МИЛАН С. НЕДИЋ

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА

ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Главни просветни савет, под С. бр. 63 од 26 априла 1933 године, препоручио је, а Господин Министар просвете, својом одлуком С. н. бр. 14789 од 21 јуна 1933 године, одобрио је да се ова књига може употребљавати у средњим школама као уџбеник приватног издања, док се не усвоји уџбеник државног издања.

ТРЕЋЕ ИЗДАЊЕ

БЕОГРАД
ИЗДАВАЧКО И КЊИЖАРСКО ПРЕДУЗЕЋЕ ГЕЦА КОН А. Д.
1 КНЕЗ МИХАИЛОВА, 12

ОД ИСТОГ ПИСЦА

АЛГЕБРА

за пети разред средњих школа, четврто издање

ГЕЦА КОН А. Д. БЕОГРАД

БЕОГРАД
Штампарија и књиговезница „Привредник“ Жив. Д. Благојевића
Кнез Михаилова ул. бр. 3

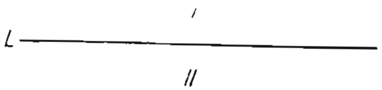
217-936

ГЕОМЕТРИЈА
ЗА ПЕТИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА
од професора М. С. НЕДИЋА

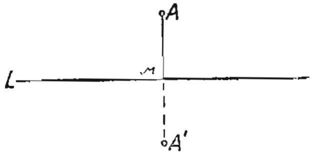
I — СИМЕТРИЧНОСТ И ПОДУДАРНОСТ РАВНИХ ЛИКОВА

ОСОВИНСКА СИМЕТРИЧНОСТ

Симетричне тачке. — Ако у равни повучемо једну праву, она дели раван на два дела (I и II, сл. 1). Из једног дела равни не може се по тој равни прећи у други део, а да се не пресече повучена права *L*. Узмимо сад две тачке: *A* и *A'*. Оне леже једна с једне, друга с друге стране праве *L* тако, да се поклопе ако део *I* обрнемо око праве *L* за два права угла (сл. 2). Тада кажемо да су тачке *A* и *A'* *симетричне* према правој *L*. Права *L* је њихова *осовина симетрије*. При завршеном обртању све тачке са осовине *L* поклапају се са својим првобитним положајем.

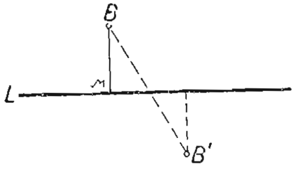


Сл. 1.

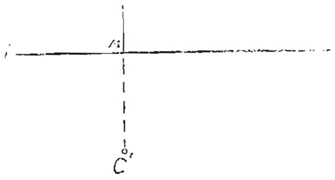


Сл. 2.

Да ли тачке *B* и *B'* леже симетрично према *L* на слици 3? Како спојница датих тачака треба да лежи према осовини *L*, па да оне буду симетричне? Да ли тачке *C* и *C'* леже симетрично према *L* на слици 4? Зашто? Какве треба да су међу собом дужи *MC* и *MC'* па да *C C'* буду симетричне према *L*?



Сл. 3.

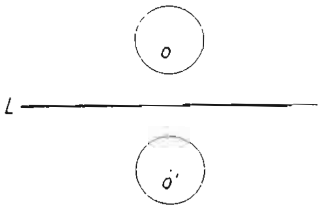


Сл. 4.

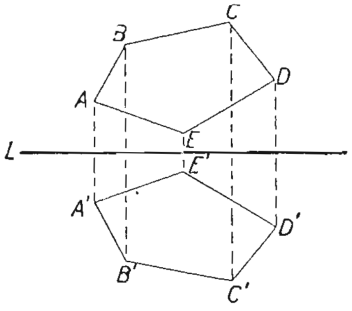
Две тачке *M* и *M'* су с разних страна једне праве *L*. Је ли довољно да права *L* преполови њихову спојницу, па да оне буду симетричне према *L*? (сл. 3). А је ли потребно?

Који су *потребни и довољни услови* да две тачке буду симетричне према датој правој?

Слике симетричне према једној осовини. — Две су слике симетричне према некој правој, ако се обртањем за два права угла око те праве могу поклопити (сл. 5).



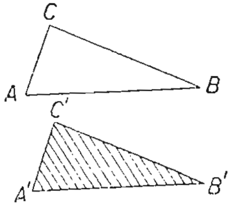
Сл. 5.



Сл 6.

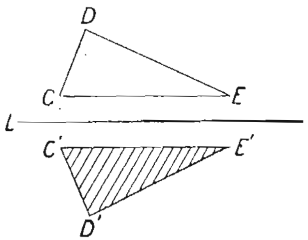
Симетричност полигона. — Две дужи се поклапају ако им се две крајње тачке поклопе. Зато за два полигона можемо рећи: Два полигона су симетрична према једној правој, ако су им сва темена редом симетрична према тој правој (сл. 6).

Подударне слике. — Слике које могу потпунце да се поклопе зову се подударне слике. На слици 7 троуглови ABC и $A'B'C'$ јесу две подударне слике. То пишемо овако: $\triangle ABC \cong A'B'C'$. Ако исечемо троугао $A'B'C'$ па га у равни цртања потискујемо навише, он ће се поклопити са $\triangle A'B'C'$. Такве две слике које се могу довести до поклапања померањем, а без обртања њихових равни, зовемо *управно* или непосредно подударне слике.



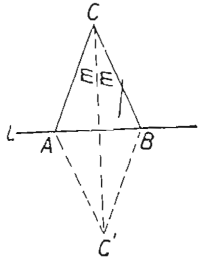
Сл. 7

Троугао $C'D'E'$ са слике 8 не може се поклопити са троуглом CDE ако га исечемо, потискујемо и обрћемо тако, да му осенчана страна остане увек горе, као што је сад. $\triangle C'D'E'$ се може поклопити са $\triangle CDE$, ако раван троугла $C'D'E'$ обрнемо за два права угла око L. Такве две слике које се могу поклопити тек онда, кад се обрне раван једнога од њих, зовемо *обрнуто подударне слике*, или *симетрично-подударне слике*.



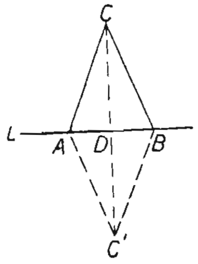
Сл. 8.

Равнокраки троугао. — Нацртајмо један равнокраки троугао ABC и њему симетрични троугао ABC' (сл. 9). Спојмо C са C'. Према ономе што досад знамо мора бити и $CC' \perp L$ (CC' *управно* на L), тј. $CC' \perp AB$. Према томе, CD и $C'D$ јесу висине у датим троуглима, $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ ($\sphericalangle D = \sphericalangle D = 90^0$, $BC = AC$, $CD = CD$). Одатле излази, да је $AD = DB$. (сл. 10).



Сл. 9.

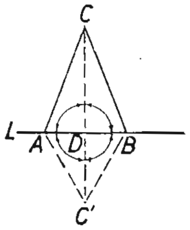
Висина у равнокраком троуглу спаја средину (D) основице (AB) са супротним теменом (C). Дуж која у троуглу спаја средину једне стране са супротним теменом, зове се *тежишна* линија. Висина која пада на основицу равнокраког троугла, претставља и тежишну линију.



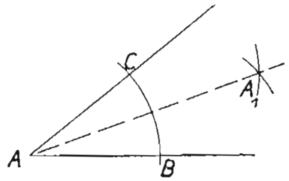
Сл. 10.

Слике $CC'A$ и CCB' су симетричне према CC'. (Тачке C и C' су саме себи симетричне, A и B су симетричне јер је $AD = DB$ и $AB \perp CC'$. Кад обрнемо $CC'A$ око CC' за два права угла, поклопиће се са $CC'B$. Тада ће се поклопити и углови на које висина дели угао C. Значи да је $\sphericalangle m = \sphericalangle m$ (сл. 9). То даље значи да висина полови угао на врху. Права која полови угао јесте симетрала тога угла. (Симетрала се још зове и бисектриса). Висина равнокраког троугла претставља у исто време и симетралу угла на врху. Она у исто време претставља и симетриску осовину целога троугла. То је зато, што се обртањем око висине за два права угла поклапају она два дела на које она дели троугао.

Конструкција угловне симетрале. — Нацртајмо над истом основицом два равнокрака троугла (сл. 11). Нека је D средина дужи AB. Спојимо D са C и C'. Углови код D су сви прави. Значи, CD и $C'D$ леже у једној правој, CC' полови угао C. Видиш ли одатле, како се може конструисати симетрала неког угла? За угао најпре нацртамо један равнокраки троугао (ABC, сл. 12). Над основицом BC цртамо нови равнокраки троугао (BCA_1). Спојимо темена та два троугла (A са A_1). Тада је та спојница (AA_1) симетрала угла A.



Сл. 11.



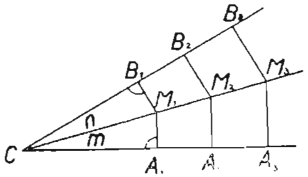
Сл. 12.

Ромб. — Слике $ACBC'$ (сл. 9 и 10) претстављају четвороугао у коме су све стране једнаке, а углови коси. Таква слика зове се ромб. D је средина његових дијагонала. Значи у ромбу се полове дијагонале. Углови код D су прави. Значи, дијагонале стоје управно једна на другој. Обртањем за два права угла може се горњи део довести до поклапања с доњим. (Обртање око AB). Обртањем за два права угла око CC' може се десни део довести до поклапања с левим. Шта можеш онда да кажеш о супротним угловима у ромбу? Да ли дијагонале полове углове у које улазе? Види ли се то из ових обртања и поклапања?

Делтоид. — Слика $ACBC'$ (сл. 11) претставља један делтоид. У њему су две и две суседне стране једнаке. Поклапања ће бити само при обртању око велике дијагонале CC'. Какви су међу собом углови A и B? А углови C и C'? Полове ли се дијагонале?

Геометриско место. — На слици 11 права CC' стоји управно на AB и полови је. Тада је CC' симетрала дужи AB. Свака тачка на симетрали једне дужи подједнако је удаљена од крајњих тачака те дужи *Линија чије све тачке имају једну особину, коју немају друге тачке у равни, зове се*: **геометриско место**. Симетрала дужи AB (сл. 11) је геометриско место тачака подједнако удаљених од двеју датих тачака A и B.

Свака тачка на симетрали угла подједнако је удаљена од оба крака. Узмимо симетралу угла и неколико тачака на њој (сл. 13). Обрнимо CA_1M_1 око CM_1 за два права угла. Пошто је $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, крак CA_1 пашће по краку CB_1. Хоће ли се поклопити A_1 са B_1? Овде је $\sphericalangle CM_1B_1 = CM_1A_1$. После обртања за два права угла крак M_1A_1 мора пасти правцем M_1B_1. Како се та два правца секу у B_1, значи мора A_1 пасти на B_1. Отуда је $M_1B_1 = M_1A_1$. Исто тако је $M_2B_2 = M_2A_2$ и $M_3B_3 = M_3A_3$. Тако ће бити са свима тачкама на симетрали.



Сл. 13.

Симетрала угла је **геометриско место** тачака подједнако удаљених од двеју датих правих. (То значи да на њој леже све тачке које су подједнако удаљене од двеју датих правих.)

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај једну праву и две слике симетричне према њој.

2. — Да ли свака тачка на равни има своју симетричну тачку према свакој правој на тој равни? Докажи.

3. — За дате две тачке нацртај симетриску осовину.

4. — Да ли сваке две тачке у равни морају имати симетриску осовину?

5. — Ако једна тачка лежи на једној правој, где лежи њена симетрична тачка према тој правој? Зашто?

6. — Две тачке M и M' су симетричне према правој L. Тачка M се ближи правој L. Да ли и тачка M' мора да се приближује правој L, ако мора остати симетрична за M? Зашто?

7. — Како и у коме смислу могу да се крећу по правој линији две тачке M и M', симетричне према правој L, па да једнако остану симетричне?

8. — Могу ли две тачке да се крећу по једном кругу, па да једнако буду симетричне према једној сталној правој? Нацртај.

9. — Кад ће два круга бити симетрични према једној правој

10. — Могу ли две тачке да се крећу по два различита круга, па да једнако буду симетричне према једној правој? Нацртај.

11. — Могу ли две тачке да се крећу по обиму два троугла, па да буду једнако симетричне према једној сталној правој?

12. — Могу ли две тачке да се крећу по обиму једнога равнокраког троугла, а да остају једнако симетричне? Где им тада лежи осовина симетрије?

13. — Могу ли две тачке да се крећу по обиму једнога ромба, а да остају симетричне?

14. — Да ли оно што смо рекли за висину равнокраког троугла, важи све и за висину равностраног троугла?

15. — Јеси ли видео гдегод симетрично-подударне слике?

16. — Нацртати произвољан ромб; повући обе дијагонале; показати који су све углови међу собом једнаки и зашто.

17. — Нацртати ромб $ABCD$ чија је страна $AB = 4$ cm., а $\sphericalangle A = 70^\circ$. Повући обе дијагонале и израчунати величину свих углова који се виде на слици.

18. — Јесу ли две подударне слике увек и симетричне?

19. — Могу ли се две подударне слике увек тако поставити, да буду и симетричне? Зашто?

20. — Могу ли квадрат и троугао бити симетрични према некој осовини?

21. — Дате су дијагонале једнога ромба. Конструиши га. Колико *разних* ромбова можеш конструисати с тим дијагоналама?

22. — Дате су дијагонале једнога делтоида. Конструиши га. Колико *разних* делтоида можеш конструисати с тим дијагоналама? Зашто?

23. — За дате две тачке нацртај **геометриско место** тачака подједнако удаљених од њих. Колико таквих геометриских места може нацртати?

24. — Дато је геометриско место тачака подједнако удаљених од двеју тачака. Нацртати те две тачке. Колико парова таквих тачака можеш нацртати?

25. — Дате су две тачке A и B и геометриско место L тачака подједнако удаљених од A и B. Како могу да се крећу A и B, а да се L не креће, па да L увек остане геометриско место тачака подједнако удаљених од A и B?

26. — Дате су две тачке A и B и геометриско место тачака L подједнако удаљених од A и B. Кад су A и B непокретне, како може L да се креће, па да опет остане геометриско место тачака подједнако удаљених од A и B?

27. — Дате су две тачке A и B и геометриско место L тачака подједнако удаљених од A и B. Како могу да се крећу A, B и L, па да L задржи своју особину? (Да остане исто геометриско место).

28. — Нађи **геометриско место** тачака удаљених за 2cm. од дате праве L. (Нађи неколико таквих тачака, па их спој).

29. — Нађи **геометриско место** тачака подједнако удаљених за дужину d од дате праве. (Упамти то геометриско место).

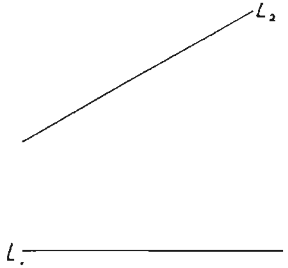
30. — Нађи **геометриско место** тачака подједнако удаљених од двеју датих паралелних правих. (Упамти то геометриско место).

31. — Нађи **геометриско место** темена равнокраког троугла за дату основицу. Сл. 11. — Дата основица AB. Где леже темена свих равнокраких троуглова над том основицом?). — Упамти то геометриско место.

32. — Нађи **геометриско место** тачака подједнако удаљених од темена A и B датога ромба. (сл. 10).

33. — Нађи геометриско место тачака подједнако удаљених од темена C и C_1 ромба са слике 10.

34. — Нађи **геометриско место** тачака подједнако удаљених од двеју дужи које нису паралелне, а не секу се. (Сл. 14).



Сл. 14.

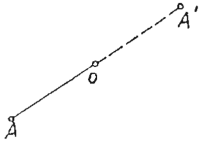
35. — Нађи тачку која је за d удаљена од кракова датога угла. (Види вежбања 29).

36. — Нађи **геометриско место** тачака удаљених за 2 cm. од једне дате тачке C. (Најпре нацртај неколико таквих тачака).

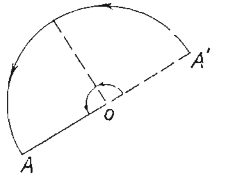
37. — Где је **геометриско место** тачака подједнако удаљених од једне сталне тачке? (Упамти то геометриско место).

ЦЕНТРИЧНА СИМЕТРИЧНОСТ

Центар симетрије. — Узмимо једну тачку O и једну тачку A (сл. 15). Од A повуцимо једну праву кроз O и продужимо је за дужину AO. Ту обележимо тачку A'. Сада кажемо да су тачке A и A' симетричне према тачци O. Тачка O је центар симетрије за тачке A и A'. Она лежи на средини дужи AA'. Тачка A' ће пасти на тачку A, ако је обрнемо око O за два права угла сл. 16). Тачке A и A' су центрично симетричне према тачци O.

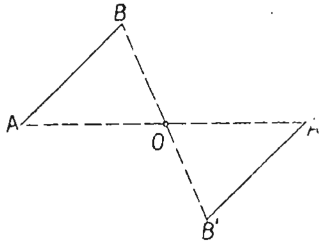


Сл. 15.



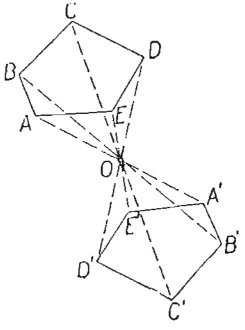
Сл. 16.

Центрична симетричност дужи. — Две дужи $A'B'$ и AB (сл. 17) јесу центрично симетричне, ако су крајње тачке једне дужи центрично симетричне с крајњим тачкама друге дужи.



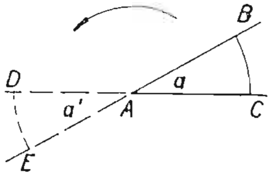
Сл 17.

Центрична симетричност полигона. — Два полигона су симетрични према некоме центру, ако сва темена једнога полигона имају своје симетричне тачке у теменима другога полигона (сл. 18). Полигони $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ су симетрични према тачци O.



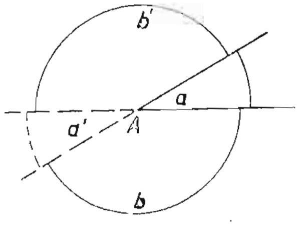
Сл. 18.

Унакрсни углови. — Краке угла a (сл. 19). продужимо преко темена. Добићемо угао a'. Он се зове унакрсни угао угла a. Свакој тачци крака AB можемо наћи симетричну тачку на краку AE. Значи да ће крак AB пасти на крак AE, ако га око A обрнемо за два права угла. Исто је и с крацима AC и AD. То значи да су углови a и a' симетрични према A. То даље значи, да ће се они поклопити, ако угао a обрнемо за два права угла око A. Отуда закључак: унакрсни углови су једнаки.



Сл. 19.

Можемо то доказати и рачунским путем (сл. 20.)



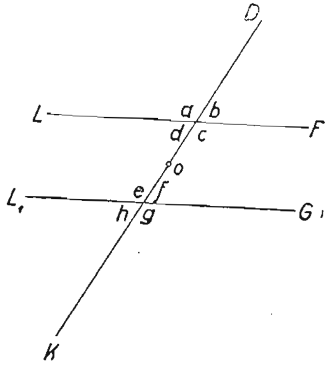
Сл. 20.

$$\begin{array}{l}\sphericalangle a + \sphericalangle b = 180^0\\ \sphericalangle a' + \sphericalangle b = 180^0\\ \hline \sphericalangle a + b = \sphericalangle a' + \sphericalangle b \qquad \sphericalangle a = \sphericalangle a'\end{array}$$

Паралелне пресечене сечицом. — Узмимо две паралелне праве L и L_1 и пресецимо их сечицом D (сл. 21). Добићемо осам углова који се виде на слици.

Из ранијег знамо да ће бити:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle a = \sphericalangle c\\ \sphericalangle b = \sphericalangle d\\ \sphericalangle e = \sphericalangle g\\ \sphericalangle f = \sphericalangle h\end{array}\right\}\text{ унакрсни углови су једнаки}$$



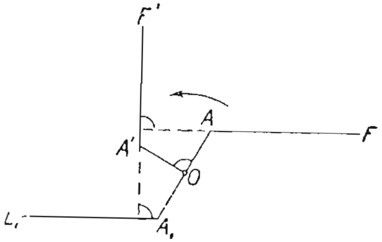
Сл. 21.

Ових осам углова можемо поделити и на ове две групе: спољашње и унутрашње. Спољашњи углови су, a, b, h, g. Унутрашњи су: d, c, e, f.

Два угла који леже с исте стране сечице (оба десно од ње, или оба лево од ње), али тако, да је један спољашњи а други унутрашњи, зову се напоредни углови. То су углови a, и e, d и h, b и f, c и g.

Два угла који леже са супротних страна сечице, али тако, да су оба спољашњи, или оба унутрашњи, зову се наизменични углови. То су углови a и g, b и h, d и f, c и e.

Углови који леже са исте стране сечице, али тако, да су оба спољашњи, или оба унутрашњи, зову се супротни углови. То су a и h, d и e, b и g, c и f.



Сл. 22.

Узмимо сад на средини дужи AA_1 тачку O (сл. 22). Тачка O је центар симетрије за A и A_1. Ако крак AF обрнемо за 90⁰ око O, као што показује стрелица, он ће доћи у положај $A'F'$. Ако га обрнемо још за 90⁰, пашће A' у A_1) а $A'F'$ по A_1L_1. То значи да је OAF симетрично према O са OA_1L_1. Исто тако могли бисмо лако утврдити да је цела слика око A симетрична с целом сликом око A_1 (На сл. 21. горња пресечна тачка је A, а доња A_1). Значи, ако око O обрнемо горњу слику A за 180⁰, она ће пасти на слику A_1. Крак AF пада на крак A_1L_1 крак AD пада на крак A_1K и крак AL на A_1G. Тада ће се поклопити $\sphericalangle b$ са $\sphericalangle h$, $\sphericalangle a$ са $\sphericalangle g$, $\sphericalangle d$ са $\sphericalangle f$ и $\sphericalangle c$ са $\sphericalangle e$.

Види се да су на слици 47 сви оштри углови међу собом једнаки и сви тупи углови међу собом једнаки. Отуда ова правила, кад су две паралелне пресечене сечицом:

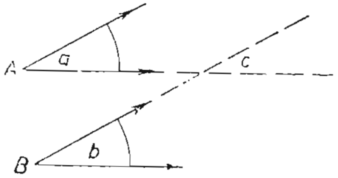
Сви напоредни углови су међу собом једнаки и сви наизменични углови су међу собом једнаки; супротни углови су суплементни.

Доказати: $\sphericalangle c + \sphericalangle f = 180^0$ (сл. 21)

Доказ: $$\begin{array}{r}\sphericalangle c + \sphericalangle b = 180^0\\ \sphericalangle b = \sphericalangle f\\ \hline \sphericalangle c + \sphericalangle f = 180^0\end{array}$$

Углови с паралелним крацима. — I *Оба крака су паралелна у истом смислу.* — Продужимо крак угла B преко пресека с краком угла A. Добијамо угао c (сл. 23). Сад је:

$\sphericalangle a = \sphericalangle c$ (напоредни)
$\sphericalangle b = \sphericalangle c$ (напоредни)
$\sphericalangle b = \sphericalangle a$

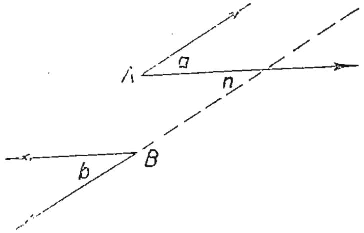


Сл. 23.

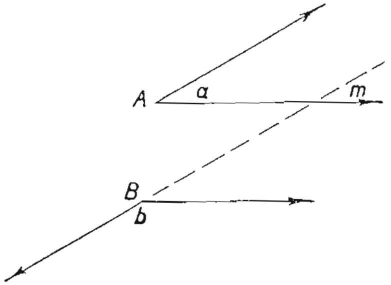
II — *Оба крака паралелена у супротном смислу* (сл. 24). — Овде ће бити:

$$\begin{array}{l}\sphericalangle a = \sphericalangle n \text{ (наизменични)}\\ \sphericalangle b = \sphericalangle n \text{ (напоредни)}\\ \hline \sphericalangle a = \sphericalangle b\end{array}$$

Углови чија су оба крака паралелна у истом или у обрнутом смислу, једнаки су.



Сл. 24.



Сл. 25.

III — *Један крак у истом смислу паралелан, а други у супротном.* — Овде је (сл. 25)

$$\sphericalangle b + \sphericalangle m = 180^0 \text{ (супротни)}$$

$$\sphericalangle m = \sphericalangle a \text{ напоредни}$$

$$\sphericalangle b + \sphericalangle a = 180^0$$

Углови чији је један пар кракова паралелан у једном смислу, а други у другом, — суплементни су.

ВЕЖБАЊА

1. — Обележи две тачке A и B. Нађи тачци A симетричну тачку за центар B. Нађи тачци B симетричну тачку за центар A.

2. — Имају ли две тачке увек центар симетрије? Зашто?

3. — Нацртај једну дуж и ван ње узми једну тачку M. Датој дужи нађи симетричну дуж за центар M.

4. — Нацртај један троугао ABC и узми ван њега једну тачку D. Нацртај симетрични троугао за центар D.

5. — Јесу ли центрично симетричне слике у исто време и подударне? Како? Управно, или обрнуто подударне? Зашто?

6. — Нацртај два троугла симетрична према центру O. Ако се O приближава једноме троуглу, шта мора бити с другим троуглом, ако хоћемо да се не квари симетричност? Зашто?

7. — Докажи ово: „Ако центар симетрије два троугла лежи на страни једнога од њих, мора лежати и на једној страни онога другога троугла“.

8. — Нацртај троугао ABC. Узми једну тачку у троуглу, па нацртај према њој симетрични троугао $A'B'C'$ за дати троугао ABC.

9. — Докажи ово: „Ако два симетрична троугла имају центар симетрије на средини стране једнога од њих, они морају имати два заједничка темена“.

10. — Кад два круга могу бити симетрична? Какви им морају бити полупречници? Зашто?

11. — Нацртај два центрично симетрична круга тако да је центар ван њих. Ако се центар крене и падне на периферију једнога од њих, мора ли пасти и на периферију онога другога? Зашто?

12. — Нацртај круг с центром у O. Узми још једну унутрашњу тачку M ван центра и нацртај симетрични круг према M.

13. — У коме су положају два круга чији се центар симетрије поклапа с центром једнога од њих?

14. — Могу ли се симетрични кругови додиривати споља?

15. — Могу ли се центрично симетрични кругови додиривати изнутра? Зашто?

16. — Је ли пресек дијагонала код паралелограма у исто време и његов центар симетрије? Зашто? Доказ.

17. — Помоћу симетрије доказати да се дијагонале полове у паралелограму.

18. Нацртај ромб. Повуци му обе дијагонале. Покажи на њему све једнаке углове и кажи зашто су једнаки. (Доказ помоћу центричне симетрије).

19. — Уради то исто с правоугаоником.

20. — Уради то исто с квадратом.

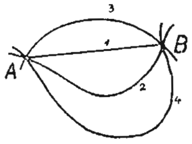
21. — Да ли је пресек дијагонала код делтоида његов центар симетрије?

22. — Докажи ово: „Ако је пресек дијагонала код једнога четвороугла у исто време његов центар симетрије, тај четвороугао мора бити паралелограм“.

II — УГЛОВИ

Права линија. — Права линија има ову особину: *Кроз две тачке може се увек повући једна права и то само једна.*

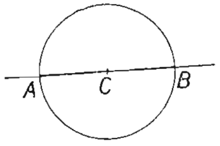
Кроз тачке A и B (сл. 26) пролази свега једна права (1), а безброј кривих линија (2, 3, 4,....).



Сл. 26.

Кад са једне праве линије знамо две тачке, ми потпуно познајемо ту праву линију. Ако са криве линије знамо две тачке, ми не познајемо ту криву линију. Узмимо две тачке A и B. Неко нам каже да му одредимо праву линију која иде кроз њих. Ми ћемо лако нацртати тражену праву лењиром (сл. 27). Неко нам сад тражи да му одредимо круг који иде кроз те две тачке. Ми ћемо описати круг из тачке C која се налази на средини дужи AB (сл. 28) тако, да он пролази кроз A и B. Је ли то тражени круг? Не знамо. Зашто? Зато, што кроз A и B можемо повући безброј кругова. Довољно је да у C дигнемо управну на AB и са те управне да отворимо шестар до A или до B, па да једнако описујемо *нове* кругове (сл. 29).

Сл. 27.



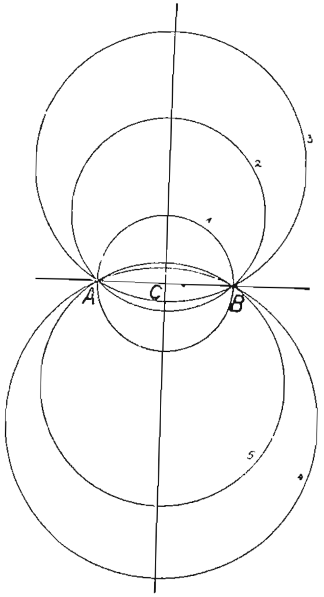
Сл. 28.

Види се ово: круг није познат ако су познате две његове тачке, а права је позната кад су познате њене две тачке.

Зато ми кажемо: „Права линија је она линија, која је одређена двема својим тачкама“.

По правој линији можемо се кретати у два смисла. На пр. на правој L (сл. 30) можемо се кретати у смислу прве стрелице, или у смислу друге. Кретање по правој линији *неограничено је у оба смисла.*

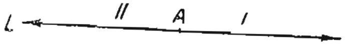
Полуправа. — Кад на једној правој обележимо једну тачку, та тачка подели праву на два дела. (Сл. 31). Она је подели на две *полуправе.* Овде ће једна полуправа бити десно од A, а друга лево од A.



Сл. 29.

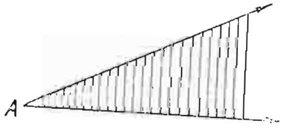
Сл. 30.

Кретање по полуправој неограничено је у једном смислу, а ограничено у другом. На пр. на полуправој I (сл. 31). можемо се неограничено кретати надесно. Ако се крећемо налево, можемо по првој полуправој ићи само до тачке A. Ако продужимо даље налево, нисмо више на првој полуправој, већ на другој. Полуправу обично обележавамо једним писменом које означава њен почетак. На пр. полуправа A (сл. 32).



Сл. 31.

Сл. 32.



Сл. 33.

Угао. — *Угао је разлика у правцу двеју полуправих што полазе из једне тачке.*

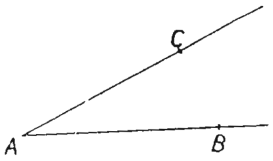
На слици 33 две полуправе полазе из тачке A. Тачка из које полазе обе полуправе зове се углово *теме.* Тачка A је углово *теме.* Обе полуправе зову се *краци* тога игла.

Угао обележавамо на три начина:

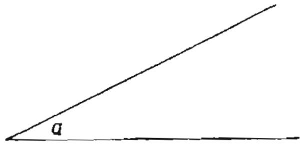
I начин. — Обележимо великим писменом углово теме. На слици 33 наш угао зове се „угао A“ ($\sphericalangle A$).

II начин. — Ставимо на оба крака по једно велико писмо, па читамо „угао BAC“ или „угао CAB“ ($\sphericalangle CAB$) (сл. 34.).

III начин. — Ставимо између кракова, близу темена, једно мало писмо (сл. 35) и читамо: „угао a“ ($\sphericalangle a$).

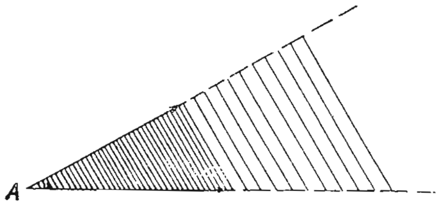


Сл. 34.

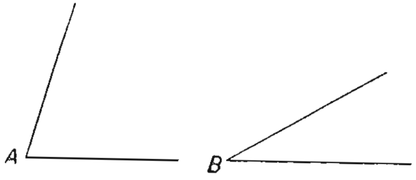


Сл. 35.

Угловни краци могу да се продужују неограничено, као што показују стрелице на крацима са слике 33. Свакоме углу припада једно поље у нашој равни. То поље може неограничено да се продужује (сл. 36). Али величина угла *не* зависи од *дужине* кракова, већ зависи само од *размака* кракова тј. од разлике њихових праваца. На слици 37 већи је угао A од угла B. ($\sphericalangle A > \sphericalangle B$.)



Сл. 36.



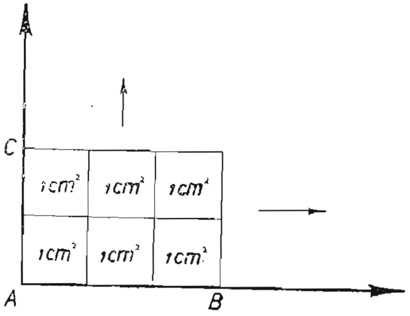
Сл. 37.

Мерење углова. — Углови нису сви једнаки. Да бисмо могли тачно знати колико је један угао већи од другога, морамо их *мерити.* Да бисмо их мерили, морамо имати *јединицу мере.* Можемо ли мерити угао површинским мерама? На пр. квадратним метром? Или квадратним сантиметром? Не можемо, јер се угловно поље простире у бесконачност (сл. 38).

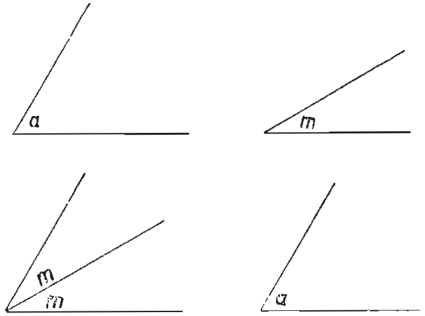
Како онда меримо угао? Меримо га као и све остале количине: *упоређивањем.* На пр. са слике 39 видимо да је угао a два пута већи од угла m. Јер кад саставимо два угла m, добијемо угао велики колико и угао a. Можемо да напишемо:

$$\sphericalangle a = 2 \sphericalangle m$$

Угао и кружни лук. — Узмимо један угао A (сл. 40) и из његова темена опишимо произвољним полупречником један кружни лук.



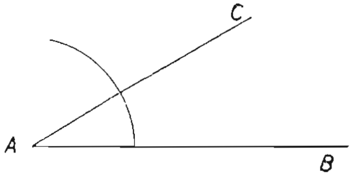
Сл. 38.



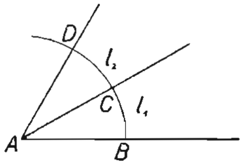
Сл. 39.

Исецимо сад угао A по краку AB, дигнимо га са равни цртања, превијмо га око крака AC и оборимо на раван цртања. Добићемо нов угао CAD (сл. 41). Имамо један велики угао BAD. Можемо да напишемо:

$$\sphericalangle BAD = 2 \sphericalangle BAC$$



Сл. 40.



Сл. 41.

Али при обртању поклопио се лук l_1 са луком l_2. Значи да су они једнаки. Отуда можемо да напишемо:

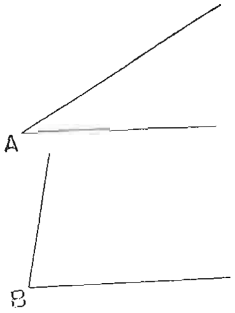
$$\widehat{BD} = 2\,\widehat{BC}$$

Ово значи *да два пута већем углу одговара два пута већи лук.* Ако сад обрнемо угао CAD око AD, видећемо *да три пута већем углу одговара три пута већи лук.*

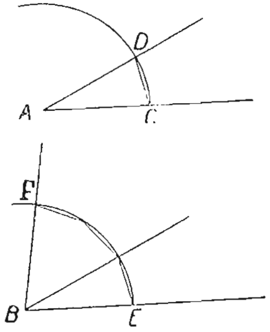
То значи, да се луци понашају исто као и углови: кад лук расте, расте и угао; кад угао расте, расте и лук; кад лук опада, опада и угао; кад угао опада, опада и лук. И то овако: n пута већем луку одговара n пута већи угао; n пута мањем луку одговара n пута мањи угао.

То даље значи, да су лук и угао *управно пропорционални.*

Одатле се види ово: ако умемо да измеримо лук, ми ћемо умети да измеримо и угао. На пр. хоћемо да видимо колико је пута већи угао B (сл. 42) од угла A. Ми ћемо из темена A и B описати кружне лукове истим полупречником. Узећемо тетиву CD (сл. 43) и њоме отсецати мале лукове на луку EF. Видећемо да је $\widehat{EF} = 3\,\widehat{CD}$. Према томе је и угао $B = 3 \sphericalangle A$.

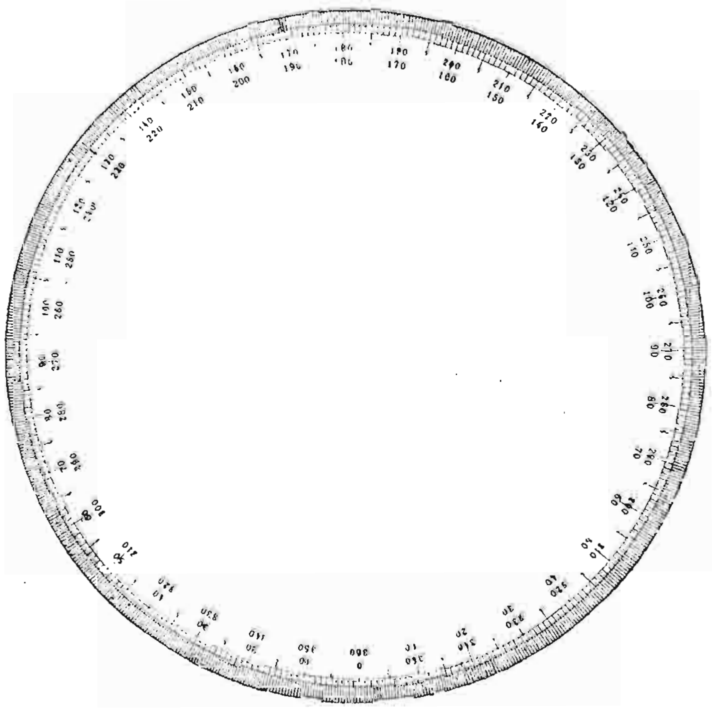


Сл. 42.



Сл. 43.

Мерење лукова. — *I начин.* — *Степени.* — Опишимо целу кружну периферију. Изделимо је на 360 једнаких делова. Сваки

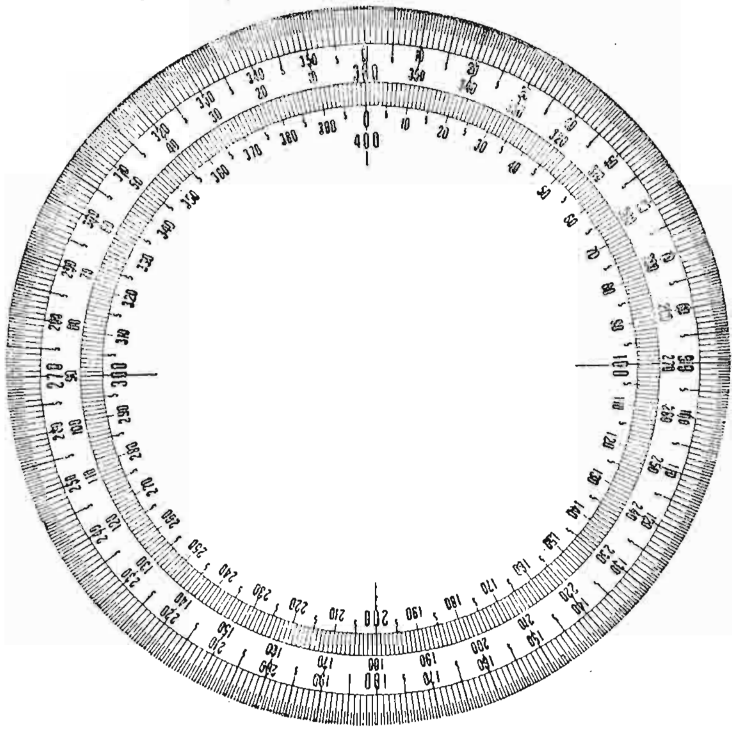


Сл. 44.

такав део зове се степен (сл. 44). Свакоме таквом делу *одговара* један угао од 1^0. Лукове меримо угломером. На њему су 180^0. То си видео у нижој гимназији. Сваки степен има 60 минута, а сваки минут 60 секунди. Отуда ова таблица;

$$1^0 = 60'$$
$$1' = 60''$$

Правоме углу одговара лук од 90^0, равноме углу одговара лук од 180^0, пуном лук од 360^0.



Сл. 45.

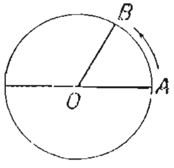
II начин. — *Гради.* — Постоји још једна подела. По њој је кружна периферија издељена на 400 једнаких делова (сл. 45). Сваки такав део зове се *град* и обележава се са 1*g*. Према томе, правоме углу одговара лук од 100*g*, равном углу од 200*g*, пуном од 400*g*. Сваки град има 100 минута, а сваки минут 100 секунди. Отуда ова таблица:

$$1g = 100'$$
$$1' = 100''$$
$$1g = 100' = 10\,000''$$

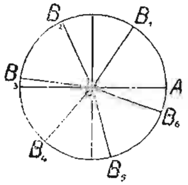
Примери.

23g,47 чита се: „ 23 града и 47 минута“.
217g,06 чита се: „217 гради и 6 минута“.
114g,0037 чита се: 114 гради и 37 секунди“.
100g,0008 чита се: „100 гради и 8 секунди“.
20g, 3247 чита се: „ 20 гради, 32 минута и 47 секунда“.
320g, 4860 чита се: „320 гради, 48 минута и 60 секунди“.

III начин: радијани. — Нацртај круг и на њему један полупречник *OA* (сл. 46). Пободи чиоде по кружном обиму од *A*, у смислу стрелице. Измери концем полупречник *OA*. Дужину конца која ти претставља полупречник обави по кружном обиму око чиода, почињући од *A*. Доћи ћеш до тачке *B*. Сад имаш лук *AB*=*r*. Тај лук је дугачак колико и полупречник. Лук који је раван полупречнику зове се *радијан*. На слици 46 имаш један радијан *AB*. Преноси сад радијан по кружној периферији даље од *B*. Видећеш да се може пренети 6 пута *и нешто више* (сл. 27). Откуда то?



Сл. 46.



Сл. 47.

Обим круга је $2\pi r = 6{,}28r$. Због онога 0,28 радијан се не може тачно 6 пута пренети по кружној периферији. Колико радијана има у кружној периферији? Онолико, колико пута се радијан налази у њој. Радијан је дуг колико и полупречник. Отуда ово:

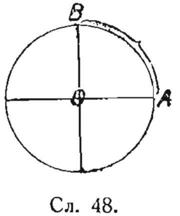
$$\frac{2\pi r}{r} = 2\,\pi$$

Значи, кад меримо периферију радијаном, добијемо број 2π. *Периферија има 2π радијана.* Значи ово: углу од 360 степени одговара лук од 2π радијана. А углу од 180^0? Углу од 90^0? А углу од 45^0?

Да ли свака кружна периферија има 2π радијана? Зависи ли та мера од полупречника којим цртамо круг?

Претварање једних мера у друге. — Узмимо један лук који одговара правоме углу (сл. 48). Правоме углу *AOB* одговара:

лук *AB* од 90 степени,
лук *AB* од 100 гради,
лук *AB* од $\frac{\pi}{2}$ радијана.



Сл. 48.

Цела периферија има 360 степени. Према томе је:

$\frac{90^0}{360^0} = \frac{1}{4}$. Лук *AB* је $\frac{1}{4}$ целе периферије.

Цела периферија има 400 гради. Према томе је:

$$\frac{100g}{400g}=\frac{1}{4.}\text{. Лук } AB \text{ је } \frac{1}{4} \text{ целе периферије.}$$

Цела периферија има 2π радијана. Према томе је:

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}\text{. Лук } AB \text{ је } \frac{1}{4} \text{ кружне периферије.}$$

Добили смо исти резултат сва три пута. Види се ово: какав је однос степена једног лука према 360⁰, исти је однос његовог броја гради према 400; исти је однос његовог броја радијана према 2π радијана. Да бисмо то кратко рекли математички, обележимо степене једног лука са S, његове граде са G, његове радијане са R, па ће бити:

$$\frac{S}{360^0}=\frac{G}{400g}=\frac{R}{2\pi} \text{ то јест } \boxed{\frac{S}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}}$$

Овај образац нам је потребан да помоћу њега претварамо једне мере у друге.

Примери. — I — *Изрази 45⁰ у градима.*

$$\frac{S}{180^0}=\frac{G}{200g} \text{ Одатле је:}$$

$$G=200\cdot\frac{S}{180} \text{ т j. } G=200\cdot\frac{45}{180}$$

$$G = 50g \text{ Дакле: } 45^0{=}50g$$

II — *Изрази 17⁰ 24′ у градима.*

$$\frac{G}{200}=\frac{S}{180}$$

$$G=200\cdot\frac{\left(17+\frac{24}{60}\right)}{180}$$

$$G=10\cdot\frac{17\frac{2}{5}}{9}$$

$$G=\frac{10}{9}\cdot\frac{87}{5}$$

$$G=\frac{2}{9}\cdot 87$$

$$G=\frac{174}{9}$$

$$G = 19{,}33 \text{ гради.}$$

III — *Изрази 45 гради у степенима.*

$$\frac{S}{180}=\frac{G}{200}$$

$$S=\frac{9}{10}\cdot G$$

$$S=\frac{9}{10}\cdot 45$$

$$S=\frac{81}{2}$$

$$S = 40^0\ 30'$$

IV — *Изрази у радијанима угао од 35⁰.*

$$\frac{R}{\pi}=\frac{S}{180}$$

$$R=\frac{S\pi}{180}$$

$$R=\frac{\pi}{180}\cdot S$$

Број π има ову вредност:

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots.$$

$$\frac{\pi}{180} \text{ биће:}$$

$$\frac{\pi}{180}=(0{,}314159265358\ldots): 18=0{,}017453292519\ldots.$$

$$R=0{,}017453292519\ldots. \times 35.$$

Ако хоћемо резултат са два децимала урадићемо ово:

$$\begin{array}{r} 0{,}0175 \\ 35 \\ \hline 875 \\ 525 \\ \hline 0{,}6125 \end{array} \qquad R \simeq 0{,}61 \text{ (приближна вредност).}$$

V — *Изрази у радијанима угао од 48g,25*

$$\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}\text{. Одатле је } R=\frac{\pi}{200}\cdot G$$

$$\pi = 3{,}14159265358\ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079632679\ldots$$

$$\frac{\pi}{200} = 0{,}0157079632679\ldots.$$

$$\frac{\pi}{200}\times 48{,}25 = 0{,}01570796326\ldots. \times 48{,}25$$

$$\begin{array}{r} 48{,}25 \\ 0{,}0157 \\ \hline 3\,3775 \\ 24\,125 \\ 48\,25 \\ \hline 0{,}757\,525 \end{array}$$

R ≈ 0,758 (приближна вредност)

VI — *Изрази у градима угао од 0,45 радијана.*

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$G = \frac{200}{\pi}.\ R = \frac{1}{\pi}.\ 200\ R$$

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098$$

То је приближна вредност тога броја.

$$G = \frac{1}{\pi} \cdot 200\ R$$

$$G = 0{,}3183098 \cdot 200\ R$$

Пошто је у задатку R = 0,45 биће:
200 R = 90. Зато је овде:

$$G = 0{,}3183098 \cdot 90$$

Хоћемо два децимала.

$$\begin{array}{r} 0{,}3183 \\ 90 \\ \hline 28{,}6470 \end{array}$$

G ≈ 28g ,65 (То је приблжна вредност)

VII — *Изрази у стеӣенима и минуӣима угао од 1,2 радијана*

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$S = \frac{1}{\pi} \cdot 180\ R$$

$$S = 0{,}31831 \cdot 180 \cdot 1{,}2$$

$$S = 0{,}31831 \cdot 216$$

$$S = 68{,}75^0$$

$$0{,}75^0 = \frac{3}{4} \cdot 1^0 = \frac{3}{4} \cdot 60' = 45'$$

$$S = 68^0\ 45'$$

ВЕЖБАЊА

1. — Шта је угао?

2. — Да ли би и ово било добро: „Угао је област једне равни коју делимично ограничи полуправа, која се обрће око своје почетне тачке“?

3. — Од чега зависи величина угла?

4. — Шта је то оштар угао?

5. — „ „ „ туп угао?

6. — „ „ „ кос угао?

7. — „ „ „ прав угао?

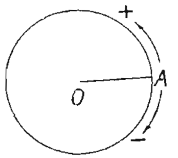
8. — Покажи угао од 380 степени.

9. — „ „ „ 420 „

10. — „ „ „ 560 „

11. — На кружној периферији обележи једну тачку *A*. У супротном смислу сахатне сказаљке пођи писаљком по периферији за 30°. Стани. Обележи ту тачку. Сад опет пођи од тачке *A* у истом смислу за 390 степени. У коју си тачку дошао?

12. — Крећи врх писаљке по кружној периферији за 580°.

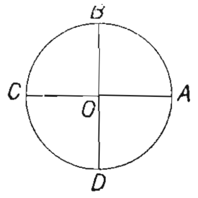


Сл. 49.

13. — Кад се од полазне тачке на кружној периферији крећемо у супротном смислу сахатне казаљке, кажемо да се крећемо у **позитивном** смислу. Кад се крећемо у смислу сахатне казаљке, кажемо да се крећемо у **негативном** смислу (сл. 49). Обележи почетну тачку на кругу као на слици писменом *A*). Обележи сад крајње тачке ових лукова:

+ 10°, + 11°, + 185°, + 400°, + 590°, + 3600°,
— 10°, — 30°, — 45°, — 190°, — 250°, — 340°, — 400°

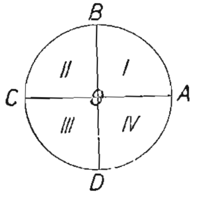
14. — Подели круг на 4 једнака дела (сл. 50). Сада је и кружни обим подељен на 4 једнака дела. Сваки такав део зове се *квадранӣ*. Слика 50 показује 4 квадранта: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$. Квадранти иду оним редом, како је показано на слици 51.



Сл. 50.

Кажи на коме су квадранту крајње тачке ових лукова:

+ 10°, + 25°, + 30°, + 45°, + 60°, + 90°, + 100°, + 125°, + 125°, + 175°, + 180°, + 200°, + 300°, + 400°.



Сл. 51.

15. — Кажи на коме су квадранту крајње тачке ових лукова:

$$+10^{g}, +25^{g}, +50^{g}, +80^{g}, +100^{g}, +150^{g}, +200^{g}, +250^{g}, +300^{g}, +380^{g}, +420^{g}.$$

16. — Исто питање за ове лукове изражене у радијанима:

$$+\pi, +\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{4}, +\frac{3}{2}\pi, +\frac{5}{4}\pi, +3\pi.$$

17. — Исто питање за ове лукове:
-10^{0}, -25^{0}, -40^{0}, $-35^{0}20'$, $-80^{0}30'$, -90^{0}, -100^{0}, -120^{0}, -135^{0}, -180^{0}, -200^{0}, -300^{0}, -450^{0}.

18. — Исто питање за ове лукове:
— 20,^{g} — 60,^{g} — 48,^{g} — 56,^{g} — 99,^{g} — 90,^{g} — 150,^{g} — 180,^{g} — 200,^{g} — 270,^{g} — 300,^{g} — 360,^{g} — 400,^{g} — 500^{g}.

19. — Исто питање за ове лукове:

$$-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{4}\pi, -\pi, -\frac{5}{4}\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, -2\pi, -\frac{5}{2}\pi, -3\pi.$$

20. — На слици 50 изрази у степенима и градима величине лукова, *AB, AC, ABCD* и *ABCDA*.

21. — На слици 50 изрази у радијанима величину лука *ABCDAB*.

22. — Изрази у степенима величину лукова *AD*, *ADC*, *ADCB* са слике 50. (Пази на знаке).

23. — Изрази те лукове у градима.

24. — Изрази те лукове у радијанима.

25. — Колико пута си обишао периферију, ако си се обрнуо за 2π? А за 4π? А за 6π? А за 1π? А за 3π? А за 5π?.

26. — Изрази у градима ове углове: 1^{0}, 2^{0}, 3^{0}, 4^{0}, 5^{0}, 10^{0}, 20^{0}, 30^{0}, 40^{0}, 50^{0}, 60^{0}, 90^{0}, 100^{0}, 120^{0}, 150^{0}, 180^{0}, 200^{0}, 240^{0}.

27. — Изрази у градима ове углове: $10^{0}20'$, $25^{0}42'$, $39^{0}56'$, $60^{0}18'$, $142^{0}55'$, $180^{0}23'$, $181^{0}27'$, $303^{0}40'$, $350^{0}47'$, $359^{0}59'$, $409^{0}40'$.

28. — Изрази у степенима ове углове: 1,^{g} 2,^{g} 3,^{g} 4,^{g} 5,^{g} 6,^{g} 7^{g} 8^{g} 9,^{g} 120,^{g} 150,^{g} 180,^{g} 270,^{g} 360.^{g}

29. — Изрази у степенима и минутима ове углове: 25,^{g}40 37,^{g}28 и 56,^{g}25 80,^{g}70 90,^{g}80 110,^{g}47 120,^{g}56 199,^{g}70 205,^{g}05 300,^{g}01.

30. — Изрази у радијанима ове углове: 1^{0} 2^{0} 3^{0} 4^{0} 5^{0} 6^{0} 7^{0} 8^{0} 9^{0} 10^{0} 30^{0} 45^{0} 60^{0} 90^{0} 120^{0} 135^{0} 180^{0} 225^{0} 270^{0} 315^{0} 360^{0}.

31. — Изрази у радијанима угао од: 1^{g} 2^{g} 3^{g} 4^{g} 5^{g} 10^{g} 20^{g} 40^{g} 50^{g} 100^{g} 150^{g} 250^{g} 302^{g}.

32. — Изрази у радијанима ове углове: 20,^{g}43 48,^{g}48 56,^{g}32 88,^{g}75 96,^{g}42 106,^{g}70 120,^{g}12 140,^{g}14 152,^{g}25 178,^{g}94 199,^{g}98 210,^{g}46.

33. — Изрази у градима ове углове дате у радијанима: 0,4 0,7 0,9 0,98 0,95 1 радијан.

Кад израчунаш колико гради има један радијан, можеш ли онда угломером *тачно* нацртати лук од једног радијана?

