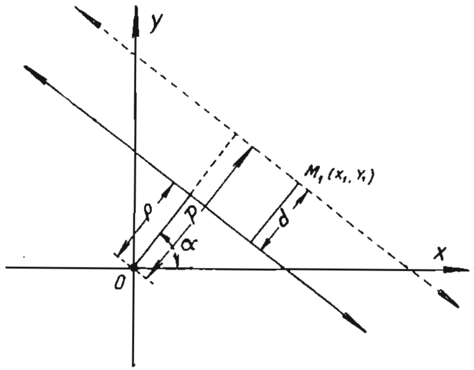
$$x = \frac{c-b}{m-m} = \frac{c-b}{0} = \infty$$

$$y = \frac{cm-bm}{m-m} = \frac{c-b}{0} = \infty$$

Из овога излази закључак, да се праве линије, које су међу собом паралелне, секу у бесконачности.

§ 20 РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ПРАВЕ И ТАЧКЕ.

1. чл. Растојање тачке од праве, ако се задата тачка и координатни почетак не налазе на истој страни посматране праве линије.



Сл. 19.

Нека је на сл. 19 претстављена права линија чија је једначина дата изразом:

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0.$$

Ако једначина посматране праве није дата у нормалном облику, онда је треба довести на тај облик. Сем тога, нека је на истој слици дата и тачка $M_1(x_1, y_1)$ која се налази ван задате праве линије.

Да бисмо нашли раздаљину d између те тачке и праве, узећемо у посматрање једначину оне праве линије, која пролази кроз дату тачку а паралелна је са задатом правом. Очевидно је, да ће једначина те праве у нормалном облику бити претстављена изразом:

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - P = 0.$$

Како се на овој правој налази и тачка $M_1(x_1, y_1)$, то и њене координате морају задовољавати једначину посматране праве т.ј. мора бити:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - P = 0$$

одакле је

$$P = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \ldots\ldots 1).$$

Из приложене слике се види, да је отстојање:

$$P - p = + d \ldots\ldots 2).$$

Како је у посматраном случају величина P већа од величине p, то ће и растојање d имати позитиван знак. Тај ће знак растојање d увек имати, докле год се посматрана тачка буде налазила на оној страни задате праве ~~на~~ којој се не налази координатни почетак, јер ће у сваком таквом случају величина P бити већа од величине p.

Ако у једначини 2) место величине P ставимо њену вредност из једначине 1), онда добивамо:

$$\boxed{x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p = +d}$$

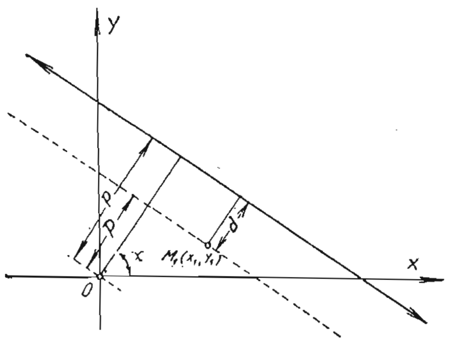
или с обзиром ~~на једначине~~ 3) § 17 добива се:

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = +d \, .\, .\, .\, .\, . \, 3).$$

Обрасцем 3) је изражено правило које гласи:

Кад се у нормалном облику једначине посматране праве линије место текућих координата ставе координате задате тачке, која се не налази на истој страни праве на којој је и координатни почетак, онда се отстојање између дате праве и задате тачке добива са позитивним знаком.

2 чл. Растојање тачке од праве, ако се задата тачка и координатни почетак налазе на истој страни посматране праве линије.



Сл. 20.

Нека је на сл. 20 претстављена права линија чија је једначина: $x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0$. Сем тога је на истој слици дата и тачка $M_1(x_1,y_1)$ која не лежи на задатој правој, него се налази на оној страни посматране праве на којој је и координантни почетак.

Да бисмо нашли отстојање од дате праве до задате тачке, узећемо у посматрање једначину оне праве линије, која пролази кроз задату тачку, а паралелна је са датом

правом. Очевидно је да ће једначина те праве бити претстављена изразом:

$$x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - P = 0.$$

Како се на овој правој налази и тачка $M_1(x_1,y_1)$ то њене координате морају задовољавати једначину посматране праве линије т.ј. мора бити:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - P = 0$$

одакле је:

$$P = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha \, .\, .\, .\, .\, . \, 4).$$

Из слике 20 види се да је:

$$P + d = p$$

или

$$P - p = -d \, .\, .\, .\, .\, . \, 5).$$

Ако у једначини 5) место величине P ставимо њену вредност из једначине 4) онда добивамо:

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p = -d$$

или с обзиром на једначине 3) § 17 добива се:

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = -d \, .\, .\, .\, .\, . \, 6).$$

Из израза 6) долази се до следећег правила које гласи:

Кад се у нормалном облику једначине посматране праве линије место текућих координата ставе координате задате тачке, која се налази на истој страни праве на којој је и координатни почетак, онда се отстојање између дате праве и задате тачке добива са негативним знаком.

Отстојање од тачке до праве је само по себи увек позитивна величина, а ако се у рачуну добије са знаком минус, то не значи да је оно негативно, него само да се задата тачка налази на истој страни праве на којој је и координантни почетак. Међутим ако се отстојање од тачке до праве у рачуну добије са знаком плус, то, поред тога што је оно само по себи позитивно, истовремено значи, да се задата тачка и координатни почетак налазе на разним странама посматране праве линије.

1) Пример: Наћи отстојање од праве $4x + 3y - 12 = 0$ до тачке *a*) (6,1); *b*) (2,—7).

Решење под *a*): $\dfrac{4.6 + 3.1 - 12}{+5} = +3$. Дакле тачка (6,1) отстоји од задате праве за 3 дужинске јединице, а не налази се на оној страни праве на којој је координатни почетак.

Решење под b): $\frac{4.2 + 3\,(-7) - 12}{+\,5} = -5$. Дакле тачка (2,—7) отстоји од задате праве за 5 дужинских јединица, а налази се на истој страни праве на којој је и координатни почетак.

2) Пример: Наћи отстојање од праве $3x - 4y + 12 = 0$ до тачке: c) (1,5); е) (4,1).

Решење под c): $\frac{3.1 - 4.5 + 12}{-\,5} = +1$. Дакле тачка (1,5) отстоји од задате праве за 1 дужинску јединицу, а не налази се на оној страни праве на којој је координатни почетак.

Решење под e): $\frac{3.4 - 4.1 + 12}{-\,5} = -4$. Дакле тачка (4,1) отстоји од задате праве за 4 дужинске јединице, а налази се на истој страни праве на којој је координатни почетак.

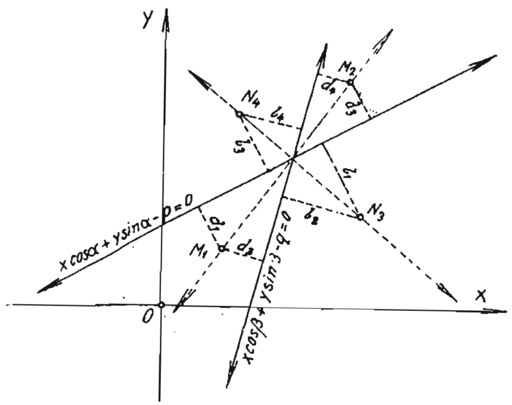
Задаци:

1) Наћи отстојање од праве: $5x - 12y - 4 = 0$ до тачке: a) (3,2); b) (4,—3).

2) Наћи отстојање од праве: $6x - 8y + 15 = 0$ до тачке: c) (2,5); e) (1,—1).

* § 21. ЈЕДНАЧИНА СИМЕТРАЛЕ УГЛА.

Ако се две праве линије секу у једној коначној тачци, онда оне формирају четири угла, од којих су два и два унакрсна и као таква једнака. Нека нам је на сл. 21 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему две праве линије које се секу у једној коначној тачки. Једначине тих правих линија нека су нам дате у нормалном облику изразима:



Сл. 21

$$x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0$$

и

$$x.cos\beta + ysin\beta - q = 0.$$

Унакрсни углови имају једну заједничку симетралу, те тако на приложеној слици имамо четири угла а две симетрале.

1 чл. Једначина симетрале она два унакрсна угла од којих се у једном налази координатни почетак.

Да бисмо нашли једначину симетрале оних унакрсних углова од којих се у једном налази координатни почетак, узећемо на њој једну тачку $M_1(x_1, y_1)$. Отстојање те тачке од праве $x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0$ дато је изразом: $x_1cos\alpha + y_1sin\alpha - p = -d_1$ или $d_1 = -(x_1cos\alpha + y_1sin\alpha - p)$, јер се и тачка и координатни почетак налазе на истој страни праве.

Отстојање тачке $M_1(x_1,y_1)$ од праве $x.cos\beta + y.sin\beta - q = 0$ дато је изразом: $x_1cos\beta + y_1sin\beta - q = -d_2$ или $d_2 = -(x_1cos\beta + y_1sin\beta - q)$, јер се и тачка и координатни почетак налазе на истој страни праве.

По дефиницији симетрале угла отстојања d_1 и d_2 морају бити једнака, те тако имамо да је:

$$-(x_1cos\alpha + y_1sin\alpha - p) = -(x_1cos\beta + y_1sin\beta - q)$$

или

$$x_1cos\alpha + y_1sin\alpha - p = x_1cos\beta + y_1sin\beta - q \;.\;.\;.\;.\; 1).$$

Узмимо у посматрање још и тачку $M_2(x_2,y_2)$ на истој симетрали. Отстојање ове тачке од праве $x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0$ дато је изразом: $x_2cos\alpha + y_2sin\alpha - p = +d_3$, јер се тачка и координатни почетак не налазе на истој страни праве.

Отстојање тачке $M_2(x_2,y_2)$ од праве $x.cos\beta + y.sin\beta - q = 0$, дато је изразом: $x_2cos\beta + y_2sin\beta - q = +d_4$ јер се тачка и координатни почетак не налазе на истој страни праве.

Како по дефиницији симетрале угла и отстојања d_3 и d_4 такође морају бити једнака, то можемо написати:

$$x_2cos\alpha + y_2sin\alpha - p = x_2cos\beta + y_2sin\beta - q \;.\;.\;.\;.\; 2).$$

Једначине 1) и 2) су сличне по форми, а разликују се само тиме, што се у првој налазе координате тачке $M_1\,(x_1, y_1)$ а у другој координате тачке $M_2\,(x_2, y_2)$. Исту би форму имале и једначине изведене помоћу ма које тачке на посматраној симетрали, па према томе и помоћу неке покретне тачка М са промењљивим координатама (x,y) т.ј. било би:

$$x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = x.cos\beta + y.sin\beta - q$$

или

$$(x.cos\alpha + y,sin\alpha - p) - (x.cos\beta + y.sin\beta - q) = 0 \ldots\ldots 3).$$

Једначина 3) важи за сваку тачку на посматраној симетрали, па се због тога и сматра за једначину те симетрале.

Из овога се изводи следеће правило:

Једначина симетрале два унакрсна угла од којих је у једном координатни почетак, налази се на тај начин што се једначине кракова доведу на нормални облик па се онда одузме једна од друге.

2 чл. Једначина симетрале она два унакрсна угла од којих се ни у једном не налази координатни почетак.

Да бисмо нашли једначину симетрале два унакрсна угла у којима не лежи координатни почетак, узећемо на сл. 21. тачку $N_3(x_3,y_3)$ која се налази на посматраној симетрали. Отстојање ове тачке од праве $x.cos\beta + y.sin\beta - q = 0$ дато је изразом: $x_3cos\beta + y_3sin\beta - q = + l_2$, јер се тачка и координатни почетак не налазе на истој страни праве.

Отстојање тачке $N_3(x_3,y_3)$ од праве $x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0$ дато је изразом: $x_3cos\alpha + y_3sin\alpha - p = - l_1$ или $-(x_3cos\alpha + y_3\ sin\alpha - p) = l_1$, јер се тачка и координатни почетак налазе на истој страни праве.

Како по дефиницији симетрале угла отстојања l_1 и l_2 морају бити једнака, то се може написати:

$$-(x_3cos\alpha - y_3sin\alpha - p) = + (x_3cos\beta + y_3sin\beta - q).$$

или

$$(x_3\ cos\ \alpha + y_3sin\alpha - p = -(x_3cos\ \beta + y_3sin\beta - q) \ldots\ldots 4).$$

Узмимо у посматрање још и тачку $N_4(x_4,y_4)$ на истој симетрали. Отстојање од ове тачке до праве $x.cos\beta + y.sin\beta - q = 0$ дато је изразом: $x_4cos\beta + y_4sin\beta - q = - l_4$ или $-(x_4cos\beta + y_4sin\beta - q) = l_4$, јер се тачка и координатни почетак налазе на истој страни праве.

Отстојање тачке $N_4(x_4,y_4)$ од праве $x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0$ дато је изразом: $x_4cos\alpha + y_4sin\alpha - p = + l_3$, јер се тачка и кординатни почетак не налазе на истој страни праве.

Како према дефиницији симетрале угла отстојања l_3 и l_4 морају бити једнака то се може написати:

$$(x_4cos\alpha + y_4sin\alpha - p) = -(x_4cos\beta + y_4sin\beta - q) \ldots\ldots 5).$$

Једначине 4) и 5) имају исту форму, а разликују се само тиме што се у првој налазе координате тачке $N_3(x_3,y_3)$, а у другој координате тачке $N_4(x_4,y_4)$. Исту форму би имале и једначине изведене помоћу ма које тачке на посматраној симетрали, па према томе и помоћу неке покретне тачке N са промењљивим координатама (x, y) т.ј. било би:

$$(x.cos\alpha + y,sin\alpha - p) = -(x.cos\beta + y.sin\beta - q)$$

или

$$(x.cos\alpha + y.sin\alpha - p) + (x,cos\beta + y.sin\beta - q) = 0 \ldots\ldots 6)$$

Једначина 6) важи за сваку тачку на посматраној симетрали, па се према томе и сматра једначином те симетрале.

Из овога се изводи следеће правило:

Једначина симетрале два унакрсна угла у којима не лежи координатни почетак, налази се на тај начин што се једначине кракова доведу на нормални облик па се онда саберу.

Пример: Наћи једначине симетрала углова чији су краци дати једначинама: $4x - 3y + 1 = 0$ и $6x + 8y - 3 = 0$.

Решење: нормални облици једначина кракова су:

$$-\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - \frac{1}{5} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{6x}{10} + \frac{8y}{10} - \frac{3}{10} = 0.$$

Једначина симетрале она два унакрсна угла од којих у једном лежи координатни почетак је:

$$\left(-\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{6x}{10} + \frac{8y}{10} - \frac{3}{10}\right) = 0 \text{ или } 14x + 2y - 1 = 0,$$

Једначина симитрале она два унакрсна угла у којима не лежи координатни почетак је:

$$\left(-\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6x}{10} + \frac{8y}{10} - \frac{3}{10}\right) = 0 \text{ или } 2x - 14y + 5 = 0$$

Задатак:

Наћи једначине симетрала углова чији су краци дати једначинама: $24x - 7y - 3 = 0$ и $3x - 4y + 2 = 0$.

* § 22 ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ ЛИНИЈЕ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ ПРЕСЕК ДВЕЈУ ЗАДАТИХ ПРАВИХ

Чл. 1. Узмимо у посматрање две праве линије које се секу у једној коначној тачки $M_1\ (x_1, y_1)$. Нека су њихове једначине дате у макаквом облику; ми их краткоће ради можемо обележити са $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Пошто су x_1 и y_1 *координате* тачке пресека ових двеју правих, то значи да оне морају задовољавати обе њихове једначине.

Ако саберемо једначине посматраних правих линија, онда добивамо следећу једначину:

$$F_1 + F_2 = F_3 \ldots\ldots 1).$$

Како је за вредност x_1 и y_1 лева страна једначине 1) по претпоставци равна нули, то и њена десна страна мора бити равна нули за те исте вредности x-са и y-на јер иначе неби било једнакости. Значи да координате x_1 и y_1 задовољавају и једначину $F_3 = 0$, те према томе и права која је њоме претстављена мора пролазити кроз пресек оних двеју правих линија чије су једначине: $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Пример: Нека су једначине двеју правих линија дате изразима: $3x - y - 3 = 0$ и $x + 2y - 8 = 0$. Решавањем ових двеју једначина по променљивим величинама добивамо да је: $x = 2$ и $y = 3$, које нам вредности истовремено претстављају координате пресека задатих правих линија.

Кад саберемо једначине задатих правих линија онда добивамо следећу једначину: $4x + y - 11 = 0$. Ако у овој једначини место променљивих количина x и y ставимо координате пресека задатих правих линија, онда се уверавамо да је оне потпуно задовољавају, што значи, да и права која је њоме претстављена мора пролазити кроз пресек задатих правих линија.

Напомена: Проверити графички овај резултат.

Чл. 2. Ако сада саберемо једначине: $F_1 = 0$; $F_2 = 0$ и $F_3 = 0$, онда добивамо следећу једначину:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \ldots\ldots 2).$$

Како је сваки сабирак ове једначине за x_1 и y_1 једнак нули, то значи, да је и цела једначина за исте вредности x-са и y-на такође равна нули.

Ако сва три сабирка једначине 2) помножимо са неким сталним и од нуле различитим величинама λ_1, λ_2 и λ_3, тада добивамо једначину: $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$. Очевидно је да ће и ову једначину задовољавати координате x_1 и y_1, т.ј. права која је њоме претстављена, мора пролазити кроз пресек првобитних правих: $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Пример: У претходном смо примеру видели да праве линије, чије су једначине: $3x - y - 3 = 0$; $x + 2y - 8 = 0$ и $4x + y - 11 = 0$; пролазе кроз тачку са координатама (2,3). Ако прву од наведених једначина помножимо са бројем $\lambda_1 = 3$; другу са бројем $\lambda_2 = 2$, а трећу са бројем $\lambda_3 = 1$ па их тада све саберемо, онда добивамо следећу једначину: $3(3x - y - 3) + 2(x + 2y - 8) + 1(4x + y - 11) = 0$ одакле је:

$$15x + 2y - 36 = 0.$$

Кад у овој једначини место променљивих количина x и y ставимо координате тачке (2,3), онда се уверавамо, да је и она њима задовољена, што значи, да и права, која је претстављена овом једначином, мора пролазити кроз пресек посматраних правих линија.

Напомена: И овај резултат проверити графички.

Из свега овога може се извући следећи закључак:

Ако су $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$ једначине двеју правих линија које пролазе кроз једну тачку, онда ће и све праве линије које настану ма каквим комбинацијама сабирања и одузимања ових двеју једначина помножених са неким сталним величинама λ_1 и λ_2, морати пролазити такође кроз ту исту тачку.

Чл. 3. Права линија чија је једначина:

$$F_1 + \lambda F_2 = 0 \ldots\ldots 3)$$

мора пролазити кроз пресек оних двеју правих, које су претстављене једначинама: $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$, па ма какву коначну вредност имао број λ. Пошто величина λ може имати безброј много вредности, то нам и једначина 3) може претстављати безброј много правих линија, које пролазе кроз тачку пресека правих: $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$. Да би нам једначина 3) претстављала једну одређену праву линију, то и величини λ морамо дати једну одређену вредност. Вредност величине λ може бити одређена и из услова да права 3) има паралелан или нормалан положај према некој познатој правој или да пролази кроз неку задату тачку ит.д. ит.д.

Пример: Одредити вредност параметра λ такву, да би права: $3x - 2y - 1 + \lambda(2x - y - 2) = 0$ била паралелна са правом: $y = 3x + 7$.

Решење: Да би задате праве линије биле паралелне, потребно је и довољно, да су им коефицијенти правца једнаки. Зато морамо и једначину: $3x - 2y - 1 + \lambda(2y - y - 2) = 0$ довести на експлицитни облик т.ј. морамо је решити по y-ну.

Тако добивамо следећу једначину:

$$y = \frac{3 + 2\lambda}{2 + \lambda} x + \frac{1 + 2\lambda}{2 + \lambda}.$$

Коефицијенат правца ове једначине мора бити једнак коефицијенту правца једначине:

$$y = 3x + 7$$

т.ј. мора бити

$$3 = \frac{3 + 2\lambda}{2 + \lambda}$$

одакле је

$$\lambda = -3.$$

Задаци:

◎ 1) Наћи једначину праве линије: a) која од ординатне осе отсеца дуж $b = 3$, а са позитивним смислом апсцисне осе заклапа угао $\alpha = 45^0$, b) која са позитивним смислом апсцисне осе заклапа угао $\alpha = 135^0$, а од ординатне осе отсеца дуж $l = -2$.

◎ 2) Конструисати праве линије: a) $y = x$; b) $y = 2x$; c) $y = -2x + 3$; d) $y = -3x$; e) $y = x - 4$ и f) $y = \frac{2}{3} x - 1$.

◎ 3) Наћи једначину праве линије: a) која пролази кроз тачку (2,3), а са позитивним смислом апсцисне осе заклапа угао од 45^0; b) која пролази кроз тачку (1,—2) а са позитивним смислом апсцисне осе заклапа угао од 60^0.

◎ 4) Наћи једначину праве линије: a) која пролази кроз тачку (2,—5), а паралелна је са апсцисном осом; b) која пролази кроз тачку (1,—3) а паралелна је са ординатном осом.

◎ 5) Наћи једначину праве линије: a) која пролази кроз тачку (3,4) а од ординатне осе отсеца дуж $l = 7$; b) која пролази кроз тачку (2,—3), а од ординатне осе отсеца дуж $n = -5$.

◎ 6) Наћи једначину праве линије која пролази кроз тачке: a) (2,3) и (1,4); b) (—3,1) и (5,—2); c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$; d) $\left(5, \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{5}{2}, -3\right)$.

◎ 7) Наћи једначину праве линије која пролази кроз тачку (—1,2) и кроз пресек правих: $2x - y = 1$ и $x + y = 5$.

◎ 8) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $2x + y = 4$; $x + 2y = 5$ и кроз пресек правих: $x + y = 7$; $x - y = 1$.

* 9) Права линија дели дуж чије су крајње тачке (2,—1) и (7,9) по размери 2 : 3 и пролази кроз тачку (1,—2); наћи једначину те праве.

◎ 10) Координате троуглових темена су: (3,2); (—1,—1) и (—2.4); наћи једначине страна троуглових.

* 11) Координате троуглових темена су: (1,2); (5,3) и (3,—2); наћи једначине његових средњих линија.

◎ 12) Координате темена једног четвороугла су: (1,6); (2,2); (5,2) и (4,6); наћи координате пресека његових дијагонала,

◎ 13) Наћи једначину праве линије: a) која од ординатне осе отсеца дуж $b = 4$, а од апсцисне осе дуж $a = 3$; b) која од апсцисне осе отсеца дуж $k = 2$, а од ординатне осе дуж $l = -5$.

14) Отстојање од праве линије до координатног почетка је: $p = 3$; а угао који то отстојање заклапа са позитивном граном апсцисне осе је: $\alpha = 30^0$, наћи једначину те праве линије.

15) Наћи једначину праве линије чије је отстојање од координатног почетка $p = 6$, а угао који то отстојања заклапа са позитивним смислом апсцисне осе је: $\alpha = 60^0$.

16) Довести на нормални облик једначину праве: a) $12x - 9y - 7 = 0$; b) $24x + 10y - 5 = 0$; c) $4x - 3y + 3 = 0$ и d) $2x - 3y - 1 = 0$.

17) Наћи отстојање од координитног почетка до праве: $7x + 24y - 75 = 0$.

18) Наћи отстојање од координатног почетка до праве: $12x - 5y + 52 = 0$.

19) Наћи отстојање од координатног почетка до праве: $y = \frac{4}{3} x - 5$.

20) Наћи отстојање од координатног почетка до праве: $x + 2y - 10 = 0$.

21) Наћи дужину висине спуштене на хипотенузу троугла који са координатним осовинана заклапа права: $5x + 12y - 26 = 0$.

22) Наћи отстојање од тачке (—3,4) до праве: $4x - 3y - 6 = 0$.

23) Наћи отстојање од тачке (1,6) до праве: $3x - 4y + 1 = 0$:

24) Наћи отстојање од тачке (3,2) до праве: $5x + 12y + 26 = 0$.

25) Наћи отстојање од тачке (—5,1) до праве: $24x + 7y + 13 = 0$.

26) Наћи отстојање од тачке (2,—4) до праве: $2x - 3y - 3 = 0$.

27) Наћи висину троуглове стране AB ако су му темена у тачкама: $A(-1,6)$; $B(4,-6)$ и $C(-4,3)$.

28) Тачка (1,3) удаљена је од праве која пролази кроз тачку (3,2) за дужину $d = 2$, наћи једначину те праве линије.

29) Права пролази кроз тачку (4,3) а са координатним осама затвара троугао чија је површина $P = 27$; наћи једначину те праве линије.

30) Кроз тачку (5,1) пролази права линија која од координатних осовина отсеца дужинске величине такве, да се отсечак од апсцисне осе према отсечку од ординантне осе има као 1 : 2 наћи једначину те праве линије,

◎ 31) Наћи угао који заклапају праве линије: $x + 5y - 2 = 0$ и $2x - 3y + 4 = 0$.

◎ 32) Наћи угао који заклапају праве линије: $4x + 5y - 1 = 0$ и $10x - 8y + 9 = 0$.

◎ 33) Наћи угао који заклапају праве линије: $7x - y + 3 = 0$ и $x - y - 11 = 0$.

◎ 34) Једна права линија пролази кроз тачку (1,3) и од ординатне осе отсеца дуж $b = 1$, а друга права пролази кроз тачке: (3,—4) и (1,2); наћи угао између тих двеју правих.

35) Наћи једначину праве линије: a) која пролази кроз тачку (3,—2) а паралелна је са правом; $5x - 3y + 8 = 0$; b) која отсеца од ординатне осе дуж $l = -4$, а паралелна је са правом: $3x + y - 11 = 0$.

◎ 36 Наћи једначину праве линије: a) која полови дуж чије су крајње тачке (4,1) и (—2,3), а паралелна је са правом $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$; b) која пролази кроз пресек правих: $3x + y + 1 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$; а паралелна је са правом $2x - 5y + 6 = 0$.

◎ 37 Наћи једначину праве линије: a) која од ординатне осе отсеца дуж $b = 7$, а нормална је на правој $y = \frac{2}{3}x - 1$; b) која пролази кроз тачку (—2,5) а нормална је на правој: $4x - 2y + 5 = 0$.

* 38) Наћи једначину праве линије: a) која дели дуж чије су крајње тачке (2,1) и (5,7) по размери 1:2, а нормална је на правој: $7x - 2x + 1 = 0$; b) која отстоји од координатног почетка за дуж $p = 6$, а нормална је на правој: $3x - 4y + 7 = 0$.

◎ 39) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $3x - y - 1 = 0$ и $x + 2y - 12 = 0$ а нормална је на правој

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1.$$

◎ 40) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $2x + y - 5 = 0$ и $2x - 3y - 9 = 0$ и стоји номално на овој другој правој.

* 41) Наћи једначину симетрале дужи чије су крајње тачке (1,—4) и (3,2).

* 42) Наћи једначину симетрале оне дужи чији је један крај у тачци (—3,2), а други у пресеку правих: $x + y - 5 = 0$ и $3x - y + 1 = 0$.

43) Једначине троуглових страна су: $x - 2y + 5 = 0$; $2x + 3y - 4 = 0$ и $3x + y - 13 = 0$; наћи једначине његових висина и једначине симетрала његових страна.

44) Једначине троугловик страна су: $x - 7y + 16 = 0$; $4x - 3y - 11 = 0$ и $7x + y + 12 = 0$; наћи полупречник описаног круга око тога троугла.

45) Једначине троуглових страна су: $3x - 4y - 20 = 0$; $3x + 4y - 36 = 0$ и $4x - 3y - 23 = 0$, наћи полупречник уписаног круга у томе троуглу.

46) За који угао треба да се обрне права $y = 5x - 11$ око своје тачке чија је апсциса 3, да би пролазила кроз тачку (6,6).

47) За који угао треба да се обрне права $x - y + 3 = 0$ око свога пресека са ординатном осом, да би пролазила кроз тачку (9,4).

* 48) Наћи једначине симетрала углова које заклапају праве $12x - 5y + 7 = 0$ и $5x + 12y - 11 = 0$.

* 49) Наћи једначине симетрала углова које заклапају праве $3x + 4y - 2 = 0$ и $12x - 9y - 1 = 0$.

* 50) Наћи једначине симетрала углова које заклапају праве: $9x + 12y - 2 = 0$ и $16x + 12y + 5 = 0$.

* 51) Наћи једначине симетрала углова која заклапају праве: $3x - 2y - 2 = 0$ и $2x + 3y + 5 = 0$.

* 52) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $x + 2y - 4 = 0$ и $2x - 2y - 5 = 0$ и кроз тачку $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ не тражећи координате пресека задатих правих.

* 53) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих: $3x - 2y + 5 = 0$ и $4x + y - 8 = 0$; а нормална је на правој: $x + 2y - 6 = 0$; не тражећи координате пресека задатих правих.

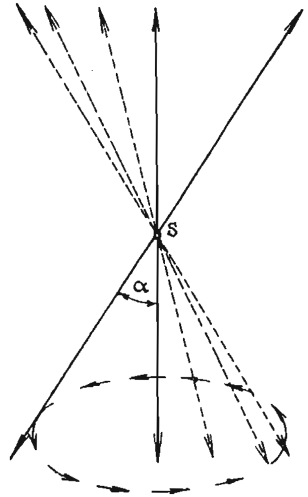
* 54) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $5x + 2y - 9 = 0$ и $3x - 7y + 11 = 0$, а парелелна је са правом, која пролази кроз тачке (2,—1); (—3,2); не тражећи координате пресека задатих правих.

* 55) Наћи једначину праве линије која пролази кроз пресек правих $6x + 12y - 7 = 0$; $18x - 6y - 7 = 0$, и дели дуж чије су координате крајњих тачака (—2,3), (—5,6) по размери 1:2), не тражећи координате пресека задатих правих.

Глава III

§ 23. КОНУСНИ ПРЕСЕЦИ.

Линије другог степена.



Сл. 22.

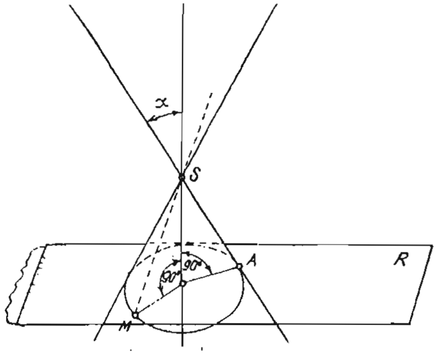
Ако узмемо две праве линије у равни које се секу под извесним углом α, па једну од њих учврстимо за ту раван, а другу пустимо да се обрће око ње по простору, тако да угао α буде увек сталан, онда настаје геометриска фигура у простору звана конус обртања. Покретна права назива се генератрисом конуса обртања, а стална и учвршћена права зове се осом конуса обртања. Тачка пресека S ових двеју правих зове се врх конуса обртања.

Нека је на сл. 22 престављен тај случај.

§ 24. КРУГ.

1. чл. Узмимо сада на сл. 23 један конус обртања S и пустимо да га сече нека раван R тако, да стоји нормално на његовој оси. Раван R сече конусну површину по једној затвореној кривој линији. Узмимо ма које две тачке A и M, на тој кривој линији и обележимо са O ону тачку равни R кроз коју пролази оса конуса. Из слике се види да су троуглови SOA и SOM подударни, јер имају по једну страну једнаку и по два на њој налегла угла. Из подударности

ових троуглова излази да је: $OA = OM$. што значи, да све тачке на добивеној кривој линији подједнако отстоје од једне тачке O која се са њима налази у истој равни. Крива линија која има овакве особине јесте кружна линија или круг. Тачка O је центар круга, а отстојање OM је радијус или полупречник круга и најчешће се обележава са r.



Сл. 23.

Дакле круг је таква затворена крива линија у равни чије све тачке подједнако отстоје од једне сталне тачке у истој равни.

◎ § 25. ЕЛИПСА.

Узмимо на сл. 24 један конус обртања и пресецимо га прво једном равни Φ која стоји нормално на оси конуса. Претпоставимо да је ова раван причвршћена за конус т. ј. да не мења свој положај према њему и сматрајмо је за базисну раван конуса. Обележимо затим са φ онај угао који заклапа генератриса са базисом конуса.

Узмимо сада једну раван R која сече посматрани конус тако, да са равни базиса заклапа неки угао α, који је мањи од угла φ. Тада се у пресеку ове равни и конусне површине добива крива линија L. Замислимо сада формиране две лопте у конусу; и то једну изнад а другу испод равни R. Нека те две лопте буду такве да додирују раван R у тачкама $\boldsymbol{F}$ и F_1, а конусну површину по кружним линијама l и l_1 као што се види на слици.

Ако на кривој линији L узмемо ма коју тачку $\boldsymbol{M}$ и кроз њу повучемо једну генератрису конуса; ова ће генератриса сећи кружне линије l и l_1 у тачкама B и B_1.

Из слике се види да је:

$$\left.\begin{aligned} MF_1 &= MB_1 \\ MF &= MB \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

као тангенте лопте повучене из једне тачке ван лопте.

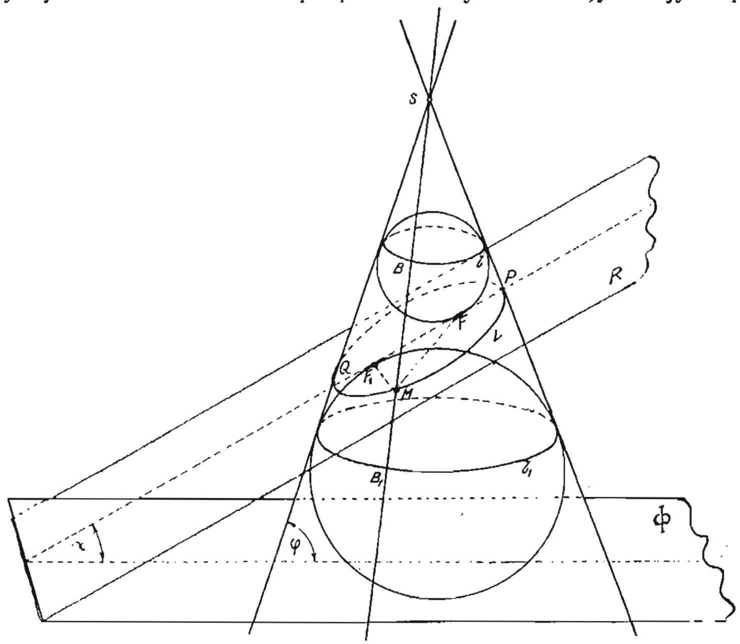
Сабирањем једначина 1) добива се:

$$\boldsymbol{MF_1} + \boldsymbol{MF} = MB_1 + MB$$

или с обзиром на слику

$$MF_1 + MF = B_1B \ldots\ldots 2).$$

Величина B_1B је константна величина за посматрани случај као отсечак генератрисе конуса између двеју паралелних кружних линија l_1 и l које се налазе на конусу обртања.



Сл. 24.

Пошто је B_1B стална величина, то и лева страна једначине 2) мора бити такође стална величина т.ј. мора бити:

$$F_1M + FM = Const \ldots\ldots 3).$$

Из свега овога излази, да је крива L таква линија у равни, која има ту особину, да је, збир растојања сваке њене тачке од две сталне тачке у истој равни, увек стална величина.

Свака линија која има такву особину назива се елипсом. Сталне тачке F_1 и $\boldsymbol{F}$ зову се *фокусима* или *жижама* елипсе: Растојања од жижа до ма које тачке на елипси називају се ***потезима елипсе***.

Права линија која пролази кроз жиже F_1 и F сече елипсу, као што се види на слици, у тачкама P и Q. Ове тачке се називају *теменима елипсе,* а отстојање између њих зове се *великом осом елипсе,*

Како се и тачке P и Q налазе на елипси, то и за њих важи однос изражен једначином 2), те је према томе:

$$\left.\begin{array}{l} F_1P + FP = B_1B \\ F_1Q + FQ = B_1B \end{array}\right\} \ldots\ldots 4).$$

Из ових двеју једначина излази да је:

$$F_1P + FP = F_1Q + FQ$$

или с обзиром на слику

$$FP + F_1F + FP = F_1Q + F_1F + F_1Q$$

одакле је

$$FP = F_1Q \ldots\ldots 5).$$

Ако у првој од једначина 4) место величине FP ставимо њезину вредност из једначине 5) онда добивамо:

$$F_1P + F_1Q = B_1B, \ldots. 6).$$

Лева страна једначине 6) није ништа друго до велика оса елипсе; па ако њену половину обележимо са a, онда је:

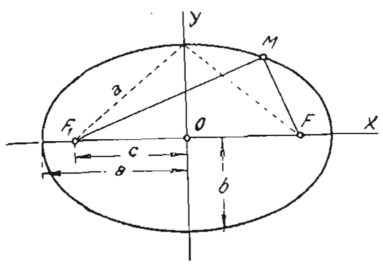
$$2a = B_1B \ldots\ldots 7).$$

Кад у једначини 2) место величине B_1B ставимо њезину вредност из једначине 7) онда добивамо следећу једначину:

$$F_1M + FM = 2a \ldots\ldots 8).$$

Ова нам једначина показује, да је збир потега ма које тачке на елипси једнак великој оси елипсе.

Права линија која полови велику осу елипсе и стоји на њој нормално, сече елипсу у двема тачкама. Растојање између тих двеју тачака назива се *малом осом* елипсе и ми ћемо је обележити са $2b$.



Сл. 25.

Тачка у којој се секу велика и мала оса елипсе назива се *центром елипсе.* Тако би елипса имала изглед у равни као на сл. 25.

Отстојање од центра до жиже елипсе назива се *линеарним ексцентрицитетом елипсе* и обележићемо га са c. Из слике се види да је:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \text{или} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \ldots\ldots 9).$$

Из израза 9) видимо, да ће се величина c повећати ако се полуоса b буде смањивала. Кад полуоса b постане равна нули тада ће величина c бити равна полуоси a. У томе случају елипса се деформише у дуж $2a$ т.ј. у своју велику осу.

Ако се полуоса b повећава, онда се величина c смањује. Кад полуоса b постане равна полуоси a, тада ће величина c бити равна нули. У томе се случају елипса претвара у круг. Према томе круг је једна специјална врста елипсе.

◎ § 26. КОНСТРУКЦИЈА ЕЛИПСЕ.

1 чл. Видели смо, да је збир отстојања ма које тачке на елипси од њених жижа увек једнак великој оси елипсе. Према томе тачке елипсе се налазе у пресеку или додиру два круга од којих се центар једнога налази у једној жижи, а центар другога у другој жижи елипсе. Збир полупречника ова два круга увек мора бити једнак великој оси елипсе. Ако узмемо, да је r полупречник једнога круга, онда полупречник другога круга мора бити $2a - r$. Ови су полупречници променљиве величине, али увек њихова разлика мора бити мања или једнака са отстојањем између жижа елипсе; јер се у противном њихови кругови неби могли сећи нити додиривати.

Ако је $2a - r$ веће од r, онда мора бити:

$$2a - r - r \leqslant 2c$$

односно

$$2a - 2r \leqslant 2c$$

или

$$a - r \leqslant c$$

одакле је

$$a - c \leqslant r \ldots\ldots 1).$$

Ако је пак r веће од $2a - r$, онда мора бити:

$$r - (2a - r) \leqslant 2c$$

односно

$$2r - 2a \leqslant 2c$$

или

$$r - a \leqslant c$$

одакле је

$$r \leqslant a + c \ldots\ldots 2):$$

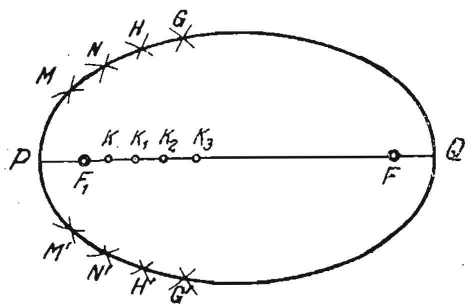
Из израза 1) и 2) настаје следећи однос:

$$a - c \leqslant r \leqslant a + c \ldots\ldots 3).$$

Одавде излази, да је r, произвољна величина, али само у границама које одређује израз 3), т.ј. полупречник круга којим се траже тачке елипсе, не сме бити мањи од отстојања између жиже и оближњег јој темена, нити већи од отстојања између жиже и другог темена елипсе.

Пошто смо одредили границе полупречника r, онда ћемо конструкцију елипсе извршити на следећи начин:

Узећемо на сл. 26 дуж PQ за велику осу елипсе. На тој ћемо дужи узети две тачке, које подједнако отстоје од крајњих тачака посматране дужи, па ћемо их обележити са F_1 и F и оне ће нам претстављати жиже елипсе. Затим ћемо отвором шестара PK из жиже F_1 описати два лука, један изнад, а други испод дужи PQ. После тога ћемо отвором шестара QK из жиже F описати два лука један изнад, а други испод дужи PQ, којим ћемо пресећи раније добивене лукове у тачкама M и M'. Тачке M и M' су очевидно тачке елипсе јер је:



Сл. 26.

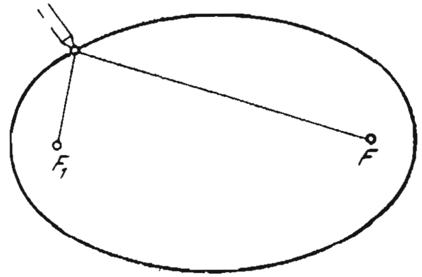
$$F_1M + FM = PK + QK = PQ.$$

На исти ћемо начин отвором шестара: PK_1; PK_2; PK_3; и т. д. ... из жиже F_1, и отвором шестара: QK_1; QK_2 QK_3; и т. д. ... из жиже F, добити тачке елипсе: N и N'; H и H'; G и G'; и т. ... Ако повежемо овако добивене тачке, онда смо извршили конструкцију елипсе.

У колико су тачке: K; K_1; K_2; ... ближе једна другој, у толико ће и тачке: M; N; H; ... такође бити ближе једна другој; а тим ће и конструкција елипсе бити тачнија. Кад би тачке: K; K_1; K_2; ... биле бескрајно блиске једна другој, тада би и тачке: M; N; H; ... биле такође бескрајно блиске једна другој, а тиме би и конструкција елипсе била савршено тачна.

2 чл. Конструкцију елипсе можемо извршити и на следећи начин:

Узмимо неистегљив конац одређене дужине, па му крајеве причврстимо за две тачке неке равне површине. Отстојање ових двеју тачака мора бити мање од дужине конца. Узмимо затим заоштрену писаљку па наслањајући њен врх на посматрану равну површину, затегнимо поменути конац до извесног степена затегнутости. После тога повлачимо врх писаљке по тој равној површини, тако да затегнутост конца остане увек иста. Тада ће нам врх писаљке описати затворену криву линију, која има ту особину, да је збир отстојања сваке њене тачке од двеју утврђених тачака увек раван дужини конца. Добивена линија према својој особини није ништа друго до елипса. Сл. 27 нам претставља тај случај.

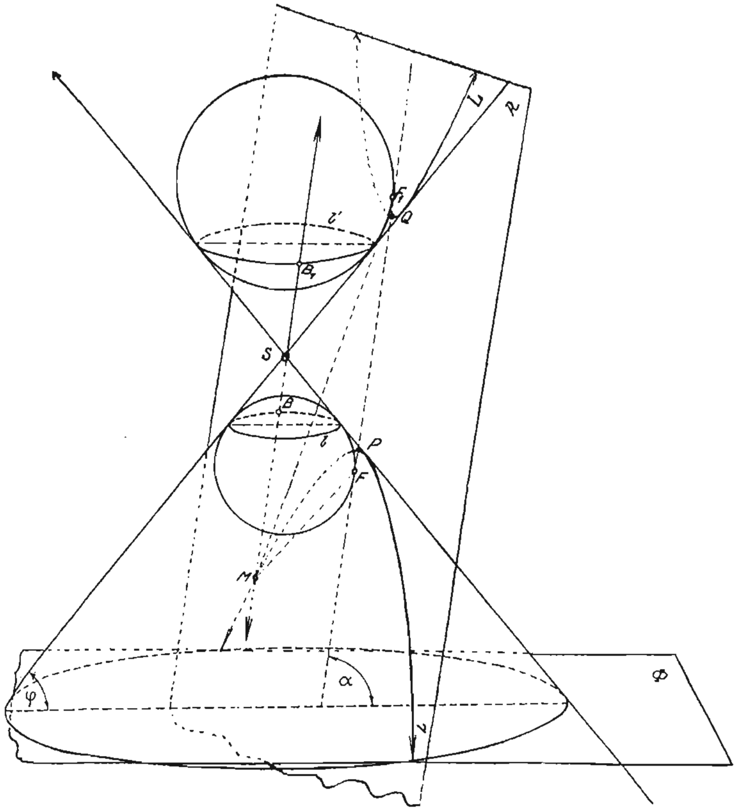


Сл. 27.

§ 27. ХИПЕБОЛА.

Узмимо на сл. 28 један двогуби конус обртања и пресецимо га прво са неком равни Ф која стоји нормално на оси конуса. Претпоставимо, да је ова раван причвршћена за конус т.ј. да не мења свој положај према њему и сматрајмо је за базисну раван конуса. Обележимо са φ онај угао који заклапа генератриса са базисом конуса. Узмимо затим неку раван R која сече обе поле конуса, а са базисом заклапа угао α који је већи од угла φ. Тада се у пресеку равни R и конусне површине добива крива линија L, која има две гране. Замислимо сем тога формиране две лопте које додирују раван R у тачкама F и F_1, а конусну површину по кружним линијама l и l'. (Овакве је лопте увек могуће замислити, јер би оне настале, ако би се спољашњи кругови троугла SPQ обртали око заједничке симетрале углова у којима се налазе, а која у ствари није ништа друго до оса конуса обртања).

Ако узмемо у посматрање ма коју тачку M на кривој линији L онда је као што се из слике види:



Сл. 28.

$$\left.\begin{aligned} FM &= MB \\ F_1M &= MB_1 \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots 1).$$

као тангенте повучене на лопту из једне тачке ван лопте. Кад прву од једначина 1) одузмемо од друге тада добивимо

$$F_1M - FM = MB_1 - MB$$

или с обзиром на слику:

$$F_1M - FM = BB_1 \ldots\ldots 2).$$

Величина BB_1 је за дати случај стална количина као отсечак генератрисе између паралелних кругова l и l', који се налазе на двогубом конусу обртања па је према томе и

$$F_1M - FM = const \;\ldots\ldots 3).$$

Из свега овога излази, да је крива L таква линија у равни, која има ту особину, да је разлика растојања сваке њене тачке од две сталне тачке у истој равни, увек стална

величина. Свака линија која има такву особину назива се *хиперболом*, а сталне тачке F_1 и F зову се *фокуси* или *жиже* хиперболе.

Растојања од жижа до ма које тачке на хиперболи зову се *потезима хиперболе.*

Права линија која пролази кроз жиже хиперболине сече хиперболу у двема тачкама које смо обележили са P и Q. Пошто се и ове тачке налазе на хиперболи, то и за њих важи исто својство као и за све остале тачке хиперболине. Тако мора бити:

$$\left.\begin{aligned} F_1P - FP &= BB_1 \\ FQ - F_1Q &= BB_1 \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots 4).$$

Како су десне стране једначина 4) једнаке, то и леве стране њихове морају бити такође међу собом једнаке. Тако је:

$$FQ - F_1Q = F_1P - FP$$

или с обзиром на слику:

$$FP + PQ - F_1Q = F_1Q + PQ - FP$$

одакле је

$$FP = F_1Q \;\ldots\ldots 5).$$

Ако у првој од једначина 4) место величине FP ставимо њену вредност из једначине 5), онда добивамо:

$$F_1P - F_1Q = BB_1$$

или с обзиром на слику:

$$PQ = BB_1 \ldots\ldots 6).$$

Дакле стална величина BB_1 једнака је растојању између тачака P и Q.

Тачке P и Q зову се *теменима* хиперболе, а њихово растојање назива се *главном осом* хиперболе и обично се обележава са $2a$. Тако је:

$$F_1M - FM = BB_1 = PQ = 2a$$

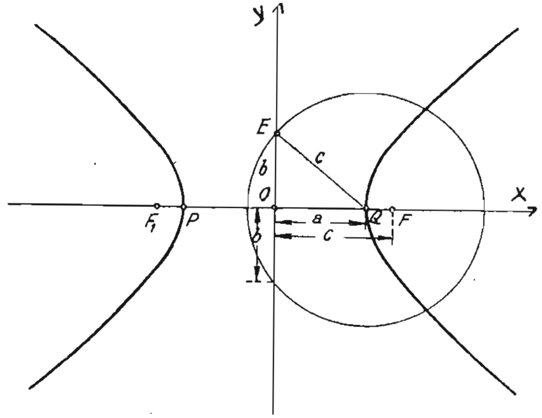
односно

$$F_1M - FM = 2a \;\ldots\ldots 7).$$

Ова нам једначина показује да је разлика потега ма које тачке на хиперболи једнака главној оси хиперболе.

Хипербола би у равни изгледала као на сл. 29.

Ако узмемо једну праву линију која полови велику осу хиперболе и на њој стоји нормално, онда се њихова тачка пресека, коју ћемо обележити са O, назива *центром хиперболе*. Отстојање: OF или OF_1 зове се *линеарним ексцентрицитетом хиперболе* и обележићемо га са c.



Сл. 29.

Ако из једног темена хиперболе опишемо круг чији је полупречник једнак линеарном ексцентрицитету хиперболе, онда ће тај круг, на правој линији која пролази кроз центар и стоји нормално на великој оси хиперболе, отсецати дуж која се назива *споредном* осом хиперболе. Ту смо дуж на приложеној слици обележили са $2b$. Из троугла OQE излази да је:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \ldots\ldots 8).$$

Кад једначину 8) решимо по величини c, тада добивамо следећу једначину:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \ldots\ldots 9).$$

◎ § 28. КОНСТРУКЦИЈА ХИПЕРБОЛЕ.

1 чл. Видели смо да је хипербола крива линија у равни такве особине, да је разлика потега ма које њене тачке увек једнака главној оси хиперболе.

Ако растојање између неке тачке на једној грани хиперболиној и жиже која се не налази у тој грани обележимо са r, онда ће отстојање од исте тачке до друге жиже хиперболине очевидно бити: $r - 2a$. Дакле посматрана се тачка налази у пресеку или додиру два круга од којих је један

описан полупречником r из жиже која није у оној грани хиперболиној на којој се налази задата тачка; а други је описан полупречником $(r - 2a)$ из друге жиже хиперболине. Да би се поменути кругови секли или додиривали потребно је и довољно да буде испуњен следећи услов:

$$r + (r - 2a) \geqslant 2c$$

одакле је:

$$r - a \geqslant c$$

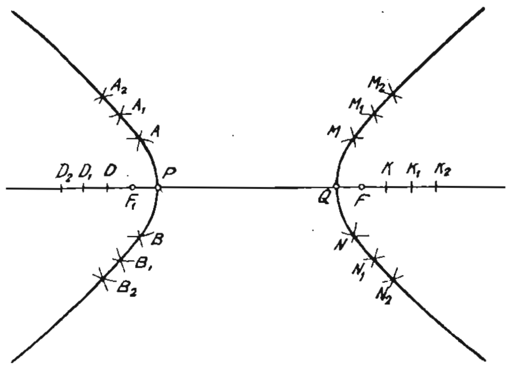
или

$$r \geqslant a + c.$$

Дакле величина r може имати све могуће вредности почев од $(a + c)$ па све до $+\infty$.

Пошто смо одредили границе величине r, онда ћемо извршити конструкцију хиперболе на следећи начин:

Прво ћемо на сл. 30 повући једну праву линију и на њој узети дуж PQ за главну осу хиперболе. Тада нам тачке P и Q претстављају темена хиперболе. Затим ћемо на истој правој линији узети још две тачке F_1 и F, које се налазе ван дужи PQ или тако, да је: $F_1P = FQ$. Нека нам тачке F_1 и F буду жиже хиперболине.



Сл. 30.

После тога ћемо узети у отвор шестара дуж PK, па ћемо из жиже F_1 описати кружни лук. Затим ћемо узети у отвор шестара дуж QK и из жиже F описати кружни лук. Та два лука ће се сећи у тачкама M и N које се налазе на хиперболи јер је:

$$F_1M - FM = PK - QK = PQ.$$

Истим ћемо поступком добити и хиперболине тачке: M_1 и N_1; M_2 и N_2 и т. д. Ако затим саставимо све те тачке, онда ћемо добити лук једне гране хиперболине.

После тога ћемо узети у отвор шестара дуж QD и из жиже F описати кружни лук. Затим ћемо отвором шестара

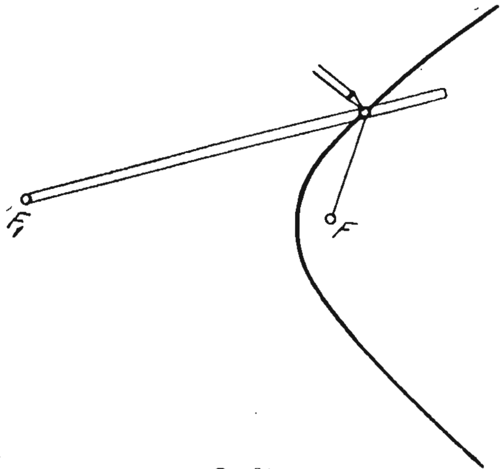
PD из жиже F_1 описати кружни лук. Та два лука ће се сећи у тачкама A и B које се такође налазе на хиперболи јер је:

$$FA - F_1A = QD - PD = PQ.$$

Истим поступком ћемо добити и тачке: A_1 и B_1; A_2 и B_2, ит.д. Кад све ове тачке међу собом саставимо, тада добивамо лук друге гране хиперболине.

На тај је начин извршена конструкција хиперболе. У колико су тачке: $K, K_1\, K_2 .....$ и тачке: $D, D_1\, D_2 .....$ ближе једна другој у толико ће и тачке: $M, M_1\, M_2, ...,\ N, N_1\, N_2 .....$ и тачке: $A,\ A_1,\ A_2, ...\ B,\ B_1,\ B_2 .....$ бити ближе једна другој; а тим ће и конструкција хиперболе бити тачнија. Кад би наведене тачке биле бескрајно блиске једна другој, тада би и конструкција хиперболе била савршено тачна. Овим начином конструкције као и сваким другим, ми можемо добити само известан ограничен део лука хиперболина, док целу хиперболу никад не можемо конструисати, јер се њене гране простиру у бесконачност.

2. чл. Хиперболу можемо конструисати и на следећи начин: Узмимо на једној равној површини две тачке за жиже



Сл. 31.

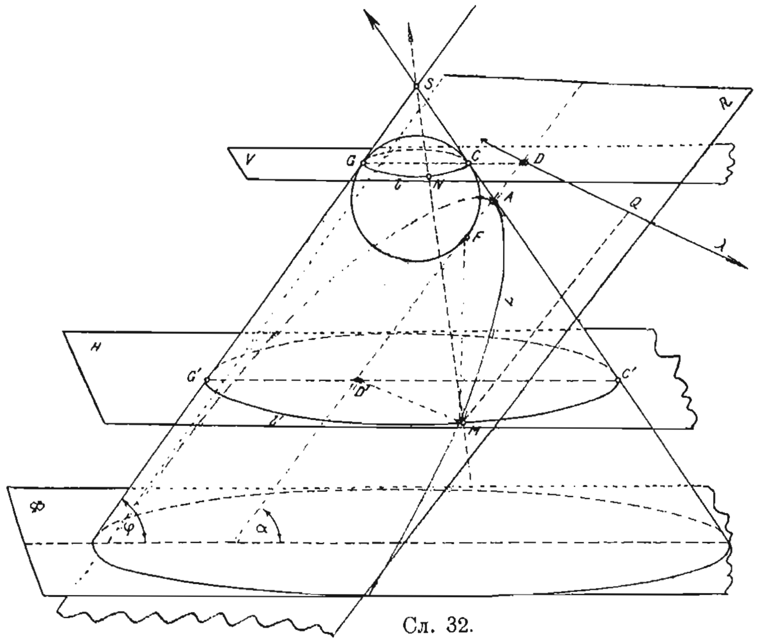
хиперболине и обележимо их са F_1 и F. Поставимо један крај произвољно узетог лењира у једну жижу хиперболину, тако, да се лењир може обртати око те жиже. Узмимо затим један неистегљив конац чија је дужина мања од дужине лењира за величину $2a$. Ако је дужина лењира r, онда дужина конца

треба да буде $r - 2a$. Причврстимо један крај тога конца за други крај лењира, а други крај конца за другу жижу хиперболину, тако да се дужина конца не промени. Ако после тога будемо обртали лењир и врхом заоштрене писаљке држали затегнут конац припијен једним делом уз лењир, онда ће нам писаљка описивати лук једне гране хиперболине, јер је разлика отстојања од врха писаљке до жижа хиперболиних увек једнака $2a$. На сл. 31 је претстављен тај случај.

