МОЧНИК-НАЈМАН

АРИТМЕТИКА и АЛГЕБРА

СА

ЗБИРКОМ ЗАДАТАКА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

превео са 30. издања

В. ДИМИЋ,

директор гимназије у пензији

У БЕОГРАДУ

Штампано у Државној Штампарији Краљевине Србије

1909.

САДРЖАЈ

СТРАНА

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

Степеновање, кореновање и логаритмовање

ПЕТИ ОДЕЉАК

Једначине другога степена

ШЕСТИ ОДЕЉАК

СЕДМИ ОДЕЉАК

Прогресије

ОСМИ ОДЕЉАК

Наука о комбинацијама

СТРАНА

ДОДАТАК

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

ПОПРАВКЕ

СТРАНА	ВРСТА		МЕСТО	ТРЕБА :
36.	12.	оздо	127, 129, 131 и 133	93, 95, 97 и 99
50.	4.	„	почевши.	почевши,
80.	16.	„	$\overset{n}{\breve{b}}$	$\overset{m}{\breve{b}}$
111.	14.	озго	$b^{\log a^{(b)}} = a$	$b^{\log^a (b)} = a$

ПРИСТУП

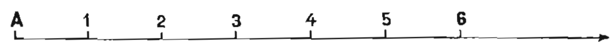
1. Посматрањем више ствари исте врсте добива се појам о *множини*. Свака поједина ствар неке множине назива се *јединица*.

Две су множине *једнаке*, кад свакој јединици једне множине одговара једна јединица друге множине. Представљајући сваку јединицу дате множине нпр. једним прстом, једним прутићем или писмено једном тачком, једном цртом, постадоше *природне бројне слике*. Доцније су оне замењене много краћим знацима. Сваки бројни знак добива једно име, *број*. Име и знак одређују *број*.

Наука о бројевима и о њиховим везама назива се аритметика.

2. Множинама које имају особину, да прва постаје од неке посебне ствари, а да свака потоња има по једну јединицу (једну ствар) више од пређашње, одговарају редом бројеви: *један, два, три,*.... Ови бројеви чине *природни бројни ред*. Он почиње с 1 а може се продужити бескрајно.

Природни бројни ред може се представити сликом, преносећи на праву линију од почетне тачке А одређеним правцем једнаке дужи; крајње тачке тих дужи одговарају узастопним бројевима.



Оваква линија назива се *бројна линија*.

3. Да се дата множина *изброји*, треба њене јединице придружити узастопним бројевима природнога бројног реда. Последњој јединици придружени број јесте тражени број те множине.

Ред бројења не мења резултат.

Јер да би се нпр. више динара избројало поређаћемо их у правој линији, па ћемо њихова места редом обележити бројевима 1, 2, 3, итд. Број који стоји на последњем месту казује колико је динара. Ако два која било динара измењају своја места, за тим макоја друга два и тако редом, свагда ће при таквом различитом ређању на сваком месту бити по један динар те ће очевидно њихова множина бити дата оним бројем, којим је обележено место последњег динара.

Кад се при бројењу не узима на ум врста јединице, онда се на тај начин добивени бројеви називају неименовани бројеви; кад се пак при бројењу исказује и врста јединице тада постају именовани бројеви.

4. Једнаким множинама припада исти број (чл. **1**). Према томе су два броја једнака, кад свакој јединици једнога броја одговара једна јединица другог броја.

Изједначивање двају једнаких бројева или бројних веза назива се једначина. Дакле се пише $a = b$ а изједначене количине називају се стране једначине. Кад је $a = b$ онда је и $b = a$.

Стране једначине смеју се променити.

Два су броја неједнака, кад се једна јединица једног броја не може придружити свакој јединици другог броја; и то онај је број већи, од којега после придруживања претиче једна или више јединица, други је број напротив мањи. Да је a веће од b, дакле b мање од a исказује се неједначином $a > b$ (стране неједначине). Ако је $a > b$ онда је и $b < a$.

5. Од датих бројева прописаном везом њиховом прећи на други тражени број зове се рачунати. Резултат рачунања то је број до којега се долази. Сваки рачунски пропис захтева радњу (операцију) у бројном реду.

6. Сваки засебни бројни знак представља одређени број у бројном реду. Али да би се могла показати општа важност закона рачунања, уведена су слова као општи бројни знаци. Општи бројни знак представља произвољан, али за време истог рачуна увек исти број.

Према томе аритметика је посебна, кад узима у обзир само посебне бројеве, и општа кад рачуна с општим бројевима.

Евклид је опште бројеве означавао дужима. Диофант (4. столеће по Христу) је употребљавао слова за непознате бројеве у једначини. Јаснији почеци у рачунању словима јављају се код Регионмонтана (1436—1476) и код Стифела († 1567). Још јаче се то опажа код Вијете (1540—1603).

7. Аритметика се у својим истраживањима ослања на дефиниције, аксиоме и теореме.

Дефиниција казује како се нов појам склапа из других ранијих појмова.

Аксиома је исказ, који се услед извршених опажања признаје за истинит али се не може доказати.

Теорема је исказ, чија се тачност изводи спомоћу доказа из других правила која су призната као истинита. Доказ је директан (непосредан), кад се из претпоставке закључцима из познатих правила изводи тврђење; доказ је индиректан (посредан) кад се неко правило потврђује тим, што се показује да претпоставка супротног тврђења води последицама, које се косе с правилима која су већ призната као истинита.

Аритметичке аксиоме

8. 1. Сваки је број једнак самом себи.

Последица. Целина је већа од буди којега свог дела.

2. Једнаки бројеви могу се замењивати (а да се тачност исказа не поремети).

Последица. Кад су две количине једнаке с трећом, једнаке су и међу собом.

$$\begin{array}{c} a = c, \\ b = c. \\ \hline a = b. \end{array}$$

ПРВИ ОДЕЉАК
Сабирање и одузимање

Рачунске радње првога ступња

I. Сабирање апсолутних целих бројева

9. Тумачење. Додати неки број другом броју значи наћи такав број, који ће имати толико јединица колико оба броја укупно имају. Бројеви, који се сабирају, називају се сабирци, резултат сабирања назива се збир (сума).

Да број a треба сабрати с бројем b ставља се између њих знак $+$ (који се изговара „више“ или „*plus*“). Дакле $a + b$ представља аритметички облик задатка, и кад је c резултат сабирања, тада, према чл. 4., вреди једначина $a+b=c$.

Из тумачења јасно је, да се збир c добива, кад се у бројном реду, почињући од a, пође за толико јединица унапред колико је јединица у броју b.

Веза бројна $a+b$, поред тога што исказује задатак сабирања, она представља облик збира, али она исто тако представља и резултат сабирања, т.ј. вредност збира.

Допуне. *1.* Збир је већи ма од којег сабирка.

2. Кад се сабирају именовани бројеви, они морају бити једноимени; збир има исто име, које имају сабирци.

10. Кад треба с каквом бројном везом даље рачунати, она се мора заградити.

Под збиром више бројева разуме се збир, који се добива поступним додавањем, то јест кад се првом броју дода други, добивену збиру трећи итд. Дакле

$$a+b+c+d=[(a+b)+c]+d.$$

Напомена. Сваки број a је збир од a јединица:

$$a=\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\dots+\overset{a}{1}.$$

11. Веза двају или више бројева рачунским знацима назива се израз (облик); он је прост, као $a+b$, кад је састављен од простих бројева, — сложен, кад је бар један од бројева, који улазе у тај израз, опет израз, кад се дакле тек неким рачунањем може да добије. За рачунање с таквим изразом вреди правило: Кад броју a треба додати једно за другим друге бројеве (b, c, d), тада ће се, према пређашњем, сваки потоњи додати ка збиру пређашњих; ред, којим треба операције почети, иде дакле с лева на десно. Ако се хоће други ред, то се назначава заградама.

Најпре се врши рачунање заграђених израза; нпр. $3+(4+7)=3+11$. Заграђује се такође и израз с којим се рачуна, кад се хоће тај израз нарочито да истакне као целина, дакле $(a+b)+(c+d)$.

12. На основу чл. **3.** може се написати:

$$a+b=b+a,$$

исто тако

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=\dots,$$

то јест: Сабирци у збиру могу ићи макојим редом. Или: Вредност збира двају или више бројева не мења се, кад сабирци измењају своја места.

Допуна. На основу досадашњег може се написати:

1. $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$, или
$a+b+c=a+c+b=a+(b+c)$ и

2. $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$ или
$a+(b+c)=a+b+c=a+c+b$.

Како би се ова два обрасца исказала као правило?

13. Тумачење. Кад се у каквом збиру један општи број налази више пута као сабирак, онда се такав збир назначава скраћено тим, што се општи број, главна количина, пише само једанпут а преда њ се стави број, назван сачинитељ (коефицијент), који показује колико се пута општи број јавља као сабирак; нпр.

$$a+a+a+a+a=5a.$$

1 се као коефицијент не пише.

Изрази, који имају исте главне количине, називају се истоимени; иначе су разноимени.

Истоимени се изрази сабирају, кад им се сачинитељи саберу, па се добивени збир узме за сачинитељ заједничке главне количине.

$$ma+na=(m+n)a.$$

Доказ. $ma+na=(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\dots+\overset{m}{a})+(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\dots+\overset{n}{a})=$

$$=\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\dots+\overset{m}{a}+\overset{m+1}{a}+\dots+\overset{m+n}{a}=(m+n)a.$$

Нпр. $a+3a+4a=(1+3+4)a=8a$.

Веза једначина и неједначина сабирањем

14. *1.* Једнаки бројеви сабрани с једнаким дају и резултате једнаке.

Претпост. $a=b$, $c=d$ Доказ. $a+c=a+c$ (1. аксиома)
дакле $a+c=b+d$ (2. аксиома).

Доказати $a+c=b+d$.

2. Једнаки бројеви додани неједнаким дају и резултате неједнаке истога смисла неједнакости.

3. Неједнаки бројеви сабрани с неједнаким истога знака неједнакости дају и резултате неједнаке истога смисла.

2. Претп. $a>b$, $c=d$ — *3.* $a>b$, $c>d$

Доказати $a+c>b+d$. — $a+c>b+d$.

Доказ за *2.)* Нека је v број, који се мора додати ка b, да се добије a, дакле $a = b + v$, тада је према *1)* $a + c = b + v + d = (b + d) + v$, дакле $a + c > b + d$ (чл. **9.** 1,).

Исто се тако изводи и доказ за *3.*

Како гласе горње неједначине, кад се читају с десна на лево, а како правило под 2) кад сабирци промене места?

II. Одузимање апсолутних целих бројева

15. Тумачење. Од броја a одузети број b значи из a као збира двају бројева и из b као једнога сабирка тражити други сабирак. Број a, од којега се одузима, назива се умаљеник, број b, који се одузима, назива се умалитељ; резултат одузимања назива се разлика, што се обележава са $a - b$ („—“ читај: „*minus*“).

Дакле $a - b$ представља аритметички облик задатка, и кад је c резултат одузимања вреди једначина:

$$a - b = c.$$

Кад дакле вреди једначина $a - b = c$, тада вреди и $b + c = a$. Обрнуто: ако постоји $b + c = a$, онда излази да је $c = a - b$ и $b = a - c$. Према томе се разлика двају бројева a и b, то јест $a - b$ добива, кад се одреди онај број јединица који треба прибројати уз b да се добије a, или та се разлика може добити, кад се у бројном реду пође од a уназад за b јединица.

Израз $a - b$, који се сме узети за c, не исказује само задатак сабирања, облик разлике, већ он исказује и резултат одузимања, вредност разлике.

Допуна. Да би се један именован број одузео од другог именована броја, они морају бити једноимени, тада и њихова разлика има исто име.

Последице. Из појма о разлици имамо:

1) $(a - b) + b = a; \quad b + (a - b) = a,$

тј.: Кад се разлици двају бројева дода умалитељ добива се умаљеник.

2) $(a + b) - b = a,$

Кад се од збира двају бројева одузме макоји од њих добива се други број. Јер је a такав број, који додан ка b даје $b + a$ или $a + b$.

3) $a - (a - b) = b,$

Кад се од умаљеника одузме разлика добива се умалитељ. Јер је $b + (a - b) = a$.

Допуна. Кад се обрасци 1) и 2) напишу обрнуто биће:

$$a = (a - b) + b,$$
$$a = (a + b) - b,$$

што значи: сваки број *(a)* остаје непромењен, кад му се неки број *(b)* дода и од резултата исти број одузме. Према томе су сабирање и одузимање две супротне рачунске радње.

16. Вредност разлике се не мења, кад се и умаљеник и умалитељ повећају за исти број, а тако исто и кад се умаљеник и умалитељ смање за исти број:

1. $a - b = (a + m) - (b + m);$ 2. $a - b = (a - m) - (b - m).$

Доказ. 1. $a - b = c$, дакле

$$\begin{array}{r} a = b + c \\ m = m \\ \hline a + m = (b + m) + c \end{array}$$

одавде, према чл. **15.** 2 имамо:

$$(a + m) - (b + m) = c$$

дакле је $c = a - b = (a + m) - (b + m)$.

2. Други део доказа последица је првога као обрнути случај.

17. Одузимање истоимених израза врши се као и сабирање (чл. **13**): кад се одузму само њихови сачинитељи, па се добивена разлика узме за сачинитељ заједничке главне количине.

$$ma - na = (m - n)\, a.$$

Нпр. $7a - 3a = (7 - 3)\, a = 4a$.

18. Веза бројева са збировима и с разликама.

1. $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c).$
2. $(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c).$
3. $(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c).$

Ове се једначине могу исказати као правила:

1. Од збира двају бројева одузима се трећи број, кад се он одузме ма од којег сабирка. Обрнуто, кад се једначина чита с десна на лево тада имамо: Разлика се додаје неком броју, кад се умаљеник дода а умалитељ одузме, ма којим редом.

За доказ треба применити чл. **15.** 1, па онда доп. чл. **12.** 1, дакле $[(a - c) + b] + c = [(a - c) + c] + b = a + b$.

2. Разлика двају бројева биће већа или што је умаљеник већи, или што је умалитељ мањи. Према томе: Разлици се додаје неки број, кад се дода умаљенику, или кад се

одузме од умалитеља. Обрнуто, кад се једначина чита с десна на лево, тада имамо правило: Разлика се одузима, кад се умањеник одузме, а умалитељ дода, макојим редом.

Доказ. Први део је обрнути случај првога дела пређашњега правила. Други део излази из првога, кад се од умањеника и од умалитеља одузме c.

3. Нека ученици, сличним размишљањем, изведу правила и доказ за једначине 3).

Допуна. Спомоћу изведених правила могу се разумети и ова два задатка:

$$1)\ (a-b)+(c-d)=[(a-b)+c]-d$$
$$=[(a+c)-b]-d=(a+c)-(b+d).$$
$$2)\ (a-b)-(c-d)=[(a-b)-c]+d$$
$$=[a-(b+c)]+d=(a+d)-(b+c).$$

19. Кад треба извршити означене радње с више бројева везаних знацима $+$ и $-$ и то оним редом, како бројеви један за другим иду, с лева на десно, тада се заграде могу изоставити, нпр.

$$1)\ [(a-b)+c]-d=a-b+c-d.$$
$$2)\ [(a-b)-c]-d=a-b-c-d.$$

Израз, у којем има више бројева везаним знацима сабирања и одузимања, назива се полином (вишечлан израз). Поједини бројеви са својим знацима називају се чланови полинома и то бројеви са знаком $+$ чланови за додавање а бројеви са знаком $-$ чланови за одузимање. Двочлани израз назива се бином а трочлани — трином. Израз од једног члана назива се моном.

Последице. 1. У полиному је ред чланова сасвим произвољан.

Јасно је према чл. **18.**

2. Сваки се полином може претворити у разлику, којој је умањеник збир чланова за додавање, а умалитељ збир чланова за одузимање.

$$a+b-c+d-e=a+b+d-c-e$$
$$=(a+b+d)-(c+e)\ \text{(чл. \textbf{18.} 3).}$$

На основу овога врши се свођење једноликих израза. Нпр.

$$6a-5a-3a+8a-2a=(6a+8a)-(5a+3a+2a)$$
$$=14a-10a=4a.$$

20. Из досадашњих правила јасно је, да за додавање и одузимање полинома вреде обрасци:

$$1)\ a+(b+c-d+e-f)=a+[(b+c+e)-(d+f)]$$
$$=(a+b+c+e)-(d+f)=a+b+c+e-d-f,$$
$$=a+b+c-d+e-f,$$
$$2)\ a-(b+c-d+e-f)=a-[(b+c+e)-(d+f)]$$
$$=a-(b+c+e)+(d+f)=a-b-c-e+d+f$$
$$=a-b-c+d-e+f,$$

то јест: 1) Полином се додаје броју (или и полиному), кад се сви његови чланови допишу уз број (полином). 2. Полином се одузима од броја (полинома), кад се сви његови чланови допишу уз број (полином) с промењеним знацима.

Применом ова два правила изводи се поступак за ослобођавање алгебарских израза од заграда:

1. После знака $+$ заграда се (заједно са знаком) може просто изоставити; обрнуто, може се заградити колико се хоће чланова, кад сви заграђени чланови задрже своје знаке а пред заграду дође знак $+$.

2. После знака $-$ заграда се с тим знаком сме изоставити кад сви разграђени чланови промене своје знаке; обрнуто, може се заградити колико се хоће чланова а пред заграду ставити знак $-$, кад сви заграђени чланови добију супротне знаке. Нпр.

$$1)\ a-\{b+[c-(d+e)]\}=a-\{b+[c-d-e]\}$$
$$=a-\{b+c-d-e\}=a-b-c+d+e.$$
$$2)\ a-\{b+[c-(d+e)]\}=a-b-[c-(d+e)]$$
$$=a-b-c+(d+e)=a-b-c+d+e.$$

У првом случају најпре је ослобођавано од унутрашњих заграда, а у другом најпре од спољашњих. За почетнике је лакше радити по првом начину.

$$3)\ a+3b-4c+2d=a+(3b-4c+2d)$$
$$=(a+3b)-(4c-2d)$$

$$4)\ a+b-c+d=a+b-(c-d)=a+[b-(c-d)].$$

Веза једначина и неједначина одузимањем.

21. *1.* Једнаки бројеви одузети од једнаких бројева дају и резултате једнаке.

Ако је $a=b$ и $c=d$, тада мора бити и $a-c=b-d$.

Јасно је према чл. **14.,** 1.

2. Једнаки бројеви одузети од неједнаких дају и резултате неједнаке истога смисла.

Претпост. $a > b$ **Доказ.** $a = b + v.$
$c = d$ $c = d$
Доказати $a - c > b - d$ $a - c = (b - d) + v$
дакле је $a - c > b - d.$

3. Неједнаки бројеви одузети од једнаких дају резултате неједнаке супротнога смисла.

Претпост. $a = b$ **Доказ.** $a = b$
$c > d$ $c = d + v$
Доказати $a - c < b - d$ $a - c = (b - d) - v$
дакле је $a - c < b - d.$

III. Прво проширење бројне области.

1. Нула, позитивни и негативни бројеви.

22. Досада су писмена $a, b, c, \ldots$ означавала само такве целе бројеве који су постајали додавањем броја 1. Стога се при одузимању, дакле код разлике $a - b = c$, морало ограничавати на случајеве кад је било $b < a$.

Узмимо сад да је у оне разлике $b = a$, дакле да имамо разлику $a - a$; вредност ове нове разлике наћи ће се, кад се од умањеника a, у бројном реду, пође за a јединица уназад, па ће се доћи на почетну тачку бројнога реда. На тај начин, противно досадашњим резултатима одузимања, сада нема никакве удаљености од почетне тачке бројења. Ово нема̀ње раздаљине од почетка обележава се нулом (о); стога се ставља:

$$a - a = o,$$

где је нула представљена као разлика, у које је умањеник једнак с умалитељем. Исто је тако и $b - b = c - c = o$, као год што је и разлика свака два једнака бројна израза, дакле $(a + b) - (b + a) = o$, $(a - b) - (a - b) = o$, $am - am = o$, итд. Почетна тачка бројнога реда обележава се од сада са o.

Почем је o резултат одузимања а оно је обрнута радња сабирању, то јест такве радње, која се увек може извршити с природним бројевима, то се, по начелу сталности бројева, и нула сме сматрати као број у проширеном смислу, у колико се може доказати да радње с нулом не воде резултатима, који би били противни правилима за природне бројеве.

У том смислу с новим се бројем рачуна као да је природни број, па се и рачунска радња дефинише, према резултату, кад се може употребити. (Принцип одржавања рачунских радња̑).

По чл. **15.** 2 имали смо $(a + b) - b = a$, одавде је $a + (b - b) = a$, дакле $a + o = a \ldots$ 1)

Имали смо да је $(a - b) + b = a$ одавде (чл. **18,** 2) $a - (b - b) = a$, то јест $a - o = a \ldots$ 2)

Како гласе обрасци 1) и 2)?

Из обрасца 1) имамо $o + a = a \ldots$ 3).

Исто тако је $o + o = o \ldots$ 4),

јер је $(a - a) + (b - b) = (a + b) - (a + b) = o.$

Из овога се види, да се сабирање може извршити и онда, кад је један (макоји) сабирак o; збир је тада једнак с другим сабирком. Код одузимања може засад само умалитељ бити o. За случај, кад је умањеник o потребно је ново проширење појма о броју (види чл. 24).

23. Када је у разлике $a - b$ умалитељ већи од умањеника, тада је очевидно, да није могућно одузети свих b јединица умалитељевих, већ само онолико, колико их је у умањеника a и да стога мора нешто јединица претећи. То се види из примера:

Неки трговац уложи у своју радњу 4000 динара, па крајем године претрпи штету од 6000 динара. Колики је тада био његов капитал?

$$\text{Очевидно } 4000 - 6000 = 4000 - (4000 + 2000)$$
$$= (4000 - 4000) - 2000$$
$$= 0 - 2000.$$

Дакле је капитал сада (0—2000) динара, или што се краће пише — 2000 (читај: „minus 2000 динара“). Овде капитал или имовина представља у ствари дуг од 2000 дин. У алгебри се при том каже „негативна“ имовина.

На сличан начин, вредност сваке разлике у које је умалитељ већи од умањеника представља број, који је испод нуле. Тако је

$$4 - 5 = 0 - 1 = -1, \qquad 6 - 8 = 0 - 2 = -2,$$
$$2 - 5 = 0 - 3 = -3, \qquad 3 - 7 = 0 - 4 = -4.$$

Свака разлика, у које је умањеник o а умалитељ број већи од o, назива се негативан број; ред негативних бројева био би дакле:

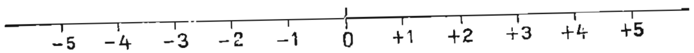
$$-1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -5, \ldots$$

Насупрот овом, сви бројеви с којима смо се до сада бавили називају се позитивни бројеви а они се обележавају знаком $+$, дакле $+1, \ +2, \ +3, \ +4, \ +5, \ldots$

24. Проширени бројни ред. Дефиницијом нових бројева дато им је већ и место у бројном реду. Тако $0=1-1$ мора ићи испред броја 1; тако исто: $-1=0-1$ мора ићи испред o; $-2=0-2$ — испред броја -1, итд. Тако проширен бројни ред нема ни почетка ни краја.

Према овом, да би се на бројној линији добила тачка која одговара броју o, треба поћи од тачке, која одговара броју 1, уназад за једну дужинску јединицу. Тако се исто добива тачка која одговара броју $-n$, кад се пође од тачке o за n дужинских јединица уназад.

Бројна линија простире се сада у оба правца у бескрајност.



Обично се од o десно ређају позитивни бројеви а лево негативни.

Знацима обележени бројеви називају се релативни или алгебарски бројеви, насупрот бројевима без знакова, који се називају апсолутни бројеви.

Обично се знак $+$ изоставља свуда, где се не ремети смисао и свеза у рачунању.

И у проширеном бројном реду може се вршити сабирање и одузимање. Тако, уочимо на бројној линији тачку $+3$ и пођимо од ње десно за две дужинске јединице, тада ћемо доћи до тачке обележене са $+5$; у ствари, овде је извршено сабирање $(+3)$ са $(+2)$, те је добивено $(+5)$. Исто тако, кад се пође од тачке обележене са (-3) у лево за две дужинске јединице, доћи ће се на тачку обележену са (-5); овде је дакле извршено сабирање: $(-3)+(-2)=-5$. Најзад, кад се пође од тачке $(+3)$ у лево за пет дужинских јединица доћи ће се на тачку обележену са (-2), то јест, сад је извршено одузимање: $3-5=-2$.

Бројеви, који имају једнаке апсолутне вредности а различне знаке, називају се супротни бројеви. Тако је број -5 супротан броју $+5$, а броју $+a$ супротан је број $-a$.

Јасно је, да је збир свака два супротна броја o. Дакле $(-5)+(+5)=o$ и $(+a)+(-a)=o$.

2. Сабирање и одузимање алгебарских целих бројева

25. Знамо да је $9-15=-(15-9)=-6$; исто тако је и уопште за $b>a$: $a-b=-(b-a)$.

Ово се потпуно слаже с правилом о реду сабирака у збиру, јер је $a-b=-b+a=-(b-a)$. Кад тај закон вреди, онда за алгебарске бројеве вреди и ово:

1. $a+(-c)=a+(o-c)=(a+o)-c=a-c$,

то јест: Додати негативан број исто је што и одузети његову апсолутну вредност.

2. $a-(-c)=a-(o-c)=(a-o)+c=a+c$,

то јест: Одузети негативан број исто је што и додати његову апсолутну вредност.

Допуна. Почем је, према 1), $a-(+c)=a+(-c)$, то се друго правило може исказати и овако: Алгебарски се број одузима, кад се супротни број дода.

Применом ова два правила изводе се оваква правила за сабирање алгебарских бројева:

а) Два једнако означена броја сабирају се, кад се пред збир њихових апсолутних вредности стави заједнички знак.

$$(+a)+(+b)=+(a+b)=a+b.$$
$$(-a)+(-b)=(o-a)+(o-b)=(o+o)-a-b=o-a-b$$
$$=o-(a+b)=-(a+b).$$

2. Два неједнако означена броја сабирају се, кад се пред разлику њихових апсолутних вредности стави знак умањеников.

$$(+a)+(-b)=a-b=+(a-b) \text{ за } a>b$$
$$=-(b-a) \text{ за } b>a.$$
$$(-a)+(+b)=(o-a)+b=(o+b)-a=+(b-a) \text{ за } b>a$$
$$=-(a-b) \text{ за } a>b$$

Допуна. Негативан број $-a$ представља збир од a негативних јединица.

$$-a=(-\overset{1}{1})+(-\overset{2}{1})+\ldots\ldots+(-\overset{a}{1}).$$

26. Збир, којега су сабирци алгебарски бројеви, назива се алгебарски збир; нпр.

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(-e).$$

Из пређашњих правила излази непосредно:

1. Сваки се полином може претворити у алгебарски збир, кад се рачунски знаци сматрају као знаци појединих чланова, па се бројеви узму као сабирци.

$$a-b-c+d=(+a)+(-b)+(-c)+(+d).$$

2. Обрнуто: Сваки се алгебарски збир може претворити у полином, кад се изоставе заграде и знаци сабирања, па се чланови са својим знацима напишу један за другим.

$$(+a)+(-b)+(-c)+(+d)=a-b-c+d.$$

На тај начин се полином и алгебарски збир разликују само по схватању, али не по начину писања и по вредности.

27. Оба правила о сабирању и одузимању збира с погледом на чл. **25.** сада гласе:

1. Полином се додаје броју или полиному, кад се поједини његови чланови са својим знацима поступно додаду.

$$(a+b-c)+(a-b-c)=a+b-c+a-b-c=2a-2c.$$

Или практичније

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ a-b-c \\ \hline 2a \quad -2c \end{array}$$

2. Полином се одузима од броја или од полинома, кад се сви његови чланови са супротним знацима додаду. Нпр.

$$(2a-b+3c)-(a-2b+4c)=2a-b+3c-a+2b-4c=a+b-c.$$

Или практичније

$$\begin{array}{l} 2a-\ \ b+3c \\ \ \ a-2b+4c \\ \ \ -\ \ +\ \ - \\ \hline \ \ a+\ \ b-c. \end{array}$$

28. Почем је код апсолутних бројева $a-(b+n)<a-b<(a+c)-b$, то, кад се узме $b=a$, мора вредети неједначина

$$-n<o<+c,$$

то јест: 1.) Сваки је негативан број мањи од нуле, а нула је мања од свакога позитивна броја.

Исто тако, за апсолутне бројеве вреди

$$a-(b+m+n)<a-(b+m), \text{ то за } b=a \text{ мора вредети}$$
$$-(m+n)<-m,$$

дакле: 2.) Од два негативна броја мањи је онај чија је апсолутна вредност већа.

29. Уместо да се сабирањем и одузимањем везују апсолутне вредности супротно именованих бројева, као што су: имовина и дуговање, добит и штета, у супротним правцима пређени путеви, време пре и време после Христова рођења, температуре изнад и испод нулте тачке итд., може се један од њих увући у рачун као позитиван број а други као негативан, па оба везати рачуном исте врсте. Отуда потиче већа корист, што знак резултата показује име или што допушта тумачење које одговара задатку.

Vieta је увео имена „позитивно" и „негативно". Стари Грци нису знали за негативне бројеве. Descartes (+ 1650) је први под општим бројем a подразумевао позитиван или негативан број. Знаци $+$ и $-$ јављају се прво код Leonardo da Vinci; пре њега употребљавана су почетна слова p и n. Знак једнакости увео је Recorde (1552), знак неједнакости Harriot, заграде — Girard (1629).

ДРУГИ ОДЕЉАК

Множење и дељење

Рачунске радње другога ступња

I. Множење целих бројева

30. Тумачење. 1. Кад су у формалном збиру сабирци једнаки тада се такав збир обележава тим, што се уз један сабирак ставља њихов број везан знаком ($\times$) или едном тачком (.), дакле

$$4+4+4=4\times 3, \quad \overset{1}{\breve{a}}+\overset{2}{\breve{a}}+\overset{3}{\breve{a}}+\ldots\overset{b}{\breve{a}}=a.b,$$

а изговара се 4 помножено са 3 или 4 три пута (погрешно је 4 пута 3); тако исто, a помножено са b или a бе пута. Овакав начин добивања новога броја из датих бројева a и b назива се множење.

Помножити број a бројем b значи начинити збир од b сабирка, од којих је сваки једнак с бројем a.

Број a, који показује вредност сваког сабирка, назива се множеник, број b, који казује број сабирака — множитељ; резултат множења назива се производ. Према томе је производ збир једнаких сабирака.

$a.b$ означава аритметички облик задатка, и ако је c производ, тада вреди једначина:

$$a.b=c.$$

Веза $a.b$, која се сме узети за c не исказује само задатак множења (формалан производ), већ и сâм резултат, вредност производа.

Знак множења сме се изоставити при писању уз општи број и пред заградом; у првом случају и при изговарању. Тако се уместо $4.a$ пише $4a$ а изговара се четири a, уместо $a.b$ пише се ab а изговара се a be, уместо $5.(4+9)$ може се написати $5(4+9)$ али се изговара: пет помножено збиром четири plus девет.

Множитељ мора увек бити неименован, апсолутан број (од o и од 1 различан); ако је множеник именован број, тада и производ има исто име.

Последице. *a)* Кад је множеник 1, тада је производ једнак с множитељем.

b) Кад је множеник o, тада је и производ o.

$$a)\quad 1.a=\overset{1}{\breve{1}}+\overset{2}{\breve{1}}+\ldots\overset{a}{\breve{1}}=a.$$

$$b)\quad o.a=o+o+\ldots\overset{a}{\breve{o}}=o.$$

Тумачење. 2. Под производом више бројева разуме се производ, који се добива поступним множењем, т.ј. кад се производ прва два броја помножи трећим, нови производ четвртим бројем итд. Према томе је

$$a.b.c=(ab).c,$$
$$a.b.c.d=[(ab).c].d.$$

31. Збир се може помножити неким бројем, кад се сваки сабирак тим бројем помножи, а добивени се производи саберу.

$$(a+b).m=am+bm.$$

Доказ. $(a+b).m=(a\overset{1}{\breve{+}}b)+(a\overset{2}{\breve{+}}b)+\ldots+(a\overset{m}{\breve{+}}b)$

$$=(\overset{1}{\breve{a}}+\overset{2}{\breve{a}}+\ldots+\overset{m}{\breve{a}})+(\overset{1}{\breve{b}}+\overset{2}{\breve{b}}+\ldots+\overset{m}{\breve{b}})=am+bm.$$

32. 1. Вредност производа се не мења, кад множеник и множитељ промене своја места. (Размештајни закон множења).

$$a.b=b.a.$$

Доказ. $a.b=(1+1+\ldots+\overset{a}{\breve{1}}).b=1.b+1.b+\ldots+1.\overset{a}{\breve{b}}.$

(чл. **31**) $=b+b+\ldots+\overset{a}{\breve{b}}$ (чл. **30**) $=b.a.$

Допуне. 1. Због размештајног закона множеник и множитељ добивају заједничко име чинитељи.

2. Према истом закону оправдано је, што се коефицијент уз главну количину пише на прво место, ма да је он множитељ, дакле, уместо $a.3$ пише се $3a$.

3. Да би се задржали производи $a.1$ и $a.o$, који, према дефиницији, не значе ништа, мора се и на њих применити тај закон.

$$a)\quad a.1=1.a=a;\qquad\qquad b)\quad a.o=o.a=o.$$

Ова два правила заједно с правилима *a)* и *b)* у чл. **30** гласе сад овако:

a) Производ, чиј је један чинитељ 1, једнак је с другим чинитељем.

b) Производ је o, кад му је један чинитељ o.

2. Вредност производа се не мења имао он три или и више чинитеља, кад се они узму макојим редом.

Према размештајном закону за два чинитеља имамо:

$$(a.b).c=(b.a).c=c.(a.b)=c.(b.a).$$

Остаје још да се докаже:

$$(a.b).c=(a.c).b=a.(b.c).$$

Доказ. $a)\quad (a.b).c=(a+a+\ldots+\overset{b}{\breve{a}}).c$

$$=ac+ac+\ldots+\overset{b}{\breve{ac}}\text{ (чл. 31)}=(ac).b,$$

$$b)\quad (a.b).c=(b.a).c=(bc).a\text{ (према } a))=a.(bc)$$

што значи: Производ се множи неким бројем, кад се (само) један чинитељ помножи тим бројем. Обрнуто: Број се множи производом, кад се помножи једним чинитељем, добивени производ другим, итд., макојим редом.

Почем се производ од четири и више чинитеља може представити као производ од три чинитеља $(abcd=(ab).c.d)$, то се применом ова два правила може сваки чинитељ довести на које се хоће место.

33. Кад су чинитељи у производу једнаки, такав се производ пише скраћено; тако се пише a^2 за $a.a$, a^3 уместо $a.a.a$, a^5 место $a.a.a.a.a$ итд. а чита се: „a на други“, „a на трећи“, „a на пети“ итд. Бројни облици као a^2, a^3,... називају се степени, a је основа или корен степенов, 2, 3,... називају се изложитељи; a^2 нарочито се назива и квадрат, a^3 — куб од a.

Кад у каквом полиному има више степена исте основе, тада се обично ради лакшег прегледа, поједини чланови уређују по изложитељима степена. Тако, кад на прво место дође највиши степен, па онда нижи, полином је уређен по степенима што опадају; у противном случају полином је уређен по степенима што расту. Нпр. израз

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

уређен је по степенима од x што опадају и у исто време по степенима од y што расту.

34. Степени исте основе множе се, кад се заједничка основа степенује збиром изложитеља.

$$a^m . a^n = a^{m+n}.$$

Доказ. $$a^m . a^n = (\overbrace{a}^{1}.\overbrace{a}^{2}.\overbrace{a}^{3}\ldots\overbrace{a}^{m}).(\overbrace{a}^{1}.\overbrace{a}^{2}\ldots\overbrace{a}^{n})$$

$$= \overbrace{a}^{1}.\overbrace{a}^{2}\ldots\overbrace{a}^{m}.\overbrace{a}^{m+1}\ldots\overbrace{a}^{m+n} = \overbrace{a}^{m+n}.$$

Допуна. Почем је према дефиницији $a^n . a = a^{n+1}$, то да би пређашње правило вредело, мора бити $a = a^1$; то значи: Први степен неког броја једнак је себи самом.

35. Образац у чл. **31.** може се написати:

$$1)\qquad m.(a+b) = ma + mb = am + bm,$$

то јест: Број се множи збиром, кад се помножи сваким сабирком (и добивени производи саберу). Обрнуто: Производи, који имају један чинитељ заједнички, могу се сабрати, кад се збир незаједничких чинитеља помножи заједничким чинитељем (издвајање заједничког чинитеља).

2. Разлика се може помножити неким бројем, кад се и умањеник и умалитељ помножи тим бројем и од првог производа одузме други.

$$(a-b).m = am - bm.$$

Доказ је сличан доказу у чл. **31.**

Кад се ова једначина чита с десна на лево, тада вреди правило: Кад два производа имају по један чинитељ заједнички могу се одузети, кад се разлика незаједничких чинитеља помножи заједничким чинитељем (Издвајање заједничког чинитеља).

Зацело је $m.(a-b) = (a-b).m = am - bm,$

то јест: Број се множи разликом, кад се помножи и умањеником и умалитељем, па се од првог производа одузме други.

36. Правило за множење бинома проширује се на множење два полинома и гласи: Полином се множи полиномом, кад се сваки члан једног полинома помножи сваким чланом другога, па се они производи додаду који имају једнаке знаке а одузму они производи чији чинитељи имају различне знаке.

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd.$$
$$(a+b)(c-d) = (a+b)c - (a+b)d = ac + bc - (ad + bd)$$
$$= ac + bc - ad - bd.$$

$$(a-b)(c+d) = (a-b)c + (a-b)d = ac - bc + ad - bd.$$
$$(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d = ac - bc - (ad - bd).$$
$$= ac - bc - ad + bd.$$

При множењу полинома који су уређени по степенима исте основе биће и делимични производи тако исто уређени. Ради лакшега свођења пишу се делимични производи тако да истоимени чланови дођу једни испод других. Нпр.

$$\begin{array}{rl}
4a^2 - 3a - 4 & \text{множеник} \\
3a^2 - 7a + 5 & \text{множитељ} \\
\hline
12a^4 - 9a^3 - 12a^2 \qquad\qquad & \\
-28a^3 + 21a^2 + 28a \qquad & \\
+20a^2 - 15a - 20 & \\
\hline
12a^4 - 37a^3 + 29a^2 + 13a - 20 & \text{производ.}
\end{array}$$

Допуна. Неколики нарочити случајеви множења:

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2,$
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2,$ то јест:

Квадрат збира или квадрат разлике два броја једнак је са збиром квадрата тих бројева повећаним или умањеним за њихов удвојени производ.

3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$ то јест:

Производ збира два броја и њихове разлике једнак је с разликом квадрата тих бројева.

4. $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + {}$
$+ 3ab^2 + b^3.$

5. $(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + {}$
$+ 3ab^2 - b^3.$

Веза једначина и неједначина множењем.

37. 1. Једнаки бројеви помножени једнаким дају и резултате једнаке.

Ако је $a = b$ и $c = d$, тада је и $ac = bd$. Доказ као у чл. **14,** 1.

2. Једнаки бројеви помножени неједнаким дају резултате неједнаке истога смисла.

Претп.	$a=b$	**Доказ.**	$a=b$
	$c>d$		$c=d+v$
Доказати	$ac>bd.$		$ac=bd+bv$

дакле $ac>bd.$

3. Неједнаки бројеви помножени неједнаким истога знака неједнакости дају и резултате неједнаке истога смисла.

Ако је $a>b$ и $c>d$, тада је и $ac>bd$.

Доказ је сличан пређашњему.

Множење алгебарских целих бројева.

38. Кад је множитељ позитиван број $+n$, дакле једнак с апсолутним бројем n, тада је према општем тумачењу множења у чл. **30**:

$$(+a).(+n)=+an$$

$$(-a).(+n)=(-a)+(-a)\ldots\ldots+(\overset{n}{-a})$$

$$=-(a+a+\ldots\ldots+\overset{n}{a})=-an.$$

Напротив, множење негативним бројем $-n$ према горњем тумачењу нема никаква смисла. Да би се и за тај случај добила дефиниција, то ће се, по принципу одржавања операцијоних закона, применити правило у чл. **35,** 2, јер је сваки негативан број разлика. Зато је:

$$(+a).(-n)=(+a).(o-n)=a.o-a.n=o-an=-an,$$

$$\text{и } (-a).(-n)=(-a).(o-n)=-a.o-(-a.n)=o-(-an)=o+an=+an.$$

Помножити, дакле, негативним бројем значи супротни множеник помножити апсолутном вредности множитељевом.

Досадашњи резултати дају овакав преглед:

$$(+a).(+n)=+an, \qquad (-a).(+n)=-an,$$

$$(-a).(-n)=+an, \qquad (+a).(-n)=-an,$$

према овоме имамо правило:

Два једнако означена чинитеља дају позитиван производ, а два неједнако означена чинитеља дају негативан производ.

Последице. 1. Производ двају алгебарских бројева не мења се, кад они измењају своја места.

2. Паран број негативних чинитеља даје позитиван производ, а непаран број негативних чинитеља даје негативан производ.

3. Паран степен с негативном основом позитиван је; непаран степен с негативном основом негативан је.

$$(-a)^{2n}=a^{2n};\ (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

II. Дељење целих бројева.

39. Множењем добивена једначина $bc=a$ доводи на решавање два нова задатка: 1. кад је дато a и b одредити број c, 2. кад је познато a и c тражити непознат број b. Та два задатка решавају се четвртом рачунском радњом, дељењем, које је стога обрнута радња множењу.

Тумачење. Поделити број a бројем b значи из познатог производа *(a)* двају бројева и једнога његова чинитеља *(b)* тражити други чинитељ. Познати производ a назива се дељеник, познати чинитељ b — делитељ а тражени чинитељ количник. То се бележи $a:b$ или $\frac{a}{b}$ а изговара се: „a подељено са b“ или само: „a са b“. Према томе $a:b$ или $\frac{a}{b}$ означава аритметички облик дељења, и кад је c резултат дељења вреди једначина

$$a:b=c \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=c.$$

Количник двају бројева јесте дакле онај трећи број, који помножен делитељем даје дељеник, то јест: $a=bc$.

Обрнуто, кад је $bc=a$, тада је

$$1)\quad a:b=c \quad \text{и} \quad 2)\quad a:c=b$$

Ако је производ a, дакле и множеник b, именован број, тада једначина 1) решава питање: Колико се пута делитељ садржава у дељенику. Дељење је у том случају мерење, количник је неименован број. Дељеник и делитељ су или оба неименована или оба једнако именована броја. Нпр. $24m:6m=4$.

Једначина 2) т.ј. кад је познат производ и множитељ, решава питање: Колики је онај део, који треба узети c пута да се добије дељеник. У овом случају имамо пра̂во дељење; количник је једноимен с дељеником (кад је именован број) а делитељ је неименован број. Нпр $24m:4=6m$.

Према овом дељење се може извршити на два начина:

a) Одузме се најпре делитељ од дељеника, затим од свакога добивена остатка толико пута, колико је год могућно; број, који показује, колико је пута одузимано, јесте количник.

b) Тражи се у бројном реду онај број, који узет толико пута колико делитељ показује, даје дељеник.

Почем је ред чинитеља при множењу произвољан добива се код неименованих бројева у оба случаја исти количник. Множење дакле има само једну обрнуту рачунску радњу — дељење.

Допуна. Дељење се може само онда извршити, кад је дељеник, према дефиницији, нека множина делитељева. То ће се у правилима што долазе увек претпостављати.

40. Последице. 1. **(Дефиницијони образац).** Кад се количник два броја помножи делитељем, добива се дељеник.

$$(a:b).b=a; \qquad b.(a:b)=a.$$

2. Кад се дељеник подели количником, добива се делитељ.

$$a:\frac{a}{b}=b.$$

3. Кад се производ два броја подели једним својим чинитељем, добива се други чинитељ.

$$ab:a=b; \qquad ab:b=a.$$

Допуна. Из 1. и 3. имамо:

Број *(a)* се не мења, кад се неким бројем *(b)* помножи и резултат истим бројем подели, макојим редом.

$$a=(a.b):b; \qquad a=(a:b).b.$$

Према томе су множење и делење две супротне радње.

Из $a.1=a$ следује:

$$1. \quad a:a=1; \qquad 2. \quad a:1=a.$$

4. Сваки број подељен самим собом даје за количник 1.

5. Сваки број подељен јединицом остаје непромењен.

Из $a.o=o$ излази:

1. $o:a=o$; 2. $o:o=a$, где a значи макоји број.

6. Количник, којему је дељеник нула а делитељ различит од нуле, једнак је с нулом.

7. Количник, којему је и дељеник и делитељ нула, неодређен је.

Такав се количник не може подвести под рачунске законе, почем може имати сваку произвољну вредност.

8. Количник, којега је дељеник од нуле различит а делитељ му је нула, немогућан је.

$a:o$ или $\frac{a}{o}$, кад a није нула, немогућан је, јер нема броја, који помножен нулом даје a.

Из 7. и 8. излази. Не сме се рачунати с количником, чиј је делитељ нула.

41. Промена облика у количника. Вредност количника се не мења, кад се и дељеник и делитељ истим бројем помноже; исто тако и кад се оба истим бројем поделе.

$$1. \quad \frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.m}; \qquad 2. \quad \frac{d}{e}=\frac{d:m}{e:m}.$$

Доказ. 1. Из $\frac{a}{b}=c$ имамо $a=bc$,

и $am=(bm).c$ (чл. **32.**)

одавде је $c=\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

2. Други део доказа обрнут је првому.

42. Производ се дели неким бројем, кад се макоји чинитељ тим бројем подели (а количник другим чинитељем помножи).

$$\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c}.$$

Доказ. Ако је $\frac{a}{c}.b$ тачан количник бројева ab и c, он мора дати дељеник ab, кад се помножи делитељем c.

$$a)\ \left\{\frac{a}{c}.b\right\}.c=\left\{\frac{a}{c}.c\right\}.b\ (\text{чл. } \mathbf{32,}\ a))=ab\ (\text{чл. } \mathbf{40,}\ 1).$$

$$b)\ \left(a.\frac{b}{c}\right).c=a.\left\{\frac{b}{c}.c\right\}=a.b.$$

c) Кад се горњи образац прочита с десна на лево тада се чита правило: 1) Количник се множи неким бројем, кад се дељеник помножи; 2) Количником се множи, кад се дељеником помножи а делитељем подели.

Али, кад се на десну страну обрасца $\frac{a}{c}.b=\frac{ab}{c}$ примени чл. **41,** 2 делећи и дељеник и делитељ са b биће:

$$\frac{a}{c}.b=\frac{ab}{c}=\frac{a}{c:b},$$

то јест: Количник се множи неким бројем, кад се делитељ тим бројем подели.

43. Количник се дели неким бројем, кад се дељеник подели, или кад се делитељ помножи.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{bc}.$$

Доказ. $a)\ \frac{a:c}{b}.c=\frac{(a:c).c}{b}=\frac{a}{b}.$

b) Следује из *a)* према чл. **41.**

Обрнуто, кад се образац чита с десна на лево, добива се правило: Број се дели производом, кад се подели једним чинитељем, добивени резултат другим, макојим редом.

Кад се образац у чл. **42,** *c)* напише обрнуто биће:

$$a:(c:b)=\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}.b,\ \text{то јест:}$$

Број се може поделити количником, кад се дељеником подели а делитељем помножи, макојим редом.

Последица. Кад треба једно за другим извршити више операција другога ступња, свеједно је макојим се редом оне извршиле.

44. Степени исте основе могу се поделити, кад се заједничка основа степенује разликом изложитеља дељеникова и делитељева.

$$a^m:a^n=a^{m-n}.$$

Доказ. Да би се овде дељење могло извршити, мора се претпоставити, да је m веће од n. Стога се ставља $m=n+v$, или $m-n=v$, тада је

$$a^m:a^n=a^{n+v}:a^n=a^n a^v:a^n\ (\text{чл. } \mathbf{34.}).$$
$$=a^v\ (\text{чл. } \mathbf{40,}\ 3))=a^{m-n}.$$

45. 1. Збир се може бројем поделити, кад се сваки сабирак тим бројем подели и добивени производи сабере.

$$\frac{a+b}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

Доказ. $\left\{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right\}.m=\frac{a}{m}.m+\frac{b}{m}.m\ (\text{чл. } \mathbf{31.})=a+b\ (\text{чл. } \mathbf{40,}\ 1).$

2. Обрнуто: Количници с једнаким делитељима сабирају се, кад се збир њихових дељеника подели заједничким делитељем.

46. 1. Разлика се може неким бројем поделити, кад се и умањеник и умалитељ тим бројем подели и од првог количника одузме други.

$$\frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Доказ. $\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\right).m=\frac{a}{m}.m-\frac{b}{m}.m=a-b.$

2. Обрнуто: Количници с једнаким делитељима одузимају се, кад се разлика њихових дељеника подели заједничким делитељем.

Допуна. При дељењу полинома неким бројем, ова се правила поновљено примењују.

47. Дељење два полинома. Кад је задато да се одреди количник $\frac{A}{B}$, где су A и B полиноми, треба их пре свега уредити тако да оба опадају или да расту. Затим, почем је дељеник A збир производа који постају множењем целог делитеља B појединим члановима количниковим, то је први члан полинома

A производ из првог члана полинома B и првог члана количникова. Стога се први члан количника q налази, кад се први члан дељеников подели првим чланом делитељевим. Кад је затим производ из целог делитеља и првог члана количникова одузет од дељеника, тада је први члан остатка, према свом постанку од A, производ из првог члана делитељева и другог члана количникова. Зато се други члан количника налази, кад се први члан (уређена) остатка подели првим чланом делитељевим, итд.

Примери. *1.* $(3a^2-4ab-4b^2):(3a+2b)=a-2b$

$$\begin{array}{l} 3a^2+2ab \\ -\quad - \\ \hline -6ab-4b^2 \\ -6ab-4b^2 \\ +\quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

2. $[x^3-(a+b)^3]:[x-(a+b)]=x^2+(a+b)x+(a+b)^2$

$$\begin{array}{l} x^3-(a+b)x^2 \\ -\quad + \\ \hline (a+b)x^2-(a+b)^3 \\ (a+b)x^2-(a+b)^2x \\ -\quad + \\ \hline (a+b)^2x-(a+b)^3 \\ (a+b)^2x-(a+b)^3 \\ -\quad + \\ \hline 0 \end{array}$$

Допуна. Нарочити случајеви дељења:

$$(a^2-b^2):(a+b)=a-b, \text{ и}$$
$$(a^2-b^2):(a-b)=a+b, \text{ то јест:}$$

Разлика квадрата двају бројева дељива је збиром тих бројева а тако исто и њиховом разликом.

48. Кад дељеник a није множина делитеља b, већ кад се налази између две узастопне множине од b, дакле

$$bq<a<b(q+1)$$

тада је $a=bq+r$, где је $r<b$.

У том случају број q, који показује колико се пута може одузети b од a, назива се непотпун количник, а број r, који је мањи од делитеља, деони остатак.

1. $r=a-bq$, 2. $a=bq+r$.

1. Деони остатак се добива, кад се од дељеника одузме производ из непотпуна количника и делитеља.

2. Дељеник се добива, кад се производу из непотпуна количника и делитеља дода деони остатак.

Веза једначина и неједначина дељењем

49. 1. Једнаки бројеви подељени једнаким дају и резултате једнаке.

Ако је $a=b$ и $c=d$, тада је $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Доказ као у чл. **14,** *1*.

2. Неједнаки бројеви подељени једнаким дају резултате неједнаке истога смисла.

Прет. $a>b$, $c=d$ **Доказ.** $a=b+v$, $c=d$

Доказати $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ $\qquad$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}+\frac{v}{d}$

Дакле $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

3. Једнаки бројеви подељени неједнаким дају резултате неједнаке супротнога смисла.

Ако је $a=b$ и $c>d$, тада је $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

Доказ. Кад би било $\frac{a}{c}\geqq\frac{b}{d}$, то би у оба случаја морало бити $\frac{a}{c}.c>\frac{b}{d}.d$ (чл. **37,** *2* и *3*), дакле $a>b$ (чл. **40,** *1*), што је противно претпоставци.

4. Неједнаки бројеви подељени неједнаким супротнога смисла дају резултате неједнаке са знаком неједнакости какав је у дељеника.

Ако је $a>b$ и $c<d$, тада је $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

Доказ. Кад би било $\frac{a}{c}\leqq\frac{b}{d}$, то би у оба случаја морало бити $\frac{a}{c}.c<\frac{b}{d}.d$, то јест $a<b$ а ово је противно претпоставци.

Дељење алгебарских целих бројева

50. Два једнако означена броја дају количник позитиван, а два неједнако означена броја дају количник негативан.

$$(+a):(+b)=+q, \qquad (-a):(+b)=-q,$$
$$(+a):(-b)=-q, \qquad (-a):(-b)=+q,$$

где је q апсолутна вредност количникова.

Доказ. Ако је дељеник (производ) позитиван, тада и делитељ и количник (оба чинитеља) морају бити једнако означени; дакле је $(+a):(+b)=+q$ и $(+a):(-b)=-q$.

Ако је дељеник негативан, тада делитељ и количник морају бити неједнако означени; према томе је $(-a):(+b)=-q$ и $(-a):(-b)=+q$.

Напомена. Правила о множењу и дељењу полинома вреде и за алгебарске збирове; само се сад чланови за додавање и за одузимање морају сматрати као позитивни и негативни сабирци.

III. Бројне системе*)

51. У бројној системи с основом b сваки је број представљен као збир чланова, који су уређени по степенима основе b што опадају, а коефицијенти појединих степена мањи су од основе. Према томе је општи облик за будикоји цели број у бројној системи с основом b:

$$N=a_n b^n+a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+\ldots+a_2 b^2+a_1 b+a_0.$$

Коефицијенти a_0, $a_1 \ldots\ldots$ до a_{n-1} могу имати вредности 0, 1, $2, \ldots$ до $b-1$. Али мора бити $b>1$.

Узастопни степени основе b називају се према изложитељу јединице првога, другога, трећега,..... реда или и првога, другога, трећега,.... степена, док се природна јединица назива и јединица нултога реда (нултога степена).

Да би се макоји цели број у овој системи могао изговорити, треба бројевима од 0 до $b-1$ дати нарочита имена, а тако исто и јединицама различних редова.

Да би се ти бројеви могли написати, држимо се према индиској системи о месној вредности овога правила: пишу се само коефицијенти појединих чланова закључно с 0, док се знак $+$ и степени основе не пишу. Уз то, треба имати нарочите знаке (цифре) за бројеве који су мањи од b и знак 0.

Под овом погодбом припада свакој цифри осем њене цифарне вредности још и нарочита месна вредност; и то

*) У овом као и у потоњим одељцима, под бројем се увек разуме природни број.

кад јединица стоји на n-том месту почињући с десна њена је месна вредност b^{n-1}, или она је јединица $(n-1)$-вог реда.

Тако би број 5342, написан у системи с основом 6, што се бележи са $5342[6]$ значио

$$5.6^3+3.6^2+4.6+2.$$

Декадна бројна система

52. Данас се уопште употребљава декадна бројна система, којој је основа десет (дека).

У овој системи првих девет бројева, јединице, изговарају се познатим бројевима: један, два, три, четири, пет, шест, седам, осам, девет, а јединице првога, другога, трећега, четвртога,.... реда називају се по реду десетице, стотине, хиљаде, десетице хиљада,..... Везивањем оних бројева с именима појединих декадних јединицâ може се изговорити сваки ма како велики број.

Од ове тешке индиске методе одступа обична метода у томе, што класа сваког броја има 6 места а сваки ред по 3 места. У свакој класи изговара се виши ред са својим именом хиљада, за тим нижи без имена и најзад име класе.

Да би се декадни бројеви могли написати, довољне су индиско-арапске цифре за првих девет бројева: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и десета 0.

Кад се означи са a, b, c,.... p, q, r будикоји од бројева 0, 1, 2,.... 8, 9, онда нам израз

$$r.10^n+q.10^{n-2}+p.10^{n-2}+\ldots+c.10^2+b.10+a$$

представља општи облик декадна цела броја. Он се, према одредбама чл. **51.,** може краће написати. Нпр.

$$35684=3.10^4+5.10^3+6.10^2+8.10+4, \text{ или}$$
$$=30000+5000+600+80+4.$$

Последице. 1. Редни изложитељ највише цифре за 1 је мањи од броја цифара.

2. Ако је N неки декадни цео број, којега је изложитељ највише цифре n, дакле цео број, од $(n+1)$ цифара, тада је

$$10^{n+1}>N \gtreqless 10^n.$$

53. Познати поступци при рачунању са декадним целим бројевима оснивају се на правилима, која вреде за рачунање с полиномима, који су уређени по степенима исте основе, при чем се, ради простијег представљања декадних бројева, писањем једне цифре уз другу, мора пазити на месну вредност тих цифара.

Па и рачунске радње с недекадним бројевима врше се по истим законима као и код декадних бројева.

Претварање бројева из једне бројне системе у другу

54. Задаци. 1. Неки број из недекадне бројне системе претворити у број декадне системе.

Нека се број не пише у скраћеном облику.

Ако је задато да се нпр. број *32013*[*4*] претвори у декадну бројну систему биће

$$32013[4]=3.4^4+2.4^3+0.4^2+1.4+3$$
$$=3.256+2.64+1.4+3=903\,(10).$$

2. Број декадне системе претворити у број недекадне системе, којој је задата основа.

Треба начинити узастопне јединице нове системе. За тим се задати број подели највишом од оних јединица која се у њему садржи, остатак се подели најближом мањом јединицом, нови остатак опет нижом јединицом итд. Добивени количници биће цифре заданог броја у новој системи.

Ако је дато, да се декадни број *487* претвори у систему с основом *6* имаћемо:

$$6^0=1 \qquad 487:216=2$$
$$6^1=6 \qquad 55:\ 36=1$$
$$6^2=36 \qquad 19:\ \ 6=3$$
$$6^3=216 \qquad 1:\ \ 1=1$$

дакле је $487[10]=2131[6]$.

IV. Дељивост бројева

55. За број a каже се да је дељив бројем b, кад он њим подељен даје за количник цео број. Дељеник a назива се у том случају множина броја b, а b је делитељ (мера) броја a.

Број, који је дељив само јединицом и самим собом, назива се апсолутно прост број, или само прост број; сваки други број — сложен је број.

Број, којим су дељиви два или више других бројева, назива се заједнички делитељ тих бројева. Под највећим заједничким делитељем више бројева разуме се највећи број којим су они дељиви. Бројеви, који сем јединице немају другог

заједничког делитеља, називају се релативно прости бројеви или бројеви без делитеља.

Број, који је дељив са два или више других бројева, назива се њихова заједничка множина (дељеник). Под најмањим заједничким дељеником више бројева разуме се најмањи број, који је дељив сваким од тих бројева.

Заједнички делитељ бројева

56. 1. Заједнички делитељ двају или више бројева делитељ је и њихова збира.

Доказ. Нека је m делитељ бројева a и b, онда је

$$a=m\alpha$$
$$b=m\beta, \text{ где су } \alpha \text{ и } \beta \text{ цели бројеви; дакле}$$
$$a+b=m\alpha+m\beta=m\,(\alpha+\beta).$$

према томе је m делитељ за $a+b$, пошто је и $\alpha+\beta$ цео број.

2. Заједнички делитељ двају бројева делитељ је и њихове разлике.

Доказ је сличан пређашњему.

3. Делитељ неког броја делитељ је и сваке његове множине.

Јасно је непосредно из правила 1.

4. Ако је неки број дељив другим сложеним бројем, онда је он дељив и његовим чинитељима.

Доказ. Нека је m делитељ броју a и $m=p.q$. Тада је $a=m\alpha=p.(q.\alpha)=q.\,(p.\alpha)$; стога су p и q делитељи броју a.

Последице. 1. Сваки заједнички делитељ дељеника a и делитеља b делитељ је и деона остатка $r=a-bq$.

2. Сваки заједнички делитељ делитеља b и деона остатка r делитељ је и дељеника $a=b.q+r$.

3. Из 1 и 2 излази: Највећи заједнички делитељ за делитељ и деони остатак највећи је заједнички делитељ за делитељ и дељеник.

57. Задатак. Одредити највећи заједнички делитељ за два броја.

Подели већи број мањим, затим подели остатком делитељ, нови делитељ подели новим остатком итд., док се најзад дељење не изврши без остатка; последњи делитељ је највећи заједнички делитељ датих бројева.

Доказ. Нека су a и b, где је $a > b$, два задата броја и ако

$$\begin{array}{llllll} a:b & \text{даје количник} & q_1 & \text{са остатком} & r_1, \\ b:r_1 & \quad " & q_2 & \quad " & r_2, \\ r_1:r_2 & \quad " & q_3 & \quad " & r_3, \\ r_2:r_3 & \quad " & q_4 & \quad " & 0, \end{array}$$

тада је r_3 највећи заједнички делитељ за r_2 и r_3, дакле по чл. **56.,** 3. послед. и за r_1 и r_2, стога и за b и r_1, и најзад и за a и b.

Изведени поступак одређивања највећег заједничког делитеља за a и b, обично се назива верижно дељење за a и b.

Пример.

Да се одреди највећи заједнички делитељ за *1134* и *3654*. Рад је овакав:

$$\begin{array}{lll} 3654 : 1134 = 3 & \text{са остатком} & 252 \text{ или} \\ 1134 : \ \ 252 = 4 & \quad " & 126 \\ \ \ 252 : \mathbf{126} = 2 & \quad " & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|c|c} 3654 & 1134 & 3 \\ 252 & \mathbf{126} & 4 \\ 0 & & 2 \end{array}$$

$$d\,(1134, 3654) = 126.$$

58. 1. Ако је при верижном дељењу за a и b последњи делитељ 1, тада су a и b релативно прости бројеви; и обрнуто.

2. Ако је производ ac дељив неким бројем b, који је спрам чинитеља a релативно прост број, тада је други чинитељ c дељив тим бројем.

Доказ. Нека је према претпоставци у верижном дељењу за a и b у чл. **57.** $r_3 = 1$. Ако се при сваком дељењу помножи дељеник и делитељ са c, то се при непромењеном количнику и деони остатак множи са c. Па дакле

$$\begin{array}{llllll} ac:bc & \text{даје количник} & q_1 & \text{са остатком} & r_1c \\ bc:r_1c & \quad " & q_2 & \quad " & r_2c \\ rc_1:r_2c & \quad " & q_3 & \quad " & c \end{array}$$

Почем је сад према другом делу претпоставке ac дељиво са b, то је по чл. **56,** 1. послед. r_1c, затим r_2c и закључно c дељиво са b.

Последица. Ако су a и b релативно прости бројеви, то је највећи заједнички делитељ за ac и b такође највећи заједнички делитељ за c и b.

59. Поступак верижнога дељења може се применити и код полинома, који су уређени по степенима истога општег броја што опадају. При том треба онај полином сматрати као мањи

број, који почиње с нижим степеном главне количине или ако степени имају једнаке изложитеље, онда онај који има мањи коефицијент у првом члану. Да би се сад могло извршити дељење и да се избегну разломци, мора се често један од датих израза неким бројем помножити или неким бројем поделити, који је за други израз релативно прост.

Пример: Наћи највећи заједнички делитељ за

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ и } 7x^2 + 22x + 16.$$

Да би се дељење ова два израза могло извршити у целим бројевима, помножи се први са 7, који број није делитељ за други израз; тада је

$$\begin{array}{l} (70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\ \underline{\ -70x^2 \mp 220x \mp 160} \\ \qquad\quad -122x - 244 \end{array}$$

Ако се остатак $-122x - 244$ подели бројем -122, који није делитељ пређашњег делитеља, добива се $x + 2$, тада је даљи рад овакав:

$$\begin{array}{l} (7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\ \underline{\ -7x^2 \mp 14x} \\ \qquad\quad 8x + 16 \\ \qquad \underline{\ -8x \mp 16} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Дакле је највећи заједн. делит. $x + 2$.

Прости и сложени бројеви.

60. Ако је број n мањи од квадрата којега другог броја a, и ако n није дељиво, сем јединице, никојим другим бројем нижим од a, тада је n прост број.

Доказ. Ако се узме, да је n дељиво макојим другим бројем p, онда би то могло бити само за $p \geqq a$, дакле $n = px$, где x значи цео број; но тада би и n било дељиво са x. Али из $n < a^2$ и $p \geqq a$ следује $n:p < a$, или $x < a$. Оваквим би узимањем дакле број n био дељив бројем $x < a$, што је противно претпоставци. Стога n мора бити прост број.

61. Истраживање да ли је неки број прост.

Треба задати број делити узастопним простим бројевима дотле, док добивени количник не буде мањи од делитеља. Кад се ни једно од тих дељења не може извршити, онда је дати број прост.

Тачност овога поступка јасна је према чл. **60.**

Нпр. број 131 није дељив са $2, 3, 5, 7, 11, 13$, дакле је прост број. Последње дељење $131:13=10$; $131=13.10+1$, дакле $131<13^2$.

62. 1. Кад је производ ab дељив простим бројем p, тада мора (бар) један чинитељ бити дељив тим бројем.

Доказ. Прост број или се садржава у каквом другом броју без остатака или је спрам њега прост. Ако дакле a није дељиво са p, тада, према чл. **58,** 2, мора b бити дељиво са p или обрнуто.

2. Кад је какав број a дељив двама релативно простим бројевима b и c, тада је он дељив и њиховим производом.

Доказ. Према погодби је $a=b\beta$; па како је и $a=b\beta$ дељиво са c а c спрам b релативно прост број, то је β дељиво са c. Стога је $\beta=c\gamma$, па дакле $a=(bc).\gamma$.

3. Степени два релативно проста броја такође су релативно прости бројеви.

Доказ. Узимајући да су степени a^r и b^n, чије су основе релативно прости бројеви, дељиви бројем d, тада би се морао сваки прост чинитељ од d садржавати без остатка како у a тако и у b, а то би било противно претпоставци.

63. Сваки сложен број може се, и то само на један начин, раставити на саме просте чинитеље.

Доказ. Сваки сложен број a даје се раставити бар на два чинитеља, не водећи рачуна о чинитељу 1; ови чинитељи, ако су сложени бројеви, дају се опет раставити на чинитеље, који или су већ прости бројеви или су опет сложени бројеви; ако се, у последњем случају, настави растављање, тада се мора, почем чинитељи бивају све мањи, најзад доћи на саме просте бројеве као чинитеље. Ако су сада m, n, p, q, r нађени прости чинитељи, од којих понеки могу бити и једнаки, то су они и једини апсолутни прости бројеви, чији је производ број a. Јер ако би се a могло раставити и на просте чинитеље s, t, u, v, који су различни од m, n, p, q, r, тада би морало бити $mnpqr=stuv$, а стога би $mnpqr$ било дељиво са s, што, према чл. **62,** 1, није могућно.

И сада се из чл. **62,** добива ова

Последица. Број a не може се поделити бројем b, ако у b има какав прост чинитељ, који се не налази

у a, или какав виши степен некога простог чинитеља, који је и чинитељ броја a.

64. Задатак. Да се дати сложен број растави на своје просте чинитеље.

Подели се дати број најмањим простим бројем, којим је дељив, не водећи рачуна о броју 1; количник се дели најмањим простим бројем, којим је он дељив, не изузимајући ни пређашњи прост број, па се тако наставља са сваким новим количником док се најзад не добије количник, који је и сâм прост број. Тада су сви делитељи и последњи количник тражени прости чинитељи датога броја. Нпр.

$$\begin{array}{rcl} 630:2=315 & \quad\text{или}\quad & \begin{array}{r|l} 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & \end{array} \\ 315:3=105 & & \\ 105:3=\ \ 35 & & \\ 35:5=\ \ \ 7 & & \end{array}$$

Дакле је $630=2.315=2.3.105=2.3.3.35=2.3.3.5.7.$

2. **Задатак.** Наћи све делитеље каквога сложена броја.

Нека је дати број n растављен на просте чинитеље, дакле $n=a^\alpha b^\beta c^\delta$. тада мора један чинитељ тога производа бити облика $m=a^p b^q c^r$, где p, q и r могу имати све произвољне вредности од 1 до α, од 1 до β и од 1 до γ, и сем тога сваки степен може имати вредност 1. Пошто се ове вредности смеју по вољи једна с другом везивати то је број укупних делитеља од n, кад се урачуна и јединица, $(\alpha+1)(\beta+1)(\delta+1)$.

Нађени делитељи виде се из примера:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3,\ 6 \\ 45 & 3,\ 9,\ 18 \\ 15 & 3,\ 27,\ 54 \\ 5 & 5,\ 10,\ 15,\ 30,\ 45,\ 90,\ 135,\ 270. \end{array}$$

$270=2.3^3.5$; број делитеља је $=2.4.2=16.$

65. Раставити на чинитеље општи бројни израз.

У једночланих израза поједина су слова прости чинитељи; према томе треба само коефицијент растављати на чинитеље. Нпр. $24a^2mx^2=2^3.3.a^2mx^2$.

За растављање полинома на чинитеље не могу се поставити општа правила; стога се овде разматрају нарочити случајеви, који се најчешће јављају.

1. Полином, којега сви чланови имају заједнички делитељ, раставља се на два чинитеља по чл. **35,** кад се заједн. делитељ издвоји као један чинитељ а као други чинитељ узме се количник, који се добива дељењем задата израза заједн. делитељем. Нпр.

1. $3ax-6bx-3x=3x(a-2b-1)$.
2. $x(x^2-1)-(x-1)^3=(x-1)[x(x+1)-(x-1)^2]$
$$=(x-1)[x^2+x-x^2+2x-1]$$
$$=(x-1)(3x-1).$$

2. Као нарочити случај имамо из допуне чл. **36:**

1) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,
2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

затим уопште:

4) $a^{2m+1}+b^{2m+1}=(a+b)(a^{2m}-a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2-..+b^{2m})$,
5) $a^{2m+1}-b^{2m+1}=(a-b)(a^{2m}+a^{2m-1}b+a^{2m-2}b^2+..+b^{2m})$,
6) $a^{2m}-b^{2m}=(a+b)(a^{2m-1}-a^{2m-2}b+a^{2m-3}b^2-..-b^{2m-1})$,
7) $a^{2m}-b^{2m}=(a-b)(a^{2m-1}+a^{2m-2}b+a^{2m-3}b^2+..+b^{2m-1})$.

4) Збир двају степена с једнаким непарним изложитељима дељив је збиром основа.

5) Разлика двају степена с једнаким непарним изложитељима дељива је разликом основа.

6) и 7) Разлика двају степена с једнаким парним изложитељима дељива је како збиром тако и разликом основа.

Ова се правила изводе из задатака за вежбање у чл. 7. под бројевима 127, 129, 131 и 133.

Дељивост декадних бројева.

66. Општи облик декадна броја N је:

$$N=a+b.10+c.100+d.1000+e.10000+\dots$$

Овде су a, b, c,... узастопне цифре почињући с десна. Издвајајући заједничке чинитеље добива се овакав облик:

$N=a+10n_1=(a+b.10)+100n_2=(a+b.10+c.100)+1000n_3$, где су n_1, n_2, n_3 цели бројеви. Како је сад $10n_1$ дељиво са 2 и са 5, $100n_2$, са 4 и са 25, $1000n_3$ са 8 и са 125, то се на основу чл. **56,** 1 изводе правила:

1. Декадни број дељив је са 2 или са 5, кад му је најнижа цифра дељива са 2 или са 5.

Допуна. Бројеви, који су дељиви са 2, називају се парни, а сви други — непарни бројеви. Општи облик за парне бројеве је $2m$, а за непарне $2m+1$ или $2m-1$, где m може бити будикоји цео број.

2. Декадни број дељив је са 4 или са 25, кад су две најниже цифре, сматране као број, дељиве са 4 или са 25.

3. Декадни број дељив је са 8 или са 125, кад су му три последње цифре, сматране као број, дељиве са 8 или са 125.

Даље: $N=a+b.9+b+c.99+c+d.999+d+\dots$
$=(a+b+c+d+\dots)+9n$, где је n цео број.

Почем је сад $9n$ дељиво са 3 и са 9, имамо правило:

4. Декадни број дељив је са 3 или са 9, кад му је збир цифара дељив са 3 или са 9.

$$N=a+b.11-b+c.99+c+d.1001-d+e.9999+e+$$
$$+f.10001-f+\dots$$
$$=11n+[(a+c+e+\dots)-(b+d+f+\dots)].$$

Почем је $11n$ дељиво са 11, то имамо:

5. Декадни број дељив је са 11, кад је разлика између збира цифара на непарним местима и збира цифара на парним местима дељива са 11.

6. Декадни број дељив је са 6, кад је дељив са 2 и са 3. (чл. **62,** 2).

Који су бројеви дељиви са 12, 15, 18?

Највећи заједнички делитељ.

67. Задатак. Наћи највећи заједн. делитељ двају или више бројева растављањем на чинитеље.

Пошто је сваки дати број растављен на своје просте чинитеље, начини се производ заједничких простих чинитеља, подигнутих на најниже степене на којима се ти чинитељи јављају; тај производ је тражени највећи заједн. делитељ.

Доказ. Тако начињени производ m јесте заједн. делитељ за све чинитеље, почем се сви чинитељи његови садржавају у свима датим бројевима; али он је и највећи заједн. делитељ, јер чим би му се дописао још један чинитељ p, тада најмање један од датих бројева не би био дељив производом mp (чл. **63,** послед.).

Пример. Одреди најв. зај. дел. за 300 и 2520.

$300=2^2.3.5^2$,
$2520=2^3.3^2.5.7$.   најв. зај. дел. $=2^2.3.5=60$.

68. Задатак. Одреди највећи заједн. делитељ спомоћу верижног дељења.

Јасно је да се најв. з. делит. за три броја a, b, c налази по првој методи (чл. **67**), кад се најпре нађе најв. з. делит. d за a и b, затим за d и c; па тако се исто поступа и при методи верижног дељења.

Примери. Одреди најв. з. дел. за *4725*, *11025* и *15015*.

$$\begin{array}{r|r|l} 11025 & 4725 & 2 \\ \mathbf{1575} & 0 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r|l} 15015 & 1575 & 9 \\ 840 & 735 & 1 \\ \mathbf{105} & 0 & 1 \\ & & 7 \end{array}$$

$d(4725, 11025, 15015) = 105.$

Тумачење. $a = 4725 = 3^3.5^2.7$; $b = 11025 = 3^2.5^2.7^2$; $c = 15015 = 3.5.7.11.13$; $d = 3.5.7 = 105$;

или: $d(a, b) = 3^2.5^2.7$; $d(d, c) = 3.5.7 = 105.$

2. Одреди најв. з. дел. за

$$3x^2 - 2xy - 5y^2, \quad 2x^2 + 9xy + 7y^2 \text{ и } 2x^2 - 2y^2.$$

Као најв. з. дел. за $3x^2 - 2xy - 5y^2$ и $2x^2 + 9xy + 7y^2$ добива се $x + y$.

За $x + y$ и $2x^2 - 2y^2$ најв. зај. дел. је $x + y$, који је у исто време и најв. з. дел. за дате изразе.

Најмањи заједнички дељеник.

69. Задатак. Наћи најмањи заједнички дељеник више бројева растављањем на просте чинитеље.

Кад се сваки дати број раставио на своје просте чинитеље, начини се производ свих простих чинитеља, подигнутих на највише степене на којима се поједини чинитељи јављају; тај производ је најм. заjед. дељеник.

Доказ. Тако начињени производ је заједнички дељеник датих бројева, почем се у њему налазе сви чинитељи свакога појединог броја; али он је и најмањи заједнички дељеник, јер ако се будикоји чинитељ тог производа одбаци, тада тако добивени мањи број према чл. **63.** послед. не би могао бити дељив неким од датих бројева.

Пример. Нађи најм. заjед. дељеник за *60*, *108* и *1050*.

$$60 = 2^2.3.5,$$
$$108 = 2^2.3^3,$$
$$1050 = 2.3.5^2.7;$$
најм. з. дељеник $= 2^2.3^3.5^2.7 = 18900.$

70. Задатак. Одредити најмањи заједнички дељеник за два броја спомоћу њиховог највећег заједничког делитеља.

Подели један од датих бројева најв. зај. делит. па помножи количник другим бројем; производ је тражени најм. з. дељеник.

Доказ. Нека је d највећи зај. делитељ за a и b, тада је $a = d\alpha$ и $b = d\beta$ где су α и β релативно прости бројеви. Сваки дељеник од a има облик: $u.a = u.d\alpha$ а сваки дељеник од b облик: $vb = v.d\beta$. За сваки зајед. дељеник од a и b вреди стога једначина $ud\alpha = vd\beta$, одакле је $u = \dfrac{v\beta}{\alpha}$. Почем је u цео број, а α и β релативно прости бројеви, то се α мора садржавати у v. Дакле је α најмањи број који се за v може изабрати, а тако исто β најмањи број који се за u може изабрати; стога је најмањи заједнички дељеник за a и b:

$$d\alpha\beta = d\alpha.\beta = a\,(b:d)$$
$$= d\beta.\alpha = b\,(a:d).$$

Примери. 1) Нађи најм. з. дељеник за *648* и *972*.

$$\begin{array}{r|r|l} 972 & 648 & 1 \\ \mathbf{324} & 0 & 2 \end{array} \qquad 324 \text{ је најв. з. делитељ.}$$

$$648:324 = 2;\quad 972.2 = 1944, \text{ или}$$
$$972:324 = 3;\quad 648.3 = 1944;$$
$$D(648,\ 972) = 1944.$$

2. Да се одреди најмањи зај. дељеник за $9a^4x^2 - 4b^2y^4$ и $9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4$.

Највећи зај. делит. за ове изразе је $3a^2x - 2by^2$. Па је $(9a^4x^2 - 12a^2bxy^2 + 4b^2y^4):(3a^2x - 2by^2) = 3a^2x - 2by^2$; стога је $(9a^4x^2 - 4b^2y^4)(3a^2x - 2by^2)$

$$= 27a^6x^3 - 18a^4bx^2y^2 - 12a^2b^2xy^4 + 8b^3y^6.$$

тражени најмањи заједнички дељеник.

71. Задатак. Одредити најмањи заједнички дељеник за више бројева примсном верижног дељења.

Јасно је, да се за три и више бројева најм. з. дељеник налази и по првој методи (чл. **69**), кад се најпре нађе најм. з. дељеник за два броја, за тим за нађени дељеник и трећи број итд. Последњи нађени дељеник је најмањи зај. дељеник за све дате бројеве.

Тако се поступа и при примени друге методе.

72. Кад у низу датих бројева два или више њих имају зајedн. делитељ, тада се може, а да се најмањи заједнички дељеник не промени, место тих бројева узети само једанпут њихов зај. делитељ а тако исто и количници, који се добивају дељењем оних бројева зај. делитељем. Ако је даље један од датих бројева делитељ којега другог већег броја, тада се може мањи број сасвим изоставити, јер се најм. з. дељеник неће променити.

На том се оснива практичан поступак за одређивање најмањ. зајед. дељеника више бројева растављањем на просте чинитеље:

У задатом реду бројева изоставе се сви они бројеви, који се садржавају без остатка у којем другом већем броју; остали бројеви се деле, догод је могућно, неким апсолутним простим бројем а количници и бројеви који нису дељиви потписују се испод пређашњих бројева. Тако се поступа с новим и са сваким потоњим редом бројева, док се најзад не добију сами релативно прости бројеви. Производ тих последњих и апсолутно простих бројева, којима се делило, биће тражени најмањи заједнички дељеник.

Пример. Одреди најмањи заједнички дељеник за бројеве: *30*, *60*, *108*, *1050*.

~~30~~,	60,	108,	1050	
	30,	54,	525	2
	~~15~~,	27,	525	2
		9,	175	3

Најм. зај. дељен. $= 9 . 175 . 2 . 2 . 3 = 18900$.

V. Друго проширење бројне области

Разломци

73. Количник $\frac{a}{b}$ према дефиницији (чл. **39.**) као и сва правила о количнику изведена су под претпоставком: да се у дељенику a садржава делитељ b. У противном случају количник $a:b$, или што је свеједно $\frac{a}{b}$, представља бројни облик без значаја, јер се не налази у реду досада познатих бројева. Да би се и с таквим бројним облицима могло рачунати мора се и њима дати место у бројном реду, стога се бројна област поново проширује.

Под таквом погодбом и у том општијем схватању количник $\frac{a}{b}$ добива ново име: он се назива разломљен број или разломак; дељенику се даје име бројитељ а делитељу именитељ. Насупрот разломцима називају се досадашњи бројеви цели бројеви.

Почем је разломак $\frac{a}{b}$ количник, то и сва правила изведена за количнике вреде и за разломке.

74. Специјалан разломак $\frac{1}{b}$, који је одређен једначином $\frac{1}{b} . b = 1$, назива се основни разломак или разломљена јединица.

Применом чл. **45,** 1 добива се:

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + 1 \ldots + \overset{a}{\breve{1}}}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{\overset{a}{\breve{1}}}{b} = \frac{1}{b} . a,$$

то јест: Сваки је разломак множина своје разломљене јединице. Бројитељ показује, колико пута разломак садржава разломљену јединицу коју одређује именитељ.

Разломак, којега је бројитељ мањи од именитеља, назива се прав разломак; такав је $\frac{a}{b}$ за $a < b$; иначе је неправ разломак.

Разломак, којега је бројитељ множина именитељева, назива се привидан разломак, као $\frac{20}{5}$.

Обрнуто, сваки цео број може се представити као привидан разломак, јер је $a = \frac{an}{n}$.

Сваки неправ разломак може се претворити у збир од цела броја и права разломка.

Ако је $a > b$, тада је по чл. **48.** $a = bq + r$, где је $r < b$; стога је $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$.

Израз облика $q + \frac{r}{b}$ назива се мешовит број.

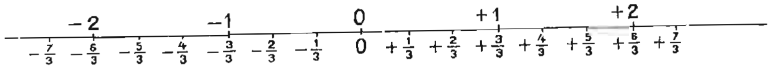
Допуна. Оба правила у чл. **48.** допуњују се сад овако: Потпун количник једнак је са збиром из непотпуна количника и једног разломка, којега је бројитељ деони остатак а именитељ—делитељ.

75. Проширени бројни ред. Разломак нпр. $\frac{15}{4}$ већи је од броја 3 а мањи од броја 4, сем тога, он се налази између разломака $\frac{14}{4}$ и $\frac{16}{4}$; исто тако и разломак $\frac{a}{b}=q+\frac{r}{b}$ налази се између целих бројева q и $q+1$, а сем тога и између разломака $\frac{a-1}{b}$ и $\frac{a+1}{b}$. Стога се бројни ред може проширити на тај начин, што се, почињући од 0, поступно с једне стране додаје основна јединица а с друге одузима. Тако се добива бројни ред

$$\ldots -\frac{5}{b}, -\frac{4}{b}, -\frac{3}{b}, -\frac{2}{b}, -\frac{1}{b}, 0, +\frac{1}{b}, +\frac{2}{b}, +\frac{3}{b}, +\frac{4}{b}, +\frac{5}{b}+\ldots,$$

који се назива ред b-тих делова, или разломачки бројни ред за именитељ b. У њему је између свака два узастопна цела броја уметнуто $b-1$ разломака.

Да би се овај бројни ред представио на бројној линији, подели се за јединицу изабрана дуж на b једнаких делова, па се ти једнаки делови преносе у оба правца од нулте тачке. Крајње тачке тих дужи одговарају по реду бројевима прећашњег реда. Тако је нпр. за ред трећинâ:



76. Општа правила. Из појма о разломку имамо:

1. Сваки разломак помножен својим именитељем даје за производ бројитељ. $\frac{a}{b}.b=a.$

2. Од два разломка с једнаким именитељима већи је онај чиј је бројитељ већи. $\frac{3}{5}>\frac{2}{5}.$

3. Од два разломка с једнаким бројитељима већи је онај чиј је именитељ мањи. $\frac{3}{4}>\frac{3}{5}.$

Применом члана **41.** имамо и правило:

4. Вредност разломка се не мења, кад се и бројитељ и именитељ истим бројем помноже или кад се оба истим бројем поделе.

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a:m}{b:m}.$$

77. Задаци. 1. Да се дати разломак доведе на нов задати именитељ, који је множина прећашњем именитељу.

Треба нови именитељ поделити прећашњим, па количником помножити прећашњи бројитељ.

Нпр. довести разломак $\frac{a+2}{a-1}$ на именитељ a^2-1.

Рад је овакав: $(a^2-1):(a-1)=a+1$, дакле

$$\frac{a+2}{a-1}=\frac{(a+2)(a+1)}{(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+3a+2}{a^2-1}.$$

2. Довести два или више разломака на најмањи заједнички именитељ.

Најпре се одреди најмањи заједнички дељеник именитељâ датих разломака, па је он најмањи заједнички именитељ, за тим се примени прошли задатак.

Нпр. довести разломке $\frac{a}{2b}$, $\frac{3m}{4bc}$, $\frac{4n}{c^2d}$ на најм. зајм. имен.

Најмањи зај. дељеник свих именитеља, дакле и најмањи зај. именитељ је $4bc^2d$. И сада је

$$\frac{a}{2b}=\frac{2ac^2d}{4bc^2d},\quad \frac{3m}{4bc}=\frac{3cdm}{4bc^2d},\quad \frac{4n}{c^2d}=\frac{16bn}{4bc^2d}.$$

3. Скратити дати разломак, то јест свести га на најпростији облик.

Дели се бројитељ и именитељ поступно заједничким делитељима, нпр.

$$a)\ \frac{840}{1290}=\frac{84}{129}=\frac{28}{43};\qquad b)\ \frac{12a^2bx^2}{15acx^3}=\frac{4ab}{5cx};$$

$$c)\ \frac{ax+bx}{a^2y-b^2y}=\frac{x(a+b)}{y(a^2-b^2)}=\frac{x(a+b)}{y(a+b)a-b)}=\frac{x}{y(a-b)}$$

Напомена. Скраћивањем општих разломака често се уклања неодређеност која у њих настаје приликом неких замењивања. Тако нпр. разломак $\frac{x^2-a^2}{2x-2a}$ добива неодређен облик $\left(\frac{0}{0}\right)$, кад се у њему замени x са a. Али се скраћивањем добива

$$\frac{x^2-a^2}{2x-2a}=\frac{(x+a)(x-a)}{2(x-a)}=\frac{x+a}{2},$$

а овај разломак за $x=a$ има одређену вредност $\frac{2a}{2}=a$.

Основне рачунске радње с обичним разломцима

78. Сабирање и одузимање разломака. 1. *Разломци једнаких именитеља сабирају се, кад им се бројитељи саберу а добивеном збиру се потпише заједнички именитељ.*

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m} \qquad \text{(чл. } \mathbf{45.}\text{)},$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}+\frac{bm}{mn}=\frac{an+bm}{mn},$$

$$a+\frac{m}{n}=\frac{an}{n}+\frac{m}{n}=\frac{an+m}{n}.$$

2. *Разломци једнаких именитеља одузимају се, кад им се бројитељи одузму а добивеној се разлици потпише заједнички именитељ.*

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}=-\frac{b-a}{m} \qquad \text{(чл. } \mathbf{46.}\text{)},$$

$$a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}; \qquad \frac{a}{b}-c=\frac{a-bc}{b}.$$

79. Множење и дељење разломака. 1. *Разломак се множи неким бројем, кад се бројитељ тим бројем помножи* (а именитељ потпише). Или, кад је могућно: *кад се именитељ тим бројем подели* (а бројитељ задржи).

$$\frac{a}{b}\,.\,m=\frac{am}{b}=\frac{a}{b:m} \qquad \text{(чл. } \mathbf{42,}\ c\text{)}.$$

$$\text{Нпр. } \frac{7}{8}.4=\frac{28}{8}=\frac{7}{2} \text{ или } \frac{7}{8}.4=\frac{7}{8:4}=\frac{7}{2}.$$

2. *Број се множи разломком, кад се помножи бројитељем а подели именитељем — макојим редом.*

$$a\,.\,\frac{m}{n}=\frac{am}{n}=\frac{a}{n}\,.\,m \qquad \text{(чл. } \mathbf{42,}\ 2\text{)}.$$

Ово правило објашњава множење разломком, које по првобитној дефиницији множења нема смисла.

80. 1. *Разломак се дели неким бројем, кад се бројитељ тим бројем подели* (кад је могућно), *или кад се именитељ тим бројем помножи.* (Јер разломак је мањи, што му је бројитељ мањи, или што му је именитељ већи)

$$\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}=\frac{a}{bm} \qquad \text{(чл. } \mathbf{43.}\text{)}$$

2. *Број се дели разломком, кад се бројитељем подели а именитељем помножи — макојим редом.*

$a:\frac{m}{n}=\frac{a}{m}\,.\,n=\frac{a\,.\,n}{m}$. Јасно је обртањем обрасца у члану **42,** *c*.

Напомена. Кад је производ двају бројева 1, тада се каже: да је сваки такав број *обрнута* или *реципрочна* вредност другога.

Тако је $a\,.\,\frac{1}{a}=1$, $\frac{m}{n}\,.\,\frac{n}{m}=1$, стога је $\frac{1}{a}$ обрнута вредност од a, $\frac{m}{n}$ обрнута вредност од $\frac{n}{m}$. Уопште се реципрочна вредност каквога броја или израза добива, кад се *1* подели тим бројем или изразом.

И сад се правило за дељење разломком исказује овако: *Неки број (цео или разломак) дели се разломком, кад се помножи реципрочном вредности делитељевом.*

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{a}{m}\,.\,\frac{n}{b}=\frac{an}{bm}=\frac{a:b}{m:n} \qquad \text{(чл. } \mathbf{41.}\text{)}$$

Како гласи последњи део?

Допуна. У примени досадашњих правила, треба само назначавати сва множења и, кад бројитељ и именитељ имају заједнички делитељ, скраћивати, нпр.

$$\frac{12}{25}:\frac{4}{5}=\frac{12.5}{25.4}=\frac{3}{5}; \qquad \frac{9a^2}{8b^3}:3ab=\frac{9a^2}{8\,.\,3ab^4}=\frac{3a}{8b^4}.$$

81. Разломак, којему је бројитељ или именитељ разломак, или кад су оба разломци, назива се *двојни разломак*. Такав разломак није ништа друго до назначено дељење разломака; стога се такав разломак може претворити у обичан разломак, кад се дељење изврши, или кад се бројитељ и именитељ двојна разломка помноже најмањим заједничким именитељем појединих именитеља. Нпр.

$$\frac{\frac{a}{m}}{b}=\frac{a}{m}:b=\frac{a}{bm};\quad \frac{a}{\frac{m}{n}}=a:\frac{m}{n}=\frac{an}{m};\quad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}}=\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{an}{bm}.$$

$$\frac{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}{1+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}=\frac{a(a-b)-b(a+b)}{a^2-b^2+a^2+b^2}=\frac{a^2-2ab-b^2}{2a^2}.$$

Најм. зај. имен. $=a^2-b^2$.

VI. Бескрајно велике и бескрајно мале количине и граничне вредности промењљивих количина

82. *a)* Општи бројеви, којима се за време рачунања придаје одређена непромењљива вредност, називају се сталнии (константни) бројеви, противно промењљивим бројевима, који поступно прелазе неограничено много специјалних вредности.

За промењљив број x, чија апсолутна вредност тако расте да постане већа од сваке произвољне апсолутне константне, каже се да постаје бескрајно велики, или да је његова гранична вредност *(limes)* бескрајна. То се обележава знаком: $\lim x=\infty$.

Најбољи пример за то имамо, кад замислимо да промењљива x прелази редом све вредности природнога бројног реда 1, 2, 3, ... тада вредности промењљиве бивају све веће и веће тако да најзад добије тако велику вредност n која је већа од сваког броја који се замислити може (нпр. 10^{10}, 10^{20},...) и тада се каже да промењљива постаје бескрајно велика.

Ако ли промењљива x непрестано опада док у алгебарском смислу не постане мања од $-n$, где n опет значи произвољно велики апсолутан број, тада се каже: x постаје негативно бескрајно велики број, тј. гранична му је вредност $-\infty$. Дакле

$$\lim x=-\infty.$$

Овај случај настипа, кад x прелази редом вредности -1, -2, -3,....

Знаци ∞ (или $+\infty$) и $-\infty$ не могу се сматрати као бројеви, почем они уопште не подлеже рачунским законима, већ се примењују у смислу горњих тумачења. Из $\lim x=\infty$ следује $\lim (x+a)=\infty$ и $\lim (ax)=\infty$, кад a означава константан број. У другом примеру мора још a бити позитивно.

b) За промењљив број y чија апсолутна вредност тако опада да постане мања од сваке произвољне апсолутне константне ε (нпр. $\frac{1}{10^{10}}$, $\frac{1}{10^{20}}$....) тада се каже: y постаје бескрајно мали број, или његова је гранична вредност нула. То се обележава:

$$\lim y=0.$$

Овај случај настипа, кад је нпр. $y=\frac{1}{x}$ на x прелази редом вредности $1, 2, 3,\ldots$. или $-1, -2, -3,\ldots$. Из $\lim y=0$ следује: $\lim (y+a)=a$ и $\lim (ay)=0$, кад a означава произвољну константну. Из првог примера се види, да гранична вредност неке промењљиве може бити произвољан број a. Овај случај може онда настати, кад од неке извесне вредности промењљиве, која прелази неограничени бројни ред, разлика између те промењљиве и броја a буде по апсолутној вредности мања од произвољно малог позитивна броја.

c) Кад је основа неког степена већа од 1, тада ће степен стално расти, кад изложитељ n прима редом вредности природнога бројног реда, и гранична је вредност степена, за $\lim n=\infty$, бескрајна.

Доказ. Из $a>1$, кад се узастопно множи са $a=a$, биће $a^2>a$, $a^3>a^2$,...., дакле $1<a<a^2<a^3<\ldots$. Овим је први део тврђења доказан. Даље је

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1);$$

кад се десно код другог чинитеља свако a замени са 1 биће,

$$a^n-1>(a-1).n.$$

Ако је сада N произвољно велики број, то се може n тако изабрати, да буде $(a-1)n$, дакле и $a^n-1>N$. Тада је и $a^n>N$, па стога $\lim a^n=\infty$, кад n добива редом вредности природнога бројног реда.

d) Кад је основа неког степена позитивна и мања од 1, тада ће степен стално опадати, кад изложитељ n прима редом вредности природнога бројног реда, и гранична је вредност степена, за $\lim a^n=\infty$, нула.

Доказ. Из $a<1$ следује $a^2<a$, $a^3<a^2$,..., дакле $1>a>a^2>a^3>\ldots$ Тим је први део тврђења доказан. Кад се даље узме да је

$$a=\frac{1}{b},\ \text{тада је}\ a^n=\frac{1}{b^n}\ \text{и}\ b>1$$

Кад се сад узме макако мали позитиван број ε, тада је, почевши од извесне вредности n према $c)$ $b^n > \frac{1}{\varepsilon}$ дакле $\frac{1}{b^n} < \varepsilon$ или $a^n < \varepsilon$. Одавде излази $\lim a^n = 0$, кад n добива редом вредности природнога бројног реда.

83. Сваки израз, нпр. $4x^2 - 1$, у којем има једна или више променљивих, назива се (по Лајбницу) функција те променљиве. Ако се бројна вредност израза обележи са y, тада се изговара „y је функција од x, а пише се $y = f(x)$“, што значи, да за сваку специјалну вредност, која се броју x даје, и y добива једну или ограничени број одређених вредности из једначине $y = f(x)$. Ако је нпр. $y = 4x^2 - 1$ и ако се броју x дају произвољне вредности $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots$ тада се за y добивају вредности: $-1, 0, 3, 8, 15 \ldots$

Полином облика $ax^n + bx^{n-1} + \ldots + kx + l$, назива се цела функција n-тога степена, где су $a, b, \ldots k, l$ константне количине а x променљива. Према томе је $ax + b$ цела функција првог степена или линеарна функција, $ax^2 + bx + c$ цела функција другог степена или квадратна функција.

Функција се назива разломљена, кад је она количник двеју целих функција.

Целе и разломљене функције називају се алгебарске функције, све друге трансценденте функције.

Повољним избором вредности за x вредност за y одређена је једнозначно или многозначно; стога је x независно променљива количина, а y зависно променљива. Али кад се једначина реши по x, то јест кад се применом правила о вези једнаких количина тако преобрази, да је x само на једној страни, може се обрнуто x представити као функција од y.

Примери. Производ је функција сваког свог чинитеља; интерес је функција капитала, процента и времена; цена неке робе је функција њене тежине; радно време је функција броја радника; напон гаса је функција његове густине и његове температуре итд.

VII. Размере и пропорције

1. Размере

84. Тумачење. Под размером двају бројева a и b разуме се њихов количник у смислу дељења као мерења (чл. **39**), т. ј. представа, колико се пута b садржава у a. Количник $a:b$ или $\frac{a}{b}$ чита се као размера: a има се према b, или краће: a према b.

Дељеник a назива се први члан размере, делитељ b — њен други члан. Ако је $a:b = q$ ($12:4 = 3$), тада се бројна вредност размере — q (3) — назива њен количник.

Први и други члан размере морају бити неименовани или истоимени бројеви. Ако ли су они једнородни али разноименовани или вишеименовани бројеви, морају се довести на истоимене.

Две су размере једнаке, кад су им количници једнаки. Стога је размера двају истоимених бројева једнака с размером њених неименованих бројева.

Променом чланова размере $a:b$ добивена размера $b:a$ назива се обрнута или реципрочна размера бројева a и b; насупрот њој назива се онда $a:b$ права размера тих бројева.

Из појма о размери имамо:

1. Први члан размере једнак је с производом другога члана и количника (чл. **40.** 1).

2. Други члан размере једнак је с првим чланом подељеним количником (**40,** 2).

3. Вредност размере не мења се, кад се први и други члан истим бројем помноже, или кад се обадва истим бројем поделе (**41**).

Применом правила *3.* може се свака размера упростити и то a) може се представити целим бројевима кад су њени чланови разломци и b) може се скратити, кад њени чланови имају заједнички делитељ.

85. Кад се у две или више размера сви први чланови помноже међусобно, а тако исто и сви други чланови, тада добивени производи чине нову размеру, која се, спрам датих простих размера, везива сложена размера.

Ако су нпр. $a:b$, $c:d$, $e:f$ просте размере, то је $ace:bdf$ сложена размера.

86. Размере количинâ. Количине исте врсте (дужи, углови) могу се сабирати, одузимати, па дакле се и свака количина може помножити или поделити неким неименованим бројем, као год што се нека количина може мерити другом количином исте врсте. Стога се и између две количине исте врсте може поставити размера.

При мерењу неке количине другом количином исте врсте или, што је свеједно, при одређивању количника њихове размере треба разликовати два случаја:

1. Кад су обе количине A и B самерљиве, то јест кад имају заједн. делитељ M. Нека се M садржава у A m пута, у B n пута, онда је

$A = M.m$, $B = M.n$, дакле $M = \frac{B}{n}$ и $A = \frac{B}{n}.\ m = B\frac{m}{n}$, отуда је: $A:B = \frac{m}{n}$.

a) Количник размере двеју самерљивих количина је рационалан број, тј. цео број или разломак.

b) Обунуто. Кад је количник размере двеју количина рационалан број, тада су обе количине самерљиве.