34. — Изрази у градима ове углове дате у радијанима: 1,1 1,2 1,3 1,7 1,8 2 радијана. (Види претходно вежбање).

35. — Изрази у градима ове углове дате у радијанима:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{2}{3}\pi \quad \frac{7}{4}\pi \quad \frac{5}{2}\pi \quad 4\pi, 6\pi, 5\pi, 7\pi,$$

36. — Изрази у градима ове углове дате у радијанима: 1,28 2,35 3,14 4,5 6 радијана.

37. — Изрази у степенима и минутима ове углове дате у радијанима: 0,3 0,6 0,7 0,8 0,9 0,98 1 радијан.

Кад израчунаш колико степени и минута има један радијан, можеш ли га тачно нацртати угломером?

38. — Издели целу периферију на радијане. Колико их има? Узми сад полупречник у отвор шестара, па га преноси као тетиву по кругу. Колико пута се он може тачно пренети? Зашто он 6 пута тачно, а радијан не?

39. — Изрази у степенима и минутима ове углове дате у радијанама: 1,4 1,5 2, 3 3,14 3,5 4 4,3 5 5,4 6 6,28.

40. — Изрази у степенима и минутима ове углове дате у радијанима:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi, 4\pi, \frac{4}{2}\pi, 6\pi, 5\pi, 7\pi.$$

41. — Израдити подесну таблицу за претварање степена у граде.

42. — Израдити подесну таблицу за претварање гради у степене.

43. — „ „ „ „ „ гради у радијане.

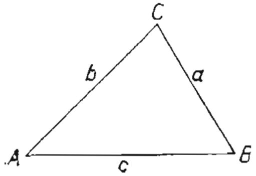
44. — „ „ „ „ „ степена у радијане.

45. — „ „ „ „ „ радијана у степене.

46. — „ „ „ „ „ „ „ граде.

III — ТРОУГАО

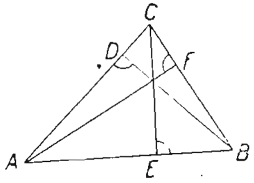
Шта је троугао. — Троугао је слика која се добија кад се дужима споје три тачке које не леже на једној правој. Те су тачке темена тога троугла (A,B,C) (сл. 53). Дужи које спајају темена зову се стране. На нашем троуглу стране су AB AC и BC. Стране обележавамо и малим писменима. Обично свака страна се обележава писменом које има наспрамно теме. (Страна према темену A обележава се малим писменом a).



Сл. 52.

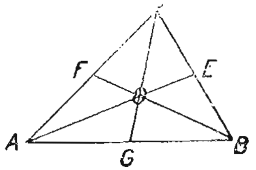
Сваки троугао има шест елемената. То су три стране (a, b и c на слици 52) и три угла (A, B и C на истој слици).

Висина је дуж која из једног темена пада управно на супротну страну. Сваки троугао има три висине. На слици 53 висине су AF, BD и CE.



Сл. 53.

Тежишна линија. — Дуж која спаја теме једног троугла са средином супротне стране, зове се *тежишна линија*. Сваки троугао има три тежишне линије. На слици 54 тежишне линије су: AE, BF и CG.



Сл. 54.

Однос страна у троуглу. — Посматрајмо слику 52. Можемо из A доћи у C страном b. Можемо из A доћи у C преко темена B странама c и a. Који пут је краћи? Најкраћи пут између двеју тачака је права линија. Кад то овде изразимо, биће:

$$a + c > b$$

Истим размишљањем доћи ћемо до закључка да је:

$$a + b > c \text{ и } b + c > a$$

Збир ма којих двеју страна у троуглу већи је од треће стране.

Видели смо да је ово истина:

$$a + c > b$$

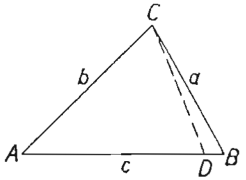
Ако од обеју страна ове неједнакости одбијемо c, добићемо:

$a > b - c$, тј. $b - c < a$

Ово значи:

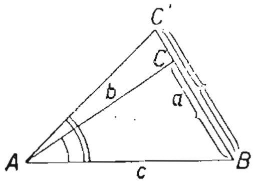
Разлика ма којих двеју страна у троуглу мања је од треће стране.

Ако у троуглу ABC са слике 55 одбијемо страну b од стране c, добићемо дуж DB. Са слике видиш да је $DB < a$. Увери се о томе и за разлику страна b и a; c и a.

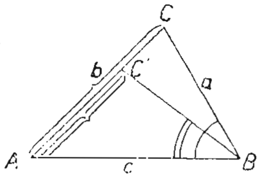


Сл. 55.

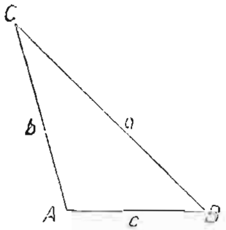
Страна се мења, кад се мења наспрамни угао. — Ако у троуглу AB (сл. 56), пустимо да расте угао A, рашће и наспрамна страна a. Ако пустимо један угао да опада, опадаће и наспрамна страна. На слици 57 угао B је опао; постао је ABC'. Зато му је опала и наспрамна страна. (Од AC постала је AC'). У троуглу према већем углу лежи већа страна, а према мањем углу лежи мања страна. На слици 58 највећи је угао A. По величини за њим долазе углови B, па C. Углови иду овим редом: $\measuredangle A > \measuredangle B > \measuredangle C$. Ако загледаш стране, видећеш да оне иду овим редом: $a > b > c$.



Сл. 56.



Сл 57.



Сл. 58.

Збир свих страна у троуглу зове се троуглов обим. Обим троуглов обично обележимо са $2s$. На нашим сликама биће:

$$2s = a + b + c.$$

Полуобим је полузбир свих страна. Полуобим ће овде бити:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

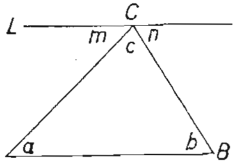
Збир углова у троуглу. — Збир углова у троуглу износи два права угла.

Доказ. — Повуци праву L кроз теме C (сл. 59) тако, да је $L \parallel AB$. (То значи L паралелно са AB). Тада ће бити:

(1) $\measuredangle m + \measuredangle n + \measuredangle c = 180^0$

$\measuredangle m = a$ (наизменични)

$\measuredangle n = b$ (наизменични)

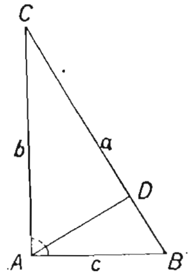


Сл. 59.

Кад се у једнакости (1) смени угао m углом a, а угао n углом b, једнакост се претвори у ову:

$$\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 180^0$$

Правоугли троугао. — Троугао у коме је један угао прав, зове се правоугли троугао (ABC, сл. 60). У њему је највећи угао прав угао. Према њему лежи највећа страна. Највећа страна у правоуглом троуглу зове се хипотенуза. Овде



Сл. 60.

је *хипотенуза* страна $BC = a$. Стране које склапају прав угао, зову се *управне стране*, или само *стране*, или *катете*. Овде је већа управна страна b, а мања страна је c.

Хипотенузина висина је висина која је у правоуглом троуглу спуштена из темена правог угла на хипотенузу. На слици 60 хипотенузина висина је дуж AD.

Косоугли троугли. — Сви троугли који нису правоугли зову се косоугли троугли. Косоугли троугли су на сликама 52—59. Они се деле на оштроугле и тупоугле троугле.

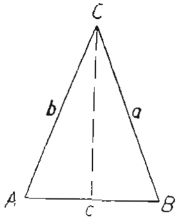
Оштроугли троугао је онај троугао, чији су сви углови оштри (сл. 52).

Тупоугли троугао је онај троугао, који има један туп угао (сл. 58)

Подела троуглова по странама. — Кад посматрамо стране код троуглова, можемо поделити троуглове на ове три врсте:

Разнострани троугли. — То су троугли чије су стране различите (сл. 52—60).

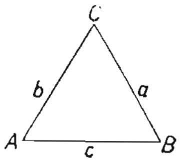
Равнокраки троугли. — То су троугли чије су две стране једнаке. (У троуглу ABC са слике 61 једнаке су стране AC и AB ($AC = AB$). Зато је он равнокрак. Једнаке стране равнокраког троугла зову се *краци*. Овде су краци стране a и b. Постоји однос $a = b$. Према једнаким странама леже једнаки углови. Зато ће бити $\sphericalangle A = \sphericalangle B$.



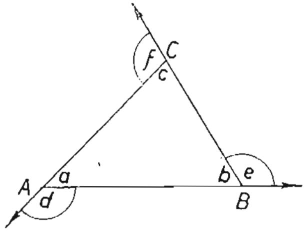
Сл. 61.

Равнострани троугли. — То су троугли чије су све стране међу собом једнаке. (сл. 62.). Овде ће бити: $a = b = c$. Према једнаким странама леже једнаки углови. Зато ће бити: $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$.

Збир спољашних углова код троугла. — Кад се троуглова страна продужи преко темена, добије се спољашни угао. На слици 63 спољашњи су углови d, e и f. *Спољашњи угао једнак је збиру два унутрашња неналегла угла.* — Доказ.



Сл. 62.



Сл. 63.

$$\begin{array}{r} \sphericalangle e + \sphericalangle b = 180^0 \\ - \quad \sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 180^0 \\ \hline \sphericalangle e + \sphericalangle b = \sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c \\ \sphericalangle e = \sphericalangle a + \sphericalangle c \end{array}$$

Збир свих спољашњих углова који се добијају, кад се све троуглове стране продуже у истом смислу, износи четири права угла.

Доказ. — Обележимо најпре један прав угао са D.

$$\begin{array}{l} \sphericalangle a + \sphericalangle d = 2\,D \\ \sphericalangle b + \sphericalangle e = 2\,D \\ \sphericalangle c + \sphericalangle f = 2\,D \\ \hline \underbrace{(\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c)} + (\sphericalangle d + \sphericalangle e + \sphericalangle f) = 6\,D \\ 2D + (\sphericalangle d \sphericalangle e + \sphericalangle f) = 6D \\ (\sphericalangle d \sphericalangle e + f) = 4D \end{array}$$

Одатле је:

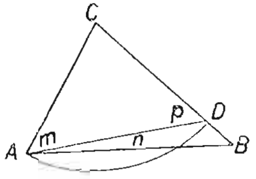
Према већој страни лежи и већи угао у троуглу. — Она што смо видели на сликама 56 и 57 можемо сад и да докажемо.

Доказати да у троуглу према већој страни лежи већи угао.

Доказ. — Нацртајмо троугао ABC (сл. 64) тако, да је $BC > AC$.

Доказаћемо да је угао A већи од угла B.

Из темена C опишимо лук отвором AC све док тај лук не пресече страну BC. Добијемо равнокраки троугао ADC. У њему је угао m једнак с углом p. За троугао ABD угао p је спољашњи угао. Зато мора бити:



Сл 64.

$\sphericalangle p = \sphericalangle n + \sphericalangle B$ Значи:

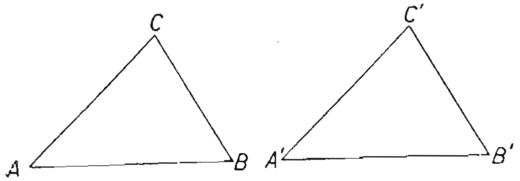
$\sphericalangle p > B.$ Како је $\sphericalangle p = \sphericalangle m$, биће:

$\sphericalangle m > B.$ Онда ће тим пре бити:

$(\sphericalangle m + \sphericalangle n) > B.$ тј. $\sphericalangle A > \sphericalangle B$.

ПОДУДАРНОСТ ТРОУГЛОВА

Подударне слике. — Две слике су подударне, ако се могу потпунце поклопити. Нацртај два троугла какве показује слика 65. Исеци један из равни цртања, па га положи на онај други. Они ће се потпунце поклопити. Тада кажемо да је троугао ABC подударан с троуглом $A'B'C'$. То пишемо овако:

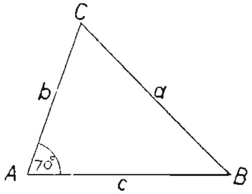


Сл. 65.

$\triangle\ ABC \cong \triangle\ A'B'C'$.

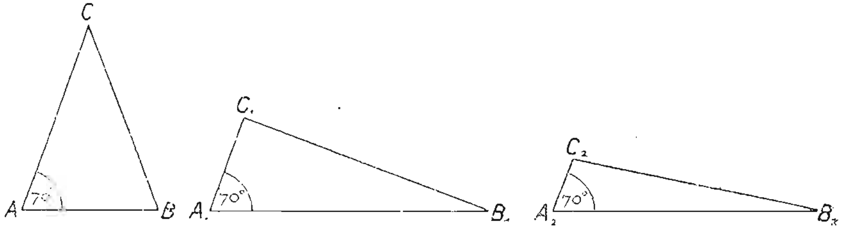
Конструкција троуглова. — 1 — *Нацртај троугао кад је дат један његов угао од 70⁰.*

Нацртали смо један такав троугао (сл. 66) Овде је $\sphericalangle A = 70^0$. Постављен нам је услов да један угао буде 70^0. Ми смо тај услов испунили. Али смо тај услов испунили и на слици 67. Сва три троугла са те слике имају по један угао од 70^0. Колико таквих *разних* троуглова можемо нацртати? Је ли троугао одређен, кад му је дат само један угао? Није.



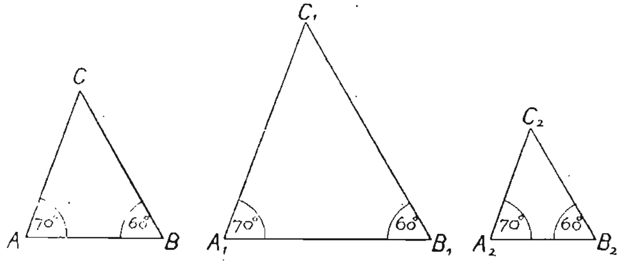
Сл. 66.

II — *Нацртај троугао кад су дата два угла: један од 70^0 и један од 60^0.*



Сл. 67.

Сви троугли са слике 68 испуњавају постављени услов. Колико таквих *разних* троуглова можемо нацртати? Је ли троугао одређен кад су му дата два угла? Није.



Сл. 68.

III — *Нацртај један троугао кад су дата сва три његова угла:* $\sphericalangle A = 70^0$, $B = 60^0$, $C = 50^0$.

Дали се овај задатак разликује од претходног? Не. Ми смо и малопре знали угао C, и ако он није био изрично дат.

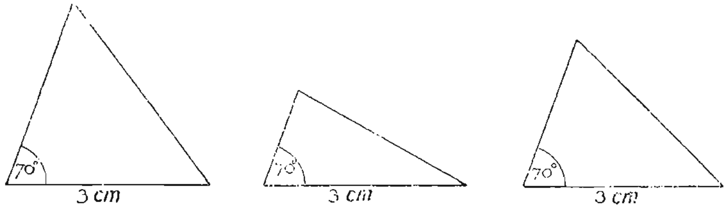
$$\sphericalangle C = 180^0 - 70^0 - 60^0 = 50^0.$$

Кад знамо два угла, знамо и трећи. Значи, *углови нису независни троуглови елементи.* Је ли троугао одређен када су му позната сва три угла? Није. Он није био одређен кад су му била позната

два угла. Зато не може бити одређен ни кад су му позната три угла. (Кад смо знали два, знали смо и трећи. Кад нам неко да два угла у троуглу, па нам да и трећи, није нам дао никакав нов податак).

IV. — *Нацртај троугао чија је једна страна 3 cm, а један угао на њој 70^0.*

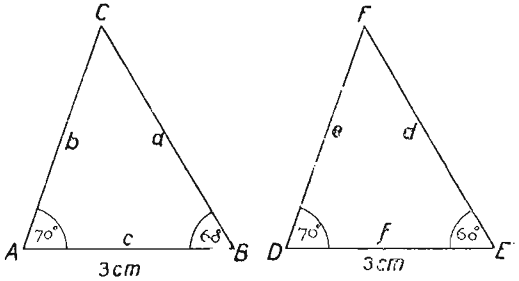
Сви троугли са слике 69 испуњавају постављене услове. Је ли троугао одређен кад су му дати једна страна и један угао на њој? Није.



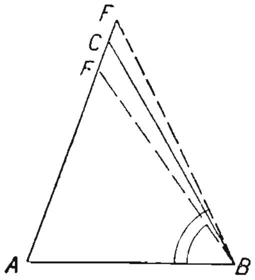
Сл. 69.

Подударност троугла. — V. — *Нацртај троугао кад му је једна страна 3 cm, а углови на њој* $\sphericalangle A = 70^0$ $\sphericalangle B = 60^0$.

Од датих елемемената нацртали смо два троугла. (сл. 70). Они много личе један на други. Изгледа да се могу поклопити. Пробајмо да поставимо $\triangle DEF$ на $\triangle ABC$. Најпре основице. Пошто је $AB = DE = 3cm$, можемо положити DE на AB тако да D падне на A, а E на B. Крак DF пашће по краку AC, а крак EF по краку BC, пошто је $\sphericalangle D = \sphericalangle A$, а $\sphericalangle E = \sphericalangle B$. Хоће ли F пасти на C? Ако би F пало испред или иза C, а по краку b, углови B и E не би могли бити једнаки (сл. 71). Пошто су та два угла једнака F *не може* пасти на AC онако како га приказује слика 71. Ако би F пало на крак BC, али испред или иза C, углови A и D не би



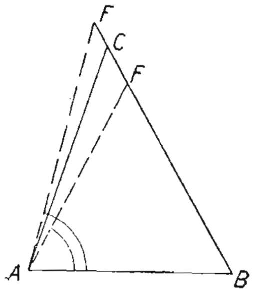
Сл. 70.



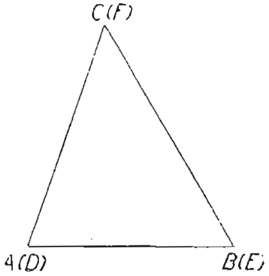
Сл. 71.

могли бити једнаки (сл. 72). Пошто су та два угла једнака, F *не може* пасти по BC онако како га приказује слика 72.

Па где онда мора пасти тачка F? На тачку C. Значи, сва три темена троуглова DEF падају на темена троугла $A B C$ (сл. 73.).



Сл. 72.



Сл. 73.

Је ли троугао одређен кад му знамо једну страну и два угла? Јесте.

Какви су међу собом сви троуглови које можемо конструисати од та три елемента? (1 страна и 2 угла). Сви се могу поклопити. Отуда правило:

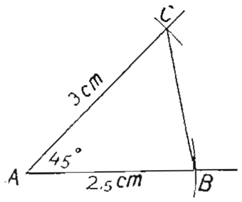
Два троугла су подударна, кад су им једнаки 1 страна и 2 угла.

(Прво правило о подударности троуглова.)

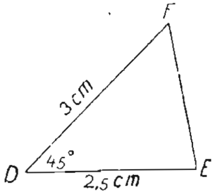
VI — *Нацртај троугао кад су му дате две стране и један угао.*

Овде имамо два случаја:

I случај. — Нацртај троугао чија је једна страна 2,5 cm, друга 3 cm, а њима захваћени угао 45°.



Сл. 74.



Сл. 75.

Нацртаћемо страну AB=2,5 cm. (сл. 74). Код темена A пренећемо дати угао од 45°. По другом краку тога угла отсећи ћемо дату страну од 3 cm. Од истих елемената конструисаћемо нов троугао DEF (сл. 75.). Хоће ли се моћи поклопити та два троугла?

DE ће се поклопити са AB. Угао D поклопиће се са углом A, пошто је $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 45^\circ$. Значи, крак DF пашће по краку AC. А хоће ли F пасти на C? Извесно хоће, пошто је $DF = AC$ $= 3$ cm. Сем тога краци AC и DF полазе из исте тачке $A(D)$ и истим правцем до исте даљине. Значи, ова два троугла су подударна. Отуда ово правило:

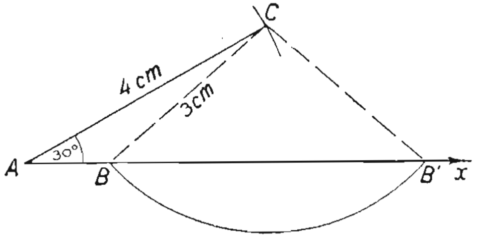
Два троугла су подударна, кад су им једнаке по две стране и њима захваћен угао. (Друго правило о подударности троуглова.)

2 случај. — Дате су две стране и један незахваћен угао. Конструисати троугао.

Овде имамо два потслучаја.

I потслучај: дати угао лежи према *мањој* страни.

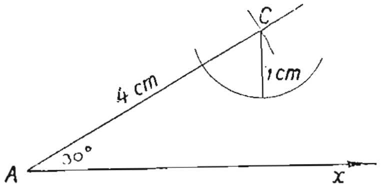
Узмимо стране од 4 cm. и 3 cm. и угао од 30° (сл. 76). По горњем краку преносимо $AC = 4$ cm. Из C отвором шестара од 3 cm, сечемо крак AX. Сечемо га на два места: у B и B'.



Сл. 76.

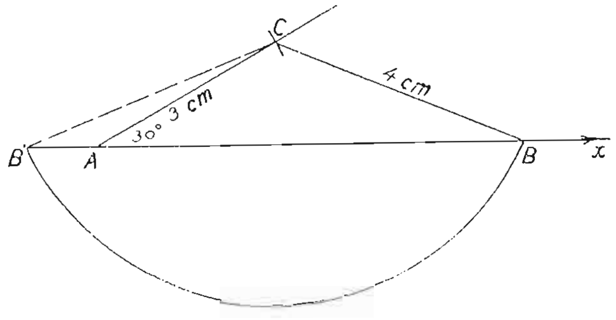
Од датих елемената добили смо два троугла: ABC и $AB'C$. Оба садрже сва три дата елемента. Јесу ли подударни? Нису.

Напомена. — Не мора увек тако да се деси. Може нам се десити да наш лук описан из C не пресече крак AX (сл. 77). Тада уопште нема троугла. (То ће бити случај, ако је дато на пр. $CB = 1$ cm.) А и кад добијемо два троугла, они нису подударни. Са слике 76 је очевидно да троуглови ABC и $AB'C$ нису подударни. За нас је главно ово: с датим елементима *нисмо сигурни* да ћемо добити подударне троугле.



Сл. 77.

2 потслучај. — Дати угао лежи према већој страни. Узмимо стране од 4cm. и 3cm. и угао од 30°. Нацртаћемо угао A од 30°. (сл. 78) и пренети страну $AC = 3$cm. (мању страну). Из њега ћемо

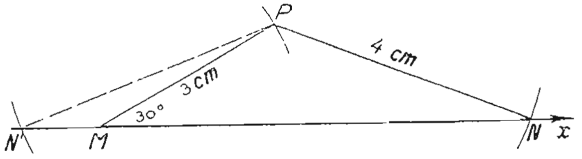


Сл. 78.

отвором шестара од 4 cm описати лук. Он сече крак AX у двема тачкама: у B и B'. Добили смо два троугла: ABC и $AB'C$.

Приви испуњава све услове: има страну $AC = 3$cm, $BC = 4$cm, и угао A од 30^0 према већој страни. То је *тражени троугао.*

Други има страну $AC = 3$cm, $B'C = 4$cm, али према *већој* страни $B'C$ *не* лежи дати угао од 30^0. Према томе то *није* тражени троугао.



Сл. 79.

Ако из истих елемената будемо цртали нову слику (сл. 79.). добићемо опет два троугла. Онај лево (MPN') одбацујемо као и горе. Остаје троугао MNP. Је ли он подударан са ABC?

Положимо MN по AB и MP по AC тако, да M падне на A. Пошто је $AC = MP = 3$cm, пашће P на C. Хоће ли пасти N на B? B лежи у пресеку праве AB и кружног лука описаног из C полупречником од 4cm. Како је P пало на C, а $PN = CB = 4$cm., како је крак MN пао по AB, мора да падне N на B. Значи:

$$\triangle ABC \cong \triangle MPN$$

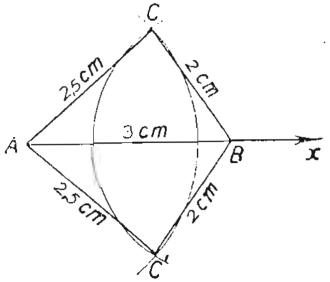
Отуда ово правило:

Два троугла су подударна, кад су им једнаке по две стране и по један угао према већој страни. (Треће правило о подударности троуглова).

VII — *Конструши троугао кад су му дате све три стране.*

Нека је $AB = 3$cm., $BC = 2$ cm, $AC = 2, 5$cm.

Цртајмо најпре $AB = 3$cm. (сл. 80). Из A описујемо лук полупречником $AC = 2{,}5$cm. Из B лук полупречником $BC = 2$ cm. Добијемо троуглове ABC и ABC'. Они су обрнуто подударни, пошто су симетрични.



Сл. 80.

Два троугла су подударна, кад су све три стране једнога троугла једнаке са трима странама другога троугла. (Четврто правило о подударности троуглова.)

ВЕЖБАЊА

1. — Конструиши (нацртај) троугао $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm.

2. — Конструиши (нацртај) троугао $a = 6$ cm., $b = 5$ cm., $c = 8$ cm.

3 — Конструиши (нацртај) троугао $a = 2\frac{1}{2}$ cm., $b = 3\frac{1}{2}$ cm. $c = 4\frac{1}{2}$ cm.

4. — Конструиши (нацртај) троугао $a = 4\frac{1}{2}$ cm., $b = 3$ cm., $c = 6$ cm.

5. — Конструиши (нацртај) троугао $a = 3$ cm., $b = 4$ cm., $c = 5$ cm.

(Ако си тачно цртао, овај троугао мора бити правоугли).

6. — Конструиши троугао $a = 7$ cm., $b = 6$ cm., $c = 3$ cm.

7. — „ „ $a = 5$ cm., $b = 2$ cm., $c = 6$ cm.

8. — Постоји ли троугао чије су стране $a = 2$ cm., $b = 5$ cm., $c = 3$ cm.?

9 — Постоји ли троугао чије су стране $a = 4$ cm., $b = 9$ cm., $c = 3$ cm.?

10. — Кадгод добијеш три стране да конструишеш један троугао, увек најпре провери да ли постоји такав троугио. Како ћеш то проверити?

11. — Израчунај трећи угао у троуглу, кад је $\sphericalangle A = 8^0 14'$, $\sphericalangle B = 108^0 41'$.

12. — Израчунај трећи угао у троуглу, кад је $\sphericalangle B = 18^0 50'$, $\sphericalangle C = 50^0 18'$.

13. — Израчунај трећи угао у троуглу, кад је $\sphericalangle C = 40^0 23'$, $\sphericalangle A = 18^0 20'$.

14. — Израчунај трећи угао у троуглу, кад је $\sphericalangle A = 30^0 17'$, $\sphericalangle B = 83' 45' 19''$.

15. — Израчунај угао на врху равнокраког троугла кад је један угао на основици $19^0 46'$.

16. — Исто за $\sphericalangle A = 70^0 6'$.

17. — Исто за $\sphericalangle A = 76' 32' 34''$.

18 — Израчунај један угао на основици равнокраког троугла, кад је угао на врху $C = 105^0 42'$.

19. — Исто за $\sphericalangle C\ 15^0 52'$.

20. — Исто за $C = 40^0 85'$.

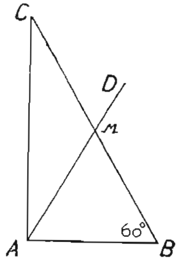
21. — Исто за $C = 84^0 65'$.

22. — Исто за $C = 14^{\circ}18'20''$.

23. — Исто за $C = 107^{\circ}43'28''$.

24. — Какав је то равнокраки троугао, код кога је један угао на основици $A = 45^{\circ}$?

25. — Кад се у правоугломе троуглу спусти хипотенузина висина, добију се у њему два правоугла троугла (*ABD* и *ACD* на слици 60). Доказати да један мали троугао има исте углове као онај други мали; исте као и велики троугао. (Пажљиво изради овај задатак. Доцније ће ти бити потребно да знаш који су углови из малог троугла једнаки с угловима из великог троугла).



Сл. 81.

26. — Кад се у правоуглом троуглу *ABC* (сл. 81) чији је један угао 60° ($\sphericalangle B$) прав угао подели једном правом *AD* на два дела тако, да је $\sphericalangle BAD = 60^{\circ}$, та права *AD* мора проћи кроз средину хипотенузе.

(Какав је тада троугао *ABM*? А троугао *AMC*?)

27. — Ако је у правоуглом троуглу један угао 30°, хипотенуза је два пута већа од мање управне стране.

28. — Ако је у правоуглом троуглу један угао 30°, полупречник описаног круга једнак је с мањом управном страном.

29. — Нацртати троугао кад је a = 7 cm., B = 35°, C = 70°,
30. — „ „ „ „ c = 6, 5cm., A = 40°, B = 60°.
31. — „ „ „ „ b = 8,4 cm., A = 48° C = 50°.
32. — „ „ „ „ a = 4,7 cm., C = 80°, B = 40°.
33. — „ „ „ „ a = 4 cm , b = 5 cm., C = 30°.
34. — „ „ „ „ b = 3,5 cm., c = 44 cm., A = 120°.
35. — „ „ „ „ a = 3,6 cm., b = 4,8 cm., C = 48°.
36. — „ „ „ „ a = 6,2 cm., b = 4,2 cm., B = 30°.
37. — „ „ „ „ a = 5,5 cm., b = 4,7 cm., A = 60°.
38. — „ „ „ „ a = 7,3 cm., b = 9 cm., B = 70^{g},
39. — „ „ „ „ b = 4,5 cm., c = 6 cm., C = 80^{g},
40. — „ „ „ „ a = 5,5cm., c = 3,5cm. A = 120^{g}.
41. a = 5 cm , b = 6 cm., c = 7 cm.
42. a = 2,7 cm., b = 4,7 cm., c = 7,4 cm.
43. a = 5 cm., b = 6 cm., c = 1 cm.
44. a = 8 cm., b = 4 cm., c = 4 cm.

45. — Где је **геометриско место** темена свих троуглова који имају дату основицу *a* и дату висину h_a? (То је висина која пада на страну *a*). — Упамти ово геометриско место. Колико је далеко треће теме од дате основице? Где леже све тачке удаљене за h_a од дате праве *AB*?

46. — Где је **геометриско место** трећег темена *C* једнога троугла чија је основица *AB*, а тежишна линија m_c? (То је линија која спаја средину стране *c* са теменом *C*.) — Упамти то геометриско место.

(Где леже све тачке за *m* удаљене од једне сталне тачке?)

47. — Ако су у једноме троуглу две висине једнаке, он мора бити равнокрак.

48. — Ако троугао има једну симетриску осовину, мора бити равнокрак.

49. — Ако троугао има две симетриске осовине, мора имати и трећу.

50. — Ако троугао има две симетриске осовине, мора бити равностран.

51. — Ако идеш обимом једнога троугла *ABC* од *A* преко *B* и *C* у *A*, за колико степени си се обрнуо?

52. — Доказати да је троугао равнокрак, кад му је симетрала једнога угла у исто време и висина.

53. — Доказати да је троугао равнокрак, ако му је једна тежишна линија у исто време и висина.

54. — Доказати да је троугао равнокрак, ако му је једна висина у исто време и угловна симетрала.

55. — Доказати да је троугао равностран, ако су му све три висине једнаке.

56. — Ако је један спољашњи угао код троугла два пута већа од једног унутрашњег, неналеглог угла, троугао мора бити равнокрак или равностран. Кад ће бити равнокрак, а кад равностран?

57. — У троуглу *ABC* спуштене су из темена *B* и *C* управне *BE* и *CF* на супротне стране. Доказати да је угао *ABE* једнак с углом *ACF*.

58. — Управне из претходног вежбања секу се у *G*. Доказати да је угао *BGC* суплементан с углом *A*.

59. — Шта бива с тачком *G* из претходног вежбања, ако угао *BGC* једнако расте?

60. — Какви су међу собом углови *A* и *BGC* из претходног вежбања, ако је угао *A* прав?

61. — Ако је симетрала једног спољашњег угла паралелна с једном страном, троугао мора имати бар две стране једнаке. (Види вежбање 56).

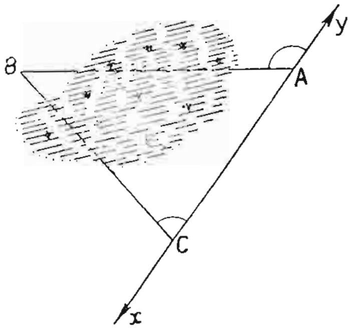
62. — Бисктрисе углова A и B једнога троугла секу се у D. Доказати да је угао $BDC = 90^0 + \frac{1}{2} \sphericalangle A$

63. — Бисектриса једног спољашњег угла у троуглу стоји управно на бисектриси налеглог унутрашњег угла.

64. — У троуглу ABC одредити на AB једну тачку D, а на AC једну тачку E тако да буде $AE = ED = DB$.

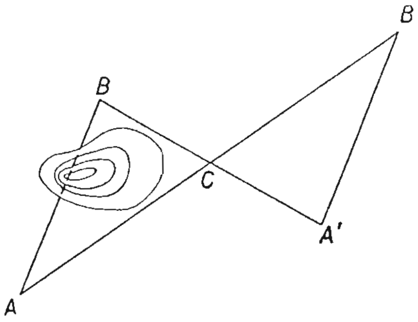
(Какав ће бити троугао ADE? Узми AE произвољно, па конструиши најпре троугао AED.)

65. — Од тачке A не може се правом линијом прићи тачци B (сл. 82) због мочварног земљишта, али се из A види B. Колико је далеко A од B? Како ће се то измерити?



Сл. 82.

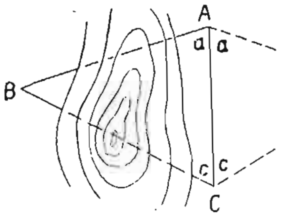
(Повући ћемо кроз A једну праву (AX). Измерићемо угао YAB. Поћи ћемо од A ка X док не дођемо у једну тачку C, из које се види A и B под углом C који је половина угла YAB. Можемо ли сад знати колика је дужина AB?).



Сл. 83.

66. — Између тачака A и B (сл. 83) налази се једно брдо. Како ћемо измерити праволиниско растојање од A до B?

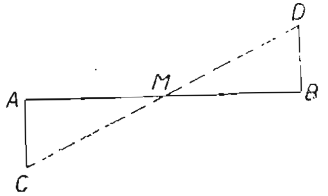
(Нађемо једну тачку C из које се може доћи правом линијом и до A и до B. Нацртамо унакрсни угао углу C и на његовим крацима означимо симетричне тачке A' и B'. Може ли се сад одредити дужина праве AB?).



Сл. 84.

67. — Од тачке A не може се правом линијом никако прићи до тачке B, али се из A види B. Колико је праволинијско растојање AB?.

(Нађемо једну тачку C из које се види и A и B (сл. 84.) Спојимо A и C. Из A видимо B и C под углом a. Из C видимо A и B под углом c. Ми пренесемо оба угла на десну страну дужи AC. Може ли се сад некако одредити дужина AB?).

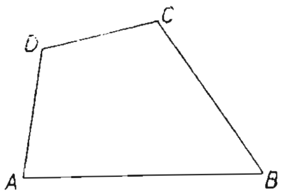


Сл 85.

68. — Хоћемо да преполовимо дуж AB (сл. 85.). Ми то урадимо овако. У крајњим тачкама те праве дигнемо једнаке управне $AC \perp AB$ и $BD \perp AB$ и $AC = BD$. Спојимо C и D правом линијом. Тада је M средина дужи AB. Докажи.

IV — ЧЕТВОРУГАО

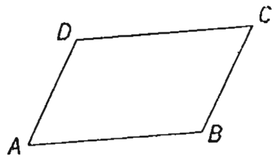
Шта је четвороугао? — Део равне површине ограничен са четири дужи зове се четвороугао (сл. 86).



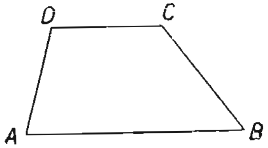
Сл. 86.

Подела четвороуглова. — Четвороугли се деле на две велике групе: на паралелограме и на непаралелограме.

Паралелограми су четвороугли код којих су све супротне стране паралелне (сл. 87). *Непаралелограми* су четвороугли код којих све супротне стране нису паралелне (сл. 86 и 88).



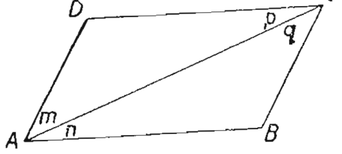
Сл. 87



Сл. 88.

ПАРАЛЕЛОГРАМ

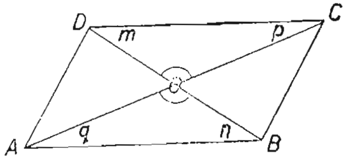
Дијагонала. — Дуж која спаја два супротна темена у паралелограму зове се дијагонала. (Дијагонала је дуж AC на слици 89.). Свака дијагонала у паралелограму дели паралелограм на два подударна троугла. На слици 89 је $\triangle ABC \cong ACD$. (Докажи то. По коме правилу о подударности троуглова? Који су им елементи једнаки?).



Сл. 89.

Особине паралелограма. — Отуда сазнајемо ове особине паралелограма:

1. — У паралелограму су једнаки супротни углови.
2. — У паралелограму су једнаке супротне стране.



Сл. 90

Кад повучемо и другу дијагоналу BD (сл. 90), добијемо четири троугла. Од та четири троугла подударни су неналегли троугли: $\triangle ABO \cong \triangle COD$ и $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (*Докажи*).

Из те подударности сазнајемо ове особине паралелограма:

3. — У паралелограму се дијагонале полове.
4. — Пресек дијагонала (O) је центар симетрије.

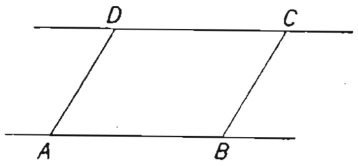
ВЕЖБАЊА

1. — Ако су у једном четвороуглу једнака два суседна угла, да ли тада морају бити сви углови међу собом једнаки?

2. — Ако за један паралелограм знамо да су му само два суседна угла једнака можемо тврдити да су му сви углови међу собом једнаки.

3. — Два суседна угла у паралелограму су суплементни.

4. — Ако је у паралелограму један угао прав, сви су прави.

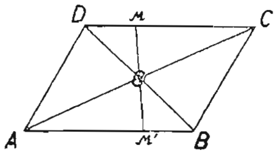


Сл. 91.

5. — Паралелограм не може имати само два права угла.

6. — Паралелне између паралелних једнаке су: ($AB = CD$, сл. 91).

7. — Ако су код паралелограма једнаке две суседне стране, тада су и све стране међу собом једнаке.



Сл. 92.

8. — Из тачке M стране CD паралелограма $ABCD$ (сл. 92) повучена је кроз пресек дијагонала (O) права која сече AB у M'. Доказати да су M и M' симетричне према O'. (Најпре докажи да је $MO = OM'$. Јесу ли подударни троугли OMD и $OM'B$?)

9. — Ако су у једноме четвороуглу све супротне стране једнаке, он је паралелограм. (Гледај слику 90. Ако је $AB = CD$ $BC = AD$, какви су међу собом троугли ABC и ACD? Какви су онда међу собом углови p и q? Кад су та два угла. . .)

10. — Ако су у једноме четвороуглу једнаки сви наспрамни углови, он мора бити паралелограм. (Четвороугао можемо увек раставити на два троугла. Колики је онда збир углова у четвороуглу? Означимо у четвороуглу углове са a, b, c и d. Изрази алгебарски да њихов збир износи четири права угла. Има ли у томе збиру једнаких углова? Изрази и то. Па колики је онда збир суседних углова? А кад је збир суседних углова. . . четвороугао је паралелограм).

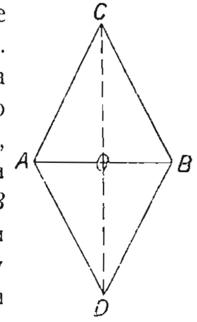
11. — Ако у четвороуглу само за две стране знамо да су супротне, паралелне и једнаке, можемо тврдити да је тај четвороугао паралелограм.

12. — Ако се у једном четвороуглу дијагонале полове, он мора бити паралелограм.

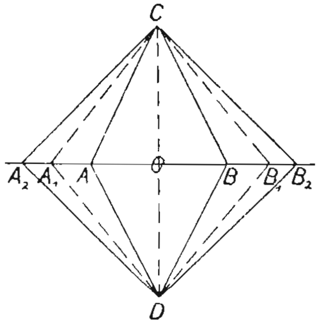
ВРСТЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Врсте паралелограма. — Паралелограма има четири врсте: ромб, квадрат, ромбоид и правоугаоник.

Ромб и квадрат. — Ако једном равнокраком троуглу (сл. 93, троугао ABC) нацртамо према основици (AB) симетричан троугао ABD), добићемо четвороугао који се зове ромб. Његове све стране су међу собом једнаке. (Зашто?) Дијагонале му стоје управно једна на другој. (Зашто?) Ако се темена A и B равномерно одмичу од симетрале CD, дијагонала AB ће расти, ромбови углови A и B ће опадати, а углови C и D расти. (Зашто?) — сл. 94. Кад се дијагонала AB (A_2B_2) изједначи с дијагоналом CD, сви ромбови углови постају једнаки и ромб се претвара у нову слику. Тако добивена нова слика зове се квадрат. Добили смо **квадрат** A_2DB_2C.



Сл. 93.



Сл. 94·

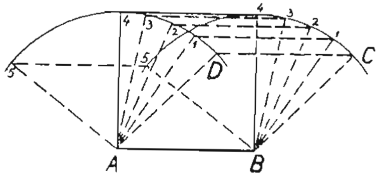
Код квадрата су све стране једнаке сви углови прави, а дијагонале управне једна на другој и једнаке међу собом.

Питања. — 1. — Зашто је угао DB_2C прав? (сл. 94)

2. — Је ли троугао DB_2O симетричан с троуглом OB_2C? Зашто?

3. — Какви су онда међу собом углови ODB_5 и OCB_2?

4. — Ако је сад $A_2B_2 = CD$, је ли и $OB_2 = OC$?
5. — Какав је троугао OB_2C?
6. — Колики је угао OCB_2?
7. — Колики је угао ODB_2?
8. — Колики је угао DB_2C?

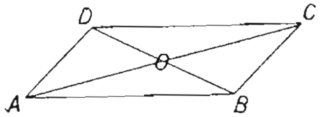


Сл. 95.

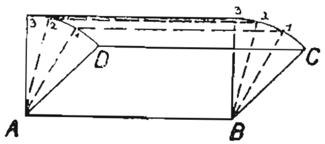
9. — Може ли се рећи овако: „Квадрат је нарочити случај ромба“?

10. — Кад једном ромбу (*ABCD*, сл. 95) стално повећавамо један оштар угао, (A) али тако да не дође до 180⁰, хоће ли један од тих ромбова бити квадрат?

Ромбоид и правоугаоник. — Ромбоид је паралелограм у коме су само супротне стране једнаке и само супротни углови једнаки (сл. 96).



Сл. 96.

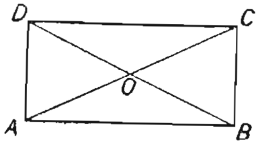


Сл. 97

Ако у њему стално повећавамо један оштар угао (сл. 97), добићемо нов четвороугао, кад тај угао постане прав. Добићемо **правоугаоник** (сл. 98). У њему су сва четири угла права. Дијагонале су му једнаке.

Напомена. — Квадрат и правоугаоник зову се једним именом *правоугли паралелограми.*

Квадрат и ромб зову се једним именом *равнострани паралелограми.*



Сл. 98.

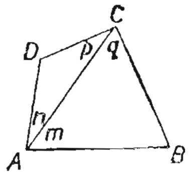
Ромб и ромбоид зову се једним именом *косоугли паралелограми*

В Е Ж Б А Њ А

1. — Збир углова у четвороуглу износи четири права угла. (Збир сва четири угла у четвороуглу *ABCD* — сл. 99 — је $\sphericalangle n + \sphericalangle m + \sphericalangle D + \sphericalangle p + \sphericalangle q + B$. Колики је делимични збир $n + D + p$? Колики је делимични збир $m + q + B$? А целокупан збир?)

2. — Ако су у једноме паралелограму дијагонале једнаке, он мора бити правоугли (сл. 100 и 101).

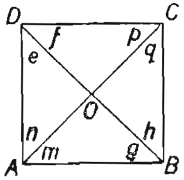
(Је ли троугао *ACD* подударан с троуглом *ABC* на слици 101? Какви су онда углови *B* и *D* међу собом? Је ли троугао *ABC* подударан с троуглом *BCD*? Какви су онда међу собом углови *B* и *C*? Итд.)



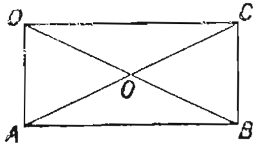
Сл 99.

3. — Ако су у паралелограму дијагонале управне једна на другој, он мора бити равностран.

(Не заборави да се дијагонале полове у сваком паралелограму. Јесу ли онда симетрични троугли *ABC* и *ACD*? (сл. 102). Какве су онда међу собом стране *BC* и *CD*?)

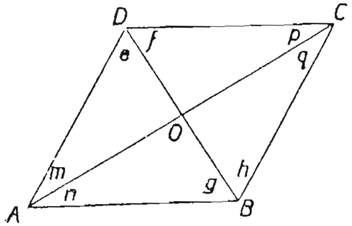


Сл. 100.



Сл. 101.

4. — Ако у паралелограму дијагонале полове углове у које улазе, паралелограм мора бити равностран. (Послужи се сликама 100 и 102).



Сл. 102.

5. — Ако је паралелограм правоугли, дијагонале му морају бити једнаке.

6. — Ако је паралелограм равностран, дијагонале му морају бити управне једна на другој.

7. — Ако је паралелограм равностран, дијагонале морају половити углове у које улазе.

8. — Колико симетриских осовина има квадрат? Доказ.

9. — Колико симетриских осовина има ромб? Доказ.

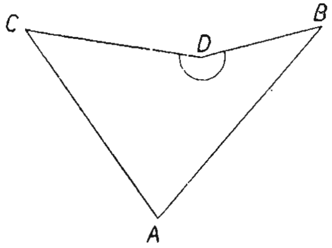
10. — Колико симетриских осовина има правоугаоник? Доказ.

11. — Колико симетриских осовина има ромбоид? Доказ.

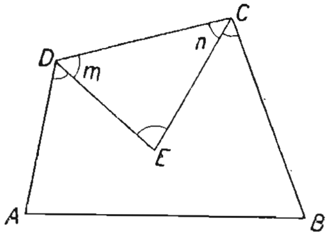
12. — У сваком конвексом четвороуглу бисектрисе два узастопна угла секу се под углом који је раван полузбиру она друга два угла.

(Четвороугао је конвексан (испупчен) ако му је сваки угао мањи од 180⁰. На пр. четвороугао на слици 99. Ако он има и испупчених углова, није конвексан — сл. 103.

На слици 104 повучене су бисектрисе углова *C* и *D*. Колики је збир углова *m*, *n* и *E*? Колики је збир углова у четвороуглу? Напиши и једно и друго)



Сл. 103.



Сл. 104.

13. — У сваком конвексном четвороуглу бисекрисе два наспрамна угла секу се под углом који је раван суплементном углу полуразлике она друга два угла.

14. — Конструисати квадрат, кад му је дата дијагнала.

15. — Кад кроз квадратова темена повучемо паралелне са дијагнолама, добијамо описани четвороугао који је опет квадрат.

16. — Описани квадрат из претходног вежбања има два пута већу површину од уписаног квадрата.

17. — Конструисати ромб, кад је дата једна дијагонала и један угао.

18. — Кад се кроз темена једнога ромба повуку паралелне са дијагоналима, добија се описани четвороугао који је правоугаоник.

19. — Правоугаоник из претходног вежбања има два пута већу површину од ромба око кога је описан.

20. — Конструисати ромб кад је дата једна страна и један угао.

21. — Конструисати ромб кад је дата страна и једна дијагонала.

22. — Конструисати ромб кад су дате обе дијагонале.

23. — Конструисати правоугаоник кад је дата једна страна и дијагонала.

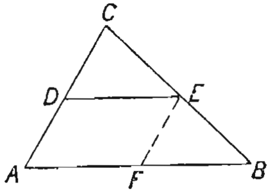
24. — Конструисати ромбоид кад је дата дијагонала и две стране.

25. — Конструисати ромбоид кад је дата дијагонала и два угла.

26. — Конструисати ромбоид кад су дате две стране и један угао.

27. — У троуглу *ABC* (сл. 105) повучена је из средине *D* стране *AC* паралелна са *AB*. Она сече *BC* у *E*. Доказати да је *E* средина стране *BC*.

(Из *E* повуци *EF* ‖ *AC*. Каква је слика *ADEF*? Какве су међу собом дужи *AD*, *DC* и *EF*? Какви су међу собом троугли *CDE* и *FFB*?)



Сл. 105.

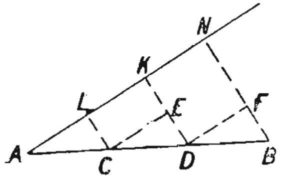
28. — Кад се на једној дужи (*AC*, сл. 105) нацрта произвољан угао код једне њене крајње тачке (*C*), па се на један крак тога угла пренесу два једнака дела (*CE* = *BE*) и споји крајња тачка (*B*) другог подеока са почетном тачком (*A*) узете дужи, а повуче паралелна са њом из крајње тачке (*E*) прве дужи, узета дуж (*AC*) биће том паралелном подељена на два једнака дела

29. — Кад се кроз средине двеју страна једнога троугла повуче једна права, та права је паралелна с трећом страном.

30. — Кад се у троугку споје средине двеју страна, спојница је половина треће стране.

31. — Кад се у паралелограму редом споје средине суседних страна, добије се опет паралелограм.

32. — Из почетне тачке *A* дужи *AB* (сл. 106) повучена је полуправа *AN* под произвољним углом *A*. Од тачке *A* пренети су на полуправу *AN* једнаки произвољни отсечци. Крајња тачка *N* крајњег отсечка *KN* спојена је с крајњом тачком *B* дужи *AB*. Из ових подеоних тачака са полуправе *AN* повучене су паралелне са спојницом *NB*. Те паралелне ће поделити *AB* на једнаке делове.



Сл. 106

(Какви су међу собом троугли *CDE* *DFB*?)

33. — Може ли паралелограм имати три оштра угла?

34. — „ „ „ „ „ тупа „ ?

35. — „ „ „ „ само три угла права, а четврти да буде кос?

36. — У једноме паралелограму један угао је 30°. Колики су остали посебице?

37. — У једноме паралелограму један угао је 70°. Колики су остали посебице?

38. — У једноме паралелограму један угао је два пута већи до свога суседног угла. Одредити све углове посебице и то у градима.

39. — У једноме паралелограму један угао је петина свога суседног угла. Одредити све углове посебице и то у градима.

40. — У једноме паралелограму обим је 16 cm, а једна страна је $^1/_3$ своје суседне стране. Одредити све стране.

41. — Једне двоколице иду правцем по меканом земљишту. Зашто трагови њихових точкова морају бити паралелни?

42. — Може ли дијагонала бити једнака са страном у једноме паралелограму? Зашто?

43. — Ако дијагонала у једноме паралелограму не може да буде једнака са страном, тај паралелограм не може да буде косоугли.

44. — Кад се редом споје средине страна једног правоугаоника, добије се ромб.

45 — Симетрале страна које заклапају прав угао у правоуглом троуглу секу се на средини хипотенузе. Зашто?

46. — Да ли четири тачке у равни одређују један четвороугао? Да ли увек?

47. — Пресек дијагонала је центар симетрије у свакоме паралелограму.

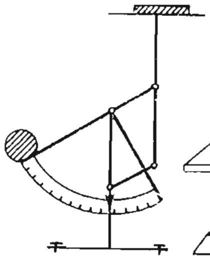
48. — Је ли дијагонала симетриска осовина у свакоме паралелограму?

49. — Кад у једном паралелограму са једне тачке на једној страни повучемо кроз пресек дијагонала дуж до једне тачке на супротној страни, тада је средина те дужи у тачци у којој се секу дијагонале.

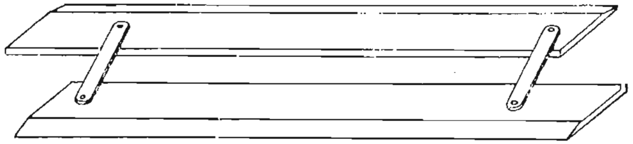
50. — Кад ће два паралелограма бити подударна?

51. — Слика 107 представља справу за мерење писама. Писма се стављају на тас. Зашто тај тас иде право наниже, кад га оптеретимо писмом?

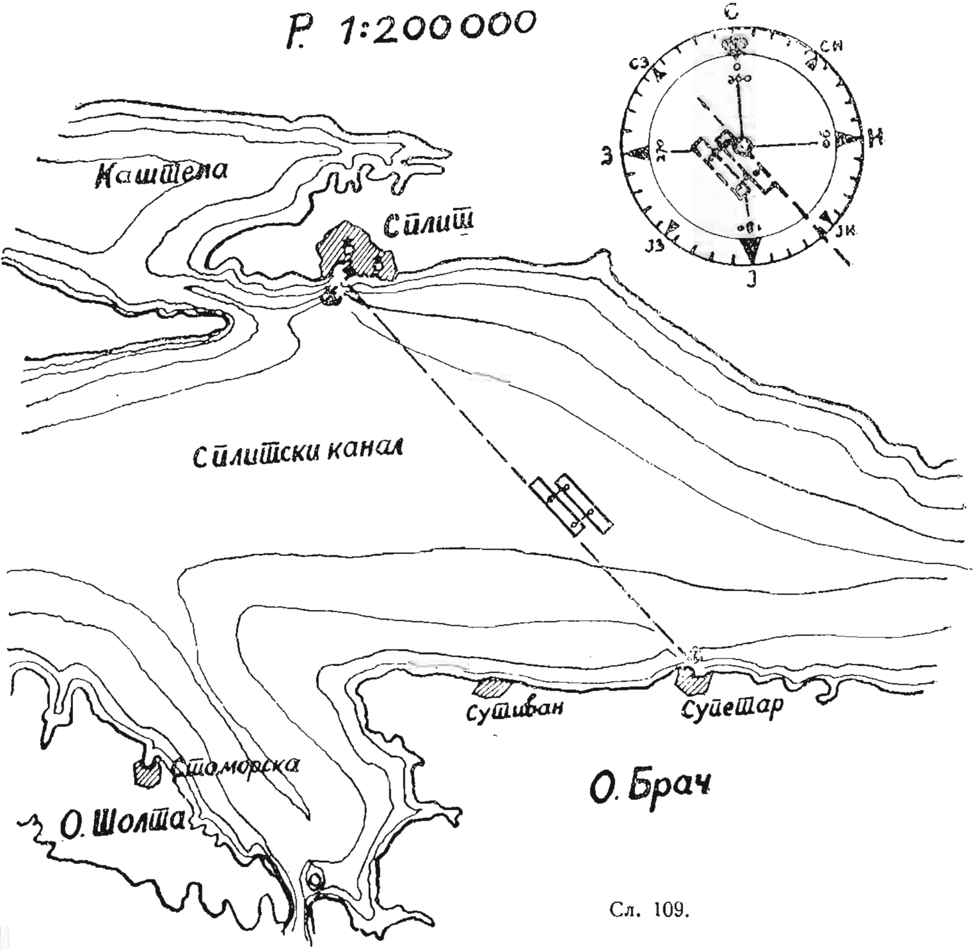
52. — Сл. 108 претставља паралелни лењир. [Начини га сам од картона). Њиме се служе морнари за одређивање правца путовања. Они на карти споје правом линијом место свога поласка (сл. 109) с местом у које су пошли [изрецкана линија на слици]. Доњи крак привуку горњем, горњи одмакну од доњег, док не дођу на круг С. Тај круг им покаже под којим углом треба да плове, ако желе да иду најкраћим путем. Како то да се овај лењир увек паралелно помера тим склапањем и расклапањем?



