МИЛАН С. НЕДИЋ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

Овај уџбеник, по саслушању Главног просветног савета С.бр. 654 од 6 јула 1939 године, одобрен је одлуком Господина Министра просвете IV бр. 9913 од 31 јула 1939 године. Ово одобрење важи до краја 1942/43 школске г.

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ
ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА

1939

За штампарију „З О Р А“ — Београд, Космајска бр. 24. — Телефон 29-920
Богомир М. Јовановић, штампар, Поп Лукина 4.

НАПОМЕНА

Одељци за реалке обележени су звездицом у почетку наслова.

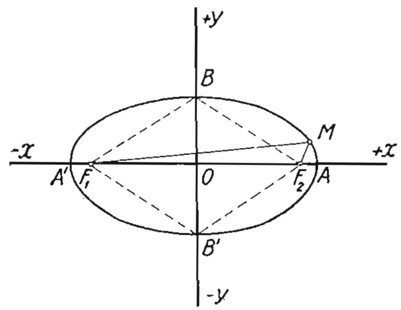
Задаци за реалке обележени су звездицом поред редног броја.

М. С. Н.

I. — ЕЛИПСА

Видели смо у VII разреду шта је елипса и како се она конструише.

Елипсине осовине. — Нека је дата елипса $AB\ A'B'$ и нека су обележене жиже F_1 и F_2 (сл. 1). Ми ћемо поставити елипсу тако, да њена осовина иде по апсцисној осовини, а да средина жижног растојања $F_1\ F_2$ падне у координатни почетак. Жижни размак обележићемо овако:



Сл. 1.

$$F_1\ F_2 = 2c.$$

Тада ће бити $F_1O = c$ и $OF_2 = c$.

Тачка A лежи на елипси. Зато мора бити:

(1) $\qquad AF_2 + AF_1 = k,$

где је k једна стална дужина (сталан број).

И тачка A' лежи на елипси. За њу мора бити:

(2) $\qquad A'F_1 + A'F_2 = k$

Пошто су у (1) и (2) једнаке десне стране, морају бити једнаке и леве:

(3) $\qquad AF_2 + AF_1 = A'F_1 + A'F_2.$

Једначину (3) написаћемо овако:

$$AF_2 + (AF_2 + 2c) = A'F_1 + (A'F_1 + 2c).$$

То је даље:

$2AF_2 = 2A'F_1$. Одатле је

$AF_2 = A'F_1$.

Пошто је $OF_1 = OF_2$, и $AF_2 = A'F_1$, биће:

$OA = OA'$. (Крајње тачке елипсине на осовини подједнако отстоје од средине жижног размака).

Тачке A и A' у којима елипса сече осовину зову се темена. Размак AA' између темена обележићемо са $2a$:

$$AA' = 2a.$$

Пошто је теме A на осовини, биће:

$$AF_1 + AF_2 = k, \text{ т.ј. } AF_2 + 2c + AF_2 = k.$$

То је даље:

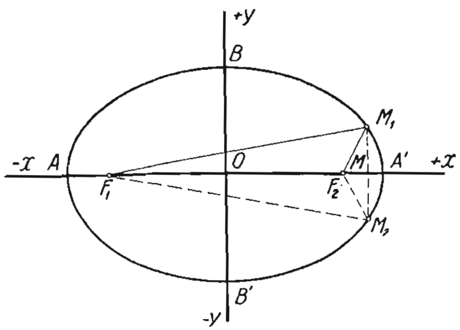
$$AF_2 + 2c + A'F_1 = k$$
$$2a = k.$$

Видимо да је збир жижних растојања једне тачке на елипси једнак са $2a$. Кад то важи за A, важиће и за сваку другу тачку:

$$MF_1 + MF_2 = 2a \text{ (сл. 1).}$$

Растојање $2a$ зовемо **велика осовина.** Зашто велика? Зато што елипса има и малу осовину.

Ако у средини жижног размака (0) дигнемо управну на велику осовину, (управну BB'), та ће управна сећи елипсу у двему тачкама које су подједнако удаљене од велике осовине. Троуглови F_1OB и F_2OB симетрични су према OB. Отуда је $F_1B = F_2B = a$. Исто тако лако је доказати да је $F_1B' = F_2B' = a$. Отуда је $F_2B = F_2B' = a$. Одатле излази да је троугао OF_2B подударан с троуглом OF_2B'. Отуда је $OB = OB'$. Обележимо $BB' = 2b$. Тада је $OB = b = OB'$. Дуж $2b$ зове се **мала осовина.**



Сл. 2.

Симетриске осовине. — Ако поставимо елипсу тако да јој пресек осовина лежи у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној, добијамо елипсу са слике 2.

Узмимо на апсцисној осовини једну произвољну елипсину унутрашњу тачку. Нека је то тачка M (сл. 2). Показаћемо да за апсцису OM елипса има две тачке (M_1 и M_2) симетричне према великој осовини. (M_1 изнад апсцисне осовине и M_2 испод апсцисне осовине).

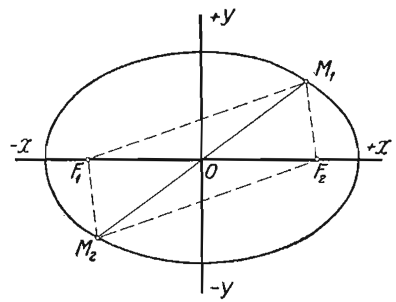
Из M дигнимо управну на апсцисну осовину. Нека тачка M_1 са те управне лежи на елипси. Доказаћемо да и M_2 са те управне лежи на елипси кад је $MM_1 = MM_2$.

Троуглови MF_2M_1 и MF_2M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_2 = M_2F_2$. Троуглови MF_1M_1 и MF_1M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_1 = M_2E_1$. Значи да за тачку M_2 постоји овај однос: $M_2F_2 + M_2F_1 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a$. Тада M_2 лежи на елипси. Симетрична тачка M_2 тачке M_1 са елипсе лежи на елипси. Значи да је велика осовина симетриска елипсина осовина. [Докажи да је и мала осовина симетриска осовина]. Елипса има две симетриске осовине.

Из троугла OBF_1 (сл. 1) види се да је

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Елипсин центар. — Пресек елипсиних осовина јесте елипсин центар симетрије. Узмимо *на елипси* тачку M_1 и тачку M_2 Симетричну са M_1 према O. Доказаћемо да и M_2 мора лежати на елипси (сл. 3)



Сл. 3.

Троуглови OF_1M_2 и OF_2M_1 симетрични су према O. Из те симетрије излази: $F_1M_2 = M_1F_2$. Из централне симетрије троуглова OF_1M_1 и OF_2M_2 излази да је $M_1F_1 = M_2F_2$. Отуда је:

$$M_2F_1 + M_2F_2 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a.$$

Тачка M_2 је на елипси. Пресек осовина је елипсин центар симетрије.

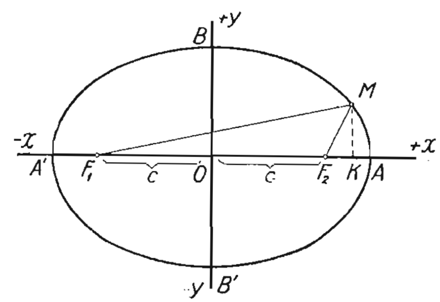
Централна једначина елипсе. — На елипси $ABA'B'A$ (сл. 4) узмимо произвољну тачку M (x, y). Знамо да мора бити:

$$\text{(1)}\quad MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Помоћу координата израчунаћемо MF_1 и MF_2.

Из троугла MKF_1 имамо:

$$\overline{MF_1}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{F_1K}^2$$



Сл. 4.

(2) $MF_1^2 = y^2 + (c + x)^2$

Из троугла MF_2K имамо:

(3) $\overline{MF}_2{}^2 = y^2 + (x - c)^2$

Кад одузмемо (3) од (2) имамо:

$$\overline{MF}_1{}^2 - \overline{MF}_2{}^2 = (c + x)^2 - (x - c)^2$$
$$(MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx.$$

Знамо да је

$MF_1 + MF_2 = 2a.$ Зато је даље:

$2a\,(MF_1 - MF_2) = 4cx.$

(4) $$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}.$$

Из (1) и 4) добијамо:

(5) $$MF_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Кад вредност (5) унесемо у (2), добијамо:

$(a + \frac{cx}{a})^2 = y^2 + (c + x)^2.$ То је даље:

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$
$$a^4 + c^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 c^2 + a^2 x^2$$
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$$

Знамо да је $a^2 = b^2 + c^2$.

Одатле је $c^2 - a^2 = - b^2$.

$$- b^2 x^2 - a^2y^2 = - a^2b^2.$$

То је даље:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Деобом са a^2b^2 добијамо:

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}.$$

То је једначина елипсе чији је центар у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној. Ова једначина зове се централна елипсина једначина.

Колики су сачиниоци уз x^2 и y^2? Можемо ли централну једначину круга написати овако: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$? Чиме се онда разликује централна једначина елипсе од централне једначине круга?

Дискусија централне једначине. — Решимо централну једначину по y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ако је $x < a$, по апсолутној вредности, y је стварно. Тада свакој таквој вредности икса одговарају две супротне вредности за y. Значи, наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За $x = \pm a$ имамо $y = 0$. Значи, крива сече апцисну осовину у тачкама $A\ (a, 0)$ и $A'\ (-a, 0)$ — сл. 2.

Ако је $x > a$ (по апсолутној вредности), y је уображено. Значи, крива нема тачака преко A и A'.

Ако је $x = 0$, биће $y = \pm b$. Крива сече ординатну осовину у B и B' (сл. 4).

Решимо сад једначину по x:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Ако је $y < b$ по апсолутној вредности, x је стварно. Тада свакој таквој вредности ипсилона одговарају две супротне вредности за x. Значи, наша је крива симетрична према ординатној осовини.

За $y = \pm b$, имамо $x = 0$. Значи, наша крива сече ординатну осовину у B и B'. (То смо већ видели).

Ако је $y > b$, (по апсолутној вредности), x је уображено. Крива нема тачака преко B и B'.

Наша је крива непрекидна. За свако x између 0 и $\pm a$ имамо два коначна и одређена ипсилона.

Наша је крива затворена крива. О томе ћемо се овако уверити:

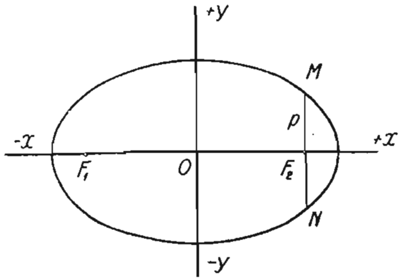
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Кад x тежи нули било од неке негативне, било од неке позитивне своје вредности, израз $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ тежи вредности b или $-b$. Значи да се две веома блиске тачке тачци B поклопе у B кад је $x = 0$.

Параметар. — Елипсина ордината у жижи зове се параметар. Обележићемо га са p.

$F_2\,M = p$ (сл. 5).

$$MN = 2p \quad \text{(сл. 5).}$$



Сл. 5.

Како ћемо израчунати параметар p? То је ордината тачке M. Апсциса тачке M је $x = c$. Ставићемо ту вредност у једначину елипсе и израчунати y.

$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Одатле је:

$$y = p = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Параметар показује елипсин облик. Ако параметар расте, мора или b да расте, или a да опада. Елипса се пупчи. (Шта бива ако параметар опада?).

Бројни ексцентрицитет. — Однос $\frac{c}{a}$ зове се елипсин бројни ексцентрицитет. Обележићемо га са e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Бројни је ексцентрицитет увек мањи од јединице. Ако би он био раван јединици, имали бисмо: $c = a$. Тада елипса не би постојала, јер би било:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0.$$

И бројни ексцентрицитет показује елипсин облик. Ако је он врло мали, елипса је јако пупчаста и ближи се кругу. Ако је он велики, тј. близу јединице, елипса је јако спљоштена. То се овако види:

Узмимо да је $e = \frac{c}{a} = \frac{19}{20}$. Тада ће бити $c = \frac{19a}{20}$. Према томе биће: $b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{19a}{20}\right)^2} = \frac{a}{20}\sqrt{39} \approx 0,31\ a$. Таква елипса је јако спљоштена.

Ставићемо сад

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Одатле се види да је b све веће што је e мање. Значи кад e опада, b се све више приближује вредности a.

За $e = 0$ имамо $b = a$. Елипса постаје круг.

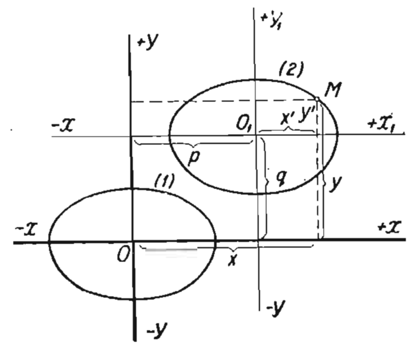
*** Општа једначина елипсе.** — Ако елипсин центар пренесемо у таку O_1, а њене осовине положимо паралелно с координатним осовинама, добићемо нову једначину елипсе.

Замислимо да је координатни систем O транслацијом осовина премештен у O_1. Једначина елипсе O_1 (сл. 6) у систему O_1 биће:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Са слике се види да је $x' = x - p$ и $y' = y - q$. Зато ће једначина елипсе O_1 у систему O бити:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$



Сл. 6.

То је једначина елипсе чији је центар ван координатног почетка, а осовине су јој паралелне с координатним осовинама.

***Обележја елипсине једначине.** — Ако ову једначину развијемо, добићемо:

$$b^2 x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0.$$

Знамо да је општи облик кривих линија другог степена:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Видимо да је у једначини елипсе $B = 0$ (нема члана са xy). Њена једначина овако изгледа:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

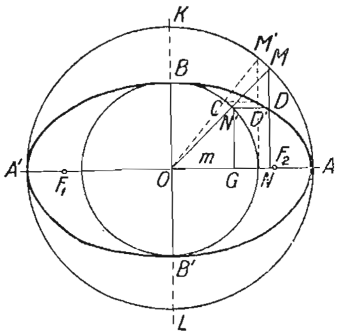
Одатле видимо ово:

Једначина елипсе у правоуглом координатном систему, кад су јој осовине паралелне с координатним осовинама, јесте једначина другог степена по x и y која не садржи члан са xy и у којој чланови са x^2 и y^2 имају сачиниоце неједнаке по апсолутној вредности, али једнаке по знаку.

(Упореди је с општом једначином круга).

Велики и мали круг на елипси. — Круг описан из елипсиног центра великом полуосовином као полупречником зове се велики круг. То је круг AA' са слике 7. Круг описан из елипсиног центра малом полуосовином као полупречником зове се мали круг. То је круг BB' на слици 7.

***Елипса као управна пројекција круга.** — Узмимо једну елипсу, па опишимо велики и мали круг (сл. 7). Из једне унутрашње елипсине тачке (N) на апсцисној осовини дигнимо управну на ту осовину Она ће пресећи елипсу у D, а велики круг у M. Обе те тачке имају исту апсцису ON. Обележимо $ON = x_1$, $ND = y_1$, $NM = Y_1$.



Сл. 7.

Пошто D лежи на елипси, мора бити:

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2_1}$$

Пошто M лежи на кругу, мора бити:

$Y_1 = \sqrt{a^2 - x^2_1}$. (Пошто је $r = a$).

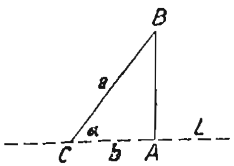
Однос ових двеју ордината биће:

(1) $$\frac{y_1}{Y_1} = \frac{b}{a}.$$

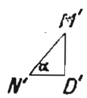
$\frac{b}{a}$ је однос двеју дужина.

Нацртајмо овако: a као хипотенузу, b као њену пројекцију на правој L (Сл. 8). Тада можемо написати:

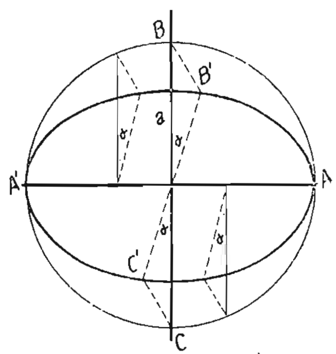
(2) $$\frac{b}{a} = \cos\alpha.$$ Увек можемо одредити угао α, кад су дати b и a. Према томе угао α увек постоји док је $b \leqq a$. Сад у (1)



Сл. 8.



Сл. 9.



Сл. 10.

можемо ставити:

$$\frac{y_1}{Y_1} = \cos\alpha. \qquad \text{Одатле је:} \qquad y_1 = Y_1 \cos\alpha.$$

На нашој слици 7 биће:

$ND = NM \cos\alpha$. То можемо сад овако нацртати: сл. 9.

Значи ово:

Елипсине су ординате пројекције ордината великога круга чија је раван нагнута над елипсином равни под углом α, који је такав, да је $\cos\alpha = \frac{a}{b}$. (сл. 10).

[То ћеш овако најлакше видети. Нацртај на картону елипсу и оба круга као на слици 7. Добићеш два полумесеца. Оштрим ножићем исеци обиме полумесеца, али не баш сасвим до тачака A и A'. Затим издигни из равни цртања горњи полумесец, а спусти доњи. Кроз K провуци иглу и дижи полумесец све дотле, док игла провучена кроз K и B не падне у B управно на елипсину раван (сл. 10). Дижући полумесеце ми смо у ствари издизали раван круга. Кад игла спуштена из K у B падне управно на раван елипсе, тада је B пројекција тачке K. Кад то постигнемо, добијамо правоугли троугао KBO. У њему је хипотенуза $OK = a$, једна управна страна $OB = b$. Оне заклапају један угао α, (сл. 10). Његов је косинус $\frac{b}{a}$. То значи да је то угао под којим треба да стоји велики круг према елипсиној равни, па да елипса буде управна пројекција великога круга. Кроз сваку тачку кружне периферије можемо забости једну тачку управно на елипсину раван и увек ћемо наћи по једну елипсину тачку која је пројекција те тачке с круга.]

***Сродне криве.** — Видели смо да елипса и круг, кад је $2a = 2R$ и кад им се центри поклапају, имају ову особину: све њихове тачке имају исте апсцисе, а све њихове ординате имају сталан однос. Обележимо апсцисе кругових тачака са X, апсцисе елипсиних тачака са x; ординате кругових тачака са Y, ординате елипсиних тачака са y. Имаћемо:

$$x = X \qquad\qquad y = \frac{b}{a}\,Y$$

Такве две криве зову се сродне криве (афине криве). Осовина OX зове се осовина сродности (осовина афинитета). Однос ордината (овде $\frac{b}{a}$) зове се однос сродности или афинитетни однос.

Ако је дата једначина круга описаног над великом осовином

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

овако ћемо добити једначину сродне криве:

Ставимо $X = x$ и $Y = \frac{ay}{b}$. Добијамо:

$$x^2 + a^2 \frac{y^2}{b^2} = a^2 \qquad \text{Одатле је}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Једначина елипсе.}$$

[Како ћеш из дате једначине елипсе извести једначину сродног круга?]

Други начин конструкције елипсе. — Опишимо на елипси оба круга (сл. 7). Из центра повуцимо произвољан полупречник OM. Он сече мали круг у N'. Из M ордината MN. Из N' паралелна с апсцисном осовином (права $N'D$). Тачка D лежи на елипси.

Да се уверимо. Тачка D лежи на елипси ако је $DN = \frac{b}{a} Y$.

Обележимо: $OM = a$, $ON' = b$, $ON = x$, $MN = Y$.

Троугли ONM и $N'DM$ су слични. Отуда је:

$$Y : MD = a : (a - b) \text{ и } MD = (a - b)\frac{Y}{a}.$$

Ордината тачке D је $MN - MD = Y - (a - b)\frac{Y}{a} = \frac{b}{a} Y$.

Тачка D збиља лежи на елипси.

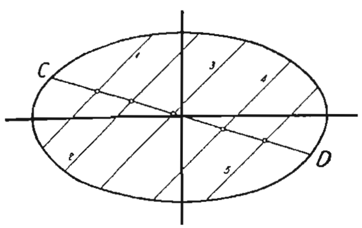
***Површина елипсе.** — Површина великога круга на елипси јесте: πa^2. Елипсина је површина пројекција површине великога круга. Зато је њена површина p:

$$p = \pi a^2 \cos\alpha.$$

$$p = \pi a^2 \frac{b}{a}$$

$$p = \pi ab.$$

***Елипсини пречници.** — Дуж која спаја две централно симетричне тачке зове се пречник (или дијаметар). На слици 3 тачке M_1 и M_2 леже симетрично према O. Зато је дуж $M_1 M_2$ елипсин пречник. Елипса има безброј тачака симетричних према центру. Отуда има и безброј пречника. (Који је највећи? Који је најмањи?)

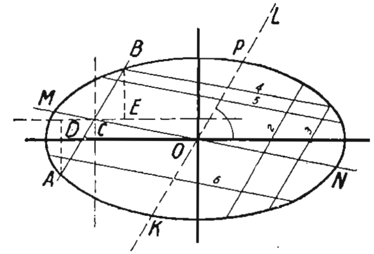


Сл. 11.

***Елипсина тетива.** — Дуж која спаја две ма које тачке на елипси, јесте њена тетива. Средине свих међусобно паралелних тетива леже увек на једноме пречнику. (Средине тетива 1, 2, 3, 4, 5 леже на пречнику CD, сл. 11).

***Једначина пречника.** — Хоћемо да одредимо једначину пречника MN (сл. 12). Он полови тетиву AB. Нека је њена једначина

$$y = mx + n.$$



Сл. 12.

Тачка C је средина тетиве AB. Нека су њене координате p и q. Пренесимо координатни почетак у C. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$$

Једначина праве AB постаје

$$y = mx \quad \text{(Зашто?)}$$

Та права сече елипсу у A и B. Апсцисе CE и CD морају бити супротни бројеви. (Зашто?)

$$\overline{CE} + \overline{CD} = 0.$$

Ако хоћемо координате пресека праве AB и елипсе, решићемо овај систем:

$$(1) \qquad b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$$

$$(2) \qquad y = mx.$$

Сменом (2) у (1) добијамо:

$$(3) \quad (b^2 + a^2 m^2)\, x^2 - (2b^2 p + 2a^2 mq)\, x + bp^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Решења ове квадратне једначине морају бити супротни бројеви. Значи да је

$$x_1 + x_2 = 0.$$

У квадратној једначини

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{јесте}$$

$$x_1 + x_1 = -\frac{b}{a}$$

Значи да у нашој једначини (3) мора бити:

$$\frac{2b^2 p + 2a^2 mq}{b^2 + a^2 m^2} = 0. \qquad \text{Одатле је:}$$

$$b^2 p + a^2 mq = 0.$$

Шта претстављају p и q? Координте средине ма које тетиве паралелне са правом $y = mx$.

Обележимо их са x и y. Добијамо:

$$(4) \qquad b^2 x + a^2 my = 0. \qquad \text{Једначина праве MN, сл. 12.}$$

То је једначина елипсиног пречника који полови тетиве чији је угловни сачинилац m.

Ово је једначина праве линије. Значи, линија која спаја средину тетива паралелних с неком правом (правом L, сл. 12) јесте права линија.

Једначина (4) нема независног члана. Значи да права (4) пролази кроз елипсин центар. Пречник MN иде кроз елипсин центар.

***Спрегнути пречници.** — Пречник MN (сл. 12) полови тетиве паралелне с пречником KP (тетиве 1, 2, 3). Пречник KP полови тетиве паралелне с пречником MN (тетиве 4, 5, 6....). Два елипсина пречника који тако леже да један полови тетиве паралелне с оним другим, а други полови тетиве паралелне с првим зову се спрегнути пречници (или коњуговани дијаметри).

Нека је једначина пречника KP:

$$y = m\ x.$$

Тада је једначина пречника MN:

$$b^2 x + a^2 m y = 0. \qquad \text{(Види горе једначину 4).}$$

Позитивно и негативно поље код елипсе. — У полином елипсине једначине:

$$16\ x^2 + 25\ y^2 - 400 = 0 \qquad \text{(Сл. 13)}$$

унесимо координате координатног почетка O (0, 0). Добићемо:

$$16.0 + 25.0 - 400 = -400 < 0.$$

Значи да је унутарње елипсино поље негативно. Онда је спољње поље позитивно. [Узми још неколико тачака, унутрашњих и спољашњих, па види какве вредности добија елипсин полином].

Елипса и права. — У коме су односу елипса и права сазнајемо решавањем система једначине елипсе и праве.

Пример I. — У коме су односу елипса

$$\text{I}\quad 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \qquad \text{и права}$$

$$\text{II}\quad x - y = 7\ ?$$

Решимо доњу једначину по x и сменимо у горњој. — Добијамо

$$16\ (7 + y)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

То је даље:

$$41y^2 + 14.16y + 49.16 - 400 = 0$$

Дискриманта ове једначине јесте:

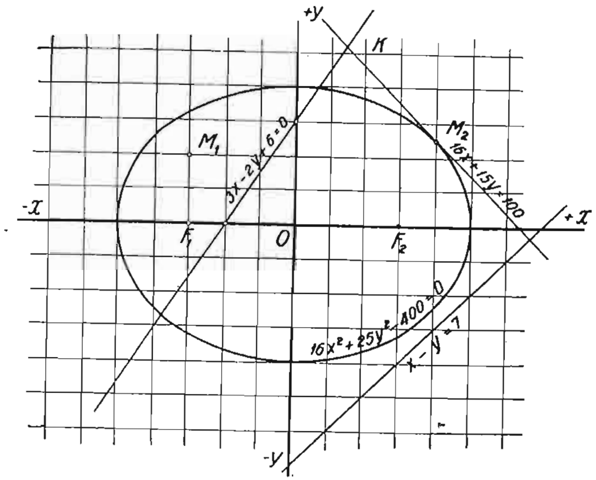
$$D = (14.16)^2 - 4.41\ (49.16 - 25.16)$$

$$D = 14^2.16 . 4 . 4 - 4 . 41 . 16\ (49 - 25)$$

$$D = 64\ (784 - 41 . 24)$$

$$D < 0,$$

Дискриминанта је мања од нуле. Решења су уображена. Дата права и дата елипса немају заједничких тачака. (Сл. 13).



Сл. 13.

Пример II. — Испитати међусобни однос праве и елипсе:

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$$x = \frac{2}{3}\ y - 2. \text{ Сменом у другој добијамо:}$$

$$16\ (\frac{2}{3}\ y - 2)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

$$16\ (\frac{4}{9}y^2 - \frac{8}{3}\ y + 4) + 25y^2 - 400 = 0.$$

$$16\ (4y^2 - 24y + 36) + 25 .\ 9y^2 - 3600 = 0$$

$$(64 + 25 .\ 9)\ y^2 - 16 .\ 24y + (16 .\ 36 - 3600) = 0.$$

Пошто су у овој једначини сачинилац уз y^2 и независан члан неједнако означени, корени морају бити стварни и неједнаки. Дата права сече елипсу (сл. 13, права K).

Пример III. — Испитати међусобни однос ових двеју линија:

$$16x + 15y = 100$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Из прве имамо:

$$y = \frac{20}{3} - \frac{16}{15}\ x. \text{ Сменом у другој добијамо:}$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{20}{3} - \frac{16}{15}x\right)^2 = 400.$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{400}{9} - \frac{128}{9}x + \frac{256}{225}x^2\right) - 400 = 0$$

$$16 \cdot 225x^2 + 25\,(400 \cdot 25 - 128 \cdot 25x + 256\,x^2) - 400 \cdot 225 = 0$$

Делимо са 25:

$$16 \,.\, 9\,x^2 + 400 \,.\, 25 - 128 \,.\, 25\,x + 256\,x^2 - 400 \,.\, 9 = 0$$

Делимо са 16:

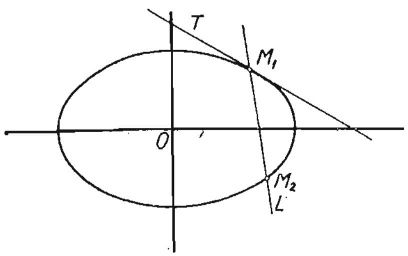
$$9x^2 + 625 - 200x + 16x^2 - 225 = 0$$
$$25x^2 - 200x + 400 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Дискриминанта:

$$D = 8^2 - 4 \,.\, 16 = 0.$$

Систем даје два стварна једнака решења. Дата је права дирка на елипси (сл 13).

Једначина дирке на елипси. — Ако се сечица L (сл. 14) обрће око M_1 тако да се M_2 приближава тачки M_1, сечица L тежи да постане дирка T.



Сл. 14.

Обе пресечне тачке леже на елипси. Зато мора бити:

$$(1) \quad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$
$$b^2x_2^2 + a^2\,y_2^2 = a^2b^2$$

Једначина сечице L биће:

$$(2) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - y_1)$$

Хоћемо једначину дирке.

У изразу $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ мењају се x_2 и y_2 док се L обрће око M_1. Они теже ка x_1 и y_1. Бројилац и именилац овог израза теже нули. Он постаје привидно неодређен.

Ми ћемо зато овом изразу дати други облик, да бисмо му лако одредили граничну вредност.

Из система (1) добијамо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = - \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Ако сад пустимо да $x_2 \to x_1$ и $y_2 \to y_1$, видимо лако да ће бити:

$$\lim \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim \left[- \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}\right] = - \frac{b^2 \,.\, 2x_1}{a^2 \,.\, 2y_1} = - \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}.$$

Зато ће једначина дирке бити:

$$y - y_1 = - \frac{b_2\,x_1}{a_2\,y_1}(x - x_1)$$

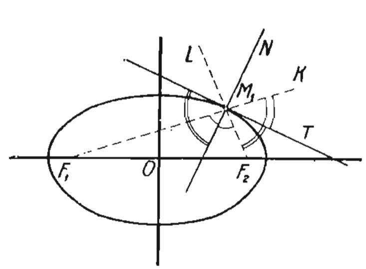
Кад се упрости, добија се овај облик једначине елипсине дирке:

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2.}$$

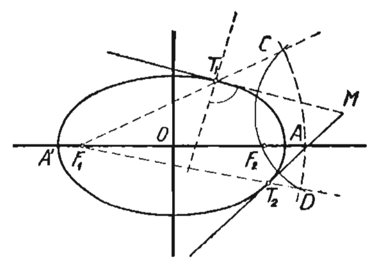
* Ако је елипсин центар ван координатног почетка, рецимо у тачци $M\,(p, q)$, а њене осовине паралелне с координатним осовинама, једначина дирке биће:

$$b^2\,(x - p)\,(x_1 - p) + a^2\,(y - q)\,(y_1 - q) = a^2\,b^2\,.$$

* **Конструкција елипсине дирке у датој тачки.** — Хоћемо дирку у M_1 (сл. 15). Из обеју жижа повлачимо зраке кроз M_1. (K и L). Дирка је симетрала угла $F_2 M_1 K$.



Сл. 15.



Сл. 16

Симетрала угла $F_1 M F_2$ јесте нормала у M.
[Зашто је то тако?]

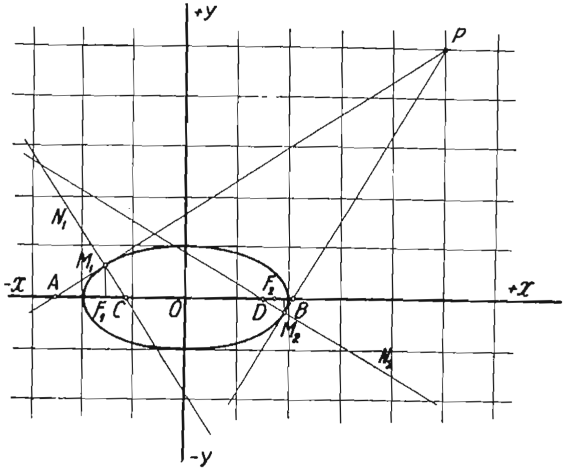
***Конструкција дирке из спољне тачке.** — Хоћемо дирку из M (сл. 16). Лук из M отвором MF_2. Лук из F_1 отвором $2a$ (велика осовина). Секу се у C и D. Спајамо C и D са F_1. Спојнице секу елипсу у додирним тачкама T_1 и T_2.

Једначина елипсине нормале. — Нормала пролази кроз додирну тачку и управна је на дирци. Зато је њена једначина

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x - x_1).}$$

Пример

Из тачке P (5,5) повучена је дирка на елипсу $x^2 + 4y^2 = 4$ (сл. 17). Одредити једначине дирке и нормале, дужине дирке, нормале, потангенте и поднормале.



Сл. 17.

Једначине дирки

$$b^2 xx_1 = a^2 yy_1 = a^2 b^2$$

У нашем случају биће:

$$xx_1 + 4yy_1 = 4.$$

Ова дирка иде кроз P:

(1) $$5x_1 + 4 \,.\, 5y_1 = 4$$

Додирна тачка M_1 лежи на елипси:

(2) $$\begin{cases} x_1^2 + 4y_1^2 = 4 & \text{и на правој} \\ 5x_1 + 20y_1 = 4 \end{cases}$$

Решићемо овај систем и добити координате додирних тачака.

$$x_1 = \frac{4}{5} - 4y_1$$

$$\left(\frac{4}{5} - 4y_1\right)^2 + 4y_1^2 = 4$$

Одатле добијамо:

$$y'_1 = \frac{3}{5}$$

$$y''_1 = -\frac{7}{25}$$

Отуда ове вредности за x_1:

$$x'_1 = -\frac{8}{5}$$

$$x''_1 = \frac{48}{25}$$

Добијамо координате двеју додирних тачака:

M_1 (—1,6 и 0,6) и M_2 (1,92 и — 0,28).

Зато имамо и две дирке:

I $\quad 3y - 2x = 5$

II $\quad 12x - 7y = 25.$

[Изврши пробу!]

Једначине нормала

Једначина нормале N_1:

$$y - 0{,}6 = -\frac{3}{2}(x + 1{,}6).$$

То је најзад:

$$10y + 15x = -18.$$

Једначина нормале N_2:

$$y + 0{,}28 = -\frac{7}{12}(x - 1{,}92)$$

То је најзад:

$$12y + 7x = 10{,}08.$$

Дужине дирки

Најпре координате пресека дирки с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначинама обеју дирки:

I $\quad 3y - 2x = 5 \quad$ за $y = 0$ имамо $\quad x = -2{,}5$

II $\quad 12x - 7y = 25 \quad$ за $y = 0$ имамо $\quad x = \frac{25}{12}$

Прва дирка сече апсцисну осовину у тачки A (сл. 17), чије су координате (—2,5 и 0). Друга сече апсцисну осовину у тачки $B\left(\frac{25}{12}\right.$ и 0). Тада ће бити

дужина прве дирке: $AM_1 = \sqrt{(x_1 + 2{,}5)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{1{,}17}.$

дужина друге дирке: $BM_2 = \sqrt{\left(x_2 - \frac{25}{12}\right)^2 + (y_2 - 0)^2} =$

$$= \frac{1}{300}\sqrt{9457}$$

Дужине нормала

Најпре координате пресека нормала с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначинама обеју нормала:

$$\text{I} \quad 10y + 15x = -18 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо} \quad x = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

$$\text{II} \quad 12y + 7x = 10{,}08 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо} \quad x = 1{,}44.$$

Прва нормала сече апсцисну осовину у тачки $C\ (-1{,}2 \mid 0)$ Друга сече апсцисну осовину у тачки $D\ (1{,}44 \mid 0)$. Зато ће бити:

Дужина прве нормале: $M_1\ C = \sqrt{(x_1 + 1{,}2)^2 + y_1^2} = 0{,}2\sqrt{13}.$

Дужина друге нормале: $DM_2 = \sqrt{(x_2 - 1{,}44)^2 + y_2^2} = 0{,}11\sqrt{21}.$

**Дужине поднормала*

I. Разлика апсциса прве додирне тачке и пресека прве нормале с апсцисном осовином:

$$x_1 - (-1{,}2) = -1{,}6 + 1{,}2 = -0{,}4$$

$$\text{II} \quad x_2 - 1{,}44 = 1{,}92 - 1{,}44 = 0{,}48$$

**Дужине потангената*

$$\text{I} \quad x_1 - (-2{,}5) = -1{,}6 + 2{,}5 = 0{,}9$$

$$\text{II} \quad x_2 - \frac{25}{12} = 1{,}92 - \frac{25}{12} = -\frac{49}{300}$$

Напомена. — Код потангената и код поднормала водимо рачуна само о апсолутној вредности.

**Пример II. — Израчунати површину елипсе $3x^2 + 5y^2 = 7$.*

Најпре да одредимо a и b.

$$\frac{3x^2}{7} + \frac{5y^2}{7} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{7}{3}} \qquad b = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

Површина ће бити:

$$P = \pi ab \approx 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{49}{15}} \approx \frac{21{,}98}{15}\sqrt{15}.$$

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 6$.
2. — „ „ „ „ „ $2a = 10$, $2c = 4$.

3. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 2$.
4. — Шта бива са елипсом код које је $2a$ стално, а $2c$ опада
5. — Нацртај елипсу код које је $2a = 8$, $2c = 2$.
6. — „ „ „ „ „ $2a = 8$, $2c = 6$.
7. — „ „ „ „ „ $2e = 8$, $2c = 7$.
8. — Шта бива са елипсом код које је $2a$ стално, а $2c$ расте
9. — Чему тежи елипса, кад $2c$ тежи нули?
10. — Чему тежи елипса, кад $2c$ тежи ка $2a$?
11. — Докажи да је осовина кроз жиже већа од оне друг осовине.
12. — Спој жиже с једним теменом *(B)* на малој осовини Чему је равно $F_1\ B$? Кад су дате дужине $2a$ и $2c$ конструиши
13. — Кад је $2a = 26$, $2c = 10$ израчунај b.
14. — Конструиши елипсу кад је $2a = 10cm$, $2b = 8cm$.
15. — „ „ „ „ $2a = 10cm$, $2b = 9cm$.
16. — „ „ „ „ $2a = 10cm$, $2b = 9{,}5cm$.
17. — Шта бива са елипсом кад је $2a$ стално, а $2b$ расте?
18. — Кад је $2a$ стално, а $2b$ расте, шта бива са жижама
19. — Кад се жиже ближе једна другој на сталној велико осовини, шта бива с малом осовином?
20. — Кад се на сталној великој осовини жиже размичу, шт бива с малом осовином?
21. — Конструиши елипсу кад су дата сва четири темена
22. — Шта бива с елипсом кад $2b$ тежи ка $2a$? Шта бива том случају са жижама?
23. — Шта бива с елипсом кад $2b$ тежи нули? Шта бива том случају са жижама?
24. — Ако једна тачка M има координате m и n, какве коор динате мора имати тачка централно симетрична с њом према коор динатном почетку?
25. — Да ли се из једначине елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види д та крива има центар симетрије? По чему?
26. — Да ли се из елипсине једначине види да елипса им симетриских осовина? По чему?
27. — Дате су: дужина $2p$ двојног елипсиног параметра дужина велике осовине. Конструисати елипсу.
28. — Шта бива са елипсом кад расте параметар?
29. — Шта бива са елипсом кад опада параметар?
30. — Кад ће параметар расти?
31. — Кад ће параметар опадати?

Проучити елипсу, одредити обе осовине, жиже, параметар и конструисати криву:

32. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ **33.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$

34. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ **35.** $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{5}=1.$

36. $2x^2+3y^2=6$ **37.** $x^2+2y^2-2=0.$

38. $3x^2+4y^2-5=0$ **39.** $5x^2+6y^2-1=0$

Одредити бројни ексцентрицитет ових елипси:

40· $3x^2+4y^2=12$ **41.** $2x^2+7y^2=14$

42. $x^2+2y^2-2=0$ **43.** $x^2+4y^2=4$

44. $5x^2+6y^2-8=0$ **45.** $10x^2+16y^2-1=0$

Написати једначину елипсе кад је:

46. $2a=8,\ 2b=6$ **47.** $2a=10,\ 2b=4$ **48.** $2a=7,\ 2b=5$

49. $2a=9,\ 2b=5$

50. — Написати средишну једначину елипсе кад она пролази кроз тачку M_1 (2, 3), а има велику осовину $2a=8$.

51. — Исто за $M_2\ (2\frac{2}{3},\ \sqrt{3})$ и $2b=6$.

52. — Напиши средишну једначину елипсе која иде кроз ове две тачке: $M_1\ (1\frac{1}{2},\ \sqrt{3})$ и $M_2\ (\sqrt{5},\ 1\frac{1}{3})$.

53. — Исто за ове две тачке: M_1 (3 и 1,6) и M_2 (4 и 1,2).

Одредити координате центра, осовине, жижно растојање и параметар ових елипси, па их нацртати:

***54.** $4(x-3)^2+9(y-4)^2=36$

***55.** $3(x+2)^2+4(y+1)^2=12$

***56.** $4(x-3)^2+3(y+1)^2=36$

***57.** $4x^2-32x+9y^2-18y=2$

***58.** $9x^2-36x+25y^2-100y=89$

***59.** $4y^2-16y+x^2-2x+14=0$

***60.** $4y^2-24y+x^2-8x=0$

***61.** $2x^2-6x+4y^2-12y+10=0$

***62.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује апсцисну осовину.

***63.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује ординатну осовину.

***64.** — Напиши општу једначину елипсе која има центар и велику осовину на апсцисној осовини, а додирује ординатну осовину.

[Једначина коју добијеш у овоме вежбању зове се *темена једначина*].

***65.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује обе осовине.

66. — Испитај једначину $4x^2-24x+9y^2=0$

67. — „ „ $9x^2-90x+25y^2=0$

68. — „ „ $x^2+4y^2-8y=0$

69. — „ „ $x^2+9y^2-18y=0$

70. — „ „ $(x-2)^2+4y^2=4$

71. Шта бива са елипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако у њеној једначини сменимо x са y, а y са x?.

72 — Шта бива са кругом $x^2+y^2=r^2$, ако у његовој једначини сменимо x са y а y са x? Мења ли се штогод?

Изводи нови облик елипсине једначине кад координатни почетак транслацијом осовина дође у дату тачку.

***73.** M (3,4) за елипсу из вежбања 54.

***74.** M (—2, — 1) „ „ „ „ 55.

***75.** M (2,2) „ „ „ „ 58.

***76.** M (4,3) „ „ „ „ 60.

***77.** — Куда треба пренети координатни почетак ако желимо да једначина елипсе $b^2(x-p)^2+a^2(y-q)^2=a^2b^2$ добије облик $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$?

***78.** Куда треба пренети координатни почетак ако желимо да општа једначина елипсе добије темени облик?

Конструисати елипсу помоћу малог и великог круга кад је

***79.** $2a=8,\ 2b=6$ ***80.** $2a=7,\ 2b=3$

***81.** $2a=10,\ 2b=8$ ***82.** $2a=12,\ 2b=4$

***83.** — Нацртај сродну криву правој $Y=2X$, кад је однос сродности $\frac{Y}{y}=2$.

[Какву линију добијаш? У коме су положају те две линије?]

***84.** — Исто за праву $2X+3Y=6$ $\frac{Y}{y}=3$

***85.** — Исто за праву $Y=4$ $\frac{Y}{y}=5$

***86.** — Нацртај сродну криву круга $X^2+Y^2=4$, $\frac{Y}{y}=4$

*87. — Нацртај сродну криву круга $X^2 + Y^2 = 9$ $\qquad \frac{Y}{y} = 2$

*88. — Прав ваљак с кружном основом $R = cm$ пресечен је једном равни која сече висину под углом $\alpha = 30^0$. Колика је површина тога пресека?

*89. — Исто за $\alpha = 75^0$. $\qquad R = 8$ *cm*.

*90. — Исто за $\alpha = 47^0 22'$, $\qquad R = 7{,}2$ *cm*.

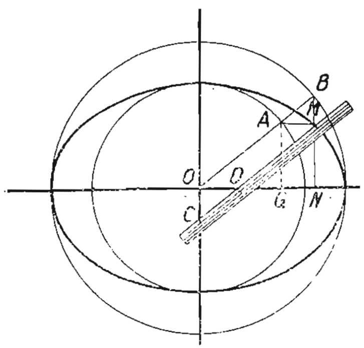
*91. — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 14$ *cm*, $2b = 8$ *cm*.

*92. — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 10$ *cm*, $2c = 6$ *cm*.

*93. — Израчунај површину елипсе која пролази кроз ове три тачке:

$$M_1 (1 \text{ и } 1{,}2\sqrt{6}) \quad M_2 (\sqrt{5},\ 1\tfrac{1}{5}\sqrt{5}) \quad M_3 (2 \text{ и } 0{,}6\sqrt{21}).$$

*94. — Повучен је полупречник OB (сл. 18). С њим је повучена паралелно из елипсине тачке M дуж CM. Овде је $\triangle\ OGA \cong \triangle\ DNM$. Отуда је $OA = DM = b$ Пошто је $OCMB$ паралелограм, значи да је $CM = OB = a$. Отуда је: $CM = a$, $DM = b$. Померај лењирић тако, да је C увек на ординатној осовини, а D на апсцисној. M ће описивати елипсу. Изведи одатле један лак начин конструкције елипсе.



Сл. 18.

Докажи ово: Кад се из једне елипсине тачке M повуче паралелна са полупречником великога круга помоћу кога је добивено M, та паралелна сече апсисну осовину у тачци која је од M далеко за b.

[Други доказ. — Нека су координате тачке M (x,y). Тада је $\frac{OD}{DN} = \frac{CD}{DM}$. Сад даље: $OD = x - DN$, $DN = \sqrt{b^2 - y^2}$, $CD = a - b$, $DM = b$ итд.]

*95. — Израчунати запремину правог ваљка елиптичне основе кад је $H = 15$ *cm*, највећа ширина 8 *cm*, а најмања 6 *cm*.

*96. — Исто за $H = 40$ *cm*, највећу ширину 10 *cm*, а најмању 4 *cm*.

*97. — За елипсу из вежбања 32. одредити једначине спрегнутих пречника и конструисати их кад је један од њих паралелан с правом $x + y = 1$.

*98. — Исто за праву $3x - 7y + 5 = 0$

*99. — За елипсу из вежбања 33 и праву $2x + 3y - 6 = 0$.

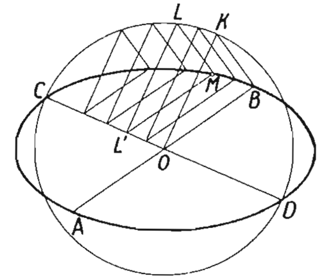
*100. — Исто за елипсу из вежбања 34 и праву $x - y = 2$.

*101. — Исто за елипсу из вежбања 35 и праву $3x - 2y - 1 = 0$.

102. — За елипсу из вежбања 32 конструиши спрегнути пречник пречнику $y = 2x$. Како ћеш то најбрже учинити без икаквих рачуна?

*103. — Конструши елипсу кад су дата њена два спрегнута пречника (сл. 19).

[Над CD круг. На CD управна OK из O. Са кружне периферије управне на CD. Из подножја управних паралелне с другим пречником AB. Из L паралелна са BK. Пресек је тачка M на елипси. Зашто је тачка M на елипси?]



Сл. 19.

*104. — За елипсу из вежбања 56 испитај је ли тачка M $(4, \frac{1}{2}$ унутрашња или спољашња).

*105. — За елипсу из вежбања 59 испитај је ли тачка M $(-3, 4)$ спољашња.

106. — Испитати међусобни однос ове праве и елипсе: $x + y = 1$ и $4x^2 + 9x^2 = 36$.

107. — Исто за $2x - y = 20$ и $x^2 + 3y^2 = 3$

108. — Израчунај једначине дирке и нормале на елипсу из вежбања 32 за елипсину тачку чија је апсциса $\sqrt{5}$.

109. — Исто за елипсу из вежбања 33 и тачку на њој $y = \sqrt{15}$.

110. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку на њој $x = \sqrt{3}$.

111. — Исто за елипсу из вежбања 35 и тачку на њој $y = 0{,}1$.

112. — Исто за елипсу из вежбања 41 и тачку на њој $y = \sqrt{\frac{3}{5}}$

*113. — Исто за елипсу из вежбања 54 и тачку на њој $x = 1$.

114. — Израчунај једначине дирке и нормале повучене на елипсу из вежбања 32, а из тачке M (9, 10).

115. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку M (— 7, — 8).

116. — Исто за елипсу из вежбања 67 и тачку M (14, 10).

117. — Исто за елипсу из вежбања 69 и тачку M (8, 12).

Израчунај све четири додирне количине за тачку M на датој елипси:

118. $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ и M (1, y).

119. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ и M $(\sqrt{2}, y)$

120. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ и M (0,3 и y).

*121. $x^2 - 8x + 4y^2 - 0$ и M (3, y).

*122. — Један пречник елипсе $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ иде по правој $2y = x$. Кроз његову крајњу тачку чија је апциса позитивна повучена је дирка. У коме су међусобном положају та дирка и спрегнути пречник?

*123. — Доказати да је дирка повучена кроз крајњу тачку једног пречника паралелна са спрегнутим пречником.

124. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 32, кад је дирка паралелна с правом $2x + 3y - 4 = 0$. (Дра решења).

125. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 33 кад је дирка управна на правој $x + y - 7 = 0$. (Два решења).

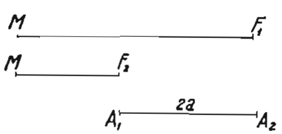
II. — ХИПЕРБОЛА

Дефиниција. — Хипербола је геометриско место тачака у равни чија је разлика раздаљина од двеју сталних тачака стална.

То смо видели раније код купиних пресека. Видели смо и како се конструише хипербола. Знамо да се две сталне тачке зову жиже.

Хиперболина симетриска осовина. — Жиже обележавамо са F_1 и F_2. Њино растојање обележавамо са $2c$: $F_1 F_2 = 2c$.

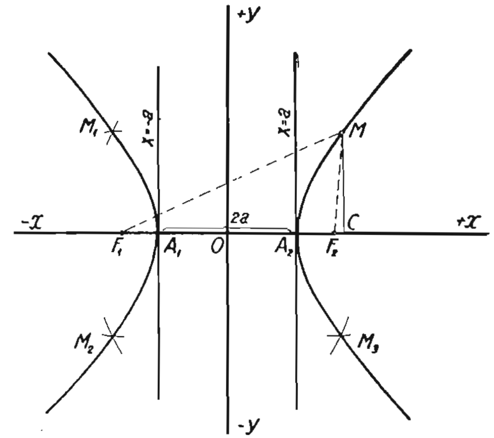
Да се потсетимо конструкције хиперболе. Узмимо две дужине тако да је њихова разлика $MF_1 - MF_2 = 2a$. (сл. 20). Из F_1 круг полупречником MF_1 (сл. 21). Из F_2 круг полупречником MF_2. Секу се у M и M_3. То су хиперболине тачке. То су у исто време и пресеци два круга. Ти пресеци су симетрични према централи F_1F_2. Значи да је права F_1F_2 симетриска осовина хиперболиних тачака.



Сл. 20.

Средишна хиперболина једначина. — Нацртајмо хиперболу (сл. 21) тако да се осовина $F_1 F_2$ поклапа са апсцисном осовином, а координатни почетак O падне у средину жижног растојања.

Пренесимо десно и лево од координатног почетка дуж a. Добићемо тачке A_1 и A_2. Оне леже на хиперболи. Те две тачке морају пасти између F_1 и F_2. [Из троугла $F_1 MF_2$ излази: $M F_1 - M F_2 < F_1 F_2$. $2a < 2c$].



Сл. 21.

Узмимо произвољну тачка M на хиперболи. Из троугла $F_1 MC$ имаћемо:

$$\overline{MF_1^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_1C^2} \text{ тj.}$$

$$(1) \quad \overline{MF_1^2} = y^2 + (c + x)^2$$

Из троугла M_2FC имаћемо:

$$\overline{MF_2^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_2C^2}$$

$$(2) \quad \overline{MF_2^2} = y^2 + (x - c)^2$$

Кад одузмемо (2) од (1) биће:

$$\overline{MF_1^2} - \overline{MF_2^2} = (c + x)^2 - (x - c)^2 \text{ тj.}$$

$$(3) \quad (MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx.$$

Знамо да је $MF_1 - MF_2 = 2a$. Сменимо то у (3). Добијамо:

$$(4) \quad MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Имамо сад овај систем:

$$MF_1 - MF_2 = 2a.$$

$$MF_1 + MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

Одатле добијамо одузимањем:

$$2MF_2 = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$(5) \quad MF_2 = \frac{cx}{a} - a$$

Кад резултат (5) сменимо у (2), добијамо:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = y^2 + (x - c)^2.$$ Сад даље:

$$\frac{(cx - a^2)^2}{a^2} = y^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$ Најзад добијамо:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

Знамо да је $c > a$. Зато је и $c^2 > a^2$. Значи да је разлика $(a^2 - c^2)$ негативна. Ставимо овако:

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$

Наша ће једначина тада добити ове облике:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ Средишна једначина хиперболе.

Посматрање хиперболине једначине. — Решимо ову једначину по y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Одавде видимо ово:

1) За свако x веће од a по апсолутној вредности имамо две супротне ординате. Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

2) Кад x расте по апсолутној вредности почевши од a, y једнако расте. Кад x тежи бесконачноме и y тежи бесконачном. Значи да је наша крива отворена крива линија.

3) Кад x опада по апсолутној вредности, опада и y.

4) Кад је $x = \pm a$, ипсилон је нула. Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама (A_1 и A_2) симетричним према ординатној осовини. Те су тачке удаљене од координатног почетка за половину сталне разлике $2a$.

5) За x мање од a по апсолутној вредности, биће y уображено. Крива нема тачака између правих $x = a$ и $x = - a$ (сл. 21). Значи, она има две потпуно раздвојене гране које иду у бесконачност.

6) Кад је $x = 0$ имамо $y = \pm bi$. Хипербола не сече ординатну осовину.

Решимо сад једначину по x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

Одатле видимо ово:

1) За свако стварно и одређено y имамо две супротне стварне вредности за x. Значи да је и ординатна осовина симетриска осовина.

2) Кад y тежи бесконачноме и x тежи бесконачном. Опет се уверавамо да је ова крива отворена крива.

3) Збир под кореном $(b^2 + y^2)$ позитиван је за све стварне вредности ипсилона. Која му је најмања вредност? Најмања вредност позитивне количине јесте нула. Пошто b није нула, значи да ће најмања вредност за x бити кад је $y = 0$. Тада је $x = \pm a$. Опет се уверавамо да је најмања апсолутна вредност за x ова: $x = a$. Значи да крива нема тачака између $x = a$ и $x = - a$. Опет се уверавамо да крива има две потпуно раздвојене гране.

Осовине и темена. — Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама: A_1 и A_2. Те су тачке хиперболина темена. Хипербола има два темена. Растојање је њених темена $2a$.

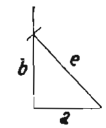
Наша крива не сече ординатну осовину. За $x = 0$ имамо $y = \pm bi$.

Кад су дати a и c дужину b можемо увек конструисати,

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$ Одатле је

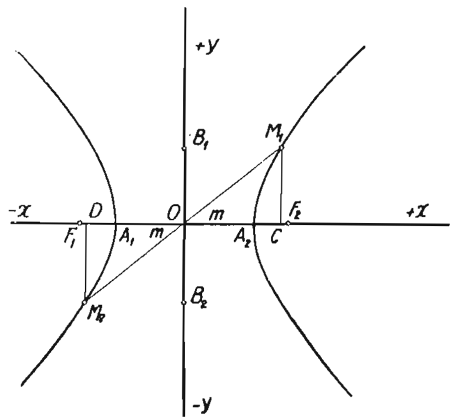
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ми можемо обележити тачке $B_1\ (0, + bi)$ и $B_2\ (0, - bi)$ — сл. 23.



Сл. 22.

Растојање $B_1 B_2$ зовемо **уображена осовина.** Растојање $A_1 A_2 = 2a$ зовемо **стварна осовина.** Уображена осовина има дужину $2b$.



Сл. 23.

Центар. — Средина стварне осовине је хиперболин центар. Узмимо тачку M_1. Нека су њене координате x_1 и y_1. Кад тачки M_1 нацртамо централно симетричну тачку M_2 (према центру O), њене координате биће $x_2 = - x_1$ и $y_2 = - y_1$. Али ако је хиперболина једначина задовољена за вредности x_1 и y_1, она мора бити задовољена и за вредности $- x_1$ и $- y_1$. (Зашто?). Значи да и тачка M_2 лежи на хиперболи. Тачка O је хиперболин центар симетрије.

Ексцентрицитет. — Линиски ексцентрицитет је c. Бројни ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} > 1$.

Ако ексцентрицитет расте, тада или расте c, или опада a, или се дешава и једно и друго. Али ако расте c, а опада a, расте b. [Зато што је $c^2 - a^2 = b^2$]. Тада је, за исту апсцису, y све веће $[y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}]$. Хипербола се шири.

Шта бива ако екцентрицитет опада?

Ако e тежи јединици, a тежи ка c. Тада b тежи нули. Наша хипербола тежи правој $y = 0$. Хиперболе нема за $e = 1$. Бројни ексцентрицитет мора бити већи од 1.

Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар. Жижина апсциса је $x = c$. Зато је параметар:

$$p = \frac{b^2}{a.}$$

Асимптоте. — Код хиперболе имамо да испитамо неке нарочите линије које нисмо имали код круга и елипсе.

У једначини хиперболе ставимо да је десна страна нула:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad (1)$$

Је ли то једначина хиперболе?

У једначини (1) можемо леву страну овако да напишемо:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

$$(bx - ay)(bx + ay) = 0. \qquad (2)$$ Тада можемо ставити:

$$bx - ay = 0 \quad \text{и} \quad bx + ay = 0.$$

То су једначине двеју правих. Једначина (1) не претставља хиперболу, већ две праве линије. Нацртајмо их обе сл. 24). Те праве иду по дијагоналама правоугаоника чије су стране $2a$ и $2b$

Да ли права ON сече хиперболу?

Једначина праве ON јесте ово:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Хиперболина једначина је:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

У тачци A_2 дигнимо управну $A_2 C_2$. Обележимо ординату на хиперболи са y, ординату на правој ON са Y. Тада за тачку A_2 ордината на правој ON јесте $Y = b$.

ордината на хиперболи јесте $y = 0$.

$$Y - y = b.$$

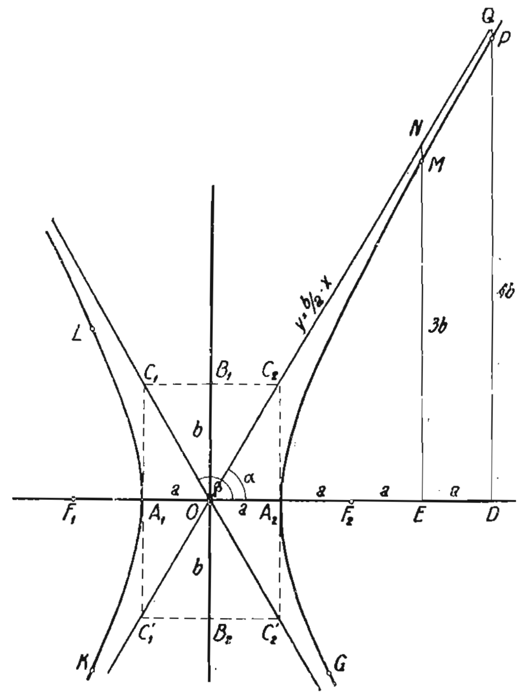
Дигнимо управну у тачки E (3а, 0) Добијамо:

ордината на правој ON јесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} 3a = 3b$,

ордината на хиперболи јесте $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{9a^2 - a^2}$

$$= \frac{b}{a} 2a \sqrt{2} = 2b \sqrt{2} \approx 1,8\ b.$$

$$Y - y = 3b - 1,8\ b \approx 1,2\ b.$$



Сл. 24.

Дигнимо управну у тачци D (4a, 0). Добијамо ово:

ордината на правој ON јесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} 4a = 4b$,

ордината на хиперболи $y = \frac{b}{a} \sqrt{16a^2 - a^2} = b \sqrt{15} \approx 3,87\ b$.

$$Y - y = 4b - 3,87b \approx 0,13b.$$

Разлика ордината опада. Чему тежи?

$$Y^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2$$

$$Y^2 - y^2 = b^2.$$ Одатле је:

$$Y - y = \frac{b^2}{Y+y}.$$ Чему тежи ова разлика кад x тежи бескрајном?

$$\lim_{x\to\infty}(Y - y) = \lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{Y+y} = 0.$$

Разлика ордината тачака с праве ON и хиперболе тежи нули. Значи, тачке с хиперболе све су ближе правој ON и теже да падну на њу.

Права којој се бескрајно приближује хипербола тако, да разлика њихових ордината тежи нули, зове се **асимптота** хиперболе. Хипербола има две асимптоте:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x.$$

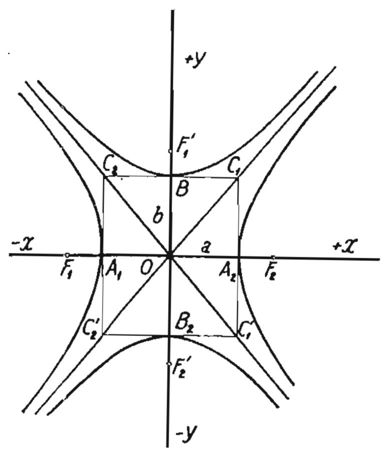
Из једначина асимптота видимо да је

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{b}{a}$$ (сл. 24). Значи да је

$$\beta = (\pi - \alpha)$$

Грана GA_2M захваћена је крацима угла $C'_2\,OC_2$.
Грана $KA_1\,L$ захваћена је крацима угла $C'_1\,OC_1$.

Брза конструкција хиперболе. — Кад нам је потребно да брзо нацртамо хиперболу и приближно, нацртамо асимптоте и у њихове углове уцртамо хиперболине гране.



Сл. 25.

Спрегнуте хиперболе. — Две хиперболе које имају исти центар и исте осовине али тако да је стварна осовина једне уображена осовина за ону другу, а уображена осовина прве стварна осовина оне друге, зову се спрегнуте (коњуговане) хиперболе. За хиперболу $F_1\,F_2$ (сл. 25) стварна осовина је $A_1\,A_2$, уображена осовина $B_1\,B_2$. За хиперболу $F'_1\,F'_2$ уображена је осовина A_1A_2, стварна $B_1\,B_2$. Хипербола $F'_1\,F'_2$ је спрегнута хипербола хиперболе $F_1\,F_2$ и обрнуто.

Једначина спрегнуте хиперболе. — Са слике се види да за свако y хиперболе $F'_1\,F'_2$ немамо увек два стварна икса. (За ординате од 0 до $+b$ и од 0 до $-b$ крива нема стварних апсциса).

Узмимо једначину хиперболе $F_1\,F_2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ Из ње је:

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

Видимо да хипербола $F_1\,F_2$ има увек стварне апсцисе за свако стварно и коначно y. Да би апсцисе могле бити уображене, мора под кореном да буде разлика. Ставићемо место b^2 израз $(-b^2)$. Добићемо:

$$(1) \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{-b^2 + y^2}.$$

Видимо да је x уображено докле год је $y < b$ (по апсолутној вредности). Ту особину има спрегнута хипербола $F_1'\,F_2'$.

Ако једначину (1) развијемо, добијамо једначину:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$ Једначина спрегнуте хиперболе.

Две спрегнуте хиперболе имају заједничке асимтоте, пошто им је заједнички правоугаоник конструисан над осовинама.

Равнострана хипербола. — Кад су осовине 2a и 2b једнаке хипербола се зове равнострана. Њена је једначина:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

или $x^2 - y^2 = a^2$.

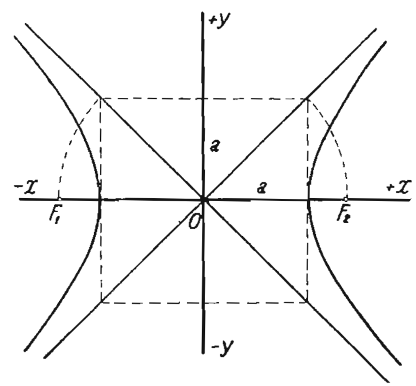
(Чиме се разликује од једначине круга чији је полупречник a?)

Асимптоте су јој:

$$y = \frac{a}{a}x$$

$$\text{и } y = -\frac{a}{a}x, \text{ тј.}$$

$$y = x \text{ и } y = -x.$$



Сл. 26.

(Секу се под правим углом. Зашто?) Слика 26.

* **Једначина хиперболе чије су осовине паралелне с координатним осовинама.** — Нека је центар такве хиперболе у $C\ (p,\ q)$. Тада њена једначина гласи:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$ Општа једначина хиперболе.

Кад се ослободимо разломака и заграда имамо:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2px + 2a^2qy + (b^2p^2 - a^2q^2 - a_2b_2) = 0.$$

Кад ову једначину упоредимо с општом једначином кривих другог степена

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = O,$$

видимо да је у једначини хиперболе:

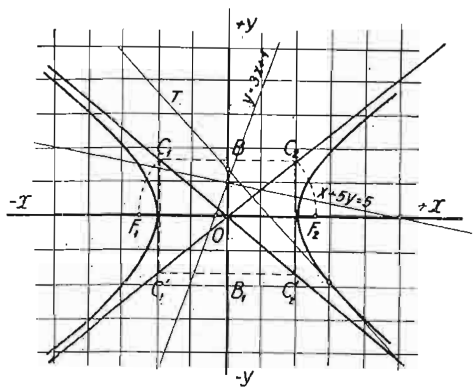
$B = O$ и да су A и C неједнако означени.

Хипербола и права. — Права може сећи хиперболу у двема тачкама, додиривати је, или бити спољна за њу. Кад ће бити једно, друго, или треће зависи од природе решења овога система:

$$Ax + By + C = O \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решења стварна и неједнака — права је сечица; решења стварна и једнака — права је дирка; решења уображена — права је спољна.

Пример I. — Испитати међусобни положај праве $y = 3x + 1$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.



Сл. 27.

$$y = 3x + 1$$
$$3x^2 - 4(3x+1)^2 = 12$$

Одатле је:

$$33x^2 + 24x + 16 = 0$$
$$D = 24^2 - 4.33.16 < 0.$$

Решења су уображена. Права је спољна за хиперболу (сл. 27).

Пример II. — Испитати међусобни положај праве $x + 5y = 5$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$x = 5 - 5y$$

$3(5-5y)^2 - 4y^2 = 12.$ Одатле је даље:

$$71y^2 - 150y + 63 = 0.$$
$$D = 150^2 - 4.63.71 > 0.$$

Решења су стварна и неједнака. Права сече хиперболу у двема тачкама. (Види слику 27).

Пример III. — Испитати међусобни однос праве

$9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.

Из једначане праве: $9x = 12 - 2y\sqrt{15}$

$$3x = 4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15}$$

$$9x^2 = (4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15})^2$$

Из једначине хиперболе: $9x^2 = 12y^2 + 36$

Кад уједначимо десне стране, имамо:

$$(4 - \frac{2}{3}y\sqrt{15})^2 = 12y^2 + 36$$

Одатле је:

$$4y^2 + 4y\sqrt{15} + 15 = 0$$
$$D = (4\sqrt{15})^2 - 16.15 = 16.15 - 16.15 = 0.$$

Имамо два једнака решења:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Права је дирка. (Права T, сл. 27).

Једачина хиперболине дирке. — Једначина дирке изводи се на исти начин као код круга и елипсе.

Ако је

једначине хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, биће

једначина њене дирке $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$

* Ако је

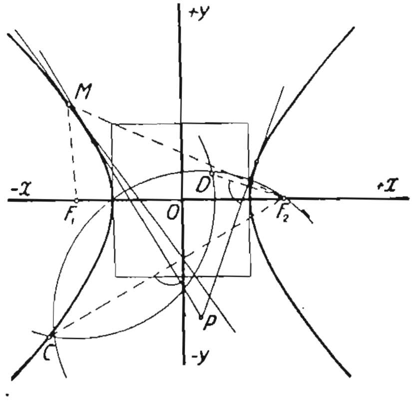
једначина хиперболе $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, биће:

једначина њене дирке $\frac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} - \frac{(y-q)(y_1-q)}{b^2} = 1,$

Конструкција хиперболине дирке. — *Први пример.* — Конструисати дирку на хиперболи у њеној тачци M (сл. 28). Спојимо

M с обема жижама. Симетрала добивеног угла $F_1 M F_2$ јесте тражена дирка.

Други пример. — Повући дирку на хиперболу из дате тачке P (сл. 28). Из F_1 лук полупречником $2a$. Из P лук полупречником PF_2. Пресеке та два лука (тачке C и D) спојимо с теменом кроз које смо описали круг (теме F_2). Добијемо праве CF_2 и DF_2. Из P спустимо управне на CF_2 и DF_2. То су тражене дирке.



Сл. 28.

Једначина хиперболине нормале. — Пошто нормала пролази кроз додирну тачку (x_1, y_1), а стоји управно на дирци, њена ће једначина бити :

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

ВЕЖБАЊА

Нацртај хиперболу кад је

1. $2a = 4$cm, $F_1 F_2 = 6$ cm.

2. $2a =$ cm, $F_1 F_2 = 10$ cm.

3. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ расте, шта бива с хиперболом?

4. — Кад је $2a$ стално ,а $2c$ тежи бесконачноме, чему тежи хипербола ?

5. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ опада и тежи ка $2a$, чему тежи хипербола ?

6. — Шта бива с хиперболом кад c расте ?

7. — Шта бива с хиперболом кад c опада ?

8. — Кад су дати a и b, како се може конструисати c?

9. — Да ли се по хиперболиној једначини $\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{b^3} = 1$ одмах види да та крива има центар? По чему се види?

10. — Да ли се по хиперболној једначини одмах види да је ординатна осовина симетриска осовина те криве? По чему?

11. — Исто питање за апсисну осовину.

12. — Шта бива с хиперболом кад у њеној једначини ставимо x место y и y место x?

13. — Напиши једначину хиперболе кад је $2a = 10$, $2c = 12$.

14. — Колико тачака једне хиперболе треба да знамо, па да можемо написати њену средишну једначину? По чему то познајеш?

15. — Напиши средишну једначину хиперболе која пролази кроз тачке M_1 (— 2, и $3\sqrt{2}$) и M_2 (1, 5 $\sqrt{13}$ и 3).

Одредити осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих :

16. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ **17.** $\frac{x}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

18. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ **19.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

20. $3x^2 - 9y^2 = 27$ **21.** $3x^2 - 4y^2 = 5$

22. $x^2 - 2y^2 = 2$ **23.** $x^2 - 4y^2 = 4$

24. $2x^2 - 3y^2 = 6$ **25.** $4x^2 - 16y^2 = 64$

Одреди једначине асимптота и брзо нацртај приближну слику ових хипербола :

26. $4y^2 - 9y^2 = 36$ **27.** $4x^2 - 25y^2 = 100$

28. $5x^2 - 7y^2 = 35$ **29.** $6x^2 - 9y^2 = 54$

30. $9x^2 - 20y^2 = 180$ **31.** $4x^2 - 8y^2 = 9$

32. — Нацртај спрегнуту хиперболу хиперболе из вежбања 16.

33. — Исто за хиперболу из вежбања 18

34. — Исто за хиперболу из вежбања 20.

Испитај ове једначине и нацртај криве :

35. $x^2 - y^2 = 4$ **36.** $2x^2 - 4y^2 = 15$

37. $3x^2 - 3y^2 = 10$ **38.** $4x^2 - 4y^2 = 15$

Одреди координате центра, осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих, па их конструиши:

*** 39.** $x^2 - 2y^2 - 4x + 2 = 0$

*** 40.** $x^2 - 2y^2 + 8x + 3 = 0$

*** 41.** $x^2 - 2y^2 + 12y - 20 = 0$

*** 42.** — Какав облик добија хипербола из вежбања 23 кад координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку M (2,0)?

*** 43.** — Исто питање за хиперболу из вежбања 22 и тачку M (3,2).

*** 44.** — Исто питање за хиперболу из вежбања 19 и тачку M (0,3).

*45. — Какав облик добија једначина праве $y = ax$, кад координатни почетак дође транслацијом осовина у тачку $M\ (p,\ q)$? Како гласе једначине асимптота за хиперболу

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1?$$

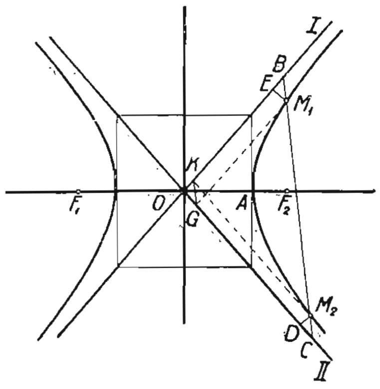
*46. — Нађи једначине асимптота за криву $x^2 - 4y^2 - 8y = 0$.

47. — Под којим се углом секу асимптоте криве $x^2 - 10y^2 - 2 = 0$?

48. — По чему ћемо познати је ли једна тачка спољашња или унутрашња за хиперболу?

49. — Испитај положај ових тачака према хиперболи: $4x^2 - 9y^2 = 36$

$M\ (4,1)$ $N\ (-5,1)$ $E\ (1,1)$ $G\ (-1,4)$ $P\ (5,2\frac{2}{3})$ $L\ (-\sqrt{15}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$



Сл. 29.