Јер из $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ следује $A = B.\frac{m}{n} = \frac{B}{n}.m$; стога је $\frac{B}{n}$ заједничка мера за B па дакле и за A.

2. Кад су обе количине A и B несамерљиве, тј. кад немају заједн. делитеља. Тако су нпр. несамерљиве количине дијагонала и страна квадрата, страна правилног десетоугаоника и полупречник описаног круга итд. Нека се сад B садржава у A a_0 пута са остатком R_1, $\frac{B}{10}$ у R_1 a_1 пут са остатком R_2, $\frac{B}{10^2}$ у R_2 a_2 пут са остатком R_3 итд.; тада је

$A = a_0 B + R_1$, $R_1 = a_1.\frac{B}{10} + R_2, \ldots$, $R_n = a_n.\frac{B}{10^n} + R_{n+1}$, дакле

$$A = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) B + R_{n+1}.$$

Овде су $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ позитивни цели бројеви или нуле; сваки од њих је мањи од 10, само a_0 може бити $\geqq 10$. Према томе је чинитељ од B у последњој једначини децималан број са n децималних места. Остатак R_{n+1} је количина исте врсте са A и са B и мањи је од $\frac{B}{10^n}$. Ниједан од остатака $R_1, R_2, \ldots$ не може бити $= 0$. Ако се узме да је нпр. $R_{n+1} = 0$, тада би количник размере $A:B$ био коначан децималан разломак, дакле рационалан број. А то би значило да су A и B самерљиве количине, што је противно претпоставци.

Ако ли се узме да n бескрајно расте, тада је, од неке извесне вредности броја n почевши, $\frac{B}{10^n}$, у толико више и R_{n+1} мањи од неке произвољно мале количине ε, која је исте врсте са A и са B. Стога је $lim\ R_{n+1} = 0$ и

$$A = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots\ldots\right). B.$$

Према томе је количник размере $A:B$ бескрајан децималан разломак и то непериодан. Јер се периодан разломак може преобратити у обичан разломак, дакле би био рационалан број, а то би се противило претпоставци да су A и B несамерљиве количине.

Из тога се види, да израчунавање количника двеју несамерљивих количина доводи на нову врсту бројева. Ти бројеви називају се ирационални бројеви, супротно целим и разломљеним бројевима, који се називају рационални бројеви.

2. Пропорције

87. Тумачење. Једначина између двеју једнаких размера назива се пропорција.

Ако је $a:b = q$ и $c:d = q$, тада је и $a:b = c:d$; овај је израз пропорција а изговара се: a (има се) према b, као c према d. Чланови a и d називају се спољашњи, b и c унутрашњи; a и c називају се једним именом први чланови пропорције а b и d други чланови; d се назива четврта пропорционала за a, b, c.

Пропорција $a:x = x:b$, у које су унутрашњи чланови једнаки назива се непрекидна пропорција, средњи члан x је средња пропорционала или геометриска средина за оба спољашња члана a и b.

88. Правило 1. У свакој пропорцији производ спољашњих чланова једнак је с производом унутрашњих чланова.

Претпоставка $a:b = c:d$.

Доказати $ad = bc$.

Доказ. Из $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, кад се обе стране помноже са bd, следује $ad = bc$.

Допуна. Ако је $\frac{a}{b} \gtrless \frac{c}{d}$, тада је $ad \gtrless bc$.

Последице 1. У сваке непрекидне пропорције квадрат средњега члана једнак је с производом оба спољашња члана. Из $a:x = x:b$ добива се $x^2 = ab$.

2. Из сваке пропорције одређује се спољашњи члан, кад се производ оба унутрашња члана подели другим спољашњим чланом; сваки унутрашњи члан одређује се, кад се производ оба спољашња члана подели другим унутрашњим чланом.

Из $a:b=c:d$ имамо $ad=bc$, $d=\frac{bc}{a}$, $b=\frac{ad}{c}$.

Правило 2. Кад је један производ од два чинитеља једнак с другим производом такође од два чинитеља, тада су чинитељи једног производа спољашњи чланови пропорције а чинитељи другог производа унутрашњи њени чланови.

Претпоставка $ad=bc$.

Да се докаже: $a:b=c:d$, $a:c=b:d$, $d:b=c:a$, $d:c=b:a$, $b:a=d:c$, $b:d=a:c$, $c:a=d:b$. $c:d=a:b$.

Доказ. Из $bc=ad$ имамо $\frac{bc}{ab}=\frac{ad}{ab}$, $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

Тако се исто може доказати тачност и осталих седам пропорција, кад се једначина $bc=ad$ подели производом два последња члана оне пропорције, која треба да се изведе.

Последице. Пропорција се не мења, кад у њој измењају своја места:

1. унутрашњи чланови међу собом, исто тако и спољашњи чланови,

2. унутрашњи чланови са спољашњим члановима.

Правило 3. Пропорција се не мења, кад се макоји спољашњи и макоји унутрашњи члан помноже истим бројем, или кад се оба поделе истим бројем.

Доказ. Из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ имамо $\frac{na}{b}=\frac{nc}{d}$ или $\frac{na}{nb}=\frac{c}{d}$.

Из $\frac{na}{nb}=\frac{c}{d}$ или из $\frac{na}{b}=\frac{nc}{d}$ следује $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Правило 4. Кад је дато више једнаких размера, тада се алгебарски збир свију првих чланова има према алгебарском збиру свију других чланова, као што се има макоји први члан према своjем другом члану.

Претпоставка $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\ldots.$

Да се докаже: $\frac{a\pm c\pm e\pm g}{b\pm d\pm f\pm h}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots.$

Доказ. Означимо количник једнаких размера са q, дакле

$$\frac{a}{b}=q,\ \frac{c}{d}=q,\ \frac{e}{f}=q,\ \frac{g}{h}=q,\ldots,$$

тада је $a=bq$, $c=dq$, $e=fq$, $g=hq,\ldots,$

одавде $a\pm c\pm e\pm g..=q(b\pm d\pm f\pm h..)$,

или $\frac{a\pm c\pm e\pm g}{b\pm d\pm f\pm h}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots$

Допуна. Ово правило вреди кад се за прве чланове узму разне множине а за хомологе друге чланове исте множине,

дакле: $$\frac{am\pm cn\pm ep\pm..}{bm\pm dn\pm fp\pm..}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\ldots$$

Последице. Из пропорције $a:b=c:d$ или $a:c=b:d$ добива се применом правила 4.:

$$1.\ (a\pm c):(b\pm d)=a:b=c:d,$$

то јест: збир или разлика првих чланова пропорције има се према збиру или разлици њених других чланова, као што се има макоји први члан према своjем другом члану.

$$2.\ (a\pm b):(c\pm d)=a:c=b:d,$$

дакле: Збир или разлика два прва члана пропорције има се према збиру или разлици два последња члана њена, као што се имају први чланови или други чланови њени.

$$3.\ (a+b):(a-b)=(c+d):(c-d),$$
$$(a+c):(a-c)=(b+d):(b-d),$$

то јест: Збир и разлика једнога спољашњег и једнога унутрашњег члана пропорције имају се једно према другом, као збир и разлика другог спољашњег и другог унутрашњег члана њеног.

Правило 5. Више пропорција може се сложити у једну, јер се производ првих чланова има ка производу других чланова, као производ трећих према производу четвртих чланова.

Претпоставка. $a:b=c:d$, $e:f=g:h$.

Да се докаже $ae:bf=cg:dh$.

Доказ. Из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$

множећи леве стране међу собом и десне тако исто биће

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}\ \text{или}$$

$$ae:bf=cg:dh.$$

89. Тумачење. Више једнаких размера чине продужну пропорцију, у којој се први чланови свих размера имају као други чланови њихови. Дакле

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1} \text{ или } a:b:c=a_1:b_1:c_1.$$

Задатак. Претворити више пропорција у једну продужну пропорцију, нпр.

$$1)\ a:b=p:q,\quad 2)\ b:c=r:s,\quad 3)\ c:d=t:u.$$

Решење. Треба из датих пропорција, применом правила *5*, извести такве пропорције да у свима буде a први члан, па уз то још на треће и четврте чланове применити правило *3*. Дакле

$$a:b=p:q=prt:qrt,$$

множ. 1) и 2) $\quad a:c=pr:qs=prt:qst,$

" 1), 2) и 3) $\quad a:d=prt:qsu=prt:qsu,$ најзад је

$$a:b:c:d=prt:qrt:qst:qsu.$$

3. Примена пропорција

Примењени задаци код простих размера.

90. Тумачење. *a*) За неку функцију y каже се да је директно (право) пропорционална према променљивој количини x, кад m пута већој вредности променљиве одговара m пута већа вредност функције; стога је количник обеју сталан број.

$$\frac{y}{x}=k \text{ или } y=kx.$$

Сталан чинитељ k назива се пропорционални чинитељ.

b) За неку функцију y каже се да је индиректно (обрнуто) пропорционална, кад m пута већој вредности променљиве количине одговара m-ти део функције; стога је производ обадвеју сталан.

$$y.x=k \text{ или } y=k.\frac{1}{x}.$$

Из ових тумачења излази:

a) Кад су две врсте бројева право пропорционалне, тада је размера између свака два броја једне врсте једнака с размером између свака два (одговарајућа) броја друге врсте.

b) Кад су две врсте бројева обрнуто пропорционалне, тада је размера између свака два броја једне врсте једнака с обрнутом размером између свака два (одговарајућа) броја друге врсте.

Доказ. *a*) $y_1=kx_1$
$\quad y_2=kx_2$

дакле $\quad y_1:y_2=x_1:x_2$

b) $y_1=k.\frac{1}{x_1}$

$\quad y_2=k.\frac{1}{x_2}$

$$y_1:y_2=\frac{1}{x_1}:\frac{1}{x_2}=x_2:x_1$$

На основу ових правила решавају се задаци простога правила тројног спомоћу пропорција.

Напомена. У пракси се разликују три врсте процента: Процент од сто, кад 100 динара донесу годишње p интереса

" на сто, " $100+p$ " " " " "

" у сто, " $100-p$ " " " " "

Нпр. Неко купи робе за 80 дин. а прода је за 100 динара и каже да је зарадио 20 процената, очевидно ту се мислило у сто, јер зарадити на 80 дин. 20 значи зарадити 25 од сто.

Кад се роба која стаје $133\frac{1}{3}$ дин. прода за 100 дин., онда губитак износи $33\frac{1}{3}$ на сто, што би од сто износило 25 процената.

Постоји дакле једначина:

$$\frac{p}{100}=\frac{p_u}{100-p_u}=\frac{p_n}{100+p_n}$$

и неједначина $\quad p_u<p<p_n$

$$20<25<33\tfrac{1}{3}.$$

Допуна. За једну функцију каже се да је право или обрнуто пропорционална са n-тим степеном променљиве x, кад је $y=k.x^n$, или $y=\frac{k}{x^n}$.

Примењени задаци код сложених размера

91. Решавање задатака, чије количине граде сложене размере — тако звано сложено правило тројно — оснива се на овом правилу:

Кад једна врста бројева зависи од више других врста тако, да она, појединце упоређена са њима, буде с неким право пропорционална а с другим обрнуто, онда је размера између свака два броја прве врсте једнака са сложеном размером начињеном из појединих простих право или обрнуто пропорционалних бројева сваке друге врсте.

Доказ. Нека је функција z право пропорционална с промењљивим количинама x и y, а обрнуто пропорционална с промењљивом u, тада је по чл. 90

$$z=k.x.y.\frac{1}{u},$$

где је k пропорционални чинитељ; јер тада, кад су y и u константне, m пута већој вредности од x припада m пута већа вредност од z итд., дакле, кад се вредности које одговарају једна другој означе једнаким казаљкама имамо:

$$z_1=k.x_1.y_1\frac{1}{u_1},$$

$$z_2=k.x_2.y_2.\frac{1}{u_2};$$

стога је $$z_1:z_2=\frac{x_1y_1}{u_1}:\frac{x_2y_2}{u_2},$$

или $$z_1:z_2=x_1y_1u_2:x_2y_2u_1.$$

Нпр. Ако *20* радника, радећи дневно *12* часова, подигну за *5* недеља насип *375 m.* дуг, за колико ће недеља *12* радника, радећи *10* часова дневно, подићи такав исти насип *600 m* дуг?

20 радн. *12* ч. дневно за *5* нед. *375 m* дужине
12 „ *10* „ „ „ x „ *600* „ „

$$\begin{array}{r} x:5=20:12 \\ 12:10 \\ 600:375 \\ \hline x:1=16:1; \end{array}$$ отуда $x=16$ недеља.

92. а) Кад се прост интерес обележи са i. који доноси капитал k за t година по p процената, тада, за узајамно одређивање тих количина, имамо овај задатак сложеног правила тројног:

100 дин. капит. донесу за 1 год. p дин. интереса
k „ „ „ „ t „ i „ „

$$\begin{array}{r} i:p=k:100 \\ t:1 \\ \hline \end{array}$$

дакле $$i:p=kt:100$$

из које се пропорције добивају познати обрасци за прост интересни рачун, дакле:

$$i=\frac{kpt}{100},\qquad k=\frac{100i}{pt},\qquad t=\frac{100i}{kp},\qquad p=\frac{100i}{kt},$$

б) Рачунање дисконта или есконта.

Који капитал уложен по $p\%$ за t година порасте заједно с интересом на K динара? Овај се задатак може поставити и овако: Неко има да плати K динара после t година; пита се, којом би сумом *(k)* могао данас да одужи тај дуг, који би му се одбило p процената на сто, или што је свеједно, кад би му се дисконтовало d динара?

Тражени капитал k назива се почетна или садашња вредност, дати капитал K назива се будућа или крајња вредност; дисконт се обележава са d.

Очевидно је $k=K-d.....$ 1)

Садашња вредност k мора се тако израчунати, да кад би се дала под интерес по $p\%$ за t година да буде једнака са сумом K. Зато је дисконт

$$d=\frac{kpt}{100},\quad \text{и}$$

кад се ова вредност унесе у једначину 1) биће

$$k=\frac{100\,K}{100+pt}\;.....\quad 2)$$

Сем показанога пра̂вог рачунања дисконта у практици постоји и трговачко рачунање дисконта — дисконт од сто. Оно је практичније, али је мање тачно, јер се рачуна као интерес од назначене суме дуга од дана продаје до рока. Тада се година рачуна у 360 дана а број дана тачно по календару, при чем се крајњи дан не рачуна. Рад би био овакав:

$$d=\frac{Kpt}{100},\quad\text{па је}\quad k=K-\frac{Kpt}{100}=\frac{K(100-pt)}{100}.$$

Правило поделе.

93. Кад дати број треба поделити на више делова, који стоје један према другом као други дати бројеви, онда се то врши правилом поделе или друштвеним рачуном. Бројеви, којима се исказује размера делова, називају се размерни бројеви.

Кад је задан само **ј е д а н** ред размерних бројева, тада се примењује **п р о с т о** правило друштвено; ако ли је дато више редова размерних бројева, примењује се **с л о ж е н о** друштвено правило.

Нека је дато да се **п р о с т и м** **д р у ш т в е н и м** **п р а в и л о м** подели број s по размери бројева a, b, c и d. Ако се тражени делови означе са u, x, y и z, имамо продужну пропорцију:

$$u:x:y:z=a:b:c:d, \qquad \text{или}$$
$$u:a=x:b=y:c=z:d,$$

а одавде према чл. 88 4):

$$\begin{aligned}(u+x+y+z):(a+b+c+d) &= u:a\\ &= x:b\\ &= y:c\\ &= z:d\end{aligned}$$

Али како је по погодби $u+x+y+z=s$, добиће се

$$u=\frac{s}{a+b+c+d}.\,a; \qquad x=\frac{s}{a+b+c+d}.\,b;$$
$$y=\frac{s}{a+b+c+d}.\,c; \qquad z=\frac{s}{a+b+c+d}.\,d.$$

94. С л о ж е н о д р у ш т в е н о п р а в и л о може се свести на просто.

Нека је задато, да се број s подели на три дела x, y, z тако да се ти делови у једној прилици имају као бројеви $a:b:c$, у другој — као бројеви $d:e:f$, и у трећој као $g:h:k$, тада по чл. 88 постоји одношај:

$$x:y:z=adg:beh:cfk.$$

Овај се задатак решава простим правилом друштвеним.

Нпр. Тројица се удруже у неком послу овако: А уложи *8000* динара за 5 месеца, *B 4000* за 6 месеца, *C 2000* за 8 месеца. Посао донесе чисте добити *460* динара; колико добитка припада сваком ортаку?

A 8000 дин. за 5 мес.	$40\cancel{000}$	*5*	*46.5=230*	дин.
B 4000 „ „ 6 „	$24\cancel{000}$	*3*	*46.3=138*	„
C 2000 „ „ 8 „	$16\cancel{000}$	*2*	*46.2= 92*	„
	460:10=46		*460* дин.	

Верижно правило.

95. Кад однoшај између двеју количина није непосредно дат, већ га треба одређивати из читавог низа познатих однoшаја, тада се примењује **в е р и ж н о** **п р а в и л о**. Нпр.

Колико динара сребра има у 125 турских гроша, кад се зна, да у *100* т. гр. има *22,73* дин. злата и да се ажија на злато рачуна по *4%*.

Решење:	*x* дин. ср. има	$=$ *125* т. гр.
кад	*100* т. гр.	$=$ *22,73* дин. зл.
и	*20* дин. зл.	$=$ *20,8* дин. ср.

Изостављајући имена и множећи ове три једначине добива се

$$20.\,100.\,x=20{,}8.\,22{,}73.\,125$$

Одавде је
$$x=\frac{20{,}8.\,22{,}73.\,125}{20.100}=29{,}55 \text{ дин. ср.}$$

Из решења овог задатка изводи се овакав практичан поступак за решавање верижног рачунања:

1) Знак једнакости замењује се усправном цртом;

2) С леве стране црте напише се непозната x са својим именом а с десне задата количина. Испод њих пишу се све посредне количине тако, да се увек почиње лево с оном количином која је с пређашњом десно исте врсте а десно се ставља количина, која је с количином лево једнака по вредности. Тако се наставља дотле, док се најзад не добије десно количина једноимена са x.

3) Производ свих неименованих бројева десно подели се производом свих бројева лево који су испод x; количник је тражена вредност за x. Дакле

x д. ср.	*125* т. гр.
100 т. гр.	*22,73* д. зл.
20 д. зл.	*20,8* д. ср.

$$x=\frac{20{,}8.\,22{,}73.\,125}{20.\,100.}=29{,}55 \text{ дин. ср.}$$

Сви задаци правила тројног, простог и сложеног, решавају се простије и брже по верижном правилу.

Децимални разломци.

96. Тумачење. Разломак, којега је бројитељ неки декадни цео број а именитељ неки степен од *10*, назива се **д е ц и м а л а н** **р а з л о м а к**; сваки други разломак назива се **о б и ч а н** **р а з л о м а к**.

Општи облик једнога децимална разломка је $\frac{A}{10^m}$, где m означава произвољан декадни цео број.

Кад се сваки члан броја A подели именитељем 10^m, децималан разломак добива овакав развијен облик:

$$\ldots\ldots c.10^3+b.10^2+a.10+J+\alpha.\frac{1}{10}+\beta.\frac{1}{10^2}+\gamma.\frac{1}{10^3}+\ldots\ldots,$$

где коефицијенти могу имати вредност $0, 1, \ldots$ до 9.

Нпр. $$\frac{45723}{10^3}=\frac{4.10^4}{10^3}+\frac{5.10^3}{10^3}+\frac{7.10^2}{10^3}+\frac{2.10}{10^3}+\frac{3}{10^3}$$
$$=4.10+5+7.\frac{1}{10}+2.\frac{1}{10^2}+3.\frac{1}{10^3}.$$

И у овој суми је задржан закон грађења декадних бројева утолико што је вредност једне јединице на најближем месту десно десети део вредности, коју има јединица до ње лево. Децимални разломци су стога природно проширење декадне бројне системе, и горњи израз представља најопштији облик декадна броја.

Према томе може се система о месној вредности применити и на децималне разломке, само се место јединицâ мора јасно назначити, што бива стављањем децималне запете иза јединица десно. Ако је децималан разломак мањи од јединице, тада се испред децималне запете меће нула.

Цифре десно од децималне запете називају се децимали.

Број пак, који је лево од децималне запете, значи цео број; прва децимала значи десете делове, друга стоте, трећа хиљадите, четврта десетохиљадите итд.

Последице. 1. Број децималних места децимална разломка $\frac{A}{10^m}$ једнак је с изложитељем степена именитељева.

2. Вредност децимална разломка се не мења, кад се уз децимале десно допише колико се хоће нула.

3. Вредност свакога децимална броја мања је од јединице његова вишега места, што је пред највишом цифром која вреди; нпр. $0,00783<\frac{1}{10^2}$.

Децималне разломке увео је Joh. Regiomontanus; садашњи начин писања Bürgi (1552—1632). Bürgi je писао 23_04, Kepler већ 23,4.

Претварање обичнога разломка у децималан разломак.

97. 1. Да би се обичан разломак $\frac{a}{b}$ претворио у децималан, треба поделити бројитељ a именитељем b, па у количнику ставити децималну запету иза целина, место којих се код права разломка меће нула. Добивеном, као и сваком потоњем остатку дописује се нула, па се дељење наставља док се најзад не сврши без остатка, или, ако то не буде, док се не добије онолико децимала колико се тражи.

Доказ. Зацело је

$$\frac{a}{b}=\frac{a.10^m}{b.10^m}=\frac{a.10^m:b}{10^m}.$$

Ако се сад при прописаном већ поступку за дељење добивеним остацима поступно допише m нула, што је исто, као кад би се бројитељу a у једанпут дописало m нула, тим је a помножено са 10^m; па узимајући онда у количнику $a.10^m:b$ добивених последњих m цифара за децимале, биће тај количник подељен са 10^m.

Нпр. $\frac{3}{4}=3,0:4=0,75$
20
0

$\frac{329}{125}=329:125=2,632$
790
400
250
0

98. 1. Да би се обичан разломак $\frac{a}{b}$ могао тачно претворити у децималан разломак, мора $a.10^m$ при довољно великом m бити дељиво са b. А ово је, кад су a и b релативно прости бројеви, према чл. **58,** 2 само тада могућно, кад је 10^m дељиво са b, то јест кад b нема никаквих других чинитеља сем 2 и 5.

2. У свим случајевима, где именитељ b или нема чинитеља 2 и 5, или сем њих има и других од њих различних простих чинитеља, не може се показаним поступком дељење свршити; стога се добива бескрајан децималан разломак. Ако би се тај разломак код m-тог децималног места прекинуо, тада би разлика између обичног разломка $\frac{a}{b}$ и приближна крајног децималног разломка $\frac{p}{10^m}$ била мања од једне јединице последњега децималног места.

$$\frac{a}{b}-\frac{p}{10^m}<\frac{1}{10^m}.$$

Доказ. Ако $a.10^m$ није дељиво са b, то се количник може сматрати као мешовит број. Ако се дакле стави

$$\frac{a10^m}{b}=p+\frac{r}{b},$$

где је $r<b$, то је

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{10^m}+\frac{r}{b.10^m},\quad \text{дакле}\quad \frac{a}{b}-\frac{p}{10^m}=\frac{r}{b.10^m}.$$

Па како је $r<b$, дакле $\frac{r}{b}<1$, то мора бити $\frac{r}{b.10^m}=$

$$=\frac{a}{b}-\frac{p}{10^m}<\frac{1}{10^m}.$$

Разлика између обична разломка и на m места развијеног децималног разломка може се начинити мањом од сваког макако малог броја, пошто се m може узети колико се хоће велико а стога $\frac{1}{10^m}$ да буде колико се хоће мало. Отуда излази: $lim\ \frac{p}{10^m}=$ $=\frac{a}{b}$ за $lim\ m=\infty$, то јест обичан разломак $\frac{a}{b}$ је гранична вредност развијенога бескрајна децимална разломка. Ово значење има да се даде и правилу: Обичан разломак једнак је с развијеним бескрајним децималним разломком.

Ако разломак, који се не може тачно представити децималним разломком, буде приближно претворен у децимални, онда се мора настављајући дељење, почем остатак бива све мањи од делитеља, добити један од пређашњих, зато се, почевши од њега, јављају исте цифре у количнику и исти остаци као и пређе. Нпр.

$$\frac{18}{37}=18:37=0,486486\ldots\qquad \frac{56}{75}=56:75=0,74666\ldots$$

Десетни разломци, код којих се нека множина цифара понавља истим редом, назива се периодан разломак, а низ цифара, који се непростано понавља, назива се период.

Почем је за именитељ b могућно само $b-1$ различних остатака, то период може имати највише $b-1$ место.

Код периодних децималних разломака разликују се два случаја: или период почиње одмах за децималном запетом, или пред периодом има још других децимала. У првом случају је децималан разломак чисто периодан, у другом мешовито периодан. Непериодне цифре називају се и претпериод.

Уобичајено је да се период пише само једанпут, али се изнад прве и последње цифре његове меће по једна тачка, или се, што је практичније, период заграђује.

Претварање децималног разломка у обичан разломак.

99. 1. Крајан децималан разломак претвара се у обичан разломак, кад се напише у облику обична разломка,

па се, ако је могућно, скрати. Нпр.

$$0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4},\qquad 31,325=31\frac{325}{1000}=31\frac{13}{40},$$

2. *a)* Чисто периодан децимални разломак претвара се у обичан разломак кад се за бројитељ узму периодне цифре а за именитељ — онолико деветица, колико је периодних цифара узето.

Доказ. Ако се периодне цифре означе са b а њихов број са n, тада је тражени периодни децималан разломак:

$$x=\frac{b}{10^n}+\frac{b}{10^{2n}}+\frac{b}{10^{3n}}+\frac{b}{10^{4n}}+\ldots$$

Кад се овај израз помножи са 10^n биће:

$$x.10^n=b+\frac{b}{10^n}+\frac{b}{10^{2n}}+\frac{b}{10^{3n}}+\ldots$$

Кад се од овог израза одузме пређашњи излази:

$$x.10^n-x=b,\ \text{или}\ (10^n-1)x=b,$$

а одавде
$$x=\frac{b}{10^n-1}.$$

Нпр. $0,(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $15,(351)=15\frac{351}{999}=15.\frac{13}{37}$.

b) Сваки обичан разломак, чиј је именитељ релативно прост спрам 10, претвара се у чисто периодан децималан разломак.

Доказ. Кад се узастопни степени 10, 10^2, 10^3,... поделе са b, то се мора од неког извесног степена ранији већ остатак поновити, јер има само $b-1$ различних остатака. Нека су сада 10^m и 10^{m+n} најнижи степени, који дају тај остатак. Тада је разлика $10^{m+n}-10^m=10^m(10^n-1)$ дељива са b и почем 10 и 10^m нису дељиви са b, то мора бити 10^n-1 дељиво са b. Дакле се дати разломак $\frac{a}{b}$ може довести на облик $\frac{c}{10^n-1}$. Али се овај последњи разломак, према пређашњем правилу, претвара у чисто периодан децимални разломак са периодом c од n места.

3. *a)* Мешовито периодан децимални разломак претвара се у обичан разломак, кад се децимали пред периодом заједно с њим сматрају као цео број, па се од њега одузму децимали пред периодом, опет сматрани као цео број; добивена разлика биће бројитељ траженом разломку, а именитељ

ће имати толико деветица, колико је периодних цифара и за њима толико нула колико је непериодних цифара.

Доказ. Нека су периодне цифре b а њихов број n, даље нека је a претпериод а број његових цифара m, тада је тражени децимални разломак

$$x=\frac{a}{10^m}+\frac{b}{10^{m+n}}+\frac{b}{10^{m+2n}}+\frac{b}{10^{m+3n}}+\dots$$

Кад се овај израз помножи са 10^m биће

$$x.10^m=a+\frac{b}{10^n}+\frac{b}{10^{2n}}+\frac{b}{10^{3n}}+\dots$$

затим према 2) $\quad x.10^m=a+\dfrac{b}{10^n-1}=\dfrac{a.10^n-a+b}{10^n-1}$

дакле $\quad x=\dfrac{(a.10^n+b)-a}{(10^n-1)10^m}$

Нпр. $\quad 0{,}2(15)=\dfrac{215-2}{990}=\dfrac{213}{990}=\dfrac{71}{330}$

b) Из чл. **98,** 1 и чл. **99,** 2 *b)* излази непосредно:

Обичан разломак, чиј именитељ није релативно прост спрам *10*, нити се садржава ни у једном степену од *10*, претвара се у мешовито периодан децимални разломак.

Скраћено рачунање с непотпуним бројевима

(Понављање из нижег ступња)

100. Кад се хоће да рачуна с бескрајним децималним разломком, тада се он мора код извесног места да прекине. Тако добивени крајни децимални разломак назива се непотпун децималан разломак; његова је вредност приближна вредности бескрајнога децимална разломка. Разлика тих двеју вредности назива се погрешка непотпуна децимална разломка. Погрешка та, према чл. **98,** 2 мања је од једне јединице последњега задржана места. Али се постиже, да та погрешка буде мања од пола јединице последњега задржана места, кад се последња задржана цифра остави непромењена, ако је прва изостављена цифра мања од 5, напротив она се повећава за једну јединицу, ако је прва изостављена цифра већа од 5. Тај се поступак назива кориговање (поправљање).

Тако се исто могу скраћивати и потпуни (коначни) децимални разломци па и цели бројеви.

Сви мерењем добивени бројеви према својој природи непотпуни су бројеви. Па и код њих се претпоставља, да им је погрешка мања од пола јединице последњега места. Тим се оправдава при мерењу употребљавани поступак. Ако се нпр. хоће дужина школске клупе да измери у *cm*, тада се на мерилу прочита број целих сантиметара и тај број запише, ако се види да је остатак мањи од $\frac{1}{2}$ *cm*, али ће се повисити ако је остатак већи од $\frac{1}{2}$ *cm*.

Да је неки број непотпун обележава се код децимална разломка неколиким тачкама, а код цела броја тим, што се на место непознатих цифара дописују ситне нуле.

Нпр. $\quad 3{,}141\dots \quad ; \quad 735_{000}.$

Уобичајено је да се несигурна места подвлаче и да се „за приближно једнаке бројеве“ узима знак $\backsim$. Нпр. $3{,}1(6)\backsim 3{,}16\underline{2}$.

Тачност непотпуна броја одређује се количником из броја подељена јединицом најнижега места; према томе, од два непотпуна броја онај је тачнији у којем има већи број јединица најнижега места.

$$\frac{3{,}141}{0{,}001}=3141;\qquad \frac{735000}{1000}=735$$

$3{,}141\dots$ тачнији је од 735_{000}.

При сваком рачунању с непотпуним бројевима несигуран је резултат на сваком месту, на којем се налазе несигурне цифре. Стога се скраћено рачунање удешава тако, да се уопште још само највиша од оних несигурних места добију, јер би израчунавање даљих места било бесциљно.

Скраћено сабирање и одузимање

101. *a)* **Сабирање.** Најпре се саберу јединице десно од највиших несигурних места, па се добивени збир узме за поправку најближега вишег места од којега сабирање почиње.

b) **Одузимање.** Одузима се тек онда, кад се један број скрати на онолико децимала колико их има други број.

Ако је тражени збир или разлика крајни резултат каквог рачунања, скраћује се с поправком за једно место.

Примери. *a)*

$$\begin{array}{rl}
3{,}872 & \\
15{,}7\dots & \\
9{,}5555\dots & \text{(период.)}\\
8{,}32\dots & \\
6{,}7234 & \\
\hline
44{,}2\dots\dots & 16{,}2 \text{ за корект.}
\end{array}$$

Резултат $\quad 44{,}\dots\dots$

b) $\quad 7{,}49\dots - 3{,}5732\dots$

$$\begin{array}{r}
7{,}49\dots\\
3{,}57\dots\\
\hline
3{,}92\dots\\
3{,}9\dots
\end{array}$$

Скраћено множење

102. Кад се помножи најнижа цифра (цифра најниже месне вредности) једног чинитеља највишом цифром другог чинитеља, тада се добију два места, која су поред најнижих места у производу несигурна; стога се производ одређује на више од она два места. За тај циљ служимо се овако:

1. Узме се тачнији број за множитељ, па се његова највиша цифра потпише испод најниже цифре множеникове а уз ону цифру множитељеву напишу се остале његове цифре обрнутим редом.

2. Са сваком цифром обрнуто написана множитеља помножи се цифра над њом и све редом више цифре множеникове па се на тај начин добивени делимични производи тако напишу да њихове најниже цифре дођу једна под другу, почем се сви они завршују истим месним вредностима. Али да би најнижа цифра свакога делимична производа била поузданија, најпре се помножи прва изостављена цифра множеникова и тај се производ дода као поправка.

3. Скраћени делимични производи се саберу.

Ако је добивени производ резултат неког рачунања, онда се он скраћује поправком за једно место.

Допуна. Кад се хоће производ скраћено да одреди на какво више *прописано* место, потпишу се јединице множитељеве испод онога места множеникова, које се у производу тражи као најниже, па се даље ради као и пре.

Примери. 1. $2{,}916\,.. \times 4{,}378\,..$ 2. $386 \times 25{,}74\,..$

$2{,}916\,.. \times 4{,}378\,..$	$386 \times 25{,}74\,..$
8734	$= 25{,}74\,.. \times 386$
11664	683
875	7722
204	2059
23	154
$12{,}766\,..$	$9935\,..$ Рез. 994_0

Резултат $12{,}77\,..$

Скраћено дељење

103. Скраћено дељење оснива се на размишљању, да се непотпуном броју (дељенику, делитељу, остатку) не смеју дописивати нуле. Његов је поступак овакав:

1. Скрати се *a)* дељеник, ако је тачнији од делитеља, поправком, или *b)* делитељ, ако је тачнији од дељеника, изостављајући десно толико цифара, да у оба случаја после скраћивања дељеник буде у исто време и први делимични дељеник, који припада делитељу. Затим се одреди месна вредност прве цифре количникове и изврши прво дељење.

2. При сваком потоњем дељењу, уместо да се остатку спушта нова цифра, или да му се нула допише, у делитељу се изостави једна цифра десно, али се сваком новом цифром количниковом најпре помножи прва изостављена цифра у делитељу па се тако добивени резултат узме као поправка за производ из скраћена делитеља и дотичне цифре количникове.

3. Овај се поступак наставља, док се дељењем првом цифром делитељевом рачунање не заврши.

Ако је последњи остатак већи од половине последњег делитеља, тада се последња цифра количникова повиси за једну јединицу.

Допуна. Кад се хоће количник скраћено да одреди на какво више *прописано* место, тада се одреди број цифара количниковових које вреде па се делитељ скрати на толико исто места а према томе и дељеник.

Примери.

1.) $0{,}287 : 5{,}342\,..$

$0{,}28700 : 5342\,.. = 0{,}05372$

1990

387

13

2

2) $0{,}287536\,.. : 5{,}342\,...$

$0{,}28754\,... : 5{,}342\,...$

итд.

3) $27{,}85\,.. : 3{,}14|159\,.. = 8{,}86$

$2{,}72$ (поправ.) $8{,}87$

21

2

ТРЕЋИ ОДЕЉАК

Једначине првога степена

104. Изједначивање двају бројних израза, коју имају једнаку вредност, назива се *једначина*. На пр.

$$a = a, \qquad (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4, \qquad 5x - 8 = 3x.$$

Количине, које се изједначују, називају се *стране* једначине, а оне могу појединце опет бити састављене из више чланова. У једначини $5x - 8 = 3x$ лева је страна $5x - 8$, а десна $3x$; лева страна је састављена из два члана: $5x$ и -8.

Једначине се разликују на *идентичне* (истоветне) и *погодбене* једначине.

Једначина, у којој је бројни израз изједначен са самим собом или с простим својим преображајем, идентична је једначина; н. пр. $a=a$, $(x+2)^2=x^2+4x+4$. Идентична једначина је тачна за сваку произвољну вредност, која би се давала општим бројевима што се у њој налазе. Сваки образац за аритметичне операције представља идентичну једначину.

Једначина, која је тачна само за одређене вредности једнога или више општих бројева што се у њој налазе, назива се погодбена једначина, или и само једначина у ужем смислу. Нпр. једначина $5x-8=3x$ тачна је само ако се за x узме вредност 4.

Ови општи бројеви, за које мало час споменуте вредности треба да се одреде, назвају се непознате и обично се бележе последњим словима азбуке x, y, z,... Кад у једначини има више општих бројева, тада се може макоји од њих сматрати као познат а остали као непознати.

Вредности непознатих, које, кад се у једначини замене, чине да једначина буде идентична или које једначину задовољавају, називају се корени једначине; одредити те вредности значи решити једначину.

Према томе у погодбеној једначини знак једнакости не значи „једнако је" већ „треба да је једнако".

105. Према броју непознатих, што их има у једначини, оне се разликују на једначине с једном непознатом, са две и с више непознатих. Нпр. $5x-8=3x$ једначина је с једном непознатом, $5x-3y=8$ са две, а $7x=3y-5z+5$ једначина са три непознате.

Ако се непозната јавља само као основа каквога степена, једначина се назива алгебарска; све друге једначине су трансцендентне. Наука о алгебарским једначинама у ужем смислу назива се алгебра. У ширем смислу под алгебром се разуме општа аритметика.

Реч алгебра води порекло од арапске речи aljebra (обнављање), чиме је назначавано довођење једначине на одређени основни облик.

Алгебарска једначина је уређена, кад је лева страна уређени полином по степенима непознатих, при чем је коефицијент првога члана $+1$, а десна страна је једнака 0, нпр.

$$x^3+2x^2+2x+1=0.$$

Изложитељ степена непознатих је редни изложитељ или, кад је више непознатих у једноме члану, тада је збир њихових изложитеља редни изложитељ тога члана. Ако је највиши редни изложитељ уређене једначине 1, једначина је првога степена или линеарна, кад је изложитељ 2, онда је другога степена или квадратна, ако је 3, једначина је трећега степена или кубна, а 4, једначина је четвртога степена или биквадратна, или уопште кад је изложитељ n једначина је n-тога степена.

Једначина, у којој су сем непознатих само посебни бројеви назива се бројна једначина; нпр. $4x-3=5$. Једначина, у којој се сем непознатих налазе и општи бројеви, назива се општа једначина; нпр. $ax-b=cx+d$.

I. Једначине првога степена с једном непознатом

106. Решавање једначина првога степена оснива се на четири правила о вези једнаких бројева спомоћу истих рачунских радња. Она овде гласе овако:

1. Једначина се не мења, кад се и једној и другој страни њеној исти број дода или кад се од обеју страна исти број одузме.

По овом правилу може се сваки члан једначине пренети с једне стране на другу, кад му се промени знак, а једнаки чланови с једнаким знацима у обадве стране једначине могу се са свим изоставити.

Нпр. из $x+a=b$ излази $x=b-a$,
„ $3x+m=a+m$ „ $3x=a$.

2. Једначина се не мења, кад се обе стране њене истим бројем помноже.

Спомоћу овога правила може се свака једначина, у којој има разломака, ослободити именитеља, а нарочито коефицијента, ако је негативан, множећи обе стране са -1, чиме постаје позитиван.

Нпр. из $\frac{x}{a}-b=c$ излази $x-ab=ac$,
„ $-x=-5$ „ $x=5$.

3. Једначина се не мења, кад се обе њене стране истим бројем поделе.

Према овом правилу једначина се може скратити, кад обе њене стране имају заједнички чинитељ, а нарочито непозната се може ослободити својега сачинитеља, ако је различан од 1.

Нпр. из $6x=4$ излази $3x=2$,

„ $3x=2$ „ $x=\frac{2}{3}$.

Допуна. Кад се лева страна једначине, која је на нулу сведена, може раставити на више чинитеља, који садржавају непознату, тада је једначина, према чл. **32.** допуна *3*, задовољена, кад се сваки појединн чинитељ изједначи с нулом. На тај се начин дата једначина распада на више једначина нижег степена, чији корени задовољавају и дату једначину. Нпр.

$$x^2-4=0 \text{ или } (x+2)(x-2)=0 \text{ распада се у две:}$$
$$x+2=0 \text{ и } x-2=0.$$

К а д д а к л е о б е с т р а н е к а к в е ј е д н а ч и н е и м а ј у з а ј е д н и ч к и ч и н и т е љ у к о ј е м с е н а л а з и н е п о з н а т а, т а д а с е с м е т и м ч и н и т е љ е м д е л и т и с а м о т а к о, к а д с е у и с т о в р е м е т а ј ч и н и т е љ и з ј е д н а ч и с н у л о м. На тај начин се добију две једначине, чији корени задовољавају дату једначину. Нпр.

$$(x-1)(x-2)=3(x-1) \text{ распада се у}$$
$$x-1=0 \text{ и } x-2=3, \text{ где су корени}$$
$$x=1 \text{ и } x=5.$$

107. Према правилима у чл. **106.** изводи се овакав п о с т у п а к з а р е ш а в а њ е ј е д н а ч и н а п р в о г а с т е п е н а с ј е д н о м н е п о з н а т о м:

1. Кад у једначини има разломака, именитељи ће се уклонити, кад се обе стране једначине помноже најмањом заједничком множином свих именитеља. (Уклањање разломака).

2. Кад у једначини има заграђених израза, заграде ће се уклонити, кад се назначене рачунске радње између заграда изврше. (Разграђивање.)

3. Сви чланови с непознатом преносе се на једну страну (чешће на леву) једначине па се своде; остали се чланови преносе на другу страну па се и они такође сведу. (Преношење и свођење.)

4. Непозната се ослобађа својег коефицијента, делећи њим обе стране једначине. (Дељење сачинитељем непознате.)

Овим се преображајем добива најзад као решење $x=a$, где је x непозната а израз a састављен из самих познатих бројева.

108. Ј е д н а ч и н а п р в о г а с т е п е н а с ј е д н о м н е п о з н а т о м и м а с а м о ј е д а н к о р е н.

Општи облик једне линеарне једначине је

$$ax+b=0.$$

Њен је корен $$x=-\frac{b}{a}.$$

Допуна. Ако је $a=0$, b крајан и од 0 различан број, тада, према чл. **40,** 8, једначину не задовољава н и к а к а в к р а ј а н б р о ј.

Ако је $a=0$, и $b=0$, тада је $x=-\frac{0}{0}$ (неодређен).

Тј. дата једначина није погодбена већ идентична.

Проба. Да бисмо се уверили о тачности решења, замени се нађена вредност за непознату у датој једначини па се изрази с обе стране доведу на најпростији облик. Ако је резултат с обе стране исти, тј. ако је једначина начињена идентичном, тада је решење добро.

Примери.

1) $$\frac{7}{x+1}-\frac{11}{2x+2}=\frac{5}{2}$$
$$14-11=5x+5$$
$$5x=-2$$
$$x=-\frac{2}{5}.$$

Проба: $$\frac{7}{-\frac{2}{5}+1}-\frac{11}{-\frac{4}{5}+2} \;\Big|\; \frac{5}{2}$$
$$\frac{35}{3}-\frac{55}{6} \;\Big|\; \frac{5}{2}$$
$$\frac{15}{6} \;\Big|\; \frac{5}{2}$$
$$\frac{5}{2}=\frac{5}{2}.$$

2) $$\frac{a}{x}-a+\frac{b}{2}=\frac{b}{2x}$$
$$2a-2ax+bx=b$$
$$bx-2ax=b-2a$$
$$(b-2a)x=b-2a$$
$$x=1$$

или $$\frac{a}{x}-\frac{b}{2x}=a-\frac{b}{2}$$
$$\frac{2a-b}{2x}=\frac{2a-b}{2}$$
$$\frac{1}{x}=1$$
$$x=1$$

Други пример показује, да је понекад подесно одступити од прописаног поступка у чл. **107.**

II. Једначине првога степена са две или с више непознатих

109. За једначину се каже да је одређена, кад она за сваку непознату даје само један корен или ограничен број корена напротив, једначина је неодређена, кад она за сваку непознату даје бескрајно много корена.

Једна једначина са две непознате неодређена је; за једну непознату може се узимати свака произвољна вредност, па замењујући је у датој једначини решити добивену једначину те се тако одређује вредност за другу непознату; једна је непозната дакле функција друге непознате.

Неодређености неће бити, ако је дата и друга једначина с истим непознатима а под погодбом: да се за обе непознате одреде оне вредности, које ће обе једначине у исто време задовољавати. Обе такве једначине чине систем једначинâ а обе оне вредности једно решење њихово или један спрег коренâ. Решење се добива, кад се једна непозната избаци (елиминује), то јест, кад се из обеју датих једначина изведе трећа, елиминациона једначина, у којој се она непозната више не налази. Решењем елиминационе једначине добива се вредност за другу непознату, па заменом те вредности у једној од датих једначина или поновном применом елиминационог поступка може се прва непозната одредити.

Кад су обе једначине линеарне, таква је и елиминациона једначина, о чем ћемо се одмах уверити; стога има само један спрег корена, који задовољава дате једначине.

110. Методе елиминовања (избацивања)

1. Метода упоређивања (компарација). Одреди се вредност непознате из обеју једначина, ове се вредности изједначе, а добивена једначина, у којој је сада само друга непозната, реши.

Пример. $3x+5y=94$ одавде $y=\dfrac{94-3x}{5}$

$2x-y=15$ „ $y=2x-15$

дакле

$$\frac{94-3x}{5}=2x-15$$
$$94-3x=10x-75$$
$$13x=169$$
$$x=13$$
$$y=2.13-15=26-15=11.$$

2. Метода замене. Одреди се вредност једне непознате из једне једначине па се она замени у другој једначини; тако се добије једна једначина с једном само непознатом, која се тада реши.

Пример.
$$6x-13y=48$$
$$2x+3y=16.$$

Из прве је једначине $x=\dfrac{48+13y}{6}$; кад се ова вредност замени у другој једначини, биће

$$2.\frac{48+13y}{6}+3y=16,\ \text{одавде је}\ y=0.$$

Ако се ова вредност од y замени у изразу

$$x=\frac{48+13y}{6},\ \text{наћи ће се}\ x=\frac{48+13.0}{6}=8.$$

3. Метода једнаких коефицијената. Доведу се обе једначине на облик $ax+by=c$, па се изједначе коефицијенти оне непознате, у обе једначине, која се хоће да избаци, множењем подесним, по могућству малим, чинитељем, и онда се нове једначине саберу или одузму, према томе да ли су знаци тих коефицијената неједнаки или једнаки; и тако се добивена једначина с једном непознатом реши.

Примери.

1.
$$\begin{array}{rl} 4x+19y=11 & \mid\ 3 \\ 6x-5y=-17 & \mid -2 \\ \hline 57y+10y=33+34 & \\ 67y=67 & \\ y=1; & \\ 4x+19.1=11 & \\ 4x=-8 & \\ x=-2. & \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rl|l} ax+by=c & \mid\ b' & -a' \\ a'x+b'y=c' & \mid -b & a \\ \hline ab'x-a'bx=b'c-bc' & & \end{array}$$
$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b};$$
$$-a'by+ab'y=-a'c+ac'$$
$$y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

4. Метода неодређених коефицијената. (Безутова метода). Пошто су обе једначине доведене на облик $ax+by=c$, помножи се једна једначина неодређеним бројем m, па се, у том облику, дода другој једначини. Ако се сад m тако изабере, да коефицијент непознате коју треба избацити буде $=0$, онда се може из нове једначине одредити друга непозната.

Пример
$$3x+4y=24,$$
$$5x-3y=11.$$

Кад се прва једначина помножи са m и дода другој биће

$$(3m+5)x+(4m-3)y=24m+11.$$

Да би се y избацило, треба да је $4m-3=0$, дакле $m=\frac{3}{4}$; тада је

$$\left(3\cdot\frac{3}{4}+5\right)x=24\cdot\frac{3}{4}+11$$

а одавде је $x=4$. Ако се избаци x, кад се стави $3m+5=0$, дакле $m=-\frac{5}{3}$, биће $y=3$.

Допуне. *a)* Која је од четири методе елиминовања за сваки посебан случај најподеснија одлучују особине коефицијената непознатих.

b) Ако се у датим једначинама свуда јављају исте везе непознатих, нпр. њихове реципрочне вредности, онда је најпростије, саме те реципрочне вредности сматрати као прâве непознате а из њих накнадно израчунати првобитне непознате. Нпр.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y-1}=13 \text{ и } \frac{5}{x}-\frac{2}{y-1}=4.$$

Кад се стави $\frac{1}{x}=x'$ и $\frac{1}{y-1}=y'$, биће

$$2x'+3y'=13 \text{ и } 5x'-2y'=4,$$

па је $x'=2$, $y'=3$, одакле је $x=\frac{1}{2}$, $y-1=\frac{1}{3}$, дакле $y=1\frac{1}{3}$.

c) Корени једначина $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$ јесу разломци с једнаким именитељима. Именитељ се добива из коефицијената непознатих по прегледу 1. Бројитељи од x и y добивају се из именитеља, кад се коефицијенти од x односно од y замене слободним члановима. Они се дакле граде по прегледу 2 и 3.

$$1.\ \begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ a' & & b' \\ - & & + \end{matrix} \qquad 2.\ \begin{matrix} c & & b \\ & \times & \\ c' & & b' \\ - & & + \end{matrix} \qquad 3.\ \begin{matrix} a & & c \\ & \times & \\ a' & & c' \\ - & & + \end{matrix}$$

111. Из општих једначина у чл. **110,** *3*

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$

добивене вредности

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}; \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

показују, да има случајева, у којима обе дате једначине нису у складу.

1. Вредности за x и за y биће неодређене, кад је $ab'=a'b$ и $b'c=bc'$ а отуда и $ac'=a'c$ јер је тада $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$. Овај случај наступа свагда, кад је једна једначина од друге зависна. Јер ако се стави $a=a'm$, где онда буде и $b=b'm$ и $c=c'm$ тада дате једначине добивају облик:

$$a'mx+b'my=c'm,$$
$$a'x+b'y=c',$$

одакле се види, да је прва једначина зависна од друге, јер је из ње и постала множењем са m.

2. Обе дате једначине не допуштају коначнога решења кад је у горњим изразима за x и за y именитељ $=0$, а бројитељи од 0 различни, дакле кад је $ab'=a'b$, а напротив $bc'\gtrless b'c$, јер се за x добива вредност облика $\frac{A}{0}$, која нема смисла (чл. **40,** 8). Овај случај наступа увек, кад су дате једначине једна другој супротне. Јер ако се стави $a=a'm$, дакле и $b=b'm$, тада дате једначине добивају облик:

$$a'mx+b'my=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

одакле би изишло да је $c'm=c$, али баш у овом је супротност, пошто по претпоставци треба да је $bc'\gtrless b'c$, дакле би морало бити $\frac{bc'}{b'}\gtrless c$, или $c'm\gtrless c$.

Стога се из две једначине са две непознате могу вредности тих непознатих одредити само онда, кад су обе једначине једна од друге независне и кад једна другој нису супротне.

112. Да би се одредиле три непознате или и више њих, мора бити задато управо толико једначина независних једне од других и да једна другој нису супротне.

Да би се решио систем од n линеарних једначина са n непознатих, избаци се из сваке две задате једначине иста непозната; на тај се начин добије $n-1$ линеарна једначина са $n-1$ непознатих. Овај се поступак наставља дотле, докле се најзад не добије само једна линеарна једначина с једном непознатом, из које се вредност те непознате израчуна. Нађена вредност замени се у једној од најближих двеју пређашњих једначина, те се одатле одреди друга непозната. Обе нађене вредности замењују се затим у једној од пређашњих једначина итд., док се на тај начин не одреде поступно вредности свих непознатих.

Али се може тако исто применити и метода неодређених коефицијената, ако се једначине, изузев само једну, помноже редом неодређеним бројевима m, n,... па се оне у таквом облику саберу с оном непромењеном једначином. На тај начин добива се нова једначина, из које се може одредити свака непозната, кад се коефицијенти осталих непознатих ставе $=0$, за чије се одређивање добије толико једначина, колико има неодређених коефицијената.

Из обеју метода непосредно је јасно, да је један систем од n независних линеарних једначина са n непознатих задовољен само једним јединим спрегом корена̄.

Ако је дато мање једначина но што има непознатих, тада је тај систем једначина неодређен; ако је дато више једначина но непознатих, онда је он преодређен, то јест уопште је решење немогућно. Ако су нпр. дате три једначине са две непознате, тада корени обеју првих једначина уопште не задовољавају трећу једначину.

Пример.

$$8x+5y+2z=24,$$
$$6x-3y+z=3,$$
$$4x+9y-6z=4.$$

Кад се хоће, да се ове једначине реше методом неодређених коефицијената, треба прву помножити са m, другу са n па добивене две једначине додати трећој. Тада ће бити:

$$(8m+6n+4)x+(5m-3n+9)y+(2m+n-6)z=24m+3n+4.$$

Да би се из ове једначине одредило x, ставља се

$$5m-3n+9=0 \text{ и } 2m+n-6=0,$$

одакле је $m=\frac{9}{11}$ и $n=\frac{48}{11}$. Заменом ових вредности у пређашњој једначини добива се

$$\left(8.\frac{9}{11}+6.\frac{48}{11}+4\right)x=24.\frac{9}{11}+3.\frac{48}{11}+4,$$

а одавде је $x=1$.

Сличним путем налази се $y=2$ и $z=3$.

III. Примена једначина првога степена

113. Погодбене једначине служе за решавање задатака чисте и примењене аритметике. Рад алгебре при том је тројак:

1. Постављање једне или више потребних једначина, то јест пренашање погодаба задатка из обичнога говора у говор алгебарских знакова;

2. Решавање постављених једначина;

3. Дискусија или тумачење добивених резултата, где се испитују разни случајеви који могу да наступе и погодбе за могућност решења задатка.

За постављање једначина не могу се утврђивати никаква општа правила; то је посао досетљивости, а у том се може добити лакоћа само многобројним вежбањем. За почетнике може у неколико послужити као упут ово правило: треба пре свега задатак сматрати као решен а са непознатом поступати онако, како се погодбама у задатку тражи; на тај се начин за једну исту количину добивају два израза различног облика, који изједначени дају тражену једначину. Дискусија вреди нарочито онда, кад је задатак општег значаја или кад је решење негативно.

114. Примери.

1. A има a година, а B има b година; после колико ће година A бити двапут старији од B?

После x година A ће имати $a+x$ година, а B $b+x$ година; стога је

$$a+x=2(b+x), \text{ а}$$
$$x=a-2b.$$

Дискусија. Ако је овде $a<2b$, онда је $x=-(2b-a)$, дакле негативно. Почем негативан број година нема никаква смисла, то је у овом случају решење предложеног задатка немогућно. Али кад би се у горњој једначини ставило $-x$ на место x, добило би се

$$a-x=2(b-x), \text{ и}$$
$$x=2b-a.$$

Кад би се дакле питало: Пре колико је година био A двапут старији од B? на то питање даје решење последња једначина $x=2b-a$, то јест пре $2b-a$ година.

Апсолутна вредност негативна корена неке једначине првога степена задовољава другу једначину, која постаје из прве променом знака непознатој, и може бити решење задатка, у којем се исказ датога задатка промени у супротном смислу.

2. Два тела K' и K'' крећу се по правој линији истим правцем (десно) сталним брзинама c' и c'', па заједно прођу кроз тачке A' и A'', од којих је A' за d јединица улево од A''. После колико (x) ће се јединица времена та тела сустићи?

K' прелази за x јединица времена $c'x$ јединица дужине
K'' „ „ x „ „ $c''x$ „ „

Почем се оба тела сустижу у некој тачки M, то су у том моменту она подједнако удаљена од A' (или од A''); стога је

$$A'M = A''M + A'A'' \quad \text{или} \quad A''M = A'M - A'A''$$
$$c'x = c''x + d \qquad\qquad c''x = c'x - d$$

$$\text{дакле } x = \frac{d}{c' - c''}.$$

Дискусија. *a)* Догод је $c' > c''$, x је позитивно, те има одређено време, после којега се тела сустижу. Ако је $c' = c''$, дакле $c' - c'' = 0$, биће $x = \frac{d}{0}$; решење је немогућно. Оба тела држају стално даљину d. Ако је $c' < c''$, биће $x = -\frac{d}{c'' - c'}$, одакле излази, да је решење задатка немогућно онако како је постављен, што је већ и по себи јасно, почем се тело K' (улево) спорије креће од (предњега) K'', дакле се она не само неће сустићи, већ ће се све више и више удаљавати. А да би се и негативној вредности од x дао значај, треба само променити исказ датом задатку у супротном смислу, тј.: пре колико се јединица времена оба тела сустигла? Онда апсолутна вредност од x даје решење тако промењеном задатку и исказује да се оба тела беху сустигла пре $\frac{d}{c'' - c'}$ јединица времена.

3. Два тела крећу се једновремено из две тачке, чија је даљина d, са сталним брзинама c' и c'' једно према другом. Кад ће се срести?

Означимо време од почетка кретања до сусрета са x. За то време пређе прво тело пут $c'x$ а друго $c''x$. Оба се тела сусрећу у некој тачки, кад је збир њихових путева једнак с раздаљином од полазног места; дакле $c'x + c''x = d$, стога

$$x = \frac{d}{c' + c''}.$$

Овај се резултат добива непосредно из пређашњег (пример 2), кад се брзина другога тела узме негативно, јер је правац његова кретања супротан кретању првог тела.

Једначине у примеру 2. и 3. могу служити и за одређивање какве друге количине. Стога алгебарско решење некојег општег задатка не даје само на одговор на првобитно стављен задатак, већ оно даје уједно решење за читаву групу сродних задатака и показује унутрашњу везу, што је међу њима; а нарочито негативне вредности служе на то, да се уклоне ограничења, која су задатку стављена, да би тим био потпуно решен у свој општности.

4. Имају две ствари исте врсте; нека је првој вредност јединице $= a$, другој $= b$. Нека се од обеју ствари начини смеса, која има m јединица, а свака јој има вредност c. Колико јединица треба узети од сваке ствари за ту смесу?

Претпоставља се, да је вредност смесе једнака с вредношћу употребљених ствари.

Ако је x множина јединица, које треба узети од прве ствари, а y множина јединица, што се морају узети од друге ствари, онда је

$$x + y = m \quad \text{и} \quad ax + by = cm, \quad \text{стога је}$$
$$x = \frac{c - b}{a - b} \cdot m, \qquad y = \frac{a - c}{a - b} \cdot m.$$

Тражење размере мешања од обеју количина $x : y = (c - b) : (a - c)$ чини тако звани алигациони рачун или правило смесе.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК

Степеновање, кореновање и логаритмовање

Рачунске радње трећега ступња

I. Степени

115. Тумачење. Број a подићи на n-ти степен или степеновати га са n значи, ставити га n пута као чинитељ (чл. **33**). Број a је основа или корен степенов, n изложитељ степенов и тражени број n-ти степен од a. То се означава овако: $a^n = p$. Степен је дакле производ једнаких чинитеља. Једнаки чинитељ назива се основа, а број чинитеља изложитељ.

Последице.

a) $1^n = 1$. *b)* $0^n = 0$.

Допуна. Споменуто тумачење има смисла само тако, ако је изложитељ цео позитиван број и > 1.

Правила за рачунање

116. Степени исте основе могу се помножити, кад се заједничка основа степенује збиром изложитеља. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Доказ у чл. **34**.

Из овога правила и из дефиниције излази

$$a^1 = a \quad (\text{чл. } \mathbf{34.})$$

2. **Обрнуто.** Број се степенује збиром, кад се степенује сваким сабирком па се добивени степени помноже.

117. 1. Степени исте основе деле се, кад се заједничка основа степенује бројем, који је једнак с разликом изложитеља дељеникова и изложитеља делитељева.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Истинитост те једначине за $m > n$ доказана је у чл. **44.**

2. **Обрнуто.** Број се може степеновати разликом, кад се степенује умањеником и умалитељем, па се први степен другим подели.

Ово правило вреди дакле само онда, кад је разлика цео позитиван и од нуле различан број.

118. 1. Производ се може степеновати неким бројем, кад се сваки чинитељ тим бројем степенује и добивени степени помноже.

$$(ab)^m = a.^m b^m.$$

Доказ. $(ab)^m = \underbrace{(ab).(ab)\ldots\ldots(ab)}_{m}$

$$= (\underbrace{a.a\ldots.a}_{m}).(\underbrace{b.b\ldots.b}_{n}) \quad (\text{чл. } \mathbf{32.})$$
$$= a^m b^m.$$

2. **Обрнуто.** Степени истога изложитеља могу се помножити, кад се производ њихових основа степенује заједничким изложитељем.

119. 1. Количник (разломак) се може степеновати неким бројем, кад се дељеник и делитељ степенује тим бројем, па се први степен подели другим.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Доказ је сличан с доказом из чл. **118,** 1.

2. **Обрнуто.** Степени истога изложитеља могу се поделити, кад се количник њихових основа степенује заједничким изложитељем.

Последица. Степен једнога на најпростији облик сведена права или неправа разломка не може никад бити цео број.

Излази из 1. с погледом на чл. **62,** 3.

120. 1. Степен се може степеновати неким бројем, кад се основа степенује производом изложитеља.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доказ. $(a^m)^n = \underbrace{a^m . a^m \ldots\ldots a^m}_{n}$

$$= a^{\overbrace{m+m+\ldots\ldots+m}^{n}}$$
$$= a^{mn}.$$

2. **Обрнуто.** Број се може степеновати производом кад се степенује једним чинитељем а добивени степен степенује другим чинитељем.

Последица. Ред поновног степеновања је произвољан.

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Размештајно начело не вреди код степена, почем је a^m уопште различно од m^a.

Веза једначина и неједначина са степеновањем.

121. 1. Једнаки бројеви степеновани једнаким бројевима дају резултате једнаке.

Ако је $a = b$, онда је и $a^m = b^m$ (чл. **37,** 1).

Последица. Кад се сви чланови неке пропорције степенују истим бројем добива се опет пропорција.

Ако је $a:b = c:d$, онда мора бити и $(a:b)^m = (c:d)^m$, дакле $a^m : b^m = c^m : d^m$. (чл. **119,** 1).

2. Неједнаки бројеви степеновани једнаким дају резултате неједнаке истога смисла.

Ако је $a > b$, онда је $a^m > b^m$ (чл. **37,** 3).

Последица. Ако је $a \gtrless 1$, онда је $a^m \gtrless 1$.

3. Једнаки бројеви степеновани неједнакима дају резултате неједнаке истога или супротног смисла према томе да ли је основа већа или мања од 1.

Претп. $m > n$ и $a > 1$; Тврђ. $a^m > a^n$
" " $a < 1$; " $a^m < a^n$

Доказ. a) $a^n = a^n$; $a^{m-n} > 1$; $a^m > a^n$ (чл. **37,** 2); b) $a^n = a^n$; $a^{m-n} < 1$; $a^m < a^n$.

Степени с алгебарском основом.

122. 1. Степен с позитивном основом позитиван је.

$$(+a)^m = +a^m.$$

2. Паран степен с негативном основом позитиван је. Непаран степен с негативном основом негативан је.

$$(-a)^{2n} = +a^{2n}$$
$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

Квадрат и куб полинома

123. Задатак. Да се алгебарски збир подигне на квадрат.

Треба развити збир по овом закону:

1. Подигне се на квадрат први члан задата израза.

2. Из свакога потоњег члана саставе се два сабирка: један је удвојен производ из свију пређашњих чланова и самога себе, а други је његов квадрат.

Доказ. $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Почем се полином претвара у бином, на који се поново примењује пређашњи закон, јасно је да правило вреди уопште.

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2;$$
$$(a-b-c)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2(a-b)c + c^2.$$

Допуна. Два дȇла, што их један члан задата броја даје у квадрату, могу се скупити у један, ако се тај члан дода удвојеном збиру пређашњих чланова, па се добивени збир помножи тим чланом; јер је

$$2a.b + b^2 = (2a+b).b;$$
$$2(a+b).c + c^2 = [2(a+b)+c].c; \text{ итд.}$$

124. Задатак. Подићи на квадрат декадни број.

Почем се сваки декадни број може представити као полином уређен по степенима од *10*, то вреди поступак из чл. **123.**

Да се нпр. подигне на квадрат *3417.*

$$3417^2 = (3000+400+10+7)^2 = 3000^2 + 2.3000.400 + 400^2$$
$$+ 2.3400.10 + 10^2 + 2.3410.7 + 7^2;$$

или, ако се сабирци напишу један испод другог и назначене

радње развију, па се с погледом на месну вредност изоставе нуле биће или скраћено по доп. чл. **123:**

$$\begin{array}{rr}
\multicolumn{2}{l}{3417^2} \\
\hline
3^2 \ldots\ldots & 9 \\
2.3.4 \ldots\ldots & 24 \\
4^2 \ldots\ldots & 16 \\
2.34.1 \ldots\ldots & 68 \\
1^2 \ldots\ldots & 1 \\
2.341.7 \ldots\ldots & 4774 \\
7^2 \ldots\ldots & 49 \\
\hline
 & 11675889
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr|r|r|r}
\multicolumn{5}{l}{3417^2} \\
\hline
3^2 \ldots & 9 & & & \\
64.4 \ldots & 2 & 56 & & \\
681.1 \ldots & & 6 & 81 & \\
6827.7 \ldots & & 4 & 77 & 89 \\
\hline
 & 11 & 67 & 58 & 89
\end{array}$$

Допуне. 1. Квадрат декадна цела броја или има двојином толико цифара колико их је у том броју или једну цифру мање.

Доказ. Јер ако је *N* број од *n* цифара, дакле

$$10^{n-1} \leqq N < 10^n$$
$$\text{онда је} \quad 10^{2n-2} \leqq N^2 < 10^{2n}$$

N^2 има дакле најмање $2n-1$ цифру а највише $2n$ цифара.

2. Како је $\left(\frac{a}{10^n}\right)^2 = \frac{a}{10^{2n}}$, јасно је, да се децималан разломак диже на квадрат као и декадан цео број; само треба у квадрату бројитеља одвојити двапут толико децимала, колико их има у датом децималном разломку.

3. Непотпун децималан разломак диже се на квадрат по скраћеном множењу.

125. Задатак. Да се алгебарски збир подигне на куб.

Куб се одређује по овом закону:

1. Подигне се на куб први члан задатога израза.

2. Из свакога потоњег члана граде се по три сабирка: први је утројени квадрат збира свију пређашњих чланова помножен тим чланом, други је утројени збир свију пређашњих чланова помножен квадратом тога члана, а трећи је сабирак куб тога члана.

Доказ. $(a \pm b)^3 = (a \pm b)^2 (a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b)$
$$= a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Даље извођење слично је извођењу у чл. **123.**

126. Задатак. Подићи на куб декадни број.

Поступак се изводи из чл. **125.**

Да се нпр. одреди куб од $4213 = 4000 + 200 + 10 + 3$ имамо овакав рад, кад се нуле, с погледом на месну вредност, изоставе:

4213^3				
$4^3 \ldots\ldots$	64			
$3.\ 4^2.2 \ldots\ldots$	9	6		
$3.\ 4.\ 2^2 \ldots\ldots$		48		
$2^3 \ldots\ldots$		8		
$3.\ 42^2.1 \ldots\ldots$		529	2	
$3.\ 42.\ 1^2 \ldots\ldots$		1	26	
$1^3 \ldots\ldots$			1	
$3.421^2.3 \ldots\ldots$		159	516	9
$3.421.\ 3^2 \ldots\ldots$			113	67
$3^3 \ldots\ldots$				27
	74	778	091	597

Допуне. 1. У кубу декадна цела броја има или трипут толико цифара колико има тај број или две цифре мање или и једна цифра мање.

Доказ је сличан доказу у допуни 1. чл. **124.**

2. Пошто је $\left(\frac{a}{10^n}\right)^3 = \frac{a^3}{10^{3n}}$, јасно је, да код децималних разломака треба у кубу бројитеља одвојити трипут толико децимала, колико их има у задатом децималном разломку.

3. Куб непотпуна децимална разломка добива се скраћеним множењем.

Степени чији је изложитељ нула, негативан или бескрајан.

127. Према основној дефиницији степеновања изложитељ мора бити позитиван цео број; према томе су изрази a^0 и a^{-m} символи без значаја. Кад се хоће да се и ови облици степена задрже, то им се мора, почем су 0 и $-m$ разлике, придати оно значење, које је добивено применом правила о степеновању разликом (чл. **117,** 2), дакле се опет мора прибећи начелу о одржавању операционих закона.

Тумачења. 1. $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1.$

Степен с изложитељем 0 једнак је 1 за сваку коначну од нуле различну основу.

0^0 је неодређено, јер је $0^0 = 0^m : 0^m = 0 : 0.$

2. $\quad a^{-m} = a^{p-(p+m)} = a^p : a^{p+m} = a^p : (a^p . a^m) = \frac{1}{a^m},$

или
$$a^{-m} = a^{0-m} = a^0 : a^m = \frac{1}{a^m},$$

Степен с негативним изложитељем реципрочна је вредност степена исте основе с позитивним изложитељем.

Узимањем $0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0}$ доводи до израза, којему не одговара никакав број; стога се нула сме узимати само као основа степена с позитивним изложитељем.

Последице. a) Почем је $\frac{1}{a^p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$, то је и $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p$.

Степен с негативним изложитељем једнак је с реципрочном вредности основе степенованом позитивним изложитељем.

Ово се правило примењује, кад је основа разломак.

b) Из $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ излази $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$. Стога се сваки степен, који је у бројитељу разломка чинитељ, може пренети за чинитељ у именитељ, кад се промени знак изложитељу; и обрнуто.

c) Правила о знацима у чл. **122** вреде и за степене с негативним изложитељима.

$$(+a)^{-m} = +a^{-m};\ (-a)^{-2n} = +a^{-2n};\ (-a)^{-(2n+1)} = -a^{-(2n+1)}.$$

128. У чл. **96** изнет општи облик децимална разломка

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + J + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{10^2} + \frac{\gamma}{10^3} + \ldots$$

може се применом чл. **127** представити и овако:

$$\ldots c.10^3 + b.10^2 + a.10 + J + \alpha.10^{-1} + \beta.10^{-2} + \gamma.10^{-3} + \ldots,$$

стога су $0,\ -1,\ -2,\ -3, \ldots$ редни изложитељи јединица, првога, другога, трећега,... децималног места. Одавде излази:

1. Редни изложитељ неке цифре на n-том децималном месту јесте $-n$. Нпр. у децимална разломка $0{,}000783$ највиша цифра 7 има редни изложитељ -4.

2. Нека N значи децималан разломак чија је највиша цифра на n-том децималном месту, тада је

$$N \geqq 10^{-n} \quad \text{и} \quad N < 10^{-(n-1)}.$$

Нпр. $\quad 0{,}00935 > \frac{1}{10^3}$ и $0{,}00935 < \frac{1}{10^2}.$

129. Сва досад доказана правила за степене с позитивним изложитељима вреде и за степене чији је изложитељ нула или негативан број.

Кад вреди правило у чл. **117,** 2 вреди и обрнуто правило у чл. **117,** 1, а због тога вреде и сва остала правила. То се може и непосредно доказати, кад се употреби дефиниција, затим се изведе рачунање и, најзад се, ако је потребно, враћа на степене којих је изложитељ нула или негативан број. Нпр.

$$a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m . a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n};$$

$$(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = (a^m)^n = a^{mn}.$$

130. Кад се по правилу о множењу развију оба прва члана узастопних степена од $1+x$, увиђа се непосредно, да коефицијент другога члана увек расте за 1, јер је други члан најближега вишег степена збир из x и другога члана претходнога степена.

$$(1+x)^3 = 1+3x+\dots.$$
$$(1+x)^4 = (1+3x+\dots)(1+x) = 1+4x+\dots..$$
$$(1+x)^n = 1+nx+\dots$$

према томе је за $\lim n = \infty$ и $x > 0$ $\lim (1+x)^n = \infty$.

1. За $a > 1$ и $\lim n = \infty$ биће и $\lim a^n = \infty$.
2. За $a = 1$ и $\lim n = \infty$ биће и $\lim a^n = 1$. (чл. **115**).

Кад је $a < 1$, може се довести на облик $\frac{1}{1+x}$, где је $x > 0$, нпр. $\frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$. Дакле

3. За $a < 1$ и $\lim n = \infty$ биће $\lim a^n = \lim \left(\frac{1}{1+x}\right)^n =$

$$= \frac{1}{\lim (1+x)^n} = 0.$$

Последице. За $a > 1$ и $\lim n = \infty$ биће $\lim a^{-n} = \frac{1}{\lim a^n} = 0$.

За $0 < a < 1$ и $\lim n = \infty$ је $\lim a^{-n} = \frac{1}{\lim a^n} = \infty$.

Bombelli (1572) је превео грчку реч δύναμις (моћ) са „potentia“, што је Диофант употребљавао за квадрат непознате. Тек доцније је ова реч била употребљена у садашњем општем смислу. „Експонент“ је увео Stifel, садашњи начин писања Herigogne (1634) и Descartes (1637).

II. Корени

131. Код степеновања добивена једначина $b^n = a$ доводи двама новим задацима: 1) из a и n одредити непознат број b, 2) из a и b одредити непознато n. Први се задатак решава шестом врстом рачунања, кореновањем, а други задатак решава се седмом врстом рачунања, логаритмовањем. Обе ове врсте рачунања су дакле обрнуте радње степеновању.

Из броја a извући n-ти корен или број a кореновати бројем n значи из степена a и изложитеља n одредити основу (корен). Дати степен a назива се радиканд, или управо број, дати изложитељ n — коренов изложитељ и тражена основа n-ти корен из a. То се пише: $\sqrt[n]{a} = b$.

$\sqrt[n]{a}$ је дакле онај број, који степенован кореновим изложитељем даје радиканд.

Други корен неког броја назива се квадратни корен, а трећи корен — кубни корен.

Последице. 1. (Дефинициони обрасци). Кад се корен степенује својим изложитељем добива се радиканд.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

2. Кад се степен коренује својим изложитељем добива се основа.

$$\sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

Допуна. Из 1) и 2) излази: Број се не мења, кад се неким бројем степенује (коренује) и добивени резултат истим бројем коренује (степенује).

$$a = \sqrt[n]{a^n}; \qquad a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.$$

Према томе се сваки број може представити у облику корена; нпр. $b = \sqrt[3]{b^3}$.

Степеновање и кореновање су по томе супротне радње.

3. Први корен некојег броја јесте сâм тај број.

Почем је $a^1 = a$, то је $\sqrt[1]{a} = a$.

Зато се за први корен не пише изложитељ *1* ни коренов знак. Код другог или квадратног корена пише се знак коренов без изложитеља *2*, тако да $\sqrt{a}$ значи исто што и $\sqrt[2]{a}$.

4. $\sqrt[n]{1}=1.$ 5. $\sqrt[n]{0}=0.$

Треће проширење бројне области

Ирационални бројеви

132. При израчунавању n-тог корена из позитивна цела броја разматрају се два случаја.

1. a је n-ти степен каквога позитивна цела броја, нпр. $a=p^n$; тада је $\sqrt[n]{a}=p$ позитиван цео број.

2. a се налази између n-тих степена два узастопна позитивна цела броја; дакле се $\sqrt[n]{a}$ налази између два узастопна позитивна цела броја, према томе није цео број.

Али се тада $\sqrt[n]{a}$ не може представити ни разломком; јер ако би било $\sqrt[n]{a}=\frac{q}{r}$, где су q и r релативно прости бројеви, тада би морало бити $\left(\frac{q}{r}\right)^n=a=$ неком целом броју, а то је према последици чл. **119** немогућно.

Отуда излази: $\sqrt[n]{a}$ у другом случају није рационалан број.

Према погодби a се налази између два узастопна члана реда

$$1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ 4^n,\ldots\ldots$$

Нека је нпр. $a_0^n<a<(a_0+1)^n$, дакле $a_0<\sqrt[n]{a}<a_0+1$.

Начинимо сад ред

$$a_0^n,\ \left(a_0+\frac{1}{10}\right)^n,\ \left(a_0+\frac{2}{10}\right)^n,\ldots\ldots\left(a_0+\frac{9}{10}\right)^n,\ \left(a_0+1\right)^n,$$

онда се a мора налазити између два узастопна члана овога реда.

Нека је:

$$\left(a_0+\frac{a_1}{10}\right)^n<a<\left(a_0+\frac{a_1+1}{10}\right)^n, \text{ дакле } a_0+\frac{a_1}{10}<\sqrt[n]{a}<a_0+\frac{a_1+1}{10}.$$

Затим се начини ред:

$$\left(a_0+\frac{a_1}{10}\right)^n,\ \left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}\right)^n,\ \left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}\right)^n,\ldots\ldots$$
$$\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}\right)^n,\ \left(a_0+\frac{a_1+1}{10}\right)^n,$$

тада се a мора опет налазити између два узастопна члана.

Нека је:

$$\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\right)^n<a<\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}\right), \text{ дакле } a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}<\sqrt[n]{a}<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2};$$

ако се на сличан начин продужи, види се да би било:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_m}{10^m}<\sqrt[n]{a}<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{a_m+1}{10^m},$$

где $a_1,\ a_2,\ldots a_m$ могу имати вредности $0,\ 1,\ 2,\ldots\ 9.$

Поређењем са чл. **86** сазнаје се непосредно:

Корен n-ти из једнога позитивна цела броја a је у овом другом случају ирационалан број.

Он је позитиван, јер је окружен позитивним бројевима.

133. Приближна вредност ирационална броја је сваки члан оба конвергентна реда, који га окружавају. Разлика између ирационална броја и његове приближне вредности назива се погрешка њена. Ако ставимо

$$\sqrt[n]{a}=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{a_m}{10^m}, \quad \text{или}$$
$$\sqrt[n]{a}=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots\ldots+\frac{a_m+1}{10^m},$$

онда је у оба случаја погрешка мања од $\frac{1}{10^m}$.

У првом случају она је позитивна, у другом негативна. Ако дакле код неког одређеног места прекинемо бескрајни непериодан децималан разломак, чија је гранична вредност ирационалан број, онда је погрешка добивене приближне вредности мања од јединице последњега децимална места.

Рачунати с ирационалним бројевима значи рачунати с њиховим приближним вредностима и тражити граничну вредност, од које се резултат бескрајно мало разликује, кад се приближне вредности ирационалних бројева бескрајно мало разликују од њихових граничних вредности.

Почем се према оваком тумачењу резултати рачунања с ирационалним бројевима одређују рачунским резултатима њихових приближних вредности, а оне су рационални бројеви, то сва доказана општа правила за рачунање с рационалним бројевима вреде и за ирационалне бројеве.

134. Проширени бројни ред. Положај позитивна ирационална броја у бројном реду потпуно је одређен двама конвергентним редовима позитивних рационалних бројева.

Сваком позитивном ирационалном броју одговара негативан ирационалан број једнаке апсолутне вредности, и тим је и његов положај одређен на бројној линији. Рационални и ирационални бројеви чине скупа систему стварних (реалних) бројева.

Представљање ирационалних бројева на бројној линији. 1. Нека нули одговара O, броју $+1$ тачка A; тада произвољно изабраној тачки M одговара количник размере дужи $\frac{OM}{OA}$. Овај је количник рационалан број, кад су OM и OA самерљиве количине, напротив, кад су OM и OA несамерљиве, одговара ирационалан број. Према томе, свакој тачки бројне линије одговара неки стваран број.

2. Обрнуто. Сваком стварном броју одговара једна тачка на бројној линији.

Почем су тачке које одговарају рационалним приближним вредностима бескрајно близу једна до друге, то је положај оне тачке, која одговара ирационалном броју, једнозначно одређен.

За неке ирационалне бројеве, нпр. за сваки ирационални квадратни корен, може се применом геометриских правила конструисати тачка на бројној линији. Ако се нпр. над дужи која је изабрана за јединицу нацрта квадрат, онда његова диагонала има бројну вредност $\sqrt{2}$. Ако се дакле диагонала пренесе од тачке O у позитивном правцу на бројну линију, добиће се тачка која одговара ирационалном броју $+\sqrt{2}$. Овој тачки приближују се увек све више и више оне тачке, које с једне стране одговарају бројевима $1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, \ldots\ldots$ а с друге бројевима $2, 1{,}5, 1{,}42, 1{,}415, 1{,}4143, \ldots$

Кад се једна тачка креће по бројној линији, онда се њено кретање назива непрекидно, јер ниједна тачка линије није прескочена. Почем свакој одређеној тачки одговара неки стваран број, то се и за систему стварних бројева каже да је непрекидна.

Ирационално (λόγος, ratio, размера) је превод грчкога ἄλογος. Тим је Евклид означавао дуж, чиј је квадрат несамерљив према квадрату, који је конструисан на дужи узетој за јединицу дужине.

Правила за рачунање

135. n-ти корен из позитивна цела броја има по чл. **132.** једну позитивну вредност. Стога према правилима која ће доћи може и n-ти корен из позитивна разломка, као и из позитивна ирационална броја имати једну једину позитивну вредност. Она се назива апсолутна вредност коренова. Даља правила односе се на апсолутну вредност коренову, ако није изречно другаче наглашено.

136. 1. Производ се може кореновати неким бројем, кад се сваки чинитељ тим бројем коренује па се добивени корени помноже.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$$

Доказ. Да би десна страна била једнака с левом, онда степенована кореновим изложитељем n мора дати радиканд.

$$\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n \text{ (чл. **118,** 1) } = a.b \,(\mathbf{131,}\ 1).$$

2. **Обрнуто.** Корени истога коренова изложитеља могу се помножити, кад се производ радиканада коренује заједничким изложитељем.

Допуне. a) Спомоћу првог правила може се, кад радиканд има чинитељ из којега се корен да извући, тај чинитељ ослободити корена, тј. коренује се делимично. Нпр.

$$\sqrt[n]{a^n.b} = \sqrt[n]{(a^n)}.\ \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}.$$

b) По другом правилу може се обрнуто спомоћу чл. **131,** 2 сваки чинитељ коренов довести под коренов знак, кад се степенује кореновим изложитељем, па се тај степен радикандом помножи. Нпр.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n)}.\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}.$$

137. 1. Количник (разломак) се може кореновати неким бројем, кад се дељеник и делитељ тим бројем коренују, па се први корен другим подели.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Доказ. $\left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$ (чл. **119,** 1) $= \frac{a}{b}$ (чл. **131,** 1).

2. **Обрнуто.** Корени с једнаким изложитељима деле се, кад се количник радиканада коренује заједничким изложитељем.

138. Промена облика коренова. Корен из некојег степена не мења своје вредности, кад се и коренов и степенов изложитељ истим бројем помноже, или кад се оба истим бројем поделе.

$$a)\ \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}; \qquad b)\ \sqrt[q]{a^r} = \sqrt[q:p]{a^{r:p}}.$$

Доказ. $a)$ $\sqrt[n]{a^m} = x$; дакле $x^n = a^m$
и $x^{np} = a^{mp}$;

стога $x = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

$b)$ Други део је обрнут првому.

Допуне. 1. По овом правилу може се $a)$ сваки корен претворити у други, чиј је коренов изложитељ множина датога изложитеља коренова, дакле се могу два или више корена довести на исте коренове изложитеље; $b)$ кад коренов и степенов изложитељ имају заједнички делитељ, могу се њим скратити.

Ако су нпр. дати корени $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[10]{c^7}$, онда је њихов најмањи заједнички изложитељ коренâ 30, па је

$$\sqrt{a} = \sqrt[30]{a^{15}}, \quad \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[30]{b^{20}}, \quad \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[30]{c^{21}}.$$

Кад је дато да се множе или да се деле корени чији су изложитељи неједнаки, они се морају најпре довести на заједнички коренов изложитељ.

2. Корен с негативним изложитељем једнак је с реципрочном вредности истога корена с позитивним изложитељем.

Тако је $\sqrt[-n]{a} = \sqrt[-n\cdot-1]{a^{1\cdot-1}} = \sqrt[n]{a^{-1}}$, дакле

$$\sqrt[-n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Обично се негативни изложитељи коренâ уклањају, кад се негативност пренесе у изложитељ степенов.

139. 1. Степен се може кореновати, кад се основа степенује количником из степенова и коренова изложитеља.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Доказ. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m.$

2. **Обрнуто.** Број се може степеновати количником (разломком), кад се степенује дељеником а резултат коренује делитељем — макојим редом.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Допуна. Обадва правила вреде само онда, кад су количници цели бројеви.

140. 1. Степен се може кореновати неким бројем, кад се основа тим бројем коренује а добивени корен степенује.

$$\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Доказ. $\left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right\}^n = \left\{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right\}^m$ (чл. **120.**) $= a^m$ (**131,** 1. послед.).

2. **Обрнуто.** Корен се може неким бројем степеновати, кад се радиканд њим степенује а добивени степен коренује.

Последица. Кад неки број треба степеновати а резултат кореновати, онда је сасвим свеједно којим редом треба извршити те две радње.

141. 1. Корен се може кореновати неким бројем, кад се радиканд коренује производом изложитеља.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Доказ. $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^m = \sqrt[mn]{a^m}$ (чл. **140,** 2) $= \sqrt[n]{a}$.

2. **Обрнуто.** Број се може кореновати производом, кад се коренује једним чинитељем а добивени корен другим чинитељем.

Последица. Кад се корен коренује, онда је свеједно којим се редом те радње врше.

Веза једначина и неједначина кореновањем

142. 1. Једнаки бројеви кореновани једнаким дају резултате једнаке.

Ако је $a = b$, онда је и $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ (као чл. **14,** 1).

Последице. *a)* Кад се сви чланови неке пропорције коренују истим бројем добиће се опет пропорција.

Ако је $a:b = c:d$, то је и $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{c:d}$, или

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \quad (\mathbf{137,}\ 1).$$

b) Геометриска средина за два броја једнака је с квадратним кореном из производа тих бројева.

Ако је $a:b = b:c$, онда је $b^2 = ac$, стога

$$b = \sqrt{ac}.$$

2. Неједнаки бројеви кореновани једнаким дају неједнаке резултате истога смисла.

Ако је $a > b$, онда је $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$.

Доказ. Кад би било $\sqrt[m]{a} \overline{\gtrless} \sqrt[m]{b}$, онда би према члану **121,** 1 или 2 морало бити и $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m \overline{\gtrless} \left(\sqrt[m]{b}\right)^m$, дакле $a \overline{\gtrless} b$, што је противно претпоставци.

Последица. Ако је $a \gtrless 1$, онда је и $\sqrt[m]{a} \gtrless 1$.

3. Једнаки бројеви кореновани неједнаким дају резултате неједнаке супротнога или истог смисла према томе да ли је радиканд већи или мањи од 1.

Ако је $m > n$, онда је за $a > 1$, $\quad \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$;

за $a < 1$, $\quad \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$.

Доказ. Кад би за $a > 1$ било $\sqrt[m]{a} \overline{\gtrless} \sqrt[n]{a}$, онда би према чл. **121,** 1 или 2 било и $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} \overline{\gtrless} \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mn}$, или $a^n \overline{\gtrless} a^m$, али због $m > n$ по чл. **121,** 3 мора бити $a^m > a^n$.

Тако се исто доказује и за $a < 1$.

Корени с алгебарским радикандом

143. Досада смо под $\sqrt[n]{a}$, где је a позитиван број, подразумевали само апсолутну бројну вредност коренову. Али, кад је a алгебарски број па се са $\sqrt[n]{a}$ означе сви корени једначине $x^n = a$, тада се може уопште показати, да $\sqrt[n]{a}$ има n различних вредности. За неке нарочите случајеве ово ће се доцније доказати. Али ако се узму на ум само стварне вредности, долази се до ових правила:

1. Сваки непаран корен из позитивна радиканда има само једну позитивну стварну вредност.

2. Сваки непаран корен из негативна радиканда има само једну негативну стварну вредност.

3. Сваки паран корен из позитивна радиканда има две супротне стварне вредности.

4. Сваки паран корен из негативна радиканда нема стварне вредности.

Доказ. По чл. **122** имамо

$$(\pm p)^{2n} = +a, \quad (+q)^{2n+1} = +b, \quad (-q)^{2n+1} = -b,$$

где a и b значе апсолутне бројне вредности добивене степеновањем. Отуда пак а према чл. **131.** излази

$$\sqrt[2n]{+a} = \pm p, \qquad \sqrt[2n+1]{+b} = +q, \qquad \sqrt[2n+1]{-b} = -q.$$

$\sqrt[2n]{-a}$ нема стварне вредности, јер нема ни позитивна, ни негативна цела броја, ни разломљена или ирационална броја, па ни нулс, да дају негативан број кад се степенују парним бројем.

Преображај ирационалних корена

144. Изрази, у којима се налазе ирационални корени, могу се покаткад довести на облик, који је подеснији за рачунање.

Задатак. Разломак, којему је именитељ ирационалан моном или бином представити с рационалним именитељем а да му се вредност не промени. (Рационаљење именитеља).

Такав разломак може имати један од ових облика:

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}},\qquad \frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}},\qquad \frac{Z}{\sqrt[m]{a^p}\pm\sqrt[n]{b^q}}.$$

1. Да се урационали разломак облика $\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}}$, где је $m>n$, треба помножити и бројитељ и именитељ са $\sqrt[m]{a^{m-n}}$,

па ће бити
$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^n}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^n}.\sqrt[m]{a^{m-n}}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{\sqrt[m]{a^m}} = \frac{Z\sqrt[m]{a^{m-n}}}{a}.$$

2. Да се урационале разломци облика $\frac{Z}{a\pm\sqrt{b}}$ или $\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$ треба и бројитељ и именитељ у првом случају помножити са $a\mp\sqrt{b}$ а у другом са $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$. Па је

$$\frac{Z}{a\pm\sqrt{b}} = \frac{Z(a\mp\sqrt{b})}{(a\pm\sqrt{b})(a\mp\sqrt{b})} = \frac{Z(a\mp\sqrt{b})}{a^2-b}$$

$$\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{Z(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})} = \frac{Z(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}.$$

3. Да се урационали разломак облика

$$\frac{Z}{\sqrt[m]{a^p}\pm\sqrt[n]{b^q}} = \frac{Z}{\sqrt[mn]{a^{np}}\pm\sqrt[mn]{b^{mq}}} = \frac{Z}{\sqrt[r]{A}\pm\sqrt[r]{B}},$$

где је краткоће ради стављено $mn=r$, $a^{np}=A$ и $b^{mq}=B$, помножиће се и бројитељ и именитељ последњег разломка полиномом

$$\sqrt[r]{A^{r-1}}\mp\sqrt[r]{A^{r-2}.B}+\sqrt[r]{A^{r-3}.B^2}\mp\ldots(\mp 1)^{r-2}\sqrt[r]{A.B^{r-2}}+$$
$$+(\mp 1)^{r-1}\sqrt[r]{B^{r-1}}.$$

На тај се начин добије као нов именитељ $A\pm B$. Нпр.

$$\frac{Z}{\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b}} = \frac{Z(\sqrt[5]{a^4}+\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}+\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4})}{a-b}.$$

145. Задатак. Да се збир или разлика квадратних корена из збира и разлике двају бројева, од којих је

један ирационалан, претвори у један једини квадратни корен.

Нека је $\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}$ дани збир и разлика два квадратна корена, где се претпоставља да је a позитивно и веће од $\sqrt{b}$, тада је

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}\right)^2 = 2a\pm 2\sqrt{a^2-b},$$

стога, кад се обе стране коренују са 2,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2-b}}.$$

Овај се преображај нарочито онда корисно примењује, кад је a^2-b потпун квадратни број. Нпр.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{8+2\sqrt{16-7}} = \sqrt{8+2\sqrt{9}} = \sqrt{14};$$
$$\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{12-2\sqrt{36-11}} = \sqrt{12-2\sqrt{25}} = \sqrt{2}.$$

146. Задатак.*) Претворити квадратни корен из ирационална бинома у збир или разлику два квадратна корена.

Ако је дати квадратни корен $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, то је за a позитивно и $a>\sqrt{b}$ по чл. **145**:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

а одавде сабирањем и одузимањем:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Преображај је користан само онда, кад је a^2-b потпун квадратни број. Нпр.

$$\sqrt{11\pm 6\sqrt{2}} = \sqrt{11\pm\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{49}}{2}}\pm\sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}} = 3\pm\sqrt{2}$$

*) Овај се задатак може и доцније решити спомоћу квадратне једначине са две непознате.

Допуна. Кад оба члана бинома $a \pm \sqrt{b}$ имају заједнички ирационалан чинитељ, он се, пре преображаја, издваја. Нпр.

$$\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{10}} = \sqrt[4]{2}.\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt[4]{2}.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

147. Задатак. Једначину, у које је непозната у радиканду, ослободити корена (урационалити једначину).

Једначина се преобрази тако, да на једној страни буде сâм корен, затим се обе стране степенују кореновим изложитељем.

Ако је у једначини више таквих израза с коренима, они се урационаљују поновним степеновањем.

Примери.

1)
$$\sqrt{2x+3}=5$$
$$(\sqrt{2x+3})^2=5^2$$
$$2x+3=25$$
$$2x=25-3$$
$$2x=22$$
$$x=11$$

2)
$$\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1$$
$$\sqrt{x+13}=1+\sqrt{x+6}$$
$$x+13=1+x+6+2\sqrt{x+6}$$
$$\sqrt{x+6}=3$$
$$x+6=9$$
$$x=3.$$

Допуна. Како једначина $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}=1$ тако и $\sqrt{x+13}+\sqrt{x+6}=1$ имају услед степеновања исти корен $x=3$. Зато се пробањем уверавамо какав се знак мора дати апсолутној вредности квадратнога корена, да би се добила идентичност. Тако мора $\sqrt{x+13}=\sqrt{16}$ у обе једначине добити вредност $+4$, напротив $\sqrt{x+6}=\sqrt{9}$ у првој једначини добива $+3$, а у другој -3.

Степени и корени с разломљеним изложитељима.

148. Степен, којега је изложитељ прави разломак, нема према дефиницији никаква значења. Ако се хоће и такав облик степена да задржи, то му се мора, према принципу о одржавању операционих закона, дати оно значење, које се тражи правилом у чл. **139,** 2) за степеновање привидним разломком.

Тумачење. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$

Неки број степеновати разломком значи степеновати га бројитељем, а резултат кореновати именитељем, или најпре кореновати именитељем, па резултат степеновати бројитељем.

Допуна. Из $\sqrt[\frac{n}{m}]{a} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ излази, да се сваки корен с разломљеним изложитељем може представити као степен с разломљеним изложитељем. Како се стога корени с разломљеним изложитељима обично не уводе у рачун, то се овде ограничавамо на степене с разломљеним изложитељима.

149. Сва досад доказана општа правила за степене вреде и за степене с разломљеним изложитељима.

Према дефиницији за $a^{\frac{m}{n}}$ остаје у снази правило $(a^m)^p = a^{mp}$ (види чл. **139,** доказ) а с њим и сва остала правила о степенима.

Да се ово докаже непосредно за поједина правила, треба само степене с разломљеним изложитељима претворити у корене, затим означене радње извршити и у резултатима преобратити опет корене у степене с разломљеним изложитељима. Нпр.

$$a^{\frac{m}{n}}.\,a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}.\,\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}.\,\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Допуна. Будући се сви корени могу представити као степени с разломљеним изложитељима, то се правила о коренима налазе већ у правилима за степеновање.

Ако се искључи бројни облик $\sqrt[2n]{-a}=(-a)^{\frac{1}{2n}}$, онда дакле може како основа тако и изложитељ бити позитиван или негативан рационалан или ирационалан број; јер је у последњем случају степен гранична вредност, којој се они степени приближују, што се добију, кад се наместо ирационална броја узме приближна вредност $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$ и n пусти да бескрајно расте. Нпр.

$$3^{\sqrt{2}} = 3^{1{,}4142\ldots} = 3.\sqrt[10]{3^4}.\sqrt[100]{3}.\sqrt[1000]{3}.^{4}\sqrt[10000]{3^2}\ldots\ldots$$

Четврто проширење бројне области

Имагинарни бројеви

150. Почем се $\sqrt[2n]{-a}$, за $a>0$, не налази у реду досада познатих бројева, то настаје потреба да се поново прошири бројна област. При том се полази од најнижег корена то јест од $\sqrt{-a}$. Остаје се дакле и при тој кореној количини и уноси у исто време погодба, да дефинициони образац $(\sqrt{-a})^2=-a$ задржава своју важност. Због тога вреде за њега сва правила о коренима с погледом на горњу дефиницију.

Будући се $\sqrt{-a}$ у непрекидном низу досада посматраних бројева не налази, то он представља нов бројни облик. Он добива име имагинаран (уображен) број; насупрот њему означавају се заједничким именом стварни бројеви цели, разломљени и ирационални бројеви.

Тумачење. Имагинаран број такав је број, чиј је квадрат негативан стваран број.

Дефинициони образац. $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

Из $\sqrt{-a} = \sqrt{a.(-1)} = \sqrt{a}.\sqrt{-1}$ и

$-\sqrt{-a} = -\sqrt{a.(-1)} = (-\sqrt{a}).\sqrt{-1}$ излази:

Сваки имагинаран број једнак је с производом из једнога стварна броја и имагинарна броја $\sqrt{-1}$.

$\sqrt{-1}$ назива се имагинарна јединица; она се по *Gauss*-у уопште означује словом i. Њена је дефиниција дата једначином $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

Сваки (чисто) имагинаран број има дакле облик bi. С њим се по облику рачуна тако, као кад би знак i представљао стваран број; само се још утврђује, да се свуда i^2 замењује са -1.

Рачунске радње са чисто уображеним бројевима.

151. Кад се има да рачуна с имагинарним бројем облика $\sqrt{-a}$, мора се пре тога довести на облик $\sqrt{a}.\sqrt{-1} = b.\sqrt{-1} = bi$, где је $\sqrt{a} = b$.

1. Сабирање и одузимање.

$$ai + bi = (a+b)i;$$
$$ai - bi = (a-b)i.$$

Збир два имагинарна броја такође је имагинаран; тако исто и разлика два неједнака имагинарна броја.

2. Множење.

$$ai.b = abi, \text{ исто тако } a.bi = abi;$$
$$ai.bi = ab.i^2 = ab.(-1) = -ab.$$

Производ из једнога имагинарна и једнога стварна броја имагинаран је, а производ два имагинарна броја стваран.

3. Дељење.

$$\frac{ai}{b} = \frac{a}{b}i, \qquad \frac{a}{bi} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{a}{b}i, \qquad \frac{ai}{bi} = \frac{a}{b}.$$

Количник једнога стварна и једнога имагинарна броја имагинаран је, а количник два имагинарна броја стваран је.

4. Степеновање.

$$i^2 = -1,$$
$$i^3 = i^2.i = -i,$$
$$i^4 = i^3.i = -i^2 = +1,$$
$$i^5 = i^4.i = +i, \text{ итд.}$$

уопште

$$i^{4n} = +1, \quad i^{4n+1} = +i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Даље је $(ai)^n = a^n.i^n$.

Степен једнога чисто имагинарна броја биће стваран или имагинаран према томе, да ли је степен од i стваран или имагинаран.

Комплексни бројеви.

152. Кад се један стваран и један имагинаран број, оба различни од нуле, вежу знаком сабирања, онда се таква бројна веза мора сматрати као нов бројни облик, јер није ни стваран ни имагинаран број.

Тумачење. Збир из једнога стварна и једнога имагинарна броја назива се комплексан број.