Кад бисмо крај лењира преместили из жиже $\boldsymbol{F_1}$ у жижу $\boldsymbol{F}$ а крај конца из жиже F у жижу $\boldsymbol{F_1}$ онда бисмо истим поступком добили лук друге гране хиперболине. Очевидно је да се и у овом случају добија само ограничен део лука хиперболина.

◎ § 29 ПАРАБОЛА.

Узмимо на сл. 32 један конус обртања и пресецимо га прво са равни Φ, која стоји нормално на оси конуса. За-



Сл. 32.

мислимо, да је ова раван причвршћена за конус т.ј. да не мења положај према конусу и сматрајмо је за базисну раван конуса. Обележимо са φ онај угао који заклапају генератрисе са базисом конуса.

Узмимо затим једну раван R која сече посматрани конус тако да са равни базиса заклапа угао α који је једнак са углом φ. Тада се у пресеку равни и конусне површине добива крива линија L.

Нека још и раван слике пролази кроз осу конуса и стоји нормално на равни R.

Формирајмо затим једну лопту која додирује раван R у тачки F, а конусну површину по кружној линији l. Узмимо сем тога и једну раван V која сече конусну површину по кружној линији l, а раван R по правој линији λ.

Пошто и раван R и раван V стоје нормално на равни слике то и њихов пресек права λ мора такође стајати нормално на равни слике. Права λ продире раван слике у тачци D, што значи да кроз ту тачку пролазе све три поменуте равни. Како кроз тачку D пролазе и раван слике и раван V, то кроз исту тачку мора пролазити и њихов пресек права GC. Тако исто, пошто кроз тачку D пролази и раван слике и раван R, то кроз њу мора пролазити и њихов пресек права AF.

Из свега овога излази, да кроз тачку D пролазе права GC, права AF и права λ и да је ова последња нормална на прве две.

Узмимо сада ма коју тачку M на кривој линији L и кроз њу пустимо раван H која стоји нормално на оси конуса и сече конус по кружној линији l', а раван слике по правој $G'C'$. И раван R и раван H стоје нормално на равни слике, па према томе и њихов пресек права MD' мора стојати нормално на равни слике. Права MD' продире раван слике у тачци D' што значи, да кроз ту тачку пролазе све три поменуте равни, Како раван слике и раван H пролазе кроз тачку D' то и њихов пресек права $G'C'$ мора пролазити кроз ту тачку. Сем тога пошто и раван слике и раван R пролазе кроз тачку D' то такође кроз исту тачку мора пролазити и њихов пресек права AF.

Одавде излази да кроз тачку D' пролазе: права $G'C'$, права AF и права MD' и да је ова последња нормална на првим двема.

Из слике се види да је:

$$FM = MN$$

као тангенте на лопту повучене из једне тачке ван лопте.

Сем тога је:

$$MN = GG'$$

као отсечци генератриса између паралелних кругова конуса обртања.

Међутим је:

$$GG' = DD'$$

као супротне стране паралелограма.

Тако исто је и:

$$DD' = MQ$$

као супротне стране паралелограма.

Према томе може се написати:

$$FM = MN = GG' = DD' = MQ.$$

Дакле је:

$$FM = MQ \quad \ldots\ldots 1).$$

Једначина 1); нам показује својство криве линије L, ***пре****ма коме свака њена тачка има подједнако отстојање од једне сталне тачке* F *и једне сталне праве* λ, ***које*** *леже у истој равни са поменутом кривом* ***линијом.***

Свака крива линија која има такву особину назива се параболом.

Стална тачка F зове се *жижом* параболе, а стална права λ, назива се *управницом* или *директрисом* параболе.

Размера: $\dfrac{FM}{MQ}$ назива се *бројним ексцентрицитетом* параболе и обележићемо га са e.

Према једначини 1) излази да је:

$$\frac{FM}{MQ} = 1$$

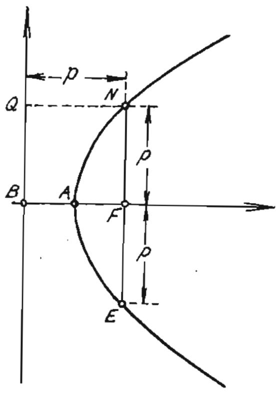
односно

$$e = 1.$$

Дакле бројни ексцентрицитет код параболе је једнак јединици.

Парабола у равни има изглед као на сл. 33.

Права линија која пролази кроз жижу, а стоји нормално на директриси зове се *осом* параболе. Она сече параболу



Сл. 33

у једној тачки која се назива *теменом параболе*. Тачке у којима оса сече параболу и директрису обележили смо на приложеној слици са A и B.

Ако кроз жижу параболе повучемо праву линију која стоји нормално на оси параболе, та ће права сећи параболу у двема тачкама N и E. Отстојање између тих двеју тачака назива се *параметром* параболе и обележићемо га са 2р. Кад из тачке N повучемо нормалу на директрису, она ће је сећи у некој тачци Q

Према општој особини свих тачака на параболи, мора бити:

$$p = NQ.$$

Из слике се види да је:

$$NQ = FB$$

као супротне стране код паралелограма, па према томе мора бити и:

$$FB = p$$

или с обзиром на слику

$$FA + AB = p \;.\,.\,.\,.\,.\, 2).$$

Како се и тачка A налази на параболи, то према поменутом својству параболе, мора бити:

$$FA = AB \;.\,.\,.\,.\,.\, 3).$$

Ако у једначини 2) место величине AB ставимо њену вредност из једначине 3) онда добивамо:

$$FA + FA = p$$

одакле је

$$2FA = p$$

или

$$FA = \frac{p}{2} \;.\,.\,.\,.\,.\, 4).$$

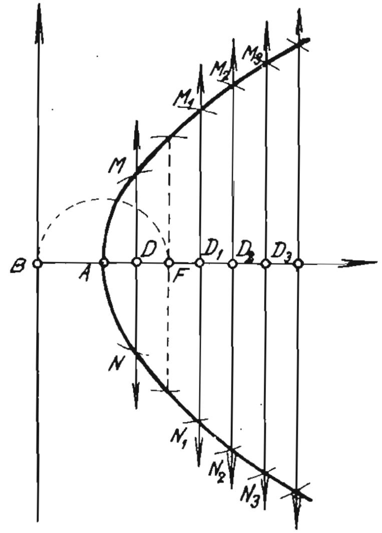
Пошто је према једначини 3) величина: $AB = FA,$ то мора бити и:

$$AB = \frac{p}{2} \;.\,.\,.\,.\,.\, 5).$$

◎ § 30. КОНСТРУКЦИЈА ПАРАБОЛЕ.

чл. 1. Пошто свака тачка параболе подједнако отстоји од једне сталне тачке и једне сталне праве линије, то ћемо конструисати параболу на следећи начин.

Нека су на сл. 34 претстављене две тачке од којих ћемо једну обележити са A, и узети је за теме параболе, а другу ћемо обележити са F и узети је за жижу параболе.



Сл. 34.

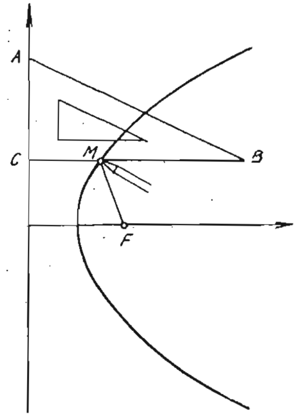
Ако из тачке A опишемо круг полупречником AF, онда ће нам тај круг сећи осу параболе у некој тачци B. Права линија која пролази кроз тачку B и стоји нормално на оси параболе је директриса параболе.

Обележимо са $D, D_1, D_2, D_3 ...$ известан број произвољно узетих тачака на оси параболе од којих свака има веће отстојање од директрисе него теме параболе. Повуцимо кроз те тачке праве линије које су паралелне са директрисом параболе. Ако сваку од тих правих понаособ пресечемо кружним луком описаним око жиже F са полупречником који је једнак отстојању од те праве до директрисе, онда ћемо добити тачке параболе: $M, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$ и $N, N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots$ Везивањем ових тачака по реду почевши од тачке A на једну и на другу страну, добива се лук параболе. У колико се тачке: $D, D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots$ узимају ближе једна другој, у толико ће и тачке: $M, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$ и $N, N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots$ такође бити ближе једна другој, а тиме се добија тачнија конструкција параболе. Кад би тачке: $D, D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots$ биле бескрајно блиске једна другој, тада би и тачке: $M, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$ и $N, N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots$ биле такође бескрајно блиске једна другој, а тиме би и конструкција параболе била савршено тачна.

Очевидно је, да се овим као и сваким другим начином конструкције, може добити само ограничен део лука параболе, а цела се парабола не може никад конструисати јер се она простире у бесконачност.

2. чл. Конструкцију параболе можемо извршити и на следећи начин:

Нека је на сл. 35 претстављена једна права линија и тачка F која се налази ван те праве. Задату праву можемо узети за директрису, а тачку F за жижу параболе.



Сл. 35.

Поставимо правоугли троугао ABC у раван задате праве и тачке тако, да му се катета AC поклапа са директрисом и може клизати по њој. Узмимо затим један неистегљив конац чија је дужина једнака катети CB и један крај тога конца причврстимо за тачку B, а други за жижу F. Ако после тога врхом заоштрене писаљке будемо држали конац затегнут уз катету CB, а троугао клизали по равни, тако да му се катета AC увек поклапа са директрисом, онда ће врх писаљке описивати по равни лук криве линије.

На приложеној слици смо положај врха писаљке обележили са тачком M, а по претпоставци мора бити:

$$FM + MB = CM + MB$$

одакле је:

$$FM = CM \ldots . 1).$$

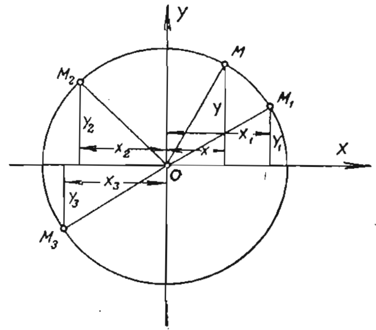
Из једначине 1) се види, да врх писаљке увек подједнако отстоји од задатих праве и тачке, што потврђује да је овако добивена крива линија заиста парабола.

Глава IV

§ 31 КРУГ.

Нека је на сл. 36 претстављен један круг.

Поставимо у раван тога круга правоугли координатни систем, тако, да се координатни почетак поклапа са центром круга.



Сл. 36.

Ако узмемо у посматрање неколико тачака на кружној линији; на пр.: $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$ и т. д. онда помоћу Питагорина правила добивамо следеће једначине:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$
$$x_2^2 + y_2^2 = r^2$$
$$x_3^2 + y_3^2 = r^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и т. д.

Све ове једначине, као што се види, имају исти облик. Тако исто, ако место појединих тачака са сталним координатама узмемо неку покретну тачку $M(x, y)$ са променљивим координатама, која се креће по кружној линији, онда такође по Питагорином правилу добивамо следећу једначину:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots 1).$$

где променљиве величине x и y могу претстављати координате ма које тачке на кружној линији.

Пошто једначина 1) важи за сваку тачку на кружној линији, *то нам она претставља закон свију тачака те линије и у аналитичкој геометрији се назива једначином круга.*

Како се у овом случају центар круга поклапа са координатним почетком, то се једначина 1) још прецизније назива *централном једначином круга*.

2 чл. ДИСКУСИЈА ЈЕДНАЧИНЕ КРУГА

Ако једначину круга $x^2 + y^2 = r^2$ решимо по y-ну тада добивамо да је:

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Из овога се израза види, да свакој величини x-са, чија је апсолутна вредност мања од r, одговарају по две једнаке а супротно означене вредности y-на, што значи да оса x дели кружну линију на два симетрична дела. За оне вредности x-са чија је апсолутна вредност већа од r, y-он добива две имагинарне вредности, што значи да кружна линија нема тачака чије би апсцисе биле по апсолутној вредности веће од полупречника r.

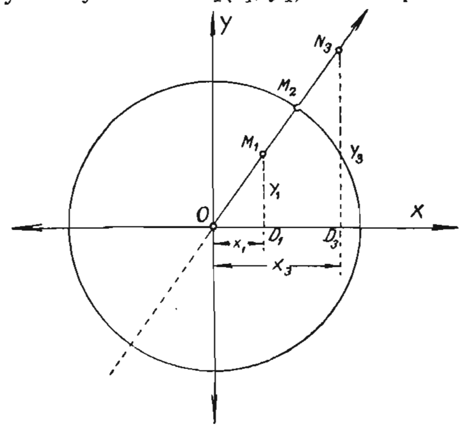
Ако сада једначину круга $x^2 + y^2 = r^2$ решимо по x-су онда добивамо да је:

$$x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Из овога се израза види, да свакој величини y-на, чија је апсолутна вредност мања од r, одговарају по две једнаке а супротно означене вредности x-са, што значи, да и оса y-о дели кружну линију на два симетрична дела. За оне вредности, y-на чија је апсолутна вредност већа од r, x добива две имагинерне вредности, што значи да кружна линија нема тачака чије би ординате биле по апсолутној вредности веће од полупречника.

§ 32 ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ И КРУГА.

1 чл. Нека је на сл. 37 претстављен круг: $x^2 + y^2 = r^2$ и у њему тачка $M_1(x_1, y_1)$. Ако кроз задату тачку и кроз центар круга повучемо праву линију, она ће сећи круг у двема тачкама од којих ћемо узети у посматрање само ону која се са задатом тачком налази у истом квадранту правоуглог координатног система XOY. Обележимо ту тачку на приложеној слици са M_2.



Сл. 37

Из слике се види да је:

$$OM_1 < OM_2$$

или

$$OM_1 < r$$

одакле је

$$\overline{OM_1}^2 < r^2 \; \ldots\ldots 1).$$

Из правоуглог троугла: OM_1D_1 излази да је:

$$\overline{OM_1}^2 = x_1^2 + y_1^2 \; \ldots\ldots 2)$$

Ако у изразу 1) место величине: $\overline{OM_1}^2$ ставимо њену вредност из израза 2), онда добивамо:

$$x_1^2 + y_1^2 < r^2$$

или

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 < 0 \; \ldots\ldots 3).$$

Неједначина 3) важи за ма коју тачку у кругу, па према томе и за неку покретну тачку M са промењљивим координатима (x,y) т. ј.

$$x^2 + y^2 - r^2 < 0 \; \ldots\ldots 4).$$

2 чл. Узмимо сада у посматрање на сл. 37 неку тачку $N_3(x_3,y_3)$ која се налази ван круга. Нека је и кроз ту тачку линија која пролази кроз центар круга. Та права повучена сече круг у двема тачкама од којих ћемо узети у обзир само ону која се са задатом тачком налази у истом квадранту правоуглог координатном система XOY. На приложеној слици та је тачка обележена са M_2.

Из слике се види да је:

$$ON_3 > OM_2$$

или

$$ON_3 > r$$

одакле је

$$\overline{ON_3}^2 > r^2 \; \ldots\ldots 5).$$

Из правоуглог троугла: ON_3D_3 излази да је:

$$\overline{ON_3}^2 = x_3^2 + y_3^2 \; \ldots\ldots 6).$$

Ако у изразу 5) место величине: $\overline{ON_3}^2$ ставимо њену вредност из једначине 6) онда добивамо:

$$x_3^2 + y_3^2 > r^2$$

или

$$x_3^2 + y_3^2 - r^2 > 0 \; \ldots\ldots 7).$$

Неједначина 7) важи за сваку тачку која се налази ван круга па према томе и за неку покретну тачку N са промењљивим координатама (x,y) т. ј.

$$x^2 + y^2 - r^2 > 0 \; \ldots\ldots 8).$$

Тако нам једначина круга $x^2 + y^2 = r^2$ и неједначине 4) и 8) потпуно одређују положај тачке и круга.

Из свега овога резоновања долази се до следећег практичног упуства за одређивање положаја тачке и круга:

Прво треба образовати трином:

$$x^2 + y^2 - r^2$$

и у њему променљиве величине x и y сменити координатима задате тачке.

Ако је резултат те смене мањи од нуле тачка се налази у кругу; ако ли је резултат смене једнак нули тада се тачка налази на кругу, а ако је пак резултат смене већи од нуле онда се посматрана тачка налази ван круга.

Пример: одредити положај круга $x^2 + y^2 = 25$ и тачке A (1,2).

Решење: Прво се формира трином:

$$x^2 + y^2 - 25.$$

Смењивањем координата тачке A (1, 2) добива се:

$$1 + 4 - 25 = -20$$

Дакле резултат је смене мањи од нуле што значи да се тачка A (1, 2) налази у кругу.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити положај круга $x^2 + y^2 = 13$ и тачке (2,—2)
2) „ „ „ $x^2 + y^2 = 34$ „ „ (—3,5)
3) „ „ „ $x^2 + y^2 = 7$ „ „ (—2,—3)

§ 33. ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ И КРУГА.

Координате пресека круга $x^2 + y^2 = r^2$ и праве $y = mx + b$ добиће се решавањем ових двеју једначина по x-су и y-ну.

Тако је:

$$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$$

или

$$x^2 + m^2x^2 + 2\,mbx + b^2 - r^2 = 0$$

односно

$$x^2(1 + m^2) + 2\,mbx + (b^2 - r^2) = 0$$

одакле је:

$$x_{1,2} = \frac{-mb \pm \sqrt{r^2m^2 + r^2 - b^2}}{1 + m^2} \ldots\ldots 1).$$

Сменом ове вредности x-са у једначини праве $y = mx + b$ излази да је:

$$y_{1,2} = \frac{b \pm m\sqrt{r^2m^2 + r^2 - b^2}}{1 + m^2} \ldots\ldots 2).$$

Дискусијом израза 1) и 2) долазимо до следећих закључака:

I) Ако је у наведеним изразима дискриминанта: $r^2m^2 + r^2 - b^2$ већа од нуле, онда се и за x и за y добивају по две реалне неједнаке вредности, а то значи да се права и круг секу у двема различитим тачкама. Тада се права назива *сечицом круга.*

II) Ако је у наведеним изразима дискриминанта: $r^2m^2 + r^2 - b^2$ једнака нули, онда се и за x и за y добивају по две реалне и једнаке вредности, а то значи да се права и круг секу у двема тачкама које се поклапају т. ј. права и круг се додирују у једној тачци и у том се случају права назива *тангентом или дирком круга.*

III) Ако је пак у наведеним изразима дискриминанта: $r^2m^2 + r^2 - b^2$ мања од нуле т. ј. негативна, онда се и за x и за y добивају по две неједнаке имагинарне вредности, што значи да права и круг немају заједничких тачака, него се права налази негде ван круга.

Пример: Одредити положај круга: $x^2 + y^2 = 25$ и праве: $3x + y + 15 = 0$;

Решавањем једначине круга $x^2 + y^2 = 25$ и праве: $3x + y + 15 = 0$ добивамо ова два пара корена и то:

$$x_1 = -5 \qquad y_1 = 0$$
$$x_2 = -4 \qquad y_2 = -3.$$

Одакле излази да се посматрани круг и права секу у тачкама $A(-5,0)$ и $B(-4, -3)$ т. ј. права је сечица круга.

Задаци:

1) Одредити положај круга $x^2 + y^2 = 17$ и праве: $3x + 5y = 17$.

2) Какав положај имају права $2x + 3y = 13$ и круг $x^2 + y^2 = 13$?

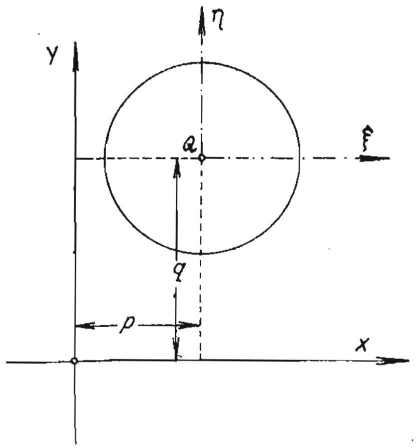
3) Одредити положај круга $x^2 + y^2 = 4$ и праве $x + y = 4$.

§ 34. ОПШТА ЈЕДНАЧИНА КРУГА.

Кад се центар круга не налази у почетку правоуглог координантног система XOY сл. 38, већ у некој тачки $Q(p,q)$ тога система, онда ће се његова једначина наћи на следећи начин:

Ако у тачку $Q(p,q)$ поставимо нови правоугли координатни систем $\xi Q \eta$ чије су осе паралелне у истом смислу са осама система XOY, онда је једначина посматраног круга у томе систему:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 \; \ldots\ldots \; 1).$$



Сл. 38

Познато је, да између координата ма које тачке у ова два координатна система постоје следеће једначине трансформације:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - p \\ &\text{и} \\ \eta &= y - q \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Ако сада у једначини 1) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из израза 2) онда добивамо једначину следећег облика:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \ldots 3).$$

Једначина 3) нам претставља једначину посматранога круга у правоуглом координатном систему XOY, чији се центар налази у тачки $Q(p,q)$ тога система. Како тачка $Q(p,q)$ може заузимати положај ма које тачке у равни правоуглог координатног система XOY, то нам једначина 3) претставља општи облик једначина круга.

Када се над једначином 3) изврше назначене рачунске радње, онда она добива облик:

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \ldots\ldots 4).$$

где је

$$\left.\begin{aligned} d &= -2p \qquad &&\text{а одатле:}\; p = -\frac{d}{2} \\ e &= -2q \qquad &&\text{,,} \quad \text{,,} \quad q = -\frac{e}{2} \\ f &= p^2 + q^2 - r^2 \qquad &&\text{,,} \quad \text{,,} \quad r = \sqrt{p^2 + q^2 - f} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Из израза $r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}$ види се, да ће једначина 4) претстављати реалну кружну линију само у томе случају кад је величина $p^2 + q^2 - f > 0$. Иначе, у оном случају, када је величина $p^2 + q^2 - f = 0$, тада једначина 4) претставља круг чији је полупречник једнак нули т. ј. не претставља ништа друго до једну тачку. Ако је пак величина $p^2 + q^2 - f < 0$, онда нам једначина 4) претставља имагинирани круг т. ј. не претставља ништа реално у правоуглом координатном систему XOY.

Ако нам је задата једначина круга у облику 4) онда помоћу израза 5) можемо увек одредити координате центра и полупречник тога круга. Тако исто, ако су нам задате координате центра и полупречник круга, помоћу израза 5) увек можемо наћи једначину круга.

1) Пример: Одредити координате центра и полупречник круга чија је једначина: $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$.

Решење:

$f = -24$

$$p = -\frac{-6}{2} = 3 \qquad r = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 - (-24)} = 7.$$

$$q = -\frac{8}{2} = -4$$

2) Пример: Наћи једначину круга код кога је полупречник $r = 4$ а центар му се налази у тачки $Q(2,3)$.

Решење:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$$

одакле је

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

једначина траженога круга.

Задатак: Одредити шта претстављају једначине:

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 26 = 0.$$

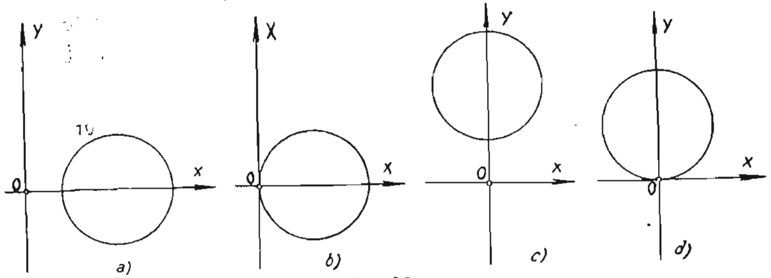
§ 35. СПЕЦИЈАЛНИ ОБЛИЦИ ЈЕДНАЧИНЕ КРУГА.

Претпоставимо сада да је у једначини 3) величина $q = 0$ т.ј. претпоставимо да се центар круга налази на апсцисној оси сл. 39-а, тада његова једначина постаје:

$$(x - p)^2 + y^2 = r^2$$

или
$$x^2 + y^2 - 2px + p^2 - r^2 = 0 \ldots\ldots 6).$$
Ако још претпоставимо, да је $p = r$, онда једначина 6) добива облик:
$$x^2 + y^2 = 2rx.$$
Овај је случај претстављен на сл. 39-b а једначина се назива *шеменом једначином круга.*

Тако исто се може десити да је у једначини 3) величина $p = 0$, те онда једначина круга постаје:
$$x^2 + (y - q)^2 = r^2$$
или
$$x^2 + y^2 - 2qy + q^2 - r^2 = 0 \ldots 7).$$



Сл. 39.

На сл. 39-c је претстављен овај случај.

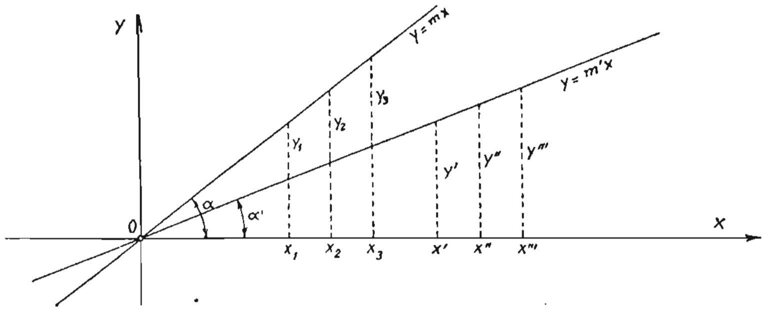
Ако претпоставимо и то, да је $q = r$, онда се једначина 7) своди на једначину: $x^2 + y^2 = 2ry$, која се такође назива *шеменом једначином круга.* Овај се случај види на сл. 39-d. Напослетку, ако је у једначини 3) и величина $p = 0$ и величина $q = 0$ онда се једначина круга своди на већ нам познати централни облик: $x^2 + y^2 = r^2$.

§ 36. ПРИВИДНО НЕОДРЕЂЕНИ ИЗРАЗИ:

Узмимо на сл. 40 један правоугли координатни систем и у њему праве: $y = mx$ и $y = m'x$.

Коефицијенат правца праве $y = mx$ дат је тангенсом угла α који та права захвата са позитивном граном апсцисне осе т.ј. размером између ординате и апсцисе ма које тачке те праве.

Тако је:
$$m = tg\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots\ldots = \frac{\infty}{\infty} \ldots\ldots = \frac{0}{0} = \ldots\ldots 1).$$
јер се на тој правој и поред осталих тачака налазе и тачка чије су координате (0,0) и тачка чије су координате бесконачно велике.



Сл. 40.

Такође и коефицијенат правца праве $y = m'x$ дат је тангенсом угла који та права захвата са позитивном граном апсцисне осе т.ј. размером између ординате и апсцисе ма које тачке те праве.

Тако је:
$$m' = tg\alpha' = \frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = \ldots\ldots = \frac{\infty}{\infty} = \ldots\ldots = \frac{0}{0} = \ldots\ldots 2).$$
јер се и на тој правој налазе поред осталих тачака и тачка чије су координате (0,0) и тачка чије су координате бесконачно велике.

Из односа 1) и 2) види се да изрази $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ у једном случају имају једну а у другом сасвим другу коначну и одређену вредност. Дакле они су у опште неодређени изрази, јер могу претстављати ма какву коначну и одређену величину. Али како у сваком датом случају они претстављају само једну једину сталну и одређену величину, која се назива њиховом правом вредности, то се они називају *привидно неодређеним изразима.*

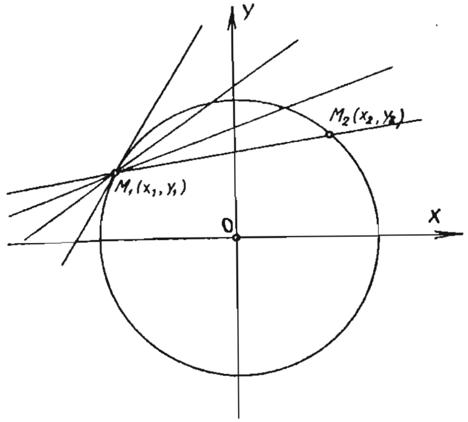
Тако је у односима 1) њихова права вредност m а у односима 2) m' које се међу собом разликују по величини, као што се из слике види.

Када се у рачуну појави који од привидно неодређених израза, одмах треба потражити начина, да се одреди његова права вредност, јер ће се у противном доћи до какве немогућности и неголичности.*)

*) У диференцијалном рачуну постоји правило помоћу кога се одређују праве вредности привидно неодређених израза.

§ 37. ТАНГЕНТА КРУГА ПОВУЧЕНА ИЗ ЈЕДНЕ ТАЧКЕ НА КРУГУ.

Једначину тангенте на круг: $x^2 + y^2 = r^2$ извешћемо најлакше из покретне сечице. Нека сл. 41 претставља круг и праву линију која га пресеца у двема тачкама $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Једначина те праве је претстављена изразом:



Сл. 41

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ldots\ldots 1).$$

Ако сада замислимо да се тачка M_2 креће по кругу тако да се на крају поклопи са тачком M_1, онда права, која је била у почетку сечица, прелази у положај тангенте. Једначина 1) тада прелази у овој израз:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}(x - x_1)$$

односно

$$y - y_1 = \frac{0}{0}(x - x_1)$$

Коефицијенат правца праве 1) свео се на привидно неодређени израз $\frac{0}{0}$ и једначина у овом случају не претставља ништа одређено у координатном систему. Међутим права у положају тангенте круга у тачци $M_1(x_1,y_1)$ је потпуно одређена и има свој коефицијенат правца потпуно одређен. Њега ћемо наћи на овај начин:

Координате пресечних тачака $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ сечице и круга задовољавају и једначину праве и једначину круга, па се може написати:

$$x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

и

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

Ако другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, онда добивамо:

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$$

одакле је:

$$y_2^2 - y_1^2 = -(x_2^2 - x_1^2)$$

или

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

а одавде је:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1} \ldots\ldots 2)$$

Лева страна израза 2) претставља коефицијенат правца сечице која је изражена једначином 1), па онда и његова десна страна мора такође претстављати исти коефицијенат правца. Ако у једначини 1) коефицијенат правца $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ сменимо његовом вредношћу из израза 2) онда она добива следећи облик:

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1) \ldots\ldots 3).$$

Замислимо сада поново да се на сл. 41 тачка M_2 креће по кругу тако, да се на крају поклапа са тачком M_1, онда сечица прелази у тангенту, а координате тачака M_1 и M_2 постају једнаке. У томе случају једначина 3) добива облик:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_1}{y_1 + y_1}(x - x_1)$$

или

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \ldots\ldots 4).$$

Једначина 4) претставља тангенту круга: $x^2 + y^2 = r^2$ која је повучена из његове тачке $M_1(x_1,y_1)$.

Ако у једначини 4) извршимо назначене рачунске операције онда она добива следећи облик:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

или

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Како је $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, то једначина тангенте добива дефинитиван облик:

$$xx_1 + yy_1 = r^2 \ldots\ldots 5.)$$

у овом се облику она да најлакше и запамтити.

Пример: Наћи једначину тенгенте круга: $x^2 + y^2 = 25$ у његовој тачки $M(3,4)$.

Решење се добива, ако у једначину тангенте 5) место величина x_1 и y_1 ставимо координате задате тачке. Тако је једначина тражене тангенте:

$$x.3 + y.4 = 25 \text{ односно } 3x + 4y - 25 = 0.$$

Задаци:

1) Наћи једначину тангенте круга: $x^2 + y^2 = 13$ у његовој тачки (2,3).

2) Наћи једначину тангенте круга: $x^2 + y^2 = 29$ у његовој тачки (—2,5).

3) Наћи једначину тангенте круга: $x^2 + y^2 = 16$ у његовој тачки (0,4).

§ 38. ЈЕДНАЧИНА НОРМАЛЕ КРУГА.

Права линија која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ круга: $x^2 + y^2 = r^2$ а стоји нормално на његовој тангенти назива се *нормалом круга*. Једначина нормале налази се на тај начин, што се узме једначина праве која пролази кроз једну тачку чл. 1. § 12 и у њој се смени неодређени коефицијенат правца са негативном реципрочном вредности коефицијента правца тангенте круга у тој тачци сходно чл. 3. § 18.

Тако је:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

где треба да буде:

$$m = -\frac{1}{-\frac{x_1}{y^1}} = \frac{y_1}{x_1}$$

па се добива једначина:

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

одакле је:

$$y = \frac{y_1}{\lambda_1} x$$

или

$$xy_1 - yx_1 = 0. \quad \ldots\ldots 1)$$

Једначина 1) претставља једначину нормале круга: $x^2 + y^2 = r^2$ у његовој тачци $M_1(x_1,y_1)$. Из облика ове једначине види се да нормала круга пролази кроз његов центар.

Пример: Наћи једначину нормале круга: $x^2 + y^2 = 45$ у његовој тачки M(3,6).

Решење ћемо добити, ако у једначини 1) место величина x_1 и y_1 ставимо координате задате тачке. Тако је једначина тражене нормале

$$x.6 - y.3 = 0 \text{ односно } y = 2x.$$

Задаци:

1) Наћи једначину нормале круга: $x^2 + y^2 = 26$ у његовој тачци (1, 5).

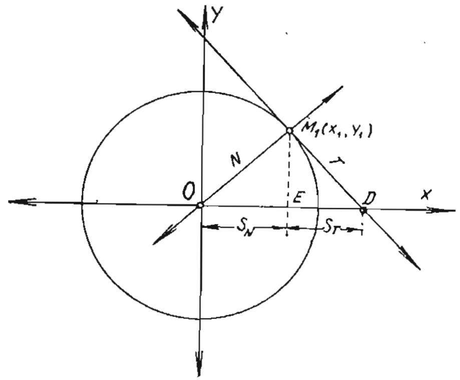
2) Наћи једначину нормале круга: $x^2 + y^2 = 9$ у његовој тачци (0, 3).

3) Наћи једначину нормале круга: $x^2 + y^2 = 13$ у његовој тачци (— 2, 3).

§ 39. ДОДИРНЕ ВЕЛИЧИНЕ КРУГА.

Нека је на сл. 42 претстављен круг $x^2 + y^2 = r^2$. Узмимо на томе кругу тачку $M_1(x_1, y_1)$ и повуцимо кроз њу тангенту и нормалу круга. Тангента сече апсцисну осу у некој тачци D. Отсечак линије тангенте $M_1 D = T$ зове се једноставно *тангента*, а њена пројекција на апсцисну осу $ED = S_T$ назива се *субтангента*.

Линија нормала сече апсцисну осу у тачки O. Отсечак на њој $OM_1 = N$ зове се *нормала* а њена пројекција на апсцисну осу $OE = S_N$ назива се *субнормала*.



Сл. 42.

Координате тачке $M_1(x_1,y_1)$ су познате, а координате тачке D се налазе као координате пресека двеју правих и то линије тангенте и апсцисне осе. Тако исто координате тачке O су познате, а и да нису, могле би се лако израчунати као координате пресека двеју правих и то линије нормале и апсцисне осе.

Величине, тангенте T и нормале N, израчунавају се као отстојање између двеју тачака и узимају се увек са позитивним знаком. Субтангента S_T и субнормала S_N могу се израчунати и помоћу Питагорина правила:

$$S_T = \pm \sqrt{T^2 - y^2}$$
$$S_N = \pm \sqrt{N^2 - y^2}.$$

Овде је усвојено, да се узима знак плус ако се величина налази с десне стране ординате тачке M_1, а знак минус ако се величина налази с леве стране ординате тачке M_1. Можда би се још прецизније могло рећи, да се величини субтангенте и субнормале придаје знак плус, ако се она налази с оне стране ординате тачке M_1 у коме се смислу простире позитивна грана апсцисне осе, а знак минус, ако се величина налази с оне стране ординате тачке M_1 у коме се смислу простире негативна грана апсцисне осе.

Величине субтангенте и субнормале могу се израчунати и на једноставнији начин, али ни у ком случају није потребно изводити и памтити нарочите обрасце. Довољно је запамтити образац за једначину тангенте у једној тачки на кругу и помоћу њега израчунати и једначину нормале и све додирне величине, наравно имајући увек на уму једначину праве што пролази кроз једну тачку и образац за раздаљину између двеју тачака.

Пример: Израчунати додирне величине круга: $x^2 + y^2 = 25$ које одговарају његовој тачци $M(3,4)$.

Решење: Једначина линије тангенте у тој тачци је: $3x + 4y = 25$, а једначина апсцисне осе је: $y = 0$. Решавањем ових двеју једначина добива се, да је: $x = \frac{25}{3}$ и $y = 0$ као координате тачке пресека наведених двеју правих линија. Ова тачка пресека одговара тачки D на сл. 42.

Тако је:

$$T = + \sqrt{\left(\frac{25}{3} - 3\right)^2 + (0 - 4)^2} = \frac{20}{3}$$

$$S_T = + \sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{16}{3}$$

или још једноставније с обзиром на сл. 42

$$S_T = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}$$

$$N = + \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = + 5.$$

Код круга: $x^2 + y^2 = r^2$ је величина нормале N увек једнака полупречнику круга.

$$S_N = - \sqrt{5^2 - 4^2} = - 3.$$

При решавању оваквих задатака увек је потребно, да се претходно нацрта слика и да се из ње израчунавају поједине тражене величине.

Задаци:

1) Наћи додирне величине круга: $x^2 + y^2 = 10$ из његове тачке (1,3).

2) Наћи додирне величине круга: $x^2 + y^2 = 5$ из његове тачке (—2,1).

3) Наћи додирне величине круга: $x^2 + y^2 = 41$ из његове тачке (5,—4).

§ 40. ТАНГЕНТА КРУГА ПОВУЧЕНА ИЗ ТАЧКЕ ВАН КРУГА.

Видели смо у § 33 да би права: $y = mx + b$ била тангента круга: $x^2 + y^2 = r^2$ у некој његовој тачки, потребно је и довољно, да дискриминанта $m^2r^2 + r^2 - b^2$ буде једнака нули т.ј. да је:

$$m^2r^2 + r^2 - b^2 = 0 \ldots\ldots 1).$$

Сем тога, да би права: $y = mx + b$ пролазила кроз тачку $A(x_0,y_0)$ ван круга, то координате ове тачке морају задовољавати и једначину праве т.ј. мора бити:

$$y_0 = mx_0 + b \ldots\ldots 2).$$

Посматрањем једначина 1) и 2) уочава се, да су то две једначине са две непознате величине m и b, које се решавањем поменутих једначина, могу увек израчунати. Међутим, пошто је једначина 1) квадратна а једначина 2) линеарна, то се решавањем истих добивају по две вредности за m и b

Ако једначину 2) решимо по b и тако добивену вредност сменимо у једначини 1) тада добивамо квадратну једначину по m. Решавањем те квадратне једначине добивају се за m следећи корени:

$$m_{1,2} = \frac{x_0y_0 \pm r\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - r^2}}{x_0^2 - r^2}.$$

Како је према § 32 поткорена величина овога израза већа од нуле, јер се тачка $A(x_0,y_0)$ налази ван круга, то су корени m_1 и m_2 реалне и неједнаке величине.

Ако сада у једначини 2) место неодређене величине m ставимо, прво величину m_1, па затим величину m_2, онда за неодређену величину b такође добивамо две реалне одређене вредности b_1 и b_2. На тај смо начин решавањем једначина 1) и 2) по величинама m и b добили два пара реалних корена: m_1,b_1 и m_2,b_2, из чега излази, да се из једне тачке ван круга могу повући две тангенте на круг.

Кад у једначини посматране праве: $y = mx + b$ место величине m и b ставимо прво m_1 и b_1 а затим m_2 и b_2, тада добивамо следеће једначине:

$$y = m_1x + b_1$$

и

$$y = m_2x + b_2.$$

Ове једначине су очевидно једначине двеју тангената круга $x^2 + y^2 = r^2$, које пролазе кроз задату тачку $A(x_0,y_0)$ ван круга.

Пример: Наћи једначине тангената круга: $x^2 + y^2 = 10$ из тачке $M(5,—5)$ која се налази ван круга.

Решење: Да би права: $y = mx + b$ пролазила кроз тачку $M(5,—5)$ треба да буде:

$$-5 = m.5 + b$$

или

$$b = -(5m + 5).$$

Услов пак да би наведена права била тангента круга: $x^2 + y^2 = 10$ је:

$$b^2 = 10\,m^2 + 10.$$

Решавањем ових двеју једначина по непознатим количинама m и b добива се:

$$m_1 = -\frac{1}{3};\ m_2 = -3$$

$$b_1 = -\frac{10}{3};\ b_2 = 10.$$

Тако су тражене тангенте претстављене следећим једначинама

$$x + 3y + 10 = 0$$

и

$$3x + y - 10 = 0$$

Задаци.

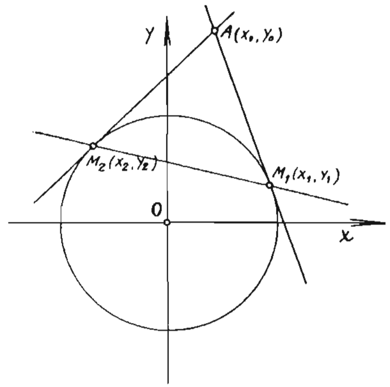
1) Наћи једначине тангената круга: $x^2 + y^2 = 25$ из тачке $(1,7)$.

2) Наћи једначине тангената круга: $x^2 + y^2 = 37$ из тачке $(7,—5)$.

3) Наћи једначине тангената круга: $x^2 + y^2 = 68$ из тачке $(9,—2)$.

* § 41. ПОЛАРА КРУГА.

Проблем одређивања тангенте круга из тачке ван круга може се решити и на следећи начин:



Сл. 43.

Нека је на сл. 43 задата тачка $A(x_0,y_0)$ и круг $x^2 + y^2 = r^2$. Ако из задате тачке повучемо тангенту на посматрани круг, онда ће га она додиривати у некој тачки $M_1(x_1.y_1)$. Једначина тангенте круга у тој тачки била би: $xx_1 + yy_1 = r^2$, где су величине x_1 и y_1 још непознате. Њих ћемо одредити на овај начин:

Како поменута тангента пролази кроз тачку $A(x_0,y_0)$ то њене координате морају задовољавати једначину тангенте, па се добива:

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2 \ldots\ldots 1).$$

Пошто се тачка $M_1(x_1,y_1)$ налази на кругу: $x^2 + y^2 = r^2$, то њене координате морају задовољити једначину круга, те тако имамо следећу једначину:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \ldots\ldots 2).$$

Једначине 1) и 2) су две једначине са две непознате. Из њих се могу израчунати непознате величине x_1 и y_1. Међутим, једначина 1) је линеарна а једначина 2) квадратна, па се решавањем истих добивају по две вредности за непознате величине, што значи да се из тачке $A(x_0,y_0)$ могу повући две тангенте на круг.

Решавањем једначина 1) и 2) излази да је:

$$x_1 = \frac{r^2x_0 + ry_0\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}}{x_0^2+y_0^2};\; y_1 = \frac{r^2y_0 - rx_0\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}}{x_0^2+y_0^2}$$
$$x_2 = \frac{r^2x_0 - ry_0\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}}{x_0^2+y_0^2};\; y_2 = \frac{r^2y_0 + rx_0\sqrt{x_0^2+y_0^2-r^2}}{x_0^2+y_0^2} \quad \ldots 3).$$

Први пар корена 3) одговара координатама тачке M_1, а други пар корена одговара координатама тачке додира оне друге тангенте која се може повући на круг из задате тачке $A(x_0,y_0)$. Тачку на кругу чије су координате (x_2,y_2) обележили смо са M_2.

Узмимо сада у посматрање ону праву линију, која пролази кроз обе тачке додира тангената на круг. Њена ће једначина очевидно бити:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ако у овој једначини величине x_1,y_1 и x_2,y_2 сменимо њиховим вредностима из израза 3) онда добивамо следећу једначину:

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \ldots\ldots 4).$$

Једначина 4) има облик једначине тангенте, само се у њој налазе координате тачке ван круга место координата тачке додира на круг, које се налазе у једначини тангенте.

Права линија која је претстављена једначином 4) назива се поларом круга, а тачка А се зове полом те поларе.

Тако смо, помоћу поларе, проблем налажења једначине тангенте круга, која пролази кроз тачку ван круга, свели на изналажење једначине тангенте која пролази кроз једну тачку на кругу. Прво се, решавањем једначине поларе са једначином круга, нађу координате тачака додира тангената са кругом, па се оне једноставно уврсте у образац једначине тангенте једне тачке на кругу. Овако добивене тангенте, наравно да морају пролазити кроз задату тачку ван круга.

Пример: Наћи једначине тангената круга: $x^2 + y^2 = 10$ из тачке M(5,—5) која се налази ван круга.

Решење: Једначина поларе круга: $x^2 + y^2 = 10$, чији се пол налази у задатој тачки M(5,—5) је:

$$5x - 5y = 10$$

одакле је

$$y = x - 2.$$

Решавањем ове једначине са једначином задатога круга по непознатим величинама x и y добива се да је:

$$x_1 = 3 \qquad y_1 = 1$$
$$x_2 = -1 \qquad y_2 = -3.$$

Парови корена x_1,y_1 и x_2,y_2 нису ништа друго до координате тачака додира оних двеју тангената посматранога круга које пролазе кроз задату тачку M(5,—5). Кад координате овако нађених додирних тачака сменимо у обрасцу за једначину тангенте круга, онда добивамо следеће једначине:

$$3x + y = 10 \quad \text{или} \quad 3x + y - 10 = 0$$
$$-x - 3y = 10 \quad „ \quad x + 3y + 10 = 0$$

Овај смо задатак решили у претходном параграфу по другом начину решавања и дошли смо до истог резултата.

Напомена: Решити помоћу поларе задатке из претходног параграфа.

Дискусија поларе круга.

1) Ако се тачка $A(x_0, y_0)$ налази ван круга, онда су оба пара корена у изразима 3) реална и међу собом неједнака јер је дискриминанта $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ према чл. 2 § 32 увек већа од нуле. Из тога излази да полара круга чији се пол налази ван круга, сече круг у двема реалним тачкама, што значи, да се из једне тачке ван круга увек могу повући две тангенте на круг.

2) Ако се тачка $A(x_0, y_0)$ налази на кругу, онда су оба пара корена у изразима 3) реална и међу собом једнака, јер је према § 32. дискримината $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ једнака нули. У том случају координате тачака $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $A(x_0, y_0)$ постају једнаке т. ј. све три ове тачке се поклапају. Из тога излази, да се из једне тачке на кругу може повући само једна тангента на круг и да се она поклапа са поларом круга чији се пол налази у тој тачки.

Дакле тангента круга у некој његовој тачки је истовремено и полара круга за ту тачку.

3) Ако се тачка $A(x_0, y_0)$ налази у кругу, онда су оба пара корена у изразима 3) имагинарна, јер је према чл. 1 § 32 дискримината $x_0^2 + y_0^2 - r^2$ мања од нуле. Из тога излази, да полара круга не сече круг ни у једној реалној тачки, што

значи, да се ни из једне тачке у кругу не може повући тангента на круг. У том случају полара круга пролази ван круга.

Из свега овога долазимо до закључка, да се свака тачка у равни круга, може сматрати као пол неке поларе круга.

Пример: Наћи ону полару круга: $x^2 + y^2 = 45$ чији је пол у тачки (5,5).

Решење добивамо кад у једначини поларе круга $xx_0 + yy_0 = 45$ место величина x_0 и y_0 ставимо координате задате тачке. Тако добивамо:

$$x.5 + y.5 = 45 \text{ односно } x + y = 9.$$

Задаци:

1) Какав положај према кругу : $x^2 + y^2 = 40$ имају његове поларе, чији се полови налазе у тачкама: (4,8); (6,2) и (4,4) и које су њихове једначине?

2) Наћи угао између оних полара круга: $x^2 + y^2 = 12$ чији се полови налазе у тачкама (6,3); (2,—4).

3) Одредити раздаљину између тачке (6,4) и поларе круга: $x^2 + y^2 = 10$ чији је пол у тачки (3,4).

Свака права линија у равни круга је полара тога круга. Узмимо у посматрање праву линију: $mx + ny + p = 0$ и круг $x^2 + y^2 = r^2$.

Посматрана једначина праве се може написати и на следећи начин:

$$mx + ny = -p.$$

Кад ову једначину поделимо са величином $(-p)$ онда она постаје:

$$-\frac{m}{p}x - \frac{n}{p}y = 1.$$

Ако сада ову новодобивену једначину помножимо са величином r^2 онда она добива облик:

$$-\frac{mr^2}{p}x - \frac{nr^2}{p}y = r^2.$$

Ова се пак једначина може написати и на следећи начин:

$$x\left(-\frac{mr^2}{p}\right) + y\left(-\frac{nr^2}{p}\right) = r^2 \text{ .....5)}.$$

Једначина 5) није ништа друго до полара круга: $x^2 + y^2 = r^2$, где су ој координате пола $\left(-\frac{mr^2}{p}\right)$ и $\left(-\frac{nr^2}{p}\right)$. Ако

бисмо имали да одредимо ону полару круга: $x^2 + y^2 = r^2$, чији је пол тачка са координатама $\left(-\frac{mr^2}{p}\right)$ и $\left(-\frac{nr^2}{p}\right)$, онда би она била претстављена једначином 5).

Како права линија не мења положај према координатном систему, ако јој једначина промени облик, а свака се права линија може довести на облик поларе круга, *то значи да је свака права линија у равни круга истовремено и полара круга.*

Пример: Одредити пол поларе круга: $x^2 + y^2 = 20$ ако је њена једначина: $x + 3y - 10 = 0$.

Решење: Једначина задате праве може се написати и на следећи начин:

$$x + 3y = 10.$$

Ако сада помножимо ову једначину са бројем 2 онда она добива облик:

$$2x + 6y = 20$$

или

$$x.2 + y.6 = 20.$$

Одавде се види, да је пол наведене поларе задатога круга у тачци чије су координате (2,6).

Задаци:

1) Одредити пол поларе круга: $x^2 + y^2 = 90$ ако је њена једначина: $y = -\frac{3}{4}x + 15$.

2) Одредити пол поларе круга: $x^2 + y^2 = 80$ ако је њена једначина: $3x + 4y - 40 = 0$.

3) Одредити пол поларе круга: $x^2 + y^2 = 5$ ако је њена једначина: $x - y = 1$.

4) Наћи отстојање поларе круга: $x^2 + y^2 = 5$ од њезиног пола који је у тачки (3,4).

5) Наћи отстојање поларе круга: $x^2 + y^2 = 30$ од њезиног пола који је у тачки (8,6).

6) Наћи раздаљину између центра круга: $x^2 + y^2 = 52$ и његове поларе чији се пол налази у тачки (12,5).

7) Наћи угао између оних полара круга: $x^2 + y^2 = 8$ чији су полови у тачкама (2,6) и (—3,5).

* § 42. ПОЛАРЕ КРУГА ЧИЈИ СЕ ПОЛОВИ НАЛАЗЕ НА ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ.

Узмимо сада за полове полара круга: $x^2 + y^2 = r^2$ неколико тачака на правој:

$$y = mx + b \; \ldots\ldots 1).$$

Нека су те тачке: $M_0\,(x_0, y_0)$; $M_1\,(x_1, y_1)$; $M_2\,(x_2, y_2)$ и т.д. односно тачке: $M_0\,(x_0, mx_0 + b)$; $M_1\,(x_1, mx_1 + b)$; $M_2\,(x_2, mx_2 + b)$ и т. д. Једначине полара круга: $x^2 + y^2 = r^2$, чији се полови налазе у задатим тачкама биће очевидно:

$$\left.\begin{array}{lll} xx_0 + y\,(mx_0 + b) = r^2 & \text{или} & y = -\dfrac{x_0}{mx_0 + b}\,x + \dfrac{r^2}{mx_0 + b} \\ xx_1 + y\,(mx_1 + b) = r^2 & ,, & y = -\dfrac{x_1}{mx_1 + b}\,x + \dfrac{r^2}{mx_1 + b} \\ xx_2 + y\,(mx_2 + b) = r^2 & ,, & y = -\dfrac{x_2}{mx_2 + b}\,x + \dfrac{r^2}{mx_2 + b} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Како коефицијенти правца правих 2) нису једнаки, то значи да се оне међусобно секу негде у коначним даљинама. Решавањем ма које две од њих по непознатим величинама x и y увек добивамо за координате њихова пресека следеће изразе:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{mr^2}{b} \\ y = \dfrac{r^2}{b} \end{array}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Пошто у изразима 3) величине x и y не зависе од координата полова 2) него само од величина m, r и b, које су у датом случају узете за сталне величине, то значи да се све праве 2) секу у једној тачки.

Из овога излази правило према коме се: *све поларе круга: $x^2 + y^2 = r^2$, чији се полови налазе на једној правој морају сећи у једној тачки.*

Дискусија:

Ако претпоставимо да је у једначини 1) величина b једнака нули, онда права претстављена том једначином пролази кроз координатни почетак. У томе случају коефицијенти правца полара 2) постају једнаки, а њихов пресек претстављен изразима 3) постаје:

$$x = -\infty$$
$$y = \infty$$

Из овога следује закључак према коме су поларе круга: $x^2 + y^2 = r^2$ међу собом паралелне, ако им се полови налазе на правој која пролази кроз координатни почетак.

* § 43. ПОЛОЖАЈИ ПОЛАРА КРУГА $x^2 + y^2 = r^2$ И ЊИХОВИХ ПОЛОВА АКО СЕ ОНИ НАЛАЗЕ НА ПРАВОЈ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК

Нека нам је дата права линија:

$$y = mx \; \ldots\ldots 1).$$

Ако на овој правој узмемо неколико тачака као н. пр. $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ итд. онда ће поларе круга, чији се полови налазе у посматраним тачкама, бити претстављене једначинама:

$$\left.\begin{array}{lll} xx_0 + yy_0 = r^2 & \text{или} & y = -\dfrac{x_0}{y_0}\,x + \dfrac{r^2}{y_0} \\ xx_1 + yy_1 = r^2 & ,, & y = -\dfrac{x_1}{y_1}\,x + \dfrac{r^2}{y_1} \\ xx_2 + yy_2 = r^2 & ,, & y = -\dfrac{x_2}{y_2}\,x + \dfrac{r^2}{y_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Из система једначина 2) се види, да би општа једначина полара круга, чији се полови налазе на правој 1) имала облик:

$$y = -\frac{x_n}{y_n}\,x + \frac{r^2}{y_n}.$$

Како пак праве 2) морају бити међу собом паралелне, то се ова једначина може написати и на овај начин:

$$y = -\frac{x_0}{y_0}\,x + \frac{r^2}{y_n} \ldots\ldots 3).$$

Слободан члан једначине 3) претставља ону дуж на ординатној осовини, коју права претстављена том јеначином отсеца изнад или испод почетка правоуглог координатог система.

Из једначине 3) се види, да ће јој слободни члан бити позитиван ако је y_n позитивно и обратно, да ће јој слободни члан бити негативан ако је y_n негативно. Из тога излази закључак, да свима тачкама на правој 1), које имају позитвне ординанте, одговарају поларе које отсецају на ординатној осовини позитивне отсечке и обратно, свакој тачки на правој 1) која има негативну ординату, одговара полара која отсеца негативан отсечак на ординатној осовини.

Сем тога, из истог слободног члана поларе 3) долази се до следећег закључка: У колико је апсолутна вредност величина y_n већа, у толико је апсолутна вредност слободног члана $\frac{r^2}{y_n}$ мања и обратно, у колико је апсолутна вредност величине y_n мања у толико је апсулутна вредност слободног члана $\frac{r^2}{y_n}$ већа.

Узмимо сада у посматрање специјалан случај и то онај када је права која пролази кроз координтни почетак сама апсцисна осовина, чија је једначина као што знамо дата изразом:

$$y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; 4).$$

Ако се пол налази у некој тачки $M_n(x_n,0)$ на правој 4) онда ће полара круга: $x^2 + y^2 = r^2$, бити она права чија је једначина претстављена следећим изразом:

$$x.x_n + y.0 = r^2$$

одакле је

$$xx_n = r^2$$

или

$$x = \frac{r^2}{x_n} \; . \; . \; . \; . \; . \; 5).$$

Из облика једначине 5) види се, да права, која је њоме претстављена мора бити нормална на апсцисној осовини т. ј. на правој 4) и да је отстојање од те праве до координатног почетка односно центра круга једнако $\frac{r^2}{x}$.