50. — Из хиперболиних тачака M_1 и M_2 повучене су паралелне с асимптотама. Докажи (сл. 29) да паралелограми M_1EOG и M_2DOK имају једнаке површине и да та површина не зависи од координата тачака M, већ је сталан број.

51. — Докажи ово: Свака права која пролази кроз две хиперболине тачке M_1 и M_2 сече хиперболу тако, да је од M_1 до ближе асимптоте исто растојање као од M_2 до њој ближе асимптоте.

[Из M_1 и M_2 повуци паралелне с асимптотама. Искористи троуглове OKG и EM_1B и CBM_2.]

Ако су дате осовине, одмах можемо написати једначину хиперболе, конструисати асимптоте, израчунати координате једне тачке (за произвољну апсцису) и обележити је. Тада кроз M_1 праву BC између асимптота. Кад знамо BM_1 и C, дуж BM_1 пренета од C по правој BC даје једну хиперболину тачку (M_2). Изведи одатле нов начин конструкције хиперболе.

52. — Помоћу сечице конструиши хиперболу $x^2 - 4y^2 = 4$.

53. — Докажи једначинама оно што се тражи у вежбању 51.

54. — Дате су једначине асимптота једне хиперболе:

$y = \frac{2}{3}x$ и $y = -\frac{2}{3}x$ и стварна осовина $2a = 12$. Конструиши ту хиперболу и одреди јој једначину.

Испитати однос дате праве и дате хиперболе:

55. $2x + 3y = 0$ и $x^2 - 4y^2 = 4$

56. $x - y - 1 = 0$ и $2x^2 - 3y^2 = 6$

*57. $2x^2 - 8x - 4y^2 + 24y = 34$ и $3x + 7 = 0$

58. $x^2 - 8y^2 = 8$ и $x - y - 2 = 0$.

Одредити једначину дирке и нормале за дату хиперболу у датој тачци на њој:

59. $x^2 - 2y^2 = 1$ у тачци чија је апсциса $x = 3$.

60. $2x^2 - 9y^2 - 18 = 0$ за $x = 6$.

61. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ за $x = 10$.

62. $5x^2 - 6y^2 - 30 = 0$ за $x = 3$.

63. $7x^2 - 8y^2 - 56 = 0$ за $x = 4$.

64. — У једначини $\lambda x + 2y - 3 = 0$ одредити λ тако, да дата права буде дирка на хиперболи $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

65. — Напиши једначину дирке на хиперболи $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$ паралелну с правом $2x + 3y - 6 - 0$.

66. — Одреди једначину дирке на хиперболу $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ управну на правој $7y - x + 35 = 0$.

67. — Одреди једначину оне дирке на хиперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ чија нормала иде кроз жижу.

68. — Додирна тачка M_1 дирке T спојена је са жижама. Докажи да дирка полови угао $F_1\ M_1\ F_2$.

69. — Нађи међусобни однос ових двеју кривих:

$x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ и $x^2 + 9y^2 = 9$.

70. — Под којим се углом секу ове две криве:

$x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 - y^2 = 4$?

Из дате тачке M повучена је дирка на дату хиперболу. Одреди јој једначину.

71. $x^2 - 4y^2 = 4$ $M\ (1,7)$

72. $4x^2 - 9y^2 = 36$ $M\ (2,-7)$

73. $9x^2 - 25y^2 = 225$ $M\ (3,10)$

74. $2x^2 - 3y^2 = 7$ $M\ (1,7)$

75. — Може ли се повући дирка из тачке $M\ (6,1)$ на хиперболу из вежбања 71?

76. — Кроз тачку M из претходног вежбања повуци тетиву тако, да она отсече на ординатној осовини отсечак 5,5 и израчунај дужину те тетиве.

77. — Дата је права $y = \lambda x$ где је λ позитивно и једнако расте. При томе та права једнако остаје эсимптота једне променљиве хиперболе. Шта бива са жижама те хиперболе ?

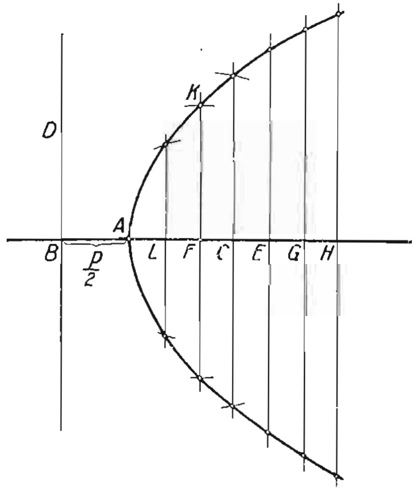
78. — Докажи ово: Додирна тачка полови део тангенте захваћен асимптотама. Да ли се одатле може извести нов начин конструкције дирке на хиперболу у датој тачци ?

79. — Права $x + y = 10$ обрће се у негативном смислу око своје пресечне тачке с хиперболом $x^2 - 5y^2 = 5$. Колика је величина тога обртања, кад сечица треба да постане дирка ? [Колико има решења?]

80. — Да ли су поља захваћена левом и десном граном хиперболе $x^2 - 4y^2 = 4$ истога знака? А како је то код хиперболе уопште ?

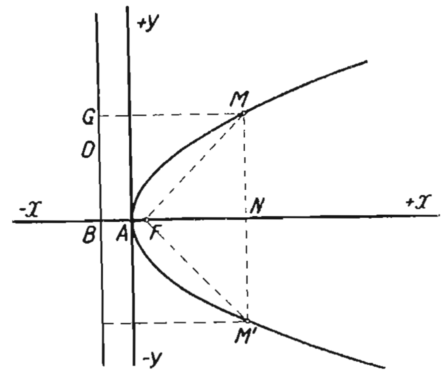
III. — ПАРАБОЛА

Дефиниција. — Парабола је геометриско место тачака подједнако одаљених од једне сталне тачке и једне сталне праве. Сталну тачку зовемо жижа и обележавамо је са F. Сталну праву зовемо водиља или директриса и обележавамо је са D (сл. 30).



Сл. 30

Параболина симетриска осовина. — Из жиже спустимо управну FB на водиљу D. Узмимо једну тачку на параболи (сл. 31). Спустимо из те тачке M управну MN на FB и пренесемо $MN = NM'$. Добијамо симетричну тачку M' тачке M (према FB). И тачка M' лежи на параболи. Ево зашто. Троугао MNF симетричан је са $M'NF$ према FB. (Зашто?). Отуда је $MF = M'F$. Тачке M и M' имају једнако растојање од жиже. Из M' спустимо $M'C$ управну на водиљу D. Четвороугао $CM'MG$ је правоугаоник. Отуда је $CM' = GM$. Пошто је $M'F = FM = MG$, биће: $M'F = CM'$. Тачка M' је подједнако удаљена од жиже и водиље. Она онда мора лежати на параболи. Пошто за сваку тачку на параболи можемо показати једну симетричну тачку на параболи према правој FB, права FB мора бити параболина симетриска осовина. Права која пролази кроз жижу и стоји управно на водиљи јесте параболина симетриска осовина.



Сл. 31.

Растојање жиже од водиље зовемо осовина и обележавамо га са p :

$$BF = p \text{ (сл. 30).}$$

Парабола има једно теме. То је тачка A (сл. 30). Теме лежи на средини осовине p. (Откуд знамо?)

Парабола је отворена крива. — Што се више удаљујемо од водиље, жижно растојање MF расте. С њим расту и управне MN (сл. 31). Значи, крива се све више удаљује од своје симетриске осовине. Она је отворена крива. Зато може имати само једно теме. (А како хипербола има два? То ћеш сад видети.)

Конструкција параболе. — То смо већ раније видели. Сад ћемо се само потсетити. На осовини узмемо произвољне тачке (C, E, G, H итд. сл. 30). Из њих дигнемо управне на осовину. Из F пресечемо управну у C полупречником BC, управну у E полупречником BE итд. Пресеци су параболине тачке.

Темена једначина параболе. — Знамо да је:

(1) $MF = MG$ (сл. 31). То важи за сваку параболину тачку. Израчунаћемо MF и MG помоћу координата. Добивен

вредности сменићемо у (1). Тако ћемо добити једначину параболе.

$$MF = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{FN}^2} \text{ (сл. 31)}$$

$$MF = \sqrt{y^2 + (AN - AF)^2}$$

$$\text{(2)} \qquad MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$MG = NB = NA + AB$$

$$\text{(3)} \qquad MG = x + \frac{p}{2}$$

Вредности (2) и (3) уносимо у (1) и добијамо:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$ То је даље:

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$y^2 = 2px$. Темена једначина параболе.

То је једначина параболе чија осовина лежи на апсцисној осовини, а ординатна осовина јој пролази кроз теме.

Проучавање параболине једначине. — Решимо једначину по y. Имаћемо $y = \sqrt{2\,px}$.

Одавде видимо ово:

1) Израз 2p је увек позитиван. Зато ће поткорена количина бити позитивна само онда, кад је x веће од нуле. Крива нема тачака са негативним апсцисима.

2) За $x = 0$ биће $y = 0$.

Наша крива пролази кроз координатни почетак.

3) Што је x веће, y је све веће.

Наша је крива отворена крива линија.

4) Свакоме стварном и позитивноме x одговарају две стварне вредности за y.

Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За овакву параболу кажемо да се отвара у позитивном смислу апсцисне осовине.

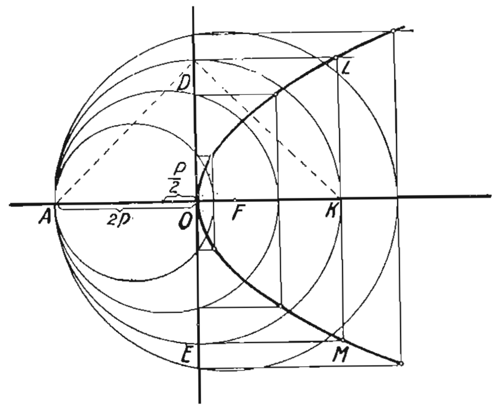
Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар (FK, сл. 30). Параметар добијамо кад у једначини параболе ставимо $x = \frac{p}{2}$. Добијамо:

$$y = \pm\, p. \qquad \text{Параметар је } p.$$

Други начин конструкције параболе. — Из једначине параболе види се ово:

$$2p : y = y : x.$$

То значи: ордината сваке параболине тачке јесте средња пропорционала између двогубог параметра и апсцисе те тачке.



Сл. 32.

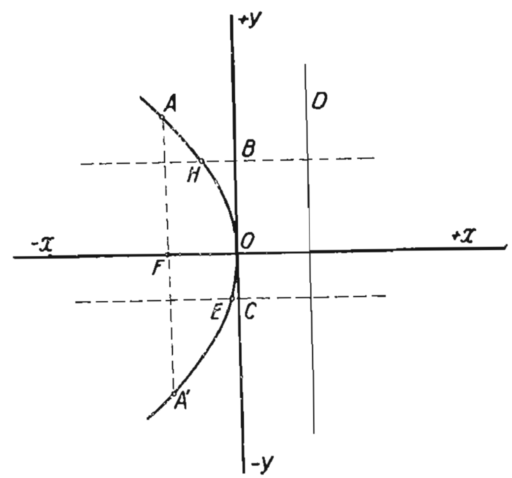
Из те параболине особине може се извести нов начин параболине конструкције.

На осовини се (лево од темена, сл. 32) пренесе дуж $OA = 2p$. Узмимо произвољну тачку на осовини десно од O. Рецимо K. Над AK описујемо круг. Он сече ординатну осовину у D и E. Из D и E управне на ординатну осовину а из K управну на апсцисну осовину. Где се оне секу ту су параболине тачке L и M.

Откуд знамо да L лежи на параболи? [OD је хипотенузина висина у правоуглом троуглу ADK. Итд.]

Парабола која се отвара у негативном смислу апсцисне осовине. — Узмимо параболу AOA'. Видимо да свакоме стварном и негативном иксу одговарају две стварне и супротне вредностиз а y. Значи да је y на другом степену:

$$y^2 =$$



Сл. 33.

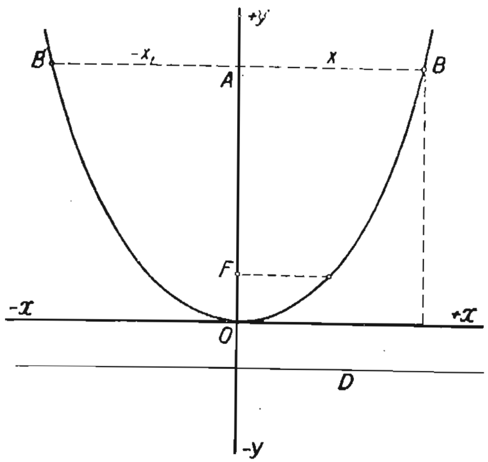
Видимо даље да свакој ординати одговара само једна апсциса. (Ординати OB одговара на кривој само апсциса HB. — сл. 33). Значи да је x на првом степену:

$$y^2 = \ldots x$$

Видимо да само за негативне вредностм икса имамо стварне ординате. Зато мора бити:

$y^2 = -2px$. [Изврши дискусију ове једначине]

Парабола која се отвара у позитивном смислу ординатне осовине. — Ако се парабола отвара у позитивном смислу ординатне осовине (сл. 34), мораћемо добити две супротне вредности за x за свако стварно и одређено y. На слици 34 ординати OA одговарају две супротне вредности за x и то ове: $x_1 = AB$ и $x_2 = AB'$.



Сл. 34.

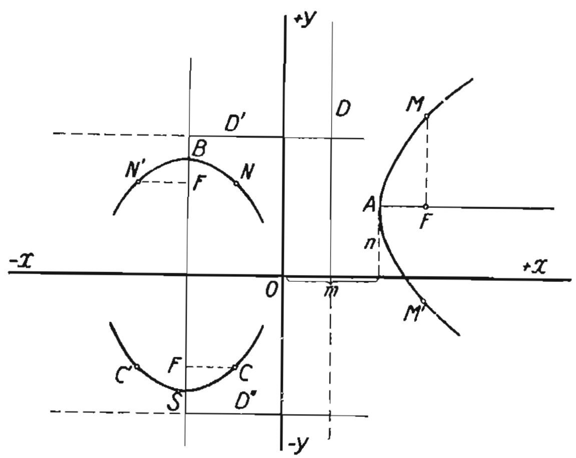
Да би то могло да буде, мора у једначини параболе x бити на другом степену.

Једначина овакве параболе гласи:

$$x^2 = 2py.$$ [Изврши дискусују те једначине].

Општа једначина параболе. — Ако је теме A у тачци $A\ (m,\ n)$, а осовина паралелна с апсцисном осовином, једначина параболе биће:

$$(y - n)^2 = 2p\ (x - m)$$



Сл. 35.

То је парабола која лежи као парабола MAM' са слике 35.

Једначина параболе $M'AM$ са слике 35 биће:

$$(y - 3)^2 = 2 \cdot 4\ (x - 4)$$
$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 32$$
(1) $$y^2 - 6y - 8x + 41 = 0.$$

Једначина параболе NBN' са слике 35 биће:

$$(x + 4)^2 = -4\ (y - 5).$$ То је даље:

(2) $$x^2 + 8x + 4y - 4 = 0.$$

Једначина параболе $C'SC$ за слике 35 биће:

$$(x + 4)^2 = +\ 4\ (y + 5).$$ То је даље:

(3) $$x^2 + 8x - 4y - 4 = 0.$$

Општа једначина кривих другог степена гласи:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Ако је упоредимо с једначинама $y^2 = 2px$ и једначинама (1), (2) и (3, видимо ово:

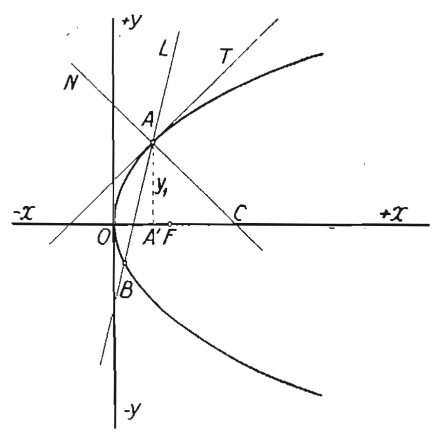
Општа једначина кривих другог степена претставља параболу чија је осовина паралелна с једном координатном осовином кад је:

1) $B = 0$
2) $A = 0$, или $C = 0$.

ЈЕДНАЧИНЕ ДИРКЕ И НОРМАЛЕ

Једначина дирке. — Узмимо параболину сечицу L (сл. 36). Од ње ће постати дирка кад се она буде *обртала* око $A\ (x_1\ y_1)$ тако, да B тежи ка A и падне на A. Гранични положај обртања праве L биће тада дирка T. Обележимо координате тачке B са x_2 и y_2. Тада је једначина праве AB:

(1) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



Сл. 36.

Треба израчунати количник

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Пошто $A\ (x_1\ y_1)$ лежи на параболи $y = 2px$, биће:

(2) $$y_1^2 = 2px_1.$$

Пошто и $B\ (x_2\ y_2)$ лежи на параболи, биће:

(3) $$y_2^2 = 2px_2.$$

Одузимањем (3) од (2) добијамо:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p\ (x_2 - x_1)$$

$$(y_2 - y_1)\ (y_2 + y_1) = 2p\ (x_2 - x_1). \qquad \text{Одатле је:}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Сменом у (1) добијамо:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}\ (x - x_1).$$

Гранични је положај ове праве дирка T. Наћи ћемо границу израза $\frac{2p}{y_2 + y_1}$.

$$\lim_{y_2 \to y_1} \frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Зато је једначина пароболине дирке:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1). \qquad \text{То је даље:}$$

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Пошто је из (2)

$$y_1^2 = 2px_1, \text{ биће даље:}$$

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$

$$yy_1 = px + px_1$$

$$\mathbf{yy_1 = p\ (x + x_1).}$$

То је једначина дирке на параболи $y^2 = 2px$ у тачци чије су координате x_1 и y_1.

Једначина нормале. — Једначина нормале у тачци $A\ (x_1\ y_1)$ има ове особине:

1) Пролази кроз $A\ (x_1\ y_1)$. Зато њена једначина мора бити:

$$y - y_1 = a\ (x - x_1).$$

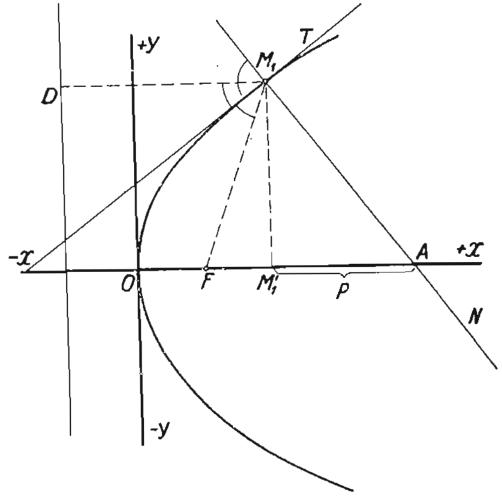
2) Стоји управно на дирки. Зато мора бити:

$$a = -\frac{y_1}{p}. \qquad \text{Отуда је ово једначина нормале:}$$

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{p}\ (x - x_1).}$$

Конструкција дирке и нормале у датој тачки. — Хоћемо да повучемо дирку и нормалу на датој параболи у датој тачки M_1 (сл. 37). Спустимо управну $M_1 M'_1$ из дате тачке на осовину. Од M_1' одмеримо $M_1'\ A = p$. Нормала је права AM_1. У M_1 дигнемо управну на N. То је дирка T.

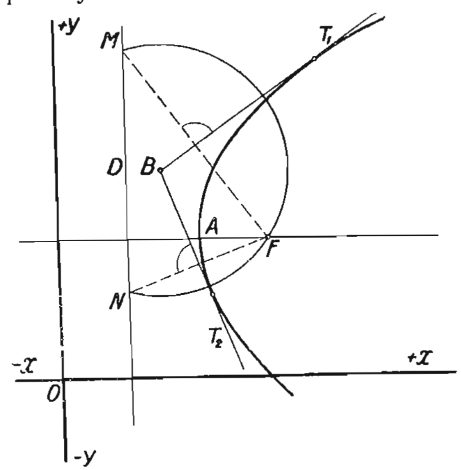
Други начин конструкције дирке. — Спојимо M_1 са F. Из M_1 спустимо управну $M_1\ D$ на водиљу D. Добијамо угао $DM_1\ F$. Његова је симетрала дирка T.



Сл. 37.

Конструкција дирке из спољне тачке. — Дата је једна тачка B (сл. 38). Из ње треба повући дирке на дату параболу.

Описаћемо круг из B полупречником BF. Он сече водиљу у тачкама M и N. Спојимо M и N са F. Из B спустимо управне на MF и NF. Те управне су дирке T_1 и T_2.



Сл. 38.

Парабола нема асимптота. — Да би једна права била асимптота једне криве, треба да је граница разлике њихових ордината за исту апсцису равна нули.

Узмимо параболу $y^2 = 2px$ и праву $Y = ax + b$.

Разлика њихових ордината за исту апсцису x биће:

$$Y - y = ax + b - \sqrt{2px}. \qquad \text{То је даље:}$$

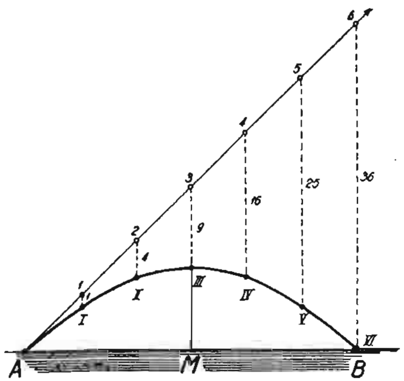
$$Y - y = x\ \left(a + \frac{b}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{2px}\right)$$

$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2px}{x^2}}\right)$$

$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right)$$

Граница ове разлике није нула. Права није асимптота.

*КОС ХИТАЦ



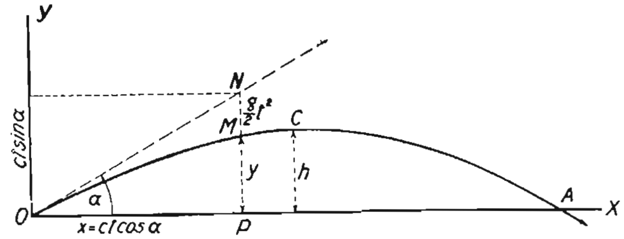
Сл. 39.

„Тешко тело, бачено почетном брзином c у правцу $A6$, косо нагнутом према хоризонталној равни AB (сл. 39) врши једно сложено кретање. Под утицајем почетне брзине оно би се по закону инерције кретало у правцу $A6$, и за 1, 2, 3, 4, ... секунада прешло путеве $A1, A2, A3, A4$......, где је $A1 = c$, $A2 = 2c$..... Ну услед једновременог дејства теже оно би се кретало, по закону слободног падања, вертикално наниже, и прешло би у томе правцу, у првој секунди, пут $1I = \frac{g}{2} 1^2$, у другој $2\,II = \frac{g}{2} 2^2$, у трећој $3\,III = \frac{g}{2}.\ 3^2$... итд. По закону независности кретања, тачке стварне путање I, II, III, IV . . . добијају се конструктивно, ако се замисли, да тело прво изврши једно, а затим друго од оба кретања. Путања је онда крива линија A I II III IV V B".

„Ако полазну аачку O узмемо за координатни почетак, а хоризонталан правац OX и вертикалан OY, оба у равни кретања, за координатне осовине правоуглог координатног система, и ако је ON правац бацања, онда је $\sphericalangle \alpha = NOX$, елевациони угао (сл. 40). Нека је $ON = ct$ пут услед почетне брзине за t секунада, а $NM = \frac{gt^2}{2}$ пут који би тело прешло за време t кад би слободно пало из тачке N, онда M лежи на стварној путањи. Координате OP и MP те тачке означићемо са x и y. Тада је

$$(1) \qquad x = ct\cos\alpha \qquad y = PN - NM = ct\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.\text{ “} \quad (2)$$

[Два одељка под наводницима узети су из Физике професора др. Милорада Поповића, по пишчевој дозволи].



Сл. 40.

Из (1) имамо:

$$t = \frac{x}{c\cos\alpha}$$

Сменом у (2) добијамо:

$$y = c.\ \frac{x}{c\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2$$

Ово је парабола. Написаћемо је тако да се виде координате њеног темена.

$$\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2 - x\ \mathrm{tg}\alpha = -y$$

$$x^2 - \frac{2c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}x = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}y$$

$$\left(x - \frac{c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}\right)^2 - \left(\frac{c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}\right)^2 = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\ y$$

Пошто је $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha = \cos\alpha\ \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, биће даље:

$$\left(x - \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}y + \frac{c^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$-\left(x - \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{2c^2}{g}\cos^2\alpha\left(y - \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

Види се ово:

Координате темена ове параболе јесу:

апсциса $X = \dfrac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$

ордината $Y = \dfrac{c^2\sin^2\alpha}{2g}$

осовина: $x = \dfrac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$

Knива се отвара у негативном смислу ординатне осовине, пошто јој је сачинилац уз x^2 негативан. Значи, теме јој је највиша тачка изнад апсцисне осовине. Висину темена показује његова ордината:

$$Y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Она зависи само од c и α. Кад је дата брзина, висина зависи само од нагибног угла α („елевационог угла"). Што је α веће, бацићемо тело на све већу висину, јер у првоме квадранту синус расте кад угао расте.

Кад ће се постићи највећа висина при косом хицу? Кад Y достигне максимум. Оно ће достићи максимум кад буде $\sin\alpha$ достигло максимум. То ће бити за $\sin\alpha = 1$, тј. за $\alpha = 90^0$. Највећа се висина постиже при вертикалном хицу.

Под којим се углом постиже највећа даљина домета? Значи: Кад ће *OA* са слике 40 достићи свој максимум? Шта је *OA*? То је апсциса пресека наше криве и апсцисне осовине. Да бисмо добили апсцису те тачке, ставићемо у једначини криве да је $y = 0$ и израчунати x. Додбићемо:

$$x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g} \pm \sqrt{\frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2}}$$

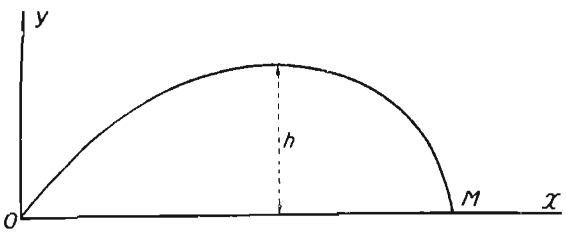
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{(Апсциса тачке } A\text{)}$$

Кад ће x_2 достићи максимум? Кад буде $\sin 2\alpha = 1$, тј. $2\alpha = 90^0, \alpha = 45^0$.

Највећи је домет под углом од 45^0. За угао већи или мањи од 45^0 добијамо краћи домет.

Балистичка линија. — Линија по којој се креће зрно из топа личи на параболу, али није парабола. Није због тога што отпор ваздуха дејствује и мења облик путање. Зрно испаљено из топа креће се по једној кривој која се зове балистичка линија. Једна балистичка линија види се на слици 41. [Шта примећујеш на њој?]



Сл. 41

ВЕЖБАЊА

За дату вредност удвојеног параметра конструисати параболу чија осовина иде по апсцисној осовини:

1. $2p = 8$
2. $2p = 7$. (За 1 и 2 теме је у координатном почетку)
3. теме у тачци $M\,(4,0)$ $\quad 2p = 10$
4. теме у тачци $M\,(3,0)$ $\quad 2p = 6$
5. теме у тачци $M\,(-5,0)$ $\quad 2p = 5$
6. теме у тачци $M\,(-6,0)$ $\quad 2p = 9$.

Конструиши параболу чија је осовина паралелна с апцисном осовином, а теме јој је у датој тачци M:

7. $M\,(3,4)$ $\quad 2p = 6$ $\qquad$ 8. $M\,(-3,4)$ $\quad 2p = 8$

9. $M\,(-3, -5)$ $\quad 2p = 12$.

[Колико решења имају вежбања 7, 8, 9?]

Конструиши ове криве:

10. $y^2 = 4x$ $\qquad$ 11. $y^2 = 7x$

12. $y^2 = 2x$ $\qquad$ 13. $y^2 = x$

14. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p расте?

15. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p опада?

16. — Шта бива с параболом $y^2 = 2\lambda x$ кад λ постане мањ од нуле?

Конструиши ове криве:

17. $y^2 = -10x$ $\qquad$ 18. $y^2 = -4x$

19. $y^2 = -2x$ $\qquad$ 20. $y^2 = -x$

21. — Кад у једначини параболе сменимо x са y и y са x какву криву добијамо? Може ли се нова крива поклопити с старом?

Конструиши ове криве:

22. $x^2 = 4y$ $\qquad$ 23. $x^2 = 6y$

24. $x^2 = -8y$ $\qquad$ 25. $x^2 = -y$

Објасни положај ових кривих:

26. $(y-3)^2 = 4\,(x-2)$ $\qquad$ 27. $y^2 - 6y - 3x + 15 = 0$

28. $2y^2 + 4y - 5x + 7 = 0$ $\qquad$ 29. $3y^2 - 6y - 6x + 5 = 0$

30. $4y^2 + 8y - 2x + 9 = 0$ $\qquad$ 31. $x^2 - 4x - 3y + 5 = 0$

32. $x^2 + x - y - 1 = 0$ $\qquad$ 33. $3x^2 - 4x + 6 - y = 0$

34. $y = x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ 35. $x = y^2 - 4y - 7$

36. $x - y - y^2 + 3 = 0$

37. — Напиши једначину параболе из вежбања 7.

38. — Напиши једначину параболе из вежбања 9.

39. — Како изгледа једначина параболе из вежбања 26, ка координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку $M\,(3,2$

40. — Исто питање за параболу из вежбања 35 и нови координатни почетак у тачци $M(-11{,}2)$.

41. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци $A(2{,}3)$, а парабола се отвара у позитивном смислу апсцисне осовине.

42. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци $B(-3{,}4)$, а парабола се отвара у негативном смислу апсцисне осовине.

43. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна с ординатном осовином, теме у тачци $C(3, -2)$ $2p = 6$, а отвор у негативном смислу.

Напиши једначину параболе чија је осовина L паралелна с означеном осовином, теме S у датој тачци, а парабола се отвара у означеном смислу:

44.	$S(1{,}1)$	$2p = 6$	$L \parallel YY'$	отвор $+$.
45.	$S(-3{,}2)$	$2p = 7$	$L \parallel YY'$	отвор $-$.
46.	$S(-4{,}-5)$	$2p = 11$	$L \parallel XX'$	отвор $+$.
47.	$S(0{,}-1)$	$2p = 3$	$L \parallel XX'$	отвор $-$.
48.	$S(-3{,}0)$	$2p = 5$	$L \parallel YY'$	отвор $-$.
49.	$S(-4{,}-3)$	$2p = 10$	$L \parallel XX'$	отвор $+$.

50. — Да ли се по једначинама $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$ познаје да те криве немају центра? По чему?

***51.** — Да ли се по једначинама $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ и $(x-m)^2 = 2p(y-n)$ познаје је ли прва крива симетрична према правој $y = n$, а друга према правој $x = m$? По чему се познаје?

***52.** — Одреди једначину симетриске осовине за криву $x = y^2 - 6y + 2$.

***53.** — Исто за $y = x^2 - 8x + 5$

***54.** — Исто за $y - 1 = 3x^2 - 6x$.

Испитај је ли дата тачка спољна или унутарња за дату параболу:

55. — Тачка $M(2{,}1)$, парабола из вежбања 1.

56. — Тачка $M(-3{,}4)$, парабола из вежбања 2.

57. — Тачка $M(-2{,}3)$, парабола из вежбања 17.

58. — Тачка $M(4{,}1)$, парабола из вежбања 20.

59. — По чему ћемо, без цртежа, одредити је ли једна тачка спољна или унутарња за параболу?

60. — Какав знак добија полином параболине једначине за тачке на параболи?

Испитати међусобни положај дате праве и дате параболе:

61. $y - 2x = 10$ и $y^2 = 4x$ **62.** $y - x = 10$ и $y^2 = x$

63. $y = x + 3$ и $y^2 = 8x$ **64.** $2y\sqrt{3} - 4x - 12 = 0$ и $y^2 = 7x$

У параболиној тачци за коју је дата апсциса или ордината одредити једначине дирке и нормале:

65. $y^2 = 6x$ $M(3, y)$ **66.** $y^2 = -8x$ $M(-2, y)$

67. $y = \dfrac{x^2}{3}$ $M(x, 3)$ **68.** $x^2 = -5y$ $M(x, -4)$

***69.** $x^2 - 6x - 8y = 9$ $M(x, 9)$

***70.** $y^2 - 3y - 3x - 5 = 0$ $M(7, y)$

***71.** $2x^2 + 4x - 4y - 7 = 0$ $M(x, 3)$

72. — Израчунај дужину поднормале на параболи $y^2 = 2px$ у тачци $M(m, n)$. Зависи ли дужина поднормале од положаја тачке M?

73. — Да ли је резултатом из претходног вежбања објашњена конструкција дирке на параболи у датој тачци?

74. — Произвољна тачка M са параболе $y^2 = 2px$ спојена је са жижом F и из M је спуштена управна на водиљу D. (Дужи MF и MD). Докажи да дирка полови угао DMF.

Из дате тачке M конструисати дирку на дату параболу, одредити једначину дирке и нормале:

75. $M(-3, 4)$ $y^2 = 4x$ ***76.** $M(-3, -7)$ $y^2 = 3(x-1)$

***77.** $M(-2, 5)$ $y^2 = 6x - 9$ ***78.** $M(2, 3)$ $y + 3 = x^2 + 6x$

***79.** — У једначини $2x - 3\lambda y + 5 = 0$ одредити λ тако, да права постане дирка на параболи $y^2 - 3y - x + 4 = 0$.

80. — Одредити једначину дирке на параболи $x^2 = 3y$ тако, да дирка отсече на апсцисној осовини отсечак -2.

***81.** — Одредити једначину дирке на параболи $3x - x^2 + 2y = 0$ тако, да дирка отсече отсечак $+3$ на ординатној осовини.

***82.** — Одредити једначину параболе која има теме у тачци $S(2, 3)$, а осовина јој је паралелна с ординатном осовином, али тако, да парабола додирује праву $2x + 3y = 12$. [Колико има решења?]

83. — Одредити координате тачке M на параболи $y^2 = 6x$ кад је дирка у тој тачци паралелна с правом $y = 6x$.

84. — Дата је парабола $y^2 = 6x$. Израчунати угао што га дирка у тачки $M(6y)$ заклапа са сечицом кроз додирну тачку M на параболи: $N(\sqrt{6}, y)$.

85. — Одредити једначину дирке на параболи $y^2 = 6x$ тако да дирка буде паралелна с правом $2x - 3y = 12$.

*86. — Одредити једначину дирке на параболи $2x-x^2+3-2y=0$ тако, да дирка буде управна на правој $2x+3y=4$.

87. — Под којим се углом секу ове две криве?

$$y^2=6x \quad \text{и} \quad x^2=3y.$$

*88. — Исто питање за:

$$4x^2+4y^2-16=0 \quad \text{и} \quad x-x^2=2y.$$

89. — Колико је далеко од праве $2x+3y=7$ права L која је с њом паралелна, а дирка је на параболи $y^2=5x$?

*90. — Одреди положај тачке M на ординатној осовини, кад се зна да је из ње повучена дирка на параболу $y^2-2y-x+5=0$ тако, да дирка заклапа угао од 150^0 с позитивним смислом ординатне осовине.

91. — Одреди угао под којим се секу дирке повучене из тачке $M(2,3)$ на параболу $y^2=-3x$.

92. — На параболу $x^2-4x+3=3y$ повучена је дирка MT и тачци M чија је апсциса — 3. Одредити једначину дирке која је управна на дирки MT.

*93. — Један командир батерије гађа из топова под углом од 30^0. Други командир гађа из истих топова под углом од 60^0. Ко ће имати већи домет? (Не узимамо у обзир отпор ваздуха).

Напомена. — За гађање из топова израчунати су сви углови за све потребне даљине. Цев се диже помоћу даљинара. На команду „2000!" помоћник нишанџије обрће ручицу даљинара. Кад дотера на 2000, цев је дигнута за угао који је потребан да се зрно баци на 2000 m.

*94. — Под којим углом треба да стоји цев пољског топа, да би се зрно бацило на 3500 m, кад је почетна брзина топовског зрна 500 m? [Колико има таквих углова? Кад би се гађало под једним, а кад под другим углом?]

*95. — На игралишту баца један играч лопту брзином од 5 m у секунди, а под углом од 30^0. Докле ће добацити?

*96. — Кад не би било ваздушног отпора, докле би најдаље могао добацити брзометни пољски топ, кад је почетна брзина његовог зрна 500 m?

МЕШОВИТА ВЕЖБАЊА

1. — Докажи помоћу аналитичне геометрије да се све три троуглове висине секу у једној тачци.