Општи облик једнога комплексна броја је $a + bi$, где су a и b позитивни или негативни стварни бројеви; a је његов стваран део, а bi имагинаран. Два комплексна броја облика $a + bi$ и $a - bi$ називају се конјугирано (спрегнуто) комплексни бројеви.

Израз $a + bi$ општи је облик за све могуће бројеве; за $a = o$ и $b = o$ он значи нулу, за $b = o$ све стварне (реалне) бројеве, за $a = o$ чисто имагинарне бројеве и, кад су a и b различни од нуле, све комплексне бројеве.

153. При рачунању с комплексним бројевима морамо поставити више дефиниција, при чем се мора узети на ум принцип сталности.

Тумачење. За два комплексна броја каже се да су једнака, кад су њихови стварни делови једнаки а тако исто и имагинарни делови.

Из $a + bi = c + di$ излази $a = c$ и $b = d$.

Свака једначина између два комплексна броја распада се у две једначине стварних бројева.

Последица. Из $a = bi$ или $a + o.i = o + bi$ имамо $a = o$ и $b = o$.

Из $a + bi = o = o + o.i$ имамо $a = o$ и $b = o$.

Стварна и имагинарна бројна област имају само нулу заједничку.

154. Операције 1. ступња. Дефиниције за непосредне рачунске радње морају се тако изабрати, да се с комплексним бројевима тако рачуна, као кад би i био стваран чинитељ, где се свагда i^2 замењује са -1. Дефиниције за обрнуте рачунске радње остају непромењене.

Неко рачунање је завршено, кад је резултат комплексан број.

1. **Тумачење:** $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$

Одатле излази:

2. $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$

Допуна. $(a+bi)+(a-bi)=2a.$

Збир два конјугирана комплексна броја стваран је.

155. Операције 2 ступња.

1. Множење два комплексна броја врши се по правилу у члану **36.**

Тумачење: $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i.$

Допуна. $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$

Производ два конјугирана комплексна броја стваран је.

2. Почем дефиниција дељења остаје да вреди, то вреде и друга правила за комплексне бројеве, а нарочито правило о промени облика неког количника **(41)** као и о дељењу збира неким бројем **(45).** Спомоћу ових правила може се израчунати количник два комплексна броја, кад се дељеник и делитељ помноже бројем који је конјугиран с делитељем, те се тако долази до дељења стварним делитељем.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

$$\frac{3+i}{2+5i}=\frac{(3+i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)}=\frac{11-13i}{29}=\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i.$$

Количник два комплексна броја уопште је комплексан број.

Ако је $bc=ad$, тада је $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{a}{c}.$

156. Степеновање и кореновање.

1. **Тумачење.** $(a+bi)^m=(a\overset{1}{+}bi)+(a\overset{2}{+}bi)+\dots(a\overset{m}{+}bi).$

Нарочити случај: $(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi;$

$$(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

2. $\sqrt[n]{a+bi}$ има n различних вредности, кад се све вредности једначине $x^n=a+bi$ узму, а оне су комплексни бројеви. За неке специјалне случајеве ово ће се доцније доказати.

Изведени обрасци у чл. **145** и **146** за квадратне корене из ирационалних бинома, што је јасно из њихова извођења, вреде и за квадратне корене из комплексних бројева, с тим да је њихова примена овде сасвим независна од тамо постављене погодбе да a мора бити позитивно и веће од $\sqrt{b}$. Нпр.

$$\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}=\sqrt{2+2\sqrt{1-i^2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{4+3i}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16+9}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16+9}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Друга вредност: $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i.$

Историске напомене. Корен (radix) првобитно је употребљаван за вредност непознате која једначину задовољава (чл. **104**). Тек доцније њим се означавала и непозната основа каквога степена, јер је $\sqrt[n]{a}$ решење једначине $x^n=a$. Коренов знак, преображено r, први је употребио Rudolff (1525). Садашњи положај коренова изложитеља увео је Girard (1600). Разломљени изложитељи јављају се први пут код Oresme (14. столеће), нула и негативни бројеви као изложитељи код Chuquet-a (1484). На квадратне корене из негативних бројева први је скренуо пажњу Cardano (1545). „Реално, имагинарно“ унео је Descartes, „конјугирано (спрегнуто)“ Cauchy (1821), „комплексно“ као и знак i Gauss (1831; рођ. 1777, † 1855), који је утврдио вредност комплексном броју представљајући га графички.

Извлачење квадратног и кубног корена

1. Квадратни корен

157. Задатак. Да се извуче квадратни корен из алгебарског збира.

Из закона (чл. **123**) по којем су склопљени сабирци вишечлана броја у његову квадрату, изводи се за извлачење квадратнога корена из уређена полинома овај поступак:

1. Први члан уређена полинома квадрат је првога члана коренова. Стога се први члан корена добива, кад се из првога члана радикандова извуче квадратни корен. Квадрат првога члана коренова одузме се од радиканда.

2. Прва два члана остатка јесу сабирци који постају из потоњег члана у корену, и то, први је члан остатка производ из

удвојена већ нађена корена и потоњег члана коренова. Ако се стога подели први члан остатка удвојеним, већ нађеним, кореном, добиће се потоњи члан коренов. Сад се начине сабирци, што их тај нови члан коренов даје у квадрату, кад се удвојеном пређашњем корену дода нови члан а збир помножи тим чланом, па се производ одузме од остатка.

3. Овај се поступак наставља. Ако најзад не буде остатка, онда је задати полином потпун квадрат; али, ако има остатка, тада је радиканд једнак са збиром из квадрата нађена корена и остатка. Нпр.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{x^4+6x^3-x^2-30x+25}=x^2+3x-5.\\
-x^4\\
\hline
\quad +6x^3-x^2 \qquad\qquad\qquad :(2x^2+3x).3x\\
\quad \pm 6x^3 \pm 9x^2\\
\hline
\qquad\quad -10x^2-30x+25:(2x^2+6x-5).(-5)\\
\qquad\quad \mp 10x^2 \mp 30x \pm 25\\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

158. Израчунати квадратни корен из декадна цела броја, који је потпун квадрат.

1. Треба поделити број на одељке у сваком по две цифре, и то с десна на лево; први одељак с лева може имати и једну цифру. Затим се из првог (највишег) одељка извуче квадратни корен, и то је прва цифра коренова; ако се не може извући потпун корен, узима се најближи мањи. Квадрат нађене цифре коренове одузме се од првог одељка.

2. Остатку се допише потоњи одељак, издвајајући за време последњу цифру, па се тако постали број подели удвојеним већ нађеним кореном, количник је нова — друга цифра коренова и она се као допуна допише уз делитељ. Тако допуњен делитељ помножи се новом цифром кореновом а производ се, одмах при множењу, одузима од дељеника, у који се рачуна и она, мало час, изостављена цифра.

3. Овај се поступак продужава све дотле, док се не употреби и последњи одељак.

Тачност таквога рада увиђа се из чл. **124.** Нпр.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{5|94|38|44}=2438\\
\;194 \quad :44\\
\;\;1838 \;\, :483\\
\;\;\;38944:4868\\
\qquad\; 0
\end{array}$$

Допуне. 1. Како је $\sqrt{\frac{A}{10^{2n}}}=\frac{\sqrt{A}}{10^n}$, јасно је, да се из децимална разломка извлачи квадратни корен по истом поступку, као и из цела броја; само треба децимални разломак, почевши од децималне запете, поделити у одељке и на лево и на десно, у сваком по две цифре, а у корену означити децималну запету пре док се не узме у рачун први одељак децимала. Нпр.

$$\begin{array}{l}
\sqrt{1|52,27|56}=12,34\\
\;\;52 \qquad :22\\
\;\;\;827 \quad\; :243\\
\;\;\;\;9856 \;:2464\\
\qquad\;\; 0
\end{array}$$

2. Из обична разломка израчунава се квадратни корен, кад се израчуна из бројитеља и из именитеља. Нпр.

$$\sqrt{\frac{144}{529}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{529}}=\frac{12}{23}.$$

159. Задатак. Израчунати квадратни корен из декадна цела броја, који није потпун квадрат.

Кад цео број a није потпун квадрат, тада је $\sqrt{a}$ по чл. **132.** ирационалан и може се одредити само приближно. Зато се из a извлачи квадратни корен по чл. **158,** док се не употреби и последњи одељак, па се, иза најзад добивене цифре у корену, означи децимална запета и рад се наставља по истим правилима, дописујући сваком остатку по две нуле за потоњи одељак. Овако се ради дотле, док се не добије толико децималних места колико се хоће.

Доказ. Ако се цео број a помножи са 10^{2m}, то јест ако му се m пута допишу по две нуле, и ако је b највећи цео број, који се садржава у $\sqrt{a.10^{2m}}$, дакле

$$b<\sqrt{a.10^{2m}}<b+1, \text{ или } b<10^m.\sqrt{a}<b+1, \text{ онда је}$$

$$\frac{b}{10^m}<\sqrt{a}<\frac{b+1}{10^m}.$$

Према томе се $\sqrt{a}$ налази између разломака $\frac{b}{10^m}$ и $\frac{b+1}{10^m}$, чија је разлика $\frac{1}{10^m}$; отуда је учињена погрешка, узимањем да је $\sqrt{a}=\frac{b}{10^m}$, мања од $\frac{1}{10^m}$, дакле мања од јединице последњега израчуната децимална места. Нпр.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{3,50} = & 18,708\,.. \\
250 & :28 \\
2600 & :367 \\
310000 & :37408 \\
10736 &
\end{array}$$

Допуне. 1. И при извлачењу квадратнога корена из децимална разломка, који није потпун квадрат, рад се наставља на исти начин докле се хоће, попуњујући последњи одељак једном нулом, ако је у њему само једна цифра, а затим се добивену као и свима потоњим остацима дописују по две нуле.

Код периодних децималних разломака, разуме се по себи, уместо нула дописују се периодне цифре.

2. Да би се извукао квадратни корен из обична разломка, којега бројитељ и именитељ нису квадратни бројеви, треба га претворити у такав разломак, којему је именитељ квадратни број, па се онда извуче корен из бројитеља и из именитеља; или се обичан разломак претвори у децималан, па се онда израчуна корен.

160. Скраћени поступак при израчунавању квадратнога корена.

Ако је за квадратни корен некојег броја одређено m првих цифара, то да би се одредило још $m-1$ даљих цифара коренових треба последњи остатак поделити удвојеним већ нађеним кореном.

При том се раду примењује скраћено дељење и у делитељу се одмах последња цифра изоставља.

Доказ. Ако се радиканд означи са a, а m првих већ нађених цифара са b, онда се може, без повреде опшности m првих одељака у a, стога и број b од m цифара узети као цели, јер је за ред цифара коренових свеједно, ма за којим се одељком радикандовим узела децимална запета; тада ће цифре коренове што доцније долазе бити децимали.

Ако се сад стави $\sqrt{a}=b+x$, где x значи онај део коренов, којега још нема, биће

$$(b+x)^2=a, \text{ или } b^2+2bx+x^2=a, \text{ а отуда}$$

$$2bx=a-b^2-x^2 \text{ и } x=\frac{a-b^2}{2b}-\frac{x^2}{2b}.$$

Кад се за x узме количник $\frac{a-b^2}{2b}$, где $a-b^2$ значи последњи остатак при извлачењу корена а $2a$ удвојени већ нађени корен, онда је погрешка, што се учини, једнака са $\frac{x^2}{2b}$. Али је $x<1$ и $b \gtreqless 10^{m-1}$, стога је $\frac{x^2}{2b}$ свакако мање од $\frac{1}{2.10^{m-1}}$; одакле се види да количник $\frac{a-b^2}{2b}$ даје најмање $m-1$ даљих тачних цифара коренових.

Допуне. 1. Кад се одређује квадратни корен из цела броја или из потпуна децимална разломка са $2m-1$ цифара, које вреде онда се одређује квадратни корен обичним путем за m првих цифара, али се осталих $m-1$ цифара одређује скраћеним дељењем по наведеном правилу.

Ако је нпр. задато да се одреди $\sqrt{138}$ тачно са 5 децимала дакле свега са 7 цифара које вреде, онда се прве четири цифре одређују кореновањем, а последње три скраћеним дељењем. Рад је овакав:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{1\,38} & = 11,74734.. \\
38 & :\ 21 \\
1700 & :\ 227 \\
11100 & :\ 2344 \\
1724 & :\ 2,3,4,8 \\
80 & \\
10 & \\
1 &
\end{array}$$

2. Овај скраћени поступак нарочито се употребљава при извлачењу квадратнога корена из непотпуна децимална разломка. Овим се поступком у најнеповољнијем случају одређује $2m-1$ поузданих цифара које вреде, кад у радиканду има m одељака који вреде.

2. Кубни корен

161. Задатак. Извући кубни корен из алгебарског збира.

1. Треба извући кубни корен из првога члана уређена радиканда; то је први члан коренов. Куб првог члана коренова одузети од радиканда.

2. Подели се први члан остатка утројеним квадратом већ нађена корена; количник је други члан коренов. Тада се начине

сабирци, што их тај нови члан коренов даје у кубу, то јест троструки квадрат већ нађена коренова дела помножена тим новим чланом, троструки пређашњи део коренов помножен квадратом новога члана и куб тога члана; затим се збир та три сабирка одузме од пређашњега остатка радикандова.

3. Тај се поступак наставља. Ако најзад не буде никаква остатка, тада је радиканд једнак с кубом нађена корена; а ако има остатка, онда је радиканд једнак с кубом корена повећаним за остатак.

Тај се поступак изводи из чл. **125** на сличан начин, као што је у чл. **157** изведен поступак за извлачење квадратнога корена из полинома према чл. **123**.

Пример.

$$\sqrt[3]{[y^6-6y^5+21y^4-44y^3+63y^2-54y+27]}=y^2-2y+3.$$

$$\begin{array}{l}
\pm y^6 \\
\hline
\quad -6y^5+21y^4-44y^3 \quad : 3y^4 \\
\quad \mp 6y^5 \pm 12y^4 \mp 8y^3 \\
\hline
\qquad +9y^4-36y^3+63y^2-54y+27 : 3y^4-12y^3+12y^2 \\
\qquad \pm 9y^4 \mp 36y^3 \pm 36y^2 \\
\qquad\qquad \pm 27y^2 \mp 54y \pm 27 \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

162. Задатак. Израчунати кубни корен из декадна цела броја, који је потпун куб.

1. Треба тај број почињући од јединица на лево поделити на одељке по три цифре, где први (највиши) одељак може имати само две цифре, или и једну цифру, па се онда тражи највећи број, чиј се куб налази у првом одељку и то је прва цифра кубна корена. Куб прве цифре коренове одузме се од првога одељка радикандова.

2. Остатку се дописује потоњи одељак, издвајајући за време две последње цифре, па се тако постали број подели троструким квадратом већ нађена корена и добивени количник биће нова цифра коренова. Затим се начине сабирци што их та нова цифра коренова даје у кубу, то јест троструки квадрат пређашњега броја помножен новом цифром, троструки пређашњи број помножен квадратом те нове цифре и њен куб; први се сабирак напише испод дељеника, а сваки потоњи за једно место даље у десно, па се збир тако написаних сабирака одузме од дељеника, којему се придају пређе изостављене две цифре.

3. Тај се поступак наставља док се сви одељци радикандови не узму у рачун.

Тачност тога поступка оснива се на чл. **126.** Нпр.

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt[3]{78|953|589}=429 & \\
 & 64 & \\
\hline
 & 149|53 & : 48\ldots 3.\,4^2 \\
3.\,4^2.2\ldots & 96\,.\,. & \\
3.\,4.\,2^2\ldots & 48 & \\
2^3\ldots & 8 & \\
\hline
 & 48655|89 & : 5292\ldots 3.\,42^2 \\
3.42^2.9\ldots & 47628\,.\,. & \\
3.42.\,9^2\ldots & 10206\,. & \\
9^3\ldots & 729 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Допуна. Поступак за извлачење кубнога корена из децималних и обичних разломака изводи се из поступка при извлачењу квадратног корена у чл. **158,** доп. 1. и 2.

163. Израчунати кубни корен из декадна цела броја, који није потпун куб.

Кад радиканд није трећи степен каква цела броја, онда је кубни корен ирационалан и може се само приближно израчунати. Рад је при том сличан раду, који је показан у чл. **159** за израчунавање квадратнога корена из декадна цела броја, који није потпун квадрат; само се овде морају појединим остацима за сваки одељак дописивати по три нуле.

Допуна. Па и за израчунавање кубнога корена из децималних или из обичних разломака, кад нису потпуни кубни бројеви, упућује се на сличне напомене у доп. 1. и 2. чл. **159.**

На сличан начин, кад је од кубног корена неког броја одређено m цифара обичним поступком, може се даљих $m-1$ цифара добити, кад се последњи остатак подели троструким квадратом већ нађена корена.

III. Логаритми

1. О логаритмима уопште

164. Свагда има једна и само једна стварна вредност за x, која задовољава једначину $b^x=a$, где су b и a позитивни стварни бројеви и $b \gtrless 1$.

Доказ. Понајпре нека су b и a већи од 1. Сад се начини ред бројева који расте $b^0, b^1, b^2, \dots$.

Сад или је a члан тога реда, дакле $a = b^c$, чиме је правило доказано, или се a налази између два узастопна члана.

Нека је $\quad b^c < a < b^{c+1}, \quad$ дакле $\quad c < x < c+1.$

Сад се начини ред

$$b^c,\ b^{c+\frac{1}{10}},\ b^{c+\frac{2}{10}}, \dots b^{c+\frac{9}{10}},\ b^{c+1},$$

то или ће опет a бити једнако с неким чланом тога реда, или ће се налазити између два узастопна члана његова. Нека је

$$b^{c+\frac{c_1}{10}} < a < b^{c+\frac{c_1+1}{10}}, \quad \text{дакле} \quad c+\frac{c_1}{10} < x < c+\frac{c_1+1}{10}.$$

Сад се начини ред:

$$b^{c+\frac{c_1}{10}},\ b^{c+\frac{c_1}{10}+\frac{1}{10^2}},\ b^{c+\frac{c_1}{10}+\frac{2}{10^2}}, \dots b^{c+\frac{c_1}{10}+\frac{9}{10^2}},\ b^{c+\frac{c_1+1}{10}},$$

и настави као и раније. На тај начин или се добива: $x = c+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\dots+\frac{c_n}{10^n}$, који се ред прекида; дакле је x рационално; — или, изабрало се n ма колико велико, постоји одношај:

$$c+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\dots+\frac{c_n}{10^n} < x < c+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\dots+\frac{c_n+1}{10^n}.$$

Ако се цифре периодно повраћају, онда је x рационалан број; напротив, ако је ред цифара непериодан, x је ирационалан број. Али се оваквим радом увек долази до једног јединог стварног броја, који одговара постављеној погодби. Ако је $a < 1$, доводи нас ред $b^0, b^{-1}, b^{-2}, \dots$ истом циљу.

За $b < 1$, једначина $b^x = a$ преобрати се у $\left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{a}$. Почем је за последњу једначину доказано, да постоји једна једина стварна вредност за x, то ће исто вредети и за прву једначину.

165. Степеновању одговарају две обрнуте радње, кореновање и логаритмовање, према томе да ли се тражи основа или изложитељ, јер они не могу мењати своја места.

Тумачење. Под логаритмом броја a за основу b разуме се изложитељ степенов којим треба b као основу степеновати да би се добио број a као степен. Број b је основа, као степен дати број a назива се логаритманд или управо број (numerus), а тражени изложитељ степенов — логаритам. Ако је $a = b^n$, онда је n логаритам броја a за основу b; то се означава овако: $\log a_{(b)} = n$ (а чита се: логаритам од a за основу b“).

Ако се за логаритме усвоји нека одређена основа, нпр. број 10, тада се последњи израз краће пише $\log a = n$, где се основа, као позната, подразумева.

Логаритам броја a за основу b је дакле онај број n, којим треба степеновати b да се добије a.

166. Последице. (Дефинициони образац). Кад се основа степенује логаритмом, добива се број (numerus).

$$b^{\log a_{(b)}} = a$$

2. Логаритам степена, чија је основа једнака с логаритмовом основом, једнак је с изложитељем степеновим.

$$\log b^n_{(b)} = n.$$

Специјално: a) Логаритам основе једнак је 1.

$$\log b_{(b)} = 1; \text{ јер је } b^1 = b.$$

b) Логаритам од 1 за сваку основу једнак је 0.

$$\log 1_{(b)} = 0; \text{ јер је } b^0 = 1$$

3. За позитивну основу негативан број не може имати стваран (реалан) логаритам.

Јер и b^{+n} и $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ дају позитиван резултат.

167. Како се степеновањем стварна негативна броја не могу добити сви могући позитивни бројеви, и како је сваки степен од 1 опет 1, а степени од 0, или су 0, неодређени или немогући, то се за основу логаритамске системе може узети само стваран, позитиван и од нуле различан број.

У односу на такву основу према чл. **164.** сваком позитивном стварном броју припада један једини стваран логаритам.

Одатле непосредно излази: За позитивну и од нуле различну основу имамо:

1. једнаким бројевима припадају једнаки логаритми и обрнуто;

2. *a)* кад је основа >1,

већем броју одговора већи логаритам и обрнуто;

b) кад је основа <1,

већем броју одговара мањи логаритам и обрнуто.

Уређени скуп логаритама узастопних бројева природнога реда за позитивну и од *1* различну основу чини логаритамску систему.

Употребљавају се само две логаритамске системе, и то обична, Бригова или декадна система за основу *10*, и природна или Неперова система за ирационалну основу *2,718281828*..., која се добива сабирањем бескрајнога реда

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots$$

и која се обично бележи словом *e*.

Допуна. Из овога излагања јасно је, да исти број има различне логаритме за различне основе.

Општа правила о логаритмима.

168. 1. Логаритам производа једнак је са збиром логаритама појединих чинитеља.

Нека је за основу b

$$\log M=m,\ \log N=n,\ \log P=p, \text{ дакле}$$
$$M=b^m,\ N=b^n,\ P=b^p; \text{ тада је}$$
$$MNP=b^{m+n+p}, \text{ то јест}$$
$$\log MNP=m+n+p, \text{ или}$$
$$\log MNP=\log M+\log N+\log P.$$

Нпр. $\log 6=\log 2+\log 3.$

$\log 30=\log 2+\log 3+\log 5.$

Ако су за неку основу познати логаритми свих простих бројева, онда се могу из њих извести логаритми свију сложених бројева самим сабирањем.

2. Логаритам разломка (количника) једнак је разлици логаритма бројитеља (дељеника) и логаритма именитеља (делитеља).

Нека је за основу b

$$\log M=m,\ \log N=n; \text{ дакле } M=b^m,\ N=b^n;$$

онда је

$$\frac{M}{N}=b^{m-n} \text{ дакле } \log\frac{M}{N}=m-n=\log M-\log N.$$

$$\text{Нпр. } \log\frac{29}{31}=\log 29-\log 31.$$

$$\log 35{,}29=\log\frac{3529}{100}=\log 3529-\log 100.$$

3. Логаритам степена једнак је производу изложитеља с логаритмом основе.

Нека је за основу b $\log M=m$, дакле $M=b^m$; тада је $M^p=b^{mp}$, а стога $\log M^p=mp=p\log M.$

Нпр. $\log 8^3=3\log 8.$

$$\log (2a)^3=3\log 2a=3(\log 2+\log a).$$

$$\log\frac{x^2y}{(mn)^4}=2\log x+\log y-4(\log m+\log n).$$

4. Логаритам корена једнак је логаритму радиканда подељеним кореновим изложитељем.

Нека је за основу b $\log M=m$, дакле $M=b^m$; тада је $\sqrt[p]{M}=\sqrt[p]{b^m}=b^{\frac{m}{p}}$, стога

$$\log\sqrt[p]{M}=\frac{m}{p}=\frac{\log M}{p}$$

Нпр. $\log\sqrt[3]{75}=\dfrac{\log 75}{3}.$

$$\log\sqrt[5]{\frac{a}{b}}=\frac{\log\frac{a}{b}}{5}=\frac{\log a-\log b}{5}.$$

$$\log\frac{a\sqrt[3]{x^2}}{y}=\log a+\frac{2}{3}\log x-\log y.$$

169. Количник логаритама истога броја за две различне основе јесте сталан.

Доказ. Ако је $\log N_{(a)}=x$, дакле $a^x=N$, то, кад се у другој једначини с обе стране узму логаритми за неку другу основу b, биће

$$x\,.\log a_{(b)}=\log N_{(b)} \text{ или}$$
$$\log N_{(a)}\,.\,\log a_{(b)}=\log N_{(b)} \text{ дакле}$$
$$\frac{\log N_{(a)}}{\log N_{(b)}}=\frac{1}{\log a_{(b)}}.$$

Ако су познати логаритми бројева за основу b, онда се из њих могу одредити и логаритми за сваку другу основу a, кад се први помноже сталним чинитељем $\frac{1}{log\ a_{(b)}}$, то јест обрнутом вредности логаритма нове основе у односу на пређашњу основу. Број, којим треба множити логаритме једне системе, да се добију логаритми друге системе, назива се модуо нове системе према првобитној системи. Модуо Бригове системе према природном је $\frac{1}{log\ 10_{(e)}} = 0{,}4342945\ldots$

2. Бригови логаритми

170. Бригов логаритам бележи се просто са log уместо са $log_{(10)}$.

1. Бригови логаритми свих бројева већих од 1 јесу позитивни; а Бригови логаритми свију позитивних бројева мањих од 1 негативни су.

Доказ. $log\ 1 = 0$ и $log\ a = n$.

Из $a > 1$ излази (чл. **167.**) да је $n > o$.

" $a < 1$ " " " " " $n < o$.

2. Бригов логаритам каквога цела броја или разломка, који је нека декадна јединица, цео је број.

Јасно је према чл. **166**, 2.

3. Бригов логаритам каквога цела броја или разломка, који није декадна јединица, ирационалан је број.

Доказ. Кад N није декадна јединица, већ се налази између две узастопне декадне јединице 10^n и 10^{n+1}, где n значи позитиван или негативан цео број или и нулу, тада се логаритам од N налази између n и $n+1$, дакле он није цео број. Али он не може бити ни разломак. Јер ако би био $log\ N = \frac{\pm p}{q}$ где су p и q релативно прости бројеви, морало би бити $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$ или $10^{\pm p} = N^q$. Да би пак ова једначина била могућна, морало би $10^{\pm p}$ и N^q бити сложено из истих простих чинитеља; дакле у N не би смело бити других чинитеља сем 2 и 5, или $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$, и оба би морала имати подједнак број; али би тада и само N било декадна јединица, а то се не слаже с претпоставком. Како, према овоме, $log\ N$ не може бити рационалан број а ипак је према чл. **164** стваран, то мора бити ирационалан.

171. Задатак. Израчунати Бригов логаритам задатом броју.

Поновним извлачењем квадратнога корена израчунавају се бројеви ове таблице:

$10^{0,5} = 3{,}162278$	$10^{0,000488} = 1{,}001125$
$10^{0,25} = 1{,}778279$	$10^{0,000244} = 1{,}000562$
$10^{0,125} = 1{,}333521$	$10^{0,000122} = 1{,}000281$
$10^{0,0625} = 1{,}154782$	$10^{0,000061} = 1{,}000141$
$10^{0,03125} = 1{,}074608$	$10^{0,000031} = 1{,}000070$
$10^{0,015625} = 1{,}036633$	$10^{0,000015} = 1{,}000035$
$10^{0,007813} = 1{,}018152$	$10^{0,000008} = 1{,}000018$
$10^{0,003906} = 1{,}009035$	$10^{0,000004} = 1{,}000009$
$10^{0,001953} = 1{,}004507$	$10^{0,000002} = 1{,}000004$
$10^{0,000976} = 1{,}002251$	$10^{0,000001} = 1{,}000002$

Спомоћу ове таблице израчунава се логаритам некога броја, који се налази између 1 и 10, нпр. броја $1{,}3$ овако. Подели се $1{,}3$ најближим мањим бројем ове таблице, количник се опет подели најближим мањим бројем итд. Стога је $1{,}3$ једнако с производом узастопних делитеља и последњега количника који има да се занемари.

$$1{,}3 = 1{,}154782 \,.\, 1{,}074608 \,.\, 1{,}036633 \,.\, 1{,}009035 \,.\, 1{,}001125 \,.\, 1{,}000281 \,.\, 1{,}000070 \,.\, 1{,}000009 \,.\, 1{,}000004\ (1{,}000001)$$ дакле

$$log\ 1{,}3 = 0{,}0625 + 0{,}03125 + 0{,}015625 + 0{,}003906 + 0{,}000488 + 0{,}000122 + 0{,}000031 + 0{,}000015 + 0{,}000004 + 0{,}000002 = 0{,}11394\ldots$$ (тачно на 5 децимала).

Допуна. Сваки број, који се не налази између 1 и 10, претвара се у производ из таквог броја и неког степена од 10. Нпр. $13 = 10 \,.\, 1{,}3$ дакле $log\ 13 = 1 + log 1{,}3 = 1{,}11394$.

172. Како у Бриговој системи сем декадних јединица сви други позитивни бројеви имају позитивне или негативне ирационалне логаритме, то се сваки логаритам може представити као алгебарски збир из једнога позитивна или негатнвна цела броја и једнога позитивна децимална разломка, који је мањи од 1. Позитиван или негативан цео број у логаритму назива се карактеристика или значица, а позитиван прави децимални разломак мантиса или казаљка.

Да би се негативан логаритам довео на споменути облик, одузме се његова апсолутна вредност од најближега већег цела броја, па се он прида као негативна карактеристика, а према једначини $-b = (a - b) - a$.

се први помноже сталним чинитељем $\frac{1}{log\, a_{(b)}}$, то јест обрнутом вредности логаритма нове основе у односу на пређашњу основу. Број, којим треба множити логаритме једне системе, да се добију логаритми друге системе, назива се *модуо* нове системе према првобитној системи. Модуо Бригове системе према природном је $\frac{1}{log\, 10_{(e)}} = 0{,}4342945\ldots$

2. Бригови логаритми

170. Бригов логаритам бележи се просто са log уместо са $log_{(10)}$.

1. *Бригови логаритми свих бројева већих од 1 јесу позитивни; а Бригови логаритми свију позитивних бројева мањих од 1 негативни су.*

Доказ. $log\ 1 = 0$ и $log\ a = n$.

Из $a > 1$ излази (чл. **167.**) да је $n > o$.

„ $a < 1$ „ „ „ „ „ $n < o$.

2. *Бригов логаритам каквога цела броја или разломка, који је нека декадна јединица, цео је број.*

Јасно је према чл. **166**, 2.

3. *Бригов логаритам каквога цела броја или разломка, који није декадна јединица, ирационалан је број.*

Доказ. Кад N није декадна јединица, већ се налази између две узастопне декадне јединице 10^n и 10^{n+1}, где n значи позитиван или негативан цео број или и нулу, тада се логаритам од N налази између n и $n+1$, дакле он није цео број. Али он не може бити ни разломак. Јер ако би био $log\ N = \frac{\pm p}{q}$ где су p и q релативно прости бројеви, морало би бити $10^{\frac{\pm p}{q}} = N$ или $10^{\pm p} = N^q$. Да би пак ова једначина била могућна, морало би $10^{\pm p}$ и N^q бити сложено из истих простих чинитеља; дакле у N не би смело бити других чинитеља сем 2 и 5, или $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{5}$, и оба би морала имати подједнак број; али би тада и само N било декадна јединица, а то се не слаже с претпоставком. Како, према овоме, $log\ N$ не може бити рационалан број а ипак је према чл. **164** стваран, то мора бити *ирационалан*.

171. Задатак. *Израчунати Бригов логаритам задатом броју.*

Поновним извлачењем квадратнога корена израчунавају се бројеви ове таблице:

$10^{0,5} = 3{,}162278$	$10^{0,000488} = 1{,}001125$
$10^{0,25} = 1{,}778279$	$10^{0,000244} = 1{,}000562$
$10^{0,125} = 1{,}333521$	$10^{0,000122} = 1{,}000281$
$10^{0,0625} = 1{,}154782$	$10^{0,000061} = 1{,}000141$
$10^{0,03125} = 1{,}074608$	$10^{0,000031} = 1{,}000070$
$10^{0,015625} = 1{,}036633$	$10^{0,000015} = 1{,}000035$
$10^{0,007813} = 1{,}018152$	$10^{0,000008} = 1{,}000018$
$10^{0,003906} = 1{,}009035$	$10^{0,000004} = 1{,}000009$
$10^{0,001953} = 1{,}004507$	$10^{0,000002} = 1{,}000004$
$10^{0,000976} = 1{,}002251$	$10^{0,000001} = 1{,}000002$

Спомоћу ове таблице израчунава се логаритам некога броја, који се налази између 1 и 10, нпр. броја $1{,}3$ овако. Подели се $1{,}3$ најближим мањим бројем ове таблице, количник се опет подели најближим мањим бројем итд. Стога је $1{,}3$ једнако с производом узастопних делитеља и последњега количника који има да се занемари.

$$1{,}3 = 1{,}154782 \,.\, 1{,}074608 \,.\, 1{,}036633 \,.\, 1{,}009035 \,.\, 1{,}001125 \,.\, 1{,}000281 \,.\, 1{,}000070 \,.\, 1{,}000009 \,.\, 1{,}000004\ (1{,}000001) \text{ дакле}$$

$$log\ 1{,}3 = 0{,}0625 + 0{,}03125 + 0{,}015625 + 0{,}003906 + 0{,}000488 + 0{,}000122 + 0{,}000031 + 0{,}000015 + 0{,}000004 + 0{,}000002 = 0{,}11394\ldots \text{ (тачно на 5 децимала).}$$

Допуна. Сваки број, који се не налази између 1 и 10, претвара се у производ из таквог броја и неког степена од 10. Нпр. $13 = 10 \,.\, 1{,}3$ дакле $log\ 13 = 1 + log\, 1{,}3 = 1{,}11394$.

172. Како у Бриговој системи сем декадних јединица сви други позитивни бројеви имају позитивне или негативне ирационалне логаритме, то се сваки логаритам може представити као алгебарски збир из једнога позитивна или негативна цела броја и једнога позитивна децимална разломка, који је мањи од 1. Позитиван или негативан цео број у логаритму назива се *карактеристика* или *значица*, а позитиван прави децимални разломак *мантиса* или *казаљка*.

Да би се негативан логаритам довео на споменути облик, одузме се његова апсолутна вредност од најближега већег цела броја, па се он прида као негативна карактеристика, а према једначини $-b = (a-b) - a$.

Нпр. $\qquad -2{,}344675 = 3 - 2{,}344675 - 3$
$$= \quad 0{,}655325 - 3.$$

173. *Карактеристика Бригова логаритма за неки декадни број једнака је с редним изложитељем највише цифре тога броја.*

Нека је n редни изложитељ највише цифре броја a, где n може означавати цео позитиван или негативан број или и нулу; тада је
$$10^n \leqq a < 10^{n+1}$$
$$n \leqq \log a < n+1.$$

Дакле је $\log a = n + \alpha$, где је α позитивно и < 1 или и нула; стога је n карактеристика логаритма од a.

Последице. *a)* Карактеристика логаритма неког броја, у којем има целих, позитивна је и за 1 мања од броја његових целих цифара (чл. **52,** послед. 1.).

b) Карактеристика логаритма каква праве децимална разломка негативна је и апсолутно узета једнака с бројем свих нула, које су пред децималима што вреде, рачунајући ту и нулу пред децималном запетом (**128,** 1).

174. *Кад се будикоји број помножи или подели неким степеном од 10, онда се у Бригову логаритму тога броја мења само карактеристика а мантиса се не мења.*

Тако је $\qquad \log (a.10^m) = \log a + \log 10^m = \log a + m,$
$$\log \frac{a}{10^m} = \log a - \log 10^m = \log a - m.$$

Дакле се у првом случају логаритам броја повећава за цео број m, а у другом се за толико умањава, то јест он добива другу карактеристику а мантиса му остаје иста.

Тако је нпр. $\log 7124 = 3{,}852724$; стога је
$$\log 712400 = \log 7124 + \log 100 = 3{,}852724 + 2 = 5{,}852724;$$
$$\log \ 71{,}24 = \log 7124 - \log 100 = 3{,}852724 - 2 = 1{,}852724.$$

Мантиса логаритма стоји само до *размештаја цифара* у броју а не гледа се на њихов степен.

Допуна. *a)* Из $\lim 10^n = \infty$ за $\lim n = \infty$ излази:
$$\lim \log x = \infty \text{ за } \lim x = \infty.$$
b) Из $\lim 10^n = 0$ за $\lim n = -\infty$ излази:
$$\lim \log x = -\infty \text{ за } \lim x = 0.$$

Логаритамске таблице

175. Израчунати логаритми свих бројева од 1 до 10000 или од 1 до 100000, и то први са 5 или 6, а други са 7 децимала, скупљени су у нарочите таблице, које се називају *логаритамске таблице*. У њима су само мантисе логаритама, јер се карактеристика може у сваком случају лако одредити по чл. **173.**

Спомоћу таквих таблица налази се врло лако сваком броју његов логаритам, и обрнуто сваком датом логаритму број који му одговара.

Спомоћу таблице, у којој се налазе логаритми свију четвороцифрених бројева, може се наћи логаритам петоцифрена броја, као и обрнуто логаритму, који се не налази у таблици, може се наћи број који му одговара. За то има правило, које се овде не доказује, али се о његовој тачности може уверити спомоћу логаритамских таблица.

За велике бројеве је приraштај логаритма приближно пропорционалан с прираштајем броја.

Нека су b и c сразмерно мали спрам a; тада је
$$\frac{\log (a+c) - \log a}{\log (a+b) - \log a} = \frac{c}{b},$$

дакле: $\log (a+c) = \log a + d \cdot \frac{c}{b}$, кад је $d = \log (a+b) - \log a.$

Обрнуто је: $a + c = a + \frac{\log (a+c) - \log a}{d} \cdot b.$

Примери. 1. Нека је дато да се одреди $\log 3021{,}2$. У таблици се налази $\log 3021 = 3{,}480151$, одузимањем овога логаритма од најближег вишег добива се $d = 143$ јединице последњега места.

Кад број расте за 1, логаритам расте за 143 јединице 6. места.
„ „ „ „ $0{,}1$ „ „ „ $14{,}3$ „ „ „
„ „ „ „ $0{,}2$ „ „ „ $14{,}3 \times 2$ „ „ „

Тражени логаритам дакле има да се повиси за $28{,}6 = 29$ (с поправком). $\log 3021{,}2 = 3{,}480180.$

2. Кад је $\log x = 1{,}165775$, колико је x. Најближи мањи логаритам је $1{,}165749$, којему одговара број $14{,}647$, а разлика оба логаритма (рачунска разлика) је 26 јединица последњега места. Разлика оба узастопна логаритма у таблици (таблична разлика) износи 29 јединица последњега места.

Кад логар. расте за *29* јед. *6.* м., онда број (num.) р. за *1* ј. 6 м.

„ „ „ „ *26* „ „ „ „ „ . „ „ $\frac{1.26}{29}$ „ „

$\frac{1.26}{29} = 0{,}89 = 0{,}9$ (попр.); дакле је $x = 14{,}6479$

176. Рачунске радње с Бриговим логаритмима.

За рачунање с логаритмима вреде уопште правила, која вреде и за декадне бројеве; само при том треба још пазити и на ово:

1. Кад се при сабирању логаритама добију две карактеристике, једна позитивна а друга негативна, оне се своде у једну Нпр.

$$\begin{array}{r} 3{,}105891 \\ 2{,}568142 \\ 0{,}213403-2 \\ 0{,}081051-4 \\ \hline 5{,}968487-6 = 0{,}968487-1. \end{array}$$

2. Ако је при одузимању умаљеник мањи од умалитеља, то, да би се избегла негативна мантиса, треба умаљенику додати толико позитивних јединица, колико је потребно да постане већи од умалитеља, па се онда и у остатку узме толико исто негативних јединица као карактеристика. Исто тако треба узети на ум, да негативна карактеристика умалитељева при одузимању постаје позитивна.

Нпр. 1. $+4 \quad -3$ 2. $+1$

$$\begin{array}{r} 1{,}450257 \\ 3{,}578925 \\ \hline 0{,}871332-3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}230201-1 \\ 0{,}834105 \mp 2 \\ \hline 0{,}396096 \end{array}$$

3. Ако се логаритам с негативном карактеристиком множи неким бројем, онда треба у производу нову негативну карактеристику свести с добивеном можда позитивном. Нпр.

$$(0{,}531151-2) \times 5 = 2{,}655755-10$$
$$= 0{,}655755-8.$$

4. Кад треба делити неким бројем логаритам с негативном карактеристиком, онда се она, ако није дељива оним бројем, повећа за толико јединица, колико је за дељивост потребно; али онда треба толико исто целих јединица додати и позитивној мантиси. Нпр.

$$(0{,}415096-7):5 = (3{,}415096-10):5 = 0{,}683019-2.$$

177. Примена Бригових логаритама.

Општа правила изведена у чл. **168.** служе нам да се множење претвори у сабирање, дељење у одузимање, степеновање у множење и кореновање у дељење.

Кад међу датим бројевима има негативних, они се за време сматрају као апсолутни бројеви, па се с њима изврши рачунање а у резултату се накнадно одреди знак.

1. Множење бројева спомоћу логаритама.

Одреди производ $x = 1{,}0954 \cdot 0{,}91567 \cdot (-3{,}1571) \cdot 1{,}00782.$

Рад је овакав:

$$\begin{array}{rl} \log 1{,}0954 & = 0{,}039573 \\ \log 0{,}91567 & = 0{,}961739-1 \\ \log 3{,}1571 & = 0{,}499289 \\ \log 1{,}00782 & = 0{,}003383 \\ \hline & = 0{,}503984 \end{array}$$

$Numerus = 3{,}19142;\qquad x = -3{,}19142.$

2. Дељење бројева спомоћу логаритама.

Одреди вредност разломку $x = \frac{3{,}4156 \times 0{,}4023}{1{,}2378 \times 5{,}8709}.$

$$\begin{array}{rl} \log 3{,}4156 & = 0{,}533467 \\ \log 0{,}4023 & = 0{,}604550-1 \\ \hline & 1{,}138017-1 \\ \log 1{,}2378 & = 0{,}092650 \\ \log 5{,}8709 & = 0{,}768705 \\ \hline \log x & = 0{,}276662-1 \\ x & = 0{,}189086. \end{array}$$

3. Степеновање броја спомоћу логаритама.

Одреди $x = \left(\frac{329}{67}\right)^{1{,}065}$

$$\begin{array}{rl} \log 329 & = 2{,}517196 \\ \log 67 & = 1{,}826075 \\ \hline & 0{,}691121 \times 1{,}065 \\ & 5601 \\ \hline & 691121 \\ & 41467 \\ & 3456 \\ \hline \log x & = 0{,}736044 \\ x & = 5{,}44558 \end{array}$$

или

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}691121 & = 0{,}839554-1 \\ \log 1{,}065 & = 0{,}027350 \\ \hline \log(\log x) & = 0{,}866904-1 \\ \log x & = 0{,}736044 \\ x & = 5{,}44558. \end{array}$$

4. Кореновање броја помоћу логаритама.

1. Да се одреди 5. корен из *10*.

$$\log 10 = 1{,}000000$$
$$\log \sqrt[5]{10} = 0{,}200000$$
$$\sqrt[5]{10} = 1{,}58489.$$

2. Израчунај $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}}$, кад је $a = 0{,}21537$, $b = 7{,}7856$, $c = 0{,}93572$.

$$\begin{aligned}
\log a &= 0{,}333185-1 \\
\log a^2 &= 0{,}666370-2 \\
\log b &= 0{,}891292 \\
&\ 1{,}557662-2 \\
(\log c &= 0{,}971146-1) \\
\log c^2 &= 0{,}942292 \mp 1 \\
&\ 0{,}615370-1 \\
&\ 2{,}615370-3\ (:3) \\
\log x &= 0{,}871790-1 \\
x &= 0{,}744372.
\end{aligned}$$

Кад се у датим изразима налазе алгебарски збирови, као нпр. $\sqrt{a^4 + b^4}$, тада се понајпре израчунавају поједини сабирци, па онда збирови; логаритамско се рачунање дакле више пута прекида.

Историске напомене. Логаритме је пронашао и објавио Непер (Lord John Napier); он је 1614 објавио таблицу природних логаритама. Њим изабрато име логаритам (*λόγον ἄριθμός*) значи „бројитељ размере“, кад он показује, колико се пута мора дата размера сама собом помножити, да даде другу размеру. $\left(\frac{b}{b_1}\right)^n = \frac{a}{a_1}$. Ако се стави $b_1 = 1$ и $a_1 = 1$, тада старија дефиниција прелази у новију.

Изазван Непером објави Briggs 1618 обичне логаритме бројева од 1 до 1000. Независно од обојице беше већ швајцарски часовничар Jost Bürgi применио логаритамско рачунање, али је своје логаритамске таблице (са основом 1,0001) објавио тек 1620.

178. Решавање експоненцијалних и логаритамских једначина.

a) Једначина, у којој се непозната јавља као изложитељ, назива се експоненцијална. Њен је општи облик:

$$a^x = b \quad \text{или} \quad \sqrt[x]{a} = b.$$

Решење такве једначине оснива се на примени правила: ако су два броја једнака, једнаки су и њихови логаритми узети у истој основи. Тада се добива алгебарска једначина.

Погдекоје једначине могу се решити без примене логаритама помоћу правила: Кад су два степена исте основе једнака, једнаки су им и изложитељи. Изузимају се основе *1* и *0*.

Примери. 1. $\sqrt{2^{x-1}} = \sqrt[7]{0{,}5^{6-4x}}$

$$2^{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6-4x}{7}} = 2^{\frac{4x-6}{7}}$$
$$\frac{x-1}{2} = \frac{4x-6}{7}$$
$$x = 5.$$

2. $\sqrt[x]{2^{5+3x}} = 5$

$$\frac{5+3x}{x} \log 2 = \log 5$$
$$5 \log 2 + 3x \log 2 = x \log 5$$
$$x(3 \log 2 - \log 5) = -5 \log 2$$
$$x = -\frac{5 \log 2}{3 \log 2 - \log 5} = -\frac{1{,}505150}{0{,}903090 - 0{,}698970}$$
$$x = -(1{,}505150 : 0{,}204120) = -7{,}3738.$$

Напомена. Ако је решење количник двају логаритама, па један или оба имају негативну карактеристику, тада се те разлике морају заменити њиховим негативним вредностима. Нпр.

$$x = \frac{0{,}568640 - 2}{0{,}477120} = -\frac{1{,}431360}{0{,}477120} = -3.$$

b) Логаритамска једначина назива се она у којој се непозната јавља под логаритамским законом. Да би се таква једначина решила, треба је преображајем довести на облик: $\log u = \log v$, одакле се добива алгебарска једначина $u = v$.

Примери.

1) $2 + \log 6x = \log(19x + 7) + \log 15$

$$\log(600x) = \log[15(19x + 7)]$$
$$600x = 15(19x + 7)$$
$$x = \frac{1}{3}.$$

2) $3^{\log x} = 4$

$$\log x \cdot \log 3 = \log 4$$
$$\log x = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{0{,}602060}{0{,}477121}$$
$$\log x = 1{,}26186$$
$$x = 18{,}275$$

ПЕТИ ОДЕЉАК

Једначине другога степена

I. Квадратне једначине с једном непознатом

179. Општи облик једначине другога степена је

$$Ax^2+Bx+C=0, \text{ где је } A \gtrless 0,$$

или, кад се обе стране поделе са A,

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0,$$

Ако се стави $\frac{B}{A}=a$ и $\frac{C}{A}=b$, добива се једначина уређена облика.

$$x^2+ax+b=0.$$

Три су случаја могућна:

a) Кад је од x слободан члан $b=0$, тада је

$$x^2+ax=0, \text{ или } x(x+a)=0,$$

дакле је према допуни чл. **106,** $x=0$ и $x+a=0$, т.ј. $x=-a$. Једначину, према томе, задовољавају две вредности.

b) Ако је $a=0$, биће

$$x^2+b=0, \text{ или } x^2=-b.$$

Таква једначина, у којој се непозната јавља само на другом степену, назива се чисто квадратна једначина.

c) Кад су a и b различни од 0, једначина се назива мешовито квадратна или потпуна једначина другога степена.

Чисто квадратне једначине.

180. Да би се решила чисто квадратна једначина.

$$x^2=b,$$

треба само из обадве стране извући квадратни корен; па се добива

$$x=\pm\sqrt{b}.$$

Дакле чисто квадратна једначина има два супротна корена; за b позитивно, корени су стварни; за b негативно, они су имагинарни.

До истог се резултата долази, кад се дата једначина доведе на облик

$$x^2-b=0, \text{ или } x^2-(\sqrt{b})^2=0, \text{ или } (x-\sqrt{b})(x+\sqrt{b})=0.$$

Ова ће једначина бити задовољена или кад је

$$x-\sqrt{b}=0, \text{ т.ј. } x_1=\sqrt{b},$$
$$\text{или } x+\sqrt{b}=0, \text{ т.ј. } x_2=-\sqrt{b}.$$

Примери.

$x^2=9$, $\quad x^2=15$, $\quad x^2=-7$,

$x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. $\quad x=\pm\sqrt{15}$. $\quad x=\pm\sqrt{-7}$.

Потпуне квадратне једначине.

181. Да би се решила квадратна једначина дата у уређеном облику пренесе се најпре апсолутни члан на другу страну, па се лева страна допуни тако да постане потпуни квадрат бинома, а то се постиже, кад се обадвема странама дода квадрат од половине коефицијента другога члана

$$x^2+ax=-b$$
$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$$
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b$$

На овај начин добивена је чисто квадратна једначина с непознатом $x+\frac{a}{2}$, дакле по чл. **180.**

$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b},$$

а одавде $\qquad x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b},$

Према томе и свака потпуна квадратна једначина има два корена. О особини ових корена одлучује израз $\frac{a^2}{4}-b$, са чега се он зове дискриминанта квадратне једначине. Корени су

a) Стварни и неједнаки, кад је $\frac{a^2}{4}-b>0$, или $b<\left(\frac{a}{2}\right)^2$; и то

обадва су позитивна, кад је $a<0$ и $b>0$,
" " негативна, " " $a>0$ и $b>0$,
један је позитиван а други негативан кад је $b<0$.

b) Корени су стварни и једнаки, кад је $\frac{a^2}{4}-b=0$ или $b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

c) Корени су комплексни и конјугирани, кад је $\frac{a^2}{4} - b < 0$ или $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Примери.

1)
$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= 7 \\ 3^2 &= 9 \\ \hline x^2 - 6x + 3^2 &= 7 + 9 \\ (x-3)^2 &= 16 \\ x - 3 &= \pm\sqrt{16} \\ x - 3 &= \pm 4 \\ x &= 3 \pm 4 \\ x_1 = 7, \quad x_2 &= -1. \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x^2 + 7x &= -12 \\ \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} \\ x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 &= -12 + \frac{49}{4} \\ \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ x + \frac{7}{2} &= \pm\frac{1}{2} \\ x &= -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\ x_1 = -3, \quad x_2 &= -4 \end{aligned}$$

182. Место да се за решење потпуне квадратне једначине у сваком посебном случају понавља потпуно развијање изведено у чл. **181** могу се корени уређене једначине извести одмах из општег обрасца

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Кад имамо једначину општег облика

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

тада се заменом вредности a и b добива

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

За случај, кад је сачинитељ B паран број, дакле $B = 2B'$, тада имамо образац:

$$x = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - AC}}{A}.$$

183. За ирационалне једначине вреди напомена у доп. чл. **147.** Проба одлучује, који се знак мора дати вредности квадратног корена, да би се добила идентичност.

Пример.

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{3x} &= 3 \\ \sqrt{3x} &= 2x - 3 \\ 3x &= 4x^2 - 12x + 9, \text{ одавде је} \\ x_1 = 3, \quad x_2 &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

За $x_1 = 3$ мора добити $\sqrt{3x} = \sqrt{9}$ вредност $+3$, напротив за $x_2 = \frac{3}{4}$ мора добити $\sqrt{3x} = \sqrt{\frac{9}{4}}$ вредност $-\frac{3}{2}$. Ово се може овако потврдити. Ако се стави $\sqrt{3x} = y$, то једначина $2.\ \frac{y^2}{3} - y = 3$ даје корене: $y_1 = +3$ и $y_2 = -\frac{3}{2}$.

Односи између познатих бројева квадратне једначине и њених корена.

184. Лева страна уређене квадратне једначине, тј. $x^2 + ax + b$ назива се њен трином.

Ако је m један корен једначине $x^2 + ax + b = 0$, онда се $x - m$ назива њен коренски чинитељ.

1. Трином квадратне једначине дељив је сваким својим кореним чинитељем.

Доказ. Према претпоставци вреди идентична једначина

$$m^2 + am + b = 0,$$

дакле
$$\begin{aligned} x^2 + ax + b &= x^2 + ax + b - (m^2 + am + b) \\ &= x^2 - m^2 + a(x - m) = (x - m)(x + m + a) \end{aligned}$$

2. Трином сваке квадратне једначине једнак је с производом својих корених чинитеља.

Доказ. $x^2 + ax + b = (x - m)(x + m + a) = 0$ распада се у

$$x - m = 0 \text{ и } x + m + a = 0,$$

где су корени $x_1 = m$ и $x_2 = -(m + a) = n$.

Дакле је $n = -(m + a)$ други корен и $x - n = x + m + a$ други корени чинитељ, стога је $x^2 + ax + b = (x - m)(x - n)$.

3. Из исте једначине добива се идентичност

$$x^2 + ax + b = x^2 - (m + n)x + mn,$$

дакле $a = -(m + n)$ и $b = mn$.

a) Коефицијент другога (линеарнога) члана једнак је збиру оба корена с противним знаком.

b) Апсолутни члан једнак је с производом оба корена.

Допуне. 1. Ова два правила добивају се непосредно из општих решења (чл. **181**).

2. Гледајући на правило 3 може се према знацима корена квадратне једначине пресудити о знацима њених чланова и обрнуто према знацима чланова о знацима њених корена.

Особине квадратних функција.

185. Из $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x-m)(x-n)$,

где су m и n корени једначине $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, имамо:

1. Свака квадратна функција с једном променљивом може се раставити у производ двеју линеарних функција. Нпр.

$$9x^2-3x-2=9\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}\right)=9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right).$$
$$=(3x+1)(3x-2).$$

2. Свака квадратна функција ишчезава за две вредности променљивих $x=m$ и $x=n$.

3. Кад су m и n стварни, онда је за сваку вредност x-са, која се налази између m и n, вредност функције позитивна, кад је $a<o$, напротив она је негативна, кад је $a>o$. За сваку вредност x-са, која је мања од мањег или већа од већег корена њеног m и n, биће функција позитивна или негативна према томе да ли је a позитивно или негативно.

4. Кад су m и n имагинарни, нпр. $m=p+qi$, $n=p-qi$, онда је за сваку стварну вредност x-са вредност функције позитивна или негативна, према томе да ли је a позитивно или негативно; јер је $a\ (x-m)\ (x-n)=\ a\ (x-p-qi)\ (x-p+qi)$ $=a\ [(x-p)^2+q^2]$.

5. Ако се пусти да променљива добива редом све стварне вредности, тада функција за $x=-\frac{b}{2a}$ доспева до своје највеће или најмање вредности, према томе да ли је коефицијент квадратнога члана негативан или позитиван.

Доказ. $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=$

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right]+c=\frac{4ac-b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Ако је a негативно (позитивно), то се први сталан члан за сваку вредност x-са умањује (повећава) за величину другога члана; међу тим цео израз добива своју највећу (најмању) вредност, кад други члан буде једнак 0, тј. за $x=-\frac{b}{2a}$.

(Види додатак чл. **227**).

Квадратне једначине у геометриском облику решавао је још Еуклид, у бројевима решавао је Херон из Александрије а нарочито Диофант, а тако исто и Индијанци (Brahmagupta, рођ. 598. после Христа, Mohamed ben Musa 9. столеће по Хр.)

II. Алгебарске једначине вишег степена и експоненцијалне једначине с једном непознатом које се могу свести на квадратне једначине

Биномне једначине.

186. Једначина, која има само један степен непознате и један апсолутни члан, назива се биномна једначина. Општа биномна једначина m-тог степена гласи: $x^m=a$.

Она има, што ће се мало даље на нарочитим примерима показати, m различних корена. По томе $x=\sqrt[m]{a}$ има m различних вредности, или $\sqrt[m]{a}$ је m-значан, кад $\sqrt[m]{a}$ означава укупне корене једначине $x^m=a$.

Гдекоје биномне једначине, као једначине $3.$, $4.$, $5.$, $6.$, $8.$, $9.$, $10.$, $12.$ степена, могу се решити довођењем на квадратне једначине.

У том се циљу апсолутни члан представља као m-ти степен, једначина се своди на 0 и лева се страна растављa на чинитеље, при чем се она своди на две или више једначина нижега степена

a) $x^3=a$ или $x^3-\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=0$, ($\sqrt[3]{a}$ апсолут.)

$$\left(x-\sqrt[3]{a}\right)\ \left(x^2+x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=0,$$

дакле $x-\sqrt[3]{a}=0$ и $x^2+x\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}=0$

$$x_1=\sqrt[3]{a};\qquad x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{a}}{2}\left(-1\pm\sqrt{-3}\right).$$

b) $x^4=a$ или $x^4-a=0$,

$$(x^2-\sqrt{a})\ (x^2+\sqrt{a})=0,$$

дакле $x^2 - \sqrt{a} = 0$ и $x^2 + \sqrt{a} = 0$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{a}; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{a}\,.\,i.$$

Нпр. Једначина $x^4 + 1 = 0$ или $x^4 - (\sqrt{-1})^2 = (x^2 - \sqrt{-1})(x^2 + \sqrt{-1}) = 0$ има четири корена:

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{-1})$$

$$\text{и } x = \pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \sqrt{-1}).$$

c) Решење биномне једначине петог степена налази се у чл. **188,** *b*.

Триномне једначине облика $x^{2m} + ax^m + b = 0$.

187. Више једначине, у којих су само два степена непознате такве особине, да је један изложитељ степенов двапут већи од другога, могу се свагда свести на квадратне једначине; треба само нижи степен заменити новом непознатом.

a) Да се реши једначина $x^{2m} + ax^m + b = 0$, стави се $x^m = y$, дакле $x^{2m} = y^2$; па је тада

$$y^2 + ay + b = 0, \text{ а одавде}$$

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Па како је $x^m = y$, то је

$$x^m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

на тај начин добивена је биномна једначина.

Нпр. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Стави се $x^2 = y$ па је $y^2 - 13y + 36 = 0$, одакле је

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

дакле $y = 9$ или $y = 4$. Стога је

$$x^2 = 9 \quad \text{или} \quad x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 3 \qquad x_{3,4} = \pm 2.$$

b) На сличан начин решава се једначина

$$(x^{2n} + px^n + q)^{2m} + a(x^{2n} + px^n + q)^m + b = 0.$$

Нпр. $(x^2 - 6x + 11)^2 - 4(x^2 - 6x + 11) + 3 = 0$

Кад се стави $x^2 - 6x + 11 = y$, биће $y^2 - 4y + 3 = 0$, одакле је $y = 3$ или $y = 1$.

За $y = 3$ добива се онда $x^2 - 6x + 11 = 3$, а из ове је $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

За $y = 1$ имамо $x^2 - 6x + 11 = 1$, а отуда $x_3 = 3 + \sqrt{-1}$, $x_4 = 3 - \sqrt{-1}$.

c) Ако једначина има облик $\sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} + b = 0$, стави се $\sqrt[2m]{x} = y$, стога $\sqrt[m]{x} = y^2$; тада је

$$y^2 + ay + b = 0, \text{ а одавде}$$

$$y = \sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

стога, кад се обе стране подигну на $2m$-ти степен,

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^{2m}.$$

Нпр. $\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} = 2$.

Кад се стави $\sqrt[6]{x} = y$, онда је $y^2 - y = 2$, стога $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, и почем је $x = y^6$, биће $x_1 = 64$, $x_2 = 1$.

Реципрочне једначине

188. На нулу сведена једначина назива се *реципрочна*, кад су коефицијенти њених чланова, који су од крајњих чланова једнако удаљени, или скроз једнаки или једнаки а супротно означени. У последњем случају, ако је једначина парнога степена, нема средњега члана.

Општи облик реципрочне једначине је

$$x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots \pm a_2x^2 \pm a_1x \pm 1 = 0.$$

Реципрочна једначина има особину, да је реципрочна вредност свакога њезина корена такође њен корен.

Доказ. Ако је нпр. k корен горње једначине, ако је дакле $k^m + a_1k^{m-1} + a_2k^{m-2} + \ldots \pm a_2k^2 \pm a_1k \pm 1 = 0$, то је и $\frac{1}{k}$ корен те једначине. Јер заменом $x = \frac{1}{k}$ лева страна једначине добива вредност

$$\frac{1}{k^m}+a_1\frac{1}{k^{m-1}}+a_2\frac{1}{k^{m-2}}+\ldots\pm a_2\frac{1}{k^2}\pm a_1\frac{1}{k}\pm 1=$$

$$\pm\frac{1}{k^m}(\pm 1\pm a_1k\pm a_2k^2\pm\ldots+a_2k^{m-2}+a_1k^{m-1}+k^m),$$

која је вредност такође $=0$.

Свака реципрочна једначина, која не премаша пети степен, може се свести на квадратну једначину.

a) Полином реципрочне једначине трећега степена

$$x^3+ax^2\pm ax\pm 1=0$$

може се раставити на два чинитеља, од којих је један $x\pm 1$ а други је трином квадратне једначине.

Ако се нпр. у једначини

$$x^3+ax^2+ax+1=0$$

споје чланови с истим коефицијентима, биће

$$(x^3+1)+ax(x+1)=0,$$

или, како је $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ имаћемо

$$(x+1)(x^2-x+1+ax)=0.$$

Ова је једначина задовољена или кад је $x+1=0$ или $x^2+(a-1)x+1=0$, дакле имају три корена.

Сличним начином решава се и једначина

$$x^3+ax^2-ax-1=0.$$

По истој методи решавају се и једначине

$$x^3+ax^2\pm abx\pm b^3=0,$$
$$x^3-ax^2+abx-b^3=0.$$

b) Нека је дата реципрочна једначина четвртога степена

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0,$$

у којој исти сачинитељи имају једнаке знаке.

Кад се она подели са x^2, што је допуштено, јер x није чинитељ леве стране, па се споје чланови с истим коефицијентима, биће

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0.$$

Кад се сад стави $x+\frac{1}{x}=y$, то је $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$, дакле $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, па заменом у пређашњој једначини

$$y^2-2+ay+b=0, \text{ и}$$

$$y=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+2}.$$

Кад се свака од ових вредности замени у $x+\frac{1}{x}=y$, добиће се за сваку вредност y-на по две вредности за x, јер је једначина другога степена по x, дакле ће дата једначина имати укупно четири корена.

Истом методом може се решавати и једначина

$$x^4+ax^3+bx^2+amx+m^2=0.$$

Допуна. Биномна једначина петога степена може се раставити на једну линеарну и на једну једначину четвртог степена раније споменутог облика.

$$x^5=a \quad \text{или} \quad x^5-(\sqrt[5]{a})^5=0$$

$$(x-\sqrt[5]{a})(x^4+\sqrt[5]{a}\,.\,x^3+\sqrt[5]{a^2}\,.\,x^2+\sqrt[5]{a^3}\,.\,x+\sqrt[5]{a^4})=0,$$

дакле $x-\sqrt[5]{a}=0$ и $x^4+\sqrt[5]{a}.x^3+\sqrt[5]{a^2}.x^2+\sqrt[5]{a^3}.x+\sqrt[5]{a^4}=0$.

c) Полином реципрочне једначине четвртога степена

$$x^4+ax^3-ax-1=0,$$

у којој су исти коефицијенти супротно означени, може се раставити на два чинитеља, од којих је један x^2-1, а други је трином квадратне једначине.

Горња једначина може се понајпре овако представити:

$$(x^4-1)+ax(x^2-1)=0$$

Али је $x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$; дакле је

$$(x^2-1)(x^2+1+ax)=0.$$

Из $x^2-1=0$ добива се $x_{\frac{1}{2}}=\pm 1$; а из $x^2+1+ax=0$ имамо

$$x_{\frac{3}{4}}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Једначина према томе има четири корена.

d) Свака реципрочна једначина петога степена

$$x^5 + ax^4 + bx^3 \pm bx^2 \pm ax \pm 1 = 0$$

може се везивањем чланова с једнаким или са супротним коефицијентима и издвајањем заједничког чинитеља довести на две једначине, од којих је једна $x \pm 1 = 0$ а друга је реципрочна једначина четвртога степена у којој исти коефицијенти имају једнаке знаке. Из прве је $x = -1$ или $x = +1$, а друга решена према *b)* даје четири корена.

Експоненцијалне једначине.

189. Оне се решавају спомоћу логаритама.

a) Једначине облика $a^{2x} + pa^x = q$.

Кад се стави $a^x = y$, онда је $y^2 + py = q$, дакле

$$y = a^x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ а одавде}$$

$$x = \frac{\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}{\log a}$$

Нпр. $4^{2x} + 5.4^x = 36$ даје за $4^x = y$, $y^2 + 5y = 36$, одакле је $y = 4^x = 4$ и $y = 4^x = -9$; дакле $x = 1$.

Друга вредност за x није стварна.

b) Једначине облика $\sqrt[x]{a} + p\sqrt[2x]{a} = q$.

За $\sqrt[2x]{a} = y$ биће $y^2 + py = q$, дакле

$$y = \sqrt[2x]{a} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \text{ и стога}$$

$$x = \frac{\log a}{2\log\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}\right)}.$$

Нпр. Из $5\sqrt[x]{64} - 6\sqrt[2x]{64} = 8$ добива се за $\sqrt[2x]{64} = y$, $5y^2 - 6y = 8$, одавде $y = 2$ или $= -\frac{4}{5}$, и $x = \frac{\log 64}{2\log 2} = \frac{6\log 2}{2\log 2} = 3$, или $2^{\frac{6}{2x}} = 2$, $\frac{6}{2x} = 1$, $x = 3$.

Друга вредност за x није стварна.

III. Квадратне једначине с више непознатих

190. Кад квадратна једначина има више непознатих, оне се могу, као и код једначина првога степена, само онда тачно одредити, ако је дато управо толико једначина колико има непознатих с тим да те једначине буду независне једна од друге и да не смеју бити једна другој супротне. Решење се и овде врши по показаним елиминационим методама у чл. **110,** којима се најзад долази на једну једину једначину с једном непознатом.

Општи облик квадратне једначине са две непознате је

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Ако је друга једначина линеарна, тада се методом замене добива квадратна елиминациона једначина, која даје два корена за једну непознату. Ако се они унесу у линеарну једначину (не у квадратну) добиће се вредности за други корен, дакле два парâ корена.

Пример.
$$x - y = 7$$
$$x^2 + 2y^2 = 118.$$

Кад се из прве једначине добивени израз $x = y + 7$ унесе у другу једначину биће

$$(y + 7)^2 + 2y^2 = 118, \text{ или кад се уреди } y^2 + \frac{14y}{3} = 23,$$

којој једначини одговарају корени $y_1 = 3$ и $y_2 = -\frac{23}{3}$.

Кад се нађене вредности за y замене у изразу $x = y + 7$ добива се $x_1 = 10$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$.

191. Кад су обе једначине квадратне, онда је елиминациона једначина четвртога степена, која се по досадашњим методама уопште не може решити. У појединим случајевима долази се до решења ових и неких једначина вишег степена применом нарочитих метода.

1. Везивањем обеју датих једначина по методи једнаких коефицијената добива се једна једначина с једном непознатом.

Пример.
$$\begin{array}{l|c|c} 5x^2 - 2y^2 = 30 & & -2 \\ 2x^2 + y^2 = 57 & 2 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5x^2 + 4x^2 = 30 + 114; & 4y^2 + 5y^2 = -60 + 285 \\ 9x^2 = 144 & 9y^2 = 225 \\ x = \pm 4 & y = \pm 5 \end{array}$$

$x_1 = 4$, $y_1 = 5$; $x_2 = 4$, $y_2 = -5$; $x_3 = -4$, $y_3 = 5$; $x_4 = -4$, $y_4 = -5$.

Нарочиту пажњу треба поклонити узајамности коренâ. Ако су решења као овде добивена из двеју једне од друге независних једначина, тада су могуће све комбинације у знацима; дакле има четири спрега корена.

II. Подесним везивањем обеју једначина добива се једна линеарна једначина, коју после треба везати с једном од датих.

Пример.

$$\begin{array}{r} x^2+y^2+x+y=a \\ x^2+y^2-x-y=b \\ \hline 2x+2y=a-b \end{array}$$

дакле $\quad x+y=\dfrac{a-b}{2}$ и $x^2+y^2=a-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}.$

На ове нове једначине треба применити методу замене или доцнији поступак под IV) 2. пример.

III. Може се доћи до једне једначине с једном непознатом, кад се у једној од датих једначина веза обеју непознатих узме као нова непозната.

1. **Пример.** Једна једначина је хомогена, тј. кад су у ње сами квадратни чланови; тада се дељењем са y^2 добива квадратна једначина по $\dfrac{x}{y}$.

$$\text{I. } 3x^2+2xy-y^2=0; \qquad 3\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y}-1=0$$

$$\begin{array}{l} \text{II. } x+xy+y=7 \\ \hline \text{III. } x+3x^2+3x=7 \end{array} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{y}-\frac{1}{3}=0$$

$$x^2+\frac{4}{3}x=\frac{7}{3} \qquad \frac{x}{y}=-\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3}$$

$$x=-\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{7}{3}} \qquad \frac{x}{y}=\frac{1}{3};\ \frac{x}{y}=-1$$

$$x=-\frac{2}{3}\pm\frac{5}{3} \qquad y=3x \quad y=-x$$

(Заменом у II. добива се III.).

$x_1=1;\ x_2=-\dfrac{7}{3};\ y=3x$ даје

$y_1=3;\ y_2=-7.$

Замена $y=-x$ даје

$x-x^2-x=7$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{7}\cdot i,\quad y_{3,4}=\mp\sqrt{7}\cdot i.$

2. **Пример.** Кад обе квадратне једначине имају сем квадратних чланова још и један апсолутан члан, онда се по методи једнаких коефицијената избаце апсолутни чланови, те се тако добије хомогена једначина, коју треба довести у везу с једном од датих једначина.

$$\begin{array}{r|r} x^2+3xy=7 & -3 \\ x^2-xy+y^2=3 & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$4x^2-16xy+7y^2=0 \text{ итд.}$$

3. **Пример.** $\quad x+y+\sqrt{x+y}=6$

$$x^2+y^2=10.$$

Прва једначина је квадратна по непознатој $\sqrt{x+y}$.

$$\sqrt{x+y}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{ll} \sqrt{x+y}=2 & \sqrt{x+y}=-3 \\ x+y=4 & x+y=9 \\ x^2+y^2=10 & x^2+y^2=10 \text{ итд.} \end{array}$$

IV. Из датих једначина изведе се нова једначина, која има да се реши по $x+y$, $x-y$, xy или $\dfrac{x}{y}$.

Примери.

1) $x^2+y^2=a.$

$\quad xy=b.$

Кад се друга једначина помножи са 2 па се нова једначина најпре дода првој, затим се од ње одузме, биће:

$(x+y)^2=a+2b,\ $ стога $\ x+y=\pm\sqrt{a+2b},$

$(x-y)^2=a-2b;\ \qquad x-y=\pm\sqrt{a-2b};$

дакле $x=\pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}),$

$y=\pm\dfrac{1}{2}(\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}).$

Имају дакле четири спрега корена.

2) $x+y=a$

$x^2+y^2=b^2$

$(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy=a^2-b^2;$

$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=$

$=b^2-a^2+b^2=2b^2-a^2;$

$x-y=\pm\sqrt{2b^2-a^2}$

$x+y=a$

$x_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{2b^2-a^2})$

$y_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a\mp\sqrt{2b^2-a^2})$

аналого $x-y=a$

$x^2+y^2=b^2$

$2xy=b^2-a^2$

$x+y=\pm\sqrt{2b^2-a^2}$

$x-y=a$

итд.

3) $x+y=a$

$xy=b$

$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2=a^2-4b$

$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$ итд.

$x-y=a$

$xy=b$

$(x-y)^2+4xy=$

$=(x+y)^2=a^2+4b$

$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b}$

итд.

У ова два специјална случаја корени се могу најпростије израчунати применом правила у чл. **184,** 3. Види се, да су у првом случају x и y корени једначине $z^2-az+b=0$, дакле $x_1=z_1=y_2$; $y_1=z_2=x_2$

У другом случају су x и $-y$ корени једначине $z^2-az-b=0$; дакле

$$x_1=z_1,\ y_1=-z_2;\quad x_2=z_2,\ y_2=-z_1.$$

4) $x^3+y^3=a^3$

$x+y=b$

дељењем $x^2-xy+y^2=\frac{a^3}{b}$ или $x^3+3xy(x+y)+y^3=b^3$

$x^2+2xy+y^2=b^2$

$3xy=b^2-\frac{a^3}{b}$

$xy=\frac{b^3-a^3}{3b}$

$x+y=b$ итд.

$a^3+3xyb=b^3$

$xy=\frac{b^3-a^3}{3b}$

5) $x+y=a$ дакле $x^2+y^2=a^2-2xy$

$x^4+y^4=b^4$

$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=x^4+4xy(x^2+y^2)+6x^2y^2+y^4=a^4$

$b^4+4xy(a^2-2xy)+6x^2y^2=a^4$

$(xy)^2-2a^2(xy)=\frac{b^4-a^4}{2}$ итд.

Три непознате

Примери. 1) $xy=a,\ xz=b,\ yz=c.$

Кад се две прве једначине помноже и производ подели трећом, онда се добива

$$x^2=\frac{ab}{c},\ \text{дакле}\ x_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{a}{c}}.$$

На сличан начин се налази

$$y_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{ac}{b}},\qquad z_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{bc}{a}}.$$

2) $xy+xz=a,\quad xy+yz=b,\quad xz+yz=c.$

Ставимо $xy=x'$, $xz=y'$, $yz=z'$, онда је

$$x'+y'=a,\ x'+z'=b,\ y'+z'=c'.$$

А одавде

$$x'=xy=\frac{a+b-c}{2};\ y'=xz=\frac{a+c-b}{2};\ z'=yz=\frac{b+c-a}{2};$$

па је, као у 1),

$$x_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2(b+c-a)}},$$

$$y_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{2(a+c-b)}},$$

$$z_{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}.$$

Знаци за y и z треба да се узму према знацима производа xy и xz.

ШЕСТИ ОДЕЉАК

Неодређене једначине првога степена

192. Кад се из некојег задатка добије мање једначина, но што треба одредити непознатих, може се поновним избацивањем непознатих свагда доћи најзад на једну једину једначину са две или с више непознатих. Таква је једначина неодређена. (чл. **109**).

При таквим се задацима често број решења ограничава погодбом, да вредности за непознате буду цели, или цели и у исто време позитивни бројеви. У том случају имамо Диофантов задатак.

Решење у целим бројевима.

193. Неодређена једначина првога степена не може се решити у целим бројевима, кад коефицијенти непознатих имају заједнички чинитељ, којим није дељив познати члан.

Доказ. Нека је задата једначина сведена на најпростији облик

$$ax + by = c,$$

где су a, b, c будикакви цели бројеви. Ако је m заједнички делитељ за a и b, којим није дељиво c, онда је

$$\frac{a}{m}.\,x + \frac{b}{m}.\,y = \frac{c}{m}.$$

Како су пак $\frac{a}{m}$ и $\frac{b}{m}$ цели бројеви, то x и y не могу у исто време бити цели бројеви, јер би иначе $\frac{a}{m}.\,x + \frac{b}{m}.\,y$, дакле и $\frac{c}{m}$ био цео број, а то се не слаже с претпоставком.

Ако ли a, b и c имају заједнички делитељ, тада треба једначину њим поделити.

194. Једначина првога степена са две непознате, чији су сачинитељи релативно прости бројеви, има бескрајно много решења у целим бројевима.

Доказ. Једначина $ax + by = c$, где су a и b релативно прости бројеви и где се a може узети као позитивно, има свагда једно решење у целим бројевима. Ово се увиђа непосредно њеним решењем спомоћу редукције.

Нека је $x = \alpha$, $y = \beta$ једно решење у целим бројевима, биће

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Али тада је и

$$a\alpha - abu + b\beta + abu = c, \text{ или}$$
$$a(\alpha - bu) + b(\beta + au) = c.$$

Према томе задату једначину задовољавају уопште вредности

$$x = \alpha - bu, \qquad y = \beta + au,$$

где u значи будикоји позитиван или негативан цео број.

195. Задатак. Решити неодређену једначину првога степена у целим бројевима.

I. Решавање заменом.

Одреди се из једначине вредност оне непознате, чиј сачинитељ има мању бројну вредност, из нађена количника издвоје се целине па се у заосталом разломку друга непозната замењује редом бројевима 0, 1, 2, 3,… док за једну од тих замена вредност прве непознате не буде цео број.

Пример. Нека је дата једначина $4x - 7y = 75$. Из ње се добива $x = \frac{75 + 7y}{4} = 18 + y + \frac{3 + 3y}{4} = 18 + y + 3.\frac{1 + y}{4}$.

За $y = 3$ налази се

$$x = 18 + 3 + 3 = 24.$$

Дакле задата једначина има решење $x = 24$, $y = 3$, а сва друга решења у целим бројевима дата су обрасцима

$$x = 24 + 7u, \quad y = 3 + 4u,$$

где u значи макоји цео број.

Одатле се добивају ова решења:

За	$u = \ldots -2$	-1	0	1	2	…
биће	$x = \ldots\ 10$	17	24	31	38	…
	$y = \ldots -5$	-1	3	7	11	…

Показани поступак може бити веома заметан, кад су сачинитељи обеју непознатих велики бројеви.

II. Решавање редукцијом. (Ајлерова метода, 1737).

Решење је сасвим просто, кад је сачинитељ једне непознате 1. Нпр. из једначине $x + by = c$ имамо $x = c - by$; овде се може за y узимати будикоји цео број, па ће се и за x добивати цели бројеви.

На тај се случај може свести и свака друга једначина

$$ax \pm by = c.$$

Одређује се вредност оне непознате која има мањи сачинитељ, из нађена количника издвоје се целине, што су у њему, па се у облику разломка добивени остатак изједначи с новом непознатом. Тако добивена помоћна једначина реши се по другој од обитних непознатих, с добивеним количником ради се као и пређашњим и тај се поступак наставља, док се најзад не наиђе на једначину у којој је сачинитељ једне непознате 1; јер су коефицијенти непознатих у помоћним једначинама по реду они бројеви, који се јављају при верижном дељењу између a и b као дељеник и делитељ. Али, како су a и b релативно прости бројеви, то је последњи делитељ, дакле и коефицијент једне непознате у последњој помоћној једначини једнак 1. Ако се онда вредност те непознате замени редом у пређашњим једначинама, добиће се најзад обрасци за све целе вредности од x и y.

Примери.

1) Нека је задата једначина $19x - 8y = 52$.

Кад се она реши по y, које има мањи сачинитељ, биће

$$y = \frac{19x - 52}{8},$$

или, кад се из тог количник издвоје целине,

$$y = 2x - 6 + \frac{3x - 4}{8}$$

Али како се хоће, да x и y буду цели бројеви, то мора и израз $\frac{3x-4}{8}$ бити цео број. Стави ли се $\frac{3x-4}{8} = u_1$, биће

$$y = 2x - 6 + u_1 \ldots 1)$$

Кад се помоћна једначина $\frac{3x-4}{8} = u_1$ реши по x добива се

$$x = \frac{8u_1 + 4}{3},$$

или, кад се из овог количника издвоје целине,

$$x = 2u_1 + 1 + \frac{2u_1 + 1}{3}.$$

Како x и u_1 треба да буду цели бројеви, мора бити и $\frac{2u_1+1}{3}$ цео број. Означи ли се он са u_2, онда је.

$$x = 2u_1 + 1 + u_2 \ldots 2).$$

Једначина $\frac{2u_1+1}{3} = u_2$ решена по u_1 даје

$$u_1 = \frac{3u_2 - 1}{2} = u_2 + \frac{u_2 - 1}{2},$$

и, кад се стави $\frac{u_2 - 1}{2} = u_3$,

$$u_1 = u_2 + u_3 \ldots 3).$$

Из $\frac{u_2 - 1}{2} = u_3$ добива се најзад једначина

$$u_2 = 2u_3 + 1 \ldots 4),$$

у којој непозната u_2 има сачинитељ 1 па ће за сваку будикоју целу вредност од u_3 бити цео број.

Кад се сад вредност за u_2 замени редом у пређашњим једначинама $3)$, $2)$ и $1)$, биће

$$u_1 = 2u_3 + 1 + u_3 = 3u_3 + 1,$$
$$x = 6u_3 + 2 + 1 + 2u_3 + 1 = 8u_3 + 4,$$
$$y = 16u_3 + 8 - 6 + 3u_3 + 1 = 19u_3 + 3.$$

Опште решење у целим бројевима дато је дакле обрасцима

$$x = 8u + 4, \qquad y = 19u + 3,$$

где се за u може узимати који било цео број.

За $u = \ldots$	-10	-1	0	1	10
биће $x = \ldots$	-76	-4	4	12	84
$y = \ldots$	-187	-16	3	22	193

2. Решити у целим бројевима једначину $11x + 28y = 106$.

$11x + 28y = 106$ даје $x = \frac{106 - 28y}{11} = 9 - 2y + \frac{7 - 6y}{11}$
$\qquad = 9 - 2y + u_1$

$\frac{7-6y}{11} = u_1$ „ $y = \frac{7 - 11u_1}{6} = 1 - u_1 + \frac{1 - 5u_1}{6}$
$\qquad = 1 - u_1 + u_2,$

$\frac{1 - 5u_1}{6} = u_2$ „ $u_1 = \frac{1 - 6u_2}{5} = -u_2 + \frac{1 - u_2}{5}$
$\qquad = -u_2 + u_3,$

$\frac{1 - u_2}{5} = u_3$ „ $u_2 = 1 - 5u_3.$

Одавде се поступним замењивањем налази

$$u_1 = -1 + 5u_3 + u_3 = -1 + 6u_3,$$
$$y = 1 + 1 - 6u_3 + 1 - 5u_3 = 3 - 11u_3,$$
$$x = 9 - 6 + 22u_3 - 1 + 6u_3 = 2 + 28u_3,$$

где u_3 може бити макакав цео број.

196. 1. Да би се решио систем од две једначине са три непознате x, y, z у целим бројевима, треба из њега извести елиминацијом нпр. z-та једну једначину са две непознате x, y и њу решити по једној од показаних метода у чл. **195.** Ако се онда обе непознате замене нађеним општим вредностима, где се налази произвољан цео број n, у једначини, у којој је и трећа непозната z, па се она реши као друга Диофантова једначина између z и n. У решењима за z и n налази се произвољан цео број u. Ако се за n добивена вредност унесе у раније нађене вредности за x и за y, добиће се општа решења за све непознате. (Види чл. 198, пример 3.).

Решавање у целим и позитивним бројевима.

197. Једначина $ax+by=c$ има ограничен број решења у целим и позитивним бројевима, а једначина $ax-by=c$ има неограничен број таквих решења.

Доказ. 1. За решење једначине $ax+by=c$ у целим бројевима имају обрасци:

$$x=\alpha-bu, \qquad y=\beta+au.$$

Да би x и y били позитивни, мора бити

$$\alpha-bu>0 \quad \text{и } \beta+au>0, \text{ дакле}$$

$$u<\frac{\alpha}{b} \quad \text{и } u>-\frac{\beta}{a}.$$

Стога се за x и y добивају целе и позитивне вредности само за такве вредности од u, које се налазе између граница $\frac{\alpha}{b}$ и $-\frac{\beta}{a}$.

2. Једначину $ax-by=c$ задовољавају целе вредности

$$x=\alpha+bu, \qquad y=\beta+au.$$

Да би x и y били позитивни, мора вредети

$$\alpha+bu>0 \quad \text{и } \beta+au>0, \text{ дакле}$$

$$u>-\frac{\alpha}{b} \quad \text{и } u>-\frac{\beta}{a}.$$

Али како има бескрајно много целих вредности за u, које су $>-\frac{\alpha}{b}$ и у исто време $>-\frac{\beta}{a}$, то могу x и y имати бескрајно много целих и позитивних вредности.

198. Задатак. Решити у целим позитивним бројевима неодређену једначину првога степена.

Најпре се одреди опште решење у целим бројевима, па се онда произвољне вредности за помоћну непознату ограниче тако, да изрази за непознате у задатој једначини буду позитивни.

Примери. 1) Представити разломак $\frac{230}{77}$ као збир два разломка, којима су именитељи 7 и 11.

Ако су x и y бројитељи тражених разломака, биће

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=\frac{230}{77}, \text{ или } 11x+7y=230.$$

Та једначина решена у целим бројевима даје

$$x=5-7u, \quad y=25+11u.$$

Да буде $5-7u>0$ и $25+11u>0$, мора се узети $u<\frac{5}{7}$ и $u>-\frac{25}{11}$. Овим погодбама одговарају за u само три вредности 0, -1, -2. Па је зато

$$\begin{aligned} &\text{за } u=0 \ \ldots x=5,\ y=25;\\ &\text{„ } u=-1 \ldots x=12,\ y=14;\\ &\text{„ } u=-2 \ldots x=19,\ y=3. \end{aligned}$$

Тражени дакле разломци биће

$$\frac{5}{7} \text{ и } \frac{25}{11}, \text{ или } \frac{12}{7} \text{ и } \frac{14}{11}, \text{ или } \frac{19}{7} \text{ и } \frac{3}{11}.$$

2. Решити једначину $7x-17y=50$ у целим позитивним бројевима.

Целе вредности за x и за y налазе се у обрасцима:

$$x=17u+12 \text{ и } y=7u+2,$$

из којих се одмах види, да се u не сме замењивати никаквим негативним вредностима, напротив 0 и свим позитивним целим бројевима могу. Задатак има безбројно много решења.

за $u=$	0	1	2	3	...
добива се $x=$	12	29	46	63	...
$y=$	2	9	16	23	...

3. Решити у целим позитивним бројевима:

$$\begin{array}{l|r} 3x+4y-2z=15, & 2\\ 4x+3y-4z=4. & -1\\ \hline 2x+5y=26; & \end{array}$$

одатле $y=2n$ и $x=13-5n$.

По замени у првој једначини биће

$$2z+7n=24; \text{ дакле } z=12-7u \text{ и } n=2u.$$

Кад се $n=2u$ унесе у нађене вредности за x и за y имаћемо:

$$x=13-10u, \quad y=4u, \quad z=12-7u.$$

Погодба: $$0<u<\frac{13}{10}\left(\frac{12}{7}\right);$$

дакле $$u=1, \quad x=3, \quad y=4, \quad z=5.$$

Диофантове једначине носе то име утолико неоправдано, што је Диофант, који је живео око 360. год. после Христа у Александрији, тражио само рационална (не и цела) решења неодређених једначина првог и другог степена. Он се задовољавао код линеарних једначина с тим, што је изражавао једну непознату другом. Његов преводилац Bachet (1612) додао је самостално решење у целим бројевима по методи, која се битно слаже с методом Ајлеровом (рођ. 1701, умро 1783). Много раније су међутим исти заадатак решавали индиски математичари.

СЕДМИ ОДЕЉАК

Прогресије

199. Низ бројева, који се по неком утврђеном закону ређају један за другим, назива се ред или прогресија. Поједини бројеви тога низа називају се чланови реда. Број који показује, на којем је месту реда који члан, назива се казаљка тога члана.

Ред расте или опада према томе да ли му узастопни чланови бивају све већи или све мањи.

Интерполовати ред значи, између свака два узастопна члана уметнути одређени број чланова, који са члановима задатог реда опет чине ред исте врсте.

I. Аритметичке прогресије

200. Аритметичка прогресија је такав ред, у којем је разлика макоја два узастопна члана (узимајући преходни за умалитељ) исти број. Тај стални број назива се разлика (диференција) прогресије. Према томе сваки потоњи члан реда добива се из преходног додавањем разлике. Тако су

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22, \ldots$$
$$\text{и } 50,\ 47,\ 44,\ 41,\ 38,\ 35,\ 32,\ 29, \ldots$$

аритметичке прогресије; у прве је разлика 3, а у друге -3.

Ред расте, кад је разлика позитивна, а опада, кад је она негативна.

1. Сваки члан аритметичке прогресије једнак је са збиром из првога члана и $(n-1)$ пут повећане разлике.

Ако је a_1 почетни члан, d разлика и a_n n-ти члан, онда је

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

дакле уопште $a_n=a_1+(n-1)d$. (Општи члан).

Допуна. $$a_n=\frac{(a_n-d)+(a_n+d)}{2}.$$

Сваки члан аритметичкога реда је аритметичка средина између два оближња члана.

2. Збир буди колико чланова аритметичке прогресије једнак је с производом од половине броја тих чланова и од збира првога и последњег члана.

Доказ. Ако је n-ти члан реда a_n, онда је a_n-d први члан пред њим, a_n-2d други пред њим итд.

Ако се збир n првих чланова означи са s_n, онда је

$$s_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n.$$

Кад се чланови напишу обрнутим редом биће

$$s_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\ldots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1.$$

Сабирањем та два израза добива се

$$2s_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n).$$

Овде се a_1+a_n налази толико пута као сабирак, колико је чланова узето, дакле n пута; стога је $2s_n=n\ (a_1+a_n)$, а

$$s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n).$$

Тај се образац назива збирни члан аритметичке прогресије.

Пример. Одредити општи и збирни члан реда непарних бројева $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \ldots$

Како је $a_1=1,\ d=2$, то је

$$a_n=1+(n-1).2=2n-1,$$
$$s_n=\frac{n}{2}(1+2n-1)=n^2.$$

201. Тако је нпр. $a_{15}=2.15-1=29$, и $s_{15}=15^2=225$.

Из једначина

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \text{ и } s_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

где има пет количина a_1, d, n, a_n, s_n могу се израчунати макоје две, кад су остале три познате. На тај се начин добива *10* различних задатака.

Ако је нпр. дато d, n, a_n, онда се из прве једначине налази

$$a_1 = a_n - (n-1)\,d,$$

а из друге

$$s_n = \frac{n}{2}\,\{a_n - (n-1)\,d + a_n\} = \frac{n}{2}\,\{2a_n - (n-1)\,d\}.$$

202. Интерполација аритметичке прогресије.

Кад између два члана аритметичке прогресије a_k и a_{k+1}, чија је разлика d, треба уметнути r чланова, који ће са a_k и a_{k+1} опет чинити аритметичку прогресију, онда је у новој прогресији a_k први а a_{k+1} $(r+2)$-ги члан, стога, кад се разлика новога реда означи са d_1, биће $a_{k+1} = a_k + (r+1)\,d_1$; али је и $a_{k+1} = a_k + d$, дакле $(r+1)\,d_1 = d$, а

$$d_1 = \frac{d}{r+1}.$$

Дакле је интерполовани ред:

$$a_k,\ a_k + \frac{d}{r+1},\ a_k + \frac{2d}{r+1},\dots a_k + \frac{rd}{r+1},\ a_{k+1}.$$

Нпр. Да се између чланова *2* и *3* реда: *1*, *2*, *3*, *4*,... уметне *7* чланова.

Овде је $d=1$, $r=7$, дакле $d_1 = \frac{1}{8}$; интерполована прогресија је дакле:

$$\mathbf{2},\ 2\frac{1}{8},\ 2\frac{2}{8},\ 2\frac{3}{8},\ 2\frac{4}{8},\ 2\frac{5}{8},\ 2\frac{6}{8},\ 2\frac{7}{8},\ \mathbf{3}.$$

II. Геометриске прогресије

203. Геометриска прогресија је такав ред, у којем је количник свака два узастопна члана (узимајући претходни за делитељ) исти број. Тај стални количник назива се количник прогресије. Према томе сваки потоњи члан реда добива се из претходног множећи га количником.

Тако су $\quad 1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\dots$

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243},\ \frac{1}{729},\dots$$

геометриске прогресије; у прве је количник *3*, а у друге $\frac{1}{3}$.

Ред расте, кад је количник већи од *1*, а опада, кад је количник мањи од *1*.

1. Сваки члан геометриске прогресије једнак је с производом од првога члана и толиког степена количникова колика је казаљка члана умањена за 1.

Ако је a_1 први члан, q количник и a_n n-ти члан, онда је

$$a_2 = a_1 q,$$
$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2.$$
$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

уопште $\quad a_n = a_1 q^{n-1} \quad$ (општи члан)

Допуна. $a_n = \sqrt{\left(\frac{a_n}{q}\right)\cdot(a_n q)}$

Сваки члан геометрискога реда је геометриска средина између два оближња члана.

2. Збир од n узастопних чланова геометрискога реда једнак је с производом од првога члана и једнога разломка, чиј је бројитељ за *1* умањени n-ти степен количников а именитељ за *1* умањени количник.

Доказ. Ако је s_n збир n првих чланова, тада је

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

и, кад се обе стране ове једначине помноже са q,

$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

Кад се прва једначина одузме од друге, биће

$$q s_n - s_n = a_1 q^n - a_1, \text{ на је}$$
$$s_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1-q}$$

збирни члан геометриске прогресије.

Како је $a_1 q^{n-1} = a_n$, дакле $a_1 q^n = a_n q$, то се збирни члан може представити и овако:

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}.$$

Пример. Одреди општи и збирни члан прогресије $1, 3, 9, 27, 81, 243,\ldots$

Овде је $a_1=1$ и $q=3$, дакле

$$a_n=1.3^{n-1}=3^{n-1},\quad s_n=\frac{3^n-1}{2}.$$

Тако је нпр. $a_{10}=3^9=19683$, и $s_{10}=\frac{3^{10}-1}{2}=29524$.

204. За бескрајан низ стварних бројева каже се да је конвергентан, кад има одређену коначну граничну вредност. Ту особину имају редови рационалних бројева, који ограничавају ирационалан број, а сâм тај ирационалан број је она одређена коначна гранична вредност. (чл. **86, 132, 164.**).

Ако се од реда с бескрајним бројем чланова начине вредности $s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2$, $s_3,\ldots$ тада су могућна два случаја. 1) Бројеви $s_1, s_2, s_3,\ldots$ чине конвергентан бројни ред, тј. они имају одређену коначну граничну вредност. $\lim s_n=s$ за $\lim n=\infty$, где је s коначан број. Тада се бескрајни ред $a_1, a_2, a_3,\ldots$ назива конвергентан а она коначна гранична вредност s збир тога бескрајног реда. 2) Бројни низ $s_1, s_2, s_3,\ldots s_n$ нема коначне граничне вредности за $\lim n=+\infty$, тада се бескрајни ред $a_1, a_2, a_3,\ldots$ назива дивергентан.

За геометриску прогресију је $a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\ldots$

$$s_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_1q^n}{q-1}-\frac{a_1}{q-1}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1q^n}{1-q}$$

$$\lim s_n=\frac{a_1}{q-1}\lim(q^n)-\frac{a_1}{q-1}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}.\ \lim(q^n).$$

Ако је сад $q>1$, то ће, кад n расте, расти и q^n а стога и s_n мора расти преко сваке замишљене вредности. Према томе је геометријска прогресија која расте свагда дивергентна.

Ако је $q=1$, онда је $s_n=a_1 n$, дакле $\lim s_n=\infty$ за $\lim n=\infty$; дакле је и у том случају ред дивергентан.

Ако ли је напротив $q<1$, то се при бескрајном рашћењу n-на q^n приближава без краја нули а s_n коначној граничној вредности $\frac{a_1}{1-q}$, која је дакле збир бескрајнога реда. Према томе, геометриски ред који опада увек је конвергентан.

Нпр. за ред $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\ldots$, где је $a_1=1$, $q=\frac{1}{2}$, имамо

$s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$; то јест што се више чланова реда сабира, тим се више збир приближава броју 2, а да га никад у истини не достигне.

Аритметична је прогресија увек дивергентна што се одмах види из збирног обрасца $s_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

Сваки периодан децималан разломак може се представити као геометриска прогресија што опада и као таква може се сумирати, то јест може се претворити у обичан разломак. По чл. **99,** 2 је

$$x=\frac{b}{10^n}+\frac{b}{10^{2n}}+\ldots=\frac{\frac{b}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{b}{10^n-1}.$$

205. Спомоћу ових двеју међу собом независних једначина

$$a_n=a_1q^{n-1}\quad \text{и}\quad s_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1},$$

од којих се друга може заменити и овом $s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$ могу се од пет количина a_1, q, n, a_n и s_n одредити две, кад су три друге дате. Од тих 10 задатака два доводе на једначине n-тог степена.

Ако је нпр. дато q, n, s_n, тада се из друге једначине добива

$$a_1=\frac{(q-1)s_n}{q^n-1},$$

а затим из прве једначине

$$a_n=\frac{q^{n-1}(q-1)s_n}{q^n-1}.$$

206. Задатак. Интерполовати геометриску прогресију.

Кад се између два члана геометриске прогресије a_k и a_{k+1}, којој је количник q, уметне r чланова, који са a_k и a_{k+1} чине опет геометријску прогресију, онда је a_k први а a_{k+1} $(r+2)$-ги члан; стога је, кад се са q_1 означи количник нове прогресије, $a_{k+1}=a_k.q_1^{r+1}$; али је и $a_{k+1}=a_k.q$, дакле $q_1^{r+1}=q$, а

$$q_1=\sqrt[r+1]{q}.$$

Отуда је интерполована прогресија:

$$a_k,\ a_k\sqrt[r+1]{q},\ a_k\sqrt[r+1]{q^2},\ldots a_k\sqrt[r+1]{q^r},\ a_{k+1}.$$

Да се нпр. између свака два члана реда *1, 16, 256, 4096,...* уметне по 3 нова члана биће $q_1=\sqrt[4]{16}=\pm 2$ или и $q_1=\pm 2i$, па је нови ред:

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \mathbf{16},\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathbf{256},\ 512,\ 1024,\ 2048,\ \mathbf{4096},\dots$$
$$1,\ -2,\ 4,\ -8,\ \mathbf{16},\ -32,\ 64,\ -128,\ \mathbf{256},\dots$$
$$1,\ 2i,\ -4,\ -8i,\ \mathbf{16},\ 32i,\ -64,\ -128i,\ \mathbf{256},\dots$$
$$1,\ -2i,\ -4,\ 8i,\ \mathbf{16},\ -32i,\ -64,\ 128i,\ \mathbf{256},\dots$$

III. Интерес на интерес и рачунање ренте

207. Кад се интерес, који доноси неки капитал, крајем неког одређеног рока (јединице времена) придаје капиталу да с њим опет доноси интерес, онда се каже: капитал је дат под интерес на интерес (сложен интерес).

Као и код простог интересног рачуна (чл. **92**) и овде се, код интереса на интерес, води рачун о капиталу, о времену, проценту (интересна стопа) и о интересу. За јединицу времена, ако није противно наглашено, узима се једна година, т.j. капиталисање интереса бива годишње. Ако је капитал уложен по $p\%$, онда 100 јединица капитала (динара, марака, круна) порасту за годину заједно с интересом на $100+p$; дакле једна јединица капитала после 1 године заједно с интересом вреди $\frac{100+p}{100}=$ $=1+\frac{p}{100}$. Вредност $1+\frac{p}{100}$, на коју јединица капитала с интересом порасте за 1 годину, назива се интересни чинитељ; ми ћемо га краткоће ради означавати са q.