Положаје између поларе 5) и њезиног пола који се налази на правој 4) у некој тачки $M(x_n,0)$, најбоље ћемо претставити следећом схемом; из које се види ово:

Кад се пол налази на правој 4) у једној тачки у бесконачности, онда полара пролази кроз координатни почетак односно кроз центар круга: $x^2 + y^2 = r^2$. Ако се пол буде кретао по правој 4) из плус бесконачно ка центру круга, онда ће полара поћи од центра круга у смислу плус бесконачно.

На периферији круга ће се сусрести и пол и полара, па ће пол продужити пут ка центру круга а полара за плус бесконачно. Кад пол доспе у центар круга, онда ће полара стићи у плус бесконачно.

одстојање пола од центра круга	отстојање поларе од центра круга	одстојање пола од центра круга	отстојање поларе од центра круга
x_n	$\frac{r^2}{x_n}$	x_n	$\frac{r^2}{x_n}$
∞	0	-0	$-\infty$
1000	$\frac{r^2}{1000}$	$-\frac{1}{1000}$	$-1000r^2$
100	$\frac{r^2}{100}$	$-\frac{1}{100}$	$-100r^2$
10	$\frac{r^2}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-10r^2$
r^2	1	-1	$-r^2$
r	r	$-r$	$-r$
1	r_2	$-r^2$	-1
$\frac{1}{10}$	$10r^2$	-10	$-\frac{r^2}{10}$
$\frac{1}{100}$	$100r^2$	-100	$-\frac{r^2}{100}$
$\frac{1}{1000}$	$1000r^2$	-1000	$-\frac{r^2}{1000}$
0	∞	$-\infty$	-0

Ако пол прође кроз нулу и продужи пут правом 4) у смислу минус бесконачно, онда ће полара прелазећи из плус у минус бесконачно, кретати се ка центру круга. На периферији круга ће се поново сусрести и пол и полара, па ће пол продужити пут за минус бесконачно, а полара ка центру круга. Кад пол буде стигао у минус бесконачно, тада ће полара проћи кроз центар круга.

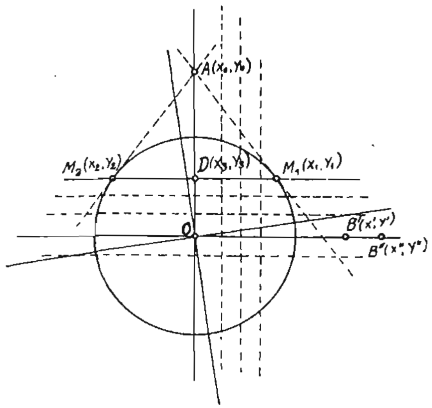
Из овога се види фина хармонија између положаја поларе круга: $x^2 + y^2 = r^2$ и њезиног пола који се креће по једној правој линији која пролази кроз координатни почетак односно центар тога круга.

§ 44. ДИЈАМЕТРИ КРУГА

1. чл. Нека нам је на сл. 44 претстављен круг: $x^2 + y^2 = r^2$ и тачка $A(x_0,y_0)$ ван тога круга. Полара круга чији се пол налази у задатој тачки биће претстављена једначином:

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \ldots\ldots 1).$$

Она ће сећи дати круг у двема тачкама $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Обележимо са $D(x_3,y_3)$ ону тачку која полови тетиву M_1M_2. Једначина праве која пролази кроз тачке $A(x_0,y_0)$ и $D(x_3,y_3)$ биће претстављена изразом:



Сл. 44.

$$y - y_0 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}\,(x - x_0) \text{ или}$$

$$y - y_0 = \frac{\frac{y_2 + x_1}{2} - y_0}{\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0}(x - x_0).$$

Ако у овој последњој једначини сменимо величине x_1,x_2 и y_1,y_2 њиховим вредностима претстављеним у изразима 3) § 41, онда ћемо после обичних рачунских операција добити следећу једначину:

$$y = \frac{y_0}{x_0}\,x \ldots\ldots 2).$$

Из облика једначине 2), јасно се види, да права линија која је њоме претстављена, пролази кроз координатни почетак, односно кроз центар задатога круга. Значи, да права која пролази кроз пол неке поларе круга и кроз средину оне тетиве која се налази између пресечних тачака круга и поларе, мора пролазити и кроз центар круга. Дакле све три

тачке: пол, центар круга и средина оне тетиве круга, која настаје пресеком кружне линије и поларе круга, морају лежати на истој правој линији. Из овога излази следеће правило:

Права линија која пролази кроз пол неке поларе круга и кроз центар круга, мора половити ону тетиву која се налази између пресечних тачака круга и поларе.

Ако узмемо у посматрање известан број полара круга, чији се полови налазе на правој 2) онда ће оне бити међу собом паралелне. Тако исто ће бити међу собом паралелне и све оне тетиве круга које настану пресеком поменутих полара са кружном линијом. *Сем тога ће права 2) према претходном правилу, половити сваку од тих тако добивених тетива круга и због те своје особине она се назива дијаметарском правом или дијаметром круга.*

На свакој правој линији која пролази кроз центар круга можемо узети произвољан број тачака за полове полара тога круга. Све тако добивене поларе морају бити међу собом паралелне. Према томе морају бити међу собом паралелне и све оне тетиве које настају пресеком круга и поменутих полара. Посматрана права мора половити све тако добивене тетиве што значи да и она претставља дијаметар круга.

Из тога излази закључак да свака права линија која пролази кроз центар круга: $x^2 + y^2 = r^2$, претставља дијаметар тога круга.

Једначина 1) нам претставља полару круга чији се пол налази на дијаметру (2). Ту једначину можемо написати и на следећи начин:

$$y = -\frac{x_0}{y_0}\,x + \frac{r^2}{y_0} \ldots\ldots 3).$$

Ако коефицијенат правца праве (2) обележено са m, а коефицијенат правца праве (3) са m_1, онда добивамо:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{y_0}{x_0} \\ m_1 &= -\frac{x_0}{y_0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4).$$

Кад једначине 4) међу собом помножимо и то десну страну једне са десном страном друге, а леву страну једне са левом страном друге, тада добивамо:

$$\left.\begin{aligned} m.m_1 &= -1 \\ \text{или} \quad m &= -\frac{1}{m_1} \\ m_1 &= -\frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Ови нам обрасци претстављају однос између коефицијента правца једног дијаметра круга и оних паралелних полара круга чији се полови налазе на томе дијаметру.

Из образаца 5) видимо, да сваки дијаметар круга стоји нормално на оним тетивама круга које он полови.

Пример: Наћи дијаметар круга: $x^2 + y^2 = r^2$ који полови његове тетиве паралелне са правом: $3x + 4y + 7 = 0$.

Решење: Једначина траженог дијаметра има облик: $y = mx$. Пошто величина m у овој једначини мора бити равна негативној реципрочној вредности коефицијента правца задате праве, то имамо: $y = \frac{4}{3}x$.

ЗАДАЦИ:

1) Дијаметар круга: $x^2 + y^2 = r^2$, пролази кроз тачку $(3,-2)$, наћи коефицијенат правца оних тетива круга које полови тај дијаметар.

2) Један дијаметар круга: $x^2 + y^2 = r^2$ је паралелан са правом: $2x - y + 5 = 0$, а други пролази кроз тачку $(3, 1)$; наћи угао који захватају поларе круга чији се полови налазе на тим дијаметрима.

3) Праве: $x + 4y - 12 = 0$; $2x + 3y - 14 = 0$ и полара круга: $x^2 + y^2 = 12$, чији се пол налази у пресеку задатих правих, претстављају једначине страна једног троугла; наћи површину тога троугла.

2 чл. КОЊУГОВАНИ ДИЈАМЕТРИ КРУГА.

Једна од паралелних полара круга, чији се полови налазе на дијаметру (2) мора пролазити кроз центар круга: $x^2 + y^2 = r^2$. Њена ће једначина бити претстављена изразом:

$$y = -\frac{x_0}{y_0}x \ldots\ldots 6).$$

Како права (6) пролази кроз центар круга, то нам и она истовремено претставља један дијаметар круга. Ако коефицијенат правца оних паралелних тетива круга које полови дијаметар (6) обележимо са m_2, онда према обрасцима 5) мора бити:

$$m_2\left(-\frac{x_0}{y_0}\right) = -1$$

одакле је

$$m_2 = \frac{y_0}{x_0} \ldots\ldots 7).$$

Из израза 7) излази да су тетиве круга које полови дијаметар (6) паралелне са дијаметром (2). Тако исто знамо да и дијаметар (2) полови тетиве круга које су паралелне са дијаметром (6). Овакав пар дијаметра називамо *коњугованим дијаметрима круга.*

Према томе коњуговани дијаметри круга су она два дијаметра од којих сваки полови тетиве круга које су паралелне ономе другоме.

Пошто је коефицијенат правца дијаметра (2) једнак негативној реципрочној вредности коефицијента правца дијаметра (6), то значи да коњуговани дијаметри круга стоје нормално један на другоме. Према томе апсцисна и ординатна оса правоуглог координатног система ХОУ претстављају један пар коњугованих дијаметара круга: $x^2 + y^2 = r^2$.

*§ 45 ПОЛАРА КРУГА: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Нека је на сл. 45 преставлен круг чија је једначина у правоуглом кординатном систему дата изразом: $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$.....1).

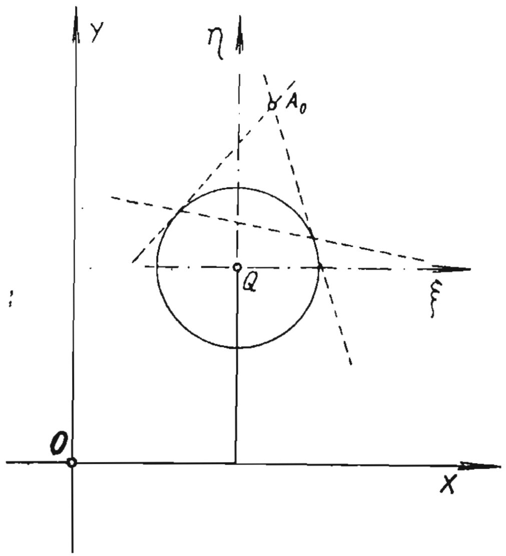
Узмимо сада у равни истог правоуглог координатног система неку тачку $A_0(x_0,y_0)$ која се налази ван задатога круга. Једначину поларе круга, чији се пол налази у посматраној тачки $A(x_0,y_0)$ одредићемо на следећи начин:

Прво ћемо у центар задатога круга поставити један помоћни правоугли координатни систем $\xi Q \eta$, чије су одговарајуће осе паралелне у истом смислу са осама система XOY.

Једначина задатога круга у новоме систему $\xi Q \eta$ биће претстављена изразом:

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 \ldots . 2).$$

Нека су ξ_0 и η_0 координате тачке А у систему $\xi Q \eta$. Познато нам је да ће она полара задатога круга, чији се пол



Сл. 45.

налази у тачки A, бити претстављена у новоме систему једначином:

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 = r^2 \ldots\ldots 3).$$

Знамо, да између координата ма које тачке, која се налази у оба система XOY и $\xi Q\eta$ постоје стални односи претстављени познатим једначинама трансформације:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - p\\ \eta &= y - q\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4).$$

На основу ових једначина, а види се и директно из сл. 45 да је:

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= x_0 - p\\ \eta_0 &= y_0 - q\end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Ако у једначини 3) место величина ξ, η и ξ_0, η_0 ставимо њихове вредности из израза 4) и 5), онда добивамо следећу једначину:

$$(x - p)\,(x_0 - p) + (y - q)\,(y_0 - q) = r^2 \ldots\ldots 6).$$

Овај нам израз претставља једначину поларе задатога круга са полом у тачки A, изражену у правоуглом координатном систему XOY.

Из облика једначине 6) види се, да се једначина поларе круга 1) добива на тај начин, што се у његовој једначини:

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ изрази: $(x - p)^2$ и $(y - q)^2$ раставе на по два чинитеља, па се у по једном од тих чинитеља место величина x и y ставе координате пола x_0, y_0.

Пример: Наћи полару круга: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 18$, која има пол у тачки (4,7).

Решење: $(x - 2)\,(4 - 2) + (y - 3)\,(7 - 3) = 18$
или

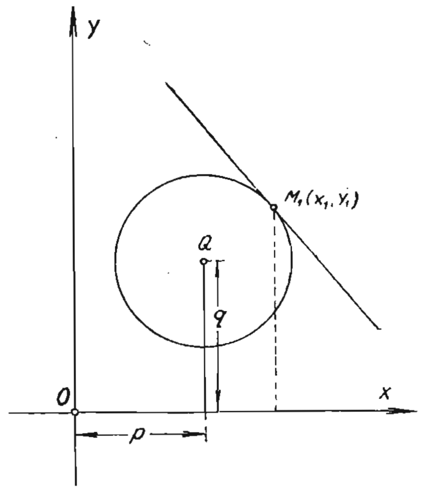
$$x + 2y - 17 = 0.$$

* § 46. ТАНГЕНТА И НОРМАЛА КРУГА $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ПОВУЧЕНЕ ИЗ ЈЕДНЕ ЊЕГОВЕ ТАЧКЕ.

Нека је на сл. 46 претстављен круг $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ и његова тачка $M_1(x_1, y_1)$. Једначина поларе посматраног круга чије се пол налази у задатој тачки $M_1(x_1, y_1)$ биће дата изразом:

$$(x - p)\,(x_1 - p) + (y - q)\,(y_1 - q) = r^2 \ldots\ldots 1).$$

Како полара круга, чији се пол налази у некој тачки на кружној линији, није ништа друго до тангента круга за ту тачку, то је очевидно, да нам једначина 1) претставља истовремено и једначину тангенте круга:
$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ у његовој тачци $M_1(x_1, y_1)$.



Сл. 46

Нормала круга:
$(x - p)^2 + (y + q)^2 = r^2$
у тачци $M_1(x_1, y_1)$ је она права линија која пролази кроз ту тачку и стоји нормално на тангенти круга у тој тачки. Њену ћемо једначину наћи на тај начин што ћемо у једначини праве која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ неодређени коефицијенат правца сменити негативном реципрочном вредношћу коефицијента правца тангенте круга у тој тачци.

Једначина праве која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ је дата изразом:

$$- y_1 = m\,(x - x_1).$$

Ако у овој једначини неодређени коефицејенат правца m сменимо негативном реципрочном вредношћу коефицијента правца тангенте 1) онда добивамо следећу једначину:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p}(x - x_1)$$

или

$$(x - x_1)(y_1 - q) - (y - y_1)(x_1 - p) = 0 \ldots\ldots 2).$$

Једначина 2) нам преставља нормалу круга:
$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ у његовој тачци $M_1(x_1, y_1)$.

Пример: Наћи једначине тангенте и нормале круга: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$ у његовој тачки M(5,6).

Решење: Једначина тангенте ће бити:

$$(x - 3)(5 - 3) + (y - 4)(6 - 4) = 8$$

или

$$x + y - 11 = 0.$$

Једначина нормале ће бити:

$$(x - 5)(6 - 4) - (y - 6)(5 - 3) = 0$$

или

$$x - y + 1 = 0.$$

* § 47. МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВА КРУГА.

У свима облицима једначине круга видели смо да су коефицијенти уз x^2 и y^2 увек једнаки, што значи, да је то општа особина једначине круга. Коефицијенти уз x и y, као и слободни члан, могу бити међу собом различити.

Ако се једначине два круга разликују само у слободним члановима, онда оне претстављају кругове који имају заједнички центар. Такви се кругови називају *концентричним круговима*.

Кад би у једначинама два концентрична круга и слободни чланови били међу собом једнаки, онда би се ти кругови поклапали т.ј. претстављали једну те исту криву линију.

Ако у једначинама два круга, коефицијенти уз x или уз y или истовремено и уз x и уз y, нису једнаки, онда се центри тих кругова не поклапају. Такви се кругови називају *ексцентричним круговима*.

Нека су нам задата два круга чије су једначине:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \\ x^2 + y^2 + gx + ny + h = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Решавањем ових двеју једначина добивају се координате пресечних тачака оних двеју кружних линија које су њима претстављене. Ако је $M_1(x_1,y_1)$ једна од пресечних тачака задатих кругова, онда њене координате морају задовољавати и једначину једног и једначину другог круга.

Кад једну од једначина 1) помножимо са неким константним бројем λ, па тако добивену једначину саберемо са другом онда добивамо следећу једначину:

$$(x^2 + y^2 + dx + ey + f) + \lambda\,(x^2 + y^2 + gx + ny + h) = 0 \ldots\ldots 2).$$

Ако у једначини 2) место промењљивих величина x и y ставимо координате тачке $M_1(x_1,y_1)$, онда ће према узетој претпоставци (да су x_1 и y_1 координате пресека кругова 1) и израз у првој и израз у другој загради понаособ бити једнаки нули, т.ј. цела ће лева страна једначине бити једнака нули. Значи, да ће координате тачке $M_1(x_1,y_1)$ увек задовољавати једначину 2) независно од тога какву вредност будемо давали величини λ.

Величина λ је потпуно независна од свих величина које фигуришу у једначини 2). Њој можемо давати какву год хоћемо коначну и одређену вредност и због тога се зове промењљиви параметар.

Ако кругови 1) сем тачке $M_1(x_1,y_1)$ имају још коју заједничку тачку, онда ће очевидно и координате тих тачака морати задовољити једначину 2).

Кад у једначини 2) ставимо да је параметар $\lambda = -1$, онда се она своди на једначину:

$$(d - g)x + (e - n)y + (f - h) - 0 \ldots\ldots 3).$$

Координате пресека сваке тачке кругова 1) морају задовољити једначину 3), што значи да и линија која је претстављена једначином 3) мора пролазити кроз тачке пресека кругова 1). Тако оба круга 1) и линија 3) морају имати заједничке тачке пресека.

Линија (3) је једначина првог степена са две непознате величине што значи, да она претставља праву линију. Координате пресека праве (3) и кругова (1) добиће се решавањем једне од једначина 1) са једначином 3) по непознатим величинама x и y. Како су једначине 1) квадратне а једначина 3) линеарна, то се решавањем једне од једначина 1) са једначином 3) морају добити ни мање ни више него два пара корена по непознатим величинама x и y. То ипак не значи ништа друго него да права (3) сече кругове (1) у двема тачкама, а то даље значи да се и сами кругови (1) могу сећи само у двема тачкама.

Права (3) која пролази кроз заједничке тачке пресека кругова (1) претставља једначину њихове заједничке сечице.

Из свега овога изводи се следеће практично упутство за одређивање координата пресека двеју кружних линија, чије су једначине познате:

Прво треба једну од једначина задатих кругова одузети од друге, чиме се добива једначина њихове заједничке сечице. Затим треба једну од једначина тих кругова и једначину добивене сечице решити по непознатим величинама x и y. Тада се добијају два пара корена по x-су и y-ну, који не претстављају ништа друго до координате пресека задатих кругова.

ДИСКУСИЈА:

1) Ако се решавањем једне од једначина кругова (1) са једначином праве (3) добију два пара неједнаких реалних корена, онда се посматрани кругови секу у двема тачкама.

2) Ако се решавањем једне од једначина кругова (1) са једначином праве (3) добију два пара једнаких реалних корена, онда се посматрани кругови додирују у једној тачки. Тада је њихова заједничка сечица прешла у положај њихове заједничке тангенте. Овде могу наступити два случаја: — Могу се кругови додиривати споља а могу и изнутра. Који ће бити од наведених случајева може се одредити помоћу централне раздаљине. Централна раздаљина је отстојање између центара двају посматраних кругова и она је претстављена изразом: $c = \sqrt{(p - m)^2 + (q - n)^2}$, где су p и q координате центра једног круга, а (m, n) координате центра другог круга.

Из задатих једначина могу се израчунати полупречници кругова. Обележимо са R полупречник већега круга а са r полупречник мањега круга.

Ако је $c = R + r$, онда се кругови додирују споља, а ако је $c = R - r$ онда се кругови додирују изнутра.

3) Ако се решавањем једне од једначина кругова 1) са једначином праве 3) добију два пара имагинарних корена, онда се кругови у опште не секу.

И овде могу наступити два различита случаја: Могу кругови бити један ван другога, а могу бити један у другоме. Који ће бити од наведених случајева поново ће одредити њихова централна раздаљина. Ако је $c > R + r$, онда су кругови један ван другога, а ако је $c < R - r$, онда се мањи круг налази у већему.

ЗАДАЦИ:

◎ 1) Наћи једначину круга чији је полупречник $r = 2$ а центар му се налази у координатном почетку.

◎ 2) Како гласи једначина круга, чији је центар у координатном почетку а пречник му је 12 dm?

◎ 3) Наћи једначину круга који пролази кроз тачку (3,4) а центар му се налази у координатном почетку.

◎ 4) Круг пролази кроз тачку $(-5,1)$, а центар му је у координатном почетку, наћи његову једначину.

◎ 5) Наћи једначину круга који пролази кроз тачку $\left(\frac{2}{3}, -3\right)$ а центар му је у координатном почетку.

◎ 6) Одредити међусобни положај круга $x^2 + y^2 = 13$ и тачака чије су координате: (1, 2); (3, 2); (2, 5).

◎ 7) Какав положај заузимају тачке са координатама $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ према кругу $36x^2 + 36y^2 = 25$?

◎ 8) Одредити међусобни положај круга $x^2 + y^2 = 10$ и правих: $x - 2y + 6 = 0$; $x - 3y + 10 = 0$ и $x - y - 6 = 0$.

◎ 9) Какав положај имају праве: $x + 3y - 10 = 0$; $2x + y - 10 = 0$ и $y = 2x - 15$ према кругу $x^2 + y^2 = 20$?

Одредити једначину круга:

◎ 10) чији је центар у тачци (3, 5) а полупречник $r = 4$.

◎ 11) чији је центар у тачци $(-2,4)$ а полупречник $r = 6$.

◎ 12) чији је центар у тачци $\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ а полупречник $r = \frac{4}{3}$.

Одредити координате центра, полупречник и конструисати кругове

◎ 13) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 41 = 0$.

◎ 14) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$.

◎ 15) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$.

◎ 16) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$.

◎ 17) $3x^2 + 3y^2 - 9x - 4y + 6 = 0$.

◎ 18) Наћи једначину круга који пролази кроз координатни почетак а центар му се налази у тачци (8,6).

◎ 19) Наћи једначину круга који пролази кроз тачку (—2,3) а центар му је у пресеку правих: $3x + y - 10 = 0$ и $4x - y + 3 = 0$.

◎ 20) Наћи једначину круга који пролази кроз координатни почетак и кроз тачке (2,4) и (3,1).

◎ 21) Наћи једначину круга који пролази кроз тачке: (2,5), (—3,—4) и (2,—3).

◎ 22) Једначине троуглових страна су: $x - 7y + 2 = 0$; $3x + 4y + 6 = 0$ и $7x + y - 36 = 0$ наћи једначину описаног круга око тога троугла.

23) Наћи једначину тангенте круга $x^2 + y^2 = 34$ из његове тачке (5,3).

24) Наћи једначину нормале круга $x^2 + y^2 = 52$ из његове тачке (4,6).

25) Наћи једначину тангенте и нормале круга $x^2 + y^2 = 5$ из тачке (1,2).

26) Наћи једначину тангенте и нормале круга $x^2 + y^2 = 13$ из тачке (— 2, 3).

27) Наћи једначину тангенте и нормале круга $4x^2 + 4y^2 = 5$ из тачке $(^1/_2, 1)$.

28) Наћи додирне величине круга $x^2 + y^2 = 20$ из његове тачке (2,4).

29) Наћи додирне величине круга $x^2 + y^2 = 45$ из његове тачке (— 3,6).

30) Наћи додирне величине круга $9x^2 + 9y^2 + 40$ из његове тачке $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$.

31) У једначини праве $x + 2y - \lambda = 0$ одредити вредност параметра λ такву, да та права буде тангента круга $x^2 + y^2 = 20$.

32) У једначини праве $\lambda x + y - 20 = 0$ одредити вредност параметра λ такву, да та права буде тангента круга $x^2 + y^2 = 40$.

33) Наћи једначину тангенте круга $x^2 + y^2 = 10$ која је паралелна са правом $3x + y + 2 = 0$.

34) Наћи једначину тангенте круга $x^2 + y^2 = 5$ која је нормална на правој $2y - x - 3 = 0$.

35) Како гласи једначина круга који додирује праву $4x + 3y - 7 = 0$ а центар му се налази у тачци (5,4)?

36) Наћи једначину круга који пролази кроз тачке (1,2) и (— 1,0) а центар му се налази на правој $x - 2y - 7 = 0$.

37) Круг са полупречником $r = 5$ додирује праву $4x + 3y - 13 = 0$ у тачци чија је ордината 3; наћи његову једначину.

38) Круг додирује праву $x + 2y - 17 = 0$ у тачци чија је апсциса 5, а центар му се налази на правој $x + 2y - 7 = 0$, наћи једначину тога круга.

39) Једначине троуглових страна су: $4x + 3y - 20 = 0$; $3x - 4y - 15 = 0$; $4x - 3y - 14 = 0$; наћи једначину уписаног круга у томе троуглу.

* 40) Тачка (7,1) је ван круга $x^2 + y^2 = 25$, наћи полару тога круга чији се пол налази у задатој тачци и одредити његове тангенте које пролазе кроз ту тачку.

* 41) Наћи тангенте круга $x^2 + y^2 = 37$ које пролазе кроз тачку (5,—7) и одредити његову полару чији се пол налази у задатој тачци.

* 42) Наћи тангенте круга $4x^2 + 4y^2 = 5$, које пролазе кроз тачку $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ и одредити његову полару чији се пол налази у задатој тачци.

43) Из тачке (8,— 6) повучене су тангенте на круг $x^2 + y^2 = 50$, наћи угао између тих тангената.

*44) Полара круга $x^2 + y^2 = 26$ је права $2x + 3y - 13 = 0$; одредити њен пол.

*45) Полара круга $x^2 + y^2 = 40$ је права $y = \frac{3}{4}x + 10$; одредити њен пол.

*46) Полара круга $x^2 + y^2 = 180$ је права $x + y = 18$; одредити њен пол.

*47) Наћи једначину круга чији је центар у координатном почетку, ако је његова полара $4x + 3y - 40 = 0$ са полом у тачци (8,6).

*48) Наћи једначину круга чији је центар у координатном почетку, ако је његова полара $y = -3x + 10$ са полом у тачци (6,2).

*49) Наћи једначину круга чији је центар у координатном почетку, ако је његова полара $x + y = 9$ са полом у тачки (5,5).

*50) Наћи једначину дијаметра круга $x^2 + y^2 = 52$ који је паралелан са његовом поларом, чији се пол налази у тачки (4,7).

*51) Наћи једначину дијаметра круга $x^2 + y^2 = 80$ који је нормалан на његовој полари чији се пол налази у тачки (6,8).

*52) Одредити пар коњугованих дијаметара круга $x^2 + y^2 = 10$, од којих је један паралелан са поларом круга чији се пол налази у тачци (2,4).

*53) Наћи једначину круга, чији је центар у координатном почетку, а који на правој $3x + 4y - 60 = 0$ отсеца дуж од 10 дужинских јединица.

*54) За који угао треба да се окрене права $7x + y = 50$ око своје тачке (7,1) да би додиривала круг $x^2 + y^2 = 25$?

55) Наћи једначину круга који додирује координатне осовине и пролази кроз тачку (2,4).

*56) Наћи једначину тангенте и нормале круга: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 26$ из његове тачке $(-2,1)$.

*57) Наћи једначину тангенте и нормале круга: $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 24 = 0$, из његове тачке (3,1).

*58) Одредити додирне величине круга: $(x + 2)^2 + (y-3)^2 = 29$ из његове тачке (3,5).

*59) Одредити додирне величине круга: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$ из његове тачке $(-1,2)$.

*60) Наћи једначину поларе круга $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 37$ чији се пол налази у тачци (5,6).

*61) Из тачке $(5,-2)$ повучене су тангенте на круг: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 18$, наћи њихове једначине.

*62) Из тачке (3,2) повучене су тангенте на круг: $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 13 = 0$, наћи њихове једначине.

*63) Из тачке (1,5) повучене су тангенте на круг: $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 39 = 0$, наћи угао који оне захватају.

*64) Какав међусобни положај имају права: $5x + y - 16 = 0$ и круг: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$?

*65) Какав међусобни положај имају права: $5x + 2y - 16 = 0$ и круг: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 29$?

*66) Какав међусобни положај имају круг: $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 56 = 0$ и права $x + 2y - 4 = 0$?

*67) Наћи тангенте круга $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 8 = 0$ које су паралелне са правом $y = 4x - 5$.

*68) Наћи тангенте круга $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 5 = 0$ које су нормалне на правој $2y + 7x + 14 = 0$.

69) Израчунати централну раздаљину кругова: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ и $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$ и наћи њену једначину.

Какав међусобни положај имају кругови:

*70) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$ и $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$.

*71) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ и $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

*72) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 7 = 0$ и $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 5 = 0$.

*73 $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 19 = 0$ и $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.

*74) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ и $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

*75) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ и $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

*76) Из пресечних тачака кругова: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 12 = 0$ и $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$, повучене су дирке на оба круга, наћи њихове једначине.

*77) Шта претставља геометриско место центара кругова који пролазе кроз тачке: $(-2, 1)$ и $(3, 2)$?

*78) Шта претставља геометриско место центара кругова чији је полупрзчник $r = 2$, а који додирују круг: $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$ *a*) споља, *b*) изнугра?

*79) Шта претставља геометриско место тачака у равни круга $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ из којих се тај круг види под углом од 60^0?

*80) Темена оштрих углова правоуглог троугла налазе се утврђена на апсцисној оси, од којих је једно у почетку правоуглог координатног система, а друго на позитивној грани апсцисне осе; треће се теме креће у равни тога координатног система, наћи једначину геометриског места свих његових положаја.

*81) Једно теме троуглово лежи у координатном почетку, друго се налази утврђено на позитивној грани апсцисне осе, а треће се креће у равни правоуглог координатног система; одредити једначину геометриског места свих положаја трећега темена, кад се зна да је размера његових отстојања од прва два темена увек стална величина $\frac{m}{n}$.

* 82) Дуж $2m$ креће се у правоуглом координатном систему тако, да јој увек један крај клизи по апсцисној оси, а други по ординатној оси; одредити једначину путање коју описује њезина средња тачка.

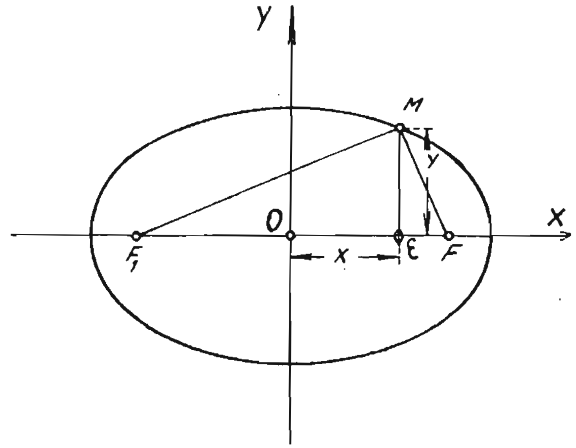
Глава V

ЕЛИПСА

§ 48. ОДРЕЂИВАЊЕ ПОТЕГА ЕЛИПСЕ.

Према § 25 елипса је затворена крива линија у равни код које је збир потега ма које тачке једнак великој оси елипсе.

Нека је на сл. 47 претстављена једна елипса. Поставимо у раван те елипсе један правоугли координатни систем, тако да се координатни почетак поклапа са центром елипсе, ап-



Сл. 47.

сцисна оса са великом осом елипсе, а ординатна оса са малом осом елипсе. Узмимо затим ма коју тачку $M(x,y)$ на елипси и повуцимо њене потеге и координате.

Из слике се види да је:

$$\overline{F_1M}^2 = \overline{F_1E}^2 + \overline{ME}^2$$

и

$$\overline{FM}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{ME}^2.$$

Ако другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, онда добивамо следећу једначину:

$$\overline{F_1M}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{F_1E}^2 - \overline{FE}^2 \quad \ldots\ldots 1).$$

Тако исто се из слике види да је:

$$\left.\begin{aligned} F_1E &= c + x \\ FE &= c - x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Ако сада у једначини 1) место величина F_1E и FE ставимо њихове вредности из једначина 2) онда добивамо једначину:

$$\overline{F_1M}^2 - \overline{FM}^2 = (c+x)^2 - (c-x)^2$$

одакле је

$$\overline{F_1M}^2 - \overline{FM}^2 = 4cx$$

или

$$(F_1M - FM)\ (F_1M + FM) = 4cx \ldots . 3).$$

Кад у једначини 3) место величине $(F_1M + FM)$ ставимо њену вредност $2a$ према једначини 8) § 25 тада добивамо:

$$(F_1M - FM)2a = 4cx$$

или

$$F_1M - FM = \frac{2cx}{a} \ldots . 4).$$

Решавањем ове једначине са једначином 8) § 25 по величинама F_1M и FM излази да је:

$$\left.\begin{aligned} F_1M &= a + \frac{cx}{a} \\ FM &= a - \frac{cx}{a} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Једначине 5) нам изражавају дужине потега неке тачке M на елипси.

◎ § 49. ЈЕДНАЧИНА ЕЛИПСЕ (централни облик).

1. чл. Из троугла FEM сл. 47 излази да је:

$$y^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FE}^2 \quad \ldots\ldots 1).$$

Ако у овој једначини место величина FM и FE ставимо њихове вредности из једначина 2) и 5) § 48, онда добивамо следећу једначину:

$$y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 - (c-x)^2$$

одакле је:

$$(a^2 - c^2)\ x^2 + a^2\,y^2 = a^2\ (a^2 - c^2) \quad \ldots\ldots 2).$$

Кад у једначини 2) место величине $(a^2 - c^2)$ ставимо њезину вредност из једначине 9) § 25, онда добивамо једначину:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots 3).$$

Једначина 3) нам изражава однос између кооордината ма које тачке елипсе, па се зато и назива њеном једначином. Она се може написати и у следећем облику:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2 чл. ДИСКУСИЈА ЈЕДНАЧИНЕ ЕЛИПСЕ.

Ако једначину елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, решимо по y-ну, тада добивамо да је:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Из овога се израза види, да свакој величини x-са, чија је апсолутна вредност мања од полуосе a, одговарају по две једнаке а супротно означене вредности y-на, што значи, да апсцисна оса дели елипсу на два међу собом симетрична дела. За оне пак вредности x-са чија је апсолутна вредност већа од полуосе a, y-он добива две имагинарне вредности, што значи, да елипса нема тачака чије би апсцисе биле по апсолутној вредности веће од њене полуосе a.

Ако затим једначину елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ решимо по x-су, онда добивамо да је:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Из овога се израза види, да свакој величини y-на, чија је апсолутна вредност мања од полуосе b одговарају по две једнаке а супротно означене вредности x-са; што значи, да и ординатна оса дели елипсу на два међу собом симетрична дела. За оне пак вредности y-на чија је апсолутна вредност већа од полуосе b, x добива две имагинарне вредности; што значи, да елипса нема тачака чије би ординате били по апсолутној вредности веће од њене полуосе b.

Пример: Како гласи једначина елипсе чија је велика полуоса $a = 4$, а мала полуоса $b = 3$?

Решење: Кад у једначини: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ место величина a и b ставимо задате вредности онда добивамо:

$$9x^2 + 16y^2 = 144.$$

Ова нам једначина претставља једначину тражене елипсе.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи једначину елипсе чија је велика оса једнака 10, а мала оса 4 дужинске јединице.

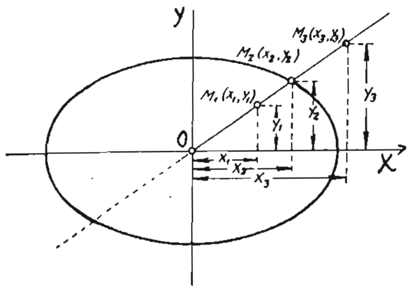
2) Како гласи једначина елипсе чија је мала полуоса $b=6$, а линеарни ексцентрицитет $c=8$?

3) Одредити једначину елипсе која пролази кроз тачку (2,1) а чија је велика полуоса $a=4$.

◎ § 50. ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ И ЕЛИПСЕ.

1. чл, Тачка се налази у елипси.

Нека је на сл. 48. претстављена елипса: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ и у њој тачка $M_1(x_1, y_1)$. Повуцимо кроз ту тачку и кроз центар елипсе једну праву линију. Ова ће линија сећи елипсу у двема тачкама од којих ћемо узети у обзир само ону која се са задатом тачком $M_1(x_1, y_1)$ налази у истом квадранту правоуглог координатвог система и обележићемо је са $M_2(x_2, y_2)$.



Сл. 48

Како се тачка $M_2(x_2, y_2)$ налази на елипси, то њене координате морају задовољавати једначину елипсе те имамо:

$$b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 \ldots\ldots 1).$$

Из слике се види да је:

$$x_1 < x_2$$

и

$$y_1 < y_2$$

Пошто су у посматраном случају све величине ових израза позитивне, то такође мора бити и:

$$x_1^2 < x_2^2$$

и

$$y_1^2 < y_2^2$$

Кад прву од ових неједначина помножимо са b^2, а другу са a^2, тада добивамо:

$$b^2x_1^2 < b^2x_2^2$$

и

$$a^2y_1^2 < a^2y_2^2.$$

Сабирањем ових двеју неједначина добивамо следећи израз:

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2 < b^2x_2^2+a^2y_2^2.$$

Ако у овој неједначини сменимо величину $b^2x_2^2+a^2y_2^2$ њезиним вредношћу из једначине 1) онда добивамо:

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2 < a^2b^2$$

или

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2 < 0 \ldots\ldots 2).$$

Неједначина 2) важи за ма коју тачку у елипси, па према томе и за неку покретну тачку $N(x,y)$, која би се кретала по унутрашњости елипсе и имала промењљиве координате, т. ј.

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 < 0 \ldots\ldots 3).$$

2. чл. Тачка се налази ван елипсе.

Узмимо сада у посматрање на сл. 48 неку тачку $M_3(x_3, y_3)$ која се налази ван елипсе и кроз њу повуцимо праву која пролази кроз центар елипсе. Ова ће права сећи елипсу и двема тачкама од којих ћемо узети у посматрање само ону која се са задатом тачком $M_3(x_3, y_3)$ налази у истом квадранту правоуглог координатног система и обележићемо је са $M_2(x_2, y_2)$.

Пошто се тачка $M_2(x_2, y_2)$ налази на елипси, то њене координате морају задовољавати једначину елипсе те имамо:

$$b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 \ldots\ldots 4).$$

Из слике се види да је:

$$x_3 > x_2$$

и

$$y_3 > y_2$$

Како су у посматраном случају све величине ових израза позитивне, то такође мора бити:

$$x_3^2 > x_2^2$$

и

$$y_3^2 > y_2^2$$

Ако прву од ових неједначина помножимо са b^2 а другу са a^2, онда добивамо:

$$b^2x_3^2 > b^2x_2^2$$

и

$$a^2y_3^2 > a^2y_2^2.$$

Кад саберемо ове две неједначине, онда добивамо следећи израз:

$$b^2x_3^2+a^2y_3^2 > b^2x_2^2+a^2y_2^2.$$

Ако у овој неједначини величину $b^2x_2^2+a^2y_2^2$ сменимо њезином вредношћу из једначине 4) онда добивамо:

$$b^2x_3^2+a^2y_3^2 > a^2b^2$$

или

$$b^2x_3^2 + a^2y_3^2 - a^2b^2 > 0 \; \ldots\ldots \; 5).$$

Неједначина 5) важи за сваку тачку ван елипсе, па према томе и за неку покретну тачку $D(x, y)$, која се креће по равни елипсе и има променљиве координате. Зато можемо написати:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 > 0 \; \ldots\ldots \; 6).$$

Тако нам једначина елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и неједначине 3) и 6) потпуно одређују положај тачке и елипсе.

Из свега овога долази се до следећег практичног упуства за одређивање положаја тачке и елипсе:

Прво треба образовати трином: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$; и у њему променљиве величине x и y сменити координатама задате тачке. Ако је резултат те смене мањи од нуле, тачка се налази у елипси; ако ли је резултат смене једнак нули, тада се тачка налази на елипси, а ако је пак резултат смене већи од нуле, онда се посматрана тачка налази ван елипсе.

Пример: Одредити положај елипсе: $9x^2 + 25y^2 = 225$ и тачке (5,1).

Решење: Прво се формира трином: $9x^2 + 25y^2 - 225$ па се у њему место променљивих величина x и y замењују координате задате тачке.

Смењивањем координата тачке (5, 1) у наведеном триному добива се:

$$225 + 25 - 225 = 25.$$

Пошто је резултат смене већи од нуле, то значи, да се тачка (5, 1) налази ван елипсе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити положај елипсе $3x^2 + 4y^2 = 48$ и тачке (2,1).
2) „ „ „ $2x^2 + 5y^2 = 77$ „ „ (4,—3).
3) „ „ „ $x^2 + 3y^2 = 4$ „ „ (—2,5).

◎ § 51. ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ И ЕЛИПСЕ.

Узимимо у посматрање једначину елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и једначину праве линије: $y = mx + n$. Решавањем ових двеју једначина по променљивим величинама x и y, добивају се координате пресека праве и елипсе које су претстављене тим једначинама.

Ако у једначини елипсе сменимо y његовом вредношћу из једначине праве, онда добивамо следећу квадратну једначину по х-су:

$$b^2x^2 + a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$

одакле је

$$(b^2 + a^2m^2)\,x^2 + 2a^2mnx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0 \; \ldots\ldots \; 1).$$

Решавањем ове једначине добивамо корене:

$$x_{1,2} = \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{b^2 + a^2m^2} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Кад у једначини: $y = mx + n$, место величине x ставимо овако израчунате вредности x_1 и x_2, тада добивамо и за y такође две следеће вредности:

$$y_{1,2} = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{b^2 + a^2m^2} \; \ldots\ldots \; 3).$$

На тај смо начин решавањем једначина праве и елипсе, добили два пара корена (x_1, y_1) и (x_2, y_2) који нам претстављају координате пресека тих двеју линија.

Из израза 2) и 3) излази следећи закључак:

Ако је дискриминанта: $a^2m^2 + b^2 - n^2$ већа од нуле, онда су оба пара корена (x_1, y_1) и (x_2, y_2) реална а неједнака. У томе случају права сече елипсу у двема тачкама и назива се *сечицом елипсе.*

Ако је дискриминанта: $a^2m + b^2 - n^2$ једнака нули, онда су оба пара корена (x_1, y_1) и (x_2, y_2) реална и једнака. У томе случају права сече елипсу у двема тачкама које се поклапају т. ј. она додирује елипсу у једној тачци и назива се *дирком* или *тангентом* елипсе.

Ако ли је пак дискриминанта: $a^2m^2 + b^2 - n^2$ мања од нуле, онда су оба пара корена (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имагинарна и неједнака, што значи да права нема заједничких тачака са елипсом, него пролази ван елипсе.

Пример: Одредити положај елипсе: $2x^2 + 3y^2 = 35$ и праве $4x - 9y - 35 = 0$.

Решавањем једначине елипсе: $2x^2 + 3y^2 = 35$ и једначине праве $4x - 9y - 35 = 0$, добивамо корене: $x_1 = 2$, $y_1 = -3$ и $x_2 = 2$, $y_2 = -3$; што значи да је права тангента елипсе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити положај елипсе: $5x^2 + 8y^2 = 77$ и праве: $x - 4y - 11 = 0$.

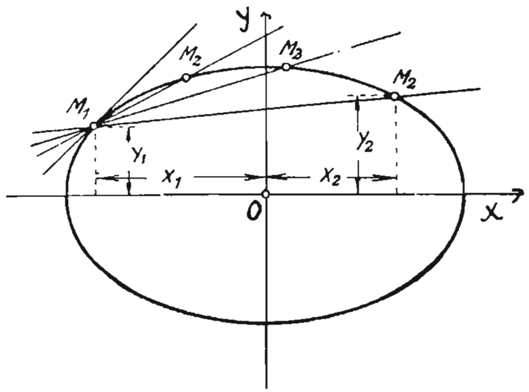
2) Одредити положај елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 84$ и праве: $8y + 5y - 42 = 0$.

3) Одредити положај елипсе: $x^2 + 2y^2 = 3$ и праве: $x - y + 3 = 0$.

§ 52. ТАНГЕНТА ЕЛИПСЕ ПОВУЧЕНА ИЗ ТАЧКЕ НА ЕЛИПСИ.

Једначину тангенте на елипсу извешћемо најлакше помоћу покретне сечице.

Нека је на сл. 49 претстављена елипса: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$



Сл. 49

и права линија, која сече ту елипсу у тачкама $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Једначина те праве биће очевидно дата изразом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots 1).$$

Ако се тачка M_2 креће по луку елипсе тако да се на крају поклопи са тачком M_1, онда и права (1) мења свој положај све дотле док не пређе у положај тангенте у тачци M_1. У томе случају једначина 1) добива облик:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$y - y_1 = \frac{0}{0}(x - x_1) \quad \ldots\ldots 2).$$

Кеофицијенат правца праве (1) свео се у овом случају на привидно неодређени израз $\frac{0}{0}$ и једначина 2) не претставља ништа одређено у правоуглом координатном систему. Међутим права линија у положају тангенте елипсе у тачци $M_1(x_1, y_1)$ је сасвим одређена, и има свој коефицијенат праца потпуно одређен. Њега ћемо наћи на следећи начин:

Како се тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ налазе на задатој елипси, то њихове координате морају задовољавати једначину елипсе, те имамо:

$$b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

и

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

Ако другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, онда добивамо:

$$b^2 x_2^2 - b^2 x_1^2 + a^2 y_2^2 - a^2 y_1^2 = 0$$

одакле је:

$$a^2(y_2 - y_1)\ (y_2 + y_1) = -b^2\ (x_2 - x_1)\ (x_2 + x_1)$$

или

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} \quad \ldots\ldots 3).$$

Кад у једначини 1) коефицијенат правца $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ сменимо његовом вредношћу из једначине 3) онда добивамо следећу једначину:

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}\ (x - x_1) \quad \ldots\ 4).$$

Једначина 4) нам претставља исту праву као и једначина 1) т.ј. сечицу задате елипсе, која пролази кроз њене тачке $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Претпоставимо поново, да се тачка M_2 креће по луку елипсе све док се не поклопи са тачком M_1, онда сечица елипсе заузима положај тангенте, а координате тачака $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ постају једнаке. У томе случају једначина 4) добива облик:

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_1)}{a^2(y_1 + y_1)}(x - x_1)$$

или

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

одакле је:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$$

Како је израз: $b^2x_1^2 + a^2y_1^2$ једнак величини a^2b^2, то ова једначина добива дефинитивни облик:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \; \ldots\ldots \; 5).$$

Једначина 5) нам претставља тангенту елипсе, повучене кроз њезину тачку $M_1(x_1,y_1)$.

Пример: Наћи једначину тангенте елипсе: $3x^2 + 7y^2 = 34$ из њезине тачке $(3,-1)$.

Решење:

$$3xx_1 + 7yy_1 = 34$$

односно

$$3x.3 + 7y(-1) = 34$$

или

$$9x - 7y - 34 = 0$$

Задаци:

1) Наћи тангенту елипсе $2x^2 + 5y^2 = 52$ из њезине тачке $(4,-2)$.

2) Наћи тангенту елипсе $3x^2 + 4y^2 = 39$ из њезине тачке $(-1,3)$.

3) Наћи тангенту елипсе $9x^2 + 18y^2 = 22$ из њезине тачке $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

§ 53. НОРМАЛА ЕЛИПСЕ.

Права линија која пролази кроз једну тачку на елипси и стоји нормално на тангенти елипсе повучене кроз ту тачку назива се нормалом елипсе.

Према томе, једначину нормале повучене кроз једну тачку на елипси, наћи ћемо на следећи начин:

Узећемо једначину праве линије која пролази кроз задату тачку на елипси и у њој сменити неодређени коефицијенат правца са негативном реципрочном вредности коефицијента правца тангенте повучене на елипсу у тој тачци.

Једначина праве линије повучене кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ која се налази на елипси: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ дата је изразом:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \; \ldots\ldots \; 1).$$

Међутим тангента исте елипсе повучена кроз ту тачку претстављена је очевидно једначином:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$$

или

$$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x + \frac{b^2}{y^2} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Ако у једначини 1) место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца праве 2), онда добивамо следећу једначину:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1) \; \ldots\ldots \; 3).$$

Ова нам једначина претставља нормалу елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ повучену кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ која се налази на тој елипси. Једначину 3) не треба учити напамет, али је потребно запамтити поступак којим се долази до ње. Таквим смо се истим поступком послужили и при одређивању једначине нормале код круга.

Пример: Наћи једначину нормале елипсе: $2x^2 + 3y^2 = 21$, повучене кроз њезину тачку $(3,1)$.

Решење: Једначина праве линије која пролази кроз тачку $(3, 1)$ је:

$$y - 1 = m(x - 3) \; \ldots\ldots \; a).$$

Тангента задате елипсе повучена кроз посматрану тачку је претстављена изразом:

$$2x.3 + 3y.1 = 21$$

или

$$2x + y = 7$$

одакле је:

$$y = -2x + 7.$$

Коефицијенат правца ове тангенте је: (-2), па ако његову негативну реципрочну вредност ставимо у једначини а) место величине m, онда добивамо:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

одакле је:

$$x - 2y - 1 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

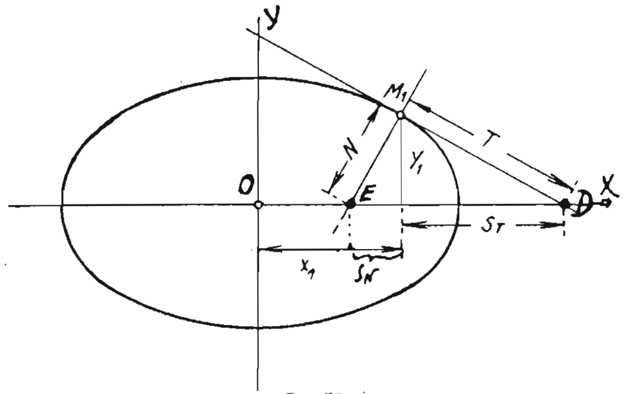
1) Наћи нормалу елипсе: $4x^2 + 9y^2 = 40$ повучену кроз њену тачку $(1, -2)$.

2) Наћи нормалу елипсе: $6x^2 + 7y^2 = 61$ повучену кроз њену тачку $(-3, 1)$.

3) Наћи нормалу елипсе: $12x^2 + 18y^2 = 5$ повучену кроз њену тачку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

§ 54. ДОДИРНЕ ВЕЛИЧИНЕ ЕЛИПСЕ.

Нека је на сл. 50 претстављен правоугли координатни систем и у њему елипса: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Узмимо на тој елипси



Сл. 50.

неку тачку $M_1(x_1,y_1)$ и кроз њу провуцимо тангенту и нормалу елипсе.

Линија тангента сече апсцисну осу у некој тачци D. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и D зовемо *тангентом* елипсе и обележићемо га са T. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осу називамо *субтангентом* елипсе и обележићемо је са S_T .

Линија нормала сече апсцисну осу у некој тачци E. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и E зове се *нормалом* елипсе и обележићемо га са N. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осовину називамо *субнормалом* елипсе и обележићемо је са S_N.

Величине T и N израчунавају се као отстојање између двеју тачака и узимају се увек са позитивним знаком. Координате тачке M_1 су нам задате а координате тачака D и E налазе се понаособ као координате пресека двеју познатих правих линија.

Величине S_T и S_N могу се израчунати помоћу Питагориног правила, те је:

$$S_T = \pm\sqrt{T^2 - y_1^2}$$

и

$$S_N = \pm\sqrt{N^2 - y_1^2}.$$

Ове величине могу бити позитивне а могу и негативне. Усвојено је правило према коме се свакој од величина S_T и S_N придодаје знак плус, ако се она налази на оној страни од тачке M_1 у коме се смислу простире позитивна грана апсцисне осе; а знак минус, ако се иста налази на оној страни од ординате тачке M_1 у коме се смислу простире негативна грана апсцисне осе. Тако би на сл. 50 величина S_T имала знак плус, а величина S_N знак минус.

Величина S_N може се наћи и онда кад се од апсцисе тачке D одузме апсциса тачке M_1. Тако исто се и величина S_N може наћи, кад се од апсцисе тачке E одузме апсциса тачке M_1. *Овако израчунате величине: T, N, S_T и S_N називају се додирним величинама елипсе.*

За изналажење додирних величина елипсе, не треба учити напамет нарочите обрасце; али је зато неопходно потребно, да се запамти поступак којим се долази до тих величина. Видели смо раније да се таквим истим поступком израчунавају и додирне величине круга. Кад се добро зна образац за отстојање између двеју тачака и образац за тангенту елипсе, онда се наведеним поступком увек лако могу одредити додирне величине елипсе.

Пример: Наћи додирне величине елипсе: $3x^2 + 8y^2 = 84$ из њезине тачке (2,3).

При решавању оваквих задатака, потребно је увек нацртати слику.

Решење: Претпоставимо, да нам је на сл. 50 претстављена задата елипса, а тачка M_1 нека има координате (2, 3). Једначина тангенте задате елипсе у њезиној тачци (2,3) биће:

$$3x.2 + 8y.3 = 84$$

или

$$x + 4y = 14.$$

Решавањем ове једначине са једначином апсцисне осе добивамо координате тачке $D(14,0)$. Тако је:

$$T = +\sqrt{(14-2)^2 + (0-3)^2} = +\sqrt{153}.$$

$$S_T = 14 - 2 = 12$$

Једначина нормале задате елипсе у њезиној тачци (2,3) према § 53 биће очевидно:

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

или

$$4x - y - 5 = 0.$$

Решавањем ове једначине са једначином апсцисне осе добивамо координате тачке $E\left(\frac{4}{5}, 0\right)$. Тако је:

$$N = +\sqrt{\left(\frac{4}{5} - 2\right)^2 + (0 - 3)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{29}$$

$$S_N = \frac{4}{5} - 2 = -\frac{6}{5}.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи додирне величине елипсе: $2x^2 + 9y^2 = 68$ из њене тачке $(4, -2)$.

2) Наћи додирне величине елипсе: $3x^2 + 5y^2 = 80$ из њене тачке $(-5, 1)$.

3) Наћи додирне величине елипсе: $18x^2 + 36y^2 = 11$ из њене тачке $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

§ 55. ТАНГЕНТА ЕЛИПСЕ

повучена из једне тачке ван елипсе.

Да би права: $y = mx + n$ била тангента елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, потребно је и довољно према § 51 да буде задовољен следећи услов:

$$n^2 = m^2a^2 + b^2 \; \ldots\ldots \; 1).$$

Ако права: $y = mx + n$ пролази кроз тачку $A(x_0, y_0)$ која се налази ван елипсе, то координате ове тачке морају задовољавати једначину посматране праве т.ј. мора бити испуњен овај услов:

$$y_0 = mx_0 + n \; \ldots\ldots \; 2).$$

Једначине 1) и 2) су две једначине са двема непознатим величинама m и n. Како је прва од наведених једначина квадратна, а друга линеарна, то се њиховим решавањем морају добити два пара корена, од којих ћемо први обележити са (m_1, n_1) а други са (m_2, n_2).

Ако једначину 2) решимо по величини n, онда добивамо да је:

$$n = y_0 - mx_0 \; \ldots\ldots \; 3).$$

Кад у једначини 1) место величине n ставимо њену вредност из једначине 3) тада добивамо следећу квадратну једначину по непознатој величини m:

$$(x_0^2 - a^2)\,m^2 - 2x_0 y_0\, m + (y_0^2 - b^2) = 0 \; \ldots\ldots \; 4).$$

Решавањем ове једначине добивамо корене:

$$m_{1,2} = \frac{x_0 y_0 \pm \sqrt{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2}}{x_0^2 - a^2}.$$

Пошто је дискриминанта овога израза према § 50 чл. 2. већа од нуле, то ће и корени m_1 и m_2 увек бити реалне и међу собом неједнаке величине, што значи, да се из једне тачке ван елипсе могу повући две тангенте на елипсу.