[Узми да је једно теме у координатном почетку, а друго на апсцисној осовини].

2. — Исто за све три симетрале троуглових страна.

*3. — Исто за симетрале углова.

4. — Докажи да центар круга описаног око правоугло — троугла лежи на средини хипотенузе.

5. — Из центра елипсе $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ описујемо круг полупречником $r=a$, па из ма које тачке на елипсиној великој осовини дижемо управну до пресека са елипсом и кругом. Нека су пресеци M_1 и M_2 (круг). Њихове ће ординате имати увек овај стални однос: $\frac{y_1}{y_2}=\frac{b}{a}$.

6. — Дате су праве $2x-y=1$ и $3y-2\lambda x=O$. Одредити λ тако, да се те две праве пресеку под углом од 20^0.

7. — Одредити заједничку тетиву ових двеју кривих:
$4x^2+9y^2=36$ и $y^2=8x$.

8. — Крива $x^2+4y^2=4$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболно је теме у елипсином центру. Одредити једначину те параболе.

9. — Хипербола $4x^2-16y^2=64$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса негативна. Одредити једначину те параболе. За колико се разликују ординате тих кривих у тачци чија је апсциса 10?

10. — Хипербола и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса позитивна. Кад је хиперболина једначина $x^2-9y^2=9$, како гласи параболина једначина? Чије ординате брже расту? За колико се разликују ординате у тачци чија је апсциса 4?

11. — Одредити једначину круга који пролази кроз тачке $A(3,1)$, $B(5,3)$ и кроз тачке симетричне датим тачкама према апсцисној осовини. Израчунати површину четвороугла који образују те четири тачке.

*12. — Велика осовина једне елипсе лежи на апсцисној осовини. Теме A (6,0). Крива додирује праву $6y=x\sqrt{3}$, у тачци чија је апсциса 3. Израчунати осовине те елипсе и конструисати је.

13. — Хипербола има центар у координатном почетку, а стварна осовина јој је на апсцисној осовини. Асимптота јој је $3y = 2x$. Крива пролази кроз $M\ (10{,}5\frac{1}{3})$. Одредити осовине.

14. — Под којим улогом сече апсцисну осовину права $2y\sqrt{3} - 3x - 2\sqrt{3} = 0$?

15. — Дате су две праве:

$$(1) \qquad 2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 5y + 1 = 0 \qquad (2)$$

Колики је најмањи угао за који треба да се обрне права (2) око међусобног пресека, да би постала управна на правој (1)?

16. — Дата је права $y = mx + 5$. Одредити m тако, да права постане дирка на кругу $x^2 + y^2 = 7$.

17. — Дате су координате два узастопна темена једнога квадрата: $A\ (2,4)$ $B\ (6,1)$. Написати једначину круга уписаног у томе квадрату. [Колико решења?]

***18.** — Доказати да се у сваком троуглу може уписати круг.

19. — Израчунати параметар λ у једначини $2y\sqrt{3} + \lambda x = 4$ тако, да права постане дирка на елипси $4y^2 + x^2 = 4$ у тачци M_1 $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Извести једначину дирке на тој елипси паралелне с дирком у тачци M_1.

20. — Из тачака на апсцисној осовини $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ дигнуте су управне на ту осовину. Оне секу елипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ у тачкама M_1 и M_2. Одредити површину елипсиног исечка OM_1M_2, где је O центар елипсин.

21. — Дата је права $x + y = 4$. Она сече апсцисну осовину у A, ординатну у B. Колику ротацију треба она да изврши око A, па да постане дирка на елипси $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$? Израчунати површину AA_1B_1B где су A_1 и A пресеци позитивног крака апсцисне осовине са елипсом и датом правом, а B_1 и B пресеци позитивног крака ординатне осовине са елипсом и са датом правом.

22. — Испитати аналитички је ли права која је за $d = 2$ удаљена од праве $x + y - 10 = 0$ дирка на кривој $4x^2 + 9y^2 = 36$. Колико има решења?

23. — У једначини $y^2 = 2px$ одредити p тако, да парабола додирује праву $2y - x = 8$.

24. — Може ли се парабола сматрати као граница елипсе код које су стални једно теме и једна жижа (A' и F_1, сл. 4), а друго се теме одмиче од F_1 тако да размак F_1F_2 тежи бесконачноме?

[Ставимо транслацијом координата почетак у A'. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2(x - a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Одатле је:

$$(1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

Рекли смо да се $A'F_1$ не мења. Знамо да је:

$$A'F_1 = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ставимо $A'F_1 = d$. Тада ће бити:

$$d = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Одатле је:

$$b^2 = 2ad - d^2.$$

Унесимо то у једначину (1):

$$y^2 = \frac{(2ad - d^2)}{a^2}(2ax - x^2). \qquad \text{Сад даље:}$$

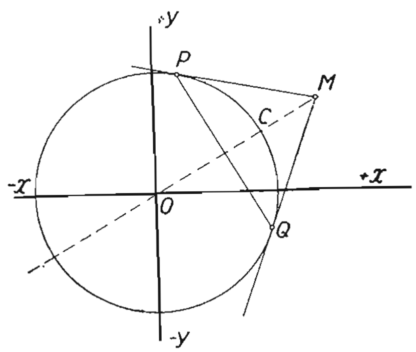
$$y^2 = \frac{2(2ad - d^2)}{a}x - \frac{2ad - d^2}{a^2}x^2$$

$$(2) \qquad y^2 = (4d - \frac{2d^2}{a})\,x - (\frac{2d}{a} - \frac{d^2}{a^2})\,x^2$$

Кад a тежи бесконачноме, чему теже разломци у заградама? А коме облику тежи једначина (2)? Коју криву претставља њен гранични облик?]

25. — Под којим се углом секу елипса и хипербола које имају заједничке жиже?

*IV — ПОЛ И ПОЛАРА



Сл. 42.

Из једне тачке ван круга повуцимо дирке на круг (сл. 42). Добијемо дирке MP и MQ. Нека су координате тачке M (x', y'), тачке P $(x_1\ y_1)$, а тачке Q $(x_2\ y_2)$. Једначине дирки:

$$(1) \quad xx_1 + yy_2 = r^2$$

$$(2) \quad xx_2 + yy_2 = r^2$$

Права (1) пролази кроз M. Зато мора бити:

$$(3) \quad x'x_1 + y'y_1 = r^2.$$

Али и права (2) иде кро

M. Зато мора бити:

(4) $x'x_2 + y'y_2 = r^2$,

Кад загледамо (3) и (4) видимо да је једначина

(5) $x'x + y'y = r^2$

задовољена координатама тачке *P* [једначина 3] и тачке *Q* [једна чина (4)]. Па то онда (5) претставља праву *PQ*. Права *PQ* која пролази кроз додирне тачке тангената повучених из *M* зове се **полара** тачке *M*. Тачка се *M* зове **пол.**

Чему нам служи полара? Ако одредимо њену једначину, можемо ту једначину решити с једначином круга и одмах добити координате додирних тачака.

Пример. — Одредити једначину дирки повучених на круг $x^2 + y^2 = 4$ из тачке M (3, 1).

Најпре полара:

$$x'x + y'y = r^2$$

$$3x + y = 4 \qquad \text{(пошто је } y' = 1)$$

Сад њени пресеци с кругом.

$$y = 4 - 3x$$

$$x^2 + 16 - 24x + 9x^2 = 4$$

$$10x^2 - 24x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x_1 = 1,2 + 0,2\sqrt{5} \qquad y_1 = 0,4 - 0,6\sqrt{5}$$

$$x_2 = 1,2 - 0,2\sqrt{5} \qquad y_2 = 0,4 + 0,6\sqrt{5}$$

Дирке:

I $\quad (1,2 + 0,2\sqrt{5})x + (0,4 - 0,6\sqrt{5})\,y = 4$

II $\quad (1,2 - 0,2\sqrt{5})x + (0,4 + 0,6\sqrt{5})\,y = 4$

Полара је управна на правој која спаја с центром тачку из које су повучене дирке. — Једначина праве *OM* биће:

$$y - y' = a(x - x')$$

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

$$y - y' = \frac{xy'}{x'} - y'$$

$$x'y - xy' = 0 \qquad \text{Одатле је:}$$

$$y = \frac{y'}{x'}x.$$

Једначина поларе:

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}. \qquad \text{Види се да су управне.}$$

Ако из ма које тачке са *CM* повучемо дирке, полара ће опет бити управна на *CM*. Значи да ће све поларе бити међу собом паралелне за дирке повучене из тачака са исте праве.

На исти начин изводе се једначине полара и за елипсу, хиперболу и параболу, те ћемо их само навести.

Једначина поларе на елипсу:

$$b^2x'x + a^2y'y = a^2b^2$$

Једначина поларе на хиперболу:

$$b^2x'x - a^2y'y = a^2b^2.$$

Једначина поларе на параболу:

$$y'y = p(x' + x).$$

ВЕЖБАЊА

Помоћу поларе реши означене задатке:

1. — Одредити дирке на $x^2 + y^2 = 1$ и 3 $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.
2. — Иста за $x^2 + y^2 = 4$ и $M(-5, 6)$.
3. — Исто за $x^2 + y^2 = 9$ и $M(-4, -7)$.
4. — Исто за $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ и $M(-4,8)$.
5. — Исто за $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и $M(25, 7)$.
6. — Је ли код елипсе полара управна на правој која спаја елипсин центар с тачком из које се повлаче дирке?

Помоћу поларе реши означене задатке:

7. — Страна 28, вежбање 114.
8. — „ „ „ 115.
9. — „ „ „ 116.
10. — „ „ „ 117.
11. — Када се пол одмиче од центра, да ли се полара примиче, или одмиче?

[Испитати и за круг и за елипсу].

12. — Докажи да су дирке повучене у крајњим тачкама једног елипсиног пречника паралелне међу собом.
13. — Помоћу поларе реши задатак на страни 28 у вежбању 123.

[Једначина је поларе $b^2x'x + a^2y'y = a^2b^2$. Једначина пречника који је с њом паралелан биће: $b^2x'x + a^2y'y = 0$ (Пошто пречник иде кроз центар, а центар лежи у координатном почетку). Где овај пречник сече елипсу? Напиши једначину дирке кроз ту тачку. Напиши једначину спрегнутог пречника. Загледај угловне сачиниоце].

Помоћу поларе реши означене задатке:

14. — Страна 41, вежбање 71.
15. — „ „ „ 72
16. — „ „ „ 73
17. — „ „ „ 74
18. — „ 55, „ 75
19. — „ „ „ 76
20. — „ „ „ 77
21. — „ „ „ 78.

*V. — ПОГОДБА ДА ПРАВА $y = mx + n$ БУДЕ ДИРКА НА КУПИНОМ ПРЕСЕКУ

ПОГОДБА ДА ПРАВА БУДЕ ДИРКА НА КРУГУ

Узмимо круг $x^2 + y^2 = R^2$ и праву (L) $y = mx + n$. Да би L била дирка, мора систем ових двеју једначина дати два једнака решења.

$$y = mx + n$$
$$x^2 + (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = R^2$$
$$(1 + m^2)\,x^2 + 2mnx + (n^2 - R^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2mn)^2 - 4\,(1 + m^2)\,(n^2 - R^2) = 0.$$

Одатле је: $$R^2 = \frac{n^2}{1 + m^2}\,.$$

То је услов да права L буде дирка на датом кругу.

Пример. — Испитати је ли права $2x + y = 10$ дирка на кругу $x^2 + y^2 = 20$.

$$m = -2$$
$$n = 10$$
$$R^2 = 20$$
$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{100}{5} = 20 = R^2.$$

Права је дирка. (Испитај је ли то тачно!)

Други пример. — Испитати је ли права $x + 2y\sqrt{2} = 4\,(3 + 2\sqrt{2})$ дирка на кругу $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$.

Одредићемо координате центра:

$$p = 3 \qquad q = 4.$$

Пренећемо координатни почетак у центар круга. Значи, смењујемо и у једначини праве и у једначини круга x са $(x + 3)$, y са $(y + 4)$. Једначина праве постаје:

$$x + 3 + 2\,(y + 4)\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2}$$
$$x + 2y\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9 + 8\sqrt{2}$$
$$(1) \qquad x + 2y\sqrt{2} = 9.$$

Једначина је круга била:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$ Сад постаје:
$$[(x + 3) - 3]^2 + [(y + 4) - 4]^2 = 9$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 9.$$
$$m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{\frac{81}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{81}{9} = 9$$
$$R^2 = 9.$$

Права је дирка.

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ЕЛИПСИ

Узмимо елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и праву (L) $y = mx \pm n$.

$$b^2x^2 + a^2\,(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2m^2)\,x^2 + 2a^2mnx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Дискриминанта мора бити нула:

$$4a^4m^2n^2 - 4\,(b^2 + a^2m^2)\,(a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$
$$a^4m^2n^2 - (a^2b^2n^2 + a^4m^2n^2 - a^2b^4 - a^4b^2m^2) = 0$$
$$-a^2b^2n^2 + a^2b^4 + a^4b^2m^2 = 0$$
$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = 0.$$

То је услов да права L буде дирка на датој елипси.

Пример. — Испитати је ли права $3y - 2x = 5$ дирка на елипси $x^2 = 4y^2 = 4$.

$$a = 2 \qquad b = 1 \qquad m = \frac{2}{3} \qquad n = \frac{5}{3}$$
$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = \frac{25}{9} - 1 - 4\,\frac{4}{9} = \frac{25}{9} - \frac{9}{9} - \frac{16}{9} = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 20).

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ХИРЕРБОЛИ

Узмимо праву $y = mx + n$ и хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$b^2x^2 - a^2 (mx + n)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2 (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$
$$(b^2 - a^2m^2)\, x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 \pm a^2b^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2a^2\, mn)^2 + 4\, (b^2 - a^2\, m^2)\, (a^2n^2 + a^2\, b^2) = 0$$
$$4a^4\, m^2\, n^2 + 4\, (a^2\, b^2\, n^2 - a^4\, m^2\, n^2 + a^2\, b^4 - a^4\, b^2\, m^2) = 0$$
$$a^2\, b^2\, n^2 + a^2\, b^4 - a^4\, b^2\, m^2 = 0$$
$$n^2 + b^2 - a^2\, m^2 = 0.$$

То је услов да права буде дирка на хиперболи.

Пример. — Испитати је ли права $9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ дирка на хиперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$$
$$2y\sqrt{15} = 12 - 9x$$
$$y = \frac{12}{2\sqrt{15}} - \frac{9}{2\sqrt{15}}\, x$$
$$y = 6\, .\, \frac{\sqrt{15}}{15} - 9\, .\, \frac{\sqrt{15}}{2 \cdot 15}\, x$$
$$y = 2\, .\, \frac{\sqrt{15}}{5} - 3\, .\, \frac{\sqrt{15}}{10}\, x$$
$$a^2 = 4 \qquad b^2 = 3 \qquad m^2 = \frac{9\, .\, 15}{100} - \frac{135}{100} - 1{,}35$$
$$n^2 = \frac{4\, .\, 15}{25} = \frac{60}{65} = \frac{240}{100} = 2{,}40$$
$$n^2 + b^2 - a^2\, m^2 = 2{,}40 + 3 - 4\, .\, 1{,}35 = 5{,}40 - 5{,}40 = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 37).

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ПАРАБОЛИ

Узмимо праву $y = mx + n$ и параболу $y^2 = 2px$.

$$(mx + n)^2 = 2px$$
$$m^2\, x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$
$$m^2\, x^2 + 2\, (mn - p)\, x + n^2 = 0$$

Дискриминанта мора бити равна нули.

$$4\, (mn - p)^2 - 4m^2 + n^2 = 0$$
$$m^2\, n^2 - 2mnp + p^2 - m^2\, n^2 = 0$$
$$p^2 - 2mnp = 0$$
$$p - 2mn = 0$$

То је услов да дата права буде дирка на датој параболи.

Пример. — Испитати је ли права $y - 3x - 4 = 0$ дирка на параболи $y^2 - 48x$.

$$m = 3 \qquad n = 4 \qquad p = 24$$
$$24 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$$

Права је дирка. Да проверимо.

$$y^2 = 48x$$
$$y = 3x + 4$$
$$(3x + 4)^2 = 48x$$
$$9x^2 + 24x + 16 = 48x$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$
$$(3x - 4)^2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$$
$$y_1 = y_2 = 8.$$

Права је дирка у тачци $M\left(\frac{4}{3}, 8\right)$,

ВЕЖБАЊА

Испитај је ли дата права дирка на датоме кругу:

1. $x^2 + y^2 = 5$ и $x + 2y - 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 = 7$ и $x + y = \sqrt{7}$
3. $x^2 + y^2 = 16$ и $x - 2y = 3$
4. $x^2 - 4x + y^2 = 0$ и $x + y = 7$
5. $x^2 - x + y^2 - y = 0$ и $x + y = 2$
6. $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$ и $x - y = 20$
7. $x^2 - 2x + y^2 = 0$ и $3y - 2x = 10$
8. $x^2 + y^2 = 9$ и $7x - 4y = 3\sqrt{65}$
9. $x^2 + y^2 + 10\, x + 12y + 57 = 0$ и $x - y\sqrt{2} = 0$
10. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = \sqrt{5}$
11. — У једначини $y = 3x + n$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 4$.
12. — У једначини $2y + 3mx = 7$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 9$.
13. — У једначини $2y + 3mx = 4$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $5x^2 + 5y^2 = 12$.
14. У једначини $3y + 4x - 3n = 0$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $2x^2 + 2y^2 = 9$.

Испитај је ли дата права дирка на датој елипси:

15. $2x + 3y - 5 = 0$ и елипса из вежбања 32 на стр. 24.
16. $3 + 4x - y = 0$ „ „ „ „ 33 „ „ „
17. $1 - y = x$ „ „ „ „ 34 „ „ „
18. $2y - 3x + 4 = 0$ „ „ „ „ 35 „ „ „

19. $3 - 3x - 4 = 0$ и елипса из вежбања 36 на стр. 24.

20. — Провери добивене резултате у 108 вежбању на страни 27.

21. „ „ „ „ 109 „ „ „ „

22. „ „ „ „ 110 „ „ „ „

23. „ „ „ „ 111 „ „ „ „

24. — Дато је $2y - 3mx + 7 = 0$. Одреди m тако да права буде дирка на елипси из вежбања 36, стр. 24.

25. — Исто за n у једначини $2n - 3x + 8y = 0$ и елипсу у вежбању 37, стр. 24.

26. — Исто за m у једначини $3m + y + 11 = 0$ и елипсу у вежбању 38 стр. 24.

27. — Исто за n у једначини $12n - 3x + y = 0$ и елипсу у вежбању 39 стр. 24.

Испитати је ли дата права дирка на датој хиперболи:

28. — Страна 41, вежбање 55. **29.** — Страна 41, вежбање 56.

30. — „ „ 57. **31.** — „ „ „ 58.

32. — У једначини $3x + 4y + n = 0$ одредити n тако, да права буде дирка на хиперболи са стране 41, вежбање 59.

33. — Исто за n у једначини $2x + 3n - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 60, стр. 41.

34. — Исто за m у једначини $4mx + 6 - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 61, стр. 41.

35. — Исто за m у једначини $4 - 2mx\ 3 = 0$ у хиперболу из вежбања 62, стр. 41.

Испитати је ли дата права дирка на датој параболи:

36. — Права и парабола из вежбања 61 на страни 55.

37. — „ „ „ „ „ 62 „ „ „

38. — „ „ „ „ „ 63 „ „ „

39. — „ „ „ „ „ 64 „ „ „

40. — У једначини $3mx + 4y - 5 = 0$ одреди m тако, да права буде дирка на параболи $y^2 = 6x$.

41. — Исто за m у једначини $2mx - 5y + 1 = 0$ и параболу $y^2 = 8y$.

42. — Исто за n у једначини $2y - 3y + 2n = 0$ и параболу $y^2 = -7y$.

43. — Исто за n у једначини $3x + 9y - 7n = 0$ и параболу $y^2 = -5x$.

*VI. — ДИСКУСИЈА ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КУПИНИХ ПРЕСЕКА

Општа једначина гласи:

(1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Пошто ми посматрамо само оне купине пресеке чије су осовине паралелне с координатним осовинама, биће:

$$B = 0,$$

Тада једначина (1) постаје:

(2) $$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 6Ey + F = 0$$

Решимо је по y:

$$y = \frac{-2E \pm \sqrt{4E^2 - 4C\,(Ax^2 + 2Dx + F)}}{2C}$$

$$y = \frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - ACx^2 - 2CDx - CF}$$

(3) $$y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)}$$

Ставимо

(4) $$z = \frac{1}{C}\sqrt{-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)}$$

Ако бисмо хтели да конструишемо криву (3), видимо да бисмо за свако x имали две тачке за y. Једанпут бисмо на $-\frac{E}{C}$ имали да додамо z, а други пут да га одузмемо. Значи да је права $y = -\frac{E}{C}$ симетриска осовина те криве. Како ће изгледати та крива све зависи од z. Међутим z може имати стварну вредност, бити нула, или бити уображено. Све зависи од израза

(5) $$-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)$$

Решићемо једначину:

(6) $$-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF) = 0$$

$$x = \frac{2CD \pm \sqrt{4CD^2 + 4\ AC\ E^2 - CF)}}{-2AC}$$

Ми ћемо посматрати само случај кад су корени једначине (6) стварни и неједнаки, тј. кад је:

$$C^2D^2 + AC\ (E - CF) > 0$$

Нека су корени једначине (6) x_1 и x_2. Тада (5) можемо написати овако:

(7) $$-AC\ (x - x_1)\ (x - x_2) = 0$$

Тада (3) можемо написати овако:

$$(8)\qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-AC\,(x-x_1)\,(x-x_2)}$$

Шта све овде може бити? Претпоставили смо да су x_1 и x_2 стварни и неједнаки. Овде могу наступити три случаја.

Први случај. — Нека је $AC > 0$. Тада $-AC < 0$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности између корена x_1 и x_2. Тада имамо стварне ординате само за

$$x_1 < x < x_2.$$

Ван тога размака између корена ординате су уображене. Па то је случај код елипсе. Крива претставља елипсу кад је $AC > 0$.

То значи да ћемо имати елипсу кад су A и C једнако означени.

Други случај. — Нека је $AC < 0$. Тада је $-AC > 0$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности икса ван корена. Стварне вредности имамо само кад је

$$x < x_1 < x_2 \qquad \text{или} \qquad x > x_2 > x_1$$

Значи: од $x = x_1$ до $x = x_2$ ординате су уображене, а иначе су увек стварне. Па то је случај само код хиперболе. Крива претставља хиперболу само кад је

$$AC < 0.$$

То значи да ћемо имати хиперболу кад су A и C неједнако означени.

Трећи случај. Нека је $AC = 0$. Тада је и $-AC = 0$. Тада једначина (3) добија овај облик:

$$(9)\qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CDx + (E^2 - CF)}$$

Обележимо корен поткорене количине са x_1. Тада (9) можемо написати овако:

$$(10)\qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CD\,(x-x_1)}$$

Овде могу наступити три потслучаја:

Први потслучај:

$$(11)\qquad 2CD > 0$$

Тада је $-2CD < 0$. Зато је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности икса мање од x_1. Па то онда крива (10) претставља само параболу. Из (11) се види да C не може бити нула.

Пошто је $AC = 0$, значи да мора бити $A = 0$. Значи: крива претставља параболу кад је $A = 0$, а $C \neq 0$.

Други потслучај:

$$(12\qquad 2CD < 0.$$

Тада је $-2CD > 0$. Тада је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности веће од x_1. Тада крива (10) може опет претстављати само параболу: Опет се види да C не може бити нула.

Крива (10) претставља параболу кад A и C нису једновремено нуле.

Трећи потслучај. — Он наступа кад је $2CD = 0$. Ми тај случај нећемо испитивати овде. Само ћемо додати да у томе потслучају крива (2) не претставља ни један купин пресек.

Да сведемо. — Да би једначина (2) претстављала један купин пресек, потребно је да буде:

$$C^2D^2 + AC\,(E^2 - CF) < 0.$$

[Одатле се види да не могу бити једновремено нуле A и C, нити A и D].

Тада ће бити:

за	$AC > 0$	*елипса*
за	$AC < 0$	*хипербола*
за	$AC = 0$	*парабола* (увек сем случаја $A = C = 0$).

Први пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$2x^2 - 6x + 3y^2 - 8y - 10 = 0$$

Најпре

$$C^2D^2 + AC\,(E^2 - CF) = 9.9 + 2.3\,(16 + 3.10) = 81 + 6\,.\,46 = 357 > 0.$$

$$AC = 2.3 = 6 > 0.$$

Дата једначина претставља елипсу.

Други пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$5y^2 - 8y - 3x^2 + 4x - 20 = 0.$$

Најпре:

$$C^2D^2 + AC\,(E^2 - CF) = 25.4 + (-3).5.\,[16 - 5\,(-20)] = 100 - 15\,(16 + 100)$$
$$= 100 - 15.116 < 0.$$

Дата једначина за нас још не претставља ништа.

Напомена: — Даљи развој ове дискусије видећеш на универзитету.

ВЕЖБАЊА

Шта претстављају ове једначине:

1. $x^2 - 6x + 8y^2 - 12y + 10 = 0$
2. $x^2 - 4x - 6y^2 - 6y = 12$
3. $3x^2 + 4x - 5y^2 - 6y + 7 = 0$
4. $3x - 5x^2 + 5y^2 - 8y - 17 = 0$
5. $4x - 8x^2 + 8y^2 - 6y - 30 = 0$
6. $6y^2 - 7y + 5x^2 + 4x - 2 = 0$
7. $5x^2 - 6x + 3y^2 - 7y + 1 = 0$
8. $6x^2 - 7x + 8y^2 - 6y + 2 = 0$

9. $4x - 9x + y^2 - 7y + 9 = 0$
10. $x^2 - 3x + y - 7 = 0$
11. $y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$
12. $3x - 2y^2 + 3y = 7 = 0$
13. $6y^2 - 9x^2 + 8y - 9x - 11 = 0$
14. $y^2 - 16x^2 + 9x + 7y - 12 = 0$
15. $2y^2 - 5x + 4y + 2 = 0$

VII. — КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД ПРЕЂЕНОГ ГРАДИВА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

ПРВИ ТРАГОВИ

Старе грађевине Мисираца и Вавилонаца јасно казују да су и у веома далекој древној старини људи знали много што-шта из геометрије. Потреба за грађењем навела их је на мерење и посматрање основних геометриских слика. Мисирци су морали мерити своју плодну земљу веома често, због тога што ју је Нил плавио и мењао постављене границе имања. Та су мерења стварала потребу за основним знањем из геометрије. Њега је несумњиво било одавно. Трагови геометриског знања виде се и на једноме веома староме писаноме документу из Мисира. Мисирци су обично писали на папирусу. То је била нека врста хартије справљена од биљке папирус која је некад у изобиљу расла поред Нила, а сад је тамо нема. Око половине прошлога века пронашао је у Мисиру енглески научник Ринд један свитак папируса. Дугачак је 2 метара, а широк 30 сантиметара. Чува се у Британском музеју у Лондону. Тај је папирус писао неки Ахмес између 1800 и 1600 пре Хр. Зове се **Риндов папирус.** Тај је спис нека врста практичног математичког упутства. У њему се налазе и геометриск слике и упутства за израчунавање њихове површине. Ту стоји д се површина равнокраког троугла израчунава кад се произво основице и крака подели са 2. (Је ли то тачно?) Ту се налази упутство за израчунавање површине круга. По њему изгледа д је наш данашњи број $\pi = 3{,}16$.

Али ти стари геометриски трагови показују да на 2000 пре Хр. није у ствари ни било проучавања геометрије, већ су сам бележена проста запажања на геометриским сликама.

Праву, научну геометрију, геометрију с доказима, створил су Грци. Зато ћемо овде прегледати радове неколико велики грчких математичара.

ГРЧКИ МАТЕМАТИЧАРИ

Талес из Милета. — Први грчки математичар на кога наилази историја математике јесте *Талес* из малоазиске вароши Милета (624—548 г пре Хр.). Он је један од седам грчких мудраца. Оснивалац је чувене Јонске школе. Он је био у Мисиру и тамо је од мисирских свештеника много научио. Њему се приписује да је доказао ова тврђења из геометрије: пречник полови круг, углови на основици равнокраког троугла једнаки су међу собом, троугао уписан у полукругу правоугли је. Он се бавио сличним троуглима и утврдио њихове особине. Помоћу теорије о сличним троуглима он је решио ова два задатка: Одредио је висину пирамиде помоћу њене сенке и из пристаништа израчунао растојање од копна до лађе на мору. (Како би ти решио та два задатка?)

Питагора. — Мисли се да је рођен око 586 г пре Хр. За њега се зна да је рођен на острву Самосу и да се учио у Мисиру. Са Самоса је побегао од тиранина Поликрата. Дошао је у Кротон у „Велику Грчку“ (Јужна Италија). Ту је основао школу. Зна се да су се у тој школи училе аритметика, музика, геометрија и астрономија. Шта је урадио он лично, а шта његови ученици, не зна се тачно (пошто су његови ученици били обавезни да чувају у тајности оно што у школи науче). Зато се може говорити само о раду Питагорејаца, а не о раду самога Питагоре.

Они су утврдили да се раван може покрити само једном од ових трију мрежа: мрежом равностраних троуглова, квадратном мрежом, и мрежом правилних полигона. (Којих?). Њима се приписује да су утврдили да може бити свега пет правилних испупчених тела. Они су доказали да збир углова у троуглу износи два права угла. Њима се приписује да су доказали да је квадрат хипотенузе једнак са збиром квадрата страна правог угла. („Питагорино правило“). Данас се зна да је та особина правоуглог троугла била много раније позната старим народима (на пр. Мисирцима).

Њихова је заслуга што су поставили геометрију на научну основу (тачни докази). Због тога се Питагора сматра праоцем модерне математике.

Платон. — (429—348 г пре Хр.). — Син једне отмене и богате атинске породице, он је у младости добио највише образовање које се могло дати младићу тога времена. Био је ученик чувеног грчког филозофа Сократа. Ишао је на науке у „Велику Грчку“ (грчка колонија у Јужној Италији) и у Мисир. При повратку с наука основао је у своме родноме месту високу филозофску школу коју је назвао „Академија“. Колико је он ценио математику види се по томе, што је над врата своје школе ставио натпис: „Нека не улази нико ко не зна геометрију“.

Он је усавршио и уопштио аналитичку методу у математичким доказима и проблемима. То значи ово: претпоставља се да је један проблем већ решен, па се раставља на друге проблеме који су већ решени. Значи, прво се изврши анализа, па се тек онда прилази конструкцији.

Он је усавршио теорију о геометриским местима и потпуно их објаснио.

Еуклид. — Рођен је у Александрији и живео у њој. У највећој је слави био око 300 г пре Хр. Мисли се да је математичко знање стекао у Атини од Платонових ученика. Основао је у Александрији једну високу школу у којој је предавао математику. То је чувени писац „Елемената“. То је његово најважније дело. У томе се делу налази скупљено све дотадање знање из математике. Шта је у њему тачно Еуклидово, а шта туђе, данас још није одређено. Заслуга је Еуклидова што је све то раније знање покупио и изнео га у веома научном облику. То је прво математичко научно дело старога века. У њему је чиста математичка теорија. У њему су доказима утврђиване математичке истине. Садржи у себи геометрију и аритметику. Многе ствари из геометрије уче се и данас у школи тачно онако како их је Еуклид написао пре 22 века! „Елементи“ су подељени на 13 књига. Ово је њихов садржај.

I књига: тачка и права, углови, троугли, једнакост површина и Питагорина теорема. II књига: у геометрискоме облику решавање једначина 2 степена. III књига: круг, праве и углови на њему. IV књига: уписани и описани правилни полигони. V књига: у геометрискоме облику изнета теорија о несамерљивим бројевима. VI књига: сличност троуглова, геометриске сразмере. VII књига: теорија бројева. VIII и IX књига: степени, корени, геометриски редови. X књига: ирационални бројеви. XI књига: увод у стереометрију, правилна тела. XII књига: однос површина два круга и сличних полигона, однос површина и запремина код тела. XIII књига: правилни полигони и правилна тела (њихова конструкција и уписивање у лопту).

У почетку I књиге Еуклид је изнео 5 поставки (постулата) који се не могу доказати. Пета таква поставка гласи: „Ако једна права која пресеца друге две праве, начини унутрашње углове с исте стране мање од два права, те две праве линије неограничено продужене, секу се с оне стране пресечнице с које и француски математичар Лежандр изнели су крајем XVIII века своје тврђење да π није алгебарски ирационалан број. Међутим све до краја XIX века трајао је посао око одређивања природе броја π и тачног начина његовог израчунавања.

Израчунавање површина. — И то је стара ствар. У Риндовом се папирусу налазе тачно израчунате неке површине. Еуклид се бавио само испитивањем односа површина двеју слика или два тела, док је **Херон** из Александрије (из доба рођења Христова) показао израчунавање површина геометриских слика.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

Површине и запремине тела. — Еуклид је упоређивао површине и запремине тела, али их је Херон израчунавао. Површину и запремину лопте израчунао је **Архимед**. Доцније су на израчунавању површине и запремине тела радили многи математичари. Међу њима италијански математичар **Кавалиери** (почетак XVII века).

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тригометрија је створена за астрономске потребе. Отуда је прво пронађена сферна тригонометрија. Њу је први почео највећи грчки астроном **Хипарх** (око 150 г пре Хр.). При решавању троуглова увек их је уписивао у круг, па је њихове стране израчунавао као функције полупречника. Косоугли сферни троугао растављао је на правоугле сферне троугле, па их је онда решавао. Око 100 г после Хр. бавио се проучавањем сферних троуглова астроном **Менелај** из Александрије који је живео у Риму. После њега писао је тригонометрију **Птоломеј** (око 150 г после Хр.). И он је као и његови претходници узимао тетиву као синус датога лука. Он је продужио Хипархов посао и израдио таблицу синусних вредности.

Арапи су пренели тригонометрију у Западну Европу у XIII веку. **Региомонтанус** (XV век) је написао једно дело о тригонометрији и учинио да се тригонометрија потпуно одвоји од астрономије за коју је дотле била везана. Модерни облик дао је тригонометрији славни Швајцарски математичар Ојлер (XVIII век).

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

Координате су биле познате још и старим народима. За њих су знали Мисирци. Њихови су геометри употребљавали једну мрежу квадратића да на њој одреде положај појединих ме[...] Мисиру. Хипарх је одређивао положај места према родоск[...] ридијану (јер је он радио на острву Родосу). Употребља[...] географску дужину и ширину. Грци су знали за правоугли [...]динатни систем.

Прво је **Леонардо Пизано** (1220 г) довео алгебру у [...] геометријом. Доцније је тај посао настављен, али праве [...]тичне геометрије задуго није било. Године 1637 објавио је [...]цуски математичар **Декарт** своју **Геометрију.** Њом је [...] основе аналитичној геометрији.

САДРЖАЈ

МИЛАН С. НЕДИЋ

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

Овај уџбеник, по саслушању Главног просветног савета С.бр. 654 од 6 јула 1939 године, одобрен је одлуком Господина Министра просвете IV бр. 9913 од 31 јула 1939 године. Ово одобрење важи до краја 1942/43 школске г.

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА

1939

За штампарију „З О Р А“ — Београд, Космајска бр. 24. — Телефон 29-920
Богомир М. Јовановић, штампар, Поп Лукина 4.

НАПОМЕНА

Одељци за реалке обележени су звездицом у почетку наслова.

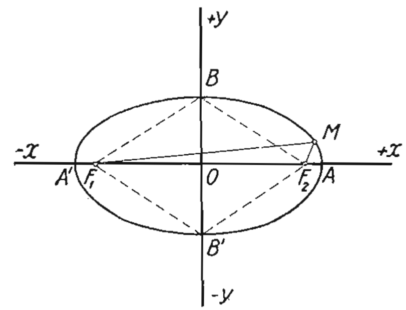
Задаци за реалке обележени су звездицом поред редног броја.

М. С. Н.

I. — ЕЛИПСА

Видели смо у VII разреду шта је елипса и како се она конструише.

Елипсине осовине. — Нека је дата елипса $AB\ A'B'$ и нека су обележене жиже F_1 и F_2 (сл. 1). Ми ћемо поставити елипсу тако, да њена осовина иде по апсцисној осовини, а да средина жижног растојања $F_1\ F_2$ падне у координатни почетак. Жижни размак обележићемо овако:



Сл. 1.

$$F_1\ F_2 = 2c.$$

Тада ће бити $F_1O = c$ и $OF_2 = c$.

Тачка A лежи на елипси. Зато мора бити:

(1) $\quad AF_2 + AF_1 = k,$

где је k једна стална дужина (сталан број).