208. Први основни задатак. Капитал a дат је по $p\%$ под интерес на интерес; колика ће му вредност бити после n година?

Како јединица капитала с интересом после 1 године вреди q, то ће капитал a после 1 године вредети

$$a_1=aq,$$

то јест вредност капитала после 1 године налази се, кад се почетна вредност помножи интересним чинитељем.

Ако се нови капитал a_1 опет да под интерес за једну годину, онда је његова вредност на крају те године $a_2=a_1.\,q=a.q^2$.

После 3, 4,... година капитал ће нарасти на

$$a_3=a_2.\,q=a.\,q^3, \qquad a_4=a_3.\,q=a.\,q^4, \text{ итд.}$$

Према томе је вредност капитала крајем n-те године

$$a_n=a.\,q^n\ldots.. \quad \mathrm{I)}$$

Кад се та једначина реши по a, добиће се садашња вредност или готовина капитала који треба да се плати после n година

$$a=\frac{a_n}{q^n}.$$

Тако исто се добивају вредности из I) за p и n

$$p=\left(\sqrt[n]{\frac{a_n}{a}}-1\right).\,100, \qquad n=\frac{\log a_n-\log a.}{\log q}.$$

Допуне. 1. Овде је претпостављено да n значи цео број година. Ако ли је n мешовит број, нпр. $m+\frac{r}{s}$, онда треба најпре израчунати интерес на интерес од a за потпун број година m, затим за разломак од године прост интерес, од a_m. (Релативна интересна стопа). У том се случају дакле добива

$$e=aq^m+\frac{aq^m.\,p.\,r.}{100.\,s.}, \text{ или будући је } \frac{p}{100}=q-1,$$

$$e=aq^m\left(1+\frac{p.\,r}{100\,s.}\right)=aq^m\left\{1+(q-1)\frac{r}{s}\right\}\ \ldots..\ \mathrm{Ia)}$$

Ако се и у овом случају примени образац I (конформна интересна стопа), добиће се $e=a\,q^{m+\frac{r}{s}}=aq^m.\ q^{\frac{r}{s}}=aq^m\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{r}{s}}$.

Уместо $1+\frac{p}{100}.\,\frac{r}{s}$ узима се дакле нешто мања вредност $\left(1+\frac{p.}{100}\right)^{\frac{r}{s}}$. Почем је разлика незнатна, то се може, ради упрошћавања рачунања, применити конформна интересна стопа за рачунање процента или времена.

2. Ако се интерес не додаје (капитализује) крајем сваке године, већ после m-тога дела године (полугодишње, месечно), онда треба у једначини I) и у обрасцима из ње изведеним ставити $q=1+\frac{p}{100m}$ а за n број nm.

3. Пређашње једначине могу се применити и на друге количине, кад оне расту у сталној размери, нпр. на прираштај становника, на дрвета у шуми и др.

Примери.

1) На коју ће суму нарасти *2518* динара за 12 година по 5% интереса на интерес?

$$a_{12} = 2518.1{,}05^{12}$$
$$\log 1{,}05 = 0{,}021189$$
$$12 \log 1{,}05 = 0{,}254268$$
$$\log 2518 = 3{,}401056$$
$$\log a_{12} = 3{,}655324$$
дакле $a_{12} = 4521{,}93$ дин.

2) Капитал од 2000 динара нарастао је по 4% интереса на интерес на $4469{,}84$ дин.; колико је времена био под интересом?

$$4469{,}84 = 2000.1{,}04^n, \text{ дакле}$$
$$n = \frac{\log 4469{,}84 - \log 2000}{\log 1{,}04} = \frac{0{,}349262}{0{,}017033} = 20{,}505\ldots = 20 \text{ година } 6 \text{ м.}$$
и 2 дана.

По релативној интересној стопи: Ако се стави $n = (20 + t)$ год., то, почем 2000 дин. за 20 год. нарасту на $2000.1{,}04^{20} = 4382{,}18$ дин., биће стога разлика $4469{,}84 - 4382{,}18 = 87{,}66$ дин. прост интерес од капитала $4382{,}18$ дин. за време t, и онда је по чл. **92** $t = \dfrac{100.87{,}66}{4382{,}18.4} = \dfrac{1}{2}$ године, и зато је $n = 20\dfrac{1}{2}$ година.

209. Други основни задатак. У току n година улаже се почетком или крајем сваке године сума од r динара; колика ће вредност бити свију тих сума у време последњега плаћања, кад се рачуна интерес на интерес по $p\%$.

Време од првога до последњега плаћања износи $n - 1$ година; ако се стога стави $1 + \dfrac{p}{100} = q$, онда је у време последњега плаћања

вредност	$1.$	плаћања	$= rq^{n-1}$
"	$2.$	"	$= rq^{n-2}$,
. . .	. . .	. . .	. . .
"	$(n\text{-}2)$-ог	"	$= rq^2$,
"	$(n\text{-}1)$-ог	"	$= rq$,
"	n-тог	"	$= r$;

отуда збир свију тих вредности:

$$s_n = r + rq + rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1}, \text{ или}$$
$$s_n = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1} \ldots II).$$

210. На ова два главна задатка могу се свести сви више или мање сложени задаци о израчунавању интереса на интерес.

Задатак.

По $p\%$ уложен капитал a под интерес на интерес увећава се или умањава у току n година крајем сваке године сумом r; колика ће бити његова вредност крајем тога времена?

Вредност капитала a крајем n-те године (по чл. **208**) је aq^n, а вредност свих n улога по r, којима се капитал на крају сваке године увећава или умањава (чл. **209**) је $\dfrac{r(q^n - 1)}{q - 1}$; дакле је крајња вредност увећана или умањена капитала

$$E = aq^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$$
$$= q^n\left(a \pm \frac{100r}{p}\right) \mp \frac{100r}{p}.$$

Почем у овој једначини има пет количина, то она решава пет различних задатака. При одређивању q наилази се на једначину n-тог (а не $(n+1)$) степена, коју, према садашњем знању, нисмо у стању решити.

Ако је у случају умањавања $a - \dfrac{100r}{p} < 0$ или $r > \dfrac{ap}{100}$, дакле r веће од годишњег интереса капитала a, то крајња вредност тога капитала бива из године у годину све мања, док се најзад капитал не исцрпе.

Допуна. Ако треба упоредити капитале који се имају исплатити у разним роковима, они се морају увек свести на исти рок. Али, како је размера њихових вредности за сваки рок иста, догод им је интересна стопа иста, то је сасвим свеједно, изабрао се макоји заједнички рок за њихово упоређивање. Обично се прорачунају или садашње вредности или вредности после задатога рока, па се онда упоређују.

211. Примери.

1) Неко улаже кроз 10 година у почетку сваке године по 230 динара по 5% интереса на интерес; колика ће бити вредност тих улога у почетку 10. године?

$$s_{10} = \frac{230.(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} = \frac{230.0{,}62888}{0{,}05} = 2892{,}85 \text{ динара.}$$

2) Неко улаже у штедионицу за 15 година крајем сваког полгођа исту суму; штедионица плаћа 5% годишње интереса а новац капитализује крајем свако пола године. Последњим плаћањем онај је стекао готовину од $3292{,}71$ дин.; колики је био сваки улог?

Овде се мора рачунати 30 рокова а као интересни чинитељ узети $1{,}025$; стога је $3292{,}71 = \frac{r(1{,}025^{30}-1)}{0{,}025}$; дакле

$$r = \frac{3292{,}71 . 0{,}025}{1{,}025^{30}-1} = 75 \text{ динара.}$$

3) Зајам a треба да се поништи (амортизује), кад се у току n година крајем сваке године отплаћује по r дин.; колика мора бити годишња отплата r, кад се рачуна $p\%$?

Крајња вредност капитала a мора бити једнака с крајњом вредности од n отплата, обе рачунате у време последњег плаћања, тј. на крају n-те године.

$$aq^n = \frac{r(q^n-1)}{q-1}, \text{ отуда } r = \frac{aq^n(q-1)}{q^n-1}.$$

4) После колико је година од узајмљеног капитала 1060 дин. по 5% интереса на интерес преостало још $167{,}22$ дин., кад је крајем сваке године отплаћивано по 80 динара?

По чл. **210** је $167{,}22 = \frac{100.80}{5} - 1{,}05^n\left(\frac{100.80}{5} - 1060\right)$

$$1{,}05^n . 540 = 1432{,}78$$

$$n = \frac{\log 1432{,}78 - \log 540}{\log 1{,}05} = 20 \text{ година.}$$

Рачунање ренте.

212. Интерес на интерес нарочито се примењује на израчунавање ренте.

Под рентом се разуме приход који се прима у одређеним једнаким роковима (понајвише крајем сваке године), кад је право на прибирање тога прихода стечено унапред плаћеном сумом, улогом. Тај се улог плаћа двојако: или се плати уједанпут, или се плаћа годишње; у првом се случају назива просто улог (миза), а у другом осигурање (премија). Рента је обично стална (константна); али она може бити и променљива по неком одређеном закону. Рента се назива повремена рента, ако је тачно одређен број рокова када се плаћа; она је доживотна, ако траје до смрти примаочеве. Овде ће се говорити само о повременим рентама.

Једначина ренте. Основна мисао за рачунање ренте у овом је: Садашња вредност ренте уложена под интерес на интерес мора имати исту крајњу вредност у време последње исплате, као укупне ренте, кад би се уложиле под интерес на интерес одмах по њиховој исплати.

Нека је r рента, која се крајем сваке године исплаћује у току n година, b садашња вредност, која се рачуна годину дана пре прве рентине исплате и p процент.

Дакле $bq^n = rq^{n-1} + rq^{n-2} + \ldots + rq + r = \frac{r(q^n-1)}{q-1}$.

Садашња вредност $b = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}$,

Рента $r = \frac{bq^n(q-1)}{q^n-1}$

Број рокова $n = \frac{\log r - \log[r - b(q-1)]}{\log q}$.

Допуна. Садашња се вредност може добити непосредно као збир садашњих вредности појединих рента.

$$b = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^n} = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}.$$

Пример.

Неко хоће у току m година да плаћа банци за осигурање, почетком сваке године, неку одређену суму a, да би на тај начин могао за n година, што ће за онима доћи, уживати годишњу ренту r, која се плаћа крајем сваке године; колика би морала бити годишња уплата, кад се рачуна $p\%$?

(Између плаћања последње премије и исплате прве ренте има две године).

m годишњих премија, свака $= a$, вреде у време последњега плаћања, тј. у почетку m-те године $\frac{a(q^m-1)}{q-1}$, дакле је њихова вредност годину дана доцније $\frac{a(q^m-1)}{q-1}.q$. То је садашња вредност потоње ренте; стога постоји једначина $\frac{a(q^m-1)q}{q-1}.q^n = \frac{r(q^n-1)}{q-1}$.

$a = \frac{r(q^n-1)}{q^{n+1}(q^m-1)}$. Из последње једначине може се одређивати и r, m или n, кад су дате остале количине.

Још Грци су испитивали и сумирали аритметичке и геометриске редове. Римљани већ знадоше интерес на интерес; али правилно израчунавање интереса на интерес и задатака о рентама настаде тек у 16. и 17. столећу.

ОСМИ ОДЕЉАК

Наука о комбинацијама

I. Пермутације, комбинације и варијације

213. Задате ствари размештати у гомиле по неком утврђеном закону, значи комбиновати их у ширем смислу те речи. Поједине ствари називају се основци или елементи, а гомиле начињене од њих називају се склопови или слогови (комплексије).

Да се комбинације представе писмено, најподесније је обележавати елементе бројевима онако како они иду један за другим природним редом, а називају се казаљке, или се бележе и словима азбучним редом. Од два основка онај је виши, који има већу казаљку или који у азбуци доцније долази.

Од два слога онај је виши, у којем је с лева најпре виши основак; нпр. слог *1342* виши је од слога *1324*. Најнижи (почетни) је слог онај, у којем су основци поређани природним редом, дакле такав, у којем нема вишег основка пред нижим; онај је пак слог највиши, у којем нема нижега основка пред вишим, дакле такав, у којем сви основци иду обрнутим редом.

Све се комбинације по својој природи деле на размештаје и на везивања. Код размештаја се пази на различити распоред датих основака, а код везивања на избор основака у датом броју. Кад се пак води рачун не само о броју, и о избору основака већ и о њихову распореду, тада су везивања и размештаји спојени.

Стога се разликују три врсте комбинација: пермутовање, комбиновање у ужем смислу и варирање.

Задатак све три врсте комбинација своди се на право грађење слогова и на њихов број.

1. Пермутовање

214. Пермутовати дате основке значи разместити их на све могуће начине, али тако да у сваком слогу буду сви основци.

Број свију могућних пермутација од n основака означава се са P_n (број пермутација од n), а број пермутација од именованих основака, нпр. од a, b, b, c са $P(abbc)$.

Грађење пермутација.

215. Да би се од више задатих основака начиниле све могућне пермутације, треба најпре написати најнижи слог задатих основака, затим се из њега изведе најближи виши, из тога опет најближи виши итд. док се не дође на највиши слог. Али од свакога већ начињена слога добива се најближи виши, кад се у том слогу с десна на лево идући, тражи први основак који се може повисити, он се замени најближим вишим с десна, основци с лева оставе се онако како су и били а они десно разместе се природним редом. Нпр.

123	*abbc*	*babbc*	*bbabc*	*bcabb*	*cabbb*
132	*abbcb*	*babcb*	*bbacb*	*bcbab*	*cbabb*
213	*abcbb*	*bacbb*	*bbbac*	*bcbba*	*cbbab*
231	*acbbb*		*bbbca*		*cbbba*
312			*bbcab*		
321			*bbcba*		

Број пермутација.

216. 1. Кад су начињене све могућне пермутације од n различитих основака, па се њима придâ још један нови основак, онда он може у свакој прећашњој пермутацији заузети прво, или друго,.... или $(n+1)$-во место, дакле може имати $(n+1)$ различитих положаја, тако да се од $n+1$ основака може добити $(n+1)$ пута толико пермутација, колико од n основака. Стога је

$$P_{n+1} = P_n . (n+1).$$

Како сад један основак може имати само један положај, то је

$$P_1 = 1, \text{ дакле}$$
$$P_2 = 1.2,$$
$$P_3 = 1.2.3, \text{ итд.; у опште}$$
$$P_n = 1.2.3\ldots.(n-1).n;$$

то јест: Број пермутација од више различитих основака једнак је с производом природних бројева од 1 па до броја, који казује колико је основака.

Производ $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots.(n-1).n$ бележи се знаком $n!$, а изговара се: „n производно“ или „факторијел“. Зато је

$$P_2 = 2!,\quad P_3 = 3!,\ldots\quad P_n = n!$$

2. Кад између n датих основака има p једнаких, тада се они за време сматрају као различити, па је онда број свију могућних пермутација $n!$. Ако се замисли да су те пермутације размештене у одељке тако, да се пермутације једнога одељка разликују само међусобним положајем оних p основака сматраних

као различитих а да остали основци заузимају исто место, онда је у сваком од тих одељака толико пермутација, колико се може начинити од p основака, дакле $p!$. Стога је број одељака $\frac{n!}{p!}$. Кад се сад они за време сматрани као различни основци узму опет као једнаки, то у сваком одељку има само једна пермутација; стога је $\frac{n!}{p!}$ број пермутација од n основака, од којих су p једнаки.

Ако између n датих основака има сем p једнаких још и q других основака такође међу собом једнаких, онда се сличним извођењем налази, да је $\frac{n!}{p!\,q!}$ број свију различитих пермутација.

3. Ако су од n датих основака $n-k$ међу собом једнаки, и осталих k основака такође међу собом једнаки, као нпр. у производу $a^{n-k}b^k$, онда је број њихових пермутација

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{1.2.3\ldots(n-k)(n-k+1)\ldots(n-2)(n-1)n}{1.2.3\ldots(n-k).1.2.3\quad\ldots..\quad k}.$$

Кад се бројитељ и именитељ тога разломка поделе са $1.2.3\ldots(n-k)$ па се заостали чинитељи у бројитељу напишу обрнутим редом, онда је

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.\quad 2.\quad 3\quad\ldots\quad k}.$$

Последњи разломак, којему је бројитељ производ од k чинитеља, који почев од n опадају за 1, и чиј је именитељ производ од k чинитеља, који почев од 1 расту за 1, бележи се знаком $\binom{n}{k}$, а чита се: „n над k". Дакле је

$$P(a^{n-k}b^k)=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}.$$

Ако ли се напротив онај разломак скрати са $1.2.3\ldots.k$, тада се добива

$$\frac{n(n-1)\ldots..(k+2)(k+1)}{1.\quad 2\quad\ldots(n-k-1)(n-k)}=\binom{n}{n-k}.$$

Отуда је $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Допуна. Из $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.\quad 2\quad\ldots.\quad k}$ за $k=n,\ n+1,\ n+2,\ldots$ излази

$$\binom{n}{n}=1,\qquad \binom{n}{n+1}=\binom{n}{n+2}=\ldots=0.$$

2. Комбиновање

217. Комбиновати у ужем смислу значи дате основке везивати тако, да у сваком слогу има одређен број тих основака, али се при том само они слогови сматрају за различне у којих нема истих основака.

Према томе, да ли су у вези по два, по три, четири,.... основака, називају се комбинације друге, треће, четврте,... класе, или и ambe (двојке), terne (тројке), quaterne итд. Сами пак основци могу се сматрати као комбинације прве класе и као такви називају се unioni (јединке).

Још се комбинације разликују на комбинације без понављања и — с понављањем; у првих један основак може бити само једанпут, а у других и више пута.

Број свих могућних комбинација r-те класе од n основака без понављања бележи се са $\overset{r}{C}_n$, а број њихов с понављањем бележи са $\overset{r}{C'}_n$.

Грађење комбинација.

218. 1. Да се од датих основака начине комбинације r-те класе без понављања, напишу се првих r основака у природном реду па се у овом као и у сваком ново добивеном слогу идући с десна на лево замени један основак чим је могућно најближим вишим још неупотребљеним основком, затим се у захтеваном броју виши основци поређају у природном реду.

Пример. Да се начине кватерне без понављања из основака a, b, c, d, e, f.

abcd	*abdf*	*acef*	*bcef*
abce	*abef*	*adef*	*bdef*
abcf	*acde*	*bcde*	*cdef*
abde	*acdf*	*bcdf*	

2. Да се из датих основака начине комбинације r-те класе с понављањем, напише се најнижи основак r пута, па се у овом као и у сваком ново добивеном слогу идући с десна на лево један основак чим је могућно замени најближим вишим, па се опет тај основак ређа у траженом броју.

Пример. Начинити терне с понављањем из основака a, b, c, d.

aaa	*abb*	*acd*	*bbd*	*ccc*
aab	*abc*	*add*	*bcc*	*ccd*
aac	*abd*	*bbb*	*bcd*	*cdd*
aad	*acc*	*bbc*	*bdd*	*ddd*

Број кобминација без понављања.

219. Кад се сваки од n датих основака веже са сваким од осталих n-1 основака, добиће се све амбе и то свака по два пута, нпр. амба ab, кад се веже a са b и b са a. Како се на тај начин добију $n(n-1)$ по две и две једнаке амбе, то је број свију различитих амба од n основака

$$C^2_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ако уопште имамо све комбинације $r-te$ класе од n основака без понављања и ако се свака од тих C_n^r комбинација веже са сваким од $n-r$ основака што нису у њој, то добивене везе $C_n^r.(n-r)$ садрже све комбинације $(r+1)$-ве класе и то сваку $(r+1)$ пут, јер је она постала из сваке од $r+1$ комбинација пређашње класе, у којој није било основка који је сад у њој. Стога је број свију различитих комбинација $(r+1)$-ве класе од n основака

$$C_n^{r+1} = C_n^r \cdot \frac{n-r}{r+1}.$$

Па како је сада $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{1.\ 2}$, то је

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\quad 2.\quad 3}, \text{ дакле}$$

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4}, \text{ итд.}$$

уопште

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ \ldots\ldots(r-1).\quad r};$$

или с погледом на чл. **216,** 3:

$$C_n^2 = \binom{n}{2},\quad C_n^3 = \binom{n}{3},\ \ldots\ C_n^r = \binom{n}{r}.$$

Допуна. Кад се уз сваку комбинацију r-те класе без понављања допишу сви основци који се у њој не налазе, начиниће се комбинације $(n-r)$-те класе. При том се не може никаква комбинација једне класе јавити без одговарајуће комбинације друге класе. Стога је број комбинација обеју класа једнак.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Број комбинација с понављањем.

220. Нека су начињене све комбинације r-те класе од n основака с понављањем. Нека у сваком таквом слогу први основак остане непромењен, затим нека се ред основку на другом месту повиси за 1, то јест нека се на његово место стави најближи виши основак, а ред основку на трећем месту нек се повиси за 2 итд. Дакле се ред основку на r-том месту повишава за $r-1$. Стога се мора замислити да је ред првобитних n основака проширен за најближе више $(r-1)$ основака. Тако нпр. из терна с понављањем од основака a, b, c, d, у чл. **218,** 2. постају ови слогови:

abc	acd	adf	bcf	cde
abd	ace	aef	bde	cdf
abe	acf	bcd	bdf	cef
abf	ade	bce	bef	def

Таквим поступком ишчезавају сва понављања основака а јављају се комбинације r-те класе без понављања од $(n+r-1)$ основака; па и сваком слогу једне врсте припада неминовно један слог друге врсте. Стога је

$$\overset{r}{C'_n} = C^r_{n+r-1}, \text{ дакле}$$

$$\overset{r}{C'_n} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)\ldots(n+2)(n+1).n}{1.\quad 2.\quad \ldots(r-2)(r-1)r}$$

3. Варирање

221. Варирати значи дате основке везивати тако, да у сваком слогу буде исти одређени број датих основака, где се и такви слогови сматрају као различити, у којих су исти основци различно поређани. Према томе су варијације пермутоване комбинације.

И варијације, као и комбинације, деле се у класе, прве, друге, треће,... и то без понављања и с понављањем.

Број свију могућних варијација r те класе од n основака без понављања означава се са $\overset{r}{V}_n$, а њихов број с понављањем — са $\overset{r}{V'_n}$.

Грађење варијација.

222. Да би се добиле варијације неке одређене класе, треба од датих основака начинити све комбинације исте класе, па онда сваку комбинацију пермутовати. Али се и варијације могу добивати непосредно.

1. Да се од датих основака начине варијације r-те класе без понављања, напишу се првих r основака у природном реду па се у овом као и у сваком новодобивеном слогу идући с десна на лево замени један основак чим је могућно најближим вишим, затим се у захтеваном броју остали основци (који се у слогу не налазе) поређају у природном реду.

Тако се из основака *1, 2, 3, 4* добивају ове варијације треће класе без понављања:

123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432.

2. Да се од датих основака начине варијације r-те класе с понављањем, напише се најнижи основак r пута, па се у овом као и у сваком новодобивеном слогу идући с десна на лево један основак чим је могућно замени најближим вишим, па се затим најнижи основак ређа у траженом броју.

Кад су већ начињене варијације макоје класе с понављањем, онда се од њих добивају варијације најближе више класе, кад се свака од њих веже са сваким датим основком.

Из основака a и b имамо варијације с понављањем

2. класе:	3. класе:
aa, ab;	aaa, aab, aba, abb;
ba, bb;	baa, bab, bba, bbb; итд.

Број варијација без понављања.

223. Број комбинација r-те класе од n основака без понављања је $\binom{n}{r}$; од сваке такве комбинације може се пермутовањем r основака начинити $r!$ варијација r-те класе без понављања; дакле је

$$\overset{r}{V}_n = \binom{n}{r} \cdot r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)(n-r+1).$$

Број варијација с понављањем.

224. Кад је дато n основака, то сваки од њих даје n варијација друге класе с понављањем, стога је n^2 број свију таквих варијација.

Ако је уопште познат број свих варијација r-те класе од n основака с понављањем, и почем свака таква варијација везивањем са свима од n основака даје n варијација $(r+1)$-ве класе, то је

$$\overset{r+1}{V'_n} = \overset{r}{V'_n} \cdot n,$$

Па како је $\overset{2}{V'_n} = n^2$, то је $\overset{3}{V'_n} = n^3$, дакле $\overset{4}{V'_n} = n^4$; уопште

$$\overset{r}{V'_n} = n^r.$$

II. Биномно правило

225. Закон, по којем се степен бинома развија у ред, назива се биномно правило.

Да би се тај ред развио, помножи се $a+b$ с $a+b$, производ опет с $a+b$, итд., али, да би се лакше уочио закон, треба у делимичним производима најпре писати множитељ и не бележити ни степене за једнаке чинитеље, па је

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = \left.\begin{array}{l} aa+ab \\ +ba+bb \end{array}\right\}$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \left.\begin{array}{l} aaa+aab+aba+abb \\ +baa+bab+bba+bbb \end{array}\right\}$$

итд.

Начин грађења узастопних степена потпуно се слаже с начином грађења варијација с понављањем дотичне класе из оба основка a и b. Стога је уопште $(a+b)^n$ збир свих варијација n-те класе с понављањем од основака a и b, кад се свака варијација схвати као производ.

Те се варијације уређују у групе тако, да слогови сваке групе постају из пермутација. Тада сваки слог једне групе даје исти произод; дакле је коефицијент тога производа једнак с бројем пермутација чинитељâ тога производа. За производ $a^{n-k}\,b^k$ према чл. **216,** 3 број пермутација је $\binom{n}{k}$; дакле та група даје члан $\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$. Будући n једнаких основака даје само једну пермутацију, то је коефицијент првога и последњега члана 1. За други члан је $k=1$, за трећи $k=2$, за претпоследњи $k=n-1$, за последњи члан $k=n$ а $\binom{n}{n}=1$.

Према томе за биномно правило имамо образац:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

У том обрасцу влада овај закон:

1. Степени првога члана a биномова опадају а другога b расту. Изложитељ од a у првом члану једнак је с изложитељем степена биномова n, у сваком потоњем члану мањи је за 1 а у последњем члану је $=0$, а то значи, да цео ред има један члан више но што има јединица у изложитеља степена биномова n. Изложитељи од b расту обрнуто од 0 до n. Збир изложитеља од a и b у сваком члану једнак је са n.

2. Биномни коефицијент првога члана је 1; коефицијенти другога, трећега, четвртога,... $(k+1)$-ога члана јесу редом бројеви комбинација прве, друге, треће,... k-те класе без понављања од n основака.

3. Ако је други члан биномов b негативан, онда је други, четврти,... уопште сваки паран члан реда негативан; стога је

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n.$$

Према томе у биномном реду $(a \pm b)^n$ општи $(k+1)$-ви члан је једнак $(\pm 1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Допуна. Тачно истим путем, као што је овде изведен биномни образац, може се извести и полиномно правило, тј. образац за $(a+b+c+d+\ldots)^n$, јер је тај степен једнак са збиром свих варијација n-те класе с понављањем од основака $a, b, c, d, \ldots$, кад се свака варијација сматра као производ. Да би се дакле одредио n-ти степен задата полинома, треба само начинити комбинације n-те класе с понављањем од његових чланова, сваку од њих сматрати као производ, па је помножити дотичним пермутационим бројем и најзад добивене производе сабрати.

Примери.

1) $(x+a)^6 =$

$$= x^6 + \binom{6}{1} ax^5 + \binom{6}{2} a^2x^4 + \binom{6}{3} a^3x^3 + \binom{6}{4} a^4x^2 + \binom{6}{5} a^5x + a^6$$

$$= x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

2) $(3x-2y)^4 =$

$$= (3x)^4 - \binom{4}{1}(3x)^3.2y + \binom{4}{2}.(3x)^2.(2y)^2 - \binom{4}{3}.3x.(2y)^3 + (2y)^4$$

$$= 81x^4 - 4.27x^3.2y + 6.9x^2.4y^2 - 4.3x.8y^3 + 16y^4$$

$$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4.$$

3) Седми члан од $(2x^2-3y)^9$ је $(-1)^6\binom{9}{6}.(2x^2)^{9-6}.(3y)^6$ $= 84.8x^6.729y^6. = 489888x^6y^6$.

226. Односи између биномних сачинитеља.

1. Макоја два биномна сачинитеља једнако удаљена од крајњих чланова једнаки су међу собом.

$(k+1)$-ви биномни сачинитељ од почетка је $\binom{n}{k}$.

$(k+1)$-ви биномни сачинитељ од краја је $(n-k+1)$-ви од почетка, дакле $\binom{n}{n-k}$.

Али је по чл. **216,** 3 $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Други доказ изводи се из допуне чл. **219.**

Допуна. Из последње једначине за $k=0$ имамо

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

2. Збир од k-ога и $(k+1)$-ога биномна сачинитеља некојег степена једнак је са $(k+1)$-им биномним сачинитељем за 1 вишега степена.

Тако је $\quad \dbinom{n}{k-1} = \dfrac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+3)(n-k+2)}{1.\ \ 2.\ldots\ldots\ldots\ (k-2).\ (k-1)},$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1.\ \ 2.\ \ \ldots\ (k-1)\ \ .\ \ k} \quad \text{отуда}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.\ \ 2.\ \ \ldots(k-1).\ k.}\left\{k + (n-k+1)\right\}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ \ldots\ldots\ k} = \binom{n+1}{k}.$$

Спомоћу овог правила могу се из биномна сачинитеља буди којег степена извести сачинитељи најближега вишег степена простим сабирањем. Тако се за узастопне степене једнога бинома добивају ови сачинитељи (Паскалов троугао):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array} \quad \text{итд.}$$

Кад се у $(a+b)^n$ и $(a-b)^n$ узме да је $a=b=1$, добивају се ова правила:

3. Апсолутни збир свих биномних сачинитеља за n-ти степен једнак је са 2^n.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n.$$

4. Алгебарски збир наизменце позитивних и негативних биномних сачинитеља једнак је с нулом.

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=(1-1)^n=0.$$

Науку о комбинацијама и рачун о вероватноћи основали су Fermat и Pascal (1654) а нарочито их је усавршио Јаков Bernoulli (1713). Биномно правило је један од првих проналазака Newton-ових (1676); $n!$ је од Kramp-а (1808), а $\binom{n}{k}$ од Euler-а.

ДОДАТАК

I. Maximum и minimum функције другога степена

227. Познат нам је значај израза $y=f(x)$ или $x=f(y)$, као и појам о функцији (чл. **83**). Сада ћемо испитивати промене, које настају код функције, кад се променљива x мења.

1. Кад се променљивој x дају вредности које непрекидно расту, нпр. од α до β, тада вредности функције y могу бити стварне или уображене. Кад су те вредности стварне, онда вредности функције могу увек расти, или увек опадати, или се мењати час у једном час у другом смислу.

Стога се каже да функција y расте, кад x расте од α до β, ако вредности које y добива увек расту.

Напротив, функција y опада, кад вредности, које она добива, опадају, кад x расте од α до β.

Нпр. *a)* функција $y=3x-5$ расте, кад x расте (а опада, кад x опада).

b) функција $y=-3x+2$ опада кад x расте (а расте, кад x опада).

c) За линеарну функцију $y=ax+b$ може се рећи да расте или да опада према томе да ли је a позитивно или негативно.

Ако су x_1 и x_2 две вредности променљиве x $(x_2>x_1)$ у неким одређеним границама, онда ће y_1 и y_2 бити вредности функције које одговарају оним вредностима променљиве. Сад се може написати:

$$y_1=ax_1+b$$
$$y_2=ax_2+b$$

а одавде
$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)$$

Разлика y_2-y_1 позитивна је или негативна у исто време кад и a; дакле је y_2 веће од y_1 кад је a позитивно, а y_2 је мање од y_1 кад је a негативно, то јест, y расте кад x расте у првом случају а опада у другом случају, кад x расте.

2. За једну функцију се каже да је непрекидна од α до β кад x прелазећи редом све вредности између α и β, функција остаје стварна и коначна. Непрекидна функција не може прећи нагло с једне вредности на другу већ прелази редом све своје вредности. На пример непрекидна функција не може од позитивне постати негативна а да не прође кроз вредност нулу.

Тако је нпр. функција $y=3x-7$ непрекидна, јер, рецимо, за све вредности које x прелази од 3 до 8, функција пролази кроз вредности од 2 до 17. Даље, за све вредности x-са од 0 до 3 функција би прелазила вредности од -7 до 2; у овом случају функција мења знак, кад x пролази кроз вредност $\frac{3}{7}$, а то је вредност која функцију поништава.

Према томе, непрекидна функција може у извесном размаку променити знак само тако, ако се ту и поништава, јер од позитивне може постати негативна, кад прође кроз нулу.

3. Функција је прекидна за извесну вредност променљиве или зато, што нема одређену вредност за ону вредност променљиве, или зато што за ту вредност променљиве функција нагло скаче с једне вредности на другу.

Тако је нпр. разломљена функција $y=\frac{1}{3x-7}$ непрекидна за све вредности од x изузимајући за $x=\frac{7}{3}$. Кад x растући од $-\infty$ добије вредност $\frac{7}{3}$, онда функција постане бескрајно велика и негативна; кад пак x опадајући од $+\infty$ постане $\frac{7}{3}$, онда је функција бескрајно велика и позитивна. Дакле, дата функција за $x=\frac{7}{3}$ нема одређене вредности:, најпре је бескрајно велика и негативна, па онда бескрајно велика и позитивна. Краће се каже: кад x пролази кроз $\frac{7}{3}$, онда y прелази нагло од $-\infty$ на $+\infty$, да би се означило да је функција најпре негативна а затим позитивна. Дакле функција $\frac{1}{3x-7}$ може прећи с једне вредности на другу а да не пролази кроз остале вредности тога разломка; она прелази с негативне вредности на позитивну а не поништава се, али постаје бескрајно велика.

Имајући ово на уму, испитати промене гониометриских функција $sinx$, $cosx$, tgx, $cotgx$ за вредности променљиве x од 0^0 до 360^0.

228. Има непрекидних функција, које при мењању променљиве између извесних граница, нпр. од α до β, донекле расту па после опадају или обрнуто. Таква је функција:

$$y = x^2 + 49,$$

која се, при промени x од -3 до $+3$, овако мења:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	58	53	50	**49**	50	53	58	...

Дата функција, дакле, кад x расте, најпре опада, па после непрекидно расте.

Функција пак:

$$y = 25 - x^2$$

овако се мења:

x	$+3$	$+2$	$+1$	0	-1	-2	-3	...
y	16	21	24	**25**	24	21	16	...

она, дакле, кад x опада, најпре расте, па онда непрекидно опада.

Кад, дакле, функција с једном променљивом престаје расти да би почела опадати, она пролази кроз *maximum*; напротив, кад функција престаје опадати да би почела расти, она пролази кроз *minimum*.

Maximum неке функције не мора бити њена највећа вредност, као што ни minimum не мора бити њена најмања вредност. Напротив, има примера да је minimum једне исте функције већи од њеног maximum-а; максимум и минимум функције су највеће или најмање вредности функцијине од оближњих вредности њених.

229. I. Метод одређивања maximum-а и minimumа квадратне функције. Ради тога најприродније је посматрати промене у функције, које се у ње изазивају, кад се променљивој дају све вредности које она може добити — од најмање до највеће. Ово ћемо посматрати код квадратног тринома $ax^2 + bx + c$.

Нека је, дакле, дата функција

$$y = ax^2 + bx + c,$$

а она се, према чл. **185**, 5, може написати:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Почем је овде функција представљена као производ од сталнога броја a и збира двеју количина, од којих је једна — $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ — стална а друга $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ променљива, то је довољно посматрати промене ове друге количине.

Овде треба имати на уму још и ово:

1) Кад позитивни бројеви расту, тада расту и њихови квадрати, и

2) Кад негативни бројеви расту (алгебарски), њихови квадрати опадају.

Кад се сад узме да x расте од $-\infty$ до $+\infty$, онда се у том размаку налази и вредност $-\frac{b}{2a}$, која поништава израз $x+\frac{b}{2a}$.

Очевидно, израз $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ опада све док x не добије вредност $-\frac{b}{2a}$, па затим непрекидно расте. Другим речима, тај је израз прошао кроз minimum нулу, кад је x добило вредност $-\frac{b}{2a}$.

Кад се том изразу дода стална количина $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, неће се пореметити смисао те промене.

Да се одавде пређе на саму функцију y, остаје још да се израз помножи са a. Али овде треба разликовати два случаја:

1) Ако је $a > 0$, онда множење неће пореметити смисао ни једне неједначине, и

2) Ако је $a < 0$, онда множење мења смисао свима неједначинама.

То се може представити овако:

x	$x+\frac{b}{2a}$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	y: $a>0$	y: $a<0$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
расте	расте	опада	опада	опада	расте
$-\frac{b}{2a}$	0	0	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$
расте	расте	расте	расте	расте	опада
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Из овог прегледа јасно је, да:

Кад је $a>0$, функција y опада све дотле док x не добије вредност $-\frac{b}{2a}$, па отада почиње непрекидно расти. Дакле, кад је $a>0$, квадратни трином достиже minimum, којега је вредност $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, кад x достигне вредност $-\frac{b}{2a}$.

Напротив, кад је $a<0$, функција расте све док x не добије вредност $-\frac{b}{2a}$, када почиње непрекидно опадати и, према томе, достиже свој maximum $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, кад x добије вредност $-\frac{b}{2a}$.

Добро је упамтити:

a позитивно $\left\{\begin{array}{l}\text{нема maximum-a}\\ \text{minimum}\end{array}\right.$

a негативно $\left\{\begin{array}{l}\text{maximum}\\ \text{нема minimum-a}\end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l}\text{minimum}\\ \text{maximum}\end{array}\right\}$ за $x=-\frac{b}{2a}$ вредност maximum-a или minimum-a $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Примери. 1. Поделити дуж a на два одсечка тако, да збир квадрата тих одсечака буде maximum или minimum.

Ако се један одсечак означи са x, други ће бити $(a-x)$. Збир њихових квадрата је $x^2+(a-x)^2$

Дакле је функција, чије се промене траже,

$$y=x^2+(a-x)^2.$$

Радећи по показаном методу налази се да функција има само минимум за $x=\frac{a}{2}$. Вредност минимума је $\frac{a^2}{2}$. Јер се дата функција може представити: $y=2\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}\right]$.

2. У троуглу са странама a, b, c позната је средња линија стране a и једнака d. Одредити на тој средњој линији такву тачку M да збир квадрата њених раздаљина од сва три темена троуглова буде minimum.

Према погодби функција којој се тражи minimum је:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2.$$

Примењујући познато правило из планиметрије: да је збир квадрата двеју страна троуглових двапут већи од квадрата половине треће стране и квадрата њене средње линије биће тражена функција:

$$y=(d-x)^2+2x^2+\frac{a^2}{2}.$$

Како се трином десне стране може написати:
$3\left[\left(x-\frac{d}{3}\right)^2+\frac{2d^2}{9}+\frac{a^2}{6}\right]$, то је y minimum за $x=\frac{d}{3}$. Вредност минимума је $\frac{2d^2}{3}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

230. У примени, нарочито код геометриских задатака, чешће се дешава да се функција, којој се тражи максимум или минимум, јавља с више од једне променљиве. За такав случај служимо се овим двама правилима:

1. **Правило.** Производ двају позитивних чинитеља, чији је збир сталан, биће maximum, кад су та два чинитеља једнака.

Доказ. Нека је један чинитељ x, други y а њихов збир $x+y=a$.

Из идентичности

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

изводи се да је функција којој се тражи maximum

$$xy=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

а одавде се види, да ће производ (xy) бити највећи, кад је разлика $(x-y)$ најмања, што наступа, кад је $x=y=\frac{a}{2}$, тј. кад је сваки од њих једнак с половином датога збира. Тражени maximum је $\frac{a^2}{4}$.

Могло би се поставити опште правило: Једнаки сабирци макојег позитивна броја дају максималан производ.

2. **Правило.** Збир два позитивна променљива броја, чији је производ сталан, биће minimum кад су оба броја једнака.

Доказ. Нека је дати производ p а његови променљиви чинитељи x и y. Дакле

$$xy=p.$$

Из идентичности:

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

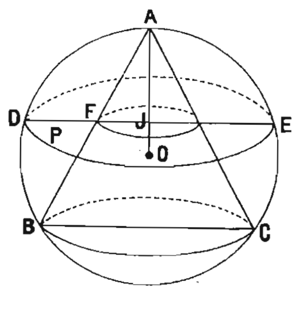
добива се функција којој се тражи минимум:

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4p$$

одавде се види, да ће лева страна бити најмања онда, кад је први члан на десној страни најмањи, што очевидно наступа кад је $x=y=\sqrt{p}$, тј. кад је сваки од њих једнак с геометриском срединoм датога производа. Тражени minimum је $2\sqrt{p}$.

Може се поставити опште правило: Једнаки чинитељи неког броја дају минималан збир.

Примена. 1. У дату лопту O уписана је равнострана купа ABC. Тражи се, да се постави раван P паралелно с основом купином BC тако, да разлика пресека те равни с лоптом и с купом буде максимум.



Нека је DFE један од положаја равни P. Треба наћи максимум израза $\Pi\,(\overline{DF}^2-\overline{JF}^2)$ или $\overline{DJ}^2-\overline{JF}^2=(DJ-JF)(DJ+JF)=$ $=DF.FE=BF.FA$. Почем је збир $BF+FA$ сталан, то ће производ $BF.FA$ бити maximum, кад је $BF=FA$.

Види се дакле, да површина P мора бити подједнако удаљена од врха и од основе купине. Тражени максимум биће

$\Pi.\frac{\overline{AB}^2}{4}=\Pi.\frac{\overline{BC}^2}{4}$, а ова је површина једнака с површином основе купине.

2. Од свију правоуглих троуглова са истом површином одредити онај, који има најмању хипотенузу.

Нека су катете x и y а површина $\frac{1}{2}p$, онда је $xy=p$. Ако се хипотенуза означи са z, тада је функција којој се тражи минимум:

$$x^2+y^2=z^2.$$

z је minimum у исто време кад и z^2. Дакле, z^2 је збир двају бројева чији је производ $x^2y^2=p^2$ — сталан. Стога ће функција бити minimum, кад је

$$x^2=y^2, \quad \text{или} \quad x=y.$$

А то значи: Правоугли троугао, који има најмању хипотенузу, јесте равнокрако-правоугли троугао.

231. II. Метод одређивања максимума и минимума квадратних функција целих и разломљених, дакле функција облика:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

у овом је: Стави се дата функција $=y$, па се добивена квадратна једначина реши по x. Услед досадашњих разлагања за максималну (минималну) вредност функције y добивени квадратни корен једнак је с нулом. Стога треба израз под квадратним кореном изједначити с нулом, из које ће се једначине добити максимална или минимална вредност за y. Заменом те вредности од y добива се вредност од x или боље сâм израз пред кореном је вредност променљиве x. Функција ће имати максимум, ако је израз под квадратним кореном негативан, при том x је уображено, ако y преко добивене вредности расте. Кад је израз под кореном позитиван, функција има minimum.

При одређивању максимума и минимума у простијим случајевима код целе функције довољне су погодбе у чл. **185.**

Још се напомиње, да има функција, које немају ни максимума ни минимума нпр. $y=\frac{x^2-9}{2x}$. јер квадратни корен, добивен решењем једначине, не може бити једнак с нулом. Функције пак, код којих је квадратни корен само на један начин једнак с нулом, имају или само maximum, или само minimum, као нпр. функција

$y=x+\sqrt{3-2x}$, која има само максимум. Најзад, оне функције имају и максимум и минимум, које су на два начина једнаке с нулом, нпр. $y=\frac{x^2+1}{x}$.

Овај други метод одређивања max. и min. подесан је, што се по њему брзо и лако увиђа, да ли и зашто наступа максимум или минимум. При том је добро раставити радиканд на чинитеље па посматрати, да ли већа или мања вредност од y-на чини радиканд негативним, дакле x уображеним.

Примери. 1. Од свију правоугаоника истога обима $2a$ одредити онај, који има највећу површину.

Означимо једну страну са x, друга ће бити $a-x$, а површина y. Дакле је тражена функција: $x(a-x)=y$, или

$$x^2-ax+y=0, \qquad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4y}}{2}.$$

Одавде $a^2-4y=0$, дакле maximum: $y=\frac{a^2}{4}$, заменом је $x=\frac{a}{2}$; с тога су обе стране једнаке $\frac{a}{2}$, отуда је тражени правоугаоник квадрат са страном $\frac{a}{2}$.

2. Од свих правоугаоника дате површине p, који има најмањи обим?

Нека је једна страна x, друга ће бити $\frac{p}{x}$. Дакле обим: $2\left(x+\frac{p}{x}\right)=y$. Одавде је:

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-16p}}{4},$$

и сад $y^2-16p=0$, тј. minimum: $y=4\sqrt{p}$ за $x=\sqrt{p}$ дакле је свака страна $\sqrt{p}$.

Решење: квадрат са страном $\sqrt{p}$.

3. Одредити maximum и minimum функције:

$$\frac{x^2-2x+21}{6x-14}.$$

Кад се ова функција означи са y биће

$$\frac{x^2-2x+21}{6x-14}=y, \quad \text{одавде је}$$

$$x=3y+1\pm\sqrt{9(y-2)\left(y+\frac{10}{9}\right)}.$$

Решењем $9(y-2)\left(y+\frac{10}{9}\right)=0$ налази се да је $y_1=2$ minimum за $x=7$ и $y_2=-\frac{10}{9}$ maximum за $x=-\frac{7}{3}$.

4. Одредити maximum и minimum функције:

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

Радећи као у прећашњем задатку добива се:

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{-3(y-3)\left(y-\frac{1}{3}\right)}}{2(y-1)}.$$

Одавде се види да је $y_1=3$ maximum за $x=1$, а $y_2=\frac{1}{3}$ minimum за $x=-1$.

5. Одредити maximum и minimum функције:

$$\frac{x^2-1}{2x+1}.$$

Кад се ова функција означи са y и једначина реши биће

$$x=y\pm\sqrt{y^2+y+1}.$$

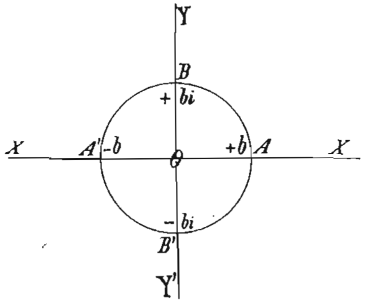
Дата функција нема ни maximum-а ни minimum-а, јер су корени једначине $y^2+y+1=0$ уображени.

II. Геометриско представљање имагинарних и комплексних бројева

1. Геометриско представљање имагинарних бројева

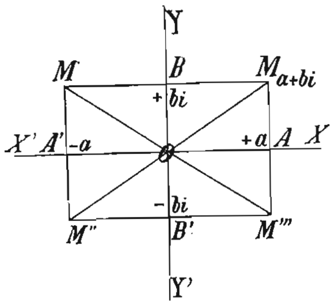
232. Сваком стварном броју одговара једна тачка неограничене стварне бројне линије, и обрнуто свакој тачки њеној одговара стваран број. Сваком стварном броју b може се наћи један чисто имагинаран број bi, који му одговара. По томе се може и ред чисто имагинарних бројева графички представити тачкама једне праве линије (имагинарне бројне линије), при чем бројевима b и bi у обе праве одговарају тачке, које од нулте тачке имају подједнаку апсолутну даљину. Кад се обе праве поставе у исту раван, оне се морају понајпре сећи у тачки која одговара нули, почем само нула припада како реду стварних тако и реду чисто имагинарних бројева, и друго оне морају бити једна на другој нормалне.

Доказ. Нека зрак, на којем леже позитивни стварни бројеви, склапа непознати угао φ са зраком, на којем леже позитивни имагинарни бројеви; даље, нека броју $+b$ одговара тачка A. Тада се тачка B, која одговара броју $+bi$ налази, кад се дуж OA обрне за φ^0. Множењу дакле са i одговара графички једно обртање за φ^0. По томе се добива тачка A', која одговара броју $(+bi).i$, кад се дуж OB обрне опет за φ^0, дакле дуж OA за $2\varphi^0$. Почем је $(+bi).i = -b$, то је тражена тачка A' идентична са тачком која одговара стварном броју $-b$, која се добива, кад се OA обрне за 180^0. Према томе је $2\varphi^0 = 180^0$ а $\varphi = 90^0$. У сагласности с овим тачки B' одговара број $-bi = bi^3$, јер је OB' у супротном правцу од OB (Обртање од OA за 270^0).



2. Геометријско представљање комплексних бројева

233. Тачка, која одговара комплексном броју $a + bi$, мора бити удаљена од имагинарне бројне линије за a и од стварне бројне линије за b, да би он за $b = 0$ прешао у тачку која одговара броју a, а за $a = 0$ да би прешао у тачку која одговара броју bi. Стога се стварна бројна линија XX' сматра као апсцисна оса а имагинарна бројна линија YY' као ординатна оса правоуглога координатног система, па се стварни бројеви a и b комплексног броја $a + bi$ узимају као координате тачке M, и то a за апсцису а b за ординату; тако је положај те тачке у равни једнозначно одређен; обрнуто, некој тачки M, чије су координате a и b дате, одговара један једини комплексни број, којему је апсциса тачкина a стварни део а ордината b стварни чинитељ имагинарнога дела. До те се тачке у бројној равни долази, кад се од почетка пренесе на апсцисну осу дуж a и затим нормално на њу дуж b.



Исто тако се налази, да су комплексни бројеви $-a + bi$, $-a - bi$, $+a - bi$ по реду представљени тачкама M', M'', M'''.

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

1. Примена заграда.

Кад с неким бројним изразом има да се изврши каква рачунска радња, онда се он заграђује. Те се заграде изостављају: 1. кад треба извршити рачунске радње истога ступња оним редом како долазе знаци један за другим, 2. кад две радње различитог ступња иду једна за другом, тада се најпре врши радња вишега ступња. Али је противно овим правилима уобичајено, да се не заграђују производи, чији чинитељи нису везани знаком множења. Нпр.

$$a.2b = a.(2b); \qquad a:2b = a:(2b).$$

Али се чешће стављају залишне заграде, да се нека бројна веза нарочито истакне.

1. Анализирај наведене изразе и израчунај их за $a = 50$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 20$:

1) $a - b + (c + d)$; 2) $a - (b + c) + d$;
3) $a - (b + c + d)$; 4) $(a - b) + (c + d)$.

2. Тако исто за $a = 60$, $b = 30$, $c = 15$, $d = 10$, $e = 2$:

1) $a - [b - (c + d) - e]$; 2) $a - [b - (c + d - e)]$;
3) $a - [(b - c) + (d - e)]$; 4) $a - [b - c + d - e]$.

3. Тако исто за $a = 5$, $b = 8$, $c = 3$:

1) $a + b.b - c$; 2) $(a + b).b - c$;
3) $a + b.(b - c)$; 4) $(a + b).(b - c)$.

4. Исто тако за $a = 20$, $b = 15$, $c = 5$, $d = 2$, $e = 1$:

1) $ab - cd - e$; 2) $a(b - cd - e)$;
3) $ab - c(d - e)$; 4) $(ab - c)d - e$.

5. Исто тако за $a = 120$, $b = 20$, $c = 2$:

1) abc; 2) $a.(bc)$;
3) $a:b:c$; 4) $a:(b:c)$;
5) $(a:b)c$; 6) $a:(bc)$.

Напиши *3), 4), 5)* примењујући једанпут разл. црту.

6. Израчунај за $a=12$:

1) $[(a-10)a-8]a-6$; 2) $[(a+24):a+9]:a$.

7. Израчунај за $a=4$:

1) $100-\{90-[25-(5-a)a]a\}a$; 2) $\{10+[6+(4+a):a]:a\}:a$.

8. Израчунај за $a=7$, $b=8$, $c=6$, $d=4$:

1) $a+b(c-d)-(a-d)c-(a-c)(b-d)$;

2) $(a+b)c-d-a-dc-(a-c)b-d$.

9. Замени у датим изразима $x=a+b$ и $y=a-b$:

1) $3x-xy-y$; 2) $3x-y(x-1)$;

3) $x(3-y)-y$; 4) $x(x-y)-y(x+y)$.

10. Израчунај:

1) $5.10-2.3+1$; 2) $5.(10-2.3+1)$;

3) $5.10-2.(3+1)$; 4) $5.10-(2.3+1)$.

11. Израчунај:

1) $360-3.12-5.2-1$; 2) $(360-3).12-5.(2-1)$;

3) $360-(3.12-5.2-1)$; 4) $360-3.[12-5.(2-1)]$;

5) $(360-3.12-5).2-1$; 6) $360-3.(12-5.2-1)$.

12. Израчунај:

1) $(6+54):(6-3)$; 2) $6+54:6-3$;

3) $6+54:(6-3)$; 4) $(6+54):6-3$.

13. Израчунај:

1) $(10.4):2$; 2) $10.(4:2)$;

3) $25:[5.(9-4)]$; 4) $(25:5).(9-4)$.

14. 1) $[5.(4+3)-2.7+12:(3+1)].[8-18:3]$;

2) $[7+3(8-5)(9-7)].8:5$

15. Замени $x=3a-2b$ у:

1) $3x-[8-x]$; 2) $x(10-x)$;

3) $(8-x):(12+x)$; 4) $x(x-1)-x$.

16. Назначи:

1). Да се a умањи за збир из b и c. 2). Да се збир од a и b умањи за разлику од a и b. 3) Троструки збир од a и b да се подели са b. 4) Да се производ од a и b повећа за количник од a и b. 5) Да се a подели количником из b и c.

17. Напиши и израчунај:

1) Да се *94* повећа за збир од *10* и *8*. 2) Збир од *94* и *10* повећати за *8*. 3) Умањити *94* за разлику бројева *10* и *8*. 4) Умањити производ од *94* и *10* за *8*. 5) Поделити са *8* збир од *94* и *10*. 6) Поделити *960* производом од *10* и *8*. 7) Поделити са *8* количник од *960* и *10*.

---

2. Сабирање апсолутних целих бројева

$$\mathbf{a+b=b+a;\quad a+(b+c)=a+b+c.}$$

1. Сабери најкраћим путем:

1) $998+357+2$; 2) $98+75+2+25$;

3) $95+96+97+3+4+5$; 4) $9997+7632+3$.

2. Како се при усменом рачунању додаје број *57* ка ***217***? Правило?

3. Нека се ка *400* дода напре *80*, ка резултату *15* па онда још *5*. Како се може краће израчунати резултат? Правило?

4. Разјасни поступак при сабирању вишеимених бројева, нпр. $3^0 15' + 8^0 7'$, на задатку $(a+b)+(c+d)$.

5. Објасни на исти начин:

1) $57+32=(50+7)+(30+2)$; 2) $68+79$.

6. $(2a+3b+4c)+3a$. **7.** $[(7p+5q)+3p]+5q$.

8. $2p+3q+5p+3q+q$. **9.** $m+6m+3n+7m+9n$.

10. $7m+[3m+(2m+\{8n)]$. Проба за $m=1$, $n=2$.

Проба је у том, што се општи бројеви замене у датом изразу посебним бројевима, па се назначене рачунске радње изврше (неразграђујући) почињући са заградама изнутра. Тако добивени резултат мора бити једнак с резултатом, који се добива, кад се у резултату задатог израза изврши замена. Нпр

а) $7+[3+(2+16)]=7+(3+18)=7+21=28$.

b) Резултат $12m+8n$. Замена $12+16=28$.

11. $3a+[7b+(5a+b)]$. Проба за $a=10$, $b=10$.

12. $5p+[(7p+8q)+6q]$. Проба за $p=1$, $q=1$.

13. $[15x+\{5x+(7y+x)\}]+2y$. Проба за $x=4$, $y=5$.

14. $\{(3a+4b)+2c\}+\{6a+(4b+5c)\}$.

15. $\{(2x+3y)+(5x+2y)\}+[\{4x+(5x+y)\}+6y]$.

16. Изврши сабирање:

1) $a>b$, $5=5$; 2) $5>3$, $a=a$; 3) $a>b$, $5>4$.

17. 1) $a>b+3$, $c=7$; 2) $a+b<10$, $c=5$; 3) $b=17$, $a>c+3$.

18. 1) $a+b<c+d$, $a<2c$; 2) $2a>3b$, $a>c$; 3) $a+b<7$, $c>3$.

---

3. Одузимање апсолутних целих бројева

$$\mathbf{(a-b)+b=a;\ (a+b)-b=a.}$$

$$\mathbf{a+(b-c)=a+b-c;\ a-(b+c)=a-b-c;}$$

$$\mathbf{a-(b-c)=a-b+c;}$$

$$\mathbf{a-b=(a+n)-(b+n)=(a-n)-(b-n).}$$

Израчунај из датих једначина x на основу тумачења и последица̂ у чл. **15.**:

1. a) $x+5=12$; b) $x+3a=5a$.
2. a) $36-x=10$; b) $5a-x=a$.
3. a) $x-36=10$; b) $x-5a=a$.

Израчунај тако исто најпре израз у којем се x налази, а затим истим путем и само x:

4. a) $30-(x+4)=10$; b) $30-(x-4)=10$.
5. a) $(x+4)-30=10$; b) $(x-4)-30=10$.
6. a) $9a-5b+5b$; b) $13a+8b-13a$.
7. a) $a+(2b-3c)-(2b-3c)$; b) $a-(b+c)+b+c$.

8. Неко има a дин. па изда a дин. мање b пара; колико му остаје?

9. Шта значи израз $ma+na=(m+n)a$ прочитан с лева, а шта с десна?

10. Какве се једначине добивају према чл. **15**, 1 и 3 из $(a+1)-2=a-1$?

11. $(9m+2n)-6m$ **12.** $(7m-3a)+2a$.
13. $[(3x+5)+2x]-4x$. **14.** $3m+9m+m-5m$.
15. $(8x-4y)+7x$. **16.** $[(5z-7)+3z]+4$.
17. $(3a-4)-6$. **18.** $(16y-8x)-8y$.
19. $[(5x-2)-2x]-3$. **20.** $5a+7b-2b-4a$.
21. $12-(4+m)$. **22.** $9y-(3x+7y)$.
23. $(6x+4y)-(3x+2y)$. **24.** $5m-[(2m+3a)+2m]$.
25. $6+(n-4)$. **26.** $x+(8x-4a)$.
27. $7a+(3a-2b)$. **28.** $15m+[(4m-3)+2]$.
29. $5y-(8z-3y)$ **30.** $(m+n)-[m-(a-n)]$.

31. $(2x-4)-(x-1)$. Проба за $x=3$.

32. $7a+(8a-2)+(9a-4)$. Проба за $a=6$.

33. $[x-(m+n)]+[x-(m+p)]+[x-(n+p)]$. Проба за $x=20$, $m=1$, $n=2$, $p=3$.

34. $a-\{b-[c-(a-b)]\}$. Проба за $a=10$, $b=8$, $c=9$.

35. $\begin{array}{r} 5a-3b \\ 2a-\ \ b \\ \hline - \quad + \end{array}$ **36.** $\begin{array}{r} 7b-3c \\ 2b-3c \\ \hline \end{array}$

37. $\begin{array}{r} 17x-15y \\ 8x-\ \ 9y \\ \hline \end{array}$ **38.** $\begin{array}{r} 20m-27n+12p \\ 15m-\ \ \ n+12p \\ \hline \end{array}$

39. $(17p+15q-13r-11s)-(5p-6q-7r+8s)$.

40. $(5a+2b-3c)-(2a-3b+5c)-(a-2b-4c)$.

41. $(3x-5y-7z)+(7x+4y-3z)-(6x-3y+10z)$.

42. $7a-(3c-6b)-(6a-3c)-3b+(3a-8c)$.

43. $(8m-5y)+[(2y-7m)-(y-m)]$.

44. $(x+y)-[x-\{a-(y-m)\}]$.

45. $2x-[(3a+4x)-(4x-1)]-(x-2a-2)$. Проба за $x=20$, $a=5$.

46. $(8m-5x)-(2m-3n-4x)+[(3x-2n)-(4m+3n)]$.

Израчунај задате изразе и изврши пробу за $a=4$, $b=3$:

47. $(8a+7b)-(5a-4b)-(2a-b)$.

48. $8a+(7b-5a)-\{(4b-2a)-b\}$.

49. $8a+(7b-5a)-\{4b-(2a-b)\}$.

50. $(8a+7b)-\{5a-(4b-2a)-b\}$.

Одреди за $X=4x-(3y+2z)$, $Y=2x+(4y-3z)$ и $Z=x-(2y-4z)$ изразе:

51. $X+(Y-Z)$; **52.** $X-(Y+Z)$; **53.** $X-(Y-Z)$.

Одреди изразе:

54. $A+\{B-(C+D)\}$; **55.** $A-\{B+(C-D)\}$;
56. $A+\{B-(C-D)\}$; **57.** $A-\{B-(C-D)\}$;

кад је $A=6a-(2b+3c)$, $B=3a+(3b-4c)$,
$C=2a-(b+c)$, $D=a-(4b-2c)$.

58. Који се број мора додати ка $7m-(3n-1)$, да би се добило $5m+5n$?

59. Који се број мора одузети од $8a-4b$, да се добије $2a-2b-2$?

60. Од којег се броја мора одузети $8a-4b$, да се добије $2a-2b-2$?

61. Који је број мањи за $2m-3$ од $5m-8$?

62. Који је број већи за $5m-n-1$ од $3m+n+2$?

63. Претвори дате изразе у биноме на два начина а да се први члан не промени:

a) $x-3y+2z$; b) $3a-4b-2c+3$;
c) $7a-5b+3c-d$; d) $a-2b+3c+4d-e$.

64. Претвори $3a-(b+c)$ у разлику, којој ће умањеник бити a) $4a$, b) $2a$, c) $3a+b$, d) $3a-1$, e) $3a+1$.

65. Претвори $7a-5b-3c+2$ у бином, којему ће први члан бити 1) $7a$; 2) $7a-5b$; 3) $7a+2$; 4) 2.

66. Претвори $10m+3n-5p-q$ у бином с првим чланом 1) $8m$; 2) $10m+10p$; 3) $3n-3q$; 4) $10m+10n$.

67. Како би се при усменом рачунању одузео број **46**? Правило?

68. Израчунај према $a-(b-c)=?$

a) $735-99$; b) $7364-997$; c) $18756-9930$.

69. Објасни одузимање $19m\ 87cm-5m\ 43cm$ по обрасцу $(a+b)-(c+d)$.

70. Изврши *a)* сабир. $\begin{array}{r} a-7=18 \\ 7=\ 7 \end{array}$ *b)* одузим. $\begin{array}{r} x+a=b \\ a=a. \end{array}$

71. Изврши одузимање:

1) $\begin{array}{l} a=b \\ 5>4; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} a>b \\ 4=4 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} a>b. \\ 5<6. \end{array}$

72. Тако исто:

1) $\begin{array}{l} \alpha+\beta=90^0 \\ \beta<45^0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma=180^0 \\ \gamma>\ 90^0 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} \alpha+\beta=\gamma+\delta \\ \alpha>\gamma \end{array}$

73. Тако исто: 1) $\begin{array}{l} 7>4 \\ 5>2; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 7>4 \\ 5>1; \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} 7>4 \\ 5>3. \end{array}$

4. Сабирање и одузимање алгебарских целих бројева

$$\mathbf{a-a=0;\quad a+0=a;\quad a-0=a;}$$
$$\mathbf{a-(a+m)=0-m=-m;}$$
$$\mathbf{a+(-b)=a-b;\quad a-(-b)=a+b.}$$

1. Представи назначене разлике с умаљеником *0!*
1) $9-11;$ 2) $a-(a+7);$ 3) $(a-n)-a.$

2. $(+8)-(-5)+(-3)-(+7)+(+1).$

3. $(+7a)+(+3a).$ **4.** $(-6m)+(+3m).$

5. $(+5n)+(-5n).$ **6.** $(-8x)+(-2x).$

Напиши 3) до 6) простије (чл. **26**).

7. $(+2x)-(+x).$ **8.** $(-6a)-(+4a).$

9. $(+6m)-(-3m).$ **10.** $(-4s)-(-8s).$

11. $(-4x)+(-2x)-(-x)+(+9x).$

a) Сабери оба броја; *b)* одузми доњи број од горњега:

12. 1) $\begin{array}{r} 13a \\ -\ 7a; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -8a \\ +3a; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -26 \\ -\ 9; \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} x+7 \\ -7. \end{array}$

13. 1) $\begin{array}{r} a-b \\ -2b; \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 18 \\ 9-x; \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -10 \\ 8+x; \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} 2x-1 \\ -x+4. \end{array}$

14. $\begin{array}{l} 8a-7b-6 \\ 3a-4b-5; \end{array}$ **15.** $\begin{array}{l} -5a-4b-1 \\ -2a-3b-4; \end{array}$ **16.** $\begin{array}{l} 7x-8y+9 \\ 3x-3y+3. \end{array}$

17. $x-(x-9)+(x-11)-(x-13).$ Проба за $x=5.$

18. $x-(x-2)+(x-4)-(x-6).$ Проба за $x=4.$

19. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z).$
Проба за $x=3,\ y=1,\ z=-2.$

20. $[(a-b)-b]-(b-a).$ Проба за $a=-7,\ b=-2.$

21. $5m-[3m-(-n+m)].$ Проба за $m=1,\ n=-1.$

22. $x+[(x-y)-(y-x)].$ Проба за $x=1,\ y=-10.$

23. $x-[(x+z)-(-x+z)].$ Проба за $x=-1,\ z=-5.$

24. $2a+3b-\{2a-[-2a+3b-\{(2a+3b)-(2a-3b)\}]\}.$

25. $[\{(a-b)+(b-c)\}-\{c-(d-e)\}]-[-c+\{d+(-c-e)\}].$
Проба за $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5.$

26. $[6x+7y-\{-6x+7y-[(6x-7y)-(6x+7y)-6x]\}]-$
$-[6x-\{(6x-7y)-(6x+7y)\}].$

27. За колико је $-a$ мање од $+a$, $+5$ веће од -2?

28. За колико је -7 мање од -2, -7 веће од -10?

29. За колико је $-a$ мање од $+b$, $-a$ веће од $-(a+3)$?

30. Изрази неједначином, да је x a) позитиван број, b) да је негативан број*!*

31. Који цели бројеви (означени са x) задовољавају погодбе:
a) $-2<x<+1;$ b) $-3\leqq x<0;$ c) $-8<x\leqq-5.$

32. Које се вредности могу давати x-су, да би сваки од датих израза био a) нула, b) негативан број:
1) $x-3;$ 2) $x+5;$ 3) $x-a;$ 4) $x+a;$
5) $x+a-b;$ 6) $x-a-b;$ 7) $a-x;$ 8) $a-b-x.$

33. Како се мења резултат одузимања, кад умаљеник промени место с умалитељем?

34. Термометар показује у подне m^0 изнад тачке мржњења, у вече n^0 испод ње; за колико је степена термометар пао?

35. Термометар показује изјутра m^0 испод тачке мржњења па се до подне попне за n^0; која је температура у подне?

36. Географска ширина једног места је a^0 северно, друго b^0 северно и трећег c^0 јужно; колика је разлика ширина свака два места?

37. Једно тело креће се по некој правој линији a мет. унапред а за тим b мет. уназад. Колико је тело удаљено од полазне тачке?

38. Сабери:
1) $\begin{array}{l} a>-7 \\ 4=4; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} a>-7 \\ -4=-4; \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} a+b=a+b. \\ -a>-2b. \end{array}$

39. Одузми:
1) $\begin{array}{l} -5>-8 \\ -a=-a; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} a=a \\ -5<2; \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} a>b. \\ -2<2. \end{array}$

5. Множење апсолутних целих бројева

$$\mathbf{a.b=b.a;\ (ab).c=(ac).b=a.(bc);\ a^m.a^n=a^{m+n}.}$$

1. Напиши на шест разних начина производе као производе од два чинитеља: a) из $2.3.5$, b) из $a.b.c.$

2. Израчунај најкраћим путем: a) $(5.8.7).(125.2);$
b) $4.9.8.25.125;$ c) $25.125.32.13.$

3. Како се може неки број помножити с $56=7.8$? Правило.

4. $a^3 . 4a^2$.   5. $8xy . 7x$ 6. $2y^3 . 4y^2$.
7. $7a^2x . ax^2$.   8. $4z^3 . 5bz^2$.   9. $6m^3n^4 . 5m^3n^2$.
10. $a . 2a . 3a$.   11. $xy . xy . xy$.   12. $z^2 . 2z^3 . 3z$.
13. $a^3b . 5a^2b^2 . 8ab^3$.   14. $x^3 . 3x^2y . 3xy^2 . y^3$.
15. $3ax^{n+1} . 4a^2x^{2n-2} . 5a^3x^{3n+7}$.
16. Сведи: $15a^3 - 7a^2b + 8a^3 - 9ab^2 - a^3 - 10a^2b + ab^2 - b^3$.
17. $3x^2 - [x^2 - (2xy - y^2) + (x^2 - 2y^2) - (x^2 - 3xy)]$.
Проба за $x = 3$, $y = 2$.
18. $10m^2 - [3m^2 - (m^2 - 2m - 3) - (m^2 - 1)]$. Проба за $m = 5$.

$(a \pm b) . m = am \pm bm$; $a(m \pm n) = am \pm an$.

19. $(x + 5) . 4 - 2x$.   20. $[(x + 1)x + x]x + 1$.
21. $(6m + 5m^2) . 2m$.   22. $(2a^3 + a^2)3a - (a + 1)a^3$.
23. $8x - (7 - x) . 3$.   24. $[(x - 3)x - 5x]x - 7$.
25. $[(a^2 - 2a - 1)5 - (a - 1)2a] . 3 + (8a + 5) . 3$.
26. $(8xy^3 + 5x^2y^2 - 3x^3y) . 12x^2y^2$.
27. $(3z^4 + 2z^3 - 5z^2 + 4z) . 6z^2$.
28. $(4m^3 - 3m^2n + 2mn^2 - n^3) . 3m^2n^2$.
29. $(3x^2 + 5x + 7) . 5x - (4x^2 - 6x - 8) . 3x$.
30. $6.(m+n) - 5m$.   31. $12a^2.(3x^2 + 2y^2)$.   32. $3ax.(a^2 + ax + x^2)$.
33. $a . (b - 1)$.   34. $5x^2 . (3x^2 - 8xy + 2y^2)$.
35. $5 . (z - 2) + 7$.   36. $x^3 . (x^3 - x^2 + x - 1)$.
37. $4a^2b^4 . (5a^2b^3 - 7a^3b^2 - 5a^4b - 3a^5)$.
38. $7x^2y . (2x^2y - 2xy^2 - 3xz^2 + 3y^2z) + x^2y^2 . (14xy - 21yz)$.
39. $\{a^2(3a - 2b) - b^2(2a - 3b) + 2ab(a + b)\} . 4a^2b^2$.
Проба за $a = 9$, $b = 2$.
40. Израчунај с пробом за $m = 20$, $y = 4$, $x = 3$, $z = 2$:
a) $m - (xy + z)$;   c) $(m - x)y + z$;
b) $m - x(y + z)$;   d) $(m - xy) + z$.
41. a) За колико производ xy бива већи (мањи), а) кад се x повећа (умањи) за 1, b) кад се y повећа (умањи) за z?
b) Дужине страна неког правоугаоника су a мет. и b мет. За колико ће површина правоугаоника бити већа (мања), 1) кад се прва страна увећа (умањи) за c мет., 2) кад се друга страна увећа (умањи) за d мет.?
42. Израчунај по обрасцу $(a - b) . c = ?$ a) $98 . 7$; b) $999 . 17$.
43. $4(a + 1) - a + 7(a - 1)$. Проба за $a = 2$.
44. $3(a + b + 1) - 2b - 2b(b + 3)$. Проба за $a = 3$, $b = 2$.
45. $a^2 - (a + b - 1)a - (a - b + 1)b$. Проба за $a = 10$, $b = 5$.
46. $a^2(a - 1) - b^2(b - 1) - (a^2 + b^2)$. Проба за $a = 9$, $b = 1$.

47. $a^3 - a^2b - ab(a - 1) - (ab - 1)$. Проба за $a = 1$, $b = 2$.
48. $a[b(c + d) - c] - ab(c + d) - (c + abc - d)$.
49. $5(2a^2 - 3a + 2) - 4(2a^2 + 3a - 2) - 2(a^2 - a - 1)$.
50. $a^2(a^2 - ab + b^2) + b(a^3 - 3a^2b) - a(a^3 - 3ab^2)$.
51. $8a^2 - 2[a(a - b) - b(b - a)] - (2a - 5b)a$.
52. $3x\{3x^3 - x[3x^2 - x(x - 2)]\}$. Проба за $x = 10$.
53. $3x[(x - 1)3x + 2x(2x + 1) - 1]$. Проба за $x = 9$.
54. $x^4 - x\{x - x[x - x(x - 1)]\}$. Проба за $x = 2$.
55. $3 - 3\{3 - 3[3 - 3(x - 3)]\}$.
56. $99995 . 724 - 9993 . 816 = (100000 - 5) . 724 - \ldots$.

$am \pm bm = (a \pm b) . m$.

57. $4a + 4b$ 58. $7x - 7$ 59. $ab - b$.
60. $6m + 6n + 6p$.   61. $8x - 24y - 30$.   62. $ax + ay - a$.
63. $5x^2 + 9x^2$.   64. $a . 10^m - b . 10^m$.   65. $15ay^2 - 9a^2y$.
66. $a^3b^8 - a^6b^3$.   67. $a^3b + a^2b^2 + ab^3$.
68. $12a^4b^2 - 6a^3b^3 + 18a^2b^4$.   69. $6a^3 - 12a^4 + 24a^5$.
70. $(a + m)x + (a - m)x$.   71. $m(b^2 - x^2) + n(b^2 - x^2)$.
72. $a(3x + 2) - 3b(3x + 2) + 2a(3x + 2)$.
73. $(3a - 4b)(2x - y) - (a + b)(2x - y) - 2x + y$.
74. $2m(x + y) - 3mx - 4m(y - 1)$.
75. $2x(x^2 - 3x + 4) - 2x(2x^2 - x - 1) + 2x(3x^2 - 5x - 8)$.
76. $5a^2(a^2 - a + 1) - 5a^2(2a - 2) - 5a^2$.
77. $(2x - 3y)(2x + 3y) - (2x - 3y)^2 + (2x - 3y)(5x + y)$.
78. $(x - 1)^2(x + 1) - (x - 1)^3 - (x - 1)^2$.
79. $(x - 2)(x + 2) - (x + 2)^2 + (x + 2)$.
80. $am + bm - an - bn$.
Решење: $m(a + b) - n(a + b) = (a + b)(m - n)$.
81. $ac + 3c + ad + 3d$.   82. $ab + b - ac - c$.
83. $ab + b + a + 1$.   84. $25ab - 20a + 15b - 12$.
85. $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$.   86. $12x^3 - 9x^2y - 16xy^2 + 12y^3$.
87. $x^2 + 7x + 2x + 14$.   88. $x^2 - 7x + 2x - 14$.
89. $x^2 - 9x + 3x - 27$.   90. $x^2 - 9x - 3x + 27$.
91. $5x^2 - 8x + 25x - 40$.   92. $6x^2 - 14x - 9x + 21$.
93. $2x^2 - 6x - 5x + 15$.   94. $8x^2 + 3x + 8x + 3$.

$(a \pm b)(c + d) = ac \pm bc + ad \pm bd$.
$(a \pm b)(c - d) = ac \pm bc - ad \mp bd$).
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

95. $(5x + 3a)(5x + 4a)$.   96. $(a^m + b^m)(a^n - b^n)$.
97. $(3x^2 + 2y^2)(4x^2 + 5y^2)$.   98. $(ax^m - by^n)(bx^n + ay^m)$.

99. $(2a^2+3b^2)(5a^2-4b^2)-(10a^4-12b^4)$. Проба за $a=3,\ b=2$

100. $(5x+a)(2x-a)-(4x-3a)(7x+a)+(3x-a)(6x+2a)$.

101. $4a^2+3b^2-(a-2b)(2a+b)-(a+b)a$. Проба за $a=6,\ b=2$.

102. $(x^2-2xy)x-(x^2-2y^2)(2x+y)-(x^2+2y^2)y$.

103. $(a+5)(a+6)-(a+3)(a+4)-(a+5)(a-6)+$
$+(a-3)(a-4)$.

104. $5x^3y^3(x^4-y^4)-10x^2y^2(x^6+y^6)-(2x^5-5y^5)(5x^3y^2-2x^2y^3)$.

105. Израчунај по обрасцу $(a\pm b)(c\pm d)$. a) 98.999; b) 107.999.

---

106. $(p+2)^2$. **107.** $(a-1)^2$. **108.** $(3a-4)^2$.

109. $(10m+n)^2$. **110.** $(2x+y)^2$. **111.** $(x-2y)^2$.

112. $(3m-2n)^2$. **113.** $(3a^2-4b^2)^2$. **114.** $(5p^3-3q^3)^2$.

115. $(x+3)^2-6x$. Проба за $x=3$.

116. $(y-4)^2+8y$. Проба за $y=6$.

117. $(x+a)^2+(x-a)^2$. **118.** $(x+a)^2-(x-a)^2$.

119. $(ax^2+by^2)^2-2abx^2y^2$. **120.** $(a^2x-b^2y)^2+(a^2x+b^2y)^2$.

121. $(2a^4+3b^4)^2-(3a^4-2b^4)^2$. **122.** $(x^{m+1}-y^{m-1})^2$.

123. $(x^{2m-3}-y^{3m-2})^2$. **124.** $97^2=(100-3)^2$.

125. a) 103^2; b) 995^2; c) 1007^2.

126. $(x+a)(x-a)+a^2$. **127.** $y^2-(y+2)(y-2)$.

128. $(15a+9b)(15a-9b)$. **129.** $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$.

130. $(3a^2-2b^2)(3a^2+2b^2)$. **131.** $(5x^3+3x^2y)(5x^3-3x^2y)$.

132. $(mx^3+ny^3)(mx^3-ny^3)+2ny^3(mx^3+ny^3)$.

133. $(3a^2+5b^2)(3a^2-5b^2)-(3a^2+7b^2)(2a^2-4b^2)$.

134. $(3x+4)(4-3x)$. **135.** $(2a^2+5)(5-2a^2)$.

136. a) 53.47; b) 65.75; c) 109.91; d) За колико се мења производ из два једнака чинитеља, од којих је сваки 3278, кад се један чинитељ повећа за 25 а други умањи за 25?

137. a) 125.115; b) 1007.993; c) 8009.7991.

138. Израчунај: a) 54^2-46^2; b) 61^2-39^2; c) 79^2-21^2.

139. a) 773^2-227^2; b) 596^2-404^2; c) 734^2-434^2.

---

140. $(x^2+xy+y^2)(x-y)$. **141.** $(x^2-xy+y^2)(x+y)$.

142. $(z^2-2z+1)(6z+3)$. **143.** $(5y^2+6y-7)(4y-5)$.

144. $(2a^2b-3ab^2-4b^3)(a-2b)$.

145. $(16x^4+8x^2y^2+y^4)(4x^2-y^2)$.

146. $(4a^4-12a^2b^3+9b^6)(2a^2-3b^3)$.

147. $(2x^4+3x^3+4x^2+3x+2)(x-1)$.

148. $(a^2+2ab+b^2)(a+b)+(a^2-2ab+b^2)(a-b)$.

149. $(5x^2+4x-3)(4x-8)-(4x^2-3x-6)(5x+4)$.

150. $(a^4-a^3+a^2-a+1)(a+1)$. Проба за $a=3$.

151. $(a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)$. Проба за $a=3$.

152. $(a^3-a^2+a-1)(a+1)$. Проба за $a=4$.

153. $(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1)$. Проба за $a=2$.

154. $(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)(x+y)$.

155. $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x-y)$.

156. $(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)(x+y)$.

157. $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y)$.

158. $(x^{5m}-x^{4m}+x^{3m}-x^{2m}+x^m-1)(x^m+1)$.

159. $(x+1)(x+2)(x+3)$. **160.** $(x+3)(x-2)(x+4)$.

161. $(x+a)(x+b)(x+c)$. **162.** $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

163. $(3a^3-4a^2b+6ab^2-2b^3)(4a^2-3ab+b^2)$.

164. $(4x^3-3x^2+2x-1)(7x^3-5x^2+3x-1)$.

165. $(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$.

166. $(2a^2b-3ab^2-4b^3+5)(2a^2b-3ab^2+4b^3-5)$.

167. $(x^{4m}-2x^{3m}y^n+2x^{2m}y^{2n}-4x^my^{3n}+4y^{4n})(x^{2m}+2x^my^n+2y^{2n})$.

168. $(a^2-2ab+3b^2)(3a^2+ab-2b^2)(2a^3-3b^3)$.

169. $(4x^2-3x+2)(3x^2+2x-1)(x^2-2x-3)$.

170. $(a+b+c)^2$ **171.** $(3x-2y+z)^2$

172. $(y^2-4y+4)^2$. **173.** $(ax^2+by^2+c)^2$.

174. $(2x+3y)^3$. **175.** $(5x^2-1)^3$. **176.** $(3x^3-5)^3$.

177. $(ax^2-by^2)^3$. **178.** $(8a^2+7b^2)^3$. **179.** $(ax^m-by^n)^3$.

180. $(a+b+c)(a-b+c)-(a+b-c)(a-b-c)$.

181. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$.

182. $(a+b+c)^2(a-b-c)(a+b-c)$.

183. $(a+b+c)^2(c-a-b)(a-b-c)$.

184. $(a^2-4a-6)(a^2-4a+6)(a^2+4a-6)$.

185. $(a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2)\times$
$(a^2+2ab+2ac+b^2-2bc+c^2)$.

186. $[x^2+(a+b)x+(a^2+b^2)][x^2-(a-b)x+(a^2-b^2)]$.

187. $6x\{x-x[3x-(x-1)^2]-x(x+1)(x-1)\}-x$.

188. $[x^3-(x-1)^3][x^4-(x-1)^4]$. Проба за $x=3$.

189. $(x+1)(x-1)(x^2+1)-(x-1)(x+1)^3$.

190. $25x^3+8x^2-[7-(3x-2)x-(2x-2)(2x+2)]3x$.

191. $10a^2b-13ab^2-(2a-3b)[(2a-3b)(3a-2b)-(7a^2-3b^2)]$.

192. $[2a^2+(b^2-c^2)][2a^2-(b^2-c^2)]-[(2a-b)^2]^2-$
$-(2a-b)^3(a+b)$.

193. $x^9-\{[4x^4-(4x^2+1)(4x^2-1)]x^2-(2x^3-1)^3\}$.

194. $a^3-[a^2+a(2a-b)-(a-2b)^2](a-b)$. Проба за
$a=2,\ b=1$.

195. $(x^2-2x-1)^2-x(2x-1)^3-8x^2(x+1)(1-x)$.

196. $(2x^2-3x-4)^2-x(x-2)^3-(x-2)^2(x+2)^2$.

197. $2x(x-5)(x+5)-x^2(x-6)-(x^2-6x-1)(x-3)$.

198. $2a[3b(a-1)-2]-3a(2a-b)-a(2a-3)(3b-1)$.

199. $x^4-x^2(2x-1)(2x+1)-(3x-2)^3(3-x)$.

200. $x^3-[(a^2+1)x^2-a^2(x^2-1)]-(a^2-1)(x^2-1)$.

201. Нека локомотива прелази за 1 час $(3n-5)$ км. у току од $(n-2)$ часа. Затим повећа брзину за сваки час у $(n+2)$ км, па с том повећаном брзином путује још $(n+3)$ часа. Колики је пут укупно прешла?

Замени у датим изразима $A=5x-3y$, $B=2x-1$, $C=1-2y$ па их онда израчунај:

202. $2AB-3AC-BC$; **203.** $(A^2-2BC)(B-C)$;

204. $AB-C^2$; **205.** $(A^2-B^2)C-(B^2+C^2)A$.

Издвој заједнички чинитељ:

206. $(4a^2-9b^2)(2a+3b)-(2a-3b)^2(2a+3b)$.

207. $(a-b)-(a-b)^2-(a^2-b^2)$.

208. $(x-2)^3-(x^2-4)-(x-2)^2-x+2$.

209. $(x^2+1)(x-1)-x(x^2-1)+x^2(x-1)+x-1$.

210. $12(2x-3y)(2a+b)+3(x-y)(a+b)-3(2x-3y)(a+b)$. $-12(x-y)(2a+b)$.

6. Множење алгебарских бројева

1. $8.(-3)-(-5).(-6)-9.(-2)+(-7).(-5)$.

2. $(7-9).(-2)-(8-10)(-3)-(-1-3).(-2).(-3)$.

3. $3ax.(-4ay).(-2bx).ab.(-5bx)$.

4. $a^2xy.(-mx^2).ny^2.(-bz^2).(-bmx).(-bny)$.

5. $2ax.(-6by)-(-8bx).(-ay)+(-3ab).(-7xy)$.

6. $a^{2m-4}b^{3n+2}.(-a^m b^{n-4})$. **7.** $3bx^{2n}.(-4b^2x^{2n-2}).2bx^2$.

8. $(-2z)^3$. **9.** $(-4xy)^3$. **10.** $(-2x^2y)^4$.

11. $(-2x^2)^2.(-3x)^3.(-4)^4.(-5)^5.(-1)^6$.

12. Израчунај израз $x^2-6x-16$ за $x=+8$ и за $x=-2$.

13. $8x+(2x-3y).(-4)$. **14.** $(7a^2-4b^2).(-2b^2)+14a^2b^2$.

15. $(6x^2-5z^2)(-2xy^2z)+3xy^2.[-(3z^3-4x^2z)]$.

16. $(5-7x+6x^2).(-3x^2)+(9x^3+4x^2-x)2x$.

17. Не разграђујући, израчунати за $x=-2$, $y=-3$, $z=-4$: $(x-1)^3(y+1)^4-(x-2)(y-3)(z-4)$.

18. $a-(a-9).3-(a-8).2-(a-7)(a-6)$. Проба за $a=2$.

19. $(x-y)z-y(x-z)+x(y-z)-(x-y)(x-z)-(x-y)(y-z)-(y-z)(x-z)$. Проба за $x=1$, $y=2$, $z=3$.

20. $(a-b).(-c)-(a-c).(-b)-(b-c).(-a)$. Проба за $a=-95$, $b=-72$, $c=-49$.

21. $1-5.[5^2-(-15)^2][2-(-2)^3]$.

22. $$(n+2)(n+3)(n+4)-\left\{24\left[n-\frac{1}{2}(n-1)\right]\times\left[n-\frac{2}{3}(n-2)\right]\left[n-\frac{3}{4}\left(n-1\frac{1}{3}\right)\right]\right\}.$$

Изврши пробу:

23. У зад. 149. чл. 5 за $x=-2$.

24. У зад. 150. чл. 5 за $a=-1$.

25. У зад. 151. чл. 5 за $a=-1$.

26. У зад. 152. чл. 5 за $a=-3$.

27. У зад. 154. чл. 5 за $x=-2$, $y=-1$.

28. У зад. 159. *a)* чл. 5 за $x=-1$; *b)* за $x=-4$.

29. *a)* у зад. 180, 181, 182 и 183. чл. 5. за $a=-1$, $b=-2$, $c=-2$.

30. У зад. 186. чл. 5, за $x=-2$, $a=-1$, $b=-3$.

31. $(-2)^3.(-5)^2-(-2^3).(-5^3)$.

32. $(-a)^2.(-b)^3-(-a^3)(-b^2)+(-a)^3(-b)^2-a^2(-b^3)$.

33. За које ће вредности од x бити дати изрази *a)* једнаки с нулом, *b)* негативни:

1) $x(x+5)$; 2) $x(x-5)$; 3. $(x+5)(x+2)$;
4) $(x+1)(x-2)$; 5) $(x-1)(x+2)$; 6) $(x-1)(x-2)$.

34. Замени у $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ у место $b \dots -b$.

35. Изведи из резултата у задатку 161. чл. 5 непосредно резултате за ове задатке:

a) $(x+a)(x-b)(x+c)$, *b)* $(x-a)(x+b)(x-c)$,
c) $(x-a)(x-b)(x+c)$, *d)* $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Помножи:

36. 1) $\begin{array}{r}7>5\\ +a=+a;\end{array}$ 2) $\begin{array}{r}+a<+b\\ 5<7;\end{array}$ 3) $\begin{array}{r}+a>+a-1\\ +m>+n.\end{array}$

37. 1) $\begin{array}{r}8>5\\ -3=-3;\end{array}$ 2) $\begin{array}{r}8>5\\ -9<-3;\end{array}$ 3) $\begin{array}{r}8>5\\ -a>-b.\end{array}$

38. 1) $\begin{array}{r}-8>-12\\ -3>-7;\end{array}$ 2) $\begin{array}{r}-7>-9\\ 3=3;\end{array}$ 3) $\begin{array}{r}-7>-9\\ 3<5.\end{array}$

7. Дељење апсолутних целих бројева

$$\mathbf{ab:c=?};\quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}.\mathbf{c=?};\quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}:\mathbf{c=?};\ \mathbf{a:bc=?}$$

$$\mathbf{a}.\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}=?;\quad \mathbf{a}:\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}=?;\quad \mathbf{a^m:a^n=?}.$$

На основу дефиниције дељења и последица чл. **39.** и **40.** израчунај x из једначина:

1. $a)$ $x.4=12;$ $\qquad$ $b)$ $3ax=6a^3.$

2. $a)$ $\dfrac{x}{12}=4;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{x}{4ab}=b.$

3. $a)$ $\dfrac{12}{x}=4;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{4ab}{x}=b.$

Израчунај тако исто израз у којем се x налази, па онда и само x:

4. $a)$ $\dfrac{x}{4}.7=56;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{x}{a}.b=8ab^2.$

5. $a)$ $\dfrac{5x}{9}=15;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{xa}{b}=c.$

6. $a)$ $\dfrac{5}{x}.4=20;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{a^2}{x}.b^2=ab^2.$

7. $a)$ $\dfrac{60}{5x}=4;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{12ab}{cx}=a.$

8. $a)$ $8x-5=27;$ $\qquad$ $b)$ $ax+ab=5ab.$

9. $a)$ $40-3x=1;$ $\qquad$ $b)$ $7a-2x=a.$

10. $a)$ $3(x-2)=15;$ $\qquad$ $b)$ $a(x-b)=c.$

11. $a)$ $\dfrac{x+4}{3}=3;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{a-x}{b}=c.$

12. $a)$ $\dfrac{10}{x+4}=2;$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{b}{x-a}=c.$

13. Упрости: $a)$ $13(a+b):(a+b);$ $b)$ $\dfrac{m}{x-y}(x-y).$

14. $a)$ $\left(\dfrac{a}{b}+1\right).b;$ $\qquad$ $b)$ $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-1}{b}+\dfrac{2a+3}{b}\right).b.$

15. $a-\left(\dfrac{b}{m}+\dfrac{c}{m}\right)m.$ $\qquad$ **16.** $a-\left(\dfrac{2a-b}{m}-\dfrac{a-2b}{m}\right)m.$

17. $3a-2b-\dfrac{a+b}{m}.m+\dfrac{a-2b}{m+n}(m+n).$

18. $\left(\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{a}{x}+1\right)x^2.$ $\qquad$ **19.** $\left(\dfrac{a^3}{x^3}-\dfrac{a^2-1}{x^2}-\dfrac{a+1}{x}+1\right)x^3.$

---

20. $x^5:x^3.$ $\qquad$ **21.** $a^4:a.$ $\qquad$ **22.** $(2a+b)^{12}:(2a+b)^9.$

23. $x^m:x^3.$ $\qquad$ **24.** $a^{m+n}:a^n.$ $\qquad$ **25.** $a^{m+n}:a^{m-n-1}.$

26. $15a:5.$ $\qquad$ **27.** $2a(m-1):a.$ $\qquad$ **28.** $50ab:2a.$

29. $12x^6:3x^4.$ $\qquad$ **30.** $7a^2y^4:ay^4.$ $\qquad$ **31.** $66a^9b^7:11a^7b^7c^2.$

32. $9a^2b^2x:3abx.$ $\qquad$ **33.** $(x+y)(x-y):(x-y)(y-x).$

34. $28a^5m^2y^4:7a^4my^2.$ $\qquad$ **35.** $20a^mb^nx^p:5a^{m-1}b^{n-2}x^{p-3}.$

36. $\dfrac{2a}{b}.c.$ $\qquad$ **37.** $\dfrac{a}{b}.bm.$ $\qquad$ **38.** $\dfrac{a}{bc}.abc.$ $\qquad$ **39.** $\dfrac{16ax^m}{25by^{2n}}.5y^n.$

40. $\dfrac{3a}{4(a+b)}.9(a+b).$ $\qquad$ **41.** $\dfrac{8(a+2b)^2}{9(2a-b)}.3(a+2b).6(2a-b)^2.$

42. $\dfrac{5ax}{7b}:x.$ $\qquad$ **43.** $\dfrac{15a^3b^2}{4mn}:5a^2b.$ $\qquad$ **44.** $\dfrac{6a^2x^4}{5by}:3ax^2.$

45. $\dfrac{1}{x}:x.$ $\qquad$ **46.** $(15x^2y^2:5x):3y.$ Проба: $x=y=2.$

47. $\dfrac{2(a-b)}{a+b}:8(a^2-b^2).$ $\qquad$ **48.** $3x^2y.\dfrac{2z}{3xy}.$

49. $4a^2bc^2.\dfrac{5x}{2a^2b^2c}.$ $\qquad$ **50.** $\dfrac{ab}{c^2}.\dfrac{ac}{b^2}.\dfrac{bc}{a^2}.$

51. $\dfrac{3x}{4y}.\dfrac{x+y}{18x^2}.\dfrac{12y^2}{x+y}.$ $\qquad$ **52.** $\dfrac{3(a+b)}{4a}.\dfrac{12a^2}{a-b}.\dfrac{a+b}{a-b}.$

53. $x:\dfrac{x}{y}.$ Проба: $x=8,\ y=2.$ **54.** $y:\dfrac{x}{y}.$ Проба: $x=8,\ y=4.$

55. $xy:\dfrac{x}{y}.$ Проба: $x=6,\ y=3.$ $\qquad$ **56.** $5a^4:\dfrac{a^2}{b^2}.$

57. $b^2+\left[(b^2+c^2):\dfrac{b^2+c^2}{a^2-b^2}\right].$ $\qquad$ **58.** $\dfrac{xy}{z}:\dfrac{xz}{y}.$

59. $m^2n^2:\dfrac{mp}{n}:\dfrac{np}{m}.$

60. $[(a+b)x^2:(a-b)y^2]:[x:(a-b)y].$ Пр.: $a=x=2,\ b=y=1.$

61. $\dfrac{x^2y^2}{z^2}:\left[\left\{\left(\dfrac{xy}{z^2}:\dfrac{yz}{x^2}\right):\left(\dfrac{yz}{x^2}:\dfrac{y^2}{xz}\right)\right\}:\dfrac{y}{z}\right].$

Види даље у чл. **11.**

$$\frac{\mathbf{a} \pm \mathbf{b}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{m}} \pm \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{m}};$$ Обрнуто.

62. $(ax + bx):x.$ **63.** $(8x + 8):8.$

64. $(a^2b + ab^2):ab$ **65.** $(12a^3x^2 + 9ax^4):3ax^2.$

66. $\frac{a+b}{n} + \frac{a-b}{n}$ **67.** $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{3x+2}{x+1}.$

68. $\frac{b}{4} - \frac{c}{4}.$ **69.** $\frac{9x}{4a} - \frac{5x}{4a}.$

70. $\frac{a+b}{m} - \frac{a-b}{m}.$ **71.** $\frac{8x-3}{2y+1} - \frac{4y-5}{2y+1}.$

72. $\frac{3x-2y}{x+y} + \frac{4x+3y}{x-y} - \frac{3x+5y}{x-y}.$ Проба за $x=4,\ y=2.$

73. $\frac{17x+12y}{x+y} - \frac{3x-7y}{x+y} + \frac{2x-3y}{x+y}.$

Даље види чл. **11.**

74. $(45am - 25bm + 35cm):5m.$

75. $(2a^3 - 6a^2b + 30ab^2):2a.$ Проба за $a=5,\ b=2.$

76. $(5m^4x - 4m^3x^2 - 3m^2x^3):m^2x.$ Проба: $m=3,\ x=2.$

Издвој заједнички чинитељ:

77. $60x^5y^3 - 48x^4y^4 - 36x^3y^5.$ **78.** $45a^{m+2} - 36a^{m+1} + 63a^m.$

79. $35a^8y^2 - 70a^6y^4 + 105a^4y^6 - 35a^2y^8.$

Дељење два полинома

80. $(6am - 12bm + 5an - 10bn):(6m + 5n).$

81. $(a^2 + 2ab + b^2):(a + b).$ **82.** $(x^2 - 2xy + y^2):(x - y).$

83. $(4x^2 - 9y^2):(2x - 3y).$ **84.** $(16a^2 - b^2):(4a - b).$

85. $(x^{2m} - y^{2n}):(x^m - y^n).$ **86.** $(81m^8 - 16n^6):(9m^4 + 4n^3).$

87. $(a^6 + b^6):(a + b).$ Проба: $a=3,\ b=2.$

88. $(a^6 + b^6):(a - b).$ Проба: $a=4,\ b=1.$

89. $(a^6 - b^6):(a + b).$ Проба: $a=3,\ b=2.$

90. $(a^6 - b^6):(a - b).$ Проба: $a=4,\ b=1.$

91. $(a^5 + b^5):(a + b).$ Проба за $a=3,\ b=2.$

92. $(a^5 - b^5):(a - b).$ Проба за $a=4,\ b=1.$

Који закони владају код количника 87 до 92? Кад је збир или разлика двају једнаких степена два броја дељива збиром или разликом тих бројева?