Сл. 107.



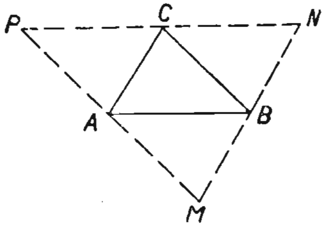
Сл. 108.



Сл. 109.

53. — Кад се повуку бисектрисе сва четири угла у правоугаонику, оне начине један квадрат.

54. — Кад су у четвороуглу две стране паралелне и једнаке, морају и оне друге две стране бити паралелне и једнаке, тј. тај четвороугао је паралелограм.



Сл. 110.

55. — Нацртај један троугао. Кроз свако теме повуци паралелну са супротном страном. Доведи те паралелне до пресека. Добићеш нов троугао. [Троугао *MNP*, сл. 110]. Докажи:

1. — Да су у троуглу *MNP* два пута дуже стране него у троуглу *ABC*. (Зато се овакав троугао и зове троугао с два пут већим странама). Обрати пажњу на паралелограме на овој слици

2. — Да су сва четири троугла који се виде на слици подударни међу собом.

Кад то будеш доказао утврди и ово:

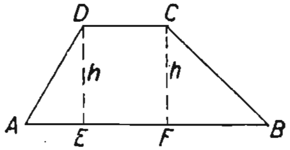
a) Кад спојимо средине двеју страна у троуглу, спојница је паралелна с трећом страном.

b) Спојница средина двеју страна у троуглу половина је треће стране.

c) Кад из средине *A* стране једног троугла (троугао *MNP*) повучемо паралелну с једном страном (*MN*), она прелази кроз средину (*C*) треће стране (*PN*).

ТРАПЕЗ

Шта је трапез. — Трапез је четвороугао у коме су само две стране паралелне (сл. 111). Те две паралелне стране су основице трапезове. *AB* је већа основица, *CD* је мања основица) Непаралелне стране зову су краци. (Краци су *AD* и *BC*.) Растојање основица је висина трапезова (*h* на слици 111).

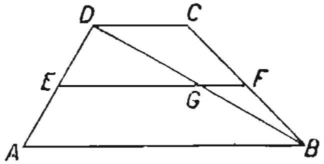


Сл. 111.

Средња основица. — Из средине (*E*) једнога крака (*AD*) повучена је паралелна са основицама (сл. 112). Она полови и други крак.

Доказ. $ED = EA$ и $EF \parallel AB$. тј.$EF \parallel CD$.

Повуцимо дијагоналу *BD*. У троуглу *ABD* из средине (*E*) једне стране (*AD*) повучена је паралелна (*EG*) с једном страном (*AB*). Тада и трећа страна (*BD*) мора бити преполовљена. Дакле: $GB = GD$.

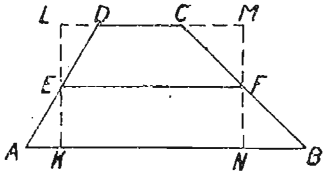


Сл. 112.

У троуглу *BCD* је $GD = GB$ и $GF \parallel CD$. Отуда је $CF = FB$. Дакле права *EF* полови и крак *BC*.

Дуж која спаја средине трепезових кракова зове се средња основица.

Дужина средње основице. — Средња основица у трапезу једнака је полузбиру паралелних страна (сл. 113).



Сл. 113.

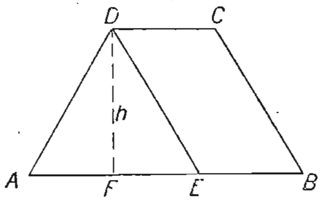
Доказ. — Кроз средине (*E* и *F*) кракова повуцимо управне *KL* и *MN*. Тада је $\triangle AKE \cong \triangle EDL$ и $\triangle BNF \cong \triangle FCM$. Отуда је: $LD = AK$ и $CM = NB$. Пошто је *KNML* правоугаоник, мора бити:

$$EF = \frac{KN + LM}{2} \cdot \text{ То је даље:}$$

$$EF = \frac{(AB - AK - BN) + (CD + AK + BN)}{2} \text{ тј.}$$

$$EF = \frac{BB + CD}{2}$$

Равнокраки трапез. — Кад су у трапезу углови на основици једнаки, морају и краци бити једнаки. Нека је $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (сл. 114).



Сл. 114.

Повуцимо $DE \parallel BC$. Тада мора бити:

$\sphericalangle E = \sphericalangle A$

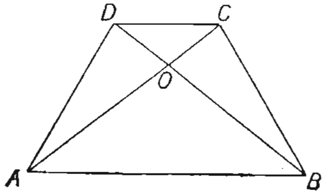
$AD = DE$ Како је *BCDE* паралелограм, мора бити:

$BC = DE$ Отуда је:

$AD = BC$

Трапез код кога су краци једнаки, зове се равнокраки трапез

Дијагонале равнокраког трапеза. — У равнокраком трапезу су дијагонале једнаке.

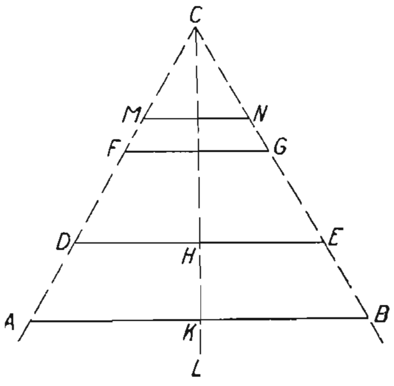


Сл. 115.

Повуцимо обе дијагонале *AC* и *BD* (сл. 115).

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ ($\sphericalangle A = \sphericalangle B, AD = BC$ и $AB = AB$). Отуда је $AC = BD$.

Симетриска осовина ровнокраког трапеза. — Равнокраки трапез је симетрична слика. Да се то види, довољно је запазити ово: Равнокраки трапез се може добити, кад се равнокраки троугао сече правама паралелним са основицом.



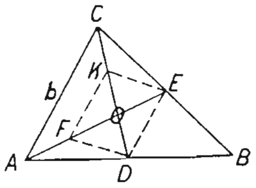
Сл. 116.

На слици 116 имамо равнокраки троугао ABC сечен правама паралелним са основицом AB. Добивени четвороуглови су сви равнокраки трапези $ABDE$, $ABFG$, $ABMN$. Доказати да је права L, која је у средини основице AB управна на њу, симетрала трапеза $ABDE$.

Доказ. — A и B су симетричне тачке према L, пошто је $L \perp AB$ и $AK = KB$. Тачка E са крака BC равнокраког троугла ABC има своју симетричну тачку с леве стране троуглове симетрале L. Та њена симетрична тачка мора лежати на другоме краку AC и на правој $EH \perp L$. То значи у пресеку ED и AC. Па то је тачка D. Значи да је D симетрична тачка тачке E. При обртању за два права угла поклопиће се A са B, H са H, K са K и D са E.

Тежишна линија у троуглу. — 1. — Сваке две тежишне линије у троуглу секу се тако, да је од пресека до средине стране $\frac{1}{3}$ тежишне линије, а од пресека до темена $\frac{2}{3}$ тежишне линије. То ћемо сад доказати.

Нека су D и E средине страна AB и BC (сл. 117). Тежишне линије AE и CD секу се у O. Ставимо тачке F и K тако, да је $AF = FO$ и $CK = KO$. Спојимо дужима тачке E, K, F и D. Добијамо четвороугао $EKFD$. Доказаћемо да је он паралелограм. Обележимо троуглове стране са a, b и c.



Сл. 117.

I D је средина стране AB. E је средина стране BC. Зато је $ED \parallel AC$. (Паралелна јер спаја средине двеју страна у троуглу ABC). Сем тога је и $DE = \frac{b}{2}$

II F је средина дужи AO. K је средина дужи CO. Отуда у троуглу ACO мора бити: $FK \parallel AC$ и $FK = \frac{b}{2}$. То даље значи да је $FK \parallel ED$ и $FK = ED$. Отуда је $EKFD$ паралелограм. У паралелограму се дијагонале полове. Отуда је $DO = KO$. Како смо ми нацртали $KO = KC$, мора бити:

$$DO = OK = KC. \qquad \text{Исто тако и } EO = OF = FA.$$

То значи да је $AO = \frac{2}{3}\,AE$ и $OE = \frac{1}{3}\,AE$

$$CO = \frac{2}{3}\,CD \text{ и } OD = \frac{1}{3}\,CD$$

Ово се може доказати за ма које две тежишне линије.

2. *Све три троуглове тежишне линије секу се у једној тачци.*

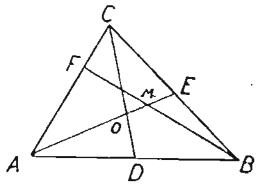
Доказ. — Две тежишне линије сећи ће се увек у једној тачци. Нека се тежишне линије AE и CD (сл. 118) секу у тачци O. Трећа тежишна линија BF нека не пролази кроз O, већ кроз M.

Према ономе што смо досада видели, мора бити:

$AO = \frac{2}{3}\,AE$ (Кад се се секу AE и CD)

$AM = \frac{2}{3}\,AE$ (Кад се секу AE и BF).

Отуда је $AM = AO$.



Сл. 118.

Значи: M мора пасти у O. Дакле, све три троуглове тежишне линије секу се у једној тачци.

В Е Ж Б А Њ А

1. — Конструисати један трапез чији је један угао 35^0. (Је ли одређен?)

2. — Конструисати трапез чија је већа основица $a = 4$ cm, а углови на њој $A = 70^0$, $B = 40^0$. (Је ли одређен?)

3. — Конструисати трапез чија је већа основица $AB = 4$cm, углови на њој $A = 60^0, B = 42^0$, а један крак 2 cm. (Је ли одређен?)

4. — Конструисати трапез чија је мања основица $CD = 4$ cm, а углови на њој $C = 110^0$, $D = 120^0$, а крак $AD = 2$ cm. (Је ли одређен?)

5. — Конструисати трапез чија је већа основица $AB = 5$ cm., углови на њој $A = 70^0$, $B = 50^0$, а крак $BC = 1$ cm. (Је ли одређен?)

6. — Конструисати трапез чија је већа основица $AB = 5$ cm, $\sphericalangle A = 80^0$, а краци $AD = 3$ cm, $BD = 4$ cm. (Је ли одређен?)

Конструисати трапез са овим подацима (сл. 111):

7. $AB = 3$ cm, $A = 75^0$, $B = 50^0$, $AD = 16$ mm.

8. $A = 60^0$, $AD = 18$ mm, $DC = 2$ cm, $B = 73^0$.

9. $A = 68^0$, $B = 56^0$, $BC = 17$ mm, $AB = 25$ mm.
10. $AB = 4$ cm, $A = 35^0$, $B = 45^0$, $AC = 3$ cm.
11. $AB = 35$ mm, $A = 78^0$, $B = 55^0$, $AD = 21$ mm.
12. $CD = 2$ cm, $A = 81^0$, $B = 50^0$, $CA = 26$ mm.
13. $AB = 4$ cm, $A = 68^0$, $B = 60^0$, $h = 25$ mm.
14. $CD = 5$ cm, $BC = 22$mm, $BD = 25$ mm, $A = 73^0$.
15. $B = 83^0$, $BC = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $D = 107^0$.
16. $AB = 35$ mm, $BC = 33$mm, $AC = 37$ mm, $CD = 1$ mm.

Конструисати равнокраки трапез (сл. 114) кад су дати ови подаци:

17. $AB = 4$ cm, $A = 70^0$, $AD = 3$ cm.
18. $CD = 2$ cm, $AB = 3$ cm, $h = 1,5$ cm.
19. $AD = 26,5$ mm, $h = 25$ mm, $\sphericalangle D = 25^0$.
20. $AB = 4$ cm, $BC = 22$ mm, $A = 64^0$.
21. Средња основица $m = 15.$, $AD = 2$ cm., $A = 62^0$.
22. $AB = 55$ mm, $CD = 15$ mm, $AD = 25$ mm.
23. $m = 2,5$ cm, $h = 20$ mm, $AD = 22,5$ mm.
24. $AB = 4$ cm, $A = 70^0$, $DE = 2$ cm.(сл. 113).

25. — Трапез код кога су краци једнаки има једнаке углове на основици.

26. — Трапез код кога су дијагонале једнаке мора бити равнокрак.

27. — Ако трапез има симетриску осовину, мора бити равнокрак.

28. — Ако је један угао у трапезу прав, трапез не може бити равнокрак.

29. — У равнокраком трапезу су суседни углови или једнаки, или суплементни.

30. — У равнокраком трапезу су супротни углови суплементни.

31. — У равнокраком трапезу су једнаки збирови супротних углова.

32. — У равнокраком трапезу израчунај све углове посебице, кад је $A = 70^0 18'$.

33. — Исто за $D = 100^g 9'14''$.

34. — Исто за $C = 112^0 12'3''$.

35. — Нацртај трапез и повуци му средњу основицу. Ако се средња основица не мења, а већа основица расте, шта бива са горњом основицом? Покажи то геометриски и алгебарски.

36. — Ако једна основица код трапеза расте, а друга основица се не мења, шта бива са средњом основицом?

37. — Ако један угао на основици расте, шта бива са средњом основицом у трапезу?

38. — Свака права која пролази кроз пресек дијагонала у паралелограму, дели га на два подударна трапеза. Изузетак?

39. — Из једне тачке D на страни AC троугла ABC повучена је $DE \parallel AB$ и добијен је равнокраки трапез $ABED$. Троугао ABC мора тада бити равнокрак или равностран. Зашто? Кад једно, а кад друго?

40. — У једноме равнокракоме трапезу расте угао на основици. Шта бива са осталим угловима?

41. — У једноме равнокракоме трапезу опада угао $D = 110^0$. Шта бива са осталим угловима?

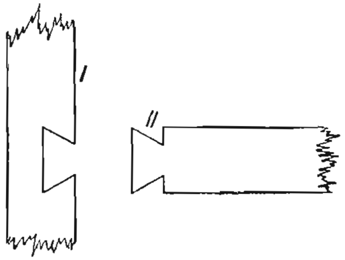
42. — Ако права која спаја средине основица у трапезу стоји управно на њима, трапез мора бити равнокрак.

43. — Права која у трапезу спаја средине кракова, паралелна је са основицама.

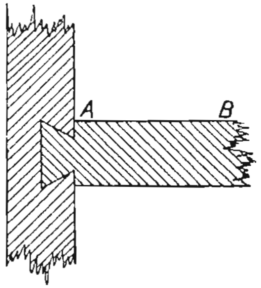
44. — Кад се једна даска углављује у другу, обично се у првој исече један равнокраки трапез (сл. 119), па се друга увуче у прву с бочне стране (сл. 120). Може ли се сад даска II извући из даске I у правцу AB? Зашто?

45. — Кад се редом споје средине страна равностраног троугла, добију се 4 мала подударна равнострана троугла и 3 подударна равнокрака трапеза.

46. — Кад се редом споје средине страна у равнокраком троуглу, добије се опет равнокраки троугао.



Сл. 119,



Сл. 120.

47. — Спојене су редом средине страна троугла ABC и добијен је равностран троугао EDF. Доказати да троугао ABC мора бити равностран.

48. — Тежишне линије равнокраког троугла секу се на висини која пада на основицу.

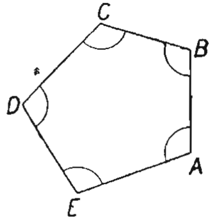
49. — Ако се тежишне линије једног троугла секу на једној висини, троугао је равнокрак или равностран. (Кад једно, а кад друго?)

50. — Кад су једнаке две тежишне линије у троуглу, он мора бити равнокрак или равностран.

V. — ПОЛИГОНИ

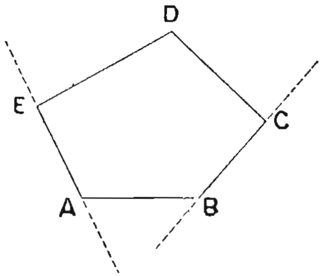
(Многоугаоници)

Шта је полигон. — Полигон је део равне површине ограничен дужима са свих страна (сл. 121). Те су дужи стране полигонове. Пресек двеју узастопних дужи зове се теме полигоново. Углови које међу собом заклапају две узастопне полигонове стране зову се углови полигонови.



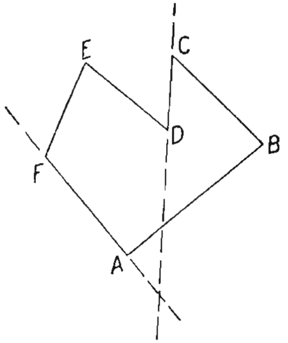
Сл. 121.

Полигон од три стране зове се троугао. Полигон од четири стране зове се четвороугао. Полигон од пет страна зове се петоугаоник. Полигон од n страна зове се ентоугаоник. Сваки ентоугаоник има n темена, n страна и n углова.



Сл. 122.

Конвексни полигон. — Кроз два узастопна темена једнога полигона повучемо једну праву (Права кроз темена A и E. сл. 122). Ако су сва остала темена с исте стране те праве, полигон је конвексан (испупчен). На слици 122 сва три остала темена B,C и D налазе се с десне стране праве AE. Зато је наш полигон испупчен. Ако повучемо праву кроз темена B и C, остала три темена A, E и D су сва с леве стране праве BC. (То је ако гледамо од B ка C. Ако гледамо од C ка B, сва три остала темена опет су с исте стране, само сад с десне.) На слици 123 сва су темена десно од праве AF, али нису сва темена с исте стране праве CD. (Лево су A, F и E; десно је B). Ми тада кажемо да полигон $ABCDEF$ није конвексни полигон.

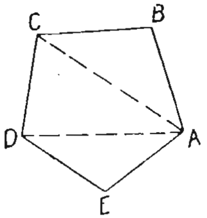


Сл. 123.

Ми ћемо проучавати само конвексне полигоне. Кад кажемо од сада „полигон" мислимо на конвексни полигон.

Дијагонале у полигону. — Кад спојимо два неузастопна темена једног полигона добијамо његову дијагоналу (AC и AD, сл. 124).

Број дијагонала у полигону. — Колико дијагонала има један ентоугаоник? Он има n темена. Из једног темена могу се повући ($n-3$) дијагонале. (Одбијају се три темена: теме из кога повлачимо дијагоналу, и два узастопна темена у која се не могу повући дијагонале. То су темена E и B на слици 124).



Сл. 124.

Из сваког темена повлачимо ($n-3$) дијагонале.

Из свих n темена n пута толико: $n(n-3)$.

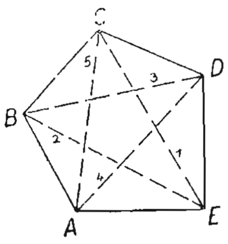
Али дијагонала̂ неће бити $n(n-3)$. Неће зато, што смо сваку дијагоналу вукли два пута. (На пр. на слици 124 из A у C и из C у A. То је једна иста дијагонала, а рачуната је два пута: кад је повлачена из темена A и кад је повлачена из темена C.). Зато ће дијагонала бити два пута мање. Број свих дијагонала у једноме ентоугаонику биће:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

На пр. у петоугаонику биће (сл. 125):

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ дијагонала.}$$

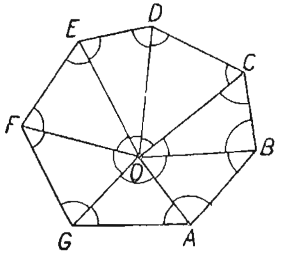
Збир углова у полигону. — Узмимо једну унутрашњу тачку у полигону (тачка O, сл. 126) и спојимо је са свима теменима. Добићемо n троуглова. У свакоме од њих збир углова биће по два права ($2D$). Зато ће збир углова свих тих троуглова бити: $n\,2D$.



Сл. 125.

Је ли то збир углова A, B, C, D, E, F и G у нашем многоугаонику? (сл. 126). Није. Од добивеног збира треба одузети $4D$. То је збир углова око тачке O. Ти углови нису углови многоугаоникови. Зато ће збир свих полигонових углова бити:

$$n.\ 2D - 4D, \text{ тј. } (n-2) \cdot 2D$$

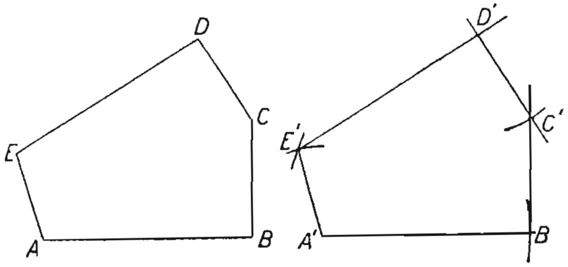


Сл. 126.

Подударност полигона. — Два полигона су подударна кад су им по реду једнаки:

1. $(n-1)$ страна и $(n-2)$ угла, или
2. $(n-2)$ стране и $(n-1)$ угао.

Нацртајмо подударан полигон полигону $ABCDE$ (сл. 127).



Сл. 127.

Хоћемо на та два полигона да испитамо јесу ли тачна она два правила за подударност полигона.

Прво правило.

		Једнаке стране.	Једнаки углови.
Најпре цртамо	$A'B' = AB$	1	—
Затим „	$\sphericalangle B' = \sphericalangle B$	--	1
Сад даље:	$B'C' = BC$	1	—
	$\sphericalangle C' = \sphericalangle C$	—	1
	$C'D' = CD$	1	—
	$\sphericalangle D' = \sphericalangle D$	—	1
	$D'E' = DE$	1	—
Сад спојимо E' са A'.			
	Једнаки елементи:	4 $(n-1)$	3 $(n-2)$

Друго правило

		Једнаке стране.	Једнаки углови.
Најпре цртамо	$A'B' = AB$	1	—
Затим	$\sphericalangle A' = \sphericalangle A$	—	1
Сад даље:	$\sphericalangle B' = B$	—	1
	$B'C' = BC$	1	—
	$A'E' = AE$	1	—
	$\sphericalangle E' = \sphericalangle E$	—	1
	$\sphericalangle C' = C$	—	1
Кад нацртамо последња два угла, добијамо теме D'.			
	Једнаки елементи:	3 $(n-2)$	4 $(n-1)$

ВЕЖБАЊА

1. — Колико дијагонала има 6-тоугаоник? (Провери и цртежем).

2. — Колико дијагонала има 7-моугаоник? (Провери и цртежем).

3. — Колико дијадонала има 8-моугаоник? (Провери и цртежем).

4. — Колико дијагонала има 9-тоугаолик? (Провери и цртежем).

5. — Колико дијагонала има 10-тоугаоник? (Провери и цртежем).

6. — Колико дијагонала има 16-тоугаоник? (Провери и цртежем).

7. — Колико дијагонала има 20-тоугаоник? (Провери и цртежем).

8. — Колико дијагонала има четвороугаоник? (Провери и цртежем).

(Четвороураоник је полигон од четири стране. Према томе требало би да и за њега важи познати образац

$$\frac{n(n-3)}{2} \cdot \text{Важи ли?}$$

9. — Да ли познати образац из претходног вежбања важи и за троугао?

10. — Колики је збир углова у петоугаонику?

11. — „ „ „ „ „ шестоугаонику?

12. — „ „ „ „ „ осмоугаонику?

13. — „ „ „ „ „ десетоугаонику?

14. — „ „ „ „ „ дванаестоугаонику?

15. — „ „ „ „ „ шестнаестоугаонику?

16. — Да ли збир углова у конвексноме полигону расте кад расте број страна? Зашто ли је то?

17. — Је ли тачно ово: „Ако је у једном конвексном полигону већи збир углова него у другом, мора први имати већи број страна него други?“

I $(n-2)\ 2D$ II $[(n-1)-2]\ .\ 2D$ итд.

18. — Да ли образац $(n-2)$. $2D$ важи за четвороугао?

19. — „ „ „ „ „ „ троугао?

20. — Колики је најмањи збир углова у многоугаонику? Колики је тај збир? Колико страна има многоугаоник са тим најмањим збиром углова?

21. — Нацртај један полигон. Нацртај подударни полигон на оба начина.

22. — Код подударности полигона морају бити једнаке (n — 1) страна и (n — 2) угла, или (n — 2) стране и (n — 1) угао. У оба случаја морају бити једнака ($2n$ — 3) елемента. Важи ли то и за троугао?

23. — Код троуглова смо видели да су они подударни кад су им све три стране једнаке. То бисмо могли овако изразити:

Једнаке стране: n. Једнаки углови: 0. Свега једнаких елемената: n Је ли тиме потврђено наше правило које каже: „Два полигона су подударна, кад су им једнака ($2n$ — 3) елемента?“

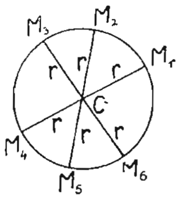
24. — Важи ли правило из претходног вежбања и за четвороуглове?

(Јесу ли четвороугли подударни, кад су им ($2n$ — 3) елемента једнака? Увери се цртањем као на слици 127).

25. — Колико стр. има полигон чији је збир углова 900°?
26. — „ „ „ „ „ „ „ „ 1440°?
27. — „ „ „ „ „ „ „ „ 1200 гради?
28. — „ „ „ „ „ „ „ „ 1400 „
29. — Постоји ли многоугаоник чији је збир углова 1800°?
30. — „ „ „ „ „ „ „ 1000°?
31. — „ „ „ „ „ „ „ 1000 гради?
32. — „ „ „ „ „ „ „ 1500 „

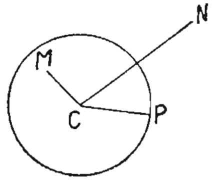
VI — КРУГ

Круг као геометриско место тачака. — Круг је геометриско место тачака у равни подједнако удаљених од једне сталне тачке. Све тачке M_1, M_2.... на кружној линији удаљене су за дужину r од тачке C. Та стална тачка зове се средиште, или центар круга. Растојање од центра до ма које тачке на кружној линији зове се полупречник. Обележавамо га обично са r, или са R. Дуж која спаја две тачке кружне линије, а пролази кроз центар, зове се пречник. (Дуж M_2 M_5 сл. 128). Обично га обележавамо са d.



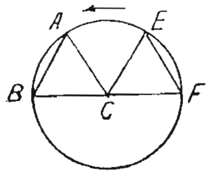
Сл. 128.

Унутрашње и спољашње тачке. — Растојање једне тачке од центра зове се средишно растојање те тачке. Ако је средишно растојање мање од полупречника, тачка је унутрашња тачка за тај круг. (Тачка M, слика 129. Овде је $MC < r$). Ако је средишно растојање једне тачке веће од полупречника, она је спољашња тачка за тај круг. (Тачка N, слика, 129. Овде је $CN > r$). Тачка је на кружној линији, кад јој је средишно растојање једнако полупречнику. (Тачка P, слика 129. Овде је $CP = r$).



Сл. 129.

Луци и тетиве. — Део кружне линије зове се кружни лук, (Лук AB, сл. 130). Дуж која спаја крајње тачке једног лука зове се тетива. (Дуж AB на сл. 130).



Сл. 130.

Једнаки луци имају једнаке тетиве. — Претпоставка: лук AB једнак с луком EF (сл. 130). Ако обрнемо лук EF у смислу стрелице, можемо увек довести до поклапања EC са BC. Тада E пада на B (пошто су обе на кругу). У томе случају лук EF пада по луку AB. Они су једнаки. Ми смо их сад дотерали да полазе оба из исте тачке у истоме смислу. (Оба полазе из тачке B, која је сад и тачка E. Према томе морају да се поклопе. Тада пада E на B, F на A. Због тога морају да се поклопе и тетиве EF и BA. (Пошто им се крајње тачке поклапају).

Кад лук расте до полукруга, расте и његова тетива. (Кад лук опада у полукругу опада и његова тетива). На слици 131 види се да је:

$$\widehat{BN} > \widehat{AN} \text{ и } \overline{BN} > \overline{AN},$$

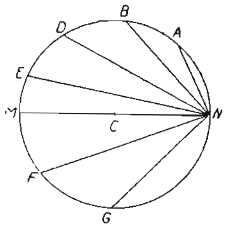
$$\widehat{EN} > \widehat{DN} \text{ и } \overline{EN} > \overline{DN},$$

$$\widehat{NM} > \widehat{EN} \text{ и } \overline{MN} \text{(пречник)} > \overline{EN}$$

Кад пређемо полукруг NAM, бива ово:

$$\widehat{NMF} > \widehat{NAM}, \text{ али } \overline{NF} < \overline{NM},$$

$$\widehat{NBG} > \widehat{NBF}, \text{ али } \overline{NG} < \overline{NF}.$$

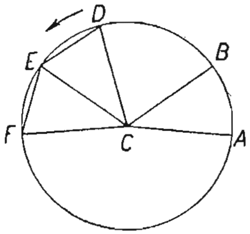


Сл. 131.

Средишни угао и лук. — Угао чије је теме у кружноме средишту зове се средишни угао ($\sphericalangle ACB$, сл. 130).

Лук и средишни угао су управо пропорционални. — Узмимо лук $\widehat{DF} = 2\widehat{DE}$. (Сл. 132). Тада мора бити и $\sphericalangle DCF = 2 \sphericalangle DCE$.

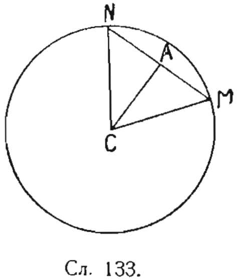
Пошто је $\widehat{ED} = \widehat{EF}$, мора бити и $\overline{ED} = \overline{EF}$. Кад пустимо да лук ED клизи по кругу у смислу стрелице, пашће E на F и D на E. Како C при томе клижењу задржава свој положај, поклопиће се DC са EC, а EC пада FC. Значи, поклапају се темена и краци углова DCE и ECF. Они су онда једнаки. Отуда је $\sphericalangle DCF - 2 \sphericalangle DCE$.



Сл. 132.

Кружни исечак и кружни отсечак. — Део кружне површине ограничен са два полупречника и луком између њих зове се кружни исечак (ABC, сл. 132). Део кружне површине ограничен тетивом и луком који јој припада, зове се кружни отсечак ($NABDN$, сл. 131). Свакој тетиви одговарају два лука. Зато јој одговарају и два отсечка. Тетиви ND (сл. 131) одговарају два лука: лук NAD и лук NGD. Зато јој одговарају и два отсечка: отсечак $NABDN$ и отсечак $NGEDN$.

Једнаким луцима одговарају и једнаки средишни углови, једнаке тетиве, једнаки отсечци и једнаки исечци.



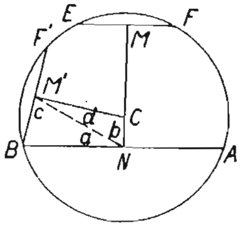
Сл. 133.

Тетивно средишно растојање. — Растојање од тетиве до средишта јесте њено средишно растојање (CA, сл. 133). Из средишта спуштена управна полови тетиву. (На слици 134 $\triangle MCA \cong CAN$. Отуда је $MA = AN$).

Већа тетива има мање средишно растојање и обрнуто.

Узмимо две тетиве: $AB < EF$ (сл. 144). Обрнимо тетиву EF око центра тако, да се поклопе B и E. Тада ће пасти F у F' и M у M'. Тачке M, M' и N су средине тетива на којима се налазе. Спојимо N са M'. Тада је $\sphericalangle BM'C = BNC = 90^0$. Како је $AB > BF'$ мора бити $BN > BM'$. Тада је у троуглу BNM':

$$\sphericalangle c > \sphericalangle a$$
$$\sphericalangle c + d = 90^0$$
$$\sphericalangle u + \sphericalangle b = 90^0$$



Сл. 134.

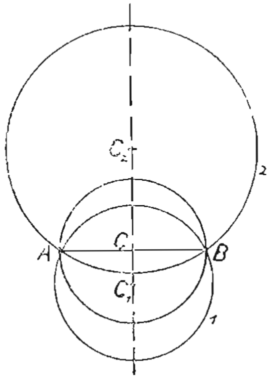
Кад је $c > a$, мора d бити мање од b, ако желимо да c и d чине 90^0. Дакле: $\sphericalangle d < \sphericalangle b$. Зато у $\triangle M'NC$ мора бити $CN < CM'$.

Круг није одређен двема тачкама. — Ако знамо само две тачке једнога круга не знамо који је тај круг. Нека су дате две тачке A и B једнога круга (сл, 135). Да би лежале на кругу, морају бити подједнако удаљене од центра C. Треба наћи центар. То може бити тачка C на нашој слици. Овде је $CA = CB$. Али то може бити и свака тачка са праве $CC_1 \perp AB$ у тачци C. Сне тачке са праве CC_1 подједнако су удаљене и од A и од B. Имамо безброј кругова кроз A и B.

Где леже центри свих кругова који пролазе кроз A и B? Леже на симетрали дужи AB. Отуда ови закључци:

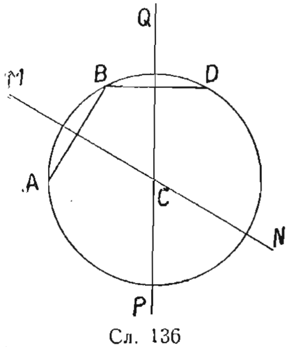
I — Круг није одређен двема тачкама.

II — Геометриско место центара свих кругова који пролазе кроз две дате тачке, јесте симетрала оне дужи која спаја те две тачке.



Сл. 135

Круг је одређен трима тачкама које не леже на једној правој. — Нека су дате три такве тачке A, B и D (сл. 136).



Сл. 136

Центри свих кругова који иду кроз A и B леже на правој MN. Центри свих кругова који пролазе кроз B и D леже на правој PQ. Тачка C лежн на обема тим правама. Према томе мора бити: $CA = CB = CD$. Све три дате тачке леже на једноме кругу. Колико таквих кругова можемо добити? Центар круга C добија се пресеком двеју правих MN и PQ. Праве се могу сећи само у једној тачци. Према томе, кроз ABD пролази само један круг. Отуда ово:

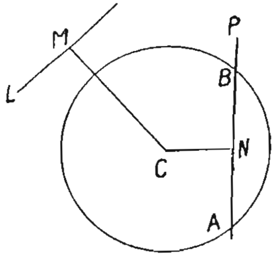
Круг је одређен трима својим тачкама.

КРУГ И ПРАВА

Сечица. — Круг може имати с правом две заједничке тачке, једну заједничку тачку, или ниједну заједничку тачку.

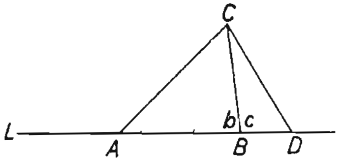
Права која има с кругом две заједничке тачке зову се *сечица* (права AP, сл. 137). Њено средишно растојање је мање од полупречника. (Тачка N је на дужи AB, а између тачака A и B. Према томе је унутрашња тачка. Отуда је $CN < r$).

Спољна права. — Ако права нема ниједне заједничке тачке с кругом, она је спољна права. (Права L, сл. 137). Све њене тачке су спољне тачке за тај круг. И тачка M је спољна тачка. Отуда мора бити: $CM > r$.

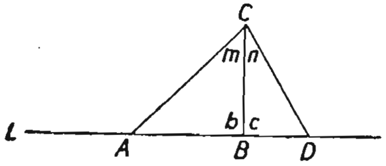


Сл. 137.

Права не може имати три заједничке тачке с кругом. — Претпоставимо да су тачке A, B и D са праве L у исто време и на кругу (сл. 138). Хоћемо да докажемо да је то немогуће. Нека је центар тога круга C. Пошто су тачке A, B и D на кругу, мора бити: $CA = CB = CD$. Отуда је у троуглу ABC угао $A = \sphericalangle b$. У троуглу BDC је $\sphericalangle c = \sphericalangle D$. Али пошто је $AC = CD$, мора бити $\sphericalangle A = \sphericalangle D$. Отуда мора бити: $\sphericalangle D = \sphericalangle c = \sphericalangle b = \sphericalangle A$. Значи да је $\sphericalangle b = \sphericalangle c = 90^0$. Нацртајмо сад нову слику (сл. 139). Овде је $\sphericalangle b = \sphericalangle c = 90^0$. Пошто претпостављамо да су A, B и D на кругу, мора бити $AC = CB$. (Значи хипотенуза једнака са страном правог угла). То не може да буде. Отуда видимо да тачке A, B и D не могу једновремено лежати и на правој L и на кругу ABD. Отуда закључак:



Сл. 138.

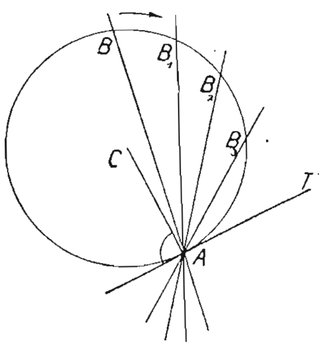


Сл. 139.

Права не може имати три заједничке тачке с кругом.

Дирка. — Узмимо сечицу AB (сл. 140) и обрнимо је око A у смислу који показује стрелица. Пресечна тачка B све више се ближи тачци A. Кад B падне на A, права T и круг C имају свега једну заједничку тачку A. Све остале тачке праве T су спољне тачке за круг C.

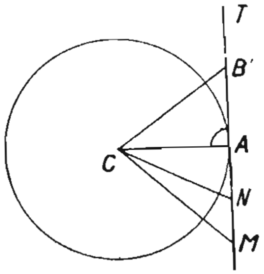
Кад у крајњој тачци једнога полупречника CA (сл. 140) дигнемо управну T на AC, управна T биће дирка за круг C.



Сл. 140.

Права T ће бити дирка, ако су јој све тачке сем тачке A спољне за круг C. Са центром C спојмо коју било тачку те праве, рецимо тачку B (сл. 141). Пошто је $\sphericalangle CAB = 90^0$, мора бити $CB > CA$, тј. $CB > r$. Отуда је B спољна тачка. Пошто је од свих правих које од једне тачке (C) воде до једне праве (T) управна најкраћа, значи да све тачке са T, сем тачке A, имају средишно растојање веће од полупречника. Отуда су све, сем тачке A, спољне за дати круг C. Значи T има само једну заједничку тачку с кругом. Права T је дирка.

Дирка стоји управо на полупречнику с којим има једну заједничку тачку.



Сл. 141.

Нека је T дирка (сл. 141). Пошто је свака тачка на њој (сем додирне тачке A) спољна за круг C, мора увек бити за сваку тачку (сем за A): $CB > r$, $CN > r$, $CM > r$ итд. Значи да је CA најкраће растојање од тачке C до праве T. То може да буде само управна. Дакле: $\sphericalangle CAB = 90^0$.

Кад је дата тачка на кругу, како ћеш нацртати дирку у тој тачци?

Дирке из спољне тачке. — Повући дирку на круг из спољне тачке M.

Спојимо M са C (сл. 142). Спојница сече круг у P. Сад опишемо круг из C полупречником CM. У P управна на CM до пресека у A и B с новим кругом. Спојимо A и B с центром C. Добијемо додирне тачке D и E. Кроз њих две дирке: MD и ME.

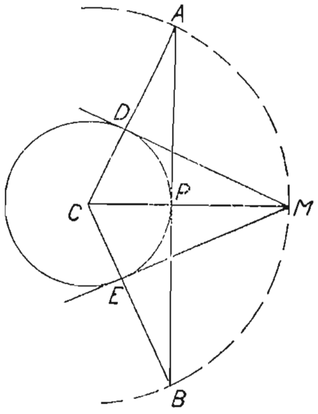
MD и ME ће бити дирке, ако су углови CDM и CEM прави.

Доказ. -- $\triangle CAP \cong CDM$. ($CD = CP = r$, $CA = CM = R$ и $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MCD$ — заједнички). Отуда $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CDM = 90^0$.

Дирке из спољне тачке једнаке су. — То излази из подударности троуглова CDM и CEM (сл. 142). Они су подударни зато што је $CM = CM$, $CD = CE = r$, и $\sphericalangle D = E = 90^0$.

ВЕЖБАЊА

I. — Ако расте полупречник једнога круга, хоће ли расти и кружни обим? А кружна површина?



Сл. 142.

2. — Ако опада полупречник једног круга, хоће ли опадати и кружни обим? А кружна површина?

3. — Може ли се рећи ово: „Обим круга је функција његовог полупречника“?.

4. — Може ли се рећи: „Површина круга је функција његовог полупречника“?.

5. — Један круг има полупречник од 3 cm. Реци какве су тачке за тај круг ове тачке, које су удаљене од средишта за 5 cm, 3 cm, 1 cm, 7 cm, 4 mm.

6. — Ако полупречник круга једнако опада, у шта ће се претворити круг?

7. — Ако се једна дуж обрће око једне своје крајње тачке до 360°, какву ће слику начинити? Да ли се одатле може извести нова дефиниција круга?

8. — Знаш ли неко тело обвијено таквом површином, да су све тачке са те површине подједнако удаљене од једне сталне тачке?

9. — Два круга имају ове полупречнике: $r_1 = 3$ cm и $r_2 = 4$ cm. Који је већи круг? Кад ће два круга бити подударна?

10 — Нацртај један круг. Узми једну тачку ван тога круга. Које је њено најкраће растојање до кружне периферије? Које је најдуже?

11. — Обележи једну тачку која је од периферије датога круга удаљена за 1 cm. Да ли можеш обележити још неку такву тачку? Колико их има?

12. — Где је **геометриско место** тачака удаљених за дату дужину од периферије једнога круга?

13. — Кад се једна кружна сечица обрће око једне своје пресечне тачке, шта бива с тетивом на њој? (Расте ли или опада?)

14. — Колико тетива одговарају једном луку? Колико лукова одговарају једној тетиви?

15. — Која је највећа тетива на кругу? Која је најмања? (Пази добро!)

16. — Којој тетиви одговарају два једнака лука?

17. — Дат је један кружни лук. Преполовити га не тражећи центар круга коме припада тај лук.

18. — Дат је једнак кружни лук, али центар није обележен. Како ћеш нацртати цео круг на коме је тај лук?

19. — Колико лукова одговарају једном средишном углу?

20. — Кад ће расти површина кружног исечка?

21. — „ „ „ „ „ отсечка?

22. — „ „ опадати „ „ исечка?

23. — „ „ „ „ „ отсечка?

24. — Кад расте тетива? Кад опада тетива?

25. — Ако се сечица транслаторно креће (помера се паралелно своме првобитном положају), хоће ли увек расти тетива на њој?

26. — Је ли кружни исечак симетрична слика? Где му је симетриска осовина?

27. — Је ли кружни отсечак симетрична слика? Где му је симетриска осовина?

28. — Кружно средиште лежи на симетрали сваке тетиве. (Види вежбање 26.)

Докажи то помоћу симетрије. Да ли би се то могло доказати подударношћу троуглова?

29. — Где је геометриско место средишта свих кругова којима је тетива дата дуж?

30. — У једноме кругу повучено је неколико једнаких тетива. Докажи да њихове средине све леже на једноме кругу.

31. — Нађи геометриско место средина једнаких тетива дате дужине на датоме кругу.

32. — Нацртан је круг, али му је избрисано средиште. Нађи га.

33. — Дате су две тачке M и N. Где леже центри свих кругова који пролазе кроз те две тачке? Је ли круг одређен двема тачкама? Откуд знаш?

34. — Нацртај једну дуж AB. Узми ван ње једну тачку M. Може ли се из M описати круг да пролази кроз A и B. Кад може?

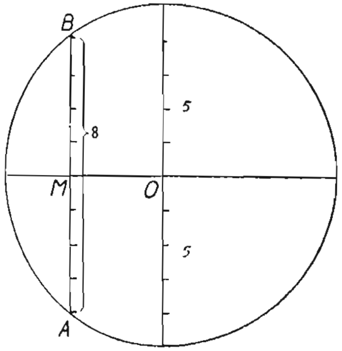
Кад не може? Где мора да лежи M, па да се из ње увек може описати тражени круг?

35. — Нацртај једну дуж AB. Узми ван ње једну праву L. Да ли се на L може увек наћи тачка из које се може описати круг кроз A и B? (Где леже центри свих кругова што пролазе кроз A и B?) Кад може? Кад не може? Како треба да лежи L према AB, па да се увек може нацртати тражени круг? Како треба да лежи L према AB, па да се никако не може описати тражени круг? (Не заборави да је права неограничена с обеју страна).

36. — Дат је круг $r = 3$ cm. Упиши у њему тетиву $AB = 4$ cm.

37. — „ „ „ $r = 2$ cm. „ „ „ „ $AB = 5$ cm. (Може ли?)

38. — Дат је круг $r = 5$ cm. Нацртај у њему тетиву дугачку 8 cm, али тако, да она стоји управно на датоме пречнику (сл. 143) Колико је онда OM?



Сл. 143.

39. — Свака тетива је управна на једноме пречнику.

40. — Сваки пречник полови безброј тетива.

41. — Из центра спуштена управна на тетиву полови ту тетиву.

42. — Израчунај дужину тетиве удаљене од центра за 3 cm на кругу чији полупречник $r = 5$ cm.

(Сл. 133. — Овде је $CM = 5$ cm, $AC = 3$ cm. Искористи правоугли троугао ACM).

43. — Колико је далеко од центра тетива $t = 8$ cm, на кругу $r = 6$ cm?

44. — Можеш ли алгебарски доказати да тетива опада, кад расте њено средишно растојање?

(Нека је тетива t, средишно растојање d, а полупречник круга r. Тада је:

$$\frac{t}{2} = \sqrt{r^2 - d^2}$$

45. — Јесу ли тетива и средишно растојање пропорционалне количине? (Да ли n-пута већем средишном растојању одговара n пута мања тетива?)

46. — Кажи за сваку од ових правих како стоји према кругу $r = 3$ cm. (Поред имена сваке праве у загради је означено њено средишно растојање: L (2 cm), M (2,5 cm), T (3 cm), G (4 cm) и F (5 cm.).

47. — Нацртај један круг и једну спољну праву. На тој правој нађи тачку која има најкраће растојање до периферије. (Може ли се наћи на тој правој тачка која има највеће растојање до кружне периферије? Зашто?)

48. — Ако једна линија има три заједничке тачке с кругом, не може бити права.

49. — Ако два круга имају три заједничке тачке, морају се поклапати.

50. — Једна сечица се транслаторно креће у равни свога круга. Мора ли постати дирка? Кад ће то бити?

51. — Кроз дату тачку на кружној нериферији повуци дирку.

52. — На једној правој узми једну тачку. Нацртај круг који ту праву додирује у тој тачци. Колико има таквих кругова?

53. — Нађи **геометриско место** центара свих кругова који додирују дату праву у датој тачци.

54. — Нацртај једну праву. Нацртај круг $r = 2$ cm, који додирује ту праву. Колико има таквих кругова?

55. — Нађи **геометриско место** центара кругова датог полупречника, који додирују дату праву.

56. — Из спољне тачке повуци дирке на дати круг.

57. — Шта бива с диркама из спољне тачке, кад се та тачка ближи кругу?

58. — Где мора лежати једна тачка, кад кроз њу пролази само једна дирка за дати круг?

59. — Могу ли дирке повучене из једне тачке стојати под правим углом?

(Слика 142. Тада је угао $EMD = 90^0$. Колики је онда угао CMD? Какав је онда троугао CMD? Колике су онда те дирке?)

60. — Где лежи тачка из које **се могу повући** две дирке под правим углом?

61. — Нађи **геометриско место** тачака из којих се могу повући две дирке тако, да стоје под правим углом.

62. — На круг $r = 3$ cm, повуци дирке од 4 cm.

(Слика 142. Сад је $CD = 3$ см, $DM = 4$ cm. Како ћеш конструисати троугао CMD?).

63. — На круг $r = 2$ cm повући дирке од **3** cm.

64. — Нађи геометриско место тачака из којих се могу повући дирке од **4** cm на дати круг $r = 3$ cm (Види сл. 142).

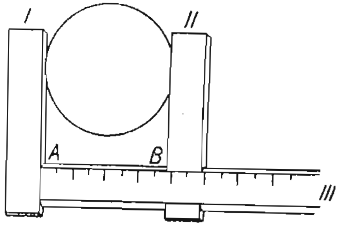
65. — На дати круг $r = 3$ см повући дирке тако, да стоје под углом од 60^0.

66. — Кад је угао између дирки 30^0, колики је угао између полупречника који спајају додирне тачке с центром?

67. — Наћи геометриско место тачака из којих се могу повући дирке под углом од 75^0.

68. — Кад се над CM (сл. 142) као над пречником опише круг, он пролази кроз додирне тачке D и E. (Шта је „угао у полукругу“? Колики је угао код D?)

69. — Кад су дирке на истом кругу паралелне, њихово растојање је пречник тога круга.



Сл. 144.

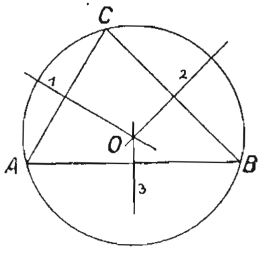
70. — Постоји једна справа за мерење ширине (пречника кругова) ваљкастих тела. (Сл. 144). Полуга II може да се помера по полузи III, али тако, да увек остаје управна на III и паралелна са I. Круг се наслони на I и III. Полуга II се привлачи кругу у правцу и смислу ка полузи I док га не додирне. Растојање AB је пречник круга. Је ли то тачно?

71. — Један круг се котрља по једној правој линији. Какву линију описује његов центар? Зашто?

ЧЕТИРИ ЗНАЧАЈНЕ ТАЧКЕ У ТРОУГЛУ

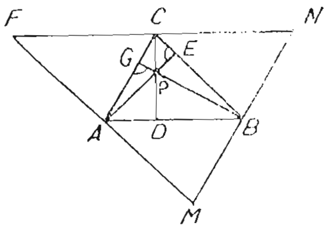
Пресек тежишних линија. — Све три тежишне линије секу се у једној тачци (страна 50). Пресек тежишних линија је тежиште троуглово. Зато се оне тако и зову.

Пресек симетрала страна. — Све три симетрале страна секу се у једној тачци. Повуцимо симетрале свих трију страна (сл. 145). Симетрале 1 и 2 секу се у тачци O. Тачка O лежи на симетрали 1. Због тога мора бити $OA = OC$. Али O лежи и на симетрали 2. Због тога мора бити $OC = OB$. Отуда излази: $OA = OB = OC$. Из $OA = OB$ излази да O лежи и на симетрали стране AB. Значи да и трећа симетрала иде кроз тачку O. Све три симетрале страна секу се у O. Пресек симетрала страна (O) подједнако је удаљен од сва три темена. У O је центар круга који иде кроз A, B и C. Значи: пресек симетрала страна је центар *описаног* круга код троугла.



Сл. 145.

Пресек висина. — Све три висине троуглове секу се у једној тачци. Нека се две висине AE и CD (сл. 146) секу у једној тачци (P). Кроз сва три темена повући ћемо паралелне са странама. Добијамо троугао FMN. Висина AE стоји управно на BC. Пошто је $BC \parallel MF$, мора бити $AE \perp MF$. Сем тога је:



Сл. 146.

$AM = BC$ (као супротне стране паралелограма $AMBC$)

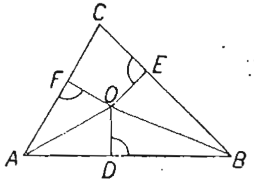
$FA = BC$ (као супротне стране паралелограма $ABCF$)

Отуда је $AM = AF$.

Значи да висина AE стоји управно на страни FM у њеној средини A. Онда је AE симетрала стране FM.

Исто тако се може доказати да је CD симетрала стране FN и BG симетрала стране MN.

Пошто висине троугла ABC претстављају симетрале страна у троуглу FMN, морају се сећи у истој тачци.



Сл. 147.

Пресек угловних симетрала. — Повуцимо симетрале углова A и B (сл. 147). Оне ће се пресећи у једној тачци. Нека се секу у тачци O. Зато што O лежи на симетрали угла A, мора бити $OF = OD$. Зато што O лежи на симетрали угла B, мора бити $OE = DO$. Отуда је $OF = OE$. Значи да је O подједнако удаљено од кракова угла . То даље значи да O лежи на симетрали угла C. Отуда видимо ово:

Све угловне симетрале секу се у једној тачци.

Како су тачке E, D и F подједнако удаљене од тачке O, морају лежати на кругу описаном из O полупречником OD (или OF, или OE).

Пошто су код D, E и F прави углови, значи да су стране AB, BC и AC дирке на кругу O. Овај круг додирује све три стране и зове се *уписани круг*.

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај троугао на картону. Одреди пресек тежишних линија. Исеци троугао из картона. Подупри оштром писаљком тачку пресека тежишних линија. Троугао не пада с писаљке. Ако пробаш с неком другом тачком, троугао ће пасти. Зашто?

2. — Дату дуж *AB* подели на три једнака дела.

(Узми да ти је *AB* тежишна линија у једном троуглу, па у томе троуглу повуци још једну тежишну линију.)

3. — Нацртај оштроугли троугао, па му опиши круг. Где лежи центар?

4. — Нацртај правоугли троугао, па му опиши круг. Где лежи центар?

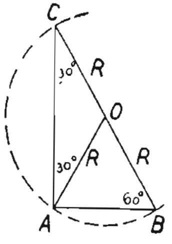
5. — Нацртај тупоугли троугао, па му опиши круг. Где лежи центар?

6. — Нацртај равнокраки троугао, па му опиши круг. Где лежи центар?