И тачка A' лежи на елипси. За њу мора бити:

(2) $\quad A'F_1 + A'F_2 = k$

Пошто су у (1) и (2) једнаке десне стране, морају бити једнаке и леве:

(3) $\quad AF_2 + AF_1 = A'F_1 + A'F_2.$

Једначину (3) написаћемо овако:

$$AF_2 + (AF_2 + 2c) = A'F_1 + (A'F_1 + 2c).$$

То је даље:

$2AF_2 = 2A'F_1$. Одатле је

$$AF_2 = A'F_1.$$

Пошто је $OF_1 = OF_2$, и $AF_2 = A'F_1$, биће:

$OA = OA'$. (Крајње тачке елипсине на осовини подједнако отстоје од средине жижног размака).

Тачке A и A' у којима елипса сече осовину зову се темена. Размак AA' између темена обележићемо са $2a$:

$$AA' = 2a.$$

Пошто је теме A на осовини, биће:

$$AF_1 + AF_2 = k, \text{ т.ј. } AF_2 + 2c + AF_2 = k.$$

То је даље:

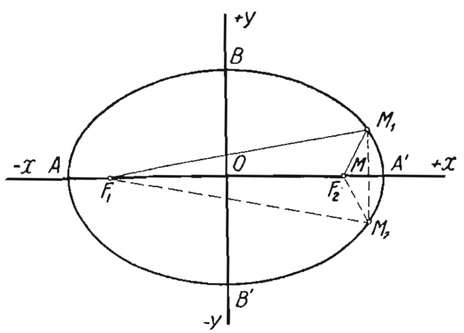
$$AF_2 + 2c + A'F_1 = k$$
$$2a = k.$$

Видимо да је збир жижних растојања једне тачке на елипси једнак са $2a$. Кад то важи за A, важиће и за сваку другу тачку:

$$MF_1 + MF_2 = 2a \text{ (сл. 1).}$$

Растојање $2a$ зовемо **велика осовина.** Зашто велика? Зато што елипса има и малу осовину.

Ако у средини жижног размака (0) дигнемо управну на велику осовину, (управну BB'), та ће управна сећи елипсу у двему тачкама које су подједнако удаљене од велике осовине. Троуглови F_1OB и F_2OB симетрични су према OB. Отуда је $F_1B = F_2B = a$. Исто тако лако је доказати да је $F_1B' = F_2B' = a$. Отуда је $F_2B = F_2B' = a$. Одатле излази да је троугао OF_2B подударан с троуглом OF_2B'. Отуда је $OB = OB'$. Обележимо $BB' = 2b$. Тада је $OB = b = OB'$. Дуж $2b$ зове се **мала осовина.**



Сл. 2.

Симетриске осовине. — Ако поставимо елипсу тако да јој пресек осовина лежи у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној, добијамо елипсу са слике 2.

Узмимо на апсцисној осовини једну произвољну елипсину унутрашњу тачку. Нека је то тачка M (сл. 2). Показаћемо да за апсцису OM елипса има две тачке (M_1 и M_2) симетричне према великој осовини. (M_1 изнад апсцисне осовине и M_2 испод апсцисне осовине).

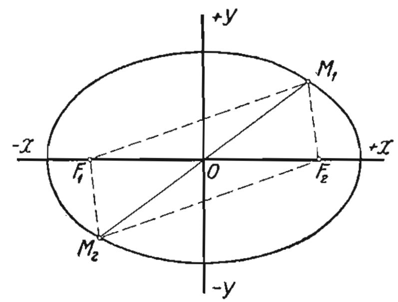
Из M дигнимо управну на апсцисну осовину. Нека тачка M_1 са те управне лежи на елипси. Доказаћемо да и M_2 са те управне лежи на елипси кад је $MM_1 = MM_2$.

Троуглови MF_2M_1 и MF_2M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_2 = M_2F_2$. Троуглови MF_1M_1 и MF_1M_2 симетрични су према AA'. Отуда је $M_1F_1 = M_2E_1$. Значи да за тачку M_2 постоји овај однос: $M_2F_2 + M_2F_1 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a$. Тада M_2 лежи на елипси. Симетрична тачка M_2 тачке M_1 са елипсе лежи на елипси. Значи да је велика осовина симетриска елипсина осовина. [Докажи да је и мала осовина симетриска осовина]. Елипса има две симетриске осовине.

Из троугла OBF_1 (сл. 1) види се да је

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Елипсин центар. — Пресек елипсиних осовина јесте елипсин центар симетрије. Узмимо *на елипси* тачку M_1 и тачку M_2 Симетричну са M_1 према O. Доказаћемо да и M_2 мора лежати на елипси (сл. 3)



Сл. 3.

Троуглови OF_1M_2 и OF_2M_1 симетрични су према O. Из те симетрије излази: $F_1M_2 = M_1F_2$. Из централне симетрије троуглова OF_1M_1 и OF_2M_2 излази да је $M_1F_1 = M_2F_2$. Отуда је:

$$M_2F_1 + M_2F_2 = M_1F_2 + M_1F_1 = 2a.$$

Тачка M_2 је на елипси. Пресек осовина је елипсин центар симетрије.

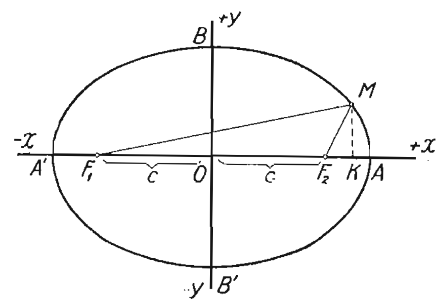
Централна једначина елипсе. — На елипси $ABA'B'A$ (сл. 4) узмимо произвољну тачку M (x, y). Знамо да мора бити:

$$(1)\quad MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Помоћу координата израчунаћемо MF_1 и MF_2.

Из троугла MKF_1 имамо:

$$\overline{MF_1}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{F_1K}^2$$



Сл. 4.

(2) $MF_1^2 = y^2 + (c + x)^2$

Из троугла MF_2K имамо:

(3) $\overline{MF}_2{}^2 = y^2 + (x - c)^2$

Кад одузмемо (3) од (2) имамо:

$$\overline{MF}_1{}^2 - \overline{MF}_2{}^2 = (c + x)^2 - (x - c)^2$$
$$(MF_1 + MF_2)(MF_1 - MF_2) = 4cx.$$

Знамо да је

$MF_1 + MF_2 = 2a.$ Зато је даље:

$2a(MF_1 - MF_2) = 4cx.$

(4) $$MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}.$$

Из (1) и 4) добијамо:

(5) $$MF_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Кад вредност (5) унесемо у (2), добијамо:

$(a + \frac{cx}{a})^2 = y^2 + (c + x)^2$. То је даље:

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2 x^2}{a^2} = y^2 + c^2 + 2cx + x^2$$
$$a^4 + c^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 c^2 + a^2 x^2$$
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Знамо да је $a^2 = b^2 + c^2$.

Одатле је $c^2 - a^2 = -b^2$.

$$-b^2 x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2.$$

То је даље:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Деобом са a^2b^2 добијамо:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

То је једначина елипсе чији је центар у координатном почетку, велика осовина по апсцисној осовини, а мала по ординатној. Ова једначина зове се централна елипсина једначина.

Колики су сачиниоци уз x^2 и y^2? Можемо ли централну једначину круга написати овако: $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$? Чиме се онда разликује централна једначина елипсе од централне једначине круга?

Дискусија централне једначине. — Решимо централну једначину по y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Ако је $x < a$, по апсолутној вредности, y је стварно. Тада свакој таквој вредности икса одговарају две супротне вредности за y. Значи, наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За $x = \pm a$ имамо $y = 0$. Значи, крива сече апцисну осовину у тачкама A $(a, 0)$ и A' $(-a, 0)$ — сл. 2.

Ако је $x > a$ (по апсолутној вредности), y је уображено. Значи, крива нема тачака преко A и A'.

Ако је $x = 0$, биће $y = \pm b$. Крива сече ординатну осовину у B и B' (сл. 4).

Решимо сад једначину по x:

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

Ако је $y < b$ по апсолутној вредности, x је стварно. Тада свакој таквој вредности ипсилона одговарају две супротне вредности за x. Значи, наша је крива симетрична према ординатној осовини.

За $y = \pm b$, имамо $x = 0$. Значи, наша крива сече ординатну осовину у B и B'. (То смо већ видели).

Ако је $y > b$, (по апсолутној вредности), x је уображено. Крива нема тачака преко B и B'.

Наша је крива непрекидна. За свако x између 0 и $\pm a$ имамо два коначна и одређена ипсилона.

Наша је крива затворена крива. О томе ћемо се овако уверити:

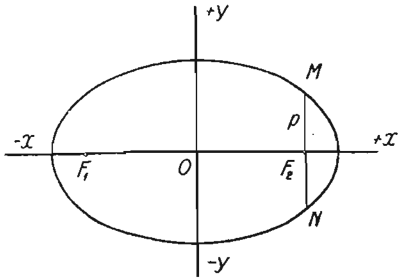
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Кад x тежи нули било од неке негативне, било од неке позитивне своје вредности, израз $\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ тежи вредности b или $-b$. Значи да се две веома блиске тачке тачци B поклопе у B кад је $x = 0$.

Параметар. — Елипсина ордината у жижи зове се параметар. Обележићемо га са p.

$F_2 M = p$ (сл. 5).

$MN = 2p$ (сл. 5).



Сл. 5.

Како ћемо израчунати параметар p? То је ордината тачке M. Апсциса тачке M је $x = c$. Ставићемо ту вредност у једначину елипсе и израчунати y.

$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Одатле је:

$$y = p = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Параметар показује елипсин облик. Ако параметар расте, мора или b да расте, или a да опада. Елипса се пупчи. (Шта бива ако параметар опада?).

Бројни ексцентрицитет. — Однос $\frac{c}{a}$ зове се елипсин бројни ексцентрицитет. Обележићемо га са e:

$$e = \frac{c}{a}.$$

Бројни је ексцентрицитет увек мањи од јединице. Ако би он био раван јединици, имали бисмо: $c = a$. Тада елипса не би постојала, јер би било:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 0.$$

И бројни ексцентрицитет показује елипсин облик. Ако је он врло мали, елипса је јако пупчаста и ближи се кругу. Ако је он велики, тј. близу јединице, елипса је јако спљоштена. То се овако види:

Узмимо да је $e = \frac{c}{a} = \frac{19}{20}$. Тада ће бити $c = \frac{19a}{20}$. Према томе биће: $b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{19a}{20}\right)^2} = \frac{a}{20}\sqrt{39} \approx 0,31\ a$. Таква елипса је јако спљоштена.

Ставићемо сад

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Одатле се види да је b све веће што је e мање. Значи кад e опада, b се све више приближује вредности a.

За $e = 0$ имамо $b = a$. Елипса постаје круг.

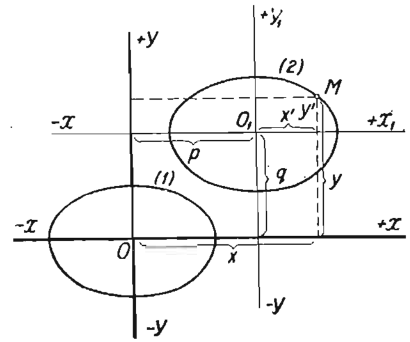
*** Општа једначина елипсе.** — Ако елипсин центар пренесемо у таку O_1, а њене осовине положимо паралелно с координатним осовинама, добићемо нову једначину елипсе.

Замислимо да је координатни систем O транслацијом осовина премештен у O_1. Једначина елипсе O_1 (сл. 6) у систему O_1 биће:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Са слике се види да је $x' = x - p$ и $y' = y - q$. Зато ће једначина елипсе O_1 у систему O бити:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$



Сл. 6.

То је једначина елипсе чији је центар ван координатног почетка, а осовине су јој паралелне с координатним осовинама.

***Обележја елипсине једначине.** — Ако ову једначину развијемо, добићемо:

$$b^2 x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0.$$

Знамо да је општи облик кривих линија другог степена:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Видимо да је у једначини елипсе $B = 0$ (нема члана са xy). Њена једначина овако изгледа:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

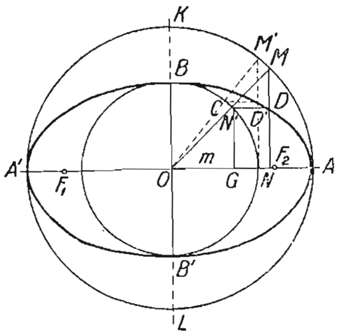
Одатле видимо ово:

Једначина елипсе у правоуглом координатном систему, кад су јој осовине паралелне с координатним осовинама, јесте једначина другог степена по x и y која не садржи члан са xy и у којој чланови са x^2 и y^2 имају сачиниоце неједнаке по апсолутној вредности, али једнаке по знаку.

(Упореди је с општом једначином круга).

Велики и мали круг на елипси. — Круг описан из елипсиног центра великом полуосовином као полупречником зове се велики круг. То је круг AA' са слике 7. Круг описан из елипсиног центра малом полуосовином као полупречником зове се мали круг. То је круг BB' на слици 7.

***Елипса као управна пројекција круга.** — Узмимо једну елипсу, па опишимо велики и мали круг (сл. 7). Из једне унутрашње елипсине тачке (N) на апсцисној осовини дигнимо управну на ту осовину Она ће пресећи елипсу у D, а велики круг у M. Обе те тачке имају исту апсцису ON. Обележимо $ON = x_1$, $ND = y_1$, $NM = Y_1$.



Сл. 7.

Пошто D лежи на елипси, мора бити:

$$y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2_1}$$

Пошто M лежи на кругу, мора бити:

$$Y_1 = \sqrt{a^2 - x^2_1}. \quad \text{(Пошто је } r = a\text{)}.$$

Однос ових двеју ордината биће:

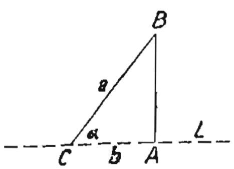
$$(1) \qquad \frac{y_1}{Y_1} = \frac{b}{a}.$$

$\frac{b}{a}$ је однос двеју дужина.

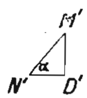
Нацртајмо овако: a као хипотенузу, b као њену пројекцију на правој L (Сл. 8). Тада можемо написати:

$$(2) \qquad \frac{b}{a} = \cos\alpha.$$

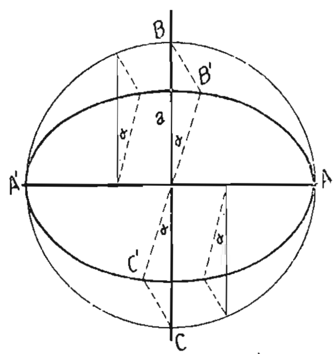
Увек можемо одредити угао α, кад су дати b и a. Према томе угао α увек постоји док је $b \leqq a$. Сад у (1)



Сл. 8.



Сл. 9.



Сл. 10.

можемо ставити:

$$\frac{y_1}{Y_1} = \cos\alpha. \qquad \text{Одатле је:} \qquad y_1 = Y_1 \cos\alpha.$$

На нашој слици 7 биће:

$ND = NM \cos\alpha$. То можемо сад овако нацртати: сл. 9.

Значи ово:

Елипсине су ординате пројекције ордината великога круга чија је раван нагнута над елипсином равни под углом α, који је такав, да је $\cos\alpha = \frac{a}{b}$. (сл. 10).

[То ћеш овако најлакше видети. Нацртај на картону елипсу и оба круга као на слици 7. Добићеш два полумесеца. Оштрим ножићем исеци обиме полумесеца, али не баш сасвим до тачака A и A'. Затим издигни из равни цртања горњи полумесец, а спусти доњи. Кроз K провуци иглу и дижи полумесец све дотле, док игла провучена кроз K и B не падне у B управно на елипсину раван (сл. 10). Дижући полумесеце ми смо у ствари издизали раван круга. Кад игла спуштена из K у B падне управно на раван елипсе, тада је B пројекција тачке K. Кад то постигнемо, добијамо правоугли троугао KBO. У њему је хипотенуза $OK = a$, једна управна страна $OB = b$. Оне заклапају један угао α, (сл. 10). Његов је косинус $\frac{b}{a}$. То значи да је то угао под којим треба да стоји велики круг према елипсиној равни, па да елипса буде управна пројекција великога круга. Кроз сваку тачку кружне периферије можемо забости једну тачку управно на елипсину раван и увек ћемо наћи по једну елипсину тачку која је пројекција те тачке с круга.]

***Сродне криве.** — Видели смо да елипса и круг, кад је $2a = 2R$ и кад им се центри поклапају, имају ову особину: све њихове тачке имају исте апсцисе, а све њихове ординате имају сталан однос. Обележимо апсцисе кругових тачака са X, апсцисе елипсиних тачака са x; ординате кругових тачака са Y, ординате елипсиних тачака са y. Имаћемо:

$$x = X \qquad\qquad y = \frac{b}{a}\,Y$$

Такве две криве зову се сродне криве (афине криве). Осовина OX зове се осовина сродности (осовина афинитета). Однос ордината (овде $\frac{b}{a}$) зове се однос сродности или афинитетни однос.

Ако је дата једначина круга описаног над великом осовином

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

овако ћемо добити једначину сродне криве:

Ставимо $X = x$ и $Y = \frac{ay}{b}$. Добијамо:

$$x^2 + a^2 \frac{y^2}{b^2} = a^2 \qquad \text{Одатле је}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{Једначина елипсе.}$$

[Како ћеш из дате једначине елипсе извести једначину сродног круга?]

Други начин конструкције елипсе. — Опишимо на елипси оба круга (сл. 7). Из центра повуцимо произвољан полупречник OM. Он сече мали круг у N'. Из M ордината MN. Из N' паралелна с апсцисном осовином (права $N'D$). Тачка D лежи на елипси.

Да се уверимо. Тачка D лежи на елипси ако је $DN = \frac{b}{a} Y$.

Обележимо: $OM = a$, $ON' = b$, $ON = x$, $MN = Y$.

Троугли ONM и $N'DM$ су слични. Отуда је:

$$Y : MD = a : (a - b) \text{ и } MD = (a - b) \frac{Y}{a}.$$

Ордината тачке D је $MN - MD = Y - (a - b) \frac{Y}{a} = \frac{b}{a} Y$.

Тачка D збиља лежи на елипси.

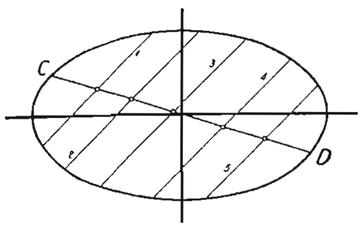
***Површина елипсе.** — Површина великога круга на елипси јесте: πa^2. Елипсина је површина пројекција површине великога круга. Зато је њена површина p:

$$p = \pi a^2 \cos\alpha.$$

$$p = \pi a^2 \frac{b}{a}$$

$$p = \pi ab.$$

***Елипсини пречници.** — Дуж која спаја две централно симетричне тачке зове се пречник (или дијаметар). На слици 3 тачке M_1 и M_2 леже симетрично према O. Зато је дуж $M_1 M_2$ елипсин пречник. Елипса има безброј тачака симетричних према центру. Отуда има и безброј пречника. (Који је највећи? Који је најмањи?)

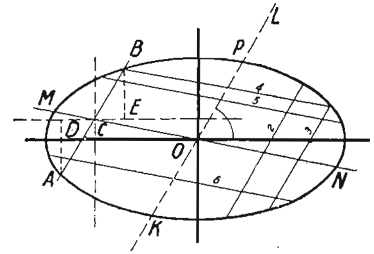


Сл. 11.

***Елипсина тетива.** — Дуж која спаја две ма које тачке на елипси, јесте њена тетива. Средине свих међусобно паралелних тетива леже увек на једноме пречнику. (Средине тетива 1, 2, 3, 4, 5 леже на пречнику CD, сл. 11).

***Једначина пречника.** — Хоћемо да одредимо једначину пречника MN (сл. 12). Он полови тетиву AB. Нека је њена једначина

$$y = mx + n.$$



Сл. 12.

Тачка C је средина тетиве AB. Нека су њене координате p и q. Пренесимо координатни почетак у C. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$$

Једначина праве AB постаје

$$y = mx \quad \text{(Зашто?)}$$

Та права сече елипсу у A и B. Апсцисе CE и CD морају бити супротни бројеви. (Зашто?)

$$\overline{CE} + \overline{CD} = 0.$$

Ако хоћемо координате пресека праве AB и елипсе, решићемо овај систем:

(1) $\quad b^2 (x - p)^2 + a^2 (y - q)^2 = a^2 b^2$

(2) $\quad y = mx.$

Сменом (2) у (1) добијамо:

(3) $\quad (b^2 + a^2 m^2) x^2 - (2b^2 p + 2a^2 mq) x + bp^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0.$

Решења ове квадратне једначине морају бити супротни бројеви. Значи да је

$$x_1 + x_2 = 0.$$

У квадратној једначини

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{јесте}$$

$$x_1 + x_1 = - \frac{b}{a}$$

Значи да у нашој једначини (3) мора бити:

$$\frac{2b^2 p + 2a^2 mq}{b^2 + a^2 m^2} = 0. \qquad \text{Одатле је:}$$

$$b^2 p + a^2 mq = 0.$$

Шта претстављају p и q? Кординте средине ма које тетиве паралелне са правом $y = mx$.

Обележимо их са x и y. Добијамо:

(4) $\quad b^2 x + a^2 my = 0.$ Једначина праве MN, сл. 12.

То је једначина елипсиног пречника који полови тетиве чији је угловни сачинилац m.

Ово је једначина праве линије. Значи, линија која спаја средину тетива паралелних с неком правом (правом L, сл. 12) јесте права линија.

Једначина (4) нема независног члана. Значи да права (4) пролази кроз елипсин центар. Пречник MN иде кроз елипсин центар.

***Спрегнути пречници.** — Пречник MN (сл. 12) полови тетиве паралелне с пречником KP (тетиве 1, 2, 3). Пречник KP полови тетиве паралелне с пречником MN (тетиве 4, 5, 6. . . .). Два елипсина пречника који тако леже да један полови тетиве паралелне с оним другим, а други полови тетиве паралелне с првим зову се спрегнути пречници (или коњуговани дијаметри).

Нека је једначина пречника KP:

$$y = m\ x.$$

Тада је једначина пречника MN:

$$b^2\, x + a^2\, m\, y = 0. \qquad \text{(Види горе једначину 4).}$$

Позитивно и негативно поље код елипсе. — У полином елипсине једначине:

$$16\ x^2 + 25\ y^2 - 400 = 0 \qquad \text{(Сл. 13)}$$

унесимо координате координатног почетка O (0, 0). Добићемо:

$$16.0 + 25.0 - 400 = -400 < 0.$$

Значи да је унутарње елипсино поље негативно. Онда је спољње поље позитивно. [Узми још неколико тачака, унутрашњих и спољашњих, па види какве вредности добија елипсин полином].

Елипса и права. — У коме су односу елипса и права сазнајемо решавањем система једначине елипсе и праве.

Пример I. — У коме су односу елипса

$$\text{I}\quad 16x^2 + 25y^2 - 400 = 0 \qquad \text{и права}$$

$$\text{II}\qquad x - y = 7\,?$$

Решимо доњу једначину по x и сменимо у горњој. — Добијамо

$$16\ (7 + y)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

То је даље:

$$41y^2 + 14.16y + 49.16 - 400 = 0$$

Дискриманта ове једначине јесте:

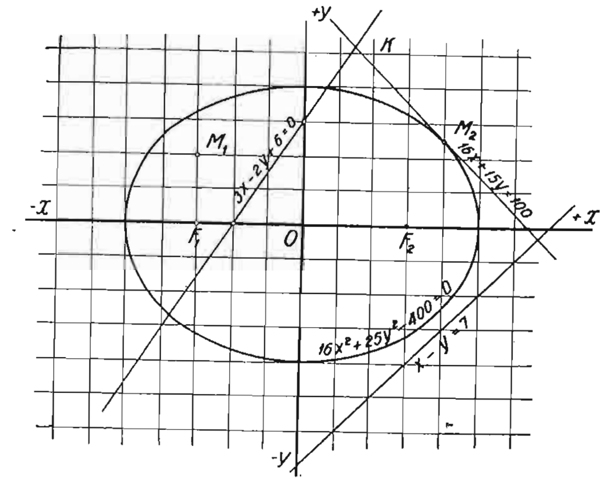
$$D = (14.16)^2 - 4.41\ (49.16 - 25.16)$$

$$D = 14^2.16 \,.\, 4 \,.\, 4 - 4 \,.\, 41 \,.\, 16\ (49 - 25)$$

$$D = 64\ (784 - 41 \,.\, 24)$$

$$D < 0,$$

Дискриминанта је мања од нуле. Решења су уображена. Дата права и дата елипса немају заједничких тачака. (Сл. 13).



Сл. 13.

Пример II. — Испитати међусобни однос праве и елипсе:

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Из прве једначине имамо:

$$x = \frac{2}{3}\ y - 2. \text{ Сменом у другој добијамо:}$$

$$16\ (\frac{2}{3}\ y - 2)^2 + 25y^2 - 400 = 0$$

$$16\ (\frac{4}{9} y^2 - \frac{8}{3}\ y + 4) + 25y^2 - 400 = 0.$$

$$16\ (4y^2 - 24y + 36) + 25.\ 9y^2 - 3600 = 0$$

$$(64 + 25.\ 9)\ y^2 - 16.\ 24y + (16.\ 36 - 3600) = 0.$$

Пошто су у овој једначини сачинилац уз y^2 и независан члан неједнако означени, корени морају бити стварни и неједнаки. Дата права сече елипсу (сл. 13, права K).

Пример III. — Испитати међусобни однос ових двеју линија:

$$16x + 15y = 100$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Из прве имамо:

$$y = \frac{20}{3} - \frac{16}{15}\ x. \text{ Сменом у другој добијамо:}$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{20}{3} - \frac{16}{15}x\right)^2 = 400.$$

$$16x^2 + 25\left(\frac{400}{9} - \frac{128}{9}x + \frac{256}{225}x^2\right) - 400 = 0$$

$$16 \cdot 225x^2 + 25\,(400 \cdot 25 - 128 \cdot 25x + 256\,x^2) - 400 \cdot 225 = 0$$

Делимо са 25:

$$16 \,.\, 9\, x^2 + 400 \,.\, 25 - 128 \,.\, 25\, x + 256\, x^2 - 400 \,.\, 9 = 0$$

Делимо са 16:

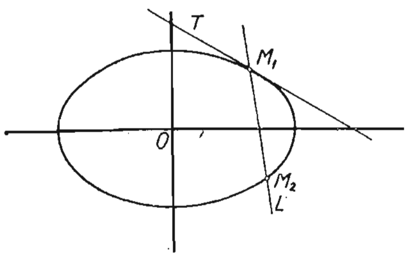
$$9x^2 + 625 - 200x + 16x^2 - 225 = 0$$
$$25x^2 - 200x + 400 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Дискриминанта:

$$D = 8^2 - 4 \,.\, 16 = 0.$$

Систем даје два стварна једнака решења. Дата је права дирка на елипси (сл 13).

Једначина дирке на елипси. — Ако се сечица L (сл. 14) обрће око M_1 тако да се M_2 приближава тачки M_1, сечица L тежи да постане дирка T.



Сл. 14.

Обе пресечне тачке леже на елипси. Зато мора бити:

$$(1) \quad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$$
$$b^2x_2^2 + a^2\,y_2^2 = a^2b^2$$

Једначина сечице L биће:

$$(2)\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - y_1)$$

Хоћемо једначину дирке.

У изразу $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ мењају се x_2 и y_2 док се L обрће око M_1. Они теже ка x_1 и y_1. Броилац и именилац овог израза теже нули. Он постаје привидно неодређен.

Ми ћемо зато овом изразу дати други облик, да бисмо му лако одредили граничну вредност.

Из система (1) добијамо:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Ако сад пустимо да $x_2 \to x_1$ и $y_2 \to y_1$, видимо лако да ће бити:

$$\lim \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \lim \left[-\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}\right] = -\frac{b^2 \,.\, 2x_1}{a^2 \,.\, 2y_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Зато ће једначина дирке бити:

$$y - y_1 = -\frac{b_2\,x_1}{a_2\,y_1}(x - x_1)$$

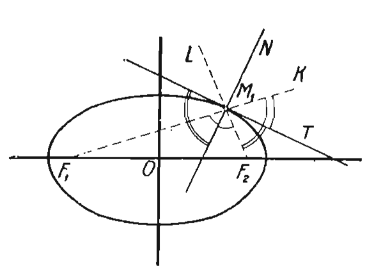
Кад се упрости, добија се овај облик једначине елипсине дирке:

$$\mathbf{b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2.}$$

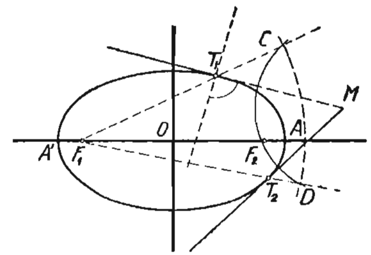
* Ако је елипсин центар ван координатног почетка, рецимо у тачци $M\ (p, q)$, а њене осовине паралелне с координатним осовинама, једначина дирке биће:

$$b^2\,(x - p)\,(x_1 - p) + a^2\,(y - q)\,(y_1 - q) = a^2\,b^2\,.$$

*** Конструкција елипсине дирке у датој тачки.** — Хоћемо дирку у M_1 (сл. 15). Из обеју жижа повлачимо зраке кроз M_1. (K и L). Дирка је симетрала угла $F_2 M_1 K$.



Сл. 15.



Сл. 16

Симетрала угла $F_1\,M\,F_2$ јесте нормала у M.
[Зашто је то тако?]

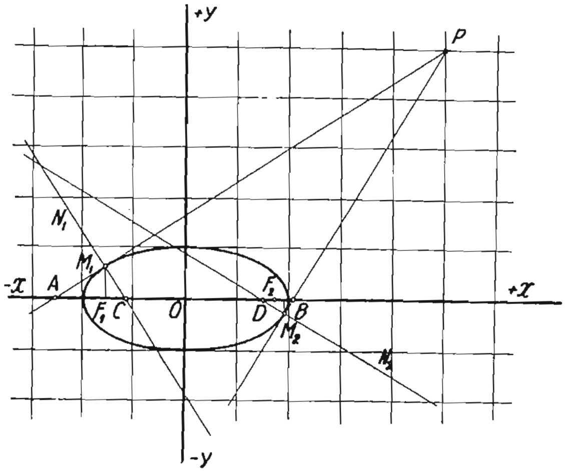
***Конструкција дирке из спољне тачке.** — Хоћемо дирку из M (сл. 16). Лук из M отвором MF_2. Лук из F_1 отвором $2a$ (велика осовина). Секу се у C и D. Спајамо C и D са F_1. Спојнице секу елипсу у додирним тачкама T_1 и T_2.

Једначина елипсине нормале. — Нормала пролази кроз додирну тачку и управна је на дирци. Зато је њена једначина

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\ (x - x_1).}$$

Пример

Из тачке P (5,5) повучена је дирка на елипсу $x^2 + 4y^2 = 4$ (сл. 17). Одредити једначине дирке и нормале, дужине дирке, нормале, потангенте и подномрмале.



Сл. 17.

Једначине дирки

$$b^2 xx_1 = a^2yy_1 = a^2 b^2$$

У нашем случају биће:

$$xx_1 + 4yy_1 = 4.$$

Ова дирка иде кроз P:

(1) $$5x_1 + 4 \cdot 5y_1 = 4$$

Додирна тачка M_1 лежи на елипси:

(2) $$\begin{cases} x_1^2 + 4y_1^2 = 4 & \text{и на правој} \\ 5x_1 + 20y_1 = 4 \end{cases}$$

Решићемо овај систем и добити координате додирних тачака.

$$x_1 = \frac{4}{5} - 4y_1$$

$$\left(\frac{4}{5} - 4y_1\right)^2 + 4y_1^2 = 4$$

Одатле добијамо:

$$y'_1 = \frac{3}{5}$$

$$y''_1 = -\frac{7}{25}$$

Отуда ове вредности за x_1:

$$x'_1 = -\frac{8}{5}$$

$$x''_1 = \frac{48}{25}$$

Добијамо координате двеју додирних тачака:

M_1 (—1,6 и 0,6) и M_2 (1,92 и — 0,28).

Зато имамо и две дирке:

I $3y - 2x = 5$

II $12x - 7y = 25$.

[Изврши пробу!]

Једначине нормала

Једначина нормале N_1:

$$y - 0{,}6 = -\frac{3}{2}(x + 1{,}6).$$

То је најзад:

$$10y + 15x = -18.$$

Једначина нормале N_2:

$$y + 0{,}28 = -\frac{7}{12}(x - 1{,}92)$$

То је најзад:

$$12y + 7x = 10{,}08.$$

Дужине дирки

Најпре координате пресека дирки с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначинама обеју дирки:

I $3y - 2x = 5$ за $y = 0$ имамо $x = -2{,}5$

II $12x - 7y = 25$ за $y = 0$ имамо $x = \frac{25}{12}$

Прва дирка сече апсцисну осовину у тачки A (сл. 17), чије су координате (—2,5 и 0). Друга сече апсцисну осовину у тачки $B(\frac{25}{12}$ и 0). Тада ће бити

дужина прве дирке: $AM_1 = \sqrt{(x_1 + 2{,}5)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{1{,}17}.$

дужина друге дирке: $BM_2 = \sqrt{(x_2 - \frac{25}{12})^2 + (y_2 - 0)^2} =$

$$= \frac{1}{300}\sqrt{9457}$$

Дужине нормала

Најпре координате пресека нормала с апсцисном осовином. Стављамо $y = 0$ у једначинама обеју нормала:

$$\text{I} \quad 10y + 15x = -18 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо} \quad x = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

$$\text{II} \quad 12y + 7x = 10{,}08 \quad \text{за } y = 0 \text{ имамо} \quad x = 1{,}44.$$

Прва нормала сече апсцисну осовину у тачки $C\ (-1{,}2 \mid 0)$ Друга сече апсцисну осовину у тачки $D\ (1{,}44 \mid 0)$. Зато ће бити:

Дужина прве нормале: $M_1\,C = \sqrt{(x_1 + 1{,}2)^2 + y_1^2} = 0{,}2\sqrt{13}.$

Дужина друге нормале: $DM_2 = \sqrt{(x_2 - 1{,}44)^2 + y_2^2} = 0{,}11\sqrt{21}.$

**Дужине поднормала*

I. Разлика апсциса прве додирне тачке и пресека прве нормале с апсцисном осовином:

$$x_1 - (-1{,}2) = -1{,}6 + 1{,}2 = -0{,}4$$

$$\text{II} \quad x_2 - 1{,}44 = 1{,}92 - 1{,}44 = 0{,}48$$

**Дужине потангената*

$$\text{I} \quad x_1 - (-2{,}5) = -1{,}6 + 2{,}5 = 0{,}9$$

$$\text{II} \quad x_2 - \frac{25}{12} = 1{,}92 - \frac{25}{12} = -\frac{49}{300}$$

Напомена. — Код потангената и код поднормала водимо рачуна само о апсолутној вредности.

**Пример II. — Израчунати површину елипсе $3x^2 + 5y^2 = 7$.*

Најпре да одредимо a и b.

$$\frac{3x^2}{7} + \frac{5y^2}{7} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{7}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{5}} = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{7}{3}} \qquad b = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

Површина ће бити:

$$P = \pi ab \approx 3{,}14.\sqrt{\frac{7}{3}}.\ \sqrt{\frac{7}{5}} \approx 3{,}14.\ \sqrt{\frac{49}{15}} \approx \frac{21{,}98}{15}\sqrt{15}.$$

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 6$.
2. — „ „ „ „ „ $2a = 10$, $2c = 4$.