93. $(x^{2m} - y^{2m}):(x + y).$ **94.** $(x^{2m} - 1):(x + 1).$

95. $(x^{2m} - y^{2m}):(x - y).$ **96.** $(x^{2m} - 1):(x - 1).$

97. $(x^{2m+1} + y^{2m+1}):(x + y).$ **98.** $(x^{2m+1} + 1):(x + 1).$

99. $(x^{2m+1} - y^{2m+1}):(x - y).$ **100.** $(x^{2m+1} - 1):(x - 1).$

101. $(a^{7m} + 1):(a^m + 1).$ **102.** $(81x^8 - 16y^8):(3x^2 - 2y^2).$

У задацима **103—110** одредити количник не вршећи дељење:

103. $(8a^3 + 1):(2a + 1).$ **104.** $(8 - 27a^6):(2 - 3a^2).$

105. $16a^4 - 1):(2a - 1).$ **106.** $(81a^4 - 16b^4):(3a + 2b).$

107. $(a^5 + 1):(a + 1).$ **108.** $(32a^5b^5 - 1):(2ab - 1).$

109. $(a^6 + b^6):(a^2 + b^2) = [(a^2)^3 + (b^2)^3]:(a^2 + b^2).$

110. $[(a^2 + b^2)^3 - c^6]:(a^2 + b^2 - c^2).$

Представи полиноме 111—116 као количнике:

111. $x^2 + x + 1.$ **112.** $x^2 - 2x + 4.$

113. $4x^4 + 2x^2 + 1.$ **114.** $8x^3 + 4x^2 + 2x + 1.$

115. $x^3 - 3x^2 + 9x - 27.$ **116.** $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$

117. $(14x^2 - 31x + 15):(2x - 3).$

118. $(1 - 2x + x^2 - 6x^4 + 8x^6):(1 - 2x).$

119. $(6x^4 - 11x^3 - 9x^2 + 19x - 5):(3x - 1).$

120. $(3a^2x^2 - abxy - 2b^2y^2):(ax - by).$

121. $(20a^5 - 18a^4b + 4a^3b^2):(4a^2 - 2ab).$

122. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20):(2a - 5).$

123. $(x^{3m} + x^{2m}y^n - x^my^{3n} - y^{4n}):(x^{2m} - y^{3n}).$

124. $(x^3y^{3m} - x^{n+1}y^{2m+2} + x^{2n+2}y^{m+1} - x^{3n}y^3):(x^2y^m - x^ny^2).$

125. $(m^4 - 2m^2n^2 + n^4):(m^2 + 2mn + n^2).$

126. $(6a^4 - 5a^3 + 4a^2 + 11a - 4):(2a^2 - 3a + 4).$

127. $(12x^4 - x^3y - 32x^2y^2 + xy^3 + 20y^4):(4x^2 + xy - 5y^2).$

128. $(2 - 7x + 16x^2 - 25x^3 + 24x^4 - 16x^5):(2 - 3x + 4x^2).$

129. $(15a^4 + 8a^3b - 41a^2b^2 + 10ab^3 + 8b^4):(5a^2 + 6ab - 8b^2).$

130. $(63y^8 + 10a^2y^6 - 155a^4y^4 + 10a^6y^2 + 63a^8)$
$:(9y^4 - 5a^2y^2 - 7a^4).$

131. $(49a^6 + 6a^4 - 51a^2 - 25):(7a^3 - 6a^2 + 3a - 5).$

132. $(4x^6 + 15x^4y^2 + 10x^2y^4 - 9y^6):(2x^3 + x^2y + 4xy^2 + 3y^3).$

133. $(4 + 5a - 16a^2 - 4a^3 + 4a^4 - 5a^5 + 4a^6)$
$:(4 - 3a + 2a^2 - a^3).$

134. $(32 + 104x + 100x^2 + 26x^3 - 13x^4 + x^5)$
$:(8 + 12x + 6x^2 - x^3).$

135. $(27a^6 - 33a^5b - 45a^4b^2 + 71a^3b^3 - 36ab^5 + 16b^6)$
$:(9a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 4b^3).$

136. $[\{x^3 + (a + b - c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc\}:(x + a)]$
$:(x - c).$

137. $\{(120 - 326x + 329x^2 - 146x^3 + 24x^4):(4 - 3x)\}$
$:(6 - 7x + 2x^2).$

138. $(2 - 7x + 16x^2 - 17x^3 + 12x^4):\{(2 - 7x + 12x^2 - 9x^3)$
$:(2 - 3x)\}.$

---

8. **Дељење алгебарских бројева** (чл. 50.)

1. $\frac{16}{-2}+\frac{-12}{-3}-\frac{-18}{6}+\frac{20}{-5}$.

2. $(-5).\frac{-18}{-15}+\frac{20}{(-4):(-2)}-\frac{(-4).(-8).(-9)}{(-2).(-6)}$.

3. $\frac{(-2)^3.(-3^3)}{-12}-\frac{(-8).(-9).(-10)}{(-3).(-5)}-\frac{(-3)^3}{(-1)^4}$.

Изврши пробу:

4. У зад. 72, чл. 7, за $x=2,\ y=3$.

5. У зад. 73, чл. 7, за $x=-3,\ y=2$.

6. Израчунај $a+\frac{a-7}{6}-\frac{3-2a}{-5}$ за $a=19$.

7. Израчунај $\frac{x-14}{5-x}-x+\frac{x-10}{7-x}-\frac{5(x-2)}{3(6-x)}$, за $x=8$.

8. Тако исто $\frac{(x-1)^2}{(y-1)^2}-\frac{(x+1)^3}{(y+2)^3}$, за $x=-3,\ y=-1$.

9. Израчунај $\frac{x^4-1}{x-2}-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)}$, за $x=-3$.

10. За које ће вредности од x бити негативни изрази:
a) $(x+5):x$; b) $(x+7):(x+2)$; c) $(x-7):(x+2)$;
d) $(x-7):(x-2)$.

11. Напиши дате количнике у другом облику с негативним и с позитивним знацима: a) $\frac{a-b}{-c-d}$; b) $\frac{a^2-2a-1}{1-3a-2a^2}$.

12. Преиначи: a) $-\frac{x-1}{3}$; b) $-\frac{4}{b-a}$; c) $-\frac{1}{1-a}$;
d) $-\frac{a-2b}{-a-2b}$.

13. Упрости: a) $\frac{a-b}{b-a}$; b) $\frac{x-1}{1-x}$; c) $\frac{a^2-b^2}{b-a}$;
d) $\frac{(a-b)(a^2-1)}{(b-a)(1-a)}$; e) $\frac{(-a)^3(a-2b+3c)}{(-a)(2b-a-3c)}$.

14. $(-25\,a^{m+n}b^p):(-5a^nb^{p-q})$.

15. $32x^{m-2n+3p}y^{2m-n-p}:(-8x^{m-3n+4p}y^{m-n-2p})$.

16. $(24a^3b^3-15a^4b^2):(-3a^3b^2)$. Проба за $a=3,\ b=-2$.

17. $(18am^2y^3-27bmy^2+36cy):(-3y)$.

18. $(30x^4+2x^3-16x^2+10x-2):(-5x^2+3x-1)$.

19. $(27-51x-125x^2-2x^3+30x^4):(-3+8x+6x^2)$.

20. $(1-15x+72x^2-54x^3-405x^4-243x^5):(-1+6x+9x^2)$.

---

9. **Бројне системе** (чл. 51—54).

1. Преобрати бројеве из системе са основом што је уз њих назначена у декадне бројеве:
a) *211021220 [3]*; b) *103223013 [4]*;
c) *852076 [9]*; d) *58329 [12]*.

2. Претвори декадни број *2897* у број a) системе *[2]*, b) системе *[5]*, c) системе *[6]*, d) системе *[8]*.

3. Претвори
a) *520613 [7]* у број системе *[4]*;
b) *12112012 [3]* „ „ „ *[8]*;
c) *110100101 [2]* „ „ „ *[5]*.

---

10. **Дељивост бројева**

Одреди највећи заједнички делитељ за дате бројеве спомоћу верижног дељења (чл. **56**, **59**, **68**):

1. *637* и *4277*; **2.** *2091* и *1353*;
3. *1404* и *8658*; **4.** *3552* и *5143*;
5. *7774* и *3718*; **6.** *27671* и *21708*;
7. *14539* и *25728*; **8.** *55660* и *66055*;
9. *39215* и *73997*; **10.** *24955* и *338625*;
11. *1701*, *6426*, *10521*; **12.** *120582*, *145530*, *167706*.
13. $12a^2+7a+1$ и $6a^2+11a+3$.
14. $x^3-49x-120$ и $x^2+10x+25$.
15. $x^4-10x^2y^2+16y^4$ и $x^4+2x^2y^2-80y^4$.
16. $a^3-a^2b+3ab^2-3b^3$ и $a^2-5ab+4b^2$.
17. $x^6+6x^4+5x^2-12$ и $x^6+4x^4+x^2-6$.
18. $6x^3-19x^2+12x-5$ и $3x^3-11x^2+7x-3$.
19. $8x^3+22x^2+27x+18$ и $6x^3+5x^2-8x-3$.
20. $6y^3+16y^2-22y+40$ и $9y^3-27y^2+35y-25$.
21. $28a^4+10a^3+39a^2+7a+15$ и $14a^3-37a^2+15a-25$.
22. $3z^4-8z^3+11z^2-8z+3$ и $2z^3-9z^2+9z-7$.
23. $15x^4+10x^3y+4x^2y^2+6xy^3-3y^4$ и
$12x^3+38x^2y+16xy^2-10y^3$.
24. $6x^5-4x^4-11x^3-3x^2-3x-1$ и
$4x^4+2x^3-18x^2+3x-5$.
25. $3x^2+11x-20,\ 2x^2+5x-25,\ x^2+2x-15$.
26. $7x^3+2x^2+2x-5,\ 5x^3+3x^2+3x-2,\ 3x^3-4x^2-4x-7$.
27. $4x^4-15x^2+9,\ 3x^4-10x^2+3,\ 2x^4-3x^2-9$.
28. $a^3+2a^2b-4ab^2-8b^3,\ a^3-6a^2b+4ab^2+8b^3,\ a^3-8b^3$.

29. $6x^4-5x^2-1,\ 5x^3-4x-1$ и $2x^2-2$.
30. $a^4-4a^3+8a^2-4a+7,\ a^4-2a^3+10a+7$ и $a^3-5a^2+11a-7$.

Растављање на чинитеље (чл. 60—65.)

31. Испитај, да ли су дати бројеви прости бројеви:
a) 1001, b) 1003, c) 1007, d) 1009.

Растави на просте чинитеље бројеве:

32. a) 420; b) 504; c) 1260; d) 1664; e) 2025.
33. a) 2268; b) 3075; c) 3828; d) 5376; e) 10528.
34. a) 9; b) 99; c) 999; d) 9999; e) 99999.
35. a) $76a^3$; b) $66ab^2$; c) $26x^2y^2$; d) $72a^3b^2$; e) $60ax^2z^4$.

Одреди све просте и све сложене чинитеље бројева:

36. a) 48; b) 210; c) 315; d) 360; e) 810.
37. a) $18ab$; b) $36x^2$; c) $27mx^2$; d) $165xyz$; e) $114an^2x^3$.

Растави на два чинитеља по чл. **65,** 1:

38. $7x-14xy$. **39.** $27x^3-9x^2$.
40. $18ab-15ac$. **41.** $9x^2-24xy$.
42. $4a^2+4$. **43.** $15a^4-5a^3$.
44. x^m+x^{m-2}. **45.** $x^{n+2}+x^n$.
46. $2a^4-4a^3+6a^2$. **47.** $ax^4y^2+bx^3y^3+cx^2y^4$.
48. $a^3b^2x-a^2b^2x^2+ab^2x^3$. **49.** $5x^3z^2-15x^2z^3-25xz^4$.
50. $2x(a-3b)-(a-3b)$. **51.** $n(x-y)-x+y$.
52. $ax+ay+bx+by$. **53.** $ab-bx+a-x$.
54. x^3+x^2+x+1. **55.** $a^3-a^2b+ab^2-b^3$.
56. $x^2+ax+bx+ab$. **57.** $x^2-ax+bx-ab$.
58. $30ab^2+5ac^2-24b^3-4bc^2$.
59. $22ax^2-18a^3+9a^2x-11x^3$.
60. $7x-7(2x-y)$. **61.** $(m-1)a-a^2$.
62. $(m-3)a^2-a$. **63.** $(a+b)x-(a-b)x$.
64. $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$.
65. $3(a-b+c)x-5(a-b-c)x$.
66. $a(b+c)+b+c$. **67.** $3m(x-y)+2n(y-x)$.
68. $3x(2x-3y)-2y(3y-2x)-2x+3y$.
69. $3(2m-3n)(x-y)-4(m-n)(x-y)-5(4m-3n)(x-y)$.
70. $7x(x-2y)(2x-y)-5y(4x^2-y^2)-3(x-2y)(4x^2-4xy+y^2)$.
71. x^2-y^2+x+y. **72.** $x^2-x+y-y^2$.
73. $x^2-1-(x+1)^3$. **74.** $x-1-(x-1)^3$.
75. $(a-b)(2a+1)-(a-b)(2b+3)-a+b$.

Растави на чинитеље по чл. **65,** 2:

76. $9b^2-12b+4$. **77.** $y^2+10y+25$. **78.** $x^2-6xy+9y^2$.
79. $9a^2-3ab+\frac{b^2}{4}$. **80.** $2x^4-4x^3+2x^2$.
81. $16a^5+48a^4+36a^3$. **82.** $4x^2-1$. **83.** $9a^2-16b^2$.
84. x^3y-xy^3. **85.** x^3+x^2-4x-4. **86.** $a^2-(b-c)^2$.
87. $(b+c)^2-a^2$. **88.** $a^2+2ab+b^2-c^2$.
89. $a^2-2ab+b^2-c^2$. **90.** $a^2-b^2-2bc-c^2$.
91. $a^2-b^2+2bc-c^2$. **92.** $9a^2-(2a-3b)^2$.
93. $16(3a-2b)^2-25(a-b)^2$.
94. $(a-b)^3+2a^2b-4ab^2+2b^3$.
95. $x^5-x^3-x^2+1$. **96.** $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$.
97. $a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac-bd)$.
98. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$.
99. $(x^2-y^2)(x+y)+2xy^2-2x^2y$.
100. $(a+b)(a^2-c^2)-(a-c)(a^2-b^2)$.
101. x^3+1. **102.** x^4-y^4. **103.** $a^4-(b+c)^4$.
104. $4-x^2+4x^3-x^5$. **105.** $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.
106. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
107. $27x^3+8$. **108.** x^5+1. **109.** $32x^5-1$.
110. $x^6\pm y^6$. **111.** x^6+1. **112.** $64a^6+343b^9c^3$.
113. $64a^6+729$. **114.** $x^{10}+y^{10}$.
115. x^8-1. **116.** $x^{12}+y^{12}$.

Дељивост декадних бројева (чл. 66.)

Којим су од датих бројева 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 25, 100, 125, 1000, $12=3.4$, $15=3.5$, $18=2.9$ дељиви бројеви:

117. a) 312; b) 6225; c) 17280; d) 71016; e) 948656?
118. a) 720; b) 6472; c) 76450; d) 484572; e) 567000?
119. a) 534; b) 8625; c) 10692; d) 734520; e) 350496?

Одреди растављањем на чинитеље највећи заједнички делитељ бројева:

120. a) 84 и 308. b) 360 и 680.
121. a) 108, 450 и 540. b) 560, 620 и 760.
122. a) 693, 819 и 945. b) 504, 756, 1260 и 1764.
123. $12acx$, $14a^2x$ и $16ax^2$. **124.** $10x^2y^4$, $5x^3y^3$ и $20x^4y^2$.
125. $m^2+2mn+n^2$ и m^2-n^2.
126. $a^2+4ab+4b^2$ и $a^2+2ab-3ab^2-6b^3$.
127. $8x^4y^2-32x^2y^4$ и $12x^4y-96xy^4$.

128. $12x^3y^2-12x^2y^3$, $18x^4y^2-18x^2y^4$ и $24x^3y-48x^2y^2+24xy^3$.

129. $a^4b^2-a^2b^4$, a^4-a^2b и a^4-a^3b.

130. $8a^5b^2-8a^3b^4$ и $4a^4b^2-8a^3b^3+4a^2b^4$.

131. $(2a+b)^2-(a-b)^2$ и a^4+8ab^3.

Одреди растављањем на чинитеље најмањи заједнички дељеник бројева:

132. 300 и 620. **133.** 240 и 486.

134. 120, 168 и 182. **135.** 105, 144 и 270.

136. 3, 4, 6, 10 и 25. **137.** 2, 5, 9, 20, 21 и 24.

138. 4, 5, 6, 12, 18, 25, 70. **139.** 10, 12, 14, 15, 16, 18, 21.

140. 4, 6, 7, 28, 35, 40 и 56. **141.** 8, 12, 16, 24, 32, 36, 256.

142. a, $2a^2$, $3ab^3$, $12abm$. **143.** $6amn$, $10am^2n$, $5a^2n^2$.

144. m, $5m^2$, $3n$, $8mn$ и $15m(m-n)$.

145. $3x$, $x-2$, $5(x+2)$, $20(x^2-4)$ и $6(x+2)^2$.

146. $3a^2-3ab$, $6ab-6b^2$ и $9a$. **147.** x^3-xy^2, x^2y-xy^2 и xy^2.

148. $a^4-a^2b^2$, $(a-b)^2$ и a^2-ab.

149. $(a+b)^2$, a^2-b^2 и $(a-b)^3$.

150. $4a^3-a$, $8ab+4b$ и $16a^2b^2$.

151. $3x^3y-3x^2y$, $2x^2y^2+2xy^2$, $4x^4-8x^3+4x^2$ и $2x^3-4x^2+2x$.

152. $6x^2-3x$, $24x^4-6x^2$ и $12x^5-12x^4+3x^3$.

153. $a-b$, a^2-b^2 и a^3-b^3. **154.** $(x-1)^3$ и x^3-1.

155. x^3-y^3, x^4-y^4 и x^6-y^6.

156. a^3-b^3, a^3+b^3 и a^2-b^2.

157. x^2+2x, x^2-4 и x^2+4x+4.

158. a^3+8b^3, $a^3+2a^2b-4ab^2-8b^3$ и a^3-8b^3.

Овде се могу придружити и задаци прећашње групе под бр. 122, 123, 126, 127, 128, 129 и 130.

Одреди најмањи заједнички дељеник спомоћу највећег заједничког делитеља (чл. **70**):

159. 874 и 943. **160.** 561 и 1530.

161. 1716 и 2222. **162.** 6987 и 8083.

163. 816, 765, 697. **164.** 259, 3219 и 7548.

165. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ и $2(x^2-y^2)$.

166. $a^3-19a-120$ и $a^2+10a+25$.

167. $6x^3-13x^2-45x-25$ и $x^3+2x^2-20x-25$.

168. $a^4+3a^3+6a^2+5a+3$ и a^3+2a^2+2a+1.

169. $2a^5-a^4-2a^3-2a^2-4a-1$ и $2a^6-a^5-5a^3-5a^2-a$.

170. $21x^3+20x^2-3x-2$, $6x^3-11x^2-12x+5$ и $3x^3-10x^2-9x+4$.

---

11. **Обични разломци**

Промена облика у разломака (чл. **76, 77.**)

1. Доведи разломак $\frac{a-1}{a+1}$ a) на бројитељ a^2-1, a^4-a; b) на именитељ $2a^3-2a$, a^5+1.

2. Доведи разломак $\frac{x-2}{x+2}$ a) на бројитељ x^4-4x^2, па онда на x^4-16; b) на те исте именитеље; c) разломак $\frac{b-3}{b^2-3b+9}$ на именитељ b^3+27; d) разломак $\frac{a-1}{a^2+a+1}$ на именитељ a^3-1; e) разломак $\frac{r+3}{r^2-6r+9}$ на именитељ $r^3-9r^2+27r-27$; f) разломак $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$ на именитељ x^6-y^6.

Доведи на најм. зај. именитељ разломке:

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$. **4.** $\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{13}{20}, \frac{8}{15}, \frac{11}{12}$.

5. $\frac{1}{a}, \frac{2m}{3ab}, \frac{5n}{6ax}, \frac{3p}{10by}$. **6.** $\frac{1}{2a}, \frac{3}{4a^2b}, \frac{5}{6a^3b}, \frac{7}{8a^2b^2}$.

7. $\frac{a-1}{a+1}, \frac{a-2}{a+2}, \frac{a-3}{a+3}$. **8.** $\frac{y+1}{y-1}, \frac{y-1}{y+1}, \frac{y^2+1}{y^2-1}$.

9. $\frac{1}{(a+b)^2}, \frac{2}{(a-b)^2}, \frac{3}{b^2-a^2}$.

10. $\frac{ax}{a+x}, \frac{2a^2x^2}{a^2-ax+x^2}, \frac{2a^2+x^2}{a^3+x^3}$.

11. $\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

12. $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1+a}{1-a}, \frac{1+a^2}{1-a^2}, \frac{1-2a+a^2}{1+2a+a^2}, \frac{1+2a+a^2}{1-2a+a^2}$.

13. Удеси дате разломке тако да им именитељи буду *двочлани:*

a) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$; b) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$; c) $\frac{x-1}{x^2+x+1}$;

d) $\frac{3a-2b}{9a^2-6ab+4b^2}$; e) $\frac{1}{x^3+x^2+x+1}$; f) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$.

Скрати разломке:

14. a) $\frac{45}{54}$; b) $\frac{114}{250}$; c) $\frac{840}{1020}$; d) $\frac{1824}{7008}$; e) $\frac{4096}{7424}$.

15. a) $\frac{5.12.18}{4.10.27}$; b) $\frac{6.12.20.28}{4.8.16.30}$; c) $\frac{6.21.24.36.75}{8.27.50.56.60}$.

16. a) $\frac{391}{989}$; b) $\frac{637}{819}$; c) $\frac{765}{5304}$; d) $\frac{2079}{7029}$; e) $\frac{9082}{67735}$.

17. Одреди вредност од $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$ за $n=6$, за тим за $n=8$, па скрати добивене разломке.

Скрати разломке:

18. a) $\frac{3abx}{12bmx}$; b) $\frac{12a^2x}{28ax^2}$; c) $\frac{15amx^3}{40bmx}$; d) $\frac{72mx^2y^3}{96nx^3y^2}$.

19. a) $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$; b) $\frac{2m^2-m}{4m^2-1}$; c) $\frac{x-x^3}{x^2+x}$.

20. a) $\frac{ab-b}{a^2-a}$; b) $\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$; c) $\frac{a^3-a^2y}{ay^2-y^3}$.

21. a) $\frac{25x^2-y^2}{5x^2+xy}$; b) $\frac{3a^2+a}{9a^2-1}$; c) $\frac{(2x^2+x)^2}{4x^3-x}$.

22. a) $\frac{16a^2-64}{(4a^2+8a)^2}$; b) $\frac{x^4-y^4}{x^3y+xy^3}$; c) $\frac{x^4-y^4}{y^2-x^2}$;

d) $\frac{ax-ab}{ax+3x-3b-ab}$.

23. a) $\frac{a^2+ab}{a^4+ab^3}$; b) $\frac{25x^3+20x^2y+4xy^2}{625x^4-16y^4}$; c) $\frac{ax+a-x-1}{ax-a-x+1}$;

d) $\frac{2ax-a+10x-5}{a-2ax-10x+5}$.

24. a) $\frac{9a+6b-3c}{12ax+8bx-4cx}$; b) $\frac{12x^3y^3-6x^2y^4}{8x^4y^2+4x^3y^3}$;

c) $\frac{2a-ab-b+2}{3a+ab+b+3}$; d) $\frac{a^6+a^4-a^2-1}{a^8-a^6+a^2-1}$.

25. a) $\frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$; b) $\frac{1+m-2m^2}{1+3m+2m^2}$; c) $\frac{8a^2-6a+1}{16a^2-10a+1}$;

d) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$.

26. a) $\frac{m^2+6m-16}{m^2+5m-24}$; b) $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+6xy+5y^2}$;

c) $\frac{a^2-8ax+15x^2}{a^2-11ax+30x^2}$; d) $\frac{a^2bc-b^3c+2b^2c^2-bc^3}{4a^2b^2-(a^2+b^2+c^2)^2}$.

27. a) $\frac{4x^3-12x^2y+12xy^2-4y^3}{6x^2-12xy+6y^2}$; b) $\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$.

28. a) $\frac{a^3-3a^2b+2ab^2-6b^3}{2a^3-4a^2b+4ab^2-8b^3}$; b) $\frac{a^2+ab-ac-bc}{a^2+ab+ac+bc}$.

29. a) $\frac{ab-ac-b^2+bc}{ab-ac-bc+c^2}$; b) $\frac{xy-x+yz-z}{1-3y+3y^2-y^3}$.

30. $\frac{a^3+1}{a^2-1}$. Пр.: $a=2$. **31.** $\frac{8a^3+1}{16a^4-1}$. Пр.: $a=1$. **32.** $\frac{(1+x)^3}{1+x^3}$.

33. $\frac{x^4-y^4}{x^6-y^6}$. **34.** $\frac{x^4-y^4}{x^6+y^6}$. **35.** $\frac{x^4+2x^3+4x^2}{x^6-8x^3}$.

36. $\frac{a^5-8a^2b^3}{a^6-4a^4b^2}$. **37.** $\frac{x^8-16}{x^6+4x^2}$. Пр.: $x=2$. **38.** $\frac{x^6-2x^5+x^4}{x^6-x^4}$.

Израчунај:

39. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ за $x=2$. **40.** $\frac{x^2-a^2}{2x^2-3ax+a^2}$ за $x=a$.

41. $\frac{x^2+6x-16}{x^2+5x-24}$ за $x=-8$. **42.** $\frac{x^2-6x+9}{x^2-8x+15}$ за $x=3$.

43. $\frac{x^5+x^3-8x^2-8}{x^4-2x^3+x^2-2x}$ за $x=2$.

44. $\frac{a+6}{a^2-16}-\frac{a+1}{a(a-4)}$ за $a=4$.

45. $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$ за $x=2$ и $y=2$.

Израчунај дате разломке за ону вредност x—са, за коју су они привидно неодређени:

46. a) $\frac{x-a}{x^2-a^2}$; b) $\frac{x-a}{x^3-a^3}$; c) $\frac{x+a}{x^3+a^3}$; d) $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

47. a) $\frac{x^3-1000}{x^2-100}$; b) $\frac{x^3+8}{x^4-16}$; c) $\frac{x^5-a^5}{x^4-a^4}$; d) $\frac{a^2-a-2}{a^2-4}$.

Сабирање и одузимање разломака (чл. 78.)

48. a) $\frac{a+4x}{3}+\frac{2a-x}{3}$; b) $\frac{5m+n}{4}-\frac{m-3n}{4}$.

49. $\frac{a+b+c}{3m}+\frac{a-b}{3m}+\frac{a-c}{3m}$.

50. $\frac{m-a}{m+n+p}+\frac{n-p}{m+n+p}+\frac{2p+a}{m+n+p}$.

51. $\frac{17a-15x}{12ax}-\frac{5x-3a}{12ax}+\frac{4a+x}{12ax}$.

52. $\frac{(a+b)^4}{8ab(a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^4}{8ab(a^2+b^2)}$.

53. $\frac{(a+b)^3}{2b(3a^2+b^2)}-\frac{(a-b)^3}{2b(3a^2+b^2)}$.

54. $a+\frac{b}{a}$. 55. $3x-\frac{5y^2}{2x}$. 56. $a+\frac{x^2-1}{x}$.

57. $x-\frac{x^2-1}{x}$. 58. $\frac{m+n}{2}-n$. 59. $1+\frac{a-b}{a+b}$.

60. $1-\frac{a-b}{a+b}$. 61. $\frac{(x+y)^2}{4xy}-1$. 62. $\frac{(x-y)^2}{4xy}+1$.

63. $x+y+\frac{2y^2}{x-y}$. Проба: $x=-3$, $y=-5$.

64. $a-1+\frac{a^2+1}{a+1}$. 65. $m+n-\frac{m^2+n^2}{m+n}$.

66. $a^2+b^2-\frac{a^4-2b^4}{a^2-b^2}$. 67. $1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$.

68. $1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. 69. $\frac{x^4+y^4}{2x^2y^2}+1$.

70. $\frac{x^4+y^4}{2x^2y^2}-1$. 71. $\frac{x^2+25}{x-5}-(x+5)$.

72. $\frac{x^2+25}{x-5}-(x-5)$. 73. $x^2-y^2-\frac{x^4-2x^2y^2-y^4}{x^2+y^2}$.

74. $x-1-\frac{4x^3-4x^2+x}{4x^2+4x+1}$.

75. $a^3+3a^2+3a+1-\frac{a^4+4a^3+6a^2+4a}{a+1}$.

---

76. $\left(\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{4}{5}c\right)+\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}c\right)$.

77. $\left(\frac{3}{4}x+\frac{7}{6}y\right)+\left(\frac{5}{3}x+\frac{4}{5}y\right)+\left(\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y\right)$.

78. $\left(\frac{2a}{3}-\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)-\left(\frac{a}{2}-\frac{2b}{3}+\frac{3c}{4}\right)$.

79. $\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{2xy}{3}+\frac{y^2}{9}\right)+\left(\frac{5x^2}{6}-\frac{3xy}{5}+\frac{7y^2}{12}\right)$.

80. $\left(\frac{5a^2}{4}-\frac{4ab}{3}+\frac{3b^2}{2}\right)-\left(\frac{4a^2}{5}-\frac{3ab}{4}-\frac{2b^2}{3}\right)$.

81. $\frac{3a+4}{3}-\frac{7a+5}{4}-\frac{8-7a}{6}+\frac{5-3a}{8}-\frac{3-7a}{12}$.

82. $\frac{5a-3b-4c}{9}-\frac{3a-2b-c}{4}-\frac{4a-7b-4c}{12}-\frac{4c-2a-3b}{6}$.

83. $\frac{13x-12y}{8}-\frac{14x-15y}{9}-\frac{2y-x}{24}$.

84. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2$. 85. $1-\frac{a}{2b}-\frac{b}{2a}$.

86. $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}$. 87. $\frac{x^2}{bc}+\frac{y^2}{ac}-\frac{z^2}{ab}$.

88. $\frac{a+b}{9a^2b}-\frac{a-b}{12ab^2}+\frac{2}{15b^2}+\frac{b}{18a^3}$. Проба за $a=10$, $b=2$.

89. $\frac{1}{8x^2}-\frac{4x-y}{12x^2y}-\frac{2x+3y}{9xy^2}$. Проба за $x=2$, $y=-1$.

90. $\frac{a-b}{5a}-\frac{5a^3-2b^3}{10a^2b}+\frac{2a^3+3b^3}{15ab^2}-\frac{5b-12a}{25b}$.

91. $\frac{a^3-b^3}{a^2}-\frac{(a-b)(a+2b)}{2a}-\frac{(a+b)(2a-b)}{3b}-(a+2b)$.

92. $\frac{(x+y)^2}{x^2}-\frac{(x-y)^2}{y^2}-\frac{2(x+y)(x-y)}{xy}$.

93. $\frac{x^2+y^2}{2x^3}-\frac{3(x-y)}{4xy}-\frac{2(x+y)}{6x^2}+\frac{3}{4y}$.

94. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$. 95. $\frac{a+x}{a}-\frac{2x}{a+x}$.

96. $\frac{x}{1-x}-\frac{y}{1-y}$. 97. $\frac{x}{2(x-y)}-\frac{y}{2(x+y)}$.

98. $\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}$. 99. $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m-n}{m+n}$.

100. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}$.

101. $\frac{a+2x}{a+x}-\frac{a-2x}{a-x}+\frac{2a}{x}$.

102. Нека се бројитељ и именитељ разломка $\frac{a}{b}$ 1) повећа за m, 2) умањи за m; колика је разлика између задатога и свакога новог разломка?

103. $\frac{6+3x^2}{9-4x^2}-\frac{2-3x^2}{3+4x^2}$.

104. $\frac{3a^2-4a+5}{6a-7}+\frac{4a^2+5a-6}{8a-9}$.

105. $\frac{2}{2x-1}-\frac{5}{3x-1}+\frac{4}{2x-3}$.

106. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-2}-\frac{4x-3}{x-3}$.

107. $\frac{2x+3y}{6x(2x-3y)}-\frac{2x-3y}{6x(2x+3y)}$.

108. $\frac{3}{x}-\frac{5}{2x-1}-\frac{2x-7}{4x^2-1}$.

109. $\frac{2x-5y}{9x+3y}-\frac{6x+5y}{12x+4y}+\frac{3x+4y}{3x+y}$.

110. $\frac{1}{4+2a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a+a^2}$.

111. $\frac{2m-4n}{3m-3n}-\frac{1}{2}-\frac{m-5n}{6m-6n}$.

112. $\frac{1}{x-y}-\frac{x+y}{x^2-xy}+\frac{x-2y}{2xy}$.

113. $\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$.

114. $\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-2}+\frac{a+3}{a-3}$.

115. $\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c}$.

116. $\frac{a+b-c}{ab}+\frac{a-b+c}{ac}+\frac{b+c-a}{bc}$.

Пр.: $a=4,\ b=-3,\ c=2$.

117. $\frac{5a-8b}{a+b}+\frac{3a-b}{a-b}-\frac{a-4b}{a+b}+\frac{a+5b}{a-b}$.

Пр.: $a=5,\ b=9$.

118. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{2a}{a^2+2ab+b^2}$.

Пр.: $a=7,\ b=5$.

119. $\frac{b+1}{b-a}+\frac{5a+3b}{a^2-b^2}+\frac{b-1}{a+b}+\frac{3}{b-a}$.

120. $1-\frac{a-1}{a+1}+\frac{a^2-a+1}{a^2+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{a^2+a+1}{a^2-1}-\frac{2a-4}{a^4-1}$.

121. $\frac{ab}{(a-c)(b-c)}-\frac{ac}{(a-b)(b-c)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}$.

122. $\frac{1}{a-(b+c)}+\frac{1}{b-(a+c)}+\frac{1}{c-(a+b)}$.

123. $\frac{9a}{(a-2x)^2}+\frac{2a+x}{(a+x)(a-2x)}-\frac{5}{a+x}$.

124. $\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}-\frac{x^3}{x^4-y^4}$.

125. $\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{(a+b)^2}-\frac{b^2}{a^3-ab^2}$.

126. $\frac{1}{6x^2-x-1}-\frac{1-x}{12x^2-12x+3}$.

127. $\frac{1}{2a^2-2}-\frac{1}{3a+3}-\frac{1}{ab-b}$.

128. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}-$

$-\frac{1}{(n+1)(n+3)}$ Пр.: $x=-3$.

129. $\frac{1}{a(a-b)(a-x)}-\frac{1}{x(x-a)(b-x)}-\frac{1}{b(x-b)(b-a)}$.

130. $\frac{3m+n}{3m^2-mn}-\frac{2m+3n}{12mn-4n^2}+\frac{3m^2-mn-6n^2}{18m^2n-6mn^2}$.

131. $\frac{a+c}{(x-a)(b-a)}-\frac{b+c}{(x-b)(b-a)}$.

132. $\frac{x}{2x-y}+\frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2}-\frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2}$. $\left[=\frac{x}{y}\right]$.

133. $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)}+\frac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$. $[=1]$.

134. $\frac{2a^2-3ax}{2a-x}-\frac{2a^2-3ax}{2a+x}+\frac{10a^2x^2-7ax^3}{4a^3-4a^2x-ax^2+x^3}\left[=\frac{ax}{a-x}\right]$.

135. $\dfrac{5x^2}{18x^2-6y}-\dfrac{27x^4+x^2y}{54x^4-6y^2}+\dfrac{x^2+6y}{6y}-\dfrac{x^4-x^2y}{6x^2y+2y^2}$. $[=1]$.

136. $\dfrac{a+b}{a^3-b^3}+\dfrac{a-b}{a^3+b^3}-\dfrac{2(a^2-b^2)}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

137. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

138. $\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{a+c}{(b-a)(b-c)}$.

139. $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}-\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-1}$.

140. $\dfrac{x^2+4x+4}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-2}$.

141. $\dfrac{x^2}{x^4-y^4}-\dfrac{y}{2(x+y)^2(x-y)}-\dfrac{x}{2(x-y)^2(x+y)}$.

142. $\dfrac{a^2+1}{a^3+1}-\dfrac{a+1}{2(a^2+1)}-\dfrac{1}{2(a+1)}$.

Множење и дељење разломка целим бројем (чл. 79, 80.)

143. $\dfrac{ab}{4m}\cdot 3c$. **144.** $\dfrac{a}{2m}\cdot 2m$ **145.** $\dfrac{24x^2}{5y^2}\cdot(-y^2)$.

146. $\dfrac{2a^2x^2}{15b^2y^2}\cdot 5y^2$. **147.** $\dfrac{a-b}{2ab}\cdot 2b$. **148.** $\dfrac{a+b}{m}\cdot(a-b)$.

149. $\left(a+\dfrac{b^2-a^2}{a}\right)\cdot a$. **150.** $\left(1+\dfrac{1-a}{1+a}\right)\cdot(1+a)$.

151. $\left(\dfrac{x^2+2xy+y^2}{4xy}-1\right)\cdot 2xy$. **152.** $\left(\dfrac{3m^3}{4n^3}+\dfrac{2m^2}{3n^2}+\dfrac{m}{2n}\right)\cdot 12n$.

153. $\left(\dfrac{1}{m^3}+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{m}\right)\cdot m^4$. **154.** $\left(\dfrac{a^3}{x^3}+\dfrac{2a^2}{x^2}+\dfrac{3a}{x}+4\right)\cdot x^3$.

155. $\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{2n}{n^2-1}\right)\cdot(n+1)$.

156. $\left(\dfrac{y^2+a^2}{a^3-a^2}-\dfrac{1}{a-1}\right)\cdot(a-1)$. **157.** $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\cdot(a-b)$.

158. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\cdot(x+1)$. **159.** $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\cdot(-ab)$.

160. $\left(\dfrac{a+3}{a-3}+\dfrac{a-3}{a+3}\right)\cdot(a^2-9)$.

161. $\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{b}{a^2-b^2}\right)\cdot(a+b)$.

162. $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}\cdot(a+b)^2$. **163.** $\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)(x^4+x^3)$.

164. $\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-1\right)(x^2-1)$.

165. $\left(\dfrac{2x^3}{5}-\dfrac{5x^2y}{8}+\dfrac{3xy^2}{4}-\dfrac{7y^3}{10}\right)\cdot(4x^2-5xy+y^2)$.

Проба: $x=5$, $y=-5$.

166. $1-(a^2-b^2)\left(\dfrac{5}{a+b}-\dfrac{7}{a-b}\right)$. Проба: $a=8$, $b=-3$.

---

167. $\dfrac{2ab}{3m}:2a$. **168.** $\dfrac{12amx}{5bc}:(-4ax)$. **169.** $\dfrac{2x}{3my}:3my$.

170. $\dfrac{10m^3n^2}{xy^2}:5m^2n^2$. **171.** $\dfrac{1}{x^3}:x^2$. **172.** $\dfrac{x^2}{y^2}:xy$.

173. $\dfrac{24p^2q}{13xy}:8py$. **174.** $\dfrac{3x^3y^3}{4a^2b}:2ab^2$. **175.** $\dfrac{a^2+ab}{b}:a$.

176. $\left(1+\dfrac{m-n}{m+n}\right):2m$. **177.** $\left(a+b-\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right):(a+b)$.

178. $\left(\dfrac{bx^2}{a}+\dfrac{ay^2}{b}\right):ab$. **179.** $\left(\dfrac{8a^3b^2}{m^2n^3}-\dfrac{12a^2b^3}{m^3n^2}\right):4a^2m^2$.

180. $\dfrac{30a^3+45a^2b+60ab^2}{b}:15a$. **181.** $\dfrac{a^3-b^3}{a^2}:(a-b)$.

182. $\left(\dfrac{a^2-b^2}{4}-\dfrac{a^2-2ab+b^2}{6}-\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{9}\right):(a-b)$.

183. $\dfrac{a^6-64}{a^3}:(a^3+8)$. Проба за $a=-1$.

184. $\dfrac{6a^2+5ab-6b^2}{2a+3b}:(3a-2b)$. Проба за $a=5$, $b=10$.

185. $\dfrac{1-2m-7m^2-4m^3}{1+4m}:(1+2m+m^2)$. Проба за $m=-4$.

Множење и дељење разломком (чл. 79—80.)

186. $ax\cdot\frac{2b}{y}$. **187.** $4x^2y^2\cdot\frac{3ab}{2xy}$. **188.** $2a^2\cdot\frac{bx^2}{2a^2c^2y^2}$.

189. $(x^2-1)\cdot\frac{2x}{1-x}$. **190.** $(a-x)\cdot\frac{a+x}{ax}$.

191. $3ax\cdot\left(a-\frac{b}{3ax}\right)$. **192.** $\frac{2ab}{cd}\cdot\left(-\frac{3ax}{cm}\right)$.

193. $\frac{6a}{7b}\cdot\frac{2b}{3d}\cdot\left(-\frac{14c}{15e}\right)\cdot\left(-\frac{5d}{6a}\right)$. **194.** $\frac{2a}{3b}\cdot\frac{4y^3}{9x^3}\cdot\frac{6b}{5a}\cdot\frac{3x^2}{2y^2}$.

195. $\frac{5a^2x^2}{6m^2y^2}\cdot\frac{9b^3y^3}{10a^3z^3}\cdot\frac{4mz^3}{5b^3x}\cdot\frac{2amx}{3y^3}$.

196. $\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{(a-b)^2}\right)\cdot\frac{a-b}{ab}$.

197. $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{2a^2}{b^2}+\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{b^3}{a}$. Проба за $a=3$, $b=2$.

198. $\left(\frac{a^3}{27}-\frac{2a^2}{9}+\frac{4a}{3}-8\right)\left(\frac{a}{3}+2\right)$.

199. $\left(\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{a-b}{2b}$.

200. $\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{a-b}{2b}$. **201.** $\left(\frac{2a+3x}{2a-3x}\right)^2$. **202.** $\left(\frac{4a^2-9b^2}{12ab}\right)^2$.

203. $\frac{2a^2-ax}{ax-x^2}\cdot\frac{a^2x^3-ax^4}{2a-x}$.

204. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4a^2}{b^2-a^2}\right)\cdot\frac{a^2+2ab+b^2}{4a}$.

205. $\left(\frac{x+m}{x}-\frac{2x}{x-m}\right)\cdot\frac{x-m}{x^2+m^2}$.

206. $\left(\frac{a^3}{2b}-\frac{a^2}{3b^2}-\frac{a}{4b^3}\right)\cdot\frac{3b^3}{4a^3}$.

207. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{b-a}$. Проба за $a=3$, $b=-2$.

208. $\left(\frac{3m}{m-1}-\frac{2m}{m+1}-\frac{m^2}{m^2-1}\right)\cdot\frac{m^2-1}{m}$. Проба: $m=7$.

209. $\left(\frac{y^2}{x(x+y)}+\frac{x^2}{y(x-y)}-\frac{x^2+y^2}{xy}\right)\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)$.

Проба: $x=8$, $y=2$.

210. $\left(\frac{3a}{4}-\frac{2b}{3}+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{2a}{3}+\frac{3b}{4}-\frac{4c}{5}\right)$.

Проба: $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$.

211. $\left(\frac{5x^2}{3}+\frac{2x}{5}-2\right)\left(\frac{7x^2}{10}+\frac{5x}{4}+\frac{2}{3}\right)$. Проба за $x=\frac{3}{2}$.

212. $\left(\frac{5y^2}{12}-yz+\frac{5z^2}{3}\right)\left(\frac{6y}{5}-\frac{3z}{2}\right)\left(\frac{2y}{3}+z\right)$.

Проба: $y=\frac{3}{5}$, $z=\frac{1}{5}$.

213. $\left(\frac{(r+s)^2-(2s)^2}{r^2-s^2}-\frac{r-s}{r+s}\right)\cdot\frac{r+s}{2s}$.

214. $\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{4y^2}{3}\right)\left(\frac{3x^3}{4}+\frac{4y^2}{3}\right)-\left(\frac{3x^2}{4}+\frac{4y^2}{3}\right)^2\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{4y^2}{3}\right)$.

215. $\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)^3$.

216. $\left(\frac{1}{2}\frac{a^3}{b}-\frac{1}{3}\frac{b^3}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{a^3}{b}+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a}\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}b^3\right)^2$.

217. $\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+1\right]\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)-1\right]$.

218. $\frac{a^3+1}{a^2+a+1}\cdot\frac{a^3-1}{a^2-a+1}$.

219. $\frac{a+b}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{a-b}{ab}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

220. $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}$.

---

221. $a:\frac{b}{a}$. **222.** $2am:\frac{2m}{b}$.

223. $6a^2x:\left(-\frac{3b^2y}{2x}\right)$. **224.** $(x+y):\frac{x+y}{x-y}$.

225. $3y:\left(1-\frac{y}{x}\right).$

226. $(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$

227. $(a^2-b^2):\frac{a+b}{a-b}.$

228. $(a^3+b^3):\frac{a+b}{a-b}.$

229. $12a^3b^4:\frac{4ab^2}{x^2y^2}.$

230. $\frac{8x^3y^2z}{15mn^2p^3}:\frac{4m^3n^2p}{5xy^2z^3}.$

231. $\frac{21bx^2y^3}{25a^2cz^3}:\frac{14a^2y^2z}{45b^2c^2x}.$

232. $\left(\frac{8x^3}{27y^3}-\frac{2x^2}{9y^2}\right):\frac{2x}{3y}.$

233. $\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2}.$

234. $\left(1-\frac{a-2b}{a+2b}\right):\left(\frac{a}{a-2b}-\frac{2b}{a+2b}\right).$ Проба: $a=-1,\ b=2.$

235. $\left(1-\frac{x-3y}{x+y}\right):\left(\frac{3x+y}{x-y}-3\right):(x^2-y^2).$ Пр.: $x=4,\ y=9.$

236. $\left(\frac{x-2}{6}-\frac{x-1}{8}\right):\left(\frac{x+1}{2}-x\right):\left(2-\frac{x+1}{3}\right).$

Проба за $x=-3.$

237. $\frac{8a^3b}{27c}:\left(\frac{6a^2}{b^3}:4b^2c^2\right).$ Проба: $a=-1,\ b=-2,\ c=-3.$

238. $(a^2-b^2):\frac{(a+b)^2}{a-b}:(a^3-b^3).$ Проба: $a=4,\ b=-1.$

239. $\left(\frac{1}{1-a}-a\right):(1+a^3).$ Проба за $a=-2.$

240. $\left(\frac{3x^3}{4y}-\frac{9x^2}{15}+\frac{xy}{10}\right):\frac{3x}{5y}.$

241. $\left(1+\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\right):\frac{2}{xy}.$

242. $\frac{a+b}{a-b}:\frac{b+a}{b-a}.$

243. $\left(1-\frac{1-r}{1+r}\right):\left(1+\frac{1-r}{1+r}\right).$

244. $\left(a^3-\frac{1}{27}\right):\left(a^2+\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right).$

245. $\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}:\frac{ab(a+b)^2}{a^4-b^4}.$

246. $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3}:\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}.$

247. $\left(\frac{a^2y}{b^2x}-\frac{263a}{144x}-\frac{b}{15y}+\frac{4b^2x}{5ay^2}\right):\left(\frac{4a^2}{3x^2}-\frac{5ab}{4xy}-\frac{6b^2}{5y^2}\right).$

248. $\left(1-\frac{4}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{6}{a^3}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a^2}-\frac{3}{a^3}\right).$

249. $\left(\frac{9}{b^2}-\frac{3a}{b}+\frac{a^2}{4}-\frac{16}{c^2}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{3}{b}-\frac{4}{c}\right).$

250. $\frac{a^2b^2}{c}:\left[\frac{a^2c^2}{b}:\left(\frac{b^2c^2}{a}\cdot\frac{ac}{b^2}\right):\left(\frac{ab}{c^2}:\frac{bc}{a^2}\right)\right.$

251. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{x}{ab}\right)\left(a+b+x\right):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{x^2}{a^2b^2}\right).$

252. $\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}.$

253. $a-\frac{a-1}{a+\frac{1}{a}}.$

254. $\frac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}.$

255. $\frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}.$

256. $\frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1-x}{1+x}+1}.$

257. $\frac{a+\frac{bx-ay}{x+y}}{a-\frac{bx+ay}{x+y}}.$

258. $\frac{3-\frac{5a-4}{7}}{1-\frac{a+2}{7}}.$

259. $\frac{1}{x-y+\frac{1}{x-\frac{1}{y}}}.$

260. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}.$

261. $\frac{2a-b}{a+b+\frac{a-b}{1+\frac{a-b}{a+b}}}.$

262. $\frac{x-\frac{x-2}{x+2}}{x-\frac{x+2}{x-2}}.$

263. $\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$

264. $\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x-y}}{\frac{2}{x-y}-\frac{1}{y}}:\frac{y}{x}.$

265. $\frac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}.$

266. $\frac{\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a}}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$

267. $\frac{\frac{a+b}{a-b}-1}{\frac{a-b}{a+b}+1}:\frac{a+b}{a-b}.$

268. $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}:\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+c}}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a+c}}.$

269. $\dfrac{\dfrac{2ab}{a+b}-a}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a-2b}}+\dfrac{\dfrac{2ab}{a+b}-b}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-2a}}.$ **270.** $\dfrac{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}}{\dfrac{a-b}{a+b}}:\dfrac{a}{a-\dfrac{b^2}{a}}.$

271. Наћи вредност разломка: $\dfrac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$

за $x=\dfrac{m-n}{m+n},\quad y=\dfrac{n-p}{n+p},\quad z=\dfrac{p-m}{p+m}.$

Изврши пробу:

272. У зад. 234. за $a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{5}{6}$.

273. У зад. 235. за $x=1\frac{2}{3},\ y=3\frac{3}{4}$.

274. У зад. 238 за $a=2,\ b=-\frac{2}{5}$.

275. У зад. 239 за $a=-\frac{4}{5}$.

---

12. Размере и пропорције

a) Размере (чл. **84.** и **85.**)

1. Скрати размере:

a) $10:24$; *b)* $72:56$; *c)* $120:48$; *d)* $ax(m^2-n^2):ab(m+n)$.

2. Изрази најмањим целим бројевима размере:

a) $4:6\frac{2}{3}$; *b)* $12\frac{6}{7}:8\frac{4}{7}$; *c)* $\frac{6}{7}:1\frac{7}{8}$: *d)* $15\frac{3}{4}:6\frac{9}{16}$;

e) $0{,}75:0{,}625$; *f)* $3{,}208:1{,}28$; *g)* $0{,}45:3{,}15$.

3. Тако исто: *a)* $\dfrac{a}{b}:\dfrac{b}{a}$; *b)* $\dfrac{28a^2}{b^2}:\dfrac{42a}{b}$;

c) $\dfrac{1}{(x+y)^2}:\dfrac{1}{x^2-y^2}$; *d)* $\left(1+\dfrac{a}{b}\right):\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$

e) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right):\left(a-\dfrac{1}{b}\right)$.

4. Исто тако: *a)* $2\,kg\ 8\,dkg:480\,g$; *b)* $2\,m\ 45\,cm:7\,dm\ 2\,cm\ 5\,mm$; *c)* $9\,m^2:82{,}8\,dm^2$. *d)* $79^0\,29'\,47'':7^0\,13'\,27''$; *e)* 238 *дн.* 4 *ч.* 52 *м.* : 8 *дн.* 4 *ч.* 4 *м.*

5. Тело A прелази у свакој минути 80 метара, тело A' 96 метара; каква је размера њихових брзина?

6. Тело A пређе за a јединица времена исту дуж, коју A' пређе за a' јединица времена; каква је размера њихових брзина?

7. Размера метра према бечкој стопи је као *174 : 55*; каква је размера једнога десиметра према бечкому палцу ($\frac{1}{12}$ бечке стопе)?

8. Из *1 kg.* чистога злата искује се у Аустрији *164* златника (круне), у немачкој царевини *279* полузлатника (марке); каква је размера између 10 круна и 10 марака? Представи размеру *a)* да први члан буде *1*, *b)* да други члан буде 1.

9. Каква је размера површина два правоугаоника, кад је првога дужина *28 m*, а ширина *15 m*, другога пак дужина је *25 m* а ширина *16 m?*

10. У каквој су размери површине два квадрата, кад је страна једнога $23\frac{1}{2}\,cm$, а другога $2\frac{1}{4}\,cm$?

11. У каквој су размери *a)* обими, *b)* површине два круга, у којих су полупречници $r=3{,}6\,dm$, $r_1=2{,}4\,dm$?

12. Пешак може да пређе за *5* мин. *400 m.* а аутомобил за *1* час *48 km*; у каквој су размери њихове брзине?

---

b) Пропорције (чл. **87—89**).

Испитај, да ли се из четири задата броја може начинити пропорција:

13. *a)* $8,\ 5,\ 24,\ 15$; *b)* $1\frac{1}{14},\ 1\frac{1}{2};\ \frac{20}{21},\ 1\frac{1}{3}$.

14. *a)* $x^6y^3,\ x^4y^4,\ x^5y^4,\ x^3y^5$; *b)* $a+b,\ a-b,\ a^2-b^2,\ (a-b)^2$

15. Начини пропорције из датих једнаких производа:

a) $(a-b)^2(a+b)^2=(a^2-b^2)(a^2-b^2)$;

b) $x(a-b)=(a+b)(a^2-b^2)$.

16. Упрости: *a)* $3{,}75:4{,}8=0{,}5:x$; *b)* $3\frac{1}{3}:x=1\frac{1}{9}:\frac{1}{6}$.

17. a) $x : abc = a : \frac{b}{c}$; b) $\frac{a^2}{12} : x = \frac{b^2}{18} : \frac{ab}{30}$.

18. a) $(a^2 + b^2) : x = (a^4 - b^4) : (a - b)$;
b) $(a^3 + b^3) : x = (a^2 - b^2) : (a - b)$.

Реши пропорције:

19. $x : 5 = \frac{2}{3} : \frac{3}{8}$.

20. $3\frac{1}{8} : x = 15\frac{5}{8} : 5$.

21. $4\frac{1}{2} \cdot 4\frac{4}{5} = x : 8\frac{8}{15}$.

22. $3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : x$.

23. $x : 0,35 = 2,38 : 1,25$.

24. $14,35 : 218,275 = 9,18 : x$.

25. $\frac{a}{m} : \frac{b}{p} = x : \frac{c}{q}$.

26. $x : 3\frac{3}{4} = m^3 : \frac{3m^2}{2}$.

27. $(2ab - b^2) : (ab - 3a^2) = x : \frac{a}{b}$;

28. $\frac{a+b}{a-b} : \frac{ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a}{b} : x$.

29. $(a^3 - b^3) : x = (a^4 - b^4) : (a^3 + b^3)$.

30. $x : (2a^2 - 3ab)^2 = (2ab + 3b^2)^2 : (64a^6 - 729b^6)$.

31. $x : (m - 2n) = (6m + 8n) : (2m - 4n)$.

32. $(6a - 5b) : x = (12a^2 - 4ab - 5b^2) : (8a^2 - 2ab - 3b^2)$.

33. $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} : \frac{m+n}{m-n} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m+n} : x$.

34. $\left(b + \frac{b^2}{a^2 - b^2}\right) : x = \left(b + \frac{b^2}{a-b}\right) : \frac{a+b}{b}$.

Уреди понајпре дате пропорције тако, да x буде само у једном члану, па их онда реши:

35. $(x+3) : x = 7 : 1$.

36. $(x + a) : x = b : c$.

37. $(3x + 35) : 3x = 60 : 24$.

38. $(18 - x) : 2 = x : 1$

39. $(a - b)^2 : (a^2 - b^2) = (x - 2b) : x$.

40. $(7 + x) : (7 - x) = 2 : 1$.

41. $(a + b) : (a - b) = (x + m) : (x - m)$.

42. $(x - 2,1) : (x + 2,1) = 5 : 47$.

43. $\left(x - \frac{5}{12}\right) : \left(x + \frac{5}{12}\right) = \frac{5}{6} : \frac{3}{4}$.

44. $\left(x + \frac{a+b}{2}\right) : \left(\frac{a+b}{2} - x\right) = a : b$.

45. $x : (a - x) = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a-b}$.

46. $(a - x) : (x - b) = a : b$.

47. $(1 + x) : (1 - x) = (1 + a^2) : 2a$.

48. $x : y = 2 : 5$; $x + y = 70$.

49. $x : y = 1 : 2$; $4x - y = 12$.

50. $x : y = 4 : 9$; $y - x = 9$.

51. $(x - y) : x = 1 : 5$; $x + 5y = 200$.

52. $x : y = (a + b) : (a - b)$; $x + y = a(a - 2b)$.

53. Одреди четврту пропорционалу за три дата броја:

a) $2\frac{1}{3}$, $3\frac{4}{5}$, $4\frac{5}{6}$; b) 0,12, 0,8, 0,5.

54. Тако исто a) $\frac{a^2}{b}$, $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2}{a}$; b) $(a+b)$, $(a-b)$, (a^2-b^2).

55. Одреди трећу непрекидну пропорционалу за бројеве:

a) 16, 12; b) a^2, ab; c) $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$; d) $a^2 - b^2$, $a + b$.

56. Нађи геометријску средину за бројеве:

a) 63, 175; b) $\frac{4}{3}$, $\frac{16}{27}$; c) 0,2, 1,8; d) a^2, b^2;

e) $\frac{ab^2}{m^3}$, $\frac{m}{a}$; f) $a^2 - b^2$, $\frac{a+b}{a-b}$; g) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

57. Реши: $x : y = 2 : 3$; $y : z = 4 : 5$; $x + y + z = 3\frac{9}{32}$.

58. Исто тако: $x : y = 1 : 2$; $y : z = 3 : 2$; $5x - 4y + 3z = 36$.

59. Ако је $a : b = 2 : 3$, $b : c = 4 : 9$, $c : d = 3 : 5$ и $d : e = 3 : 8$, у каквој је размери: $a : b : c : d : e$?

60. Дато је: $a : d = 4 : 3$, $c : d = 5 : 6$, $b : e = 20 : 9$, $b : f = 5 : 9$, $e : c = 3 : 5$; у каквој је размери: $a : b : c : d : e : f$?

61. Ако је $a : b = h_2 : h_1$ и $b : c = h_3 : h_2$, каква је размера: $a : b : c$?

62. Размера килограма према лондонској фунти је као $86 : 39$, размера руске фунте према лондонској фунти као $65 : 72$; каква је размера руске фунте према килограму?

Одреди x, y, z:

63. $x : y : z = 2 : 3 : 5$; $x + y + z = 60$.

64. $x : y : z = 2 : 3 : 5$; $2x - 3y + 4z = 60$.

65. $x : y : z = (m - 1) : m : (m + 1)$; $x - 2y + 3z = a$.

66. Углови једнога петоугаоника имају се као $2 : 3 : 4 : 4 : 5$; колики су ти углови?

67. У једном троуглу је $a:b=\frac{144}{5}:\frac{720}{9}$; $b:c=20:\frac{144}{5}$. Колике су стране, кад је обим 105 *cm*?

---

c) Примена пропорција

Примењени задаци код простих размера (чл. **90.**)

68. У *9g*. воде има *1g*. водоника и *8g*. кисеоника. Колико има водоника, а колико кисеоника у *1kg 375g*? Колика је запремина тог водоника, кад је $1\,dm^3$ водоника тежак *0,0896..g*?

69. Динар је тежак *5g* а финоће је *0,835*; колико је сребра у динару?

70. Кад ваздух притискује неку површину од $1\,cm^2$ тежином од *1,0333..kg*, колики је ваздушни притисак на површини од $1\frac{1}{2}\,m^2$?

71. Земља од m квадратних километара има r становника; *a)* колико становника долази на n квадр. километара при једнаком релативном намножавању; *b)* на колико квадр. километара долази s становника?

72. Обим предњег точка неких кола има a метара а задњег b метара; колико ће се пута први окренути, док се други окрене m пута?

73. Неко тело при једнаком кретању прелази b метара за a секунада; *a)* колико метара пређе за t секунада; *b)* за колико секунада пређе s метара?

74. Размера брзина два тела што се крећу је $c:c'$; колико времена треба другому за пут, који прво пређе за t секунада?

75. Гасометар, чија је запремина $11{,}2\,m^3$, даје за извесно време гаса за 92 сијалице; колико кубних метара треба да садржи гасометар, који ће за исто време давати гаса за *148* сијалица?

76. Рукопис има *162* стране на свакој по *50* врста; колико би било страна, да је на свакој по 45 врста?

77. Неком количином хране може се исхранити a лица b дана; за колико би лица та храна трајала c дана дуже?

$$a=72,\quad b=52,\quad c=65.$$

78. Трговац прода неку робу за a дин. са $p\,^0/_0$ добити (губитка); пошто је купио робу?

79. Државни лоз, чија је номинална вредност *500* динара купи се по курсу *132,25* (за *100* номиналне вредности); колико динара стаје лоз?

80. Неко купи железничку облигацију од *400* дин., која доноси $5\,^0/_0$ интереса годишње, за *428* динара; по колико је $^0/_0$ уложио свој новац?

81. Неки капитал доноси z дин. интереса за t година; *a)* колики интерес доноси за t' година, кад је процент исти; *b)* за колико година доноси z' дин. интереса?

82. По колико $^0/_0$ треба уложити капитал, да би он за t' година донео толико исто интереса, колико доноси за t година по $p\,^0/_0$?

83. При слободном падању пређени пут је право пропорционалан с квадратом времена. Кад неко тело слободно падајући пређе *122,625m* за *5* секунада, колики би пут прешло за *6,1* секунде?

84. Ивице двеју коцака од истог градива имају се као *2 : 5*. Кад је мања коцка тешка *5kg 240g*, колико је тешка већа коцка?

85. Дужина клатна обрнуто је пропорционална с бројем клаћења. Кад једно клатно дужине *1m* учини *997* клаћења за *1000* секунада, *a)* колико ће клаћења за исто време учинити клатно дугачко *80cm*; *b)* колико је дугачко клатно, које за исто време учини *1500* клаћења?

Примењени задаци код сложених размера (чл. **91.** и **92.**)

86. Од a килограма пређе добије се b метара платна од c сантиметара ширине; *α)* колико се метара платна од c' сантиметара ширине добије од a' килограма пређе; *β)* колико ће бити платно широко, кад се од a' килограма пређе изатка b' метара, *γ)* колико треба килограма пређе за b' метара платна ширине c' сантиметара?

87. Неки млин са a каменова самеље d хектолитара жита за c часова, кад се камен обрне b пута у минути; са колико би се каменова самлело d' хектолитара за c' часова, кад се камен обрне сваке минуте b' пута?

88. Од два точка, чији зупци један у други хватају, један има a зубаца други b; кад се први обрне m пута за s минута, колико ће се пута обрнути други за t минута?

89. За 2,7 дин. одвезе се железницом *14* цената неке робе *14km* далеко; *a)* колико треба платити, да се *10,5* цената одвезе *76km* далеко; *b)* колико ће цената возити железница за

4,05 дин. *63* километара делеко; *c)* колико ће километара возити *17,5* цената за *3,6* динара?

90. За 4 дана ископају 6 радника неки шанац *300 m* дуг, $11\frac{1}{5}$ *dm* широк и $3\frac{1}{2}$ *dm* дубок. За други шанац да се ископа *5* кубних метара треба толико исто времена, колико се утроши за први док се ископа *6* куб. метара. За колико ће дана ископати други шанац 10 радника, кад он треба да буде дуг *280* метара, широк $8\frac{3}{4}$ десиметара и дубок *5* десиметара?

91. Колико интереса донесе *a)* *1287* д., *b)* *3745* д., *c)* *8391,34* д. по $5\frac{1}{2}$ % *α)* за две године, *β)* за $3\frac{1}{2}$ године, *γ)* за 2 године 4 месеца и 18 дана?

92. Колико интереса донесе *3600* динара за *125* дана *a)* по 6%, *b)* по 4%, *c)* по $4\frac{1}{5}$ %, *d)* по 5%?

93. Државни запис од *500* динара купљен је 17. августа по курсу од *102*; колико треба за њега платити, кад се заостали интерес (номиналне вредности) мора накнадити од 1 маја по 4%?

94. За које време *5844* дин., уложених по $4^3/_4$ %, донесу $744^4/_5$ дин интереса?

95. Колики мора бити капитал, који по $5\frac{1}{4}$ % за $2\frac{7}{12}$ године донесе интереса $976\frac{1}{2}$ динара?

96. По колико % треба уложити *2424* дин., да би за $3\frac{1}{3}$ године донео $727\frac{1}{5}$ дин. интереса?

97. Кад *c* динара капитала донесу за *t* година *z* динара интереса онда *a)* колики ће интерес донети *c'* динара за *t'* година; *b)* колики ће капитал донети за *t'* година *z'* динара интереса; *c)* за колико ће година донети *c'* динара капитала *z'* динара интереса?

98. Који капитал нарасте за 5 година и 3 месеца по $3^1/_2$% на *4000* динара?

99. Меница од *5626,30* дин. дисконтује се два месеца пре рока са 4%; *a)* колики је дисконт; *b)* колико треба купац да плати?

100. Неко има да плати после 9 месеца *3600* динара; кад он хоће да плати 5 месеца пре рока, колики је дисконт, кад се рачуна 6%?

Правило поделе. (чл. **93, 94, 95.**)

101. Да се произведе кисеоник употреби се калиумхлорат ($KClO_3$) тако да на *39* теж. делова калиума дође *35,5* делова хлора и *48* делова кисеоника. Колико се кисеоника добива из *100 gr.* калиум хлората? Колика је његова запремина, кад је $1\ dm^3$ кисеоника тежак *1,433...gr.*?

102. Поделити број *3710* на *4* дела тако, да се они имају као разломци $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$.

103. Суму од *s* динара поделити на три дела *a, b, c* тако да буде $a:b=m:n$ и $b:c=p:q$.

104. У енглеској сумпорној киселини (H_2SO_4) тежина водоника има се према тежини сумпора као *1:16*, тежина сумпора има се према тежини кисеоника као *1:2*; колико има сваког елемента у *1 kg.* сумпорне киселине?

105. Три лица имају да поделе *9150* динара тако, да *A* добије толико пута по *5* динара, колико *B* добије по *3* динара, а *C* да добије толико пута по 3 дин. колико *B* добије по 4 дин.; колико добива свако лице?

106. *S* динара поделити на *4* дела *a, b, c, d* тако, да је $a:d=m:n$, $b:d=p:q$ и $c:b=r:s$.

107. Златник од 20 динара тежак је *6,775..g* (практично *6,77 g*, најмања тежина с принудним примањем *6,74 g)* а финоћа му је *0,9*. Колико је у њему злата и бакра? У колико комада има чиста злата *1 kg*?

108. Наслеђе од 18420 динара треба поделити на четири лица тако, да *A* добије $\frac{1}{3}$, *B* $\frac{1}{4}$, *C* $\frac{3}{10}$ и *D* остатак. Али пре деобе умре *A*, зато остала тројица поделе његов део по размери својих првобитних делова. Колико припада свакому?

109. Три општине добију за откопавање земље 1500 динара. Из општине *A* радило је 11 људи 10 дана по 9 часова дневно, из општине *B* 9 људи 9 дана по 10 часова дневно, из општине *C* 15 људи 5 дана по 6 часова дневно. Колико зараде припада свакој општини?

110. *A* отпочне неки посао у почетку године с капиталом од 8000 динара; после 2 месеца придружи му се *B* са 5000 динара а још 2 месеца доцније дође и C са 3000 динара. Крајем године они зараде 1054 динара; колико добити долази на свакога?

111. Наш трговац размени у Бечу 550 златника за аустриске дукате; колико је добио дуката, кад 89 круна вреде 100 дин. и кад се 1 дукат рачуна по 11 круна;

112. Колико ће се динара платити за 15 тона неке робе, од које се 11 kg добива за $1\frac{5}{6}$ марке, кад једна марка износи 1,25 динара?

113. Претвори 10 дана орања у хектаре, кад се зна да 1600 квадратних хвати износе 1 дан орања, даље 1 квадр. хват има 36 квадр. стопа, а $1m^2$ има 10,00931 квадратних стопа.

114. Колико има метара у 100 турских аршина, кад у 61 турских аршина има 65 руских аршина, а у 9 руских аршина има 7 енглеских јарда и кад у 35 јарда има 32 метра?

---

13. Децимални разломци

Претварање обичних разломака у децималне и обрнуто
(чл. **93—99.**)

Претвори дате обичне разломке у децималне а) *проширивањем:*

1. a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{17}{8}$; c) $\frac{15}{16}$; d) $\frac{63}{25}$; e) $\frac{103}{32}$; f) $\frac{7}{40}$.

2. a) $\frac{37}{50}$; b) $\frac{17}{64}$; c) $\frac{67}{80}$; d) $\frac{117}{125}$; e) $\frac{2359}{128}$; f) $\frac{9084}{625}$.

$$\text{нпр. } \frac{17}{64}=\frac{17.5^6}{2^6.5^6}=\frac{17.15625}{10^6}=0{,}265625.$$

3. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{313}{11}$; d) $\frac{29}{33}$; e) $\frac{80}{99}$.

4. a) $\frac{15}{27}$; b) $\frac{36}{37}$; c) $\frac{8}{111}$; d) $\frac{100}{333}$; e) $\frac{97}{101}$; f) $\frac{1000}{909}$.

$$\text{нпр. } \frac{8}{111}=\frac{8.9}{999}=0{,}(072).$$

b) *Дељењем:*

5. a) $\frac{26}{41}$; b) $\frac{92}{205}$; c) $\frac{131}{14}$; d) $\frac{129}{130}$; e) $\frac{85}{222}$; f) $\frac{3121}{404}$.

6. a) $\frac{50}{73}$; b) $\frac{137}{96}$; c) $\frac{37}{135}$; d) $\frac{159}{444}$; e) $\frac{1211}{825}$; f) $\frac{5432}{615}$.

Претвори дате децималне разломке у обичне:

7. a) $0{,}25$; b) $7{,}75$; c) $0{,}072$; d) $17{,}525$; e) $0{,}9518$;

8. a) $0{,}(6)$; b) $0{,}(18)$; c) $4{,}(06)$; d) $25{,}(752)$; e) $6{,}(324)$;

9. a) $0{,}(81)$; b) $0{,}(041)$; c) $8{,}(567)$; d) $0{,}(4378)$; e) $0{,}(90243)$;

10. a) $0{,}7(3)$; b) $15{,}3(51)$; c) $0{,}79(324)$; d) $0{,}290(74)$; e) $0{,}234(684)$.

Рачунање с непотпуним децималним разломцима
(чл. **100—103.**)

11. Скрати на 3 децимална места:

a) $25{,}7917$, b) $3{,}14159$, c) $0{,}8398$, d) $81{,}57924$.

12. $0{,}91654+0{,}17357+0{,}23408+0{,}16999+0{,}879$. (3 дец.).

13. $19{,}3875\ldots+23{,}473\ldots+38{,}378\ldots+8{,}4531\ldots+0{,}082\ldots$

14. Претвори чланове реда

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{10.11.12}$$

у децималне разломке и израчунај збир са 3 децимала.

15. Израчунај тако исто са 4 децимала ред

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{2.4.6}+\frac{1}{2.4.6.8}+\frac{1}{2.4.6.8.10}+\frac{1}{2.4.6.8.10.12}.$$

16. $88{,}9397-51{,}4823\ldots$ (2 дец.)

17. $4{,}37147-1{,}6392$ (3 дец.)

18. $8{,}2315-3{,}5678\ldots$ **19.** $35{,}79\ldots-10{,}809$.

---

20. $\pi.9{,}2587$. (3 дец.) **21.** $0{,}9156.23{,}851$. (2 дец.)

22. $12{,}0748.1{,}91345$ (4 дец.) **23.** $81{,}2867.0{,}1234$ (3 дец.)

24. $8{,}14739.7{,}10936.2{,}51446$. (4 дец.)

25. $1{,}045.1{,}045.1{,}045.1{,}045$. (6 дец.)

26. Одреди са 4 децимала

$$p=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$$

за $a=1{,}30785$, $b=2{,}09122$, $c=2{,}80116$.

27. Израчунај ред

$$1+\frac{1}{m}.x-\frac{m-1}{2.m^2}.x^2+\frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3}.x^3-$$
$$-\frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2.3.4.m^4}.x^4$$

за $m=3$ и $x=0{,}015$ са 7 децимала.

28. $834\times 2{,}1335\,..$ **29.** $0{,}37\times 15{,}0816\,..$
30. $2{,}955\,..\times 0{,}1563\,..$ **31.** $6{,}04\,..\times 0{,}0085\,..$
32. $28{,}1354\,..\times 7{,}089\,..$ **33.** $0{,}1956\,..\times 0{,}8091\,..$

---

34. $45{,}12345:\pi$ (3 дец.) **35.** $986{,}256:127{,}85$. (2 дец.)
36. $13{,}794:28{,}376$. (4 дец.) **37.** $0{,}7123:43{,}566$. (4 дец.)
38. $754{,}06:0{,}649$. (2 дец.) **39.** $\pi:7{,}825$. (3 дец.)
40. $7{,}24257:19{,}14$. (3 дец.) **41.** $0{,}436861:18{,}547$. (4 дец.)

42. 1 килограм $=1{,}785523\,..$ бечке фунте; колико килограма чини 1 бечка фунта? (5 дец.).

43. $3{,}187:5{,}3185\,..$ **44.** $912{,}857:0{,}118\,..$
45. $53{,}4428\,..:2\pi$. **46.** $71{,}293\,..:8{,}8764$.
47. $0{,}3497\,..:4{,}284\,..$ **48.** $9{,}2737\,..:0{,}0856\,..$
49. $0{,}00869\,..:3{,}846\,..$ **50.** $30{,}2582\,..:0{,}71356\,..$
51. $\dfrac{5{,}3145\,..\times 3{,}4906\,..}{7{,}2084\,..\times 3{,}7449\,..}$. **52.** $\dfrac{3{,}027\,..\times 8{,}2579\,..}{9{,}461\,..\times 6{,}3047\,..}$.

53. $1\ dm^3$ живе тежак је $13{,}5959\,..kg$, колика је запремина $1\ kg$ живе?

54. Једна флаша напуњена живом тешка је $7\ kg\ 395\ g\ 28\ cg$; сама флаша тешка је $384\ gr\ 7\ cg$. Колика је запремина флаше?

55. Једна празна флаша тешка је $237{,}7\underline{0}\ g$. напуњена водом тешка је $1{,}893\ kg.\ 4\underline{5}\ cg$. Колико је тешка флаша кад се живом напуни?

56. $1\ dm^3$ ваздуха $(0^0C, 760\ mm$ притисак$)$ тежак је $0{,}00129\underline{3}\ kg$; колика је запремина $1\ kg$. ваздуха?

57. Један стаклени балон без ваздуха тежак је $1{,}8325\underline{3}\ kg$, напуњен водом тежак је $6{,}0478\underline{5}\ kg$. напуњен ваздухом тежак је $1{,}8379\underline{8}\ kg$. Колико је тежак $1\ dm^3$ ваздуха?

58. $1\ dm^3$ ваздуха тежак је $1{,}2934\underline{9}\ g$, $1\ dm^3$ водоника тежак је $0{,}08955\underline{1}\ g$. Колика је густина ваздуха према водонику?

59. Земља се око своје осовине окрене за $24.60.60$ *сек.* звезданог времена. 1 *сек.* звезданог времена је $=\dfrac{365242264}{366242264}$ *секунда* средњега сунчаног времена. Колико часова, минута и секунада средњега сунчаног времена треба земљи за једно обртање?

60. Израчунај: $l=l_0\,(1+\alpha t)$ за $l_0=0{,}67834\underline{5}\ m$, $\alpha=0{,}0000145\underline{5}$, $t=100$.

61. Израчунај: $a)\ l_0=\dfrac{l}{1+\alpha t}$, $b)\ l_0=l\,(1-\alpha t)$ за $l=4{,}2735\underline{3}\ m$, $\alpha=0{,}0000169\underline{8}$, $t=10$.

62. 1^0 екваторов дугачак је $111{,}3066...\ km=15$ географских миља. Колико су удаљена два места на екватору, чија је географска дужина $8^0\,17'\,35''$ ист. и $57^0\,13'\,24''$ ист.?

63. 1^0 земљина меридијана дугачак је $111{,}1111..km.=60$ морских миља. Колико морских миља има географска миља?

Једначине првога степена

14. Једначине првога степена с једном непознатом (чл. 104 — 108.)

Уреди дате једначине и одреди њихов степен:

1. $x-\dfrac{1}{x}=2.$

2. $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d).$

3. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=2.$ **4.** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x}.$

5. $(x-a)^2-(x-b)^2=c^2.$ **6.** $(x-a)^2+(x-b)^2=c^2.$

7. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=2x.$ **8.** $(x-2)^3-(x-1)^3=4.$

9. $(x-2)^3+(x-1)^3=4.$ **10.** $x^2-\dfrac{1}{x^2}=1.$

---

11. $a:\left(a+\dfrac{b}{x}\right)=\left(a-\dfrac{b}{x}\right):\left(a-1\right).$

12. $15x-7x-33=3x-8.$

13. $53x-12+21x+3-14x+39=0$

14. $8+0{,}7x=1{,}7x-5.$

15. $12{,}3x-18{,}7+17{,}5x=34x-21{,}22.$

16. $5{,}01x-4{,}02-3{,}03x-2{,}04-1{,}05x-0{,}06-0{,}04x=0.$

17. $1{,}01x-2{,}02-3{,}03x=6{,}06x-4{,}04-5{,}05.$

18. $ax - b = 0.$ **19.** $a - bx + c = 0.$ **20.** $a + x = b - x.$
21. $2x + 3a = 7x - 2a.$ **22.** $5a - 3b - 7x = 14a - 12b - 10x.$
23. $18a^2x + 3a^2b = 27a^2b + 6a^2x.$
24. $7abx - 16a^2b = 3abx - 20ab^2.$
25. $ax - a^2 = bx - b^2.$ **26.** $ax - 5a^2 = 15ab - 3bx.$
27. $ax = bx + cx.$ **28.** $ax + b^3 = bx + a^3.$
29. $ax - 27 = a^3 - 3x.$ **30.** $a^2x + a^3 - abx + b^3 + b^2x = 0.$
31. $a^2x + a^3 + ax + x - 1 = 0.$
32. $a^2x - a^4 = b^2x - b^4.$ **33.** $a^2x + a^4 = x + 1.$
34. $ax - a^4 = bx - b^4.$ **35.** $ax + a^4 + bx - b^4 = 0.$
36. $9 - (5 - 2x) = 3x + 1.$
37. $2x - [11 + 2x - (5x + 7)] = x - 8.$
38. $138 - [13x + (35 - 17x)] = 155 - (3x - 32).$
39. $112x - [53x - (18 - 5x) - 37] = 110 - [(5x - 120) - (21x + 53)].$
40. $x - \{2x - [3x - (4x - 5x)]\} = 1.$
41. $a - \{2x - [3x - (4x - a)]\} = 0.$

---

42. $12(x - 1) = 3(x + 8).$ **43.** $18(x + 35) = 10(2x + 45).$
44. $5(x - 2) - 2x = 2(x - 1).$ **45.** $(x - 2) : (x - 5) = 3 : 2.$
46. $(2x^2 + x + 1) : (x^2 - 9x - 2) = 2 : 1.$
47. $20 - 2(x - 4) = 2x.$ **48.** $9 - 3(2 - y) = 2(1 - 2y).$
49. $7(x - 4) + 32 = 20x - 3(x + 1).$
50. $3(2x + 9) - 9(4 + x) = 3(5 + x) - 2(x + 6).$
51. $\{3(y - 2) - 5\}.5 - 4(2y - 6) = y - 19.$
52. $5(x + 10) - 4\{160 - 3(3x - 2) + 2x\} = 2 + x.$
53. $5\{3 + (2x - 7)\} - 7(x + 5) + 3 = 3\{4(3 - x) - x\} - 70.$
54. $2x - 2\{x - 2[x - 2(x - 2)]\} = 0.$
55. $2\{2[2(2x - 2) - 2] - 2\} - 2 = 2.$
56. $5\{4[3(2x - 1) - 2] - 3\} - 4 = 1.$
57. $(a + b)x = 2a - (a - b)x.$ **58.** $a(x - b) = b(a - x) + 2b^2.$
59. $m(x - a) - n(x - b) = (a + b)x.$
60. $a(bx - c) - b(ax - c) - x = 0.$
61. $a(x + a) - b(x - b) - 2ab = 0.$
62. $5x(ab + x) = 5(ab + x^2) - 2b^2(x - 1).$
63. $a^2(x - b) - b^2(x - a) = a^2(a - x) - b^2(b - x).$
64. $(a+b-c)x - (a-b-c)x - (a^2+b^2+c^2) = 2(ab+ac+bc) - (a - b + c)x.$
65. $a^2(a - x) - b^2(b + x) = abx.$
66. $(2 - x)(3 - x) = (4 + x)(3 + x).$
67. $(8x - 1) : (4x + 2) = (6x - 9) : (3x - 4).$

68. $(x - 5) : (x - 11) = (x + 1) : (x - 7).$
69. $(z + 1)(z - 1) = z^2 + z + 1.$
70. $(2 + x)(2x + 1) + (2 - x)(2x - 1) = 0.$
71. $(x + 2)(x + 3) - 4 = (x + 4)(5 + x) - 10.$
72. $4x(5x - 1) - (x - 4)(5x - 2) - (3x - 11)(5x + 38) = 0.$
73. $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - 2(x + 1)(x - 8) = 0$
74. $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2.$
75. $(13x + 3)^2 - (5x + 10)^2 = (12x - 3)^2.$
76. $(x - 5)^2 - (x - 9)^2 = 144.$
77. $5x(3x + 10) - (8x + 3)^2 = (3 + 7x)(3 - 7x).$
78. $(x - 3)^3 - (x + 9)(x - 9)^2 = 0.$
79. $(2x + 5)^3 - 4x(x + 3)(2x + 9) + 1 = 0.$
80. $(x - 0{,}1)^2 - 3x(x - 2{,}1) = 8{,}8 - (2x + 6{,}8)(x - 0{,}6).$
81. $(x + a)(x - b) = (x + 2a)(x - 2b).$
82. $(x - a) : (x - b) = (2a - x) : (3b - x).$
83. $(a^2 + 2b^2)(x - a) - (2a^2 + b^2)(x + b) = 0.$
84. $y(a - y) + (b - y)^2 = a^2 - 3b^2.$
85. $(x - a)^2 - (x - b)^2 + 3(a - b)^2 = 0.$
86. $4(x - a - 1)^2 + 5(x - 3a - 2)^2 = (3x + 1)^2.$
87. $[(a^2 - 1)x - 1]^2 + (2ax - 1)^2 = [(a^2 + 1)x + 1]^2.$
88. $3ax - (2x - 3a)^2 = (2x + a)(5a - 2x).$
89. $4a^2 - (3x - 2a)^2 = (5a - x)(5x + 3a) - (2x + 3a)^2.$
90. $(2x - 3b)^3 = (x + 6b)(x - 9b)(8x - 12b) - (3b)^3.$

---

91. $\frac{7}{8}x - 5 = \frac{3}{4} - 2x.$

92. $\frac{13}{10}x - 2 = x - \frac{5}{12} + \frac{8}{15}x - 2\frac{1}{6}.$

93. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + 1.$

94. $\frac{4x}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}x + \frac{5}{9} = 0.$

95. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \frac{x}{11} - 9 = x + \frac{23}{66}.$

96. $1\frac{1}{6}x - \frac{3}{4} - 1\frac{5}{8}x = \frac{5}{12} - 2x - \frac{7}{10}x - 1\frac{7}{40}.$

97. $\frac{x}{a} - b = \frac{x}{b} - a.$ **98.** $\frac{x}{a} + a^2 = \frac{x}{b} + b^2.$

99. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$.

100. $a^3-\frac{ax}{b}+b^3-\frac{bx}{a}+x=0$.

101. $\frac{3}{x}-2=\frac{12}{x}-3\frac{1}{2}$. 102. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x}=\frac{5}{12}$.

103. $\frac{8{,}4}{x}+\frac{1{,}4}{5x}+\frac{2}{5x}=\frac{0{,}94}{x}+27$.

104. $\frac{1}{x}-\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}-\frac{4}{5x}+\frac{5}{6x}-\frac{7}{8x}+\frac{8}{9x}-\frac{9}{10x}=83$

105. $a-b-\frac{ab}{x}=0$. 106. $\frac{a}{x}+\frac{a^2}{2x}-a^2+4=0$.

107. $\frac{b^2}{ax}-\frac{a^2}{bx}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$. 108. $\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$.

109. $\frac{3-4x}{7}+3=4x$. 110. $\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72$.

111. $\frac{z}{2}+\frac{z+1}{3}+\frac{z-1}{4}=\frac{2z}{5}+\frac{7}{4}$.

112. $x=\frac{4x+3}{15}+\frac{x-9}{10}-\frac{15-x}{12}$.

113. $3-\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=\frac{3x}{4}\left(2-\frac{3}{x}\right)-34\frac{1}{2}$.

114. $\frac{7}{3}(2x+5)+3(2x-3)-\frac{3}{4}(5x-7)=1$.

115. $\frac{x}{10}+\frac{x+5}{15}-\frac{5x+4}{18}+\frac{5x-2}{24}-1=0$.

116. $\frac{3{,}07x}{16}+\frac{x-0{,}08}{5}=\frac{3x}{8}-0{,}00925$.

117. $3x-\frac{x-8}{4}+2(x+2)=\frac{2}{3}x-\frac{4x+2}{15}-\frac{17}{24}$.

118. $\frac{3}{4x}-\frac{3-4x}{2}+\frac{5}{3x}-\frac{6-5x+8x^2}{4x}=0$.

119. $3-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{6}x-2\right)=1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-9\frac{1}{2}\right)$.

120. $\frac{4}{5}\left(3x-7\right)-22=\frac{3}{7}\left[\frac{7}{9}(8x-63)-(2x+3)\right]$.

121. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-1\right]-1=0$.

122. $\frac{2}{3}\left\{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)-\frac{2}{3}\right]-\frac{2}{3}\right\}-\frac{2}{3}=0$.

123. $\frac{1}{4}\left(\frac{83}{9}\left\{\frac{7}{6}\left[\frac{3}{2}(x+1)+3\right]+2\right\}-4\right)=1$.

124. $\frac{a-y}{b}=\frac{b-y}{a}$. 125. $\frac{m(a^2+x^2)}{ax}-\frac{mx}{a}=cm$.

126. $\frac{a-b}{x}+1=\frac{a}{b}-\frac{a+x}{x}$.

127. $\frac{a}{b}-\frac{a-bx}{bx}=1-\frac{a+b}{bx}$.

128. $\frac{x-a}{ab}+\frac{3(x+3b)}{ac}+\frac{3}{a}+\frac{x-a}{bc}=0$.

129. $a-x\left(a+\frac{2a}{x}\right)=(a-x)\left(a-\frac{2a}{x}\right)-a$.

130. $\frac{63a^3b-30abx+8x^2}{12abx}-\frac{20a^2+b^2}{4x}-\frac{4x-18ab}{6ab}=0$.

131. $\frac{2x}{ab}+\frac{a^3+b^3}{a^2b}=\frac{ab-x}{b^2}-\frac{ab+x}{a^2}$.

132. $\frac{a^2-x(a-b)}{a}-\frac{b^2-x(a+b)}{b}=2x-\frac{a^3-b^3}{ab}$.

133. $\frac{x+a}{a}-\frac{x+a^2}{a^2}+\frac{x+a^3}{a^3}-\frac{x+a^4}{a^4}=a^4-1$.

---

134. $\frac{5x^2-6x-7}{2x^2-3x-1}=\frac{5}{2}$. 135. $\frac{13}{x-5}+\frac{3}{4}=\frac{65}{2x-10}$.

136. $\frac{9x+8}{6x+5}=\frac{3x+2}{2x+1}$. 137. $\frac{8x-3}{2x-1}=\frac{3x+4}{x+1}+1$.

138. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-8}$.

139. $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}+\frac{6}{x^2-4}=0$.

140. $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

141. $\frac{7}{x-1}+\frac{3}{x-3}=\frac{10}{x-2}$.

142. $\frac{x+7}{x-2}-\frac{x+5}{x-3}=\frac{x-6}{x^2-1}$.

143. $\frac{x-1}{6x^2+2x}-\frac{3(x-2)}{18x^2-2}=\frac{5}{42x^2-14x}$.

144. $\frac{x-28,37..}{150,37..-x}=3,528..$ 145. $\frac{x+4\pi}{x+\pi}=\pi$. (x са 3 дец.).

146. $\frac{9x-8}{12x-7}=\frac{5}{7}$. 147. $\frac{5(x-1)}{8x+24}=\frac{10x-19}{16x-32}$.

148. $\frac{5x-1}{24x+32}-\frac{x-2}{6x+8}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3x+4}$.

149. $\frac{19x+5}{36x-30}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}+\frac{5(4x-1)}{72x-60}$.

150. $\frac{1}{9x}-\frac{2x+1}{6x+12}+\frac{6x+7}{18x+36}=0$.

151. $\frac{x}{x+1}-\frac{3x}{x+2}+2=0$. 152. $\frac{5x+2}{9x^2-4}=\frac{3}{6x-4}$.

153. $\frac{1}{4x-6}+\frac{1}{8x+12}-\frac{3(2x+1)}{4x^2-9}=0$.

154. $\frac{10x-18}{12x^2-27}-\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{18x-27}-\frac{5}{9x}=0$.

155. $\frac{1}{18x^2-30x}-\frac{1}{12x^2-20x}+\frac{3(x+1)}{18x^2-50}-\frac{1}{6x}=0$.

156. $\frac{2x-1}{x-3}-\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-12}-\frac{x+16}{x+4}=0$.

157. $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{x^2+5x+6}=0$.

158. $\frac{6}{x-6}-\frac{2(x+14)}{x^2-4x-12}=\frac{4x+11}{x^2+3x+2}$.

159. $\frac{5x+4}{x+4}-\frac{9-3x-2x^2}{16-x^2}+\frac{13-3x}{x-4}=0$.

160. $\frac{14}{x+3}-\frac{5}{x+1}=\frac{9}{x+5}$. 161. $\frac{13}{x-1}-\frac{6}{x-2}-\frac{7}{x}=0$.

162. $\frac{m}{x-n}-\frac{n}{x-m}=0$. 163. $\frac{a-b}{b-z}=\frac{a}{z}$.

164. $\frac{a+b}{a-b}\cdot x-4ab=\frac{a-b}{a+b}\cdot x$.

165. $\frac{a+b}{a-b}\cdot x=\frac{b-a}{a+b}\cdot x+\frac{a^2+b^2}{2}$.

166. $\frac{x}{x+a}-\frac{x}{x-a}=\frac{b}{x+a}$.

167. $\frac{ax}{mx-a}+\frac{bx}{nx-b}=\frac{a}{m}+\frac{b}{n}$.

168. $(a+b)^2-\frac{ax}{bc}-\frac{bx}{ac}=\frac{cx}{ab}+\frac{2x}{c}-c^2$.

169. $\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\right\}x-1=\left\{\frac{a+b}{a-b}-1\right\}x$.

170. $\frac{1}{ac-cx}-\frac{1}{bd-dx}=\frac{1}{ad-dx}-\frac{1}{bc-cx}$.

171. $\frac{1}{2b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{bx}=\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{(a-b)x}$.

172. $\frac{a^2-ac}{c^2+x}-\frac{c-a}{c}=\frac{ax}{c^3+cx}$.

173. $\frac{ax}{ab-bx}-\frac{bx}{a^2-ax}-\frac{b}{a}-1=0$.

174. $\frac{1-x}{1-a}-\frac{1+x}{1+a}+\frac{1-x}{1+2a+a^2}=0$.

175. $\frac{1}{(a^2+a)x}-\frac{1}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{ax}$.

176. $\frac{x}{a+1}+\frac{x}{a^2-1}-\frac{x}{a^3-a^2+a-1}=\frac{1}{a^3+a^2+a+1}$.

177. $\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{x}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}=\frac{x}{a^2+2a+1}$.

178. $\frac{a(x-a)}{b+c}+\frac{b(x-b)}{a+c}+\frac{c(x-c)}{a+b}=x$.

179. $\frac{a}{x}=\frac{a-b}{x+2a-4b}+\frac{b}{x-2a+4b}$.

180. $\frac{2}{3a+2x}-\frac{3a-4x}{9a^2-4x^2}-\frac{3a}{9a^2-12ax+4x^2}=0$.

181. $\frac{2}{x+4}+\frac{2a-x}{x^2-16}-\frac{2a+x}{x^2-8x+16}=0$.

182. $\frac{a+2b}{x+a}-\frac{2ax+5bx+b^2}{2x^2-2a^2}+\frac{bx+b^2}{2x^2-4ax+2a^2}=0$.

183. $\frac{a-4x}{a^2-5a+6}-\frac{a-4x}{a^2-a-6}=\frac{4}{a^2-4}$.

184. $\frac{a-2x}{6x-b}=\frac{a-x}{3x-b}$. 185. $\frac{a+b}{a+1}:\frac{a-1}{x-1}=\frac{a-b}{a-1}:\frac{a+1}{x+1}$.

186. $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$.

187. $\frac{ax-bc}{b^2+c^2}+\frac{bx-ac}{a^2+c^2}+\frac{cx-ab}{a^2+b^2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

188. $\frac{b-c}{x-a}-\frac{a-d}{x-b}+\frac{a-d}{x-c}-\frac{b-c}{x-d}=0$.

189. $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{3}=3$. 190. $\frac{m-\frac{1}{x}}{m+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{m}}{x+\frac{1}{m}}-\frac{1}{m}$.

191. $\frac{x+\frac{1}{2}}{x+2}=\frac{x-\frac{1}{2}}{x-1}$. 192. $\frac{2x+1}{x-\frac{1}{3}}-3=\frac{3x-1}{x-\frac{1}{3}}$.

193. $\frac{a+\frac{x}{a-b}}{a-\frac{x}{a+b}}=\frac{a+b}{a-b}$. 194. $\frac{1}{\frac{a+b}{ax}-\frac{a-b}{ab}}=\frac{a}{2}$.

195. $\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=3$. 196. $\frac{2}{3-\frac{2}{3-\frac{2}{x}}}=\frac{3}{2}$.

197. $\frac{a}{x-\frac{bx+a^2}{a+b}}+\frac{a+b}{a-\frac{a^2+b^2}{a-b}}=\frac{2a-b}{x-a}$.

198. $\frac{a}{\frac{1}{x}-a}+\frac{b}{\frac{1}{x}-b}+2=0$.

---

199. $\frac{x-a}{x+a}=\frac{a^2-1}{a^2+1}$. (Пропорција). 200. $\frac{x+a}{x-b}=\frac{a^2}{b^2}$.

201. $\frac{4x-3}{2x+3}=\frac{4x+2}{2x+6}$. 202. $\frac{a+b+x}{a+b-x}=\frac{a}{b}$.

203. $\frac{3a-2b-x}{a+2b-x}=\frac{x+a}{x-a}$. 204. $\frac{a-x}{x-b}=\frac{a}{b}$.

205. $\frac{2x+3a+3}{3x-2a-2}=\frac{2x+3a-7}{3x+2a+4}$. 206. $\frac{x-2\frac{3}{4}}{x-7\frac{1}{4}}=\frac{x-2}{x-7}$.

207. $\frac{x+\frac{1}{6}}{x-\frac{3}{4}}=\frac{6x+7}{6x-4}$. 208. $\frac{3\left(x-\frac{1}{4}\right)}{x+\frac{1}{3}}=\frac{3x+\frac{1}{3}}{x-\frac{1}{4}}$.

---

209. $(x-1)(x-2)=(x-1)(2x-1)$. 210. $x^2-ax+bx=0$.

211. $x-a=a^2-x^2$. 212. $2x-4=3x^2-12$.

Реши неједначине по x:

213. $x-7<2x+5$. 214. $8-x>10$.

215. $\frac{2x}{5}+4>x-\frac{1}{2}$. 216. $\frac{x+1}{2x-3}>4$.

217. $\frac{7x}{10}-5>0$. 218. $10-\frac{5x}{2}<0$.

---

15. Једначине првога степена са две или више непознатих (чл. 109—112.)

1. $2x+y=14$, $y=x+1$. 2. $3x-8y=16$, $x=3y-1$.

3. $13x-7y=9$, $y=2x-1$. 4. $8x+23y=3$, $\frac{x}{y}=-3$.

5. $19x-40y=-6$, $x:y=2:1$. 6. $3x-2y=4b-a$, $y=2x-3b$.

7. $x+y=13$, $x-y=11$. 8. $x+y=s$, $x-y=d$.

9. $x+y=\frac{ab}{a+b}$, $x-y=\frac{ab}{a-b}$. 10. $8x-5y=25$, $3x+7y=36$.

11. $3x+4y=4$, $12x-6y=5$. 12. $16y-25z=7$, $5z-24y=9$.

13. $7x+8y=23$, $14x-4y=6$. 14. $6x+8y=7$, $2x+6y=4$.

15. $3y+5z=93$, $4y+7z=128$. 16. $y=2x+3$, $y+1=4x+3$.