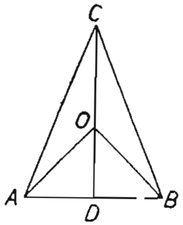
7. — Ако је у правоуглом троуглу један угао 30°, мања управна страна је половина хипотенузе (сл. 148).

8. — Ако центар описанога круга једног троугла лежи на висини, троугао је равнокрак, или равностран.

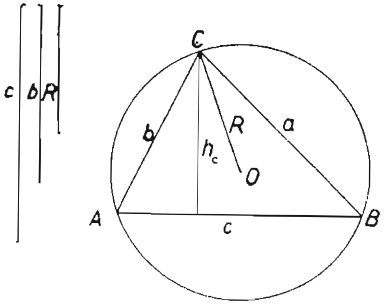
(Сл. 149) — Какви су међу собом троуглови *ADO* и *BDO*? Где лежи *D*? Где онда пада висина на основицу?)



Сл. 148.



Сл. 149.



Сл. 150.

9. — Конструиши троугао, кад су дате две стране (*b* и *c*, сл. 150) и *R*.

(Шта претстављају троуглове стране у томе кругу?)

10. — Конструиши троугао кад су дати *R* (полупречник описаног круга’, страна *c* и висина h_c. (Висина која пада на страну *c*).

(Најпре круг, па тетиву *AB*. Где лежи теме *C*? За колико је оно удаљено од *AB*? Где је геометријско место тачака које су за h_c удаљене од *AB*? Мора ли *C* да лежи и на кругу?)

11. — Конструиши троугао кад је дата једна страна (*b*, сл. 150), један угао (*C*) и *R*.

12. — Углови једног троугла су $A = 40°$, $B = 60°$. Израчунати углове под којима се секу висине.

13. — Где лежи центар уписаног круга у оштроуглом троуглу?

14. – „ „ „ „ „ „ правоуглом „

15. — „ „ „ „ „ „ тупоуглом „

16. — „ „ „ „ „ „ равнокраком „

17. — Кад је центар уписаног круга на троугловој висини, троугао мора бити равнокрак, или равностран.

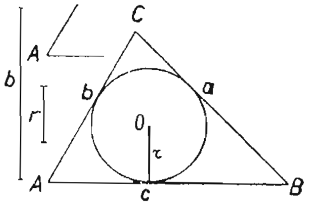
18. — У равнострани троугао уписати три једнака круга тако да се два и два додирују и да сваки додирује по две стране.

19. – Конструисати троугао када је дата једна страна (*b*, сл. 151), један угао (*A*) и полупречник *r*.

(Најпре *AC*, па угао *A*. Где лежи *O*? На симетрали угла *A*. Сем тога *O* је за *r* удаљено од *AB*. Шта претстављају троуглове стране на томе уписаноме кругу?)

20. — Конструисати троугао кад је дато: *r*, *B* и *c*. (Сл. 151).

21. – Конструисати троугао кад је дато *c*, *r* и h_a (Сл. 151).

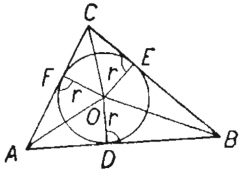


Сл. 151

22. — Конструисати равнокраки троугао кад су дати: висина која пада на основицу и полупречник *r*.

ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Упишимо круг у троугао *ABC* (сл. 152). Површину троугла обележимо са *p*.



Сл. 152

Обим троугла обележимо са 2*s*.

За ознаку трогловог обима узимамо *s* као прво слово латинске речи *summa*, која значи збир. Троуглов обим је *збир* свих троуглових страна. Обим обележавамо са 2*s* место са *s* зато, што се у обрасцима служимо полуобимом Кад бисмо збир обележили са *s*, полуобим би био $\frac{s}{2}$. Кад га обележимо са 2*s* полуобим је *s*. Лакше нам је радити са *s* него са $\frac{s}{2}$.

Површина нашега троугла биће:

$$p = \triangle\, ABO + \triangle\, BCO, + \triangle\, ACO, \text{ тј.}$$

$$p = \frac{cr}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}$$

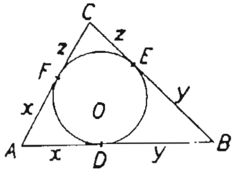
$$p = \frac{r}{2}\,(c + a + b)$$

$$p = \frac{r}{2} \cdot 2s$$

$$\boxed{p = rs.}$$

Површина троугла равна је производу полупречника уписаног круга и троугловог полуобима.

Отсечци на странама. — Уписани круг ствара отсечке на странама. То су на слици 153 отсечци x, y и z. Пошто су дирке из исте тачке једнаке, биће увек једнака оба отсечка код истог темена. Обележимо их како показује наша слика 153. Стране се увек обележавају писменом наспрамног темена, те ће бити: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Да бисмо израчунали отсечке x, y и z, ставићемо:



Сл. 153.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = c \\ \text{II} & y + z = a \\ \text{III} & x + z = b \end{array}$$

Одавде је $y = c - x$. Сменимо ову вредност у II једначини, па ће бити:

$$\begin{array}{ll} \text{II} & c - x + z = a \\ \text{III} & x + z = b \end{array}$$

Одавде је $z = b - x$.

$$\text{II} \quad c - x + b - x = a$$

Одатле је .... $x = \dfrac{b + c - a}{2}$

Да видимо сад како можемо *помоћу обима* изразити то $b + c - a$.

$$\begin{array}{r} a + b + c = 2s. \\ -2a = -2a \\ \hline b + c - a = 2(s - a) \end{array}$$

Зато ће бити $x = \dfrac{2(s - a)}{2}$, тј.

$$\boxed{x = s - a}$$

Даље ће бити:

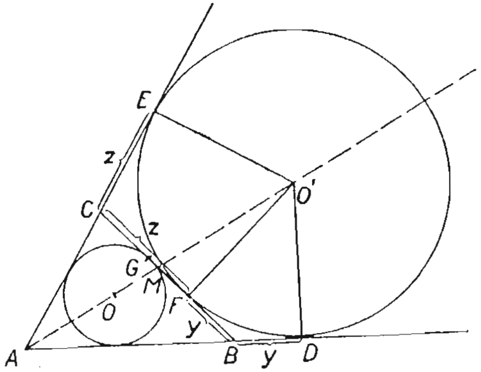
$$\boxed{y = s - b}$$

$$\boxed{z = s - c}$$

Пример: Израчунати отсечке на странама који постају од додира уписаног круга у троуглу $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$.

Отсечак код темена A: $x = 9 - 6 = 3$
Отсечак код темена B: $y = 9 - 7 = 2$
Отсечак код темена C: $z = 9 - 5 = 4$

Спољни уписани круг. — Нацртајмо спољне углове код темена B и C (сл. 154). Повуцимо њихове симетрале. Оне ће се пресећи у тачци O'. Биће $O'E = O'F = O'D$. Види се да ће круг описан из O' полупречником OE додиривати све три стране троугла ABC и то: страну BC у F, између B и C, продужак стране AB у D, продужак стране AC у E. Пошто круг O' додирује краке угла A, његов центар O' мора лежати на симетрали угла A. Круг O' зове се спољни уписани круг за угао A.



Сл. 154.

И он прави отсечке на странама. Отсечци AE и AD су једнаки. Отсечци на страни BC нису једнаки. ($BF \neq FC$). Обележимо отсечке овако:

$AD = AE = x$ $\quad CF = z,$ $\quad BF = y.$ Имаћемо ове једначине:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & y + z = a \\ \text{II} & x - y = c \\ \text{III} & x - z = b \end{array}$$

Саберимо I и III. Добијемо: $x + y = a + b$

Потпишимо другу једначину: $x - y = c$

Њихов збир је $\quad 2x = a + b + c$

То значи да је $\quad x = s$

Даље је: $y = s - c$ и $z = s - b$.

Унутрашњи уписани круг додирује BC у G. Знамо да је $CG = s - c$. Видели смо малочас да је $BF = y = s - c$. Значи да је $CG = BF$. Ако је M средина стране BC биће:

$GM = \frac{a}{2} - (s - c)$ и $FM = \frac{a}{2} - (s - c)$. Отуда је $GM = FM$.

Додирне тачке G и F унутрашњег и спољашњег уписаног круга на истој страни троугловој леже симетрично према средини те стране.

ВЕЖБАЊА

1. — Израчунај површину троугла кад је $a = 5$ cm, $b = 6$ cm. $c = 7$ cm, $r = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ cm.

2. — Израчунај r, кад је $2s = 14$ cm, $p = 2\sqrt{14}$ cm.

3. — Исто за $2s = 26$, $p = \sqrt{26}$.

4. — Исто за $a = \frac{3}{4}$, $b = 2\frac{1}{4}$, $c = 3$, $p = 7\sqrt{5}$.

5. — Израчунати отсечке које на странама гради уписани круг у троуглу, кад је $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

6. – Исто за $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$.

7. — Исто за $a = 3{,}7$ $b = 4\frac{2}{3}$, $c = 5{,}07$.

8. — Исто за $a = 4\frac{1}{4}$, $b = 3\frac{3}{5}$, $c = 5\frac{7}{12}$.

9. — Дат је разностран троугао са основицом AB. Помоћу познатих образаца о отсечцима што их на странама гради уписани круг, одредити тачку у којој тај круг додирује AB, кад дати троугао постане равностран, са страном AB.

10. — Нацртај троугао, па му конструиши све спољне уписане кругове.

11. — Нацртај равнокраки троугао, па му конструиши све спољне уписане кругове. Како леже центри?

12. — Нацртај троугао $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm, па одреди додирне тачке свих уписаних кругова. Затим одреди центре кругова помоћу управних у додирним тачкама.

13. — Исто за $a = 1{,}7$ cm., $b = 2$ cm., $c = 3$ cm.

14. — Гледај слику 154. Конструиши троугао кад је дато AB, A и $O'D$.

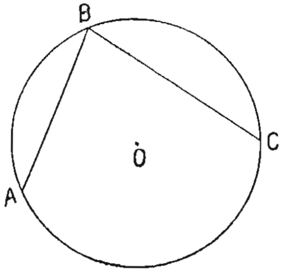
(Најпре угао A. Круг O' му додирује краке. O' је за OD удаљено од AB. Страна BC је дирка на кругу O').

15. — Конструиши троугао, кад су дати углови A и B и полупречник $O'D$. (Иста слика.)

(Не заборави да је BC дирка на круг O', која пада на AB под углом B.)

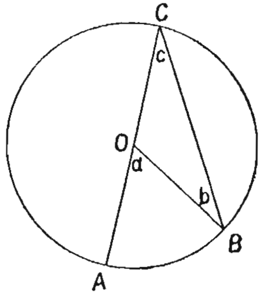
ПЕРИФЕРИСКИ И СРЕДИШНИ УГЛОВИ

Периферински угао јесте угао који граде две тетиве кад се секу на периферији. Угао ABC на слици 155 је периферински угао.



Сл. 155.

Средишни угао јесте угао чије је теме у кружном средишту, а краци му иду по полупречницима. Средишни је угао AOB на слици 156.



Сл. 156.

Периферијски је угао половина средишног угла над истим луком.

I. случај (сл. 156). — Периферински угао c је над луком AB. Над тим луком је и средишни угао a. Доказати да је $\sphericalangle c = \frac{1}{2} \sphericalangle a$.

Доказ. $OC = OB$. Отуда је $\sphericalangle b = \sphericalangle c$. $\sphericalangle a = \sphericalangle c + \sphericalangle b$. $\sphericalangle a = 2 \sphericalangle c$. Отуда је $\sphericalangle c = \frac{1}{2} \sphericalangle a$.

II случај (слика 157). — Овде је средишни угао међу крацима периферинског угла. Повуцимо кроз C и O једну праву. Биће:

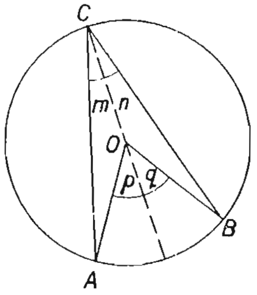
$$\begin{array}{l} \sphericalangle p = 2 \sphericalangle m \\ \underline{\sphericalangle q = 2 \sphericalangle n} \end{array}$$

$p + q = 2\,(m + n)$, тј. $\sphericalangle AOB = 2 \sphericalangle ACB$.

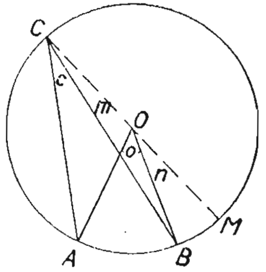
III случај (сл. 158). — Повуцимо CM кроз O. Имаћемо:

$$\sphericalangle (o + n) = 2 \sphericalangle (c + m)$$
$$\sphericalangle n = 2 \sphericalangle m$$
$$\sphericalangle o = 2 \sphericalangle (c + m - m)$$
$$\sphericalangle o = 2 \sphericalangle c.$$

Нацртаноме средишном углу одговарају безброј периферинских углова. Сваки од њих је половина нацртаног средишног угла. Темена свих тих периферинских углова налазе се на кругу на коме је нацртан онај средишни угао. Та особина средишних и периферисках углова показује нам једно ново геометриско место.



Сл 157.



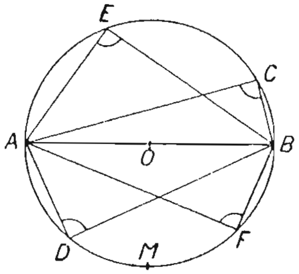
Сл. 158.

Геометриско место темена свих углова који су половина датог средишног угла јесте периферија круга на коме је тај средишни угао.

Напомена. — Периферски угао зове се још и уписани угао.

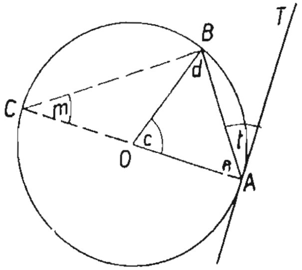
Угао уписан у полукругу. — Угао уписан у полукругу (угао *C*, слика 159). прав је.

То је зато што је угао *C*, половина равног угла *AMB*, а половина равног је прав угао. И ова особина уписаног угла даје нам још једно геометриско место.



Сл. 159.

Геометриско место темена свих правоуглих троуглова над датом хипотенузом јесте круг описан над хипотенузом као над пречником (сл. 159).



Сл. 160.

Тангентно-тетивни угао. – Угао између дирке и тетиве која полази из додирне тачке зове се тангентно-тетивни угао. То је угао *TAB* на слици 160. Тангентно-тетивни угао раван је половини средишног угла над тетивом.

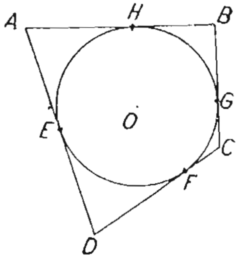
Доказати да је $\sphericalangle TAB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB$

Доказ. $TA \perp OA$. Отуда је $\sphericalangle (e + t) = 90^0$. Сем тога је у $\triangle AOB \sphericalangle (c + 2e) = 180^0$. Отуда је $2 \sphericalangle (e + t) = \sphericalangle (c + 2e)$ тј. $2e + 2t = c + 2e$. Кад одбацимо с обеју страна $2e$, имаћемо: $2t = c$. Одатле је $\sphericalangle t = \frac{1}{2} \sphericalangle c$.

Је ли истина ово: „Тангентно-тетивни угао једнак је са периферисиким углом у супротном отсечку над датом тетивом“?

ТАНГЕНТНИ И ТЕТИВНИ ЧЕТВОРОУГЛИ

Тангентни четвороугли. — Четвороугао чије су све стране тангенте на једном кругу зове се тангентни четворугао (сл. 161). Овде је четворугао описан око круга, а круг је уписан у четвороуглу.



Сл. 161.

У сваком тагентном четворуглу једнаки су збирови супротних страна:

$$AB + CD = AD + BC.$$

Доказ. — Најпре обележимо додирне тачке са *E*, *F*, *G*, *H*. Пошто су дирке повучене из једне тачке на круг једнаке, биће:

$$AE = AH$$
$$ED = DF$$
$$BG = BH$$
$$CG = CF$$

Сабирањем добијамо:

$$(AE + ED) + (BG + CG) = (AH + BH) + (DF + CF) \text{ тј.}$$
$$DA + BC = AB + CD.$$

Докажи ово: „Ако су збирови супротних страна једног четвороугла једнаки, он је тангентан“. (То значи да се у њему може уписати круг.)

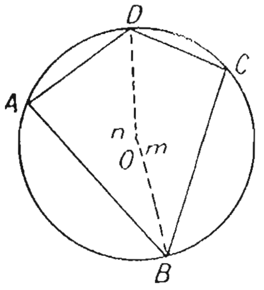
Тетивни четвороугли. — Четвороугао чије су стране тетиве у једном кругу зове се тетивни четвороугао. Такав је четвороугао *ABCD*, (сл. 162). У тетивном четвороуглу једнаки су збирови супротних углова.

Доказати да је (сл. 162) $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$.

Доказ. — Нека је *O* центар описаног круга. Спојимо га са теменима *B* и *D*. Тада је

$$\sphericalangle A = \frac{1}{2} \sphericalangle m$$
$$\sphericalangle C = \frac{1}{2} \sphericalangle n$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \frac{1}{2} \sphericalangle (m + n)$$
$$\sphericalangle (m+n) = 360^0$$
$$\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^0$$



Сл. 162.

Како је збир углова у четвороуглу 360°, остаје за збир углова B и D још 180°. Дакле: $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$. Отуда је: $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$.

Може ли се рећи: „У тетивном четвороуглу збир супротних углова износи 180°“?

Докажи ово: „Ако су у четвороуглу збирови супротних углова једнаки, око њега се може описати круг“.

ВЕЖБАЊА

1\. — Нацртај један периферискн угао. Колико му средишних углова одговарају? Зашто?

2\. — На датоме кругу нацртај периферискн угао од 30°.

3\. — „ „ „ „ „ „ „ 40 гради

4\. — „ „ „ „ „ „ „ 72 града.

5\. — Колики је перифериски угао над луком од 17°8′14″?

6\. — „ „ „ „ „ „ „ 170,1492 града?

7\. — „ „ „ „ „ „ „ 230°18′20″?

8\. — „ „ „ „ „ „ „ 145,3426 гради?

9\. — Две тетиве се секу на кругу. Доказати да се оне секу под углом који је половина лука што га оне отсецају. (Лук изражен у степенима).

10\. — Две се тетиве секу у кругу. Доказати да се оне секу под углом који је раван полузбиру лукова захваћених тим тетивама (Сл. 163).

11\. — Две се сечице секу ван круга. Доказати да се секу под углом који је раван полуразлици лукова што их оне отсецају на кругу. (Сл. 164).

12\. — Датоме средишноме углу нацртати тангентно-тетивни угао.

13\. — Датоме перифериском углу нацртати тангентно-тетивни угао.

14\. — Израчунати угао између тангенте AM и тетиве AB, кад је средишни угао AOB = 70° 43′.

15\. — Колико гради има мањи лук над тетивом AC, кад тангента у тачци A склапа с тетивом угао од 37,25 гради?

16\. — Је ли круг одређен кад му је дата тетива и тангентно-тетивни угао?

17\. — Повуци једну тетиву AB; у њеним крајњим тачкама повуци дирке. Докажи да су код A и B једнаки тангентно-тетивни углови.

18\. — Ако расте тетива, шта бива с тангенто-тетивним углом?

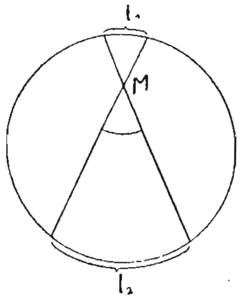
19\. — Ако расте полупречник, шта бива с тангентно-тетивним углом?

20\. — Над истом тетивом, а на разним њеним странама, нацртана су два перифериска угла. (Један изнад тетиве, други испод). У коме су односу та два перифериска угла?

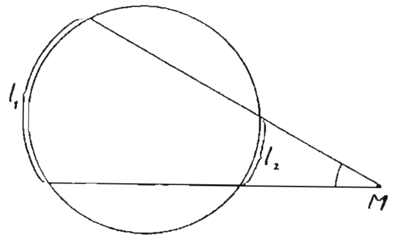
21\. — Дата је једна тетива AB = 2 cm и перифериски угао над њом C = 75°. Конструисати круг на коме су та тетива и тај угао.

(Колики је средишни угао?)

22\. — Једна тетива је AB = 3 cm, а тангентно-тетивни угао који јој припада је од 30°. Конструиши круг на коме су та тетива и тај угао.



Сл. 163



Сл. 164

23\. — Докажи да је четвороугао тангентан, ако су му збирови супротних страна једнаки.

24\. — Може ли се у квадрату уписати круг? Зашто?

25\. — Може ли се у ромбу уписати круг? Зашто?

26\. — Исто за правоугаоник.

27\. — Исто за делтоид.

28\. — Конструиши четвороугаоник кад је дат полупречник уписаног круга, две суседне стране и њихов захваћени угао.

(Уписни круг додирује обе. Где лежи центар?)

29\. — Конструисати четвороугаоник кад су дате две суседне стране, дијагонала која спаја њихове крајње тачке и полупречник уписаног круга.

30\. — Конструисати четвороугао кад су дата три угла и полупречник уписаног круга.

(Сл. 161. — Најпре угао А. Затим круг О. Добијамо тачке Н и Е. Знамо угао В. Колики је онда угао НОВ? Спојмо О са Н и нацртајмо угао НОВ. Итд.)

31. — Докажи да се може описати круг око четвороугла код кога су једнаки збирови супротних углова.

32. — Може ли се описати круг око квадрата? Докажи.

33. — „ „ „ „ „ „ правоугаоника? Докажи.

34. — „ „ „ „ „ „ равнокрак. трапеза? Докажи.

35. — „ „ „ „ „ „ ромба? Докажи.

36. — Какав је то тангентни четвороугао, кад су му две суседне стране једнаке?

37. — Конструиши тетивни четвороугао кад су дате три стране и један угао.

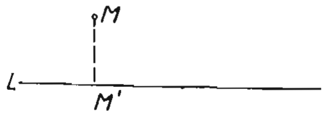
38. — Конструиши тетивни четвороугао кад су дате две стране, угао између њих и дијагонала која спаја теме датог угла са теменом супротног угла.

39. — Исто за три стране и полупречник описаног круга. (Најпре круг.)

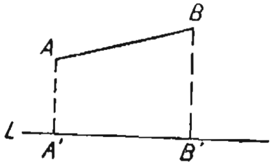
40. — Исто за једну страну, обе дијагонале и полупречник описаног круга.

ХЕРОНОВ ОБРАЗАЦ

Пројекција тачке. — Нека је дата једна тачка M и једна права (сл. 165). Подножна тачка управне MM' спуштене из M на L зове се управна пројекција тачке M на правој L. Тачка M' је таква пројекција тачке M на правој L.



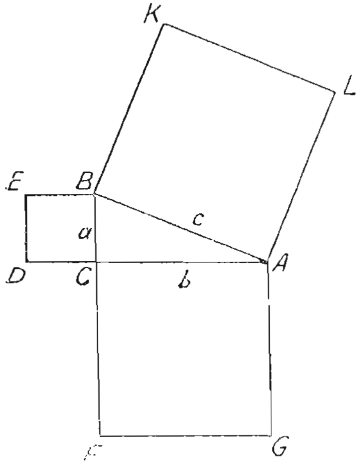
Сл. 165.



Сл. 166.

Пројекција дужи. — На правој L (сл. 166) нацртали смо пројекције A' и B' крајњих тачака дужи AB. Добили смо дуж $A'B'$. Дуж која спаја пројекције крајњих тачака једне дужи јесте њена пројекција. Овде је дуж $A'B'$ управна пројекција дужи AB.

Квадрат једне троуглове стране. — Знамо Питагорину теорему која важи за правоугли троугао. „Збир квадрата над странама правог угла једнак је квадрату над хипотенузом“ $DCBE + ACFG = ABKL$ (сл. 167) или $a^2 + b^2 = c^2$.



Сл. 167.

Сад ћемо видети чему је једнак квадрат ма које стране у ма коме троуглу.

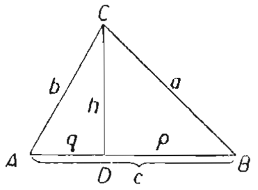
Узмимо најпре оштроугли троугао. Нека је то троугао ABC (сл. 168).

Из троугла BCD имамо:

(1) $h^2 = a^2 - p^2$

Из троугла $A\ C\ D$ имамо:

(2) $h^2 = b^2 - q^2$



Сл. 168.

Отуда излази:

(3) $a^2 - p^2 = b^2 - q^2$

Пошто је $p = c - q$, једначина (3) постаје после смене:

(4) $a^2 - (c - q)^2 = b^2 - q^2$

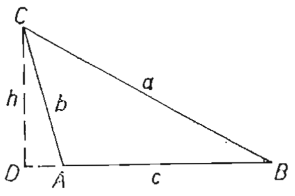
$a^2 - c^2 + 2cq - q^2 = b^2 - q^2$ Одатле је:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$

Са слике се види да је q пројекција страна b на страни c, а p пројекција стране a на страни c. Зато последњу једначину можемо овако изразити:

Квадрат једне стране (a^2) једнак је збиру квадрата других двеју страна ($b^2 + c^2$) **умањеном** за двоструки производ једне од тих страна (c) и пројекције оне друге стране на њој ($2cq$).

Узмимо сад тупоугли троугао (сл. 169)



Сл. 169.

Из троугла DBC имамо:

$h^2 = a^2 - BD^2.$

Из троугла DAC имамо:

$h^2 = b^2 - AD^2.$

Отуда је:

$a^2 - BD^2 = b^2 - AD^2$

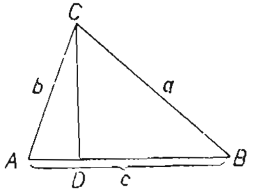
$a^2 = (c + AD)^2 + b^2 - AD^2$

$a^2 = c^2 + 2\ .\ AD\ .\ c + AD^2 + b^2 - AD^2$

$a^2 = c^2 + b^2 + 2c\ .\ AD$

AD је пројекција стране b на страни c. Отуда излази:

Квадрат троуглове стране према тупоме углу једнак је збиру квадрата других двеју страна, **увећаном** за двоструки производ једне од тих страна и пројекције ове друге стране на њој.



Сл. 170.

Херонов образац. — Ово што смо сад научили помоћи ће нам да добијемо један нов образац за израчунавање површине троуглова. Тај нови образац показаће нам како се израчунава троуглова површина кад су познате све три троуглове стране.

Узмимо троугао ABC (сл. 170) Његова површина p је:

$$(1) \qquad p = \frac{ch}{2}$$

Пошто претпостављамо да знамо само стране, а не и висину, из горњег обрасца мора испасти h.

Знамо да је из троугла BCD:

$$(2) \qquad h^2 = a^2 - BD^2$$

Из (2) мора да испадне BD, пошто га ми не знамо. Али ми знамо да је $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \,.\, BD$

Отуда је:

$$(3) \qquad BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

Кад ову вредност за BD унесемо у (2), добијамо:

$$(4) \qquad h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2$$

Пошто је овде h на другом степену, ми ћемо обе стране једначине (1) дићи на квадрат:

$$p^2 = \frac{c^2h^2}{4}, \text{ тј.}$$

$$(5) \qquad 4p^2 = c^2h^2$$

Кад место h^2 унесемо у (5) његову вредност из (4), добићемо:

$$4p^2 = c^2\left[a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2\right]. \text{ То је даље:}$$

$$4p^2 = c^2\left[a^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}\right]$$

$$4\ p^2 = c^2\left[\frac{4a^2\,c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4c^2}\right]$$

$$4\ p^2 = \frac{1}{4}\left[(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2\right]$$

Кад ову разлику квадрата у средњој загради развијемо, добићемо:

$$16p^2 = [\,2ac - (a^2 + c^2 - b^2)\,]\ [\,2ac + (a^2 + c^2 - b^2)]$$

$$16p^2 = (b^2 - a^2 - c^2 + 2ac)\ (a^2 + c^2 + 2ac - b^2)$$

$$16p^2 = [\,b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\,]\ [\,(a^2 + 2ac + c^2) - b^2\,]$$

$$16p^2 = [\,b^2 - (a - c)^2\,]\ [\,(a + c)^2 - b^2\,]$$

$$16p^2 = \Big\{[b - (a - c)]\,[b + (a - c)\,]\Big\}\Big\{[(a + c) - b]\,[(a + c) + b]\Big\}$$

$$(6)\ 16p^2 = (b + c - a)\ (b + a - c)\ (a + c - b)\ (a + c + b)$$

Пошто је $a + b + c = 2s$, биће:

$$b + c - a = 2\ (s - a)$$

$$b + a - c = 2\ (s - c)$$

$$a + c - b = 2\ (s - b)$$

Отуда се (6) може и овако написати:

$$16p^2 = 2\ (s - a)\ \cdot\ 2\ (s - b)\ \cdot\ 2\ (s - c)\ \cdot\ 2\ s$$

$$p^2 = s\ (s - a)\ (s - b)\ (s - c)$$

$$\boxed{\mathbf{p = \sqrt{s\,(s - a)\ (s - b)\ (s - c)}}}$$

Напомена. — Овај образац носи име грчкога земљомера Херона Александриског. Херон је, по мишљењу историчара математике, живео негде у доба од I века пре Христа до III века после Христа. Овај образац је нађен у његовим делима, али није његов. Немачки научник Вилајтнер тврди да је Архимед пронашао тај образац. Архимед је био велики грчки математичар, рођен у Сиракузи на острву Сицилији између 290 и 280 године пре Христа.

Овај образац је ипак задржао Хероново име и под тим именом је уопште познат.

ВЕЖБАЊА

1. — Дате тачке пројектуј на дату праву.

2. — Дате дужи пројектуј на дату праву.

3. — Кад је дуж једнака са својом управном пројекцијом?

4. — Може ли дуж бити већа од своје управне пројекције?

5. — Израчунај површину троугла, кад је $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm.

6. — Исто за $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm. (Какав је то троугао? Увери се још на неки начин да си површину тачно израчунао.)

7. — Исто $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$.

8. — Исто за $a = 2\frac{1}{2}$, $b = 4\frac{1}{2}$, $c = 3$.

9. — Исто за $a = 8$ cm, $b = 7{,}3$ cm, $c = 6{,}5$ cm.

10. — Исто за $a = 40{,}2$ cm, $b = 24$ cm, $c = 33$ cm.

11. — Исто за $a = 12$ cm, $b = 24$ cm, $c = 34$ cm.

12. — Исто за $a = 21{,}7$ m, $b = 31{,}2$ m, $c = 40{,}3$ m.

13. — Исто за $a = 120{,}8$ m, $b = 78{,}5$ m, $c = 43{,}5$ m.

14. — Исто за $a = 17{,}17$ m, $b = 18{,}20$ m, $c = 10{,}11$ m.

Израчунати полупречник уписаног круга у овим троуглима:

15. $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm.

16. $a = 12$ cm, $b = 35$ cm, $c = 37$ cm.

17. $a = 8$ cm, $b = 15$ cm, $c = 17$ cm.

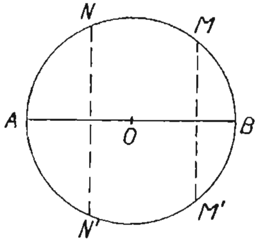
18. $a = 10$ cm, $b = 9$ cm, $c = 8$ cm.

19. $a = 15$ cm, $b = 36$ cm, $c = 39$ cm.

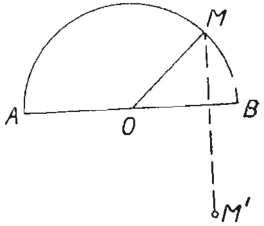
(Какав је то троугао? На цртежу провери добивени резултат.)

ПОЛОЖАЈИ ДВА КРУГА

Пречник као симетриска осовина. — Сваки пречник круга је симетриска осовина за круг. Пречник AB (сл. 171) је симетриска осовина круга O. Горњи полукруг биће према AB симетричан доњем полукругу ако свака тачка горњег полукруга има своју симетричну тачку на доњем полукругу.



Сл. 171.



Сл. 172.

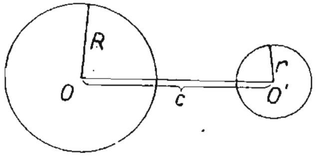
Узмимо тачку M (сл. 172) и нађимо њену симетричну тачку према AB. Нека је то тачка M'. Нека та тачка пада ван доњег полукруга. Доказаћемо да она мора пасти на полукруг.

Управна MM' сече пречник AB у D. Пошто је M' симетрична тачци M, мора бити $MD = M'D$. Кад троугао $M'OD$ обрнемо за два права угла око AB, тачке O и D ће задржати свој положај, а M' ће пасти на M. Тада се поклапа OM' са OM. Отуда је $OM' = OM = r$. Тачка M мора лежати на кругу.

Спољни кругови. — Два круга су спољни један за други, кад су све тачке једнога спољне тачке за онај други (сл. 173).

Дуж која спаја њихове центре зове се централа. Њу ћемо обележавати са c. Овде је $OO' = c$. Са слике се види да је

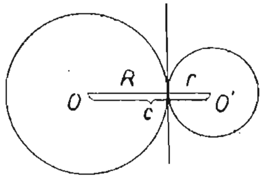
$$c > R + r.$$



Сл. 173.

Спољни додир. — Нека се мали круг приближава великоме. Кад буду имали једну заједничку тачку, кругови ће се додиривати (сл. 174). Овакав додир кругова зове се спољни додир. Са слике се види да је

$$c = R + r.$$

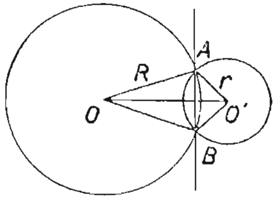


Сл. 174.

Кругови који се додирују споља, имају у тачци додира заједничку дирку.

Пресек кругова. — Ако кругови имају две заједничке тачке, сећи ће се (сл. 175). Спојимо једну пресечну тачку (A) са оба центра. Добићемо троугао AOO'. Пошто је у троуглу једна страна мања од збира других двеју биће: $OO' < OA + AO'$ тј. $c < R + r$.

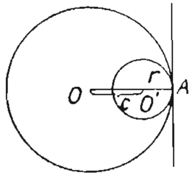
Али у троуглу је једна страна већа од разлике оних других двеју те је зато овде: $c > R - r$.



Сл. 175.

Пресечне тачке A и B леже симетрично према централи.

Доказ. — Троугао ABO је равнокрак са основицом AB. Троугао ABO' је такође равнокрак са основицом AB. Дуж OO' спаја темена два равнокрака троугла над истом основицом. Значи да OO' стоји управо на AB и полови је. Према томе, тачке A и B морају бити симетричне.



Сл. 176.

Унутрашњи додир. — Овде опет кругови имају једну заједничку тачку (сл. 176). Са слике се види да је:

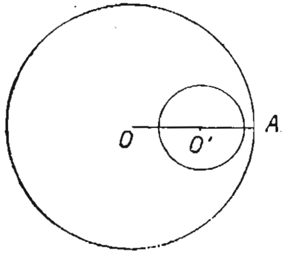
$$OO' = OA - AO', \text{ тј.}$$

$$c = R - r.$$

Кругови који се додирују изнутра, имају у додирној тачци заједничку дирку.

Један унутрашњи круг, други спољашњи. — Са слике 177 се види да су све тачке круга O спољашње за круг O'. Према томе, кругови немају заједничких тачака.

Са слике се види да је:



Сл. 177.

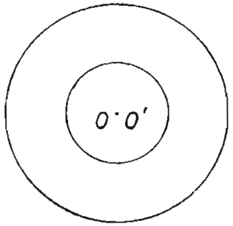
$$OO' = OA - AO'$$

Отуда је

$OO' < OA - r$, т.ј.

$c < R - r$.

Концентрични кругови. - Кругови са заједничким центром зову се концетрични кругови (сл. 178).



Сл. 178.

Код њих је

$$c = o.$$

Примери, — 1. — У коме су положају ова два круга:

$$c = 9 \text{ cm}, \quad r = 4 \text{ cm}, \quad R = 5 \text{ cm?}$$

Аритметичко решење. — Овде је $r + R = 9$ и $c = 9$.

Види се да је $r + R = c$. Кругови се додирују споља.

Геометриско решење. — Нацртај $OO' = 9$ cm. Из O опиши круг полупречником од 4 cm. Из O' опиши круг полупречником од 5 cm. Додирују се споља.

2. — Испитати положај ова два круга: $c = 4$ cm, $r = 3$ cm, $R = 8$ cm.

Аритметичко решење.

$$r + R = 11, \ c = 4 \ . \text{ Отуда је } c < r + R$$

$$R - r = 8 - 3 = 5, \qquad c = 4 \ . \text{ Отуда је } c < R - r.$$

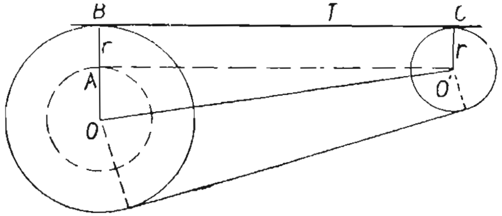
Немају заједничких тачака. Мали круг је унутрашњи круг.

Геометриско решење.

Најпре $OO' = 4$ cm. Из O круг полупречником од 3cm. Из O' круг полупречником од 8 cm. Велики круг је спољни за мали круг.

Спољашња заједничка дирка. — Кругови могу имати заједничке дирке, ако није један унутрашњи за онај други. Нека нам је дато да повучемо заједничку дирку на два дата круга (сл. 179). Ми ћемо претпоставити да смо је већ повукли и да је то дирка T. Из O и O' спустимо на њу управое (OB и $O'C$). Из O' повучемо праву $O'A \parallel T$. Имаћемо ово:

$$OA = OB - AB, \text{ тј. } OA \cdot R = r.$$

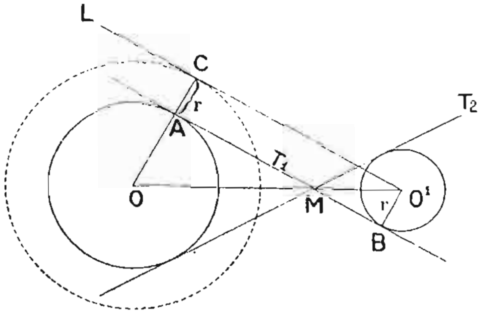


Сл. 179.

$O'A$ је дирка повучена на круг описан из O полупречником $(R - r)$. Тангента T је паралелна са том помоћном дирком $O'A$.

Одатле се види конструкција те заједничке дирке.

Најпре $OA = R - r$, па круг из O полупречником OA. Затим дирка из O' на тај мали круг. Потом OB кроз добивену тачку A. Најзад из B паралелна са AO'.



Сл. 180.

Унутрашња заједничка дирка. — Повући унутрашњу заједничку дирку за два дата круга.

Претпоставимо да смо решили задатак (сл. 180). Повући ћемо из O' праву $L \parallel T_1$ (L паралелну са T_1). Кроз додирну тачку A и кроз центар O повући ћемо једну праву до пресека C. Пошто је $OA \perp T_1$, а $L \parallel T_1$, биће $OC \perp L$. Значи да је L дирка на кругу описаном из O полупречником $OC = R + r$.

Конструкција. — Из O круг полупречником $(R + r)$. На нови круг дирка из O'. Из O права OC. Она сече круг O у A. Из A паралелна са CO'. То је тражена дирка.

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај круг и повуци тетиву. Имаш ли сад две симетричне слике?

2. — Како треба да лежи тетива, па да гради на кругу две симетричне слике?

3. — Датој тетиви конструиши тетиву симетричну према пречнику.

4. — Јесу ли једнаке међу собом сваке две тетиве симетричне према пречнику?

5. — Да ли две једнаке тетиве на истоме кругу имају увек симетриску осовину? Како иде та осовина?

6. — Јесу ли сваке две тетиве симетричне према пречнику?

7. — Одреди положаје ових кррговa: $r = 3$ cm., $R = 4$ см., $c = 8$ cm.

8. — Исто за $c = 7$ cm, $r = 1$ cm, $R = 5$ cm.

9. — Исто за $c = 7$ cm, $r = 3$ cm, $R = 10$cm.

10. — Исто за $c = 0$ cm, $r = 3$ cm, $R = 4$ cm.

11. — Исто за $c = 5$ cm, $r = 6$ cm, $R = 8$ cm.

12. — Исто за $c = 4$ cm, $r = 2$ cm, $R = 2$ cm.

13. — Исто за $r = 5$ cm, $R = 7$ cm, $c = 9$ cm.

14. — Исто за $c = 2$ cm, $r = 4$ cm, $R = 7$ cm.

15. — Исто за $c = 4$ cm, $r = 7$ cm. $R = 8$ cm.

16. — Исто за $c = 10$cm, $r = 8$ cm, $R = 9$ cm.

17. — У којим положајима могу бити два круга $R = 5$ cm, $r = 4$ cm, $c = 7$ cm, као R опада од 5 до 0,5?

18. — У којим положајима могу бити два круга, кад је $c = 6$ cm, а други полупречник једнако расте од 1 см. па даље?

19. — У којим положајима могу бити два круга једнаких полупречника?

20. — У којим положајима могу бити два круга, кад је $c = 5$ cm, $R = 2$ cm, $r = 0,5$ cm, па R и r једнако равномерно расту?

21. — Доказати да не могу имати заједнички центар кругови који се секу.

22. — Нацртај два круга једнаких полупречника, да иду кроз исту тачку M.

23. — Наћи геометриско место центара кругова, који имају полупречник од 3 cm, а сви пролазе кроз дату тачку A.

24. — Центри два круга $r = 3$ cm, $R = 5$ cm, налазе се на растојању од 10 cm. Оба центра леже на правој L. Кругови се крећу један другоме у сусрет с центрима по правој L. Описати све њихове положаје док се O не поклопи с O'.

25. — Два круга који имају заједнички центар не могу се сећи.

26. — Нацртај два круга који се секу под углом од 30°.

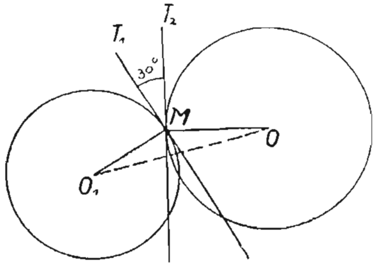
То значи да у пресечној тачци дирке T_1 и T_2 стоје под углом од 30°. Слика 181. — Најпре круг O_1. На њему полупречник O_1 M. У M дирку T_1. Затим T_2 под углом од 30°, итд.

27. — Нацртај два круга који се секу под углом од 45°.

28. — Нацртај два круга који се секу под углом од 25 гради.

29. — Нартај два спољна круга, па им повуци све заједничке дирке.

30. — Шта бива са унутарњим диркама, кад се кругови стану ближити један другоме?



Сл. 181

31. — Колико заједничких унутарњих дирки имају кругови који се додирују споља? Зашто?

32. — Израчунај дужину заједничке спољне дирке, кад је $R = 7$ cm, $r = 2$ cm, $c = 13$ cm. (Сл. 179, дуж BC.)

33. — Кад кругови не могу имати унутрашњу заједничку дирку?

34. — Кад кругови не могу имати заједничку спољну дирку?

35. — Израчунати дужину заједничке спољне дирке за кругове $R = 12, 5$cm, $r = 4, 5$cm, кад се они додирују споља.

36. — Заједничке спољне дирке секу се на правој која пролази кроз оба центра. (Доказ помоћу симетрије).

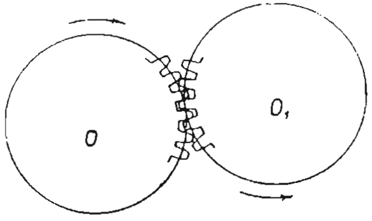
37. — Кад ће заједничке спољне дирке бити паралелне са централом?

38. — Кад је заједничка спољна дирка управна на централи?

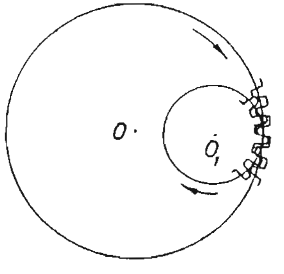
39. — Може ли унутрашња заједничка дирка бити паралелна са централом? Може ли бити управна на њој?

40. — Два зупчаста точка су у додиру какав показује слика 182. Могу ли се окретати у истом слислу? (Овакав додир зове се обрнут додир).

41. — Два зупчаста точка се додирују као што показује слика 183. Могу ли се окретати у итом смислу? (Овакав додир зове се управан додир).



Сл. 182



Сл. 183

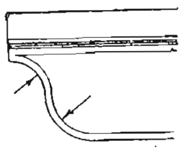
42. — Два круга r и r_1 додирују се споља. Њихови центри и порупречник r_1 се не мењају, али r једнако расте. Шта бива са спољним диркама? Да ли ће их једном нестати?

43. — Исти кругови, само што r једнако опада, а r_1 је стално. Иста питања.

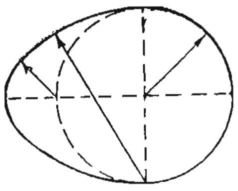
44. — Дата су два круга O и O_1 са $c = 6$ cm, $R = 3$ cm, $r = 2$ cm. Под којим углом се види круг O из центра O_1?

(То је угао под којим се секу дирке повучене из центра мањег круга на велики круг. Нацртај. Повуци и централу. Има ли ту правоуглих троуглова? Колика је хипотенуза? А мања управна страна?)

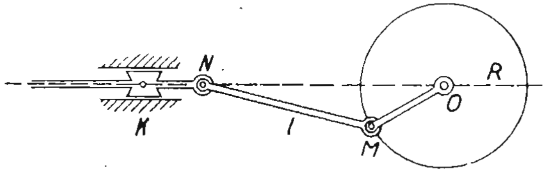
45. — Нацртај три једнака круга који се додирују све два и два. Повуци им заједничке спољне дирке. Добићеш троугао. Докажи да је равностран.



Сл. 184.



Сл. 185.



Сл. 186.

46. — Један круг се котрља по обиму другога круга који се не креће. Какву линију описује центар покретнога круга? Доказ.

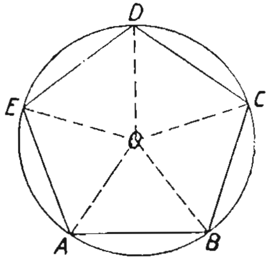
47. — На огради си видео овакав украс. (Сл. 184). Како се он може нацртати?

48. — Може ли се нацртати „јаје“ (сл. 185) помоћу кругова?

49. — Један точак са машине (сл. 186) обрће се. Он тиме повлачи и потискује клип K. При томе кретању помера се ручица l у завртњима M и N. За коју највећу дужину потискује точак R онај клип K?

VII — ПРАВИЛНИ МНОГОУГАОНИЦИ

Правилан многоугаоник. — Опишимо један круг (сл. 187) и поделимо пун угао O на 5 једнаких делова. Тада ће бити једнаки луци AB, BC, CD, DE и EA. Ако спојимо добивене деоне тачке, имаћемо један многоугаоник $ABCDE$. Све његове стране су међу собом једнаке, пошто једнаким луцима одговарају једнаке тетиве. Сви његови углови су једнаки. Они су периферискиуглови над истим луцима. (Напр. угао AED је периферискиугао над луком $ABCD$. Тај лук је једнак с луком $BAED$. Над њим је периферискиугао BCD). Према томе је угао AED једнак с углом BCD.

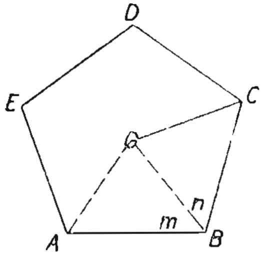


Сл. 187.

Овакав многоугаоник чије су све стране међу собом једнаке и сви углови међу собом једнаки, зове се правилан многоугаоник, или правилан полигон. Наша слика 187 претставља један правилан петоугаоник.

Особине правилног многоугаоника. — 1 **Око правилног многоугаоника може се увек описати круг.**

Узмимо један правилан петоугаоник (сл. 188). Повуцимо симетрале два суседна угла A и B. Оне ће се пресећи у једној тачци. Нека је то тачка O. Она је подједнако удаљена и од A и од B, пошто је троугао ABO равнокрак. Та тачка мора бити подједнако удаљена и од остала три темена тако да је $AO = BO = CO = DO = EO$. Ми ћемо доказати само да је $OA = OC$. Обрнимо троугао ABO око OB за два права угла. Овде је $\sphericalangle m = \sphericalangle n$, те ће крак BA пасти по краку BC. Како је $BA = BC$, мора A пасти на C. Теме O и после обртања задржава свој положај. То значи да ће

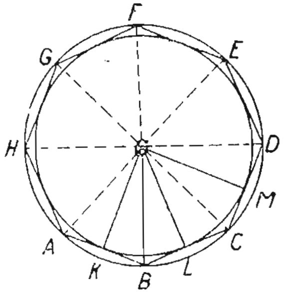


Сл. 188.

се OA поклопити са OC. Лако је даље доказати да је $OB = OD$, $OC = OE$. Тако излази да је O подједнако далеко од свих темена. O је центар описаног круга. Наш правилни полигон може се уписати у кругу.

2. — **У сваком правилном полигону центар описаног круга је у исто време центар уписаног круга.**

Упишимо један правилни осмоугаоник у дати круг (сл. 189). Из центра описаног круга спустимо управне на три узастопне стране.



Сл. 189.

Троугао ABO је симетричан са троуглом BOC према BO. Отуда: $OK = OL$.

Троугао BOC је симетричан са троуглом COD према CO. Отуда $OL = OM$.

Тако се редом може доказати да је O подједнако удаљено од свих полигонових страна. Значи да је O у исто време и центар уписанога круга.

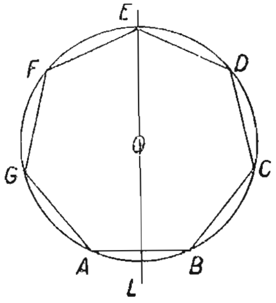
Отуда излази и ова полигонова особина:

3. — **У сваки правилан полигон може се уписати круг.**

4. — **Сваки правилан полигон може се обртањем око сама себе довести до поклапања онолико пута, колико има темена.**

Узмимо да се полигон $ABCDE$ (сл. 187) обрће око сама себе тако, да A падне на B. Пошто B прелази по кружном луку исти толики пут оно ће пасти на C,C на D,D на E,E на A. Полигон ће се поклопити са самим собом.

5. — **Сваки правилан полигон има онолико симетриских осовина колико има темена.**



Сл. 190.

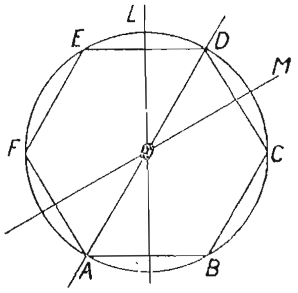
а) *Полигон с непарним бројем страна.*

Узмимо један правилан седмоугаоник (сл. 190). Опишимо круг и повуцимо симетралу једног угла. Рецимо угла E. Она ће бити и симетрала полигонова.

И збиља је F симет. са D према L. (Углови код E једнаки и $EF = ED$).
G „ C „ L.
A „ B „ L. (Лук $EFGA$ једнак с луком $EDCB$.)

Значи да нам симетрала угла даје симетралу целе слике. Имамо 7 углова; имаћемо седам полигонових симетрала.

b) *Полигон с парним бројем страна.*



Сл. 191.

Узимо један правилан шестоугаоник (сл. 191) уписан у кругу. Повуцимо симетралу угла A. Она ће у исто време бити симетрала и угла D. Она је у исто време и симетрала целе слике. То је лако доказати Таквих симетрала имаћемо још две: BE и CF. Свега три.

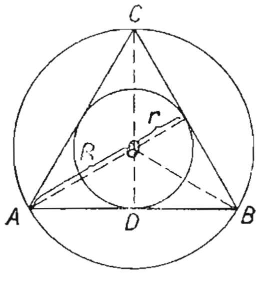
Повуцимо сад симетралу L стране E D. Према њој лежи симетрично C и F, B и A. Значи да је она симетрала целе слике. Имаћемо још две такве симетрале M и ... (Која је трећа симетрала страна?). Дакле свега 6 симетрала.

Један угао правилнога полигона. — Видели смо (стр. 55) да је збир свих углова у ентоугаонику: $(n - 2)\ 2D$. Како су код правилног полигона сви углови међу собом једнаки, један угао износиће енти део тога збира. Према томе, један угао α правилнога полигона од n страна биће:

$$\boxed{\alpha = \frac{(n-2)\ 2D}{n}}$$

Да проверимо овај образац на равностраном троуглу.

$$\alpha = \frac{(3-2)\cdot 180^0}{3} = \frac{1\cdot 180^0}{3} = 60^0.$$



Сл. 192

Равнострани троугао. — То је правилан полигон од три стране. Узмимо један такав троугао (сл. 192). Нека му је страна a. — Из троугла ADC излази:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Одатле је:

$$\boxed{h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.}$$

Полупречник описаног круга. — Пошто је овде висина у исто време и тежишна линија, биће·

$$R = AO = \frac{2}{3} h$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$\boxed{R = \frac{a}{3} \sqrt{3}}$$

Полупречник уписаног круга. — Пошто је $r = \frac{1}{2} R$, биће:

$$r = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

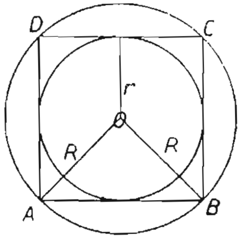
Површина. $p = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{a \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$

$$\boxed{p = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}}$$

Квадрат. — Нека је a страна нашега квадрата $ABCD$ (сл. 193).

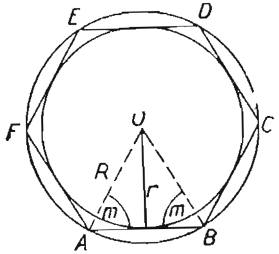
Полупречник уписаног круга. — Он је овде: $r = \frac{a}{2.}$

Полупречник описаног круга. — Из троугла ABO имамо:



Сл. 193

$$R^2 + R^2 = a^2$$
$$2R^2 = a^2$$
$$R^2 = \frac{a^2}{2}$$
$$R^2 = \frac{2a^2}{4}$$
$$R = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$



Сл. 194

Правилан шестоугаоник. — Нека му је страна a (сл. 194). Један угао правилнога шестоугаоника биће:

$$A = \frac{(n-2)\,2\,D}{n} = \frac{(6-2) \cdot 180^0}{6} = \frac{4 \cdot 180^0}{6} = 4.30^0 = 120^0$$

Даље је $\sphericalangle \quad m = \frac{1}{2} A = 60^0$

$\sphericalangle \ ABO = \frac{1}{2} \cdot B = 60^0$ Значи да је троугао ABO равностран.