Кад у једначини 3) место величине m ставимо прво m_1, а затим m_2, тада за величину n добивамо две реалне вредности, које ћемо обележити са n_1 и n_2. Ове две величине могу бити међу собом различите а могу бити и једнаке, што зависи од тога, да ли је x_0 различито од нуле или је једнако нули.

Ако у једначини праве: $y = mx + n$, место величина m и n ставимо прво (m_1, n_1), а затим (m_2, n_2); онда добивамо следеће једначине:

$$y = m_1 x + n_1$$
$$y = m_2 x + n_2$$

Ове нам једначине претстављају тангенте елипсе повучене из једне тачке ван елипсе.

Пример: Наћи једначине тангената елипсе: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ повучених из тачке $(6,1)$ која се налази ван елипсе.

Решење: Тангента елипсе је права линија чију једначину можемо написати у облику: $y = mx + n$. Услови: $n^2 = m^2a^2 + b^2$ и $y_0 = mx_0 + n$ у датом случају су:

$$n^2 = 16\,m^2 + 12$$

и

$$1 = 6\,m + n.$$

Решавањем ових двеју једначина по непознатим величинама добивамо да је: $m_1 = \frac{11}{10}$; $n_1 = -\frac{28}{5}$ и $m_2 = -\frac{1}{2}$; $n_2 = 4$.

Кад у једначини праве: $y = mx + n$, место величина m и n ставимо прво вредности величина m_1 и n_1, а затим вредности величина m_2 и n_2, тада добивамо једначине:

$$11\,x - 10\,y - 56 = 0 \text{ и } x + 2y - 8 = 0.$$

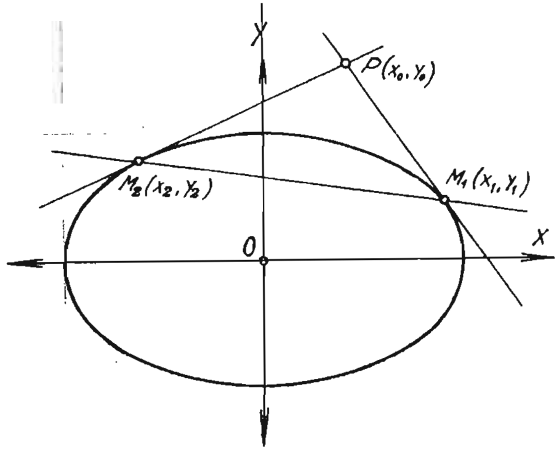
Ове нам једначине претстављају тражене тангенте.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенте елипсе: $2x^2 + 5y^2 = 70$ из тачке (3,4).
2) „ „ „ $5x^2 + 6y^2 = 26$ „ „ (5,—4).
3) „ „ „ $3x^2 + 9y^2 = 4$ „ „ $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$.

* § 56. ПОЛАРА ЕЛИПСЕ

1 чл. Проблем одређивања тангенте елипсе из једне тачке ван елипсе може се решити и на овај начин.



Сл. 51.

Нека је на сл. 51 претстављена елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и тачка $P(x_0,y_0)$, која се налази ван елипсе. Ако из задате тачке повучемо тангенту на посматрану елипсу, онда ће та тангента додиривати елипсу у некој тачки $M_1(x_1,y_1)$. Једначина тангенте повучене на елипсу у тој тачци била би:

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \; .... \; 1).$$

Пошто су у овој једначини координате тачке додира т.ј. величине (x_1,y_1) још непознате, то ћемо их израчунати на следећи начин:

Како тангента (1) пролази кроз тачку $P(x_0,y_0)$, то координате ове тачке морају задовољавати једначинv поменуте тангенте, те тако добивамо једначину:

$$b^2x_0x_1 + a^2y_0y_1 = a^2b^2 \; ..... \; 2)$$

Тачка $M_1(x_1,y_1)$ налази се и на елипси: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, па њене координате морају задовољавати једначину елипсе, те зато имамо једначину:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \; ..... \; 3).$$

Једначине 2) и 3) су две једначине са по две непознате величине: x_1 и y_1. Међутим, како је прва од ових једначина линеарна а друга квадратна, то се њиховим решавањем морају добити два пара корена, од којих ћемо први обележити једноставно са (x_1,y_1), а други са (x_2,y_2). Један пар корена претставља координате једне тачке додира коју смо обележили са M_1; а други пар корена претставља координате друге тачке додира, коју ћемо обележити са M_2. Из свега овога пак излази, да се из једне тачке ван елипсе увек могу повући две тангенте на елипсу, чије су тачке додира: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Решавањем једначина 2) и 3) добивамо следеће корене:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{a^2b^2x_0 + a^2y_0\sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}; \; y_1 = \frac{a^2b^2y_0 - b^2x_0\sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \\ x_2 &= \frac{a^2b^2x_0 - a^2y_0\sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}; \; y_2 = \frac{a^2b^2y_0 + b^2x_0\sqrt{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \end{aligned}\right\} \; .....4).$$

Једначина праве линије која пролази кроз обе тачке додира тангената повучених на елипсу: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ из тачке $P(x_0,y_0)$, биће очевидно:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ако у овој једначини величине: x_1, y_1 и x_2, y_2, сменимо њиховим вредностима из израза 4), онда после обичних рачунских операција добивамо следећу једначину:

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = a^2b^2 \; ..... \; 5).$$

Ова једначина има облик једначине тангенте на елипси, с том разликом што се у њој налазе координате тачке ван елипсе, место координата тачке додира тангенте и елипсе, које фигуришу у једначини тангенте.

Права линија која је претстављена једначином 5) назива се поларом елипсе, а тачка $P(x_0, y_0)$ се зове полом те поларе.

На тај смо начин проблем одређивања једначине тангенте елипсе која пролази кроз тачку ван елипсе, свели на изналажење једначине тангенте која пролази кроз једну тачку на елипси. Решавањем једначине поларе са једначином елипсе добивају се координате тачака додира оних двеју тангената које су повучене на елипсу из задате тачке ван елипсе. Овако израчунате координате тачака додира замењујемо у обрасцу за једначину тангенте елипсе, те тако добивамо једначине тангената елипсе које пролазе кроз задату тачку ван елипсе.

Пример: Наћи једначине тангената елипсе: $3x^2 + 4y^2 = 48$ повучених из тачке $P(6,1)$.

Решење: Једначина поларе елипсе чији је пол у задатој тачки је: $3x.6 + 4y.1 = 48$ или $9x + 2y = 24$. Решавањем једначине ове поларе са једначином задате елипсе добивамо следеће корене:

$$x_1 = \frac{22}{7};\ y_1 = -\frac{15}{7}$$

и

$$x_2 = 2;\ y_2 = 3.$$

Сменом ових парова корена понаособ у једначини тангенте задате елипсе, добивамо следеће једначине:

$$11x - 10y - 56 = 0 \text{ и } x + 2y - 8 = 0.$$

Ове нам једначине претстављају тражене тангенте.

Овај смо пример решили и у § 55 по другој методи и дошли смо до истог резултата.

Напомена: Решити задатке из § 55 по овоме начину решавања.

2 чл. дискусија поларе елипсе.

1) Ако се тачка $P(x_0,y_0)$ налази ван елипсе, онда су оба пара корена у изразима 4) реална и међу собом неједнака, јер је дискриминанта $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ према § 50 увек већа од нуле. У томе случају полара сече елипсу у двема тачкама, што значи да се из једне тачке ван елипсе увек могу повући две тангенте на елипсу.

2) Ако се тачка $P(x_0,y_0)$ налази на елипси, онда су оба пара корена у изразима 4) реална и међу собом једнака, јер је према § 50 дискриминанта: $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ једнака нули. У томе се случају обе тачке додира тангената $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ поклапају са тачком $P(x_0,y_0)$, што значи да се из једне тачке на елипси може повући само једна тангента на елипсу. Та тангента се поклапа са поларом елипсе чији се пол налази у посматраној тачци на елипси.

3) Ако се тачка $P(x_0,y_0)$ налази у елипси, онда су оба пара корена у изразима 4) имагинарна, јер је према § 50 дискриминанта $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ мања од нуле. У томе случају полара не сече елипсу ни у једној реалној тачци, што значи, да се налази негде ван елипсе. Из тога излази, да се из једне тачке у елипси не може повући ни једна тангента на елипсу.

Из свега овога долазимо до закључка, да се свака тачка у равни елипсе може сматрати као пол неке поларе елипсе.

Тако исто се можемо уверити аналогим поступком као код круга, да је свака права линија у равни елипсе истовремено и полара елипсе.

Пример: Једначина: $5x + 24y - 44 = 0$ је полара елипсе: $5x^2 + 8y^2 = 88$; одредити пол те поларе.

Решење: Једначина поларе дате елипсе је:

$$5xx_0 + 8yy_0 = 88.$$

Једначина задате праве се може написати и на следећи начин:

$$5x + 24y = 44$$

или

$$5x.2 + 24y.2 = 88$$

одакле је

$$5x.2 + 8.y.6 = 88.$$

Из ове једначине се види, да је: $x = 2$, а $y = 6$ т.ј. тачка $P(2,6)$ је тражени пол.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенте елипсе: $3x^2 + 4y^2 = 48$ из тачке $(4,2)$.
2) Наћи тангенте елипсе: $x^2 + 2y^2 = 11$ из тачке $(1,4)$.
3) Наћи тангенте елипсе: $2x^2 + 5y^2 = 38$ из тачке $\left(6,\frac{1}{5}\right)$.

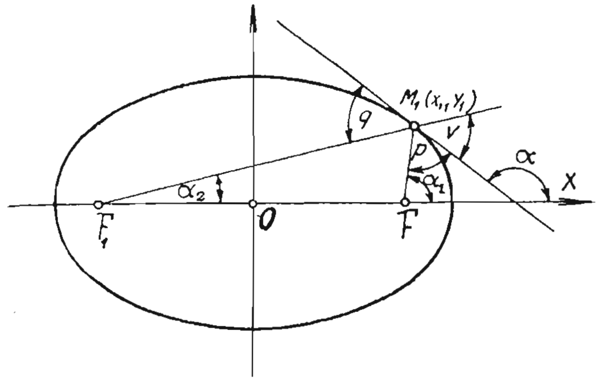
§ 57. КОНСТРУКЦИЈА ТАНГЕНАТА ЕЛИПСЕ.

1 чл. Нека је на сл. 52 претстављена елипса: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и њена тангента: $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$, која додирује елипсу у тачци $M_1(x_1, y_1)$.

Ако обележимо са: α угао између тангенте и позитивног смисла апсцисне осе; са α_1 угао између потега FM_1 и позитивног смисла апсцисне осе и са α_2 угао између потега F_1M_1 и позитивног смисла апсцисне осе, онда је:

$$tg\alpha = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}; \quad tg\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1 - c}; \quad tg\alpha_2 = \frac{y_1}{x_1 + c} \ldots\ldots 1).$$

Сем тога обележимо са: p угао између тангенте и потега FM_1,



Сл. 52

а са q угао између тангенте и потега F_1M_1. Из слике се види да је: $p = \alpha - \alpha_1$; па онда мора бити:

$$tgp = \frac{tg\alpha - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha\, tg\alpha_1}$$

или с обзиром на изразе 1)

$$tgp = \frac{-\frac{b^2x_1}{a^2y_1} - \frac{y_1}{x_1 - c}}{1 - \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 - c}} = \frac{-(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - b^2x_1c)}{a^2x_1y_1 - b^2x_1y_1 - a^2y_1c} = \frac{-(b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - b^2x_1c)}{(a^2 - b^2)\, x_1y_1 - a^2y_1c}.$$

Како је: $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ и $a^2 - b^2 = c^2$ то је:

$$tgp = \frac{-(a^2b^2 - b^2x_1 c)}{c^2x_1y_1 - a^2y_1 c} = \frac{b^2x_1c - a^2b^2}{c^2x_1y_1 - a^2y_1c} = \frac{b^2(x_1c - a^2)}{cy_1\,(x_1c - a^2)}$$

или

$$tgp = \frac{b^2}{cy_1} \ldots\ldots 2).$$

Тако исто се из слике види, да је: $q = \alpha_2 + (180 - \alpha)$ те мора бити:

$$tgq = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha}$$

или с обзиром на изразе 1)

$$tgq = \frac{\frac{y_1}{x_1 + c} + \frac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 - \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 + c}} = \frac{b^2x^2{}_1 + a^2y_1^2 + b^2x_1c}{a^2x_1y_1 - b^2x_1y_1 + a^2y_1c} = \frac{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 + b^2x_1c}{(a^2 - b^2)x_1y_1 + a^2y_1c}$$

одакле је:

$$tgq = \frac{a^2b^2 + b^2x_1c}{c^2x_1y_1 + a^2y_1c} = \frac{b^2(x_1c + a^2)}{cy_1(x_1c + a^2)}$$

или

$$tgq = \frac{b^2}{cy_1} \ldots\ldots 3).$$

Пошто су у изразима 2) и 3) десне стране међу собом једнаке, то морају бити једнаке и њихове леве стране т.ј. мора бити:

$$tgp = tgq \ldots\ldots 4).$$

Познато нам је из тригонометрије следеће правило:

Ако су тангенси углова мањих од 180° међу собом једнаки, онда и ти углови морају такође бити једнаки.

Како су углови: p и q мањи од 180°, то према наведеном правилу мора бити:

$$p = q \ldots\ldots 5).$$

Овим смо доказали, да тангента повучена из једне тачке на елипси, заклапа једнаке углове са потезима те тачке.

Из овога излази, да и нормала повучена из једне тачке на елипси захвата једнаке углове са потезима те тачке.

Ово је правило нашло примене у физици и техници. Звучни, топлотни и светлосни зраци који полазе из једне жиже елиптичних површина (сала, огледала ит.д.) скупљају се у другој жижи, јер им је само у томе случају угао упадања једнак углу одбијања.

Ако на сл. 52 потег F_1M_1 продужимо преко тачке M_1 и угао који то продужење захвата са тангентом обележимо са v, онда је:

$$v = q$$

као унакрсни углови.

Како је

$$p = q$$

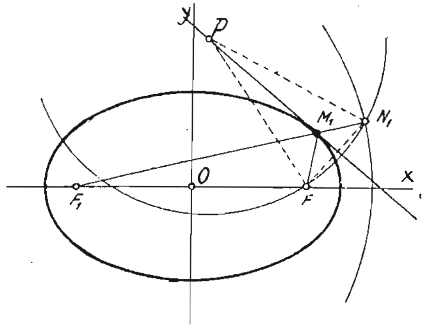
то мора бити и:

$$p = v \ldots\ldots 6).$$

Одавде излази, да је тангента повучена из једне тачке на елипси, симетрала онога угла који заклапа један потег те тачке са продужењем јој другога потега.

Из овога правила следује практично упуство за конструисање тангенте елипсе из једне тачке на елипси.

Прво треба повући потеге задате тачке на елипси и један од њих продужити преко те тачке ван елипсе. Затим се конструише симетрала угла, који заклапа поменуто продужење потега са другим потегом. Та симетрала је истовремено и тангента елипсе која пролази кроз задату тачку на елипси.



Сл. 53.

2 чл. На сл. 53 претстављена је елипса и њена тангента која пролази кроз тачку P ван елипсе. Нека та тангента додирује елипсу у тачци M_1.

Ако потег F_1M_1 продужимо за дуж M_1N_1 која је једнака са другим потегом FM_1, и повучемо дуж FN_1, онда добивамо равнокраки троугао FM_1N_1. Како је у овоме троуглу задата тангента симетрала угла при врху чије је теме у тачци M_1, то она мора бити и симетрала основице FN_1. Пошто све тачке на симетрали неке дужи подједнако отстоје од крајњих тачака те дужи, то се и тачка P мора налазити на истом растојању од тачака F и N_1. На тај се начин тачка N_1 налази у пресеку два круга од којих је један описан око тачке P са полупречником PF, а други око жиже F_1 са полупречником: $F_1M_1 + M_1N_1 = F_1M_1 + FM_1 = 2a$.

Пошто се тачка M_1 налази у пресеку елипсе и дужи F_1N_1, то је тиме и њезин положај потпуно одређен.

Из свега овога излази практично упутство према коме се конструкција тангенте елипсе из једне тачке ван елипсе врши на следећи начин:

Прво се око једне жиже опише круг са полупречником који је једнак великој оси елипсе. Затим се око задате тачке ван елипсе опише други круг са полупречником који је једнак растојању између те тачке и друге жиже елипсе. Та два круга се секу у двема тачкама. Кад једну од тих тачака спојимо са оном жижом, око које смо описали круг чији је полупречник велика оса елипсе, тада добивамо тачку додира тангенте и елипсе. Ако затим повучено праву линију кроз овако одређену тачку додира и кроз задату тачку ван елипсе, онда ће нам она бити тангента елипсе која пролази кроз задату тачку ван елипсе.

Пошто се из исте тачке ван елипсе може повући и друга тангента на елипсу, то ћемо и њу конструисати на исти начин.

* § 58. ПОЛАРЕ ЕЛИПСЕ ЧИЈИ СЕ ПОЛОВИ НАЛАЗЕ НА ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ ЛИНИЈИ.

Узмимо за полове полара елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = \alpha^2b^2$ неколико тачака на правој:

$$y = mx + n \;.....\; 1).$$

Нека су те тачке: $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$ и т. д. односно $M_0(x_0, mx_0 + n)$; $M_1(x_1, mx_1 + n)$; $M_2(x_2, mx_2 + n)$ и т. д.... Поларе елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, чији се полови налазе у задатим тачкама биће претстављене једначинама:

$$\left.\begin{array}{lll} b^2xx_0 + a^2y(mx_0 + n) = a^2b^2 & \text{или} & y = -\dfrac{b^2x_0x}{a^2(mx_0+n)} + \dfrac{b^2}{mx_0+n} \\ b^2xx_1 + a^2y(mx_1 + n) = a^2b^2 & \text{„} & y = -\dfrac{b^2x_1x}{a^2(mx_1+n)} + \dfrac{b^2}{mx_1+n} \\ b^2xx_2 + a^2y(mx_2 + n) = a^2b^2 & \text{„} & y = -\dfrac{b^2x_2x}{a^2(mx_2+n)} + \dfrac{b^2}{my_2+n} \end{array}\right\} \;.....\; 2).$$

.... „ ....

.... „ ....

Пошто коефицијенти правца правих (2) нису међу собом једнаки, то значи, да се оне секу негде у коначности. Ако решимо ма које две од њих по променљивим величинама x и y, добићемо за координате њихова пресека следеће изразе:

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{a^2m}{n} \\ y = \dfrac{b^2}{n} \end{array}\right\} \;.....\; 8).$$

У изразима 3) величине x и y не зависе од координата полова полара (2), него само од величина: m, n, a и b, које су у датом случају узете за сталне величине. То значи, да се све поларе, које су претстављене једначинама 2), секу у једној тачци чије су координате: $\left(-\dfrac{a^2m}{n}; \dfrac{b^2}{n}\right)$.

Из овога излази закључак према коме се све поларе елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, чији се полови налазе на једној правој линији, морају сећи у једној тачци.

Дискусија:

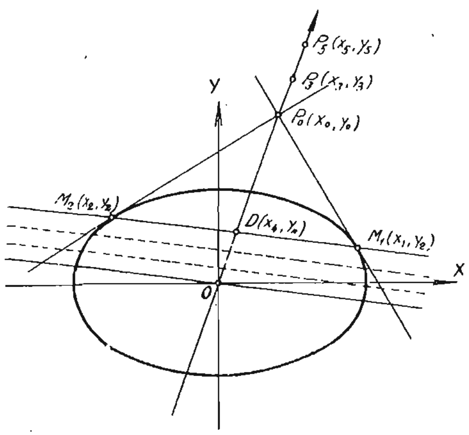
Ако претпоставимо, да је у једначини 1) величина n равна нули, онда права која је претстављена том једначином пролази кроз координантан почетак. У томе случају коефицијенти правца полара (2) постају међу собом једнаки, а њихов пресек претстављен изразима 3) постаје:

$$x = -\infty$$
$$y = \infty\,.$$

Из овога излази закључак према коме су поларе елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ међу собом паралелне, ако им се полови налазе на правој линији која пролази кроз координатни почетак односно центар те елипсе.

* § 59. ДИЈАМЕТРИ ЕЛИПСЕ.

1 чл. На сл. 54 претстављена је елипса: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и тачка $P_0(x_0,y_0)$ која се налази ван те елипсе. Сем тога су из задате тачке повучене обе тангенте елипсе, које додирују елипсу у тачкама: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Затим је повучена полара елипсе, чији се пол налази у задатој тачци и која везује обе тачке додира елипсе и поменутих тангената.



Сл. 54.

Ако обележимо са $D(x_4,y_4)$ средину оне тетиве, која настаје пресеком задате поларе и елипсе, онда ће њене координате с обзиром на изразе 4) § 56 бити:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2b^2x_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \\ y_4 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{a^2b^2y_0}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots 1).$$

Права линија која пролази кроз средину наведене тетиве и кроз пол задате поларе т.ј. кроз тачке $D(x_4,y_4)$ и $P_0(x_0,y_0)$ биће претстављена једначином:

$$y - y_0 = \frac{y_4 - y_0}{x_4 - x_0}(x - x_0).$$

Кад у овој једначини, место величина: x_4 и y_4 ставимо њихове вредности из израза 1) тада после обичних рачунских операција добивамо следећу једначину:

$$y = \frac{y_0}{x_0}\,x \ldots\ldots 2).$$

Како једначина 2) нема слободног члана, то значи, да права која је њоме претстављена мора пролазити кроз координатни почетак односно кроз центар елипсе: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Из тога излази правило према коме права линија која пролази кроз пол неке елипсине поларе и полови ону тетиву, која настаје пресеком елипсе и те поларе, мора пролазити и кроз центар елипсе.

Одавде пак следује и обрнуто правило које гласи:

Права линија која пролази кроз центар елипсе и кроз пол неке елипсине поларе, мора половити ону тетиву, која је настала пресеком елипсе и те поларе.

Ако узмемо на правој (2) ма које тачке: $P_0(x_0,y_0)$; $P_3(x_3,y_3)$; $P_5(x_5,y_5)$ ... за полове елипсиних полара, онда ће њихове једначине бити:

$$\left.\begin{aligned} b^2xx_0 + a^2yy_0 &= a^2b^2 \text{ или } y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\,x + \frac{b^2}{y_0} \\ b^2xx_3 + a^2yy_3 &= a^2b^2 \text{ или } y = -\frac{b^2x_3}{a^2y_3}\,x + \frac{b^2}{y_3} \\ b^2xx_5 + a^2yy_5 &= a^2b^2 \text{ или } y = -\frac{b^2x_5}{a^2y_5}\,x + \frac{b^2}{y_5} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

.... „ ....

.... „ ....

Пошто права (2) пролази кроз центар елипсе и кроз полове: $P_0(x_0,y_0)$; $P_3(x_3,y_3)$; $P_5(x_5,y_5)$ ....., то она мора половити све паралелне тетиве, које се налазе између пресечних тачака елипсе и полара (3).

Свака права линија која има ту особину да пролази кроз центар елипсе и полови једну серију паралелних елипсиних тетива, назива се дијаметарском правом или дијаметром елипсе. Дакле права (2) је један дијаметар елипсе.

На свакој правој линији која пролази кроз центар елипсе можемо узети колико год желимо тачака за полове полара те елипсе. Све те поларе морају бити међу собом паралелне. Тако исто морају међу собом бити паралелне и све оне тетиве које настају пресеком елипсе и поменутих полара. Сем тога посматрана права мора половити све овако добивене тетиве елипсе, *што значи, да свака права линија која пролази кроз центар елипсе је истовремено и дијаметар те елипсе.*

Ако коефицијенат правца праве (2) обележимо са m, а коефицијенат правца паралелних правих (3) са m_1, онда имамо:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{y_0}{x_0} \\ m_1 &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4).$$

Кад једначине 4) међу собом помножимо и то, десну страну прве са десном страном друге, а леву страну прве са левом страном друге, тада добивамо:

$$m.m_1 = -\frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots 5).$$

Образац 5) нам даје однос између коефицијената правца једног дијаметра елипсе и оних паралелних елипсиних полара чији се полови налазе на томе дијаметру.

Ово би се могло изразити и на следећи начин:

Образац 5) нам даје однос између коефицијената правца једног дијаметра елипсе и оних елипсиних паралелних тетива које тај дијаметар полови.

Пример: Наћи једначину дијаметра елипсе: $3x^2 + 4y^2 = 12$, који полови елипсине тетиве паралелне са правом:

$$y = \frac{3}{8}x + 9.$$

Решење: Једначина траженог дијаметра има облик: $y = mx$. Величнна m у овој једначини према обрасцу 5) мора бити:

$$m \cdot \frac{3}{8} = -\frac{3}{4} \text{ или } m = -2.$$

Тако је једначина траженог дијаметра: $y = -2x$.

ЗАДАЦИ:

1) Полара елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 20$ је права: $3x - 2y + 6 = 0$, наћи онај дијаметар елипсе на коме се налази пол задате поларе.

2) Наћи коефицијенат правца оних паралелних тетива елипсе $5x^2 + 6y^2 = 30$, које полови дијаметгр: $y = 10x$.

3) Наћи полару елипсе: $6x^2 + 7y^2 = 42$ која пролази кроз тачку (2,1), а чији се пол налази на правој: $y = 3x$.

2 чл. Коњуговани дијаметри елипсе.

Једна од полара 3) мора пролазити и кроз центар елипсе, те ће њена једначина очевидно бити:

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x \ldots\ldots 6).$$

Пошто права (6) пролази кроз центар елипсе, то нам она истовремено претставља и један дијаметар елипсе.

Ако коефицијенат правца елипсиних паралелних тетива које овај дијаметар полови, обележимо са m_2, онда према обрасцу 5) имамо да је:

$$m_2 \cdot \left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right) = -\frac{b^2}{a^2}$$

одакле је

$$m_2 = \frac{y_0}{x_0} \ldots\ldots 7).$$

Из израза (7) видимо, да су тетиве елипсе које полови дијаметар (6) паралелне са дијаметром (2). Тако исто знамо, да дијаметар (2) полови тетиве елипсе које су паралелне са дијаметром (6). За овакав пар дијаметара кажемо да су коњуговани дијаметри елипсе.

Дакле коњуговани дијаметри елипсе су она два дијаметра од којих сваки полови тетиве елипсе паралелне ономе другоме.

Апсцисна оса пролази кроз центар елипсе па нам и она претставља једна дијаметар елипсе. Ако коефицијенат правца тетива које овај дијаметар полови обелижимо са m_3, онда имамо:

$$m_3 = -\frac{b^2}{a^2.0} = -\infty.$$

Одавде излази, да су тетиве елипсе које полови апсцисна оса паралелне са ординатном осом.

Пошто и ординатна оса пролази кроз центар елипсе, то је и она такође један дијаметар елипсе. Ако коефицијенат правца тетива које полови овај дијаметар обележимо са m_4, онда имамо:

$$m_4 = -\frac{b^2}{a^2.\infty} = 0.$$

Одавде излази, да су тетиве елипсе, које полови ординатна оса, паралелне са апсцисном осом.

Дакле апсцисна и ординатна оса су један пар коњугованих дијаметара елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Пример: Права: $y = 2x$ је дијаметар елипсе: $2x^2 + 3y^2 = 6$, наћи његов коњуговани дијаметар.

Решење: Једначина траженог дијаметра има облик: $y = mx$. Величина m према обрасцу 5) мора бити:

$$m = -\frac{2}{3.2} = -\frac{1}{3}.$$

Дакле једначина траженог дијаметра је: $y = -\frac{x}{3}$.

ЗАДАЦИ

1) Један дијаметар елипсе: $3x^2 + 5y^2 = 15$ пролази кроз тачку $(-2,3)$; наћи њему коњуговани дијаметар.

2) Дијаметар елипсе: $4x^2 + 9y^2 = 36$ је паралелан са правом $3x - 4y + 5 = 0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

3) Наћи пар коњугованих дијаметара елипсе: $5x^2 + 9y^2 = 45$ од којих један стоји нормално на правој која пролази кроз тачке $(1,-3)$ и $(4,2)$.

§ 60. ДИРЕКТРИСА, БРОЈНИ ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ И ПАРАМЕТАР ЕЛИПСЕ.

* 1 чл. Једначина елипсине поларе чији се пол налази у жижи $F(c,0)$ је претстављена изразом:

$$b^2xc + a^2y.0 = a^2b^2$$

одакле је

$$b^2xc = a^2b^2$$

или

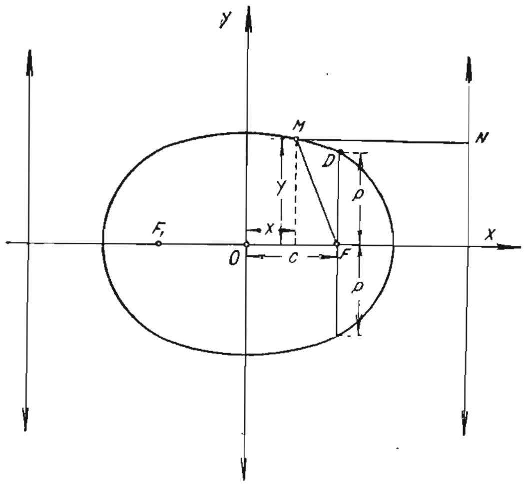
$$x = \frac{a^2}{c} \ldots\ldots 1).$$

На исти бисмо начин нашли, да је једначина елипсине поларе чији је пол у другој жижи елипсе претстављена изразом:

$$x = -\frac{a^2}{c} \ldots\ldots 2).$$

Праве линије које су претстављене једначинама 1) и 2) називају се *директрисима елипсе.*

Тако би елипса према овоме имала изглед као на сл. 55.



Сл. 55

* 2 чл. Узмимо у посматрање ма коју тачку $M(x,y)$ на елипси и из ње повуцимо нормалу на директрису (1). Нека та нормала сече директрису у тачци N.

Како је потег

$$FM = a - \frac{cx}{a},$$

а отстојање

$$MN = \frac{a^2}{c} - x,$$ то је

и размера ових двеју дужи дата следећим изразом:

$$\frac{FM}{MN} = \frac{a - \frac{cx}{a}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{\frac{a^2 - cx}{a}}{\frac{a^2 - cx}{c}}$$

одакле је:

$$\frac{FM}{MN} = \frac{c}{a} \ldots\ldots 3).$$

Пошто је $\frac{c}{a}$ стална величина, то и размера $\frac{FM}{MN}$ мора бити такође стална величина.

Ова се размера назива *бројним ексцентрицитетом* елипсе и обележићемо са e. Тако је:

$$e = \frac{FM}{MN}$$

односно

$$e = \frac{c}{a} \;.....\; 4).$$

Из израза 4) видимо, да је $e < 1$; јер је бројитељ разломка $\frac{c}{a}$ мањи од његова именитеља.

3 чл. Тетива која пролази кроз жижу елипсе и стоји нормално на њеној великој оси, назива се параметром елипсе.

Ако параметар елипсе обележимо са $2p$, онда једна тачка на елипси чија је апсциса c има за ординату p. Обележимо ту тачку на приложеној слици са D. Пошто се тачка $D(c,p)$ налази на елипси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ то њене координате морају задовољавати једначину елипсе, те имамо:

$$b^2c^2 + a^2p^2 = a^2b^2$$

или

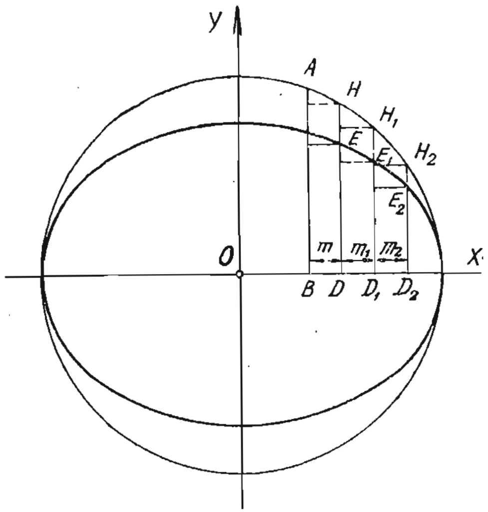
$$b^2(a^2 - b^2) + a^2p^2 = a^2b^2$$

одакле је

$$p = \frac{b^2}{a} \;.....\; 5).$$

* § 61. ПОВРШИНА ЕЛИПСЕ.

Нека је на сл. 56 претстављена елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и круг $x^2 + y^2 = a^2$. Ако на задатом кругу узмемо тачке: $H, H_1, H_2 \,.....$ и из њих повучемо нормале на апсцисну осу, онда ће оне сећи елипсу у тачкама $E, E_1, E_2 \,.....$, а апсцисну осу у тачкама $D, D_1, D_2 \,.....$ Тачка E на елипси и тачка H на кругу имају исту апсцису, док су им ординате различите. Ордината тачке E је дуж DE, а ордината тачке H је дуж DH.



Сл. 56

Из једначина елипсе и круга излази

да је:

$$DE = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$DH = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Кад ове две једначине поделимо и то десну страну прве са десном страном друге, а леву страну прве са левом страном друге, онда добивамо следећу размеру:

$$\frac{DE}{DH} = \frac{b}{a}.$$

На исти бисмо начин дошли до размера:

$$\frac{D_1E_1}{D_1H_1} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{D_2E_2}{D_2H_2} = \frac{b}{a}$$

....

....

Пошто све ове размере имају исте количнике, то их можемо написати у облику продужене пропорције:

$$\frac{DE}{DH} = \frac{D_1E_1}{D_1H_1} = \frac{D_2E_2}{D_2H_2} = \;.....\; = \frac{b}{a} \;.....\; 1).$$

На приложеној слици смо обележили дуж $BD = m$, $DD_1 = m_1$, $D_1D_2 = m_2 \ldots$

Ако први члан пропорције (1) проширимо са m, други са m_1, трећи са $m_2 \ldots$, онда добивамо:

$$\frac{DE.m}{DH.m} = \frac{D_1E_1.m_1}{D_1H_1.m_1} = \frac{D_2E_2.m_2}{D_2H_2.m_2} = \;.....\; = \frac{b}{a} \;.....\; 2).$$

Из пропорције (2) следује израз:

$$\frac{DE.m + D_1E_1.m_1 + D_2E_2.m_2 + \ldots}{DH.m + D_1H_1.m_1 + D_2H_2.m_2 + \ldots} = \frac{b}{a} \;.....\; 3).$$

Ако претпоставимо да су: $m, m_1, m_2, \ldots..$ бесконачно мале величине, онда ће бројитељ разломка

$$\frac{DE.m + D_1E_1.m_1 + D_2E_2.m_2 + \ldots}{DH.m + D_1H_1.m_1 + D_2H_2.m_2 + \ldots}$$

претстављати површине правоугасника, чији је збир једнак површини елипсе, а именитељ тога разломка претстављаће површине правоугасника, чији је збир једнак површини круга. Ако у томе случају површину елипсе обележимо са P, онда једначина 3) добива облик:

$$\frac{P}{a^2\pi} = \frac{b}{a}$$

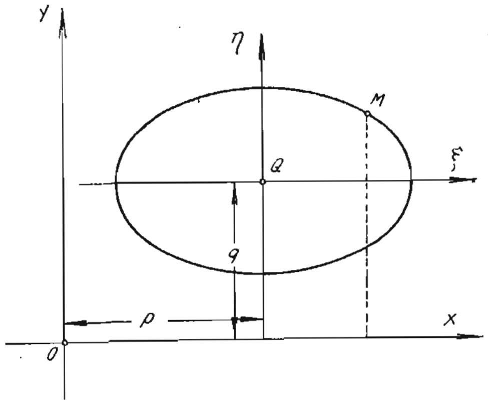
или

$$P = ab\pi \;.\;.\;.\;.\;.\; 4).$$

Једначина 4) нам претставља образац за површину елипсе.

* § 62. ЈЕДНАЧИНА ЕЛИПСЕ ЧИЈИ ЈЕ ЦЕНТАР ВАН КООРДИНАТНОГ ПОЧЕТКА, ВЕЛИКА ОСА ПАРАЛЕЛНА СА АПСЦИСНОМ, А МАЛА ОСА ПАРАЛЕЛНА СА ОРДИНАТНОМ ОСОМ ПРАВОУГЛОГ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА

На сл. 57 претстављен је правоугли координатни систем XOY и у њему једна елипса чији се центар налази у тачци $Q(p,q)$. Нека је велика оса ове елипсе паралелна са апсцисном осом правоуглог координатног система XOY, а њена мала оса паралелна са ординатном осом тога координантног система. Поставимо затим у раван елипсе један помоћни правоугли координантни систем, тако да му почетак буде у тачци Q. Апсцисна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са апсцисном осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са ординатном осом система XOY. У том случају ће се апсцисна оса новога координатног система поклапати са великом осом елипсе, а ординатна оса са малом осом елипсе. Тај смо координатни систем на приложеној слици обележени са $\xi Q\eta$. Једначина задате елипсе у овом координатном систему очевидно ће бити:



Сл. 57

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; 1).$$

Ако узмемо у посматрање ма коју тачку M која се налази на задатој елипси и обележимо са (x,y) њене координате у систему XOY, а са (ξ,η) њене координате у сисему $\xi Q\eta$, онда ће однос између тих координата бити претстављен следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - p \\ \eta &= y - q \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; 2).$$

Кад у једначини 1) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из израза 2), тада добивамо следећу једначину:

$$b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; 3).$$

Ова нам једначина претставља задату елипсу у правоуглом координатном систему XOY.

Ако у једначини 3) извршимо назначене рачунске радње, онда добивамо једначину:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2\,b^2px - 2\,a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 4).$$

Једначину 4) можемо написати и на следећи начин:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 5).$$

Да би једначине 4) и 5) претстављале исту елипсу потребно је и довољно, да су им коефицијенти уз одговарајуће непознате величине и слободни чланови једнаки или пропорционални. То значи да мора бити испуњен следећи услов:

$$\frac{b^2}{A} = \frac{a^2}{B} = \frac{-2\,b^2p}{C} = \frac{-2\,a^2q}{D} = \frac{b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2}{F} = \lambda$$

одакле је

$$\begin{aligned} b^2 &= A\lambda \\ a^2 &= B\lambda \\ -2\,b^2p &= C\lambda \\ -2\,a^2q &= D\lambda. \end{aligned}$$

Из ових односа излази да је:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{-C\lambda}{2\,b^2} = -\frac{C\lambda}{2A\lambda} = -\frac{C}{2A} \\ q &= -\frac{D\lambda}{2a^2} = -\frac{D\lambda}{2B\lambda} = -\frac{D}{2B} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; 6).$$

Изрази 6) нам претстављају обрасце за одређивање координата центра елипсе, ако је њена једначина дата у облику једначине 5).

Ако је једначина елипсе дата у развијеном облику т.ј. у облику једначине 5), онда ћемо одредити њене осе следећим поступком:

Ми смо из облика једначине 3) вршећи извесне рачунске радње дошли до облика једначине 5). Међутим, супротним процесом рачунских радњи, увек се можемо вратити из облика једначине 5) у облик једначине 3). Кад смо једначину елипсе довели на облик једначине 3), тада је можемо изразити и на следећи начин:

$$\frac{(x - p^2)}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1 \; \ldots\ldots \; 7).$$

У једначини елипсе која је сведена на облик једначине 7) увек нам именитељ сабирка $\frac{(x-p)^2}{a^2}$ претставља квадрат велике полуосе елипсе, а именитељ сабирка $\frac{(y-b)^2}{b^2}$ увек нам претставља квадрат мале полуосе елипсе. Кад смо одредили квадрате полуоса елипсе, онда из њих лако израчунавамо полуосе односно и саме осе елипсе.

Пример: Одредити координате центра и полуосе елипсе:

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 72y + 208 = 0.$$

Решење: Према обрасцима 6) координате центра су:

$$p = -\frac{-40}{2.4} = 5$$

$$b = -\frac{-72}{2.9} = 4.$$

Једначину задате елипсе можемо написати и на овај начин:

$$4x^2 - 40x + 9y^2 - 72y = -208.$$

Кад и левој и десној страни ове једначине додамо квадрат елипсине апсцисе центра помножен са коефицијентом уз x^2 и квадрат елипсине ординате центра помножен са коефицијентом уз y^2 тада добивамо:

$$4x^2 - 40x + 4.25 + 9y^2 - 72y + 9.16 = 9.16 + 4.25 - 208$$

одакле је

$$4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 - 8y + 16) = 36$$

одавде је

$$4(x - 5)^2 + 9(y - 4)^2 - 36$$

или

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

Из ове једначине видимо да је:

$$a^2 = 9 \text{ или } a = 3$$

$$b^2 = 4 \text{ или } b = 2.$$

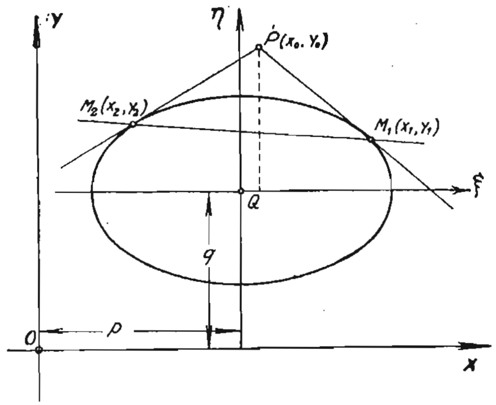
ЗАДАЦИ:

Нађи координате центра и полуосе елипсе.

1) $9x^2 + 16y^2 - 36x - 32y - 92 = 0.$
2) $36x^2 + 144y^2 - 36x - 96y + 21 = 0.$
3) $6x^2 + 9y^2 + 48x - 12y + 82 = 0.$

* § 63. ПОЛАРА ЕЛИПСЕ: $b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2$.

Нека је на сл. 58 претстављена елипса: $b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 = a^2b^2$ и тачка $P(x_0, y_0)$ која се налази ван те елипсе. Поставимо затим у раван задате елипсе један помоћни правоугли координатни систем, тако да му почетак буде у центру те елипсе. Апсцисна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са апсцином осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са ординатом осом система XOY. У томе ће се случају апсцисна оса новога координатног система поклапати са великом осом елипсе, а ординатна оса са малом осом елипсе. Тај смо систем на приложеној слици обележили са $\xi Q \eta$. Једначина задате елипсе биће претстављена у новоме систему изразом:



Сл. 58.

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2 \; \ldots\ldots \; 1).$$

Ако обележимо са: (ξ_0, η_0) координате тачке P у систему $\xi Q \eta$, онда ће у томе систему једначина елипсине поларе чији се пол налази у задатој тачци очевидно бити:

$$b^2\xi\xi_0 + a^2\eta\eta_0 = a^2b^2 \; \ldots\ldots \; 2).$$

Познато нам је из § 3, а и из слике се види да је:

$$\left.\begin{matrix} \xi = x - p & \text{и} & \xi_0 = x_0 - p \\ \eta = y - q & & \eta_0 = y_0 - q \end{matrix}\right\} \ldots\ldots \; 3).$$

Кад у једначини 2) место величина: ξ, η и ξ_0, η_0 ставимо њихове вредности из једначина 3) тада добивамо следећу једначину:

$b^2(x-p)\ (x_0-p)+a^2(y-q)\ (y_0-q)=a^2b^2$ ..... 4).

Једначина 4) нам претставља полару задате елипсе у правоуглом координатном систему XOY чији се пол налази у тачци $P(x_0,y_0)$.

Пример: Наћи полару елипсе: $(x-2)^2+2\ (y-3)^2=6$, чији се пол налази у тачци $P(6,2)$.

Решење: $(x-2)\ (6-2)+2(y-3)\ (2-3)=6$ одакле је $y=2x-4$.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи полару елипсе: $3(x-3)^2+4(y-1)^2=16$ чији је пол у тачци (3,5).

2) Наћи полару елипсе: $2x^2+5y^2-8x-40y+81=0$ чији је пол у тачци (—4,5).

3) Наћи полару елипсе: $4x^2+5y^2-24x-20y+47=0$ чији је пол у тачци $\left(3,\ \frac{1}{5}\right)$.

* § 64. ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ЕЛИПСЕ:

$$b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2.$$

1 чл. Свака тачка у равни елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ може послужити за пол једне поларе те елипсе. Ако на сл. 58 узмемо тачку $M_1(x_1,y_1)$ која се налази на самој елипси за пол елипсине поларе, онда ће њена једначина бити:

$b^2(x-p)\ (x_1-p)+a^2(x-q)\ (y_1-q)=a^2b^2$ .... 1).

Како је полара елипсе чији се пол налази у некој тачци на елипси истовремено и тангента те елипсе, то нам једначина 1) претставља тангенту елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$, која је повучена из њезине тачке $M_1(x_1,y_1)$.

Пример: Наћи једначину тангенте елипсе: $2(x-1)^2+3(y-4)^2=11$ која је повучена из њезине тачке (3,5).

Решење: $2(x-1)\ (3-1)+3(y-4)\ (5-4)=11$ одакле је
$$4x+3y-27=0.$$

2 чл. Једначину нормале повучене из тачке $M_1(x_1,y_1)$ која се налази на елипси: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ одредићемо на следећи начин:

Прво ћемо узети једначину праве линије које пролази кроз задату тачку $M_1(x_1,y_1)$. Њена ће једначина бити претстављена следећим изразом:

$y-y_1=m\ (x-x_1)$ ..... 2).

Кад у овој једначини место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца тангенте (1), тада добивамо:

$$y-y_1=\frac{a^2(y_1-q)}{b^2(x_1-p)}(x-x_1)$$

или

$b^2(y-y_1)\ (x_1-p)-a^2(x-x_1)\ (y_1-q)=0$ .... 3).

Једначина 3) нам претставља нормалу елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$, која је повучена из задате тачке на тој елипси.

Пример: Наћи једначину нормале елипсе: $(x-3)^2+4(y-1)^2=17$ која је повучена из тачке (4,3) те елипсе.

Решење: $\frac{17}{4}(y-3)\ (4-3)-17\ (x-4)\ \ (3-1)=0$ одакле је:
$$y=8x-29.$$

Напомена: Додирне величина елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ одређују се на исти начин као у § 54.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенту и нормалу елипсе: $2(x-4)^2+7(y-2)^2=15$ из њезине тачке (6,3).

2) Наћи тангенту и нормалу елипсе: $3x^2+5y^2-12x-10y-15=0$ из њезине тачке (4,—1).

3) Наћи додирне величине елипсе: $4x^2+9y^2-24x-18y+20=0$ из њезине тачке (5,2).

§ 65. ТЕМЕНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ЕЛИПСЕ.

За центар елипсе можемо узети ма коју тачку у правоуглом координатном систему YOY. Елипса чији се центар налази у тачци (p,q), а чија је велика оса паралелна са апсцисном осом, а мала оса са ординатном осом правоуглог координатног система XOY, претстављена је једначином:

$b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ ..... 1).

Ако претпоставимо, да је величина $q=0$, а величина $p=a$ онда једначина 1) добива облик:
$$b^2(x-a)^2+a^2y^2=a^2b^2$$

одакле је:

$$a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$$

или

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Кад у овој једначини место величине $\frac{b^2}{a}$ ставимо њену вредност из § 60, онда добивамо следећу једначину:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \ldots\ldots 2).$$

Једначина 2) нам претставља темени облик једначине елипсе.

ЗАДАЦИ:

(Централни облик једначине елипсе, чија се велика оса поклапа са апсцисном осом, а мала оса са ординатном осом правоуглог координатног система).

◎ 1) Наћи једначину елипсе код које је $a = 4$, $b = 3$.

◎ 2) Како гласи једначина елипсе чија је мала оса једнака 8, а велика оса 12?

◎ 3) Одредити једначину елипсе чија је велика оса 14, а мала полуоса 3.

◎ 4) Како гласи једначина елипсе чија је линеарна ексцентричност 6 а мала оса 16?

◎ 5) Наћи једначину елипсе код које је: $a - b = 1$, а $c = 3$.

◎ 6) Одредити једначину елипсе код које је: $a + b = 9$, а $c = 3\sqrt{5}$.

◎ 7) Конструисати елипсу чија је мала оса 16 а велика оса 20.

◎ 8) Извршити конструкцију елипсе чија је велика оса 10, а линеарна ексцентричност 4.

◎ 9) Конструисати елипсу код које је: $b = 3$, а $c = 2$.

◎ 10) Конструисати елипсу код које је: $a = 8$, а $b = 5$.

◎ 11) Наћи једначину елипсе која пролази кроз тачку (3,2), а велика јој је оса 8.

◎ 12) Одредити једначину елипсе која пролази кроз тачку (3,1) кад јој је мала оса 6.

◎ 13) Елипса пролази кроз тачке (2,3) и (4,—1); наћи њену једначину.

◎ 14) Наћи једначину елипсе која пролази кроз тачке: (4,—2) и (1,4).

◎ 15) Одредити међусобни положај елипсе: $8x^2+9y^2=108$ и тачака: (2,—1), (—3,2) и (4,3).

◎ 16) Одредити међусобни положај елипсе: $2x^2+11y^2=43$ и тачака: (1,2), (4,1) и (3,—1).

◎ 17) Одредити међусобни положај елипсе: $36x^2 + 45y^2 = 29$ и тачака: $\left(1, \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$.

◎ 18) На елипси: $2x^2 + 7y^2 = 81$ одредити тачку, код које су апсциса и ордината једнаке.

◎ 19) Одредити међусобни положај елипсе: $4x^2 + 9y^2 = 5$ и праве: $2x + 3y - 3 = 0$.

◎ 20) Одредити међусобни положај елипсе: $3x^2 + 7y^2 = 75$ и праве: $2x - 7y - 25 = 0$.

◎ 21) Одредити међусобни положај елипсе: $x^2 + 3y^2 = 3$ и праве: $y = x + 4$.

◎ 22) Наћи потеге елипсе: $16x^2 + 25y^2 = 400$ повучене из њене тачке $\left(4, \frac{12}{5}\right)$ и угао који захватају ти потези.

◎ 23) Права $4x + 3y - 13 = 0$ сече елипсу: $8x^2 + 15y^2 = 143$ у двема тачкама; наћи отстојање између тих тачака.

Наћи једначине тангенте и нормале елипсе:

24) $4x^2 + 5y^2 = 61$ које су повучене из њене тачке (2,—3).

25) $7x^2 + 8y^2 = 9$ које су повучене из њене тачке $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

26) $9x^2 + 11y^2 = 45$ које су повучене из њене тачке $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$.

27) $x^2 + 4y^2 = 41$ које су повучене из њене тачке (—5,2).

28) $8x^2 + 12y^2 = 75$ које су повучене из њене тачке $(-3, \frac{1}{2})$.

Одредити додирне величине елипсе:

29) $2x^2 + 13y^2 = 45$ које одговарају њеној тачци (4,—1).

30) $3x^2 + 8y^2 = 29$ које одговарају неној тачци $(3, \frac{1}{2})$.

31) $15x^2 + 18y^2 = 62$ које одговарају њеној тачци $(2, -\frac{1}{3})$.

32) Наћи додирне величине елипсе: $3x^2 + 4y^2 = 63$ из њене тачке чија је апсциса једнака ординати.

33) Одредити вредност параметра λ такву, да би права: $x + y + \lambda = 0$ била тангента елипсе $2x^2 + 3y^2 = 30$.

34) Наћи вредност параметра λ такву, да би права $\lambda x + 5y - 12 = 0$ била тангента елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 24$.

35) Наћи једначину тангенте елипсе: $3x^2 + 5y^2 = 95$ која је паралелна са правом $3x - 2y + 7 = 0$.

36) Одредити једначину тангенте елипсе $4x^2+9y^2=45$, која је нормална на правој: $4x-3y+2=0$.

37) Која је тангента елипсе $4x^2+6y^2=25$ паралелна са правом: $x-6y+7=0$?

38) Наћи једначину тангенте елипсе: $3x^2+9y^2=16$, која је нормална на правој: $x-y+5=0$.

39) Колика је вредност параметра λ, кад је права: $5x+\lambda y-14=0$ тангента елипсе: $5x^2+8y^2=28$?

40) Како гласи једначина тангенте повучене из тачке $(4,-\frac{1}{2})$ на елипсу: $3x^2+8y^2=20$?

41) Одредити једначнну тангенте повучене из тачке $(6,-2)$ на елипсу: $3x^2+5y^2=80$.

42) Наћи једначину тангенте повучене из тачке $(4,4)$ на елипсу: $x^2+4y^2=40$.

43) Израчунати угао који заклапају тангенте повучене из тачке $(2,3)$ на елипсу: $2x^2+3y^2=30$.

44) Одредити угао који закланају тангенте елипсе: $5x^2+12y^2=57$ повучене из тачке $(7,-4)$.

* 45) Права: $6x+y-22=0$ је полара елипсе: $2x^2+3y^2=66$; одредити пол те поларе.

* 46) Полара елипсе: $x^2+4y^2=32$ је права: $3x+2y-16=0$; одредити њен пол.

* 47) Наћи дијаметар елипсе: $3x^2+4y^2=12$ који полови елипсине тетиве паралелне са правом: $3x+2y-5=0$.

* 48) Наћи коефицијенат правца оних паралелних тетива елипсе: $7x^2+9y^2=63$ које полови дијаметар: $14x-3y=0$.

* 49) На дијаметру елипсе: $5x^2+8y^2=40$ који пролази кроз тачку $(3,2)$ налази се пол елипсине поларе, која пролази кроз тачку $(-4,1)$; наћи једначину те поларе.

* 50) Један дијаметар елипсе: $3x^2+10y^2=30$ полови елипсине тетиве које су паралелне са правом $6x+5y-15=0$, а други дијаметар те елипсе пролази кроз тачку $(-2,5)$; наћи угао, који заклапају та два дијаметра.

* 51) Кроз пресек правих: $x+y-8=0$ и $2x-y-1=0$ пролази полара елипсе $5x^2+12y^2=60$; наћи једначину те поларе и одредити њен пол.

* 52) Тачка $\left(\frac{5}{2},-1\right)$ полови тетиву елипсе: $8x^2+15y^2=143$; наћи дужину те тетиве.

* 53) Права: $3x-2y=0$ је дијаметар елипсе: $3x^2+8y^2=24$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 54) Дијаметар елипсе: $5x^2+6y^2=30$ пролази кроз пресек правих: $3x+2y-13=0$ и: $x-y-1=0$, наћи њему коњуговани дијаметар.

* 55) Дијаметар елипсе: $7x^2+12y^2=84$ је паралелан са правом $14x-8y+5=0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 56) Наћи дијаметар елипсе: $8x^2+9y^2=72$ који је нормалан на правој $3x-4y-7=0$.

* 57) Дијаметар елипсе: $3x^2+7y^2=21$ је паралелан са симетралом дужи чије су крајње тачке $(-2,5)$ и $(4,3)$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 58) Наћи једначине директриса елипсе: $9x^2+25y^2=225$, одредити параметар и бројни ексцентрицитет те елипсе.

* 59) Одредити једначине директриса елипсе: $16x^2+25y^2=400$, наћи параметар и бројни ексцентрицнтет те елипсе.

* 60) Израчунати површину елипсе: $4x^2+9y^2=36$.

* 61) Израчунати површину елипсе: $x^2+4y^2=12$.

* 62) Израчунати површину елипсе: $2x^2+8y^2=17$.

Елипса чији се центар налази ван координатног почетка и чија је велика оса паралелна са апсцисном, а мала оса са ординатном осом правоуглог координатног система.

Конструисати елипсу чија је једначина:

* 63) $4x^2+9y^2-4x+18y+73=0$.

* 64) $3x^2+5y^2+24x-20y+43=0$.

* 65) $12x^2+18y^2-12x-12y-31=0$.

Одредити додирне величине елипсе:

* 66) $2x^2+5y^2-12x-40y+76=0$ из њезине тачке $(4,2)$.

* 67) $4x^2+5y^2+16x-10y-35=0$ из њезине тачке $(-5,3)$.

* 68) $x^2+9y^2-12x-36y+31=0$ из њезине тачке $(2,\frac{1}{3})$.

Наћи једначине тангената елипсе:

* 69) $5x^2+9y^2-40x-54y+120=0$ повучених из тачке $\left(-6,\frac{5}{2}\right)$.

* 70) $2x^2+3y^2-24x-18y+79=0$ повучених из тачке $(1,3)$.

* 71) $x^2+4y^2-2x+16y-51=0$ повучених из тачке $(-5,3)$.