3. — Нацртај елипсу код које је $2a = 10$, $2c = 2$.
4. — Шта бива са елипсом код које је $2a$ стално, а $2c$ опада
5. — Напртај елипсу код које је $2a = 8$, $2c = 2$.
6. — „ „ „ „ „ $2a = 8$, $2c = 6$.
7. — „ „ „ „ „ $2e = 8$, $2c = 7$.
8. — Шта бива са елипсом код које је $2a$ стално, а $2c$ расте
9. — Чему тежи елипса, кад $2c$ тежи нули?
10. — Чему тежи елипса, кад $2c$ тежи ка $2a$?
11. — Докажи да је осовина кроз жиже већа од оне друг осовине.
12. — Спој жиже с једним теменом *(B)* на малој осовини Чему је равно $F_1\,B$? Кад су дате дужине $2a$ и $2c$ конструиши b
13. — Кад је $2a = 26$, $2c = 10$ израчунај b.
14. — Конструиши елипсу кад је $2a = 10$cm, $2b = 8$cm.
15. — „ „ „ „ $2a = 10$cm, $2b = 9$cm.
16. — „ „ „ „ $2a = 10$cm, $2b = 9{,}5$cm.
17. — Шта бива са елипсом кад је $2a$ стално, а $2b$ расте?
18. — Кад је $2a$ стално, а $2b$ расте, шта бива са жижама
19. — Кад се жиже ближе једна другој на сталној велико осовини, шта бива с малом осовином?
20. — Кад се на сталној великој осовини жиже размичу, шт бива с малом осовином?
21. — Конструиши елипсу кад су дата сва четири темена
22. — Шта бива с елипсом кад $2b$ тежи ка $2a$? Шта бива том случају са жижама?
23. — Шта бива с елипсом кад $2b$ тежи нули? Шта бива том случају са жижама?
24. — Ако једна тачка M има координате m и n, какве коор динате мора имати тачка централно симетрична с њом према коор динатном почетку?
25. — Да ли се из једначине елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види д та крива има центар симетрије? По чему?
26. — Да ли се из елипсине једначине види да елипса им симетриских осовина? По чему?
27. — Дате су: дужина $2p$ двојног елипсиног параметра дужина велике осовине. Конструисати елипсу.
28. — Шта бива са елипсом кад расте параметар?
29. — Шта бива са елипсом кад опада параметар?
30. — Кад ће параметар расти?
31. — Кад ће параметар опадати?

Проучити елипсу, одредити обе осовине, жиже, параметар и конструисати криву:

32. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **33.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

34. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **35.** $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{5} = 1.$

36. $2x^2 + 3y^2 = 6$ **37.** $x^2 + 2y^2 - 2 = 0.$

38. $3x^2 + 4y^2 - 5 = 0$ **39.** $5x^2 + 6y^2 - 1 = 0$

Одредити бројни ексцентрицитет ових елипси:

40· $3x^2 + 4y^2 = 12$ **41.** $2x^2 + 7y^2 = 14$

42. $x^2 + 2y^2 - 2 = 0$ **43.** $x^2 + 4y^2 = 4$

44. $5x^2 + 6y^2 - 8 = 0$ **45.** $10x^2 + 16y^2 - 1 = 0$

Написати једначину елипсе кад је:

46. $2a = 8,\ 2b = 6$ **47.** $2a = 10,\ 2b = 4$ **48.** $2a = 7,\ 2b = 5$

49. $2a = 9,\ 2b = 5$

50. — Написати средишну једначину елипсе кад она пролази кроз тачку M_1 (2, 3), а има велику осовину $2a = 8$.

51. — Исто за $M_2 (2\frac{2}{3}, \sqrt{3})$ и $2b = 6$.

52. — Напиши средишну једначину елипсе која иде кроз ове две тачке: $M_1 (1\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ и $M_2 (\sqrt{5},\ 1\frac{1}{3})$.

53. — Исто за ове две тачке: M_1 (3 и 1,6) и M_2 (4 и 1,2).

Одредити координате центра, осовине, жижно растојање и параметар ових елипси, па их нацртати:

***54.** $4(x - 3)^2 + 9(y - 4)^2 = 36$

***55.** $3(x + 2)^2 + 4(y + 1)^2 = 12$

***56.** $4(x - 3)^2 + 3(y + 1)^2 = 36$

***57.** $4x^2 - 32x + 9y^2 - 18y = 2$

***58.** $9x^2 - 36x + 25y^2 - 100y = 89$

***59.** $4y^2 - 16y + x^2 - 2x + 14 = 0$

***60.** $4y^2 - 24y + x^2 - 8x = 0$

***61.** $2x^2 - 6x + 4y^2 - 12y + 10 = 0$

***62.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује апсцисну осовину.

***63.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује ординатну осовину.

***64.** — Напиши општу једначину елипсе која има центар и велику осовину на апсцисној осовини, а додирује ординатну осовину.

[Једначина коју добијеш у овоме вежбању зове се *темена једначина*].

***65.** — Напиши општу једначину елипсе која додирује обе осовине.

66. — Испитај једначину $4x^2 - 24x + 9y^2 = 0$

67. — „ „ $9x^2 - 90x + 25y^2 = 0$

68. — „ „ $x^2 + 4y^2 - 8y = 0$

69. — „ „ $x^2 + 9y^2 - 18y = 0$

70. — „ „ $(x - 2)^2 + 4y^2 = 4$

71. Шта бива са елипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ако у њеној једначини сменимо x са y, а y са x?.

72 — Шта бива са кругом $x^2 + y^2 = r^2$, ако у његовој једначини сменимо x са y а y са x? Мења ли се штогод?

Изводи нови облик елипсине једначине кад координатни почетак транслацијом осовина дође у дату тачку.

***73.** M (3,4) за елипсу из вежбања 54.

***74.** M (—2, — 1) „ „ „ „ 55.

***75.** M (2,2) „ „ „ „ 58.

***76.** M (4,3) „ „ „ „ 60.

***77.** — Куда треба пренети координатни почетак ако желимо да једначина елипсе $b^2(x - p)^2 + a^2(y - q)^2 = a^2 b^2$ добије облик $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

***78.** Куда треба пренети координатни почетак ако желимо да општа једначина елипсе добије темени облик?

Конструисати елипсу помоћу малог и великог круга кад је

***79.** $2a = 8,\ 2b = 6$ ***80.** $2a = 7,\ 2b = 3$

***81.** $2a = 10,\ 2b = 8$ ***82.** $2a = 12,\ 2b = 4$

***83.** — Нацртај сродну криву правој $Y = 2X$, кад је однос сродности $\frac{Y}{y} = 2$.

[Какву линију добијаш? У коме су положају те две линије?]

***84.** — Исто за праву $2X + 3Y = 6$ $\frac{Y}{y} = 3$

***85.** — Исто за праву $Y = 4$ $\frac{Y}{y} = 5$

***86.** — Нацртај сродну криву круга $X^2 + Y^2 = 4$, $\frac{Y}{y} = 4$

***87.** — Нацртај сродну криву круга $X^2 + Y^2 = 9$ $\quad \frac{Y}{y} = 2$

***88.** — Прав ваљак с кружном основом $R = cm$ пресечен је једном равни која сече висину под углом $\alpha = 30^0$. Колика је површина тога пресека?

***89.** — Исто за $\alpha = 75^0$. $\quad R = 8$ *cm.*

***90.** — Исто за $\alpha = 47^0 22'$, $\quad R = 7{,}2$ *cm.*

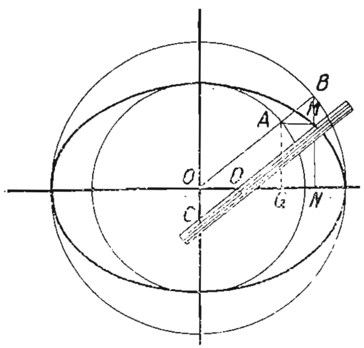
***91.** — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 14$ *cm*, $2b = 8$ *cm.*

***92.** — Израчунај површину елипсе кад је $2a = 10$ *cm*, $2c = 6$ *cm.*

***93.** — Израчунај површину елипсе која пролази кроз ове три тачке:

$$M_1\,(1 \text{ и } 1{,}2\sqrt{6}) \quad M_2\,(\sqrt{5},\ \ 1\tfrac{1}{5}\sqrt{5}) \quad M_3\,(2 \text{ и } 0{,}6\,\sqrt{21}).$$

***94.** — Повучен је полупречник OB (сл. 18). С њим је повучена паралелно из елипсине тачке M дуж CM. Овде је $\triangle\ OGA \cong \triangle\ DNM$. Отуда је $OA = DM = b$ Пошто је $OCMB$ паралелограм, значи да је $CM = OB = a$. Отуда је: $CM = a$, $DM = b$. Померај лењирић тако, да је C увек на ординатној осовини, а D на апсцисној. M ће описивати елипсу. Изведи одатле један лак начин конструкције елипсе.



Сл. 18.

Докажи ово: Кад се из једне елипсине тачке M повуче паралела са полупречником великога круга помоћу кога је добивено M, та паралелна сече апсисну осовину у тачци која је од M далеко за b.

[Други доказ. — Нека су координате тачке M (x,y). Тада је $\frac{OD}{DN} = \frac{CD}{DM}$. Сад даље: $OD = x - DN$, $DN = \sqrt{b^2 - y^2}$, $CD = a - b$, $DM = b$ итд.]

***95.** — Израчунати запремину правог ваљка елиптичне основе кад је $H = 15$ *cm*, највећа ширина 8 *cm*, а најмања 6 *cm.*

***96.** — Исто за $H = 40$ *cm*, највећу ширину 10 *cm*, а најмању 4 *cm.*

***97.** — За елипсу из вежбања 32. одредити једначине спрегнутих пречника и конструисати их кад је један од њих паралелан с правом $x + y = 1$.

***98.** — Исто за праву $3x - 7y + 5 = 0$

***99.** — За елипсу из вежбања 33 и праву $2x + 3y - 6 = 0$.

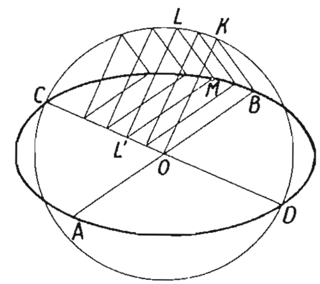
***100.** — Исто за елипсу из вежбања 34 и праву $x - y = 2$.

***101.** — Исто за елипсу из вежбања 35 и праву $3x - 2y - 1 = 0$.

102. — За елипсу из вежбања 32 конструиши спрегнути пречник пречнику $y = 2x$. Како ћеш то најбрже учинити без икаквих рачуна?

***103.** — Конструши елипсу кад су дата њена два спрегнута пречника (сл. 19).

[Над CD круг. На CD управна OK из O. Са кружне периферије управне на CD. Из подножја управних паралелне с другим пречником AB. Из L паралелна са BK. Пресек је тачка M на елипси. Зашто је тачка M на елипси?]



Сл. 19.

***104.** — За елипсу из вежбања 56 испитај је ли тачка M $(4, \frac{1}{2}$ унутрашња или спољашња).

***105.** — За елипсу из вежбања 59 испитај је ли тачка M $(-3,\ 4)$ спољашња.

106. — Испитати међусобни однос ове праве и елипсе: $x + y = 1$ и $4x^2 + 9x^2 = 36$.

107. — Исто за $2x - y = 20$ и $x^2 + 3y^2 = 3$

108. — Израчунај једначине дирке и нормале на елипсу из вежбања 32 за елипсину тачку чија је апсциса $\sqrt{5}$.

109. — Исто за елипсу из вежбања 33 и тачку на њој $y = \sqrt{15}$.

110. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку на њој $x = \sqrt{3}$.

111. — Исто за елипсу из вежбања 35 и тачку на њој $y = 0{,}1$.

112. — Исто за елипсу из вежбања 41 и тачку на њој $y = \sqrt{\frac{3}{5}}$

*113. — Исто за елипсу из вежбања 54 и тачку на њој $x = 1$.

114. — Израчунај једначине дирке и нормале повучене на елипсу из вежбања 32, а из тачке M (9, 10).

115. — Исто за елипсу из вежбања 34 и тачку M (— 7, — 8).

116. — Исто за елипсу из вежбања 67 и тачку M (14, 10).

117. — Исто за елипсу из вежбања 69 и тачку M (8, 12).

Израчунај све четири додирне количине за тачку M на датој елипси:

118. $2x^2 + 3y^2 - 6 = 0$ и M (1, y).

119. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ и M ($\sqrt{2}$, y)

120. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ и M (0,3 и y).

*121. $x^2 - 8x + 4y^2 = 0$ и M (3, y).

*122. — Један пречник елипсе $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ иде по правој $2y = x$. Кроз његову крајњу тачку чија је апциса позитивна повучена је дирка. У коме су међусобном положају та дирка и спрегнути пречник?

*123. — Доказати да је дирка повучена кроз крајњу тачку једног пречника паралелна са спрегнутим пречником.

124. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 32, кад је дирка паралелна с правом $2x + 3y - 4 = 0$. (Дра решења).

125. — Одредити једначину дирке на елипси из вежбања 33 кад је дирка управна на правој $x + y - 7 = 0$. (Два решења).

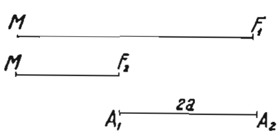
II. — ХИПЕРБОЛА

Дефиниција. — Хипербола је геометриско место тачака у равни чија је разлика раздаљина од двеју сталних тачака стална.

То смо видели раније код купиних пресека. Видели смо и како се конструише хипербола. Знамо да се две сталне тачке зову жиже.

Хиперболина симетриска осовина. — Жиже обележавамо са F_1 и F_2. Њино растојање обележавамо са $2c$: $F_1 F_2 = 2c$.

Да се потсетимо конструкције хиперболе. Узмимо две дужине тако да је њихова разлика $MF_1 - MF_2 = 2a$. (сл. 20). Из F_1 круг полупречником MF_1 (сл. 21). Из F_2 круг полупречником MF_2. Секу се у M и M_3. То су хиперболине тачке. То су у исто време и пресеци два круга. Ти пресеци су симетрични према централи F_1F_2. Значи да је права F_1F_2 симетриска осовина хиперболиних тачака.

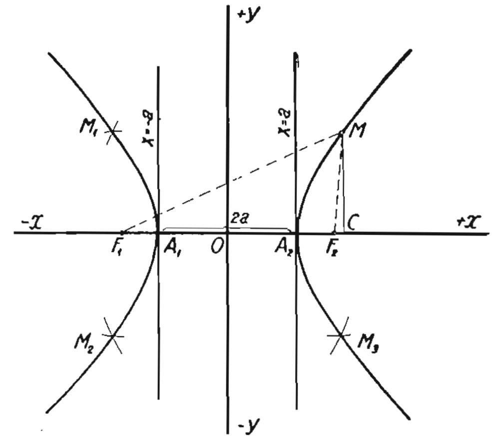


Сл. 20.

Средишна хиперболина једначина. — Нацртајмо хиперболу (сл. 21) тако да се осовина $F_1 F_2$ поклапа са апсцисном осовином, а координатни почетак O падне у средину жижног растојања.

Пренесимо десно и лево од координатног почетка дуж a. Добићемо тачке A_1 и A_2. Оне леже на хиперболи. Те две тачке морају пасти између F_1 и F_2. [Из троугла $F_1 MF_2$ излази: $M F_1 - M F_2 < F_1 F_2$. $2a < 2c$].

Узмимо произвољну тачка M на хиперболи. Из троугла $F_1 MC$ имаћемо:



Сл. 21.

$$\overline{MF_1^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_1C^2} \text{ тј.}$$

$$(1) \quad \overline{MF_1^2} = y^2 + (c + x)^2$$

Из троугла M_2FC имаћемо:

$$\overline{MF_2^2} = \overline{MC^2} + \overline{F_2C^2}$$

$$(2) \quad \overline{MF_2^2} = y^2 + (x - c)^2$$

Кад одузмемо (2) од (1) биће:

$$\overline{MF_1^2} - \overline{MF_2^2} = (c + x)^2 - (x - c)^2 \text{ тј.}$$

$$(3) \quad (MF_1 - MF_2)(MF_1 + MF_2) = 4cx.$$

Знамо да је $MF_1 - MF_2 = 2a$. Сменимо то у (3). Добијамо:

$$(4) \quad MF_1 + MF_2 = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

Имамо сад овај систем:

$$MF_1 - MF_2 = 2a.$$

$$MF_1 + MF_2 = \frac{2cx}{a}$$

Одатле добијамо одузимањем:

$$2MF_2 = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$(5) \quad MF_2 = \frac{cx}{a} - a$$

Кад резултат (5) сменимо у (2), добијамо:

$$\left(\frac{cx}{a} - a\right)^2 = y^2 + (x - c)^2.$$ Сад даље:

$$\frac{(cx-a^2)^2}{a^2} = y^2 + x^2 - 2cx + c^2.$$ Најзад добијамо:

$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2)\, x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

Знамо да је $c > a$. Зато је и $c^2 > a^2$. Значи да је разлика $(a^2 - c^2)$ негативна. Ставимо овако:

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$

Наша ће једначина тада добити ове облике:

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ Средишна једначина хиперболе.

Посматрање хиперболине једначине. — Решимо ову једначину по y:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Одавде видимо ово:

1) За свако x веће од a по апсолутној вредности имамо две супротне ординате. Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

2) Кад x расте по апсолутној вредности почевши од a, y једнако расте. Кад x тежи бесконачноме и y тежи бесконачном. Значи да је наша крива отворена крива линија.

3) Кад x опада по апсолутној вредности, опада и y.

4) Кад је $x = \pm a$, ипсилон је нула. Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама (A_1 и A_2) симетричним према ординатној осовини. Те су тачке удаљене од координатног почетка за половину сталне разлике $2a$.

5) За x мање од a по апсолутној вредности, биће y уображено. Крива нема тачака између правих $x = a$ и $x = - a$ (сл. 21). Значи, она има две потпуно раздвојене гране које иду у бесконачност.

6) Кад је $x = 0$ имамо $y = \pm bi$. Хипербола не сече ординатну осовину.

Решимо сад једначину по x:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

Одатле видимо ово:

1) За свако стварно и одређено y имамо две супротне стварне вредности за x. Значи да је и ординатна осовина симетриска осовина.

2) Кад y тежи бесконачноме и x тежи бесконачном. Опет се уверавамо да је ова крива отворена крива.

3) Збир под кореном $(b^2 + y^2)$ позитиван је за све стварне вредности ипсилона. Која му је најмања вредност? Најмања вредност позитивне количине јесте нула. Пошто b није нула, значи да ће најмања вредност за x бити кад је $y = 0$. Тада је $x = \pm a$. Опет се уверавамо да је најмања апсолутна вредност за x ова: $x = a$. Значи да крива нема тачака између $x = a$ и $x = - a$. Опет се уверавамо да крива има две потпуно раздвојене гране.

Осовине и темена. — Наша крива сече апсцисну осовину у двема тачкама: A_1 и A_2. Те су тачке хиперболина темена. Хипербола има два темена. Растојање је њених темена $2a$.

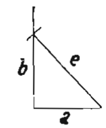
Наша крива не сече ординатну осовину. За $x = 0$ имамо $y = \pm bi$.

Кад су дати a и c дужину b можемо увек конструисати,

$$a^2 - c^2 = - b^2.$$ Одатле је

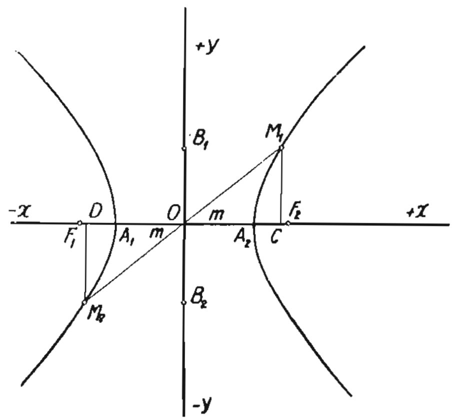
$$b^2 = c^2 - a^2$$

Ми можемо обележити тачке B_1 $(0, + bi)$ и B_2 $(0, - bi)$ — сл. 23.



Сл. 22.

Растојање $B_1 B_2$ зовемо **уображена осовина.** Растојање $A_1 A_2 = 2a$ зовемо **стварна осовина.** Уображена осовина има дужину $2b$.



Сл. 23.

Центар. — Средина стварне осовине је хиперболин центар. Узмимо тачку M_1. Нека су њене координате x_1 и y_1. Кад тачки M_1 нацртамо централно симетричну тачку M_2 (према центру O), њене координате биће $x_2 = - x_1$ и $y_2 = - y_1$. Али ако је хиперболина једначина задовољена за вредности x_1 и y_1, она мора бити задовољена и за вредности $- x_1$ и $- y_1$. (Зашто?). Значи да и тачка M_2 лежи на хиперболи. Тачка O је хиперболин центар симетрије.

Ексцентрицитет. — Линиски ексцентрицитет је c. Бројни ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} > 1$.

Ако ексцентрицитет расте, тада или расте c, или опада a, или се дешава и једно и друго. Али ако расте c, а опада a, расте b. [Зато што је $c^2 - a^2 = b^2$]. Тада је, за исту апсцису, y све веће [$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$]. Хипербола се шири.

Шта бива ако екцентрицитет опада?

Ако e тежи јединици, a тежи ка c. Тада b тежи нули. Наша хипербола тежи правој $y = 0$. Хиперболе нема за $e = 1$. Бројни ексцентрицитет мора бити већи од 1.

Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар. Жижина апсциса је $x = c$. Зато је параметар:

$$p = \frac{b^2}{a.}$$

Асимптоте. — Код хиперболе имамо да испитамо неке нарочите линије које нисмо имали код круга и елипсе.

У једначини хиперболе ставимо да је десна страна нула:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Је ли то једначина хиперболе?

У једначини (1) можемо леву страну овако да напишемо:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0.$$

(2) $(bx - ay)(bx + ay) = 0$. Тада можемо ставити:

$bx - ay = 0$ и $bx + ay = 0$.

То су једначине двеју правих. Једначина (1) не претставља хиперболу, већ две праве линије. Нацртајмо их обе сл. 24). Те праве иду по дијагоналама правоугаоника чије су стране $2a$ и $2b$

Да ли права ON сече хиперболу?

Једначина праве ON јесте ово:

$$y = \frac{b}{a} x.$$

Хиперболина једначина је:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

У тачци A_2 дигнимо управну $A_2 C_2$. Обележимо ординату на хиперболи са y, ординату на правој ON са Y. Тада за тачку A_2 ордината на правој ON јесте $Y = b$.

ордината на хиперболи јесте $y = 0$.

$$Y - y = b.$$

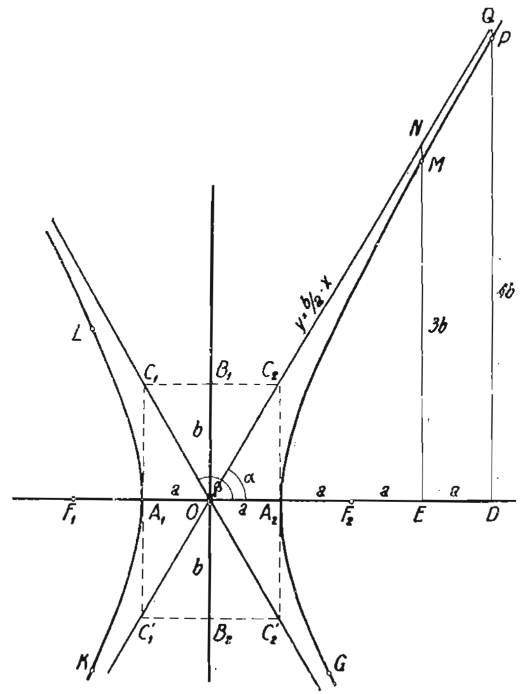
Дигнимо управну у тачки E (3a, 0) Добијамо:

ордината на правој ON јесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} 3a = 3b$,

ордината на хиперболи јесте $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{9a^2 - a^2}$

$$= \frac{b}{a} 2a \sqrt{2} = 2b \sqrt{2} \approx 1{,}8\ b.$$

$$Y - y = 3b - 1{,}8\ b \approx 1{,}2\ b.$$



Сл. 24.

Дигнимо управну у тачци D (4a, 0). Добијамо ово:

ордината на правој ON јесте $Y = \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} 4a = 4b$,

ордината на хиперболи $y = \frac{b}{a} \sqrt{16a^2 - a^2} = b \sqrt{15} \approx 3{,}87\ b$.

$$Y - y = 4b - 3{,}87b \approx 0{,}13b.$$

Разлика ордината опада. Чему тежи?

$$Y^2 - y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2$$

$$Y^2 - y^2 = b^2.$$ Одатле је:

$$Y - y = \frac{b^2}{Y+y}.$$ Чему тежи ова разлика кад x тежи бескрајном?

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = \lim_{x \to \infty} \frac{b^2}{Y+y} = 0.$$

Разлика ордината тачака с праве ON и хиперболе тежи нули. Значи, тачке с хиперболе све су ближе правој ON и теже да падну на њу.

Права којој се бескрајно приближује хипербола тако, да разлика њихових ордината тежи нули, зове се **асимптота** хиперболе. Хипербола има две асимптоте:

$$y = \frac{b}{a} x \text{ и } y = -\frac{b}{a} x.$$

Из једначина асимптота видимо да је

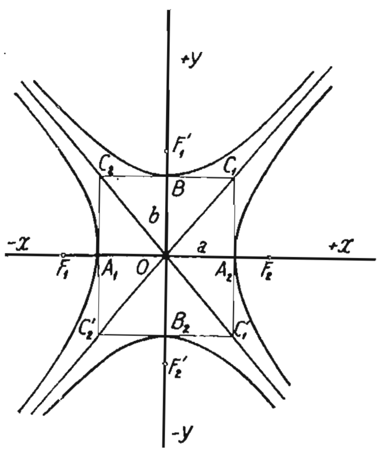
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{a}$$ (сл. 24). Значи да је

$$\beta = (\pi - \alpha)$$

Грана GA_2M захваћена је крацима угла $C'_2\,OC_2$.
Грана $KA_1\,L$ захваћена је крацима угла $C'_1\,OC_1$.

Брза конструкција хиперболе. — Кад нам је потребно да брзо нацртамо хиперболу и приближно, нацртамо асимптоте и у њихове углове уцртамо хиперболине гране.

Спрегнуте хиперболе. — Две хиперболе које имају исти центар и исте осовине али тако да је стварна осовина једне уображена осовина за ону другу, а уображена осовина прве стварна осовина оне друге, зову се спрегнуте (коњуговане) хиперболе. За хиперболу $F_1\,F_2$ (сл. 25) стварна осовина је $A_1\,A_2$, уображена осовина $B_1\,B_2$. За хиперболу $F'_1\,F'_2$ уображена је осовина A_1A_2, стварна $B_1\,B_2$. Хипербола $F'_1\,F'_2$ је спрегнута хипербола хиперболе $F_1\,F_2$ и обрнуто.



Сл. 25.

Једначина спрегнуте хиперболе. — Са слике се види да за свако y хиперболе $F'_1\,F'_2$ немамо увек два стварна икса. (За ординате од 0 до $+b$ и од 0 до $-b$ крива нема стварних апсциса).

Узмимо једначину хиперболе $F_1\,F_2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ Из ње је:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}$$

Видимо да хипербола $F_1\,F_2$ има увек стварне апсцисе за свако стварно и коначно y. Да би апсцисе могле бити уображене, мора под кореном да буде разлика. Ставићемо место b^2 израз $(-b^2)$. Добићемо:

$$(1) \qquad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{-b^2 + y^2}.$$

Видимо да је x уображено докле год је $y < b$ (по апсолутној вредности). Ту особину има спрегнута хипербола $F_1'\,F_2'$.

Ако једначину (1) развијемо, добијамо једначину:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$ Једначина спрегнуте хиперболе.

Две спрегнуте хиперболе имају заједничке асимтоте, пошто им је заједнички правоугаоник конструисан над осовинама.

Равнострана хипербола. — Кад су осовине 2a и 2b једнаке хипербола се зове равнострана. Њена је једначина:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

или $x^2 - y^2 = a^2$.

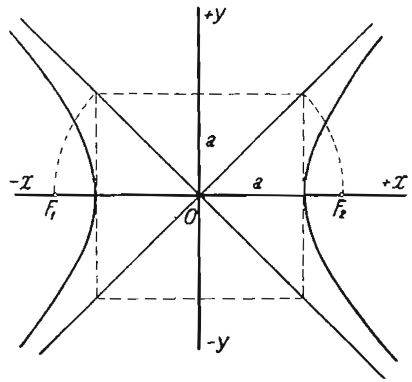
(Чиме се разликује од једначине круга чији је полупречник a?)

Асимптоте су јој:

$$y = \frac{a}{a} x$$

и $$y = -\frac{a}{a} x,$$ тј.

$$y = x \text{ и } y = -x.$$



Сл. 26.

(Секу се под правим углом. Зашто?) Слика 26.

*** Једначина хиперболе чије су осовине паралелне с координатним осовинама.** — Нека је центар такве хиперболе у $C(p, q)$. Тада њена једначина гласи:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1. \quad \text{Општа једначина хиперболе.}$$

Кад се ослободимо разломака и заграда имамо:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - 2b^2 px + 2a^2 qy + (b^2 p^2 - a^2 q^2 - a_2 b_2) = 0.$$

Кад ову једначину упоредимо с општом једначином кривих другог степена

$$Ax^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2Dx + 2Ey + F = O,$$

видимо да је у једначини хиперболе:

$B = O$ и да су A и C неједнако означени.

Хипербола и права. — Права може сећи хиперболу у двема тачкама, додиривати је, или бити спољна за њу. Кад ће бити једно, друго, или треће зависи од природе решења овога система:

$$Ax + By + C = O \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решења стварна и неједнака — права је сечица; решења стварна и једнака — права је дирка; решења уображена — права је спољна.

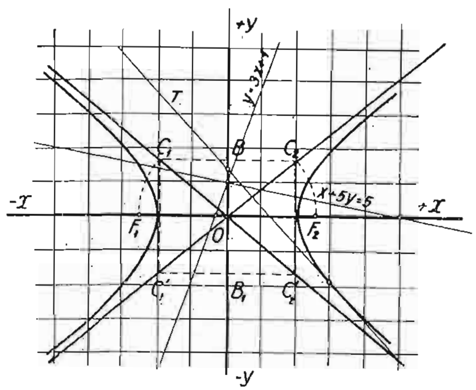
Пример I. — Испитати међусобни положај праве $y = 3x + 1$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$y = 3x + 1$$
$$3x^2 - 4(3x+1)^2 = 12$$

Одатле је:

$$33x^2 + 24x + 16 = 0$$
$$D = 24^2 - 4.33.16 < 0.$$

Решења су уображена. Права је спољна за хиперболу (сл. 27).



Сл. 27.

Пример II. — Испитати међусобни положај праве $x + 5y = 5$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$x = 5 - 5y$$

$3(5-5y)^2 - 4y^2 = 12.$ Одатле је даље:

$$71y^2 - 150y + 63 = 0.$$
$$D = 150^2 - 4.63.71 > 0.$$

Решења су стварна и неједнака. Права сече хиперболу у двема тачкама. (Види слику 27).

Пример III. — Испитати међусобни однос праве

$9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ и хиперболе $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.

Из једначане праве:

$$9x = 12 - 2y\sqrt{15}$$
$$3x = 4 - \frac{2}{3}\,y\sqrt{15}$$
$$9x^2 = (4 - \frac{2}{3}\,y\sqrt{15})^2$$

Из једначине хиперболе: $9x^2 = 12y^2 + 36$

Кад уједначимо десне стране, имамо:

$$(4 - \frac{2}{3}\,y\sqrt{15})^2 = 12y^2 + 36$$

Одатле је:

$$4y^2 + 4y\sqrt{15} + 15 = 0$$
$$D = (4\sqrt{15})^2 - 16.15 = 16.15 - 16.15 = 0.$$

Имамо два једнака решења:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{15}}{2} \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Права је дирка. (Права T, сл. 27).

Једачина хиперболине дирке. — Једначина дирке изводи се на исти начин као код круга и елипсе.

Ако је

једначине хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, биће

једначина њене дирке $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$

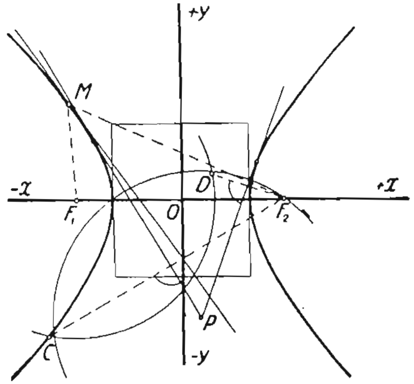
* Ако је

једначина хиперболе $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$, биће:

једначина њене дирке $\frac{(x-p)(x_1-p)}{a^2} - \frac{(y-q)(y_1-q)}{b^2} = 1,$

Конструкција хиперболине дирке. — *Први пример.* — Конструисати дирку на хиперболи у њеној тачци *M* (сл. 28). Спојимо

M с обема жижама. Симетрала добивеног угла $F_1 M F_2$ јесте тражена дирка.



Сл. 28.

Други пример. — Повући дирку на хиперболу из дате тачке P (сл. 28). Из F_1 лук полупречником $2a$. Из P лук полупречником PF_2. Пресеке та два лука (тачке C и D) спојимо с теменом кроз које смо описали круг (теме F_2). Добијемо праве CF_2 и DF_2. Из P спустимо управне на CF_2 и DF_2. То су тражене дирке.

Једначина хиперболине нормале. — Пошто нормала пролази кроз додирну тачку (x_1, y_1), а стоји управно на дирци, њена ће једначина бити :

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

ВЕЖБАЊА

Нацртај хиперболу кад је

1. $2a = 4$cm, $F_1 F_2 = 6$ cm.

2. $2a =$ cm, $F_1 F_2 = 10$ cm.

3. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ расте, шта бива с хиперболом?

4. — Кад је $2a$ стално ,а $2c$ тежи бесконачноме, чему тежи хипербола ?

5. — Кад је $2a$ стално, а $2c$ опада и тежи ка $2a$, чему тежи хипербола ?

6. — Шта бива с хиперболом кад c расте ?

7. — Шта бива с хиперболом кад c опада ?

8. — Кад су дати a и b, како се може конструисати c?

9. — Да ли се по хиперболиној једначини $\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{b^3} = \mathbf{1}$ одмах види да та крива има центар? По чему се види?

10. — Да ли се по хиперболној једначини одмах види да је ординатна осовина симетриска осовина те криве? По чему?

11. — Исто питање за апсцисну осовину.

12. — Шта бива с хиперболом кад у њеној једначини ставимо x место y и y место x?

13. — Напиши једначину хиперболе кад је $2a = 10$, $2c = 12$.

14. — Колико тачака једне хиперболе треба да знамо, па да можемо написати њену средишну једначину? По чему то познајеш?

15. — Напиши средишну једначину хиперболе која пролази кроз тачке M_1 (— 2, и $3\sqrt{2}$) и M_2 (1, 5 $\sqrt{13}$ и 3).

Одредити осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих :

16.	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = \mathbf{1}$	**17.**	$\frac{x}{25} - \frac{y^2}{4} = \mathbf{1}$
18.	$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$	**19.**	$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
20.	$3x^2 - 9y^2 = 27$	**21.**	$3x^2 - 4y^2 = 5$
22.	$x^2 - 2y^2 = 2$	**23.**	$x^2 - 4y^2 = 4$
24.	$2x^2 - 3y^2 = 6$	**25.**	$4x^2 - 16y^2 = 64$

Одреди једначине асимптота и брзо нацртај приближну слику ових хипербола :

26.	$4y^2 - 9y^2 = 36$	**27.**	$4x^2 - 25y^2 = 100$
28.	$5x^2 - 7y^2 = 35$	**29.**	$6x^2 - 9y^2 = 54$
30.	$9x^2 - 20y^2 = 180$	**31.**	$4x^2 - 8y^2 = 9$

32. — Нацртај спрегнуту хиперболу хиперболе из вежбања 16.

33. — Исто за хиперболу из вежбања 18

34. — Исто за хиперболу из вежбања 20.

Испитај ове једначине и нацртај криве :

35.	$x^2 - y^2 = 4$	**36.**	$2x^2 - 4y^2 = 15$
37.	$3x^2 - 3y^2 = 10$	**38.**	$4x^2 - 4y^2 = 15$

Одреди координате центра, осовине, жижно растојање, бројни ексцентрицитет и параметар ових кривих, па их конструиши:

*** 39.** $x^2 - 2y^2 - 4x + 2 = 0$

*** 40.** $x^2 - 2y^2 + 8x + 3 = 0$

*** 41.** $x^2 - 2y^2 + 12y - 20 = 0$

*** 42.** — Какав облик добија хипербола из вежбања 23 кад координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку M (2,0)?

*** 43.** — Исто питање за хиперболу из вежбања 22 и тачку M (3,2).

*** 44.** — Исто питање за хиперболу из вежбања 19 и тачку M (0,3).

* **45.** — Какав облик добија једначина праве $y = ax$, кад координатни почетак дође транслацијом осовина у тачку $M\ (p,\ q)$? Како гласе једначине асимптота за хиперболу

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1?$$

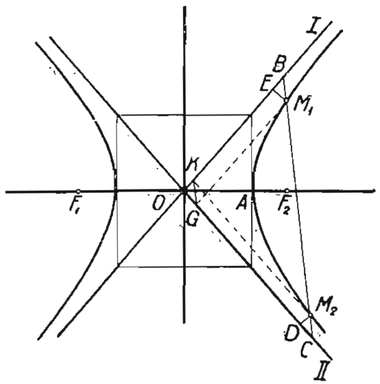
* **46.** — Наћи једначине асимптота за криву $x^2 - 4y^2 - 8y = 0$.