Полупречник уписаног круга. — Овде је r висина у равностраном троуглу ABO. Отуда је:

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad \text{или} \quad r = \frac{R}{2} \sqrt{3}$$

Површина. — Овде је:

$$p = 6\ ABO = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3a^2}{2} \sqrt{3} \qquad \text{или} \quad p = \frac{3R^2}{2} \sqrt{3}$$

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај круг и упиши му равностран троугао помоћу средишних углова (као на сл. 187).

2. — Помоћу средишних углова упиши квадрат у круг.

3. — „ „ „ „ у круг петоугаоник.

4. — „ „ „ „ „ „ шестоугаоник.

5. — У дати круг брзо упиши правилан шестоугаоник.

6. — Уписан је квадрат у кругу. Како ћеш уписати правилан осмоугаоник не служећи се средишним угловима?

7, — Нацртан је круг. Опиши му равностран троугао. (Његове стране су дирке на кругу O. Нека додирују круг у тачкама A, B и C. Колики је угао ABO?)

8. — Опиши квадрат око круга.

9. — Опиши правилан петоугаоник око круга.

10. — Опиши правилан шестоугаоник око круга.

11. — Колико најмање обртање треба да изврши равнострани троугао, па да се поклопи са самим собом?

12. — Колико је такво обртање за правилан петоугаоник?

13. — „ „ „ „ „ „ шестоугаоник?

14. — „ „ „ „ „ „ осмоугаоник?

15. — Колико симетриских осовина има равнострани троугао? Покажи и докажи.

16. — Колико симетриских осовина има квадрат?

17. — „ „ „ има правилан осмоугаоник?

18. — Израчунати један угао правилнога петоугаоника у степенима и градима.

19. — Исто за правилан шестоугаоник.

20. — „ „ „ седмоугаоник. (Је ли лакше у градима или у степенима?)

21. — Исто за правилан осмоугаоник.

22. — „ „ „ дванаестоугаоник.

23. — Кад расте број страна правилнога полигона, расте ли и његов угао?

(Образац $\alpha = \frac{(n-2)\,2D}{n}$ можемо и овако написати: $\alpha = (1 - \frac{2}{n})\,2D$.

Поделили смо и бројилац и именилац са n. — Гледај сад шта бива са $\frac{2}{n}$ кад расте n. Шта бива са $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, кад расте n? Шта бива са углом, кад расте n?

24. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 140°?

(Шта ти је сад познато у обрасцу $\alpha = \frac{(n-2).\,2D}{n}$?)

25. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 160 гради?

26. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 166,6667 гради?

27. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 156°?

28. — Колико страна има прлвилан полигон чији је један угао 175 гради?

29. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 160°?

30. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 180 гради?

31. — Колико страна има правилан полигон чији је један угао 184 града?

32. -- Постоји ли правилан полигон чији је један угао 165°?
33. — „ „ „ „ „ „ „ „ 150°?
34. — „ „ “ „ „ „ „ „ 120 гради?
35. — „ „ „ „ „ „ „ „ 150 гради?
36. — „ „ „ „ „ „ „ „ 125 степени?

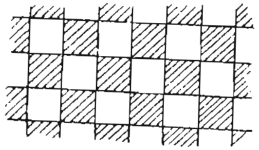
37. — Може ли се под поплочати све самим квадратићима? (Сл. 195).

(Око једне тачке — M, слика 196. — можемо ређати квадратиће тако, да се попуни пун угао).

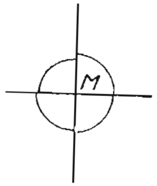
38. — Може ли се под поплочити све самим равностраним троугловима?

(Да видимо. Један угао је шесет степени, 360°: 60° = 6. Може, ако се око једне тачке поређају 6 равностраних троуглова. — сл. 197).

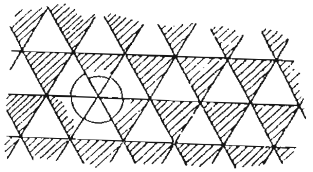
39. — Може ли се под поплочати све самим правилним шестоугаоницима? Израчунај, па нацртај.



Сл. 195.



Сл. 196.



Сл. 197.

40. — Може ли се под поплочати помешаним квадратима и правилним шестоугаоницима? Израчунај, па нацртај.

41. — Може ли се под поплочати све самим правилним петоугаоницима?

42. — У равностраном троуглу израчунај h, r и R, кад је $a = 2$ cm.

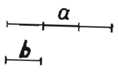
43. — У равностраном троуглу израчунај a, h и R, кад је $r = \frac{1}{6}$ cm.

44. — У равностраном троуглу израчунај a, h и r, кад је $R = \frac{1}{3}$ cm.

45. — У равностраном троуглу израчунај a, r и R, кад је $h = 7$ cm.

46. — У квадрату израчунај r, R и a, кад је $h = 2$ cm.
47. — „ „ „ a, r и h, кад је $R = 2\sqrt{2}$ cm.
48. — „ „ „ a, h и R, кад је $r = 3$ cm.
49. — У правилном шестоугаонику h, r и p, кад је $a = \sqrt{3}$ cm.
50. — „ „ „ r, a и p, кад је $R = 12$ cm.
51. — „ „ „ a, R и p, кад је $r = 7$ cm.

VIII СЛИЧНОСТ РАВНИХ ЛИКОВА



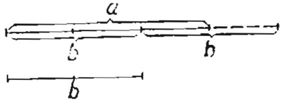
Сл. 198.

Размера дужи. — Узмимо две дужи a и b (сл. 198). У коме су односу те две дужи? Дуж b се може тачно три пута пренети (размерити) по дужи a. Број 3 је одговор на горње питање. Он казује однос дужи a према дужи b. Ми то изражавамо овако, знаком дељења:

$$a : b = 3$$

Овакав однос двеју дужи зове се размера дужи.

Количник равмере. — Број који показује однос двеју дужи из размере, зове се количник размере. Он може бити цео број. Такав је био у малопређашњем примеру. Он може бити и разломак На слици 199 види се да је $a = \frac{3}{2}\ b$, тј. да је $a : b = \frac{3}{2.}$



Сл. 199.

Самерљиве дужи. — Видели смо да се мања дуж могла цео број пута пренети по већој дужи, када је количник размере био цео број. Заједничка мера за обе дужи јесте сама дуж b. Њу смо могли пренети 1 пута по b, а 3 пута по a.

Кад је количник размере био разломак, нисмо могли мању дуж цео број пута пренети по већој дужи. Могли смо само један део мање дужи да преносимо цео број пута по већој дужи. Половину дужи b могли смо 3 пута пренети по дужи a.

У првоме случају заједничка је мера била дуж b; у другоме случају заједничка је мера била $\frac{b}{2}$·

Дужи које имају заједничку меру, зову се самерљиве дужи.

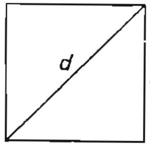
Несамерљиве дужи. — Количник размере може бити и ирационалан број. На пр.:

Наћи однос дијагонале и стране једнога квадрата (сл. 200).

Нека је страна $a = 2$ cm. Дијагонала ће бити:

$$d^2 = 2a^2.$$

$$d = a\sqrt{2}$$



Сл. 200.

А колики ће бити однос дијагонале и стране? $d : a = a\sqrt{2} : a = \sqrt{2}.$ Скратили смо са a. Види се да однос дијагонале и стране не зависи од стране, ни од дијагонале. Није нам сад потребно да узимгмо дужину стране.

Однос квадратове стране и дијагонале је *ирационалан број* $\sqrt{2}.$

Да потражимо заједничку меру стране и дијагонале.

Је ли то дуж a? Није? Она се не може цео број пута пренети по d, пошто $\sqrt{2}$ није цео број.

Узмимо дуж $\frac{a}{10}$· Она се може 10 пута пренети по a. А по d?

$$d: \frac{a}{10} = a\sqrt{2} : \frac{a}{10} = \sqrt{2} : \frac{1}{10} = 10\sqrt{2} = 10. 1,4142\ldots = 14,142\ldots$$

Дуж $\frac{a}{10}$ није мера за d, пошто се не може цео број пута пренети по d.

Узмимо дуж која је енти део од a. То је дуж $\frac{a}{n}$.

Колико пута се она може пренети по a?

$a: \frac{a}{n} = a. \frac{n}{a} = n.$ Дуж $\frac{a}{n}$ може се пренети n пута по a.

Колико се пута може пренети по d?

$$d: \frac{a}{n} = a\sqrt{2} : \frac{a}{n} = n\sqrt{2} = n \cdot 1,4142\ldots$$

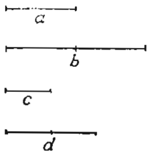
Опет није цео број. Значи ма како делили дуж a на једнаке делове, никад се тај поделак не може цео број пута пренети по d.

Кад је однос двеју дужи ирационалан број, оне немају заједничке мере.

Дужи које немају заједничке мере зову се *несамерљиве дужи.*

Пропорција. — Једнакост која показује да су две размере дужи једнаке, зове се пропорција дужи.

Узмимо четири дужи a, b, c и d (сл. 201). Са слике се види да је $a: b = \frac{1}{2}$ и $c:d = \frac{1}{2}$ Исти је однос између a и b, као и између c и d. Кад то изразимо једнакошћу добијамо ову пропорцију дужи:



Сл. 201.

$$a: b = c: d$$

Зраци пресечени паралелним пресечницама. — I — Повуцимо два зрака из тачке A (сл. 202). То су зраци AB и AC. Пресецимо их паралелним пресечницама L и M.

Узмимо да се AD може 3 пута пренети по AE. То значи да је $AD = DK = KE$. Отуда је

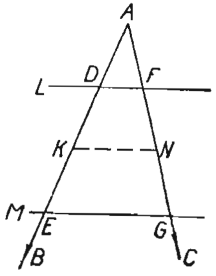
(1) $AE : AD = 3$

Из K повуцимо паралелну са L. Знамо да ће сад и AG бити подељено на три једнака дела. Отуда је:

(2) $AG : AF = 3$

Кад уједначимо (1) и (2), добијамо:

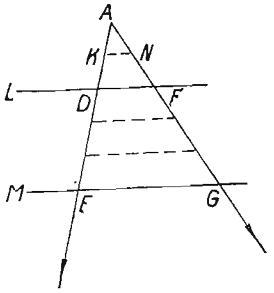
(3) $AE : AD = AG : AF$



Сл. 202.

Отуда ова теорема: Кад два зрака повучена из исте тачке пресечемо двема паралелним пресечницама, отсечци на једном зраку чине пропорцију са отсечцима на другоме зраку.

II — Узмимо да се мањи отсечак не може цео број пута пренети по већем отсечку (сл. 203).



Сл. 203.

Ако не може AD да се пренесе цео број пута по AE, може његова половина AK. Биће $AD = 2AK$, $AE = 5AK$. Отуда је

$$AE : AD = 5AK : 2AK = \frac{5}{2}.$$

Исто тако је $AG : AF = \frac{5}{2}$.

Видимо да је $AE : AD = AG : AF$.

Значи, наша теорема важи и онда, кад је однос дужи изражен разломком.

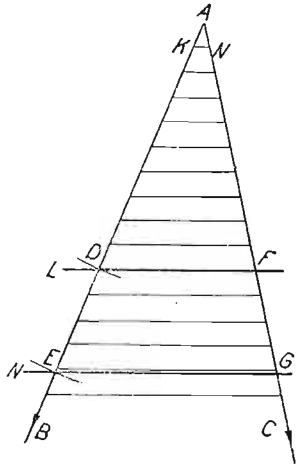
III. — Да видимо да ли наша теорема важи и онда, кад је однос дужи ирационалан број.

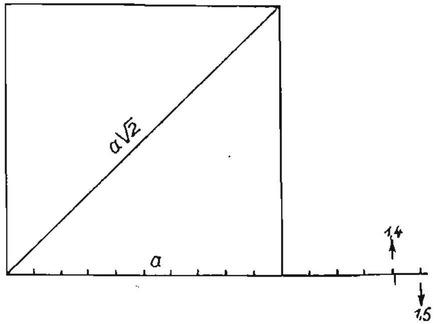
Узмимо опет два зрака из тачке A (сл. 204). Пренесимо на зрак AB најпре страну, а затим дијагоналу овога квадрата. Нека је страна дугачка AD, а дијагонала AE.

Знамо да је $AE : AD = \sqrt{2} = 1{,}4142...$

Хоћемо да докажемо да мора бити $AE : AD = AG : AF$.

Видимо да је





Сл. 204

$$1 < \frac{AE}{AD} < 2$$

(AD се може пренети 1 пута на AE али не и 2 пута) —

Исто тако је

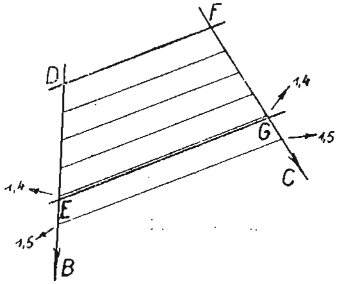
$$1 < \frac{AG}{AF} < 2$$

(AF се може пренети 1 пут на AG, али не може 2 пута)

Изделимо сад AD на 10 поделака једнаких са AK. Те подеоке пренесимо по AE. Из деоних тачака повуцимо паралелне са L. Видимо да је:

$$1{,}4 < \frac{AE}{AD} < 1{,}5$$

Између истих поделака мора се налазити и тачка G. Откуда то долази?



Сл. 205.

Нека је AE између 1,4, и 1,5 (сл. 205). Тада и AG мора бити између 1,4 и 1,5.

Нека G падне у 1,5. Тада је на краку AB од 1,4 до E дужина мања од $\frac{1}{10}$, а на краку AC је од 1,4 до G дужина од $\frac{1}{10}$ AF. Значи да EG није паралелно са DF. Како смо ми повукли EG паралелно са DF, тачка G не може сићи у тачку која је 1,5 од AF. То даље значи, да ће се тачке E и G увек налазити између истих поделака. Овако:

Кад је E између 1,4 и 1,5 тада је G између 1,4 и 1,5.

Кад је E између 1,41 и 1,42 тада је G између 1,41 и 1,42.

То значи да ће бити ово:

$$\frac{AE}{AD} = 1{,}4..... \qquad \frac{AG}{AF} = 1{,}4.....$$

$$\frac{AE}{AD} = 1{,}41...... \qquad \frac{AG}{AF} = 1{,}41......$$

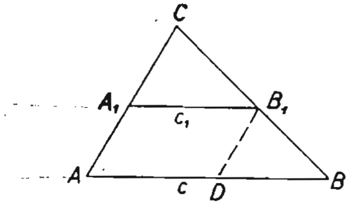
$$\frac{AE}{AD} = 1{,}414..... \qquad \frac{AG}{AF} = 1{,}414.....$$

Пошто ће те две размере бити увек изражене *истим* непотпуним бројем, морају бити једнаке:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$$

Наша теорема важи и онда, кад је количник размере ирационалан број.

III. — **Отсечци на пресечницима (трансвервалама) сразмерни су са отсечцима на зрацима.** — Узмимо два зрака CA и CB (сл. 206). Пресецимо их двема паралелним пресечницама AB и A_1B_1. На зрацима имамо отсечке CA_1 и CA, CB_1 и CB, а на пресечницама: A_1B_1 и AB.



Сл. 206

Повуцимо из B_1 паралелну са CA. Сад имамо из тачке B повучена два зрака: BC и BA пресечена двема паралелним пресечницама B_1D и CA. Зато ће бити:

$$(1) \quad \frac{BA}{BD}=\frac{BC}{BB_1}$$

Обележимо $BC = a$, $B_1C = a_1$; $A_1B_1 = c_1$, $AB = c$.

Тада (1) можемо и овако написати:

$$\frac{c}{c-c_1}=\frac{a}{a-a_1}.$$

Одатле је:

$$c(a-a_1)=a(c-c_1)$$

$$ac-a_1c=ac-ac_1$$

$$a_1c=ac_1$$

$$c=\frac{ac_1}{a_1}$$

$$\frac{c}{c_1}=\frac{a}{a_1} \quad \text{тј.}$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C}.$$

Пошто је

$$\frac{BC}{B_1C}=\frac{AC}{A_1C},$$

биће:

$$(2) \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C}=\frac{AC}{A_1C}.$$

Тиме је наше тврђење доказано: отсечци на пресечницама сразмерни су са отсечцима на зрацима.

У свакој сразмери унутарњи чланови могу међусобно мењати места и спољашњи чланови могу међу собом мењати места. На пример:

$$a:b=c:d \quad \text{тј.}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{Одатле је:}$$

$$(3) \quad ad=bc.$$

Једнакост (3) казује ово: у сразмери је производ спољашњих чланова једнак с производом унутрашњих чланова. Међутим ми знамо да производ не мења вредност, ако му чиниоци промене места. ($abc = bac = bca$). Зато у сразмери

$$a:b=c:d$$

можемо променити места унутарњим члановима:

$$a:c=b:d$$

Сразмера остаје у важности и даље, јер је опет:

$$ad=cb.$$

Из једнакости (2) узимамо прве две размере и добијамо ову сразмеру (пропорцију):

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C}$$

Њу можемо и овако написати:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \quad \text{(сл. 206).}$$

И ово:

$$\frac{AC}{A_1C_{\cancel{1}}}=\frac{BC}{B_1C} \quad \text{можемо и овако написати:}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A_1C}{B_1C}$$

И ово:

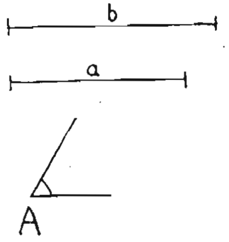
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C} \quad \text{можемо и овако написати:}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{\underset{1}{AC}}.$$

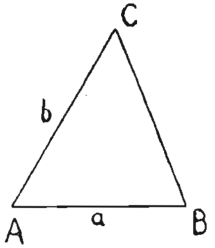
РЕШАВАЊЕ ПРАВОУГЛОГ ТРОУГЛА

ТРИГОНОМЕТРИЈА

Задатак тригонометрије. — Нека је дуж a (сл. 208) основица једног троугла, b једна страна, A угао између тих двеју страна.



Сл. 207.



Сл. 208.

Ми можемо конструисати тај троугао, пошто имамо његове елементе довољне за конструкцију. То је троугао ABC са слике 207.

Можемо ли *израчунати* његову страну BC? Не можемо. Можемо ли израчунати угао B, или угао C? Не можемо.

Да бисмо и то могли, учићемо један део математике који се зове **тригонометрија**.

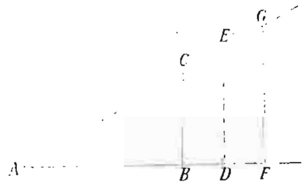
Реч *тригонометрија*, долази од грчких речи: тригонос = троугао и *метрон* = мера.

Тригонометрија има овај задатак: да рачунским путем одреди вредности свих троуглових елемената, кад су рачунски познати елементи довољни за конструкцију тога троугла.

ТРИГОНОМЕТРИСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Синус. — Узмимо један угао A (сл. 209). Са његовог крака AC спустимо неколико управних на крак AB. Добићемо две праве (AB и AC) пресечене паралелним трансверзалама (BC, DE, FG). Због тога ће бити:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG}$$



Сл. 209.

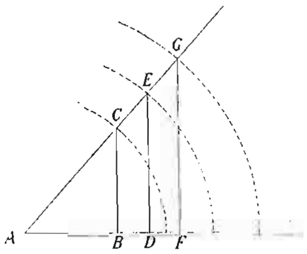
На нашој слици биће $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$.

Док се угао не промени, тај ће однос бити сталан, па ма из које тачке на краку AC спуштали ми управну на крак AB.

Опишимо лукове полупречницима AC, AE, AG, па узмимо један угао већи од A.

Однос стране према оштром углу и хипотенузе сад се променио. На нашој слици (сл. 210) је сад:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{FG}{AG} = \frac{3}{4}$$



Сл. 210.

У правоугломе троуглу ABC (сл. 210) имамо две катете: AB и BC. Катета што лежи према једном углу A зове се *наспрамна катета*, а катета која лежи на једноме краку тога угла зове се *налегла катета*. За угао A (сл. 210) катета BC је *наспрамна катета*, а катета AB је *налегла* катета.

Однос између наспрамне катете једног угла и хипотенузе зове се **синус** тога угла. На слици 210 однос $\frac{BC}{AC}$ је *синус* угла A. То пишемо овако:

$$\frac{BC}{AC} = \sin A.$$

То читамо: „BC према AC једнако синус A“.

Синус је један **неименовани број**, пошто он показује однос двеју страна. У таблицама се налазе израчунате вредности синуса за све углове од 0° до 90°.

Са слика 209 и 210 видимо да синус **зависи од величине самога угла**. Видимо да *синус оштрог угла расте кад угао расте*. Видимо и ово: *синус оштрог угла опада, кад угао опада*.

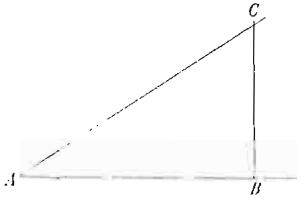
Косинус. — Са слика 209 и 210 видимо и ово:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG}$$

Значи: док се угао не промени сталан је однос налегле катете и хипотенузе. Однос налегле катете једног угла и хипотенузе зове се **косинус** тога угла. На слици 209 однос $\frac{AB}{AC}$ је косинус угла A. То пишемо овако:

$$\frac{AB}{AC} = \cos A$$

То читамо: „AB према AC једнако косинус алфа“.



Сл. 211.

И косинус је **неименован број**, пошто и он показује однос двеју страна. У таблицама се налазе израчунате вредности косинуса за све углове од 0° до 90°.

На слици 211 је

$$\cos A = \frac{5}{6}.$$

Тангенс. — Са слике 210 видимо и ово:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$$

Значи, док се угао не промени, сталан је однос наспрамне катете и налегле катете. Однос наспрамне катете и налегле катете једног угла зове се *тангенс* тога угла. На слици 212 однос $\frac{BC}{AB}$ је тангенс угла A. То пишемо овако:

$$\frac{BC}{AB} = tang\ A \text{ или}$$

$$\frac{BC}{AB} = tg\,A.$$

Сл. 212.

И једно и друго читамо: „BC према AB једнако тангенс A“.

И тангенс је *неименован број*, пошто и он показује однос двеју страна. У таблицама се налазе израчунате вредности тангенса за све углове од 0° до 90°.

На нашој слици 212 је $tg\ A = \frac{2}{7}$.

Котангенс. — Реципрочна вредност тангенса зове се *котангенс*. На слици 212 је $\frac{AB}{BC}$ котангенс угла A. Котангенс једног угла је однос налегле катете и наспрамне катете.

Пишемо га овако:

$$\frac{AB}{BC} = cotang\ A \text{ или}$$

$$\frac{AB}{BC} = cotg\ A.$$

Обоје читамо: „AB према BC једнако је котангенс A“.

Синус, косинус, тангенс и котангенс у првоме квадранту. — Са слике 213 види се ово:

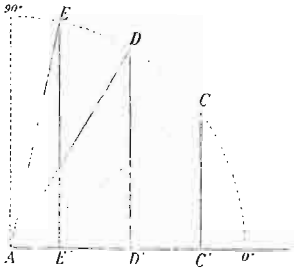
$$\frac{C'C}{AC} < \frac{D'D}{AD} < \frac{E'E}{AE}$$

Угао је растао и синус је растао. *Кад оштар угао расте и његов синус расте.*

Са слике се види и ово:

$$\frac{E'E}{AE} > \frac{D'D}{AD} > \frac{C'C}{AC}$$

Угао је опадао и синус је опадао. *Кад оштар угао опада и његов синус опада.*



Сл. 213.

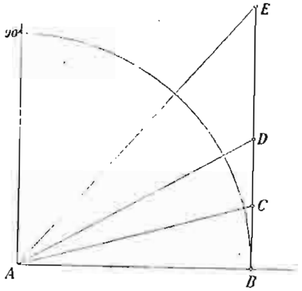
Са слике 213 види се и ово:

$$\frac{AC'}{AC} > \frac{AD'}{AD} > \frac{AE'}{AE}$$

Угао је растао, али је *косинус опадао.*

Кад оштар угао расте, његов **косинус опада.**

Са исте слике види се да **косинус расте, кад оштар угао опада.**



Сл. 214

Са слике 214 се види да тангенс расте, кад оштар угао расте и да тангенс опада, кад оштар угао опада.

$$\frac{BC}{AB} < \frac{BD}{AB} < \frac{BE}{AB}$$

Оштар угао расте и његов тангенс расте.

$$\frac{BE}{AB} > \frac{BD}{AB} > \frac{BC}{AB}$$

Оштар угао опада и његов тангенс опада.

Са слике се види и ово:

$$\frac{AB}{BC} > \frac{AB}{BD} > \frac{AB}{BE}$$

Оштар угао **расте**, а његов котангенс **опада.**

$$\frac{AB}{BE} < \frac{AB}{BD} < \frac{AB}{BC}$$

Оштар угао **опада**, а његов котангенс **расте**.

Тригонометриске функције. — Синус, косинус, тангенс и котангенс зависе од угла. Кад се угао мења, мења се и вредност синуса, косинуса, тангенса и конгангенса. Значи да су синус, косинус, тангенс и котангенс **функције** углова. Синус, косинус, тангенс и котангенс зову се **угловне функције**. Они се зову још и **тригонометриске функције**.

ВЕЖБАЊА

1. — Нацртај један правоугли троугао, па покажи синус, косинус, тангенс и котангенс једног његовог оштрог угла.

2. — Нартај угао чији је синус $\frac{2}{3}$.

[То значи да на слици 209 буде $BC = 2$, $AC = 3$].

3. — Нацртај угао чији је синус $\frac{3}{4}$.

4. — Нацртај угао чији је синус $\frac{3}{5}$.

5. — Нацртај угао чији је синус $\frac{4}{7}$.

6. — Нацртај угао чији је синус 0,3. [Знаш да је $0{,}3 = \frac{3}{10}$].

7. — Нацртај угао чији је синус 0,25

8. — Нацртај угао чији је синус 0,125

9. — Нацртај угао чији је косинус $\frac{2}{3}$.

10. — Нацртај угао чији је косинус $\frac{7}{8}$.

11. — Нацртај угао чији је косинус $\frac{1}{5}$.

12. — Нацртај угао чији је косинус 0,4.

13. — Нацртај угао чији је косинус 0,60

14. — Нацртај угао чији је косинус 0,32

15. — Може ли синус оштрог угла бити већи од јединице? Зашто?

16. — Може ли косинус оштрог угла бити већи од јединице? Зашто?

17. — Нацртај угао од 10^0 па му израчунај синус и косинус.

18. — Нацртај угао од 40^0 па му израчунај синус и косинус.

19 — Нацртај угао од 70^0 па му израчунај синус и косинус.

Напомена — Вредности које будеш добио неће бити тачне. Како се израчунавају тачне вредности синуса и косинуса учићеш много доцније.

20. — Нацртај угао чији је тангенс $\frac{2}{3}$.

21. — Нацртај угао чији је тангенс $\frac{3}{4}$.

22. — Нацртај угао чији је тангенс $\frac{4}{7}$.

23. — Нацртај угао чији је тангенс 0,2

24. — Нацртај угао чији је тангенс 0,25

25. — Нацртај угао чији је тангенс 0,125

26. — Може ли тангенс оштрог угла бити већи од јединице? Зашто?

27. — Колики треба да је угао, па да тангенс буде јединица?

28. — Нацртај угао чији је тангенс $\frac{7}{5}$.

28а. — Нацртај угао чији је тангенс $1\frac{3}{5}$.

29. — Нацртај угао чији је тангенс 2,5

30. — Нацртај угао чији је тангенс 1,6

31. — Нацртај угао чији је котангенс $\frac{2}{3}$.

32. — Нацртај угао чији је котангенс $\frac{4}{5}$.

33. — Нацртај угао чији је контагенс $\frac{5}{7}$.

34. — Нацртај угао чији је контагенс 0,3.

35. — Нацртај угао чији је контагенс 0,4

36. — Нацртај угао чији је контагенс 0,64

37. — Нацртај угао чији је контангенс 0,240

38. Може ли котангенс оштрог угла бити већи од јединице? Зашто?

39. — Колики треба да је угао, па да котангенс буде јединица?

40. — Нацртај угао чији је котангенс $\frac{8}{7}$.

41. — „ „ „ „ „ $1\frac{2}{3}$.

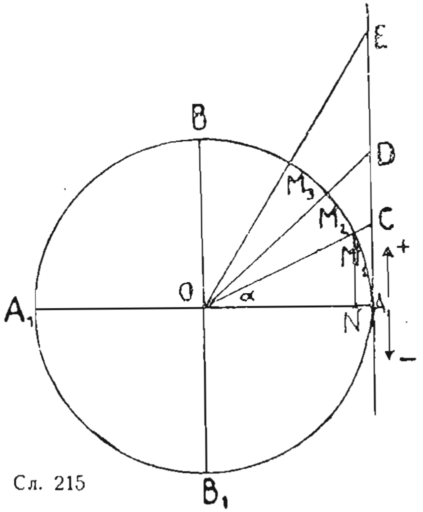
42. — „ „ „ „ „ 1,6

43. — „ „ „ „ „ 2,5.

44. — Нацртај угао од 10^0, па му израчунај тангенс.

(Како се тачно израчунавају вредности угловних функција видећеш много доцније).

45. — Нацртај угао од 20° па му израчунај тангенс.
46. — „ „ „ 30° „ „ „ „
47. — „ „ „ 45° „ „ „ „
48. — „ „ „ 60° „ „ „ тангенс и контангенс.
49. — „ „ „ 75° „ „ „ „



Сл. 215

50. — Ако је угао *AOD* на слици 215 од 45°, какве морају бити међу собом дужи *AO* и *AD*? Може ли се онда без икаквих рачуна одредити вредност за tg 45°?

51. — Ако је угао *AOD* на слици 215 од 45°, какве ће бити међу собом дужи *AO* и *AD*? Може ли се без рачуна одредити вредност за cotg 45°?

52. — Један оштар угао расте ка 90°. Шта бива с његовим тангенсом, а шта с контангенсом?

53. — Један оштар угао опада ка нули. Шта бива с његовим тангенсом, а шта с котангенсом?

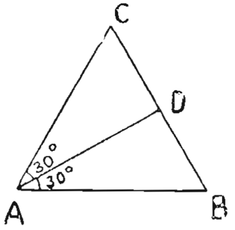
Дате су вредности за тангенсе и котангенсе неких углова. Реци јесу ли ти углови већи или мањи од 45°.

54. $tgA = 1 \ (A = 45^0)$
55. $tgA = 0{,}56 \ (A < 45^0)$
56. $tgB = 1{,}42378$
57. $tgC = 1{,}23689$
58. $tgD = 0{,}79654$
59. $tgF = 0{,}99887$
60. $tg\alpha = 2$
61. $tgD = 3$
62. $cotgA = 2 \ (A < 45^0)$
63. $cotgF = 3$
64. $cotg\beta = 1$
65. $cotgB = 0{,}37865$
66. $cotgA = 0{,}43267$
67. $cotgC = 0{,}99097$
68. $cotgA = 10{,}22345$
69. $cotgC = \frac{2}{7}$

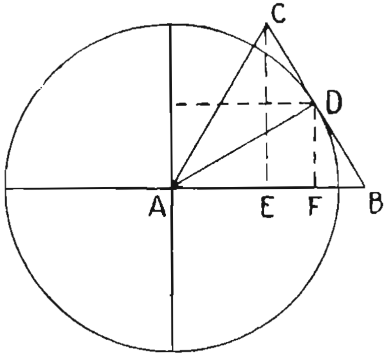
Кажи који је већи од ова два угла *A* и *B*:

70. $tgA = 1 \quad cotgB = 2$
71. $tgA = 1{,}5 \ cotgB = 3$
72. $tgA = 0{,}3 \ cotgB = 4$
73. $tgA = \frac{2}{3} \ cotgB = \frac{3}{5}$
74. $tgA = \frac{5}{6} \ cotgB = 0{,}78964$
75. $tgA = 0{,}35472$ $cotgB = 0{,}23433$
76. $tgA = \frac{1}{3} \ cotgB = 3\frac{2}{5}$
77. $tgA = 1{,}32789$ $cotgB = 2{,}32789$

Тригонометриске функције углова од 30°, 45° и 60°. Косинус угла од 30°. — Угао од 30° видели смо код равностраног троугла (сл. 216). Нацртајмо у првоме квадрату на кругу један оштар угао од 60° (на слици 217 је $\sphericalangle BAC = 60^0$). Конструишимо цео равнострани троугао *ABC*. Нека је $AB = a$. Тада је:



Сл. 216.



Сл. 217.

$$AE = \frac{a}{2}, \text{ и } AF = \frac{3a}{4}.$$

$$AD = h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad DF = \frac{h}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

$$cos\ 30^0 = \frac{AF}{AD} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2 \,.\, 3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Синус угла од 30°. — Са слике се види да је $sin\, 30^0 = \frac{DF}{AD}$. Отуда је:

$$sin\ 30^0 = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Тангенс угла од 30°. — Са слике 217 се види да је: $tg\ 30^0 = \frac{FD}{AF}$. То је даље:

$$tg\ 30^0 = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}a} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Котангенс угла од 30°. — Са слике 217 се види да је:

$$cotg\,30^0 = \frac{AF}{FD} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{a}{4}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

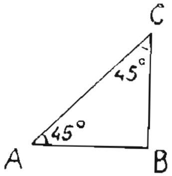
Косинус угла од 45°. — Где смо видели угао од 45°? Код равнокракоправоуглог троугла (сл. 218).

Косинус угла од 45° биће:

$$cos\ 45^0 = \frac{AB}{AC}.$$

Нека је $AB = a$. Тада је $BC = a$. Отуда је $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Зато је:

$$cos\ 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$



Сл. 218.

Синус угла од 45°. — Са слике 218 се види да је: $sin\ 45^0 = \frac{BC}{AC}$. Отуда је:

$$sin\ 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Дакле: $sin\ 45^0 = cos\ 45^0$.

Тангенс и катангенс угла од 45°. — Биће:

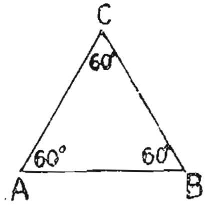
$$tg\ 45^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \text{ (сл. 218)}$$

$$cotg\ 45^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1\ .$$

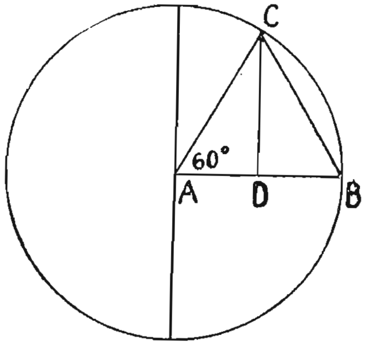
Дакле:

$tg\ 45^0 = cotg\ 45^0 = 1$.

Косинус угла од 60°. — Где смо видели угао од 60°? У равностраноме троуглу (слика 219). Ми ћемо ставити теме у центар круга, па ћемо тако у првоме квадранту добити угао од 60° (сл. 220).



Сл. 219.



Сл. 220.

$$cos\ 60^0 = \frac{AD}{AC}$$

Ако је страна нашег троугла a, биће $AD = \frac{a}{2}$, $AC = a$. Зато је:

$$cos\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \text{ тј. } cos\ 60^0 = \frac{1}{2}\ .$$

Синус угла од 60°. — Са слике 220 се види да ће бити:

$$sin\ 60^0 = \frac{DC}{AC}$$

DC је висина у нашем равностраном троуглу, AC је страна. Зато је:

$$DC = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad AC = a.$$

Отуда је

$$sin\ 60^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad sin\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Тангенс угла од 60°. — На слици 220 биће:

$$tg\ 60^0 = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

Котангенс угла од 60°. — На слици 220 биће:

$$cotg\ 60^0 = \frac{AD}{DC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Из ових се резултата види ово:

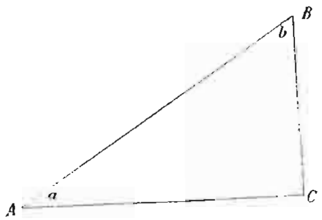
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{sin}\ 30^0 = \mathbf{cos}\ 60^0 = \frac{1}{2} \\ \mathbf{sin}\ 45^0 = \mathbf{cos}\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \mathbf{sin}\ 60^0 = \mathbf{cos}\ 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \mathbf{cos}\ 30^0 = \mathbf{sin}\ 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}}$$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\cos\ 45^0 = \sin\ 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
\cos\ 60^0 = \sin\ 30^0 = \frac{1}{2} \\
\mathrm{tg}\ 30^0 = \mathrm{cotg}\ 60^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\
\mathrm{tg}\ 60^0 = \mathrm{cotg}\ 30^0 = \sqrt{3} \\
\mathrm{cotg}\ 30^0 = \mathrm{tg}\ 60^0 = \sqrt{3} \\
\mathrm{cotg}\ 60^0 = \mathrm{tg}\ 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\
\mathrm{tg}\ 45^0 = \mathrm{cotg}\ 45^0 - 1.
\end{array}
}
$$

ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕМЕНТНИХ УГЛОВА

У свакоме правоугломе троуглу збир два оштра угла износи 90°. У правоуглом троуглу биће:

$$a + b = 90^0$$



Сл. 221.

Углови a и b се допуњују до 90°. Они су *комплементни* углови. Са слике 221 видимо да је:

$$\sin a = \frac{CB}{AB}$$

$$\cos b = \frac{CB}{AB}$$ Значи:

$$\sin a = \cos b.$$

Шта је косинус једног угла? То је *синус* његовог комплементног угла.

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \sin\ b.$$

Зато се косинус и зове скраћено: косинус (комплементног угла синус).

Са слике се види да је:

$$\mathrm{tg}\ a = \frac{CB}{AC}$$

$$\mathrm{cotg}\ b = \frac{CB}{AC}.$$ Значи:

$$\mathrm{tg}\ a = \mathrm{cotg}\ b.$$

Шта је котангенс једног угла? То је тангенс његовог комплементног угла.

$$\mathrm{cotg}\ a = \frac{AC}{CB} = \mathrm{tg}\ b.$$

Зато се котангенс и зове скраћено: котангенс (комплементног угла тангенс).

За функције комплементних углова важе ови односи:

$$a + b = 90^0 \left\{ \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{sin a = cos b} \\ \mathbf{cos a = sin b} \\ \mathbf{tg a = cotg b} \\ \mathbf{cotg a = tg b} \end{array}} \right.$$

На познатим примерима смо већ то видели.

Знамо да је $\sin\ 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos\ 60^0 = \frac{1}{2}$. Дакле: $\sin\ 30^0 = \cos\ 60^0$. $(30^0 + 60^0 = 90^0)$.

Да наведемо још неколико примера:

$$\sin\ 10^0 = \cos\ 80^0$$
$$\sin\ 25^0 = \cos\ 65^0$$
$$\sin\ 50^0 = \cos\ 40^0$$
$$\sin\ 70^0 = \cos\ 20^0$$
$$\cos\ 15^0 = \sin\ 75^0$$
$$\cos\ 82^0 = \sin\ 8^0$$
$$\mathrm{tg}\ 12^0 = \mathrm{cotg}\ 78^0$$
$$\mathrm{tg}\ 48^0 = \mathrm{cotg}\ 42^0$$
$$\mathrm{cotg}\ 6^0 = \mathrm{tg}\ 84^0$$
$$\mathrm{cotg}\ 71^0 = \mathrm{tg}\ 19^0$$

ВЕЖБАЊА

Израчунај вредност ових збирова:

1. $\sin 30^0 + \cos 60^0$
2. $\sin 30^0 + \cos 45^0$
3. $\sin 60^0 + \cos 30^0$
4. $\sin 30^0 + \cos 30^0$
5. $\sin 45^0 + \cos 45^0$
6. $\sin 60^0 + \cos 60^0$
7. $\sin 45^0 + \cos 60^0$
8. $\sin 45^0 + \cos 60^0$
9. $\cos\ 30^0 + \cos\ 60^0$
10. $\mathrm{tg}\ 30^0 + \mathrm{cotg}\ 60^0$
11. $\mathrm{tg}\ 45^0 + \mathrm{cotg}\ 30^0$
12. $\mathrm{tg}\ 45^0 + \mathrm{cotg}\ 30^0$
13. $\mathrm{tg}\ 45^0 + \mathrm{cotg}\ 45^0$
14. $\mathrm{tg}\ 45^0 + \cos\ 60^0$
15. $\mathrm{cotg}\ 45^0 + \sin\ 60^0$

Израчунај вредност ове разлике:

16. $\sin 60^0 - \sin 30^0$
17. $\cos 30^0 - \cos 45^0$
18. $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6}$
19. $\cos 60^0 - \sin 30^0$
20. $\cos 50^0 - \cos 30^0$
21. $\sin 30^0 - \sin 50g$
22. $tg\ 60^0 - tg\ 30^0$
23. $tg\ 60^0 - cotg\ 30^0$
24. $tg\ 30^0 - \sin 30^0$
25. $tg\ 45^0 - \sin 30^0$
26. $cotg\ 45^0 - \cos 60^0$
27. $cotg\ 60^0 - \sin 60^0$

Удеси доње изразе тако, да x буде изражено само синусом:

28. $x = \sin 30^0 + \cos 60^0$
29. $x = \sin 45^0 + \cos 45^0$
30. $x = \cos 30^0 + \sin 60^0$
31. $x = \sin 30^0 + \cos 45^0$
32. $x = \cos 30^0 + \sin 45^0$
33. $x = \sin 45^0 + \cos 69^0$

Удеси доње изразе тако, да y буде изражено само синусом:

34. $y = \cos 30^0 + \sin 60^0$
35. $y = \cos 45^0 + \sin 45^0$
36. $y = \cos 60^0 + \sin 30^0$
37. $y = \cos 45^0 + \sin 45^0$
38. $y = \cos 60^0 + \sin 60^0$
39. $y = \cos 30^0 + \sin 30^0$
40. $y = \cos 30^0 + \sin 45^0$
41. $y = \sin 10^0 + \cos 50^0$
42. $y = \sin 12^0 + \cos 35^0$
43. $y = \sin 42^0 + \cos 12^0$
44. $y = \sin 4^0 + \cos 14^0$

Удеси доње изразе тако, да x буде изражено само тангенсом:

45. $x = tg\ 30^0 + cotg\ 30^0$
46. $x = tg\ 45^0 + cotg\ 45^0$
47. $x = tg\ 12^0 + cotg\ 20^0$
48. $x = tg\ 40^0 + cotg\ 18^0$

УПОТРЕБА ТАБЛИЦА

Постоје таблице где се налазе вредности за четири кружне функције које смо досад познали. За дати угао можемо одредити вредност функције и за дату вредност функције можемо одредити угао. Како се то ради показаћемо на примерима.

Узмимо један одељак из таблица. (На стр. 117).

У нашим таблицама имамо обележене углове слева и сдесна. Слева су углови од 0° до 45°. Када нам је дат неки угао мањи од 45°, натписе кружних функција читамо у првоме положеноме ступцу озго. (Степени, минути, синус, итд.).

Сдесна су углови од 45° до 90°. Углови расту оздо навише. За те углове читамо натписе кружних функција у првоме положеноме ступцу оздо.

Степени	Минути	Синус	Косинус	Тангенс	Котан-генс	Минути	Степени
28	0	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	0	62
	10	47204	158	545	6760	50	
	20	460	020	920	5462	40	
	30	716	87882	54296	4177	30	
	40	971	743	673	2906	20	
	50	48226	603	55051	1649	10	
29	0	481	462	431	0405	0	61
	10	735	321	812	79174	50	
	20	989	178	56194	7955	40	
	30	49242	036	577	6749	30	
	40	495	86892	962	5556	20	
	50	748	748	57348	4375	10	
30	0	50000	603	735	3205	0	60
	10	252	457	58124	2047	50	
Степени	Минути	Косинус	Синус	Котан-генс	Тангенс	Минути	Степени

Задатак 1. — *Наћи у таблицама вредност за sin 28°30°.* Наш је угао мањи од 45°. Зато ћемо га тражити у усправном ступцу лево, а натпис где пише „синус“ тражићемо у првоме положеноме ступцу озго.

Наши углови у таблицама имају степене и десетице минута. У четвртоме положеноме ступцу озго налазимо угао од 28°30′. Одмах поред њега је његов синус.

$\sin 28^0 30' \approx 0{,}47716.$

Задатак 2. — *Наћи вредност за cos 60°40′.*

И тај угао можемо одмах наћи у таблицама. Пошто је већи од 45°, тражићемо га у првоме ступцу сдесна. Оздо у шестоме ступцу налазимо угао од 60°40′. Сад оздо тражимо натпис „косинус“. Држимо прст десне руке на 60°40′. Прст леве руке је на доњем наслову „косинус“. Доњи прст вучемо право навише, а десни прст право налево. Добијамо број 0,48989.

$\cos 60^0 40' \approx 0{,}48989.$

Задатак 3. — *Наћи вредност за cos 29°33'.*

Наш је угао у таблицама између 29°30' и 29°40'. Пошто косинус оштрог угла опада кад угао расте, морамо видети за колико косинус опадне између два узастопна угла у таблицама.

$\cos 29^\circ 30'$ 0,87036
$\cos 29^\circ 40'$ 0,86892
144

Ова се разлика зове **таблична разлика**. Обележаваћемо је са d

$d = 144.$

Сад овај рачун:

Кад лук порасте за 10 минута, косинус опадне за 144 крајње јединице. А кад лук порасте за 3 минута, за колико ће опасти косинус?

$$\begin{array}{ll} 10' & 144 \\ 3' & x \end{array}$$

$$x : 144 = 3 : 10$$

$$x = 144 \cdot \frac{3}{10}$$

Три (3) је број минута за колико је први мањи лук у таблицама мањи од датог лука: $29^\circ 33' - 29^\circ 30' = 3'$. Обележимо ту разлику са m (минути). Овде ће бити: $m = 3$.

А шта је наше x? То је број за који треба да поправимо наш $\cos 29^\circ 33'$ због ова три минута. Обележимо ту поправку са p, па ћемо имати образац:

$$p = \frac{dm}{10}$$ У нашем случају биће:

$$p = 144 \cdot \frac{3}{10}$$

$$p = \frac{432}{10}$$

$$p = 43{,}2.$$

$\cos 29^\circ 30' =$ 0,87036
Због 3' косинус опадне за
43 крајње јединице — 43
$\cos 29^\circ 33' \approx 0{,}86993$

Задатак 4. *Одредити вредност за cotg 28°14'26''.*

Котангенс првог мањег угла из таблица је $\operatorname{cotg} 28^\circ 10'$ . . . 1,86760
" " већег " " " " $\operatorname{cotg} 28^\circ 20'$ . . . 1,85462
$d =$ 1298

$$p = \frac{dm}{10} \qquad m = 4'26'' = 4\frac{26}{60} = 4\frac{13}{30} = \frac{133}{30}$$

$$p = 1298 \cdot \frac{\frac{133}{30}}{10}$$

$$p = 1298 \cdot \frac{133}{3\,.\,100}$$

$$p = 432{,}67 \cdot \frac{133}{100}$$

$$p = 4{,}327\,.\,133$$

$$\begin{array}{r} 4{,}327 \\ 133 \\ \hline 12981 \\ 12981 \\ 4327 \\ \hline 575{,}491 \end{array}$$

$p = 575$

$\operatorname{cotg} 28^\circ 10'$ 1,86760
Због 4'26'' контангенс опадне — 575
$\operatorname{cotg} 28^\circ 14' 26'' \approx 1{,}86185$

Задатак 5. — *Одредити вредност за tg 29°45'24''.*

$\operatorname{tg} 29^\circ 50'$ 0,57348
$\operatorname{tg} 29^\circ 40'$ 0,56962
$d =$ 386

$$p = \frac{dm}{10}$$

$$p = 386 \cdot \frac{5{,}4}{10} \qquad m = 5'24'' = 5\frac{24}{60} = 5{,}4$$

$d = 38{,}6\,.\,5{,}4$
$p = 208$

$\operatorname{tg} 29^\circ 40'$ 0,56962
Због 5'24'' тангенс порасте за + 208
$\operatorname{tg} 29^\circ 45' 24'' = 0{,}57170$

НАЛАЖЕЊЕ УГЛА

Задатак 6. — *Наћи угао* A, *кад је* sin A = *0,47893.*

У таблицама га нема. Ми видимо да је наш синус између:

0,47716 . . . . . коме одговара угао од 28°30' и
0,47971 . . . . . " " " " 28°40'.

Значи да је наш угао између 28°30' и 28°40'.

Чим је наш синус већи од 0,47716, мора наш угао бити већи од 28°30′.

За колико је већи?

Имамо образац

$$p = \frac{dm}{10} \qquad \text{Отуда је : } m = \frac{10p}{d}$$

Најпре табличну разлику

$$\begin{array}{r} 0{,}47971 \\ 0{,}47716 \\ \hline d = \quad 255 \end{array}$$

Сад поправку. Код синуса и тангенса поправка је разлика вредности наше функције и прве мање у таблицама.

Наша вредност синуса 0,47893

Први мањи синус у таблицама 0,47716

$p = \quad 177$

$$m = \frac{177\ .\ 10}{255}$$

$$m = \frac{1770}{255}$$

$$m = \frac{354}{51}$$

$$m = 6'\ 56''.$$

Споредни радови

$354 : 51 = 6'$

48

$48' = 2880''$

$2880'' : 51 = 56{,}4''$

330

240

Први мањи угао нађен у таблицама . . . . . . 28° 30′

увећан за . . . . 6′ 56″

Тражени угао . . . . 28° 36′ 56″

Задатак 7. — *Наћи угао* A, *кад је cos* A = *0,86789.*

Наш је косинус између:

косинуса 0,86892 . . . . коме одговара угао од 29° 40′ и

косинуса 0,86748 . . . . „ „ „ „ 29° 50′.

$d = \quad 144$

Наш угао мора бити између 29° 40′ и 29° 50′.

Зато што је наш косинус **мањи** од косинуса угла 29° 40′, наш угао мора бити **већи** од 29° 40′. За колико?

Имамо $m = \frac{10p}{d}$

При тражењу косинуса и котангенса ми смо поправку одузимали од косинуса мањег угла, да би смо добили косинус нашег угла. Било је ово: косинус мањег угла — поправка = косинус нашег угла.

Зато ће сад бити:

поправка = косинус мањег угла — косинус нашег угла.

$p = \cos 29^0\ 40' - 0{,}86787$

$p = 103.$

$$\begin{array}{r} 0{,}86892 \\ -\ 0{,}86789 \\ \hline 103 \end{array}$$

Код косинуса и котангенса поправка се добија, кад се вредност наше функције одузме од вредности функције мањег угла.

$$m = 103 .\ \frac{10}{144}$$

Споредни радови.

$1030' : 144 = 7'$

$22 \qquad 22' = 1320''$

$1320'' : 144 = 9''$

24

Наш је косинус мањи од косинуса угла од 20° 40′ за 103 крајње јединице. Сад смо израчунали да је наш угао због тога већи за 7′ 9″. Наш је угао

$A \approx 29^0\, 47'\, 9''.$

Задатак 8. — *Наћи угао A, кад је cotg A = 1,86185.*

Угао првог већег котангенса 1,86760 јесте 28° 10′.

$$m = \frac{10p}{d}$$

$p = 1{,}86760 - 1{,}86185$

$p = 575$

$d = 1{,}86760 - 1{,}85462$

$d = 1298$

$$m = 575.\ \frac{10}{1298}$$

$$m = \frac{2875}{649}$$

$$m = 4'\, 26''$$

Споредни редови.

$2875' : 649 = 4'$

279

$279' = 16740''$

$16740'' : 649 = 25{,}7''$

3760

515

607

Наш је угао A ≈ 28° 14′26″. (Види вежбање 4).

Задатак 9. — *Наћи угао* A, *кад је tang* A = *1,76543.*

$$m = \frac{10p}{d.}$$

Најпре табличну разлику.

Кад у таблицама гледамо углове слева, нема нашег тангенса. Онда ћемо гледати сдесна и читати оздо.

Први већи тангенс 1,76749 налазимо код угла од $60^\circ 30'$.

Први мањи тангенс 1,75556 налазимо код угла од $60^\circ 20'$.

$$\begin{array}{r} 1{,}76749 \\ 1{,}75556 \\ \hline d = 1193 \end{array}$$

Сад поправку. Пошто је овде тангенс, поправка је разлика између нашег тангенса и првог мањег у таблицама.

$$\begin{array}{r} 1{,}76543 \\ 5556 \\ \hline p = 987 \end{array}$$

$$m = \frac{10p}{d}$$

$$m = \frac{9870}{1193}$$

Споредни радови:

$$\begin{array}{l} \underline{9870'} : 1193 = 8' \\ \;\;326 \end{array}$$

$$326' = 19560''$$

$$\begin{array}{l} \underline{19560''} : 1193 = 16{,}3'' \\ \underline{\;7630} \\ \underline{\;\;4720} \\ \;\;1141 \end{array}$$

$m = 8'16''$.

$$A \approx 60^\circ 20' + 8'16'' \approx 60^\circ 28'16''.$$

Практично упутство.

I — *Тражење вредности функције за дату вредност угла*

$$p = \frac{dm}{10}$$

m су минути (и секунди) за које је наш дати угао већи од првог мањег угла који се може наћи у таблицама. За синус и тангенс поправка се додаје вредности функције мањег угла. За консинус и контангенс поправка се одузима од вредности функције мањег угла.

II — *Тражење угла за дату вредност функције.*

$$m = \frac{10p}{d}$$

За синус и тангентнс поправка је разлика између дате вредности функције и вредности функције првог мањег угла.

За косинус и конгентнс поправка је разлика између вредности функције мањег угла и наше дате вредности функције.

За све четири функције нађено m се додаје првом мањем углу нађеном у таблицама.

Напомена. — Изведени обрасци $p = \frac{dm}{10}$ и $m = \frac{10p}{d}$ важе за таблице где су дате вредности функција за степене и десетице минута. Колико су тачни добивени резултати учићеш доцније.