17. $0{,}8x - 2{,}5y = 10,$
$4y - 0{,}9x = 3.$

18. $0{,}2x + 0{,}04y = 6,$
$0{,}7x + 0{,}09y = 17.$

19. $41x - 32{,}75y = 10{,}42,$
$5{,}2x - 36y + 2{,}5 = 0.$

20. $3(17 - 3x) - 4(15 - 4y) = 3,$
$2(25 - 6x) + 3(25 - 8y) = 5.$

21. $(4x + 5)(3y - 8) - (2x + 9)(6y + 10) = 26,$
$8x(27 - 2y) - 4y(63 - 4x) = 24.$

22. $3x - 4y = 4,$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 6.$

23. $x + 2y = 30,$
$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} = 11.$

24. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y = 2,$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 4.$

25. $\frac{x+7}{y} = \frac{4}{5},$
$\frac{x}{y+4} = \frac{1}{2}.$

26. $\frac{1}{x-y} = \frac{2}{x+y},$
$\frac{2}{3x - 7y} = \frac{3}{2x - 9}.$

27. $\frac{x+9}{2y-8} = 2,$
$\frac{2x-8}{y-2} = 2.$

28. $\frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1.$
$\frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1.$

29. $\frac{x + 42\frac{1}{3}}{2} = y - 42\frac{1}{3},$

$x - 23\frac{1}{2} = \frac{y + 23\frac{1}{2}}{3}.$

30. $8\{x + 2[y - 2(x + 3)]\} = 29,$
$2\{2y - 2[y - 2(x + 1)]\} = 9.$

31. $(x + 1)(y - 1) = (x + 5)(y - 5),$
$(x + 2)(y + 3) = (x + 4)(y - 1).$

32. $\frac{2(x - 2) - 3y}{4} - \frac{3x - 5y}{10} = \frac{5(x - y) - 6(3x - 6y - 1)}{5},$
$\frac{x + 2y + 2}{5} + \frac{9y - 2x}{4} = y - \frac{7y - 4x}{3}.$

33. $x + y = 1,$
$ax - by = a - b.$

34. $ax + y = m,$
$x - y = n.$

35. $x - y = a,$
$ax - by = a^2 + b^2.$

36. $x + my = a,$
$x - ny = b.$

37. $a(x + y) = m,$
$b(x - y) = n.$

38. $y = ax + b,$
$y = a'x + b'.$

39. $ax + y = a^3,$
$x + ay = 1.$

40. $ax - by = a^2 + b^2,$
$bx + ay = a^2 + b^2.$

41. $ax + by = a^5,$
$bx + ay = b^5.$

42. $(a + c)x + (a - c)y = 2bc,$
$(b - c)x + (b + c)y = 2ac.$

43. $a^2x + aby = b^4,$
$bx + ay = a^2b.$

44. $a^2x + ay = a + b,$
$(a + b)x + y = \frac{a + 2b}{a}.$

45. $ax + by = a^2 + b^2,$
$a^2x + b^2y = a^3 - ab(a - b) + b^3.$

46. $x - (a + b)y = \frac{b^2 - a^2}{b},$
$(b - a)x + aby = b^2.$

47. $ax - (a - b)y = b^2,$
$(a + b)x - by = a^2 - b^2.$

48. $x - y = 2a + b + \frac{4ab^2 - 2a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2},$
$ax - by = (a + b)^2 - \frac{a - b}{a + b} + \frac{(a^2 + b^2) - 2ab(a^2 - b^2 + 1)}{a^2 - b^2}.$

49. $a(x + y) - b(x - y) = \frac{a^2 + b^2}{a + b},$
$(a + b)(1 - x) - b(1 - y) = \frac{b^2}{a + b}.$

---

50. $\frac{28}{x} + \frac{6}{y} = 9,$
$\frac{9}{y} - \frac{4}{x} = 2.$

51. $\frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 1,$
$\frac{30}{x} + \frac{31}{y} = 6.$

52. $\frac{6}{x - 1} + \frac{5}{y - 1} = 1,$
$\frac{4}{x - 1} + \frac{7}{y - 1} = 2.$

53. $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{y + b} = \frac{a + b}{ab},$
$\frac{a}{x - a} - \frac{b}{y + b} = \frac{a^2 - b^2}{ab}.$

54. $\frac{8}{2x - 3y} + \frac{9}{4x + y} = 1,$
$\frac{6}{4x + y} - \frac{5}{2x - 3y} = \frac{1}{48}.$

55. $\dfrac{9}{2x+3y-28}+\dfrac{8}{3x-2y-10}=8,$

$\dfrac{2x+3y-28}{3}=\dfrac{3x-2y-10}{4}.$

56. $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a-b}{y}=-2b,$

$\dfrac{a+b}{ax}-\dfrac{a-b}{by}=-\dfrac{a^2+b^2}{ab}.$

57. $\dfrac{a^2-b^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}=a,$

$\dfrac{a+b}{x}+\dfrac{b}{y}=2.$

58. $\dfrac{a+1}{x+y}-\dfrac{a+1}{x-y}=-2,$

$\dfrac{a-1}{x+y}+\dfrac{a-1}{x-y}=2a(a-1).$

59. $\dfrac{m}{n+y}=\dfrac{n}{m+x},$

$\dfrac{n}{m-y}=\dfrac{m}{n-x}.$

60. $\dfrac{x-a+2b}{b}+\dfrac{y}{c}=\dfrac{b}{c},$

$\dfrac{x}{ab}+\dfrac{y}{bc}=\dfrac{x+y}{ac}.$

61. $ax+\dfrac{1}{a}y=a^2,$

$\dfrac{1}{a}x+ay=a^3.$

62. $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2,$

$\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{4ab}{a^2-b^2}.$

63. $\dfrac{2x-b}{a}-\dfrac{2y-a}{b}=2,$

$\dfrac{2x-a}{b^2}+\dfrac{2y+b}{a^2}=\dfrac{a+b}{ab}.$

64. $\dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b},$

$\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b}.$

65. $\dfrac{y}{a-b}-\dfrac{3x}{a+b}=\dfrac{(a-b)^2}{a+b},$

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{a^3+ab^2}{ab+b^2},$

66. $\dfrac{x-c}{a+b}+\dfrac{y+b}{a+c}=2,$

$\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{y-c}{a-b}=2.$

67. $\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{y}{a+b}=2ab,$

$\dfrac{x}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{y}{a^2-ab+b^2}=2a.$

68. $\dfrac{x+y+2}{x-y-2}=\dfrac{a^2-a+1}{a-1},$

$\dfrac{x+y-2}{x-y+2}=\dfrac{a^3-1}{a^2+1}.$

69. $\dfrac{1}{x+\dfrac{10}{4x-5y}}=\dfrac{1}{x+\dfrac{8}{6x-11y}},$

$\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{5y}+\dfrac{1}{xy}.$

70. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-y}-3}=-\dfrac{3}{8},$

$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{7}{6}.$

71. $x:y=3:7,$
$x+y=50.$

72. $x:y=1:4,$
$17x-3y=3.$

73. $(x+2):(y+4)=4:5,$
$(x-8):(y-6)=2:3.$

74. $(4x+y):(2x-y)=16:5,$
$(2x+7y):(x+8)=14:5.$

75. $5x:8=(y+5):2,$
$3x:8=(y-2):1.$

76. $(4x+y):(2x-y)=16:5,$
$(2x+7y):(x+8)=14:5.$

77. $(3x+2y-4):(2x+3y-1)=3:2,$
$(x-2y-3):(2x-3y-6)=2:3.$

78. $\dfrac{x-y}{x-2a}=\dfrac{x+y}{x+2a},$

$\dfrac{x-y-3a}{x-y+3a}=\dfrac{x+a}{x-a}.$

79. $\dfrac{x+y+2b}{x+y-2b}=\dfrac{a+b}{a-b},$

$\dfrac{x+y+1}{x-y+1}=\dfrac{a+1}{b+1}.$

---

80. $x^2-y^2=a^2,$
$x+y=b.$

81. $(x+3y)^2-(2x-y)^2=\frac{11}{36},$
$(x+3y)-(2x-y)=\frac{1}{6}.$

82. $y+2x=5,$
$4x+2y=10.$

83. $3x+3y=10,$
$4x+2y=17-2y.$

---

84. $x+3y=39,$
$3x+2z=48,$
$4y-3z=18.$

85. $3x-4y=6,$
$2x+3z=26,$
$5y-6z=18.$

86. $ax+by=a^2+b^2,$
$-by+az=a^2,$
$az-2bx=(a-b)^2.$

87. $ax+by=ab,$
$by+az=2ab,$
$az+bx=ab.$

88. $(a-b)x+(a+b)y=2a,$
$(a-b)y+(a+b)z=a-b,$
$(a-b)z+(a+b)x=a+b.$

89. $a(x+y)-b(x-y)=3a(a+b),$
$b(y+z)-a(z-y)=b(2a+3b),$
$b(x+z)-a(x-z)=3b(a+b).$

90. $ax+by-(a-b)z=2b^2,$
$$ay-bx=\frac{a^4-b^4}{ab},$$
$$(a+b)z-(a-b)x=\frac{a^3+2a^2b+b^3}{a}.$$

91. $3x+y+2z=13,$
$x+2y+3z=17,$
$2x+3y+z=12.$

92. $6x-4y+3z=28,$
$4x-y-3z=7,$
$2x-3y+4z=13.$

93. $3x+2y-3z=9,$
$2x+3y-4z=-4,$
$4x-y-2z=-2.$

94. $2x-3y+5z=0,$
$-3x+5y-6z=2\frac{1}{2},$
$5x-4y+3z=-2\frac{1}{2}.$

95. $0{,}4x+0{,}5y+0{,}7z=51,$
$0{,}3x+0{,}4y+0{,}5z=38,$
$0{,}2x+0{,}3y+0{,}4z=29.$

96. $0{,}8x+0{,}5y+0{,}4z=10,$
$1{,}2x-0{,}2y-0{,}4z=5,$
$1{,}5x-2y-5z=1.$

97. $(a-b)x+ay-bz=a^2-ab,$
$ax+(a-b)y-(a+b)z=ab+b^2,$
$bx-by-(a-b)z=3ab-a^2.$

98. $a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$
$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$
$a_3x+b_3y+c_3z=d_3.$

99. $$(a+b+c)x+\frac{a}{2}(y+z)=(b+c)^2,$$
$$(a+b+c)y+\frac{b}{2}(x+z)=(a+c)^2,$$
$$(a+b+c)z+\frac{c}{2}(x+y)=(a+b)^2.$$

100. $ax+by+cz=m$
$a^2x+b^2y+c^2z=m^2,$
$a^3x+b^3y+c^3z=m^3.$

101. $2x+3y-4z=50,$
$x:y:z=5:4:3$

102. $x+y+z=s,$
$x:y=a:b,$
$y:z=b:c.$

103. $ax+by+cz=ab+bc+ac,$
$x:y:z=b^2c^2:a^2c^2:a^2b^2.$

104. $ax+by+cz=s,$
$x:y:z=m:n:p.$

105. $$\frac{x}{5}+\frac{3y}{4}+\frac{7z}{15}=18,$$
$$\frac{2x}{5}+\frac{5y}{12}+\frac{2z}{3}=19,$$
$$\frac{x}{10}+\frac{5y}{6}+\frac{4z}{5}=23.$$

106. $$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=612,$$
$$\frac{x}{3}+y+\frac{z}{3}=612,$$
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+z=612.$$

107. $$3x-y-z=10,$$
$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=13,$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}+\frac{z}{5}=10.$$

108. $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$
$$\frac{ax-by}{a+b}=\frac{az+cy}{c},$$
$$\frac{by-cz}{b-c}=\frac{bx+az}{a}$$

109. $$\frac{x+1}{y+1}=2,$$
$$\frac{y+2}{z+1}=4,$$
$$\frac{z+3}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

110. $$\frac{x+y}{y+z}=\frac{a+b}{a},$$
$$\frac{y-x}{y+x}=\frac{a-b}{a+b},$$
$$x+y+z=a+b.$$

111. $$2x-3y=\frac{6y-5z}{2}=\frac{10z-19}{4}=\frac{38-x}{8}.$$

112. $$\frac{3x-5y}{8}=\frac{2y+3z}{4}=\frac{6x-4}{5}=\frac{2z-4}{3}.$$

113. $$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,\quad\left(\frac{1}{x}=u,\ldots\right)$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c.$$

114. $$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a,$$
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=c.$$

115. $$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=9,$$
$$-\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{8}{z}=10,$$
$$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}=20.$$

116. $$\frac{xy}{x+y}=a,$$
$$\frac{xz}{x+z}=b,$$
$$\frac{yz}{y+c}=c.$$

117. $xy+xz+yz=9xyz,$
$5yz+4xz-3xy=10xyz,$
$5xy-3xz-4yz=3xyz.$

118. $\frac{8}{4x-5y}+\frac{32}{3x+2z}+\frac{9}{3y-5x}=1,$
$\frac{12}{3x+2z}-\frac{5}{4x-5y}-\frac{7}{3y-5x}=2\frac{3}{4},$
$\frac{4}{4x-5y}+\frac{8}{3x+2z}+\frac{3}{3y-5x}=1\frac{1}{2}.$

119. $x+z=18,$
$z-y=2,$
$u+y=12,$
$u+2x=26.$

120. $u+x+y-z=a$
$u+x-y+z=b,$
$u-x+y+z=c,$
$-u+x+y+z=d.$

121. $3u-x+y+2z=20,$
$2u+3x-y+z=17,$
$u+2x+3y-z=21,$
$-u+x+2y+3z=12.$

122. $3u-4x+2y=5,$
$4u-3x-2z=4,$
$2u+y-5z=3,$
$3x-4y+z=2.$

123. $2u-3v+4x-5y+6z=6,$
$3u+v-5x+y-3z=3,$
$-u+4v+2x-5y+z=8,$
$u-v+x-y+z=3,$
$u+v+x+y+z=15.$

124. $x+y=2a,$
$x+z=3a,$
$z+u=a-b,$
$x-u=3b.$

125. $ax+by=2ab,$
$ay+bz=a^2+ab+b^2,$
$az+bu=a^2+b^2,$
$au+bx=a^2-ab+b^2.$

---

16. Примена једначина првога степена с једном непознатом (113—114.)

1. Збир два броја износи *1443* а њихова разлика *333;* који су то бројеви?

2. Одреди два броја чија је разлика *27* и кад мањи број износи $\frac{4}{5}$ већега.

3. Поделити број *a (637)* на два дела тако, да је један део $m\left(2\frac{1}{4}\right)$ пута већи од другога.

4. Од којега броја пети *(m-ти)* и седми *(n-ти)* део износе *120 (a)?*

5. Збир три броја износи *70.* Кад се други број подели првим количник је *2* а остатак *1;* трећи подељен другим даје за количник *3* и за остатак *3.* Који су то бројеви?

6. Поделити број *a (90)* на два таква дела, да *m (5-то)* струки први део буде за *d (7)* већи од *n (2)* струког другог дела.

7. Од којега је броја збир његове петине *(m-тог* дела) и деветине *(n-тог* дела) за *2 (a)* мањи од половине *(p-тог* дела)?

(Погодба: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{1}{p}$.)

8. Кад се један број помножи с *15,* па се производу дода *20,* добивени збир подели са *4* а од количника одузме *14,* добиће се трипут већи број но што је он сам. Који је то број?

9. На која два дела треба поделити *60,* да већи део подељен мањим даје *2* за количник и *3* за остатак?

10. Који број треба одузети од бројитеља и од именитеља разломка $\frac{a}{b}\left(\frac{7}{13}\right)$, да би нов разломак био једнак са $\frac{c}{d}\left(\frac{1}{3}\right)$?

11. За који број треба умањити чинитеље производа *28.84,* а увећати чинитеље производа *36.44,* да би оба производа била једнака?

12. Који број треба додати бројитељу разломка $\frac{a}{b}\left(\frac{7}{13}\right)$ а од именитеља његова одбити, да нови разломак буде реципрочна вредност пређашњега?

13. Који је то двоцифрен број, чији збир цифара износи *6,* а сâм је *6* пута већи од своје последње цифре (цифре јединице)?

14. Збир цифара једнога двоцифрена броја је *6;* кад цифре тога броја измењају своја места, тада је добивени број за *6* већи од утројена дата броја; који је то број?

15. Кад се један двоцифрени број, чиј је збир цифара *9,* повећа за *9,* добије се број с истим цифрама али у обрнутом реду; који је то број?

16. Има један број, који кад се помножи са *2* па се резултату с десне стране допише цифра *5,* добивени број подели с *11* а количник повећа за *1,* онда је тако постали број двапут већи од замишљена броја; који је тај број?

17. Кад се једном извесном броју допише с десна цифра *6,* па се подели с *9,* а добивеном целом количнику допише опет с десна цифра *8,* резултат подели с *12,* тада се добије *4.* Који је то број?

18. Коју цифру треба дописати уз бројеве *2, 4, 7* и *13* с десна, да би они чинили једну пропорцију?

19. Један шестоцифрен број има крајњу цифру с десна *7;* кад се та цифра пренесе с краја лево добива се *5* пута већи број; који је то број?

20. Има један једноцифрен број, којему кад се с десна допише *2*, па се томе дода *8* а тако добивеном броју допише с десна *5*, резултату дода *1*, па се све подели с *2* и најзад одбаци последња цифра с десна, која је једнака с датим бројем, добиће се *20.* Који је то број?

---

21. Неко ће после 10 година имати два пут толико година но што је имао пре *4* године; колико му је сад година?

22. Један отац има данас 48 година, а син му 21 годину; пре колико је година био отац десет пута старији од сина?

23. Оцу има сада 36 година а његову сину 10 година; колико година још треба отац да живи да би његове године биле двапут веће од синовљих?

24. *А* има сада *m* пута толико година колико *В*, а после *a* година њему ће бити *n* пута толико година колико *В*-у; колико година има *А* а колико *В?* Дискусија резултата!

25. Неки дечак рече: мајка ми је 25 година старија од мене, а отац ми је *5* година старији од матере; сви троје имамо *91* годину. Колико је година свакому?

26. Разлика квадрата два узастопна цела броја износи *a*. Који су то бројеви? — Како би се доказало: да је разлика квадрата два узастопна цела броја свагда непаран број?

27. Неко остави тестаментом $\frac{3}{8}$ свог имања својој жени а сваком од троје деце $\frac{11}{20}$ дела материна; остатак од *300* динара сиротињи. Колико је вредело имање?

28. При подели неке суме новаца лице *А* добије *a (1000)* дин. и $\frac{1}{m}\left(\frac{1}{3}\right)$ део остатка, *В* добије $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)$ део новога остатка и још *500* дин., а *С* заосталих *c (2500)* динара. Колико добива *А* а колико *В?*

29. Литар црна вина стаје *1,20* дин. а литар бела вина *0,90* дин. Неко погоди да му се веће буре напуни црним вином а мање белим; за вино у оба бурета требало је да плати *150* дин. Винар погреши па напуни веће буре белим вином а мање црним; стога је за оба бурета вина плаћено *144* динара. Колико је литара хватало свако буре?

30. Тројица купе заједнички једну срећку. Први је дао *2* дин. мање од другога, а трећи *5* дин. више од другога. Колико је свако уложио кад је срећка добила *1200* дин. а првом припало *80* дин.?

31. Винар купи хектолитар вина по *30* динара. Он прода половину тога вина по *35* динара, трећину по *29* динара а остатак по *32* динара. На тај начин њему остане чисте добити *1815* динара. Колико је хектолитара купио?

32. Трговац има две врсте робе; од прве је килограм *60 (a)* пара, од друге *40 (b)* пара; он хоће да смеша обе врсте и да спреми *80 (m)* килограма, да би могао килограм продавати по *45 (c)* пара. Колико килограма мора узети од сваке врсте?

33. Винар има две врсте вина; од прве врсте је хектолитар *120* динара а од друге *64* динара; он хоће мешањем да добије *7* хектолитара по *80* дин. По колико ће хектолитара узети од сваке врсте?

34. Трговац неки хоће да помеша $42\frac{1}{2}$ *(m) kg* неке робе по *1,4 (a)* дин. килограм с неком бољом врстом по *2,1 (b)* дин. килограм тако, да *1 kg.* смеше стаје *1,6* дин. Колико килограма од боље врсте мора узети?

35. Колико бакра (финоћа = *0*) треба смешати са *26 kg.* сребра финоће *0,9*, да би се добило сребро финоће *0,52?*

36. Колико се чиста сребра мора додати ка *200 g.* сребра финоће *0,835*, да би се добило сребро финоће *0,900?*

37. Колико се злата финоће *0,920* (злато № *1*) мора додати ка *400 g.* злата финоће *0,750* (№ *3*), да би се добило злато финоће *0,840* (№ *2*)?

38. *24 kg.* сребра финоће *0,8* смеша се са *12 kg.* сребра друге финоће, па се добије смеса финоће *0,75;* које је финоће друго сребро?

39. Колико треба смешати злата и бакра да би се добила смеса финоће *0,900* а да буде тешка *1250 gr.?*

40. *10 kg.* бакра (специф. тежина = *8,9*) стопи се са *75 kg.* сребра (специф. теж. = *10,5*); каква је специфична тежина легуре? (*2* децимала).

(Не води се рачун о незнатном умањавању запремине).

41. Отац обећа сину за сваки без погрешке израђен задатак *10* пара; за сваки пак погрешан задатак, син је морао вратити по *5* пара. После *20* израђених задатака видело се, да је син имао *80* пара. Колико је задатака израдио син без погрешке, а колико с погрешкама?

42. Један је на стрелишту избацио *25* метака. За сваки промашај морао је дати *0,40* динара а за сваки погодак добивао је по *1* дин. По свршеном пуцању гађач је морао платити *10* дин. Пита се: Колико је имао погодака?

43. У два бурета има 351 литар вина; ако се из првога оточи шестина а из другога трећина биће у обадва подједнако вина; Колико литара хвата свако буре?

44. У једном друштву било је 2 пут толико људи колико жена; кад је 8 људи са својим женама отишло, остало је 4 пута толико људи колико жена. Колико је у почетку било људи а колико жена?

45. Кад је A дао под интерес шестину свога капитала а B петину остало је у обојице подједнако новаца. Колико је имао A а колико B, кад је капитал обојице износио 39200?

46. Предњи точкови кола имају у обиму по 35 dm а задњи 44 dm; ако се предњи точак од A до B обрнуо 387 пута више но задњи, онда *a)* колико се пута сваки окренуо, *b)* колико је метара од A до B?

47. За ученике I разреда купљен је известан број вежбанака. Кад би се на сваког ученика рачунало по 9 вежбанака, тада би 7 ученика добило по вежбанку мање. Кад би се сваком ученику дало по 8 вежбанака, тада би претекло 16 вежбанака. Колико је вежбанака купљено и колико је било ученика у разреду?

48. На питање: колико имају браће и сестара, дечко одговори: „Ја имам управо толико браће колико и сестара". А његова сестра рече: „Ја имам само половину толико сестара колико браће". Колико је било браће и сестара?

49. Нека жена прода најпре половину донесених јаја мање *5*, затим половину остатка мање *5* и опет половину остатка мање *5*. На тај начин њој је остало управо $\frac{1}{3}$ броја што је у почетку имала. Колико је јаја донела?

50. Неко завешта своје имање наследницима овако: да најстарији наследник добије a *(1000)* динара и $\frac{1}{n}$ (7-ми) део остатка; други наследник да добије $2a$ *(2000)* д. и $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{7}\right)$ део новога остатка; трећи — $3a$ *(3000)* и $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{7}\right)$ део трећег остатка и тако даље редом. Кад је подела извршена видело се да су сви наследници добили подједнако. Пита се: *1)* Колико је цело имање; *2)* Број наследника; *3)* Део свакога?

51. Неко прода робу за *1784,8* дин. са 3% губитка; по што је он ту робу купио?

52. Трговац прода центу неке робе за *161* дин. и добије при том *15*%; по што њега стаје цента?

53. Који капитал, уложен по p *(6)*%, нарасте за n *(3)* године с простим интересом на a $\left(3020\ \frac{4}{5}\right)$ дин?

54. Неко који је имао *120000* динара купи једну кућу; трећину од осталог новца дâ под интерес по *4*% а остатак по *5*%. На тај начин његов је годишњи приход био *3920* динара. По што је купљена кућа и колике су оне друге две суме?

55. Неко дâ петину својих новаца по *4*% а остатак по *5*%; крајем године добије укупно *2940* динара на име интереса. Колико је новаца дато по *4*% а колико по *5*%?

56. Неко дâ a динара по p%, а после n година он да b динара по q% $(q>p)$. Пита се, после колико ће година оба капитала донети једнаке интересе (не рачунајући интерес на интерес)?

57. Од два капитала чији је збир *5330* дин., први је дат по *5*% а други по *4*%; колики је сваки, кад први доноси двапут толико интереса колико други?

58. Неко је дао *48000* дин. под интерес нешто по *4*%, а нешто по $4\frac{1}{2}$%. Али да је целу ову суму уложио у предузеће које доноси $7\frac{1}{2}$%, имао би годишње вишак интереса у *1590* динара. Колики је био капитал, који је уложен по *4*%?

59. Кад трговац продаје килограм робе по a *(26)* динара, добива p *(4)*%; колико % добива, кад килограм продаје по b *(26,1)* дин.?

60. Газда једне куће плаћао је *9,8*% порезе од кирије. Кад је пореза попета на *12*%, газда реши да повиси кирију да би му чист приход био као и пре. За колико је % кирија повишена?

---

61. У име отплате неког дуга треба да се положи *800* дин. после *3* месеца, *300* дин., после *5* месеца и *900* дин. после *9* месеца. Кад се може цео дуг уједанпут исплатити?

Код овога и осталих задатака треба дисконт рачунати од сто.

62. При некој куповини од *5000* дин. требало је одмах положити *1000* дин., после *8* месеца *1500* дин., после даљих *6* месеца *700* дин. а остатак после даљих *10* месеца. Кад би се могла цела сума одједном исплатити?

63. Неко је имао да плати *1080* дин., после $2\frac{1}{2}$ месеца, *1800* дин. после *2* месеца доцније, а остатак после даља *3* месеца. Колики је остатак, кад дужник може цео дуг да исплати после пет месеца?

64. Неко је обвезан да плати *3000* дин. после *1* године. У место тога, он хоће одмах да положи *1000* дин. а остатак у *4* једнака рока по једнаке суме. Колики је један такав рок?

65. Неко је обвезан да плати неку суму после *1* године. У место тога, он хоће да отплаћује свакад по $\frac{1}{4}$ суме у 4 рока који су по *3* месеца размакнути. Кад пада први рок?

---

66. Један басен хвата *9117* m^3. Он се може напунити кроз *3* цеви; кроз прву истече за 3 часа *144* m^3, кроз другу за *4* часа *231* m^3 и кроз трећу истече за *5* часова толико исто колико кроз другу за *4* часа. За које ће се време басен напунити, кад се отворе све три цеви?

67. Басен се може напунити кроз две цеви и то само кроз прву цев за a *(3)* часа, кроз другу за b $\left(4\frac{1}{2}\right)$ часа. За које би се време басен напунио, кад би се обе цеви пустиле у исто време?

68. Један басен може се кроз једну цев само напунити за a *(4)* часова, кроз другу цев само за b *(8)* часова; напротив, кад је напуњен, он се може кроз трећу цев испразнити за c *(6)* часова. За које би се време басен напунио, кад би све три цеви биле отворене?

69. Пароброд пређе за један час уз воду пут *10,2 km*, а низ воду *17,7 km*; који би пут учинила лађа за један час самом снагом махине (кад вода стоји), а који самом снагом воде (кад махина не ради)?

70. Три радника раде на једном зиду. Сâм први радник извршио би цео посао за 12 дана, а сâм други радник за 10 дана. Сва тројица заједнички свршили би зид за 4 дана. Колико би дана на том послу провео сâм трећи радник?

71. Три бурета садрже укупно *290 l*. Кад се из пунога првог преручује течност у друго претиче још читава трећина; кад би се пак из другог и трећег бурета преручивало у прво, недостало би још *10 l*. Колико је литара у сваком бурету?

72. Неко има четири бурета. Кад би друго пунио из првога у овом би преостало још $\frac{1}{10}$ садржине; кад би треће пунио из другога, у овом би заостало $^5/_9$; кад би четврто пунио из трећега напунило би се само $^8/_9$ његових. Ако би из првога пунио треће и четврто, остало би још *30 l*. Колика је запремина сваког бурета?

73. Један радник свршио би неки посао за *5* часова а други радник би га свршио за $7\frac{1}{2}$ часова. За колико би се часова тај посао свршио, кад би га заједнички оба радника радили?

---

74. У равнокраком троуглу угао на основици има се према углу на врху као што се има *5 : 2*. Колики су ти углови?

75. Спољашњи угао на основици равнокрака троугла има се према спољашњем углу на врху као $m : n$ *(29 : 32)*; колики су углови троуглови?

76. Спољашњи углови на хипотенузи правоугла троугла имају се као $m : n$ *(13 : 17)*; колики су унутрашњи углови?

77. Катета једнога правоугла троугла је a *(56) m* а његов обим u *(154) m*. Колике су друге две стране троуглове?

78. Једна катета правоугла троугла већа је за d*(28,512 m)* од своје пројекције на хипотенузи. Колика је хипотенуза, кад је пројекција друге катете q *(109, 512 m)*?

79. Обим једнога троугла износи *113 m*. Основица троуглова већа је од једне стране за *13* метара а од друге је мања за *12 m*. Колике су стране?

80. Висина једног трапеза износи *24 m*., већа основица *80 m* а мања *60 m*; на раздаљини од *6 m* од веће основице повучена је паралелна која одређује два трапеза; одредити површине та два трапеза.

81. Размера двеју оближњих страна једнога правоугаоника је $m : n$ *(3 : 5)*; кад се мања страна умањи за a *(1) m* а већа за толико повећа, површина се умањи за b^2*(7)* m^2. Колике су стране.

82. Разлика дијагонала једнога ромба је d *(9) cm*; кад се мања повећа за m *(3) cm*. а већа умањи за n *(5) cm*, површина ромбова се не мења. Колике су дијагонале?

83. У једном трапезу већа паралелна страна дужа је за *10 cm* од мање а ова је дужа од висине за *6 cm*. Површина трапезова мања је за *48* cm^2 од квадрата над мањом паралелном страном; колика је та страна?

84. У којега је правилна многоугаоника разлика између једног унутрашњег и једног спољашњег угла *150°*?

85. Одреди два правилна полигона такве особине, да је број страна једнога два пут већи од броја страна другога и да је један угао првога већи за 10^0 од једног угла другога.

86. У једном полигону је број страна већи за *m (3)* а број дијагонала за *n (36)* но у другом полигону; који су то полигони?

87. Из једне тачке на круг повучена дирка мања је за *a (16) cm* од сечице кружне из исте тачке, али је дирка већа за *b (8) cm* од већег одсечка сечичина. Колика је дирка?

88. Запремина једнога правоугла паралелопипеда, којег се ивице разликују за по *a (3) cm*, мања је за $b\,(63)\,cm^3$ од коцке којој би ивица била једнака са средњом паралелопипедовом ивицом. Колике су ивице?

89. Омотачка површина једне праве облице износи $\frac{3}{5}$ њене целе површине. Колики је полупречник кружне основе, кад је он мањи од висине за *9 cm?*

90. Висина једне праве облице је за *4 (a) cm* већа од полупречника његове основе. Кад би се висина повећала за *2 (b) cm* а полупречник умањио за исту дужину, тада би размера површине нове облице спрам старе била као *5 : 9 (m : n)*. Одредити полупречник и висину.

91. Над истим кругом налази се једна полулопта и једна купа, чија је висина за *a (4 cm)* већа од полупречника лоптина док је размера њене запремине спрам полулоптине запремине *m : n (5 : 9)*. Колики је полупречник полулоптин?

---

92. Два тела *k'* и *k''* крећу се по правој линији истим правцем од тачака *A'* и *A''* сталним брзинама *c'* и *c''*. Тело *k'* пође из тачке *A'*, која је за *d* јединица дужине иза тачке *A''*, за *t* јединица времена доцније, но што тело *k''* пође из тачке *A''*. Кад ће се и где ће се оба тела састати? (дискусија резултата).

93. Из места *A'* крене се у *5* ч. изјутра један воз, који прелази *105 km* за *4,5* ч. Пола часа доцније крене се за првим возом други воз из *A''*, које је место иза *A'* *52,5 km.* Кад ће се возови стићи, кад други прелази *105 km* за *3* часа?

94. Коњаник треба да однесе заповест батаљону, који је отпутовао пре *6* дана а прелази дневно *28 km.* На којој ће даљини од заједничке полазне тачке стићи батаљон, кад коњаник прелази дневно *84 km.?*

95. Два тела крећу се из исте тачке истим правцем. Брзина првога је *c* мет, друго, које се почиње кретати *t* секунада доцније, има брзину *c'* мет. После колико ће времена, рачунајући од поласка другог тела, оба тела бити удаљена *d* метара?

96. Од *A'* до *A''* има *315 km.* У подне се крену путничка кола из *A'*, прелазећи *10 km* за час. Колико часова раније мора поћи пошта из *A'*, кад она прелази само *6 km* за час, да би у исто време стигла у *A''* кад и путничка кола?

97. Два тела крећу се једно према другом из две тачке, које су удаљене *d* метара. Њихове су брзине *c'* и *c''*. Прво се почиње кретати *t* секунада раније од другога. Кад ће се и где ће се оба тела састати?

98. Места *A'* и *A''* везана су железницом а крајње тачке удаљене су *225 km.* Из *A'* полази у *A''* један путнички воз с брзином од *30 km* на час; у исто време крене се из *A''* у *A'* теретни воз, који прелази *20 km* на час. Кад ће се возови срести?

99. Коњаник *M'* иде из *A'* у *A''*, други коњаник *M''* иде из *A''* у *A'*. *M'* крене се на пут 5 дана раније од *M''*, али овај прелази дневно *20 km.* више од *M'*. Кад су се они срели на 3 дана по одласку *M''*, прешао је *M'* управо двапут толики пут колики је прешао *M''*. Колико је километара дневно свако прелазио и колико су удаљена места *A'* и *A''*?

100. Места *A'* и *A''* удаљена су 152 *km.* Из *A'* пође у *A''* воз у 8 ч. и 30 м. пре подне брзином од 10 *m* у секунди; истога јутра у 9 ч. и 15 м. пође из *A''* у *A'* воз брзином од 9 *m* у секунди. Кад ће се срести ти возови и на којој даљини од *A''*?

101. Из *A'* пође један коњаник у *A''*; он прелази дневно 105 *km.* У исто време упућен је у *A'* из *A''* коњаник, који треба првога да сретне после 5 дана. Колико километара дневно мора прелазити други коњаник, кад је од *A'* до *A''* 1125 *km.*

102. У 8 часова изјутра пођу путничка кола из *A'* у *A''* прелазећи за час 9 *km;* у 2 ч. 20 м. по подне пође из *A''* воз железнички дуж главнога друма, прелазећи за час 30 *km,* па стигне у исто доба у *A'* кад и кола у *A''*. Колика је даљина између *A'* и *A''*?

103. Два тела крећу се једно према другом из тачака *A'* и *A''*, које су удаљене *d* метара. Ако се прво почне кретати *t'* часова раније онда се састану *T'* часова по одласку другога тела; ако ли се друго почне кретати *t''* часова раније, онда се састану *T''* часова по одласку првога. Колико метара прелази свако тело за један час?

104. Из два места пођу два весника једновремено један другом у сусрет. Један би прешао цео пут за t (15) часова, а други за t' (10) часова. Кад ће се срести?

105. Два тела крећу се по периферији једнога круга једновремено из исте тачке у супротном правцу. Једно прелази у свакој секунди лук од α^0 (3^0 12' 30''), друго од β^0 (1^0 17' 30''); после колико ће се секунада она срести први пут, други пут, n-ти пут?

106. Колико времена протече од једнога поклапања обеју казаљака на часовнику до њиховога најближег поклапања?

107. У колико ће се минута после 4 часа минутна казаљка поклопити са часовном казаљком?

108. Два тела крећу се из исте тачке по периферији једнога круга непромењљивим кретањем а у истом смислу; прво обиђе периферију за t секунада и састаје се с другим сваких T секунада. За колико времена обиђе друго тело периферију једанпут?

109. По обимима два концентрична круга крећу се два тела у истом правцу; једно прелази свој круг за 27,322.. дана, а друго за 365,24.. дана. Колико времена протече од оног доба кад се она налазе на истом полупречнику док се то не понови?

110. Из једне тачке на обиму кружном крећу се два тела једновремено у супротном правцу; једно пређе обим за t секунада, друго за t' секунада. Кад ће се она срести први пут, кад други пут, n-ти пут?

111. Два тела крећу се по периферији кружној у супротном правцу. Времена њихова оптицања су m секунада и n секунада, а њихова почетна раздаљина је d метара. Кад се она први пут сретну после t секунада, колика је периферија кружна? Колико времена протече између два сусрета?

---

17. Примена једначина првога степена са две или с више непознатих.

1. Кад се и бројитељу и именитељу једнога разломка дода *7*, његова је вредност $\frac{4}{5}$; ако ли се од бројитеља и од именитеља одузме 2, вредност му је $\frac{1}{2}$. Који је то разломак?

2. Кад се бројитељ и именитељ једнога разломка повећају за *1 (a)*, вредност разломка постане већа за $\frac{1}{15}$ *(m)*; али ако се бројитељ и именитељ разломка умање за *1 (a)*, тада вредност разломка постане мања за $\frac{1}{10}$ *(n)*. Који је то разломак?

3. Одреди два таква броја, да се њихова разлика, збир и производ имају као $m : n : p$ *(1 : 2 : 3)*.

4. Кад се један број подели другим добива се *2* за количник и *7* за остатак; ако ли се збир та два броја подели њиховом разликом добива се *2* за количник и *5* за остатак. Који су то бројеви?

5. У очи једне битке бројно стање двеју армија било је као *5 : 6;* кад је прва армија изгубила 14.000 људи а друга 6.000, онда је бројно стање било као *2 : 3*. Колико је било људи у свакој армији?

6. Која су два броја таква, да кад се први повећа за 4 а други за толико умањи, производ се повећа за *20;* напротив, производ се њихов не мења кад се први број умањи за *9* а други увећа за *15?*

7. Два двоцифрена броја имају исте цифре а њихова је размера *3 : 8;* који су то бројеви, кад је збир њихових цифара *9?*

8. Кад се једном двоцифреном броју дода његова деветострука јединица добива се *80;* ако ли му се дода *18* добива се број, којега цифре иду обрнутим редом према цифрама датога броја. Који је то број?

9. Збир два троцифрена броја је *999*. Кад се најпре један број напише испред другога, затим други испред првога, добиће се два шесто-цифрена броја, од којих је мањи шестина већега. Који су то бројеви?

10. Два двоцифрена броја имају ову особину: ако се први стави лево пред други, па се тако добивени број подели другим, добиће се за количник *64* и за остатак *38;* ако ли се напротив други број стави пред први па се нов број подели првим добива се *158* за количник и *21* за остатак. Који су то бројеви?

11. Збир цифара једнога троцифрена броја је *17*. Прва цифра лево четвртина је од броја из друге две цифре, а прва цифра десно деветина је од броја из две цифре лево. Који је то број?

12. Збир цифара једнога троцифрена броја је 18. Кад јединице промене место са стотинама, тада је нови број за *396* већи од првобитног броја; ако ли десетице промене место са стотинама, онда се тај број повећа за *180*. Који је то број?

13. Поделити *9246* динара на четири лица тако да ако прво добије 2 динара друго да добије 3 динара, а кад друго добије

5 дин треће добије 6; најзад, кад четврто добије 4 дин. треће добије 3.

14. У два бурета има по нека количина вина. Кад се из првог бурета оточи у друго толико колико већ у њему има, за тим из другога у прво толико колико сада у њему има, па онда опет из првога у друго толико колико је у њему преостало, биће у оба бурета подједнако вина, то јест по 72 литра. Колико је литара било у сваком бурету?

15. Њутн је рођен у XVII веку а умро је у XVIII веку. Одредити годину његова рођења као и годину његове смрти, кад се зна да је број начињен из две последње цифре из године рођења, повећан за 12, двапут већи од броја који је начињен из две последње цифре из године смрти, а овај други број из две цифре повећан за јединицу износи $^2/_3$ првога броја.

16. Тројица се играју неке игре и у првој игри изгуби први и плати осталој двојици по онолико колико је сваки имао; у другој изгуби други и плати првом и трећем толико колико сваки од њих има; у трећој изгуби трећи и да̂ сваком колико који има; после свршене игре свако је имао по 24 динара. Колико је било новаца у свакога пре игре?

17. Једна жена понела је јаја на пијацу. Уз пут јој се разбије 10 јаја. Да је могла свако јаје продати за $\frac{1}{2}$ паре скупље, као што је у почетку намеравала, не би имала никакве штете. Али како је успела, да прода само половину јаја по првобитну цену, и како је другу половину морала продати са $\frac{1}{2}$ паре јевтиније, то је добила 60 пара мање но што је очекивала. Колико је јаја имала и по што је било свако јаје?

18. Година када је Гутенберг пронашао штампарију четвороцифрен је број; нађи ту годину, кад се зна, да је збир њених цифара *14*, да цифра на месту десетица износи половину цифре на месту јединица, да је цифра на месту стотина једнака са збиром цифара на месту десетица и хиљада; најзад, кад се том броју дода *4905* добива се број којега цифре иду обрнутим редом.

19. Једна смеса злата и сребра тешка је *1320 gr.*; колико је узето од сваког метала, кад се зна да је вредност сребра у смеси иста као и злата? Још се зна, да при једнакој тежини злато вреди $15\frac{1}{2}$ пута више од сребра.

20. Златар има три врсте злата укупно *5 kgr;* финоћа злата је по реду: *0,920*, *0,850* и *0,800*. Кад би направио легуру из две

прве врсте добило би се злато финоће *0,900* а из две последње врсте добило би се злато финоће *0,820*. Колико је тежак сваки комад?

21. Ако се смеша *6 (a) hl* вина једне врсте са *4 (b) hl* друге врсте, тада *1 l* смеше стаје *88 (m)* пара. Ако ли се смеша *3 (c) hl* прве врсте са *7 (d) hl* друге, тада *1 l* смеше стаје *94 (n)* паре. Пошто је *1 hl* сваке врсте?

22. У три металне шипке има и то:

у првој	*4 dkg* злата,	*8 dkg* сребра,	*12 dkg* бакра,
у другој	*8* „ „	*10* „ „	*2* „ „
у трећој	*10* „ „	*6* „ „	*14* „ „

Од њих се хоће смесом да добије шипка у којој ће бити *10 dkg* злата, *10 dkg* сребра и *11 dkg* бакра; колико треба узети од сваке шипке?

23. Неко има три комада сребра финоће: *0,900*, *0,800* и *0,720* у укупној тежини *2000 g*. Кад он смеша две прве врсте добије се сребро финоће *0,840;* кад смеша другу и трећу врсту, добије се сребро финоће *0,750*. Колика је тежина сваког комада?

24. Два тела са специфичном тежином s_1 и s_2 треба тако спојити да добивено тело буде тешко *p kg* а да му специфична тежина буде *s;* колико килограма треба узети од сваког тела?

25. Колике су специфичне тежине два тела *A* и *B*, кад *a kg* првога и *b kg* другога заједно имају специфичну тежину *s;* напротив, a_1 *kg* првога и b_1 *kg* другога имају специфичну тежину s_1?

26. Круна сиракускога краља Хиерона била је начињена од злата и сребра; она је била тешка *7465 gr*, у води је пак изгубила од своје тежине *467 gr;* кад се зна да злато губи у води $\frac{55}{1000}$ од своје тежине, а сребро $\frac{95}{1000}$ то се пита: колико је било злата а колико сребра у круни?

27. Неки басен може се напунити са две цеви, и то или кад су обе цеви отворене *6* часова, или тим кад је прва отворена *7* часова, а друга *4* часа. За које би се време басен напунио, кад би се пунио сваком цеви засебно?

28. Један басен може се напунити са две цеви R_1 и R_2 за *70 (a)* минута, са цеви R_1 и R_3 за *84 (b)* мин. а са цеви R_2 и R_3 за *140 (c)* мин. За које би се време басен напунио са сваком цеви засебно, а за које са све три цеви у исто време?

29. За неки посао понуде се три радника *A*, *B* и *C; A* и *B* свршили би тај посао заједно за *18* дана, *A* и *C* могли би га свршити за *12* дана, а *B* и *C* заједно за *9* дана. За које би време био посао извршен, кад би сва три радника заједно радила?

30. Кад би се посада у неком гарнизону појачала са *2000* људи, онда би храна трајала *15* дана мање. Ако би се напротив посада умањила са *3000* људи, претекло би хране за *24* дана. Колика је била посада и за које је време спремљено хране?

31. Два радника *А* и *В* могу неки посао да сврше за *20* дана. После *9* дана разболи се *А* стога *В* сврши посао за даља $24^3/_4$ дана. За које би време сваки радник сам тај посао извршио?

32. *А*, *В* и *С* сврше неки посао заједно за *6 (a)* дана, *А* и *В* за *9 (n)* дана, а *В* и *С* за *10 (p)* дана. Колико би времена требало сваком раднику посебно да тај посао сврши?

33. Неко је обавезан да плати *3500* дин. после *1* године. Уместо тога он може да положи одмах *1000* дин., *1500* дин. о неком року доцније, а остатак о другом року; али, он би могао положити одмах *500* дин., *2500* дин. онога истог првог рока и *500* дин. истога другог рока. Израчунати кад падају она два рока?
(Дисконт треба рачунати од крајње вредности).

34. Два капитала, од којих је један уложен по $3^3/_4\%$, а други по 4%, доносе укупно годишње *414,25* дин. интереса. Да је први дат по 4% а други по $3^3/_4\%$, интерес би био већи за *6,95* дин. Која су та два капитала?

35. Један је капитал за *400* динара већи од другога; пошто онај први доноси $^1/_2\%$ мање, то оба доносе једнаке интересе. Да је први капитал дат по проценат другога, а овај по проценат првога, тада би годишњи интерес првог капитала био већи за *30* динара од интереса другог. Који су то капитали?

36. Један је капитал дат по 3% а други по $3^1/_2\%$ и оба доносе укупно *352* дин. интереса годишње. Да су оба капитала дата са $^1/_2\%$ више, годишњи би интерес био већи за *53,5* динара. Колики су ти капитали?

37. *А* има ренту од свог имања $3^1/_2\%$, а *В* чије имање вреди *5400* дин. мање има 4%. Колико је имање свакога, кад је годишњи интерес од имања *В* за *2* дин. већи но интерес од имања *А*?

38. Нека госпођа купи *10 m* сомота и *12 m* свиле и за све плати *347,90* динара по одбитку 2% од цене робе. После неког времена она купи још *4 m* сомота и *6 m* свиле, па по одбитку 4% она плати *146,30* дин. Колика је цена метра свиле а колика сомота?

39. Два места удаљена су *133 km;* из њих полазе једновремено два воза па се сретну после $3^1/_2$ ч. Да је један воз пошао *19* мин. пре другога, они би се срели већ после *3* ч. и *21* мин. по одласку другог воза. Колико километара прелази сваки воз за *1* час.

40. Из две *60 km* удаљене станице полазе два воза један другом у сусрет, али први воз пође *10* мин. раније од другога. На *50* минута по одласку другог воза возови су удаљени *6 km;* после даљих *10* минута они су после сусрета опет удаљени за *3,8 km*. Колики пут прелази сваки воз у *1* минути?

41. Два бициклиста *А* и *В* полазе из два места, удаљена *2 km*, у истом правцу. Ако једновремено пођу онда *А* стигне *В* после *50* минута; али, ако *В* пође 5 минута раније, онда *А* стигне *В* тек после *75* минута по свом поласку. Колико метара прелази свако у минути?

42. Један бициклист пође у *8* часова из места *А* у друго место *В* удаљено *15 km*, па се одмах врати у *А*. Један пешак пође у *8* ч. и *20* м. из *В* у *А*. Бициклист је срео пешака у *9* часова, па га је затим стигао у *9* ч. и *48* мин. Колико је метара прелазио у минути бициклист а колико пешак?

43. Кад се две тачке крећу једновремено из истог места и у истом смислу по обиму једнога круга, оне се поклапају увек после *15* секунада; ако ли се крећу супротним смислом, оне се поклапају увек после *3* секунде. Колико лучних степена прелази свака тачка у секунди?

44. Два места удаљена су *54 (a) km;* из њих иду два весника *А* и *В* један другом у сусрет. Ако пођу једновремено, они се сретну после *6 (m)* часова. Пође ли *А 3 (n)* часа раније, њему треба још $7^2/_3$ *(p)* часова да иде па да се сретне с *В*. Колико километара прелази свако у *1* часу?

45. Два тела удаљена су *80 m*. Кад се она крену једновремено супротним правцем, удаљена су само *4 m* после *8* минута; ако ли се једновремено крену истим правцем, онда се брже тело тек после *50* мин. и *40* сек. приближи оном другом на исту даљину од *4 m*. Колико метара прелази свако тело у минути?

46. Три угла једног троугла имају се као $m:n:p$ $(5:9:10)$; колики су они?

47. Збир обеју катета правоуглог троугла је s *(223 m);* кад се мања катета повећа за d *(60 m)* а већа умањи за e *(90 m)* тада се површина увећа за m *(1950 m^2)*. Колике су катете?

48. Кад се једна катета правоуглог троугла повећа за *8 cm* друга за *2 cm*, тада се квадрат хипотенузин повећа за *144* cm^2 а површина за *24* cm^2. Одреди стране троуглове!

49. Два правоугла троугла имају једнаке хипотенузе. Једна катета првог троугла мања је за *4 m* а друга већа за *8 m* од катета другог троугла; кад је површина првог троугла већа од површине другог троугла за *34* m^2, колике су катете?

50. Површина једнога правоугаоника бива већа за $27 m^2$, кад му се основица повећа за $2 m$ а висина за $1 m$, напротив, површина је већа за $29 m^2$, кад се основица повећа за $1 m$ а висина за $2 m$. Израчунај основицу и висину!

51. Обим једнога равнокрака троугла је u *(64) cm* а висина основичина h *(24) cm;* колика је основица и колики је крак?

52. У једном троуглу је збир двеју страна *42 dm*, збир висина тих страна износи *40,32 dm* а збир из једне стране и њене висине је *41 dm*. Колике су те стране?

53. Размера основице и висине једног троугла је $m:n$ *(6:5);* ако се оне повећају са d *(9 cm)*, онда је површина новог троугла за p *(189 cm²)* већа од површине првобитног троугла. Колика је она?

54. Израчунати површину трапеза, кад се зна да је висина једнака с полузбиром његових основица, даље, да разлика основица износи *1 m* и да је већа основица једнака с хипотенузом онога правоуглог троугла којега би једна катета била мања основица трапезова а друга катета — његова висина.

55. Површина једног ромба повећава се за *324 cm²*, кад се свака дијагонала повећа за *6 cm;* напротив, она се повећава само за *54 cm²*, кад се једна дијагонала повећа за *6 cm*, а друга се умањи за *4 cm*. Колике су дијагонале?

56. Разлика средишних углова два једнака кружна сектора с полупречницима *20 cm* и *16 cm* износи 27°; колика су та два угла?

57. Ширина кружнога прстена је d. Свака тетива већег круга која додирује мањи круг дугачка је s. Израчунај полупречнике кружне!

58. У троуглу са странама a, b, c повући једну паралелну са страном a тако, да обим троуглов буде преполовљен. У каквој су размери подељене стране b и c и колики су одсечци на тим странама?

59. Ако се повећају три ивице, које се стичу у једно теме правоуглог паралелопипеда, за *1, 2, 3 cm*, тада се квадрат дијагонале повећава за *142 cm²;* ако ли се ивице повећају за *3, 2, 1 cm*, или за *2, 3, 1 cm*, тада се у оба случаја квадрат дијагонале повећава за *130 cm²*. Колике су ивице?

60. Висина једне правилне четворостране зарубљене пирамиде износи *15 cm*. Кад се већа основна ивица повећа за *3 cm* а мања за *5 cm*, тада је разлика основних површина иста, док се запремина тела повећава за *705 cm³*. Колике су основне ивице?

---

18. Степени

$$1^n = 1. \qquad 0^n = 0. \qquad (-a)^{2n} = a^{2n}. \qquad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

1. $(-a)^4 - (-a)^3.$ **2.** $(-a)^6 - (-a)^4.$

3. $(-2)^3 + (-3)^2 + (-1)^5 - (-2)^2 - (-1)^4 + (-2)^2.$

4. $(-2)^2 \cdot (-3)^3 - (-2)^4 \cdot (-4)^2 \cdot (-1)^3 - \frac{(-4)^3}{(-2)^6}.$

5. Израчунај: $2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ за $x = -2$.

6. Израчунај: $(x-1)^5 - (x+1)^4 - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+3)^3}$ a) за $x = -2$; b) за $x = -1$.

7. Израчунај: $\frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ a) за $x = -2$; b) за $x = -1$.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

8. $a^{3n} \cdot a.$ **9.** $a^{3n} \cdot a^3.$ **10.** $a^{3n} \cdot a^n.$

11. $a^x b^x a^{3x} b^{2x}.$ **12.** $a^{m-1} a^{n+1} \cdot a^{m+n} b^{3m-2n} \cdot b^{2m+3n}.$

13. $4a^{2x+y} b^{x-2y} \cdot 5a^{x-4y} \cdot b^{3y-2x} \cdot 2a^3 b.$

14. $(-a)^4 \cdot (-a)^3.$ **15.** $(-a)^{2m+1} \cdot (-a)^{2n-1}.$

16. $a^{4n-2} (-b)^{2n-3} \cdot (-a)^{2n+4} b^{6n}.$

17. $(-a)^{4n-2} b^5 \cdot a^7 (-b)^{11-2n}.$

18. $3(a+b)^3 \cdot 4(a+b)^2.$

19. $a^3 (a+b)^{2n+1} \cdot (a-b)^{n+1} \cdot a^n (a+b)^{n+1} (a-b)^{2n+2}.$

20. $(-a)^n b^{5-n} c \cdot (-a)^{n+3} b^{5+2n} c^n \cdot (-a^n b^{n-7} c^{2n}).$

21. Израчунај: $2^{13} (= 256 \cdot x).$

22. Израчунај 3^8 помоћу $3^5 = 243.$

23. $x(x-1)^n x^n (x-1)^3 x^{n+3} \cdot (x-1).$

Проба за $x = -2$, $n = 2$.

24. $(a-b)(b-a)^2.$ **25.** $(a-x)^n \cdot (x-a)^{2n+1}.$

26. $(a-b-c)^{n-1} (b+c-a)^{2n-2}.$

27. $(a-b+c)^{2n} (b-a-c)^{2n-1}.$

28. $(x^{3a-b} - x^{2a} + x^{a+b} - x^{2b} + x^{3b-a})(x^a + x^b).$

29. $(x^{3m} - x^{2m} + x^m - 1)(x^m + 1).$

30. $(x^{2m} + 2x^m y^n + 4y^{2n})(x^m - 2y^n).$

31. $(4a^n - 2a^{n-1} b + a^{n-2} b^2)(3a^3 b^{n-1} - 4a^2 b^n - ab^{n+1}).$

32. $\left(\frac{3}{4}x^m - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{9}x^m - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{25}x^m + \frac{3}{5}\right)$.

Растави на чинитеље:

33. $8m^8 - 16m^5 + 24m^3$.

34. $x^{2n} - x^n$.

35. $x^{2m} - x^{3m+1} + x^{4m+3}$.

36. $x^{m+4} + 3x^{m+2} + 4x^{m-1}$.

37. $x^n - x^{n-1} + x^{n-2}$.

38. $a^{n-1} - 2a^{n-2}b + a^{n-3}b^2$.

39. $a^{n+1}b^{n-1} - a^{n-2}b^{n+2}$.

40. $32a^{n+3}b^{2n-3} + a^{n-2}b^{2n+2}$.

41. Скупи: $\frac{a^n}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{a^2-b^2} - \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a^3+b^3}$.

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

42. a) $x^{10} : x$. b) $x^n : x$. c) $a^{m+n} : a^{m-n}$.

43. Скрати: a) $\frac{a^2}{a^{11}}$. b) $\frac{a^3}{a^{x+4}}$ c) $\frac{a^{m-n}}{a^{m+n}}$.

44. $6a^{m+n} : 2a^n$.

45. $9a^{2n+1} : 3a^3$.

46. $(-a)^7 : -(-a)^5$.

47. $(-a)^9 : -a^4$.

48. $\frac{a^{m+n-4}}{a^{m-n+4}}$.

49. $\frac{(a+b)^{5x+y}}{(a+b)^{4x+y}}$.

50. $\frac{(a-1)^3(b-1)^4}{(1-a)^2\cdot(1-b)^3}$.

51. $\frac{a^9(x-y)^2}{(-a)^3(y-x)^5}$.

52. $\frac{a^n b^n(a-1)}{a^{n-1}b^{n-2}(1-a)^3}$.

53. $\frac{a^2b^2(a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}$.

54. $\frac{5ax^4}{6by^3}\cdot\frac{b^2x^2}{ay}\cdot\frac{3a^2y^4}{5b^3x^3}$.

55. $\frac{8a^6xy^4}{3bc^2z^5} : \frac{4a^5x^3y}{5b^2cz^4}$.

56. $\frac{9a^3b^3}{16x^3y^{m-4}}\cdot\frac{4a^{n-1}x^{n+1}}{15b^{n+1}y^{n-m}}\cdot\frac{7x^2}{12a^2}$.

57. $\frac{5a^{m-1}b^{m-2}}{3x^{n+1}y^{n+2}} : \frac{3a^{m-2}x^5}{2b^3y^{n-5}}$.

58. $(9a^{2m+3}b^{m-1} - 12a^{m+n}b^{m+1}) : 3a^{m+3}b^{m-n}$.

59. $\left(9x^{2m+2} - 2x^{m+1} + \frac{1}{9}\right) : \left(3x^{m+1} - \frac{1}{3}\right)$.

60. $(a^{2n} - b^{2n}) : (a^n + b^n)$.

61. $(x^{3m} - y^{3m}) : (x^m - y^m)$.

62. $(x^{3m} + y^{3m}) : (x^m + y^m)$.

63. $(x^{4m} - y^{4m}) : (x^m + y^m)$.

64. $(a^{3n} - 2a^{2n} + 4a^n - 8) : (a^n - 2)$. Проба за $a = -2$, $n = 2$.

65. $(x^{3m-n} - x^{2m} + x^{2n} - x^{3n-m}) : (x^m - x^n)$.

66. $\left(6a^{4m} - 5a^{3m} - \frac{7}{6}a^{2m} + \frac{5}{6}a^m + \frac{1}{6}\right) : \left(3a^{2m} - a^m - \frac{1}{3}\right)$.

67. $(a^8 - b^8) : (a^5 + a^4b + ab^4 + b^5)$.

Остали задаци у чл. 7 под бр. **85—110**.

Скрати разломке (68—72):

68. $\frac{a^6+b^6}{a^4-a^2b^2+b^4}$.

69. $\frac{a^6-b^6}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

70. $\frac{a^{n+1}-a^{n-1}}{a^{p+1}-a^{p-1}}$.

71. $\frac{a^{n+2}-2a^n+a^{n-2}}{a^{n+2}+a^{n+1}+a^n+a^{n-1}}$.

72. $\frac{a^{n+2}-2a^n+a^{n-2}}{a^{n+2}-a^{n+1}+a^n-a^{n-1}}$.

73. $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}}$.

74. $\frac{1-2x^4}{x^n} - \frac{1-3x^2}{x^{n-2}} - \frac{4}{x^{n-4}}$.

75. $\frac{a^2b}{(a+b)^m} - \frac{b}{(a+b)^{m-2}}$.

76. $\frac{a^n}{(a-b)^{n+1}} - \frac{b^{n-2}}{(a-b)^{n-1}}$.

77. Одреди најв. зај. делитељ за $x^{3n} - 64y^{6p}$ и $x^{2n}y^{3p} - 16y^{7p}$.

$(ab)^m = a^m b^m$.

78. a) $(2ax)^3$, b) $(7x)^3\cdot(3y)^4\cdot(2az)^5$,
c) $(ab)^{m-2n}\cdot(ac)^{2m-n}\cdot(bc)^{m-n}$.

79. a) $(-4b)^2\cdot(3x)^3$, b) $(5x)^3\cdot(-2y)^4$,
c) $(-8a)^2\cdot(-3b)^5$.

80. $(-ax)^5\cdot(-by)^3\cdot(abxy)^{n-3}$.

81. $\frac{(3ab)^5\cdot(2ac)^6}{(6bc)^3\cdot(2a)^2\cdot(3b)^3\cdot(4c)^4}$.

82. α) $2^7 . 5^7$, β) $25^4 . 4^4$, γ) $2^6 . 4^6 . 125^6$, δ) $5^7 . 2^{10}$.

83. $(x+a)^4(x-a)^4$.

84. $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n . a^n$.

85. $\left(\frac{2a}{5x}\right)^3 . \left(\frac{15x}{2a}\right)^3$.

86. $x^n . \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

87. $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2 . \left(-\frac{2b}{5a}\right)^2$.

88. $\left(\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}\right)^m . \left(\frac{c+d}{a-b}\right)^m$.

89. $\left(\frac{a^4-b^4}{c+d}\right)^m . \left(\frac{c^2-d^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}\right)^m$.

90. $\left(\frac{a+b}{m+n}\right)^3 . \left(\frac{a-b}{m-n}\right)^3 . \left(\frac{m^2-n^2}{a^2-b^2}\right)^2$.

91. $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^3 . \left(\frac{x+c}{x-a}\right)^3 . \left(\frac{b^2-x^2}{c^2-x^2}\right)^2$.

92. $\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^3 . \left(\frac{b-c}{b-a}\right)^3 . \left(\frac{c-a}{c-b}\right)^3$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \qquad \frac{1}{a^m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m.$$

93. α) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4$, β) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^5$, γ) $\left(6\frac{3}{4}\right)^2$.

94. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 - (-0,1)^3 + (-0,2)^4 - (-0,25)^3$.

95. $\left(\frac{ab}{2cd}\right)^4 \cdot \left(\frac{2c}{3ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{3bc}{5a}\right)^2$.

96. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2n+1} \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a+b}\right)^{n-1}$.

97. $\left(\frac{2ax-3by}{3b}+y\right)^4$.

98. $\left(1-\frac{2bx-3a}{2bx}\right)^5$.

99. α) $6^8 : 3^8$, β) $\left(-3\frac{3}{5}\right)^4 : \left(-1\frac{1}{5}\right)^4$, γ) $4,725^2 : 1,26^2$,

δ) $\left(-4\frac{2}{5}\right)^5 : \left(2\frac{1}{5}\right)^5$, ε) $\left(9\frac{3}{5}\right)^7 : \left(1\frac{11}{25}\right)^7 : \left(6\frac{2}{3}\right)^7$.

100. $(8ab)^4 : (2b)^4$.

101. $(x^2-y^2)^m : (x-y)^m$.

102. $x^n : \left(\frac{1}{y}\right)^n$.

103. $\left(\frac{3ax}{4by}\right)^5 : \left(\frac{2x}{3b}\right)^5$.

104. $\left(\frac{a-b}{a}\right)^m : \left(\frac{a+b}{a}\right)^m$.

105. $\left(x-\frac{y^2}{x}\right)^n : \left(\frac{x}{y}+1\right)^n$.

106. $\frac{1}{0,1^2} - \frac{1}{(-0,2)^3} + \frac{1}{(-0,5)^4} + \frac{1}{0,25^3}$.

107. Израчунај: $\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^3+2x^2+4x+8}$ за $x = -\frac{1}{2}$.

$$(a^m)^p = a^{mp} = (a^p)^m.$$

108. α) $(-2^2)^3$, β) $[(-2)^2]^3$, γ) $(-2^3)^3$, δ) $[(-2)^3]^3$.

109. α) $[(-y)^3]^5$, β) $(-a^2)^3$, γ) $(-a^3)^2$.

110. α) $[(-z^2)^3]^4$, β) $(-a^3)^{2n}$, γ) $(-a^{2n})^3$.

111. α) $(-a^{2m})^{2n-1}$, β) $(-a^{2n-1})^{2m}$,

γ) $(-a^2)^{2n-1} \cdot (-a^{2n-1})^2 \cdot (-a^{2n-1})^3$.

112. $(m^3)^4 \cdot (-n^2)^6$.

113. $\left(\frac{a^2b^3}{cd^4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3ab^2}{2c^2d}\right)^5$.

114. $(a^{m+n}b^{m-n})^{m+n}$.

115. $\left(\frac{a^4b^5c^2}{x^5y^7}\right)^3$.

116. $\left(\frac{3c^3x^2}{4a^2b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{10a^4b}{9c^3x^2}\right)^3$.

117. $[(xy^2)^2 \cdot z^2]^2$.

118. $(3a^2 \cdot 2b^2)^4 \cdot (4ab)^3$.

119. $\left(\frac{3x^2}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{3y^2}{4x}\right)^2$.

120. $\frac{(a^2x^3)^3}{(ax^2)^3}$.

121. $\frac{(a^3b^4)^2}{(a^4b^3)^3}$.

122. $\frac{(2^3)^4}{4^4}$.

123. $\frac{(3^3)^3}{9^4}$.

124. $\left(-\frac{3a^3x}{4b^2y^2}\right)^4$.

125. $\left[\left(-\frac{ab^2x^3}{c^3d^2z}\right)^3\right]^2$.

126. $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$.

127. $[(x+3y)^{2n+1}]^{3n-2} : [(x+3y)^{2n-3}]^3$.

128. $\left(\frac{a^4b^3c^2}{x^5y^7}\right)^3 : \left(\frac{a^3b^4c}{x^4y^6}\right)^4$.

129. $\left\{\frac{(2x^3y^2)^3 \cdot (3x^4y^3)^2}{6x^2y^2}\right\}^3$.

130. $\left(\frac{2a^2x^3}{3by^3}\right)^3 : \left(\frac{5b^2y}{6ax^2}\right)^2 : \left(\frac{4a^2}{3b^2}\right)^4$.

131. $\left\{\frac{(2cy^2)^5 \cdot (3x^2z^2)^4 \cdot (5y^3z)^3}{(10x^3y^2)^2 \cdot (6y^2z^3)^3}\right\}^2$.

132. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3}{9x^2y^{2n-1}}\right)^2 : \left(\frac{2a^nb^2}{3xy^{n+1}}\right)^3$.

133. Растави на чинитеље: a) a^6+b^6, b) $a^{10}+1$, c) $a^{12}+b^{12}$.

134. Исто тако: a) $x^{2m}-y^{2p}$, b) x^6-y^{12}, c) a^6+y^{12}.

135. Исто тако: a) x^3-y^6, b) x^3+y^6, c) x^2-y^6.

Подизање на квадрат (чл. **123** и **124**)

Задаци у чл. 5. бр. 106—125, 170—173.

136. $(x^m-y^n)^2$.

137. $(5a^2-4x^2)^2+(5a^2+4x^2)^2$.

138. $(5x^3-6y^3)^2$.

139. $(4+2y-y^2)^2$.

140. $(3x^4-2x^2y^2-y^4)^2$.

141. $(8x^4-4x^2+2)^2$.

142. $(6x^3-5x^2+4x-3)^2$.

143. $(27x^6-54x^4+36x^2-8)^2$.

144. $(3a^{n-1}b^3-2ab^{n+1})^2$.

145. $(a^{2n}-2a^n+4)^2$.

146. $\left(2-\frac{a}{2}+\frac{2a^2}{3}\right)^2$.

147. $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4c}-\frac{4c}{5d}\right)^2$.

148. $\left(\frac{3y^2}{4b^2}+\frac{2y}{3b}-\frac{1}{2}\right)^2$.

149. $(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$.

150. $[(a+x)^2+(b-y)^2]^2-[(a+x)^2-(b-y)^2]^2$.

151. 5019^2. **152.** 70902^2. **153.** 73215^2. **154.** 135709^2.

155. $5,91^2$. **156.** $0,887^2$. **157.** $0,738\ldots^2$. **158.** $0,1509\ldots^2$.

159. π^2 (4 дец.). **160.** 307^4. **161.** $0,59371\ldots^4$.

162. a) $99^2=(10^2-1)^2$, b) 999^2, c) 9999^2.

163. a) 96^2. b) 998^2, c) 9995^2.

164. Кад је x врло мали број чиме се може приближно заменити: a) $(1+x)^2$, b) $\frac{1}{(1+x)^2}$?

Подизање на куб (чл. **125** и **126.**)

Задаци у чл. 5, бр. 174—179.

165. $(a^2-3b^3)^3$. **166.** $(mx^6-nx^3)^3$. **167.** $(2a^x+3a^y)^3$.

168. $(y^2+2y-3)^3$. **169.** $(x^2-3xy+2y^2)^3$.

170. $(x^2-abx+a^2b^2)^3$. **171.** $(3a^{n-1}b^3-2ab^{n+1})^3$.

172. $(x^n-2)^3$. **173.** $(a^{2n}-2a^n+4)^3$.

174. $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}-1\right)^3$. **175.** $\left(4a-\frac{2x^2}{3a}+\frac{9x^4}{8a^3}\right)^3$.

176. $(1-6x+9x^2)^3$. **177.** $(a^4-2a^2b^2+b^4)^3$.

178. 1585^3. **179.** 6045^3. **180.** 20704^3.

181. 90216^3. **182.** $45,09^3$. **183.** $11,11^3$. **184.** $101,01^3$.

185. $0,858\ldots^3$. **186.** $0,8079\ldots^3$. **187.** 15^9. **188.** $0,65^6$

189. a) $99^3=(10^2-1)^3$ b) 999^3, c) 9999^3.

190. a) 98^3, b) 998^3.

191. Кад је x врло мали број чиме се може приближно заменити: a) $(1+x)^3$, b) $\frac{1}{(1+x)^3}$?

$$\mathbf{a^0=1;\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n}.$$

Одреди вредности ових степена:

192. a) 1^0, b) $a^4 . a^0$, c) $3a^0$, d) $(3a)^0$, e) $3(a-b)^0$.

193. a) 1^{-1}, b) 2^{-6}, c) 6^{-2}, d) 4^{-3}, e) 9.3^{-2}.

194. a) 16.4^{-3}, b) $25^3.5^{-4}$, c) $0,4^{-1}$, d) $0,125^{-3}$.

195. a) $\frac{1}{3^{-4}}$, b) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$, c) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-6}$, d) $\left(\frac{15}{16}\right)^{-1}$, e) $\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{m}{x}\right)^{-2}$.

196. $\frac{(-2)^{-3}}{(-0,2)^3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}.(-3)^{-2}.0,1^{-1}$.

197. $(-2)^5.(-.5)^{-2}.(-3)^0.(-6)^{-1}$.

198. Израчунај $(x-1)^3-(x+2)^{-2}-\frac{1}{(x+1)^{-4}}+$
$+(x+3)^3+x^{x+3}$ за $x=-3$.

199. $3.10^2+2.10^1+5.10^0+4.10^{-1}+7.10^{-2}$.

200. Ослободи негативних изложитеља:

a) $2x^2y^{-2}$, b) $3a^3b^{-3}$, c) $ab^{-1}x^{-1}y$,
d) $\frac{ax^{-m}}{by^{-m}}$, e) $\frac{3a^2m^{-3}y^{-1}}{4b^2n^{-2}x^{-2}}$, f) $\frac{13a^{-2}b^{-1}c^5}{8x^3y^{-5}z^{-2}}$.

201. Ослободи дате изразе њихових именитеља:

a) $\frac{5x}{y}$, b) $\frac{2ax^{-2}}{b^{-1}}$, c) $\frac{m^3x^2}{y^3z^{-2}}$, d) $\frac{12a^{-4}b}{25x^{-3}y^2}$.

Израчунај и резултате представи с позитивним изложитељима:

202. $a^5 . a^{-3}$. **203.** $x^{m+2}.x^{-3}$. **204.** $(-3a^{-5}).(-2a^{-1})$.

205. $(-5a^{-3}b^{-2})(-4a^2b^{-1})(-a^2b^2)$.

206. $(-5\frac{1}{2}a^{-5}b^2)(-8a^3b^{-5})$. **207.** $x^{n-3}:x^{-5}$.

208. $a^{-4}:-a^4$. **209.** $-4a:a^{-4}$.

210. $6a^3b^{-2}:2a^4b^{-3}$. **211.** $36a^{-1}b^{-2}c^{-3}:6a^{-2}b^{-3}c^{-4}$.

212. $(x-y)^{-2}:(y-x)^{-1}$. **213.** $(x-y)^{-3}:(y-x)^2$.

214. $(x-y)^n:(y-x)^{-3}$. **215.** $(x-y)^3:(y-x)^{-2n}$.

216. $(x-y)^{-2}.(y-x)^{-3}$.

217. $(ax^{-4}+bx^{-3}+cx^{-2}+dx^{-1}+e).x^4$.

218. $(8x^2+3x^{-2})(2x^2-1-2x^{-2})$.

219. $(12x^2+3x-4-5x^{-1})(3x-7-2x^{-1})$.

220. $(x^{-1}y^{-5}-2xy^{-3}+3x^3y^{-1})(3x^{-1}y^{-5}+2xy^{-3}-x^3y^{-1})$.

221. $(a^{-5}+b^{-5}):(a^{-1}+b^{-1})$.

222. $[15x^{-(m+3)}-31x^{-(m+2)}+14x^{-(m+1)}]:(5x^{-3}-7x^{-2})$.

223. $(x^{-2})^4$. **224.** $(x^{-1})^{-1}$. **225.** $[(x^{-m})^n]^{-p}$.

226. $(-a^3)^{-2n}$. **227.** $(-a^{-2})^{2n-1}$. **228.** $(-a^{2n-1})^{-2}$.

229. $(a^{-3}b^4)^{-2}$. **230.** $(3a^2b^{-1}x^3y^{-1})^3$. **231.** $-2x^{-3}y^3z^{-1})^4$.

232. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{-2}$. **233.** $\left(\frac{2a^2b^2}{3mx^{-2}}\right)^{-1}$. **234.** $\left(\frac{1}{x}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{-6}$.

235. $5^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$. **236.** $(5a^{-1})^{-2}.(3b)^{-2}$.

237. $(-a^2)^{-5}-(-a^5)^{-2}$. **238.** $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{-m}:\left(\frac{x}{x-y}\right)^{-m}$.

239. $\frac{(a^2b^{-1})^{-1}}{(x^2y^{-2})^{-1}}$. **240.** $(x+x^{-1})(x-x^{-1})$.

241. $(3x^2+2x^{-2})(3x^2-2x^{-2})$. **242.** $(x+x^{-1})^2$.

243. $(3x^2-2x^{-2})^2$. **244.** $(3a^{-3}x^2-4a^2x^{-3})^2$.

245. $(2x+3x^{-1})^3$. **246.** $(x^2+x^{-2})^3$.

247. $(a^n-2a^{-n})^3$. **248.** $[(x^2+x^{-2})^2]^2$. **249.** $[(x-2x^{-1})^3]^2$.

Реши датс *ексаоненцијалне* једначине водећи рачуна о правилу:

Кад је $a^m = a^n$ мора бити и $m = n$.

250. $a^{x+2} = a^5$. **251.** $a^{4-x} = a^2$. **252.** $m^{2x+3} = m^{8-3x}$.

253. $a^{x+1} \cdot a^{3x-4} = a^x \cdot a^{7x-11}$. **254.** $a^x = 1$.

255. $(b^{x-5})^3 = (b^{x-4})^2$. **256.** $(a^{x-4})^{x-1} = (a^{5-x})^{4-x}$.

257. $(a^{2x})^{x-2} = \frac{(a^{2x-5})^x}{a^3}$. **258.** $a(a^{4x})^{5x-2} = a^{5-9x}(a^{5x})^{4x}$.

259. $2^x = 16$. **260.** $2^{-x} = 16$. **261.** $(-2)^x = 16$.

262. $(-2)^x = 64$. **263.** $(-2)^{-x} = 16$.

264. $2^x = 32$. **265.** $2^{-x} = 32$. **266.** $(-2)^{-x} = -32$.

267. $10^x = 0{,}01$. **268.** $100^{2x} = 0{,}0001$. **269.** $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \frac{25}{9}$.

270. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3x} = \frac{27}{8}$. **271.** $2^x = \frac{1}{8}$. **272.** $9^{-2x} = \frac{1}{81}$.

273. $3^{3x} = \frac{1}{27}$ **274.** $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7$.

275. $\left(\frac{3}{5}\right)^{3x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3-7x}$. **276.** $8^x \cdot 4^{3x} = 16^{x+5}$.

277. $8^{2x+1} = 0{,}125^{4-3x}$. **278.** $3^x \cdot 9^{x-2} = 0{,}(3)$.

279. $0{,}5^{10x-9} = 2^{3-13x}$. **280.** $16^x = 0{,}25^{x-6}$.

281. $6{,}25^{x-1} = 0{,}4^{x-7}$. **282.** $8^{-x} = \frac{4^x}{32}$.

283. $\frac{2^{3x-10} \cdot 3^{x+2}}{8^{x-4} \cdot 6^{7-x}} = \frac{1}{3} \cdot 9^{x-2}$. **284.** $a^{2x+3} \cdot a^{3x-4} = \frac{a^5}{a^{6-4x}}$.

285. $2^{x+3} + 2^x = 144$. **286.** $3^x = 270 - 3^{x-2}$.

287. $5^{3x+1} - 9 \cdot 5^{3x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$. **288.** $a^{2x-1} + a^{2x+1} = a^3 + a^5$:

289. $2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} = 4$. **290.** $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-3} + 3^{x-4}$.

291. $5^{2x+4} - 2 \cdot 5^{2x+3} = 15^{x+2}$. **292.** $4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}$.

293. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$. **294.** $9^{2x-3} - 9^{2x-2} = 3^{3x-1} - 3^{3x+1}$.

295. $9 \cdot 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3} = 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}$.

296. $2 \cdot 9^{x+1} - 3 \cdot 4^x = 6 \cdot 4^{x+1} + 6 \cdot 9^x$.

297. $a^x \cdot a^y = a^5$, $\frac{a^x}{a^y} = \frac{1}{a}$ **298.** $4^{2x-3} \cdot 2^{3y-2} = 1024$, $3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = \frac{1}{9}$.

299. $a^{4x-y} : a^{y-x} = a$, $a^{x+y} : a^{8x-2y} = 1$.

300. $3^{3x-4y} : 3^{y-x-1} = 1$, $2^{2x-3} \cdot 2^{5-3y} = 0{,}5$.

19. Корени

$$(\sqrt[n]{a})^n = a; \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

1. Од којега је броја a n-ти степен?

2. Који број треба степеновати са 2 да се добије 10?

3. Који број треба степеновати са 3 да се добије 10?

4. Који број треба степеновати са n да се добије 10?

5. Кад се број 64 растави на 2 чинитеља, колики је један чинитељ? Исто тако, на 3 чинитеља, на 6, на 10, на n чинитеља, одреди у сваком случају један чинитељ.

6. Колика је вредност израза: $\sqrt[1]{4}$, $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[n]{1}$, $\sqrt[4]{0}$, $\sqrt[n]{0}$?

7. Одреди: a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$, b) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$.

8. Израчунај: $\sqrt{100-36} - (\sqrt{100} - \sqrt{36})$.

9. Тако исто: $\sqrt{9+16} - (\sqrt{9} + \sqrt{16})$.

10. Који број треба степеновати са $p+q$ да се добије $p+q$?

11. $\sqrt{25} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16} + \sqrt[5]{32}$. **12.** $\sqrt{169} - \sqrt{25}$.

13. $\sqrt{144} + \sqrt{64} - \sqrt{400}$. **14.** $2\sqrt[4]{81} + 3\sqrt[7]{128} - 5\sqrt[6]{729}$.

15. $(\sqrt[5]{a})^2 (\sqrt[5]{a})^3 - \sqrt[6]{(a^{-2})^{-3}} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$.

16. $(3\sqrt{a})^2 + (4\sqrt{b})^2 - (2\sqrt{a-3b})^2 - (3\sqrt{2a+3b})^2$.

17. $[(\sqrt[2n]{a})^n + (\sqrt[2n]{b})^n]\ [(\sqrt[2n]{a})^n - (\sqrt[2n]{b})^n]$.

18. $(a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab})$.

19. $2\sqrt[5]{a^{10}} + 3\sqrt[3]{a^6} + 4\sqrt{a^4} + \sqrt[n]{a^{2n}}$. $(\sqrt[5]{a^{10}} = \sqrt[5]{(a^2)^5} = a^2)$.

20. a) $(x + \sqrt{x^2 - y^2})(x - \sqrt{x^2 - y^2})$ b) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$.

21. $[(x+y)\sqrt{x^2 + y^2}]^2 - [(x-y)\sqrt[3]{x-y}]^3$.

22. a) $(2a^2 \sqrt[3]{a^2})^3$, b) $\left(\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y}\right)^2$, c) $\left(\frac{\sqrt[4]{(a+b)^3}}{a+b}\right)^4$.

23. $5\sqrt[3]{(x-y)^3} - (2\sqrt{x-y})^2 - 6(\sqrt[4]{x-y})^4$.

24. Растави на два биномна чинитеља: a) $a - b$, b) $a^2 - 6b$.

25. Скрати: a) $\frac{x}{\sqrt{x}}$, b) $\frac{x+a}{\sqrt{x+a}}$, c) $\frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$.

26. $5\sqrt[8]{a^3} - 2\sqrt[8]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^3}$. **27.** $a\sqrt[m]{x^n} - b\sqrt[m]{x^n}$.

28. $\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a}$. **29.** $m\sqrt{a} + m\sqrt[3]{a} - 2\sqrt{a} - 2\sqrt[3]{a}$.

30. $a\sqrt[m]{b}-2b\sqrt[n]{a}-2a\sqrt[m]{b}+8b\sqrt[n]{a}-5b\sqrt[n]{a}+6a\sqrt[m]{b}.$

31. $8\sqrt{2}-[7\sqrt[3]{2}-(3\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})-(5\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})].$

32. a) $(4+3\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}),$ b) $(8-3\sqrt{5})(7+21\sqrt{5}).$

$$\sqrt[n]{\mathbf{ab}}=\sqrt[n]{\mathbf{a}}\cdot\sqrt[n]{\mathbf{b}}. \qquad [\sqrt[n]{\mathbf{a}^n\mathbf{b}}=\mathbf{a}\sqrt[n]{\mathbf{b}}].$$

33. a) $\sqrt[5]{32a^5b^5}.$ b) $\sqrt{9.49}$ c) $\sqrt[3]{27a^3b^6}.$

34. a) $\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{b^3x^3}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{16^3 81^3}}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[m]{8^m.27^m}}$

35. a) $\sqrt{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2},$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{25a^2b^2}}.$

36. $\sqrt{a^2b}+2\sqrt{ab^2}+\sqrt{4b}+\sqrt{9a}.$

37. a) $\sqrt{1200},$ b) $7\sqrt{75},$ c) $\sqrt[3]{48},$ d) $2\sqrt[3]{81}.$

38. a) $\sqrt[4]{80},$ b) $\sqrt[m]{x^{m+n}},$ c) $\sqrt{x^3},$ d) $\sqrt{4a^3b}.$

39. a) $x\sqrt{y^3z^3},$ b) $m\sqrt[3]{a^6b^5c^4},$ c) $\dfrac{1}{xy}\sqrt[m]{x^{m+1}y^{m+1}}.$

Доведи на једнаке радикандо и сведи:

40. $\sqrt{2}+\sqrt{8}+3\sqrt{50}.$

41. $4\sqrt{50}+2\sqrt{72}+\sqrt{128}.$

42. $6\sqrt{125}-3\sqrt{80}+2\sqrt{20}.$

43. $4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}.$

44. $6\sqrt{12}-4\sqrt{27}+7\sqrt{48}-5\sqrt{75}+2\sqrt{108}.$

45. $3\sqrt{98}-7\sqrt{80}+3\sqrt{45}-17\sqrt{128}-3\sqrt{18}.$

46. $2\sqrt{275}-3\sqrt{99}-7\sqrt{88}+3\sqrt{198}-\sqrt{704}.$

47. $3\sqrt[3]{48}-2\sqrt[3]{750}+4\sqrt[3]{135}-7\sqrt[3]{320}+2\sqrt[3]{162}.$

48. $3\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{192}+3\sqrt[3]{375}-2\sqrt[3]{1029}.$

49. $\sqrt{4a+4b}-\sqrt{16a^3+16a^2b}+\sqrt{25ab^4+25b^5}.$

50. $2\sqrt{xy^2+y^3}-\sqrt{(x+y)^3}+\sqrt{(x^2-y^2)(x-y)}.$

51. $5a\sqrt{12x^3}-2x\sqrt{27a^2x}.$

52. $4\sqrt[3]{3x}-2\sqrt[3]{24x}+\sqrt[3]{192x}.$

53. $\sqrt{4x^3y}-5y\sqrt{xy}-x\sqrt{4xy}+\sqrt{25xy^3}.$

54. $\sqrt[3]{54a^4b^4c}-\sqrt[3]{16a^4bc^4}+\sqrt[3]{128ab^4c^4}.$

55. $bc\sqrt[4]{a^5b^3c^2}+ab\sqrt[4]{ab^3c^6}+ac\sqrt[4]{ab^7c^2}.$

56. $4\sqrt{1+a^2}-\sqrt{9+9a^2}-2\sqrt{x^2+a^2x^2}+\sqrt{x^4(1+a^2)}.$

57. $\sqrt[n]{a^{n+2}b^{n+1}}-\sqrt[n]{a^{n+1}b^{n+2}}.$

58. $\sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}-a^{m+2n}b^{2m+n}}.$

59. a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2},$ b) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{200},$ c) $6\sqrt{6}\cdot 5\sqrt{2}.$

60. a) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8},$ b) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{6}\,\sqrt[3]{9},$ c) $\sqrt{6a}\cdot\sqrt{8b}\cdot\sqrt{3ab}.$

61. $\sqrt{10a^3b}\cdot\sqrt{20a^4b^5}\cdot\sqrt{50ab^4}.$

62. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}$

63. $\sqrt[3]{\dfrac{4a}{9b}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2b}{3a}}$

64. $\sqrt{\dfrac{21a^5b^5}{8c^3}}\cdot\sqrt{\dfrac{24ac^5}{7b}}.$

65. $\sqrt{9x^2-4}\cdot\sqrt{\dfrac{3x-2}{(3x+2)^3}}.$

66. $\sqrt[n]{ax^{n+1}}\cdot\sqrt[n]{bx^{n-1}}.$

67. $\sqrt[m]{xy^2z^3}\cdot\sqrt[m]{x^2y^{m-2}z^{2m-8}}\cdot\sqrt[m]{x^{m-3}z^{5-m}}.$

68. $\sqrt{a+x}\cdot\sqrt{a-x}.$

69. $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}.$

70. $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a^2-b^2}.$

71. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}.$

72. $\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^3+ab+b^2}{a+b}}.$

73. $\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}}.$

74. $\sqrt[4]{x^2-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}}.$

75. $(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b})\sqrt[3]{a^2b^2}.$

76. $(3\sqrt[3]{2a}+4)\cdot\sqrt[3]{4a^2}.$

77. $(2\sqrt{8}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}+4\sqrt{72})\cdot\sqrt{2}.$

78. $(5\sqrt{8}-2\sqrt{18}+3\sqrt{50}-3\sqrt{72}-5\sqrt{200})\cdot 3\sqrt{6}.$

79. $(5\sqrt{3}-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}).$

80. $(4\sqrt{24}-3\sqrt{15})(6\sqrt{5}-2\sqrt{18}).$

81. $(8\sqrt{6}-2\sqrt{12}-\sqrt{8})(2\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}).$

82. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}).$

83. $(8\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{9})(4\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{375}).$

84. $\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}\cdot\sqrt{x+y-\sqrt{2xy}}.$

85. $\sqrt{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}\cdot\sqrt{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$

86. $\sqrt[3]{a^3+\sqrt{a^6-x^6}}\cdot\sqrt[3]{a^3-\sqrt{a^6-x^6}}.$

87. $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$.

88. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a+b}+\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

89. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

90. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\frac{3x+\sqrt{x}}{1-x}$.

91. $(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1})(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})$.

92. $(a+\sqrt{b})^2$. 93. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$.

94. $(5-2\sqrt{5})^2$. 95. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2(5+2\sqrt{6})$.

96. $(\sqrt{5}+\sqrt{10}+15)^2$. 97. $(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$.

98. $(3x\sqrt{y}-2y\sqrt{x})^2$. 99. $(\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-a})^2$.

100. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

101. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$.

102. $\left\{\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}\right\}^2$.

103. $\left\{\sqrt{\frac{4+\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{11}}{2}}\right\}^2$.

104. $\left\{\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right\}^2$.

105. $\left[\sqrt{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\pm\sqrt{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\right]^2$.

106. $\left[\sqrt{a^3+\sqrt{a^6-b^6}}\pm\sqrt{a^3-\sqrt{a^6-b^6}}\right]^2$.

Доведи код датих корена чинитељ под корен:

107. a) $a\sqrt[n]{x}$, b) $4\sqrt{5a}$, c) $4x\sqrt[3]{x}$.

108. a) $2\sqrt{3}$, b) $3\sqrt[3]{2}$, c) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$, d) $5\sqrt{0,2}$, e) $2\sqrt[3]{0,5}$.

109. a) $x\sqrt{\frac{a}{x}}$, b) $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}$, c) $ab\sqrt[p]{\frac{1}{a^{p-1}b^{p-1}}}$.

110. $(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 111. $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$.

112. $a^2bc^{-2}\sqrt[3]{a^{-1}b^{-1}c^2}$. 113. $\frac{a^2b}{c^3}\sqrt[n]{\frac{c^{3n-1}}{a^{2n+1}b^{n+1}}}$.

114. $(x-y)\sqrt[3]{\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}}$. 115. $(a+b)\sqrt{\frac{4a-4b}{9a^2+18ab+9b^2}}$.

116. $(5-3\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{2}}$. 117. $(\sqrt{7}-\sqrt{6})\sqrt{84+13\sqrt{2}}$.

118. $(5-\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. 119. $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

120. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{12+5\sqrt{6}}$ 121. $(1+\sqrt{3}-\sqrt{6})\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

122. $(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$. 123. $(\sqrt{5}-2)\sqrt[3]{17\sqrt{5}-23}$.

124. $(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}$

$$\sqrt[n]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}=\frac{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}{\sqrt[n]{\mathbf{b}}}. \quad \left[\sqrt[n]{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}\right]$$

125. a) $\sqrt{\frac{49}{64}}$, b) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$, c) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^3}{27c^3}}$.

126. $\sqrt{2\frac{1}{4}}+3\sqrt{1\frac{7}{9}}-2\sqrt{1\frac{9}{16}}+2\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$.

127. a) $\sqrt[3]{\frac{8a^4b}{27c^4}}$, b) $5\sqrt{\frac{3x}{25a^2}}$, c) $\sqrt{a^{m-2}}$, d) $\sqrt[x]{\frac{a}{b^{x-1}}}$.

128. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}}$. 129. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$.

130. a) $\sqrt{75}:\sqrt{3}$, b) $\sqrt[3]{108}:\sqrt[3]{4}$, c) $3\sqrt{8}:2\sqrt{2}$.

131. $\sqrt[3]{\frac{120}{15}}+\sqrt[5]{\frac{224}{7}}-\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{32}{3}}+\sqrt{1000}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

132. $\sqrt[m]{ax}:\sqrt[m]{a}$. 133. $\sqrt[3]{48x}:\sqrt[3]{6x}$. 134. $\sqrt{ab}:\sqrt{bx}$.

135. $\sqrt[5]{a^4}:\sqrt[5]{a^3}$. 136. $\sqrt{a}:\sqrt{\frac{a}{b}}$ 137. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a-b}}$.

138. $\dfrac{\sqrt{a^3-b^3}}{\sqrt{a-b}}$. 139. $\dfrac{\sqrt{a^2-a^2b^2}}{\sqrt{1-b^2}}$. 140. $\dfrac{\sqrt[x]{a^{3x+2}}}{\sqrt[x]{a^{2x+2}}}$.

141. $1:\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. 142. $1:\sqrt{0,25}$. 143. $1:\sqrt{\dfrac{x-2y}{x^3-3xy^2-2y^3}}$.

144. $\sqrt[n]{\dfrac{x^{1-n}y^{2n-3}}{a^3b^4}}:\sqrt[n]{\dfrac{a^{2n-3}b^{n-4}}{x^{2n-1}y^{n+3}}}$. 145. $\sqrt[n]{\dfrac{a^{n-1}b^{2n-1}}{a^2b^3}}:\sqrt[n]{\dfrac{b^{n-4}}{a^3}}$.

146. a) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$, b) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$, c) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$, d) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

147. $a:\sqrt[n]{a}$. 148. $\dfrac{a}{x}:\sqrt{ax}$. 149. $\dfrac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

150. $(x+y):\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$. 151. $(x-y):\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}}$.

152. $(x+y):\sqrt[m]{\dfrac{(x+y)^{m-1}}{x-y}}$. 153. $1:\sqrt{\dfrac{2a+b}{2a^3-3a^2b+b^3}}$.

154. $(3\sqrt{8}-5\sqrt{20}):\sqrt{2}$. 155. $(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}):\sqrt[3]{ab}$.

156. $(\sqrt{6}+4\sqrt{18}-3+8\sqrt{12}):\sqrt{3}$.

157. $(3\sqrt{15}-\sqrt{20}+\sqrt{10}-5):\sqrt{5}$.

158. $(\sqrt{ax}-\sqrt{cx}+\sqrt{az}-\sqrt{cz}):(\sqrt{a}-\sqrt{c})$.

159. $(B-b):(\sqrt{B}-\sqrt{b})$. 160. $(x-y):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$.

161. $(x\sqrt{x}-y\sqrt{y}):(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. 162. $(a\sqrt{a}+1):(\sqrt{a}+1)$.

163. $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}):(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$.

164. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}-2\sqrt[3]{b^2}):(\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b})$.

165. $(x+4\sqrt{xy}+3y):(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

166. $(\sqrt[n]{a^2}-5\sqrt[n]{a}-14):(\sqrt[n]{a}+2)$.

167. $\sqrt{\dfrac{m+n+2\sqrt{mn}}{m-n}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}}$.

$$\sqrt[n]{\mathbf{a}^m}=\sqrt[np]{\mathbf{a}^{mp}}=\sqrt[n:r]{\mathbf{a}^{m:r}};\quad \sqrt[n]{\mathbf{a}^m}=\mathbf{a}^{m:n};\quad \sqrt[-n]{\mathbf{a}}=\sqrt[n]{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}.$$

168. Доведи дате корене на заједнички изложитељ:

a) $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x^2}$, b) $\sqrt[4]{x^3}$ и $\sqrt[6]{y^5}$,

c) $\sqrt[mn]{a^r}$ и $\sqrt[mp]{b^s}$, d) $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b^2}$ и $\sqrt[5]{c^3}$.

169. Скрати дате корене:

a) $\sqrt[4]{x^2}$ b) $\sqrt[6]{y^{15}}$, c) $\sqrt[18]{a^{12}}$, d) $\sqrt[mnp]{x^{mpq}}$.

170. a) $\sqrt[15]{a^5}$, b) $\sqrt[mp]{a^m}$, c) $\sqrt[ax+bx]{c^{a+b}}$.

171. a) $\sqrt[4]{36}$, b) $\sqrt[4]{25}$, c) $\sqrt[6]{8}$, d) $\sqrt[6]{27}$, e) $\sqrt[6]{81}$.

172. a) $\sqrt[9]{8}$, b) $\sqrt[9]{64}$, c) $\sqrt[12]{81}$, d) $\sqrt[12]{64}$.

173. a) $\sqrt[10]{32}$, b) $\sqrt[10]{a^{-5}}$, c) $\sqrt[12]{a^{-4}}$, d) $\sqrt[12]{a^{-6}b^{24}}$.

174. $5\sqrt[6]{a^9}-4\sqrt[4]{a^6}+\sqrt[10]{a^{15}}$. 175. $2\sqrt[12]{a^5}\cdot\sqrt[12]{a}+3(\sqrt[24]{a^{17}}:\sqrt[24]{a^5})$.

176. $3\sqrt[25]{a^6}\cdot\sqrt[25]{a^9}-\sqrt[30]{a^{23}}:\sqrt[6]{a}$.

177. a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$, b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$, c) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[9]{a^7}$.

178. $3\sqrt[3]{b^2}\cdot 5\sqrt[4]{b^3}\cdot\sqrt[12]{b}$. 179. $a\sqrt{xy}\cdot b\sqrt[4]{x^3y^3}\cdot c\sqrt[8]{x^7y^7}$.

180. a) $\sqrt[4]{a}:\sqrt[6]{a}$, b) $\sqrt[5]{a^4}:\sqrt[3]{a^2}$. c) $m\sqrt{a}:\sqrt[4]{a}$.

181. $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}$. 182. $\sqrt[12]{\dfrac{ab^2}{c}}:\sqrt[8]{\dfrac{a^3b^5}{c^6}}:\sqrt[6]{\dfrac{c^5}{ab^7}}$.

183. $\dfrac{\sqrt[9]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[18]{a^7}}$. 184. $\dfrac{\sqrt[4]{x^{-3}}}{\sqrt[5]{x^{-9}}}$. 185. $\dfrac{\sqrt[n]{x^{n+1}}}{\sqrt[2n]{x^{n+1}}}$.

186. $\sqrt[6]{a^{-1}b}:\sqrt[10]{a^{-3}b^3}$. 187. $\sqrt[3]{\dfrac{75}{16}}:\sqrt{\dfrac{15}{2}}$. 188. $\sqrt[4]{\dfrac{8}{25}}:\sqrt{0,002}$.

189. $\sqrt[10]{\dfrac{a^3b^9}{c^7}}:\sqrt[12]{\dfrac{a^5b^{11}}{c^{10}}}$. 190. $\sqrt[2n]{\dfrac{a^{n-2}}{b^nc^n}}:\sqrt[3n]{\dfrac{a^{n-3}}{b^nc^n}}$.

191. $(3\sqrt{7}+4\sqrt[4]{3})(2\sqrt{7}-2\sqrt[4]{3})$.

192. $(\sqrt[3]{25}-\sqrt{5}+5)(\sqrt[6]{125}+\sqrt[3]{5})$.

193. $(\sqrt{2}-\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{16})(\sqrt[3]{2}-\sqrt{2})$.

194. $(3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}-\frac{1}{3}\sqrt{3})(\sqrt[4]{9}-3\sqrt[3]{3})$.

195. $(\sqrt[3]{ab}+3\sqrt[3]{xy})(5\sqrt{ab}+4\sqrt{xy})$.

196. $(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

197. $(2\sqrt[3]{54}-3\sqrt{2}):\sqrt[3]{2}$. **198.** $(6\sqrt{x}+8x):2\sqrt[3]{x}$.

199. $\sqrt[3]{b^2a^{-1}}\cdot\sqrt[4]{b^3a^{-2}}\cdot\sqrt[6]{b^4a^{-3}}$ **200.** $a\sqrt[n]{a^{n-1}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

201. $\sqrt{\frac{a^3b}{c}}:\left[\sqrt[3]{\frac{a^{-1}b^{-2}}{c^{-2}}}:\sqrt[6]{\frac{a^{-2}b}{c^3}}\right]$.

202. a) $\sqrt[m]{a^{mx}}$, b) $\sqrt[3]{a^6}$, c) $\sqrt[5]{a^{30}}$, d) $\sqrt[p]{x^{mnp}}$.

203. a) $\sqrt[n]{a^{np+nr}}$, b) $\sqrt[m+n]{x^{am+an}}$, c) $\sqrt[n]{a^{nx+y}}$.

204. $\sqrt[n]{a^{2n+1}\cdot b^{2n+2}}$. **205.** a) $\sqrt{a^{25}}$, b) $\sqrt[3]{a^{17}}$, c) $\sqrt[4]{a^{17}b^9}$.

206. a) $\sqrt{n^5}\cdot\sqrt{n}$, b) $\sqrt[3]{a^7}\cdot\sqrt[3]{a^5}$.

207. a) $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}}{b^{mp}}}$, b) $\sqrt[5]{\frac{a^5x^{10}}{b^5y^{10}}}$, c) $\sqrt[n]{\frac{1}{a^{mn}}}$, d) $\sqrt[3]{\frac{a^3p}{a^6}}$.

208. $\sqrt[m]{\frac{a^{mn}b^{mp}c^{mq}}{x^{mr}y^{ms}}}$. **209.** $\sqrt[5]{a^{16}b^{17}c^{-18}}$. **210.** $\sqrt[x]{\frac{a^{x+1}}{b^{x-1}c^{x-1}}}$.

211. $\sqrt[2m]{a^{4m}x}$. **212.** $\sqrt[x]{\frac{a^{2x+1}b^{3x+2}}{c^{4x-3}}}$.

213. Израчунај вредности корена̂:

a) $\sqrt[-n]{x}$, b) $\sqrt[-3]{27}$, c) $\sqrt[-4]{16}$, d) $\sqrt[-2]{0{,}25}$, e) $\sqrt[-m]{a^{-mn}}$.

Доведи дате изразе на најпростији облик уклањајући негативне изложитеље:

214. $\sqrt[-n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}$. **215.** $a\sqrt[-1]{a}$. **216.** $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[-2]{a}$.

217. $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt[-2]{a}$. **218.** $\sqrt{a}:\sqrt[-1]{a}$. **219.** $\sqrt{a}:\sqrt[-2]{a}$.

220. $\sqrt[-2]{\frac{a^2}{b^2}}$. **221.** $\sqrt[-3]{\frac{8}{125}}$. **222.** $\sqrt[-3]{\frac{a^{-3}b^6c^{-9}}{x^{-6}y^3}}$.

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m.$$

223. $\sqrt{9^3}+\sqrt[3]{8^2}+\sqrt{\left(5\frac{4}{9}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(2\frac{10}{27}\right)^2}$.

224. $\sqrt{1{,}44^{-1}}+\sqrt[3]{0{,}008^{-2}}+\sqrt[4]{0{,}0081^{-3}}$.

225. $\sqrt[x]{(a^{x-2})^n}\cdot\sqrt[x]{(a^{2x+2})^n}$. **226.** $\sqrt{\left(\frac{a^2-4a+4}{a^2+4a+4}\right)^3}$.

227. $\sqrt[3]{(8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3)^4}$.

228. $(\sqrt[5]{a^2b})^2\cdot(\sqrt[5]{ab^2})^3$. **229.** $(2\sqrt[3]{2})^5+(2\sqrt[6]{2^5})^2$.

230. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{27a^3b^3}}\right)^5$. **231.** $\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{a^{10}}{32}}}\right)^3$.

232. $(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^3$. **233.** $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^3$.