47. — Под којим се углом секу асимптоте криве $x^2 - 10y^2 - 2 = 0$?

48. — По чему ћемо познати је ли једна тачка спољашња или унутрашња за хиперболу?

49. — Испитај положај ових тачака према хиперболи: $4x^2 - 9y^2 = 36$

$M\ (4,1)$ $N\ (-5,1)$ $E\ (1,1)$ $G\ (-1,4)$ $P\ (5,2\frac{2}{3})$ $L\ (-\sqrt{15}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$



Сл. 29.

50. — Из хиперболиних тачака M_1 и M_2 повучене су паралелне с асимптотама. Докажи (сл. 29) да паралелограми M_1EOG и M_2DOK имају једнаке површине и да та површина не зависи од координата тачака M, већ је сталан број.

51. — Докажи ово: Свака права која пролази кроз две хиперболине тачке M_1 и M_2 сече хиперболу тако, да је од M_1 до ближе асимптоте исто растојање као од M_2 до њој ближе асимптоте.

[Из M_1 и M_2 повуци паралелне с асимптотама. Искористи троуглове OKG и EM_1B и CBM_2.]

Ако су дате осовине, одмах можемо написати једначину хиперболе, конструисати асимптоте, израчунати координате једне тачке (за произвољну апсцису) и обележити је. Тада кроз M_1 праву BC између асимптота. Кад знамо BM_1 и C, дуж BM_1 пренета од C по правој BC даје једну хиперболину тачку (M_2). Изведи одатле нов начин конструкције хиперболе.

52. — Помоћу сечице конструиши хиперболу $x^2 - 4y^2 = 4$.

53. — Докажи једначинама оно што се тражи у вежбању 51.

54. — Дате су једначине асимптота једне хиперболе:

$$y = \frac{2}{3}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{2}{3}x$$ и стварна осовина $2a = 12$. Конструиши ту хиперболу и одреди јој једначину.

Испитати однос дате праве и дате хиперболе:

55. $2x + 3y = 0$ и $x^2 - 4y^2 = 4$

56. $x - y - 1 = 0$ и $2x^2 - 3y^2 = 6$

***57.** $2x^2 - 8x - 4y^2 + 24y = 34$ и $3x + 7 = 0$

58. $x^2 - 8y^2 = 8$ и $x - y - 2 = 0$.

Одредити једначину дирке и нормале за дату хиперболу у датој тачци на њој:

59. $x^2 - 2y^2 = 1$ у тачци чија је апсциса $x = 3$.

60. $2x^2 - 9y^2 - 18 = 0$ за $x = 6$.

61. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ за $x = 10$.

62. $5x^2 - 6y^2 - 30 = 0$ за $x = 3$.

63. $7x^2 - 8y^2 - 56 = 0$ за $x = 4$.

64. — У једначини $\lambda x + 2y - 3 = 0$ одредити λ тако, да дата права буде дирка на хиперболи $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.

65. — Напиши једначину дирке на хиперболи $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$ паралелну с правом $2x + 3y - 6 - 0$.

66. — Одреди једначину дирке на хиперболу $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ управну на правој $7y - x + 35 = 0$.

67. — Одреди једначину оне дирке на хиперболи $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ чија нормала иде кроз жижу.

68. — Додирна тачка M_1 дирке T спојена је са жижама. Докажи да дирка полови угао $F_1\ M_1\ F_2$.

69. — Наћи међусобни однос ових двеју кривих:
$x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ и $x^2 + 9y^2 = 9$.

70. — Под којим се углом секу ове две криве:
$x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 - y^2 = 4$?

Из дате тачке M повучена је дирка на дату хиперболу. Одреди јој једначину.

71.	$x^2 - 4y^2 = 4$	$M\ (1,7)$
72.	$4x^2 - 9y^2 = 36$	$M\ (2,-7)$
73.	$9x^2 - 25y^2 = 225$	$M\ (3,10)$
74.	$2x^2 - 3y^2 = 7$	$M\ (1,7)$

75. — Може ли се повући дирка из тачке $M\ (6,1)$ на хиперболу из вежбања 71?

76. — Кроз тачку M из претходног вежбања повуци тетиву тако, да она отсече на ординатној осовини отсечак 5,5 и израчунај дужину те тетиве.

77. — Дата је права $y = \lambda x$ где је λ позитивно и једнако расте. При томе та права једнако остаје асимптота једне променљиве хиперболе. Шта бива са жижама те хиперболе ?

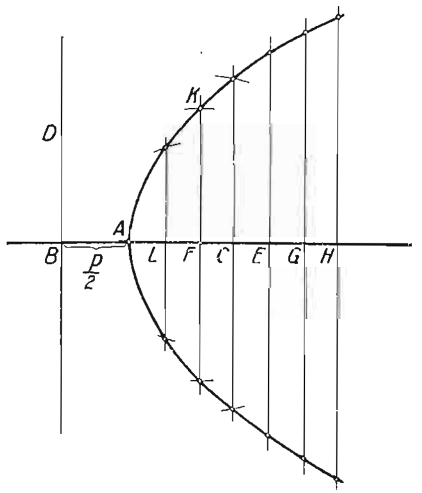
78. — Докажи ово: Додирна тачка полови део тангенте захваћен асимптотама. Да ли се одатле може извести нов начин конструкције дирке на хиперболу у датој тачци ?

79. — Права $x + y = 10$ обрће се у негативном смислу око своје пресечне тачке с хиперболом $x^2 - 5y^2 = 5$. Колика је величина тога обртања, кад сечица треба да постане дирка ? [Колико има решења?]

80. — Да ли су поља захваћена левом и десном граном хиперболе $x^2 - 4y^2 = 4$ истога знака? А како је то код хиперболе уопште ?

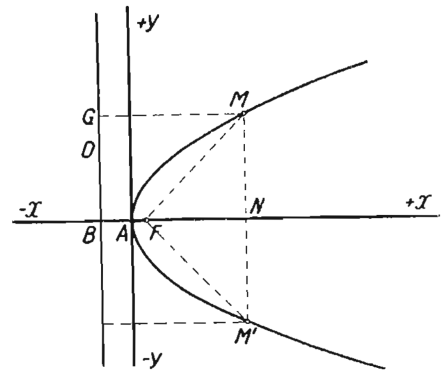
III. — ПАРАБОЛА

Дефиниција. — Парабола је геометриско место тачака подједнако одаљених од једне сталне тачке и једне сталне праве. Сталну тачку зовемо жижа и обележавамо је са F. Сталну праву зовемо водиља или директриса и обележавамо је са D (сл. 30).



Сл. 30

Параболина симетриска осовина. — Из жиже спустимо управну FB на водиљу D. Узмимо једну тачку на параболи (сл. 31). Спустимо из те тачке M управну MN на FB и пренесемо $MN = NM'$. Добијамо симетричну тачку M' тачке M (према FB). И тачка M' лежи на параболи. Ево зашто. Троугао MNF симетричан је са $M'NF$ према FB. (Зашто?). Отуда је $MF = M'F$. Тачке M и M' имају једнако растојање од жиже. Из M' спустимо $M'C$ управну на водиљу D. Четвороугао $CM'MG$ је правоугаоник. Отуда је $CM' = GM$. Пошто је $M'F = FM = MG$, биће: $M'F = CM'$. Тачка M' је подједнако удаљена од жиже и водиље. Она онда мора лежати на параболи. Пошто за сваку тачку на параболи можемо показати једну симетричну тачку на параболи према правој FB, права FB мора бити параболина симетриска осовина. Права која пролази кроз жижу и стоји управно на водиљи јесте параболина симетриска осовина.



Сл. 31.

Растојање жиже од водиље зовемо осовина и обележавамо га са p :

$$BF = p \text{ (сл. 30).}$$

Парабола има једно теме. То је тачка A (сл. 30). Теме лежи на средини осовине p. (Откуд знамо?)

Парабола је отворена крива. — Што се више удаљујемо од водиље, жижно растојање MF расте. С њим расту и управне MN (сл. 31). Значи, крива се све више удаљује од своје симетриске осовине. Она је отворена крива. Зато може имати само једно теме. (А како хипербола има два? То ћеш сад видети.)

Конструкција параболе. — То смо већ раније видели. Сад ћемо се само потсетити. На осовини узмемо произвољне тачке (C, E, G, H итд. сл. 30). Из њих дигнемо управне на осовину. Из F пресечемо управну у C полупречником BC, управну у E полупречником BE итд. Пресеци су параболине тачке.

Темена једначина параболе. — Знамо да је:

(1) $MF = MG$ (сл. 31). То важи за сваку параболину тачку. Израчунаћемо MF и MG помоћу координата. Добивен

вредности сменићемо у (1). Тако ћемо добити једначину параболе.

$$MF = \sqrt{MN^2 + FN^2} \text{ (сл. 31)}$$

$$MF = \sqrt{y^2 + (AN - AF)^2}$$

$$(2) \quad MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$MG = NB = NA + AB$$

$$(3) \quad MG = x + \frac{p}{2}$$

Вредности (2) и (3) уносимо у (1) и добијамо:

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}. \quad \text{То је даље:}$$

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$\mathbf{y^2 = 2px.}$ Темена једначина параболе.

То је једначина параболе чија осовина лежи на апсцисној осовини, а ординатна осовина јој пролази кроз теме.

Проучавање параболине једначине. — Решимо једначину по y. Имаћемо $y = \sqrt{2\,px}$.

Одавде видимо ово:

1) Израз 2p је увек позитиван. Зато ће поткорена количина бити позитивна само онда, кад је x веће од нуле. Крива нема тачака са негативним апсцисима.

2) За $x = 0$ биће $y = 0$.

Наша крива пролази кроз координатни почетак.

3) Што је x веће, y је све веће.

Наша је крива отворена крива линија.

4) Свакоме стварном и позитивноме x одговарају две стварне вредности за y.

Наша је крива симетрична према апсцисној осовини.

За овакву параболу кажемо да се отвара у позитивном смислу апсцисне осовине.

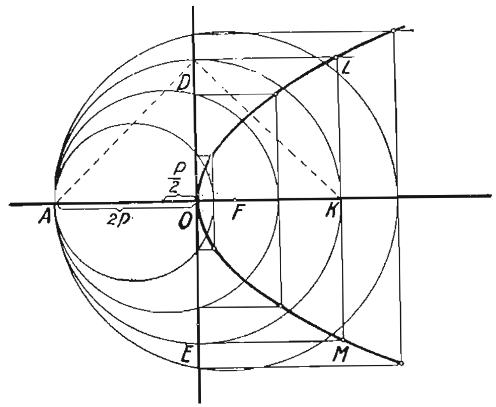
Параметар. — Ордината у жижи зове се параметар (FK, сл. 30). Параметар добијамо кад у једначини параболе ставимо $x = \frac{p}{2}$. Добијамо:

$$y = \pm p. \qquad \text{Параметар је } p.$$

Други начин конструкције параболе. — Из једначине параболе види се ово:

$$2p : y = y : x.$$

То значи: ордината сваке параболине тачке јесте средња пропорционала између двогубог параметра и апсцисе те тачке.



Сл. 32.

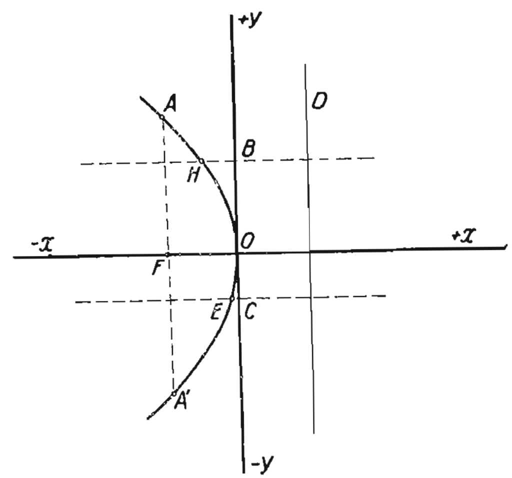
Из те параболине особине може се извести нов начин параболине конструкције.

На осовини се (лево од темена, сл. 32) пренесе дуж $OA = 2p$. Узмимо произвољну тачку на осовини десно од O. Рецимо K. Над AK описујемо круг. Он сече ординатну осовину у D и E. Из D и E управне на ординатну осовину а из K управну на апсцисну осовину. Где се оне секу ту су параболине тачке L и M.

Откуд знамо да L лежи на параболи? [OD је хипотенузина висина у правоуглом троуглу ADK. Итд.]

Парабола која се отвара у негативном смислу апсцисне осовине. — Узмимо параболу AOA'. Видимо да свакоме стварном и негативном иксу одговарају две стварне и супротне вредностиз а y. Значи да је y на другом степену:

$$y^2 =$$



Сл. 33.

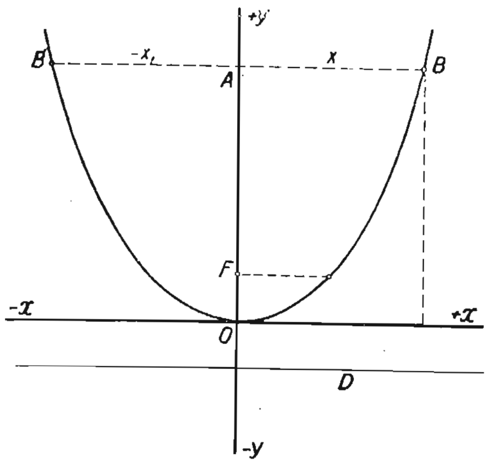
Видимо даље да свакој ординати одговара само једна апсциса. (Ординати OB одговара на кривој само апсциса HB. — сл. 33). Значи да је x на првом степену:

$$y^2 = \ldots x$$

Видимо да само за негативне вредностм икса имамо стварне ординате. Зато мора бити:

$\mathbf{y^2 = -2px.}$ [Изврши дискусију ове једначине]

Парабола која се отвара у позитивном смислу ординатне осовине. — Ако се парабола отвара у позитивном смислу ординатне осовине (сл. 34), мораћемо добити две супротне вредности за x за свако стварно и одређено y. На слици 34 ординати OA одговарају две супротне вредности за x и то ове: $x_1 = AB$ и $x_2 = AB'$.



Сл. 34.

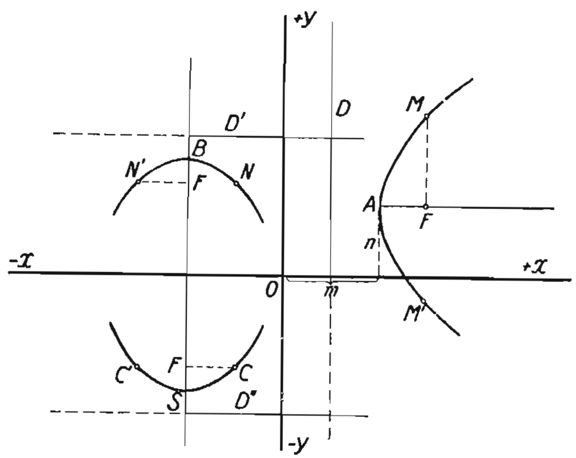
Да би то могло да буде, мора у једначини параболе x бити на другом степену.

Једначина овакве параболе гласи:

$$x^2 = 2py.$$ [Изврши дискусују те једначине].

Општа једначина параболе. — Ако је теме A у тачци $A\ (m,\ n)$, а осовина паралелна с апсцисном осовином, једначина параболе биће:

$$(y - n)^2 = 2p\ (x - m)$$



Сл. 35.

То је парабола која лежи као парабола MAM' са слике 35.

Једначина параболе $M'AM$ са слике 35 биће:

$$(y - 3)^2 = 2\ .\ 4\ (x - 4)$$
$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 32$$
(1) $$y^2 - 6y - 8x + 41 = 0.$$

Једначина параболе NBN' са слике 35 биће:

$$(x + 4)^2 = -4\ (y - 5).$$ То је даље:

(2) $$x^2 + 8x + 4y - 4 = 0.$$

Једначина параболе $C'SC$ за слике 35 биће:

$$(x + 4)^2 = +\ 4\ (y + 5).$$ То је даље:

(3) $$x^2 + 8x - 4y - 4 = 0.$$

Општа једначина кривих другог степена гласи:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Ако је упоредимо с једначинама $y^2 = 2px$ и једначинама (1), (2) и (3 , видимо ово:

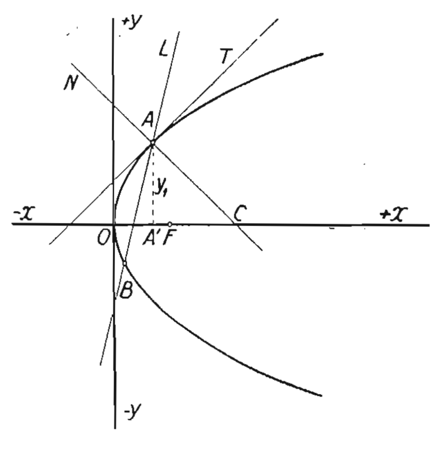
Општа једначина кривих другог степена претставља параболу чија је осовина паралелна с једном координатном осовином кад је:

1) $B = 0$

2) $A = 0$, или $C = 0$.

ЈЕДНАЧИНЕ ДИРКЕ И НОРМАЛЕ

Једначина дирке. — Узмимо параболину сечицу L (сл. 36). Од ње ће постати дирка кад се она буде *обртала* око $A\ (x_1\ y_1)$ тако, да B тежи ка A и падне на A. Гранични положај обртања праве L биће тада дирка T. Обележимо координате тачке B са x_2 и y_2. Тада је једначина праве AB:



Сл. 36.

(1) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Треба израчунати количник

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Пошто $A\ (x_1\ y_1)$ лежи на параболи $y = 2px$, биће:

(2) $$y_1^2 = 2px_1.$$

Пошто и $B\ (x_2\ y_2)$ лежи на параболи, биће:

(3) $$y_2^2 = 2px_2.$$

Одузимањем (3) од (2) добијамо:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p\,(x_2 - x_1)$$

$$(y_2 - y_1)\,(y_2 + y_1) = 2p\,(x_2 - x_1).$$ Одатле је:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}$$

Сменом у (1) добијамо:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}\,(x - x_1).$$

Гранични је положај ове праве дирка T. Наћи ћемо границу израза $\frac{2p}{y_2 + y_1}$.

$$\lim_{y_2 \to y_1} \frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1}.$$

Зато је једначина пароболине дирке:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$ То је даље:

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1.$$

Пошто је из (2)

$y_1^2 = 2px_1$, биће даље:

$$yy_1 - 2px_1 = px - px_1$$
$$yy_1 = px + px_1$$
$$\mathbf{yy_1 = p\,(x + x_1).}$$

То је једначина дирке на параболи $y^2 = 2px$ у тачци чије су координате x_1 и y_1.

Једначина нормале. — Једначина нормале у тачци $A\,(x_1\,y_1)$ има ове особине:

1) Пролази кроз $A\,(x_1\,y_1)$. Зато њена једначина мора бити:

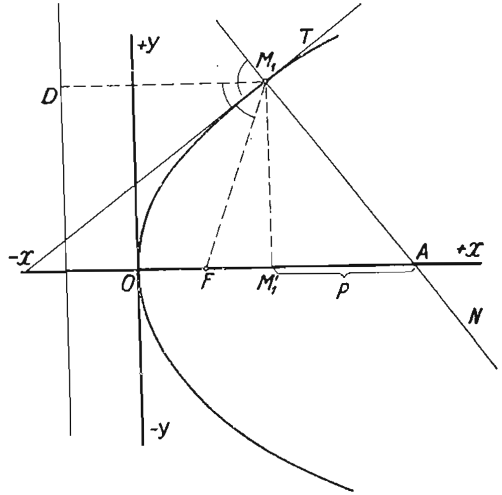
$$y - y_1 = a\,(x - x_1).$$

2) Стоји управно на дирки. Зато мора бити:

$$a = -\frac{y_1}{p}.$$ Отуда је ово једначина нормале:

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{p}\,(x - x_1)}.$$

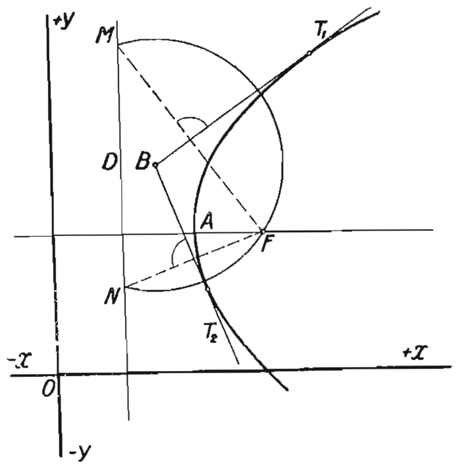
Конструкција дирке и нормале у датој тачки. — Хоћемо да повучемо дирку и нормалу на датој параболи у датој тачки M_1 (сл. 37). Спустимо управну $M_1\,M'_1$ из дате тачке на осовину. Од M_1' одмеримо $M_1'\,A = p$. Нормала је права AM_1. У M_1 дигнемо управну на N. То је дирка T.



Сл. 37.

Други начин конструкције дирке. — Спојимо M_1 са F. Из M_1 спустимо управну $M_1\,D$ на водиљу D. Добијамо угао $DM_1\,F$. Његова је симетрала дирка T.

Конструкција дирке из спољне тачке. — Дата је једна тачка B (сл. 38). Из ње треба повући дирке на дату параболу.



Сл. 38.

Описаћемо круг из B полупречником BF. Он сече водиљу у тачкама M и N. Спојимо M и N са F. Из B спустимо управне на MF и NF. Те управне су дирке T_1 и T_2.

Парабола нема асимптота. — Да би једна права била асимптота једне криве, треба да је граница разлике њихових ордината за исту апсцису равна нули.

Узмимо параболу $y^2 = 2px$ и праву $Y = ax + b$.

Разлика њихових ордината за исту апсцису x биће:

$$Y - y = ax + b - \sqrt{2px}.$$ То је даље:

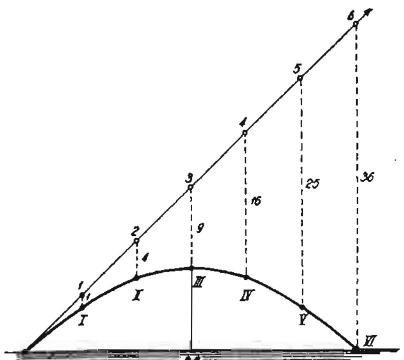
$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{2px}\right)$$

$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2px}{x^2}}\right)$$

$$Y - y = x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right)$$

Граница ове разлике није нула. Права није асимптота.

*КОС ХИТАЦ



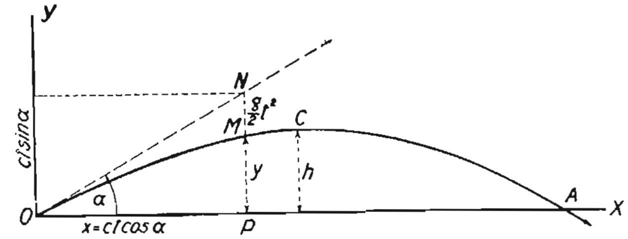
Сл. 39.

„Тешко тело, бачено почетном брзином c у правцу $A6$, косо нагнутом према хоризонталној равни AB (сл. 39) врши једно сложено кретање. Под утицајем почетне брзине оно би се по закону инерције кретало у правцу $A6$, и за 1, 2, 3, 4, ... секунада прешло путеве $A1, A2, A3, A4$. . . . . . , где је $A1 = c$, $A2 = 2c$. . . . . Ну услед једновременог дејства теже оно би се кретало, по закону слободног падања, вертикално наниже, и прешло би у томе правцу, у првој секунди, пут $1I = \frac{g}{2} 1^2$, у другој $2\,II = \frac{g}{2} 2^2$, у трећој $3\,III = \frac{g}{2}.\ 3^2$. . . итд. По закону независности кретања, тачке стварне путање I, II, III, IV . . . добијају се конструктивно, ако се замисли, да тело прво изврши једно, а затим друго од оба кретања. Путања је онда крива линија A I II III IV V B“.

„Ако полазну аачку O узмемо за координатни почетак, а хоризонталан правац OX и вертикалан OY, оба у равни кретања, за координатне осовине правоуглог координатног система, и ако је ON правац бацања, онда је $\sphericalangle \alpha = NOX$, елевациони угао (сл. 40). Нека је $ON = ct$ пут услед почетне брзине за t секунада, а $NM = \frac{gt^2}{2}$ пут који би тело прешло за време t кад би слободно пало из тачке N, онда M лежи на стварној путањи. Координате OP и MP те тачке означићемо са x и y. Тада је

$$(1) \qquad x = ct\cos\alpha \qquad y = PN - NM = ct\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.\ \text{“} \quad (2)$$

[Два одељка под наводницима узети су из Физике професора др. Милорада Поповића, по пишчевој дозволи].



Сл. 40.

Из (1) имамо:

$$t = \frac{x}{c\cos\alpha}$$

Сменом у (2) добијамо:

$$y = c.\ \frac{x}{c\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha}$$

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2$$

Ово је парабола. Написаћемо је тако да се виде координате њеног темена.

$$\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}x^2 - x\ \mathrm{tg}\alpha = -y$$

$$x^2 - \frac{2c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}x = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}y$$

$$\left(x - \frac{c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}\right)^2 - \left(\frac{c^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{g}\right)^2 = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}\ y$$

Пошто је $\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha = \cos\alpha\ \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$, биће даље:

$$\left(x - \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = -\frac{2c^2\cos^2\alpha}{g}y + \frac{c^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$-\left(x - \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2 = \frac{2c^2}{g}\cos^2\alpha\left(y - \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

Види се ово:

Координате темена ове параболе јесу:

$$\text{апсциса } X = \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$$

$$\text{ордината } Y = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2g}$$

$$\text{осовина: } x = \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g}$$

Книва се отвара у негативном смислу ординатне осовине, пошто јој је сачинилац уз x^2 негативан. Значи, теме јој је највиша тачка изнад апсцисне осовине. Висину темена показује његова ордината:

$$Y = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Она зависи само од c и α. Кад је дата брзина, висина зависи само од нагибног угла α („елевационог угла"). Што је α веће, бацићемо тело на све већу висину, јер у првоме квадранту синус расте кад угао расте.

Кад ће се постићи највећа висина при косом хицу? Кад Y достигне максимум. Оно ће достићи максимум кад буде $\sin\alpha$ достигло максимум. То ће бити за $\sin\alpha = 1$, тј. за $\alpha = 90^0$. Највећа се висина постиже при вертикалном хицу.

Под којим се углом постиже највећа даљина домета? Значи: Кад ће *OA* са слике 40 достићи свој максимум? Шта је *OA*? То је апсциса пресека наше криве и апсцисне осовине. Да бисмо добили апсцису те тачке, ставићемо у једначини криве да је $y = 0$ и израчунати x. Додбићемо:

$$x = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2g} \pm \sqrt{\frac{c^4 \sin^2 2\alpha}{4g^2}}$$

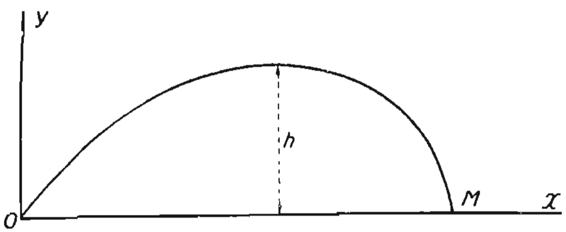
$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{(Апсциса тачке } A)$$

Кад ће x_2 достићи максимум? Кад буде $\sin 2\alpha = 1$, тј. $2\alpha = 90^0, \alpha = 45^0$.

Највећи је домет под углом од 45^0. За угао већи или мањи од 45^0 добијамо краћи домет.

Балистичка линија. — Линија по којој се креће зрно из топа личи на параболу, али није парабола. Није због тога што отпор ваздуха дејствује и мења облик путање. Зрно испаљено из топа креће се по једној кривој која се зове балистичка линија. Једна балистичка линија види се на слици 41. [Шта примећујеш на њој?]



Сл. 41

ВЕЖБАЊА

За дату вредност удвојеног параметра конструисати параболу чија осовина иде по апсцисној осовини:

1. $2p = 8$
2. $2p = 7$. (За 1 и 2 теме је у координатном почетку)
3. теме у тачци $M(4,0)$ $\quad 2p = 10$
4. теме у тачци $M(3,0)$ $\quad 2p = 6$
5. теме у тачци $M(-5,0)$ $\quad 2p = 5$
6. теме у тачци $M(-6,0)$ $\quad 2p = 9$.

Конструиши параболу чија је осовина паралелна с апцисном осовином, а теме јој је у датој тачци M:

7. $M(3,4)$ $\quad 2p = 6$ $\qquad$ 8. $M(-3,4)$ $\quad 2p = 8$

9. $M(-3, -5)$ $\quad 2p = 12$.

[Колико решења имају вежбања 7, 8, 9?]

Конструиши ове криве:

10. $y^2 = 4x$ $\qquad$ 11. $y^2 = 7x$

12. $y^2 = 2x$ $\qquad$ 13. $y^2 = x$

14. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p расте?

15. — Шта бива с параболом $y^2 = 2px$ кад p опада?

16. — Шта бива с параболом $y^2 = 2\lambda x$ кад λ постане мањ од нуле?

Конструиши ове криве:

17. $y^2 = -10x$ $\qquad$ 18. $y^2 = -4x$

19. $y^2 = -2x$ $\qquad$ 20. $y^2 = -x$

21. — Кад у једначини параболе сменимо x са y и y са x какву криву добијамо? Може ли се нова крива поклопити с старом?

Конструиши ове криве:

22. $x^2 = 4y$ $\qquad$ 23. $x^2 = 6y$

24. $x^2 = -8y$ $\qquad$ 25. $x^2 = -y$

Објасни положај ових кривих:

26. $(y-3)^2 = 4(x-2)$ $\qquad$ 27. $y^2 - 6y - 3x + 15 = 0$

28. $2y^2 + 4y - 5x + 7 = 0$ $\qquad$ 29. $3y^2 - 6y - 6x + 5 = 0$

30. $4y^2 + 8y - 2x + 9 = 0$ $\qquad$ 31. $x^2 - 4x - 3y + 5 = 0$

32. $x^2 + x - y - 1 = 0$ $\qquad$ 33. $3x^2 - 4x + 6 - y = 0$

34. $y = x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ 35. $x = y^2 - 4y - 7$

36. $x - y - y^2 + 3 = 0$

37. — Напиши једначину параболе из вежбања 7.

38. — Напиши једначину параболе из вежбања 9.

39. — Како изгледа једначина параболе из вежбања 26, ка координатни почетак транслацијом осовина дође у тачку $M(3,2$

40. — Исто питање за параболу из вежбања 35 и нови координатни почетак у тачци M (— 11,2).

41. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци A (2,3), а парабола се отвара у позитивном смислу апсцисне осовине.

42. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна са апсцисном осовином, теме у тачци B (— 3,4), а парабола се отвара у негативном смислу апсцисне осовине.

43. — Напиши једначину параболе чија је осовина паралелна с ординатном осовином, теме у тачци C (3, — 2) $2p = 6$, а отвор у негативном смислу.

Напиши једначину параболе чија је осовина L паралелна с означеном осовином, теме S у датој тачци, а парабола се отвара у означеном смислу:

44.	S (1,1)	$2p = 6$	$L \parallel YY'$	отвор +.
45.	S (—3,2)	$2p = 7$	$L \parallel YY'$	отвор —.
46.	S (—4,—5)	$2p = 11$	$L \parallel XX'$	отвор +.
47.	S (0,—1)	$2p = 3$	$L \parallel XX'$	отвор —.
48.	S (—3,0)	$2p = 5$	$L \parallel YY'$	отвор —.
49.	S (—4,—3)	$2p = 10$	$L \parallel XX'$	отвор +.

50. — Да ли се по једначинама $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$ познаје да те криве немају центра? По чему?

***51.** — Да ли се по једначинама $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$ и $(x - m)^2 = 2p\,(y - n)$ познаје је ли прва крива симетрична према правој $y = n$, а друга према правој $x = m$? По чему се познаје?

***52.** — Одреди једначину симетриске осовине за криву $x = y^2 - 6y + 2$.

***53.** — Исто за $y = x^2 - 8x + 5$

***54.** — Исто за $y - 1 = 3x^2 - 6x$.

Испитај је ли дата тачка спољна или унутарња за дату параболу:

55. — Тачка M (2,1), парабола из вежбања 1.

56. — Тачка M (—3,4), парабола из вежбања 2.

57. — Тачка M (—2,3), парабола из вежбања 17.

58. — Тачка M (4,1), парабола из вежбања 20.

59. — По чему ћемо, без цртежа, одредити је ли једна тачка спољна или унутарња за параболу?

60. — Какав знак добија полином параболине једначине за тачке на параболи?

Испитати међусобни положај дате праве и дате параболе:

61. $y - 2x = 10$ и $y^2 = 4x$ **62.** $y - x = 10$ и $y^2 = x$

63. $y = x + 3$ и $y^2 = 8x$ **64.** $2y\sqrt{3} - 4x - 12 = 0$ и $y^2 = 7x$

У параболиној тачци за коју је дата апсциса или ордината одредити једначине дирке и нормале:

65. $y^2 = 6x$ M (3,y) **66.** $y^2 = -8x$ M (—2,y)

67. $y = \dfrac{x^2}{3}$ M (x,3) **68.** $x^2 = -5y$ M (x, —4)

***69.** $x^2 - 6x - 8y = 9$ M (x,9)

***70.** $y^2 - 3y - 3x - 5 = 0$ M (7,y)

***71.** $2x^2 + 4x - 4y - 7 = 0$ M (x,3)

72. — Израчунај дужину поднормале на параболи $y^2 = 2px$ у тачци $M\,(m,\ n)$. Зависи ли дужина поднормале од положаја тачке M?

73. — Да ли је резултатом из претходног вежбања објашњена конструкција дирке на параболи у датој тачци?

74. — Произвољна тачка M са параболе $y^2 = 2px$ спојена је са жижом F и из M је спуштена управна на водиљу D. (Дужи MF и MD). Докажи да дирка полови угао DMF.

Из дате тачке M конструисати дирку на дату параболу, одредити једначину дирке и нормале:

75. M (— 3, 4) $y^2 = 4x$ ***76.** M (— 3, — 7) $y^2 = 3\,(x - 1)$

***77.** M (— 2, 5) $y^2 = 6x - 9$ ***78.** M (2, 3) $y + 3 = x^2 + 6x$

***79.** — У једначини $2x - 3\lambda\, y + 5 = 0$ одредити λ тако, да права постане дирка на параболи $y^2 - 3y - x + 4 = 0$.

80. — Одредити једначину дирке на параболи $x^2 = 3y$ тако, да дирка отсече на апсцисној осовини отсечак — 2.

***81.** — Одредити једначину дирке на параболи $3x - x^2 + 2y = 0$ тако, да дирка отсече отсечак + 3 на ординатној осовини.

***82.** — Одредити једначину параболе која има теме у тачци S (2, 3), а осовина јој је паралелна с ординатном осовином, али тако, да парабола додирује праву $2x + 3y = 12$. [Колико има решења?]

83. — Одредити координате тачке M на параболи $y^2 = 6x$ кад је дирка у тој тачци паралелна с правом $y = 6x$.

84. — Дата је парабола $y^2 = 6x$. Израчунати угао што га дирка у тачки $M\,(6y)$ заклапа са сечицом кроз додирну тачку M на параболи: N ($\sqrt{6}$, y).

85. — Одредити једначину дирке на параболи $y^2 = 6x$ тако да дирка буде паралелна с правом $2x - 3y = 12$.

*86. — Одредити једначину дирке на параболи $2x - x^2 + 3 - 2y = 0$ тако, да дирка буде управна на правој $2x + 3y = 4$.

87. — Под којим се углом секу ове две криве?

$$y^2 = 6x \quad \text{и} \quad x^2 = 3y.$$

*88. — Исто питање за:

$$4x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \quad \text{и} \quad x - x^2 = 2y.$$

89. — Колико је далеко од праве $2x + 3y = 7$ права L која је с њом паралелна, а дирка је на параболи $y^2 = 5x$?

*90. — Одреди положај тачке M на ординатној осовини, кад се зна да је из ње повучена дирка на параболу $y^2 - 2y - x + 5 = 0$ тако, да дирка заклапа угао од 150^0 с позитивним смислом ординатне осовине.

91. — Одреди угао под којим се секу дирке повучене из тачке $M(2, 3)$ на параболу $y^2 = -3x$.

92. — На параболу $x^2 - 4x + 3 = 3y$ повучена је дирка MT и тачци M чија је апсциса — 3. Одредити једначину дирке која је управна на дирки MT.

*93. — Један командир батерије гађа из топова под углом од 30^0. Други командир гађа из истих топова под углом од 60^0. Ко ће имати већи домет? (Не узимамо у обзир отпор ваздуха).