ВЕЖБАЊА

Нађи вредности ових функција:

1. $sin 28^\circ\ 20'$
2. $sin 20^\circ\ 40'$
3. $cos 65^\circ\ 30'$
4. $cos 17^\circ\ 40'$
5. $tg 20^\circ\ 20'$
6. $tg 80^\circ\ 30'$
7. $cotg 17^\circ\ 10'$
8. $cotg 56^\circ\ 55'$
9. $sin 27^\circ\ 23'$
10. $sin 79^\circ\ 18'$
11. $sin 14^\circ\ 14'\ 10''$
12. $sin 63^\circ\ 18'$
13. $cos 37^\circ\ 26'$
14. $cos 75^\circ\ 44'$
15. $cos 32^\circ\ 14'\ 20''$
16. $cos 74^\circ\ 35'\ 45''$
17. $tg 17^\circ\ 26'$
18. $tg 71^\circ\ 84'$
19. $tg 23^\circ\ 18'18''$
20. $tg 78^\circ\ 34'55''$
21. $cotg 36^\circ\ 27'$
22. $cotg 66^\circ\ 34'$
23. $cotg 18^\circ\ 19'\ 24''$
24. $cotg 82^\circ\ 27'\ 44''$

Нађи углове којима одговарају ове вредности:

25. $sinA = 0{,}15356$
26. $sinB = 0{,}44123$
27. $sinC = 0{,}56883$
28. $sin\beta = 0{,}91876$
29. $sinA = 0{,}23433$
30. $sinA = \frac{3}{5}$
31. $cosA = 0{,}95964$
32. $cosA = 0{,}42226$
33. $cosB = 0{,}90231$
34. $cosC = 0{,}62097$
35. $cosX = \frac{7}{8}$
36. $cosY = \sqrt{\frac{5}{8}}$
37. $tgA = 0{,}33783$
38. $tgX = 0{,}62083$
39. $tgZ = 1{,}81649$
40. $tgW = 0{,}43456$
41. $tgV = \sqrt{\frac{3}{4}}$
42. $tgY = 2\frac{3}{5}$
43. $cotangX = 0{,}65771$
44. $cotgY = 2{,}43422$

45. $cotang\,A = 1{,}40685$

46. $cotg D = 0{,}95860$

47. $cotang E = 0{,}33426$

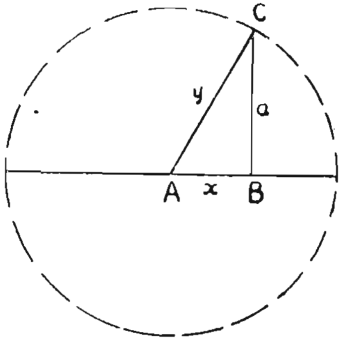
48. $cotg\ \alpha = 1\frac{3}{8}$

49. $cotg\,A = \frac{3}{4}\sqrt{5}$

ПРИМЕНА НА ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

Ово што смо досад научили можемо употребити да решавамо правоугле троугле. Решити троугао значи из датих комада довољних за конструкцију троугла наћи и све непознате елементе троуглове.

Ми ћемо показати на примерима како се то ради.



Сл. 222.

I **Задатак.** — *Решити правоугли троугао кад му је дата једна страна правог угла* $BC = a$ *и један оштар угао* A (сл. 222.)

Одмах ћемо наћи угао C:

$$C = 90^0 - A.$$

Сад ћемо тражити стране. Како то радимо? *Везујемо познате комаде за непознате помоћу угловних функција познатих углова.*

Хоћемо да израчунамо хипотенузу. Ми ћемо везати познату страну a за непознату хипотенузу y. Чиме? Угловном функцијом неког познатог угла. Кога? Рецимо угла A. Тада је

$$\frac{a}{y} = sin A$$

Одатле је лако наћи y:

$$y = \frac{a}{sin A}.$$

Примена. — Нека је $a = 5{,}5\ cm$, $A = 61^0\,18'$.

Тада ће бити

$$y = \frac{5{,}5}{sin\,61^0\,18'}.$$

Пошто је $sin\ 61^0 18' = cos\ 28^0 42'$, биће:

$$y = \frac{5{,}5}{cos\,28^0\,42'}.$$

Сад даље:

$cos\ 28^0 40' = 0{,}87743$

$cos\ 28^0 50' = 0{,}87603$

$d = \quad 140$

$$p = \frac{dm}{10}$$

$$p = 140\ .\ \frac{2}{10} = 14\ .\ 2 = 28$$

$cos\ 28^0 40' = 0{,}87743$

$cos\ 28^0\ 40' = 0{,}87743$

За 2′ косинус опадне $\quad -28$

$cos\ 28^0\ 42' \simeq 0{,}87715$

$$y = \frac{55}{0{,}87715}$$

Број 0,87715 није потпун број. Он има још безброј децимала. Он је један скраћен број.

Како се дели скраћеним бројем, видећеш доцније. Ми ћемо сад делити као да је ово потпун број.

5,5 : 0,87715

550000 : 87715

110000 : 17543 = 6,27

47420

123340

539

$y \simeq 6{,}3$

Узмимо сад да нађемо страну AB (сл. 223.). Биће:

$$\frac{a}{x} = tang\ \mathrm{A},\ \text{тј.}\ x = \frac{\mathrm{A}}{tg\ \mathrm{A}}$$

Примена за $a = 5{,}5$ $\mathrm{A} = 61^0 18'$.

Тада ће бити:

$$x = \frac{5{,}5}{tang\,61^0 18'}$$

$x = 5{,}5 : 1{,}82654$

5,5 : 1,82654

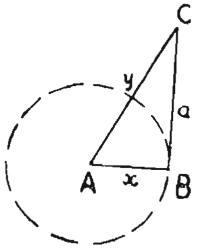
550000 : 182654

275000 : 91327 = 3,01

101900

10573

Узећемо 3.



Сл. 223.

$x \approx 3.$

Да нисмо учинили неку грубу грешку? Да видимо!

По угловима се види да мора бити:

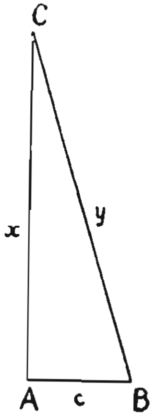
$x < a.$ И збиља је

$3 < 5{,}5.$

Знамо да у правоуглом троуглу хипотенуза мора бити највећа страна. Мора бити

$y > a$ и $y > x.$ И збиља је

$6{,}3 > 5{,}5$ и $6{,}3 > 3.$ Грубе грешке нема.



Сл. 224.

Задатак 2. — *Решити правоугли троугао кад је дата једна страна правог угла $c = 2m$ и угао $B = 73^0\ 25'\ 37''$* (сл. 224).

Најпре $\sphericalangle C = 90^0 - 73^0\ 25'\ 37'' = 16^0\,34''\,23''.$

I Тражићемо страну y (BC). Везаћемо познату страну за хипотенузу y. Кад везујемо хипотенузу за страну увек почињемо страном. (Зашто?). Овако:

$$\frac{c}{y} = \sin 16^0\,34'23''$$

$$y = \frac{c}{\sin 16^0\,34'23''}$$

$$y = \frac{2}{\sin 16^0 34'23''}.$$

Најпре да израчунамо вредност $\sin\ 16^0\,34'\,23''$

$\sin\ 16^0\,40' = 0{,}28680$

$\sin\ 16^0\,30' = 0{,}28402$

$d = \quad 278$ $\qquad p = \frac{dm}{10}$

$$m = 16^0\,34'\,23'' - 16^0\,30' = 4'\,23'' = \left(4\frac{23}{60}\right)'$$

$$p = 278\,.\,4\frac{23}{60} : 10 = 278\,.\,\frac{263}{60} : 10 = 139\,.\,\frac{\frac{263}{30}}{10} =$$

$$= 139\,.\,\frac{263}{300} = 121{,}8\ldots$$

$p \approx 122$

$\sin 16^0 30' = 0{,}28402$

поправка $\quad 122$

$\sin 16^0 34'23'' \approx 0{,}28524$

$$p = \frac{2}{0{,}28524\ldots.}$$

$2 : 0{,}28524$

$200\,000 : 28524$

$50\,000 : 7131 = 7{,}01$

8300

1169

$y \approx 7.$

II. — Сад ћемо тражити страну x. Она је наспрамна за угао B, а налегла за C. Везујемо је за познату страну c.

$$\frac{x}{c} = \text{tang } B.$$

$x = c\ .\ \text{tang } B.$

$x = c\ .\ \text{tang } 73^0\ 25'\ 37''$

$x = 2\ .\ \text{cotang } 16^0\ 34'\ 23''.$

Најпре да одредимо cotang 16° 34′ 23″.

$\text{cotg } 16^0\ 30' = 3{,}37594$

$\text{cotg } 16^0\ 40' = 3{,}34023$

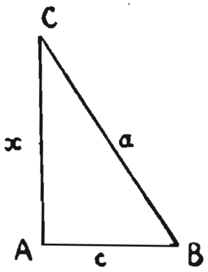
$d = \quad 3571$

$$p = \frac{dm}{10}$$

$$p = \frac{3571\ .\ 4\frac{23}{60}}{10}$$

$$p = 3571\ .\ \frac{263}{600}$$

$$p = \frac{939173}{600}$$



Сл. 225.

$939173 : 600 = 1565{,}2\ldots.$

$\text{cotang } 16^0\ \ 30' = 3{,}37594$

котангенс опадне због $4'\ \ 23''$ $\quad 1565$

$\text{cotang } 16^0\ 34'23'' = 3{,}36029$

$x = 2\ .\ 3{,}36029\ \ldots.$

$x \approx 6{,}7.$

Провери добивене резултате!

III задатак. — *Решити правоугли троугао чија је једна страна* (сл. 225) $c = 5\ cm$, $a = 9{,}4\ cm$.

Ако нећемо да се служимо Питогорином теоремом, морамо најпре наћи један угао. Рецимо угао C. Везаћемо познате стране помоћу функције непознатог угла. Овако:

$\frac{c}{a} = sin\ C$, тј.

$sin\ C = \frac{5}{9,4}$. Сад даље.

Споредни радови.

$5:9,4 =$

$50:94 = 0,531914\ldots$

500

300

180

860

140

460

$sin\ C = 0,53191$

Први мањи синус у таблица 2992 ... Њему одговара угао од 32°.

поправка $p =$ 199

Таблична разлика d.

У таблицама први већи синус од нашег 0,53238

„ „ „ мањи „ „ „ 2992

$d = 246$

$m = \frac{10\,p}{d}$

$m = \frac{1990}{246}$

$1990' : 246 =$

$995 : 123 = 8'$

11

$11' = 660''$

$660'' : 123 = 5,3''$

450

81

$m \simeq 8'\ 5''$

Првом мањем синусу у таблицама одговара угао од 32°. Наш је угао већи за $8'\ 5''$.

Према томе, тражени угао C биће

$C \simeq 32^0\ 8'\ 5''$.

Да смо тражили угао B, било би овако:

$\frac{c}{a} = cos\ B$

$cos\ B = \frac{c}{a}$

$cos\ B = \frac{5}{9,4}$ $cos\ B = 0,53191\ \ldots$

Први већи косинус у таблицама је 0,53238.

Читали смо косинус одоздо. Зато њему припада угао с десне стране.

Косинусу од 0,53238 одговара угао од 57°50′.

Сад ћемо тражити занемарене минуте и секунде.

$m = \frac{10\,p}{d}$

Најпре p.

Први већи косинус у таблицама 0,53238

Наш косинус 191

$p = 47$

$d = 0,53238 - 0,52992 = 246$

$m = 10 \cdot \frac{47}{246} = \frac{470}{246} = \frac{235}{123}$

$235 : 123 = 1'$

112

$112' = 6720''$

$6720'' : 123 = 54,6''$

570

780

42

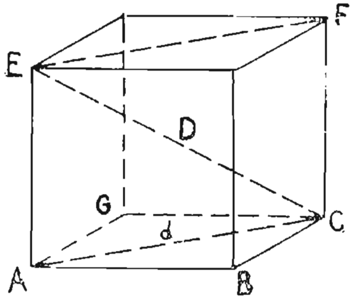
$m = 1'55''$

Добивене минуте и секунде додаћемо углу чији је косинус био први већи од нашег у (таблицама).

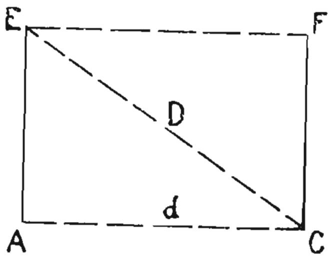
Први већи косинус у таблицама 0,53238. Њему одговара угао од 57°50′.

Наш угао је већи за 1′55″. Према томе наш тражени угао биће:

$B = 57^0 50' + 1'55'' = 57^0\,51'\,55''$.



Сл. 226.



Сл. 227.

IV Задатак. — *Под којим углом стоји на основици дијагонала код коцке?*

Тражићемо правоугли троугао у коме се налази коцкина дијагонала. То је на слици 226 троугао AEC. Исцртаћемо засебно коцкин дијагонални пресек $ACFE$ и у њему троугао ACE (сл. 227). Нека је коцкина ивица a. Тада је дијагонала на основици:

$$AC = d = \sqrt{a^2 + a^2} \text{ (сл. 228)}$$

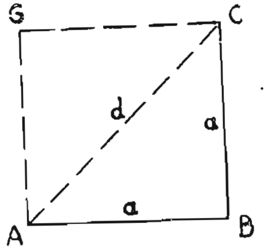
$$d = a\sqrt{2}$$

Из троугла ACE (сл. 227) имамо:

$$tang ACE = \frac{AE}{AC}.$$ Обележимо угао ACE са C. Тада ће бити:

$$tang C = \frac{a}{d}$$

$$tang C = \frac{a}{a\sqrt{2}}$$



Сл. 228.

$$tang C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tang C = \frac{1{,}41421\ldots}{2}$$

$$tang C = 0{,}\ 70710\ldots$$

Прва мања тангента у таблицама јесте 0,70455. Њој одговара угао од 35° 10′.

$$m = \frac{10p}{d}$$

Одредићемо табличну разлику:

$$\begin{array}{r} 0{,}70891 \\ 455 \\ \hline d \ = \ 436 \end{array}$$

Сад поправку.

$$\begin{array}{r} 0{,}70711 \\ 455 \\ \hline p \ = \ 256 \end{array}$$

$$m = 10.\frac{256}{436} = \frac{2560}{436} = \frac{640}{109}$$

$$\begin{array}{l} 640' : 109 = 5' \\ \underline{\ \ 95.} \\ \ \ 95' = 5700'' \\ 5700'' : 109 = 52{,}2'' \\ \underline{\ 250} \\ \underline{\ \ 320} \\ \ \ 102 \end{array}$$

$$m \approx 5'52''.$$

$$C = 35^0\ 10' + 5'\ 52''$$

$$C = 35^0\ 15'\ 52''.$$

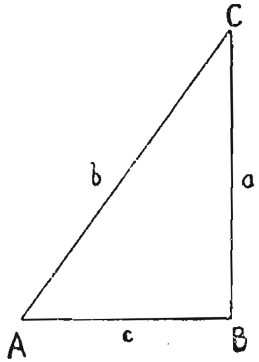
ВЕЖБАЊА

Решити правоугли троугао (сл. 229), кад је

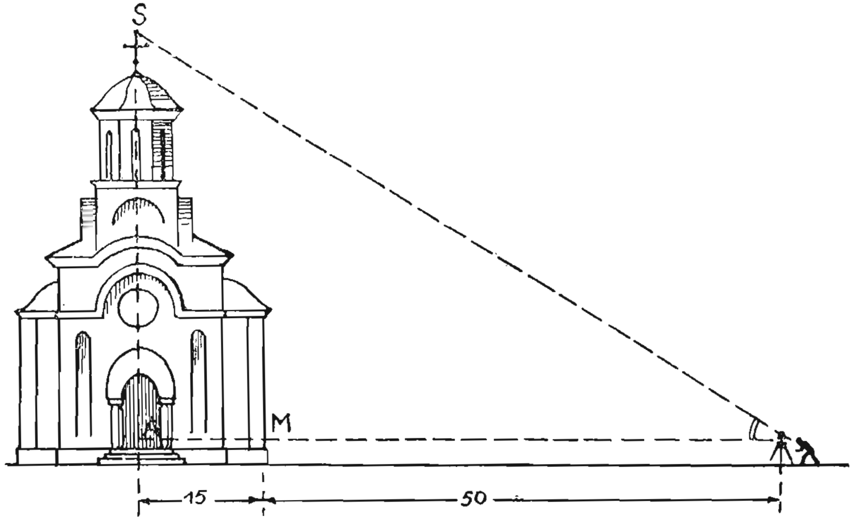
1. $b = 10m,\ A = 70^0$
2. $b = 19m,\ A = 68^0\ 20'$
3. $b = 176{,}5m, = A\ 57^0\ 18'$
4. $b = 103{,}4m,\ C = 37^0\ 23'$
5. $a = 37cm,\ A = 76^0\ 18'$
6. $a = 23\frac{3}{7}$ cm, $A = 53^0\ 42'$
7. $a = 13m,\ C = 22^0\ 18'$
8. $c = 7cm,\ C = 43^0\ 34'\ 24''$
9. $c = 18{,}48m,\ A = 55^0\ 23'\ 12''$
10. $c = 20{,}24m,\ A = 65^0\ 18'\ \ 30''$
11. $a = 4m,\ b = 5$м.

(Троугао из вежбања 11 је један веома познати правоугли троугао. Добро би било да му знаш углове).

12. $c = 5m,\ b = 13m.$
13. $a = 7m,\ b = 8m.$
14. $a = 35,\ c = 12.$



Сл. 229



Сл. 230

Решити правоугли троугао CDF кад је $\sphericalangle\ C = 90^0$ и

15. $c = 17\ m$, $d = 16\ m$. **16.** $c = 12\ m$, $f = 9\ m$.
17. $c = 143{,}7\ m$, $f = 43\ m$. **18.** $c = 148{,}9\ m$, $f = 12\ m$.
19. $d = 41\ m$, $f = 23\ m$. **20.** $d = 54\ m$, $f = 12\ m$.
21. $d = 18\ m$, $f = 14\ m$. **22.** $d = 23\ m$, $f = 10\ m$.

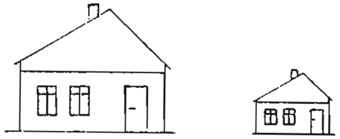
23. — Израчунати дијагоналу правоугаоника $ABCD$, кад му је дужина $AB = 7\ cm$ и угао $BAC = 32^0\ 18'$. (Цртеж).

24. — Израчунати стране правоугаоника $ABCD$, кад је дијагонала $AC = 23\ cm$, а угао $BCA = 70^0\ 24'$. (Цртеж!).

25. — Један архитект мери угао под којим се са земље види врх једне цркве. Нашао је да је тај угао $32^0 25'$ (сл 230). Колико је висока црква, кад је архитект удаљен од ње за 50 m, његово око је над земљом 1,60 m, а црква је широка 30 m?

СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

Сличност равних слика. — *Равна слика.* — Слика нацртана на равни зове се равна слика. Троуглови и многоугли које ми проучавамо јесу равне слике.

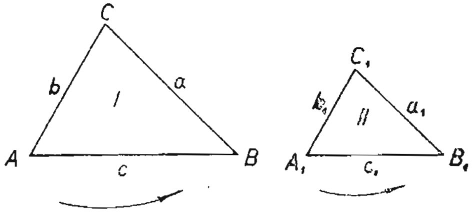

Сл. 231.

Сличне слике. — Слике које имају исти облик, а разну величину, зову се сличне слике (сл. 231).

Два троугла су слична, кад су им сви углови у истом смислу редом једнаки, а хомологе стране пропорционалне.

Хомологе стране су оне стране, које леже према једнаким угловима.

На слици 231 троуглови I и II су слични. Њихови углови су редом једнаки у смислу који показује стрелица.



Сл. 232.

$\sphericalangle\ A = \sphericalangle\ A_1$ Хомологе стране a и a_1
$\sphericalangle\ B = \sphericalangle\ B_1$ Хомологе стране b и b_1.
$\sphericalangle\ C = \sphericalangle\ C_1$ Хомологе стране c и c_1.

Мора бити и ово: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

Знамо да су два троугла подударна, кад су им све стране и сви углови редом једнаки. Али кад хоћемо да видимо јесу ли два троугла подударна, ми испитујемо само по 3 њихова елемента. То радимо помоћу познатих правила о подударности троуглова.

Исто тако кад хоћемо да испитамо јесу ли два троугла слична, не морамо гледати све њихове стране и све њихове углове. Да бисмо тај посао скратили, служимо се правилима о сличности троуглова.

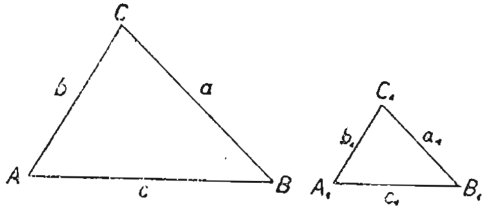
Правила о сличности троуглова

I правило. — *Два троугла су слична, кад су им по две стране пропорционалне и захваћени углови једнаки.*

Узмимо два троугла за које знамо да је

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ и $\sphericalangle\ C = C_1$

(сл. 233).

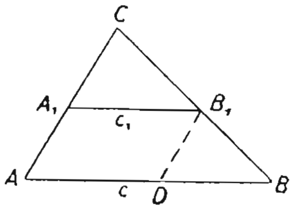


Сл. 233.

Поставимо мали троугао на велики тако, да им се углови C поклопе (слика 234). Пошто је

$\sphericalangle\ C = C_1$, а $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$,

мора бити $A_1 B_1 \parallel AB$. Тада је $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A$, а $\sphericalangle\ B_1 = \sphericalangle\ B$.



Сл. 234.

Повуцимо из B_1 праву $B_1 D \parallel AC$. Тада су краци BA и BC пресечени двема паралелним пресечницама AC и DB_1. Отуда:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BB_1}, \text{ тј. } \frac{c}{(c-c_1)} = \frac{a}{(a-a_1)}.$$

То је даље:

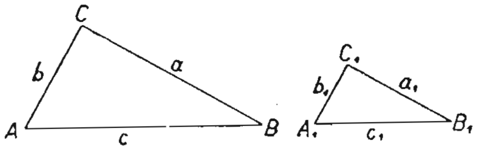
$$c\ (a-a_1) = a\ (c-c_1)$$
$$ac-a_1c = ac-ac_1$$
$$a_1c = ac_1$$

$\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}$. Значи да су све стране пропорционалне.

Наше правило је доказано.

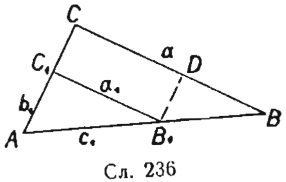
II правило. — *Два троугла су слични, ако су им пропорционалне по две стране, а углови према већој од тих двеју страна једнаки.*

Нека је $\frac{b}{b_1}=\frac{a}{a_1}$ и $\sphericalangle A=\sphericalangle A_1$. (сл. 235.).



Сл. 235

Пренесемо мали троугао на велики тако, да им се поклопе једнаки углови. (слика 236.). — Пошто је $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$ значи да је $B_1C_1 \parallel BC$. Због тога је $\sphericalangle C \parallel \sphericalangle C_1$ $\sphericalangle B=\sphericalangle B_1$. Повуцимо праву $B_1D \parallel AC$. Тада је $\frac{BA}{BB_1}=\frac{BC}{BD}$, тј. $\frac{c}{(c-c_1)}=\frac{a}{(a-a_1)}$. Одатле је: $\frac{c}{c_1} = \frac{a}{a_1}$ Значи да су све стране пропорционалне.



Сл. 236

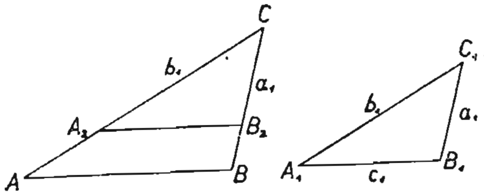
Видели смо да су сви углови редом једнаки.

Наше правило је доказано.

III правило. — *Троугли су слични кад су им све стране пропорционалне. То значи да постоји ова продужена пропорција:*

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

На троугао ABC (сл. 237) пренесемо од тачке C по страни CA дуж b_1, а то страни CB дуж a_1. Пошто постоји пропорција $\frac{b}{b_1}=\frac{a}{a_1}$, значи да је $\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C$ (Троугао ABC сличан с троуглом A_2B_2C).



Сл. 237

Ако сад докажемо да је $A_1B_1C_1 \backsim A_2B_2C$, биће доказано да је $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Они су подударни, јер су им једнаке две стране ($b_1 = CA_2$ и $a_1 = CB_2$) и захваћени углови ($\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1 C_1 B_1$).

Доказали смо да су троуглови ABC и $A_1 B_1 C_1$ слични.

Тиме је и наше правило доказано.

IV правило. — Два троугла су слична, како су им два угла једнака.

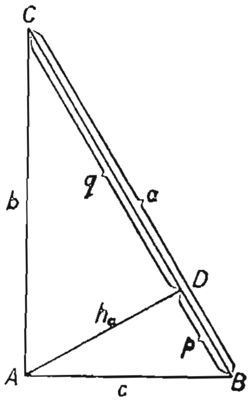
Нека су у троуглима ABC и $A_1 B_1 C_1$ (сл. 233) једнаки ови углови: $C = C_1$ и $A = A_1$.

Положимо угао C_1 на C. Добијамо слику 234. Пошто је угао $A=\sphericalangle A_1$ мора бити $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$. Види се да су им све стране пропорционалне. Дати троуглови су слични.

На који је од ова четири начина најлакше уверити се да су два троугла слична? Па које је онда најважније правило о сличности троуглова?

ПРИМЕНА СЛИЧНОСТИ НА ПРАВОУГЛИ ТРОУГАО

У правоуглом троуглу ABC (сл. 238) спустимо хипотенузину висину h_a. Имамо ове сличне троуглове:



Сл. 238

I. ABD и ABC ($\sphericalangle B=\sphericalangle B, \sphericalangle ADB = BAC = 90^0$ отуда излази:

$c:a = p:c$ тј.

(1) $c^2 = ap$.

II $\triangle ADC \backsim \triangle ABC$ ($\sphericalangle C = \sphericalangle$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BAC = 90^0$). Отуда излази:

(2) $b^2 = aq$.

Кад спојимо I и II сабирањем добијамо:

$$ap + aq = b^2 + c^2.$$
$$a(p+q) = b^2 + c^2.$$
$$a \cdot a = b^2 + c^2.$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

(Питагорина теорема).

Напомена. — Пропорција у којој су једнаки или оба спољашња, или оба унутрашња члана, зове се *непрекидна пропроција.* Члан који се понавља зове се *геометриска средина,* или *средња геометриска пропорционала.* На пр. у пропорцији $c:a = p:c$ геометриска средина између a и p је c.

Четврти члан непрекидне пропорције у којој су унутрашњи чланови једнаки, зове се *трећа непрекидна пропорционала.* На пр. у пропорцији $a:b = b:q$ члан q је трећа непрекидна пропорционала.

Сваки члан пропорције зове се још и *пропорционала.* На пр. у пропорцији

$a: b = c: d$ члан a је први члан, или прва пропорционала.
„ b „ други „ „ друга „
„ c „ трећи „ „ трећа „
„ d „ четврти „ „ четврта „

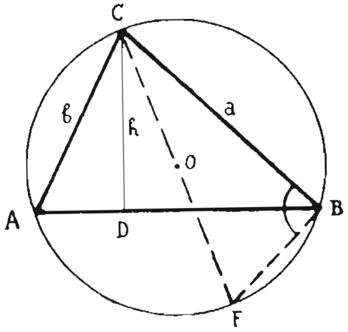
III. — Слични су троугли ABD и ADC. ($\sphericalangle D = \sphericalangle D = 90^0$, $\sphericalangle B = \sphericalangle DAC$).

Из њихове сличности излази:

$p: h_a = h_a : q$ тј.

$h_a{}^2 = pq.$

ПОЛУПРЕЧНИК КРУГА ОПИСАНОГ ОКО ТРОУГЛА



Сл. 239.

Око троугла ABC (сл. 239) описан је круг. Обележимо његов полупречник са R. Тада је на нашој слици $OC = R$.

Спустимо висину $CD = h$. Површина троугла ABC биће:

$$p = \frac{ch}{2} \text{ или } p = \frac{c}{2} \cdot h \qquad (1)$$

Из темена C повуцимо пречник CF. Спојмо F са B. Добијамо *правоугли* троугао BCF. (Зашто је правоугли? Шта је то „угао у полукругу“?) Он је сличан с *правоуглим* троуглом ADC. ($\sphericalangle A = \sphericalangle F$. (Зашто?) Из те сличности излази:

$h : b = a : CF$, тј.

$h : b = a : 2R$. Одатле је

$$h = \frac{ab}{2R}$$

Ако ову вредност за h унесемо у једначину (1), имаћемо:

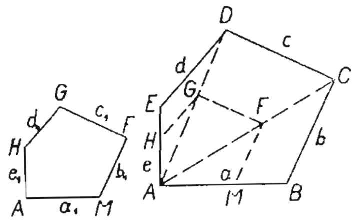
$$b = \frac{c}{2} \cdot \frac{ab}{2R} \text{ тј.}$$

$$\boxed{p = \frac{abc}{4R}}$$. Одатле је:

$$R = \frac{abc}{4p} \cdot$$

СЛИЧНОСТ ПОЛИГОНА

Датоме полигону $ABCDE$ (сл. 240) најлакше ћемо нацртати сличну слику овако:



Сл. 240.

Из једног темена (A) повучемо све дијагонале. Из произвољне тачке (M) на једној страни (AB) повучемо паралелну (MF) са суседном страном (BC) до пресека (F) са дијагоналом (AC). Из те тачке (F) настављамо исти посао све док не дођемо на последњу страну. Добивамо $AMFGH \backsim ABCDE$.

Све стране су пропорционалне и сви углови редом једнаки.

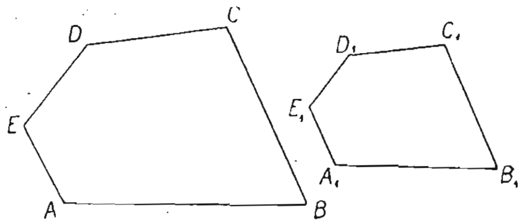
Два полигона су слична, кад су им сви углови редом и у истом смислу једнаки и све стране пропорционалне:

$$A = A,\ \sphericalangle B = \sphericalangle M,\ C = F,\ D = G,\ E = H \text{ и}$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1}$$

Кад имамо два полигона који личе један на други (сл. 240), како ћемо се уверити јесу ли слични? Морамо ли мерити све углове. Не морамо. Ако су им (n — 1) углова једнаки, морају им бити једнаки и последњи углови. А како ћемо проверавати пропропорционалност страна?

Узмимо да полигону $ABCDE$ (сл. 241) нацртамо сличан полигон тако, да однос сличности буде $\frac{2}{3}$ новога према староме.



Сл. 241.

Цртамо $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A$. Од A преносимо $A_1B_1 = \frac{2AB}{3}$. Цртамо $B_1 = B$ Затим $B_1C_1 = \frac{2BC}{3}$. Цртамо $\sphericalangle C_1 = C$. Сад $C_1D_1 = \frac{2CD}{3}$. Сад $\sphericalangle D_1 = D$

Узели смо да су пропорционалне (n — 2) стране и да су (n — 1) угла једнака.

Добили смо сличан полигон.

Два полигона су слични, ако су им (n — 1) угла једнака и (n — 2) стране пропорционалне

Узмимо сад да цртамо сличан полигон овако:

$A_1B_1 = \frac{2AB}{3}, \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B, B_1C_1 = \frac{2BC}{3}, \sphericalangle C_1 = \sphericalangle C, C_1D_1 = \frac{2CD}{3}$. Сад из D_1 лук отвором D_1E_1, а из A_1 лук отвором A_1E_1.

Два полигона су слични, када су им све стране пропорционалне и (n — 3) угла једнака.

Да ли је ово тачно: „Два полигона су слична, кад су им (n — 2) угла једнака и (n — 1) страна пропорционалне“?

ВЕЖБАЊА

1\. — Дату дуж подели на 3 једнака дела.
2\. — „ „ „ „ 5 једнаких делова.
3\. — „ „ „ „ 7 „ „
4\. — „ „ „ „ 10 „ „
5\. — „ „ „ „ два отсечка у размери 3:4.
6\. — „ „ „ „ три „ „ „ 1:2:3.

7\. — На крацима једног угла покажи ову пропорцију: $1:3=4:12$.

8\. — На крацима једног угла покажи ову пропорцију $2:3=5:7{,}5$.

9\. — На крацима једног угла покажи ову пропорцију $4:3=2:1{,}5$.

10\. — На крацима једног угла покажи постоји ли ова пропорција $2:3=4:5$.

11\. — На крацима једног угла покажи постоји ли ова пропорција $4:3=2:1$.

(Јесу ли сечице паралелне?)

На крацима једног угла одреди непознати члан ових пропорција:

12. $2:4=5:x$ **13.** $1:x=3:4$ **14.** $1:4=x:5$ **15.** $x:3=2:4$

16. — Дати су два слична троугла: ABC и $A_1B_1C_1$. Да ли за њих важе обе ове пропорције: $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$?

17. — Да ли за два слична троугла важи ова пропорција: $\frac{a}{a_1}=\frac{h_a}{h_{a_2}}$

18. — Јесу ли сви равнострани троугли слични међу собом? Доказ.

19. — Је су ли сви правоугли троугли слични међу собом? Доказ. Који су правоугли троугли увек слични међу собом?

20\. — Датоме троуглу нацртај сличан троугао у размери 3:4.

21\. — Дат је троугао ABC. Конструиши му сличан троугао тако да буде $h=2\text{cm}$.

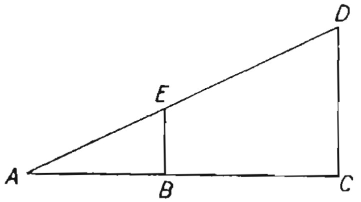
22. — Датоме троуглу нацртај сличан троугао тако, да му тежишна линија буде 1cm.

23\. — Датоме троуглу нацртај сличан троугао тако, да му полупречник описаног круга буде 2cm.

24. — Датоме троуглу нацртај сличан троугао тако, да му полупречник описаног круга буде 4cm.

---

25. — На слици 242 израчунај DC, кад је $AB=2\text{m}$, $BE=1\text{m}$, $AC=4{,}5\text{m}$ ($\triangle ABE \backsim \triangle ACD$).



Сл. 242

26. — Са исте слике израчунај AC, кад је $AB=5\text{m}$, $BE=2\text{m}$ $CD=20$ m.

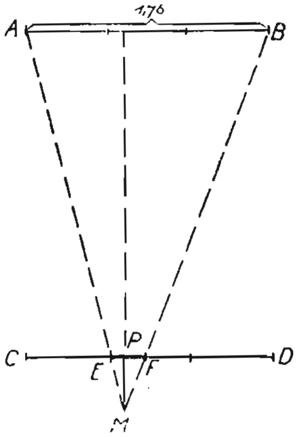
27. — Са исте слике израчунај BC, кад је $AB=17\text{m}$, $BE=3\text{m}$, $DC=51\text{m}$.

28. — Грчки мудрац и математичар Талес (VI век пре Христа) овако је мерио висину пирамиде у Мисиру. Једног сунчаног дана побоо је штап управно у земљу. Чекао је док је сенка тога штапа постала равна дужини самога штапа. Тада је измерио дужину пирамидине сенке и рекао да је то висина саме пирамиде. Је ли правилно радио? Морамо ли и данас чекати док сенка буде једнаке дужине са штапом? Зашто?

29. — У једно доба дана човек висок 1,64m има сенку дугачку 1,23m. У исто доба дана једно дрво има сенку дугачку 4,5m. Колико је високо то дрво?

30. — На даљини од 60 cm своје стоне лампе постављам перо управно на сто. Перо је дугачко 15 cm, и баца сенку од 24 cm. Колико је високо над столом сијалица моје лампе?

31. — Један дечак висок 1,50 m опружен полеђушке на трави, упро ноге у једно дрво високо 6 m. Преко његовог врха он једва види врх другог дрвета које је тачно 3 m далеко од првог. Колико је високо то друго дрво?

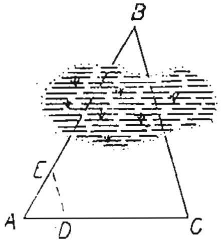


Сл. 243

32. — Две куће су прекопута једна друге. Имају трокрилне прозоре од 1,76 m ширине. Прозори су тачно један према дргоме. Колико је широка улица?

(Нека су два прозора AB и CD са слике 243. У окно прозора CD стављамо попречке једну књигу дугачку 22cm. У соби се измичемо од прозора и гледамо преко пута поред књиге. Кад смо се измакли 4 m, до тачке M, видимо поред ивица своје књиге цео прозор свога суседа. Има ли сличних троуглова? Може ли се помоћу њих некако израчунати ширина улице? — Види вежбање 17. На слици 243 неке су дужине нацртане краће него што би требале да буду, јер би биле за слику сувише велике).

33. — Исти задатак али да лица тих кућа буду само паралелна, а не и наспрамна.



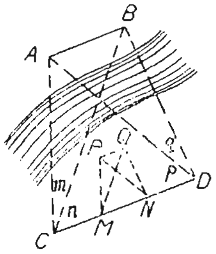
Сл. 244

34. — Из тачке A (сл. 244) види се тачка B, али јој се не може прићи правом линијом.

Израчунати праволиниско растојање AB.

(Тачка B се види из C).

35. — На оној страни реке виде се две тачке A и B. (сл. 245). Израчунати њихово растојање, кад им се с ове стране не може прићи.



Сл. 245

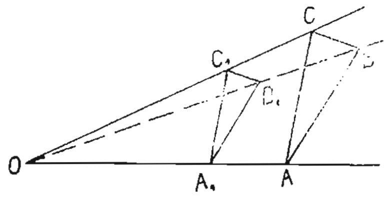
(Узмимо произвољну дужину CD. Измеримо углове m, n, p и q. Узмимо $MN = \frac{1}{3}$ CD. Код M и N избележимо углове m, n, p и q. Добивамо тачке P и Q. Измеримо. PQ. Колико је онда AB?

36. — Докажи ово тврђење: „Ако су два слична троугла ABC и $A_1B_1C_1$ тако постављени, да су им хомологе стране паралелне, праве које пролазе кроз темена једнаких углова секу се све три у једној тачци“.

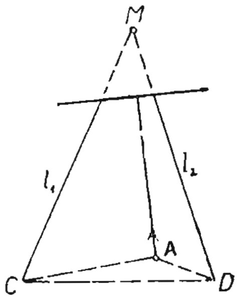
(Та се тачка зове **центар сличности**. То је тачка O на слици 246. Сличне слике које овако леже као наши троугли на слици зову се **хомотетичне слике**. То значи слике које имају сличан положај. Тачка O зове се још и **центар хомотетије**. Кад је центар хомотетије обема сликама с исте стране (на пр обема с лева), каже се да су те слике управно хомотетичне. Њихов центар је **спољни центар хомотетије**. На слици 246 имамо две управно хомотетичне слике и спољни центар хомотетије.

37. — За два спољна круга одреди спољни центар хомотетије.

38. — На крају неког цртежа нацртане су две праве l_1 и l_2. Оне нису доведене до пресека, јер није било места (сл 247). Кроз тачку A повући праву која би прошла и кроз пресек правих l_1 и l_2, када бисмо их довољно продужили.



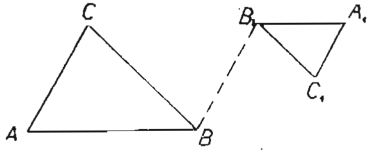
Сл. 246.



Сл. 247.

(Произвољан троугао CAD с теменом у A. Нацртај му сад хомететичан троугао. Итд).

39. — Нацртај два слична троугла тако, да им стране буду паралелне (сл 248). Нађи унутрашњи центар хомотетије.



Сл. 248.

(Имаш само да довршиш сл. 248).

40. — Како треба положити два слична троугла, па да можеш добити њихов унутрашњи центар хомотетије?

41. — Исто питање за спољни центар хомотетије.

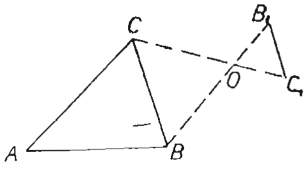
42. — Кад ставиш руку између запаљене сијалице и зида, на зиду добијеш слику своје руке. Каква је ту хомететичност? Управна или обрнута? Где је центар?

43. — Дат је унутрашњи центар хомотетије два слична троугла, један цео троугао и само једна страна њему сличног троугла. (Сл. 249). Нацртај тај други сличан троугао. (Доврши слику 249).

44. — Нацртај два хомететична правоугла троугла.

45. — Нацртај два хомотетична равнокрака троугла.

46. — Могу ли се свака два слична троугла довести у хомотетичан положај? Како?



Сл. 249.

47. — Јесу ли два хомотетична троугла **увек и слична?**

(Узми три зрака — три полуправе — из једне тачке, па на њима нацртај два троугла с паралелним крацима).

48. — Јесу ли два слична троугла увек у хомотетичном положају?

49. — Јесу ли два круга увек у хомотетичном положају?

50. — Троуглу ABC нацртај хомотетичан троугао с центром хомотетије у C.

(На колико начина можеш то урадити?

51. — Троуглу ABC нацртај хомотетичан троугао према центру D који лежи између A и B на страни AB.

52. — Троуглу ABC нацртај хомотетичан троугао тако, да центар круга уписаног у ABC буде центар хомотетије.

53. — Два круга се додирују изнутра у тачци T. Из T су повучене сечице на оба круга. Једна сечица сече мали круг у A.

а велики у B. Друга сече мали круг у C, а велики у D. Доказати да је $AC \| BD$.

54. — Два круга се додирују споља у тачци T. Кроз T су повучене две сечице. Прва сече мањи круг у B, већи у A. Друга сече мали круг у D, већи у C. Доказати да је $AC \| BD$.

55. — Троуглу ABC с унутрашње стране повуци паралелне са свима странама. Добићеш један мањи троугао. Нађи центар хомотетије за та два троугла.

56. — Шта бива са спољним центром хомотетије, кад се два хомотетична троугла ближе један другоме? А кад се удаљују?

57. — Датоме троуглу нацртај хомотетичан троугао тако, да центар хомотетије лежи у центру описанога круга првога троугла.

Докажи да код два слична троугла ABC и $A_1 B_1 C_1$ постоје ове пропорције:

58. $\frac{a}{a_1} = \frac{m_a}{m_{a1}}$ **59.** $\frac{b}{b_1} = \frac{m_b}{m_{b1}}$ **60.** $\frac{h_c}{h_{c1}} = \frac{m_c}{m_{c1}}$

61. — У правоуглом троуглу отсечци на хипотенузи су пропорционални са *квадратима* страна.

62. — Какав је то правоугли троугао у коме су отсечци на хипотенузи пропорционални са странама?

У правоугломе троуглу обележимо хипотенузу са c, стране правог угла са a и b, хипотенузин отсечак уз a са p, а уз b са q; хипотенузину висину са h. Кад су дате неке од ових количина израчунај у доњим задацима све остале:

63. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm.

64. $a = 17{,}5$ cm, $c = 20\frac{3}{4}$ cm.

65. $a = 1{,}7$ cm, $h = 1\frac{3}{5}$ cm.

66. $b = 8$ cm, $h = 6$ cm.

67. $h = 4$ cm, $p = 2$ cm.

68. $q = 3$ cm, $h = 7$ cm.

69. — Израчунај страну правилнога осмоугаоника уписаног у кругу полупречника R (сл. 250).

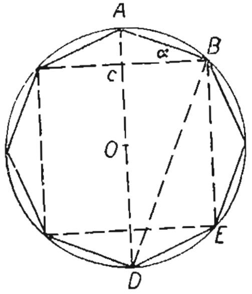
(Из правоуглог троугла ABD имамо:

1) $a^2 = AC \,.\, AD$. Одатле је даље:

2) $a^2 = (R - OC) \,.\, 2R$

$$OC = \frac{BE}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{2}$$

Продужи сам даље.)



Сл. 250.

70. — Израчунати страну правилнога осмоугаоника уписаног у кругу $R = \sqrt{1}$ cm.

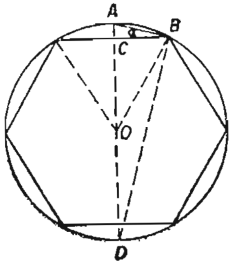
71. — Израчунати R правилнога осмоугаоника чија је страна $a = 20$ cm.

72. Израчунај страну правилнога дванаестоугаоника уписаног у кругу полупречника R (сл. 251).

$AB = a$ $\qquad a^2 = AC \,.\, AD$

$$a^2 = (R - OC) \,.\, 2R.$$

OC је висина у равностраном троуглу чија је страна $OB = R$. Зато је $OC = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. Ради сам даље.)



Сл. 251.

73. — Израчунај страну уписаног правилног дванаестоугаоника за $R = 10$ cm.

74. — Израчунај страну уписаног правилног дванаестоугаоника за $R = 3\sqrt{3}$ cm·

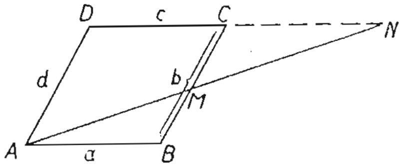
75. — Израчунај полупречник описаног круга око правилнога дванаестоугаоника чија је страна $a = 7$ cm.

76. — Исто за $a = 6\sqrt{6}$ cm.

77. — Пресек дијагонала у трапезу дели сваку дијагоналу на два отсечка који су пропорционални са основицама.

78. — Кроз теме A паралелограма $ABCD$ (сл. 252), повучена је произвољна права, која сече BC у M, а продужену страну CD у N. Доказати да производ $BM.DN$ има сталну вредност, ма како ми повукли праву из A.

(Нађи троугао у коме се појављује дужина DN. Нађи му сличан троугао. Постави му пропорцију страна. Из ње израчунај DN. Исто то ради и за дужину BM).



Сл. 252.

79. — У троуглу ABC повучена је тежишна линија CD. Сем ње повучена је и једна права L паралелна са AB. Она сече AC у E, а BC у F. Доказати да средина дужи EF лежи на тежишној линији CD.

80. — У трапезу $ABCD$ уписан је круг који додорује страну BC у E, страну AD у F. Из центра O уписанога круга повучена је $OG \perp EF$. Из темена C спуштена је на EE управа CH. Доказати да је $\triangle OFG \backsim \triangle CHE$.

(Они су правоугли. Шта је EC за уписани круг? А EF? Чему е раван угао CEH?)

81. — Два круга спољни један за други имају унутрашњи центар сличности. Он лежи на њиховој централи. Како би израчунао растојање центра сличности од једног кружног центра?

(Повуци у једном кругу један полупречник. У другоме кругу повуци један полупречник паралелан у супротном смислу с првим. Кроз њихове крајње тачке повуци једну праву. Она сече централу у центру сличности.)

82. — Исто питање за спољни центар сличности.

(Повуци у оба круга по један полупречник тако, да буду паралелни у истом смислу. Кроз њихове крајње тачке повуци једну праву. Она сече централу у спољњем центру сличности.

83. — Шта бива с унутрашњим центром сличности два круга, кад се они удаљују један од другога? Шта бива кад се приближују један другоме? Шта бива кад се додирну?

84. — Исто питање за спољни центар сличности.

85. — Где је унутрашњи центар сличности два једнака спољна круга?

86. — Где је спољни центар сличности два једнака спољна круга?

87. — Где је унутрашњи центар сличности два круга који се додирују споља?

88. — Имају ли оба центра сличности два круга који се додирују изнутра?

89. — Израчунати површину описаног круга око троугла $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm.

90. — Исто за $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm.

91. — Исто за $a = 12\frac{1}{2}$ cm, $b = 11{,}5$ cm, $c = 9{,}7$ cm.

92. — Датоме полигону нацртај сличан полигон у размери 1:2.

93. — „ „ „ „ „ „ „ 2:3.

94. — „ „ „ „ „ „ „ 4:5.

95. — Два полигона који имају све углове једнаке, не морају бити слични. Зашто? А зашто троуглови морају?

96. — Два полигона којима су све стране пропорционалне не морају бити слични. Зашто то? А зашто троуглови морају?

97. — Дата су два полигона који личе један на други. Како ћеш утврдити јесу ли слични?

98. — Дат је трапез $ABCD$. Кроз пресек дијагонала повучена је права L паралелно са DC и права P паралелно са BC. Права L сече AD у E, а права P сече AB у F. Доказати да је EF паралелно са BD.

(Трапез је овако обележен: већа основица је AB, а остала темена се ређају у супротном смислу кретања сахатне казаљке.)

99. — Јесу ли сви правилни петоугаоници међу собом слични? Зашто?

100. — Два правилна многоугаоника су увек слични ако имају исти број страна. Доказ.

101. — Два правилна многоугаоника истог броја страна, спољни један за други, имају унутрашњи и спољашњи центар сличности. Да ли увек? Зашто?

102. — Датоме правилноме полигону нацртај сличан полигон у размери 3:1 или тако, да центар описанога круга око датога полигона буде центар сличности.

103. — Два неједнака правилна полигона истог броја страна имају једно теме заједничко. Где им лежи центар сличности? Центар хомотетије).

IX — ПОВРШИНЕ РАВНИХ ЛИКОВА

Мерење дужина. — Дужине меримо на тај начин, што јединицу за дужину полажемо по дужини коју меримо. *Мерни број* дужине је онај број који показује колико се пута јединица мере може пренети по мереној дужини. На пр. кад кажемо да је једна кућа широка 8 метара, то значи да се метар може 8 пута пренети по ширини те куће.

Мерење површина. — Мерити једну *површину* значи тражити број који показује колико се пута *јединица површине* може положити по тој површини.

Јидинице за мерење површине. — Основна јединица за мерење површине је *квадратни метар.* Знамо шта је квадратни метар и знамо веће и мање површинске јединице од квадратног метра. Имамо ову таблицу:

$1 Km^2 = 100 ha = 10000 a = 1\,000\,000 m^2$

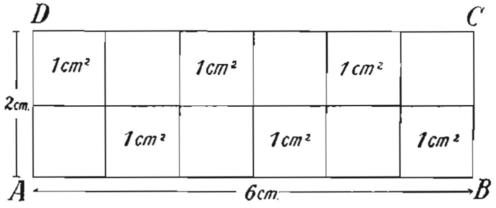
$1 ha = 100 a = 10000 m^2$

$1 a = 100 m^2$

$1 m^2 = 100 dm^2$

$1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2$

$1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2 = 1\,000\,000 mm^2$



Сл. 253

Израчунавање површина. — Хоћемо да измеримо површину правоугаоника $ABCD$ (сл. 253). Узећемо квадратни сантиметар и полагати га по овоме правоугаонику. Видимо да се 1 cm² може положити 12 пута по овоме правоугаонику. Тада кажемо да је површина p овога правоугаоника 12 cm² и пишемо:

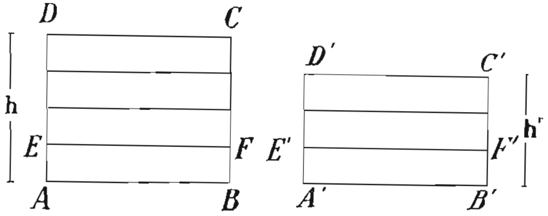
$$p = 12\ \text{cm}^2$$

Тежак, веома спор, а често пута и веома непоуздан посао би то био, кад бисмо ми изналазили мерни број једне површине овако као малочас: полагањем површинске јединице по тој површини. Зато су математичари пронашли много краћи пут: израчунавање површине.

ПОВРШИНА ПРАВОУГАОНИКА

Однос површина два правоугаоника. — 1. — Узмимо два правоугаоника једнаких основица (сл. 254). Нека се дужинска јединица AE може пренети 4 пута по висини првога, а 3 пута по висини другога. Површина првога правоугаоника (p) биће:

$$p = 4\ .\ ABEF$$



Сл. 254

Првршина другога биће:

$$p' = 3\ .\ A'B'F'E' \text{ тј.}$$

$$p' = 3\ .\ ABEF.$$

Однос површина ова два правоугаоника биће:

$$\frac{p}{p'} = \frac{4\ .\ ABEF}{3\ .\ ABEF} \text{ тј.}$$

$$\frac{p}{p'} = \frac{4}{3} \qquad \frac{p}{p'} = \frac{h}{h'}$$

Отуда видимо ово: *површине два правоугаоника једнаких основица односе се као њихове висине.*

2. — Узмимо сад два правоугаоника једнаких висина, а неједнаких основица. Па то већ имамо на слици 254. Узмимо, само да су сад основице AD и $A'D'$, а висине AB и $A'B'$.

Тада ће бити, ако основице обележимо са b и b':

$$\frac{p}{p'} = \frac{AD}{A'D'} \text{ тј. } \frac{p}{p'} = \frac{b}{b'}$$

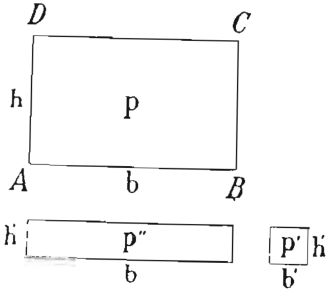
Површине два правоугаоника једнаких висина односе се као њихове основице.

Површина правоугаоника. — Хоћемо да израчунамо површину правоугаоника $ABCD$ (сл. 255). Узећемо један правоугаоник (p'') који с датим правоугаоником има једнаку основицу (b), а чија је висина дужинска јединица (h').

Узмимо и један квадрат (p') чија је страна дужинска јединица (h'). Тада ће бити:

$$(1) \qquad \frac{p}{p''} = \frac{h}{h'}$$

$$(2) \qquad \frac{p''}{p'} = \frac{b}{b'}$$



Сл. 255.

Кад помножимо леву страну левом, а десну десном у једначинама (1) и (2), добићемо:

$$\frac{p''}{p'} \cdot \frac{p}{p''} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} \text{ тј.}$$

$$(3) \qquad \frac{p}{p'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'}$$

Једначина (3) значи ово:

$\frac{p}{p'}$ казује колико се пута површинска јединица садржи у датој површини $ABCD$;

$\frac{b}{b'}$ казује колико се пута дужинска јединица садржи у основици;

$\frac{h}{h'}$ казује колико се пута дужинска јединица садржи у висини.

Зато (3) можемо написати овако:

Мерни број површине $ABCD$ = мерни број основице × мерни број висине.