234. $(4a\sqrt[3]{b}-3b\sqrt[3]{a})^3$. **235.** $(a-3\sqrt[3]{a^2}+4\sqrt[3]{a})^3$.

236. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2})^2$. **237.** $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}-\sqrt[6]{ab^2})^2$.

238. $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})^4$. **239.** $(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[4]{2})^4$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

240. a) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{x}}$, b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$, c) $\sqrt[8]{\sqrt[5]{a^{12}}}$, d) $\sqrt{\sqrt{2}}$.

241. a) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$, b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$, c) $\sqrt[n-1]{\sqrt{a^3}}$, d) $\sqrt[x]{\sqrt[x]{(a^n)^n}}$,

242. $3\sqrt{\sqrt[12]{a}} - 4\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}} + 5\sqrt[3]{\sqrt[8]{a}}$. **243.** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5b^7}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{ab^{11}}}$.

244. Кад је $\sqrt[3]{262144} = 64$, колико је a) $\sqrt[6]{262144}$, b) $\sqrt[9]{262144}$, c) $\sqrt[18]{262144}$?

245. Из $\sqrt[4]{1679616} = 36$, израчунати $\sqrt{1679616}$ и $\sqrt[8]{1679616}$.

246. $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$. **247.** $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}\right)^6$. **248.** $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^n$. **249.** $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$.

250. $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$. **251.** $\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}$. **252.** $\sqrt[7]{a\sqrt[5]{a^2}}$.

253. $\sqrt[5]{a^2\sqrt[3]{a^8}}$. **254.** $\sqrt[m]{a^n\sqrt[p]{a^q}}$. **255.** $x\sqrt[m]{x\sqrt{x}}$.

256. $a\sqrt[n]{a^{n-1}\sqrt[3]{a^2}}$. **257.** $\sqrt[4]{\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^2x^2}}$. **258.** $\sqrt[6]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{8}}}$.

259. $\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}}$. **260.** $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$.

261. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$. **262.** $2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}}$. **263.** $4\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25\sqrt{0{,}25}}}$.

264. $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$. **265.** $\sqrt[x-1]{\frac{a}{\sqrt[x]{a}}}$. **266.** $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$.

267. $\frac{\sqrt{3ab^2\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt{6b\sqrt{a}}}$. **268.** $\sqrt[m]{a\sqrt{a^3}} \cdot (\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt{a^3})$.

269. $\sqrt[3]{x^{n-1}} \cdot \sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x^7} - \sqrt[3]{x^{n-1}\sqrt{x^n\sqrt{x^7}}}$. Проба за $x = 2$, $n = 1$.

270. a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} + 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$. b) $3\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt[4]{a^2\sqrt{a^3}}$.

271. $\sqrt[-2]{\sqrt[3]{64}}$. **272.** $\sqrt[-m]{\sqrt[-n]{a^{-mn}}}$. **273.** $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[-2]{a}$.

Корени с алгебарским радикандом (чл. **143.**)

274. $\sqrt{+25}$. **275.** $\sqrt[3]{+27}$. **276.** $\sqrt[3]{-27}$.

277. $\sqrt[3]{-m^6}$. **278.** $\sqrt[5]{(-a)^{30}}$. **279.** $\sqrt[3]{(-x)^5 \cdot (-x)}$.

280. $\sqrt[3]{(-a)^5}$. **281.** $\sqrt[3]{(-a^2)^4}$. **282.** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{-x}$.

283. $7\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{-24} + 4\sqrt[3]{-81} - \sqrt[3]{-192}$.

---

20. **Преображај ирационалних корена**

Ослободи дате разломке ирационалних именитеља: (чл. **144.**)

1. $\frac{2}{\sqrt{2}}$. **2.** $\frac{6+\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$. **3.** $\frac{24}{\sqrt[4]{8}}$. **4.** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^2}}$.

5. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{12}}$. **6.** $\frac{9\sqrt[6]{49}}{2\sqrt[3]{21}}$. **7.** $\frac{m}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$. **8.** $\frac{x+y}{\sqrt{x+y}}$.

9. $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}}$. **10.** $\frac{4x^2-1}{\sqrt{2x+1}}$. **11.** $\frac{a^4-b^4}{\sqrt{a^2-b^2}}$. **12.** $\frac{8x}{\sqrt[5]{(2x)^3}}$.

13. $\frac{3a^2}{5\sqrt[3]{2a}}$. **14.** $\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{3x}}$. **15.** $\frac{3x\sqrt{5a}}{2\sqrt[4]{2a}}$. **16.** $\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$.

17. $\frac{\sqrt{2x+3y}}{\sqrt{2x-3y}}$. **18.** $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$. **19.** $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y}}$. **20.** $\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{6}}$.

21. $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{12}} + \sqrt{3}$. **22.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

23. $7\sqrt{\frac{3}{20}} + \sqrt{\frac{4}{15}} + 3\sqrt{\frac{1}{60}} - \sqrt{\frac{3}{5}} - 2\sqrt{\frac{5}{12}}$.

24. $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$. **25.** $(3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 4\sqrt{3} - \sqrt{15}) : \sqrt{3}$.

26. $(\sqrt{15} + 2\sqrt{10} - \sqrt{30} + 3\sqrt{5}) : 2\sqrt{5}$. **27.** $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

28. $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. **29.** $\frac{4\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}}$. **30.** $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

31. $\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$. 32. $\frac{5-3\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}}$. 33. $\frac{2a+3\sqrt{b}}{3a-2\sqrt{b}}$.

34. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$. 35. $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}$. 36. $\frac{m}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$.

37. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. 38. $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}$.

39. $\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}-\sqrt{bc}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. 40. $\frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{4a}-\sqrt{3a}}$.

41. $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$. 42. $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$. 43. $\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$.

44. $\frac{\sqrt{14}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}+5\sqrt{6}}$. 45. $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{5}}}$. 46. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}}$.

47. $\frac{\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{6}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}$. 48. $\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{6}}}{2-\sqrt{\frac{1}{2}}}$. 49. $\frac{\frac{5}{6}\sqrt{0,7}}{2+\sqrt{\frac{5}{6}}}$.

50. $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$. 51. $\frac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}$.

52. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. 53. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

54. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$. 55. $\frac{4-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$.

56. $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. 57. $\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

58. $\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}$. 59. $\frac{2\sqrt{5}-4\sqrt{10}}{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-2\sqrt{10}}$.

60. $\frac{\sqrt{(1-x)(1-y)}-\sqrt{(1+x)(1+y)}}{\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{(1+x)(1+y)}}$.

61. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1-y}}$.

62. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. 63. $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$. 64. $\frac{23}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$.

65. $\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}}$. 66. $\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4-y^4}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{x^4-y^4}}}$. 67. $\frac{\sqrt{2x+3\sqrt{xy}}}{\sqrt{2x-3\sqrt{xy}}}$.

68. $\frac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. 69. $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. 70. $\frac{1}{\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{5}}$.

71. $\frac{a}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. 72. $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}}$. 73. $\frac{5}{\sqrt[8]{5}+\sqrt[8]{3}}$.

74. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$. 75. $\frac{\sqrt[3]{10}}{2+\sqrt[3]{7}}$. 76. $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$.

77. $\frac{3\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{9}}{4\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{3}}$. 78. $\frac{5\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{12}}{4\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{6}}$. 79. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[8]{6}}$.

Доведи дате збирове и разлике квадратних корена под један корен: (чл. **145.**)

80. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$. 81. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

82. $\sqrt{12+\sqrt{23}}+\sqrt{12-\sqrt{23}}$. 83. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

84. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. 85. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}\pm\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

86. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}\pm\sqrt{7-2\sqrt{10}}$. 87. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}\pm\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

88. $\sqrt{1+2a\sqrt{1-a^2}}\pm\sqrt{1-2a\sqrt{1-a^2}}$.

89. $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}\pm\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}$.

90. $\sqrt{6-3\sqrt{3}}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 91. $\sqrt{2+2\sqrt{5}}-3\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

92. $4\sqrt{1+\sqrt{17}}-\sqrt{5\sqrt{17}-13}$.

Преобрати дате квадратне корене у збир или у разлику два квадратна корена: (чл. **146.**)

93. $\sqrt{6+\sqrt{11}}$. 94. $\sqrt{3-\sqrt{5}}$. 95. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

96. $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$. 97. $\sqrt{11\pm2\sqrt{10}}$. 98. $\sqrt{11\pm2\sqrt{30}}$.

99. $\sqrt{18\pm8\sqrt{2}}$. 100. $\sqrt{37\pm20\sqrt{3}}$. 101. $\sqrt{99\pm54\sqrt{2}}$.

102. $\sqrt{7\sqrt{2}\pm4\sqrt{6}}$. 103. $\sqrt{2\sqrt{5}\pm\sqrt{15}}$. 104. $\sqrt{6\sqrt{5}\pm4\sqrt{10}}$.

105. $\sqrt{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{5}}$. 106. $\sqrt{\frac{5}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{21}}$. 107. $\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}$.

108. $\sqrt{3a+\sqrt{8a^2}}$. 109. $\sqrt{2-\sqrt{4-4a^2}}$. 110. $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

111. $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$. 112. $\sqrt{x^2+yz+2x\sqrt{yz}}$.

113. $\sqrt{x^2-2y\sqrt{x^2-y^2}}$. 114. $\sqrt{2x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}$.

115. $\sqrt{(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}}$. 116. $\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1-a^2}}}$.

117. $\sqrt{a^2+b^2+ab+2\sqrt{ab(a^2+b^2)}}$.

118. $\sqrt{10a^4+a^2b^2+6a^3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Реши дате и р а ц и о н а л н е једначине: (чл. **147.**)

119. $2\sqrt{x-1}=4$. 120. $\sqrt{2x+1}+5=4(\sqrt{2x+1}-1)$.

121. $(b-a\sqrt{x}):(a-b\sqrt{x})=a(b^2-1):b(a^2-1)$.

122. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-4)=(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$.

123. $\sqrt{4x^2+8x-11}=2x+1$. 124. $\sqrt[4]{x-0{,}9375}=0{,}5$.

125. $\sqrt{16+3\sqrt{2x+1}}=5$. 126. $\sqrt{51-10\sqrt{5x-9}}=6$.

127. $3\sqrt{\frac{4x-2}{3x+2}}=4$. 128. $\sqrt{41-20\sqrt{\frac{9x+1}{4x-3}}}=3$.

129. $\frac{8+5\sqrt{x}}{10-4\sqrt{x}}=\frac{9\sqrt{x}}{10}+1$. 130. $\sqrt[3]{20-3\sqrt{5x+1}}=2$.

131. $\sqrt{x^2+3x-3}-x=1$. 132. $x-\sqrt{(x+2)(x-7)}=4$.

133. $\frac{x-4}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x-2}=0$. 134. $\sqrt{x+1}-\frac{2(x-2)}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}$.

135. $\sqrt{27x+1}-\sqrt{3x-3}=\frac{18x+5}{\sqrt{27x+1}}$.

136. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=p$. 137. $\sqrt{2x-3}=8-\sqrt{2x+13}$.

138. $\sqrt{10x+9}-\sqrt{10x-111}=6$.

139. $\sqrt{x+5a^2}=4a-\sqrt{x-3a^2}$.

140. $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x-2ab}=a$.

141. $\sqrt{x+a^2}+\sqrt{x+b^2}=a+b$.

142. $\sqrt{x-b^2}-\sqrt{x-a^2}=a-b$.

143. $\sqrt{2a+x}+\sqrt{x-2a}=2\sqrt{a}$.

144. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5}$.

145. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=2\sqrt{x-1}$.

146. $\sqrt{16x+9}-\sqrt{x-1}=\sqrt{9x+10}$.

147. $\sqrt{2(x+1)}=2\sqrt{2x-5}-\sqrt{2(x-5)}$.

148. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$. 149. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}+\cdots}}=a$.

150. $4-\sqrt{x}=\sqrt{4+x}$. 151. $\sqrt{x+2a}+\sqrt{x+a}=a$.

152. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\frac{a}{\sqrt{a-x}}$.

153. $\sqrt{8x-7}-\frac{2x-2}{\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+3}$.

154. $x-2a-\sqrt{x^2-b^2}=(x-a)\left\{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-b^2}}\right\}$.

155. $x-a=\sqrt{a^2+x\sqrt{x^2-a^2+b^2}}$.

156. $\frac{a+\sqrt{x-4ab}}{a-\sqrt{x-4ab}}=\frac{2a-b}{b}$.

157. $\sqrt{a+bx}-\sqrt{b+ax}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{1+x}$.

158. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b}$.

159. $\sqrt{x-3b}-\sqrt{x-3a}=\sqrt{a-b}$.

160. $\left.\begin{aligned}3\sqrt{x}-2\sqrt{y}&=9,\\ 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}&=1.\end{aligned}\right\}$ Стави $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$.

161. $\begin{aligned}b\sqrt{x}+a\sqrt{y}&=ab(c+d),\\ d\sqrt{x}+c\sqrt{y}&=cd(a+b).\end{aligned}$ 162. $\begin{aligned}2\sqrt{x+5}-3\sqrt{y-2}&=3,\\ 3\sqrt{x+5}-4\sqrt{y-2}&=5.\end{aligned}$

163. $\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}&=6,\\ \frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{y}}&=1.\end{aligned}$ 164. $\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y+2}}&=2,\\ \frac{15}{\sqrt{x-2}}-\frac{8}{\sqrt{y+2}}&=1.\end{aligned}$

165. $\sqrt{\dfrac{x+y}{x}} = 3 - \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, **166.** $\sqrt{ax} - \dfrac{b}{\sqrt{y}} = a.$

$2x + 3y = 66.$ $\sqrt{bx} - \dfrac{a}{\sqrt{y}} = \dfrac{b^2}{a}.$

167. $\sqrt{\dfrac{x}{y} + 1} - 1 = \sqrt{\dfrac{x}{y} - 1}$, **168.** $\sqrt{2x} - \sqrt{3y} = 3,$

$2\sqrt{x+y} = \sqrt{3x+4y+5}.$ $3\sqrt{x} + \sqrt{6y} = 7\sqrt{2}.$

---

21. Степени и корени с разломљеним изложитељима (чл. 148.)

Напиши дате корене као степене:

1. a) $\sqrt[3]{a^2}$, b) $\sqrt{a^3}$, c) $\sqrt[4]{a}$, d) $\sqrt[5]{a^2}$, e) $a^3\sqrt{b}$.

2. a) $x\sqrt[6]{a^4}$, b) $\sqrt[3]{a^4b^5}$, c) $\sqrt[5]{a^2b^3}$, d) $\sqrt[3]{x-y}$, e) $\sqrt[4]{(x+y)^3}$.

3. a) $\sqrt[n]{a+b}$, b) $\sqrt[n]{(a-b)^m}$, c) $(\sqrt{ab})^5$, d) $(\sqrt[4]{a})^5$, e) $(\sqrt[3]{x-y})^4$.

Напиши дате степене као корене:

4. a) $a^{\frac{1}{2}}$, b) $a^{\frac{5}{6}}$, c) $x^{\frac{1}{3}}$, d) $a^{\frac{n-m}{p}}$, e) $x^{\frac{3}{4}} . y^{\frac{1}{4}}$.

5. a) $(x^2-y^2)^{\frac{2}{3}}$, b) $(a-b)^{\frac{4}{5}}$, c) $a^{-\frac{2}{3}}$, d) $x^{-\frac{1}{4}}$.

6. a) $a^{\frac{3}{4}-1}$, b) $a^{\frac{n}{m}-1}$, c) $a^{\frac{m+n}{2}-n}$, d) $a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$.

Израчунај:

7. a) $25^{\frac{1}{2}}$, b) $16^{\frac{1}{4}}$, c) $8^{\frac{2}{3}}$, d) $32^{\frac{3}{5}}$.

8. a) $64^{\frac{1}{3}}$, b) $27^{\frac{4}{3}}$, c) $81^{\frac{3}{4}}$, d) $64^{\frac{5}{6}}$.

9. a) $49^{0,5}$, b) $81^{0,25}$, c) $64^{1,5}$, d) $16^{1,75}$.

10. a) $9^{-\frac{1}{2}}$, b) $0{,}027^{-\frac{2}{3}}$, c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$, d) $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

11. $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} . \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$ **12.** $0{,}32^{\frac{1}{2}} . 0{,}00032^{\frac{3}{5}} . \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,1}$.

13. a) $(-0{,}125)^{-\frac{2}{3}}$, b) $(-0{,}008)^{-\frac{1}{3}}$, c) $(-0{,}027)^{-\frac{5}{3}}$.

Преобрати у корене с целим изложитељима и израчунај:

14. a) $\sqrt[\frac{1}{2}]{3}$, b) $\sqrt[\frac{3}{4}]{8}$, c) $\sqrt[\frac{4}{5}]{5\frac{1}{16}}$, d) $\sqrt[0,4]{9}$.

15. a) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{49}$, b) $\sqrt[-\frac{2}{3}]{0{,}04}$, c) $\sqrt[-\frac{4}{5}]{\frac{16}{81}}$, d) $\sqrt[-0,2]{2}$.

Израчунај тако да у резултатима буду степени и корени с позитивним целим изложитељима:

16. $a^{\frac{1}{3}} . b^{\frac{1}{3}}$ **17.** $x^{-\frac{2}{5}} . (32y)^{-\frac{2}{5}}$ **18.** $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(3\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

19. $a^{\frac{2}{3}} . a^{\frac{1}{4}}$. **20.** $5^{\frac{2}{3}} . 5^{\frac{1}{2}} . 5^{\frac{5}{6}}$. **21.** $x^{0,1} . x^{0,2} . x^{0,005}$.

22. $a . a^{\frac{3}{7}}$. **23.** $x . x^{\frac{1}{m}}$. **24.** $x^m . x^{\frac{n}{5}}$.

25. $a . a^{\frac{n-1}{2}}$. **26.** $a^{\frac{1}{n}} . a^{-\frac{1}{2n}}$. **27.** $(ab)^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{1}{2}} . b^{1\frac{3}{4}}$.

28. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$. **29.** $(ab)^{\frac{3}{8}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}}$. **30.** $a^{\frac{1}{6}} : a^{0,1}$.

31. $b^{\frac{7}{8}} . b^{\frac{5}{12}}$. **32.** $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{3}}}$. **33.** $\dfrac{x^{\frac{3}{8}}}{x}$.

34. $a^{\frac{n}{3}} : a^{\frac{n}{5}}$. **35.** $a^{\frac{n-1}{n}} : a$. **36.** $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{n}{m}}$.

37. $a^{\frac{5}{9}} : a^{-\frac{2}{3}}$ **38.** $a^{-\frac{1}{2}} : a^{\frac{3}{8}}$. **39.** $a^{-\frac{3}{8}} : a^{-\frac{1}{2}}$.

40. $2a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} c^{\frac{3}{4}} . 5a^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{11}{12}} c^{-\frac{1}{2}}$. **41.** $\left(\dfrac{4a}{9b}\right)^{\frac{1}{2}} : \dfrac{4a^{\frac{1}{6}}}{6b^{\frac{1}{4}}}$.

42. $\left(x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{5}{6}}\right)$. **43.** $\left(2a - 3b^{\frac{5}{6}}\right)\left(5a^{\frac{3}{4}} + 6b^{\frac{4}{5}}\right)$.

44. $\left(a + a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{6}}\right)$.

45. $\left(5a^{\frac{7}{4}} - 6a^{\frac{3}{4}}b\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - 7a^{\frac{2}{3}}b\right)$.

46. $\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}} - 2a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{3}{5}}b\right)$.

47. $\left(6x^{\frac{7}{6}} - 8x^{\frac{4}{5}} + 3x^{\frac{29}{30}} - 4x^{\frac{21}{20}}\right) : \left(3x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{3}{4}}\right)$.

48. $\left(24a^{\frac{4}{3}} + \frac{34}{3}a^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\right) : \left(6a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\right)$.

49. $\left(a^{-\frac{5}{6}}+(ab)^{-\frac{1}{3}}-(ab)^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{5}{6}}\right):\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}\right).$

50. $\left(x^{-\frac{5}{6}}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{5}{6}}\right):\left(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{2}}\right).$

51. $\left(x^{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$ **52.** $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n}.$ **53.** $\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)^{-\frac{1}{m}}.$ **54.** $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$

55. $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$ **56.** $\left(a^{\frac{m+p}{n}}\right)^{\frac{n}{m-p}}.$ **57.** $\left(\sqrt[m]{x}\right)^{\frac{2m}{n}}.$ **58.** $\sqrt[-3]{a^{\frac{3}{4}}}$

59. $\sqrt[3]{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}}.$ **60.** $(\sqrt[4]{a})^{\frac{2}{3}}.(\sqrt[3]{a^{-2}})^{\frac{1}{4}}.(\sqrt[5]{a^{-3}})^{-\frac{10}{9}}.$

61. $\sqrt[\frac{3}{4}]{a^{\frac{3}{2}}}.$ **62.** $\sqrt[\frac{1}{2}]{x^{-\frac{5}{4}}}.$ **63.** $(4{,}25)^{\frac{1}{2}}.$

64. $(xy^{-2}z^{3})^{\frac{2}{3}}.$ **65.** $\left[\left(a^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[4]{a}\right]^{\frac{3}{2}}.$ **66.** $\left(\frac{a^{2}}{b^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$

67. $\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{5}}.$ **68.** $\left(\frac{81n^{5}p^{4}}{16m^{3}q^{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}.$

69. $\left(2a^{\frac{1}{2}}+3b^{-\frac{3}{4}}\right)^{2}.$ **70.** $\left(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^{3}.$

71. Зна се да је $10^{0{,}30103\ldots}$ приближно $=2$ а $10^{0{,}47712\ldots}=3$; представи дате бројеве као степене од 10: a) $4, 8, 16$; b), $3, 9, 27$; c) $6, 12, 18$; d) 5.

Многи задаци у чл. *19.* могу се решити спомоћу разломљених изложитеља, као нпр. под бр. *132—149; 174—222; 225—273.*

Реши дате *експоненцијалне једначине:*

72. $\sqrt[4]{a^{3x+1}}=\sqrt{a^{x+4}}.$ **73.** $\sqrt[4]{a^{3x-1}}=\sqrt[6]{a^{2x+1}}.$

74. $\frac{a^{2x}}{\sqrt[3]{a^{x-1}}}=a^{x-1}\sqrt{a^{3x-4}}.$ **75.** $a^{1-x}.\sqrt{a^{x+1}}.\sqrt[4]{a^{x-3}}.\sqrt[6]{a^{5x}}=1.$

76. $\sqrt[x+1]{a^{20}}:a^{2}=a^{2}.$ **77.** $\sqrt[x]{a^{3+5x}}=\sqrt[x]{a^{21}}.$

78. $\sqrt{a^{5-3x}}:\sqrt[3]{a^{5-6x}}=a.$ **79.** $4096^{x}.0{,}5=4^{x+\frac{1}{6}}.$

80. $\sqrt[x+5]{2^{x-5}}=\frac{1}{4}\sqrt[x-5]{8^{x+5}}.$ **81.** $\sqrt[-x]{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\sqrt[x-2]{\sqrt[5]{2}}.$

82. $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{3x}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{9}.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x+1}{7}}.$ **83.** $0{,}25^{23}=\sqrt[3]{4^{5x-3}}.0{,}125^{6x}.$

84. $64^{\frac{x+2}{8x-5}}=\sqrt[4]{0{,}5}.\sqrt[x+3]{2^{x+24}}.$ **85.** $\sqrt{2^{x+1}}=\sqrt[7]{0{,}5^{1-4x}}.$

86. $\sqrt{a^{3-4x}}:(a^{4{,}5}.\sqrt[5]{a^{6-7x}}=1.$

87. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}.\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2}=6.$

88. $a^{1-x}.\sqrt[3]{a^{4x+1}}.\sqrt[4]{a^{x+2}}.\sqrt[5]{a^{1-8x}}=1.$

89. $\frac{2^{3x}}{\sqrt{2^{9}}}+3^{2x-4}\frac{2^{3x}}{\sqrt{2^{13}}}+3^{2x-3}.$

90. $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}.$

91. $5^{2x-\frac{2}{3}}-3^{x-\frac{1}{3}}=3^{x+1\frac{2}{3}}-5^{2x-1\frac{2}{3}}.$

92. $a^{2x-2}-a^{2x-3}=(a-1)^{x-\frac{1}{2}}.$

93. $\sqrt[x]{2}.\sqrt[y]{8}=\frac{1}{2},$ $\sqrt[4x]{3}.\sqrt[2y]{27}=1.$ **94.** $\sqrt[3]{m^{x-5}}:\sqrt[5]{m^{y-3}}=1,$ $\sqrt[4]{(m^{x-1})^{3}}.\sqrt[3]{m^{5y-1}}=\sqrt[3]{m^{23}}.$

95. $\sqrt[x]{a^{3-n^{2}}}.\sqrt[x]{a}=\sqrt[y]{a^{2+n}},$ $\sqrt[x+y]{a^{4}}.\sqrt[x+y]{a^{2n}}=a^{2}.$

96. $\sqrt[3x]{a}.\sqrt[2y]{a^{5}}=\frac{1}{\sqrt{a}},$ $\sqrt[x]{b^{2}}=\sqrt[4y]{b^{7}}.b^{13}\sqrt[4]{b^{3}}.$ **97.** $\frac{a^{x}}{a^{3}}=\sqrt[3]{(a^{y}.a^{2})^{2}},$ $(a^{x}.a)^{2}=\left(\frac{a^{y}}{a^{2}}\right)^{3}.$

---

22. Имагинарни и комплексни бројеви (чл. 150—156.)

1. $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}+\sqrt{-16}.$ **2.** $\sqrt{-4}-2\sqrt{-36}+\sqrt{-100}.$

3. $2a^{2}\sqrt{-a^{2}}+3a\sqrt{-a^{4}}-\sqrt{-a^{6}}.$ **4.** $\sqrt{-a^{2}b}+\sqrt{-ab^{2}}.$

5. $2a\sqrt{-x^{2}}-b\sqrt{-4x^{2}}.$ **6.** $\sqrt{-12}+\sqrt{-75}.$

7. $2\sqrt{-2}+3\sqrt{-8}-\sqrt{-18}-\sqrt{-50}+\sqrt{-72}.$

8. $i.(-i)+(-i)^{2}-i^{3}-(-i)^{3}+i^{4}-(-i)^{1}.$

9. $2i.5i+3i.2i^{2}+7i.8i^{3}+3i^{2}.2i^{3}+2i^{3}.4i^{3}.$

10. $\sqrt{-12}.\sqrt{-3}-\sqrt{-8}.\sqrt{-2}-i\sqrt{18}.\sqrt{-2}.$

11. $\sqrt{-x^{2}}.\sqrt{-y^{2}}.$ **12.** $\sqrt{-xy}.\sqrt{-xy^{2}}.\sqrt{-x^{2}y^{3}}.$

13. $\sqrt{-ab}.\sqrt{-a^{3}b}.\sqrt{-ab^{3}}.\sqrt{-a^{3}b^{5}}.$

14. $(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})$.

15. $(2\sqrt{-2}-\sqrt{-3})(3\sqrt{-3}-\sqrt{-2})$.

16. $(\sqrt{-2}+\sqrt{-3}-\sqrt{-4})(\sqrt{-2}-\sqrt{-3}+\sqrt{-4})$.

17. $\sqrt{-ab}:\sqrt{b}$. 18. $\sqrt{-ab}:\sqrt{-b}$. 19. $x:\sqrt{-x}$.

20. $\sqrt{80}:2\sqrt{-5}$. 21. $5\sqrt{-6}:\sqrt{-3}$. 22. $\sqrt{-xy^3}:\sqrt{-x^3y}$.

23. $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-ac}):\sqrt{-a}$. 24. $(\sqrt{-20}-\sqrt{-15}):\sqrt{-5}$.

25. $(4\sqrt{-8}-8\sqrt{-12}+12\sqrt{-16}):4\sqrt{-4}$.

26. $i^7+i^9+i^{12}+i^{14}$. 27. $(\sqrt{-3})^3$. 28. $(-2\sqrt{-3})^4$.

29. $(-2\sqrt{-3})^5-(2\sqrt{-3})^6$.

30. $(\sqrt{-9})^3+(\sqrt{-4})^4-(\sqrt[3]{-8})^3-(\sqrt{-27})^2$.

---

31. $(1-\sqrt{-4})+(3-\sqrt{-25}-(2-\sqrt{-49})$.

32. $(3+2i)(3-2i)$. 33. $(5+6i)(3-4i)$.

34. $(8+\sqrt{-3})(8-\sqrt{-3})$. 35. $(5-2\sqrt{-3})(5+2\sqrt{-3})$.

36. $(\sqrt{a}+\sqrt{-b})(\sqrt{a}-\sqrt{-b})$.

37. $(\sqrt{2}+2\sqrt{-2})(\sqrt{2}-2\sqrt{-2})$.

38. $(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3})$.

39. $(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$.

40. $(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$.

Докажи: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=$
$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

41. $(2-3i)^2$. 42. $(\sqrt{2}-\sqrt{-2})^2$.

43. $(3-\sqrt{-5})^2$. 44. $(3-\sqrt{-1}-\sqrt{-2})^2$.

45. $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\dfrac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$. 46. $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^2$.

47. $(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}})^2\times$
$(-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}})^2$.

48. $(1+\sqrt{-3})^4+(1-\sqrt{-3})^4$.

49. $(1+\sqrt{-3})^3$. 50. $(1-\sqrt{-3})^5$.

Ослободи дате разломке имагинарних именитеља:

51. a) $\dfrac{5}{2i}$, b) $\dfrac{\sqrt{a}}{bi}$, c) $\dfrac{2x^2}{3\sqrt{-2x}}$.

52. a) $\dfrac{1}{\sqrt{-9}}$, b) $\dfrac{10}{\sqrt{-25}}$, c) $\dfrac{24}{\sqrt{-9}}$, d) $\dfrac{\sqrt{-27}}{\sqrt{-3}}$.

53. a) $\dfrac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{-a^3}}$, b) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b-a}}$, $a>b$; c) $\dfrac{\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{1-x^2}}$, $x>1$.

54. $\dfrac{2}{1+i}$. 55. $\dfrac{1}{1-i}$. 56. $\dfrac{2}{3+4i}$. 57. $\dfrac{a-b}{a+bi}$.

58. $\dfrac{10i}{1+3i}$. 59. $\dfrac{3+4i}{3-4i}$. 60. $\dfrac{10}{2-\sqrt{-8}}$. 61. $\dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{-2}}$.

62. $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}$. 63. $\dfrac{1-20\sqrt{-5}}{7-2\sqrt{-5}}$. 64. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{3}-\sqrt{-2}}$.

65. $\dfrac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$. 66. $\dfrac{6\sqrt{-6}+5\sqrt{-5}}{6\sqrt{-5}-5\sqrt{-6}}$.

67. $\dfrac{a+bi}{a-bi}+\dfrac{x+yi}{x-yi}$. 68. $\dfrac{a-bi}{a+bi}+\dfrac{x+yi}{x-yi}$.

69. $\dfrac{1}{1-i-i\sqrt{3}}$. 70. $\dfrac{3+i}{(2-i)^2}$. 71. $\dfrac{1-i^3}{(1+i)^3}$. 72. $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$.

Доведи под један корен:

73. $\sqrt{-3+4i}+\sqrt{-3-4i}$. 74. $\sqrt{-3+4i}-\sqrt{-3-4i}$.

75. $\sqrt{2+\sqrt{-5}}\pm\sqrt{2-\sqrt{-5}}$.

76. $\sqrt{a-b+2\sqrt{-ab}}\pm\sqrt{a-b-2\sqrt{-ab}}$.

77. $\sqrt{\dfrac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}-i\sqrt{-\dfrac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}$.

Растави дати израз на збир или на разлику корена:

78. $\sqrt{-3+4i}$. 79. $\sqrt{-3-4i}$.

80. $\sqrt{8-6i}$. 81. $\sqrt{1+\frac{3}{4}i}$.

82. $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$. 83. $\sqrt{6+8\sqrt{-10}}$.

84. $\sqrt{12-10\sqrt{-13}}$. 85. $\sqrt{20-10\sqrt{-5}}$.

86. $\sqrt{4-60\sqrt{-3}}$. 87. $\sqrt{-a+2a\sqrt{-2}}$.

88. $\sqrt{\sqrt{-4}}=\sqrt{0+\sqrt{-4}}=..$ 89. $\sqrt{-3\sqrt{-1}}$.

23. Извлачење квадратног и кубног корена

Извлачење квадратног корена (чл. 157—160).

1. $\sqrt{\left(\frac{9a^2x^2}{25b^2y^2}-\frac{2x^2}{3y^2}+\frac{25b^2x^2}{81a^2y^2}\right)}$.

2. $\sqrt{0{,}04a^{-4m}b^{-6m}-0{,}2a^{m}b^{m}+0{,}25a^{6m}b^{8m}}$.

3. $\sqrt{\{x^4-6ax^3+11a^2x^2-6a^3x+a^4\}}$.

4. $\sqrt{\{16m^6+16m^5+4m^4-16m^3-8m^2+4\}}$.

5. $\sqrt{\{16a^6-24a^5+25a^4-20a^3+10a^2-4a+1\}}$.

6. $\sqrt{\{9y^6-12y^5+10y^4-28y^3+17y^2-8y+16\}}$.

7. $\sqrt{\{25-70a+139a^2-236a^3+235a^4-198a^5+121a^6\}}$.

8. $\sqrt{\{0{,}16a^4-2{,}4a^3-0{,}16a^2b+9a^2+1{,}2ab+9{,}04b^2\}}$.

9. $\sqrt{\left[\frac{9^6}{16y^6}-\frac{x^5}{2y^5}-\frac{26x^4}{9y^4}+\frac{53x^3}{6y^3}+\frac{2x^2}{3y^2}-\frac{20x}{y}+25\right]}$.

10. $(a^{4m-4}-4a^{3m-3}b^{-m}+2a^{2m-2}b^{-2m}+4a^{m-1}b^{-3m}+b^{-4m})$.

11. $\sqrt{\{a^2-4a\sqrt{ab}-2ab+12b\sqrt{ab}+9b^2\}}$.

12. $\sqrt{\{\sqrt[5]{a^4}-4\sqrt[15]{a^{11}}+4\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[5]{a^2}-4\sqrt[3]{a}+1\}}$.

13. $\sqrt{\{a^3-4a^2b^{\frac{1}{4}}+4ab^{\frac{1}{2}}-6a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}+12a^{\frac{1}{2}}b+9b^{\frac{3}{2}}\}}$.

14. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$

15. $\sqrt{a^2+b}=a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}}=\cdot\cdot$ 16. $\sqrt{a^2-b}=a\sqrt{1-\frac{b}{a^2}}=\cdot\cdot$

---

17. $\sqrt{135424}$. 18. $\sqrt{556516}$, 19. $\sqrt{226576}$. 20. $\sqrt{53993104}$.

21. $\sqrt{395850816}$. 22. $\sqrt{422220304}$. 23. $\sqrt{54782211136}$.

24. $\sqrt{1406{,}25}$. 25. $\sqrt{27{,}973521}$. 26. $\sqrt{0{,}00178929}$.

27. $\sqrt{785{,}6809}$. 28. $\sqrt{0{,}97535376}$. 29. $\sqrt{44105{,}040144}$.

30. $\sqrt{\frac{676}{1681}}$ 31. $\sqrt{\frac{178929}{797449}}$. 32. $\sqrt{485380\frac{29}{169}}$.

33. $\sqrt{\sqrt{29986576}}$. 34. $\sqrt[4]{362673936}$. 35. $\sqrt[8]{1475789056}$.

36. $\sqrt{0{,}1907\ldots}$ 37. $\sqrt{335{,}779\ldots}$. 38. $\sqrt{0{,}8423\ldots}$.

Одреди дате ирационалне корене са 5 цифара које вреде:

39. $\sqrt{28}$. 40. $\sqrt{320}$. 41. $\sqrt{6584}$. 42. $\sqrt{3{,}92}$

43. $\sqrt{0{,}101}$. 44. $\sqrt{0{,}07854}$. 45. $\sqrt{0{,}123457}$.

46. $\sqrt{2}$. 47. $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 48. $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

49. $\sqrt{\frac{67}{3}}=\sqrt{\frac{201}{9}}\cdot=\cdot\cdot$ 50. $\sqrt{\frac{591}{67}}$. 51. $\sqrt{251\frac{7}{12}}$.

52. Израчунај спомоћу обрасца $s_{2n}=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{s_n^2}{4}}\right)}$ *a)* обим у круг с полупречником $r=1$ уписанога правилна осмоугаоника из $s_4=r\sqrt{2}$; *b)* u_{12} из $s_6=r$. (5 децим.).

53. Тако исто u_{20} из $s_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$.

54. Израчунај спомоћу обрасца $Sn=\frac{rs_n}{\sqrt{r^2-\frac{s^2_n}{4}}}$ *a)* обим око круга полупречника 1 описана правилнога осмоугаоника, *b)* дванаестоугаоника, *c)* десетоугаоника (уз припомоћ добивених израза за s_8 и s_{12} у зад. 52. и 53.).

55. $\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}=\cdot\cdot$ 56. $\sqrt{79}=\sqrt{9^2-2}=\cdot\cdot$

57. $\sqrt{26}$. 58. $\sqrt{146}$. 59. $\sqrt{35}$. 60. $\sqrt{220}$.

Извлачење кубног корена (чл. 161—163.)

61. $\sqrt[3]{a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^2y^6}$.

62. $\sqrt[3]{(8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8)}$.

63. $\sqrt[3]{\{64x^6-144ax^5+204a^2x^4-171a^3x^3+102a^4x^2-36a^5x+8a^6\}}$.

64. $\sqrt[3]{\{8a-60\sqrt[3]{a^2b}+150\sqrt[3]{ab^2}-125b\}}$.

65. $\sqrt[3]{\left[1+\frac{6x}{a}+\frac{15x^2}{2a^2}-\frac{10x^3}{a^3}-\frac{45x^4}{4a^4}+\frac{27x^5}{2a^5}-\frac{27x^6}{8a^6}\right]}$.

66. $\sqrt[3]{\left\{x^{6m}-x^{5m}+\frac{5}{27}x^{3m}-\frac{1}{81}x^{m}-\frac{1}{729}\right\}}$.

67. $\sqrt[3]{[x^2-3x^{\frac{4}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}-7+6x^{-\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{4}{3}}+x^{-2}]}$.

68. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \ldots$

69. $\sqrt[3]{a^3 + b} = a\sqrt[3]{1 + \frac{b}{a^3}} = ..$

70. $\sqrt[3]{a^3 - b} = a\sqrt[3]{1 - \frac{b}{a^3}} = ..$

71. $\sqrt[3]{262144}$. 72. $\sqrt[3]{3241792}$. 73. $\sqrt[3]{8615125}$.

74. $\sqrt[3]{746142643}$. 75. $\sqrt[3]{1767172329}$. 76. $\sqrt[3]{027881709547}$.

77. $\sqrt[3]{0{,}778688}$. 78. $\sqrt[3]{474{,}552}$. 79. $\sqrt[3]{78{,}402752}$.

80. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{20661046784}}$. 81. $\sqrt[6]{1126162419264}$.

82. $\sqrt[3]{\frac{704969}{1601613}}$. 83. $\sqrt[3]{32{,}856\ldots}$ 84. $\sqrt[3]{0{,}00008427\ldots}$

Израчунај дате ирационалне корене са 3 цифре које вреде:

85. $\sqrt[3]{100}$. 86. $\sqrt[3]{5213}$. 87. $\sqrt[3]{8135}$. 88. $\sqrt[3]{47838}$.

89. $\sqrt[3]{0{,}3}$. 90. $\sqrt[3]{25{,}643}$. 91. $\sqrt[3]{0{,}0957}$. 92. $\sqrt[3]{0{,}12345}$

93. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{\frac{180}{216}} = ..$ 94. $\sqrt[3]{\frac{37}{70}}$. 95. $\sqrt[3]{8\frac{7}{12}}$.

Одреди с погледом на задатке *68.*, *69.* и *70.* са 4 децимала:

96. $\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{4^3 + 1} = ..$ 97. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3^3 - 3} = ..$

98. $\sqrt[3]{218}$. 99. $\sqrt[3]{130}$. 100. $\sqrt[3]{62}$. 101. $\sqrt[3]{508}$.

24. **Логаритми** (чл. **164—178.**)

1. Изведи обрнуте рачунске радње из једначина: a) $2^3 = 8$; b) $8^{\frac{1}{3}} = 2$; c) $4^6 = 4096$.

2. Напиши дате једначине тако, да x буде изложитељ степена, па одреди x: a) $\log 625_{(5)} = x$; b) $\log \frac{1}{64}_{(2)} = x$; c) $\log \sqrt[3]{9}_{(3)} = x$.

3. Одреди за основу *2* логаритам бројева $2, 4, 8, 16, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$.

4. Колики је логаритам од *64* за основу *2, 4, 8, 16, 32, 64?*

5. Одреди: $\log 9_{(3)}$, $\log 729_{(3)}$, $\log 1_{(3)}$, $\log \frac{1}{3}_{(8)}$, $\log \frac{1}{\sqrt{3}}_{(3)}$.

6. Одреди: $\log 2_{(8)}$, $\log 4_{(8)}$, $\log 8_{(8)}$, $\log \frac{1}{2}_{(8)}$, $\log \frac{1}{4}_{(8)}$, $\log. \frac{1}{8}_{(8)}$.

7. Одреди логаритам датих бројева за основу $\frac{1}{2}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, 2, 4, 8, 16$.

8. За основу *3* одреди логаритме бројева: $3, 9, 81, 27, 1, 243, 729, 3^n, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$.

9. Израчунај: a) $\log 36_{(6)}$, b) $\log 49_{(7)}$, c) $\log 216_{(6)}$, d) $\log 81_{(9)}$, e) $\log 64_{(-8)}$.

10. Који су логаритми разломака: $\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$ за основу $\frac{1}{3}$?

11. Одреди логаритам од $\frac{125}{8}$, па онда од $\frac{625}{16}$ за основу $\frac{2}{5}$.

12. Израчунај x из једначина: a) $\log x_{(4)} = 3$, b) $\log x_{(7)} = 1$, c) $\log 256_{(x)} = 4$.

13. Одреди x: a) $\log 121_{(x)} = 2$, b) $\log 196_{(x)} = 2$, c) $\log 343_{(x)} = 3$, d) $\log 625_{(x)} = 4$.

14. Колики је $\log 10$, $\log 100$, $\log 1000$, $\log 1$, $\log \frac{1}{10}$, $\log \frac{1}{100}$?

15. Између којих се целих бројева налазе логаритми бројева: *1,3, 2,5, 6, 11, 20, 40* за основу *2?*

16. Између којих се целих бројева налазе логаритми бројева: *2, 4, 10, 20, 40, 100* за основу *3?*

17. Између којих се целих бројева налази Бригов логаритам некојег једноцифрена броја; исто тако: двоцифрена, троцифрена, четвороцифрена, n-цифрена броја?

18. Дати су разломци: *0,7, 0,03, 0,13, 0,0008;* одреди између која се два узастопна степена од *10* налазе ти разломци, па онда одлучи између која се два негативна цела броја налазе логаритме оних разломака.

19. Зашто *1* није подесно за основу логаритамске системе?

20. Који од датих бројева: *2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256* немају стварне логаритме за основу *—2?*

21. Зашто није подесно узимати негативан број за основу логаритамске системе?

22. Зашто је $lim\ log\ x(b) = -\infty$ за $lim\ x = 0$ и $b > 1$?

23. Зашто какав негативан број за основу $b > 0$ нема стваран логаритам?

Одреди x:

24. $log\ x_{(4)} = \frac{1}{2}$. **25.** $log\ x_{(3)} = -1$. **26.** $log\ x_{(25)} = -\frac{1}{2}$.

27. $log\ x_{(4)} = -\frac{5}{2}$ **28.** $log\ x = -2$. **29.** $log\ x = -\frac{1}{4}$.

---

30. $log\ abc$. **31.** $log\ 6xyz$. **32.** $log\ 3a(c+d)$.

33. $log\ (a+b)(m+n)$. **34.** $log\ (a^2-b^2)$. **35.** $log\ a(x^2-1)$.

$log\ 2 = 0{,}301030$, $log\ 3 = 0{,}477121$, $log\ 7 = 0{,}845098$, $log\ 11 = 1{,}041393$.

36. Колики је a) $log\ 6$; b) $log\ 14$; c) $log\ 42$; d) $log\ 20$; e) $log\ 300$; f) $log\ 70000$?

37. $log \frac{2ab}{3x}$. **38.** $log \frac{1}{ab}$. **39.** $log \frac{ab-cd}{mn-pq}$.

40. $log \frac{5mx}{1-m^2}$ **41.** $log \frac{x^2-y^2}{2xy}$. **42.** $log \frac{3(a^2-b^2)x}{(2a+2b)y}$.

43. Израчунај: a) $log \frac{2}{3}$, b) $log \frac{2}{7}$, c) $log \frac{7}{3}$, d) $log\ 5 = log \frac{10}{2}$

44. a) $log \frac{1}{2}$, b) $log \frac{1}{3}$, c) $log \frac{1}{7}$, d) $log\ 0{,}1$.

45. Представи негативне логаритме у задацима два последња примера (**43.** и **44.**) с позитивном мантисом а негативном карактеристиком!

46. Израчунај: a) $log \frac{2}{30} + log \frac{7}{11}$; b) $log \frac{3}{7} - log \frac{2}{11}$.

47. a) $log\ (7 . 11) - log\ (3 . 7)$; b) $log \left(\frac{2}{3} . \frac{7}{11}\right)$.

48. $log\ a^x$. **49.** $log\ ab^2$. **50.** $log\ (ab)^2$.

51. $log\ 2a^3$. **52.** $log\ 5a^2x^3$. **53.** $log\ (a+b)^{x+y}$

54. $log \frac{ax^m y^n}{bz^p}$. **55.** $log \frac{2a^3}{3bx^2}$. **56.** $log \frac{8mn^2x^3}{5pqy^4}$.

57. $log \frac{1}{(2a^2)^3 (5b^3)^2}$. **58.** $log \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 . \left(\frac{m}{n}\right)^3\right]$.

59. Израчунај: a) $log\ 8$, b) $log\ 32$, c) $log\ 9$, d) $log\ 81$.

60. a) $log\ 49$, b) $log\ 7^5$, c) $log\ 2^{-8}$, d) $log \left(\frac{3}{11}\right)^3$.

61. $log \left(\frac{2}{3.7}\right)^3$. **62.** $log \left[\left(\frac{3}{11}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^4\right]$.

63. $log\ \sqrt{ab}$. **64.** $log\ \sqrt{xy^3}$. **65.** $log\ 8a^2 \sqrt{b^3x}$.

66. $log\ \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}}$. **67.** $log \frac{2\sqrt{x}}{a\sqrt[3]{y}}$ **68.** $log \frac{x^2 \sqrt[3]{a}}{5by^3}$.

69. $log\ (\sqrt[m]{x^n}\sqrt[p]{y^q})$. **70.** $log\ \sqrt[n]{x^2b^3c^4}$. **71.** $log\ \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^p})^q}$.

72. $log\ (a\sqrt{a\sqrt{a}})$. **73.** $log\ (a\sqrt[x]{a})^{\frac{1}{x}}$. **74.** $log\ x^{\log x}$.

75. $log \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **76.** $log \frac{1}{b^2\sqrt{a^3c}}$. **77.** $log \frac{a(a+1)\sqrt[3]{a^2}}{b(b+1)\sqrt{b}}$.

78. $log\ \sqrt[n]{5ab\sqrt{a+b}}$. **79.** $log\ \sqrt[5]{\frac{b^3c}{\sqrt{b^2-c^2}}}$. **80.** $log\ \sqrt[4]{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}$.

81. Израчунај: a) $log\sqrt{10}$, b) $log\sqrt[5]{10}$, c) $log\sqrt[10]{10}$, d) $log\sqrt[3]{100}$.

82. a) $log\sqrt[5]{2}$, b) $log\sqrt[3]{7}$, c) $log\sqrt{3}$.

83. a) $log\ \sqrt[4]{\frac{3}{7}}$, b) $log\ \sqrt[5]{\frac{11}{20}}$, c) $log\ \sqrt[3]{\left(\frac{2}{11}\right)^5}$.

84. a) $log\ [log\ 10^{mn}]$, b) $log\ [log\ \sqrt[m]{10^n}]$.

Који је израз логаритмован, кад је резултат те радње:

85. $log\ x + log\ y + log\ z$. **86.** $log\ x + log\ y - log\ z$.

87. $3\ log\ a + 2\ log\ b - 5\ log\ c$. **88.** $3\ log\ a - 2\ log\ b + 5\ log\ c$.

89. $log\ a - (log\ b + log\ c)$. **90.** $\frac{1}{5}\ log\ a - \frac{1}{3}\ log\ b - \frac{1}{4}\ log\ c$.

91. $log\ a + \frac{1}{x}\ log\ a - \frac{1}{y}\ (log\ a + log\ b)$.

92. $\frac{n}{m}\ log\ a - \left(\frac{q}{p}\ log\ b + \frac{s}{r}\ log\ c\right)$.

93. $\frac{1}{5}\left(2\ log\ a + 3\ log\ b\right) - \frac{1}{2}\left[\ log\ (a+b) + log\ (a-b)\ \right]$.

94. $\frac{1}{3}\left[\log a + \frac{1}{3}\log(a-b) - 2\left(\log b + \frac{1}{3}\log 3\right)\right].$

95. $\log(a+b) + 2\log a - \frac{1}{2}\left[\log(a-b) + 3\log b\right].$

96. $2\log 3 - \frac{1}{3}\left(2\log 5 + \frac{1}{2}\log 7\right).$

97. $2\log(x-y) - \frac{1}{2}\log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x^2 - xy + y^2).$

98. $x\log(\log a).$ **99.** $x\log x - \log(\log x).$

Нађи у логаритамским таблицама Бригове логаритме бројева:

	a)	b)	c)	d)	e)
100.	*7,*	*38,*	*218,*	*683,*	*995.*
101.	*1035,*	*4719,*	*5755,*	*7899,*	*9011*
102.	*39070,*	*586100,*	*59,13,*	*9,015,*	*0,4792,*
103.	*86127,*	*78008,*	*0,68315,*	*85,201,*	*0,0075536.*
104.	*0,091457,*	*364228,*	*17,8193,*	*4,48197,*	*129,356.*
105.	*0,01235,*	*0,0027398,*	*3,0008,*	*0,04(3),*	*0,(68).*

106. Израчунај: a) $\log\log 2$, b) $\log\log 111{,}11$, c) $\log\log 1{,}07$.

Нађи бројеве који одговарају Бриговим логаритмима:

	a)	b)	c)	d)
107.	*0,240549,*	*1,572872,*	*2,985471,*	*0,642761.*
108.	*3,890086,*	*0,660581,*	*0,271609,*	*1,028164.*
109.	*2,957625,*	*0,990019,*	*0,009945,*	*2,400160.*
110.	*0,730439—2,*	*1,013965,*	*3,910010,*	*3,698310.*
111.	*0,553553—3,*	*0,680120—1,*	*1,856034,*	*4,43065.*
112.	*4,785634,*	*0,051681—2,*	*0,699601—1,*	*1,998281.*
113.	$3\frac{1}{2}$,	$-2\frac{1}{3}$,	$1\frac{7}{12}$,	$\frac{3}{8}$.
114.	$0{,}6-2$,	$4\frac{5}{6}$,	$1{,}8-3$,	$4{,}2-6$.
115.	$-0{,}301030$,	$0{,}5-1$,	$-3{,}5$,	$-0{,}213$.
116.	$-\frac{3}{4}$,	$-0{,}7$,	$-1\frac{4}{25}$,	$-\frac{7}{16}$.

117. Одреди x из: a) $\log\log x = 0{,}612749 - 1$; b) $\log\log x = 0{,}926908 - 1$; c) $\log\log x = 0{,}549494$.

Израчунај спомоћу логаритама изразе:

118. $1{,}2345 \cdot 1{,}3456.$ **119.** $9{,}6845 \cdot 0{,}29758.$

120. $1{,}025 \cdot 1{,}0792 \cdot 1{,}05625 \cdot (-1{,}0751).$

121. $0{,}35679 \cdot 1{,}0765 \cdot 1{,}92234 \cdot 0{,}33258.$

122. $2{,}00415 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}0741 \cdot 0{,}09972 \cdot 1{,}25463.$

123. $\frac{17{,}846}{9{,}157}.$ **124.** $\frac{1}{3{,}14159}.$ **125.** $\frac{2488\cdot(-1926)}{521347}.$

126. $\frac{2{,}3456 \cdot 5{,}2913}{769 \cdot 0{,}12345}.$ **127.** $\frac{413 \cdot 4124 \cdot 21358}{425 \cdot 4998 \cdot 76143}.$

128. $\frac{2{,}1457 \cdot 0{,}1248 \cdot 1385 \cdot 31{,}273}{277 \cdot 10{,}7285 \cdot 2{,}2812 \cdot 125{,}082}.$

129. a) $(1{,}05)^{12}.$ b) $(1{,}045)^{9}.$ **130.** $2^{1{,}235}.$

131. $(42{,}456)^{-2}.$ **132.** $2{,}45^{5{,}172}.$

133. $\left(-\frac{323}{313}\right)^{17}.$ **134.** $\left(\frac{54{,}139}{55{,}817}\right)^{11}.$

135. $\frac{2035 \cdot (0{,}00876)^7}{3164 \cdot (0{,}00592)^5}.$ **136.** $\frac{1{,}14159^2 \cdot 2{,}0489^3 \cdot 1{,}07938^4}{4{,}0932^4 \cdot 0{,}859^2 \cdot 210{,}895^3}.$

137. $\frac{4r^3\pi}{3}$ за $r = 1{,}06234$ и $\pi = 3{,}14159.$

138. $(3{,}905)^{\frac{4}{5}}$ **139.** $\left(-\frac{89}{113}\right)^{\frac{2}{3}}.$ **140.** $(17{,}716)^{-\frac{3}{4}}.$

141. $\sqrt[3]{0{,}918}.$ **142.** $\sqrt[5]{7135}.$ **143.** $\frac{\sqrt[5]{0{,}82736}}{0{,}95372^4}.$

144. $\sqrt[5]{\frac{1{,}5852 \cdot 0{,}028346^3}{0{,}0004594}}.$ **145.** $\sqrt[8]{314{,}29}.$

146. $\sqrt{13^{0{,}3414}}.$ **147.** $\sqrt[12]{\left(\frac{395}{129}\right)^7}.$ **148.** $\sqrt[8]{\frac{9}{13}\sqrt[3]{6}}.$

149. $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{c^2}}$ за $a = 0{,}21537,\quad b = 7{,}7856,\quad c = 0{,}93572.$

150. $\frac{a\sqrt[8]{b}}{cd^6}$ за $a = 0{,}27386,\ b = 30000,\ c = 0{,}02183,\ d = 0{,}72.$

151. $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}}$ за $a = 2{,}145,\ b = 3{,}087,\ c = 3{,}248.$

152. $\frac{35^4}{57^3}\sqrt[3]{30{,}9}.$ **153.** $\frac{\sqrt[3]{37{,}8} \cdot \sqrt[4]{13^2}}{\sqrt[5]{7{,}13945^3}}.$ **154.** $\sqrt[4]{\frac{87 \cdot \sqrt{8105}}{93{,}24^2}}.$

155. $\frac{3\sqrt[8]{5\sqrt{6}}}{11\sqrt[5]{4\sqrt{124}}}.$ **156.** $\sqrt[7]{340} \cdot \sqrt[5]{\frac{24{,}105 \cdot 58{,}937}{1{,}47939^3}}.$

157. $\sqrt{10+\sqrt{10}}.$ 158. $\dfrac{347\sqrt[5]{0,35}+\sqrt[3]{55,33^2}}{4,9265^2}.$

159. $\sqrt{\dfrac{4,31957^3\sqrt[3]{3,19338}\cdot\sqrt[5]{17,39}}{15^4\cdot\sqrt[3]{91,34}\cdot\sqrt[5]{3,4071}}}.$

160. $\dfrac{q^n-1}{q-1}$ за $q=1,01875,\ n=12.$

161. $\sqrt[3]{\sqrt{18,7}-\sqrt[3]{9,2}}.$ 162. $\sqrt[5]{\dfrac{52-3\sqrt[4]{10}}{\sqrt{8,7}}}.$

163. $\sqrt{\sqrt[4]{0,2}-\sqrt[3]{0,9}}.$ 164. $(1,04-\sqrt[5]{0,3})^3.$

165. $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}.$ 166. $\sqrt[10]{10+\sqrt[10]{10+\sqrt[10]{10}}}.$

167. $(0,003)^{-\frac{1}{10}}.$ 168. $\dfrac{0,208^{-\frac{1}{2}}\cdot 1,8^{\frac{2}{3}}}{1049\cdot 1,46^{-\frac{3}{4}}}.$

169. $x=\dfrac{\log 13-\log 6}{\log 3}.$ 170. $x=\dfrac{\log 2-\log(\log 2)}{\log 3}.$

171. $x=\dfrac{\log 37656-\log 1183}{\log 16-\log 9}.$

172. Израчунати страну равнострана троугла из обрасца $a=\sqrt{\dfrac{4P}{\sqrt{3}}}$, кад је $P=0,366590\ m^2$.

173. Дате су стране једнога троугла: $a=804,31$, $b=1006,6$, $c=864,9$; израчунати полупречник уписана и описана круга. $\left(\varrho=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};\quad r=\dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.\right)$

174. Тако исто, кад је $a=5$, $b=12$, $c=13$.

175. Обим у круг $(r=1)$ уписанога правилна 96-угаоника износи $6,28206$. Колики је обим *a)* уписанога правилна 192-угаоника; *b)* описанога правилна 96-угаоника. (Зад. чл. 23. бр. 52 и 54.).

176. Са колико би се цифара написао број представљен изразом 9^9?

Решити једначине без помоћи логаритамских таблица:

177. $\log x=-3.$ 178. $2\log x=3\log 4.$

179. $\frac{1}{3}\log x=2\log a.$

180. $\frac{1}{2}\log(x-1)=1-\log 5.$

181. $\log x+\log(x+1)=2\log(1-x).$

182. $\log(x+5)-\log(x-5)=2.$

183. $2^{\log x}=8.$ 184. $5^{\log 2x}=625.$

Реши дате експоненцијалне и логаритамске једначине:

184. $a^{n-x}=nb^x.$ 185. $m\cdot a^{x-\alpha}=n\cdot b^{x-\beta}.$ 186. $a^x\cdot b^{mx}=c.$

187. $(m^{x-1})^5=n^x.$ 188. $m^{ax+\alpha}=n^{bx+\beta}.$ 189. $47^x=255.$

190. $10^x=2,71828.$ 191. $3^{2,47806}=2,47806^x.$ 192. $25^{-x}=11.$

193. $2^{3x+4}\cdot 2^{2+x}=5^x.$ 194. $3^{2x}\cdot 5^{3x-4}=7^{x-1}\cdot 11^{2-x}.$

195. $2^x\cdot 3^{x-1}\cdot 4^{x-2}=5.$ 196. $6^{3-4x}=0,006^{7-4x}.$

197. $\dfrac{a^x}{b^{x-1}}=c.$ 198. $m^x\cdot n^{x-2}=\dfrac{a}{p^{x-4}}.$

199. $\dfrac{a^{mx}\cdot b^{nx}}{c^{px}\cdot b^{px}}=s.$ 200. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{5x-2}=5,301^{x+1}.$

201. $\left(\dfrac{123}{234}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}=\dfrac{345}{456}.$ 202. $\sqrt[x]{10}=2.$

203. $\sqrt[x]{2^{5+3x}}=5.$ 204. $\sqrt[10]{10}=\sqrt[x]{2,57812}.$

205. $\sqrt[5]{a^{x+1}}=\sqrt[4]{b^{2x-1}}.$ 206. $\sqrt[x]{a^{3x-1}}=\sqrt{ab}:\sqrt[2x]{b^{x+1}}.$

207. $\sqrt[3]{14,779^{2x-3}}=\sqrt{89^{x-2}}.$

208. $\sqrt[3]{3,238^x}\cdot\sqrt[5]{0,045^{2x}}=\sqrt{4,5^{1-2x}}.$

209. $\sqrt[5x]{13^{3x+4}}=\sqrt[7x]{39,737^{5x-4}}.$

210. $500\cdot 0,84^x+400\cdot 0,84^{x-1}=578,592.$

211. $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=4^x+4^{x+1}+4^{x+2}.$

212. $3^x\cdot 5^y=405,$ $2^x\cdot 7^y=112.$ 213. $3^{4x}=7\cdot 3^{4y},$ $5^{3y}=9\cdot 5^{5x}.$ 214. $\sqrt[x]{x+y}=2,$ $(x+y)\,3^x=216.$

215. $\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt[4]{3^y}=12,$ $\sqrt{2^{-x}}:\sqrt[4]{3^{-3y}}=3,375.$ 216. $x^y=243,$ $\sqrt[y]{1024}=\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2.$

217. $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt[3]{3^y}=12,$ $\frac{1}{\sqrt{4^x}}:\sqrt[3]{4^y}=\frac{1}{64}.$

218. $\sqrt[x]{4}\cdot\sqrt[y]{8}=1,$ $\sqrt[x]{2}\cdot\sqrt[y]{2}=1,41421.$

219. $\sqrt[x]{4.5^y}=400,$ $\sqrt[x]{3.2^{y+1}}=72.$

220. $\sqrt[6]{x^{5y}}=1024,$ $3\sqrt{x}=2\sqrt[y]{729}.$

221. $\sqrt[x]{a}=m\sqrt[y]{b},$ $\sqrt[x]{c}=n\sqrt[y]{d}.$

222. $\sqrt[x]{a^{y+1}}=m,$ $\sqrt[y]{b^{x+1}}=n.$

223. $\frac{\sqrt[x]{3}}{\sqrt[y]{2}}=1,16409,$ $\sqrt[x]{7}\cdot\sqrt[2y]{13}=16,1082.$

224. $2^x.5^y=2000,$ $3^x.6^z=2916,$ $4^y.7^z=3136.$

225. $log(5x)+log(2x+3)=1+2log(3-x).$

226. $log\,x+log(2x)+log(4x)=-3.$

227. $log(x+2)-log(x-2)=0,43512.$

228. $2log x=4log 3.$ **229.** $7log\,x^2-4\,log\,x^3=log\,25.$

230. $log(8x)+log(3x)=log\,48.$

231. $log(x+2)-log(x+1)=0,02345.$

232. $log(16x)-log(2x)+log(3x)=log\,9+log 4-log\,6.$

233. $log(5^x-7)+0,14267=x\,log\,5.$

234. $2^{\log x}=3.$ **235.** $11^{\log(2x)}=0,094672^{11}.$

25. Квадратне јеначине с једном непознатом

чисте квадратне једначине

1. $(3x+4)(3x-4)=0.$ **2.** $1-4x^2=7+2x^2.$

3. $(x-a+b)(x+a-b)=4ab.$ **4.** $(a-bx)^2=(b-ax)^2.$

5. $(9+x)(7-x)+(9-x)(7+x)=76.$

6. $(5x^2-1)^2-(2+3x^2)^2=(3-4x^2)^2.$

7. $(ax+b)^2+(a-bx)(ax-b)=(a+b)^2x.$

8. $\frac{2x^4+3x^2}{2x^2-1}-1=\frac{10x^4-4}{6x^2-3}-\frac{2x^2-1}{3}.$

9. $\frac{1}{a(x-a)}-\frac{1}{b(x+b)}+\frac{1}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{ab}.$

10. $a-x=\frac{2ab}{a+x}.$ **11.** $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}=\frac{ab-1}{ax}.$

12. $\frac{x}{150}=\frac{3}{2x}.$ **13.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}.$

14. $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=0.$ **15.** $\frac{(12+x)(x-3)}{12-x}=x+3.$

16. $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{3}.$ **17.** $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{5}{2}.$

18. $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}.$ **19.** $\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$

20. $\sqrt{3x^2+9}=2x.$ **21.** $\sqrt{33+2x-x^2}=x+1.$

22. $\frac{ax^2+b^2}{\sqrt{bx^2+a^2}}=\sqrt{bx^2+a^2}.$

23. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}.$

24. $\sqrt{2x+8}=2\sqrt{x+5}-2.$

25. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=3\sqrt{0,4a}.$

26. $\sqrt{3(x-2)}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{3(x+1)}.$

27. $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2-25}=2.$

28. $\sqrt{x^2+25}+\sqrt{x^2-25}=13+\sqrt{119}.$

29. $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\frac{2b}{\sqrt{x+a}}.$

30. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}.$

31. $\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\frac{a}{b}.$

32. $\frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x.$

33. $\frac{x\sqrt{64x-528}}{\sqrt{3+x}}=8(x-6).$

34. $\sqrt{x^2+a^2-2a\sqrt{x^2-b^2}}+x=\frac{ax}{\sqrt{x^2-b^2}}.$

35. $\sqrt[3]{\sqrt{5}+x}+\sqrt[3]{\sqrt{5}-x}=\sqrt[3]{5\sqrt{5}}.$

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b);\ (a-b)^3=?$

36. $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

37. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{a}$. 38. $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a} + \sqrt[3]{2x}$.

39. $(4x-3)^2 = 81$.

40. $\frac{a+b}{x-a+b} + (a-b)(a-b-x) = 0$.

(Нове непознате).

Потпуне квадратне једначине.

41. $(x-3)(x-2)=0$.
42. $(2x-5)(3x+8)=0$.
43. $x^2-4x=21$.
44. $x^2=12x-35$.
45. $x^2+15x+56=0$.
46. $x^2+x-56=0$.
47. $x^2-4x+4=0$.
48. $x^2-2x=15$.
49. $x^2-6x-7=0$.
50. $x^2-13x=140$.
51. $x^2+9x+5=0$.
52. $x^2+19x+10=0$.
53. $x^2-7x=7$.
54. $x^2+2x+4=0$.
55. $5x^2+7x=24$.
56. $12x^2=20x-3$.
57. $5x^2+13x+17=0$.
58. $18x^2+3x=10$.
59. $16x^2-24x+11=0$.
60. $x^2-12x+100=0$.
61. $x^2-0{,}9x=0{,}1$.
62. $x^2-6{,}8x+10{,}92=0$.
63. $x^2+1{,}28x=0{,}3825$.
64. $x^2-0{,}2392=0{,}81x$.
65. $x^2-0{,}685x=0{,}114536$.
66. $x^2=8{,}712x-7{,}23726$.
67. $2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{25}=0$.
68. $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$.
69. $5x^2+\frac{4}{3}x=\frac{4}{15}$.
70. $4x^2-\frac{7}{3}x=\frac{1}{2}$.
71. $x^2-\frac{17}{6}x+\frac{25}{16}=0$.
72. $10x^2+53x+\frac{405}{8}=0$.
73. $x+\frac{1}{x}=\frac{50}{7}$.
74. $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$.
75. $x^2+2ax=2ab+b^2$.
76. $x^2-2abx=a^4+a^2b^2+b^4$.
77. $x^2-(a+b)x+ab=0$.
78. $x^2-(a-b)x-ab=0$.
79. $(a-b)x^2-bx=a$.
80. $m^2x^2-m(a-b)x=ab$.
81. $(x+3)^2=(x+2)^2+(x-2)^2+6$.
82. $(x+1):(x+3)=(x+11):(3x-3)$.
83. $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(4x+\frac{1}{2}\right)\left(4x-\frac{1}{2}\right)+1=0$.
84. $(a+b)x^2-2(a^2-b^2)x+a^3+b^3=0$.
85. $x^2-(a^2+b^2)x+a^3b-ab^3=0$.
86. $(a-x)^2+(b-x)^2=(a-b)^2$.
87. $x^2(a^2-b^2)-2a(a^2+b^2)x+(a^2+b^2)^2=0$.

88. $2(x^2+1)(a^2-b^2)-5x(a^2-b^2)+3ab(x^2-1)=0$.
89. $x^2-4\sqrt{-1}\cdot x+5=0$.
90. $x^2-4\sqrt{-1}\cdot x=7-4\sqrt{-1}$.
91. $x^2-5x-2ix+5+5i=0$.
92. $x^2-7x-2ix+11+7i=0$.
93. $\frac{x+18}{x+6}=\frac{6}{x-3}$.
94. $\frac{(2a-b)x-b^2}{2a+b-x}=\frac{2a(a-b)}{2a-x}$.
95. $\frac{3x-4}{x-4}-10=\frac{2-x}{2}-1$.
96. $\frac{5}{x}-\frac{5}{x+1}=\frac{12}{x+2}$.
97. $\frac{2a}{x}-\frac{1}{x^2}=a^2-b^2$.
98. $\frac{a^2-b^2}{2x}=\frac{a^2+b^2}{x^2+1}$.
99. $ax-bx=\frac{a}{x}\cdot\frac{a-2bx}{a+b}$.
100. $\frac{ab}{x}+abx=a^2+b^2$.
101. $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$.
102. $\frac{x}{x-1}-\frac{x}{x+1}=\frac{a}{b}$.
103. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{2ax}{a^2-x^2}$.
104. $\frac{a-x}{b+x}-\frac{b+x}{a-x}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$.
105. $\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}=\frac{2(a+b)}{a+b-x}$.
106. $\frac{x-a}{2b}-\frac{x-2b}{x-b}=\frac{b}{a+b}$.
107. $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.
108. $\frac{2(a+1)}{x-1}+\frac{2}{x-a}=\frac{3(a-1)}{x-3}$.
109. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{2x-3}{3x-4}=\frac{1}{5}$.
110. $\frac{5x+4}{2x+1}+\frac{x-1}{3x-4}-3=0$.
111. $\frac{2x-a}{4x+5a}=\frac{x+6a}{2x}+7$.
112. $\frac{3x^2-3}{x+9}+\frac{6x^2-4}{2x-1}=6x-6$.
113. $\frac{6}{x-1}+\frac{10}{x-2}-\frac{7}{x-3}=0$.
114. $\frac{x+2}{10x^2-5x}=\frac{3}{x}+\frac{16x}{4x^2-1}$.

115. $\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-x}=\frac{2}{15x}-\frac{1}{x^2+x}$.

116. $\frac{8x+5}{x^3-1}=\frac{3x^2-2}{x^2-2x+1}-\frac{3x+1}{x^2+x+1}$.

117. $\frac{2}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+2x+4}=\frac{33}{x^3-8}$.

118. $\frac{4x+2}{x^2-2x+4}-\frac{11x+7}{x^2+4x+4}=\frac{77-7x^2}{x^3+8}$.

119. $\frac{3a+5b}{2(a+b)}-\frac{a-b}{a-x}=\frac{b-x}{a+b}$.

120. $\frac{2a-(1+a^2)x}{1+a^2-2ax}=\frac{2b+(1+b^2)x}{1+b^2+2bx}$.

121. $x:(x+1)=(2x+3):(3x+4)$.

122. $6abx^2-(9a^2+4b^2)x+9a^2-4b^2=0$.

123. $abx^2-(a^2+b^2)x+2a^2-3ab-2b^2=0$.

124. $8ax^2-(a^2+64)x+a^2-64=0$.

125. $10abx^2-(25a^2+4b^2)x+25a^2-4b^2=0$.

126. $\left(\frac{8+x}{4-x}\right)^2=8\left(\frac{8+x}{4-x}\right)-15$. Стави $\frac{8+x}{4-x}=y$.

127. $\left(\frac{3+4x}{5x}\right)^2+6\cdot\frac{3+4x}{5x}=7$.

128. $\left(\frac{6x}{4-x}\right)^2+\frac{15x}{x-4}+1=0$.

129. $\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)^2-\frac{9(4-3x)}{2-x}+20=0$.

130. $\frac{x}{a+x}+\frac{a+x}{x}=2\frac{1}{2}$.

131. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{4a(a+b)}{b(2a+b)}$.

132. $(5+x)^2-11(5+x)(4-x)+24(4-x)^2=0$.

133. $(ax-b)(bx+a)=0$. **134.** $3(x-2)^2=5x-10$.

135. $a^2-x^2=(a-b)(x-a)$.

136. $(x+3)^2-4x^2=(x+1)(4x-5)$.

137. $x^2+2x\sqrt{5}=2\sqrt{6}$. **138.** $x(x+2\sqrt{11})=6\sqrt{2}$

139. $x+7\sqrt{x}=30$. **140.** $ax-b\sqrt{x}=c$.

141. $2x-3\sqrt{x-1}=4$. **142.** $x-10=2\sqrt{x^2-3x+5}$.

143. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x-7}=1$. **144.** $3\sqrt{x+5}-\frac{4x}{\sqrt{x+5}}=1$.

145. $\sqrt{10-x}+\sqrt{x-5}=\sqrt{x}$. **146.** $\sqrt{x+2+\sqrt{2x+7}}=4$.

147. $\frac{5+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1}=3-\sqrt{x}$. **148.** $2\sqrt{3x+1}-3\sqrt{2x-1}=1$.

149. $\sqrt{x+\sqrt{10}}+\sqrt{x-\sqrt{10}}=\sqrt{6x-11}$.

150. $a\sqrt{x+b^2}+b\sqrt{x+a^2}=2ab$.

151. $3\sqrt{x+8}-\sqrt{x-8}=2\sqrt{2x+2}$.

152. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x-2}$.

153. $\sqrt{3x+6}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-1}$.

154. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-6}-\sqrt{2x-6}$.

155. $\sqrt{a^2+x\sqrt{2x^2-a^2}}=a+x$.

156. $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{8a}{3\sqrt{x}}$

157. $\sqrt{5+\sqrt{x}}+\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{2(6+\sqrt{x})}$.

158. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$.

159. $\frac{\sqrt{x}}{12-\sqrt{x}}+\frac{12-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2$.

160. $\sqrt{a(b+x)}=a+b-\sqrt{b(a-x)}$.

161. $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}}=1$.

162. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=x$.

163. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}=x-1$.

164. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

165. $\sqrt{7x-13}-12=\sqrt{5x+1}$. **166.** $\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+2}=x$.

167. $\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}+\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}=1$.

168. $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{c^2+(b-x)^2}}=0$.

169. $\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$.

170. $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-2a}=\sqrt{x-3a}$.

171. $\sqrt{a(x-b)}-\sqrt{b(x-a)}=\sqrt{(a-b)(x-2b)}$.

172. $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}$; $(a\pm b)^3=a^3\pm 3ab(a\pm b)\pm b^3$.

173. $\sqrt[3]{72-x}-\sqrt[3]{16-x}=2$. 174. $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

175. $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{3(a+b)}$.

За које ће вредности од x бити дати изрази позитивни а за које негативни?

176. $x^2-8x+16$. 177. x^2-3x-4.
178. $x^2+8x+15$. 179. $x^2-14x+45$.
180. x^2-6x+9. 181. x^2-4x+5.

182. $2x^2-x-2=2\left(x^2-\frac{x}{2}-1\right)$.

183. $-2x^2-x+10=-2\left(x^2+\frac{x}{2}-5\right)$.

184. $8x^2+4x-1$. 185. $12-x-6x^2$.

Које су то једначине којима су корени дати изрази:

186. $+\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. 187. $+3\sqrt{2}$ и $-3\sqrt{2}$.

188. 10 и -1. 189. -9 и -13.

190. $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$. 191. $\frac{7}{3}$ и $-\frac{2}{3}$.

192. $0{,}7$ и $-2{,}4$. 193. $1{,}36$ и $0{,}75$.

194. $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$. 195. $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$.

196. $(2a-b)^2$ и $(2b-a)^2$. 197. $2a+3b\sqrt{2}$ и $2a-3b\sqrt{2}$.

198. $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$.

199. $2+\sqrt{-1}$ и $2-\sqrt{-1}$.

200. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$, $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$.

201. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}$.

202. Која је то квадратна једначина са стварним бројевима, којој је један корен $-5-\sqrt{-5}$?

203. Допуни једначину: $x^2-11{,}175x\cdots\cdots=0$, кад је један њен корен $-2{,}8$.

204. Пређашња једначина (бр. 203) има за један корен $2{,}8$; који је други корен и која је једначина?

205. У које је једначине апсолутни члан $+15{,}4$ а један корен $8{,}8$?

206. Исти задатак (као у зад. 205) за $b=-15{,}4$ и $x_1=8{,}8$.

207. Допуни једначину $x^2-(a^2-2a+2)x\cdots\cdots=0$, кад је један њен корен $x_1=a+1$.

208. Да се постави једначина, којој су корени реципрочне вредности коренâ једначине: $12x^2-17x+6=0$.

209. Тражи се једначина чији су корени квадрати корена једначине: $x^2+ax+b=0$.

210. Тражи се једначина у које су корени квадрати од реципрочних вредности коренâ једначине: $20x^2-33x+10=0$.

Растави на чинитеље триноме:

211. $x^2-17x+70$. 212. $x^2+3x-88$.
213. x^2+x+1. 214. $x^2-9x-10$.
215. $3x^2-14x+8$. 216. $3x^2+10x-153$.
217. $6x^2+x-1$. 218. $20x^2+17x-24$.
219. $x^2-ax+c(a-c)$. 220. $x^2+4abx-(a^2-b^2)^2$.
221. $acx^2-(a^2+bc)x+ab$. 222. $acx^2-(3ab-bc)x-3b^2$.
223. $abx^2+(a+b)x+1$. 224. $abx^2+(a^2-b^2)x-ab$.

26. Примена квадратних једначина с једном непознатом.

Чисте квадратне једначине.

1. Производ од трећине и од четвртине некојег броја износи 108; који је то број?

2. Који број треба за d повећати и за толико умањити, да би производ тих нових бројева био a?

3. Тражи се број којега је деветина једнака с производом од трећине, шестине и осмине његове.

4. Има један број, који је такав да кад се повећа за 5 па после умањи за 5, тада је збир квадрата тако добивених бројева 178; који је то број?

5. Хипотенуза једнога правоугла троугла има $82\,m$, а једна му је катета $4\frac{4}{9}$ пута већа од друге; колике су катете?

6. Размера катета једнога правоугла троугла је $3:4$; кад се мања катета повећа за 4 а већа умањи за 3, тада је нова хи-

потенуза $1\frac{1}{5}$ пута већа од пређашње. Траже се све стране оба троугла?

7. Кад се једна страна датога квадрата продужи за a ($11\frac{1}{2}$ *cm*) а оближња страна за толико умањи, онда је дијагонала правоугаоника начињена од тих дужи b (*41 cm*). Колика је страна квадратова?

8. Израчунати стране равнокраког троугла, кад је дата висина h_c и једна средња линија, која је повучена из темена на основици, нпр. m_a.

9. Стране једнога правоугаоника су *118 cm* и *59 cm*. Кад се мања страна за извесну дуж скрати а друга се страна за двапут већу дуж повећа, тада се површина смањи за *3698 cm²*. Колике су стране новога правоугаоника?

10. Три броја пропорционална су с бројевима: $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$; збир квадрата тих бројева је *4525*. Који су то бројеви?

11. Трошак неког друштва, у којем је било двапут више људи но жена, изнео је 176 динара. Кад је сваки човек платио двапут толико колико је било људи, и свака жена трипут толико колико је било жена, онда колико је било људи а колико жена?

12. Два тела крећу се по крацима правог угла из темена с једнаком брзином; али се прво тело почело кретати m (*7*) секунада раније. Кад су оба тела n (*12*) секунада после поласка првога удаљена d (*65*) метара, с којом се брзином она крећу?

13. Два тела крену се једновремено по крацима правог угла од темена. Брзина једног тела је c (*4, 8*) метара а другог c' (*1, 4*) *m*; после колико су секунада тела удаљена d (*100*) метара?

14. На крацима правог угла налазе се два тела у даљини *40 m* односно *20 m* од темена. Једно се креће ка темену с брзином од *1 m*, а друго од темена с брзином од *2 m*. После колико ће секунада та тела бити удаљена *50* м.?

15. Једна тачка ван круга удаљена је од средишта c мет. Из те тачке повучена је тангента дужине a; колики је полупречник кружни?

16. Површина кружнога прстена је p. Размера великог полупречника спрам малога је m. Колики су ти полупречници?

Потпуне квадратне једначине.

17. Кад се једним бројем подели за *40* већи број, тада је количник за *2* мањи од онога броја; одреди тај број.

18. У једнога двоцифрена броја цифра на месту јединица за *3* је мања од цифре на месту десетица; кад се тај број помножи цифром на месту десетица добије се 42 пута већи број но што је збир цифара датога броја. Који је то број?

19. Збир цифара једнога двоцифрена броја је *5*; кад његове цифре измењају своја места, па се оба броја помноже, добива се *574*; одреди тај број?

20. Који је то двоцифрени број, којега је збир цифара *13*, и који подељен производом својих цифара даје за количник *2* а за остатак *5*?

21. Неко поклони једној гимназији 360 динара да се поделе на подједнаке делове одличним ученицима више гимназије. У току распоређивања ове суме испишу се четири одлична ученика, због чега се део свакога од осталих ученика повећа са 3 динара. Одредити број одличних ученика у тој школи и суму коју је свако добио.

22. Неко друштво потроши при једном излету 30 динара. Да је било пет лица мање, тада би свако лице могло потрошити 30 пара више а трошак се не би променио. Колико је било лица у том друштву?

23. Ученици најстаријег разреда у једној школи измењаше узајамно своје фотографије, којих је број био 1056. Колико је било ученика у разреду?

24. Неки трговац прода два комада сукна, један за 120 динара а други, у којем је било 2 *m*. више, за 130 дин. Да је други комад продао по цену првога, и обрнуто, тада би оба комада продао за 254 динара. Колико је било метара у сваком комаду? (Тумачење негативног резултата).

25. Неко купи сукна за 400 (a) дин. Да је метар плаћао 1 (b) динар мање, добио би за онај новац 20 (c) мет. више; колико је метара купио?

26. A и B добију на неком послу заједнички 1800 динара; B је био уложио 1600 динара више но A а добит му је изнела $3\frac{3}{4}$ пута онолико колико је A уложио. Израчунати улоге и добит обојице.

27. Једном пресудом осуђено је више лица да плате солидарно 1200 динара. Али, како су тројица били пуки сиромаси, то су остали морали да плате по 90 динара више. Колико је било лица?

28. Трошкови путовања више лица изнеше 432 динара, па како су два лица путовала без трошка морало је свако од осталих лица платити по 3 динара више. Колико је лица путовало?

29. Један отац остави својој деци имање од *14400* дин. да поделе на једнаке делове; али на скоро после очеве смрти умре двоје деце због чега остала деца добију по *1200* динара више, но што би иначе добила. Колико је деце отац оставио?

30. A и B добију при неком послу *340* дин. B је уложио *400* дин. више но A. Кад је A у име капитала и добити примио *3360* дин., колики је био његов уложни капитал?

31. Зараде два радника који су радили на истом послу биле су неједнаке; зарада једнога за известан број дана изнела је *100* динара; други радник, који је радио *6* дана мање, примио је *54* динара. Да је други радник радио онолико дана колико је радио први, а овај да је радио *6* дана мање но што је радио, они би подједнако зарадили. Колико је дана сваки радник радио и колика је надница свакога?

32. Неко купи једну ствар па је одмах за тим прода за *144* динара. Добит при продаји износи толико од сто колико је сама ствар стала. Пошто је купљена та ствар?

33. Неко узајми двојици трговаца две разне суме, по исти проценат, укупно *15660* динара. Прва сума изнела је крајем шест месеца *9984* дин. заједно са интересом; друга сума изнела је заједно с интересом после *10* месеца *6404* дин. Колике су биле те две суме а колики проценат?

34. Неко позајми *5600* дин. по известан проценат; од интереса на крају прве године он потроши за свој рачун *152* дин. а остатак прида капиталу, који крајем друге године донесе интереса *256,5* дин. По колико је $^0/_0$ капитал позајмљен?

35. Неко прима годишње од једног капитала *120* дин. интереса, а од другог капитала, који је од првога већи за *6000* дин. и који доноси $2^0/_0$ више прихода, *540* дин. интереса. Колика су та два капитала?

36. Око једног правоугаоника дужине a *(24) cm* и ширине b *(18) cm* нацртан је други тако да су му стране подједнако удаљене од страна првога; на тај начин површина новог правоугаоника већа је $1\frac{2}{3}$ пута од површине датога. Колико су удаљене стране?

37. Подели дуж a на два дела тако, да је један део геометриска средина између дужи a и другога дела.

38. Један ђак у место да подели известан број са $2\frac{1}{2}$, он је радио обрнуто, са чега му је резултат био мањи за $1\frac{1}{2}$; који је то број био?

39. Растави израз $5a+b$ на два сабирка тако, да збир њихових квадрата изнесе $13(a^2+b^2)$.

40. Збир квадрата три узастопна цела броја смањен за збир квадрата два цела претходна броја износи *288*; који су то бројеви?

41. У којем се бројном систему може написати декадни број: 1) *73* са *111*; 2) *93* са *333*; 3) *188* са *356*; 4) *2695* са *959*?

42. Збир бројева *836* и *805*, којих је систем непознат, износи број *1190* који је написан у дуодецималном систему. Одреди онај непознати систем.

43. Који полигон има *75* дијагонала више но страна?

44. Колико је тачака (да ма које три нису у једној право линији) потребно да би се по две и две спојиле са *820* правих линија?

45. Кад се у једном троуглу бројна вредност једног угла (α) помножи са *2* добива се други угао (β), а степеновањем истога угла (α) са 2 добива се трећи угао (γ). Колики су углови тог троугла?

46. У једнога равнокрака трапеза један крак је аритметичка средина између обеју паралелних страна, чија је разлика *2 m*. Кад је површина трапезова *13* m^2, колике су стране трапезове?

47. Хипотенуза правоугла троугла $c = 25\,m$ а њена висина $h = 6{,}72\,m$. Израчунај најпре одсечке хипотенузине, па онда стране троуглове.

48. Пречник једнога круга има *20 m*; одредити на пречнику такву тачку, да пречникова нормала од ње до обима кружног буде *8 m*.

49. Хипотенуза правоуглог троугла износи *10 m*, једна катета је за *2 m* већа од друге. Колика је мања катета?

50. Кад се једна страна датога равнострана троугла продужи за *3 cm*, друга за *5 cm* и трећа за *7 cm*, тада су ново добивене дужи стране једнога правоуглог троугла. Колика је страна равнострана троугла?

51. Кад се једна страна датога равнострана троугла скрати за *2 cm*, друга за *6 cm* а трећа се продужи за *2 cm*, онда су тако постале дужи стране правоуглог троугла. Колика је страна равнострана троугла?

52. Катета правоуглог троугла је $a = 117\,m$ а пројекција друге катете на хипотенузу $q = 15{,}488\,m$. Колика је хипотенуза?

53. Дата је хипотонуза $c = 35\,m$ и збир од једне катете и њене пројекције на хипотенузу $s = 33{,}6\,m$. Колике су катете?

54. Дата је површина једног троугла p $(360\,m^2)$ и две стране a $(29\,m)$ и b $(25\,m)$; колика је трећа страна?

55. Страна једнога квадрата је *230 m*; колике су стране онога правоугаоника, чиј је обим за *12 m* већи од обима квадратова а површина за $460\,m^2$ мања од квадратове површине?

56. Тетива кружна *a (12 m)* преполовљена је другом тетивом *b (15)*; колики су одсечци друге тетиве?

57. За колико треба продужити полупречник кружни *r (7 m)* да би тангента кружна повучена из крајње тачке продушка била дугачка *a (24) m*?

58. У једном кругу повучен је пречник $AB = 2r$ и кроз тачку B тангента. Израчунати полупречник онога круга који пролази кроз A, додирује ону тангенту а средиште му је на обиму датога круга.

59. У квадрат са страном a уписати други квадрат на тај начин што се од сваког темена у истом смислу одсеца иста дуж. Ову дуж треба тако изабрати да страна уписанога квадрата буде дате дужине b.

Одредити границе које страна траженога квадрата b може имати спрам стране датога квадрата a. Кад је уписани квадрат најмањи?

60. Повући у $\triangle ABC$ између страна CB и CA паралелну трансверзалу XY ка BA тако да троугли BXA и XCY буду једнаки. Како треба поделити страну BC тачком X?

61. Висина правоуглог паралелопипеда је *5 cm* а тежина 850 грама. Дужина основе је за *2 cm* већа од ширине. Колика је ширина тог тела, кад је материја од које је начињено стакло? (Специфична тежина стакла је $s = 2{,}8$).

62. Колика је ивица једне шупље дрвене коцке, кад је, при дебљини дрвета од *1 cm*, њена тежина *140 g*. (Специфична тежина дрвета храстова је $= 0{,}7$).

63. Ако се ивица једне стаклене коцке скрати за *2 (a) cm*, онда јој је тежина мања за *250 (p) g*. Колика јој је ивица? (види зад. *64*).

64. Тежина једне правоугле плоче од гвожђа износи *920 (p) g*; дебљина јој је *3 (d) cm*. Колика је дужина, кад је она већа од ширине за *5 (a) cm*? (Специфична тежина гвожђа је *7,8*).

65. Из два места, која су удаљена *152 km*, полазе у исто време двоја кола једна другима у сусрет; кола се сретну после 12 часова. Кад једна кола употребе за сваки километар 1 минуту више но друга кола, пита се за колико минута прелазе свака кола по 1 километар?

66. Два бициклиста пођу једновремено један другом у сусрет из два места A и B. Кад су се они срели после 78 минута прешао је први *1560 m* више но други. Први стигне $12\frac{1}{2}$ мин. раније у B но други у A. Колика је даљина између A и B?

67. Један бициклист пође у 8 часова изјутра из места A преко места B, које је од A удаљено *9 km*, у место C и стигне једног пешака, који је пошао у исто време из B за C, у 11 ч. и 20 м пре подне. Кад пешаку треба за сваки километар $4\frac{1}{4}$ мин. више но бициклисти, то колико метара прелази свако у минути.

68. На крацима једнога права угла крећу се два тела са сталним брзинама *c (5) m* и c_1 *(3,6) m* ка темену, од којега је свако тело удаљено по *a (60) m*. После колико ће секунада та тела бити удаљена *b (26) m*?

69. Два тела A и B крећу се по крацима једнога права угла. Тело A удаљено је од темена 123 *m* а B 239 *m*. A се креће од темена са брзином од 239 *m* у минути а B се креће ка темену са брзином од 123 *m* у минути. За које ће време праволиниско одстојање ова два тела бити 850 *m*?

70. Две тачке A и B крећу се једновремено из једне тачке на обиму кружном у супротном смислу а сретну се после 6 секунада. Тачка A прешла би цео обим за 9 сек. мање но B. За колико секунада прелази тачка A цео обим?

71. Две тачке A и B крећу се једновремено из једне тачке на обиму кружном у истом смислу а стижу се после 8 секунада. Тачка A прешла би цео обим за 18 секунада мање но B. За колико секунада прелази тачка A цео обим?

72. Средишта два круга, са полупречницима *59 cm* и *50 cm*, крећу се из темена једнога права угла по његовим крацима. Средиште првога круга прелази у секунди *7 m* а другога *5 m*. Други круг почиње се кретати *1* секунду доцније од првога. Колико треба секунада од поласка другога круга да се они додирују споља?

73. С оба краја основице a равнострана троугла крену се по обема странама два тела с брзинама m и n метара у секунди. Пита се, кад ће даљина та два тела бити једнака с троугловом висином?

74. На неком послу раде A и B. Сам A радио би 6 дана више, а сам B радио би $4\frac{1}{6}$ дана више, него што је потребно, кад обојица раде. За колико би дана био посао свршен, кад би обојица радила?

75. A и B радећи заједно на неком послу сврше га за 20 дана. За колико би дана сам A свршио тај посао, а за колико сам B, кад би он морао радити 9 дана више но A?

76. Неки басен може се напунити са две цеви за 6 часова, кад се обе једновремено отворе. За колико би часова свака цев сама напунила басен, кад се зна да би једна напунила басен за 5 часова раније?

77. Кад се камен пусти да падне у бунар, па се после $t\,(3)$ секунада чује да је пао у воду, пита се, колика је дубина бунара, кад је акцелерација $g\ (9{,}81)\ m$ а брзина звука $c\ (333)\ m$?

(При слободном падању тело прелази за x секунада пут $s=\frac{g}{2}x^2$).

78. Са једног балона, који је на висини $h=3600\ m$, бачена је лопта вертикално на земљу са почетном брзином $c=100\ m$. После колико ће секунада лопта пасти на земљу?

79. Колико је времена потребно телу, које се баци управно на више брзином c, да достигне висину h?

80. Неко се тело баци вертикално у вис брзином c; после колико се секунада мора бацити са истог места друго тело чија е брзина c', да би оно за t секунада достигло прво тело?

Дискусија добивене једначине.

27. Алгебарске једначине вишег степена и експоненцијалне једначине с једном непознатом, које се могу свести на квадратне једначине.

a) Увођење нове непознате.

1. $x^4-13x^2+36=0.$ **2.** $6x^4-11x^2=35.$

3. $x^4-4x^2=45.$ **4.** $\frac{4x^4}{3}-\frac{2x^2}{3}=\frac{3}{64}.$

5. $x^4-4abx^2=(a^2-b^2)^2.$ **6.** $(9x^2)^2-41(3x)^2+400=0.$

7. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2=0.$

8. $x\sqrt{25-x^2}=12.$ **9.** $x^2+\left(\frac{32}{x}\right)^2=260.$

10. $6x^{-4}-5x^{-2}+1=0.$ **11.** $(x+a)^2+\frac{1}{(x+a)^2}=b.$

12. $\frac{x^2+3}{17-x^2}=\frac{1}{x^2+3}.$ **13.** $(x-2)^2+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{82}{9}.$

14. $(x-a)^4+(x+a)^4=b.$

15. $(x^2+ax)^2+b(x^2+ax)=c.$ Стави $x^2+ax=y.$

16. $(x^2-3)^2-7(x^2-3)+6=0.$

17. $(3+x)^2+\frac{1}{(3+x)^2}=100{,}01.$

18. $\frac{a+b}{x^2}+\frac{b}{x^2-b}=\frac{a+b}{a}.$

19. $\sqrt{\frac{x-3}{x-4}}-\sqrt{\frac{x+3}{x+4}}=\frac{1}{3}\sqrt{2}.$

20. $\sqrt[4]{x+5}+\sqrt[4]{12-x}=3.$*)

21. $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1.$

22. $\sqrt{x}-8\sqrt[4]{x}=9.$ **23.** $\sqrt[3]{x^4}-3\sqrt[3]{x^2}=54.$

24. $\sqrt[3]{x^2}-n^2=n+\sqrt[3]{x}.$ **25.** $\sqrt{x^3}+ax^3=b.$

26. $x^2-8x+5=2\sqrt{x^2-8x+40}.$ Стави $x^2-8x+5=y.$

27. $2x^2+3\sqrt{x^2-x+1}=2x+3.$

28. $(2x+\sqrt{2x})^4-(2x+\sqrt{2x})^2=1260.$

29. $\sqrt[3]{x^2+2ax+a^2}-\sqrt[3]{x^2+2ax-a^2}=\sqrt[3]{2a^2}.$

30. $2\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{4x^2}=2.$ **31.** $4x+5x^{\frac{1}{5}}=21x^{\frac{3}{5}}.$

32. $\sqrt[3]{x}+2i\sqrt[6]{x}=1.$ **33.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{-1}\cdot\sqrt[3]{-x}=1.$

b) Растављање на чинитеље (у вези са a)).

34. $x^3-3x^2=10x.$ **35.** $x^3+3x^2-(x+3)(2x+15)=0.$

36. $x^3-8x^2+(x-8)^2+6x(x-8)=0.$

37. $x^3-a^3=a^2(a-x).$ **38.** $(3-x)^3=x-3.$

39. $x^3=1.$ **40.** $x^3=-1.$ **41.** $x^3+a^3=0.$

42. $x^3-a^3=0.$ **43.** $x(x^2-8)=8(1-x).$

44. $(7-x)^3-(7+x)^3=0.$ **45.** $(2x-5)^3+(5x-2)^3=0.$

46. $\frac{a-x^3}{\sqrt{x^3-b}}=\sqrt{x^3-b}.$ **47.** $\frac{9(x^3-4)}{x\sqrt{x}-3}=x\sqrt{x}+3.$

48. $x^6+27=28x^3.$ **49.** $3x^6-7x^3=6.$

50. $2x^3-5x\sqrt{x}=1323.$ **51.** $(3-x)^3-1=0.$

52. $x^3=(2+i)^3.$ **53.** $(x-a)^3-(b-x)^3=0.$

54. $(2x-3)^3+(x-9)^3=0.$ **55.** $x^4-81=0.$

56. $x^4+16=0.$ **57.** $(x^2-4)(x^2+4)=240.$

*) $(a+b)^4=a^4+b^4+4ab(a+b)^2-2a^2b^2.$

58. $x^4 - 625 = 26x(25 - x^2)$. 59. $\dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \dfrac{x^2 - x}{36}$.

60. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$. 61. $x^8 - (a^4 + b^4)x^4 + a^4b^4 = 0$.

62. $\dfrac{11x^4}{2} - 18x^2 = 9(x^2 - 1)^2 - 65$.

63. $\dfrac{3x^2 + 4}{3x^2 - 4} + \dfrac{3x^2 - 4}{3x^2 + 4} = \dfrac{26}{5}$. 64. $3x^6 = 2187$.

65. $\dfrac{a^2}{x^3 - b} = x^3 + b$. 66. $x^6 + 1 = 0$. 67. $x^6 - 1 = 0$.

Реши дате реципрочне једначине:

68. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. 69. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

70. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$. 71. $x^3 + \dfrac{7x^2}{2} + \dfrac{7x}{2} + 1 = 0$.

72. $x^3 - \dfrac{7x^2}{3} + \dfrac{7x}{3} - 1 = 0$. 73. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$.

74. $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$. 75. $x^3 + ax^2 + bx + \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 = 0$.

76. $x^3 + ax^2 - bx - \left(\dfrac{b}{a}\right)^3 = 0$. 77. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$.

78. $x^3 + 3x^2 + 15x + 125 = 0$. 79. $27x^3 + 12x^2 - 8x - 8 = 0$.

80. $8x^3 + 10x^2 + 15x + 27 = 0$.

81. $\sqrt[3]{2a - x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2x - a}$. 82. $\dfrac{ax + b}{bx + a} = x^2$.

83. $\dfrac{\sqrt{a - bx} + \sqrt{b - ax}}{\sqrt{a - bx} - \sqrt{b - ax}} = \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

84. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

85. $x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 12x + 1 = 0$.

86. $x^4 - \dfrac{x^3}{3} - 8x^2 - \dfrac{x}{3} + 1 = 0$.

87. $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$.

88. $24x^4 - 50x^3 - 173x^2 - 50x + 24 = 0$.

89. $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$.

90. $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

91. $\dfrac{x - 17}{x^2 - 5} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{5x - 17}{5x^2 - 1}$.

92. $\dfrac{ax + b}{bx + a} = x^3$. 93. $\left(\dfrac{ax + b}{bx + a}\right)^3 = x$.

94. $\dfrac{ax - b}{bx - a} + \dfrac{ax^3 - b}{bx^3 - a} = 0$.

95. $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{20}{x - 2} - \dfrac{35}{x - 3} = 4$.

96. $x^5 - \dfrac{13x^4}{6} + x^3 - x^2 + \dfrac{13x}{6} - 1 = 0$.

97. $36x^5 - 15x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 15x + 36 = 0$.