Напомена. — За гађање из топова израчунати су сви углови за све потребне даљине. Цев се диже помоћу даљинара. На команду „2000!" помоћник нишанџије обрће ручицу даљинара. Кад дотера на 2000, цев је дигнута за угао који је потребан да се зрно баци на 2000 m.

*94. — Под којим углом треба да стоји цев пољског топа, да би се зрно бацило на 3500 m, кад је почетна брзина топовског зрна 500 m? [Колико има таквих углова? Кад би се гађало под једним, а кад под другим углом?]

*95. — На игралишту баца један играч лопту брзином од 5 m у секунди, а под углом од 30^0. Докле ће добацити?

*96. — Кад не би било ваздушног отпора, докле би најдаље могао добацити брзометни пољски топ, кад је почетна брзина његовог зрна 500 m?

МЕШОВИТА ВЕЖБАЊА

1. — Докажи помоћу аналитичне геометрије да се све три троуглове висине секу у једној тачци.

[Узми да је једно теме у координатном почетку, а друго на апсцисној осовини].

2. — Исто за све три симетрале троуглових страна.

*3. — Исто за симетрале углова.

4. — Докажи да центар круга описаног око правоугло — троугла лежи на средини хипотенузе.

5. — Из центра елипсе $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ описујемо круг полупречником $r = a$, па из ма које тачке на елипсиној великој осовини дижемо управну до пресека са елипсом и кругом. Нека су пресеци M_1 и M_2 (круг). Њихове ће ординате имати увек овај стални однос: $\frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}$.

6. — Дате су праве $2x - y = 1$ и $3y - 2\lambda x = O$. Одредити λ тако, да се те две праве пресеку под углом од 20^0.

7. — Одредити заједничку тетиву ових двеју кривих:
$4x^2 + 9y^2 = 36$ и $y^2 = 8x$.

8. — Крива $x^2 + 4y^2 = 4$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболно је теме у елипсином центру. Одредити једначину те параболе.

9. — Хипербола $4x^2 - 16y^2 = 64$ и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса негативна. Одредити једначину те параболе. За колико се разликују ординате тих кривих у тачци чија је апсциса 10?

10. — Хипербола и парабола имају заједничку жижу чија је апсциса позитивна. Параболино је теме у хиперболином темену чија је апсциса позитивна. Кад је хиперболина једначина $x^2 - 9y^2 = 9$, како гласи параболина једначина? Чије ординате брже расту? За колико се разликују ординате у тачци чија је апсциса 4?

11. — Одредити једначину круга који пролази кроз тачке $A(3,1)$, $B(5,3)$ и кроз тачке симетричне датим тачкама према апсцисној осовини. Израчунати површину четвороугла који образују те четири тачке.

*12. — Велика осовина једне елипсе лежи на апсцисној осовини. Теме A (6,0). Крива додирује праву $6y = x\sqrt{3}$, у тачци чија је апсциса 3. Израчунати осовине те елипсе и конструисати је.

13. — Хипербола има центар у координатном почетку, а стварна осовина јој је на апсцисној осовини. Асимптота јој је $3y = 2x$. Крива пролази кроз $M\,(10{,}5\frac{1}{3})$. Одредити осовине.

14. — Под којим углом сече апсцисну осовину права $2y\sqrt{3} - 3x - 2\sqrt{3} = 0$?

15. — Дате су две праве:

(1) $\qquad 2x + 3y - 5 = 0$ и $4x - 5y + 1 = 0 \qquad$ (2)

Колики је најмањи угао за који треба да се обрне права (2) око међусобног пресека, да би постала управна на правој (1)?

16. — Дата је права $y = mx + 5$. Одредити m тако, да права постане дирка на кругу $x^2 + y^2 = 7$.

17. — Дате су координате два узастопна темена једнога квадрата: $A\,(2{,}4)$ $B\,(6{,}1)$. Написати једначину круга уписаног у томе квадрату. [Колико решења?]

***18.** — Доказати да се у сваком троуглу може уписати круг.

19. — Израчунати параметар λ у једначини $2y\sqrt{3} + \lambda x = 4$ тако, да права постане дирка на елипси $4y^2 + x^2 = 4$ у тачци M_1 $(1, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Извести једначину дирке на тој елипси паралелне с дирком у тачци M_1.

20. — Из тачака на апсцисној осовини $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ дигнуте су управне на ту осовину. Оне секу елипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ у тачкама M_1 и M_2. Одредити површину елипсиног исечка OM_1M_2, где је O центар елипсин.

21. — Дата је права $x + y = 4$. Она сече апсцисну осовину у A, ординатну у B. Колику ротацију треба она да изврши око A, па да постане дирка на елипси $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$? Израчунати површину AA_1B_1B где су A_1 и A пресеци позитивног крака апсцисне осовине са елипсом и датом правом, а B_1 и B пресеци позитивног крака ординатне осовине са елипсом и са датом правом.

22. — Испитати аналитички је ли права која је за $d = 2$ удаљена од праве $x + y - 10 = 0$ дирка на кривој $4x^2 + 9y^2 = 36$. Колико има решења?

23. — У једначини $y^2 = 2px$ одредити p тако, да парабола додирује праву $2y - x = 8$.

24. — Може ли се парабола сматрати као граница елипсе код које су стални једно теме и једна жижа (A' и F_1, сл. 4), а друго се теме одмиче од F_1 тако да размак F_1F_2 тежи бесконачноме?

[Ставимо транслацијом координата почетак у A'. Тада једначина наше елипсе постаје:

$$b^2 (x - a)^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Одатле је:

$$(1) \qquad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

Рекли смо да се $A'F_1$ не мења. Знамо да је:

$$A'\,F_1 = a - c = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Ставимо $A'\,F_1 = d$. Тада ће бити:

$$d = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Одатле је:

$$b^2 = 2ad - d^2.$$

Унесимо то у једначину (1):

$$y^2 = \frac{(2ad - d^2)}{a^2}(2ax - x^2). \qquad \text{Сад даље:}$$

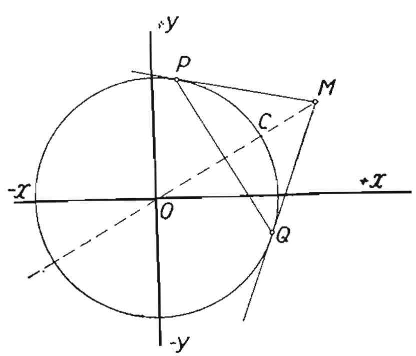
$$y^2 = \frac{2\,(2ad - d^2)}{a}\,x - \frac{2ad - d^2}{a^2}\,x^2$$

$$(2) \quad y^2 = (4d - \frac{2d^2}{a})\,x - (\frac{2d}{a} - \frac{d^2}{a^2})\,x^2$$

Кад a тежи бесконачноме, чему теже разломци у заградама? А коме облику тежи једначина (2)? Коју криву претставља њен гранични облик?]

25. — Под којим се углом секу елипса и хипербола које имају заједничке жиже?

*IV — ПОЛ И ПОЛАРА



Сл. 42.

Из једне тачке ван круга повуцимо дирке на круг (сл. 42). Добијемо дирке MP и MQ. Нека су координате тачке M (x', y'), тачке P $(x_1\ y_1)$, а тачке Q $(x_2\ y_2)$. Једначине дирки:

(1) $xx_1 + yy_2 = r^2$

(2) $xx_2 + yy_2 = r^2$

Права (1) пролази кроз M. Зато мора бити:

(3) $x'x_1 + y'y_1 = r^2$.

Али и права (2) иде кро:

M. Зато мора бити:

(4) $x'x_2 + y'y_2 = r^2$,

Кад загледамо (3) и (4) видимо да је једначина

(5) $x'x + y'y = r^2$

задовољена координатама тачке P [једначина 3] и тачке Q [једначина (4)]. Па то онда (5) претставља праву PQ. Права PQ која пролази кроз додирне тачке тангената повучених из M зове се **полара** тачке M. Тачка се M зове **пол**.

Чему нам служи полара? Ако одредимо њену једначину, можемо ту једначину решити с једначином круга и одмах добити координате додирних тачака.

Пример. — Одредити једначину дирки повучених на круг $x^2 + y^2 = 4$ из тачке M (3, 1).

Најпре полара:

$$x'x + y'y = r^2$$

$$3x + y = 4 \qquad \text{(пошто је } y' = 1)$$

Сад њени пресеци с кругом.

$$y = 4 - 3x$$

$$x^2 + 16 - 24x + 9x^2 = 4$$

$$10x^2 - 24x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x_1 = 1,2 + 0,2\sqrt{5} \qquad y_1 = 0,4 - 0,6\sqrt{5}$$

$$x_2 = 1,2 - 0,2\sqrt{5} \qquad y_2 = 0,4 + 0,6\sqrt{5}$$

Дирке:

I $\quad (1,2 + 0,2\sqrt{5})x + (0,4 - 0,6\sqrt{5})\, y = 4$

II $\quad (1,2 - 0,2\sqrt{5})x + (0,4 + 0,6\sqrt{5})\, y = 4$

Полара је управна на правој која спаја с центром тачку из које су повучене дирке. — Једначина праве OM биће:

$$y - y' = a(x - x')$$

$$y - y' = \frac{y'}{x'}(x - x')$$

$$y - y' = \frac{xy'}{x'} - y'$$

$$x'y - xy' = 0 \qquad \text{Одатле је:}$$

$$y = \frac{y'}{x'}x.$$

Једначина поларе:

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r^2}{y'}. \qquad \text{Види се да су управне.}$$

Ако из ма које тачке са CM повучемо дирке, полара ће опет бити управна на CM. Значи да ће све поларе бити међу собом паралелне за дирке повучене из тачака са исте праве.

На исти начин изводе се једначине полара и за елипсу, хиперболу и параболу, те ћемо их само навести.

Једначина поларе на елипсу:

$$b^2x'x + a^2y'y = a^2b^2$$

Једначина поларе на хиперболу:

$$b^2x'x - a^2y'y = a^2b^2.$$

Једначина поларе на параболу:

$$y'y = p(x' + x).$$

ВЕЖБАЊА

Помоћу поларе реши означене задатке:

1. — Одредити дирке на $x^2 + y^2 = 1$ и 3 $M\left(x, \frac{1}{2}\right)$.
2. — Иста за $x^2 + y^2 = 4$ и M (— 5, 6).
3. — Исто за $x^2 + y^2 = 9$ и M (— 4, — 7).
4. — Исто за $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$ и M (— 4,8).
5. — Исто за $x^2 + y^2 + 4y = 0$ и M (25, 7).
6. — Је ли код елипсе полара управна на правој која спаја елипсин центар с тачком из које се повлаче дирке?

Помоћу поларе реши означене задатке:

7. — Страна 28, вежбање 114.
8. — „ „ „ 115.
9. — „ „ „ 116.
10. — „ „ „ 117.
11. — Када се пол одмиче од центра, да ли се полара примиче, или одмиче?

[Испитати и за круг и за елипсу].

12. — Докажи да су дирке повучене у крајњим тачкама једног елипсиног пречника паралелне међу собом.
13. — Помоћу поларе реши задатак на страни 28 у вежбању 123.

[Једначина је поларе $b^2x'x + a^2y'y = a^2b^2$. Једначина пречника који је с њом паралелан биће: $b^2x'x + a^2y'y = 0$ (Пошто пречник иде кроз центар, а центар лежи у координатном почетку). Где овај пречник сече елипсу? Напиши једначину дирке кроз ту тачку. Напиши једначину спрегнутог пречника. Загледај угловне сачиниоце].

Помоћу поларе реши означене задатке:

14. — Страна 41, вежбање 71.
15. — „ „ „ 72
16. — „ „ „ 73
17. — „ „ „ 74
18. — „ 55, „ 75
19. — „ „ „ 76
20. — „ „ „ 77
21. — „ „ „ 78.

*V. — ПОГОДБА ДА ПРАВА $y = mx + n$ БУДЕ ДИРКА НА КУПИНОМ ПРЕСЕКУ

ПОГОДБА ДА ПРАВА БУДЕ ДИРКА НА КРУГУ

Узмимо круг $x^2 + y^2 = R^2$ и праву (L) $y = mx + n$. Да би L била дирка, мора систем ових двеју једначина дати два једнака решења.

$$y = mx + n$$
$$x^2 + (m^2x^2 + 2mnx + n^2) = R^2$$
$$(1 + m^2)\, x^2 + 2mnx + (n^2 - R^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2mn)^2 - 4\,(1 + m^2)\,(n^2 - R^2) = 0.$$

Одатле је: $$R^2 = \frac{n^2}{1 + m^2}.$$

То је услов да права L буде дирка на датом кругу.

Пример. — Испитати је ли права $2x + y = 10$ дирка на кругу $x^2 + y^2 = 20$.

$$m = -2$$
$$n = 10$$
$$R^2 = 20$$
$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{100}{5} = 20 = R^2.$$

Права је дирка. (Испитај је ли то тачно!)

Други пример. — Испитати је ли права $x + 2y\sqrt{2} = 4\,(3 + 2\sqrt{2})$ дирка на кругу $x^2 - 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$.

Одредићемо координате центра:

$$p = 3 \qquad q = 4.$$

Пренећемо координатни почетак у центар круга. Значи, смењујемо и у једначини праве и у једначини круга x са $(x + 3)$, y са $(y + 4)$. Једначина праве постаје:

$$x + 3 + 2\,(y + 4)\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2}$$
$$x + 2y\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 9 + 8\sqrt{2}$$
$$(1) \qquad x + 2y\sqrt{2} = 9.$$

Једначина је круга била:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9.$$ Сад постаје:
$$[(x + 3) - 3]^2 + [(y + 4) - 4]^2 = 9$$
$$(2) \qquad x^2 + y^2 = 9.$$
$$m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$n = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$
$$\frac{n^2}{1 + m^2} = \frac{\frac{81}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{81}{9} = 9$$
$$R^2 = 9.$$

Права је дирка.

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ЕЛИПСИ

Узмимо елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и праву (L) $y = mx \pm n$.

$$b^2x^2 + a^2\,(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$(b^2 + a^2m^2)\, x^2 + 2a^2mnx + (a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$

Дискриминанта мора бити нула:

$$4a^4m^2n^2 - 4\,(b^2 + a^2m^2)\,(a^2n^2 - a^2b^2) = 0$$
$$a^4m^2n^2 - (a^2b^2n^2 + a^4m^2n^2 - a^2b^4 - a^4b^2m^2) = 0$$
$$- a^2b^2n^2 + a^2b^4 + a^4b^2m^2 = 0$$
$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = 0.$$

То је услов да права L буде дирка на датој елипси.

Пример. — Испитати је ли права $3y - 2x = 5$ дирка на елипси $x^2 = 4y^2 = 4$.

$$a = 2 \qquad b = 1 \qquad m = \frac{2}{3} \qquad n = \frac{5}{3}$$

$$n^2 - b^2 - a^2m^2 = \frac{25}{9} - 1 - 4\,\frac{4}{9} = \frac{25}{9} - \frac{9}{9} - \frac{16}{9} = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 20).

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ХИРЕРБОЛИ

Узмимо праву $y = mx + n$ и хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$
$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - (a^2n^2 \pm a^2b^2) = 0.$$

Дискриминанта мора бити равна нули:

$$(2a^2mn)^2 + 4(b^2 - a^2m^2)(a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$
$$4a^4m^2n^2 + 4(a^2b^2n^2 - a^4m^2n^2 + a^2b^4 - a^4b^2m^2) = 0$$
$$a^2b^2n^2 + a^2b^4 - a^4b^2m^2 = 0$$
$$n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0.$$

То је услов да права буде дирка на хиперболи.

Пример. — Испитати је ли права $9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$ *дирка на хиперболи* $3x^2 - 4y^2 = 12$.

$$9x + 2y\sqrt{15} - 12 = 0$$
$$2y\sqrt{15} = 12 - 9x$$
$$y = \frac{12}{2\sqrt{15}} - \frac{9}{2\sqrt{15}}x$$
$$y = 6\cdot\frac{\sqrt{15}}{15} - 9\cdot\frac{\sqrt{15}}{2\cdot 15}x$$
$$y = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{5} - 3\cdot\frac{\sqrt{15}}{10}x$$
$$a^2 = 4 \qquad b^2 = 3 \qquad m^2 = \frac{9\cdot 15}{100} - \frac{135}{100} - 1{,}35$$
$$n^2 = \frac{4\cdot 15}{25} = \frac{60}{65} = \frac{240}{100} = 2{,}40$$
$$n^2 + b^2 - a^2m^2 = 2{,}40 + 3 - 4\cdot 1{,}35 = 5{,}40 - 5{,}40 = 0.$$

Права је дирка. (Види стр. 37).

ПОГОДБА ЗА ДИРКУ НА ПАРАБОЛИ

Узмимо праву $y = mx + n$ и параболу $y^2 = 2px$.

$$(mx + n)^2 = 2px$$
$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px$$
$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0$$

Дискриминанта мора бити равна нули.

$$4(mn - p)^2 - 4m^2 + n^2 = 0$$
$$m^2n^2 - 2mnp + p^2 - m^2n^2 = 0$$
$$p^2 - 2mnp = 0$$
$$p - 2mn = 0$$

То је услов да дата права буде дирка на датој параболи.

Пример. — Испитати је ли права $y - 3x - 4 = 0$ *дирка на параболи* $y^2 - 48x$.

$$m = 3 \qquad n = 4 \qquad p = 24$$
$$24 - 2\cdot 3\cdot 4 = 0$$

Права је дирка. Да проверимо.

$$y^2 = 48x$$
$$y = 3x + 4$$
$$(3x + 4)^2 = 48x$$
$$9x^2 + 24x + 16 = 48x$$
$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$
$$(3x - 4)^2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$$
$$y_1 = y_2 = 8.$$

Права је дирка у тачци $M(\frac{4}{3}, 8)$,

ВЕЖБАЊА

Испитај је ли дата права дирка на датоме кругу:

1. $x^2 + y^2 = 5$ и $x + 2y - 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 = 7$ и $x + y = \sqrt{7}$
3. $x^2 + y^2 = 16$ и $x - 2y = 3$
4. $x^2 - 4x + y^2 = 0$ и $x + y = 7$
5. $x^2 - x + y^2 - y = 0$ и $x + y = 2$
6. $x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0$ и $x - y = 20$
7. $x^2 - 2x + y^2 = 0$ и $3y - 2x = 10$
8. $x^2 + y^2 = 9$ и $7x - 4y = 3\sqrt{65}$
9. $x^2 + y^2 + 10x + 12y + 57 = 0$ и $x - y\sqrt{2} = 0$
10. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ и $x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = \sqrt{5}$
11. — У једначини $y = 3x + n$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 4$.
12. — У једначини $2y + 3mx = 7$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $x^2 + y^2 = 9$.
13. — У једначини $2y + 3mx = 4$ одреди m тако да права буде дирка на кругу $5x^2 + 5y^2 = 12$.
14. У једначини $3y + 4x - 3n = 0$ одреди n тако да права буде дирка на кругу $2x^2 + 2y^2 = 9$.

Испитај је ли дата права дирка на датој елипси:

15. $2x + 3y - 5 = 0$ и елипса из вежбања 32 на стр. 24.
16. $3 + 4x - y = 0$ „ „ „ „ 33 „ „ „
17. $1 - y = x$ „ „ „ „ 34 „ „ „
18. $2y - 3x + 4 = 0$ „ „ „ „ 35 „ „ „

19. $3 - 3x - 4 = 0$ и елипса из вежбања 36 на стр. 24.
20. — Провери добивене резултате у 108 вежбању на страни 27.
21. „ „ „ „ 109 „ „ „ „
22. „ „ „ „ 110 „ „ „ „
23. „ „ „ „ 111 „ „ „ „
24. — Дато је $2y - 3mx + 7 = 0$. Одреди m тако да права буде дирка на елипси из вежбања 36, стр. 24.

25. — Исто за n у једначини $2n - 3x + 8y = 0$ и елипсу у вежбању 37, стр. 24.

26. — Исто за m у једначини $3m + y + 11 = 0$ и елипсу у вежбању 38 стр. 24.

27. — Исто за n у једначини $12n - 3x + y = 0$ и елипсу у вежбању 39 стр. 24.

Испитати је ли дата права дирка на датој хиперболи:
28. — Страна 41, вежбање 55. 29. — Страна 41, вежбање 56.
30. — „ „ „ 57. 31. — „ „ „ 58.
32. — У једначини $3x + 4y + n = 0$ одредити n тако, да права буде дирка на хиперболи са стране 41, вежбање 59.

33. — Исто за n у једначини $2x + 3n - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 60, стр. 41.

34. — Исто за m у једначини $4mx + 6 - 5y = 0$ и хиперболу из вежбања 61, стр. 41.

35. — Исто за m у једначини $4 - 2mx\ 3 = 0$ у хиперболу из вежбања 62, стр. 41.

Испитати је ли дата права дирка на датој параболи:
36. — Права и парабола из вежбања 61 на страни 55.
37. — „ „ „ „ „ 62 „ „ „
38. — „ „ „ „ „ 63 „ „ „
39. — „ „ „ „ „ 64 „ „ „
40. — У једначини $3mx + 4y - 5 = 0$ одреди m тако, да права буде дирка на параболи $y^2 = 6x$.

41. — Исто за m у једначини $2mx - 5y + 1 = 0$ и параболу $y^2 = 8y$.

42. — Исто за n у једначини $2y - 3y + 2n = 0$ и параболу $y^2 = -7y$.

43. — Исто за n у једначини $3x + 9y - 7n = 0$ и параболу $y^2 = -5x$.

*VI. — ДИСКУСИЈА ОПШТЕ ЈЕДНАЧИНЕ КУПИНИХ ПРЕСЕКА

Општа једначина гласи:

(1) $\quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

Пошто ми посматрамо само оне купине пресеке чије су осовине паралелне с координатним осовинама, биће:

$$B = 0,$$

Тада једначина (1) постаје:

(2) $\quad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 6Ey + F = 0$

Решимо је по y:

$$y = \frac{-2E \pm \sqrt{4E^2 - 4C\,(Ax^2 + 2Dx + F)}}{2C}$$

$$y = \frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{E^2 - ACx^2 - 2CDx - CF}$$

(3) $$y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)}$$

Ставимо

(4) $$z = \frac{1}{C}\sqrt{-ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)}$$

Ако бисмо хтели да конструишемо криву (3), видимо да бисмо за свако x имали две тачке за y. Једанпут бисмо на $-\frac{E}{C}$ имали да додамо z, а други пут да га одузмемо. Значи да је права $y = -\frac{E}{C}$ симетриска осовина те криве. Како ће изгледати та крива све зависи од z. Међутим z може имати стварну вредност, бити нула, или бити уображено. Све зависи од израза

(5) $\quad -ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF)$

Решићемо једначину:

(6) $\quad -ACx^2 - 2CDx + (E^2 - CF) = 0$

$$x = \frac{2CD \pm \sqrt{4CD^2 + 4\ AC\ E^2 - CF)}}{-2AC}$$

Ми ћемо посматрати само случај кад су корени једначине (6) стварни и неједнаки, тј. кад је:

$$C^2D^2 + AC\ (E - CF) > 0$$

Нека су корени једначине (6) x_1 и x_2. Тада (5) можемо написати овако:

(7) $\quad -AC\ (x - x_1)\ (x - x_2) = 0$

Тада (3) можемо написати овако:

$$(8) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-AC(x-x_1)(x-x_2)}$$

Шта све овде може бити? Претпоставили смо да су x_1 и x_2 стварни и неједнаки. Овде могу наступити три случаја.

Први случај. — Нека је $AC > 0$. Тада $-AC < 0$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности између корена x_1 и x_2. Тада имамо стварне ординате само за

$$x_1 < x < x_2.$$

Ван тога размака између корена ординате су уображене. Па то је случај код елипсе. Крива претставља елипсу кад је $AC > 0$.

То значи да ћемо имати елипсу кад су A и C једнако означени.

Други случај. — Нека је $AC < 0$. Тада је $-AC > 0$. Зато је поткорени израз у (8) позитиван само за вредности икса ван корена. Стварне вредности имамо само кад је

$$x < x_1 < x_2 \qquad \text{или} \qquad x > x_2 > x_1$$

Значи: од $x=x_1$ до $x=x_2$ ординате су уображене, а иначе су увек стварне. Па то је случај само код хиперболе. Крива претставља хиперболу само кад је

$$AC < 0.$$

То значи да ћемо имати хиперболу кад су A и C неједнако означени.

Трећи случај. Нека је $AC = 0$. Тада је и $-AC = 0$. Тада једначина (3) добија овај облик:

$$(9) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CDx + (E^2 - CF)}$$

Обележимо корен поткорене количине са x_1. Тада (9) можемо написати овако:

$$(10) \qquad y = -\frac{E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{-2CD\,(x - x_1)}$$

Овде могу наступити три потслучаја:

Први потслучај:

$$(11) \qquad 2CD > 0$$

Тада је $-2CD < 0$. Зато је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности икса мање од x_1. Па то онда крива (10) претставља само параболу. Из (11) се види да C не може бити нула.

Пошто је $AC = 0$, значи да мора бити $A = 0$. Значи: крива претставља параболу кад је $A = 0$, а $C \neq 0$.

Други потслучај:

$$(12 \qquad 2CD < 0.$$

Тада је $-2CD > 0$. Тада је поткорена количина у (10) позитивна за све вредности веће од x_1. Тада крива (10) може опет претстављати само параболу: Опет се види да C не може бити нула.

Крива (10) претставља параболу кад A и C нису једновремено нуле.

Трећи потслучај. — Он наступа кад је $2CD = 0$. Ми тај случај нећемо испитивати овде. Само ћемо додати да у томе потслучају крива (2) не претставља ни један купин пресек.

Да сведемо. — Да би једначина (2) претстављала један купин пресек, потребно је да буде:

$$C^2D^2 + AC(E^2 - CF) < 0.$$

[Одатле се види да не могу бити једновремено нуле A и C, нити A и D].

Тада ће бити:

за	$AC > 0$	*елипса*
за	$AC < 0$	*хипербола*
за	$AC = 0$	*парабола* (увек сем случаја $A=C=0$).

Први пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$2x^2 - 6x + 3y^2 - 8y - 10 = 0$$

Најпре

$C^2D^2 + AC(E^2 - CF) = 9.9 + 2.3\,(16+3.10) = 81+6\,.\,46 = 357 > 0.$
$AC = 2.3 = 6 > 0.$

Дата једначина претставља елипсу.

Други пример. — Испитати шта претставља ова крива:

$$5y^2 - 8y - 3x^2 + 4x - 20 = 0.$$

Најпре:

$C^2D^2 + AC(E^2 - CF) = 25.4 + (-3).5.\,[16 - 5\,(-20)] = 100 - 15\,(16+100)$
$= 100 - 15.116 < 0.$

Дата једначина за нас још не претставља ништа.

Напомена: — Даљи развој ове дискусије видећеш на универзитету.

ВЕЖБАЊА

Шта претстављају ове једначине:

1. $x^2 - 6x + 8y^2 - 12y + 10 = 0$
2. $x^2 - 4x - 6y^2 - 6y = 12$
3. $3x^2 + 4x - 5y^2 - 6y + 7 = 0$
4. $3x - 5x^2 + 5y^2 - 8y - 17 = 0$
5. $4x - 8x^2 + 8y^2 - 6y - 30 = 0$
6. $6y^2 - 7y + 5x^2 + 4x - 2 = 0$
7. $5x^2 - 6x + 3y^2 - 7y + 1 = 0$
8. $6x^2 - 7x + 8y^2 - 6y + 2 = 0$

9. $4x - 9x + y^2 - 7y + 9 = 0$
10. $x^2 - 3x + y - 7 = 0$
11. $y^2 - 4x + 8y - 9 = 0$
12. $3x - 2y^2 + 3y = 7 = 0$
13. $6y^2 - 9x^2 + 8y - 9x - 11 = 0$
14. $y^2 - 16x^2 + 9x + 7y - 12 = 0$
15. $2y^2 - 5x + 4y + 2 = 0$

VII. — КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД ПРЕЂЕНОГ ГРАДИВА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

ПРВИ ТРАГОВИ

Старе грађевине Мисираца и Вавилонаца јасно казују да су и у веома далекој древној старини људи знали много што-шта из геометрије. Потреба за грађењем навела их је на мерење и посматрање основних геометриских слика. Мисирци су морали мерити своју плодну земљу веома често, због тога што ју је Нил плавио и мењао постављене границе имања. Та су мерења стварала потребу за основним знањем из геометрије. Њега је несумњиво било одавно. Трагови геометриског знања виде се и на једноме веома староме писаноме документу из Мисира. Мисирци су обично писали на папирусу. То је била нека врста хартије справљена од биљке папирус која је некад у изобиљу расла поред Нила, а сад је тамо нема. Око половине прошлога века пронашао је у Мисиру енглески научник Ринд један свитак папируса. Дугачак је 20 метара, а широк 30 сантиметара. Чува се у Британском музеју у Лондону. Тај је папирус писао неки Ахмес између 1800 и 1600 пре Хр. Зове се **Риндов папирус.** Тај је спис нека врста практичног математичког упутства. У њему се налазе и геометриск слике и упутства за израчунавање њихове површине. Ту стоји д се површина равнокраког троугла израчунава кад се произво основице и крака подели са 2. (Је ли то тачно?) Ту се налази упутство за израчунавање површине круга. По њему изгледа д је наш данашњи број $\pi = 3{,}16$.

Али ти стари геометриски трагови показују да на 2000 пре Хр. није у ствари ни било проучавања геометрије, већ су сам бележена проста запажања на геометриским сликама.

Праву, научну геометрију, геометрију с доказима, створил су Грци. Зато ћемо овде прегледати радове неколико велики грчких математичара.

ГРЧКИ МАТЕМАТИЧАРИ

Талес из Милета. — Први грчки математичар на кога наилази историја математике јесте *Талес* из малоазиске вароши Милета (624—548 г пре Хр.). Он је један од седам грчких мудраца. Оснивалац је чувене Јонске школе. Он је био у Мисиру и тамо је од мисирских свештеника много научио. Њему се приписује да је доказао ова тврђења из геометрије: пречник полови круг, углови на основици равнокраког троугла једнаки су међу собом, троугао уписан у полукругу правоугли је. Он се бавио сличним троуглима и утврдио њихове особине. Помоћу теорије о сличним троуглима он је решио ова два задатка: Одредио је висину пирамиде помоћу њене сенке и из пристаништа израчунао растојање од копна до лађе на мору. (Како би ти решио та два задатка?)

Питагора. — Мисли се да је рођен око 586 г пре Хр. За њега се зна да је рођен на острву Самосу и да се учио у Мисиру. Са Самоса је побегао од тиранина Поликрата. Дошао је у Кротон у „Велику Грчку“ (Јужна Италија). Ту је основао школу. Зна се да су се у тој школи училе аритметика, музика, геометрија и астрономија. Шта је урадио он лично, а шта његови ученици, не зна се тачно (пошто су његови ученици били обавезни да чувају у тајности оно што у школи науче). Зато се може говорити само о раду Питагорејаца, а не о раду самога Питагоре.

Они су утврдили да се раван може покрити само једном од ових трију мрежа: мрежом равностраних троуглова, квадратном мрежом, и мрежом правилних полигона. (Којих?). Њима се приписује да су утврдили да може бити свега пет правилних испупчених тела. Они су доказали да збир углова у троуглу износи два права угла. Њима се приписује да су доказали да је квадрат хипотенузе једнак са збиром квадрата страна правог угла. („Питагорино правило“). Данас се зна да је та особина правоуглог троугла била много раније позната старим народима (на пр. Мисирцима).

Њихова је заслуга што су поставили геометрију на научну основу (тачни докази). Због тога се Питагора сматра праоцем модерне математике.

Платон. — (429—348 г пре Хр.). — Син једне отмене и богате атинске породице, он је у младости добио највише образовање које се могло дати младићу тога времена. Био је ученик чувеног грчког филозофа Сократа. Ишао је на науке у „Велику Грчку“ (грчка колонија у Јужној Италији) и у Мисир. При повратку с наука основао је у своме родноме месту високу филозофску школу коју је назвао „Академија“. Колико је он ценио математику види се по томе, што је над врата своје школе ставио натпис: „Нека не улази нико ко не зна геометрију“.

Он је усавршио и уопштио аналитичку методу у математичким доказима и проблемима. То значи ово: претпоставља се да је један проблем већ решен, па се раставља на друге проблеме који су већ решени. Значи, прво се изврши анализа, па се тек онда прилази конструкцији.

Он је усавршио теорију о геометриским местима и потпуно их објаснио.

Еуклид. — Рођен је у Александрији и живео у њој. У највећој је слави био око 300 г пре Хр. Мисли се да је математичко знање стекао у Атини од Платонових ученика. Основао је у Александрији једну високу школу у којој је предавао математику. То је чувени писац „Елемената“. То је његово најважније дело. У томе се делу налази скупљено све дотадање знање из математике. Шта је у њему тачно Еуклидово, а шта туђе, данас још није одређено. Заслуга је Еуклидова што је све то раније знање покупио и изнео га у веома научном облику. То је прво математичко научно дело старога века. У њему је чиста математичка теорија. У њему су доказима утврђиване математичке истине. Садржи у себи геометрију и аритметику. Многе ствари из геометрије уче се и данас у школи тачно онако како их је Еуклид написао пре 22 века! „Елементи“ су подељени на 13 књига. Ово је њихов садржај.

I књига: тачка и права, углови, троугли, једнакост површина и Питагорина теорема. II књига: у геометрискоме облику решавање једначина 2 степена. III књига: круг, праве и углови на њему. IV књига: уписани и описани правилни полигони. V књига: у геометрискоме облику изнета теорија о несамерљивим бројевима. VI књига: сличност троуглова, геометриске сразмере. VII књига: теорија бројева. VIII и IX књига: степени, корени, геометриски редови. X књига: ирационални бројеви. XI књига: увод у стереометрију, правилна тела. XII књига: однос површина два круга и сличних полигона, однос површина и запремина код тела. XIII књига: правилни полигони и правилна тела (њихова конструкција и уписивање у лопту).

У почетку I књиге Еуклид је изнео 5 поставки (постулата) који се не могу доказати. Пета таква поставка гласи: „Ако једна права која пресеца друге две праве, начини унутрашње углове с исте стране мање од два права, те две праве линије неограничено продужене, секу се с оне стране пресечнице с које и француски математичар Лежандр изнели су крајем XVIII века своје тврђење да π није алгебарски ирационалан број. Међутим све до краја XIX века трајао је посао око одређивања природе броја π и тачног начина његовог израчунавања.

Израчунавање површина. — И то је стара ствар. У Риндовом се папирусу налазе тачно израчунате неке површине. Еуклид се бавио само испитивањем односа површина двеју слика или два тела, док је **Херон** из Александрије (из доба рођења Христова) показао израчунавање површина геометриских слика.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

Површине и запремине тела. — Еуклид је упоређивао површине и запремине тела, али их је Херон израчунавао. Површину и запремину лопте израчунао је **Архимед**. Доцније су на израчунавању површине и запремине тела радили многи математичари. Међу њима италијански математичар **Кавалиери** (почетак XVII века).

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Тригометрија је створена за астрономске потребе. Отуда је прво пронађена сферна тригонометрија. Њу је први почео највећи грчки астроном **Хипарх** (око 150 г пре Хр.). При решавању троуглова увек их је уписивао у круг, па је њихове стране израчунавао као функције полупречника. Косоугли сферни троугао растављао је на правоугле сферне троугле, па их је онда решавао. Око 100 г после Хр. бавио се проучавањем сферних троуглова астроном **Менелај** из Александрије који је живео у Риму. После њега писао је тригонометрију **Птоломеј** (око 150 г после Хр.). И он је као и његови претходници узимао тетиву као синус датога лука. Он је продужио Хипархов посао и израдио таблицу синусних вредности.

Арапи су пренели тригонометрију у Западну Европу у XIII веку. **Региомонтанус** (XV век) је написао једно дело о тригонометрији и учинио да се тригонометрија потпуно одвоји од астрономије за коју је дотле била везана. Модерни облик дао је тригонометрији славни Швајцарски математичар Ојлер (XVIII век).

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА

Координате су биле познате још и старим народима. За њих су знали Мисирци. Њихови су геометри употребљавали једну

мрежу квадратића да на њој одреде положај појединих ме
Мисиру. Хипарх је одређивао положај места према родоско
ридијану (јер је он радио на острву Родосу). Употребља
географску дужину и ширину. Грци су знали за правоугли
динатни систем.

Прво је **Леонардо Пизано** (1220 г) довео алгебру у
геометријом. Доцније је тај посао настављен, али праве
тичне геометрије задуго није било. Године 1637 објавио је
цуски математичар **Декарт** своју **Геометрију.** Њом је у
основе аналитичној геометрији.

САДРЖАЈ