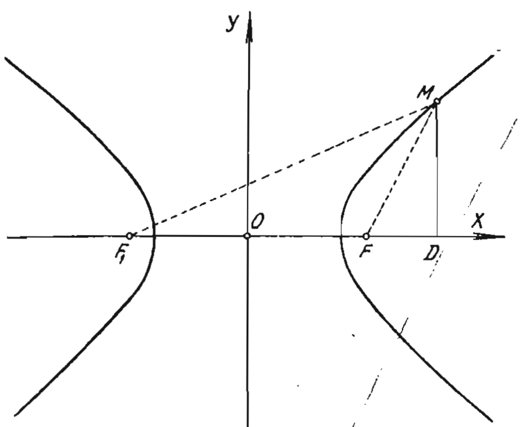
Глава VI

ХИПЕРБОЛА

◎ § 66. ПОТЕЗИ ХИПЕРБОЛЕ.

Према § 27 хипербола је таква крива линија у равни, која има ту особину, да је разлика потега ма које њене тачке једнака главној оси хиперболе.

Нека је на сл. 59. претстављена једна хипербола. Поставимо у раван те хиперболе правоугли координатни систем тако, да се координатни почетак поклапа са центром хиперболе, апсцисна оса са главном осом, а ординатна оса са споредном осом хиперболе. Ако на посматраној хиперболи узмемо неку тачку $M(x,y)$, онда ћемо отстојања од те тачке до жижа F_1 и F наћи на следећи начин:



Сл. 59

Из правоуглих троуглова: F_1MD и FMD излази да је:

$$\overline{F_1M}^2 - y^2 = (x + c)^2$$

и

$$\overline{FM}^2 - y^2 = (x - c)^2.$$

Кад другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, онда добивамо следећу једначину:

$$\overline{F_1M}^2 - \overline{FM}^2 = (c + x)^2 - (c - x)^2$$

одакле је:

$$(F_1M - FM)\ (F_1M + FM) = 4cx.$$

Ако у овој једначини место величине $(F_1M - FM)$ ставимо њезину вредност из једначине 7) § 27, онда добивамо:

$$2a(F_1M + FM) = 4cx$$

или

$$F_1M + FM = \frac{2cx}{a} \ldots\ldots 1).$$

Из ове једначине и из познате једначинн: $F_1M - FM = 2a$ излази да је:

$$\left.\begin{aligned} F_1M &= \frac{cx}{a} + a \\ FM &= \frac{cx}{a} - a \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Једначине (2) нам изражавају дужине потега неке тачке на хиперболи.

◎ § 67. ЈЕДНАЧИНА ХИПЕРБОЛЕ

(централни облик).

1. чл. Из троугла F_1MD сл. 59 излази да је:

$$\overline{F_1M}^2 - y^2 = (x + c)^2 \ldots\ldots 1).$$

Ако у овој једначини место величине: F_1M ставимо њену вредност из прве од једначина 2) § 66, онда добивамо следећу једначину:

$$\left(\frac{cx}{a} + a\right)^2 - y^2 = (x + c)^2$$

одакле је:

$$\frac{c^2x^2}{a^2} + 2cx + a^2 - y^2 = c^2 + 2cx + x^2$$

или

$$c^2x^2 + a^4 - a^2y^2 = a^2c^2 + a^2x^2$$

а одавде

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Кад у овој једначини место величине $(c^2 - a^2)$ ставимо њену вредност из израза 8) § 27 тада добивамо једначину:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ldots\ldots 2).$$

Једначина 2) нам изражава однос између айсцисе и ординаше ма које шачке на хийерболи, йа се зашо и назива једначином ***хийерболе.*** Она се може написати и у следећем облику:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ldots\ldots 3).$$

Ако претпоставимо да су у једначини 2) полуосе хиперболе једнаке, тј. $a=b$, онда добивамо једначину:

$$a^2x^2-a^2y^2=a^4$$

или

$$x^2-y^2=a^2 \ldots\ldots 4).$$

Ова нам једначина такође претставља хиперболу која се назива *равностраном хиперболом.*

2 чл. Дискусија једначине хиперболе.

Ако једначину хиперболе решимо по y-ну, онда добивамо:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Из овога се израза види, да величинама x-са чија је апсолутна вредност мања од полуосе a не одговара ни једна реална вредност y-на, што значи, да у том размаку не постоји ни једна тачка хиперболе. Оним пак величинама x-са чија је апсолутна вредност већа од полуосе a, одговарају по две једнаке, а супротно означене вредности y-на, што значи, да оса x дели обе гране хиперболине на по два једнака и симетрична дела.

Ако затим једначину хиперболе решимо по x-су, тада добивамо:

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}.$$

Из овога се израза види, да свакој вредности y-на одговарају по две једнаке а супротно означене вредности x-са; што значи, да су гране хиперболине симетрично распоређене према ординатној оси.

Пример: Наћи једначину хиперболе чија је главна полуоса $a=4$, а споредна полуоса $b=3$.

Решење: $3^2x^2-4^2y^2=3^2.4^2$

или

$$9x^2-16y^2=144.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи једначину хиперболе чија је главна оса једнака 16 а линеарни ексцентрицитет 10 дужинских јединица.

2) Споредна оса хиперболе је једнака 4, а линеарни ексцентрицитет 5 дужинских јединица, одредити једначину хиперболе.

3) Хипербола чија главна оса износи 8 дужинских јединица пролази кроз тачку (5,2), наћи једначину те хиперболе.

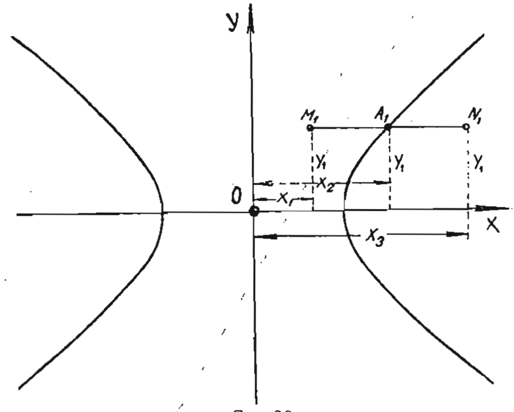
§ 68. ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ И ХИПЕРБОЛЕ.

1 чл. Нека је на сл. 60 претстављена хипербола:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

и тачка $M_1(x_1,y_1)$ која се налази ван хиперболе.

Ако кроз задату тачку повучемо праву линију која је паралелна са апсцисном осом, онда ће та права сећи хиперболу у некој тачци $A_1(x_2,y_1)$. Из слике се види, да је:



Сл. 60

$$x_1<x_2.$$

Пошто су и величина x_1 и величина x_2 у посматраном случају позитивне, то тако исто мора бити:

$$x_1^2<x_2^2.$$

Кад обе стране овога израза помножимо са величином b^2, тада добивамо:

$$b^2x_1^2<b^2x_2^2 \ldots\ldots 1).$$

Како се тачка $A_1(x_2,y_1)$ налази на хиперболи, то њене координате морају задовољавати једначину хиперболе, те имамо:

$$b^2x_2^2-a^2y_1^2=a^2b^2$$

или

$$b^2x_2^2=a^2b^2+a^2y_1^2 \ldots\ldots 2).$$

Ако у изразу 1) место величине: $b^2x_2^2$ ставимо њену вредност из једначине 2), онда добивамо:

$$b^2x_1^2<a^2b^2+a^2y_1^2$$

или

$$b^2x_1^2-a^2y_1^2<a^2b^2 \ldots\ldots 3).$$

Однос који је претстављен изразом 3) важи за сваку тачку која се налази ван хиперболе, па према томе и за неку покретну тачку M са промењивим координатама (x,y). Тако имамо:

$$b^2x^2 - a^2y^2 < a^2b^2$$

или

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 < 0 \; \ldots\ldots \; 4).$$

2 чл. Узмимо на сл. 60 неку тачку $N_1(x_3,y_1)$ која се налази у хиперболи и кроз њу повуцимо праву линију паралелну са апсцисном осом. Та права сече хиперболу у тачци $A_1(x_2,y_1)$. Из слике се види да је:

$$x_3 > x_2.$$

Како су и величина x_3 и величина x_2 у датом случају позитивне, то тако исто мора бити и:

$$x_3^2 > x_2^2.$$

Кад и леву и десну страну овога израза помножимо са величином: b^2, тада добивамо:

$$b^2x_3^2 > b^2x_2^2 \; \ldots\ldots \; 5).$$

Ако у изразу 5) место величине: $b^2x_2^2$ ставимо њену вредност из једначине 2), онда добивамо:

$$b^2x_3^2 > a^2b^2 + a^2y_1^2$$

или

$$b^2x_3^2 - a^2y_1^2 > a^2b^2 \; \ldots\ldots \; 6).$$

Однос који је претстављен изразом 6) важи за сваку тачку која се налази у хиперболи, па према томе и за неку покретну тачку N са промењнвим координатама (x,y). Тако добивамо следећи израз:

$$b^2x^2 - a^2y^2 > a^2b^2$$

или

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 > 0 \; \ldots\ldots \; 7).$$

Из свега овога излази следеће практично упутсво према коме одређујемо положај тачке и хиперболе:

Прво треба написати трином хиперболин: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$, а затим у њему место промењивих количина (x,y) ставити координате задате тачке. Ако је резултат смене мањи од нуле, тачка се налази ван хиперболе; ако је резултат смене једнак нули, тачка се налази на хиперболи; а ако је резултат смене већи од нуле, онда се тачка налази у хиперболи.

Пример: Одредити међусобни положај хиперболе: $4x^2 - 9y^2 = 36$ и тачке (4,3).

Решење: Трином задате хиперболе је: $4x^2 - 9y^2 - 36$. Кад у овом триному место величина (x,y) ставимо координате задате тачке, тада добивамо:

$$4.16 - 9.9 - 36 = 64 - 81 - 36 = -53.$$

Дакле резултат смене је негативан т.ј. мањи од нуле, што значи, да се тачка налази ван хиперболе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити положај хиперболе: $2x^2 - 6y^2 = 5$ и тачке: (2,5).
2) Одредити положај хиперболе: $5x^2 - 6y^2 = 14$ и тачке:(—2,1).
3) Одредити положај хиперболе: $6x^2 - 9y^2 = 5$ и тачке: $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

§ 69. ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ И ХИПЕРБОЛЕ.

Нека су нам задате једначина хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и једначина праве линије: $y = mx + n$. Међусобни положај ових двеју линија одредићемо на следећи начин:

Ако у једначини хиперболе сменимо y са његовом вредношћу из једначине праве, онда добивамо једначину:

$$b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$

одакле је

$$x^2(b^2 - a^2m^2) - 2\,a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0 \; \ldots\ldots \; 1).$$

Једначина 1) је квадратна једначина по промењивој величини x, па ако је решимо, онда добивамо корене:

$$x_{1,2} = \frac{a^2mn \pm ab\sqrt{n^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Ако затим у једначини праве место величине x ставимо њезине вредности из израза 2), онда за y такође добивамо следеће две вредности:

$$y_{1,2} = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{n^2 + b^2 - a^2m^2}}{b^2 - a^2m^2} \; \ldots\ldots \; 3).$$

Тако смо решавањем једначина праве и хиперболе добили два пара корена: (x_1,y_1) и (x_2,y_2), који нам претстављају координате пресека тих двеју линија.

Из израза 2) и 3) излази следећи закључак:

1) Ако је дискриминанта: $n^2 + b^2 - a^2m^2$ већа од нуле, онда су оба пара корена реална и неједнака. У томе случају права сече хиперболу у двема тачкама и назива се *сечицом хиперболе.*

2) Ако је дискримината: $n^2 + b^2 - a^2m^2$ једнака нули, онда су оба пара корена реална и једнака. У томе случају права сече хиперболу у двема тачкама које се поклапају, т.ј. она додирује хиперболу у једној тачци и назива се *дирком* или *тангентом хиперболе.*

3) Ако је пак дискриминанта: $n^2 + b^2 - a^2m^2$ мања од нуле, онда су оба пара корена имагинарна и неједнака, што значи да права нема заједничких тачака са хиперболом, него пролази ван хиперболе.

Пример: Какав положај има права: $y = x - 1$ према хиперболи: $5x^2 - 7y^2 = 17$?

Решење: Решавањем једначина праве: $y = x - 1$ и хиперболе: $5x^2 - 7y^2 = 17$ добивамо за корене: $x_1 = 3$; $y_1 = 2$ и $x_2 = 4$; $y_2 = 3$. Према томе је права сечица хиперболе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити положај хиперболе: $3x^2 - 7y^2 = 20$ и праве: $3x + y - 10 = 0$.

2) Одредити положај хиперболе: $4x^2 - 5y^2 = 20$ и праве: $x + y - 1 = 0$.

3) Одредити положај хиперболе: $4x^2 - 9y^2 = 36$ и праве: $y = x + 2$.

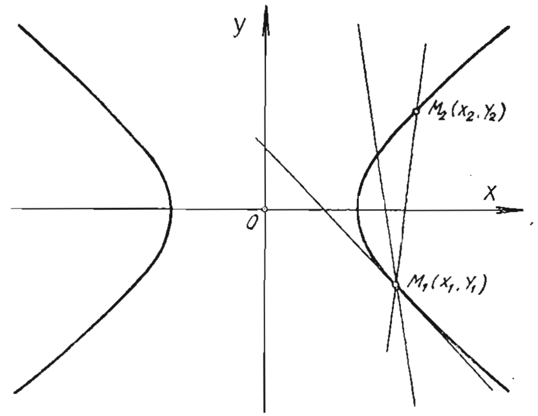
§ 70. ТАНГЕНТА ХИПЕРБОЛЕ

(*повучена из тачке на хиперболи*).

Нека је на сл. 61 претстављена хипербола: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$. Узмимо на тој хиперболи тачке $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ и кроз њих повуцимо сечицу хиперболе. Једначина те сечице биће претстављена изразом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - x_1) \dots 1).$$

Ако се тачка $M_2(x_2, y_2)$ буде луком хиперболе примицала тачки $M_1(x_1,y_1)$ све дотле док се не поклопе, онда ће сечица 1) мењати свој положај у координатном систему све док не заузме положај тангенте хиперболе у тачци $M_1(x_1,y_1)$. У томе случају једначина 1) добива облик:



Сл. 61.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1}(x - x_1)$$

или

$$y - y_1 = \frac{0}{0}(x - x_1) \dots .\ 2).$$

Коефицијенат правца праве линије која треба да буде претстављена овом једначином, појавио се у привидно неодређеном изразу $\frac{0}{0}$. Тако нам једначина 2) ако бисмо је оставили у том облику, не би претстављала ништа одређено у координатном систему. Међутим, тангента хиперболе у тачци $M_1(x_1,y_1)$ има потпуно одређен положај у координатном систему као што се види на сл. 61, па и њезин коефицијенат правца мора бити потпуно коначан и одређен. Њега ћемо одредити на следећи начин:

Тачке $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ налазе се на хиперболи: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, те њихове координате морају задовољавати једначину хиперболе. Тако добивамо једначине:

$$b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2$$
$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Кад другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, тада добивамо једначину:

$$b^2(x_2^2-x_1^2)-a^2(y_2^2-y_1^2)=0$$

или

$$b^2(x_2-x_1)\ (x_2+x_1)=a^2(y_2-y_1)\ (y_2+y_1)$$

одакле је:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}\ldots.\ 3).$$

Ако у једначини 1) коефицијенат правца $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ сменимо његовом вредношћу из једначине 3) тада добивамо:

$$y-y_1=\frac{b^2\,(x_2+x_1)}{a^2\,(y_2+y_1)}(x-x_1)\ \ldots..\ 4).$$

Једначина 4) претставља сечицу хиперболе која пролази кроз тачке $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Ако се тачка $M_2(x_2,y_2)$ буде луком хиперболе примицала тачки $M_1(x_1,y_1)$, онда ће сечица 4) мењати свој положај према координатном систему све дотле док не заузме положај тангенте у тачци $M_1(x_1,y_1)$. У томе ће случају бити: $x_2=x_1$ и $y_2=y_1$, те ће једначина 4) добити облик:

$$y-y_1=\frac{b^2\,(x_1+x_1)}{a^2\,(y_1+y_1)}\,(x-x_1)$$

или

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

одакле је

$$b^2xx_1-a^2yy_1=b^2x_1^2-a^2y_1^2.$$

Како је израз: $b^2x_1^2-a^2y_1^2$ једнак величини: a^2b^2 то ова једначина добива дефинитиван облик:

$$b^2xx_1-a^2yy_1=a^2b^2\ \ldots..\ 5).$$

Једначина 5) нам претставља тангенту хиперболе повучену из њезине тачке $M_1(x_1,y_1)$.

Пример: Наћи једначину тангенте хиперболе: $3x^2-4y^2=12$ из њезине тачке: (4,—3).

Решење:

$$3\,x.x_1-4\,y.y_1=12$$

односно

$$3x.4-4y(-3)=12$$

или

$$x+y-1=0.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенту хиперболе: $2x^2-5y^2=45$ из њезине тачке: (5,—1).

2) Наћи тангенту хиперболе: $5x^2-6y^2=21$ из њезине тачке: (—3,2).

3) Наћи тангенту хиперболе: $3x^2-4y^2=3$ из њезине тачке: $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

§ 71 НОРМАЛА ХИПЕРБОЛЕ.

Права линија која пролази кроз једну тачку на хиперболи и стоји нормално на тангенти хиперболе повучене кроз ту тачку, назива се нормалом хиперболе. Једначину нормале повучене кроз једну тачку на хиперболи наћићемо на следећи начин: Узећемо једначину праве линије која пролази кроз задату тачку на хиперболи и у њој сменити неодређени коефицијенат правца са негативном реципрочном вредношћу коефицијента правца тангенте повучене на хиперболу у тој тачци.

Једначина праве линије повучене кроз тачку $M_1(x_1,y_1)$ која се налази на хиперболи: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, дата је изразом:

$$y-y_1-m(x-x_1)\ldots..\ 1).$$

Тангента исте хиперболе повучена кроз ту тачку претстављена је очевидно једначином:

$$b^2xx_1-a^2yy_1=a^2b^2$$

или

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\,x-\frac{b^2}{y_1}\ldots..\ 2).$$

Ако у једначини 1) место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца праве 2), онда добивамо следећу једначину:

$$y-y_1=-\frac{a^2x_1}{b^2x_1}\,(x-x_1)\ldots..\ 3).$$

Једначина 3) нам претставља нормалу хиперболе: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$, повучену кроз тачку $M_1(x_1,y_1)$ која се налази на хиперболи.

Једначину 3) не треба учити напамет као образац, али је потребно запамтити поступак којим се долази до ње. Таквим смо се поступком послужили и при одређивању једначине нормале код круга и код елипсе.

Пример: Наћи једначину нормале хиперболе: $4x^2 - 9y^2 = 64$, повучене кроз њену тачку (5, 2).

Решење: Једначина праве линије која пролази кроз тачку (5, 2) је:

$$y - 2 = m(x - 5) \ldots\ldots a).$$

Једначина тангенте хиперболине која пролази кроз задату тачку је дата изразом:

$$4x.5 - 9y.2 = 64$$

одакле је:

$$y = \frac{10x}{9} - \frac{32}{9}$$

Коефицијенат правца ове тангенте је $\frac{10}{9}$, па ако његову негативну реципрочну вредност ставимо у једначину а) место величине m, онда добивамо:

$$y - 2 = -\frac{9}{10}(x - 5)$$

одакле је:

$$9x + 10y - 65 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

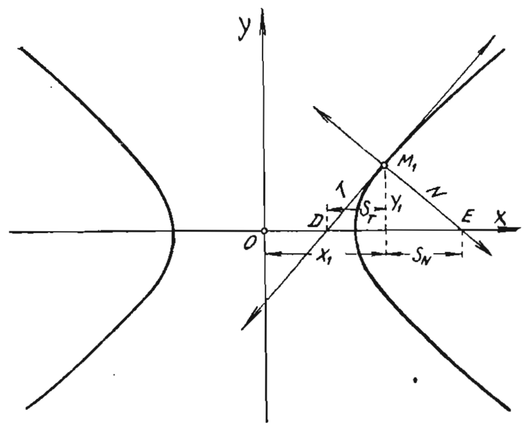
1) Наћи нормалу хиперболе: $4x^2 - 7y^2 = 9$ повучену кроз њену тачку (2,—1).

2) Наћи нормалу хиперболе: $6x^2 - 5y^2 = 105$ повучену кроз њену тачку (—5,3).

3) Наћи нормалу хиперболе: $5x^2 - 8y^2 = 10$ повучену кроз њену тачку $(2, -\frac{1}{2})$.

§ 72. ДОДИРНЕ ВЕЛИЧИНЕ ХИПЕРБОЛЕ.

Нека је на сл. 62 претстављена хипербола $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и тачка $M_1(x_1,y_1)$. Повуцимо кроз задату тачку тангенту и нормалу хиперболе.



Сл. 62.

Линија тангента сече апсцисну осу у некој тачци D. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и D зовемо *тангентом* и обележићемо га са T. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осу називамо *субтангентом* и обележићемо је са S_T.

Линија нормала сече апсцисну осу у некој тачки E. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и E зове се *нормалом* и обележићемо га са N. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осу називамо *субнормалом* и обележићемо је са S_N.

Величине T и N израчунавају се као отстојање између двеју тачака и узимају се увек са позитивним знаком. Координате тачке M_1 су нам задате, а координате тачака D и E налазе се понаособ као координате пресека двеју познатих правих линија.

Величине S_T и S_N могу се израчунати помоћу Питагориног правила, те је:

$$S_T = \pm\sqrt{T^2 - y_1^2}$$
$$S_N = \pm\sqrt{N^2 - y_1^2}.$$

Ове величине могу бити позитивне, а могу и негативне. Усвојено је правило према коме се свакој од величина S_T и S_N придодаје знак плус, ако се она налази на оној страни од тачке M_1 у коме се смислу простире позитивна грана апсцисне осе; а знак минус, ако се иста налази на оној страни од ординате тачке M_1 у коме се смислу простире негативна грана апсцисне осе.

Према томе би на сл. 62 величина S_T имала знак минус, а величина S_N знак плус.

Величина S_T може се наћи и онда кад се од апсцисе тачке D одузме апсциса тачке M_1. Тако исто се и величина S_N може наћи, кад се од апсцисе тачке E одузме апсциса тачке M_1.

Величине: T, N, S_T и S_N називају се *додирним величинама хиперболе.*

За израчунавање додирних величина хиперболе, не треба учити напамет нарочите обрасце, али је потребно да се запамти поступак којим се долази до њих.

Пример: Наћи додирне величине хиперболе: $2x^2 - 5y^2 = 12$ из њезине тачке $(4,2)$.

При решавању оваквих задатака, потребно је увек нацртати слику.

Решење: Претпоставимо, да нам је на сл. 62 претстављена задата хипербола, а тачка M_1 нека има координате $(4, 2)$. Једначина тангенте задате хиперболе у њезиној тачци $(4,2)$ биће:

$$2.x.4 - 5.y.2 = 12$$

или

$$4x - 5y - 6 = 0.$$

Решавањем ове једначине са једначином апсцисне осе, добивамо координате тачке: $D\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Тако је:

$$T = +\sqrt{\left(\frac{3}{2} - 4\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

и

$$S_T = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}.$$

Једначина нормале задате хиперболе у њезиној тачци $(4, 2)$ према § 71 биће очевидно:

$$y - 2 = -\frac{5}{4}(x - 4)$$

или

$$5x + 4y - 28 = 0.$$

Решавањем ове једначине са једначином апсцисне осе добивамо координате тачке $E\left(\frac{28}{5}, 0\right)$. Тако је:

$$N = +\sqrt{\left(\frac{28}{5} - 4\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{2\sqrt{41}}{5}$$

и

$$S_T = \frac{28}{5} - 4 = \frac{8}{5}.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи додирне величине хиперболе: $3x^2 - 7y^2 = 35$ из њене тачке $(7,4)$.

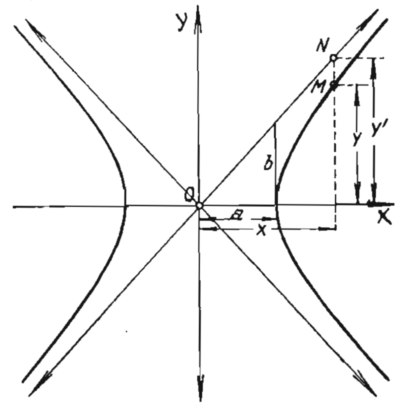
2) Наћа додирне величине хиперболе: $4x^2 - 5y^2 = 16$ из њене тачке $(-3,2)$.

3) Наћи додирне величине хиперболе: $9x^2 - 18y^2 = 28$ из њене тачке $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$.

§ 73 АСИМПТОТЕ ХИПЕРБОЛЕ.

Нека је на сл. 63 претстављена хипербола чија је једначина дата изразом:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad \ldots. \ 1).$$



Сл. 63.

Једначина сваке праве линије која пролази кроз координатни почетак претстављена је изразом:

$$y = mx \quad \ldots.. \ 2).$$

Величина m у овој једначини претставља неодређени коефицијенат правца задате праве линије.

Ако једначине 1) и 2) решимо по промењљивим величинама x и y, онда добивамо координате пресека задате праве и хиперболе.

Решавањем наведених једначина добивамо корене:

$$x_{1,2} = \frac{ab}{\pm\sqrt{b^2 - m^2 a^2}} \text{ и } y_{1,2} = \frac{mab}{\pm\sqrt{b^2 - m^2 a^2}} \quad \ldots.. \ 3).$$

Из израза 3) се долази до следећег закључка:

Ако је поткорена величина : $b^2 - m^2 a^2$ мања од нуле, онда су корени имагинарни, што значи, да права пролази ван хиперболе.

Ако је поткорена величина : $b^2 - m^2 a^2$ већа од нуле, онда су корени реалне величине и права сече хиперболу у двема коначним тачкама.

Ако је пак поткорена величина : $b^2 - m^2 a^2 = 0$, онда права и хипербола имају заједничке тачке у бесконачности. *Права* *линија која има такав положај према хиперболи назива се асимптотом хиперболе.*

Коефицијенат правца асимптоте треба одредити из једначине:

$$b^2 - m^2a^2 = 0 \; \ldots\ldots \; 4).$$

Како се решавањем једначине 4) по неодређеној величини m, добивају два корена и то: $m_1 = +\frac{b}{a}$ и $m_2 = -\frac{b}{a}$; то значи да хипербола има две асимптоте.

Кад у једначини 2) место величине m ставимо прво вредност величине m_1, а затим вредност величине m_2, тада добивамо једначине:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Изрази 5) нам претстављају једначине асимптота хиперболиних.

На сл. 63 су конструисане и асимптоте хиперболе.

Пример: Наћи једначине асимптота хиперболе:

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

Решење: Како је у задатој једначини: $b^2 = 4$ и $a^2 = 9$, то је $b = 2$ и $a = 3$. Према томе једначине асимптота ће бити:

$$y = \frac{2}{3}x$$

и

$$y = -\frac{2}{3}x.$$

ЗАДАЦИ:

1) Одредити асимптоте хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$.
2) Одредити асимптоте хиперболе: $5x^2 - 6y^2 = 30$.
3) Одредити асимптоте хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 11$.

Напомена: Величине: a и b најлакше се одређују кад се једначина хиперболе доведе на облик: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

§ 74. АСИМПТОТА КАО ГРАНИЧНИ ПОЛОЖАЈ ТАНГЕНТЕ ХИПЕРБОЛЕ.

На сл. 63 претстављена је хипербола: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и њена асимптота: $y = \frac{b}{a}x$. Узмимо у посматрање по једну тачку на асимптоти и хиперболи, које имају заједничку апсцису, па ординату тачке на асимптоти обележимо са y', а ординату тачке на хиперболи са y. Ордината задате тачке на асимптоти биће претстављена изразом:

$$y' = \frac{b}{a}x \ldots\ldots 1).$$

Ордината пак посматране тачке на хиперболи биће претстављена изразом:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

или

$$y = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} \ldots\ldots 2).$$

Ако једначину 1) поделимо са једначином 2) онда добивамо следећу размеру ордината:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}} \ldots\ldots 3).$$

Размера 3) важи за ординате свих тачака на асимптоти и хиперболи, које имају заједничку апсцису. Ако у једначини 3) ставимо да је: $x = \infty$, онда добивамо следећу једначину:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\infty}\right)^2}}$$

одакле је

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1}$$

или

$$y' = y \ldots\ldots 4).$$

Из једначине 4) излази, да су ординате тачке на асимптоти и тачке на хиперболи, међу собом једнаке, ако им је заједничка апсциса бесконачно велика. *То пак значи да се те две тачке поклапају и да асимптота није ништа друго до тангента хиперболе у једној бескрајно удаљеној тачци.*

§ 75. КОЊУГОВАНЕ ХИПЕБОЛЕ.

Хипербола чија је главна оса $2b$ и поклапа се са ординатном осом, споредна оса $2a$ и поклапа се са апсцисном осом, а чији се центар налази у координатном почетку, биће претстављена једначином:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

или

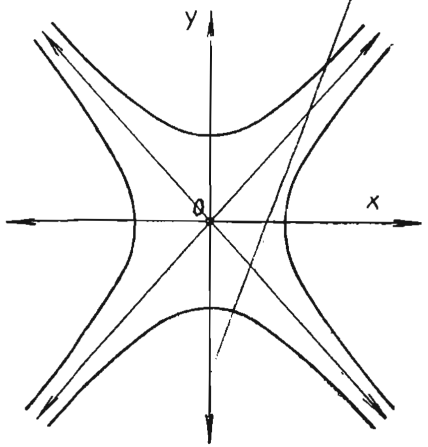
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \ldots 1).$$

Хиперболе, код којих је главна оса једне једнака споредној оси друге, и споредна оса прве једнака главној оси друге, називају се *коњугованим хиперболама*.

На сл. 64 претстављен је један пар коњугованих хипербола.

Асимптоте хиперболе: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ претстављене су изразом:

$$x=\pm\frac{a}{b}y$$



Сл. 64

одакле је

$$y=\pm\frac{b}{a}x \ldots . . 2).$$

Из једначине 2) се види, да коњуговане хиперболе имају заједничке асимптоте.

Пример: Једначина хиперболе је: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

Решење: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

или $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$.

ЗАДАЦИ:

1) Једначина хиперболе је: $4x^2-9y^2=36$, наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

2) Хипербола чија је главна оса: $2a=8$, пролази кроз тачку (5,—2), наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

3) Хипербола пролази кроз тачке (3,1) и (5,—3); наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

§ 76. ТАНГЕНТА ХИПЕРБОЛЕ. ПОВУЧЕНА ИЗ ЈЕДНЕ ТАЧКЕ ВАН ХИПЕРБОЛЕ

Да би права: $y=mx+n$ била тангента хиперболе: $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ потребно је и довољно према § 69 да буде задовољен следећи услов:

$$n^2=a^2m^2-b^2 \ldots . . 1).$$

Ако права: $y=mx+n$ пролази крз тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази ван хиперболе, онда координате ове тачке морају задовољавати једначину задате праве т.ј. мора бити испуњен услов:

$$y_0=mx_0+n \ldots . . 2).$$

Једначине 1) и 2) су две једначине са две непознате величине m и n. Пошто је прва од наведених једначина квадратна, а друга линеарна, то се њиховим решавањем морају добити два пара корена од којих ћемо један обележити са (m_1, n_1) а други са (m_2, n_2).

Кад једначину 2) решимо по величини n, тада добивамо да је:

$$n=y_0-mx_0 \ldots . . 3).$$

Ако у једначини 1) место величине n ставимо њену вредност из једначине 3), онда добивамо следећу квадратну једначину по непознатој величини m:

$$(x_0^2-a^2)m^2-2x_0y_0m+(b^2+y_0^2)=0 \ldots . . 4).$$

Корени ове једначине су:

$$m_{1,2}=\frac{x_0y_0\pm\sqrt{a^2b^2-b^2x_0^2+a^2y^2}}{x_0^2-a^2}$$

Пошто је дискриминанта овога израза према § 68. чл. 1 већа од нуле, то ће и корени m_1 и m_2 увек бити реалне и међу собом неједнаке величине. Из тога излази, да се из једне тачке ван хиперболе увек могу повући две тангенте на хиперболу.

Кад у једначини 3) место величине m ставимо прво m_1, а затим m_2, тада за величину n добивамо две реалне вредности које ћемо обележити са n_1 и n_2. Величине n_1 и n_2 могу бити међу собом различите, а могу бити и једнаке, што зависи од тога, дали је x_0 различито од нуле или је једнако нули.

Ако у једначини праве: $y = mx + n$, место величина m и n ставимо прво (m_1, n_1), а затим (m_2, n_2) онда добивамо следеће једначине:

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1 x + n_1 \\ y = m_2 x + n_2 \end{array}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Једначине 5) нам претстављају тангенте хиперболе повучене из једне тачке ван хиперболе.

Пример: Наћи тангенте хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 8$, које су повучене из тачке (4,4).

Решење: Тангента хиперболе је права линија чију једначину можемо написати у облику: $y = mx + n$. Услови: $n^2 = a^2m^2 - b^2$ и $y_0 = mx_0 + n$ у датом случају су:

$$n^2 = \frac{8}{3}m^2 - 2$$

$$4 = 4m + n.$$

Кад ове једначине решимо по непознатим величинама m и n, онда добивамо да је: $m_1 = \frac{3}{2}$; $n_1 = -2$ и $m_2 = \frac{9}{10}$; $n_2 = \frac{2}{5}$.

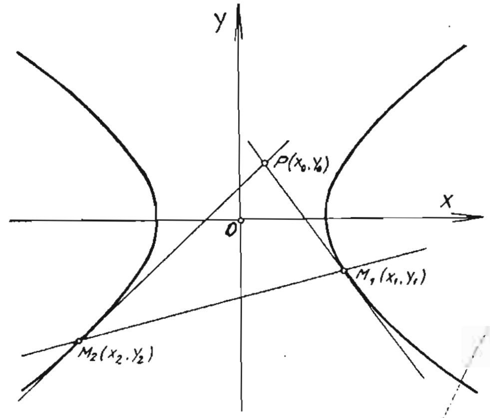
Ако у једначини праве: $y = mx + n$, место величина m и n ставимо прво вредности величина m_1 и n_1, а затим вредности величина m_2 и n_2, онда добивамо једначине: $3x - 2y - 4 = 0$ и $9x - 10y + 4 = 0$. Ове нам једначине претстављају тражене тангенте.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити тангенте хиперболе: $2x^2 - 3y^2 = 6$ из тачке (4,3).
2) Одредити тангенте хиперболе: $3x^2 - 5y^2 = 30$ из тачке (1,—1).
3) Одредити тангенте хиперболе: $4x^2 - 7y^2 = 84$ из тачке (1,—2).

* § 77. ПОЛАРА ХИПЕРБОЛЕ,

1. чл. Нека нам је на слици 65 претстављена хипербола $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и тачке $P(x_0, y_0)$ која се налази ван хиперболе.



Сл. 65.

Тангента хиперболе повучена из задате тачке додирује хиперболу у некој тачки $M_1(x_1, y_1)$. Једначина те тангенте је дата изразом: $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$.

Како добивена права пролази кроз тачку $P(x_0, y_0)$, то координате ове тачке морају задовољавати једначину посматране праве, те имамо:

$$b^2x_0x_1 - a^2y_0y_1 = a^2b^2 \ \ldots\ldots 1).$$

У овој једначини фигуришу непознате величине x_1 и y_1, које треба израчунати. Њих можемо одредити само у том случају ако нађемо још једну једначину у којој оне фигуришу,

Пошто се тачка $M_1(x_1, y_1)$ налази и на хиперболи, то њене координате морају задовољавати једначину хиперболе те тако добивамо једначину:

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \ \ldots\ldots 2).$$

Ако решимо једначине 1) и 2) по непознатим величинама x_1 и y_1 онда добивамо координате тачке додира. Међутим како је једна од ових једначина линеарна а друга квадратна, то се њиховим решавањем добивају по два пара корена, што значи да се из једне тачке ван хиперболе могу повући две тангенте на хиперболу.

Први пар добивених корена обележићемо једноставно са (x_1, y_1), а други са (x_2, y_2). Тачку чије су координате (x_1, y_1) обележили смо са M_1, а тачку чије су координате (x_2, y_2) обележићемо са M_2. Дакле тачке: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2\ y_2)$ су тачке додира хиперболе и оних њених тангената које пролазе кроз задату тачку $P(x_0, y_0)$.

Решавањем једначина 1) и 2) добивамо следеће корене:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a^2b^2x_0 + a^2y_0\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2}}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2};\quad y_1 = \dfrac{a^2b^2y_0 + b^2x_0\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2}}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ x_2 = \dfrac{a^2b^2x_0 - a^2y_0\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2}}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2};\quad y_2 = \dfrac{a^2b^2y_0 - b^2x_0\sqrt{a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2}}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \end{array}\right\} \ldots 3).$$

Једначина праве линије која пролази кроз тачке: $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ дата је изразом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Кад у овој једначини место величина: x_1, y_1, x_2 и y_2 ставимо њихове вредности из израза 3) тада, после обичних рачунских операција добивамо следећу једначину:

$$b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots \; 4).$$

Права линија која је йрейсшављена једначином 4) назива се йоларом хиерболе, а шачка $P(x_0,y_0)$ зове се йолом ше йоларе.

Дакле полара је она права линија која везује тачке додира хиперболе и њених двеју тангената које пролазе кроз пол те поларе.

На тај смо начин проблем одређивања тангенте хиперболе повучене из једне тачке ван хиперболе свели на проблем одређивања тангенте хиперболе повучене из једне тачке на хиперболи. Прво се решавањем једначина поларе и хиперболе израчунају координате тачака додира оних двеју тангената које пролазе кроз задату тачку ван хиперболе. Затим се тако добивене координате ставе у образац за одређивање једначине тангенте повучене из једне тачке на хиперболи и тада се добију тражене тангенте.

Пример: Наћи једначине тангената хиперболе: $3x^2—4y^2=8$ повучених из тачке (4,4).

Решење: Једначина поларе дате хиперболе чије се пол налази у тачки (4,4) је: $3x.4 - 4y.4 = 8$ или $3x - 4y = 2$. Решавањем ове једначине са једначином задате хиперболе добивамо следеће корене:

$$x_1 = 2; \quad y_1 = 1$$
$$x_2 = -6; \quad y_2 = -5.$$

Сменом ових парова корена понаособ у једначини тангенте задате хиперболе добивамо следеће једначине: $3x - 2y - 4=0$ и $9x - 10y + 4 = 0$. Ове нам једначине претстављају тражене тангенте.

Овај смо пример решили и у § 76 по другој методи и дошли смо до истог резултата.

Напомена: Решити задатке из § 76 по овоме начину решавања.

2. чл. Дискусија хийерболине йоларе

1) Ако се тачка $P(x_0,y_0)$ налази ван хиперболе, онда су оба пара корена у изразима 3) реална и међу собом неједнака, јер је дискриминанта $a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2$ према § 68 увек већа од нуле. У томе случају полара сече хиперболу у двема тачкама, што значи, да се из једне тачке ван хиперболе увек могу повући две тангенте на хиперболу.

2) Ако се тачка $P(x_0, y_0)$ налази на хиперболи, онда су оба пара корена у изразима 3) реална и међу собом једнака, јер је према § 68 дискриминанта $a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2$ једнака нули. У томе се случају обе тачке додира тангената $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ поклапају са тачком $P(x_0, y_0)$, што значи, да се из једне тачке на хиперболи може повући само једна тангента на хиперболу. Та тангента се поклапа са поларом хиперболе чији се пол налази у посматраној тачци на хиперболи.

3) Ако се тачка $P(x_0, y_0)$ налази у хиперболи, онда су оба пара корена у изразима 3) имагинарна, јер је према § 68 дискриминанта $a^2b^2 - b^2x^2 + a^2y_0^2$ мања од нуле. У томе случају полара не сече хиперболу ни у једној реалној тачци, што значи, да се налази негде ван хиперболе. Из тога излази, да се из једне тачке у хиперболи не може повући ни једна тангента на хиперболу.

Из свега овога долазимо до закључка, да се свака тачка у равни хиперболе може сматрати као пол неке поларе хиперболине. Тако исто се можемо уверити аналогим поступком као код круга, да је свака права линија у равни хиперболе истовремено и полара хиперболе.

Пример: Права: $5x - 4y - 10 = 0$ је полара хиперболе: $5x^2 - 6y^2 = 30$, одредити пол те поларе.

Решење: Једначина поларе задате хиперболе је:

$$5x.x_0 - 6y.y_0 = 30.$$

Једначина задате праве се може написати и на следећи начин:

$$5x - 4y = 10$$

или

$$15y - 12y = 30$$

одакле је:

$$5x.3 - 6y.2 = 30.$$

Из ове се једначине види да је: $x_0 = 3$, а $y_0 = 2$ т.ј. тачка P (3,2) је тражени пол.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенте хиперболе: $3x^2 - 2y^2 = 30$ из тачке $(1,-3)$.
2) „ „ „ : $x^2 - y^2 = 5$ „ „ $(2,\frac{1}{2})$.
3) „ „ „ : $5x^2 - 2y^2 = 30$ „ „ $(1,2)$.

* § 78. ПОЛОЖАЈИ ХИПЕРБОЛИНИХ ТАНГЕНАТА ПОВУЧЕНИХ ИЗ ТАЧАКА ВАН ХИПЕРБОЛЕ.

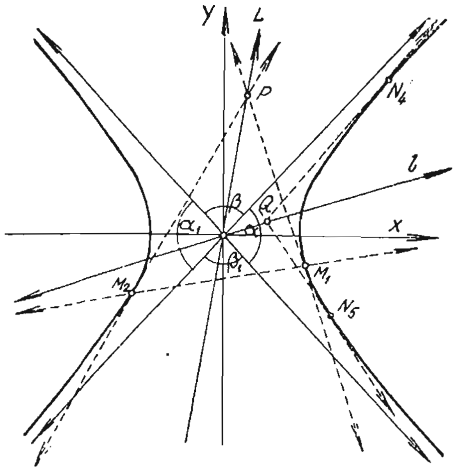
Ако узмемо у посматрање једну тачку ван хиперболе, изгледа на први поглед, да се из ње могу повући четири тангенте на хиперболу и то две на једну, а две на другу грану хиперболину. Међутим видели смо у § 76 и § 77, да се из једне тачке ван хиперболе могу повући само две тангенте на хиперболу.

Потребно је одредити тачке у равни хиперболе из којих се могу повлачити тангенте на једну грану хиперболину; затим тачке из којих се могу повлачити тангенте на другу грану хиперболину; и напослетку тачке из којих се једна тангента може повући на једну, а друга на другу грану хиперболину. То ћемо одредити на следећи начин:

1 чл. Нека је на сл. 66 претстављена хипербола:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Обележимо углове између асимптота те хиперболе са α, β, α_1 и β_1. Узмимо затим у посматрање једну тачку $P(x_0, y_0)$ која се налази ван хиперболе. Једначина хиперболине поларе чији се пол налази у задатој тачци биће очевидно:



Сл. 66.

$$b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2.$$

Знамо да се решавањем једначина ове поларе са једначином хиперболе добивају координате додирних тачака хиперболе и оних двеју њених тангената које

пролазе кроз посматрану тачку $P(x_0, y_0)$. Ако једначину ове поларе решимо по y-ну, па тако добивену вредност y-на сменимо у једначини хиперболе, после обичних рачунских операција, добићемо следећу квадратну једначину по x-су:

$$(a^2y_0^2 - b^2x_0^2)\,x^2 + 2a^2b^2x_0x - (a^4b^2 + a^2) = 0 \;.\;.\;.\;.\; 1).$$

Пре него пређемо на испитивање корена ове квадратне једначине, треба да одредимо знак коефицијента уз x^2.

Претпоставимо прво да се тачка $P(x_0, y_0)$ налази негде на правој L која пролази кроз координатни почетак и сече углове β и β_1 на приложеној слици.

Како је коефицијенат правца праве L већи од коефицијента правца асимптоте: $y = \frac{a}{b}x$, то за сваку тачку на правој L важи овај однос:

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{b}{a}$$

па тако исто и

$$\frac{y_0^2}{x_0^2} > \frac{b^2}{a^2}$$

одакле је

$$a^2y_0^2 > b^2x_0^2$$

или

$$a^2y_0^2 - b^2x_0^2 > 0 \;.\;.\;.\;.\; 2).$$

До овога бисмо односа дошли, да смо узели у посматрање ма коју тачку на ма којој правој која пролази кроз координатни почетак и углове β и β_1.

Из израза 2) се види да је коефицијенат: $a^2y_0^2 - b^2x_0^2$ позитивна величина, па ако њиме поделимо једначину 1), онда добивамо:

$$x^2 + \frac{2a^2b^2x_0}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2}\,x - \frac{(a^4b^2 + a^2)}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2} = 0 \;.\;.\;.\;.\; 3).$$

Ова једначина има два корена по x-су и ако их обележимо са x_1 и x_2, онда можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= -\frac{(a^4b^2 + a^2)}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2} \\ \text{и} \quad & \\ x_1 + x_2 &= -\frac{2a^2b^2x_0}{a^2y_0^2 - b^2x_0^2} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; 4).$$

Посматрајући прву од једначина 4), уочавамо да јој је десна страна негативна, па према томе мора бити негативна и њена лева страна, а то значи да корени x_1 и x_2 имају различите знаке. Из тога излази, да полара хиперболе чији је пол у тачци $P(x_0,y_0)$ сече обе гране хиперболине у тачкама чије су апсцисе x_1 и x_2. Одавде пак следује закључак, да се из тачке $P(x_0,y_0)$ могу повући две тангенте хиперболе од којих једна додирује једну, а друга другу грану хиперболину.

Из свега овога долази се до општег закључка, по коме се из сваке тачке равни, која се налази између кракова углова β и β_1, могу повући по две тангенте, од којих једна додирује једну а друга другу грану хиперболину.

2 чл. Узмимо сада у посматрање још једну тачку ван хиперболе. Нека се та тачка налази на правој l која пролази кроз координати почетак и сече углове α и α_1 на сл. 66. Ако ту тачку обележимо са $Q(x_3,y_3)$, онда ће једначина поларе хиперболине чији се пол налази у задатај тачци очевидно бити:

$$b^2 xx_3 - a^2 yy_3 = a^2 b^2.$$

Знамо, да се решавањем ове једначине са једначином хиперболе: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, добивају координате додирних тачака хиперболе и оних двеју њених тангената које пролазе кроз тачку $Q(x_3, y_3)$. Ако једначину ове поларе решимо по y-ну и тако добивену вредност y-на сменимо у једначини хиперболе, онда ћемо добити следећу квадратну јединицу по x-су:

$$x^2 (a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2) + 2\, a^2 b^2 x_3 x - (a^4 b^2 + a^2) = 0 \;\ldots\ldots\; 5).$$

Пре него пређемо на испитивање корена ове квадратне једначине, одредићемо знак коефицијента уз x^2.

Како је коефицијенат правца праве l мањи од коефицијента правца асимптоте $y = \dfrac{b}{a} x$, то за сваку тачку на овој правој важи следећи однос:

$$\frac{y_3}{x_3} < \frac{a}{b}$$

па тако исто и

$$\frac{y_3^2}{x_3^2} < \frac{b^2}{a^2}$$

одакле је

$$a^2 y_3^2 < b^2 x_3^2$$

или

$$a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2 < 0 \;\ldots\ldots\; 6).$$

До овога бисмо односа дошли да смо узели у посматрање ма коју тачку на ма којој правој која полази кроз координатни почетак и кроз углове α и α_1. За наше испитивање могу ући у обзир само оне тачке на поменутим правима које се налазе ван хиперболе, јер се према § 77 из тачака у хиперболи не могу повући тангенте на хиперболу.

Израз 6) нам показује, да је коефицијенат $a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2$ негативан.

Ако квадратну једначиину 5) помножимо са минус један, онда ћемо добити:

$$-x^2 (a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2) - 2\, a^2 b^2 x_3 x + (a^4 b^2 + a^2) = 0$$

или

$$x^2 (b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2) - 2\, a^2 b^2 x_3 x + (a^4 b^2 + a^2) = 0 \;\ldots .\; 7).$$

Ова једначина с обзиром на израз 6) има коефицијенат уз x^2 позитиван, па ако њиме поделимо целу једначину, онда добивамо:

$$x^2 - \frac{2\, a^2 b^2 x_3}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2}\, x + \frac{a^4 b^2 + a^2}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} = 0 \;\ldots\ldots\; 3).$$

Једначина 8) има два корена по x-су и ако их обележимо са x_4 и x_5, онда можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} x_4 . x_5 &= \frac{a^4 b^2 + a^2}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} \\ x_4 + x_5 &= \frac{2 a^2 b^2 x_3}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; 9).$$

Посматрањем прве од једначина 9) уочавамо да јој је десна страна позитивна, па према томе мора бити позитивна и њена лева страна. Лева ће јој пак страна бити позитивна само у томе случају ако су јој оба чинитеља истога знака, што значи да оба корена квадратне једначине 8) морају бити истога знака. Из друге од једначина 9) одредићемо, да ли ће корени x_4 и x_5 бити позитивни или негативни. Знак десне стране ове једначине зависи једино од знака њеног чинитеља x_3, а пошто и лева страна посматране једначине мора имати знак као и десна, то значи, да знак корена x_4 и x_5 такође зависи од знака величине x_3. Ако је x_3 позитивно, онда ће и корени x_4 и x_5 бити позитивни, а ако је x_3 негативно, онда ће и корени x_4 и x_5 бити негативни.

и њена лева страна, а то значи да корени x_1 и x_2 имају различите знаке. Из тога излази, да полара хиперболе чији је пол у тачци $P(x_0,y_0)$ сече обе гране хиперболине у тачкама чије су апсцисе x_1 и x_2. Одавде пак следује закључак, да се из тачке $P(x_0,y_0)$ могу повући две тангенте хиперболе од којих једна додирује једну, а друга другу грану хиперболину.

Из свега овога долази се до општег закључка, по коме се из сваке тачке равни, која се налази између кракова углова β и β_1, могу повући по две тангенте, од којих једна додирује једну а друга другу грану хиперболину.

2 чл. Узмимо сада у посматрање још једну тачку ван хиперболе. Нека се та тачка налази на правој l која пролази кроз координати почетак и сече углове α и α_1 на сл. 66. Ако ту тачку обележимо са $Q(x_3,y_3)$, онда ће једначина поларе хиперболине чији се пол налази у задатај тачци очевидно бити:

$$b^2 x x_3 - a^2 y y_3 = a^2 b^2.$$

Знамо, да се решавањем ове једначине са једначином хиперболе: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, добивају координате додирних тачака хиперболе и оних двеју њених тангената које пролазе кроз тачку $Q(x_3,y_3)$. Ако једначину ове поларе решимо по y-ну и тако добивену вредност y-на сменимо у једначини хиперболе, онда ћемо добити следећу квадратну јединицу по x-су:

$$x^2 (a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2) + 2 a^2 b^2 x_3 x - (a^4 b^2 + a^2) = 0 \;\ldots\ldots\; 5).$$

Пре него пређемо на испитивање корена ове квадратне једначине, одредићемо знак коефицијента уз x^2.

Како је коефицијенат правца праве l мањи од којефицијента правца асимптоте $y = \frac{b}{a} x$, то за сваку тачку на овој правој важи следећи однос:

$$\frac{y_3}{x_3} < \frac{a}{b}$$

па тако исто и

$$\frac{y_3^2}{x_3^2} < \frac{b^2}{a^2}$$

одакле је

$$a^2 y_3^2 < b^2 x_3^2$$

или

$$a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2 < 0 \;\ldots\ldots\; 6).$$

До овога бисмо односа дошли да смо узели у посматрање ма коју тачку на ма којој правој која полази кроз координатни почетак и кроз углове α и α_1. За наше испитивање могу ући у обзир само оне тачке на поменутим правима које се налазе ван хиперболе, јер се према § 77 из тачака у хиперболи не могу повући тангенте на хиперболу.

Израз 6) нам показује, да је којефицијенат $a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2$ негативан.

Ако квадратну једначиину 5) помножимо са минус један, онда ћемо добити:

$$-x^2 (a^2 y_3^2 - b^2 x_3^2) - 2 a^2 b^2 x_3 x + (a^4 b^2 + a^2) = 0$$

или

$$x^2 (b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2) - 2 a^2 b^2 x_3 x + (a^4 b^2 + a^2) = 0 \;\ldots\;\; 7).$$

Ова једначина с обзиром на израз 6) има коефицијенат уз x^2 позитиван, па ако њиме поделимо целу једначину, онда добивамо:

$$x^2 - \frac{2 a^2 b^2 x_3}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2}\, x + \frac{a^4 b^2 + a^2}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} = 0 \;\ldots\ldots\; 8).$$

Једначина 8) има два корена по x-су и ако их обележимо са x_4 и x_5, онда можемо написати:

$$\left.\begin{aligned} x_4 . x_5 &= \frac{a^4 b^2 + a^2}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} \\ x_4 + x_5 &= \frac{2 a^2 b^2 x_3}{b^2 x_3^2 - a^2 y_3^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 9).$$

Посматрањем прве од једначина 9) уочавамо да јој је десна страна позитивна, па према томе мора бити позитивна и њена лева страна. Лева ће јој пак страна бити позитивна само у томе случају ако су јој оба чинитеља истога знака, што значи да оба корена квадратне једначине 8) морају бити истога знака. Из друге од једначина 9) одредићемо, да ли ће корени x_4 и x_5 бити позитивни или негативни. Знак десне стране ове једначине зависи једино од знака њеног чинитеља x_3, а пошто и лева страна посматране једначине мора имати знак као и десна, то значи, да знак корена x_4 и x_5 такође зависи од знака величине x_3. Ако је x_3 позитивно, онда ће и корени x_4 и x_5 бити позитивни, а ако је x_3 негативно, онда ће и корени x_4 и x_5 бити негативни.

Како је у посматраном случају x_8 позитивно, то значи да полара тачке Q(x_8,y_8) сече ону грану хиперболе чије све тачке имају позитивне апсцисе. То даље значи, да се из тачке Q(x_8,y_8) могу повући две тангенте на ону грану хиперболе која се простире у смислу позитивне гране апсцисне осе.

Да смо узели у посматрање на правој l неку тачку ван хиперболе која има негативну апсцису, видели бисмо, да се из ње могу повући тангенте на ону грану хиперболе која се простире у смислу негативне гране апсцисне осовине.

*Из свега овога следује закључак, да се из сваке тачке ван **хиперболе** која се налази између кракова угла α могу повући по две тангенте на ону грану **хиперболе** која се налази у томе углу, и из сваке тачке ван **хиперболе** која се налази између кракова **угла** α_1, могу се повући по две тангенте на ону грану **хиперболе** која се налази у томе углу.*

3, чл. Нека је на сл. 67 претстављена хипербола:

$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и њена асимптота $y = \frac{b}{a}x$.

Ако на тој асимптоти узмемо у посматрање неку тачку $M_0(x_0,y_0)$ односно $M_0(x_0, \frac{b}{a}x_0)$; онда ће хиперболина полара, чији је пол у наведеној тачци, бити претстављена једначином:

$$b^2xx_0 - a^2y\frac{b}{a}x_0 = a^2b^2$$

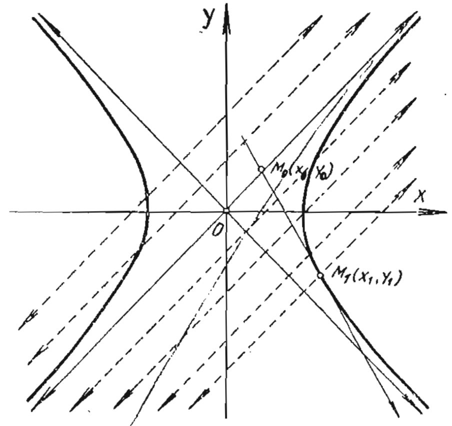
одакле је:

$$y = \frac{b}{a}x - \frac{ab}{x_0} \quad \ldots\ldots \ 10).$$

Коефицијенат правца ове поларе једнак је са коефицијентом правца асимптоте $y = \frac{b}{a}x$, што значи, да су међу собом паралелне. Из овога излази, да су све поларе хиперболине, чији се полови налазе на асимптоти $y = \frac{b}{a}x$; паралелне са том асимптотом па дакле паралелне и међу собом.

Ако у једначини хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ место величине y ставимо њену вредност из поларе (10) онда добивамо једну једначину по величини x-су. Решавањем те једначине добивамо само један корен и то:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + a^2}{2x_0} \quad \ldots\ldots \ 11).$$



Сл. 67.