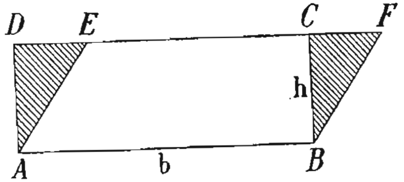
Отуда ово правило:

Површина правоугаоника израчунава се, кад се основица помножи висином:

$$\boxed{p = bh}$$

ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Површина паралелограма. — Паралелограм има једнаку површину са правоугаоником с којим има једнаку основицу и висину. Правоугаоник *ABCD* и ромбоид *ABFE* (сл. 256) имају једнаке основице (*b*) и висине (*h*). Заједничка им је површина *ABCE*. Ако на њу додамо троугао *AED* имамо правоугаоник; ако на заједничку површину додамо *BCF*, имамо ромбоид. Троуглови *AED* и *BFC* су подударни ($AE = BF$, $AD = BC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 90^0$). Зато је површина ромбоида *ABFE* једнака с површином правоугаоника *ABCD*. Површина правоугаоника биће:



Сл. 256.

$$p = bh.$$

Толика ће бити и површина ромбоида. Пошто је у њему *b* основица, а *h* висина, имамо правило:

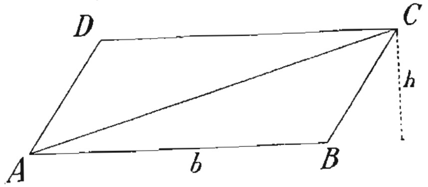
Површина паралелограма једнака је производу основице и висине тога паралелограма:

$$\boxed{p = bh}$$

ПОВРШИНА ТРОУГЛА

Уз дати троугао *ABC* (сл. 257) доцртајмо подударни троугао *ACD*. Добићемо паралелограм *ABCD*. (Зашто?)

На слици 257 је $\triangle ABC \cong \triangle ACD$. Значи да је површина троугла *ABC* половина површине паралелограма *ABCD*. Ако површину троугла *ABC* обележимо са *p*, биће:



Сл. 257.

$$p = \frac{ABCD}{2} \text{ тј.}$$

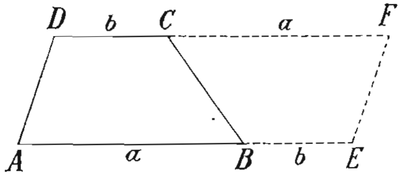
$$\boxed{p = \frac{bh}{2}}$$

Ово значи:

Површина троугла равна је половини производа троуглове основице и висине.

ПОВРШИНА ТРАПЕЗА

Узмимо трапез *ABCD* (сл. 258) са основицама *a* и *b*. Нацртајмо уз тај трапез исти такав трапез, али обрнут. Добићемо паралелограм *AEFD*. (Зашто?) Основица овога паралелограма је $(a + b)$, а висина му је висина трапезова. Површина трапеза *ABCD* је *половина* површине паралелограма *AEFD*. Ако површину трапеза обележимо са *p*, имаћемо:



Сл. 258.

$$p = ABCD = \frac{AEFD}{2} \text{ тј.}$$

$$p = \frac{(a+b)h}{2} \text{ или}$$

$$\boxed{p = \frac{a+b}{2}.\ h}$$

То значи ово:

површина трапеза једнака је производу полузбира основица и висине.

ПОВРШИНА ДЕЛТОИДА

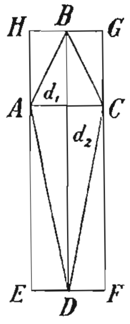
Повуцимо паралелне с дијагоналама делтоида *ABCD* (сл. 259). Добићемо правоугаоник *EFGH*. Његове су стране једнаке с делтоидовим дијагоналама. Зато ће његова површина бити:

$$EFGH = d_1 d_2 .$$

Делтоидова површина (*p*) биће половина правоугаоникове површине. (Зашто?). Отуда је:

$$\boxed{p = \frac{d_1 d_2}{2}}$$

Површина делтоида једнака је с половином производа његових дијагонала.



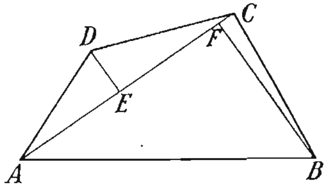
Сл. 259.

ПОВРШИНА ТРАПЕЗОИДА

Трапезоидову површину израчунавамо на тај начин, што га поделимо на два троугла, израчунамо површине тих троуглова и саберемо их.

На слици 260 имаћемо:

$$ABCD = ABC + ACD =$$
$$= \frac{AC \,.\, BF}{2} + \frac{AC \,.\, DE}{2} = \frac{AC}{2}(BF + DE).$$



Сл. 260.

ПОВРШИНА ТАНГЕНТНОГ ЧЕТВОРОУГЛА

Нека је дат тангентни четвороугао $ABCD$ (сл. 261). Обележимо његову површину са p. Тада ће бити:

$$p = ABO + BOC + COD + DOA.$$

То је даље:

$$p = AB \cdot \frac{r}{2} + BC \cdot \frac{r}{2} + CD \cdot \frac{r}{2} + AD \cdot \frac{r}{2}$$

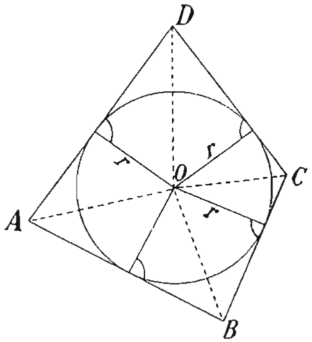
тј.

$$p = \frac{r}{2}\,(AB + BC + CD + AD).$$

Израз у загради претставља обим нашег четвороугла. Ако тај обим обележимо са $2s$, имаћемо:

$$p = \frac{r}{2} \cdot 2s \quad \text{тј.}$$

$$\boxed{\mathbf{p = rs}}$$

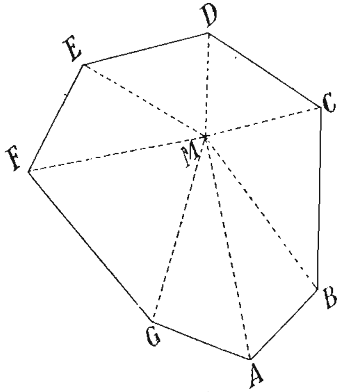


Сл. 261.

Површина тангентног четвороугла једнака је производу полупречника уписаног круга и полуобима тога четвороугла.

ПОВРШИНА НЕПРАВИЛНОГ МНОГОУГАОНИКА

Узмимо неправилни многоугаоник $ABCDEFG$ (сл. 262). Његову површину израчунавамо на тај начин, што га поделимо на троугле (сл. 262) или на троугле и четвороугле (сл. 263), па израчунамо површине свих делова и саберемо их.



Сл. 262.

На слици 262 имаћемо:

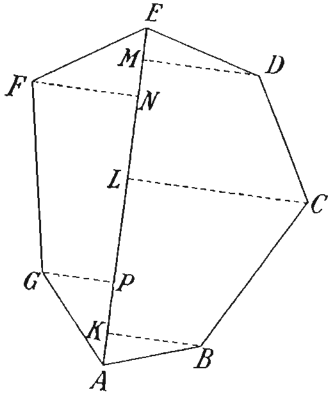
$$ABCDEFG = ABM + BCM + CDM + DEM + EFM + FGM + AGM.$$

На слици 263 имаћемо:

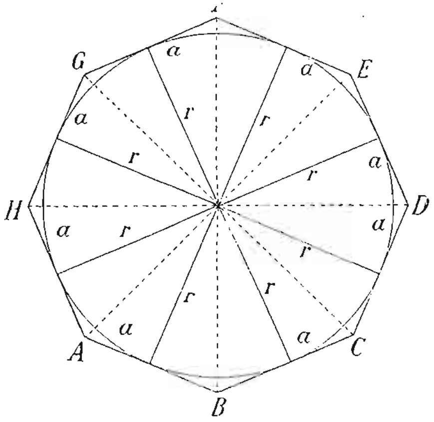
$$ABCDEFG = ABK + BCLK + CDML + DEM + FNE + PNFG + APG.$$

ПОВРШИНА ПРАВИЛНОГ ПОЛИГОНА

Знамо да се у правилном полигону може уписати круг. Ако упишемо круг у један правилни полигон од n страна (сл. 264) и средиште тога круга спојимо са свима полигоновим теменима, полигон ће бити подељен на n подударних равнокраких троуглова. Збир свих тих троуглова даће полигонову површину. Ако страну правилнога полигона обележимо са a, а обим са $2s$, имаћемо са слике 264:



Сл. 263.



Сл. 264.

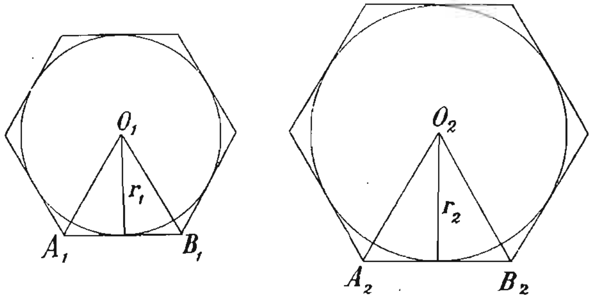
$$p = \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} = \frac{r}{2} \cdot 2s$$

$$\boxed{p = r\,s}$$

Површина правилног полигона једнака је производу полупречника уписаног круга и полуобима тога полигона.

ОДНОС ОБИМА ПРАВИЛНОГ ПОЛИГОНА И ЊЕГОВОГ ПРЕЧНИКА УПИСАНОГ КРУГА

Два правилна полигона с истим бројем страна увек су слични. Узмимо два правила шестоугаоника (сл. 265). Обележимо њихове полупречнике уписаних кругова са r_1 и r_2, пречнике тих кругова са d_1 и d_2, а обиме са $2s_1$ и $2s_2$. Биће:



Сл. 265.

$\triangle A_1B_1O_1 \backsim \triangle A_2B_2O_2$ Одатле је:

$$\frac{A_1B_1}{r_1} = \frac{A_2B_2}{r_2}$$

$$\frac{6A_1B_1}{r_1} = \frac{6A_2B_2}{r_2}$$

$$\frac{2s_1}{r_1} = \frac{2s_2}{r_2}$$

$$\frac{2s_1}{2r_1} = \frac{2s_2}{2r_2}$$

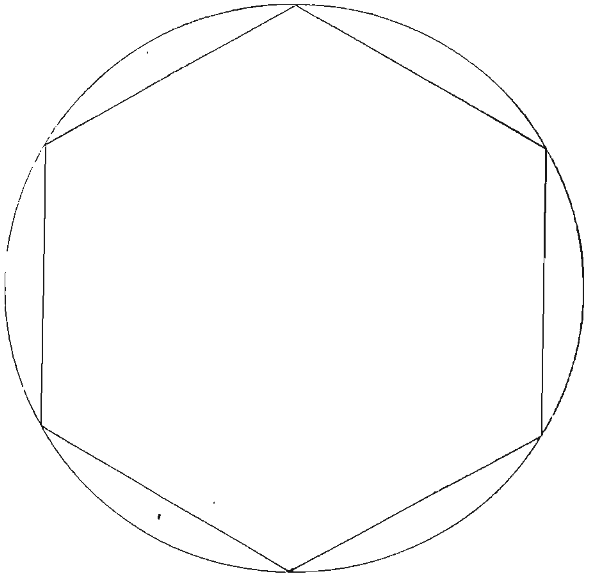
$$\frac{2s_1}{d_1} = \frac{2s_2}{d_2}$$

У два слична правилна полигона исти је однос обима и пречника уписаног круга.

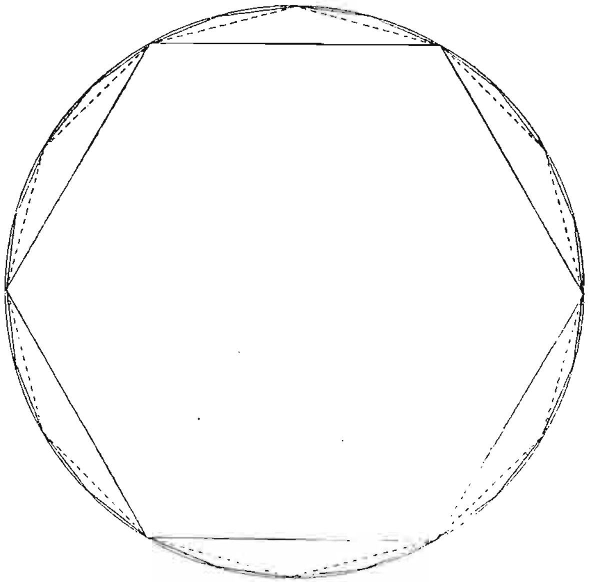
КРУГ КАО ГРАНИЦА ПРАВИЛНОГ ПОЛИГОНА

Упишимо у круг један правилни полигон (сл. 266). Обим круга је очевидно већи од обима уписана полигона. Постоји извесна *разлика* између обима круга и обима овога уписаног полигона.

Пустимо сад да број страна тога полигона једнако расте (сл. 267). Полигонов обим ће једнако расти. Разлика између кружног обима и полигоналног обима бива све мања и мања. Њу можемо начинити мањом од ма како малог унапред датог малог броја. Значи, та разлика тежи нули. То даље значи да полигон тежи да се поклопи с кругом. Кружни обим је *граница* обима уписаног полигона, кад број страна тога полигона једнако расте.



Сл. 266.



Сл. 267.

Зато круг можемо сматрати као правилан полигон чији број страна непрекидно расте.

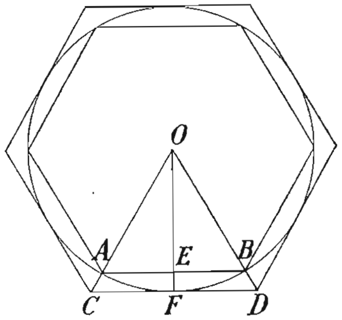
Сви су кругови слични међу собом. Зато ће и код њих бити сталан однос обима и пречника:

$$\frac{2s}{d} = \pi$$

Са π (грчко слово пи) смо обележили тај стални број који показује однос обима и пречника. Кад бисмо знали тај број, лако бисмо израчунали обим круга. Било би:

$$2s = \pi \cdot d$$

Како ћемо израчунати тај број π?



Сл. 268.

У круг упишимо правилан шестоугаоник (сл. 268). Опишимо око њега правилан шестоугаоник.

Обележимо обим уписаног шестоугаоника са $2s_6$, а описаног са $2S_6$.

Биће: $2s_6 = 6r$.

Обим описаног шестоугаоника биће:

$$2S_6 = 6\ CD.$$

Са слике 268 имамо:

$$OE = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

даље имамо:

$\triangle\ OEB \backsim \triangle\ OFD$. Отуда је:

$$\frac{OE}{OF} = \frac{EB}{FD} \text{ тј.}$$

$$FD = \frac{OF \cdot EB}{OE}$$

$$FD = \frac{r \cdot \frac{r}{2}}{\frac{r}{2}\sqrt{3}} \text{ тј.}$$

$FD = \frac{r}{\sqrt{3}}$ тј. страна CD описаног шестоугаоника:

$$CD = 2\ FD = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

Обим $2\ S_6$ биће:

$$2\ S_6 = 6 \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

$$2\ S_6 = 4\ r\sqrt{3}$$

Ако пречник обележимо са d, биће:

$$2s_6 = 3d$$

$$2S_6 = 2\sqrt{3} \cdot d$$

$\underline{\sqrt{3}} \quad = \quad 1{,}73205\ldots$

$\underline{20{,}0} \quad : \quad 27.7$

$\underline{110{,}0} \quad : \quad 343.3$

$\underline{710{,}0} \quad : \quad 3462.2$

$\underline{1760{,}0} \quad : \quad 34640.0$

$\underline{176000{,}0} \quad : \quad 346405.5$

27975

Отуда је:

$$2\ s_6 = 3d$$

$$2\ S_6 = 3{,}46410\ldots d$$

Ако сад упишемо и опишемо дванаестоугаоник, имаћемо:

$$2\ s_{12} = 3{,}105829\ldots d$$

$$2\ s_{12} = 3{,}215390\ldots d$$

Ако се тај рачун настави и даље, имаћемо:

$2s_{24} = 3{,}132629\ldots\ \mathrm{d}$

$2S_{24} = 3{,}159660\ldots\ \mathrm{d}$

$2s_{192} = 3{,}141453\ldots\ \mathrm{d}$

$2S_{192} = 3{,}141873\ldots\ \mathrm{d}$

$2s_{1536} = 3{,}141591\ldots\ \mathrm{d}$

$2S_{1536} = 3{,}141597\ldots\ \mathrm{d}$ итд.

Види се ово: обими уписаног и описаног полигона ближе се један другоме. Оба теже својој **граници**: описани *опада* и тежи да се поклопи с кругом; уписани *расте* и тежи да се поклопи с кругом. Обим круга је стално између обима уписаног и описаног полигона. Обележимо обим круга са $2s$, обим уписаног полигона са $2s_n$ а описаног са $2S_n$. Биће стално:

$$2s_n < 2s < 2S_n.$$

Што је број страна све већи, разлика обима описаног и уписаног круга је све мања. Код полигона од 1536 страна та је разлика тек у шестом децималу. Зато можемо узети да је обим круга:

$$2s = 3{,}14159\ldots\ \mathrm{d}$$

Нашли смо приближну вредност броја π са 5 тачних децимала:

$$\pi = \frac{2s}{\mathrm{d}} = 3{,}14159\ldots$$

Са 10 тачних децимала број π гласи:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Број π је ирационалан број. Како се он брже израчунава, видећеш ако будеш учио вишу математику.

Сад имамо образац за **обим круга**:

$$\boxed{\mathbf{2s = \pi d}}$$

Или:

$$\boxed{\mathbf{2s = \pi \,.\, 2x}}$$

ПОВРШИНА КРУГА

Видимо да круг можемо сматрати као **границу** уписаног или описаног правилног полигона чији број страна непрекидно расте. Али кад тај број страна непрекидно расте, полигон ће се у граници поклопити с кругом. Зато за површину круга можемо узети образац за површину правилног полигона. Тај је образац био:

$$p = rS$$

За круг ће бити:

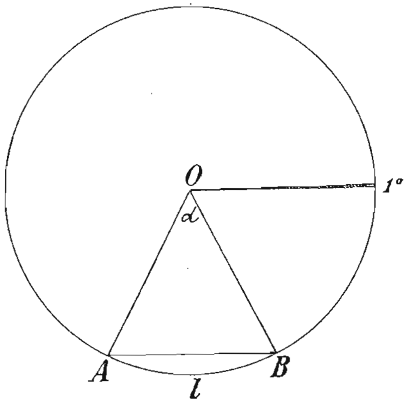
$$p = r \,.\, S$$

$$p = r \,.\, \frac{\pi \,.\, d}{2}$$

$$p = r \,.\, \frac{\pi \,.\, 2r}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{p = \pi \,.\, r^2}}$$

ПОВРШИНА КРУЖНОГ ИСЕЧКА



Сл. 269

Површина исечка чији је средишни угао 1^0 биће $\frac{1}{360}$ део кружне површине:

$$S_{c,1^0} = \frac{\pi \,.\, r^2}{360}$$

Ако је исечков угао α (сл. 269), површина тога исечка биће α пута већа од површине исечка чији је угао 1^0. Зато ће површина исечка *ABC* са слике 269 бити:

$$\boxed{(1)\ \mathbf{S_c = \frac{\pi \,.\, r^2}{360} \,.\, \alpha}}$$

Површину кружног исечка можемо израчунати и на други начин.

Знамо да је средишни угао сразмеран с луком. (То значи *n* пута већем средишном углу одговора *n* пута већи средишни угао и обрнуто). Зато постоји однос:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{360^0}{\pi \,.\, 2r}$$

Одатле је:

$$(2) \quad \alpha = \frac{180l}{\pi \,.\, r}$$

Ако (2) унесемо у (1), добићемо нов образац за површину исечка.

$$S_c = \frac{\pi \,.\, r^2}{360} \,.\, \alpha$$

$$S_c = \frac{\pi \,.\, r^2}{360} \,.\, \frac{180l}{\pi \,.\, r}$$

$$\boxed{\mathbf{S_c = \frac{lr}{2}}}$$

ПОВРШИНА КРУЖНОГ ОТСЕЧКА

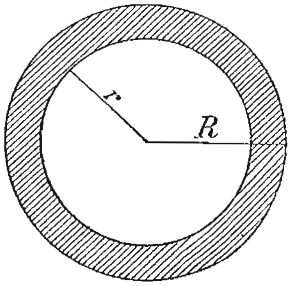
Површину кружног отсечка над тетивом *AB* (сл. 269) израчунаћемо кад од површине кружног исечка одбијемо површину троугла *ABO*.

ПОВРШИНА КРУЖНОГ ПРСТЕНА

Површина кружног прстена је површина једнака с разликом површина великог и малог круга (сл. 270). Ако је обележимо са *p*, имаћемо овај образац:

$$p = \pi R^2 - \pi r^2$$

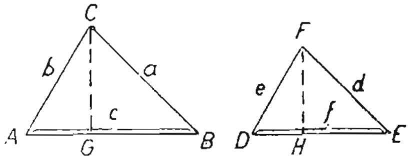
$$\boxed{\mathbf{p = \pi\,(R^2 - r^2)}}$$



Сл. 270.

ПОВРШИНЕ СЛИЧНИХ ПОЛИГОНА

Површине сличних троуглова. — Узмимо два слична троугла *ABC* и *DEF* (сл. 271). Површину већег обележимо са *P*, мањег са *p*. Тада ће бити:



Сл. 271.

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot CG$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot f \cdot FH$$

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{1}{2} \cdot c \cdot CG :\right) : \left(\frac{1}{2} f \,.\, FH\right) = \frac{c}{f} \cdot \frac{CG}{FH} \,.$$

Пошто су троугли слични, биће:

$$\frac{c}{f} = \frac{CG}{FH}$$

Отуда је:

$$\frac{P}{p} = \frac{c}{f} \,.\, \frac{c}{f}$$

$$\frac{P}{p} = \left(\frac{c}{f}\right)^2$$

Нека је однос сличности $\frac{c}{f} = k$. Тада је:

$$\frac{P}{p} = k^2 \qquad P = k^2 \,.\, p$$

Размера површина два слична троугла равна је квадрату њихове размере сличности.

Површине сличних полигона. — На слици 240 нека је површина $ABC = P_1$, $ACD = P_2$, $ADE = P_3$, $AMF = p_1$, $AFG = p_2$. $AGH = p_3$. Нека је $AB : AM = k$. Тада ће бити:

$$P_1 = k^2 p_1 \qquad P_2 = k^2 p_2 \qquad P_3 = k^2 p_3$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = k^2 \ (p_1 + p_2 + p_3)$$

$$ABCDE = k^2 .\ AMFGH$$

$$\frac{ABCDE}{AMFGH} = k^2$$

Размера површина два слична полигона равна је квадрату њихове размере сличности.

ВЕЖБАЊА

Израчунај површину правоугаоника чије су стране:

1. $a = 7\frac{1}{3}$ cm, $b = 3{,}04$ dm. **2.** $a = 2{,}03$ dm, $b = 4\frac{1}{5}$ cm

3. — Колика је површина квадрата чија је страна a?

(Одакле ћеш извести образац за површину квадрата $p = a^2$?)

4. — Израчунај површину квадрата чија је страна $a = 3{,}07$ dm.

5. — „ „ „ чији је обим $2s = 14\frac{1}{7}$ m.

6. — Површина једног квадрата је $p = 26{,}01$ m². Колики му је обим?

7. — Израчунај предњу површину школске табле.

8. — Рачуна се да је на једнога ученика довољно просечно 0,64 m² у учионици. Клупе заузимају дужину од 8 m и ширину од 6 m. Колико се ученика могу ту сместити?

9. — Површина једне њиве правоугаоничног облика износи 84,32 ара. Колико је широка та њива, кад је дугачка 140 m?

10. — Обим једнога правоугаоника је $2s$; површина му је p, а дужина b. Колика му је ширина?

11. — Од чега зависи површина правоугаоника? А обим? Ако је једна правоугаоникова страна $a = 5$ cm, а друга је променљива (x), па x расте, шта ће брже расти: обим или површина? Изрази алгебарски те односе.

12. — Израчунај површину квадрата кад му је дијагонала $d = 8$ cm.

13. — Израчунај површину ромбоида, кад је једна дијагонала $d_1 = 17$ cm, друга $d_2 = 8$ cm, а угао између дијагонала $\alpha = 19^\circ 20'$.

14. — Израчунај површину ромбоида, кад је основица $b = 18$ cm, а висина $h = 7{,}04$ cm.

15. — Израчунај површину ромбоида кад је основица $a = 44\frac{1}{3}$ cm, а висина $h = \sqrt{196}$ cm.

16. — Израчунај површину ромба кад је страна 5 cm, а једна дијагонала 8 cm.

17. — Израчунај површину ромба кад је страна 18 cm, а једна дијагонала 14 cm.

18. — Израчунај површину ромба чије су дијагонале $d_1 = 1{,}05$ m и $d_2 = 0{,}96$ cm.

19. — Израчунај површину делтоида чије су дијагонале $d_1 = 1{,}24$ m и $d_2 = 2{,}42$ m.

20. — Исто за $d_1 = 7\frac{1}{7}$ m и $d_2 = 3\frac{1}{3}$ m.

Израчунај површину троугла кад су му основица a и висина h:

21. $a = 4{,}1$ cm, $h = 7{,}02$ cm. **22.** $a = 5{,}6$ cm, $h = 0{,}96$ cm.

23. $a = 3\frac{1}{7}$ cm, $h = 2\frac{1}{9}$ cm. **24.** $a = 4\frac{1}{9}$ cm, $h = 1{,}5$ cm.

25. — Шта стаје једно земљиште у облику троугла, кад му је основица 419 m, висина 141 m, а m^2 стаје 112 m^2?

26. — Стране једног правоугаоника су 64 m и 48 m. Један троугао има с њим једнаку површину. Колика је страна a тога троугла, кад је $h_a = 30$ m?

27. — Израчунати површину трапеза са слике 258.

28. — „ „ „ кад су основице $a = 17$ cm, $b = 13$ cm, а висина $h = 7$ cm.

29. — Израчунај површину трапеза, кад су му основице $a = 7\frac{1}{7}$ cm, $b = 3\frac{1}{3}$ cm, а висина $h = 4\frac{1}{9}$ cm.

30. — Израчунати површину четвороугла са слике 260. Шта мораш мерити?

31. — Нацртај један неправилан петоуганик, па му израчунај површину.

32. Нацртај један неправилан шестоугаоник, па му израчунај површину.

33. — Израчунај површину правилна шестоугаоника, кад му је страна $a = 10$ cm.

34. — Израчунај површину правилна петоугаоника, кад му је полупречник уписана круга $r = 3$ cm.

(Спој два узастопна темена с центром уписана круга. Добијеш равнокраки троугао. Колики му је угао на врху? Висина му је 3 cm).

35. — Израчунај површину правилна осмоугаоника, кад му је полупречник описана круга $R = 6$ cm.

36. — Израчунај површину правилна дванаестоугаоника, кад му је страна $a = 4$ cm.

37. — Израчунај површину правилна десетоуглоника који је уписан у кругу $R = 10$ cm.

38. — Од чега зависи обим круга? Изрази алгебарски.

39. — „ „ „ површина круга? Изрази алгебарски

Израчунај обим и површину ових кругова:

40. $r = 5,4$ cm. **41.** $2r = 10,010$ m. **42.** $r = 7\frac{1}{9}$ cm.

43. — Израчунај површину круга чији је обим 6,28 cm.

44. — „ обим круга чија је површина 40 m^2.

45. — Површина једног земљишта имо кружни облик. Израчунати највеће растојање на његовом обиму, кад је површина тога земљишта 2 хектара.

46. — За колико се повећава обим једног круга, кад му се полупречник повећава за једну јединицу којом је мерен обим?

[Ако је полупречник био r, сад је $(r + 1)$]

47. — За колико се повећава површина једног круга, кад му се полупречник повећава за јединицу?

48. — Израчунај површину кружног исечка, кад је његов средишни угао $\alpha = 30^0$, а $r = 4$ cm.

49. — Израчунај површину кружног исечка, кад је $l = 7\frac{1}{3}$ m, $r = 3\frac{1}{7}$ m.

50. — Израчунај ровршину кружног отсечка, кад је средишни угао $\alpha = 45^0$, а $r = 8$ cm.

51. — Израчунај површину кружног прстена за $R = 7\frac{1}{3}$ m, $r = 5,4$ m.

52. — Исто са $R = 57,$ m, $r = 0,57$ m.

53. — Израчунај површину круга описана око правоугаоника чија је површина 12 cm^3, а висина 4 cm.

54. — Колико је дугачак лук чији је средишни угао 1^0 на кругу $r = 1$ m?

55. — Лук једнога круга је $l = 2$m на кругу $r = 2$m. Израчунај површину мањег кружног отсечка који одговара томе луку.

56. — Површина једног троугла је 12 cm^2. Колика је површина троугла сличног с њим у размери 1 : 2?

57. — У једноме троуглу основица је $a = 19$ cm, а висина $h_a = 4$ cm. У троуглу који је с њим сличан основица је 3 cm. Колика је површина овог другог троугла?

58. — Површине два слична троугла пропорационалне су са 1 : 4. У којој су размери њихове хомологе стране?

59. — Нацртан је правоугли троугао ABC, у коме је $a > b > c$. Нацртана су три троугла слична међу собом. У једноме је основица *a*, у другоме *b*, а у трећем *c*. Доказати да је површина највећег троугла једнака са збиром она друга два.

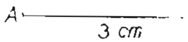
(Које пропорције важе за два слична троугла? Прегледај да видиш које знаш. У коме су односу површине сличних слика?

Која је она важна теорема што важи за правоугли троугао?)

X — КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

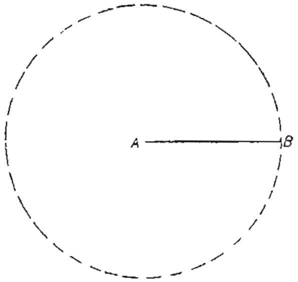
Шта је то конструктивни задатак? — То је задатак у коме имамо да нацртамо неку слику од једног или више њених делова који су нам дати, служећи се **само лењирима и шестарем**. На пр.:

Нацртати равнострани троугао, кад му је дата страна a = 3 cm.

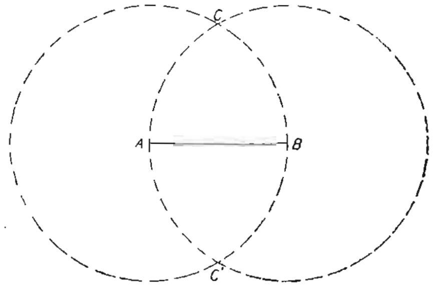


Сл. 272.

Ми нацртамо основицу тога троугла *AB* (сл. 272). Већ знамо два темена *A* и *B*. Имамо да одредимо и треће теме. Да бисмо одредили теме *C*, морамо најпре испитати где мора да лежи теме траженога троугла. Знамо да оно мора да лежи на кругу описаном из *A* полупречником *AB* (сл. 273). Знамо да оно мора да лежи и на кругу описаном из *B* полупречником *AB* (сл. 274). Пошто мора да лежи и на једном и на другом кругу, само пресечне тачке *C* и *C′* задовољаваће оба услова.



Сл. 273.



Сл. 274.

При решавању конструктивних задатака могу нам се десити у главноме ова два случаја:

I случај. — Да бисмо нацртали слику, потребно је да нацртамо једну или више тачака.

Тада ми гледамо на којим геометриским местима леже тражене тачке. Цртамо та геометриска места. У њиховим пресецима биће тражене тачке.

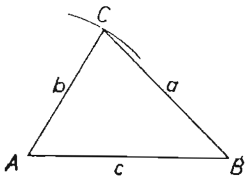
Такав начин решавања зове се **метода геометриских места**. По тој методи смо решили малопређашњи задатак.

II случај. — Може нам се десити да горња метода не помаже. Тада морамо најпре цртати помоћну слику, па тек онда тражену слику. Кад смо хтели да конструишемо спољну дирку за два круга (сл. 179), најпре смо цртали круг полупречником *AO*. То је била помоћна слика. Затим дирку томе кругу. То је била друга помоћна слика. Тек после тих двеју слика цртали смо тражену дирку *T*. Оваква метода зове се **метода помоћних слика**.

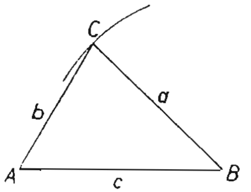
МЕТОДА ГЕОМЕТРИСКИХ МЕСТА

Показаћемо је на примерима. Најпре је потребно да прелисташ све што си ове године учио из Геометрије. Нарочито пажљиво прегледај сва поменута геометриска места.

I. Припрема.



Сл. 275.



Сл. 276.

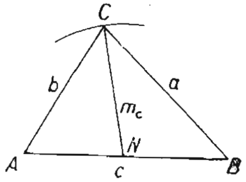
1. Где лежи треће теме троуглово, кад су му дата прва два?

а) Оно мора да лежи на кругу описаном из једног темена једном страном (слика 275).

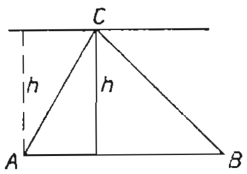
б) Оно мора да лежи на кругу описаном из другог темена другом страном (сл. 276).

в) Оно мора да лежи на кругу описаном из средине једне стране *AB* (сл. 277) тежишном линијом те стране као полупречником *(NC)*.

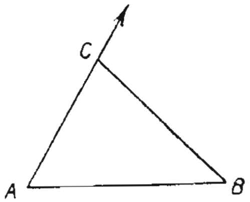
г) Оно мора да лежи на правој паралелној са датом страном *(AB)*, а на растојању *h* од ње (сл. 278).



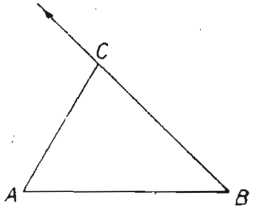
Сл. 277.



Сл. 278.



Сл. 279.

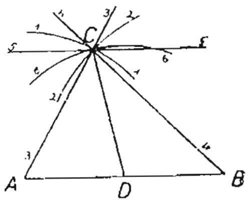


Сл. 280.

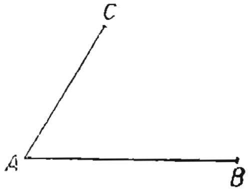
д) Оно мора да лежи на краку угла *A* (сл. 279).

ђ) „ „ „ „ „ „ „ *B* (сл. 280).

На колико геометриских места лежи *C*? (Сл. 281). Има ли их још?

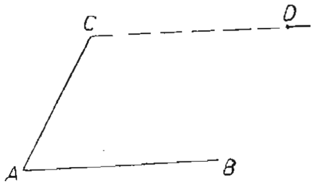


Сл. 281.

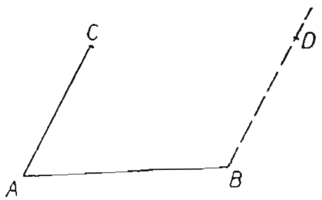


Сл. 282.

2. — Где лежи четврто теме једнога паралелограма, кад су дата прва три? (сл. 282).



Сл. 283.

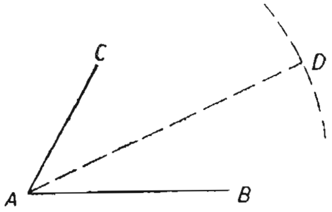


Сл. 284.

а) Лежи на правој повученој из *C* паралелно са *AB* (сл. 283).

б) „ „ „ „ „ *B* „ „ *AC* (сл. 284).

в) „ „ кругу описаном из *A* полупречником *AD* (сл. 285).

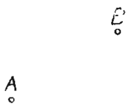


Сл. 285.

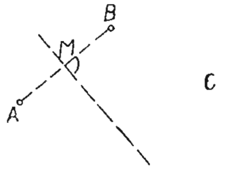
II — Задаци

Први задатак. — *Одредити тачку D, која је подједнако удаљена од трију датих тачака* A, *B и C (сл. 286).*

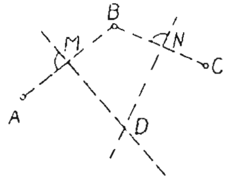
1. — Геометриско место тачака подједнако удаљених од *A* и *B* јесте симетрала *M* дужи *AB* (сл. 287). Геометриско место тачака подједнако удаљених од *B* и *C* је симетрала *ND* дужи *BC* (сл. 288).



Сл. 286.



Сл. 287.



Сл. 288.

II — У пресеку ова два геометриска места добијамо тачку *D*

III — То је тражена тачка. Зато што она лежи на *DM*, мора бити *AD* = *BD*. Зато што лежи на *DN*, мора бити *BD* = *DC*. Имамо: *DA* = *DB* = *DC*.

Тражени услов је испуњен.

IV — Како треба да леже те три тачке, *A*, *B* и *C*, па да увек можемо добити тражену тачку *D*?

Тачку *D* ћемо добити увек, ако се наше две симетрале секу. Кад се оне неће сећи? Оне се неће сећи

а) ако се поклапају,

б) ако су паралелне.

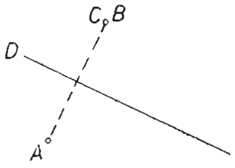
Како ће лежати тачке *A*, *B* и *C* у првом, а како у другом случају?

а) Нека се *C* поклопи са *B* (сл. 289).

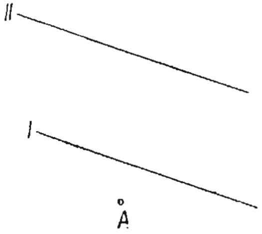
Тада имамо безброј решења. Све тачке са праве *D* су подједнако далеко и од *A* и од *B* и од *C*. Наш задатак је *неодређен*.

б) Кад ће наше две симетрале бити паралелне?

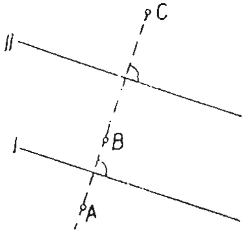
Узмимо две паралелне праве и једну тачку A (сл. 290). Ако је A једна од датих тачака, а I симетрала дужи AB, тада B мора да лежи како га показује сл. 291. Ако је II симетрала дужи BC, тачка C мора да лежи као што је показује иста слика. Значи, све три дате тачке морају лежати на једној правој. (Права AC).



Сл. 289.



Сл. 290.



Сл. 291.

Да сведемо. У овоме задатку може нам се десити:

а) Да имамо једно решење.

То ће бити кад три дате тачке не леже на једној правој.

Проблем је одређен. (Сл. 288).

б) Да имамо безброј решења.

То ће бити кад се две од датих тачака поклапају. (Сл. 289).

Проблем је неодређен.

в) Да немамо ни једног решења.

То ће бити кад су све три тачке на једној правој. (Сл. 291). Проблем је немогућан.

Шта смо радили у овоме задатку?

I — *Испитивали смо* на којим геометриским местима мора лежати тражена тачка.

II — Кад смо то урадили, *нацртали смо* ту тачку.

III — Затим смо *доказали* да је то тражена тачка.

IV — Најзад смо *расправили* кад је решење могуће, а кад није; колико има решења; кад је задатак одређен, кад је неодређен, а кад је немогућан.

Први посао зове се **испитивање** (или страном речи **анализа**).

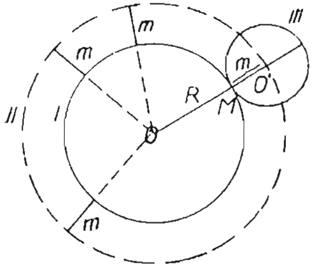
Други посао зове се **цртање** (или страном речи **конструкција**).

Трећи посао зове се **доказивање**.

Четврти посао зове се **расправа** (страном речи **дискусија**).

Други задатак. — *Конструисати круг који додирује дати круг O у датој тачци M, а има полупречник* m.

Претпоставимо да је задатак решен. На слици 292 имамо круг O. Круг O' додирује круг O у датој тачци M. Задатак се своди на то, да се одреди центар O' траженога круга.



Сл. 292.

Испитивање. — Пошто се кругови O и O' додирују у тачци M, њихови центри морају лежати на правој OM. То је **прво геометриско место**.

Тачка O' је удаљена од M за m. Све тачке које су за m удаљене од обима круга O леже на кругу описаном из O полупречником $(R+m)$. То је **друго геометриско место**.

Цртање. — Спојимо O са M и продужимо ту праву преко M. Узмемо у отвор шестара дужину $(R+m)$, па из O тим отвором опишемо кружни лук који сече OM у O'. Из O' отвором m опишемо круг. То је тражени круг.

Доказивање. — Да је то тражени круг, види се из овога:

1.) Он додирује дати круг, јер је O' далеко од O за $(R+m)$.

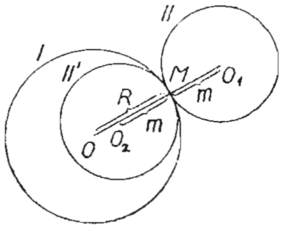
Дакле: $c = R + m$ (спољни додир).

2.) Он пролази кроз тачку M, пошто је $MO' = m$

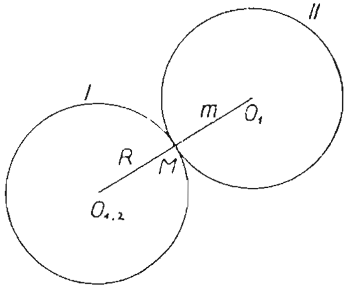
Расправа. — Могу наступити ови случајеви:

1. случај. — Може бити $R > m$. Тада имамо два решења. Тражени круг може додиривати дати круг споља, или изнутра (сл. 293).

Два решења су: круг II и II', тј. кругови O_1 и O_2.



Сл. 293.

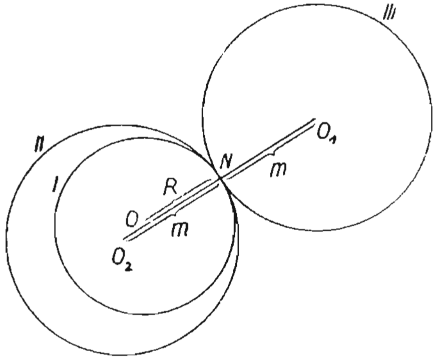


Сл. 294.

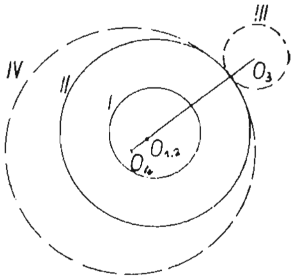
2. случај. — Може бити $R = m$. Тада имамо једно решење. (Круг O_2 поклапа се с кругом O_1) — Слика 294.

3 случај. — Може бити $R < m$. Опет имамо два решења. (Сл. 295). Решења су кругови II и III, тј. кругови O_1 и O_2.

Решење је увек одређено, пошто се тражени центар добија пресеком једног круга и једне праве која полази из центра тога круга.



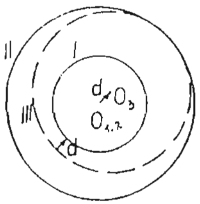
Сл. 295.



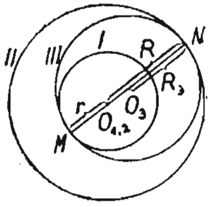
Сл. 296.

3 задатак. — *Дата су два концентрична круга. Нацртати круг који додирује оба дата круга.*

Испитивање. — Нацртајмо таква два круга (сл. 296). Кругови I и II. Ако неки круг додирује круг II као што га додирује круг III, или као што га додирује круг IV, он не може додиривати круг I. Значи, тражени круг не може бити спољни додирни круг за круг II. Према томе ако такав круг постоји, он мора бити унутрашњи круг за круг II.



Сл. 297.



Сл. 298.

Нацртајмо један такав круг (сл. 297). Круг III додирује круг II, али не додирује круг I. Са слике се види. да би круг III додирнуо и круг I, кад би му пречник некако опао за d у смислу стрелице. То би могло овако да изгледа (сл. 298). У том случају центар O_3 круга III лежи на средини дужи MN. Биће $R_3 = \frac{MN}{2} = \frac{R + r}{2}$. Где је центар круг III?

$$O_1\ O_3 = R - R_3 = R - \frac{R + r}{2} = \frac{R - r.}{2}$$

Цртање. — Кроз O повући праву док не пресече оба круга. (Један сече у N, други у M (сл. 298). Преполовити MN. Из њене средине описати круг полупречником $\frac{MN}{2}$. То је тражени круг.

Доказ. — Је ли то заиста тражени круг?

Да испитамо међусобни положај кругова II и III

$$c = OO_3 = \frac{R - r}{2}$$

Да видимо сад је ли разлика полупречника $R - R_3$ равна централи C.

$$R - R_3 = R - \frac{R + r}{2} = \frac{2R - R - r}{2} = \frac{R - r}{2} = c.$$

Значи да је

$R - R_3 = c.$

Значи да је централа једнака са разликом полупречника То је унутрашњи додир. Круг III додирује круг II изнутра.

Да испитамо међусобни положај кругова I и III.

$$c = OO_3 = \frac{R - r}{2} \qquad R_3 - r = \frac{R + r}{2} - r = \frac{R + r - 2r}{2}$$

$$= \frac{R - r}{2} = c.$$

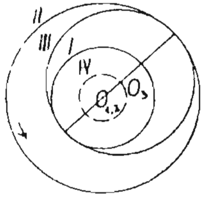
Опет централа једнака са разликом полупречника. Опет је унутрашњи додир. Круг III додирује и круг I.

Расправа. — При цртању се могло видети да ће бити више решења. У коме правцу морамо повући праву MN? Можемо је повући ма у коме правцу. Откуд знамо? Замислимо да су кругови I и III залепљени један за други, а да је круг II слободан. Замислимо да се сад I и III обрћу око O у смислу који показује стрелица (299). Тада ће тачка O_3 описати један круг. Центри наших тражених кругова леже на томе кругу. (Круг IV, сл. 299). Колико има тих центара? Безброј.

Наш задатак има безброј решења. Наш задатак је *неодређен*.

Је ли увек могућ? Он је могућ, ако постоји круг IV. Да би тај круг постојао треба да му постоји полупречник. Његов полупречник је $OO_3 = R_4 = \frac{R - r}{2}$

R_4 ће постојати, ако $R - r \neq O$. А $R - r$ неће бити равно нули само тако, ако није $R = r$. Како су наши кругови концентрични, увек је један полупречник већи од другога. Значи,

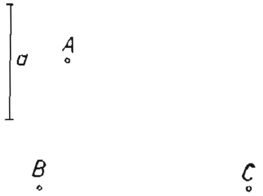


Сл. 299.

увек постоји круг IV. То даље значи, да увек имамо безброј решења.

(Да ли је само круг IV решење нашег задатка?)

4 задатак. — *Наћи тачку која је од дате тачке A далеко за дужину d, а подједнако је удаљена од двеју датих тачака B и C* (сл. 300).



Сл. 300.

Испитивање. — Геометриско место тачака које су за d удаљене од A јесте круг описан из A полупречником d. На њему мора да лежи тражена тачка. Потребно нам је још једно геометриско место.

Геометриско место тачака подједнако удаљених од B и C је симетрала дужи BC. И на њој мора да лежи тражена тачка.

Цртеж. — Из A круг полупречником d (сл. 301). На BC симетрала. Тражене тачке су D и E.

Доказ. — Тачке D и E испуњавају постављене услове.

$AD = d$ и $DB = DC$

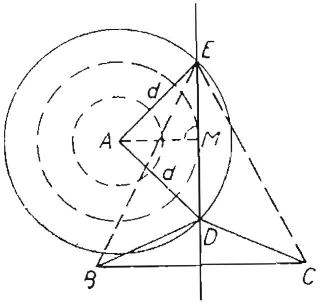
$AE = d$ и $BE = EC$.

Расправа. — Кад ће бити решења? Кад се наша геометриска места пресеку.

Симетрала дужи BC може сећи круг у двема тачкама. То ће бити кад је $d > AM$.

Симетрала дужи BC може додиривати круг. То ће бити кад је $d = AM$.

Симатрала дужи BC неће имати заједничких тачака с кругом, ако је $d < AM$.



Сл. 301.

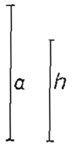
Дакле овако:

1) Ако је $d > AM$, два решења. Решење могуће и одређено.

2) Ако је $d = AM$, једно решење. (Решење могуће и одређено).

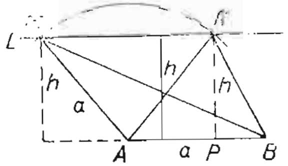
3) Ако је $d < AM$, нема решења. (Решење немогуће).

5 задатак. — *Конструисати равнокраки троугао чији је крак a, а h висина која му одговара* (сл. 302).



Сл. 302.

Испитивање. — Чим је дат крак, дата су два темена (A и B, сл. 303). Треће теме је од датога крака удаљено за h. Сем тога оно је од темена A удаљено за крак a.



Сл. 303.

Цртеж. — Дуж $AB = a$ (сл. 303). Ма где на AB, управна h. Из крајње тачке те управне повући праву L паралелну са AB. Права L је **прво геометриско место** траженог темена. Сад из A круг полупречником a. То је **друго геометриско место** траженог трећег темена.

Добијемо два троугла: ABM и ABN.

Доказ. — Обадва задовољавају постављене услове.

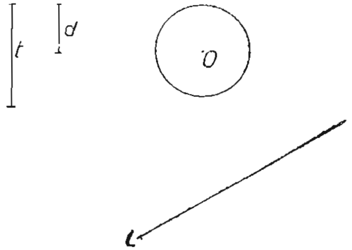
I $\triangle ABM$. Овде је $AB = a$ и $AM = a$. Дакле, равнокрак троугао. Сем тога је висина $NP = h$ (датој висини).

II $\triangle ABN$. Овде је $AB = AN = a$. $NP = h$.

Расправа. Тражено теме добијамо у пресеку једног круга и једне праве. Зато ће бити:

1. — Кад је $a < h$, два решења,
2. — Кад је $a = h$, једно решење.
3. — Кад је $a < h$, нема решења.

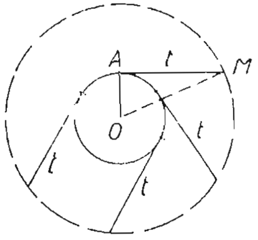
6 задатак. — *Одредити једну тачку тако, да дирка повучена из те тачке на дати круг има дату дужину t, а да та тачка буде за d удаљена од дате праве L* (сл. 304).



Сл. 304.

Испитивање. — Све тачке удаљене за d од L леже на паралелној са L повученој на растојању d од ње.

Где леже све тачке из којих се може повући дирка дужине t, на дати круг O? Претпоставимо да смо на дати круг повукли дирку дужине t (сл. 305). Замислимо сад да се круг не окреће, а да се троугао OAM окреће око O. Тачка M ће описати један круг. Његов полупречник је OM. Како ћемо га добити? Нацртаћемо један полупречник OA. У A ћемо дићи управну на OA и по њој од A пренети дуж t. Тада добијамо тачку M. Кад се она обрће око О, гради круг. Добили смо још једно геометриско место (рецкасти круг на слици 305).

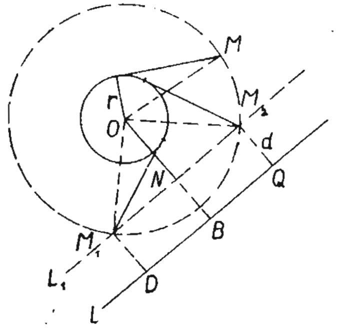


Сл. 305.

Где ће лежати тражена тачка? У пресеку два добивена геометриска места.

Цртеж. — Најпре паралелна L_1 (сл. 306). Затим OA, па $AM = t$ (сл. 305). Сад круг полупречником OM. Добивамо две тачке M_1 и M_2 (сл. 306).

Доказ. — Овде је $OM_1 = OM_2 = OM$. Зато су дирке из M_1 и M_2 равне датој дужини t. Сем тога M_1 и M_2 леже на L_1. Зато је $M_1D = M_2Q = d$.



Сл. 306.

Расправа — 1. Ако круг OM пресече L_1, — два решења. Проблем могућ и одређен.

2. — Ако круг OM додирне L_1 — једно решење. Проблем је могућ и одређен.

3. — Ако круг OM буде спољни за L_1 — нема решења. Проблем је немогућан. То ће бити кад је:

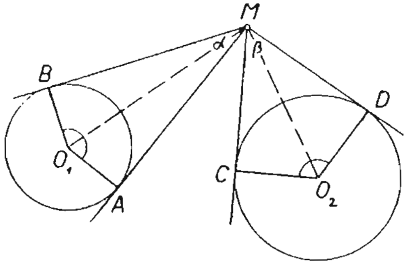
1. $OM > ON$, тј. Кад је $OM > OB - d$. Али овде је $OM = \sqrt{r^2+t^2}$, те ће бити два решења кад је $\sqrt{r^2+t^2} > OB - d$.

2. — Једно решење кад је $\sqrt{r^2+t^2} = OB - d$.

3. – Нема решења кад је $\sqrt{r^2+t^2} < OB - d$.

7. задатак. — *Дата су два круга O_1 и O_2. Наћи једну тачку такву, да се из ње круг O_1 види под углом α, круг O_2 под углом β.*

Испитивање. — Претпоставимо да смо решили задатак (сл. 307).



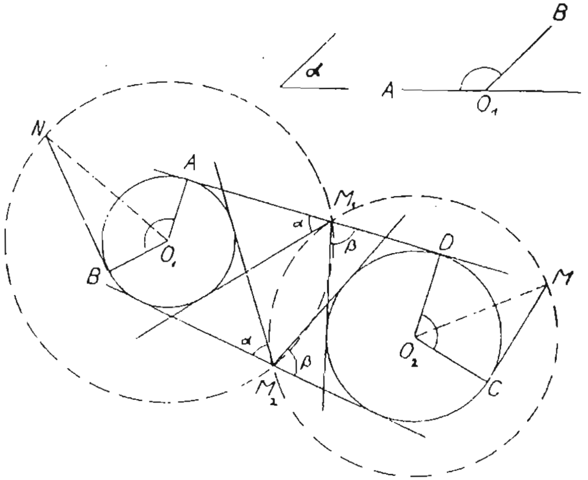
Сл. 307.

Нека се из тачке M види круг O_1 под углом α, круг O_2 под углом β.

За круг O_1 тачка M лежи на симетрали угла AO_1B. Тај угао је суплементан углу α. Знамо му величину. Сад је само питање где ћемо нацртати тај средишни угао. Можемо га нацртати свуда код O_1. То значи да M може да се окреће. M се може окретати по кругу чији је центар O_1, а полупречник O_1M.

Значи да је прво геометриско место круг описан из O_1 полупречником O_1M. Друго геометриско место биће круг описан из O_2 полупречником O_2M.

Цртеж. — Најпре два круга (сл. 308). Затим угао $AO_1B =$



Сл. 308.

$180^0 - \sphericalangle \alpha$. У B дигнемо управну T. Преполовимо угао AO_1B. Добијемо N. Сад круг полупречником O_1N. Исто то с кругом O_2. (Само што је сад средишни угао код O_2 оволики: $180^0 - \beta$). У пресеку кругова из O_1 и O_2 добијемо наше две тражене тачке M_1 и M_2

Доказ. — И M_1 и M_2 испуњавају постављене углове, јер је:

I $O_1M_1 = O_1N$. Зато је угао $M_1 = \sphericalangle \alpha$.