98. $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$.

99. $6x^5 + 11x^4 - 11x^3 - 11x^2 + 11x + 6 = 0$.

100. $x^5 - a^5 = 0$. 101. $x^5 + a^5 = 0$. 102. $x^{10} = 1$.

Реши дате експоненцијалне и логаритамске једначине:

103. $\sqrt[x]{a} = b^x$. 104. $2^{x+1} = \sqrt[x+1]{5}$. 105. $3 . 2^x = 4\sqrt[x]{9}$.

106. $3^{x-1} = \sqrt[x]{9}$. 107. $8^{2(x+1)} = 32^{\frac{2}{x} - 1}$.

108. $2^{x+1} + 4^x = 80$. 109. $10^{x^2 - 5x + 6} = 100$.

110. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$. 111. $25^{x-1} - 5^{x+1} + 24 = 0$.

112. $3^{x+2} + 3^{2-x} = 82$. 113. $(10^{5-x})^{6-x} = 100$.

114. $100 . 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$. 115. $7^{x^2 - 5x + 9} = 343$.

116. $\log x^2 + \dfrac{1}{\log x} = 3$. 117. $\dfrac{1}{5 - \log x} + \dfrac{2}{1 + \log x} = 1$.

118. $x^{\log x} = 578$. 119. $x^{x^2 - 7x + 12} = 1$. 120. $5^{2x} - 7 . 5^x - 450 = 0$.

121. $3x^{\log x} + 100x^{-\log x} = 40$. 122. $3^{x^2 - 45x + 5} = 1200$.

123. $(2^{x^2 + x - 2})^{x-3} = 1$. 124. $x^{2\log x - 5} = 0{,}01$.

125. $x^{\log x} = \dfrac{x^4}{1000}$. 126. $3^{2x} = 100(3^{x-1} - 1)$.

127. $x^{\log x} - 4x^{-\log x} = 3$. 128. $6 . 7^{2x} + 7^x = 301$.

129. $3 . 4^{2x^2 - 2x + 4} - 5 . 4^{x^2 - x + 2} = 28$. 130. $\dfrac{10(3^x + 100)}{3^x} = 15 . 3^x + 2$.

131. $5\sqrt[2x]{3} + 3\sqrt[x]{3} = 10$. 132. $12\sqrt[3x]{10} - 5\sqrt[6x]{10} = 25$.

133. $\left(\dfrac{1}{9} . 9^x\right)^x = 3^{2x+6}$.

134. $\log 8 + 4\log 2 = \log 3 - \log 12 + \log 2^{3x^2 - 20x + 2}$.

135. $\dfrac{1}{6 - \log x} + \dfrac{2}{\log x} = 1$.

136. $\log(x-2)^3 + 3\log(x-5) = 3.$

137. $\log\sqrt{x-1} + \log\sqrt{x+\frac{2}{3}} = 1{,}5 - \log 2.$

---

28. Квадратне једначине с више непознатих
(чл. 190 и 191).

1. $2x^2 - 3y^2 = 71,$
$3x^2 + 2y^2 = 165.$

2. $x^2 - y^2 = 12,$
$x^2 + y = 14.$

3. $x : y = 4 : 1,$
$x : 6 = 6 : y.$

4. $x^2 - y = 604,$
$x - y = 4.$

5. $x^2 + y^2 = r^2,$
$y = ax + b.$

6. $y^2 = 2px,$
$y = ax + b.$

7. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$
$y = Ax + B.$

8. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$
$y = Ax + B.$

9. $x^2 + y^2 = a^2,$
$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}.$

10. $x^2 - y^2 = 32,$
$\frac{x}{y} = 3.$

11. $x + y = 4,$
$\frac{8}{x} - \frac{12}{y} = 4.$

12. $\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = c,$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1.$

13. $22 = x + 3(y-1),$
$92 = \frac{y}{2}(x + 22).$

14. $(3x-2y)^2 - (2x-3y)^2 = 80,$
$4x - 5y = 5.$

15. $x^2 : y^2 = a^2 : b^2,$
$x - y = a^2 - b^2.$

16. $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+4} = 5,$
$5x + 3y = 30.$

17. $\sqrt{x+4} - \sqrt{y+1} = 1,$
$5x - 3y = 16.$

18. $2x^2 - 5xy + 3y^2 = 48,$
$3x - y = 11.$

19. $2xy - y = 21,$
$xy - 2x = 4,$

20. $(x+1)(y-2) = 30,$
$(x-2)(y+1) = 24.$

21. $(x+2)^2 - (y-3)^2 = 44,$
$(x-1)^2 - (y-5)^2 = 17.$

22. $x = a\sqrt{x+y},$
$y = b\sqrt{x+y}.$

23. $x + y = a(x^2 + y^2),$
$x - y = b(x^2 + y^2).$

---

24. $x + y = a,$
$xy = b^2.$

25. $x - y = 2,$
$xy = 15.$

26. $(x-4) + (y-3) = 6,$
$(x-4)(y-3) = 8.$

27. $xy + x = 40,$
$x + y = 12.$

28. $xy + x = 4,$
$xy + y = 3.$

29. $xy + x = 18,$
$xy - y = 10.$

30. $x + \sqrt{xy} + y = 14,$
$xy = 16.$

31. $x - 3\sqrt{xy} - y = -6,$
$xy = 16.$

32. $x : 11 = 704 : y,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19.$

33. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{b},$
$xy = a^2.$

34. $x^2 - y^2 = a,$
$xy = b.$

35. $x^2 + y^2 = a^2,$
$xy = b^2.$

36. $x^2 + xy + y^2 = a^2$
$xy = b^2.$

37. $x^2 + 3xy + y^2 = 7\frac{1}{4}.$
$xy = 1.$

38. $x^2 + xy + y^2 = a,$
$x^2 + y^2 = b.$

39. $x^2 - xy + y^2 = a,$
$x - y = b.$

40. $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2,$
$x^2 - xy + y^2 = a^2 + 3b^2.$

41. $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2,$
$x + y = 2a.$

42. $x^2 + y^2 = 104,$
$x - y = 8.$

43. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 32,$
$(x+2) - (y+3) = 0.$

44. $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 100,$
$x + y = 14.$

45. $x + y = 74,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12.$

46. $x^2 + y^2 + x + y = a,$
$x^2 + y^2 - x - y = b.$

47. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0,$
$5x^2 - 3xy - y^2 = 35.$

48. $x^2 + xy + y^2 = 0,$
$mx^2 + ny^2 = a^2.$

49. $2x^2 - 2xy - y^2 = 39.$
$x^2 + 2xy + 4y^2 = 39.$

50. $(x-2)^2 - (y+1)^2 = 9,$
$(x-2)(y+1) = 20.$

51. $x^2 + xy = 2a^2 - 3ab - 2b^2,$
$y^2 - xy = 15b^2 + 5ab.$

52. $x(x-y) = 75,$
$y(x+y) = 250.$

53. $x^2 + xy + y^2 = 3,$
$2x^2 + 3xy + 4y^2 = 12.$

54. $x^2 + xy + y^2 = 3,$
$2x^2 - 3xy + 4y^2 = 18.$

55. $x + y = \frac{6}{x},$
$x - y = \frac{1}{y}.$

56. $x^2 - y^2 = 9,$
$(2x+y)(x+2y) = 182.$

57. $(x+y)(x^2+y^2) = 272.$
$x^3 + y^3 = 152.$

58. $x + xy + y = 11,$
$x^2y + xy^2 = 30.$

59. $(x+y)^2 - 3(x+y) = 270.$
$xy = 80.$

60. $x^2 + y^2 + x + y = 8,$
$xy = 2.$

61. $x^2 + y^2 + x - y = 182,$
$xy + x - y = 85.$

62. $x^2 + y^2 - x - y = 12.$
$xy = 9.$

63. $x - y - \dfrac{2}{x-y} = 1,$
$xy - \dfrac{3}{xy} = 2.$

64. $x - y + \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{20}{x+y},$
$x^2 + y^2 = 34.$

65. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6},$
$x^2y + xy^2 = 30.$

66. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 17,$
$x^2y + xy^2 = 3600.$

67. $x^2 - y^2 = 7(x-y),$
$xy(x^2+y^2) = 300.$

68. $\dfrac{4}{25}\sqrt{x+y} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}.$
$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 6.$

69. $x^2y^2 - 52xy + 576 = 0,$
$(x-y)^2 + 100\sqrt{xy} = 625.$

70. $x + y + \sqrt{x+y} = a,$
$\sqrt{xy} = b.$

71. $x + y + \sqrt{x+y} = a.$
$x^2 + y^2 = b.$

72. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y},$
$\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

73. $12(x-y) = xy,$
$x^2 + y^2 = 52.$

74. $x^3 - y^3 = 31(x-y),$
$x^2 + y^2 = 26.$

75. $x^3 + y^3 = a^3(65),$
$xy = b^2(4).$

76. $x^4 + y^4 = 1\frac{1}{16},$
$xy = \frac{1}{2}.$

77. $x^3 + y^3 = \frac{31}{14}(x+y)^2,$
$xy = \frac{3}{2}.$

78. $x^3 + y^3 = a,$
$x + y = b.$

79. $x^3 - y^3 = a,$
$x - y = b.$

80. $x^4 + y^4 = a,$
$x + y = b.$

81. $x^4 + y^4 = a,$
$x - y = b.$

82. $x^2 + y^2 = 97,$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

83. $x + y = 72,$
$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6.$

84. $x + y + \sqrt{x+y} = 2,$
$x^3 + y^3 = 19.$

85. $3x - 2y = 4,$
$27x^3 - 8y^3 = 104xy.$

86. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{175}{36},$
$x - y = 1.$

87. $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 12\frac{4}{9},$
$x + y = 4.$

88. $x^3 + y^3 = 1512,$
$x^2y + xy^2 = 1440.$

89. $(x+y)(x^2+y^2) = a,$
$(x-y)(x^2-y^2) = b.$

90. $x^2 + y^2 + x - y = a,$
$(x^2+y^2)(x-y) = b.$

91. $x^2 + y\sqrt{xy} = 9,$
$y^2 + x\sqrt{xy} = 18.$

92. $x(x+y)^2(x+2y) = p,$
$x^2 + (x+2y)^2 = s.$

93. $x(x+y)(x+2y)(x+3y) = p,$
$(x+2y)^2 - (x+y)^2 = q.$

94. $x + xy = b,$
$x^2 + x^2y^2 = c.$

95. $x^5 + y^5 = 33,$
$x + y = 3.$

96. $x^5 - y^5 = 242,$
$(x-y)^2 - x + y = 2.$

97. $x + y = 1,$
$(x^2+y^2)(x^3+y^3) = 35.$

---

98. $x + y + z = 12,$
$xy + yz + xz = 47,$
$x^2 + y^2 = z^2.$

99. $x^2 + y^2 + z^2 = 49,$
$xy + yz + xz = 36,$
$x + y = 9.$

100. $x + y + z = 1,$
$xyz = -16,$
$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$

101. $x(x+y+z) = a,$
$y(x+y+z) = b,$
$z(x+y+z) = c.$

102. $x^2 + y^2 + z^2 = 94,$
$x(y+z) = 45,$
$x + y + z = 14.$

103. $\dfrac{xy}{z} = m,$
$\dfrac{xz}{y} = n,$
$\dfrac{yz}{x} = p.$

104. $\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{xz} = 22,$
$\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} = 40,$
$\dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{yz} = 42.$

105. $\dfrac{y+z}{xyz} + a^2 = 0,$
$\dfrac{x+z}{xyz} + b^2 = 0,$
$\dfrac{x+y}{xyz} + (a+b)^2 = 0.$

106. $x + y + z = 6,$
$x^2 + y^2 - z^2 = 8,$
$x^3 + y^3 + z^3 = 90.$

107. $x : y = y : z,$
$x + y + z = 26,$
$x^2 + y^2 + z^2 = 364.$

108. $x:y=z:u,$
$x+u=13,$
$y+z=20,$
$x^2+y^2+z^2+u^2=425.$

109. $xu=yz=6,$
$x+y+z+u=2,$
$x^2+y^2+z^2+u^2=50.$

110. $x:y=z:u,$
$x-u=6,$
$y-z=2,$
$x^2+y^2+z^2+u^2=164.$

111. $x:y=z:u,$
$x+u=9,$
$y+z=6,$
$x^3+y^3+z^3+u^3=585.$

Експоненцијалне и логаритамске једначине.

112. $x+y=70,$
$\log x+\log y=3.$

113. $x^2+y^2=425,$
$\log x+\log y=2.$

114. $9^{x+y}=729,$
$3^{x-y-1}=1.$

115. $2^x \cdot 4^y=16,$
$5^{3x}-5^{4y+7}=0.$

116. $7^x \cdot 2^y=10976,$
$(2^x)^y=32768.$

117. $\sqrt[x]{y}=1{,}0473,$
$y^x=32768.$

118. $x^y=243,$
$\sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2.$

119. $2^y \cdot \sqrt[x]{9}=24,$
$3^y\sqrt[x]{25}=135.$

120. $xy=400,$
$x^{\log y}=16.$

121. $2^{y+2}=\sqrt[x]{4^{x+4}},$
$3^{y-2}=\sqrt[x+1]{9^{2x-1}}.$

122. $y^x+4y^{-x}=\frac{65}{4},$
$3\sqrt[x]{y}+5\sqrt[x]{y^{-1}}=\frac{17}{2}.$

123. $\sqrt[y]{x^2}=11\sqrt[y]{x}-10,$
$y=1-\log x.$

124. $2^x+3^y=17,$
$2^{2x}+3^{2y}=145.$

125. $\log(x^2+y^2)-1=\log 13$
$\log(x+y)-\log(x-y)=3\log 2.$

126. $64^{2x}+64^{2y}=12,$
$64^{x+y}=4\sqrt{2}.$

127. $3^{\log x}+4^{\log y}=13,$
$3^{\log x}\cdot 4^{\log y}=36.$

128. $\log(x+y)+\log(x^2+y^2)=1{,}176091,$
$\log x+\log(x+y)+\log y=0{,}778151.$

129. $x^2+y^2=20,$
$\log x+\log y=0{,}903090.$

130. $11^x+10^y=161051{,}01,$
$10^y-11^x=-161050{,}99.$

29. Примена квадратних једначина с више непознатих

1. Растави број *18* на два чинитеља, чија ће разлика квадрата бити *27*.

2. Који су то бројеви чији је производ за *84* мањи од збира њихових квадрата а за 44 већи од разлике тих квадрата?

3. Разлика квадрата два броја је *88*. Ако се први број повећа за *2* а други за *3*, тада је разлика квадрата само *81*; који су то бројеви?

4. Одреди два броја такве особине да је њихов збир једнак с њиховим производом и с разликом њихових квадрата.

5. Бројитељ и именитељ једнога разломка износе укупно *33*. Да је бројитељ већи за *39* а именитељ за *20*, разломак би био двапут већи; који је то разломак?

6. У каквој су размери стране једнога правоугла троугла, у којега је једна катета аритметичка средина између обеју других страна троуглових?

7. Кад се један двоцифрени број подели производом својих цифара добива се *6*; ако његове цифре измењају своја места, тада је тако добивени број већи од тражена за *9*. Који је то број?

8. Кад се један двоцифрен број помножи бројем, којега су цифре исте као и датога броја само с промењеним редом, добива се *1729*. Ако ли се тражени број подели збиром својих цифара, количник је 9 а остатак 1. Који је то број?

9. Површина једнога правоугаоника је $p\ (60)\ m^2$; размера обима његова према дијагонали је $m:n\ (34:13)$. Колика је свака страна?

10. Израчунај стране троугла чије су средње линије m_a, m_b, m_c. (Употреби правило: $a^2+b^2=2m^2_c+\frac{1}{2}c^2$).

11. Обим једнога правоугла троугла износи $24\ m$ а полупречник уписанога круга $\varrho=2\ m$. Колике су стране?

12. Обим једнога троугла износи $42\ m$, једна страна је половина збира других двеју а производ ових двеју страна износи *195*; колика је површина тог троугла?

13. Хипотенуза правоуглог троугла подељена је висином на два одсечка; кад је хипотенуза c а једна катета једнака с одсечком који није уз њу, колике су катете?

14. Обим једнога равнокрака троугла има $50\ cm$ а висина је за $2\ cm$ мања од крака; колике су стране троуглове?

15. Дата је хипотенуза правоуглог троугла $c\ (109)\ cm$ и збир обеју катета $s\ (151)\ cm$; колике су катете?

16. Из обима правоугла троугла $s\ (176)\ cm$ и разлике обеју катета $d\ (7)\ cm$ израчунати стране.

17. Збир обеју катета правоугла троугла износи $7\ m$ а висина $2{,}4\ m$. Колика је површина?

18. Збир хипотенузе и једне катете правоугла троугла је $s\ (50)\ m$, а збир хипотенузе и друге катете је $s'\ (81)\ m$; израчунати стране троуглове.

19. Израчунај катете правоуглог троугла, кад је хипотенуза $c = 317\ cm$ а површина $p = 11550\ cm^2$.

20. Површина правоуглог троугла $p = 1386\ cm^2$ а збир обеју катета $s = 113\ cm$; колике су стране троуглове?

21. Разлика дијагонала двају квадрата је d а збир њихових површина s; колике су стране тих квадрата?

22. Површина једног троугла је $p = 84\ m^2$ а стране $b = 13\ m$ $c = 14\ m$; израчунај страну a. (Употреби планимст. образац).

23. У четвороуглу којега су дијагонале нормалне дате су стране и то: $a = 4\ m$, $b = 3\ m$, $c = 3\ m$ и угао између прве и друге стране који је прав. Колики су одсечци дијагонала а колика четврта страна?

24. Страна једног ромба је $a\ (65)\ cm$ а површина $p\ (3696)\ cm$; колике су дијагонале?

25. Две лопте додирују се споља; њихова је централа $c\ (3{,}51)\ m$ а збир површина $s\ (82{,}3862)\ m^2$. Колики су полупречници?

26. Две лопте додирују се изнутра; њихова је централа $c\ (3)\ cm$ а разлика њихових запремина $d\ (516\pi)\ cm^3$; колики су полупречници?

27. Око лопте полупречника r описана је зарубљена купа тако да је њена запремина двапут већа од лоптине запремине. Израчунати полупречнике обеју паралелних основа купиних.

28. На дужи $AE = 14\ m$ обележене су три тачке B, C и D Израчунати дужи AB, BC, CD и DE према овим подацима: 1) кад би се дуж AE пресавила у тачкама B, C и D могао би се склопити четвороугао у који се може уписати круг; 2) кад би се дата дуж пресавила само у тачкама C и D, тада би се склопио равнокрак троугао; најзад 3) из дужи BC, CD и DE може се склопити правоугли троугао, чија би хипотенуза била дуж CD.

29. Површина једнога права зарубљена конуса је $p\ (188{,}495..)\ cm^2$ а страна $a\ (5)\ cm$. Разлика полупречника обеју основа је $d\ (1)\ cm$; колики су полупречници?

30. Разлика ивица двеју коцака је $3\ m$ а разлика њихових запремина је $7317\ m^3$. Израчунај ивице.

31. Дебљина једне гвоздене шупље лопте је $d = 5\ cm$ а њена тежина је $p = 139{,}494...kg$. Колика су оба полупречника? (Специфична тежина гвожђа је $s = 7{,}20..$).

32. Запремина зарубљена конуса је $v = 2199{,}1...dm^3$ а висина $h = 12\ dm$; збир полупречника обеју основа је $s = 15\ dm$. Колики су полупречници?

33. Запремина права зарубљена конуса је $v\ (6695\pi)\ cm^3$, страна му је $s\ (17)\ cm$ а висина $h\ (15)\ cm$. Колики су полупречници?

34. Запремина правилне четворостране зарубљене пирамиде је $v = 855\ m^3$ а висина $h = 15\ m$. Колике су њене основне ивице кад је њихова размера $m : n = 3 : 2$?

35. Запремина зарубљене пирамиде је $v = 684\ m^3$ а висина $h = 18\ m$. Колике су њене основне површине, кад њихова разлика износи $d = 30\ m^2$?

36. Запремина правилне четворостране пирамиде је $v = 1280\ m^3$ а површина $p = 800\ m^2$. Колика је основна ивица и висина?

37. Основне ивице једне тростране пирамиде су по реду 7, 8, 9. Бочне ивице су једна на другој нормалне. Колике су те ивице.

38. Запремина правоугла паралелопипеда је $v = 720\ dm^3$, површина $p = 484\ dm^2$ а обим основе је $s = 34\ dm$. Колике су ивице?

39. Дијагонала правоугла паралелопипеда има $7\ dm$; висина му је хармониска средина између обеју основних ивица, а збир све три ивице износи $11\ dm$; колике су ивице?

40. Дијагонала једнога тетивна четвороугла пролази кроз средиште; његов обим има $20\ cm$ а површина $18\ cm^2$; производ бројних вредности дијагонала износи 60. Израчунати стране четвороуглове.

41. Дате су дијагонале једнога делтоида $d = 16\ cm$, d_1 (симетрала) $= 21\ cm$ и обим $s = 54\ cm$. Колике су му стране?

42. Три броја чине непрекидну геометриску пропорцију; њихов збир је 14 а збир њихових квадрата 84; одреди те бројеве?

43. Која су то три стварна броја који чине једну непрекидну пропорцију, чији збир износи 39 а производ 729?

44. У једној геометриској пропорцији збир спољашњих чланова износи 18, збир унутрашњих чланова 17 а збир квадрата сва четири члана износи 325; која је то пропорција?

45. У које је пропорције збир сва четири члана 72, производ унутрашњих чланова 140, а збир квадрата сва четири члана 2050?

46. Од три дата броја други је хармонијска средина између првог и трећег; збир сва три броја износи 13 а збир њихових квадрата 61. Који су то бројеви?

47. Неки посао могу да изврше A и B; сам A употребио би 2 дана више, но кад би обојица заједнички радила, сам B радио би $4\frac{1}{2}$ дана више у истом случају. Колико би дана требало да се тај посао изврши, кад би обојица на послу радила?

48. A и B продаду укупно $100\,m$ неке робе и то један више но други, али обојица добију подједнаке суме. Да је A имао толико метара колико B, он би за то примио 63 динара; кад би B имао толико метара колико A он би за то добио само 28 динара. Колико је метара продао свако?

49. Један капитал доноси годишње $a\ (320)$ дин. интереса. Други капитал, који је за 300 динара мањи доноси годишње b (390) динара интереса, јер му је процент био за $n\ (1)$ динара већи. Израчунај та два капитала.

50. Две различне суме, чији је збир 35000, уложене су код два новчана завода, који не дају једнаке проценте, али обе суме доносе једнаке приходе. Зна се, међутим, да би прва сума донела 1200 динара, кад би била дата по процент друге суме, а друга би сума донела 675 динара, кад би имала процент прве суме. Израчунај обе суме и процент.

51. Кроз две цеви протече за 20 минута укупно 540 литара воде; да би сама прва цев дала ту количину воде потребно је да буде отворена 9 минута више но друга. Колико литара воде даје свака цев за 1 минуту?

52. Да се пређе пут од $520\,km$ један путник употреби 3 дана више но други, јер овај прелази $12\,km$ дневно више од првога. За колико дана пређе сваки путник тај пут?

53. Два места удаљена су $270\,km$; из њих полазе једновремено два воза један другом у сусрет; једном возу треба $0{,}5$ минута више за 1 километар но другом. Кад се возови сретну после 5 часова од поласка, колико минута употреби сваки за 1 километар?

54. Два путника пођу једновремено из два места A и B, која су удаљена $45\,km$, један другом у сусрет и сретну су после 5 часова. Први путник стигне раније у B за $2^1/_4$ часа но што други стигне у A. Одредити место сусрета.

55. Две тачке крећу се по крацима права угла од темена, од којега је једна удаљена $4\,m$ а друга $3^2/_3\,m$. После 1 секунде тачке су удаљене једна од друге $13\,m$ а после $2^1/_2$ секунде $25\,m$. Колике су њихове брзине?

56. Два тела крећу се по двема нормалним правама ка њихову пресеку, једно с брзином од $3\,m$ а друго с брзином од $4\,m$. У почетку су тела била удаљена $20\,m$, а после 2 секунде само $10\,m$. Колико је у почетку свако тело било удаљено од пресека?

57. По двема нормалним правама крећу се средишта двају кругова ка пресеку; полупречник једног круга је $9\,cm$ а другог $4\,cm$. У почетку је једно средиште било удаљено од пресека $48\,cm$ а друго $14\,cm$. После 9 секунада кругови се додирују споља а после доцније 2 секунде изнутра. Колика је била брзина кругова?

58. Предњи точак неких кола учини по једном путу од $1260\,m$ 105 обртања више од задњег точка. Кад би обим сваког точка био за $^1/_2\,m$ већи, тада би предњи точак на истом путу имао само 80 обртања више но задњи. Колики је обим сваког точка?

59. Претвори $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ у збир од два квадратна корена. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $11+6\sqrt{2}=x+y+2\sqrt{xy}$; $x+y=11$, $2\sqrt{xy}=6\sqrt{2}$.

60. Исто тако:

$a)$ $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}$; $b)$ $\sqrt{5a-b-2\sqrt{6a^2-ab-2b^2}}$.

Исто тако задаци у чл. 20, бр. 93—118.

61. Представи $\sqrt{4+3i}$ као комплексни број.

$\sqrt{4+3i}=x+yi$; $4+3i=x^2-y^2+2xyi$; $x^2-y^2=4$, $2xy=3$.

62. Тако исто; $a)$ $\sqrt{4+6\sqrt{5i}}$; $b)$ $\sqrt[4]{-1}$; $c)$ $\sqrt[3]{i}$. Још таквих задатака има у чл. 22 бр. 78—89.

---

30. **Неодређене једначине првога степена**

Реши дате једначине $(1$—$10)$ у целим бројевима:

1. $x+y=5$. **2.** $x-y=3$.
3. $2x+y=7$. **4.** $5x-y=8$.
5. $x:y=5:6$. **6.** $x=3y$.
7. $5x-4y=0$. **8.** $8x+15y=40$.
9. $\frac{x}{7}+\frac{y}{8}=2$. **10.** $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$.

Реши у позитивним целим бројевима $(11$—$24)$:

11. $10x+9y=100$. **12.** $11x-25y=150$.
13. $6x+13y=96$. **14.** $17x-65y=51$.
15. $y=13+\frac{4}{13}(5-x)$. **16.** $16(x+13)-19(y-14)=0$.

17. $13x+24y=2373.$
18. $36x-115y=643.$
19. $26x-48y=104.$
20. $7x+13y=61.$
21. $63x-100y=50.$
22. $19x-34y=51.$
23. $216x+543y=2061.$
24. $415x-366y=98.$
25. $23x+57y=412.$
26. $25x=36y-7.$
27. $29x+17y=250.$
28. $17x-12y=-4.$
29. $28x+12=19y+17.$
30. $24x-31y=196.$
31. $6x+17y=500.$
32. $18x+7y=600.$
33. $19x-10y=7,\quad 19x-8z=15.$
34. $3x+5y=47,\quad 2x+7z=30.$
35. $3x-2y=3,\quad 2y+3z=51.$
36. $x+y+z=48,\quad 2x+3y-3z=11.$
37. $3x+5y+7z=49,\quad 2x-3y+4z=11.$
38. $2x+3y+5z=123,\quad 30x-7y-3z=25.$
39. $3x+4y+5z=97,\quad 4x-5y+3z=3.$
40. $5x+13y+18z=997,\quad 11x+20y+37z=1866.$
41. $x+2y+3z=54,\quad 10x-9y+2z=0.$
42. $3x+2y-5z=16,\quad 2x-3y+6z=12.$

Примене.

43. Одреди два броја таквс особине да *8*-струки први повећан за *3*-струки други даје за збир *91.*

44. Растави број *200* на два дела тако, да један буде дељив са *14* а други са *23.*

45. Од два броја, чија је разлика *10*, мањи је дељив са *21* а већи са *34;* који су то бројеви?

46. Растави број *300* на два дела тако, да је први смањен за *1* дељив са *9* а други повећан са *7* дељив с *11.*

47. Растави број *150* на два дела да један подељен са *9* даје за остатак *5* а други подељен са *7* даје за остатак *1.*

48. Која су то два узастопна броја да је мањи дељив са *7* а већи с *11*?

49. Који је то број дељив са *7*, а кад се подели са *29* даје за остатак *13*?

50. Који је општи облик позитивних бројева, који подељени са *19* дају за остатак *1*, а подељени са *28* дају за остатак *3*?

51. Који позитивни бројеви подељени са *24* дају за остатак *18*, а подељени са *13* дају за остатак *1*?

52. Који су то бројеви између *1000* и *2000* да су дељиви с *13*, кад се повећају с 5, а дељиви са *17*, кад се умање за *5*?

53. Растави разломак $\frac{101}{110}$ на збир од два разломка, којима су именитељи *5* и *22.*

54. Растави $\frac{61}{110}$ на разлику од два права разломка, којима су именитељи *5* и *22.*

55. Растави $\frac{133}{60}$ на збир од три разломка с именитељима *3, 4, 5.*

Напомена. Растави понајпре $\frac{133}{60}$ на два разломка с именитељима 12 и 5, за тим први разломак на два разломка с именитељима 3 и 4.

56. Растави $\frac{659}{315}$ на збир од три разломка с именитељима *5, 7* и *9.*

57. Којом цифром треба заменити тачку у *37.464* да би добивени број био дељив са *7*?

58. Којим цифрама треба заменити обе тачке у *17..5321* да би добивени број био дељив са *23*?

59. Један четвороцифрени број дељив је са *7* и са *37.* Кад се тај број помножи са *15* а производ подели са *23,* добива се за остатак *2.* Који је то број?

60. Нађи све троцифрене бројеве којих је збир цифара *18,* што бивају за *198* мањи, кад им се ред цифара преокрене.

61. Који бројеви подељени редом са *11, 19* и *29* дају остатке *5, 12* и *4*?

62. Кад се један број, који је дељив са *11*, подели с *13* даје за остатак *7*, а кад се подели са *17* даје за остатак *9*?

63. Неко купи за *180* динара две врсте сукна; метар једне врсте стаје *8* дин. а друге *6.* Колико је метара добио од сваке врсте?

64. Неко купи каве и шећера за *96* дин. и *30* п.; *1 kg* каве стаје *3* дин. *10* п., *1 kg* шећера *80* п. Колико је купио целих килограма каве а колико шећера?

65. Пречник златника (од *20* динара) је *21 mm* а полузлатника *19 mm.* Колико се златника и полузлатника може поређати један уз други у правој линији да збир пречника буде *1 m*?

66. Један зупчасти точак има *13* зубаца а други *17*; у почетку кретања захвати први зубац првога точка у први зарез другога точка. После колико ће окретања опет први зубац првога точка захватити у први зарез другога точка?

67. На *30* лица: људи, жена и деце издато је *60* дин. Кад је сваком човеку издато *4* дин., свакој жени *2* дин. а сваком детету пола динара, колико је било људи, колико жена и колико деце?

68. Неко има новчаница по *10* дин. и државних записа по *5* дин. и по *1* дин.; он хоће тим новцем да исплати дуг од *328* дин. Колико ће новаца сваке врсте употребити, кад број новчаница по *10* дин. треба да је толики, колики је број записа по *5* дин. и по *1* дин. укупно?

69. У два разреда је подједнак број ученика. У једном разреду седи у свакој клупи по *5* ђака, само у једној по *4*; у другом разреду седи у свакој клупи по *7* ђака а у последњој по *3*. Одреди број ђака a) кад је он мањи од *40*, b) кад је број ђака већи од *40* а мањи од *60*?

70. Да би добио *24 kg* злата финоће *0,650* златар употреби две врсте злата: једно финоће *0,900* а друго финоће *0,750* и бакар. Колико ће целих килограма употребити од сваке врсте?

71. У неком троуглу седми део једног угла, девети део другог и десети део трећег угла износи 19^0. Колики могу бити ти углови, кад сваки има цели број степена?

72. Углови једнога тетивна четвороугла дељиви су по реду са *2*, *3*, *15* и *17*; колики су ти углови?

73. Кад се у правоуглом троуглу мања катета повећа за *10* а већа смањи за *4*, тада се квадрат хипотенузин повећа са *120*. Колике су катете у целим бројевима?

74. Дужина кружнога лука се не мења, кад се полупречник смањи за *1* а средишни угао повећа за 9^0. Израчунати полупречник и средишни угао у целим бројевима.

75. Код једнога правоугла паралелопипеда дужина трију ивица које се стичу у један рогаљ износи *67 cm*; ако се те три ивице повећају редом са *5 cm*, *6 cm* и *7 cm*, тада површина паралелопипедова порасте за $1920\,cm^2$. Израчунај све три ивице, кад њихове бројне вредности треба да буду цели бројеви?

76. Неко је имао извесну суму мању од *350* динара. Кад је тај новац ређао у гомиле по *10* дин. претекао је *1* дин., а кад је ређао по *15* дин. недостајало је *4* дин. Али, кад је новац разређен у гомиле по *11* дин. тада је изишао потпун број гомила. Колико је било новаца?

77. Како би се могао један круг поделити на два лука, али само у целим степенима, тако да је број степена првога лука дељив са *12* а број степена другога лука при деоби са *7* да да за остатак *6*?

78. Који је то број већи од *1000* а мањи од *4000* да подељен са *11* даје за остатак *2*, при деоби са *13* даје за остатак *12*, а кад се подели са *19* даје за остатак *18*?

79. Нађи све бројеве између *100* и *300* који подељени по реду за *2*, *3* и *5* дају остатак *1*.

80. Неки посао радило је *23* лица: људи, жена и деце; људи је било мање но жена. Зараде је било *21* динар. Кад је сваком човеку плаћено по *3* дин., свакој жени *2* пут мање, а сваком детету *3* пут мање но жени, колико је било људи, колико жена а колико деце?

31. **Аритметичке прогресије** (чл. 200—202.)

Одреди општи члан и збир чланова аритметич. редова:

1. *1, 2, 3, 4, 5, 6,....*

2. *2, 4, 6, 8, 10, 12,....*

3. *—28, —25, —22, —19,....*

4. *100, 97, 94, 91,...*

5. $100,\ 92\frac{1}{2},\ 85,\ 77\frac{1}{2},\ 70, \ldots.$

6. Колика је разлика прогресије, којој је први члан *109* а *34.* члан *10*?

7. Који је почетни члан прогресије, чија је разлика *5* а *27.* члан *139*?

8. Једна прогресија почиње с *1* а расте с разликом *5*; *116* је један члан те прогресије — који је по реду?

9. Први је члан једне аритметичке прогресије *20*, број њених чланова је *10*, последњи члан — *16*; колики је збир?

10. Колико почетних чланова прогресије треба сабрати да се добије збир *2808*, кад је први члан *2* а разлика *10*?

11. Збир прогресије, којој је разлика *3* а последњи члан *97*, износи *1612*; колики је a) први члан, b) број чланова?

12. *11.* члан једне прогресије је *50*, *16.* члан *25*; колики је збир од *41* првих чланова?

Реши ове задатке:

	a_1	d	n	a_n	s_n
13.	125	35	13	a_n	s_n
14.	50	—5	n	15	s_n
15.	1	9	n	a_n	260
16.	250	d	18	1100	s_n
17.	1,8	d	27	a_n	926,1
18.	8	d	n	$-23\frac{1}{2}$	$-77\frac{1}{2}$
19.	a_1	—2	6	0	s_n
20.	a_1	0,27	16	a_n	52,08
21.	a_1	$8\frac{5}{11}$	n	99	630
22.	a_1	d	12	$7\frac{1}{4}$	54

23. Седми члан неке прогресије је *10* а седамнаести *50*; колики је први члан и разлика?

24. Одредити n-ти члан и збир n чланова реда:

$$1, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{n-2}{n}, \quad \frac{n-3}{n}, \ldots$$

25. Збир чланова једнога аритмет. реда је *34275*, почетни члан је *5* а број чланова *150*. Колики је *100.* члан?

26. Одреди аритметичан ред од *5* чланова, кад је њихов збир $5a$ а збир реципрочних вредности њихових $\frac{1}{b}$.

27. Између свака два члана реда *1, 5, 9, 13, 17, 21,...* уметни по *8* чланова тако, да нови ред буде опет аритметичан.

28. Између p и q уметнути r чланова једнога аритметичног реда; колики је n-ти члан?

29. Колико бројева треба уметнути између *16* и *250*, да би се добио аритметичан ред, којега је збир *1995*?

30. Уметни између првога и другог члана реда *2, 5, 8, 11,...* толико нових чланова да збир уметнутих чланова буде само за *1* мањи од збира *20* првих чланова датога реда. Колико чланова треба уметнути и колика је разлика уметнутог реда?

---

31. Колики је збир свију троцифрених бројева?

32. Нађи збир свију бројева од *1* до *501* који су дељиви са *5*.

33. Колико има бројева између *0* и *100* који су дељиви са *6*?

34. Колики је збир десет првих бројева дељивих са *17*?

35. Колико има троцифрених бројева који се свршују са *3*, и колики је њихов збир?

36. Колики је збир *100* првих бројева природнога бројног реда?

37. Одреди збир свију парних бројева од *0* до *100* закључно.

38. Колики је збир n првих непарних бројева, а колики n првих парних бројева?

39. Неко је сабрао неколико првих парних бројева, па је њима додао толико исто првих непарних бројева и добио за збир *78*; колико је бројева сабрао?

40. Колико пута избија у *24* часа часовник, који откуцава само часове?

41. Одреди *50.* број природнога реда, који је дељив са *13*.

42. Растави број *225* на више делова тако, да сваки потоњи буде за *2* већи од члана пред њим а последњи да је *29*. Колики је први део а колики је број делова?

43. Површина једнога правоугла паралелопипеда износи *88* dm^2 а дијагонала $2\sqrt{14}$. Израчунати ивице, кад се зна да оне чине један аритметичан ред.

44. Број *150* може се раставити на три таква броја да они чине један аритметичан ред и, сем тога, да је трећи број већи од првога за *92*.

45. Три броја чине један аритметичан ред; њихов је збир *27* а производ *648*. Који су то бројеви?

46. Поделити једну суму на више лица тако да прво добије *80* динара а свако потоње по *4* дин. мање; последње добије *28* дин. Колико је било лица а колика цела сума?

47. Један слуга служио је *6* година добивајући сваке године по *24* дин. више но године пред њом; на тај начин он је примио *1800* дин. Колика му је била прва плата а колика последња?

48. За копање бунара од *12 m* дубине плаћено је за први метар *8,8* дин., за сваки даљи метар по *80* п. више; колико је плаћено за последњи метар а колико за цео бунар?

49. Један таљигаш погоди да пренесе из једног мајдана *250* m^3 камена за оправку неког пута. Мајдан је удаљен *420 m* од места где треба оставити први кубни метар, а сваки други кубни метар треба остављати у раздаљини од *20 m* даље. При сваком преносу кола понесу управо *1* m^3. Пита се, за колико ће се дана камен пренети, кад таљигаш ради дневно *8* часова и кад он, због товарења и истоваривања не може више да пређе од *4 km* за *1* час?

50. Неко тело пређе прве секунде a метара а сваке даље секунде по d метара више; а) колики је пут пређен за n секунада, b) за колико ће времена тело прећи s метара?

51. Кад тело слободно пада прелази прве секунде *4,9 m* а сваке потоње секунде по *9,8 m* више но прећашње; колики је пређени простор *5.* секунде а колики је за *5* секунада. (Занемарује се отпор ваздуха).

52. Вертикално у вис избачено зрно пређе прве секунде *200,9 m* а сваке потоње секунде по *9,8 m* мање; после којег ће се времена оно вратити на место са којег је избачено?

53. Из једне тачке повучено је шест правих линија које граде шест углова тако да је сваки потоњи већи од прећашњега за $9°12'$; израчунај све углове.

54. Неко улаже на један број лутрискога лоза *40* пара, па се зарече да дотле улаже по *40* пара више но прећашњи пут док не добије; кад се згодитак плаћа *14*-струким улогом, у којој би игри играч добио дотада уложени новац?

55. Дуг од 4650 динара без интереса исплати се у 12 полугодишњих отплата тако, да је сваког потоњег рока плаћано по 50 дин. мање но пређашњег; колика је била прва отплата?

56. Кад се за n година улаже у почетку сваке године капитал c по $p\%$ на прост интерес, колика је вредност s свију улога до краја n-те године?

57. За 12 дана узастопце барометар се пео сваког дана са $\frac{1}{2}\,mm$. Средње барометарско стање за то време било је $748\frac{3}{4}\,mm$. Колико је барометар показивао првога дана?

---

58. Збир првих 6 чланова једнога аритметичног реда износи 17 а четврти је члан 3; који је то ред?

59. У којега је аритметичног реда збир $9.$ и $20.$ члана 21 а збир $10.$ и $16.$ члана 22?

60. У једном аритметичном реду збир три прва члана је $22\frac{1}{2}$ а збир три последња члана 75; $5.$ члан је 15. Колики је збир целога реда?

61. Збир првих пет чланова аритметичкога реда износи 75 а разлика између петога и другог члана је 18; колики је први члан а колика разлика?

62. Четири броја чине аритметичан ред чија је разлика 4 а производ два последња броја 165; који су то бројеви?

63. У једном аритметичном реду производ $7.$ и $15.$ члана је 630 а збир чланова између та два члана је $185\frac{1}{2}$; који је то ред?

64. Две аритметичке прогресије, чије су разлике цели бројеви, имају подједнак број чланова; прва почиње са 1 а свршава се са 15, друга почиње са 3 а свршава се са 24; колики је збир сваке прогресије? (Решење се своди на неодређену једначину).

65. У једном аритметичном реду n-ти је члан $9n-4$. Тај је ред постао сабирањем једноимених чланова два аритметична реда од којих први почиње са 2 а други са 3. Нађи та два реда, кад је разлика другога двапут већа од разлике првога.

66. Збир првога и четвртога члана једнога аритметична реда је $=s$, производ другог и трећег члана је p; колики је збир S првих пет чланова тога реда? — Најпре опште решење, затим примена за $s=14$ и $p=24$.

67. Који је то аритметични ред у којега је осми члан квадрат четвртога а шести члан геометриска средина између четвртог и једанаестог члана?

68. Збир прве половине чланова једнога реда износи 45 а збир друге половине чланова 145, сем тога, збир првога и последњег члана његова износи 38; који је то ред?

69. Збир цифара једнога двоцифрена броја јесте први члан једнога аритметична реда, сâм тај број други је члан тога реда а трећи члан његов то је број којему цифре иду обрнутим редом од датога броја, и најзад, збир та три члана већи је управо за разлику реда од квадрата збира цифара датога броја. Који је то број?

70. Обим правоуглог троугла има $24\,m$ а његове стране чине аритметичан ред; израчунај стране.

71. Израчунај стране правоуглог троугла кад оне чине аритметичан ред којему је разлика 20.

72. Површина једнога правоуглог троугла има $216\,m^2$, а његове стране чине аритметичан ред; колике су стране тог троугла?

73. Кад се на један крак датога угла пренесе произвољна дуж неколико пута, па се кроз прву деону тачку повуче права до другога крака а кроз остале тачке паралелне према првој правој, онда, ако је прва паралелна $1{,}75\,cm$, колика је двадесета и колики је збир тих 20 паралелних?

74. Бројне вредности полупречника 15 концентричних кругова чине један аритметичан ред; полупречник првога круга је $2\,mm$, полупречник другога је $5\,mm$. Колика је површина највећег круга? ($\pi=3{,}14$).

75. Уместо 15 кругова код пређашњег задатка нека се посматра 20 концентр. кругова и ако је полупречник првога $4\,mm$, другога $8\,mm$, онда колики је обим највећег круга а колики је збир обима свих 20 кругова?

76. Бројне вредности површина 12 концентричних кругова чине аритметичан ред; површина најмањега круга је $2\,cm^2$, а непосредно већега $5\,cm^2$; колики је полупречник највећега круга?

77. Бројне вредности полупречника неколико концентричних кругова чине аритметичан ред; полупречник највећега круга има $49\,cm$ а непосредно мањега $47\,cm$ и површина најмањега круга има $706{,}5\,cm^2$. Колико има кругова?

78. Дужине паралелних страна једнога трапеза су $4{,}5\,cm$ и $7{,}5\,cm$. Кад се једна непаралелна страна подели на шест једнаких делова и кроз деоне тачке повуку паралелне ка паралелним странама трапезовим онда је свака паралелна већа од оне до ње за исту дужину; тражи се разлика дужина узастопних паралелних.

79. Дуж AB подељена је на неколико једнаких делова и над сваким делом, као над основицом, нацртани су подударни равнокраки троугли. Права која саставља темена тих троуглова подељена је (самим теменим) на једнаке делове; на тим деловима као на основицама нацртани су опет равнокраки троугли подударни с пређашњима. Кад се тај поступак понови неколико пута добије се један трапез, који је подељен правим линијама што пролазе кроз темена троуглова на неколико појасева у којима су сами троугли. Ако је укупни број појасева *5* а укупни број троуглова *45*, колико је онда троуглова у првом а колико у последњем појасу?

80. Два места A и B удаљена су *870 km*; из A пође један путник у B и првога дана пређе *80 km*, другога *75*, трећег *70* итд. Три дана доцније пође други путник из B у A па пређе првога дана *40 km*, другога *46*, трећег *52 km* итд. Где ће се та два путника срести и после колико дана?

81. A пође из једног места и пређе првога дана *14 km*; свакога доцнијег дана прелазио је $3^1/_2$ *km* више но ранијег. После *9* дана крене се из истога места други путник B прелазећи дневно $96^1/_4$ *km*. Кад ће он стићи путника A?

82. Два човека пођу једновремено из два разна места један другом у сусрет. Први пређе првога дана *5 km* а свакога другог дана по $^1/_4$ *km* више но пређашњег; други пређе првога дана *3 km* а сваког другог дана по $^2/_3$ *km* више но пређашњег. Кад су се срели видели су, да је први прешао $5^5/_6$ *km* више од другога. Колико су дана провели на путу и колико су удаљена она два места?

83. Два тела крећу се по обиму једнога круга у супротном смислу. Једно прелази у првој секунди 3^0 а сваке потоње секунде по 1^0 више, друго прелази у првој секунди $1^1/_2{}^0$ а сваке доцније секунде по 6^0 више но у пређашњој. Кад ће се та два тела срести први пут?

Одреди код датих редова n-ти члан и збир n првих чланова:

84. $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \ldots$ **85.** $1, \frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{n}, \ldots$

86. $n, \frac{3n-1}{2}, 2n-1, \ldots$ **87.** $\frac{1}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \frac{2n^2+1}{n}, \ldots$

88. *1*
2, 3, 4
3, 4, 5, 6, 7
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
. . . .

Одреди у овом прегледу збир чланова n-тога хоризонтална реда.

89. Цела решења једне Диофантове једначине првога степена (са *2* непознате) чине аритметичке редове. a) Колика је разлика свакога од та два реда? b) за коју једначину оба реда у исто време расту или опадају, а за коју једначину један ред расте а други опада?

32. **Геометриске прогресије** (чл. **203—209**).

Одреди општи члан и збир чланова геометриских редова:

1. *5, 15, 45, 135,....* **2.** $6, 4\frac{1}{2}, 3\frac{3}{8}, 2\frac{17}{32}, \ldots$

3. *10,5, 2,625, 0,65625,...* **4.** *3, —12, 48, —192,...*

5. Први члан једнога реда је *3* а количник *2;* колики је *10.* члан и збир *10* првих чланова?

6. Први члан једнога реда је $\frac{1}{2}$ а количник *3;* наћи *7.* члан и збир *7* првих чланова.

7. Колико чланова реда *1, 3, 9, 27,...* треба сабрати да би њихов збир изнео *3280?*

8. Колики је количник реда, чиј је први члан *3* а *9. 768?*

9. Колики је стваран количник реда, a) чиј је први члан *2* а *12.* члан *4096;* b) чиј је *5.* члан *648* а *7.* члан *1458?*

10. Колики је збир првих *8* чланова геометр. прогресије

$$a, -b, \frac{b^2}{a}, -\frac{b^3}{a^2}, \ldots?$$

11. Одреди збир реда

$$\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\frac{r}{q^3}+\ldots+\frac{r}{q^{n-1}}+\frac{r}{q^n}.$$

Реши означене задатке:

	a_1	q	n	a_n	s_n
12.	*7*	*4*	*9*	a_n	s_n
13.	*6*	$\frac{3}{4}$	n	$1\frac{217}{512}$	s_n
14.	*4*	*3*	n	a_n	*118096*
15.	*4096*	q	*14*	*0,5*	s_n
16.	*6*	q	n	*1536*	*3066*
17.	a_1	*— 0,5*	*5*	*0,75*	s_n
18.	a_1	*2*	*14*	a_n	$2047\frac{7}{8}$
19.	a_1	*3*	n	*177147*	*265720*

Одреди збирове прогресија:

20. $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}$.

21. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.

22. $a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6$.

23. $a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+\ldots-b^7$.

24. $a+\sqrt[5]{a^4b}+\sqrt[5]{a^3b^2}+\sqrt[5]{a^2b^3}+\sqrt[5]{ab^4}+b$.

25. Одреди у прогресији $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ а) збир прва *2, 3, 4, 5, 6* чланова, b) збир самога реда.

Одреди збирове редова што опадају:

26. а) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ b) $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots$

27. а) $1+\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\frac{1}{1{,}05^3}+\ldots$

b) $1-\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\ldots$

28. а) $1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\ldots$ за $b<a$.

Одреди вредност израза:

29. $$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)+ +\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right)+\ldots$$

30. $$\frac{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots\right)}{5-\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{4}-\frac{5}{4\sqrt{2}}+\ldots}$$

31. Одреди збир реда: $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$

32. Збир геометриске прогресије што опада, а почиње са *1*, износи *3*; колики је њен количник?

33. Који је пети члан геометр. реда што опада, ако је његов количник $\frac{3}{4}$ а збир *20*?

34. Преобрати мешовито периодан децималан разломак (чл. **99**, *3)* у обичан разломак применом геометр. реда.

35. Одреди исто тако: 1) *0,4545...*, 2) *0,(81)*, 3) *3,(6)*, 4) *0,6(3)*, 5) *5,8(3)*, 6) *2,19(4)*.

36. Између *5* и *405* уметни три броја тако, да тада свих пет бројева чине геометриску прогресију.

37. Интерполуј између свака два члана прогресије *1, 10, 100, 1000,... 5* нових чланова водећи рачуна само о стварним бројевима.

38. Између бројева *32* и *243* уметнути четири друга броја да се добије геометријски ред.

39. Између *1* и *2* треба уметнути *11* чланова геометриске прогресије (Примена у науци о звуку). (Позитивни, стварни бројеви!).

40. Између првога и другог члана реда $16, \frac{1}{4}, \frac{1}{256}, \ldots$ треба уметнути више чланова тако да они са *16* и $\frac{1}{4}$ чине геометриску прогресију и са њима да даду збир $31\frac{3}{4}$; колико чланова треба уметнути и који су?

---

41. Пет лица треба да поделе неку суму новаца тако да њихови удели чине један геометриски ред; уз то, збир удела другог и трећег лица да износе *8400* динара а збир удела првога и трећег лица да износе *10000* динара. Колико сваком лицу припада?

42. Неко је играо шест пута на лутрији: први пут је уложио *20* пара а сваки потоњи пут по двапут више; шести пут он добије и последњи му је улог исплаћен у *4800* пута. Колики је добитак и колико је свега уложио?

43. Неко уштеди месеца јануара једну пару а свакога потоњег месеца трипут толико колико пређашњега; колико је уштедио за целу годину?

44. Неко се погоди да за ков својега коња плати овако: за први клинац да дâ $\frac{1}{10000}$ део од паре (дин.), за други $\frac{2}{10000}$, за трећи $\frac{4}{10000}$ итд. Кад свака потковица има 8 клинаца, колико се мора платити за ков коња у све четири ноге?

45. Кад је проналазачу шаха понуђено да сâм изабере награду, он је тражио да му се даде толико пшенице колико би изнело, кад би се за прво поље шаховско рачунало једно зрно, за друго *2*, за треће *4* итд. за свако ново поље по два пут толико до последњег *64.* поља. Колико би то тона (1000 кгр.) пшенице изнело, кад се узме да у *1 kg.* иде *20000* зрна?

46. У бурету има *100* литара вина. Из њега се оточи *1 l* а за то се долије *1 l* воде. Из те смеше оточи се опет *1 l* и толико воде долије. Колико се пута може то понављати да у тако помешаном вину остане још само *50 l* вина?

47. Светлосни зрак пролазећи кроз стаклену плочу губи $\frac{1}{10}$ од својега интензитета; колики ће још бити интензитет, кад светли зрак прође кроз *10* таквих плоча намештених једна за другом?

48. Реципијент ваздушнога шмрка има *5,3* dm^3 а стублина заједно са спојном цеви има *0,6* dm^3; колико пута треба клип издићи да би се ваздух у реципијенту свео на $\frac{1}{10}$ првобитне густине?

---

49. Три броја чине геометриски ред; први од тих бројева је *7* а збир сва три *637*; који су то бројеви?

50. Од три броја који чине геометриски ред други је већи од првога за *15* а трећи од другога за *60*; одреди те бројеве.

51. Одреди први и пети члан онога реда у којем је $a_2 - a_4 = -360$ и $a_3 - a_4 = -300$.

52. *17496* (b) и *1024* (c) јесу два члана једнога геометрискога реда којему је почетни члан *59049* (a), између којих има *6* (p) чланова. Одреди количник реда и нађи који је члан у реду b?

53. Збир три броја, који чине геометр. ред јесте *13*, а производ првога и трећег јесте *9*. Који су то бројеви?

54. Растави број *11310,5* на пет сабирака тако да сваки потоњи буде већи од претходног *12* пута.

55. Колики је збир једнога бескрајна реда у којем је производ прва три члана једнак *1728* а збир трећих степена тих чланова *15768*?

56. Имају *8* бројева који чине геометриски ред а такви су, да је збир прва четири *45* а збир друга четири *20*?

57. У геометр. реду од *8* чланова збир непарних чланова износи *3280* а збир парних чланова *9840*; колики је први члан и количник?

58. Цифре једнога троцифрена броја чине геометриски ред, чиј је први и трећи члан заједно већи од другога $2^1/_2$ пута; број чије цифре иду обрнутим редом мањи је за *594* од датога броја; одреди тај број.

59. Један аритметички и један геометриски ред с позитивним члановима имају исти почетни члан; разлика првога реда једнака је с количником другога. Одреди оба реда, кад је производ из другога члана геометриског реда и шестог члана аритметичког *102* а производ из првога и петог члана геометриског реда *324*?

60. Три броја чине геометриски ред; њихов је збир *19*. Кад се највећи од тих бројева умањи за *1*, тада та три броја чине аритметичан ред; који су то бројеви?

61. Имају три броја оваке особине: један је први члан једнога аритметичног реда, други је пети члан његов а трећи осми члан; у исто време, први број је први члан једнога геометриског реда, други број је други члан тога реда а трећи је четврти члан; збир та три броја износи *806*. Одреди те бројеве.

62. Растави сваки члан прогресије *3*, *48*, *768*, *12288*,... на четири дела тако, да сви ти делови чине опет геометриску прогресију.

63. Имају пет бројева таквих да прва три чине геометриски ред а последња четири аритметички; збир последња четири броја износи *20* а производ из другог и петог је *16*. Који су то бројеви?

64. Први члан једнога геометриског реда с непарним бројем чланова је *7*, средњи члан *56* а збир свих чланова *889*. Одреди количник и број чланова.

65. Први, други, пети и последњи члан једнога аритметичког реда јесу по реду узастопни чланови једнога геометриског реда. Збир та четири члана геометриског реда износи *80*. Колики је збир аритметичког реда?

66. Имају два таква броја да они, сматрани као два прва члана једнога аритметичког реда, такви су, да је разлика између четвртога и другог члана *18*; ако ли се она два броја сматрају као оба прва члана геометриског реда, онда је разлика између четвртог и другог члана *28*. Који су то редови?

67. Један аритметички и један геометриски ред са по четири члана имају једнак почетни члан; размера два друга члана у оба реда је $\frac{3}{2}$, а размера оба трећа члана је $\frac{3}{4}$. Збир првога и четвртог члана геометриског реда је *81*. Који су то редови?

---

68. Кад се у дати квадрат са страном a упише други, чија ће темена бити у средини страна првога; у овај квадрат нови на исти начин итд. редом, онда се пита: Колики је збир површина свију уписаних квадрата?

69. У дати равностран троугао са страном a уписати нови троугао везивањем средина страна; у добивени троугао уписати други на исти начин итд. Колики је збир површина свију уписаних троуглова?

70. У равностран троугао са страном a уписати круг, у круг равностран троугао, у овај опет круг итд. Колики ће бити: *1)* збир полупречника свих кругова, *2)* збир њихових обима и *3)* збир њихових површина?

71. Бројне вредности полупречника десет концентричних кругова чине геометриски ред. Полупречник најмањега круга је $r = 2\ mm$ а полупречник непосредно већега је $r_1 = 3\ mm$. Колика је површина највећега круга? $(\pi = 3{,}14)$.

72. Бројне вредности површина петнаест концентричних кругова чине геометриски ред. Површина најмањега круга је $p_1 = 4\ cm^2$ а површина непосредно већега је $5\ cm^2$. Колики је полупречник највећега круга?

73. Тако исто бројне вредности површина више концентричних кругова чине геометријски ред. Полупречник најмањега круга је $r_1 = 1\ cm$ а непосредно већега $r_2 = 2\ cm$; површина највећег круга је $p_n = 803{,}84\ cm^2$. Колики је број кругова?

74. Познате су стране правоуглог троугла a, b и c. Кад се из темена правог угла A повуче нормала AD на хипотенузу, из D нормала DE на катету AB, за тим из E нормала EF на хипотенузу итд. без краја; израчунати дужи AD, DE, EF итд. Показати да бројне вредности њихове чине геометријски ред који опада. Одредити збир: $AD + DE + EF + FG + \cdots\cdot$

Добивени образац применити за случај, кад је катета $AC = 3\ m$ и $AB = 4\ m$.

75. Из једне тачке на једном краку датога угла од 60^0 (α) повучена је на други крак нормала дужине a, из њене подножне тачке повучена је опет нормала на први крак итд. Колики је збир свију нормала?

76. n (6) правих линија секу се у једној тачки под једнаким угловима; из једне тачке макоје од тих правих повучена је нормала дужине a на најближу праву, из подножне тачке њене повучена је опет нормала на најближу праву итд. Колика је дужина тако постале изломљене спирале?

77. На страни b једнога троугла обележена је дуж m. Кад се та дуж пројектује на страну c, добивена пројекција на страну a, нова пројекција опет на страну b итд., онда се тражи: колики је збир дужи m и свих пројекција?

78. Кад се у круг полупречника r упише квадрат, у квадрат круг, у овај други квадрат итд., онда се пита: *1)* колики је збир површина свију кругова; *2)* збир површина свију квадрата?

79. Ако се у равностран троугао, чија је страна a, упише круг, за тим три круга који додирују први круг и две стране троуглове; па онда опет три круга који додирују последња три круга и две стране троуглове итд., тражи се збир површина свију уписаних кругова.

80. У равностраном троуглу, чија је страна a, уписан је круг и на њега повучена дирка тако да она одсеца од троугла други, мањи равностран троугао; кад се то исто изврши на новом троуглу и тај поступак продужи бескрајно много пута, онда се тражи *1)* збир полупречника, *2)* збир периферија и *3)* збир површина свију могућних кругова.

81. У коцки ивице a уписана је лопта, у њој коцка, у овој опет лопта итд. Израчунати збир запремина *1)* свих коцака, *2)* свих лопта̂.

82. У правој купи висине h уписана је лопта. У простору спрам врха уписана је опет лопта, која додирује прву лопту и омотач купин итд. Кад је полупречник прве лопте r, колики је збир површина и збир запремина свију лопта̂?

83. Дуж a продужена је за неку мању дуж тако, да је збир обеју подељен по златном пресеку; на исти начин продужена је друга дуж за једну мању трећу дуж и тако даље. За колико је збир свију дужи већи од збира прве и друге дужи?

84. У један квадрат упише се круг полупречника r; у празнинама код сва четири темена уписани су опет кругови и тако непрекидно. Тражи се *a)* збир обима свих кругова, *b)* збир њихових површина?

85. Једна висина неког троугла подељена је на три једнака дела, па је кроз деону тачку, која је најближа темену, повучена паралелна према основици; исти поступак се наставља код одсеченог троугла итд. Колики је збир површина свију троуглова, кад је површина првог троугла p?

86. У лопту s полупречника r уписати коцку k, у коцку — лопту s', у ову лопту уписати коцку k' и тако без краја. Тражи се:

1) Да се израчунају полупречници лопта̂ s', s'', s''';

2) Да се израчунају изрази за запремине лоптиних слојева између s и s', s' и s'', s'' и s''';

3) Доказати да је збир тих бескрајно много запремина једнак са запремином дате лопте.

---

87. Помножи чланове аритметичкога реда a, $a + d$, $a + 2d, \cdots$ једноимeним члановима геометрискога реда b, bq, $bq^2, \cdots$ па изведи збирни члан сложенога реда, који тако постаје према чл. **203.** 2)!

Решење: $s_n = \dfrac{ab\,(q^n - 1)}{q - 1} + \dfrac{bdq}{(q-1)^2}\{nq^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)\}$.

88. Ако је $q<1$, онда је за $lim\ n=\infty$ $lim\ q^n=0$ па такође и, што се увиђа из биномног правила, $lim\ (nq^n)=0$. Одреди према томе граничну вредност од s_n у пређашњем задатку за $lim\ n=\infty$!

Решење: $S=\dfrac{ab(1-q)+bdq}{(1-q)^2}$.

Одреди тако исто збир редова:

89. $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots+nx^{n-1}$.

90. $1+5x+9x^2+13x^3+17x^4+\cdots+(4n-3)x^{n-1}$.

91. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}+\cdots$

92. $\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}+\frac{7}{2.3^2}+\frac{10}{2.3^3}+\cdots+\frac{3n-2}{2.3^{n-1}}+\cdots$

---

33. **Интерес на интерес и рачунање ренте** (чл. 207—212)

1. На колико порасте капитал од *5800* динара за *15* година по 5% интереса на интерес?

2. Неко уложи у штедионицу *5042* динара; штедионица плаћа на уложени новац 4% а интерес се капиталише свако пола године. Колико је свега примљено после *20* година?

3. Колико ће вредети *7324,2* дин. по $4\frac{1}{2}\%$ интереса на интерес после $23\frac{3}{4}$ године, кад се интерес додаје капиталу крајем сваке године?

4. *3000* дин. лежало је у штедионици најпре *10* година по 4% за тим још 8 година по $3\frac{3}{4}\%$; на коју је суму онај капитал порастао за *18* година?

5. По процени има сада дрва у некој шуми $42350\ m^3$; колико ће бити дрва после *10* година, кад се рачуна да је годишњи прираштај 3%?

6. У некој земљи има сада *548200* становника; колико ће бити становника после *14* год., кад је годишњи прираштај $1\frac{1}{2}\%$?

7. Сума од *9000* динара треба да се плати после *10* година без интереса; колика јој је садашња вредност, кад се рачуна интерес на интерес по $3\frac{3}{4}\%$?

8. Који капитал порасте за *15* година по 4% интереса на интерес на исту суму, на коју порасту *4500* динара по 6% за 9 година?

9. За једну кућу нуди *A 30000* динара у готову, *B 33500* динара а да плати после *3* године и *C* даје *40000* дин. али после *7* година. Која је понуда за продавца најповољнија, кад се узме да је интерес на интерес 5%?

10. У Београду је *1881.* године било *48039* становника. Колико је било становника *1891.* године, кад је број становника годишње прирашћивао просечно са $2\frac{1}{4}\%$?

11. Године *1866.* било је у граду *A 24350* становника а у граду *B 19820*. Годишњи прираштај становника у *A* био је $1,85\%$. Колики је био прираштај у *B*, кад су оба града *1880.* год. имала подједнак број становника?

12. Рачуна се да сад има у некој шуми $180000\ m^3$ дрва; колико је било дрва пре 15 година, узимајући да се за то време гора правилно увећавала са 3% годишње?

13. Кад је у Београду *1894.* године било *60500* становника, које ће године бити у њему *100000* становника, кад би прираштај био сталан по $2\frac{1}{4}\%$?

14. Неко уложи у штедионицу *1000* динара онога дана кад му се дете родило; кад штедионица плаћа 5% и кад се интерес капиталише сваких шест месеца, коју ће суму дете добити кад наврши *21* годину?

15. Сума од *3200* динара уложена је била пре *80* година, па је за то време заједно с интересом на интерес порасла на *34059,83* дин.; колики је био процент?

16. Становништво једнога града порасло је у току од *24* године од *32500* на *66066*. Колики је био годишњи прираштај?

17. Неко узајми *900* динара а изда признаницу на *1200* дин. да исплати за *3* године; колики је процент платио?

18. За које ће се време број становника некога места повећати од *5200* на *9440*, кад је годишњи прираштај $1\frac{1}{4}\%$?

19. За које ће се време неки капитал дат по 4% интереса на интерес удвојити, утројити, и уопште постати k пута већи, кад се интерес капиталише *a)* крајем сваке године, *b)* крајем пола године?

20. На име дуга од *10000* динара исплаћено је после *3* године *2500* динара и после 6 година *1000* динара; колики је још дуг после *10* година, кад се рачуна 5% интереса на интерес?

21. Нека сума дата под сложен интерес порасла је за *15* година на *25745* динара. За првих 8 година процент је био *3* а за остало време *4*. Колика је била основна сума?

22. У бурету има *140 l* вина; кад се оточе *4 l* и допуни водом, па се овако понавља *24* пута, колико је онда остало вина у бурету?

23. Колико година треба да стоји нека сума под интересом на интерес по $3^1/_2$%, да би порасла толико, колико порасте кад стоји *10* година по $4^3/_4$%?

24. Неко поклони својој општини *36000* динара на зидање гимназије. По прорачуну зидање би стало *150000* дин.; колико времена треба да буде поклоњена сума под интересом, док не порасте толико да се може приступити зидању, кад банка плаћа 5% а интерес капиталише сваких шест месеца?

25. Два капитала, од којих је други већи од првога за *1420* динара, дати су под интерес на интерес и то први по 4% а други по *5*%. После *16* година они износе заједно *211084* дин. Који су то капитали?

26. Два капитала који се разликују за *393* динара дати су под интерес на интерес: мањи по $5\frac{1}{4}$%, већи по $3\frac{1}{4}$%. Одреди те суме, кад се зна, да је на крају *40*. године мањи постао двапут већи од другога?

---

27. У току *20* година улаже се почетком сваке године по *200* динара; колика ће бити вредност тих сума у време последњег улога, кад се рачуна *4*% интереса на интерес?

28. Неко уштеђује годишње *280* динара и крајем сваке године улаже тај новац у штедионицу, која плаћа *4*% а интерес капиталише сваких шест месеца; колика ће бити уштеда за *15* година?

29. Један отац уложи код Управе Фондова *120* динара онога дана кад му се кћи родила, а за тим је сваке године на тај дан улагао по *120* динара, док му кћи није постала пунолетна. Управа плаћа на улоге *5*% а интерес капиталише свако пола године. Колико је кћи примила?

30. Неко има за *6* година, у почетку сваке године, да плаћа по *285* дин.; али, он није ништа отплатио све до почетка *6*. године; колики је његов дуг у то време, кад се рачуна интерес на интерес по *4*%?

31. Неко осигура свој живот са *10000* динара, за шта плаћа у почетку сваке године по *290* динара. После којег ће се плаћања навршити осигурана сума, кад се рачуна $4\frac{1}{2}$%?

32. Коју суму треба улагати крајем сваке године у току *12* година, да би се на тај начин уштедило *3000*. Процент је 5.

33. Неко је у почетку сваке године улагао код новчаног завода по *400* динара. После колико је година примио *10000* динара, кад се рачуна интерес на интерес по $4\frac{1}{4}$%?

34. *А* је у почетку сваке године улагао извесну суму по $4\frac{1}{4}$%, па је после *12* година примио *9534* динара; колико је морао годишње улагати?

35. За кирију једне ливаде за време од *12* година биле су две понуде: прва *1074* дин. у готову и друга да се крајем сваке године плаћа по *117* динара. Која је понуда боља, кад се рачуна интерес на интерес по *5*%?

36. Дуг од *12500* динара треба исплатити у седам једнаких годишњих отплата плаћајући у почетку сваке године; колике су поједине отплате, кад се рачуна *5*% интереса на интерес?

37. Неко улаже годишње *1400* динара и то пола крајем јуна а другу половину крајем децембра сваке године. Колика је целокупна вредност улога, кад је улагано свега *26* пута и кад се интерес капиталише сваких шест месеца а по *4*%?

38. Неки земљорадник хоће да осигура свој усев против града; вредност усева прорачуната је на *6800* динара. Колику ће му годишњу премију (отплату) рачунати друштво за осигурање уз интерес на интерес по *5*%, ако се узме, да град просечно сваких *16* година сасвим уништава усеве онога краја?

39. *А* је осугурао живот у почетку своје *38*. године на *6000* динара за шта је плаћао у почетку сваке године по *180* динара. Кад је осигураник умро почетком своје *65*. године пита се: да ли осигур. друштво добива или губи, кад се рачуна интерес на интерес по *3,5*%?

---

40. Неко је наследио крајем 1890. године *15000* динара; он преда тај новац у штедионицу, па је крајем сваке године додавао тој суми још по *240* динара. Кад је штедионица плаћала *4,75*% интереса на интерес, колико је примио крајем 1900 године?

41. Исти задатак, рачунајући да се интерес капиталише крајем свако пола године.

42. У некој шуми, где је годишњи прираштај $2^1/_4$%, има сада *145678* m^3 дрва; колико ће бити дрва после *18* година, кад се крајем сваке године сече по *1175* m^3?

43. Неко је наследио 1886. године *24000* дин.; он је тај новац уложио у штедионицу, па је крајем сваке године узимао по *1200* динара. Колико му је новаца остало крајем 1896. године кад штедионица плаћа 6%?

44. Неко је дао у почетку 1893. године извесну суму новаца на штедњу, па је крајем сваке године узимао по *800* динара. У почетку 1905. године он је примио *2000* динара; коју је суму уложио, кад је процент био *4*?

45. Неко наследи *12500* динара па их одмах да̂ под интерес с тим, да сваке године узима по *1000* динара док цео капитал не потроши. Колико ће година то трајати, кад је процент *5*?

46. Један чиновник улагао је у току *20* година крајем сваке године по *470* динара у новчани завод који плаћа по 5%. По истеку тих *20* година, он је крајем сваке године узимао из завода по *1750* динара, пита се: колико ће година моћи уживати ту суму?

47. Неко завешта једној школи извесну суму новаца с тим, да се годишње издаје добром ђаку по *180* динара. Остатак интереса додаван је капиталу и ма да је процент био само $2\frac{1}{2}$, ипак је за *30* година завештана сума порасла на *75000*. Колика је била завештана сума?

48. Неко је израчунао да трошећи годишње по *3000* динара од својег капитала, који доноси 6%, да би га потрошио за *10* година. Колико би година трајао тај капитал, кад би се годишње трошило по *1925* динара?

49. Кад се од капитала, који доноси 5% интереса на интерес, троши годишње по *2400* динара, он би се поништио за 15 година. Пита се: за колико треба умањити годишњи расход да би капитал трајао 25 година?

50. Неко желећи да осигура себи кроз 10 година капитал од *45000* динара положи банци *16200* динара по 4%; али, како та сума није била довољна за осигурање оне суме, то је морао крајем сваке године да полаже банци у току од 10 година извесну суму. Колика је била та сума?

51. Један град узајми од банке неку суму новаца с обавезом, да јој плаћа крајем сваке године а за време од 25 година по *28000* динара; колико је град узајмио, кад се рачуна интерес на интерес по 5%?

52. Кад се на име интереса и отплате дуга од *26000* динара плаћа годишње по *2000* дин., колико ће још остати дуга после 10 година, кад је 5% интерес на интерес?

53. Који је то капитал што је узајмљен по $4\frac{1}{2}\%$ под сложен интерес, кад се он крајем сваке године умањује са *250* динара а после 15 година је остало још *1300* динара?

54. Отац остави *40000* динара по 5% интереса на интерес за своје петоро деце; деца добивају крајем сваке године по *3000* динара. Кад после 6 година деца поделе остатак суме на једнаке делове, колико је свако добило?

55. У Београду има данас *75000* становника. Кад би се годишње досељавало по *1000* лица и кад би становништво и пређашње и ново прираштивало са 2%, колико би било становника кроз 25 година?

56. *А* уложи *100000* динара под сложен интерес па крајем сваке године узима по *7000* динара. *В* уложи *10000* па крајем сваке године додаје још по *700* динара. Кроз колико ће се година ова два капитала изједначити и колики ће тада бити кад се интерес рачуна по $4\frac{5}{8}\%$?

57. Неко купи кућу с обавезом да у току *20* година крајем сваке године плаћа по *1200* динара. Колика је куповна цена куће, кад у свакој отплати има по 5% интереса за још неплаћени дуг?

58. Колико треба крајем сваке године додавати капиталу од *4500* динара да би се он удвојио за шест година, кад се интерес рачуна по 4%?

59. Колики је био дуг, кад се он одужио у три једнаке годишње отплате по *9261* динар кад је интерес на интерес рачунат по 5%?

60. Неко је дужан *24000* динара. Колики ануитет треба да плаћа, кад је погођено да се за 5 година дуг сведе на половину и кад је процент *5*?

61. Један отац остави својем *14.* годишњем сину *7200* динара; ова сума доноси 5% интереса на интерес. Колико сме тутор највише годишње трошити на васпитање детета, кад се наслеђе не сме потрошити пре док наследник не сврши Универзитет, то јест до краја *24.* године наследникове, и то *a)* кад се годишњи део издржавања изузима у почетку године и *b)* — крајем године.

62. Неко железничко друштво узајми *4,000.000* динара по 5% па хоће дуг да амортизује тим, што ће плаћати годишње на име отплате дуга и интереса по *250000* динара. За колико ће се година дуг поништити?

63. Неко нареди тестаментом да се његовом верном слузи исплаћује годишње по *200* динара до смрти. Наследници уговоре са слугом да му уједанпут исплате *2400* динара. Колико би још година требало слуга да живи, да му од те погодбе не буде ни штете ни добити, рачунајући интерес по 5%?

64. Неко узајми од штедионице *8000* динара с погодбом да дуг исплати за *15* година, плаћајући крајем сваке године једнаке суме. Колика је свака отплата, кад штедионица наплаћује 5% интереса на интерес за узајмљен новац а 4% за примљен?

65. Неко је уложио *1000* динара по $3\frac{1}{2}\%$ интереса на интерес па је сваке друге године т.ј. у почетку *3.*, *5.*,... године додавао по *200* динара. Колико је имао уштеде у почетку *12.* године.

66. Колики се дуг може отплатити ануитетом од *325* динара крајем сваке године, рачунајући по 5% интереса на интерес, кад се толика сума даје онолико година, колико има различних целих бројева, који се могу написати истим цифрама, којима је написан корен једначине $\sqrt{x-76} = \sqrt{x+64} - 2$?

---

67. Отац осигура својем десетогодишњем сину *2000* динара с тим да толику суму прими кад постане пунолетан; колико је морао отац положити, кад се рачуна 5%?

68. Неко има да ужива *15* година ренту од *600* динара годишње. Кад он ту ренту прода са 6% интереса, колико ће добити за њу?

69. Колика је садашња вредност годишње ренте од *420* динара, која се наплаћује крајем сваке године за *14* година, кад се интерес рачуна 4%?

70. Неко прода годишњу ренту од *620* динара, коју има да ужива још *10* година; колико ће за њу добити, кад се рачуна 4% интереса на интерес?

71. Неко плати *10000* динара у готову за годишњу ренту од *1001,50* динара; колико ће је година уживати, кад се рачуна 4%?

72. Неко се обвезао да плаћа почевши од *1900.* до закључно *1920.* године у почетку сваке друге године *(1900., 1902,...)* по *500* динара. Којом би се сумом ова обавеза могла откупити, кад би се исплатила у почетку *1910.* године?

73. Неко је дужан да плаћа сваке године по *2000* динара за *12* година. Кад се хоће да се овај ануитет замени једним јединим плаћањем после *4* године, онда се пита, којом се сумом то може извршити, кад се рачуна 5%?

74. Неко наследи *30.* годишњу ренту од *600* динара годишње. После којег би времена могао да је наплати од једанпут (т.ј. да прими 600.*30)*, кад се узме да је интерес 5%?

75. Капитал од *20000* динара треба заменити годишњом рентом која почиње крајем прве године а траје *30* година; колика мора бити рента, кад је интерес на интерес 4%?

76. Неко ужива *30.* годишњу ренту од *1000* динара почетком сваке године. Баш у доба, кад је примио осму ренту он купи кућу положивши *10000* дин. у готову и остатак своје ренте. По што је била кућа, кад се рачуна 5%?

77. Један трговац уступи своје имање од *100000* динара за годишњу ренту од *6437,50* динара, која се плаћа у почетку сваке године. Колико ће година уживати продавац ренту, кад се рачуна интерес на интерес $5\frac{1}{2}\%$ и кад се прва рента исплати одмах по свршеној погодби?

78. Петнаесто-годишња рента, која се исплаћује крајем сваке године са *1000* динара, треба да се преобрати у другу која ће трајати *20* година. Колика ће бити нова рента, кад је процент *4*?

79. Рента од *1200* динара, која траје *12* година а исплаћује се крајем сваке године, има да се преобрати у другу која ће трајати *15* година и која ће се исплаћивати крајем сваких шест месеца. Колика ће бити ова рента, кад се рачуна интерес на интерес по 4%?

80. Колико ће година трајати рента од *600* динара, која се плаћа крајем сваке године, чија је садашња вредност *10000* динара, кад се интерес рачуна по 5%?

81. Колико би се морало дати данас да би се откупила вечита рента од *500* динара годишње која почиње кроз годину дана, кад је интерес 5%?

82. Неко се осигура на случај смрти на *10000* динара, за шта је морао у почетку сваке године да плаћа премију од *360* динара; кад он после *24* године умре, колики је добитак или губитак осигурав. друштва, кад се рачуна интерес по 4%?

83. Неко има да ужива годишњу ренту r *(1000 д.)* за n *(24)* године. Кад се она може исплатити сумом од nr *(24000 д.)* ако се рачуна $p\left(3\frac{3}{4}\right)\%$?

84. Неко има *30* година да ужива годишњу ренту од *1800* динара; али он жели да је замени већом годишњом рентом, која ће трајати *20* година; колика ће она бити, кад је интерес $4\frac{1}{2}\%$?

85. Колику суму треба улагати *20* година у почетку сваке године, да би се по истеку тога времена могла уживати годишња рента од *600* динара за *12* година, кад се рачуна 4%?

86. Неко хоће *18* година у почетку сваке године да плаћа извесну суму, да би по истеку тога времена за *10* година он сâм или неко други, могао уживати крајем сваке године годишњу ренту од *500* динара. Колики треба да буде годишњи улог, кад се рачуна 5%?

87. Неко улаже *30* година код банке, која плаћа 4%, по *68* динара у почетку сваке године; колику ће му ренту плаћати банка после тога *7* година?

88. Неко рачуна да ће моћи бити способан за рад још *20* година; колико треба он за то време да улаже годишње на интерес по $4\frac{1}{2}\%$, да би могао по истеку тога времена уживати *15* година годишњу ренту од *300* динара?

89. Неко мислећи да ће још *15* година бити способан за рад уштеђује годишње *500* динара и даје их под интерес по 4%; колико година може он, по истеку онога времена, уживати годишњу ренту од *800* динара?

---

34. **Пермутације, комбинације, варијације**

Пермутације (чл. **214—216.**)

1. Колико се пермутација добива из слова речи *Roma* и које су?

2. Из основака *a b c d e* начини пермутације лексикографски које почињу 1) са *a* 2) са *c*.

3. Начини пермутације од основака *a a a b b c*.

4. Колики је број пермутација од a^5b^3?

5. Колико пермутација од основака *1, 2, 3, 4, 5, 6,* почињу 1) са *4*; 2) са *45*; 3) са *456*?

6. Колико пермутација од основака *1, 1, 1, 2, 2, 3* почињу a) са *1*; b) са *12*; c) са *123*?

7. Колико има четвороцифрених бројева којих су цифре *3, 0, 7, 4*?

8. Колико петоцифрених бројева имају цифру *6* двапут, цифру *3* двапут и цифру *5* једанпут?

9. Колико се деветоцифрених бројева може написати од девет арапских цифара тако да цифре свакога броја буду неједнаке?

10. Колики је збир четвороцифрених бројева, који се могу начинити из цифара *1, 2, 3, 4*?

Упутство: Колико се пута свака цифра налази на извесном месту?

11. Колико пута могу пет гостију измењати своја места за столом, док не буду изређали сва места?

12. Колико различних положаја могу имати *3* беле лопте, *1* плава и *2* црвене?

13. Која је *68.* пермутација од *12345*?

14. Која је пермутација *c d a e b* од *a b c d e*?

15. На колико се начина могу испремештати писмена у речи: a) *Ориноко*, b) *Бомбај*, c) *Поиокатепетл.*

16. Одреди *81.* пермутацију од *аглос.*

17. Одреди *11186.* пермутацију из основака *a, e, g, m, n, r, s, u.*

18. Која је *59.* пермутација из основака *аавлс*?

19. Која је *13737.* пермутација из *iiiimppssss*?

20. Која је пермутација *452163* од *123456*?

21. Одредити редни број пермутације: *Босна, Србин, Панчево, Дубровник.*

22. Тако исто: *Мачва, Прилеп, Чачак, Косово, Балкан.*

24. Одреди број различних елемената који је такав, да кад се повећа са *2* елемента, да број пермутација нових основака буде *42* пута већи од броја пермутација пређашњих.

Комбинације (чл. **217—220.**)

25. Склопи све амбе и терне из основака *a b c d e* a) без понављања, b) с понављањем.

26. Склопи све комбинације без понављања из основака *12345.*

27. Колико амба и терна имају *6* елемената a) без понављања, b) с понављањем?

28. Из колико се елемената може склопити без понављања a) *435* амба, b) *4845* кватерна?

Упутство за b): $x(x-1)(x-2)(x-3)=(x^2-3x)(x^2-3x+2)$; стави $x^2-3x=y$.

29. Код колико је основака број свију амба без понављања за *27* већи од броја основака?

30. Код колико је основака број терна без понављања *15* пута већи од броја основака?

31. Из колико основака треба склопити амбе и кватерне без понављања тако да број првих буде *6* пута мањи од броја других?

32. Склопи терне с понављањем из основака: „*Тачка, права, круг*“.

33. Колико униона, амба, терна, кватерна и квинтерна дају а) *90* нумера обичне бројне лутрије, b) *5* бројева извађених у једном вучењу?

34. Који се хици могу бацити са две коцке и колико има хитаца с неједнаким пољима?

35. Колико се правих линија уопште може поставити кроз n тачака?

36. У колико се тачака уопште секу n правих?

37. У колико се тачака секу n *(7)* правих, од којих су p *(3)* паралелне? (Колики је број бескрајно удаљених пресека?)

38. У колико се тачака секу n правих, од којих p пролази кроз једну тачку?

39. Од страна a, b, c и углова α, β, γ једног троугла колико има веза по три и које су могуће?

40. На колико се начина могу измешати по три *7* боја: црвена, поморанџаста, жута, зелена, плава, индиго и љубичаста?

41. На колико се начина може производ $abcde$ раставити на два производа тако да у једном буде *2* а у другом *3* чинитеља?

42. На колико се начина може раставити а) производ $abcd$ у производе по два чинитеља, b) производ $abcdef$ у производе по три чинитеља?

43. На колико се начина могу *12* карата поделити на два лица тако, да једно добије *3* а друго *9* карата?

44. На колико се начина могу *12* карата поделити на три лица тако, да прво добије *3* карте, друго *4* а треће *5* карата?

45. На колико се начина могу *12* карата поделити на три лица тако, да свако добије по *4* карте?

46. На колико се начина могу *32* карте подједнако (по *8*) поделити на четири играча?

47. Колико елемената треба узети, да би се из њих склопљен број терна без понављања имао ка броју терна с понављањем као *7:15*?

48. Колико се троуглова може добити из *10* правих, које се међу собом секу?

49. Један одред од *14* војника чува стражу на *3* места (на сваком по *1* војник). На колико се начина може то извршити и докле ће овај одред остати на стражи кад треба извршити све ове начине и кад смена бива свака *2* часа?

50. Кад у једном разреду има *8* предмета и *5* разних часова дневно, онда на колико се разних начина могу часови дневно распоређивати?

Варијације (чл. **221—224.**)

51. Начини варијације друге класе без понављања од основака $a\,b\,c\,d\,e$.

52. Од основака $a\,b\,c$ начини варијације друге и треће класе с понављањем.

53. Начини *20* првих варијација *3.* класе с понављањем од основака $a\,b\,c\,d$.

54. Колико има варијација од *10* основака *2*-ге, *3*-ће, *4*-те класе а) без понављања, b) с понављањем?

55. У једном разреду има *32* ученика. На колико начина може заузети прву клупу *6* ученика?

56. Колико има а) троцифрених бројева чије су цифре једна од друге различне; b) исто тако четвороцифрених, па онда c) петоцифрених бројева?

57. Колико се четвороцифрених бројева може написати цифрама *3*, *4*, *5*?

58. Колико се петоцифрених бројева, од којих сваки почиње са *5*, може написати цифрама *1*, *5*, *9*?

59. Колико је различитих хитаца могућно са две коцке?

60. Који различити хици са *3* коцке дају за збир *10*?

61. На колико се начина може са *4* коцке бацити збир *15*?

62. Колико је хитаца могућно са *3* коцке, од којих је једна бела, друга плава а трећа црвена, кад се узме, да су хици, с једнаким окцима а разним бојама, различити.

63. Оптички телеграф има *6* кракова, од којих сваки може заузимати четири различита положаја; колико различитих знакова може дати телеграф?

64. У четири преграде треба распоредити *7* разнобојних куглица тако, да у сваку преграду дође по једна куглица; на колико се начина може то извести?

65. Колико има троцифрених бројева, а колико четвороцифрених?

66. Колики је број свих варијација с понављањем *1.*, *2.*, *3.* и *4.* класе из два елемента: „ · — “?

67. Колико елемената дају *380* варијација друге класе без понављања?

68. Колико елемената треба везати, да би се број њихових варијација *3.* класе без понављања имао ка њихову броју с понављањем као што се има *5:9?*

69. Од колико се елемената број варијација друге класе без понављања има ка њихову броју варијација треће класе као што се има *1:20?*

70. Дата је једна раван и ван ње једна тачка; у равни је обележено *10* тачака, али тако да никоје три не леже на једној прави. Пита се: Колико се равни, потпуно одређених, може поставити кроз тих *11* тачака?

71. У једној равни дато је m тачка а у другој n; колико се троуглова може добити везујући поједине тачке, али да ти троугли не буду само у једној датој равни? $m=3$, $n=4$. Који су то троугли, кад су тачке у једној равни A, B, C, а у другој P, Q, R, S?

---

35. Степени бинома (чл. 225—226.).

Развити степене:

1. $(1+x)^6$. **2.** $(x-1)^7$. **3.** $(1-x)^8$.
4. $(x+a)^4$. **5.** $(x-y)^{10}$. **6.** $(x+3)^5$.
7. $(2-a)^8$. **8.** $(a-2b)^6$. **9.** $(3x+4y)^5$.
10. $(5a-3b)^6$. **11.** $(x^2+2y^2)^4$. **12.** $(3a^2-2b^2)^6$.
13. $(a+b)^n \pm (a-b)^n$. **14.** $(x^2+3)^5-(x^2-3)^5$.

15. Који је *a)* шести члан степена $(5x^2+6a^2)^{10}$;
b) осми члан од $(3a-2)^{12}$?

16. Одреди коефицијенте
a) од x^5 у биному $(5x+3)^9$;
b) од a^{10} у $(3a^2-2b^2)^{10}-(2a^2-3b^2)^{10}$.

17. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^5$. **18.** $\left(\frac{y}{3}-2\right)^6$. **19.** $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^5$.

20. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$. **21.** $\left(\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{4a}\right)^5$. **22.** $\left(\frac{4m}{3n}-\frac{9n}{4m}\right)^6$.

23. $\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^5$. **24.** $\left(\frac{ax^2}{4by^2}+\frac{4b^2y}{a^2x}\right)^4$. **25.** $\left(\frac{3ab^2}{4cy^2}-\frac{2c^2y}{3a^2b}\right)^6$.

26. Одреди *a)* пети члан реда $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)^9$;
b) седми члан у $\left(\frac{5ax^2}{6by^2}+\frac{3by}{5ax}\right)^{10}$.

27. Који је сачинитељ од x^9 у $\left(\frac{3x^2}{5a}-\frac{5a^2}{3x}\right)^{12}$?

28. Који је сачинитељ од x у развијеном биному $\left(x^2-\frac{a^3}{x}\right)^5$?

29. Колико се мора x изабрати да би у развијеном биному $\left(3x-\frac{1}{5x}\right)^8$ вредност четвртога члана била -1?

30. $(1{,}03)^5=\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=\cdots$

31. $(0{,}997)^4=\left(1-\frac{3}{1000}\right)^4=\cdots$

Одреди тако исто са шест децимала:

32. $(1{,}025)^{15}$. **33.** $(1{,}035)^{12}$. **34.** $(1{,}055)^{14}$.
35. $(0{,}98)^{18}$. **36.** $(0{,}996)^{20}$. **37.** $(1{,}999)^{16}$.
38. Разви: $(4+\sqrt{3})^6$. **39.** $(6-5\sqrt{2})^5$.
40. $(2+\sqrt{2})^8-(2-\sqrt{2})^8$.
41. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^5-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^5$.
42. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})^8$. **43.** $\left(2x-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^7$.
44. $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^6$.
45. $(a+\sqrt{a^2-1})^6+(a-\sqrt{a^2-1})^6$.
46. $(1+\sqrt{-1})^6$. **47.** $(3-i)^5$. **48.** $(1+2i)^6$.
49. $(a+bi)^5$. **50.** $(\sqrt{-4}+\sqrt{-2})^6$. **51.** $(2\sqrt{a}-bi)^5$.
52. $(a+bi)^n\pm(a-bi)^n$. **53.** $(1+i\sqrt{5})^6+(1-i\sqrt{5})^6$.
54. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^6$. **55.** $\left(\frac{3+i\sqrt{2}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-i\sqrt{2}}{2}\right)^5$.

56. Коју вредност добива израз $\frac{a^7-(a-x)^7}{b^7-(b-x)^7}$ за $x=0$?

57. Тако исто: $\frac{(a+x)^8-(a+b)^8}{(a-b)^6-(a-x)^6}$ за $x=b$?

58. Тако исто: $\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ за $x=0$?

(Разви по биномном обрасцу и скрати!).

ДОДАТАК

36. Највеће и најмање вредности функције другог степена (чл. 227—231.).

Одреди за дате изразе *а)* највећу или најмању вредност и *b)* ону вредност промењљиве, за коју она наступа:

1. x^2+x+1. **2.** x^2-x+1. **3.** $4x^2-8x+6$.
4. $x^2-8x+12$. **5.** $4x^2-5x+3$. **6.** $-x^2+6x-9$.
7. ax^2-bx+c. **8.** $x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2$.

9. $x^2+(a-b)x-a^2-ab-b^2$. **10.** $\frac{x^2}{x-1}$.

11. $\frac{x^2-9}{2x}$. **12.** $\frac{x^2-5}{x-3}$. **13.** $\frac{x-4}{x^2-7}$.

14. $\frac{x^2+x+1}{x^2}$. **15.** $ax+\frac{b}{x}$. **16.** $x-a+\frac{1}{x-a}$.

17. $\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$. **18.** $x\sqrt{9-x^2}$. **19.** $\frac{x^2-x-4}{x-1}$.

20. $\frac{3x}{x^2+x+1}$. **21.** $\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$. **22.** $\frac{x^2-10x+21}{2x-15}$.

23. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$. **24.** $\frac{x^2+2ax+1}{x^2-2ax+1}$. **25.** $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$.

26. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. **27.** $\frac{x^2-x-1}{x^2+x-1}$. **28.** $\frac{6x^2-4x+3}{x^2-4x+1}$.

29. $\frac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-2}$. **30.** $\frac{x^4}{x^2-1}$. **31.** $x^2\sqrt{a^2-x^2}$.

Примене.

32. Растави број a на два сабирка тако, да њихов производ буде maximum.

33. Растави број a на два чинитеља да њихов збир буде minimum.

34. Подели дату дуж a тако, да збир квадрата начињен из тих делова има најмању вредност.

35. Поделити дуж $AB=20m$ тачком C на два таква дела, да је збир $\overline{AC}^2+3\,\overline{CB}^2$ minimum.

36. Од свију правоуглих троуглова истога обима који има најмању хипотенузу?

37. Од свију правоуглих троуглова исте хипотенузе, који има највећи обим?; исто тако, — највећу површину?

38. Уписати у дати полукруг трапез највећег обима.

39. Дата је основица a једног троугла и збир s обеју других страна. Како се морају те две стране изабрати, да површина троуглова буде maximum?

40. Из једне тачке на хипотенузи правоугла троугла повучене су нормале на катете. Одреди ону тачку на хипотенузи тако, да добивени правоугаоник достигне највећу површину.

41. У дати троугао уписати највећи правоугаоник тако, да његова два темена буду на једној страни стала два темена на другим двема странама.

42. Описати око квадрата, чија је страна a, најмањи равнокрак троугао тако, да једна страна квадратова буде на основици троугловој.

43. У дати квадрат уписати правоугаоник највеће површине.

44. У дати квадрат уписати равнокрак троугао најмањег обима тако, да врх троуглов буде у једном темену квадратову.

45. Дата су три позитивна броја a, b, c; наћи два таква позитивна броја x и y да вреди једначина $ax+by=c$, и да збир квадрата тих бројева, т. ј. x^2+y^2 буде minimum. Примена за $a=3$, $b=4$, $c=6{,}25$.

46. Два броја x и y таква су да задовољавају једначину $ax+by=c$, у којој су дате количине a, b, c позитивне; тражи се, да се x и y одреде тако, да производ xy буде maximum. Примена за $a=5$, $b=3$, $c=12$.

47. Повући кроз тачку M између кракова датога угла једну праву тако, да добивени троугао има најмању површину.

(Употреби образац: $p=\frac{1}{2}\,ab\,\sin\gamma$).

48. У дати паралелограм уписати највећи паралелограм, чије ће стране бити паралелне с дијагоналама датога паралелограма.

49. У круг полупречника r уписати правоугаоник највеће површине.

50. У дати кружни одсечак (полупречник r, средишна раздаљина c) уписати правоугаоник највећег обима.

51. Око датог полукруга описати правоугли трапез чија ће површина бити minimum.

52. Одредити онај кружни сектор који има а) при датој површини најмањи обим, b) при датом обиму највећу површину.

53. На правој $AB=1m$ обележи се тачка O између A и B, па се на AO конструише равностран $\triangle\ AOE$ и на OB квадрат $OBCD$. Површина петоугаоника $ABCDE$ мења се према положају тачке O на AB; тражи се: 1) да се одреди положај тачке O који одговара максимуму или минимуму петоугаоника $ABCDE$; 2) да се израчуна максимална или минимална површина.

54. И с једне и с друге стране једне праве налази се по једна тачка. Описати један круг тако, да пролази кроз обе дате тачке а да од дате праве одсеца најмању дуж.

55. У кругу полупречника r повучена је тетива нормално на пречник; кад се крајеви тетиве вежу с крајевима пречника добивају се два троугла, којима је тетива заједничка основица; тражи се minimum разлике оба троугла.

56. Дате су две тачке A и O; око тачке O опише се круг полупречником r а из A се повуку тангенте на круг. Претпостављајући да је полупречник променљив одредити: 1) maximum равнокраког троугла, који граде тангенте и додирна тетива; 2) maximum четвороугла од тангената и додирних полупречника.

57. Maximum и minimum обима правоугла троугла који је описан око датога круга?

58. Одреди ону праву купу, која, уз дати обим, осиног пресека, има а) највећи омотач; b) тако исто облицу, која, уз дати омотач, има најмањи осин пресек.

59. Од свију облица које се могу уписати у купу одреди облицу које је омотач *maximum.*

60. Која права облица има *a)* Уз дати обим осиног пресека, највећу површину; *b)* Уз дату површину најмањи осин пресек?

61. Од свих купа исте стране која има највећи омотач?

62. У круг полупречника r повући једну тетиву тако, да кад се она обрће око паралелног јој пречника да опише највећу површину.

63. У дату лопту уписати праву облицу које ће омотач бити највећи.

64. *a)* Од свију правих облица дате површине P, која је таква, да се око ње може описати најмања лопта?

b) У дату лопту уписати праву облицу највеће површине.

65. Од свију правих купа датога обима осина пресека која има највећи омотач?

66. Колики је полупречник оне праве купе, која, уз дату страну a, има највећу запремину?

67. Од свију правих купа дате површине, која има највећу запремину?

68. У дати круг уписати такав равнокрак троугао да запремина, коју он производи обрћући се око своје основице, буде *maximum.*

69. Од свих купа исте запремине, која има најмањи омотач?

70. Правоугли троугао обрће се око своје хипотенузе a; тражи се, да се хипотенузина висина одреди тако, да разлика добивених купа буде *maximum.*

71. У прав конус $(r,\ h)$ уписати прав цилиндар, којега ће омотач бити *maximum.*

72. У прав конус уписати прав цилиндар максималне површине.

73. Око дате лопте описати праву купу тако, да она има *a)* најмању запремину; *b)* најмању површину.

74. Од свију зарубљених купа исте висине, у којих је збир полупречника обеју основа $2a$, одредити ону, која има најмању запремину.

75. Око дате лопте описати праву зарубљену купу, које ће омотач бити *minimum.*

76. Описати око дате лопте праву зарубљену купу најмање запремине.

77. Уписати у дату лопту праву зарубљену купу највеће површине.

78. Уписати у дату лопту правилну четворострану призму тако *a)* да њен омотач буде *maximum*; *b)* да њена површина буде *maximum.*

79. У лопту полупречника r уписати правилну тространу призму, које ће омотач бити *maximum.*

80. Описати око дате лопте правилну шестострану призму највеће површине.

81. Уписати у дату лопту правилну четворострану пирамиду, које ће омотач бити *minimum.*

82. Описати око дате лопте правилну четворострану пирамиду тако *a)* да јој површина буде *minimum*, *b)* да јој запремина буде најмања.

83. *a)* и *b)*. Одреди правилну тространу пирамиду истих особина као у задатку 82.

84. *a)* и *b)*. Одреди правилну шестострану пирамиду особина као у задатку 82.

85. На крацима права угла налазе се две тачке; оне су удаљене од темена за дужину a и $2a$; обе тачке крећу се једновремено с брзином c ка темену. Кад ће њихова раздаљина бити најмања? Где се оне онда налазе?

86. С које се тачке на једном краку права угла може видети дуж a, која је на другом краку тога угла, под највећим углом, кад су крајње тачке дужи удаљене од темена правог угла за b, односно за $a+b$? Нека је α тражени угао, онда $cotg\alpha$ мора бити *minimum*.