Из тога излази, да полара хиперболе чији се пол налази на асимптоти, сече хиперболу само у једној коначној тачци; што значи, да се из једне тачке на асимптоти може повући само једна тангента на хиперболу у коначној даљини. Друга тангента која се из те тачке може повући на хиперболу јесте сама асимптота.

Из израза 11) се види, да знак корена x_1 зависи једино од знака величине x_0. Ако је x_0 позитивно, онда и x_1 мора бити позитивно, а ако је x_0 негативно, онда и x_1 мора бити негативно.

Из овога излази закључак према коме се из тачака асимптоте које имају позитивне апсцисе могу повлачити тангенте само на ону грану хиперболе која се простире у позитивном правцу апсцисне осовине и из тачака исте асимптоте које имају негативне апсцисе, могу се повлачити тангенте само на ону грану хиперболе, која се простире у негативном правцу апсцисне осовине.

На исти начин бисмо дошли до апсолутно истог закључка да смо узели у посматрање ма коју тачку и на хиперболиној асимптоти $y = -\frac{b}{a}x$.

Из свега овога следује закључак према коме се, *из свих тачака које се налазе на крацима онога угла који чине асимптоте хиперболине, могу повући тангенте на ону грану хиперболе која се налази у томе углу.*

Кад се овоме закључку додају закључци изведени у чл. 1 и чл. 2. онда се добива крајњи генерални закључак који гласи:

Из свих тачака ван хиперболе које се налазе између кракова и на крацима онога угла што га чине асимптоте хиперболине, могу се повући тангенте само на ону грану хиперболе која лежи у томе углу. Сем тога, из сваке тачке ван хиперболе која се налази између кракова оних углова што их захватају асимптоте хиперболине, а у којима не лежи ни једна грана хиперболина, могу се повући по две тангенте од којих једна додирује једну а друга другу грану хиперболину.

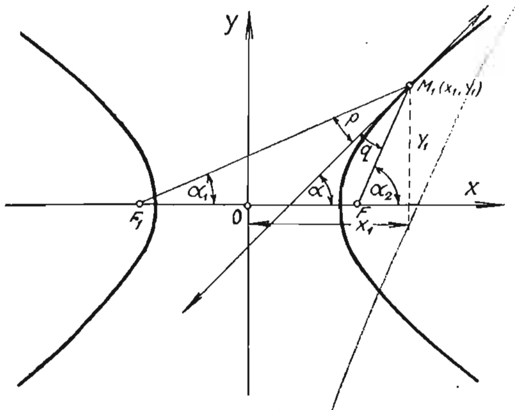
* § 79. КОНСТРУКЦИЈА ТАНГЕНАТА ХИПЕРБОЛЕ.

Чл. 1. Нека је на сл. 68. претстављена хипербола:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

и њена тангента: $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$, која додирује хиперболу у тачци $M_1(x_1, y_1)$.

Ако обележимо са α угао који заклапа тангента са позитивним смислом апсисне осе, са α_1 угао који заклапа потег F_1M_1 са позитивним смислом апцисне осе и са α_2 угао који заклапа потег FM_1 са позитивним смислом апсцисне осе, онда је:



Сл. 68.

$$\left.\begin{aligned} tg\alpha &= \frac{b^2x_1}{a^2y_1} \\ tg\alpha_1 &= \frac{y_1}{x_1+c} \\ tg\alpha_2 &= \frac{y_1}{x_1-c} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Обележимо још са p угао између тангенте и потега F_1M_1, па ће бити:

$$p = \alpha - \alpha_1$$

одакле је

$$tgp = \frac{tg\alpha - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha tg\alpha_1}$$

или с обзиром на изразе 1):

$$tgp = \frac{\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1} - \dfrac{y_1}{x_1+c}}{1 + \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1} \cdot \dfrac{y_1}{x_1+c}} = \frac{b^2cx_1 + b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{a^2cy_1 + a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1}.$$

Како је: $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ и $c^2 = a^2 + b^2$, то је:

$$tgp = \frac{b^2cx_1 + a^2b^2}{c^2x_1y_1 + a^2cy_1} = \frac{b^2(cx_1 + a^2)}{cy_1(cx_1 + a^2)}$$

или

$$tgp = \frac{b^2}{cy_1} \ldots\ldots 2).$$

Ако обележимо са q угао између тангенте и потега FM_1 онда је;

$$q = \alpha_2 - \alpha$$

одакле је

$$tgq = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha}$$

или с обзиром на изразе 1)

$$tgq = \frac{\dfrac{y_1}{x_1-c} - \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}}{1 + \dfrac{y_1}{x_1-c} \cdot \dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}} = \frac{a^2y_1^2 - b^2x_1^2 + b^2cx_1}{a^2x_1y_1 - a^2cy_1 + b^2x_1y_1}$$

Пошто је: $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ и $c^2 = a^2 + b^2$, то је:

$$tgq = \frac{b^2cx_1 - a^2b^2}{c^2x_1y_1 - a^2cy_1} = \frac{b^2(cx_1 - a^2)}{cy_1(cx_1 - a^2)}$$

или

$$tgq = \frac{b^2}{cy_1} \ldots\ldots 3).$$

Десне стране једначина 2) и 3) су међу собом једнаке, па морају бити једнаке и њихове леве стране, те тако имамо:

$$tgp = tgq \ldots\ldots 4).$$

Познато нам је из тригонометрије следеће правило:

Ако су тангенси углова мањих од 180° међу собом једнаки, онда и ти углови морају бити једнаки.

Како су углови p и q мањи од 180°, то према наведеном правилу мора бити:

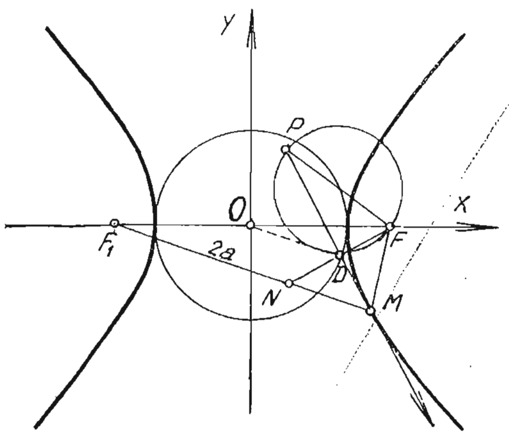
$$p = q \ldots\ldots 5).$$

Из овога излази правило према коме тангента повучена из једне тачке на хиперболи заклапа једнаке углове са потезима те тачке.

На основу овога правила излази следеће практично упуство за конструкцију тангенте хиперболе у једној тачци на хиперболи.

Прво треба повући потеге задате тачке на хиперболи, па затим конструисати симетралу угла који захватају ти потези. Та симетрала ће бити истовремено тражена тангента хиперболе.

Чл. 2. На сл. 69 претстављена је хипербола и њена тангента која пролази кроз тачку P ван хиперболе. Нека та тангента додирује хиперболу у тачци M.



Сл. 69

Ако потег F_1M скратимо од тачке M за дуж MN, која је једнака другом потегу и повучемо дуж FN, онда добивамо равнокраки троугао FMN. Пошто је у овоме троуглу задата тангента симетрала угла при врху код тачке M, то она мора бити и симетрала основице FN. Обележимо са D ону тачку у којој тангента сече дуж FN и повуцимо дуж OD.

Како дуж OD везује средине двеју страна троугла F_1FN, то она мора бити једнака половини треће стране тога троугла т.ј. мора бити:

$$OD = \frac{F_1 N}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Дакле тачка D се налази на кругу који је описан око центра хиперболе са полупречником једнаким половини главне осе хиперболине.

С друге стране у правоуглом троуглу PDF тачка D се налази на темену правога угла, што значи да она мора лежати на периферији круга који је описан око хипотенузе тога троугла као пречника т.ј. око дужи PF. Пошто тачка D

лежи и на једном и на другом од наведених кругова, то се она мора налазити у њиховом пресеку. Како се сем тачке D поменути кругови секу још у једној тачци, то се на исти начин може доказати, да та тачка лежи на другој тангенти хиперболе која се може повући из тачке P.

Из свега овога излази следеће практично упуство за конструкцију тангенте хиперболе из једне тачке ван хиперболе.

Прво треба описати круг око центра хиперболе са полупречником једнаким половини главне осе хиперболине. Затим треба повући дуж од задате тачке ван хиперболе до једне жиже и око те дужи као пречника описати круг. У пресеку та два круга добићемо две тачке. Кад кроз једну од тих тачака и кроз задату тачку ван хиперболе повучемо праву линију, она ће нам претстављати тангенту хиперболе. Ако пак кроз другу од пресечених тачака поменутих кругова и кроз задату тачку ван хиперболе повучемо праву линију, онда добивамо другу тангенту хиперболе.

* § 80. ПОЛАРЕ ХИПЕРБОЛЕ ЧИЈИ СЕ ПОЛОВИ НАЛАЗЕ НА ЈЕДНОЈ ПРАВОЈ ЛИНИЈИ.

Узмимо за полове хиперболиних полара неколико тачака на правој:

$$y = mx + n \quad \ldots\ldots \quad 1).$$

Нека су те тачке: $M_0(x_0, y_0)$; $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$ и т. д. односно: $M_0(x_0, mx_0 + n)$; $M_1(x_1, mx_1 + n)$; $M_2(x_2, mx_2 + n)$ и т. д.... Поларе хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, чији се полови налазе у задатим тачкама биће претстављене једначинама:

$$\left.\begin{array}{lll}
b^2xx_0 - a^2y(mx_0+n) = a^2b^2 & \text{или} & y = \dfrac{b^2x_0x}{a^2(mx_0+n)} - \dfrac{b^2}{mx_0+n} \\
b^2xx_1 - a^2y(mx_1+n) = a^2b^2 & \text{„} & y = \dfrac{b^2x_1x}{a^2(mx_1+n)} - \dfrac{b^2}{mx_1+n} \\
b^2xx_2 - a_2y(mx_2+n) = a^2b^2 & \text{„} & y = \dfrac{b^2x_2x}{a^2(mx_2+n)} - \dfrac{b^2}{mx_2+n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{„} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{„} & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \ldots 2).$$

Како коефицијенти правца правих 2) нису међу собом једнаки, то значи, да се оне секу негде у коначности. Ако ма које две од њих решимо по променљивим величинама x и y онда добивамо за координате њихова пресека следеће изразе:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a^2 m}{n} \\ y &= -\frac{b^2}{n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

У овим изразима, величине x и y не зависе од координата полова (2), него само од величина: m, n, a и b, које су у посматраном случају узете за сталне величине. То значи, да се све поларе, које су претстављене једначинама 2) секу у једној тачци чије су координате:

$$\left(-\frac{a^2 m}{n},\ -\frac{b^2}{n}\right).$$

Из свега овога излази следећи закључак према коме се све поларе хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, чији се полови налазе на једној правој линији, морају сећи у једној тачци.

Дискусија:

Ако претпоставимо, да је у једначини 1) величина n равна нули, онда права која је претстављена том једначином, пролази кроз координатни почетак. У томе случају коефицијенти правца полара (2) постају међу собом једнаки, а њихов пресек претстављен изразима 3) постаје:

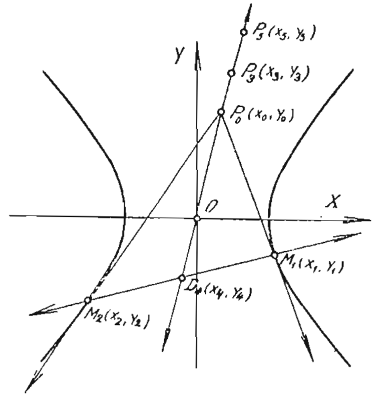
$$x = -\infty$$
$$y = -\infty.$$

Из овога излази закључак према коме су поларе хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ међу собом паралелне, ако им се полови налазе на правој линији која пролази кроз координатни почетак.

§ 81. ДИЈАМЕТРИ ХИПЕРБОЛЕ.

1 чл. Нека је на сл. 70 претстављена хипербола: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и тачка $P_0(x_0,y_0)$ која се налази ван те хиперболе. Тангенте хиперболе које су повучене из тачке $P_0(x_0,y_0)$ додирују хиперболу у тачкама $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Права линија која пролази кроз ове две тачке је полара хиперболе чији се пол налази у задатој тачци $P_0(x_0,y_0)$.

Ако обележимо са $D_4(x_4,y_4)$ средину оне тетиве која настаје пресеком поменуте поларе и хиперболе, онда ће њене координате с обзиром на изразе 3) § 77 бити:



Сл. 70

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{a^2b^2x}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \\ y_4 &= \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{a^2b^2y}{b^2x_0^2 - a^2y_0^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Права линија која пролази кроз тачке: $P_0(x_0, y_0)$ и $D_4(x_4, y_4)$ претстављена је једначином:

$$y - y_0 = \frac{y_4 - y_0}{x_4 - x_0}(x - x_0).$$

Ако у овој једначини место величина x_4 и y_4 ставимо њихове вредности из израза 1), онда после обичних рачунских операција добивамо једначину:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \ldots\ldots 2).$$

Из облика једначине 2) долазимо до закључка, да права линија, која је њоме претстављена пролази кроз координатни почетак односно кроз центар хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Одавде следује правило, према коме права линија која пролази кроз пол неке хиперболине поларе и полови ону тетиву, која настаје пресеком хиперболе и те поларе, мора пролазити и кроз центар хиперболе: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Из тога излази и обрнуто правило које гласи:

Права линија која пролази кроз центар хиперболе и кроз пол неке хиперболине поларе, мора половити ону тетиву, која је настала пресеком хиперболе и те поларе.

Ако узмемо на правој (2) извесне тачке: $P_0(x_0,y_0)$; $P_3(x_3,y_3)$; $P_5(x_5,y_5)$ и т. д. . . за полове хиперболиних полара, онда ће њихове једначине бити:

$$\left.\begin{aligned} b^2xx_0 - a^2yy_0 &= a^2b^2 \quad \text{или} \quad y = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}x - \frac{b}{y_0} \\ b^2xx_3 - a^2yy_3 &= a^2b^2 \quad\ \text{„} \quad\ \ y = \frac{b^2x_3}{a^2y_3}x - \frac{b}{y_3} \\ b^2xx_5 - a^2yy_5 &= a^2b^2 \quad\ \text{„} \quad\ \ y = \frac{b^2x_5}{a^2y_5}x - \frac{b}{y_5} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Како права (2) пролази кроз центар хиперболе и кроз полове: $P_0(x_0, y_0)$; $P_3(x_3, y_3)$; $P_5(x_5, y_5)$. . . . ., то она мора половити све паралелне тетиве које настају пресеком хиперболе и полара (3).

Права линија која пролази кроз центар хиперболе и полови извесне хиперболине паралелне тетиве, назива се дијаметром хиперболе. Према томе је и права (2) један дијаметар хиперболе.

На свакој правој линији која пролази кроз центар хиперболе можемо узети колико год хоћемо тачака за полове полара те хиперболе. Све тако добивене поларе морају бити међу собом паралелне. Тако исто морају бити међу собом паралелне и све оне тетиве које настају пресеком хиперболе и поменутих полара. Затим, посматрана права мора половити све овако добивене тетиве хиперболе, што значи да и она претставља један дијаметар хиперболе.

Из овога излази закључак према коме је свака права линија која пролази кроз центар хиперболе истовремено и дијаметар хиперболе.

Ако коефицијенат правца дијаметра (2) обележимо са m, а коефицијенат правца полара (3) са m_1, онда имамо:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{y_0}{x_0} \\ m_1 &= \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 4).$$

Кад једначине 4) међу собом помножимо и то леву страну прве са левом страном друге, а десну страну прве са десном страном друге, тада добивамо:

$$m.m_1 = \frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots 5).$$

Овај нам образац даје однос између коефицијената правца једног дијаметра хиперболе и оних паралелних хиперболиних полара, чији се полови налазе на томе дијаметру.

Исти закључак би се могао изразити и на следећи начин: образац 5) нам претставља однос између коефицијената правца једног дијаметра хиперболе и оних хиперболиних паралелних тетива које тај дијаметар полови.

Пример: Наћи једначину дијаметра хиперболе: $2x^2—3y^2=6$ који полови хиперболине тетиве паралелне са правом:

$$y = \frac{x}{6} — 2.$$

Решење: Једначина траженог дијаметра има облик: $y=mx$. У овој једначини величина m према обрасцу 5) мора бити:

$$m.\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

односно:

$$m = 4.$$

Према томе једначина траженог дијаметра је: $y = 4x$.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи коефицијенат правца оних паралелних тетива хиперболе: $3x^2 — 4y^2 = 12$ које полови дијаметар: $y = \frac{3}{8}x$.

2) Полара хиперболе: $4x^2 — 5y^2 = 20$ је права: $8x — 15y — 30 = 0$, наћи онај дијаметар хиперболе на коме се налази пол задате поларе.

3) Наћи полару хиперболе: $5x^2 — 6y^2 = 30$, која пролази кроз тачку (3,2); а чији се пол налази на правој $10x — 9y = 0$.

2 чл Коњуговани дијаметри хиперболе.

Једна од полара (3) мора пролазити и кроз центар хиперболе, те ће њена једначина бити:

$$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x \ldots\ldots 6).$$

Како ова права пролази и кроз центар хиперболе, то нам она истовремено претставља и један дијаметар хиперболе.

Ако обележимо са m_2 коефицијенат правца хиперболиних паралелних тетива које овај дијаметар полови, онда према обрасцу 5) имамо:

$$m_2 \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{b^2}{a^2}$$

одакле је

$$m_2 = \frac{y_0}{x_0} \ldots\ldots 7).$$

Одавде видимо, да су тетиве хиперболе које полови дијаметар (6) паралелне са дијаметром (2); а знамо да и дијаметар (2) полови тетиве које су паралелне са дијаметром (6). За овакав пар дијаметара кажемо, да су коњуговани дијаметри хиперболе. *Тако су коњуговани дијаметри хиперболе* *она два дијаметра од којих сваки полови тетиве хиперболе паралелне ономе другоме.*

Пошто апсцисна оса пролази кроз центар хиперболе, то нам и она претставља један дијаметар хиперболе. Ако обележимо са m_3 коефицијенат правца оних паралелних тетива хиперболе које полови овај дијаметар, онда имамо:

$$m_3 = \frac{b^2}{a^2 . 0} = \infty .$$

Из овога излази, да су тетиве хиперболе које полови апсисна оса, паралелне са ординатном осом.

Како и ординатна оса пролази кроз центар хиперболе, то је и она такође дијаметар хиперболе. Ако коефицијенат правца тетива које полови овај дијаметар обележимо са m_4, онда имамо:

$$m_4 = \frac{b^2}{a^2 \infty} = 0.$$

Одавде излази, да су тетиве хиперболе, које полови ординатна оса, паралелне са апсисном осом.

Тако нам апсисна и ординатна оса претстављају један пар коњугованих дијаметара хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Пример: Права: $y = \frac{4}{3}x$ је дијаметар хиперболе: $4x^2 - 9y^2 = 36$, наћи њему коњуговани дијаметар.

Решење: Једначина траженог дијаметра има облих: $y = mx$. Величина m према обрасцу 5) мора бити: $m\frac{4}{3} = \frac{4}{9}$ одакле је: $m = \frac{1}{3}$

Према томе једначина траженог дијаметра је: $y = \frac{x}{3}$.

ЗАДАЦИ:

1) Дијаметар хиперболе: $3x^2 - 5y^2 = 15$ пролази кроз тачку (5,6), наћи њему коњуговани дијаметар.

2) Један дијаметар хиперболе: $5x^2 - 8y^2 = 40$ је нормалан на правој: $6x - 5y - 12 = 0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

3) Наћи коњуговане дијаметре хиперболе: $8x^2 - 9y^2 = 72$ од којих је један паралелан са правом која пролази кроз тачке (3,1); (6,3).

§ 82. ДИРЕКТРИСА, БРОЈНИ ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ И ПАРАМЕТАР ХИПЕРБОЛЕ.

* 1 чл. Полара хиперболе чији се пол налази у жижи $F(c,0)$ претстављена је једначином:

$$b^2xc - a^2y.0 = a^2b^2$$

одакле је

$$b^2xc = a^2b^2$$

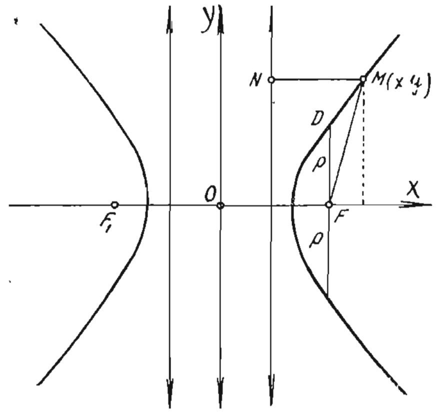
или

$$x = \frac{a^2}{c} \ldots\ldots 1).$$

Тако исто бисмо нашли, да је једначина хиперболине поларе чији се пол налази у другој жижи хиперболе дата изразом:

$$x = -\frac{a^2}{c} \ldots\ldots 2).$$

Праве линије које су претстављене једначинама 1) и 2) називају се *директрисама хиперболе*. Према томе би хипербола имала изглед као на сл. 71.



Сл. 71.

* 2 чл. Ако узмемо ма коју тачку $M(x,y)$ на хиперболи и из ње повучемо нормалу на директрису (1), онда ће та нормала сећи директрису у тачци N.

Како је потег:

$$FM = \frac{cx}{a} - a, \text{ а дуж}$$

$$MN = x - \frac{a^2}{c}, \text{ то је и раз-}$$

мера ових двеју дужи претстављена изразом:

$$\frac{FM}{MN} = \frac{\frac{cx}{a} - a}{x - \frac{a^2}{c}} = \frac{\frac{cx - a^2}{a}}{\frac{cx - a^2}{c}}$$

одакле је:

$$\frac{FM}{MN} = \frac{c}{a} \ldots\ldots 3).$$

Како је $\frac{c}{a}$ стална величина, то и размера $\frac{FM}{MN}$ мора бити такође стална величина.

Размера (3) назива се *бројним ексцентрицитетом хиперболе* и обележићемо је са e. Тако је:

$$e = \frac{FM}{MN}$$

или

$$e = \frac{c}{a} \ldots . \quad 4).$$

Пошто је у изразу 4) бројитељ разломка: $\frac{c}{a}$ већи од именитеља, то је и вредност тога разломка већа од јединице т. ј. $e > 1$.

3 чл. Тетива која пролази кроз жижу хиперболе и стоји нормално на њеној великој оси, назива се параметром хиперболе. Ако ту тетиву обележимо са $2p$, онда једна тачка на хиперболи чија је апсциса c има за ординату p. Та је тачка на приложеној слици обележена са D. Како се тачка $D(c,p)$ налази на хиперболи: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, то њене координате морају задовољавати једначину хиперболе, те имамо:

$$b^2c^2 - a^2p^2 = a^2b^2$$

или

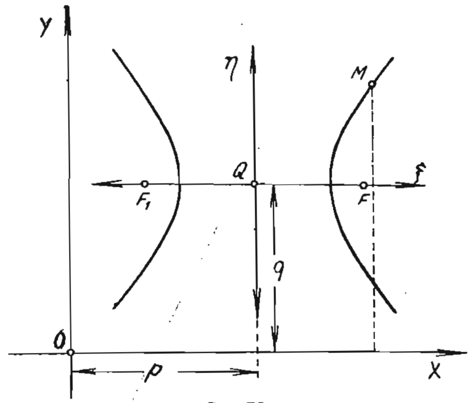
$$b^2(a^2 + b^2) - a^2p^2 = a^2b^2$$

одакле је

$$p = \frac{b^2}{a} \ldots . \quad 5).$$

* § 83. ЈЕДНАЧИНА ХИПЕРБОЛЕ ЧИЈИ ЈЕ ЦЕНТАР ВАН КООРДИНАТНОГ ПОЧЕТКА, ГЛАВНА ОСА ПАРАЛЕЛНА СА АПСЦИСНОМ, А СПОРЕДНА ОСА ПАРАЛЕЛНА СА ОРДИНАТНОМ ОСОМ ПРАВОУГЛОГ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА *ХОУ*.

На сл. 72 претстављен је правоугли координат систем *ХОУ* и у њему једна хипербола чији се центар налази у тачци $Q(p,q)$. Нека је главна оса ове хиперболе паралелна са апсцисном осом правоуглог координатног система *ХОУ*, а њена споредна оса паралелна са ординатном осом тога система. Поставимо затим у раван хиперболе један помоћни правоугли координатни систем тако да му почетак буде у тачци Q. Апсцисна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са апсцисном осом система *ХОУ*. Ординатна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са ординатном осом система *ХОУ*. Тада ће се апсцисна оса новога координатног система поклапати са главном осом хиперболе, а ординатна оса са споредном осом хиперболе. Тај смо координатни систем на приложеној слици обележили са $\xi Q \eta$.



Сл. 72

У томе ће систему задата хипербола бити претстављена једначином:

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2 \ldots . . \quad 1).$$

Узмимо у посматрање ма коју тачку M на задатој хиперболи и обележимо са (x,y) њене координате у систему *ХОУ*, а са (ξ,η) њене координате у систему $\xi Q \eta$. Однос између ових координата биће претстављен следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - p \\ \eta &= y - q \end{aligned}\right\} \ldots . . \quad 2).$$

Ако у једначини 1) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из израза 2) онда добивамо следећу једначину:

$$b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2 \ldots . . \quad 3).$$

Једначина 3) нам претставља задату хиперболу у правоуглом координатном систему *ХОУ*.

Кад у једначини 3) извршимо назначене рачунске операције, тада добивамо следећу једначину:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2px + 2a^2qy + b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 = 0 \ldots . . \quad 4).$$

Ову једначину можемо написати и на следећи начин:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0 \ldots . . \quad 5).$$

Да би једначине 4) и 5) претстављале исту хиперболу потребно је и довољно, да им коефицијенти уз одговарајуће непознате величине и слободни чланови буду једнаки или пропорционални. Према томе мора бити испуњен следећи услов:

$$\frac{b^2}{A} = \frac{-a^2}{B} = \frac{-2\,b^2 p}{C} = \frac{2\,a^2 q}{D} = \frac{b^2 p^2 - a^2 q^2 - a^2 b^2}{F} = \lambda$$

одакле је:

$$b^2 = A\lambda$$
$$-a^2 = B\lambda$$
$$-2\,b^2 p = C\lambda$$
$$+2\,a^2 q = D\lambda.$$

Из ових израза излази да је:

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{C\lambda}{2b} = -\frac{C\lambda}{2A} = -\frac{C}{2A} \\ q &= \frac{D\lambda}{2a} = \frac{D\lambda}{-2B\lambda} = -\frac{D}{2B} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 6).$$

Ови нам изрази претстављају обрасце за изналажење координата центра хиперболе, ако је њена једначина дата у облику једначине 5). Међутим осе те хиперболе одређујемо на следећи начин:

Како смо из облика једначине 3) вршећи извесне рачунске операције дошли до облика једначина 5), тако исто се супротним процесом рачунских радњи увек можемо вратити из облика једначине 5) у облик једначине 3). Ако смо једначину хиперболе довели на облик једначине 3) онда је можемо изразити и на следећи начин:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots 7).$$

У једначини хиперболе која је сведена на облик једначине 7) увек нам именитељ израза $\frac{(x-p)^2}{a^2}$ претставља квадрат главне полуосе хиперболе; а именитељ израза $\frac{(y-q)^2}{b^2}$ увек нам претставља квадрат споредне полуосе хиперболе. Пошто нађемо квадрате полуоса хиперболиних, онда из њих лако израчунавамо полуосе или саме осе хиперболе.

Пример: Одредити координате центра и полуосе хиперболе: $9x^2 - 16\,y^2 - 36\,x + 32\,y - 124 = 0$.

Решење: Према обрасцима 6) координате центра су:

$$p = -\frac{-36}{2.9} = 2$$

$$q = -\frac{32}{2(-16)} = 1.$$

Једначину задате хиперболе можемо написати и на следећи начин:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y = 124.$$

Ако и левој и десној страни ове једначине додамо квадрат хиперболине апсисе центра помножен са коефицијентом уз x^2 и квадрат хиперболине ординате центра помножен са коефицијентом уз y^2, онда добивамо:

$$9x^2 - 36x + 9.4 - 16y^2 + 32y - 16.1 = 124 + 9.4 - 16.1$$

или

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 - 2y + 1) = 144$$

одакле је

$$9(x-2)^2 - 16(y-1)^2 = 144$$

а одавде:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Из ове једначине видимо да је:

$$a^2 = 16 \text{ или } a = 4$$
$$b^2 = 9 \text{ и } b = 3.$$

ЗАДАЦИ:

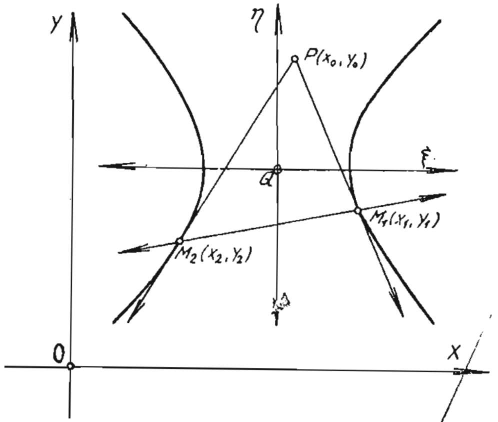
Наћи координате центра и полуосе хиперболе:

1) $4x^2 - 9y^2 - 64x + 90y - 197 = 0$.
2) $5x^2 - 6y^2 - 30x - 24y - 9 = 0$.
3) $9x^2 - 18y^2 - 72x + 12y + 106 = 0$.

* § 84. ПОЛАРА ХИПЕРБОЛЕ: $b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$.

На сл. 73 претстављена је хипербола: $b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$ и тачка $P(x_0,y_0)$ која се налази ван те хиперболе. Поставимо затим у раван хиперболе један помоћни правоугли координатни систем, тако да му почетак буде у центру хиперболе. Апсцисна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са апсцисном осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна у истом смислу са ординатном осом система XOY. У томе ће се случају апсцисна оса новога координатног система поклапати са главном осом хиперболе. Тај смо координатни систем на приложеној слици обележили са $\xi Q\eta$. Очевидно је, да ће задата хипербола у новоме правоуглом координатном систему $\xi Q\eta$ бити претстављена једначином:

$$b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2 \;.....\; 1).$$



Сл. 73.

Обележимо са (ξ_0,η_0) координате тачке P у правоуглом координатном систему $\xi Q\eta$. Полара задате хиперболе чији се пол налази у тачци $P(\xi_0,\eta_0)$, биће претстављена у систему $\xi Q\eta$ једначином:

$$b^2\xi\xi_0 - a^2\eta\eta_0 = a^2b^2 \;.....\; 2).$$

Познато нам је из § 3, а и из слике се види, да је:

$$\begin{matrix} \xi = x - p \\ \eta = y - q \end{matrix} \quad \text{и} \quad \left.\begin{matrix} \xi_0 = x_0 - p \\ \eta_0 = y_0 - b \end{matrix}\right\} \;.....\; 3).$$

Ако у једначини 2) место величина ξ,η и ξ_0,η_0 ставимо њихове вредности из израза 3), онда добивамо следећу једначину:

$$b^2(x - p)(x_0 - p) - a^2(y - q)(y_0 - q) = a^2b^2 \;.....\; 4).$$

Ова нам једначина претставља полару задате хиперболе у правоуглом координатном систему XOY, чији се пол налази у тачци $P(x_0,y_0)$.

Пример: Нађи полару хиперболе: $3(x - 2)^2 - 2(y - 3)^2 = 25$ чији се пол налази у тачци: $(-3;7)$.

Решење: Према обрасцу 4) једначина тражене поларе је:

$$3(x - 2)(-3 - 2) - 2(y - 3)(7 - 3) = 25$$

одакле је

$$15x + 8y - 29 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

1) Нађи полару хиперболе: $4(x - 2)^2 - 7(y - 3)^2 = 36$ чији је пол у тачци $(1, -1)$.

2) Нађи полару хиперболе: $5x^2 - 8y^2 - 30x + 64y - 131 = 0$ чији је пол у тачци $(3,1)$.

3) Нађи полару хиперболе: $6x^2 - 5y^2 + 12x + 20y - 30 = 0$ чији је пол у тачци $(2, 4)$.

*§ 85. ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ХИПЕРБОЛЕ: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$.

1 чл. Свака тачка у равни хиперболе: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$ може се узети за пол хиперболине поларе. Ако на сл. 73 узмемо за пол тачку $M_1(x_1, y_1)$ која се налазе на хиперболи, онда ће полара хиперболе бити претстављена једначином:

$$b^2(x - p)(x_1 - p) - a^2(y - q)(y_1 - q) = a\,b^2 \;.....\; 1).$$

Пошто је полара хиперболе чији се пол налази у некој тачци на хиперболи истовремено и тангента те хиперболе, то нам једначина 1) претставља тангенту хиперболе: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$, која је повучена из њезине тачке $M_1(x_1, y_1)$.

Пример: Нађи једначину тангенте хиперболе: $2(x + 2)^2 - 3(y - 1)^2 = 6$ која је повучена из њезине тачке $(1, 3)$.

Решење: Према обрасцу 1) једначина тражене тангенте је:

$$2(x + 2)(1 + 2) - 3(y - 1)(3 - 1) = 6$$

или

$$x - y + 2 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

1) Нађи тангенту хиперболе: $3(x - 3)^2 - 4(y - 2)^2 = 8$, повучену из њезине тачке $(5, 3)$.

2) Нађи тангенту хиперболе: $7x^2 - 9y^2 + 28x + 18y = 0$, повучену из њезине тачке $(-4,2)$.

3) Нађи тангенту хиперболе: $20x^2 - 28y^2 - 40x + 28y - 39 = 0$, повучену из њезине тачке $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

2 чл. Нормалу повучену из тачке $M_1(x_1, y_1)$ која се налази на хиперболи: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$ одредићемо на следећи начин:

Прво ћемо узети једначину праве линије која пролази кроз задату тачку $M_1(x_1, y_1)$. Она је претстављена следећим изразом:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; 2).$$

Ако у овој једначини место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца тангенте (1), онда добивамо једначину:

$$y - y_1 = -\frac{a^2(y_1 - q)}{b^2(x_1 - p)}(x - x_1)$$

или

$$b^2(y - y_1)(x_1 - p) + a^2(y_1 - q)(x - x_1) = 0 \; . \; . \; . \; . \; 3).$$

Ова нам једначина претставља нормалу хиперболе: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$ која је повучена из задате тачке на тој хиперболи.

Пример: Наћи нормалу хиперболе: $4(x - 3)^2 - 9(y - 2)^2 = 64$ повучену из њезине тачке $(-2,4)$.

Решење: Тангента дате хиперболе која пролази кроз задату тачку претстављена је једначином:

$$4(x - 3)(-2 - 3) - 9(y - 2)(4 - 2) = 64$$

одакле је

$$y = -\frac{10}{9}x + \frac{16}{9} \; . \; . \; . \; a).$$

Једначина праве линије која пролази кроз тачку $(-2,4)$ дата је изразом:

$$y - 4 = m(x + 2).$$

Ако у овој једначини место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца праве (a), онда добивамо:

$$y - 4 = \frac{9}{10}(x + 2)$$

или

$$9x - 8y + 58 = 0 \; . \; . \; . \; . \; b).$$

Ова нам једначина претставља тражену нормалу задате хиперболе.

ЗАДАЦИ.

1) Наћи нормалу хиперболе: $5(x - 4)^2 - 4(y - 5)^2 = 4$ из њене тачке (2,3).

2) Наћи нормалу хиперболе: $4x^2 - 7y^2 - 16x + 42y - 83 = 0$ из њене тачке (—2,1).

3) Наћи нормалу хиперболе: $3x^2 - 5y^2 + 2x + 5y - 5 = 0$ из њене тачке (1,1).

§ 86. ТЕМЕНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ ХИПЕРБОЛЕ.

Ако у једначини: $b^2(x - p)^2 - a^2(y - q)^2 = a^2b^2$ величинама p и q будемо давали разне вредности, онда ће хипербола која је претстављена том једначином мењати свој положај према координатном систему XOY.

Претпоставимо да је $p = -a$, а $q = 0$. У томе случају једначина хиперболе добива облик:

$$b^2(x + a)^2 - a^2(y - 0)^2 = a^2b^2$$

одакле је

$$a^2y^2 = 2ab^2x + b^2x^2$$

или

$$y = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2x}{a^2}.$$

Кад у овој једначини место величине $\frac{b^2}{a}$ ставимо њену вредност из чл. 3. § 82, онда добивамо следећу једначину:

$$y = 2px + \frac{px^2}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; 1).$$

Ова нам једначина претставља темени облик једначине хиперболе.

ЗАДАЦИ:

1) Конструисати хуперболу: $16x^2 - 9y^2 = 144$.

2) Конструисати хиперболу: $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3) Конструисати хиперболу: $4x^2 - 9y^2 = 36$.

4) Конструисати хиперболу: $5x^2 - 12y^2 = 60$.

5) Наћи једначину хиперболе чија је главна оса 6, а споредна 4 дужинских јединице.

6) Одредити једначину хиперболе чија је главна оса 8, а линеарни ексцентрицитет 5 дужинске јединица.

7) Како гласи једначина хиперболе чија је споредна оса 16, а линеарни ексцентрицитет 10 дужинских јединица?

8) Наћи једначину хиперболе код које је: $a - b = 1$, а $c = \sqrt{41}$.

9) Наћи једначину хиперболе код које је: $a + b = 4$, а $c = \sqrt{10}$.

10) Хипербола, чија је главна оса 4 дужинске јединице, пролази кроз тачку (4,—3), наћи једначину те хиперболе.

◎ 11) Како гласи једначина хиперболе која пролази кроз тачку (—2,3), а чија је споредна оса 6 дужинских јединица?

◎ 12) Наћи једначину хиперболе која пролази кроз тачке: *a*) (3,—1) и (4,3); *b*) (—1,1) и (2,—3).

◎ 13) Какав положај има хипербола: $3x^2 - 4y^2 = 12$ према тачки (3,1)?

◎ 14) Какав положај има хипербола: $4x^2 - 5y^2 = 44$ према тачки (4,2)?

◎ 15) Какав положај има хипербола: $5x^2 - 6y^2 = 30$ према тачки (4,3)?

◎ 16) Одредити међусобни положај праве: $y = 2x - 1$ и хиперболе $8x^2 - 3y^2 = 5$.

◎ 17) Одредити међусобни положај праве: $5x - 4y - 12 = 0$ и хиперболе $5x^2 - 8y^2 = 48$.

◎ 18) Одредити међусобни положај праве: $y = x + \sqrt{3}$ и хиперболе $x^2 - 4y^2 = 4$.

19) Наћи тангенту и нормалу хиперболе: $6x^2 - 5y^2 = 70$, које су повучене из њене тачке (5,4).

20) Наћи тангенту и нормалу хиперболе: $7x^2 - 12y^2 = 51$, које су повучене из њене тачке (3,—1).

21) Наћи тангенту и нормалу хиперболе: $2x^2 - 4y^2 = 1$, које су повучене из њене тачке $(1, -\frac{1}{2})$.

22) Одредити додирне величине хиперболе: $4x^2 - 11y^2 = 20$ из њене тачке (4,2).

23) Одредити додирне величине хиперболе: $8x^2 - 7y^2 = 44$ из њене тачке (3,—2).

24) Одредити додирне величине хиперболе: $9x^2 - 2y^2 = 2$ из њене тачке $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.

25) Наћи једначине асимптота хиперболе: $25x^2 - 4y^2 = 100$.

26) Наћи једначине асимптота хиперболе: $x^2 - 36y^2 = 36$.

27) Како гласи једначина хиперболе кад јој је линеарни ексцентрицитет $c = 5$, а једначина једне асимптоте: $y = \frac{3}{4}x$?

28) Одредити угао који заклапају асимптоте хиперболе: $x^2 - 3x^2 = 3$.

29) У једначини праве: $3x - 4y + \lambda = 0$, одредити вредност параметра λ такву, да би та права била тангента хиперболе: $x^2 - 2y^2 = 1$.

30) Какву вредност има параметар λ у једначини праве: $3x + \lambda y - 4 = 0$, кад је та права тангента хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 8$?

31) Одредити вредност параметра λ у једначини праве: $\lambda x - y - 1 = 0$, кад је та права тангента хиперболе: $3x^2 - y^2 = 3$.

32) Наћи једначину тангенте хиперболе: $3x^2 - 5y^2 = 28$, која је паралелна са правом $6x - 5y + 2 = 0$.

33) Како гласи једначина тангенте хиперболе: $x^2 - 4y^2 = 5$, која је нормална на правој: $4x - 3y - 7 = 0$?

34) Одредити тангенту хиперболе: $x^2 - y^2 = 3$, која је паралелна са правом: $2x + y + 11 = 0$.

35) Наћи једначину тангенте хиперболе: $6x^2 - 5y^2 = 105$, која је нормална на правој: $x + 2y + 3 = 0$.

36) Једначина хиперболе је: $5x^2 - 8y^2 = 40$, наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

37) Израчунати површину четвероугла, чија се темена налазе у жижама хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$ и њене коњуговане хиперболе.

38) Хипербола чија је асимптота: $x\sqrt{3} - y\sqrt{7} = 0$ пролази кроз тачку (4,2), наћи једначину њене коњуговане хиперболе.

39) Наћи тангенту хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 12$ повучену из тачке (2,1).

40) Наћи тангенту хиперболе: $5x^2 - 2y^2 = 30$ повучену из тачке (3,3).

41) Наћи тангенту хиперболе: $x^2 - y^2 = 12$ повучену из тачке (2,2).

* 42) Израчунати површину троугла који је ограничен поларом хиперболе $2x^2 - 3y^2 = 5$ чији се пол налази у тачци (—1,—3) и двема хиперболним тангентама које пролазе кроз пол те поларе.

* 43) Из тачке (2,—1) повучене су тангенте на хиперболу: $3x^2 - 2y^2 = 30$; наћи угао који те тангенте заклапају.

* 44) Права: $10x - 7y - 35 = 0$ је полара хиперболе: $5x^2 - 7y^2 = 70$; одредити пол те поларе.

* 45) Наћи отстојање између пола и поларе хиперболе: $8x^2 - 9y^2 = 8$, ако се пол налази у тачци (2,—1).

* 46) Поларе хиперболе: $x^2 - 4y^2 = 4$ су праве: $3x - 4y - 2 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$); одредити отстојање између њихових полова.

* 47) Наћи дијаметар хиперболе: $4x^2 - 5y^2 = 20$ који полови тетиве хиперболине паралелне са правом $2x + 5y - 3 = 0$.

* 48) На дијаметру хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 12$ који пролази кроз тачку (2,3) налази се пол хиперболине поларе која пролази кроз тачку (—3,1); наћи једначину те поларе.

* 49) У тачци (3,4) секу се дијаметар и полара хиперболе: $4x^2 - 7y^2 = 28$; наћи једначину те поларе кад јој се пол налази на задатом дијаметру.

* 50) Наћи коефицијенат правца оних паралелних тетива хиперболе: $7x^2 - 9y^2 = 63$, које полови дијаметар: $y = \frac{2}{3}x$.

* 51) Кроз пресек правих $3x - y - 3 = 0$ и $x + 2y - 8 = 0$ пролази полара хиперболе: $5x^2 - 9y^2 = 45$, одредити једначину те поларе кад јој се пол налази на правој $y = \frac{5}{6}x$.

* 52) Наћи дужину тетиве хиперболе: $5x^2 - 24y^2 = 29$, која је преполовљена тачком $(1,\frac{1}{2})$.

* 53) Један дијаметар хиперболе: $3x^2 - 5y^2 = 15$, полови тетиве хиперболине, које су паралелни са правом: $3x + y - 7 = 0$, а други дијаметар те хиперболе пролази кроз тачку (3,2); наћи угао који заклапају та два дијаметра.

* 54) Један дијаметар хиперболе: $x^2 - 3y^2 = 3$ је права: $3y - 2x = 0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 55) Дијаметар хиперболе: $4x^2 - 11y^2 = 44$ пролази кроз тачку (—1,2); наћи њему коњуговани дијаметар.

* 56) Кроз пресек правих: $x + 2y = 8$ и $2x - 3y = 2$ пролази дијаметар хиперболе: $7x^2 - 12y^2 = 84$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 57) Дијаметар хиперболе: $5x^2 - 6y^2 = 30$ је паралелан са правом: $5x - 3y - 6 = 0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 58) Дијаметар хиперболе: $x^2 - 2y^2 = 2$ је нормалан на правој: $4x + 3y - 9 = 0$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 59) Који угао заклапају коњуговани дијаметри хиперболе: $21x^2 - 4y^2 = 84$, од којих је један паралелан са правом: $7x - y + 8 = 0$?

* 60) Један дијаметар хиперболе: $2x^2 - 5y^2 = 10$, дели дуж чије су крајње тачке (2,3) и (5,6) по размери 1:2, наћи угао који заклапа тај дијаметар са својим коњугованим дијаметром.

* 61) Одредити директрисе хиперболе: *a)* $4x^2 - 5y^2 = 20$; *b)* $3x^2 - y^2 = 3$ и *c)* $5x^2 - 11y^2 = 55$.

* 62) Израчунати параметар хиперболе: *a)* $3x^2 - 4y^2 = 12$; *b)* $5x^2 - 9y^2 = 45$ и *c)* $3x^2 - 16y^2 = 48$.

* 63) Наћи директрисе, параметар и бројни ексцентрицитет хиперболе: *a)* $9x^2 - 16y^2 = 144$ и *b)* $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Ексцентрични облик једначине хиперболе, чије су осе паралелне са осама правоуглог координатног система.

Конструисати хиберболу чија је једначина:

* 64) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0$.

* 65) $2x^2 - 7y^2 - 20x + 28y + 8 = 0$.

* 66) $12x^2 - 20y^2 - 96x + 60y + 87 = 0$.

Одредити додирне величине хиперболе:

* 67) $2x^2 - 5y^2 - 16x + 30y - 26 = 0$ из њене тачке (1,2).

* 68) $5x^2 - 9y^2 + 30x + 18y - 8 = 0$ из њене тачке (2,4).

* 69) $3x^2 - 18y^2 - 30x + 72y - 13 = 0$ из њене тачке $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.

Наћи једначине тангената хиперболе:

* 70) $x^2 - 2y^2 - 4x + 4y - 5 = 0$ повучене из тачке (1,—1).

* 71) $3x^2 - y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$ повучене из тачке (2,0).

* 72) $2x^2 - 3y^2 - 4x + 12y - 15 = 0$ повучене из тачке (6,—3).

Глава VII

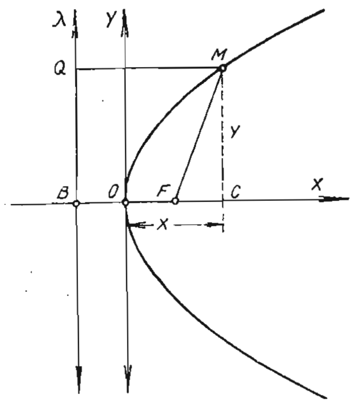
ПАРАБОЛА

§ 87. ПОТЕГ ПАРАБОЛЕ.

Према § 29 парабола је таква крива линија у равни чија свака тачка подједнако отстоји од једне сталне тачке и једне сталне праве линије у истој равни.

Поставимо у раван параболе правоугли координатни систем ХОУ тако да му се центар поклопи са теменом параболе, а апсцисна оса са осом параболе. Ординатна оса тада мора пролазити кроз теме параболе и стојати нормално на њеној осовини.

Нека је тај случај претстављен на сл. 74.



Сл. 74.

Ако узмемо у посматрање ма коју тачку $M(x,y)$ на параболи и из ње повучемо нормалу на директрису, онда ће та права сећи директрису у некој тачци Q.

Према дефиницији параболе мора бити:

$$FM = MQ \; ..... \; 1).$$

Из паралелограма $BCMQ$ на приложеној слици излази да је:

$$MQ = BC \; ..... \; 2).$$

Кад у једначини 1) место величине MQ ставимо њену вредност из једначине 2) тада добивамо:

$$FM = BC$$

или с обзиром на слику:

$$FM = x + OB$$

Како је према § 29 величина $OB = \frac{p}{2}$, то ову једначину можемо написати:

$$FM = x + \frac{p}{2} \; ..... \; 3).$$

Величина FM назива се потегом параболе. Дужина потега је одређена једначином 3).

§ 88. ЈЕДНАЧИНА ПАРАБОЛЕ.

1. чл. Из правоуглог троугла: FMC на сл. 74 излази да је:

$$\overline{FM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{FC}^2$$

или

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

одакле је

$$y^2 = 2px \; ..... \; 1).$$

Једначина (1) нам претставља однос између апсцисе и ординате ма које тачке на параболи, па се зато и зове *једначином параболе.*

Она се назива *теменом једначином параболе*, јер нам претставља параболу чије се теме налази у почетку правоуглог координатног система XOY.

2. чл. Дискусија једначине параболе.

Из једначине параболе: $y^2 = 2px$ излази да је:

$$y = \pm\sqrt{2px} \; ..... \; 2).$$

Сматрајући величину $2p$ позитивном, из једначине 2) излази да свакој позитивној вредности x-са одговарају две по апсолутној вредности једнаке, али супротно означене вредности y-на. То значи да оса X полови све параболине тетиве које су паралелне са ординатном осом; односно, да оса X дели параболу на два једнака и симетрична дела.

Тако исто се из једначине 2) види, да свакој негативној вредности x-са одговарају по две имагинарне вредности y-на, што значи да посматрана парабола нема ни једне реалне тачке која се налази у правцу негативне гране апсцисне осовине.

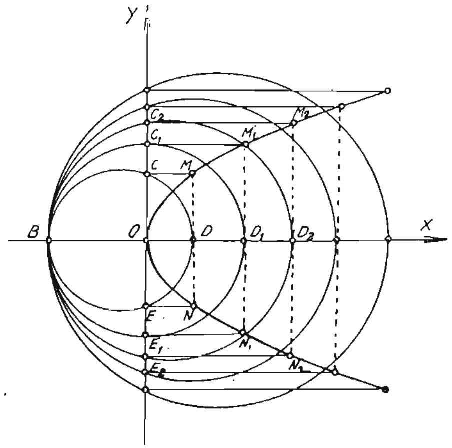
Из свега овога излази, да је парабола једнограна крива линија која се простире у бесконачност.

3 чл. Једначину параболе $y^2 = 2px$ можемо написати у виду следеће непрекидне пропорције:

$$2p : y = y : x \ldots\ldots 3).$$

Из ове пропорције видимо, да је ордината ма које тачке на параболи средња пропорционала између параметра и апсцисе посматране тачке. Према тој особини параболе можемо извршити њену конструкцију на следећи начин:

Поставимо на сл. 75 правоугли координатни систем XOY. Пренесимо затим од координатног почетка на негативну страну апсцисне осе дуж $2p$ и другу крајњу тачку тако добивене дужи обележимо са B. После тога ћемо описивати кругове који пролазе кроз тачку B, а чији се центри налазе на апсцисној оси. Полупречник најмањег од тих кругова треба да буде већи од половине параметра т.ј. од половине дужи OB. Сваки ће од тих кругова сећи апсцисну осу у још једној тачци сем тачке B. Ми ћемо тако добивене тачке обележити са: D, D_1, D_2, D_3, ... Тако исто ће сваки од поменутих кругова сећи ординатну осу у по две тачке, од којих ћемо оне на позитивној грани ординатне осе обележити са: C, C_1, C_2, C_3, ... а оне на негативној грани ординатне осе са: E, E_1, E_2, E_3, ...



Сл. 75

Кад из тачака: D, D_1, D_2, D_3, ... повучемо нормале на апсцисну осу, а из тачаки: C, C_1, C_2 ..... и E, E_1, E_2, E_3, ... повучемо нормале на ординатну осу, тада ће се те нормале сећи у тачкама: M, M_1, M_2, M_3 .... и N, N_1, N_2, N_3 ..... Тачке M, M_1, M_2, M_3, ... и N, N_1, N_2, N_3 ..... су тачке параболе, јер је ордината сваке од њих средња пропорционала између параметра и апсцисе посматране тачке. Ако тачке: M, M_1, M_2, M_3 ..... и N, N_1, N_2 ...... саставимо по реду почевши од тачке 0 на једну и на другу страну, онда ћемо добити лук параболе.

Пример: Наћи темени облик једначине параболе која се простире у позитивном смислу апсцисне осе, кад је њен параметар раван 4 дужине јединица.

Решење: Једначина тражене параболе је: $y^2 = 4x$.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи темени облик једначине параболе, чија се жижа налази на позитивној грани апсцисне осе, кад је њен параметар раван 7 дужних јединица.

2) Наћи темени облик једначине параболе чија је жижа у тачци (3, 0).

3) Парабола чије је теме у координатном почетку пролази кроз тачку (2, —4); одредити њену жижу, кад се она налази на позитивној грани апсцисне осе.

◎ § 89. ЈЕДНАЧИНА ДИРЕКТРИСЕ ПАРАБОЛЕ.

Из сл. 74 се види, да свака тачка праве λ т.ј. директрисе параболе $y^2 = 2px$ има за апсцису величину: $-\frac{p}{2}$, па према томе ће и њена једначина бити претстављена изразом:

$$x = -\frac{p}{2} \ldots\ldots 1).$$

Пример: Наћи једначину директрисе пераболе: $y^2 = 8x$.

Решење: У овој једначини је: $2p = 8$ или $\frac{p}{2} = 2$. Према томе ће једначина тражене директрисе бити:

$$x = -2.$$

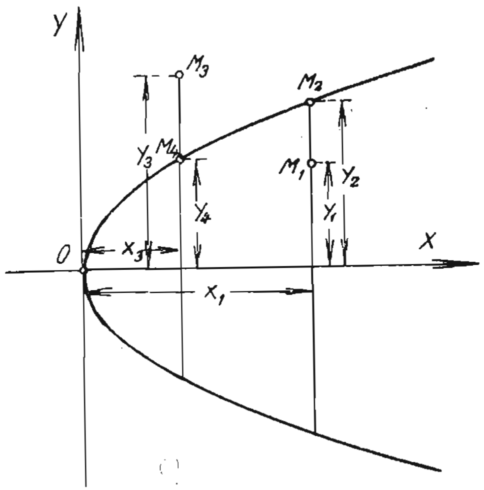
ЗАДАЦИ:

1) Наћи директрису параболе: $y^2 = 6x$.

2) Парабола чије је теме у координатном почетку простире се у смислу позитивне гране апсцисне осе и пролази кроз тачку (1,2); наћи једначину њене директрисе.

◎ § 90. ПОЛОЖАЈ ТАЧКЕ И ПАРАБОЛЕ.

1 чл. Нека је на сл. 76 претстављена парабола $y^2 = 2px$. Узмимо ма коју тачку $M_1(x_1, y_1)$ у тој параболи и кроз њу по-



Сл. 76

вуцимо нормалу на апсцисну осовину. Ова ће нормала сећи параболу у двема тачкама од којих ћемо узети у посматрање само ону која се налази у истом квадранту правоуглог координатног система са задатом тачком. Обележимо ту тачку са $M_2(x_1,y_2)$. Како се тачка $M_2(x_1,y_2)$ налази на параболи: $y^2 = 2px$, то њене координате морају задовољити једначину параболе, те се добива:

$$y_2^2 = 2px_1 \ldots\ldots 1).$$

Из слике се види да је:

$$y_1 < y_2.$$

Пошто су ове обе величине позитивне то је тако исто и

$$y_1^2 < y_2^2.$$

Ако у овом изразу величину y_2^2 сменимо њеном вредношћу из једначине 1), онда добивамо:

$$y_1^2 < 2px_1 \ldots\ldots 2).$$

Неједначина 2) важи за сваку тачку у параболи, па према томе и за неку покретну тачку М са промењљивим координатама (x,y).

Тако можемо написати:

$$y^2 < 2px$$

или

$$y^2 - 2px < 0 \ldots\ldots 3).$$

2 чл. Узмимо затим једну тачку ван параболе која се налази у једном од она два квадранта правоуглог координатног система у којима се налази парабола и обележимо је са $M_3(x_3, y_3)$.