$O_1M_2 = O_1N$. Зато је угао $M_2 = \sphericalangle \alpha$.

II $O_2M_1 = O_2M$. Зато је угао под којим се види круг O_2 из M_1 угао β.

$O_2M_1 = O_2M$. Зато је угао под којим се види круг O_2 из M_2 угао β.

Расправа: — M_1 и M_2 смо добили у пресеку два круга. Ако се та два круга додирну, имаћемо једно решење. Ако они буду спољни један за други, неће бити решења.

Од чега зависи дужина O_1N? У старијим разредима моћи ћеш да изведеш ову расправу до краја. За сада само оволико.

ВЕЖБАЊА

1. — Две паралелне праве *A* и *B* пресечене су трећом правом *C*. Наћи на *C* тачку која је подједнако удаљена од *A* и *B*.

2. — Наћи тачку удаљену за дату дужину *d* од дате тачке *M* и од дате праве *L*.

3. — Наћи тачку која од дате тачке *A* има растојање *a*, а од дате тачке *B* растојање *b*.

4. — На датој правој *L* наћи тачку која је подједнако удаљена од двеју датих тачка *A* и *B*.

5. — Наћи тачку која је за *a* удаљена од дате тачке *A*, а за *b* од дате праве *B*.

6. — Наћи тачку која је подједнако удаљена од двеју паралелних правих *A* и *B* и од датога круга *O*.

7. — Наћи тачку која је подједнако удаљена од двеју датих правих *A* и *B*, а од дате праве *C* има дато растојање *c*.

(Узми најпре да је $A \parallel B$, а затим да се секу).

8. — Конструисати правоугли троугао чија је хипотенуза 5 cm, а њена висина 2 cm.

9. — Конструисати правоугли троугао, кад је хипотенузина висина 3 cm, а хипотенузина тежишна линија 5 cm.

10. — Конструисати правоугли троугао, кад је дат један оштар угао и хипотенузина висина.

11. — Конструисати равнокрако-правоугли троугао, чија је хипотенуза $c = 4$ cm.

12. — Конструисати равнокрако-правоугли троугао, чија је хипотенузина висина 2 cm.

13. — Конструисати троугао за који су дате две стране *a* и *b* и висина h_a.

14. — Конструисати троугао за који су дати страна *a*, угао *B* и висина h_a.

15. — Конструисати троугао кад је дата основица *c* и висине h_a и h_b .

16. — Одредити такчу која је подједнако удаљена од трију датих правих.

17. — Конструисати круг који пролази кроз две дате тачке а има полупречник од 2 cm.

18. — Конструисати круг $r = 3$ cm, који додирује дату праву и дати круг.

19. — Конструисати круг $r = 2$ cm тако, да додирне два круга.

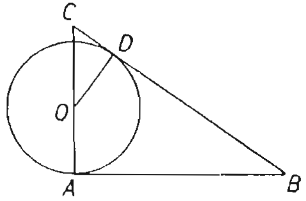
20. — Конструисати круг који додирује две дате паралелне праве и пролази кроз тачку *M* између тих двеју правих.

(Колики може бити полупречник тога круга?)

21. — Нацртати троугао, кад је дата страна $c = 3$ cm, један угао на њој *A* и висина $h_c = 2$ cm.

22. — Конструисати троугао, кад је дата страна $c = 4$ cm, угао *B* и тежишна линија $m_c = 3$ cm.

23. — Конструисати круг који сва три дата круга додирује споља.



Сл. 309.

24. — Дате су две тачке на хипотенузи: *M* и *N* (али оне нису њене крајње тачке), хипотенузина висина и по једна тачка *P* и *Q* на свакој страни правог угла. Конструисати тај правоугли троугао.

(Хипотенузу можеш повући кроз *M* и *N*. Где мора лежати теме *A* правог угла, кад знаш хипотенузину висину? Какав је угао *PAQ*? Какав је троугао *PAQ*? Шта у њему претставља дуж *PQ*?).

25. — Конструисати круг који додирује хипотенузу датог правоуглог троугла и пролази кроз теме правог угла, а центар му је на једној страни (сл. 309).

(Какве су међу собом раздаљине *OD* и *OA*?)

26. — Дате су три тачке *A*, *B* и *C*, које не леже на једној правој. Кроз *A* повући једну праву која је подједнако далеко од *B* и *C*.

(Јесу ли *B* и *C* подједнако далеко од праве *L*? — сл. 310. — А ако се *L* обрће око *M*? Итд).

27. — Конструисати троугао кад је познато једно теме А и положај свих трију висина.

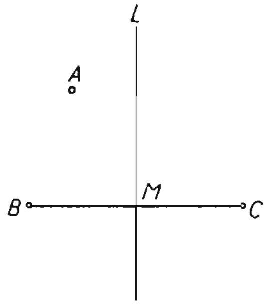
(Овде су дати само *правци* висина — сл. 311. Пусти h_a да прође кроз *A*. Затим кроз *A* паралелну с правцем h_b . Тада у *A* управну на ту праву. Итд. Је ли троугао одређен?)

28. — Дате су две праве *L* и *P*. Између њих је тачка А. Повући кроз *A* праву тако да она пресече *L* и *P*, а да тачка *A* буде на средини између пресечних тачака.

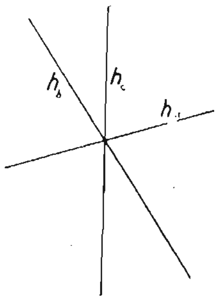
29. — Конструисати круг $r = 1{,}5\ cm$, који додирује две дате праве.

30. — Наћи тачку једнако удаљену од двеју датих правих, а да је на једнаком растојању од двеју датих тачака.

31. — На датој правој L одредити једну тачку M тако, да се из ње види под правим углом дата дуж AB, која *не* лежи на L.



Сл. 310.



Сл. 311.

32. — На датоме кругу наћи такву тачку, да се из ње види под правим углом дата дуж AB.

33. — Одреди тачку из које се на круг $r = 5$ cm може повући дирка $t = 12$ cm.

34. — Дате су три праве: L, M и P. На L наћи тачку из које се може описати круг који додирује M и P.

35. — Описати круг који додирује дате праве L и M, али дату праву L у датој тачци T.

√ **36.** — Дате су две паралелне праве L и M. Нацртати круг тако, да додирује L, а да на M отсеца дуж од 2 cm.

37. — Нацртати круг који додирује дати круг и пролази кроз дату тачку A.

38. — Нацртати круг $r = 1$ cm који додирује дати круг и пролази кроз дату тачку.

39. — Нацртати круг који додирује дати круг $r = 3$ cm, а пролази кроз дату тачку A.

40. — Нацртати круг $r = 1$ cm, који додирује кругове $R_1 = 2$ cm, $R_2 = 3$ cm, $O_1O_2 = 6$ cm.

41. — Исти задатак, само што је сад $R_1 = 3$ cm.

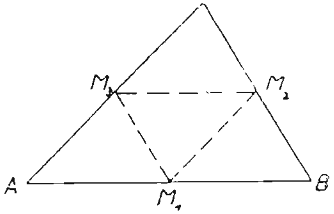
42. — Две дате паралелне праве пресећи трећом правом тако, да дуж која спаја пресечне тачке буде од 5 cm.

МЕТОДА ПОМОЋНИХ СЛИКА

Дешава нам се да не можемо решити задатак само помоћу методе геометриских места. Ми се онда трудимо да нацртамо слику коју можемо, кад већ не можемо одмах да нацртамо слику која се тражи. Цртамо *помоћну слику*, која ће нам помоћи да доцније нацртамо и саму тражену слику. Како се то ради, показаћемо на примерима.

I задатак. — *Конструисати троугао, кад је познат положај средина свих његових страна.*

Испитивање. — Претпоставимо да смо решили задатак. Нека је тражени троугао ABC (сл. 312). Средине су његових страна M_1, M_2 и M_3. Помоћу датих тачака M можемо нацртати троугао $M_1 M_2 M_3$. То је наша помоћна слика. Стране траженога троугла ABC биће паралелне са странама помоћне слике.



Сл. 312.

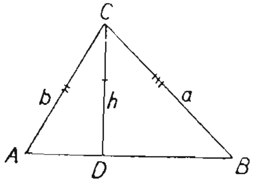
Цртеж. — Најпре троугао $M_1M_2M_3$ Кроз свако теме тога троугла повући паралелну са супротном страном.

Доказ. — Троугао ABC је троугао с два пут већим странама за троугао $M_1M_2M_3$. (Види страну 48, слику 110). Одатле се види да су тачке M средине страна нашег троугла.

Расправа. — Наш задатак се своди на ово: Датоме троуглу $M_1M_2M_3$ конструисати троугао с два пут већим странама. Свакоме троуглу може се конструисати такав троугао. И то само један. Значи да је наш проблем могућ, одређен и има једно решење све дотле, док постоји троугао $M_1M_2M_3$. Тај троугао ће постојати ако све три тачке M не леже на једној правој.

2 задатак. — *Конструисати троугао, кад су дате две стране $a > b$ и висина која одговара трећој страни.*

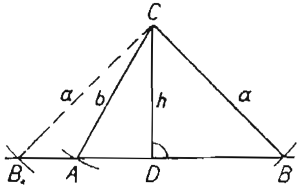
Испитивање. — Нека је тражени троугао ABC (сл. 313). Чим су дати b и h, може се конструисати правоугли троугао ACD. То ће бити наша помоћна слика. Чим знамо положај тачке C, добићемо B, ако отвором шестара a пресечемо продужак AD.



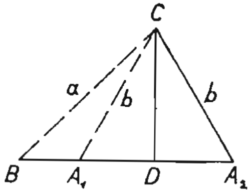
Сл. 313.

Цртеж. — Нека је b лево од висине. Најпре троугао ADC. Продужимо AD преко D и из C отвором шестара a пресечемо тај продужак. Добијамо и треће теме B. Али описани круг сече полуправу AD и с леве стране. Зато имамо два троугла (сл. 314). То су троуглови ABC и AB_1C. У првоме је a десно од b; у другоме је лево од b.

Нека је сад a лево од висине. Најпре троугао BDC (сл. 315). Затим из C отвором шестара b пресечемо полуправу BD. Добијамо опет два троугла A_1BC и A_2BC.



Сл. 314



Сл. 315

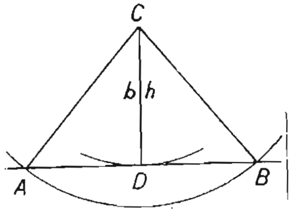
Доказ. — Лако се уверити да добивени троугли у оба случаја садрже све дате комаде.

Расправа. — I. — Страна b лево од h.

Овде може бити:

1) $b > h$. Тада је и $a > h$. Имаћемо два троугла. Проблем је могућ и одређен. Имаћемо два решења.

2) $b = h$. Тада је сигурно $a > h$. Добићемо два подударна правоугла троугла ADC и BDC. Проблем је могућ и одређен. Имамо једно решење (сл. 316).



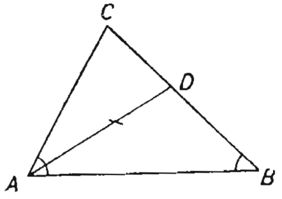
Сл. 316

3) $b < h$. Тада отвором шестара из C не можемо дохватити страну AB. Стране b не може бити у троуглу. Проблем је немогућ. Решења нема.

II — Страна b десно од h. Овај случај испитај сам.

3 задатак. — *Конструисати троугао ABC, кад су дата два угла A и B и дужина AD симетрале* угла A.

Испитивање. — Претпоставимо да смо решили задатак. Нека је тражени троугао ABC (сл. 317). Знамо углове A и B и дуж AD. Кад знамо угао A, знамо и угао BAD Види се да можемо нацртати троугао BAD Он ће бити наша помоћна слика.



Сл. 317

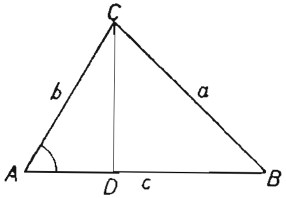
Цртеж. — Најпре наћи угао D. (Нацртати раван угао, па од њега одбити B и $\frac{1}{2}$ A.) Сад AD и на њој углови $\frac{A}{2}$ и D. Добијамо троугао ABD. Сад код A пренети на AD пола угла A. Добијамо правац крака AC. Тај правац треба пресећи продуженом правом BD. Добијамо тражени троугао ABC.

Доказ. — Пошто је $\sphericalangle\ BAD = \sphericalangle\ DAC = \frac{A}{2}$, значи да је $\sphericalangle\ BAC = A$. Како AD полови угао A, значи да је AD симентрала тога угла. Она има дату дужину.

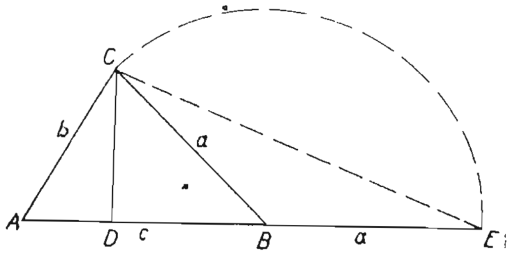
Расправа. — Троугао ABC ће постојати, ако је $\sphericalangle\ A + \sphericalangle\ B < 180^0$. (Мањи од два права угла). Али тада ће бити и $\frac{A}{2} + B < 180^0$. Постојаће и троугао ABD. Према томе задатак је могућан, ако је $\sphericalangle\ A + \sphericalangle\ B < 180^0$. Он је тада одређен и има једно решење. Ако је $\sphericalangle\ A + \sphericalangle\ B \geqslant 180^0$, задатак је немогућан. Тада нема решења.

4 задатак. — *Конструисати троугао, кад је дат збир двеју страна $m = a + c$, угао A и висина која одговара страни c.*

Испитивање. — Претпоставимо да смо решили задатак. Нека је тражени троугао ABC (сл. 318). Нађимо најпре збир страна a и c. То ћемо наћи, ако саставимо a и c. Да то урадимо, продужићемо AB преко B, па ћемо оборити страну a на тај продужак. Добили смо нов троугао AEC (сл. 319). У њему знамо угао A, страну $EA = a + c$ и висину $h = CD$. Њега можемо конструисати. Али је ли он подесан да буде наша помоћна слика? Кад њега нацртамо, имаћемо два темена траженога троугла: темена A и C. Али можемо ли некако из троугла AEC, добити теме B? Да видимо. Какав је троугао BCE? Равиокрак. Ако нацртамо троугао AEC, имаћемо основицу равнокраког троугла BEC. Где ће онда лежати његово теме? На симетрали његове основице. Дакле, корисно је да узмемо троугао AEC за помоћну слику.

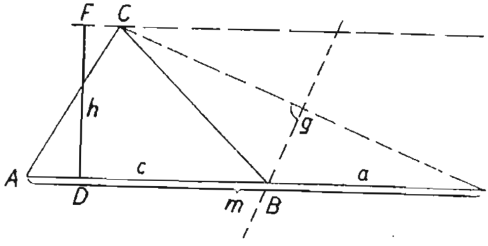


Сл. 318.



Сл. 319.

Цртеж. — Најпре угао A. Затим страна $AE = m = a + c$. На AE управна DF (сл. 320). На њој отсечемо h. Из F



Сл. 320.

паралелна са AE. Добијамо C. Спојимо C са E. Готов је помоћни троугао AEC. Сад симетрала на EC. Она даје теме B.

Доказ. — Угао $BAC = \mathrm{A}$; висина $DF = \mathfrak{h}$; $AB + BC = AE = m = a + c$.

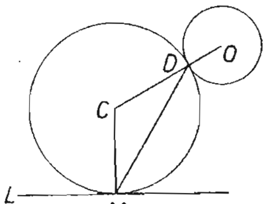
Расправа. — Ако можемо конструисати троугао AEC, увек можемо добити троугао ABC. Конструкција троугла AEC је увек могућа, ако је угао A мањи од два права угла.

Задатак је могућан, одређен и има једно решење, ако је $\sphericalangle A < 200$ гради.

Задатак је немогућан, решења нема, ако је $\sphericalangle A \geqq 200\ g$.

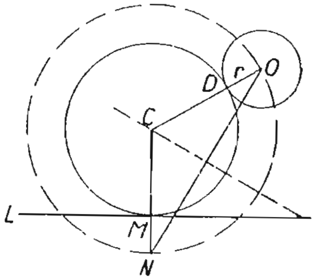
5 задатак. — *Нацртати круг који додирује један дати круг и једну дату праву у датој тачци.*

Испитивање. — Претпоставимо да смо решили задатак. Нека је круг C тражени круг (сл. 321). Он додирује круг O и дату праву L у датој тачци M. Центар траженога круга лежи на $MC \perp L$. Кад бисмо знали још једно геометриско место за центар, ми бисмо га лако одредили На пр. кад бисмо знали додирну тачку D. Али ми њу не знамо. Међутим видимо да тачка C лежи и на симетрали тетиве MD. Решили бисмо задатак, кад бисмо знали још и једну тетиву траженога круга. Али ми ни њу не знамо. Не можемо нацртати круг C. Можемо ли неки други? Опишимо из C један круг кроз O. (Рецкасти круг на слици 322). Центар тога круга лежи на управној MC. Сем тога знамо му две тачке: O и N. Тај круг ће бити наш помоћни круг.



Сл. 321.

Цртеж. — На L управна у M. Њу продужимо преко M до N тако да је $MN = r$. Сад дуж NO, па њена симетрала. У пресеку малопређашњеуправне и ове симетрале имамо C. Из O круг полупречником $CO—r$. То је тражени круг.



Сл. 322.

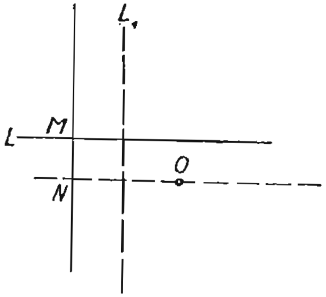
Доказ. — Кад се на правој NC повучемо из N за r, долазимо у M. Наш круг пролази кроз M. Али $CM \perp L$. Значи да је L дирка у M. Круг C додирује круг O, пошто смо се из O повукли за $CD = r$.

Расправа. — Кад можемо конструисати помоћни круг? За његову конструкцију потребно је да можемо дићи управну на датој правој у датој тачци. То је увек могуће. Потребна нам је још и права NO. Она ће увек постојати, ако се N и O не поклапају. Зато могу наступити ови случајеви:

1 случај: N и O се не поклапају:

Тада може да буде ово:

а) N и O леже на правој паралелној са L (сл. 323). Тада се симетрала дужи NO и права MN не могу сећи. Задатак је немогућан. решења нема.

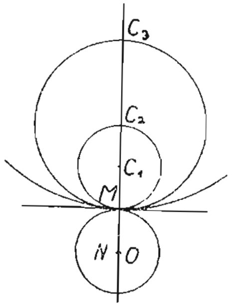


Сл. 323

б) N и O леже на правој која је коса према L.

Тада наступа случај са слике 322. Задатак је могућан; једно решење.

2 случај. — N и O се поклапају.



Сл. 324.

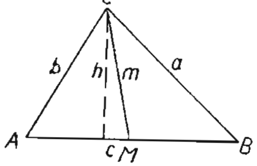
Задатак је могућан али је неодређен (сл. 324). Има безброј решења.

Има ли још случајева и потслучајева? Шта ће бити, ако круг O сече праву L? Итд.

6. Задатак. — *Конструисати троугао кад је дата једна страна, једна висина и једна тежишна линија.*

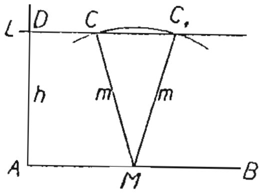
Овде има пет случајева.

1 случај. — Дата је једна страна и висина и тежишна линија које на њу падају, (сл. 325: дато $AB = c$, h_c и m_c .)



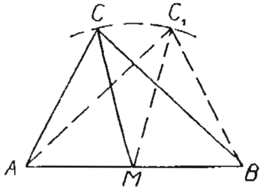
Сл. 325.

Испитивање. — Кад знамо AB, одмах знамо и AM. Пада у очи да у троуглу AMC знамо две стране: $AM = \frac{c}{2}$ и $MC = m$ Сем њих знамо још и висину. Он ће бити наша помоћна слика.



Сл. 326.

Цр̄теж. — Најпре AB (сл. 326). Одредити M. На AB управна. (Најзгодније у **A**). На њој се отсече $AD = h$. Из D се повуче $L \parallel AB$. Из M кружни лук полупречником m. Он сече L у C и C_1. Добијамо два троугла ABC и ABC_1 сл. 327.



Сл. 327.

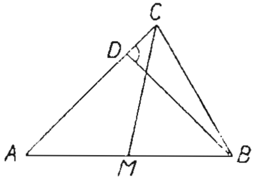
Доказ. — ABC је тражени троугао. Ми смо цртали $AM = MB$. Значи да је M средина стране AB. Узели смо $MC = m$. Значи да тежишна линија има дату дужину. C је удаљено од AB за $AD = h$. Значи да наш троугао има све дате комаде. Исто тако и за ABC_1.

Рас̄права. — Добили смо два решења. Колико има решења? Теме C добијамо у пресеку једне праве и једног круга. Према томе биће:

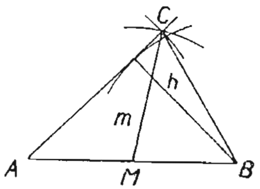
Први потслучај $m > h$. Задатак одређен; два решења.

Други потслучај: $m = h$. Задатак одређен; једно решење;

Трећи потслучај: $m < h$. Задатак немогућан: решења нема.



Сл. 328.

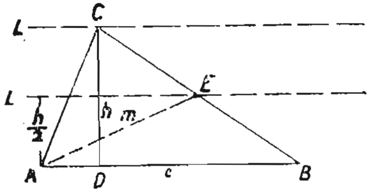


Сл. 329.

II случај. — Дата је страна AB, тежишна линија која на њу пада ($m = MC$, сл. 328) и висина која пада на страну AC. Знамо темена A и B. Где лежи C? Лежи на кругу описаном из M полупречником MC. Сем тога је $BD \perp AC$. Зато је AC дирка иа кругу описаном из B полупречником BD (сл. 328). Знамо два геометриска места на којима мора да лежи C. Ми ћемо онда овај задатак решити помоћу геометриских места. (Како?)

III случај. — Дато $AB = c$ (сл. 330), $CD = h$ и $AE = m$.

Ис̄пӣтивање. — У троуглу ABE знамо стране AB и AE и висину. (E је на средини стране BC. Зато мора за $\frac{h}{2}$ бити далеко од AB.)

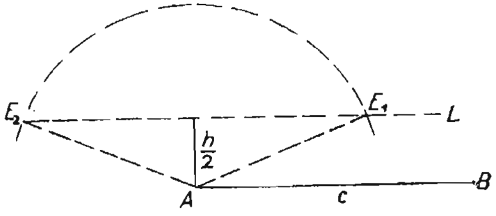


Сл. 330.

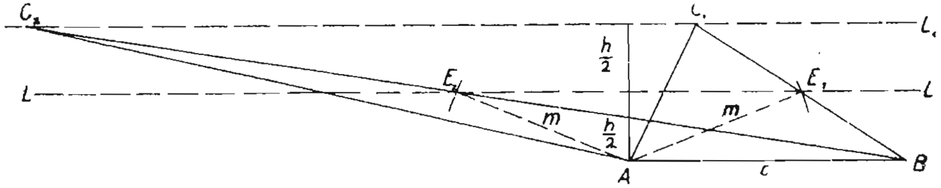
Наша помоћна слика биће ABE.

Цр̄теж. — Најпре $AB = c$. Из A управна на AB. На њој $\frac{h}{2}$, па $AE = m$. Она сече праву L у двема тачкама: E_1 и E_2 (сл. 331.) Кад

добијемо помоћни троугао, продужимо $\frac{h}{2}$ за $\frac{h}{2}$ и повучемо $L_1 \parallel AB$. Спојимо B са E_1 и продужимо до пресека са L_1. добијамо троугао ABC_1. Сад из B кроз E_2 до пресека са L_1 добијамо троугао ABC_2.



Сл. 331.



Сл. 332.

Доказ. $AB = c$ у обадва троугла.

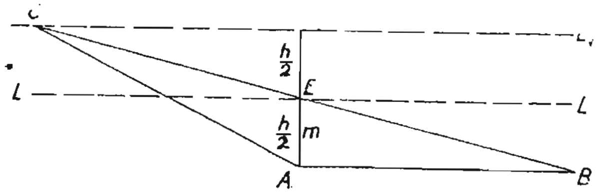
Дата дуж h је висина у оба троугла.

Дата дуж m је тежишна линија и у једном и у другом троуглу.

Рас̄права. — Тражени троугао ћемо увек имати, ако је могуће добити троугао ABE. Он ће постојати:

1) ако је $m > \frac{h}{2}$, проблем је могућ и одређен; два решења (сл. 332).

2) ако је $m = \frac{h}{2}$, проблем је могућ и одређен: једно решење (сл. 333).



Сл. 333.

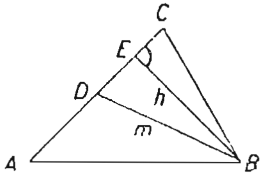
Ако је $m < \frac{h}{2}$, задатак је немогућан: нема решења.

IV случај — Дато $AB = c$, $BD = m$ и $BE = h$ (сл. 334.)

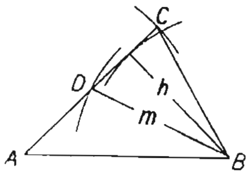
Најпре троугао ABE, па троугао ABD и најзад троугао ABC.

Или, помоћу геометриских места, овако:

$AB = c$. Из B круг полупречником h На њега дирка из A. Из B круг полупречком $BD = m$. Он сече дирку у D. Затим



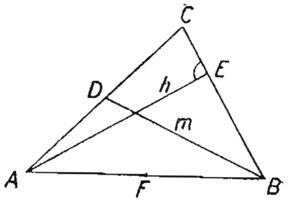
Сл. 334.



Сл. 335.

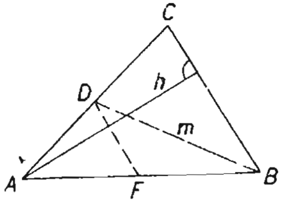
$CD = DA$ (сл. 335).

V. случај. — Дато $AB = c$, $BD = m$, $AE = \mathrm{h}$ сл. 336).



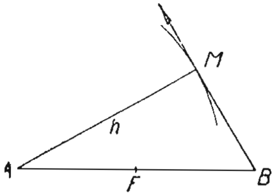
Сл. 336.

Испитивање. — Ако спојимо средину стране AB (тачку F) са D (сл. 337), дуж DF је паралелна са BC. Ми знамо да је BC дирка на кругу описаном из A полупречником h_a . Тако знамо *правац* стране BC. Тада знамо и правац стране DF. За помоћну слику узећемо троугао ABD. У њему знамо две стране AB и BD и правац тежишне линије FD.

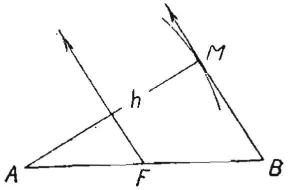


Сл. 337.

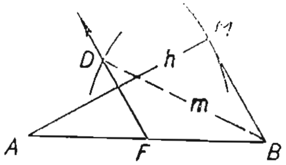
Цртеж. — Најпре AB. Затим круг из A полупречником h. Из B дирка на тај круг (сл. 338). Сад цртамо троугао ABD То значи одређујемо тачку D. Најпре из F паралелна са BM (сл. 339). Затим из B лук полупречником m (сл. 340.) Одређена је тачка D. Готов је троугао ABD. Сад продужимо AD до пресека са MB (сл. 341). Добијамо троугао ABC.



Сл. 338.

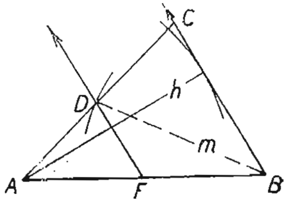


Сл. 339.



Сл. 340.

Доказ. — На цртежу је $AM \perp BC$. Сем тога је $AM = \mathrm{h}$ (сл. 340.) Према томе троугао има дату висину. FD је паралелна са BC, а полази из средине F стране AB. Значи да је у D средина стране AC. Онда је BD тежишна линија дате дужине.



Сл. 341.

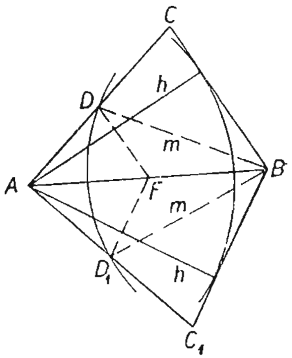
Расправа. — BC повлачимо као дирку на круг из A Из једне тачке може се повући дирка на круг само тако, ако је та тачка на периферији, или је спољна тачка за тај круг. Отуда мора бити:

I услов: $h = AB$, или $h < AB$.

Ако је $h = AB$, троугао има прав угао код B. Тада имамо једно решење. Ако је $h < AB$, имамо два троугла, пошто се из B могу повући две дирке. Имаћемо троугао ABC и симетрични троугао ABC_1. (сл. 342).

Ако се може повући BC, увек се може повући и DF. Питање је само кад ће круг из B моћи пресећи праву DF.

Нови услови. — Ако је $h = AB$, троугао је правоугли. Круг из B пресећи ће праву DF, ако је $m > \frac{AB}{2}$



Сл. 342

Ако је $h < AB$, FD иде под косим углом према AB. И тада ће круг из B сећи праву DF, ако је $m > \frac{AB}{2}$.

Да сведемо:

Да би било једно решење, мора бити: $h = AB$ и $m > \frac{AB}{2}$.

Да бисмо добили два решења, мора бити $h < AB$ и $m > \frac{AB}{2}$.

Према томе, проблем је одређен, ако је $h \leq AB$ и $m > \frac{AB}{2}$.

Проблем је немогућан, ако је $h > AB$, или $m < \frac{AB}{2}$.

ВЕЖБАЊА

1. — Конструисати ромбоид, кад су му дате две узастопне стране и дијагонала према углу између датих страна.

2. — Конструисати квадрат, кад је дата једна дијагонала.

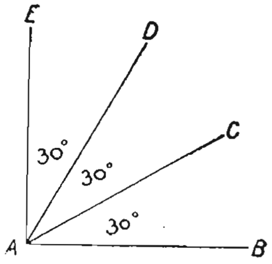
3. — Конструисати равнокраки троугао, кад је дата висина и један угао на основици.

4. — Конструисати равнокраки троугао, кад је дата висина и угао на врху.

5. — Конструисати равнострани троугао, кад му је дата висина.

6. — Конструисати правоугли троугао, кад је дата хипотенузина висина и један угао на хипотенузи.

7. — Конструисати правоугли троугао, кад је дата једна страна правог угла и хипотенузина висина.



Сл. 343.

8. — На полуправој AB нацртај без угломера угао од 60° код тачке A (сл. 81 и 148).

(Која слика има углове од 60°? Узми да је A једно њено теме. Страна произвољне дужине лежи на AB).

9. — Из темена правог угла A (сл. 343), повући две полуправе тако, да оне поделе прав угао на три једнака дела.

10. — Конструиши угао од 30°.

11. — „ „ „ 75°.

12. — „ „ „ 105°.

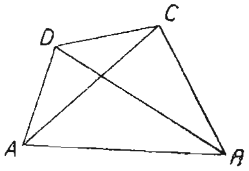
13. — Нацртај четвороугао $ABCD$ (сл. 344), кад је дато AB, BC, AC, BD и $\sphericalangle C$.

(Шта ће бити помоћна слика?)

14. — Конструисати тетивни четвороугао $ABCD$, кад су дате стране AB и BC и углови A и B. (Најпре ABC, па описани круг.)

15. — Конструисати троугао ABC, кад су дати углови A и C и висина h_c.

16. — Конструисати троугао ABC, кад су дата два угла A и C и отсечак DM, који на висини отсеца сметрала угла A (сл. 345).

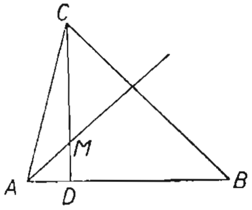


Сл. 344.

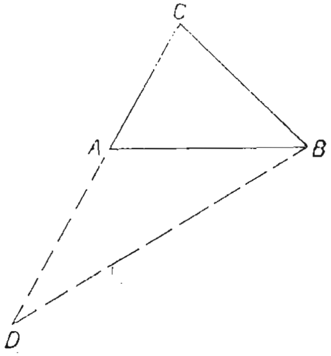
(Колики је угао MAD? Шта ће бити помоћна слика?)

17. Конструисати троугао, кад је дат угао A, висин h_a и симетрала угла A.

(Нека дата симетрала угла A сече страну a у D. Колики је угао DAC? Шта знаш у троуглу DAC?)



Сл. 345.



Сл. 346.

18. — Конструисати троугао, кад је дат угао A, висина h_c и симетрала угла C.

(Нека симетрала сече страну c. у D. Шта знаш о троуглу ADC?)

19. -- Конструисати троугао, кад је дат угао A, његова симетрала и отсечак DC, који симетрала отсеца на страни c.

20. — Конструисати троугао, кад су дати један угао (A), висина h_a и полупречник уписаног круга r.

21. — Конструисати троугао, кад је дата страна b, угао A и тежишна линија m_c.

22. — Констуисати троугао, кад је дата страна c, тежишна линија m_a и висина h_c.

Нека је D средина стране BC. Знаш ли висину у троуглу ABD?)

23. — Конструисати троугао, кад је дато c, h_a и r.

(Нека је $h_a = AD$. Шта знаш у троуглу ABD? Где лежи центар круга који додирује AB и BC? Где лежи центар круга који додирује те две стране, а има полупречник r?)

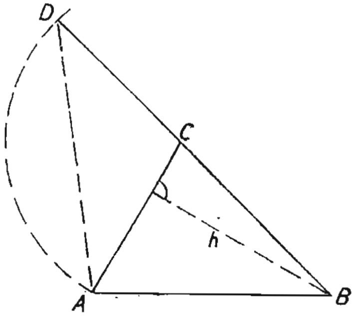
24. — Конструисати троугао, кад су дата два угла B и C, и збир страна $b + c = d$.

(Продужи страну AC преко A (сл. 346). На продужак обори страну c. Какав је троугао ABD?)

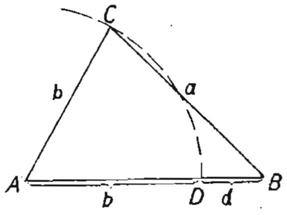
25. — Конструиши троугао, кад је дат збир двеју страна $c + b = d$, страна a и угао A.

(Потребан ти је троугао ABD. Најпре угао A. Може ли се извршити конструкција? Зашто? Је ли задатак одређен? Зашто?)

26. — Конструисати троугао кад су дати збир двеју страна $a + b = n$, угао A и висина h_b (сл. 347).



Сл. 347.



Сл. 348.

27. — Конструисати троугао кад је дата разлика двеју страна $c - b = d$, висина h_c и угао B.

(Можеш ли конструисати троугао BCD (сл. 348).? Какав је троугао ADC?)

28. — Конструисати троугао, кад је дата разлика страна $a - b = d$, угао B и страна c.

29. — Конструисати троугао, кад је

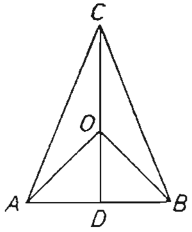
дат збир двеју страна $a + b = s$, разлика тих двеју страна $a - b = d$ и тежишна линија m_a.

(Кад је $a + b = s$, $a - b = d$, можеш ли одатле израчунати a и b? Кад добијеш да је $a = \frac{(s + d)}{2}$ можеш ли нацртати то a?)

30. — Конструисати троугао, кад су дате: страна c, висина h_a и висина h_b.

31. — Конструисати троугао, кад су дати: полупречник описаног круга R, угао A и висина h_c.

(Можеш ли конструисати неки помоћни троугао тако, да ти он одреди два темена? Кад знаш страну једног троугла и полупречник описаног круга, можеш ли нацртати описани круг? Где онда лежи треће теме?)

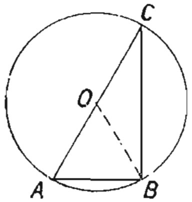


Сл. 349.

32. — Конструисати троугао, кад је дата страна b, висина h_c и R.

33. — Конструисати равнокраки троугао кад му се два полупречника описаног круга секу под углом од 105°, а основица му је $AB = 5$ см.

(Гледај слику 349. Кад знаш угао AOB, колики је угао AOD? А угао DAO? А дуж AD? Како ћеш конструисати угао од 105°? Је ли то угао 90° + 15°? Како ћеш конструисати угао DAO комплементан угао угла AOD?)



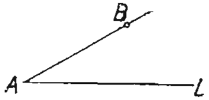
Сл. 350.

33. — Конструисати трапез кад су дате обе дијагонале, једна основица и један угао на њој.

35. — Дата је дуж AB и један угао C. Конструисати круг у коме је C периферијски угао над тетивом AB.

(Најпре троугао ABO са слике 350. Колики је угао AOB? А угао BAO?).

36. — Права L сече дуж AB у A под датим углом LAB (сл 351). Конструисати круг на коме је дата дуж тетива, а дата права дирка.

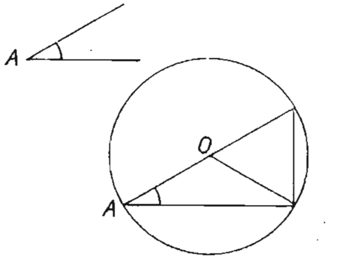


Сл. 351.

37. — Дат је круг и ван њега један оштар угао. На томе кругу нацртати једну тетиву, над којом је дати угао периферски угао.

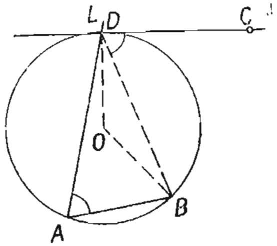
(Сл. 352. — Шта ће бити помоћна слика?)

38. — Дате су три тачке A, B и C сл. 353.) и једна права AD, која под датим оштрим углом сече AB у A. Конструисати круг који пролази кроз A и B, а дату праву AD (L) сече у D тако, да је CD дирка.



Сл. 352.

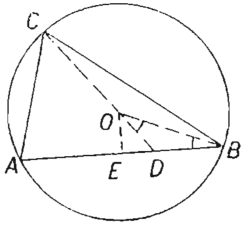
(Дат ти је угао BAD. Под којим углом се види дуж BC из тачке D? Где леже све тачке из којих се дуж BC види под углом BDC? Шта ће бити помоћна слика?)



Сл. 353.

39. — У троуглу ABC (сл. 354) дат је угао угао A, страна c и тачка D у којој пречник описаног круга што пролази кроз C сече дату страну. Конструисати тај троугао и његов описани круг.

(Нека је O тражени круг, а ABC тражени троугао. Колики је угао BOC? А угао BOD? Шта знаш сад у троуглу DBO? Знаш и да његова висина полази са средине стране дужи AB. Сад је DB тетива која се под углом DOB види из O. Задатак се своди на ово: За дату тетиву BD и дати периферски угао над њом, нацртати круг, кад се зна права на којој лежи теме периферског угла. Цртеж. — Најпре DB — сл. 355. — Сад над тетивом DB круг на коме су периферски угли над BD равни углу BOD са слике 354. Продужује се BD до E. Из E управна сече круг у тачци O_1. Готов је троугао BOE са слике 356.)



Сл. 354.

40 — Конструисати круг који додирује дати круг O у датој тачци M, а додирује и дату праву L.

(Сл. 356. Шта ће бити помоћна слика?)

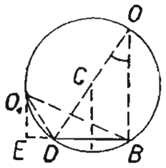
41. — Дат је круг O и права L. Конструисати круг који додирује дати круг, а од дате праве отсеца дати отсечак од 1 cm. Централа да стоји управно на L.

(Сл. 357. — Можеш ли конструисати троугао DBT? Где лежи C?)

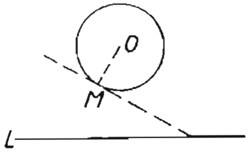
42. — Из дате спољне тачке за дати круг O повући две сечице тако, да дати круг отсече на њима једнаке тетиве.

(Могу ли те сечице бити дирке на неком концентричном кругу?)

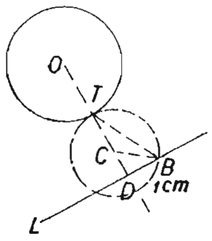
43. — Обема дијагоналама подељен је ромб на четири троугла. У свакоме је уписан круг. Дат је полупречник једног од тих уписаних кругова и дата је једна дијагонала. Конструисати тај ромб.



Сл. 355.



Сл. 356.



Сл. 357.

44. — Конструисати троугао, кад је дата страна c, тежишна m_c и угао C.

(Најпре за тетиву c и периферијски угао C конструиши круг).

45. — Конструиши троугао кад су дате стране a и c и угао C.

46. — „ „ „ „ „ страна c, висина h_b и угао C.

47. — У дати угао A уписан је круг. Повући му дирку тако, да на њој краци угла A отсеку дату дужину d.

48. — Конструиши троугао, кад је дата страна c, угао C и r.

49. — Конструисати троугао, кад су дати C, r и R.

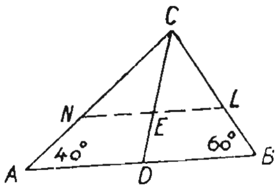
(Најпре тетива AB за дати полупречник описаног круга R и дати периферијски угао C).

МЕТОДА СЛИЧНИХ СЛИКА

Ова се метода употребљава кад из датих комада можемо одмах нацртати сличну слику тражене слике. Најпре нацртамо сличну слику, па од ње прелазимо на тражену слику. На примерима ћемо показати како се то ради.

1 задатак. *Конструисати троугао ABC код кога је тежишна линија* $m_c = 1$ cm, *а дати углови на основици* $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$.

Испитивање. — Увек можемо нацртати троугао чији су дати углови 40° и 60°. Такав један троугао је и ABC (сл. 358). Њих има безброј. Ми знамо да су они сви слични. Троугао ABC би био тражени троугао само тако, ако би било $CD = 1$ cm. Ми можемо начинити сличан троугао тако, да буде $m = 1$ cm.



Сл. 358.

Цртеж. — Најпре ма какав троугао с датим угловима. Од темена C на тежишној линији отсећи $CE = 1$ cm. Кроз E права $LN \parallel AB$.

Доказ. — Троугао CNL је тражени троугао из ових разлога: $\sphericalangle N = \sphericalangle A = 40^\circ$, $\sphericalangle L = B = 60^\circ$, $CE = 1$ cm.

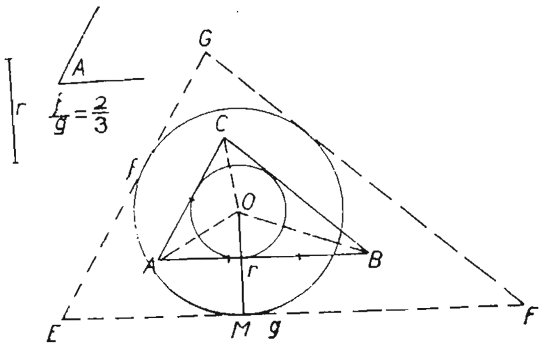
Расправа. — Ако је $A + B < 180^\circ$, увек је могуће нацртати троугао с датим угловима. Увек је на његовој тежишној линији могуће одмерити тежишну линију дате дужине.

Задатак је могућан, одређен и има једно решење.

2. задатак. — *Конструисати троугао кад је дат угао* A, *однос страна* $\frac{b}{c} = k$ *и полупречник уписаног круга* r.

Испитивање. — Ако је $A < 180^\circ$, увек можемо нацртати један троугао чији је угао A. Исто тако увек можемо нацртати троугао са датим углом тако, да му суседне стране буду у датој размери.

Цртеж. — Најпре троугао ABC, где угао A има дату вредност, а b и c стоје у датој размери, (Ми смо нацртали $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ (сл. 359).



Сл. 359.

Сад цртамо уписани круг. Тада из O описујемо круг датим полупречником $OM = r$. На тај нови круг повлачимо дирке паралелно са странама првог троугла. Добијамо тражени троугао EFG.

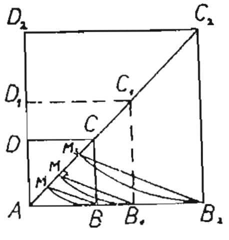
Доказ. $\Delta ABC \backsim EFG$. Отуда $\sphericalangle E = \sphericalangle A$ и $\frac{f}{g} = \frac{b}{c} = k$.

Сем тога $OM = r$.

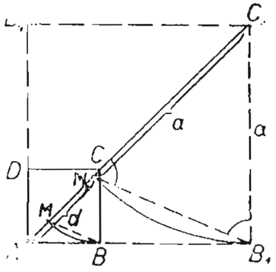
Расправа. — Задатак је увек могућан, ако је $A < 180^\circ$. Задатак је одређен и има једно решење.

3 задатак. — *Нацртати квадрат кад је дата разлика његове дијагонале и стране.*

Испитивање. — Нацртаћемо неколико квадрата и на њима образовати разлику дијагонале и стране (сл. 360). Кад пренесемо страну на дијагоналу, добијамо равнокраки троугао CMB. У њему угао MCB има 50 гради. Онда угао MBC има 75 гради. Сви углови М су по 75 гради. Значи да је $M_1B_1 \parallel MB \parallel M_2B_2$.



Сл. 360



Сл 361

Цртеж. — Произвољан квадрат $ABCD$ (сл. 361). Дијагонала AC. Пренесемо страну BC на дијагоналу. Добијамо AM. То је разлика дијагонале и стране. Сад из A пренесемо по AC дату разлику d (сл. 361). Из њене крајње тачке M_1 повучемо паралелну са MB. Добијамо B_1. Сад је AB_1 страна траженога квадрата.

Доказ. $AB_1C_1D_1$ је тражени квадрат.

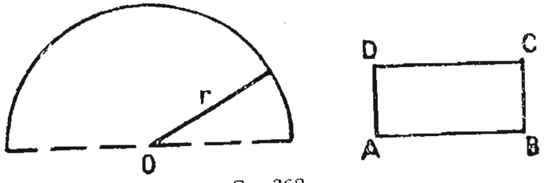
$M_1B_1 \parallel MB$. Тада је $\measuredangle M_1 = \measuredangle M = 75$ гради. Онда је и угао $M_1B_1C_1 = 75$ гради. Тада је $M_1C_1 = B_1C_1$.

Значи да је AM_1 разлика дијагонале и стране. А она је тачно онолика колика је и дата.

Расправа. — Увек је могуће нацртати помоћни квадрат $ABCD$. У њему је увек могуће добити помоћну дуж MB. Ма где пала тачка M по AC, увек је могуће добити паралелну са MB и то само једну. Ако M_1 падне у M, значи да се случајно десило да је наш помоћни квадрат управо тај тражени квадрат.

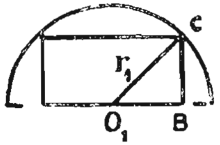
Задатак је могућан и одређен. Има једно решење.

4 задатак. — *У дати полукруг (сл. 362) уписати правоугаоник сличан с датим правоугаоником ABCD тако, да му два темена буду на пречнику.*



Сл. 362

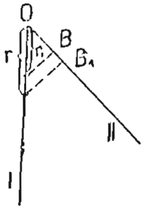
Испитивање. — Ми ћемо описати полукруг око датога правоугаоника (сл. 363). Тражена слика треба да буде слична са том сликом. Гледаћемо да нађемо положај темена B_1 траженога правоугаоника. Како су слика 363 и тражена слика (сл. 365) сличне, мора бити: $r_1 : r = O_1B : OB_1$.



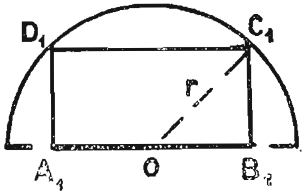
Сл. 363.

Цотање. — Знамо r_1 r и O_1B. Тражићемо четврту пропорционалу.

Повучемо два зрака из O (сл 364). По I пренесемо r и r_1. На II пренесемо O_1B. Спојимо крајњу тачку дужи r_1 са B и са том спојницом повучемо паралелну из крајне тачке дужи r. Добијамо OB_1. Из A_1 и B_1 управне док не пресеку полукруг. Добијамо тражени правоугаоник (сл. 365).



Сл. 364.



Сл. 365.

Доказ. — Троугао OB_1C_1 са слике 365 сличан је с троуглом O_1BC са слике 363, јер је

$$\measuredangle B = \measuredangle B_1 \quad \text{и} \quad O_1C : OC_1 = O_1B : OB_1$$

Отуда је даље:

$$OB_1 : O_1B = B_1C_1 : BC$$

Стране наших правоугаоника су пропорционалне. Они су слични

Расправа. — Кад је дато r, r_1 и O_1O, увек је могуће наћи B_1.

5 задатак. — *Око датог квадрата описати троугао сличан с датим троуглом.*

Нацртајмо дати квадрат $ABCD$ и дати троугао EFG (сл. 366).

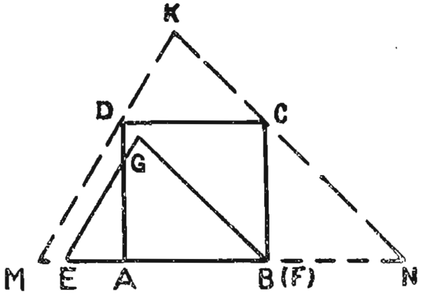
Испитивање. — Нека је тражени троугао MNK (сл. 365). Ако положимо EF по AB, стране траженога троугла биће паралелне са f и e, пошто троугли EFG и MNK морају да буду слични.

Сл. 366.

Цртеж. — Положимо EF по AB почињући од B. Кроз D паралелна са EG: кроз C паралелна са BG. Добијамо тражени троугао MNK и у њему уписан наш квадрат.

Доказ. — Квадрат је уписан у троуглу MNK. Троугао $KMN \backsim \triangle EFG$, јер су им углови једнаки.

Расūрава. — Основица датога троугла увек се може положити по страни датога квадрата. Кроз C и D увек се могу повући паралелне са троугловим странама. Задатак је могућан. Колико има решења? Можемо поставити ма коју страну троуглову на основицу. Према томе имамо три решења, ако је троугао разностран, а по угловима оштроугли или правоугли. (Испитај јесу ли та три решења подударна. Шта ће бити, ако је дати троугао равнокрак? А ако је равностран?)



Сл. 367

Ако је дати троугао тупоугли, имамо једно решење. Оно се добија кад се највећа троуглова страна положи по основици. (Зашто се тада не могу добити три решења?)

ВЕЖБАЊА

1. — Конструисти троугао, кад су дати углови A и B и тежишна линија m_a.

2. — Конструисати троугао кад су дати r, A и B.

3. — „ „ „ „ „ R, A и C.

4. — „ „ „ „ „ C, c и однос страна $\frac{b}{a} = \frac{m}{n}$.

(Нацртај сличан троугао траженоме. Овако ћеш га нацртати. Најпре C. На његовим крацима две стране у односу $\frac{m}{n}$.)

5. — Конструисати троугао за дато A, a и однос $\frac{a}{c} = \frac{p}{q}$

6. — Конструиши ромб, кад је позната једна страна и однос двеју дијагонала.

(Нека је то овај однос:

$$d_1 : d_2 = 3 : 4$$

Повуци обе дијагонале. Половине дијагонала биће у истом односу, у коме су и целе дијагонале.)

7. — Конструисати правоугли троугао, кад је позната хипотенуза и однос страна правог угла.

8. — Конструисати правоугли троугао, кад је дата једна страна правог угла и однос хипотенузе и оне друге стране.

9. — Конструисати правоугли троугао, кад је дата хипотенузина висина и однос управних страна.

10. — Конструисати правоугли троугао, кад је дат један оштар угао и хипотенузина висина.

11. — Конструисати правоугли троугао, кад је дат један оштар угао и r.

12. — Конструисати правоугли троугао, кад је дат један оштар угао и R.

13. — Конструисати правоугли троугао, кад је дата хопотенуза и однос хипотенузине висине према једној страни правог угла.

(Нека је тражени троугао ABC с правим углом код A. Хипотенузина висина је AD. Најпре гледај да конструишеш троугао сличан троуглу ADB.)

14. — Конструиши равнокраки троугао, кад је дат један угао и однос крака према висини.

15. — Конструисати равнокраки троугао, кад је дат један угао и однос крака према основици.

16. — Исто за дату висину и однос крака према основици.

17. — Исто за дато r и један оштар угао.

18. — Исто за дато R и један оштар угао.

19. — Конструисати равнокрако-правоугли троугао за дато r.

20. — „ „ „ „ „ „ R.

21. — Конструисати равнокраки троугао, кад је дат један угао и разлика крака и висине. (Можеш ли конструисати половину траженога троугла?)

22. — Конструисати правоугаоник, кад је дата дијагонала и однос двеју страна.

23. — Конструисати правоугаоник, кад је дата једна страна и однос оне друге према дијагонали.

24. — Конструисати равнокрако-правоугли троугао, кад је дата разлика хипотенузе и једне стране.

25. — Конструисати квадрат, кад је дат однос дијагонале и стране. (Пази!)

26. — У дати троугао уписати квадрат.

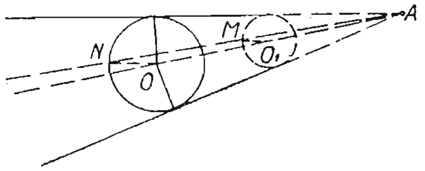
(Значи да му два темена леже на основици, а по једно на странама.)

27. — Конструисати круг који додирује две дате праве и пролази кроз дату тачку M.

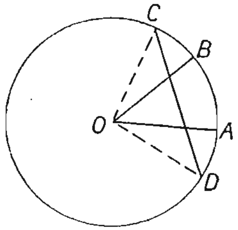
(Продужити те две праве до пресека A (сл. 368). Кад знаш A и M, можеш ли повући полуправу AO и $NO \parallel MO_1$? Како можеш добити тачку N? Кад је решење немогуће?)

28. — У кругу су повучена два полупречника OA и OB под датим углом (сл. 369). Повући једну тетиву (CD) тако, да је ова два полупречника поделе на три једнака дела.

(Може ли се нацртати сличан троугао троуглу ODC?)



Сл. 368.



Сл. 369.

29. — Око датога правоугаоника описати троугао сличан с датим троуглом.

30. — У дати троугао уписати правоугаоник сличан с датим правоугаоником.

31. — У дати троугао уписати ромб сличан с датим ромбом.

32. — У дати троугао уписати ромб тако, да се један ромбов угао поклопи с једним троугловим углом, и да уписани ромб буде сличан с датим ромбом.

(Може ли то увек да буде?)

33. — У дати троугао уписати ромбоид сличан с датим ромбоидом.