Кад из те тачке повучемо нормалу на апсисну осовину, она ће сећи параболу у двема тачкама од којих ћемо узети у посматрање само ону, која се налази у истом квадранту

правоуглог координатног система са задатом тачком. Обележимо ту тачку на приложеној слици са $M_4(x_3, y_4)$. Пошто се тачка $M_4(x_3, y_4)$ налази на параболи то њене координате задовољавају једначину параболе те имамо:

$$y_4^2 = 2px_3 \ldots\ldots 4).$$

Из слике се види да је:

$$y_3 > y_4.$$

Како су обе величине овога израза позитивне то тако исто мора бити и:

$$y_3^2 > y_4^2.$$

Ако у овоме изразу место величине y_4^2 ставимо њезину вредност из једначине 4) тада добивамо:

$$y_3^2 > 2px_3 \ldots\ldots 5).$$

Неједначина 5) важи за све тачке ван параболе које имају позитивне апсцисе. Она очевидно важи и за све тачке ван параболе које имају негативне апсцисе. Ма каква била ордината посматране тачке, њен ће квадрат бити позитиван, што значи, да ће лева страна неједначине 5) увек бити позитивна. Међутим за све негативне апсцисе, десна страна неједначине 5) ће бити стално негативна па према томе и мања од њене леве стране.

Из овога излази, да неједначина 5) важи за сваку тачку ван параболе, па према томе и за неку покретну тачку N са промењљивим координатама (x, y).

Тако можемо написати:

$$y^2 > 2px$$

или

$$y^2 - 2px > 0 \ldots\ldots 6).$$

Из свега овога излази следеће практично упуство према коме се одређује положај тачке и параболе:

Прво треба написати бином: $y^2 - 2px$, а затим у њему место промењљивих величина (x, y) ставити координате посматране тачке. Ако је резултат смене мањи од нуле, тачка се налази у параболи; ако је резултат смене једнак нули, тачка се налази на параболи; а ако је резултат смене већи од нуле, онда се тачка налази ван параболе.

Пример: Какав је међусобни положај параболе: $y^2 = 10x$ и тачке $(2, 5)$?

Решење: Кад у биному: $y^2 - 10x$, место величина x и y ставимо координате задате тачке, тада добивамо:

$$5^2 - 10.2 = 25 - 20 = 5.$$

Пошто је резултат смене позитиван, то значи, да се посматрана тачка налази ван задате параболе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 12x$ и тачке: (1,2); (3,—6); (4,7).

2) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = \frac{16}{3}x$ и тачке: (3,3); (3,4); (3,5).

3) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 6x$ и тачке: $\left(\frac{2}{3},6\right)$; $\left(\frac{4}{3},-4\right)$; $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

◎ § 91. ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ ЛИНИЈЕ И ПАРАБОЛЕ.

Нека су нам задате парабола: $y^2 = 2px$ и права линија: $y = mx + n$. Координате пресека ових двеју линија добивају се решавањем њихових једначина по промењљивим величинама x и y.

Кад у једначини параболе место величине y ставимо њену вредност из једначине праве, тада добивамо:

$$(mx + n)^2 = 2px$$

или

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$

одакле је:

$$m^2x^2 - (2p - 2mn)\,x + n^2 = 0 \; \ldots\ldots \; 1).$$

Једначина 1) је квадратна једначина по промењљивој величини x, па ако је решимо, онда добивамо следеће корене:

$$x_{1,2} = \frac{p - mn \pm \sqrt{p^2 - 2mnp}}{m^2} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Ако после овога у једначини праве место величине x-са ставимо њене вредности из израза 2), онда за y добивамо такође две вредности:

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2mnp}}{m} \; \ldots\ldots \; 3).$$

На тај смо начин решавањем једначина праве и параболе добили два пара корена: (x_1,y_1) и (x_2,y_2) који претстављају координате пресека тих двеју линија.

Из израза 2) и 3) долазимо до следећег закључка:

1) Ако је дискриминанта: $p^2 - 2mnp$ већа од нуле, онда су оба пара корена реална и неједнака. У томе случају права сече параболу у двема тачкама и назива се *сечицом параболе.*

2) Ако је дискриминанта: $p^2 - 2mnp$ равна нули, онда су оба пара корена реална и једнака. У томе случају права сече параболу у двема тачкама које се поклапају, односно она додирује параболу у једној тачци и назива се *дирком или тангентом параболе.*

3) Ако је пак дискриминанта: $p^2 - 2mnp$ мања од нуле, онда су оба пара корена имагинарна и неједнака, што значи, да права нема заједничких тачака са параболом, него пролази ван параболе.

Пример: Какав положај имају парабола: $y^2 = 9x$ и права: $x - y + 2 = 0$?

Решење: Ако задате једначине решимо по непознатим величинама x и y, онда добивамо корене:

$$x_1 = 4, \qquad y_1 = 6$$

и

$$x_2 = 1, \qquad y_2 = 3.$$

Пошто једначине задатих линија имају два пара реалних и међу собом неједнаких корена, то значи да је права сечица параболе.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 12x$ и праве линије: $x - y + 3 = 0$.

2) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 16x$ и праве линије: $4x + y - 8 = 0$.

3) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 8x$ и праве линије: $y = x + 4$.

§ 92. ТАНГЕНТА ПАРАБОЛЕ
повучена из једне тачке на параболи.

Видели смо у § 91, да би права: $y = mx + n$ била тангента параболе: $y^2 = 2px$, потребно је и довољно, да дискриминанта у изразима 2) и 3) истога параграфа буде равна нули. У томе случају координате тачке додира параболе и праве су дате следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{p - mn}{m^2} \\ \text{и} \quad y_1 &= \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \ldots . \ 1).$$

Из друге од једначина 1) излази да је:

$$m = \frac{p}{y_1} \ldots . \ 2).$$

Кад у првој од једначина 1) место величине m ставимо њену вредост из израза 2) и тако добивену једначину решимо по величини n, тада добивамо:

$$n = \frac{px_1}{y_1} \ldots .. \ 3).$$

Ако у једначини праве: $y = mx + n$, место величина m и n ставимо њихове вредности из израза 2) и 3), онда добивимо следећу једначину:

$$y = \frac{p}{y_1} x + \frac{px_1}{y_1}$$

одакле је

$$yy_1 = px + px_1$$

или

$$yy_1 = p(x + x_1) \ \ldots .. \ 4).$$

Једначина 4) нам претставља тангенту параболе повучену из њезине тачке (x_1, y_1).

Пример: Наћи тангенту параболе: $y^2 = 4x$ која је повучена из њезине тачке (1,—2).

Решење: Према обрасцу 4) једначина тражене тангенте ће бити:

$$y(-2) = 2(x + 1)$$

одакле је

$$-y = x + 1$$

или

$$x + y + 1 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенту параболе: $y^2 = 9x$ повучену из њезине тачке (4,6).

2) Наћи тангенту параболе: $y^2 = 25x$ повучену из њезине тачке (1,—5).

3) Наћи тангенту параболе: $y^2 = 18x$ повучену из њезине тачке ($\frac{1}{2}$,—3).

§ 93. НОРМАЛА ПАРАБОЛЕ.

Нормалом параболе називамо ону праву линију која пролази кроз једну тачку на параболи и стоји нормално на тангенти параболе у тој тачци. Њену ћемо једначину наћи на тај начин, што ћемо у једначини праве која пролази кроз ту тачку, сменити неодређени коефицијенат правца са негативном реципрочном вредношћу коефицијента правца тангенте у тој тачци.

Нека је задата парабола: $y^2 = 2px$ и њена тачка $M_1(x_1, y_1)$. Једначина праве линије која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ дата је изразом:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \ \ldots .. \ 1).$$

Међутим тангента параболе повучена кроз задату тачку претстављена је једначином:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

или

$$y = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \ \ldots .. \ 2).$$

Ако у једначини 1) место неодређеног коефицијента правца m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца праве 2), онда добивамо следећу једначину:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \ \ldots .. \ 3).$$

Једначина 3) нам претставља нормалу параболе: $y^2 = 2px$ повучену из њене тачке $M_1(x_1, y_1)$.

Пример: Наћи нормалу параболе: $y^2 = 32x$ повучену из њене тачке (2,8).

Решење: Тангента дате параболе повучена кроз задату тачку претстављена је изразом:

$$y.8 = 16(x + 2)$$

или

$$y = 2x + 4 \ \ldots .. \ a).$$

Једначина праве линије која пролази кроз задату тачку претстављена је изразом:

$$y - 8 = m(x - 2).$$

Кад у овој једначини место величине m ставимо негативну реципрочну вредност коефицијента правца из једначине а) тада добивамо:

$$y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

одакле је:

$$x + 2y - 18 = 0 \; ..... \; b).$$

Једначина b) нам претставља тражену нормалу.

ЗАДАЦИ:

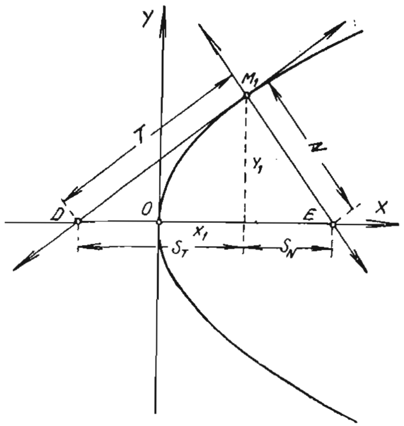
1) Наћи нормалу параболе: $y^2 = 8x$ повучену кроз њену тачку (2,4).

2) Наћи нормалу параболе: $y^2 = 27x$ повучену кроз њену тачку (3,—9).

3) Наћи нормалу параболе: $y^2 = 6x$ повучену кроз њену тачку $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

§ 94. ДОДИРНЕ ВЕЛИЧИНЕ ПАРАБОЛЕ.

Нека је на сл. 77 претстављена парабола $y^2 = 2px$ и њена тачка $M_1(x_1, y_1)$. Повуцимо кроз задату тачку тангенту и нормалу параболе.



Сл. 77

Линија тангента сече апсцисну осу у некој тачци, коју смо на слици обележили са D. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и D називамо *тангентом* и обележавамо га са T. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осу зовемо *субтангентом* и обележаваћемо је са S_T.

Линија нормала сече апсцисну осу у некој тачци коју смо на приложеној слици обележили са E. Отсечак на тој линији између тачака M_1 и E назива се ***нормалом*** и обележили смо га са N. Пројекцију тога отсечка на апсцисну осу називамо *субнормалом* и обележићемо је са S_N.

Величине T и N израчунавају се као отстојање између двеју тачака и узимају се увек са позитивним знаком. Координате тачке M_1 су нам задате, а координате тачака D и E налазе се понаособ као координате пресека двеју познатих правих линија.

Величине S_T и S_N могу се израчунати помоћу Питагориног правала, те је:

$$S_T = -\sqrt{T^2 - y^2}$$
$$S_N = +\sqrt{N^2 - y^2}.$$

За знаке величина S_T и S_N усвојено је правило према коме се свакој од њих придодаје знак плус ако се налази на оној страни од ординате задате тачке у коме се смислу простире позитивна грана апсцисне осе. Међутим свакој од величина S_T и S_N придодаје се знак минус, ако се налази на оној страни од ординате задате тачке у коме се смислу простире негативна грана апсцисне осе.

Из сл. 77 видимо да ће према изложеном правилу субтангента параболе: $y^2 = 2px$ бити стално негативна, док ће јој субнормала бити увек позитивна.

Субтангенту можемо одредити и на тај начин што ћемо од апсцисе тачке D одузети апсцису тачке M_1. Тако исто и субнормалу можемо одредити ако од апсцисе тачке E одузмемо апсцису тачке M_1.

Ако решимо једначину нормале и једначину апсцисне осе по промењљивим величинама x и y, онда добивамо да су координате њихова пресека: $x = x_1 + p$ и $y = 0$. Према томе ће субнормала параболе бити претстављева изразом:

$$S_N = x_1 + p - x_1 = p.$$

Из овога се израза види, да је субнормала параболе: $y^2 = 2px$ увек стална величина и једнака половини параметра параболе.

За одређивање додирних величина параболе, не треба учити напамет нарочите обрасце, али је потребно, да се запамти поступак којим се долази до њих.

Пример: Наћи додирне величине параболе: $y^2 = 12x$ из њене тачке $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$.

Решење: Претпоставимо да нам је на сл. 77 претстављена задата парабола, а тачка M_1, нека има координате $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$. Једначина тангенте дате параболе која је повучена кроз задату тачку претстављена је изразом:

$$y.2 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

одакле је

$$3x - y + 1 = 0.$$

Кад решимо ову једначину са једначином апсцисне осе, тада добивамо координате тачке: $D(-\frac{1}{3}, 0)$ Према томе је:

$$T = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + (0-2)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{10}$$

$$S_T = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Једначина нормале задате параболе која је повучена кроз дату тачку на параболи према § 93 биће очевидно.

$$y - 2 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

одакле је:

$$3x + 9y - 19 = 0.$$

Решавањем ове једначине са једначином апсцисне осе добивамо координате тачке $E\left(\frac{19}{3}, 0\right)$. Тако је:

$$N = \sqrt{\left(\frac{19}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40}$$

$$S_N = p = 6.$$

ЗАДАЦИ:

1) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = 36x$ из њене тачке: (1,—6).

2) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = 48x$ из њене тачке: $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$.

3) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = \frac{9}{2}x$ из њене тачке: (2, 3).

§ 95. ТАНГЕНТА ПАРАБОЛЕ ПОВУЧЕНА ИЗ ЈЕДНЕ ТАЧКЕ ВАН ПАРАБОЛЕ.

Нека нам је задата парабола $y^2 = 2px$ и тачка $P(x_0, y_0)$ која се налази ван те параболе.

Да би права: $y = mx + n$ била тангента задате параболе потребно је према § 91 да буде испуњен следећи услов:

$$p^2 - 2mnp = 0$$

или

$$p - 2mn = 0 \;\ldots\ldots\; 1).$$

Ако права: $y = mx + n$ пролази још и кроз задату тачку $P(x_0, y_0)$ онда координате те тачке морају задовољавати једначину праве т. ј. мора бити испуњен услов:

$$y_0 = mx_0 + n \;\ldots\ldots\; 2).$$

У једначинама 1) и 2) фигурицу непознате величине m и n, што значи, да нам те једначине сачињавају систем од двеју једначина са двема непознатим величинама.

Ако једначину 2) решимо по величини n, онда добивамо:

$$n = y_0 - mx_0 \;\ldots\ldots\; 3).$$

Кад у једначини 1) место величине n ставимо њезину вредност из једначине 3) тада добивамо:

$$2x_0 m^2 - 2y_0 m + p = 0 \;\ldots\ldots\; 4).$$

Једначина 4) је квадратна једначина по непознатој величини m. Њени су корени претстављени следећим изразом:

$$m_{1,2} = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{2x_0}$$

Пошто је дискриминанта овога израза према § 90 већа од нуле, то и корени m_1 и m_2 морају бити увек реалне и међу собом неједнаке величине. Из тога следује закључак према коме се из једне тачке ван параболе увек могу повући по две тангенте на параболу.

Ако у једначини 3) место величине m ставимо прво њену вредност m_1, а затим m_2, онда ћемо и за величину n добити такође две реалне вредности које ћемо обележити са n_1 и n_2. Ове величине могу бити међу собом различите, а могу и једнаке, према томе, дали је x_0 различито од нуле или равно нули.

Кад у једначини праве: $y = mx + n$ место величине m и n ставимо прво њихове вредности (m_1, n_1), а затим $(m_2, n_2,)$ тада добивамо следеће једначине:

$$\left.\begin{aligned} y &= m_1x + n_1 \\ y &= m_2x + n_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\; 5).$$

Једначине 5) нам претстављају тангенте параболе повучене из једне тачке ван параболе.

Пример: Наћи тангенте параболе: $y^2 = 4x$ које су повучене из тачке (3,4).

Решење: Тангента задате параболе је права линија чију једначину можемо написати у облику: $y = mx + n$. Услови: $p - 2mn = 0$ и $y_0 = mx_0 + n$ у датом случају су:

$$2 - 2mn = 0$$
$$4 = 3m + n.$$

Решавањем ових двеју једначина по непознатим величинама m и n излази да је: $m_1 = 1$, $n_1 = 1$ и $m_2 = \frac{1}{3}$, $n_2 = 3$.

Кад у једначини праве: $y = mx + n$ место величина m и n, ставимо прво њихове вредности (m_1, n_1); а затим (m_2, n_2); онда добивамо једначине: $x - y + 1 = 0$ и $x - 3y + 9 = 0$. Ове нам једначине претстављају тражене тангенте.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенте параболе: $y^2 = 2x$ повучене из тачке (4,—3).
2) Наћи тангенте параболе: $y^2 = \frac{3}{2}x$ повучене из тачке (—2,—1).
3) Наћи тангенте параболе: $y^2 = 9x$ повучене из тачке (—8,—3).

* § 96. ПОЛАРА ПАРАБОЛЕ.

1 чл. Нека је на сл. 78 претстављена парабола $y^2 = 2px$ и тачка $P(x_0, y_0)$ која се налази ван те параболе. Тангента параболе повучена из задате тачке додирује параболу у некој тачци $M_1(x_1, y_1)$. Координате ове тачке су нам непознате, али ћемо их одредити на следећи начин:

Једначина параболине тангенте која пролази кроз тачку $M_1(x_1, y_1)$ дата је изразом:

$$yy_1 = p(x + x_1) \; \ldots\ldots \; 1).$$

Како се тачка $P(x_0, y_0)$ налази на правој 1) то њене координате морају задовољавати једначину те праве, одакле излази да је:

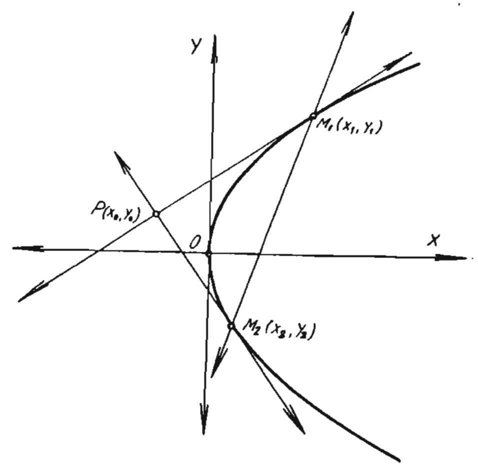
$$y_0 y_1 = p(x_0 + x_1) \; \ldots\ldots \; 2).$$

Пошто се тачка $M_1(x_1, y_1)$ налази на параболи: $y^2 = 2px$, то координате те тачке задовољавају и једначину параболе, те се добива:

$$y_1^2 = 2px_1 \; \ldots\ldots \; 3).$$

Решавањем једначина 2) и 3) по непознатим величинама x_1 и y_1 добивају се координате тачке додира параболе и њене тангенте која пролази кроз задату тачку ван параболе.

Међутим како је једна од ових двеју једначина линеарна, а друга квадратна, то се њиховим решавањем добивају два пара корена, што значи, да се из једне тачке ван параболе могу повући две тангенте на параболу. Један пар од тих корена претставља координате тачке M_1 и обележили смо га са (x_1, y_1). Други пар од тако добивених корена обележићемо са (x_2, y_2). Он нам претставља координате тачке додира између параболе и друге њене тангенте која пролази кроз задату тачку ван параболе. Ту ћемо тачку обележити са M_2. Тако нам $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ претстављају тачке додира параболе и њених двеју тангената које пролазе кроз задату тачку ван параболе.



Сл. 78.

Кад једначине 2) и 3) решимо по непознатим величинама, тада добивамо следеће парове корена:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{(y_0^2 - px_0) + y_0\sqrt{y_0^2 - 2px_0}}{p}; & x_2 = \dfrac{(y_0^2 - px_0) - y_0\sqrt{y^2 - 2px_0}}{p} \\ y_1 = y_0 + \sqrt{y_0^2 - 2px_0}\;; & y_2 = y_0 - \sqrt{y_0^2 - 2px_0} \end{array}\right\} \ldots\ldots \; 4).$$

Једначина праве линије која пролази кроз тачке $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ претстављена је изразом:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1).$$

Ако у овој једначини место величина: x_1, x_2 и y_1, y_2 ставимо њихове вредности из израза 4), онда после обичних рачунских операција добивамо једначину:

$$yy_0 = p(x + x_0) \; \ldots\ldots \; 5).$$

Права линија која је претстављена овом једначином назива се поларом параболе: $y^2 = 2px$, а тачка $P(x_0 y_0)$ се зове полом те поларе.

2 чл. *Дискусија параболине поларе.*

1) Ако се тачка $P(x_0, y_0)$ налази ван параболе, онда су оба пара корена 4) реална и међу собом неједнака, јер је дискриминанта $y_0^2 - 2px_0$ према § 90 увек већа од нуле. У томе случају полара сече параболу у двема тачкама, што значи, да се из једне тачке ван параболе увек могу повући две тангенте на параболу.

2) Ако се тачка $P(x_0, y_0)$ налази на параболи, онда су оба пара корена у изразима 4) реална и међу собом једнака, јер је према § 90 дискриминанта: $y_0^2 - 2px_0$ равна нули. У томе се случају обе тачке додира тангената $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ поклапају се тачком $P(x_0, y_0)$, што значи, да се из једне тачке на параболи може повући само једна тангента на параболу и и да се она поклапа са поларом те тачке.

3) Ако се тачка $P(x_0, y_0)$ налази у параболи, онда су оба пара корена у изразима 4) имагинарна, јер је према § 90 дискриминанта: $y_0^2 - 2px_0$ мања од нуле. У томе случају полара не сече параболу ни у једној реалној тачци, што значи да се налази негде ван параболе. Из тога излази, да се из једне тачке у параболи не може повући ни једна тангента на параболу.

Из свега овога долазимо до закључка, да се свака тачка у равни параболе може сматрати као пол неке параболине поларе.

Тако исто се можемо уверити, да је и свака права линија у равни параболе истовремено и полара те параболе; јер ма какав облик имала та права, множећи је или делећи подесним величинама, увек се може довести на облик параболине поларе и одредити јој се пол. Узмимо у посматрање праву линију чија је једначина дата изразом:

$$y = mx + n.$$

Ако ову једначину поделимо са величином m, онда је:

$$\frac{y}{m} = x + \frac{n}{m}.$$

Кад ову једначину помножимо са величином p, онда добивамо:

$$y\frac{p}{m} = p\left(x + \frac{n}{m}\right).$$

Ова нам једначина претставља полару параболе $y = 2px$ чији је пол у тачци $\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right)$.

Пример: Наћи тангенте параболе: $y^2 = 4x$ које су повучене из тачке (3,4).

Решење: Једначина поларе дате параболе чији се пол налази у задатој тачци претстављена је изразом:

$$y \cdot 4 = 2(x + 3)$$

или

$$2y = x + 3.$$

Решавањем ове једначине са једначином параболе: $y^2 = 4x$, по непознатим величинама x и y, добивају се следећи парови корена:

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 1$$
$$y_1 = 6 \qquad y_2 = 2$$

Кад у обрасцу за једначину тангенте параболе сменимо понаособ ове парове корена, тада добивамо једначине: $x - 3y + 9 = 0$ и $x - y + 1 = 0$. Ове нам једначине претстављају тражене тангенте параболе. Овај смо пример решили и у § 95 по другом начину решавења и дошли смо до истог резултата.

Ако за пол параболине поларе узмемо жижу параболину т.ј. тачку $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, онда ће полара параболина бити:

$$y.0 = px + \frac{p}{2}$$

одакле је

$$x = -\frac{p}{2} \; \ldots \; 6).$$

Једначина 6) нам као што се види претставља директрису параболе.

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенте параболе: $y^2 = 3x$, које су повучане из тачке (5,4).

2) Наћи тангенте параболе: $y^2 = 12x$, које су повучене из тачке (—4,1).

3) Наћи тангенте параболе: $y^2 = 2x$, које су повучене из тачке $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

* § 97. КОНСТРУКЦИЈА ПАРАБОЛИНЕ ТАНГЕНТЕ.

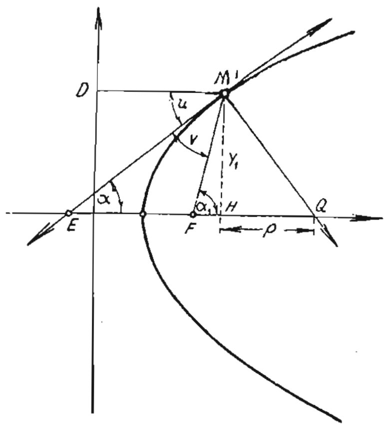
1 чл. Нека је на сл. 79 претстављена парабола: $y^2 = 2px$ и њена тангента: $yy_1 = p(x + x_1)$ која додирује параболу у тачци $M_1(x_1,y_1)$.

Обележимо са α угао који заклапа тангента са позитивним смислом апсцисне осе, а са α_1 угао који заклапа потег FM_1 са позитивним смислом апсцисне осе. Из слике се види да је:

$$tg\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} \; \ldots\ldots \; 1).$$

а знамо да је:

$$tg\alpha = \frac{p}{y_1} \; \ldots . \; 2).$$



Сл. 79

Ако обележимо са v угао који заклапа тангента са потегом FM_1, онда је:

$$v = \alpha_1 - \alpha$$

одакле је:

$$tgv = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha_1 \, tg\alpha}$$

или с обзиром на изразе 1) и 2)

$$tgv = \frac{\frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} - \frac{p}{y_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} \cdot \frac{p}{y_1}} = \frac{y_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{2}}{x_1y_1 - y_1\frac{p}{2} + y_1p}.$$

Како је: $y_1^2 = 2px_1$ то је:

$$tgv = \frac{2px_1 - px_1 + \frac{p^2}{2}}{x_1y_1 + \frac{y_1p}{2}} = \frac{px_1 + \frac{p^2}{2}}{x_1y_1 + \frac{y_1p}{2}} = \frac{p\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)}{y_1\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)}$$

одакле је

$$tg\, v = \frac{p}{y_1} \; \ldots\ldots \; 3).$$

Десне стране израза 2) и 3) су међу собом једнаке, па према томе морају бити једнаке и њихове леве стране. Одатле излази да је:

$$tg\, v = tg\alpha \; \ldots\ldots \; 4).$$

Познато нам је правило: кад су тангенси углова мањих од 180^0 међу собом једнаки, онда и ти углови морају бити такође међу собом једнаки.

Према изложеном правилу из једначине 4) излази да је:

$$v = \alpha \; \ldots\ldots \; 5).$$

Обележимо са u угао који заклапа тангента са правом која пролази кроз тачку $M_1(x_1,y_1)$ и стоји нормално на директриси параболе.

Пошто је угао α једнак углу u као наизменични, то тако исто мора бити:

$$v = u \; \ldots\ldots \; 6).$$

Из једначине 5) видимо, да је троугао FM_1E равнокрак. Његова се основица поклапа са тангентом параболе која пролази тачку $M_1(x_1,y_1)$. Према томе конструкцију параболине тангенте која пролази кроз неку тачку M_1, на параболи вршимо на следећи начин:

На оси параболе од тачке F у негативном смислу апсцисне осе, треба узети дуж FE која је једнака са дужином потега FM_1. Права линија повучена кроз тачке E и M_1 је тангента параболе која пролази кроз тачку M_1.

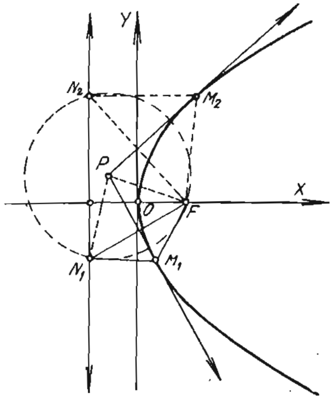
Конструкцију исте тангенте можемо извршити и на овај начин. Из једначине 6) излази, да тангента параболе повучена из једне тачке на параболи заклапа једнаке углове са потегом те тачке и правом која пролази кроз ту тачку и стоји нормално на директриси параболе. Према томе се конструкција параболине тангенте из неке тачке M_1 на параболи може извршити и на следећи начин:

Прво треба из те тачке повући потег FM_1 и дуж DM_1 која стоји нормално на директриси параболе. После тога се конструише симетрала угла FM_1D, која је истовремено и тангента параболе повучена кроз ту тачку.

Сем наведених начина, конструкцију тангенте параболе можемо извршити и овако:

Из тачке M_1 повуче се дуж M_1H која стоји нормално на оси параболе. Затим се, на оси параболе од тачке H у позитивном смислу апсцисне осе, узме дуж HQ, која је једнака величини p. Права линија која пролази кроз тачке M_1 и Q је према § 93 нормала параболе. Ако кроз тачку M_1 повучемо праву линију која са нормалом параболе заклапа прав угао, онда нам та права претставља тангенту параболе.

2 чл. Нека је на сл. 80 претстављена парабола: $y^2 = 2px$ и тачка $P(x_0,y_0)$ која се налази ван параболе. Једна тангента параболе повучена из задате тачке додирује параболу у тачци $M_1(x_1,y_1)$. Кад из те тачке повучемо праву линију која је паралелна са осом параболе, она ће сећи директрису тачци N_1.



Сл. 80

Троугао FM_1N_1 је равнокраки, јер је према дефиницији параболе: $FM_1 = M_1N_1$. Пошто посматрана тангента заклапа једнаке углове са крацима равнокраког троугла FM_1N_1, то она мора бити и симетрала основице тога троугла т.ј. дужи FN_1. Како свака тачка на симетрали неке дужи подједнако отстоји од крајњих тачака те дужи, то мора бити:

$$PF = PN_1 \ \ldots\ldots\ 1).$$

Из једначине 1) излази, да се тачка N_1 налази у пресеку параболине директрисе и круга описаног око тачке P са полупречником PF.

Према томе конструкцију параболине тангенте повучене из једне тачке ван параболе вршимо на следећи начин:

Прво из задате тачке опишемо круг са полупречником који је раван отстојању од те тачке до жиже. Тај круг сече директрису параболе у двема тачкама. Ако из ма које од тако добивених тачака повучемо дуж до жиже, онда ће нам симетрала те дужи бити тангента параболе која пролази кроз задату тачку ван параболе.

На исти се начин конструише и друга тангента параболе која пролази кроз задату тачку.

* 98. ПОЛАРЕ ПАРАБОЛЕ

чији се полови налазе на једној правој линији.

Узмимо за полове параболиних полара неколико тачака на правој линији:

$$y = mx + n \ \ldots\ldots\ 1).$$

Нека су те тачке: $M_0(x_0,y_0)$; $M_1(x_1,y_1)$; $M_2(x_2,y_2) \ldots$ итд. односно: $M_0(x_0, mx_0 + n)$; $M_1(x_1, mx_1 + n)$; $M_2(x_2, mx_2 + n) \ldots$ итд.

Поларе параболе: $y^2 = 2px$, чији се полови налазе у задатим тачкама, претстављене су следећим једначинама:

$$\left.\begin{array}{lll} y(mx_0 + n) = p(x + x_0) & \text{или} & y = \dfrac{px}{mx_0 + n} + \dfrac{px_0}{mx_0 + n} \\ y(mx_1 + n) = p(x + x_1) & \text{или} & y = \dfrac{px}{mx_1 + n} + \dfrac{px_1}{mx_1 + n} \\ y(mx_2 + n) = p(x + x_2) & \text{или} & y = \dfrac{px}{mx_2 + n} + \dfrac{px_2}{mx_2 + n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ 2).$$

Пошто коефицијенти правца правих 2) нису међу собом једнаки, то значи, да се оне секу негде у коначности. Ако ма које две од њих решимо по промењивим величинама x и y, онда ћемо добити за координате њихова пресека следеће изразе:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{n}{m} \\ y = \dfrac{p}{m} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ 3)$$

Величине: x и y у овим изразима не зависе од координата полова поларе (2), него само од величина: m, n и p, које се у датом случају сматрају за сталне величине; што значи да се све поларе (2) секу у једној тачци чије су координате: $\left(\dfrac{n}{m}, \dfrac{p}{m}\right)$.

Из свега овога излази закључак према коме се све поларе параболе: $y^2 = 2px$ чији се полови налазе на једној правој линији морају сећи у једној тачци.

Дискусија:

Ако претпоставимо, да је у једначини 1) величина m равна нули, онда права линија, која је претстављена том једначином, мора бити паралелна са апсцисном осом, односно са осом параболе. У томе случају поларе (2) су међу собом паралелне, а њихов пресек претстављен изразима 3) постаје:

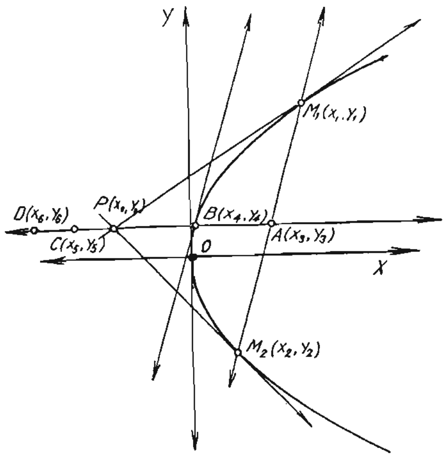
$$x = \frac{n}{0} = \infty$$

$$y = \frac{p}{0} = \infty.$$

Из овога излази закључак према коме су поларе параболе: $y^2 = 2px$ међу собом паралелне, ако им се полови налазе на правој лнниjи коjа jе паралелна са осом параболе.

* § 99. ДИJАМЕТРИ ПАРАБОЛЕ.

Нека jе на сл. 81 претстављена парабола: $y^2 = 2px$ и тачка $P(x_0, y_0)$ коjа се налази ван те параболе. Полара параболе чиjи се пол налази у задатоj тачци, сече параболу у тачкама $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.



Сл. 81

Ако обележимо са $A(x_3, y_3)$ средину параболине тетиве M_1M_2, онда ће њене координате бити:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Кад у овим изразима место величина x_1, x_2 и y_1, y_2, ставимо њихове вредности претстављене изразима 4) из § 96 тада добивамо:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_0^2 - px_0}{p} \\ y_3 &= y_0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Права линиjа коjа пролази кроз тачке: $P(x_0, y_0)$ и $A(x_3, y_3)$ претстављена jе jедначином:

$$y - y_0 = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0}(x - x_0).$$

Ако у овоj jедначини величине: x_3 и y_3 сменимо њиховим вредностима из израза 1) онда добивамо jедначину:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_0}{\frac{y_0^2 - px_0}{p} - x_0}(x - x_0)$$

одакле jе:

$$y = y_0 \ \ldots\ldots 2).$$

Из jедначине 2) излази закључак према коме права линиjа коjа пролази кроз пол неке параболине поларе и кроз средину тетиве коjа настаjе пресеком параболе и посматране поларе мора бити паралелна са осом параболе.

Из овога закључка излази следеће правило:

Ако права линиjа пролази кроз пол неке параболине поларе а паралелна jе са осом параболе, онда она мора половити тетиву коjа jе настала пресеком параболе и посматране поларе.

Узмимо на правоj (2) неколико тачака и обележимо их са $P(x_0, y_0)$; $C(x_5, y_5)$; $D(x_6, y_6)$ и т. д. Jедначине параболиних полара чиjи се полови налазе у посматраним тачкама биће претстављене следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} yy_0 &= p(x + x_0) \text{ или } y = \frac{p}{y_0}(x + x_0) \\ yy_5 &= p(x + x_5) \text{ или } y = \frac{p}{y_5}(x + x_5) \\ yy_6 &= p(x + x_6) \text{ или } y = \frac{p}{y_6}(x + x_6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \quad " \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \quad " \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Пошто се полови ових полара налазе на правоj линиjи коjа jе паралелна са осом параболе, то значи да су и оне међу собом паралелне. Према томе мораjу бити међу собом паралелне и тетиве коjе настаjу пресеком параболе и полара (3).

Свака права линиjа коjа има ту особину, да полови параболине паралелне тетиве назива се диjаметром параболе. Према томе нам и jедначина 2) претставља jедан диjаметар параболе.

На исти бисмо начин доказали и за макоjу другу праву линиjу коjа jе паралелна са осом параболе, да и она мора половити извесне параболине паралелне тетиве, односно да претставља jедан диjаметар параболе.

Из тога излази закључак према коме су сви параболини диjаметри међу собом паралелни т.j. секу се у jедноj тачки у бесконачности коjа се назива *центром параболе.*

2 чл. Коњугованих диjаметара у оном смислу као код круга, елипсе и хиперболе, код параболе не може бити, jер су сви међу собом паралелни и ниjедан од њих не може половити тетиве паралелне оном другом.

Ако дијаметар (2) сече параболу у тачци $B(x_4,y_4)$, онда је тангента параболе повучена у тој тачци претстављена једначином:

$$yy_4 = p(x + x_4)$$

или

$$y = \frac{p}{y_4}(x + x_4) \; \ldots\ldots \; 4).$$

Пошто се тачке: $P(x_0,y_0)$; $A(x_3,y_3)$; $B(x_4,y_4)$; $C(x_5,y_5)$ и $D(x_6,y_6)$ налазе на дијаметру (2), то њихове ординате морају бити једнаке т.ј. мора бити:

$$y_0 = y_3 = y_4 = y_5 = x_6.$$

Према томе коефицијенти правца полара (3) и тангенте (4) морају бити једнаки. Из тога излази следећи закључак:

Ако из тачке у којој дијаметар сече параболу повучемо тангенту параболе, онда ће та тангента бити паралелна са тетивама параболе које полови тај дијаметар.

Тангента параболе у којој дијаметар сече параболу чини са тим дијаметром пар коњугованих дијаметара.

Како је апсцисна оса паралелна са свим дијаметрима параболе: $y^2 = 2px$, то нам и она претставља један дијаметар те параболе. Тангента параболе, која је повучена у тачци, где апсцисна оса сече параболу, је ординатна оса. Дакле апсцисна и ординатна оса правоуглог координатног система XOY сачињавају један пар коњугованих дијаметара параболе: $y^2 = 2px$.

Пример: Одредити коефицијенат правца полара параболе: $y^2 = 18x$ чији се полови налазе на дијаметру те параболе: $y = 6$.

Решење: Тачка у којој дати дијаметар сече задату параболу је (2,6). Тангента задате параболе која је повучена кроз ту тачку, претстављена је једначином:

$$y.6 = 9(x + 2)$$

или

$$y = \frac{3}{2}x + 3.$$

Коефицијенат правца сваке поларе параболе: $y^2 = 18x$, чији се пол налази на правој: $y = 6$, мора бити једнак коефицијенту правца ове тангенте т.ј. $m = \frac{3}{2}$.

Други пример: Наћи дијаметар параболе: $y^2 = 16x$ који полови тетиве те параболе, које су паралелне са правом: $y = 2x - 7$.

Решење: Ако обележимо са $M_1(x_1,y_1)$ тачку додира између дате параболе и њене тангенте која је паралелна са задатом правом, онда ће једначина те тангенте бити:

$$y = \frac{8}{y_1}(x + x_1).$$

Пошто је коефицијенат правца ове тангенте једнак коефицијенту правца задате праве, то мора бити:

$$2 = \frac{8}{y_1}$$

одакле је

$$y_1 = 4.$$

Како се тачка $M_1(x_1,y_1)$ налази на траженом дијаметру, а знамо да су ординате свих тачака дијаметра параболе $y^2 = 2px$, међу собом једнаке, то нам је тражени дијаметар претстављен следећом једначином: $y = 4$.

ЗАДАЦИ:

1) Одредити коефицијенат правца тетива параболе: $y^2 = 2x$ које полови дијаметар: $y = 4$.

2) Наћи дијаметар параболе: $y^2 = 6x$ који полови тетиве параболине, које су паралелне са правом: $x - y + 5 = 0$.

3) Тетива параболе: $y^2 = 32x$ преполовљена је тачком $\left(\frac{5}{4}, 2\right)$; наћи дужину те тетиве.

4) Један дијаметар параболе: $y^2 = 8x$ је: $y = -4$; наћи њему коњуговани дијаметар.

5) Одредити дијаметар параболе: $y^2 = \frac{9}{4}x$ чији је коњуговани дијаметар: $3x - 2y - 6 = 0$.

6) Два дијаметра параболе: $y^2 = 36x$ претстављена су једначинама $y = 3$ и $y = 6$; наћи угао који захватају њихови коњуговани дијаметри.

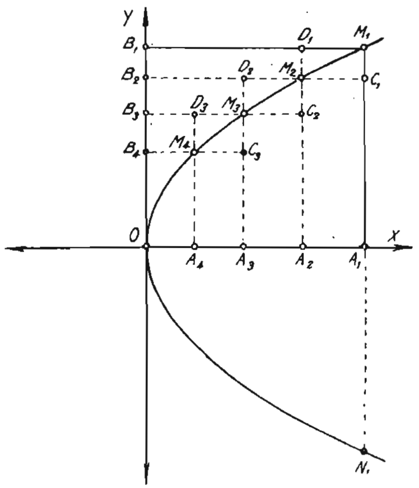
* § 100. ПОВРШИНА ПАРАБОЛИНА ОТСЕЧКА (СЕГМЕНТА).

Нека је на сл. 82 претстављена парабола: $y^2 = 2px$. Узмимо у посматрање на луку те параболе тачке: $M_1(x_1,y_1)$; $M_2(x_2y_2)$, $M_3(x_3y_3)$; $M_4(x_4y_4)$ и т.д. Ако из тих тачка повучемо праве линије нормалне на осовине правоуглог координатног система XOY, онда ће те праве сећи осовине у тачкама: A_1, A_2, A_3, A_4, ... и B_1, B_2, B_3, B_4, ... и т. д.

Међусобне пресеке појединих тако повучених нормалних правих линија обележили смо са тачкама: C_1, C_2, C_3 ..... и D_1, D_2, D_3 ..... и т. д.

Из слике се види, да је површина правоугаоника: $A_1A_2D_1M_1 = (x_1 - x_2)y_1$, а површина правоугаоника: $B_1B_2C_1M_1 = (y_1, -y_2)x_1$. Размера ових површина ће бити претстављена следећим изразом:

$$\frac{A_1A_2D_1M_1}{B_1B_2C_1M_2} = \frac{(x_1-x_2)y_1}{(y_1-y_2)x_1} = \frac{(y_1^2-y_1^2)y_1}{2px_1(y_1-y_2)}$$



Сл. 82.

одакле је:

$$\frac{A_1A_2D_1M_1}{B_1B_2C_1M_1} = \frac{(y_1 + y_2)y_1}{2px_1} \; ..... \; 1).$$

Вредност размере (1) важи за наведене правоугаонике увек докле год је растојање између тачака $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ коначна величина. Међутим, ако је растојање између тачака $M_2(x_2,y_2)$ и $M_1(x_1,y_1)$ бескрајно мало, онда се ординате y_1 и y_2 бескрајно мало разликују једна од друге т.ј. могу се сматрати за једнаке. У томе случају размера (1) добива облик:

$$\frac{A_1A_2D_1M_1}{B_1B_2C_1M_1} = \frac{2y_1 . y_1}{2px_1} = \frac{y_1^2}{px} = \frac{2px_1}{px_1} = 2 \; ..... \; 2).$$

Ако бисмо узели, да су отстојања између тачака: $M_2(x_2,y_2)$ и $M_3(x_3,y_3)$ и тачака: $M_3(x_3,y_3)$ и $M_4(x_4,y_4)$ итд. такође бескрајно мале величине, онда би биле размере површина:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_2A_3D_2M_2}{B_2B_3C_2M_2} &= 2 \\ \frac{A_3A_4D_3M_3}{B_3B_4C_3M_3} &= 2 \end{aligned}\right\} \; ..... \; 3).$$

Пошто су количници размера (2) и (3) једнаки, онда те размере можемо написати на следећи начин:

$$\frac{A_1A_2D_1M_1}{B_1B_2C_1M_1} = \frac{A_2A_3D_2M_2}{B_2B_3C_2M_2} = \frac{A_3A_4D_3M_3}{B_3B_4C_3M_3} = \; ..... = 2$$

одакле је:

$$\frac{A_1A_2D_1M_1 + A_2A_3D_2M_2 + A_3A_4D_3M_3 + \dots}{B_1B_2C_1M_1 + B_2B_3C_2M_2 + B_3B_4C_3M_3 + \dots} = 2 \; ..... \; 4).$$

Бројитељ разломка (4) претставља површину која је ограничена луком параболе, апсцисном осом и ординатом тачке $M_1(x_1,y_1)$, а именитељ тога разломка претставља површину ограничену луком параболе, ординатном осом и апсцисом тачке $M_1(x_1,y_1)$.

Ако бројитељ разломка (4) обележимо са P, а његов именитељ са P', онда имамо:

$$\frac{P}{P'} = 2$$

или

$$P' = \frac{P}{2} \; .... \; 5).$$

Из слике се види да је:

$$P + P' = x_1y_1 \; ..... \; 6).$$

Кад у једначини 6) место величине P' ставимо њену вредност из једначине 5), тада добивамо:

$$P + \frac{P}{2} = x_1y_1$$

одакле је

$$P = \frac{2}{3}x_1y_1 \; ..... \; 7).$$

Једначина 7) нам претставља образац за израчунавање површине која је ограничена луком параболе, апсцисном осом и ординатом неке тачке на параболи.

Очевидно је, да ће површина параболина отсечка који је на приложеној слици ограничен са луком параболе M_1ON_1 и тетивом M_1N_1, бити претстављена изразом:

$$P = \frac{4}{3}x_1y_1 \; ..... \; 8).$$

Пример: Наћи површину која је ограничена луком параболе: $y^2 = \frac{16}{3}x$, апсцисном осом и ординатом тачке (3,4).

Решење: $P = \frac{2}{3}3.4 = 8.$

ЗАДАЦИ:

1) Кроз жижу параболе: $y^2 = 14x$ повучена је тетива те параболе, која стоји нормално на апсцисној оси, израчунати површину тако добивеног параболина отсечка.

2) Права линија пролази кроз теме параболе: $y^2 = 3x$ и са осом те параболе захвата угао од 45^0, наћи површину сегмента, који отсеца та права од параболе.

3) Наћи површину сегмента који отсеца права: $2x - y + 2 = 0$ од параболе: $y^2 = 18x$.

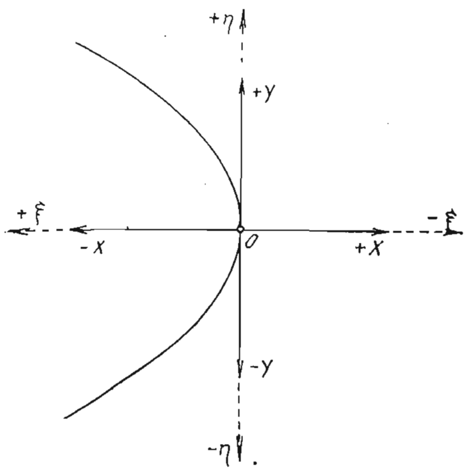
* § 101. СПЕЦИЈАЛНИ ПОЛОЖАЈИ ПАРАБОЛЕ У ПРАВОУГЛОМ КООРДИНАТНОМ СИСТЕМУ *XOY*.

Параболу можемо конструисати увек у некој равни узимајући ма коју праву линију у тој равни за осу параболе и ма коју тачку на тој правој за теме параболе.

1 чл. Нека је на сл. 83 претстављен правоугли координатни систем $\xi O \eta$ и у њему конструисана парабола:

$$\eta^2 = 2p\xi \; \ldots\ldots \; 1).$$

Поставимо у раван те параболе нови правоугли координатни систем тако да му се почетак поклапа са почетком система $\xi O \eta$. Ординатна оса новога система нека се поклапа и по правцу и по смислу са ординатном осом система $\xi O \eta$. Позитивна грана апсцисне осе новога система нека се поклапа са негативном граном апсцисне осе система $\xi O \eta$; а негативна грана апсцисне осе новога система нека се поклапа са позитивном граном апсцисне осе система $\xi O \eta$. Обележимо тај нови систем са XOY.



Сл. 83.

Односи између координата неке тачке која се налази у ова два координатна система претстављени су следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -x \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Ови односи важе за све тачке које леже у равни наведених координатних система, па према томе и за тачке које се налазе на задатој параболи.

Ако у једначини 1) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из израза 2), онда добивамо једначину:

$$y^2 = -2px \; \ldots\ldots \; 3)$$

Ова нам једначина претставља параболу чије је теме у почетку правоуглог координатног система XOY, а која се простире у смислу негативне гране апсцисне осе. Једначину 3) можемо написати и на следећи начин:

$$y = \pm \sqrt{-2px} \; \ldots\ldots \; 4).$$

Из овога израза видимо да свакој негативној вредности *x-са* одговарају две по апсолутној вредности једнаке али супротно означене вредности *y-на*. Међутим свакој позитивној вредности *x-са* одговарају по две имагинарне вредности *y-на*, што значи, да се заиста парабола (3) простире у смислу негативне гране апсцисне осе правоуглог координатног система XOY.

2 чл. Нека је на сл. 84 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему конструисана парабола чије је теме у координатном почетку, а која се простире у смислу позитивне гране ординатне осовине. Узмимо у посматрање на тој параболи неку тачку $M(x,y)$. Из приложене слике се види да је:

$$x^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

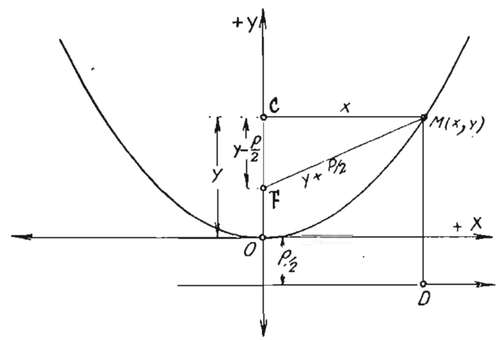
или

$$x^2 = y^2 + py + \frac{p^2}{4} - y^2 + py - \frac{p^2}{4}$$

одакле је:

$$x^2 = 2py \; \ldots\ldots \; 5).$$

Ова нам једначина важи за сваку тачку која се налази на посматраној параболи, па се зато и назива једначином те параболе.

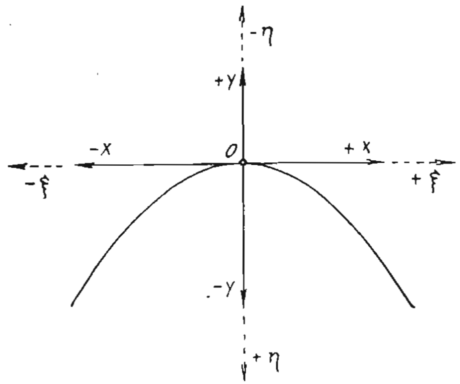


Сл. 84

3 чл. Нека је на слици 85 претстављен правоугли координатни систем $\xi O \eta$ и у њему парабола:

$\xi^2 = 2p\eta \ldots\ldots 6).$

Поставимо у раван система $\xi 0 \eta$ нови правоугли координатни систем чији се почетак поклапа са почетком тога система. Апсцисна оса новога система нека се поклапа и по правцу и по смислу са апсцисном осом система $\xi 0 \eta$. Позитивна грана ординатне осе новога



Сл. 85

система нека се поклапа са негативном граном ординатне осе система $\xi 0 \eta$, а негативна грана ординатне осе новога система нека се поклапа са позитивном граном ординатне осе система $\xi 0 \eta$.

Односи између координата неке тачке у наведеним координатним системима биће претстављени следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= -y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 7).$$

Ови изрази важе за сваку тачку која се налази у равни поменутих координатних система, па према томе и за тачке које се налазе на задатој параболи.

Ако у једначини 6) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из израза 7), онда добивамо једначину:

$$x^2 = -2py \ldots\ldots 8).$$

Ова нам једначина претставља задату параболу у правоуглом координатном систему XOY.

Једначину 8) можемо написати и на овај начин:

$$x = \sqrt{-2py}.$$

Из овога израза видимо, да свакој негативној вредности y-на одговарају две по апсолутној вредности једнаке, али супротно означене вредности x-са. Међутим из истога израза видимо да свакој позитивној вредности y-на одговарају по две имагинарне вредности x-са, што значи, да се заиста задата парабола простире у смислу негативне гране ординатне осовине правоуглог координатног система XOY.

ЗАДАЦИ:

1) Конструисати параболу:

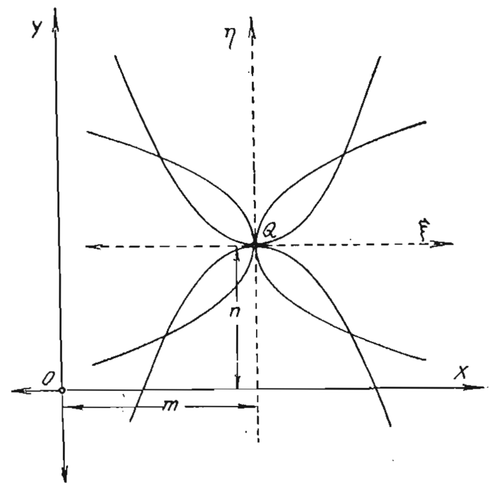
a) $y^2 = 6x$; b) $y^2 = -6x$; c) $x^2 = 6y$; d) $x^2 = -6y$.

2) Конструисати параболу:

a) $y^2 = -8x$; b) $x^2 = 5y$; c) $x^2 = -7y$.

* § 102. ПАРАБОЛА ЧИЈЕ СЕ ТЕМЕ НЕ НАЛАЗИ У ПОЧЕТКУ ПРАВОУГЛОГ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА XOY, А ЧИЈА ЈЕ ОСА ПАРАЛЕЛНА СА ЈЕДНОМ ОД ОСОВИНА ТОГА СИСТЕМА.

1) чл. Нека је на сл. 86 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему тачка $Q(m, n)$. Поставимо у равни тога система нови правоугли координатни систем $\xi Q \eta$, тако, да му позитивна грана апсцисне осе буде паралелна са позитивном граном апсцисне осе система XOY, и позитивна грана ординатне осе буде паралелна са позитивном граном ординатне осе истога система.



Сл. 86.

Параболе, чија темена леже у почетку система $\xi Q \eta$, а чије се осе поклапају са координатним осовинама тога система, претстављене су једначинама:

$$\left.\begin{aligned} \eta^2 &= 2p\xi \\ \eta^2 &= -2p\xi \\ \xi^2 &= 2p\eta \\ \xi^2 &= -2p\eta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Односи између координата ма које тачке која се налази у равни система XOY и $\xi Q \eta$ претстављени су следећим једначинама:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - m \\ \eta &= y - n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 2).$$

Ако у једначинама 1) место величина ξ и η ставимо њихове вредности из једначина 2) онда добивамо:

$$\left.\begin{array}{lll} (y-n)^2 = 2p(x-m) & \text{или} & y^2-2ny-2px+n^2+2pm=0 \\ (y-n)^2 = -2p(x-m) & \text{„} & y^2-2ny+2px+n^2-2pm=0 \\ (x-m)^2 = 2p(y-n) & \text{„} & x^2-2mx-2py+m^2+2pn=0 \\ (x-m)^2 = -2p(y-n) & \text{„} & x^2-2mx+2py+m^2-2pn=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots 3).$$

Ове нам једначине у систему XOY претстављају параболе чије се теме не налази у координатном почетку а чије су осе паралелне са координатним осовинама тога система.

Посматрањем првих двеју од једначина 3) уочавамо, да им коефицијенти уз променљиву величину x не зависе од координата темена, него само од параметра параболе. Сем тога је у првој од поменутих једначина коефицијенат уз променљиву x негативан, а у другој позитиван. Прва од тих једначина претставља параболу која се простире у смислу позитивне гране апсцисне осе, а друга параболу која се простире у смислу негативне гране апсцисне осе система XOY.

Из овога излази следећи закључак:

Ако је у једначини облика: $y^2 + ay + bx + c = 0$ коефицијенат уз променљиву x негативан, онда нам она претставља параболу која се простире у смислу позитивне гране апсцисне осе, а ако је коефицијенат уз променљиву x позитиван, онда нам та једначина претставља параболу, која се простире у смислу негативне гране апсцисне осе правоуглог координатног система XOY.

Тако исто посматрањем задњих двеју од једначина 3) уочавамо, да им коефицијенти уз променљиву y не зависе од координата темена него само од параметра параболе. Прва од тих једначина има негативан коефицијенат уз променљиву y, а претставља параболу која се простире у позитивном смислу ординатне осе правоуглог координатног система XOY. Друга од тих двеју једначина има позитиван коефицијенат уз променљиву y, а претставља параболу која се простире у негативном смислу ординатне осе правоуглог координатног система XOY.

Из тога излази закључак:

Ако је у једначини облика: $x^2 + bx + ay + c = 0$ коефицијенат уз променљиву y негативан, онда нам она претставља параболу која се простире у смислу позитивне гране ординатне осе; а ако је коефицијенат уз променљиву y позитиван,

онда нам та једначина претставља параболу која се простире у смислу негативне гране ординатне осе правоуглог координатног система XOY.

2 чл. Кад се у првој од једначина 3) изврше назначене рачунске радње са познатим величинама, онда ће она добити следећи облик:

$$y^2 + Ey + Dx + F = 0 \ldots\ldots 4).$$

У овој једначини мора бити:

$$\left.\begin{array}{lll} E = -2n & \text{одакле је:} & n = -\dfrac{E}{2} \\ D = -2p & \text{„} \quad \text{„}: & p = -\dfrac{D}{2} \\ F = n^2 + 2pm & \text{„} \quad \text{„}: & m = \dfrac{E^2 - 4F}{4D} \end{array}\right\} \ldots\ldots 5).$$

Тако исто, ако се у другој од једначина 3) изврше назначене рачунске радње са познатим величинама, онда ће и она добити облик:

$$y^2 + E_1y + D_1x + F_1 = 0 \ldots\ldots 6).$$

Одавде мора бити:

$$\left.\begin{array}{lll} E_1 = -2n & \text{одакле је:} & n = -\dfrac{E_1}{2} \\ D_1 = 2p & \text{„} \quad \text{„}: & p = \dfrac{D_1}{2} \\ F_1 = n - 2pm & \text{„} \quad \text{„}: & m = \dfrac{E_1{}^2 - 4F_1}{4D_1} \end{array}\right\} \ldots\ldots 7).$$

Помоћу израза 5) и 7) одређују се координате темена и параметар параболе, ако је њена једначина дата у облику (4) и (6).

Једначине 4) и 6) имају исти облик; а и координате темена оних двеју парабола које су претстављене тим једначинама изражене су идентичним обрасцима.

Параметар парабола (4) и (6) као позитивна величина увек је раван апсолутној вредности коефицијента уз променљиву величину x.

1. Пример: Одредити координате темена и параметар параболе: $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$.

Решење: Према обрасцима 5) или 7) излази да је:

$$m = \frac{16 - 4.28}{4(-8)} = 3; \; n = -\frac{-4}{2} = 2 \text{ и } 2p = 8.$$

II. Пример: Одредити координате темена и параметар параболе: $y^2 - 6y + 10x - 31 = 0$.

Решење: Према обрасцима 5) или 7) мора бити:

$$m = \frac{36-4(-31)}{4.10} = 4;\ n = -\frac{-6}{2} = 3 \text{ и } 2p = 10.$$

Кад у трећој од једначина 3) извршимо назначене рачунске радње са познатим величинама, тада она добива облик:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \ldots\ldots 8).$$

У овој једначини је:

$$\left.\begin{array}{ll} D = -2m & \text{одакле је: } m = -\frac{D}{2} \\ E = -2p & \text{одакле је: } p = -\frac{E}{2} \\ F = m^2 + 2pn & \text{одакле је: } n = \frac{D^2 - 4F}{4E} \end{array}\right\} \ldots\ldots 9).$$

Ако пак у четвртој од једначина 3) извршимо назначене рачунске радње са познатим величинама, онда добивамо:

$$x^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \ \ldots\ldots\ 10).$$

Одавде мора бити:

$$\left.\begin{array}{ll} D_1 = -2m & \text{одакле је: } m = -\frac{D_1}{2} \\ E_1 = 2p & \text{одакле је: } p = \frac{E_1}{2} \\ F_1 = m^2 - 2pn & \text{одакле је: } n = \frac{D_1^2 - 4F_1}{4E_1} \end{array}\right\} \ldots\ldots 11).$$

Једначине 8) и 10) имају исти облик, а координате темена оних двеју парабола, које су претстављене тим једначинама, изражене су идентичним обрасцима 9) и 11).

Параметар параболе (8) и (10) као позитивна величина претстављен је апсолутном вредности коефицијента у величину y.

I. Пример: Одредити координате темена и параметар параболе: $x^2 - 10x - 6y + 37 = 0$.

Решење: Према обрасцима 9) или 11) излази да је:

$$m = -\frac{-10}{2} = 5;\quad n = \frac{100 - 4.37}{4(-6)} = 2 \text{ и } 2p = 6.$$

II. Пример: Одредити координате темена и параметар параболе: $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$.

Решење: Према обрасцима 9) или 11) мора бити:

$$m = -\frac{-8}{2} = 4;\quad n = \frac{64 - 4.4}{4.4} = 3 \text{ и } 2p = 4.$$

Кад се одреде параметар и теме параболе, онда је лако извршити конструкцију параболе.

ЗАДАЦИ:

Одредити параметар, координате темена и конструисати параболе чије су једначине:

1) $y^2 - 12y - 10x + 46 = 0$.
2) $y^2 + 10y + 12x + 73 = 0$.
3) $x^2 - 14x - 2y + 41 = 0$.
4) $x^2 + 8x + 8y - 24 = 0$.

3 чл. Ако четврту од једначина 3) решимо по променљивој y, онда добивамо:

$$2py = (2pn - m^2) + mx - x^2$$

или

$$y = \frac{2pn - m^2}{2p} + \frac{m}{p}x - \frac{x^2}{2p} \ldots\ldots 12).$$

У овој једначини коефицијенат уз x^2 не зависи од координата центра, него само од параметра параболе, те према томе мора бити увек негативан. Кад се у једначини 12) изврше назначене рачунске операције, тада се добива једначина облика:

$$y = M + Nx - Rx^2 \ \ldots\ldots\ 13).$$

Ако претпоставимо да се почетак правоуглог координатног система XOY налази на параболи 13), онда његове координате морају задовољавати једначину те параболе т.ј. мора бити:

$$O = M + N.O - R.0$$

одакле је:

$$M = O.$$

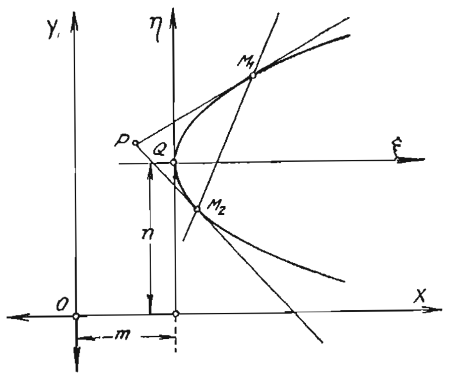
Дакле у том се случају једначина 13) своди на облик:

$$y = Nx - Rx^2 \ \ldots\ldots\ 14).$$

Ова нам једначина увек претставља параболу на којој се налази почетак правоуглог коорринатног система XOY и која се простире у смислу негативне гране ординатне осе независно од тога какву вредност има коефицијенат N и каква је апсолутна вредност коефицијента R.

* § 103. ПОЛАРА, ТАНГЕНТА И НОРМАЛА ПАРАБОЛЕ ЧИЈЕ СЕ ТЕМЕ НЕ НАЛАЗИ У ПОЧЕТКУ ПРАВОУГЛОГ КООРДИНАТНОГ СИСТЕМА XOY И ЧИЈА ЈЕ ОСА ПАРАЛЕЛНА СА ЈЕДНОМ ОД ЊЕГОВИХ КООРДИНАТНИХ ОСОВИНА.

Нека је на сл. 87. претстављен правоугли координатни систем XOY. Поставимо у равни тога система нови правоугли координатни систем $\xi Q \eta$, тако да му одговарајуће осе буду паралелне у истом смислу као што се то види на приложеној слици. Обележимо са (m,n) координате тачке Q у систему XOY.



Сл. 87.

Ако конструишемо параболу чије теме лежи у тачци Q и чија се оса поклапа са позитивном граном апсцисне осе система $\xi Q \eta$, онда ће њена једначина у томе систему бити претстављена изразом:

$$\eta^2 = 2p\xi \; \ldots\ldots \; 1).$$

Узмимо у посматрање ма коју тачку P која лежи у равни правоуглог координатног система $\xi Q \eta$, али се налази ван задате параболе. Обележимо координате те тачке у систему $\xi Q \eta$ са (ξ_0,η_0), а у систему XOY са (x_0,y_0).

Познато нам је, да ће однос између координата ма које тачке у посматраним правоуглим координатним системима $\xi Q \eta$ и XOY бити изражен једначинама:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - m \\ \eta &= y - n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; 2).$$

Тако ће однос између координата тачке P у наведеним системима бити претстављен изразима:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= x_0 - m \\ \eta_0 &= y_0 - n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; 3).$$

Полара задате параболе, чији се пол налази у посматраној тачци $P(\xi_0,\eta_0)$, мора бити претстављена у систему $\xi Q \eta$ следећом једначином:

$$\eta\eta_0 = p(\xi + \xi_0) \; \ldots\ldots \; 4).$$

Ако у овој једначини место величина: ξ, ξ_0, η и η_0 ставимо њихове вредности из израза 2) и 3), онда добивамо једначину:

$$(y - n)(y_0 - n) = p(x - m + x_0 - m)$$

или

$$(y - n)\;(y_0 - n) = p(x + x_0 - 2m) \; \ldots\ldots \; 5).$$

Ова нам једначина претставља посматрану полару у систему XOY.

Кад бисмо узели неку тачку $M_1(x_1,y_1)$, која се налази на самој параболи, онда би на исти начин једначина њезине поларе била претстављена изразом:

$$(y - n)\;(y_1 - n) = p(x + x_1 - 2m) \; \ldots\ldots \; 6).$$

Пошто се полара параболе, чији пол лежи у једној тачци на параболи, поклапа са њеном тангентом повученом из те тачке, то се израз 6) може сматрати једначином те тангенте.

Једначина нормале параболине налази се на тај начин, што се у једначини праве која пролази кроз задату тачку на параболи место неодређеног коефицијента правца стави негативна реципрочна вредност коефицијента правца тангенте параболине повучене кроз ту тачку.

Аналогим поступком бисмо дошли до закључка, да су једначине полара и тангената парабола: $(y - n)^2 = -2p(x - m)$; $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ и $(x - m)^2 = -2p(y - n)$ претстављене следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} &a)\text{ поларе: } &(y-n)\;(y_0-n) &= -\,p(x+x_0-2m) \\ & &(x-m)\;(x_0-m) &= \,p(y+y_0-2n) \\ & &(x-m)\;(x_0-m) &= -\,p(y+y_0-2n) \\ &b)\text{ тангенте: } &(y-n)\;(y_1-n) &= -\,p(x+x_1-2m) \\ & &(x-m)\;(x_1-m) &= \,p(y+y_1-2n) \\ & &(x-m)\;(x_1-m) &= -\,p(y+y_1-2n) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \; 7).$$

I. Пример: Наћи полару параболе: $(y - 2)^2 = 16(x - 4)$ чији се пол налази у тачци $(4,4)$.

Решење: Према обрасцу 6) мора бити:

$$(y - 2)\;(4 - 2) = 8\,(x + 4 - 8)$$

одакле је:

$$y = 4x - 14.$$

II. Пример: Наћи једначину тангенте параболе: $(x + 3)^2 = -12\,(y - 5)$, која је повучена из њене тачке $(3,2)$.

Решење: Према задњем од образаца 7) мора бити:

$$(x + 3)\;(3 + 3) = -6(y + 2 - 10)$$

одакле је:

$$x + y - 5 = 0.$$

ЗАДАЦИ:

1) Наћи тангенту и нормалу параболе: $(y-5)^2=-4(x-4)$, које су повучене из њене тачке (3,3).

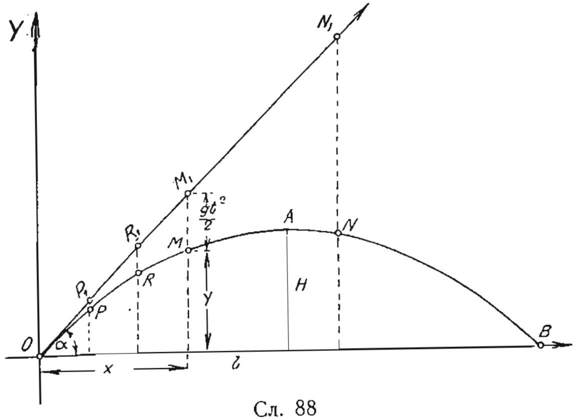
2) Одредити додирне величине параболе: $(x-1)^2=8(y-2)$, које одговарају њеној тачци (5,4).

3) Наћи полару параболе: $y^2-14y-12x+85=0$, чији се пол налази у тачци (3,4).

4) Наћи тангенте параболе: $x^2+6x+5y-21=0$, које су повучене из тачке (1,3).

* § 104. КОСИ ХИТАЦ.

Кад неби било земљине теже, тело бачено у безваздушном простору под неким углом према хоризонту, кретало би се правом линијом па закону инерције. Међутим како постоји земљина тежа и на тело дејствује вертикално на ниже у сваком моменту, то се оно не креће по правој, него по извесној кривој линији. Нека нам сл. 88 претставља један коси хитац који је из тачке 0 избачен брзином c под углом α према хоризонту. Под дејством тренутне силе тело би за извесно време прешло по правој линији од тачке 0 до тачке P_1. Међутим за то исто време под утицајем земљине теже оно би се спустило из тачке P_1 у тачку P. По принципу о независности дејства сила, тело ће се кретати по дијагонали паралелограма кретања и у моменту кад би требало да буде у тачци P_1, оно ће бити у тачци P. На исти начин кад би требало тело да буде у тачци R_1 оно ће бити у тачци R и т. д. Кад узастопце повежемо тачке: O, P, R, M, A, N и т. д. тада добивамо криву линију по којој се тело стварно креће.



Сл. 88

Пошто обе посматране линије леже у истој вертикалној равни, то ћемо у ту раван поставити правоугли координатни систем, тако да му почетак пада у тачку 0, а апсцисна оса у хоризонталну раван. Ординатна оса тада мора стојати нормално на апсцасној оси у тачци 0. На приложеној слици смо апсцисну осу обележили са X, а ординатну са Y.

Да бисмо испитали природу добивене криве линије, узећемо у посматрање ма коју њену тачку. Пошто се тачка M налази на посматраној кривој линији то ћемо њене координате обележити са (x,y). Ако обележимо са t време за које би тело по правој линији прешло из тачке O у тачку M, онда ће бити $OM=ct$. Како би за то исто време тело пало из тачке M_1 у тачку M, то мора бити:

$$M_1M=\frac{gt^2}{2}$$

Из слике видимо да је:

$$cos\alpha=\frac{x}{ct}$$

или

$$t=\frac{x}{c.cos\alpha} \;.....\; 1).$$

Тако исто је:

$$tg\alpha=\frac{y+\frac{gt^2}{2}}{x}$$

или

$$x.tg\alpha=y+\frac{gt^2}{2}$$

одакле је

$$y=x.tg\alpha-\frac{g}{2}t^2 \;.....\; 2).$$

Ако у једначини 2) место величине t ставимо њену вредност из једначине 1), онда добивамо:

$$y=x.tg\alpha-\frac{gx^2}{2c^2cos^2\alpha} \;.....\; 3).$$

Ова нам једначина претставља однос између апсцисе и ординате ма које тачке на посматраној кривој линији, па према томе и није ништа друго до једначина те криве линије.

Како једначина 3) има исти облик као и једначина 14) чл. 3 § 102, то значи да добивена крива линија мора бити парабола.

Отстојање од полазне тачке па до тачке у којој тело поново падне у хоризонталну раван назива се *даљином домета*. На приложеној слици даљину домета претставља апсциса тачке $B(l,0)$. Како се тачка $B(l,0)$ налази на параболи (3) то њене координате морају задовољавати једначину те параболе.

Дакле мора бити:

$$0 = l.tg\alpha - \frac{gl^2}{2c^2cos^2\alpha}$$

или

$$\frac{gl^2}{2c^2cos^2\alpha} = l.tg\alpha$$

одакле је

$$l = \frac{c^2sin2\alpha}{g} \ldots\ldots 4).$$

Из овога обрасца излази, да ће највећа даљина домета бити, када буде испуњен следећи услов:

$$sin2\alpha = 1$$

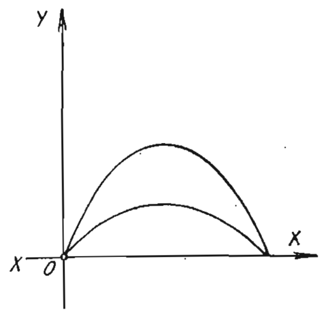
односно

$$2\alpha = 90^0$$

или

$$\alpha = 45^0.$$

За све друге углове при истој брзини домет ће бити увек мањи. Сваком домету сем највећег одговарају по два угла, јер у интервалу од 0^0 до 180^0 увек постоје по два угла који имају исте синусе изузев угла од 90^0. На сл. 89 претстављена су два различити коса хитца, који имају исти домет.



Сл. 89.

Највећу ће висину тело достићи када буде доспело у теме параболе, које смо на сл. 88 обележили са A, чије су координате:

$$\left(\frac{c^2\,sin\,2\alpha}{2g}, H\right).$$

Како се и тачка A налази на посматраној параболи, то и њене координате морају задовољити једначину те парабола. Тако имамо:

$$H = \frac{c^2\,sin\,2\alpha}{2\,g}\,tg\alpha - \frac{gc^4\,sin^2\,2\alpha}{2c^2\,4g^2\,cos^2\alpha}$$

одакле је:

$$H = \frac{c^2\,sin^2\alpha}{2\,g} \ldots\ldots 5).$$

Из овога обрасца излази, да ће тело достићи највећу висину када буде испуњен следећи услов:

$$sin^2\,\alpha = 1$$

или

$$sin\,\alpha = 1$$

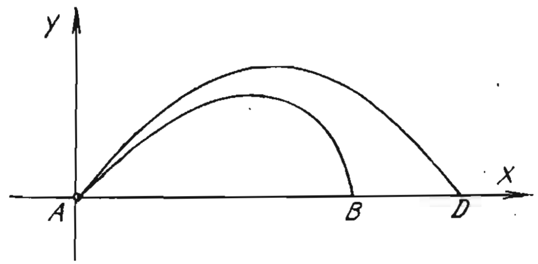
одакле је:

$$\alpha = 90^0.$$

Дакле, тело избачено вертикално на више достиже највећу висину. Тај случај се назива *вертикалним хитцем*.

Ако је угао α раван нули, онда једначина 3) добива облик:

$$y = -\frac{gx^2}{2c^2} \ldots\ldots 6).$$



Сл. 90.

Ова нам једначина такође претставља параболу која се из координатног почетка простире у смислу негативне гране ординатне осе правоуглог координатног система XOY. Овај се случај назива *хоризонталним хитцем*.

На коси хитац у ваздуху сем земљине теже дејствује и отпор ваздуха, због чега путања избаченог тела неће више бити претстављена параболом, него једном неправилном кривом линијом т.з. балистичком линијом. На сл. 90 претстављена је једна парабола и једна балистичка линија које одговарају истом елевационом углу.

ЗАДАЦИ:

◎ 1) Конструисати параболу чији је параметар $(2p)$ раван 4 дужинске јединице.

◎ 2) Конструисати параболу чији је параметар $(2p)$ раван $\frac{5}{2}$ дужинских јединица.

◎ 3) Конструисати параболу чији је параметар $(2p)$ раван $\overline{10}$ дужинских јединица.

◎ 4) Наћи темени облик једначине параболе чија се жижа налази на позитивној грани апсцисне осе, кад је њен параметар раван 9 дужинских јединица.

◎ 5) Жижа параболе, чије је теме у почетку правоуглог координатног система XOY, налази се у тачци (2,0); наћи једначину те параболе.

◎ 6) Теме параболе лежи у координатном почетку, а жижа јој се налази на позитивној грани апсцисне осе, наћи једначину те параболе кад она пролази кроз тачку (2, — 6).

◎ 7) Парабола чије је теме у координатном почетку пролази кроз тачку $\left(\frac{1}{2},4\right)$, одредити њену жижу кад се она налази на позитивној грани апсцисне осе.

◎ 8) Одредити потег параболе: $y^2 = 4x$ који је повучен из тачке чија је апсциса једнака ординати.

◎ 9) Одредити тачку на параболи: $y^2 = 9x$, кад је њен потег раван $6\frac{1}{4}$.

◎ 10) Наћи једначину директрисе параболе: $y^2 = 20x$.

◎ 11) Парабола чије је теме у координатном почетку, а простире се у смислу позитивне гране апсцисне осе, пролази кроз тачку (3,6); наћи једначину њене директрисе.

◎ 12) Наћи једначину параболе чије је теме у координатном почетку, а која се простире у смислу позитивне гране апсцисне осе, ако је: $x = -1$ једначина њене директрисе.

◎ 13) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 20x$ и тачака: (2,3); $\left(\frac{1}{5},-2\right)$ и (5,1).

◎ 14) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 16x$ и тачака: (1,4); $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ и 4,—8).

◎ 15) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = \frac{4}{3}x$ и тачака: (1,2); (3,2) и (6,—3).

◎ 16) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 4x$ и праве: $y = 2x - 4$.

◎ 17) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 6x$ и праве: $3x - 2y + 2 = 0$.

◎ 18) Одредити међусобни положај параболе: $y^2 = 2x$ и праве: $x - y + 5 = 0$.

19) Наћи једначине тангенте и нормале параболе: $y^2 = 16x$ које су повучене из њене тачке (1,—4).

20) Наћи једначине тангенте и нормале параболе: $y^2 = x$, које су повучене из њене тачке (9,3).

21) Из тачке $\left(\frac{3}{2},-2\right)$, која се налази на параболи: $y^2 = \frac{8}{3}x$, повучене су тангента и нормала; наћи њихове једначине.

22) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = 5x$ из њене тачке (5,5).

23) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = 24x$ из њене тачке $\left(\frac{2}{3},-4\right)$.

24) Одредити додирне величине параболе: $y^2 = \frac{9}{8}x$ из њене тачке $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

25) У једначини праве: $3x - 2y + \lambda = 0$ одредити вредност величине λ, да би та права била тангента параболе: $y^2 = 15x$.

26) Колика треба да буде вредност величине λ у једначини праве: $2x + \lambda y + 1 = 0$, да би та права била тангента параболе: $y^2 = 8x$.

27) У једначини праве: $\lambda x - 8y - 21 = 0$ одредити вредност величине λ, да би та права била тангента параболе: $y^2 = \frac{7}{4}x$.

28) Наћи тангенту параболе: $y^2 = 32x$, која је паралелна са правом: $y = 4x$.

29) Одредити једначину тангенте параболе: $y^2 = 14x$ која је нормална на правој: $x + y + 23 = 0$.

30) Како гласи једначина тангенте параболе: $y^2 = 5x$, која је паралелна са правом: $x - y + 17 = 0$?

31) Наћи тангенту параболе: $y^2 = 9x$, која је нормална на правој: $2x + y - 13 = 0$.

*32) Наћи полару параболе: $y^2 = 3x$ чији се пол налази у тачци (5, 4).

33) Из тачке (—2,1) повучене су тангенте на параболу: $y^2 = 8x$; наћи једначине тих тангената.

34) Одредити угао између тангената параболе: $y^2 = 10x$ које су повучене из тачке (2,6).

* 35) Наћи коефицијенат правца тетива параболе: $y^2 = x$, које полови права: $y = 2$.

* 36) Одредити дијаметар параболе: $y^2 = 4x$ који полови њезине тетиве паралелне са правом: $x - 2y + 7 = 0$.

* 37) Тачка (5,3) полови тетиву параболе: $y^2 = 9x$, наћи дужину те тетиве.

* 38) Права: $4x + 2y + 3 = 0$ је дијаметар параболе: $y^2 = 12x$, наћи њему коњуговани дијаметар.

* 39) Дијаметар параболе: $y^2 = 16x$ је: $y = -8$; наћи њему коњуговани дијаметар.

* 40) Дијаметри параболе: $y^2 = 18x$ су праве: $y = 6$ и $y = -3$, наћи тачку пресека њихових коњугованих дијаметара и њено отстојање од жиже параболе.

* 41) Наћи део површине који отсеца права: $y = 4x$ од параболе: $y^2 = 16x$.

* 42) Израчунати површину сегмента који отсеца права: $y = x + 2$ од параболе: $y^2 = 9x$.

* 43) Наћи површину сегмента који од параболе: $y^2 = 4x$ отсеца права линија која пролази кроз тачке: (3,2) и (5,6).

* 44) Из тачке $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$ повучене су тангенте на параболу: $y^2 = 25x$; израчунати површину коју заклапају те тангенте са луком параболе.

* 45) Конструисати параболе: $y^2 = -6x$; $x^2 = 8y$ и $x^2 = -10y$.

* 46) Наћи једначине тангенте и нормале параболе: $y^2 = -12x$ које су повучене из њене тачке $(-3,6)$.

* 47) Одредити додирне величине параболе: $x^2 = 16y$, које одговарају њеној тачци (4,1).

* 48) Из тачке $(3,-4)$ повучене су тангенте на параболу: $x^2 = -2y$; наћи једначине тих тангената.

* 49) Наћи једначину заједничке сечице парабола: $y^2 = 8x$ и $x^2 = y$.

* 50) Наћи једначину заједничке тангенте парабола: $y^2 = -4x$ и $x^2 = -4y$.

* 51) Израчунати заједнички део површине парабола: $y^2 = x$ и $x^2 = 27y$.

* 52) Наћи тангенту параболе: $x^2 = -2y$ која од ординатне осовине отсеца дуж $n = 8$.

* 53) Парабола, чије се теме налази у координатном почетку, а која се простире у смислу позитивне гране апсцисне осе, додирује праву: $3x - 2y + 3 = 0$; наћи једначину те параболе.

* 54) Из тачке (1,1) повучене су тангенте на параболу: $x^2 = -8y$; наћи површину троугла који заклапају те тангенте са поларом параболе, чији се пол налази у задатој тачци.

* 55) Наћи дијаметар параболе: $x^2 = -6y$ који полови тетиве параболе паралелне са правом: $2x + y + 11 = 0$.

* 56) Један дијаметар параболе: $x^2 = 32y$ је: $x = 8$, наћи њему коњуговани дијаметар.

Одредити параметар и координате темена параболе:

* 57) $y^2 - 10y - 6x + 49 = 0$.

* 58) $x^2 - 2x + 10y - 69 = 0$.

* 59) $y^2 + 6y + 14x - 19 = 0$.

* 60) $9x^2 - 12x + 36y - 50 = 0$.

* 61) $12y^2 - 12y + 16x - 1 = 0$.

* 62) Наћи једначине тангенте и нормалне параболе: $y^2 - 4y + 18x - 86 = 0$, које су повучене из њене тачке $(3,-4)$.

* 63) Одредати додирне величине параболе: $x^2 + 2x - 5y - 9 = 0$, које одговарају њеној тачци (4,3).

* 64) Како гласи једначина поларе параболе: $x^2 - 6x + 9y - 36 = 0$, чији се пол налази у тачци $(-6,-3)$?

* 65) Из тачке $(2,-2)$ повучене су тангенте на параболу: $y^2 - 14y + 12x - 47 = 0$, наћи њихове једначине.

* 66) Наћи тангенту параболе: $x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$, која заклапа угао од 45^0 са позитивном граном апсцисне осе.

* 67) Тангента параболе: $y^2 + 4y - 3x + 7 = 0$. је нормална на правој: $x - 2y + 9 = 0$; наћи једначину те тангенте.

* 68) Пушка чије зрно има почетну брзину 700 $^m/_{sec}$ испаљена је под елевационим углом од 15^0; наћи даљину домета тога зрна (не узимајући у обзир отпор ваздуха).

* 69) Наћи највећу даљину домета топовског зрна чија је почетна базина 600 $^m/_{sec}$ (не узимајући у обзир отпор ваздуха).

* 70) Водени суд, чији се ниво одржава на сталној висини, пробушен је на 27 m испод нивоа и кроз тај отвор истиче водени млаз. Наћи даљину домета тога млаза на хоризонталној подлози, кад се отвор налази на 3 m изнад хоризонта (не узимајући у обзир отпор ваздуха).

Глава VIII.

Права линија и конусни пресеци у поларном координатном систему:

* § 105 ПРАВА ЛИНИЈА.

На сл. 8 § 3 претстављени су правоугли координатни систем ХОУ и поларни координатни систем, тако да им почетци падају у исту тачку и да се поларна оса поклапа са позитивном граном апсцисне осе. Из истог параграфа се види, да је однос између координата ма које тачке, која лежи у равни ова два координатна система, претстављен следећим једначинама:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho cos\theta \\ y &= \rho sin\theta \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Нормални облик једначине праве линије у правоуглом координатном систему XOY претстављен је следећим изразом:

$$x.cos\alpha + y.sin\alpha - p = 0 \ldots\ldots 2).$$

Ако у овој једначини место величина: x и y, ставимо њихове вредности из израза 1), онда добивамо:

$$\rho\, cos\theta\, cos\alpha + \rho\, sin\theta\, sin\alpha - p = 0$$

одакле је:

$$\rho = \frac{p}{cos(\theta - \alpha)} \ldots\ldots 3).$$

Ова нам једначина претставља праву линију у поларном координатном систему.

* § 106. КРУГ.

1 чл. Општи облик једначине круга у правоуглом координатном систему XOY претстављен је следећим изразом:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \ldots\ldots 1).$$

Ако у овој једначини место величина: x и y ставимо њихове вредности из израза 1) § 105 онда добивамо једначину:

$$\rho^2 cos^2\alpha + \rho^2 sin^2\theta + d\rho cos\theta + e\rho sin\theta + f = 0$$

или

$$\rho^2 + (d.cos\theta + e.sin\theta)\ \rho + f = 0 \ldots\ldots 2).$$

Ова нам једначина у поларним координатама претставља круг чији се центар не налази у поларном почетку.

2 чл. Централни облик једначине круга у правоуглом координатном систему XOY претстављен је изразом:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ 3).$$

Кад у овој једначини место величина x и y ставимо њихове вредности из израза 1) § 105 тада добивамо:

$$\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sin^2\theta = r^2$$

одакле је:

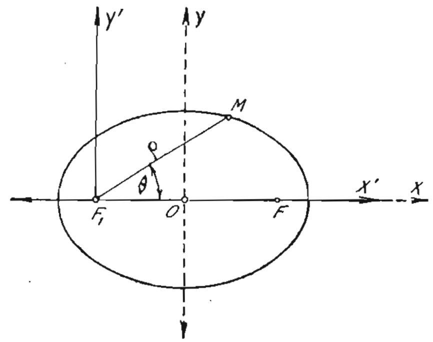
$$\rho = r \ldots\ldots 4).$$

Једначина 4) нам у поларном координатном систему претставља круг чији се центар поклапа са поларним почетком.

* § 107. ЕЛИПСА.

Нека је на сл. 91 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему елипса:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$



Сл. 91.

Поставимо у раван те елипсе нови координатни систем тако да му почетак падне у жижу F_1. Апсцисна оса новога система нека се поклапа и по правцу и по смислу са апсцисном осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна и по правцу и по смислу са ординатном осом система XOY. Тај координатни систем ће бити такође правоугли и на приложеној слици смо га обележили са $X'F_1Y'$.

Однос између координата ма које тачке која се налази у равни ова два координатна система биће претстављен изразима:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - c \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 1).$$

Поставимо затим у исту раван поларни координатни систем тако да му почетак буде у тачци F_1. Поларна оса тога система нека се поклапа са позитивном граном апсцисне осе система $X'F_1Y'$.

Тада ће однос између координата ма које тачке која се налази у равни ова два координатна система бити претстављен изразима:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \rho cos\theta \\ y' &= \rho sin\theta \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots 2).$$

Познато нам је, да је један потег тачке M на елипси дат следећим изразом:

$$F_1M = a + \frac{cx}{a}$$

или

$$\rho = a + \frac{cx}{a} \;\ldots\ldots 3).$$

Ако у овом изразу место величине x ставимо њену вредност из једначина 1) онда добивамо:

$$\rho = a + \frac{c(x' - c)}{a}$$

или

$$a\rho = a^2 + cx' - c^2$$

одакле је

$$a\rho = cx' + b^2 \;\ldots\ldots 4).$$

Кад у овој једначини место величине x' ставимо њену вредност из израза 2), тада добивамо:

$$a\rho = c\rho \, cos\theta + b^2$$

или

$$a\rho - c\rho \, cos\theta = b^2$$

одакле је:

$$\rho = \frac{b^2}{a - c.cos\theta}.$$

Ако на десној страни овога израза и бројитељ и именитељ поделимо са величином a, онда добивамо:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a}\, cos\theta}$$

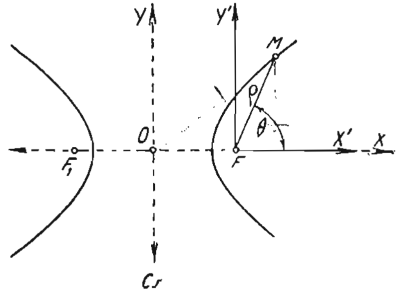
или

$$\rho = \frac{p}{1 - e.cos\theta} \;\ldots\ldots 5).$$

Ова нам једначина претставља елипсу у поларном координатном систему.

* § 108. ХИПЕРБОЛА.

Нека је на сл. 92 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему хипербола: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.



Сл. 92

Поставимо у раван те хиперболе нови координатни систем тако да му почетак падне у жижу F. Апсцисна оса новога система нека се поклапа и по правцу и по смислу са апсцисном осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна и по правцу и по смислу са ординатном осом система XOY. На тај се начин добива нови правоугли координатни систем који је на приложеној слици обележен са $X'FY'$.

Однос између координата ма које тачке која лежи у равни ова два координатна система претстављен је изразима:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + c \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots 1).$$

Поставимо затим у исту раван поларни координатни систем тако да му почетак буде у тачци F. Поларна оса тога система нека се поклапа са позитивном граном апсцисне осе система $X'FY'$.

У томе случају ће однос између координата ма које тачке која лежи у равни ова два система бити претстављен изразима:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \rho \, cos\, \alpha \\ y' &= \rho \, sin\, \alpha \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots 2).$$

Потег FM ма које тачке на хиперболи претстављен је изразом:

$$FM = \frac{cx}{a} - a$$

односно:

$$\rho = \frac{cx}{a} - a \; \ldots\ldots \; 3).$$

Ако у овој једначини место величине x ставимо њену вредност из израза 1) онда добивамо:

$$\rho = \frac{c(x' + c)}{a} - a$$

или

$$a\rho = cx' + c^2 - a^2$$

одакле је:

$$a\rho = cx' + b^2 \; \ldots\ldots \; 4).$$

Кад у овој једначини место величине x' ставимо њену вредност из израза 2) тада добивамо:

$$a\rho = c\,\rho\, cos\theta + b^2$$

или

$$a\rho - c\,\rho\, cos\theta = b^2$$

одакле је:

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \,.\, cos\theta}.$$

Ако на десној страни овога израза и бројитељ и именитељ поделимо са величином a, онда добивамо:

$$\rho = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a} cos\theta}$$

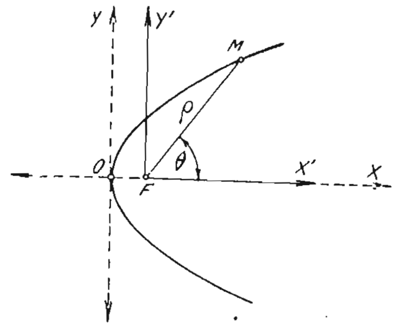
или

$$\rho = \frac{p}{1 - e \,.\, cos\theta} \; \ldots\ldots \; 5).$$

Ова нам једначина претставља хиперболу у поларном координатном систему.

* § 109. ПАРАБОЛА.

Нека је на сл. 93 претстављен правоугли координатни систем XOY и у њему парабола: $y^2 = 2\,px$. Поставимо у раван те параболе нови координатни систем, тако да му почетак



Сл. 93.

буде у жижи F. Апсцисна оса новога система нека се поклапа и по правцу и по смислу са апсцисном осом система XOY. Ординатна оса новога система нека буде паралелна и по правцу и по смислу са ординатном осом система XOY. Тај координатни систем је такође правоугли и на приложеној слици смо га обележили са $X'FY'$. Тада ће однос између координата ма које тачке која се налази у у равни ова два координатна система бити претстављен следећим изразима:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \frac{p}{2} \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots \; 1).$$

Поставимо сем тога у раван параболе поларни координатни систем, тако да му почетак буде у жижи F и да му се поларна оса поклапа са осом параболе. Однос између координата ма које тачке која се налази у равни поларног координатног система и координатног система $X'FY'$ мора бити претстављен изразима:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \rho\, cos\theta \\ y' &= \rho\, sin\theta \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots \; 2).$$

Знамо, да је потег ма које тачке на параболи у правоуглом координатном систему XOY преставлјен изразом:

$$FM = x + \frac{p}{2}$$

односно

$$\rho = x + \frac{p}{2} \; \ldots\ldots \; 3).$$

Кад у овој једначини место величине x ставимо њену вредност из израза 1) тада добивамо:

$$\rho = x' + \frac{p}{2} + \frac{p}{2}$$

или

$$\rho = x' + p.$$

Ако у овој једначини место величине x' ставимо њену вредност из израза 2) онда добивамо:

$$\rho = \rho \cos\theta + p$$

или

$$\rho - \rho \cos\theta = p$$

одакле је

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\theta} \; \ldots\ldots \; 4).$$

Пошто је бројни ексцентрицитет код параболе: $e = 1$, то једначину 4) можемо написати и на следећи начин:

$$\rho = \frac{p}{1 - e.\cos\theta} \; \ldots\ldots \; 5).$$

Ова нам једначина претставља параболу у поларном координатном систему.

Из параграфа: 107, 108 и 109 видимо да једначине: елипсе, хиперболе и параболе у поларном координатном систему имају исти облик који је претстављен изразом:

$$\rho = \frac{p}{1 - e.\cos\theta}.$$

Ова нам једначина претставља: елипсу ако је: $e < 1$; хиперболу, ако је: $e > 1$; а параболу ако је: $e = 1$. Она се поред осталих примена често употребљава у небеској механици.

Мешовити задаци:

* 1) Стране једног троугла су: 6, 7 и 3, израчунати површину елипсе чије се жиже налазе у крајњим тачкама прве стране, а сама елипса пролази кроз треће теме тога троугла.

* 2) У параболи: $y^2 = 4x$ уписан је равнокраки троугао тако, да му се теме налази у темену параболе; израчунати површину сегмената које отсецају краци тога троугла, ако му висина стоји према основици као 3 : 4.

* 3) Израчунати делове површине на које је круг: $x^2+y^2=20$ подељен параболом: $y^2 = 8x$.

* 4) Кроз десну жижу елипсе: $x^2 + 2y^2 = 8$ и кроз тачку у којој мала оса сече ту елипсу пролази круг чији се центар налази на правој: $y = 2x - 4$; наћи једначину тога круга.

* 5) Наћи површину четвороугла чија се темена налазе у додирним тачкама заједничких тангената елипсе: $x^2 + 2y^2 = 9$ и круга: $x^2 + y^2 - 16x + 47 = 0$.

* 6) На параболи: $y^2 = 4x$ једна тачка има ординату 2, наћи површину сегмента који од те параболе отсеца њена нормала повучена из задате тачке.

*7) Елипса: $3x^2 + 4y^2 = 48$ и круг: $2x^2 + 2y^2 - 3x - 20 = 0$ имају три заједничке тачке, наћи површину оногa троугла чија се темена налазе у тим тачкама.

* 8) Наћи једначину хиперболе чија је асимптота дата једначином: $2x - 3y = 0$, а једна тангента једначином: $5x - 6y - 9 = 0$.

* 9) Наћи једначину елипсе чије су две тангенте претстављене једначинама: $x + 9y - 28 = 0$ и $2x + 3y - 14 = 0$.

* 10) Из тачака у којима се секу криве линије: $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$ повучене су тангенте на обе криве; наћи површину четвороугла који заклапају те тангенте.

* 11) У десној жижи хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$ налази се средиште круга који додирује асимптоте хиперболине; наћи једначину тога круга.

* 12) Кроз тачку (—4,4) и кроз тачке додира оних двеју тангената, које се из задате тачке могу повући на елипсу: $x^2 + 7y^2 = 16$, пролази круг; наћи једначину тога круга:

* 13) Круг чија је површина $P = 20\,\pi$ има заједничко средиште са хиперболом: $3x^2 - 4y^2 = 32$; наћи угао који захватају тангенте тих кривих линија, које су повучена из њихове заједничке тачке са позитивним координатама.

* 14) Из центра круга: $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 11 = 0$ повучене су тангенте на елипсу: $x^2 + 12y^2 = 16$; наћи угао који заклапају те тангенте.

* 15) Наћи једначину круга који пролази кроз средишта кривих линија:
$4x^2+9y^2-8x+72y+144=0$ и $x^2+y^2-14x+8y+56=0$, кад му је пречник раван централној раздаљини тих кривих.

* 16) Кроз жиже хиперболе: $9x^2-16y^2-36x+32y-124=0$ пролази круг чији се центар налази на правој: $2x + y = 0$; наћи једначину тога круга.

* 17) Полара круга: $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 16 = 0$ и полара хиперболе: $2x^2 - 3y^2 - 12x - 12y = 0$ имају заједнички пол у тачци (3,4); наћи угао који захватају те поларе.

* 18) Теме параболе лежи у центру круга, $x^2 + y^2 = 20$, а њена оса се поклапа са позитивном граном апсцисне осе; наћи једначину те параболе, кад она сече задати круг у тачци чија је апсциса равна 2.

* 19) Наћи заједничке тангенте круга: $x^2 + y^2 = 64$ и параболе: $y^2 = 15x$.

* 20) Два круга чији се центри налазе на апсцисној оси додирују праву: $3x + y - 6 = 0$ у оним тачкама у којима та права сече параболу: $y^2 = 9x$; наћи једначине тих кругова.

* 21) У центру круга: $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$ налази се пол једне поларе параболе: $y^2 = 8x$; наћи површину троугла чије се једно теме налази у центру круга а друга два у пресеку поларе и параболе.

* 22 Наћи површину четвороугла чија се темена налазе у пресечним тачкама елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 84$ и асимптота хиперболе: $x^2 - 4y^2 = 4$.

* 23) Наћи једначине заједничких тангената елипсе: $9x^2 + 16y^2 = 144$ и хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$.

* 24) Наћи једначину параболе чије је теме у координатном почетку, а жижа јој се налази у десној жижи елипсе: $7x^2 + 9y^2 = 63$.

* 25) Тангента елипсе: $3x^2 + 4y^2 = 16$ која је повучена из њене тачке $(-2{,}1)$ додирује параболу чије се теме налази у координатном почетку а жижа на позитивној грани апсцисне осе; наћи једначину те параболе.

* 26) Круг пролази кроз пресек елипсе: $4x^2 + 5y^2 = 84$ и хиперболе: $3x^2 - 4y^2 = 23$; наћи једначину његове тангенте која је паралелна са правом: $3x + y - 17 = 0$.

* 27) Центар круга лежи у десној жижи хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$; наћи једначину тога круга кад он пролази кроз леву жижу елипсе: $9x^2 + 25y^2 = 225$.

* 28) Наћи површину троугла чије се једно теме налази у координатном почетку, а друга два темена у пресечним тачкама параболе: $y^2 = x$ и хиперболе: $4x^2 - 5y^2 = 44$.

* 29) Теме параболе се налази у десној жижи хиперболе: $9x^2 - 16y^2 = 144$, а жижа параболе лежи на позитивној грани апсцисне осе; наћи једначину те параболе кад јој је параметар два пута већи од споредне осе задате хиперболе.

* 30) Доказати помоћу аналитичке геометрије: *a)* да се симетрала троуглових страна секу у једној тачци; *b)* да се троуглове висине секу у једној тачци; *c)* да се симетрале углова у троуглу секу у једној тачци и *d)* да се средње линије код троугла секу у једној тачци.

Напомана: Ако нека геометриска слика није изражена помоћу координатног система, онда се у раван те слике може произвољно поставити координатни систем; те се увек подешава тако, да рачунске операције испадну што једноставније.

Штампарске грешке

И поред највеће пажње поткрале су се следеће штампарске грешке:

На страни 68 у 12 реду одоздо место: GC' треба да буде: $G'C'$.

На страни 94 у 12 реду одоздо место: полова 2) треба да буде: полова полара 2).

На страни 123 у једначини 2) место: $\frac{b^2}{y^2}$ треба да буде: $\frac{b^2}{y_1}$

На страни 131 у 14 реду одоздо место: $x = 2$ а $y = 6$ треба да буде: $x_0 = 2$ а $y_0 = 6$.

На страни 163 у 13 реду одоздо место: $y - y_1 - m(x - x_1)$ треба да буде: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

На странама 177 и 179 у једначинама и обрасцима место израза: $a^4b^2 + a^2$ треба да буде: $a^4(b^2 + y_0^2)$.

Сем наведених грешака има још неколико језичних омашака које немају никаква утицаја на изложено градиво, па их због тога нећемо ни износити.

КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД ПРЕЂЕНОГ ГРАДИВА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

I ПЛАНИМЕТРИЈА

Геометрија је поникла из практичних потреба људи. Она се појавила у самом почетку историје човечанства. Египћани су сваке године после нилских поплава размеравали плодна земљишта у долини реке Нила и тиме долазили до извесних геометриских запажања. Старе грађевине код Египћана и Вавилонаца доказују, да су и тада људи познавали извесне елементе из геометрије. У папирусу који је пронашао енглески научник Ринд у Мисиру налазе се примитивна упутства за израчунавање површина појединих геометриских слика. Тај се папирус чува у британском музеју у Лондону под именом Риндов папирус. Египћани су познавали правила о угловима и паралелним линијама у равни. Они су одређивали троугао, паралелограм и трапез из појединих елемената и израчунавали су њихове површине. Сем тога били су им познати и извесни елементи из науке о кругу.

Стари Грци су примили основна геометриска знања од Египћана, а затим су унапредили геометрију до те мере, да у извесним њеним гранама (планиметрија) и данас не знамо ништа више од онога што нам је остало од њих.

Први грчки математичар био је Талес, који је рођен у малоазијској варошици Милету око (624 год. пре Хр.). Он је основао јонску филозофску школу, која је ширила геометриска знања међу Грцима.

Питагора је рођен (око 568 год. пре Хр.) на острву Самосу. Он је доста времена провео у Египту, а затим се вратио у Самос. Око 510 год. Питагора је основао своју филозофску школу у Кротону (Јужна Италија). Питагорина школа је геометрију дигла на степен науке, док је пре ње служила само практичним потребама. Први пут је у тој школи откри-

вена наука о пропорцијама и тиме створена могућност за проучавање сличности праволиниских слика. Увођењем средње пропорционале решено је питање претварања правоугаоника у квадрат. Правило о квадратима над странама правоуглог троугла највише се приписује тој школи, те се зато и назива „Питагорино правило".

Платон је рођен у Атини и живео од 429 до 348 год. пре Хр. Он је био ученик Сократов, а сем тога је ишао на школовање у Мисир. По свршетку школовања вратио се у родно место где је основао своју филозофску школу, коју је назвао: „Академија". Платонова школа се није толико одликовала у самосталном геометриском истраживању колико у истицању важности саме геометрије. На вратима школе био је стављен овај натпис: „Нека не улази нико, ко не зна геометрију". У Платоновој школи се развила теорија геометриских места и тачно су одређени основни принципи геометрије.

Еуклид је рођен у Александрији. Његов рад пада око 300 год. пре Хр. Основао је школу у Александрији у којој је сам предавао математику. Он је прикупио сва дотадашња знања из математике и написао их у 13 књига под насловом: „Елементи". Према његовом чувеном постулату, да се кроз једну тачку ван неке праве линије може повући само једна паралелна линија са том правом, целокупна геометрија која се учи у средњој школи, назива се Еуклидовом геометријом.

Архимед је рођен 287 год. пре Хр. у Сиракузи на Сицилији. Извесно време је провео у Египту где је стајао у вези са тамошњим научницима. Он је израчунао обиме у кругу уписаног правилног 96-тоугла и око круга описаног правилног 96-тоугла. Помоћу тога је одредио приближну вредност броја $\pi=3,14...$ коју ми и данас употребљавамо у школама. Поред израчунавања обима и површине круга Архимед је израчунао површине елипсе и параболиног отсечка. Погинуо је 212 год. пре Хр. од римског војника, када је Марцел освојио Сиракузу.

Аполоније је рођен у Малој Азији у варошици Перги и живео је од 265 до 170 год. пре Хр. Он се највише бавио купиним пресецима. Од њега су нам остала имена: елипсе, хиперболе и параболе.

Херон је живео у Александрији. Његов рад пада око 100 године пре Хр. Он се бавио израчунавањем површина. Од њега је остао образац за израчунавање површине троугла помоћу страна.

II СТЕРЕОМЕТРИЈА

Египћани нису добро познавали стереометрију. Била им је позната призма, правилна четворострана пирамида, прави ваљак, купа и правилни полиедри сем додекаедра. О лопти су знали нешто више, зато што су се бавили астрономијом.

Питагорина школа је развила науку о рогљевима и правилним полиедрима. Она је открила и додекаедер.

У Платоновој школи је стереометрија добила нешто више полета. У њој су израчунате запремине призме и пирамиде.

Архимед нам је у своме делу: „О лопти и облици" оставио правила за израчунавање површине купе и зарубљене купе, површине и запремине лопте, њеног отсечка и исечка. Запремину лопте је израчунао помоћу описане јој облице. Он је тај рад сматрао за најважнији и желео је да му се у надгробном споменику уреже лопта са описаном облицом, што је и учињено.

Међу доцнијим научницима који су се бавили стереометријом истиче се талијански математичар Каваљери. Он је живео од 1598 до 1647 год. после Хр.

III ТРИГОНОМЕТЕИЈА

Потребе астрономије дале су повода, да се развије тригонометрија. Прво је пронађена сферна тригонометрија. Њу је основао Хипарх од Никеје који је живео око половине 2 столећа пре Хр. Он је показао, да се помоћу тетива круга могу израчунати углови.

Менелај из Александрије, који је живео у Риму, бавио се тригонометријом при крају првог стољећа после Хр. Он је упторебљавао тетиве за израчунавање сферних и равних троуглова.

Птоломеј је живео у првој половини другога стољећа после Хр. у Александрији. Он је наставио Хипархов посао и израдио таблицу у којој се налазе тетиве углова од 0°—180° у размацима од 30'. Израчунавања је вршио помоћу Птоломејеве теорије.

Арабљани су се такође бавили тригонометријом. Они су употребљавали тангенту за мерење углова. Тригонометрију су Арабљани пренели у Европу.

Јован Милер звани Региомонтанус рођен је у Кенигзбергу и живео (1436—1476). Он је одвојио тригонометрију од астрономије и израдио синусне и тангенсне таблице. Региомонтанус је такође пронашао и синусну теорему.

Ајлер је тригонометриске функције прецизирао као бројеве и тиме дао више маха рачуну у тригонометрији. Он је први увео знаке: $sin\alpha$, $cos\alpha$ итд. итд.

IV АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Аналитичка геометрија је наука поглавито новијега времена, с обзиром на осталу геометрију. Истина и старим народима биле су познате координате. Стари Грци су знали за правоугли координатни систем.

Леонардо Пизано је графички претстављао једначине и тиме довео у везу алгебру са геометријом.

Прави творац аналитичке геометрије је славни француски филозоф Декарт (Cartesius) рођен 1596 год. у Haye (Indre-et-Loire).

Он је у својој „Геометрији" ударио основне темеље садашњој аналитичкој геометрији и тиме дао нов правац математици и свима наукама које су у вези са њом.

Садржај

ГЛАВА I

Стр.

§ 1 Координантни системи 6
» 2 Положај тачке у правоуглом координатном систему 7
» 3 Трансформација координата 8
» 4 Растојање између двеју тачака 15
» 5 Координате тачке која дели дуж по датој размери 16
» 6 Координате тежишта троуглова 17
» 7 Површина троугла 18
» 8 Услов да три тачке леже на једној правој 20

ГЛАВА II

» 9 Једначина праве линије 23
» 10 Конструнција праве линије 27
» 11 Једначина праве ливије која пролази кроз коор. почетак 28
» 12 Једначина прави линије која пролази кроз једну тачку 29
» 13 Једначина праве линије која пролази кроз две тачке 30
» 14 Сегментни облик једначине праве линије 32
» 15 Нормални облик једначине праве линије 33
» 16 Општи облик једначине праве линије 34
» 17 Једначину праве линије из општег облика довести на нормални облик 35
» 18 Угао који захватају две праве линије 37
» 19 Координате пресека двеју правих линија 39
» 20 Растојање између праве и тачке 41
» 21 Једначине симетрале угла 44
» 22 Једначина праве линије која пролази кроз пресек двеју задатих правих 47

ГЛАВА III

» 23 Конусни пресеци 55
» 24 Круг 55
» 25 Елипса 56
» 26 Конструкција елипсе 59
» 27 Хпиребола 61
» 28 Конструкција хиперболе 64
» 29 Парабола 67
» 30 Конструкција параболе 71

Стр

ГЛАВА IV

§ 31 Круг 73
» 32 Положај тачке и круга 74
» 33 Положај праве линије и круга 76
» 34 Општа једначина круга 78
» 35 Специјални облици једначине круга 79
» 36 Привидно неодређени изрази 80
» 37 Тангента круга повучена из једне тачке на кругу 82
» 38 Једначина нормале круга 84
» 39 Додирне величине круга 85
» 40 Тангенте круга повучене из тачке ван круга 87
» 41 Полара круга 89
» 42 Полара круга чији се полови налазе на једној правој 94
» 43 Положаји полара круга и њихових полова ако се налазе на правој која пролази кроз координатни почетак 95
» 44 Дијаметри круга 98
» 45 Полара круга $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 101
» 46 Тангента и нормала круга $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 103
» 47 Међусобни положај два круга 104

ГЛАВА V

» 48 Одређивање потега елипсе 113
» 49 Једначина елипсе 114
» 50 Положај тачке и елипсе 116
» 51 Положај праве линије и елипсе 118
» 52 Тангента елипсе из тачке на елипси 120
» 53 Нормала елипсе 122
» 54 Додирне величине елипсе 124
» 55 Тангенте елипсе из тачке ван елипсе 126
» 56 Полара елипсе 128
» 57 Конструкција тангенте елипсе 131
» 58 Поларе елипсе чији се полови налазе на правој линији 135
» 59 Дијаметри елипсе 136
» 60 Директриса, бројни ексцентрицитет и параметар елипсе 140
» 61 Површина елипсе 142
» 62 Једначина елипсе чије су осе паралелне са координатним осовинама 144
» 63 Полара елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ 147
» 64 Тангента и нормала елипсе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ 148
» 65 Темени облик једначине елипсе 149

ГЛАVA VI

» 66 Потези хиперболе 154
» 67 Једначина хиперболе 155
» 68 Положај тачке и хиперболе 157
» 69 Положај праве линије и хиперболе 159
» 70 Тангента хиперболе из тачке на хиперболи 160

Стр.

§ 71 Нормала хиперболе — 163
» 72 Додирне величине хиперболе — 164
» 73 Асимптоте хиперболе — 167
» 74 Асимптота као гранични положај тангенте — 169
» 75 Коњуговане хиперболе — 170
» 76 Тангента хиперболе из тачке ван хиперболе — 171
» 77 Полара хиперболе — 172
» 78 Положаји хиперболних тангената — 176
» 79 Конструкција тангената хиперболе — 182
» 80 Поларе хиперболе чији су полови на правој линији — 185
» 81 Дијаметри хиперболе — 186
» 82 Директриса, бројни ексцентрицитет и параметар хиперболе 191
» 83 Једначина хиперболе чије су осе паралелне са координатним осовинама — 192
» 84 Полара хиперболе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ — 195
» 85 Тангента и нормала хиперболе: $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ 197
» 86 Темени облик једначине хиперболе — 199

ГЛАВА VII

» 87 Потег параболе — 204
» 88 Једначина параболе — 205
» 89 Једначина директрисе параболе — 207
» 90 Положај тачке и параболе — 207
» 91 Положај праве линије и параболе — 210
» 92 Тангенте параболе из тачке на параболи — 211
» 93 Нормала параболе — 213
» 94 Додирне величине параболе — 214
» 95 Тангента параболе из тачке ван параболе — 216
» 96 Полара параболе — 218
» 97 Конструкција тангенте параболе — 222
» 98 Полара параболе чији су полови на једној правој — 224
» 99 Дијаметри параболе — 226
» 100 Површина параболина сегмента — 229
» 101 Специјални положај параболе у прав. коор. систему XOY 232
» 102 Парабола чије теме није у почетку прав. коор. система а чија је оса паралелна са једном осом тога система — 235
» 103 Полара, тангента и нормала параболе чије теме не лежи у почетку прав. коор. система и чија је оса паралелна са једном од оса тога система — 240
» 104 Коси хитац — 242

ГЛАВА VIII

» 105 Права линија — 250
» 106 Круг — 250
» 107 Елипса — 251
» 108 Хипербола — 253
» 109 Парабола — 254
Кратак исторски преглед геометрије — 260