МОЧНИК - СПИЛМАН

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА

ВИШЕ РАЗРЕДЕ ГИМНАЗИЈА И РЕАЛКЕ

СА 229 СЛИКА У ТЕКСТУ

СА 25-ОГ ИЗДАЊА ПРЕВЕО
СТЕВАН ДАВИДОВИЋ
ПРОФЕСОР ВОЈНЕ АКАДЕМИЈЕ

У БЕОГРАДУ
Штампано у Државној Штампарији Краљевине Србије
1909.

ПРЕДГОВОР.

Ова је књига, по одлуци Главног Просветног Савета и решењу Министра Просвете и црквених послова од 21. децембра 1908. год. ПБр. 18.886 усвојена за уџбеник у вишим разредима гимназија и реалке. Она је у главном превод Мочник-Спилманове Геометрије са местимичним изменама, које су учињене по примедбама референата. Тако је теорија о паралелним линијама обрађена простије, доказ теореме у чл. 42 замењен лакшим, општи део Стереометрије израђен на другој основи, те су тако дуалне теореме боље груписане, и у Тригонометрији неки докази преиначени. И задаци су измењени, те су многи слични задаци сведени на један типски задатак, а број задатака повећан примерима из других уџбеника.

О самом оригиналу донели су стручни листови веома похвалне оцене, па ће вероватно и српско издање овог уџбеника задовољити потребу наших средњих школа.

Преводилац.

ПРЕГЛЕД САДРЖИНЕ

ПРВИ ДЕО.

ПЛАНИМЕТРИЈА.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Праве линије и углови.

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Ограничени равни облици.

ПРИСТУП.

1. Са свих страна ограничен простор зове се тело.

Граница тела назива се његова површина, а и сваки део њен зове се површина.

Граница површине зове се њен обим, а сваки део обима зове се линија.

Границе линије називају се тачке.

Тачке, линије, површине и тела називају се просторни облици.

Линије, површине и тела могу се произвести кретањем. Кад се креће тачка, онда она описује линију. Креће ли се линија тако, да њене тачке описују нове линије, онда постаје површина. Површина дели простор на две области; кретањем површине у једној од тих области производи се тело.

Тело има три главне димензије: дужину, ширину и висину. Површина има две главне димензије: дужину и ширину. Линија има само једну димензију: дужину. Тачка нема димензије.

2. Просторни облици постају количине, кад им се димензије ограниче. С тога се тела, ограничене површине и ограничене линије зову и просторне количине.

Величина (квантитет) ограничена просторна облика одређује се мерењем. Мерити какву просторну количину значи наћи број, који казује, колико се пута у даној количини садржи друга просторна количина истога рода, која је узета за јединицу. Тај број зове се мерни број просторне количине. Величина ограничене линије зове се њена дужина, величина ограничене површине назива се површинска садржина или просто површина, а величина тела назива се његова кубна садржина или запремина (волумен).

3. Осим величине посматрамо на просторним количинама и њихов облик, тј. начин како су поједини делови сложени у целину.

Две просторне количине могу бити по величини једнаке, а по облику различне; а могу имати исти облик, али се разликовати по величини. Просторне количине, које су по величини једнаке, зову се једнаке; просторне количине, које имају исти облик, називају се сличне; просторне количине, које су једнаке и по облику и по величини, зову се подударне (конгруентне). Подударне просторне количине разликују се само по месту, на којем се налазе; оне се могу положити једна на другу, или једна у другу, тако да се потпуно поклапају. И обрнуто: кад се две просторне количине могу поклопити, онда су оне подударне.

Једнакост двеју просторних количина бележи се знаком $=$, сличност знаком $\sim$, подударност знаком $\cong$.

4. Наука о просторним облицима зове се Геометрија. Геометрија се служи математичком методом, тј. она изводи своје истине из дефиниција и основних правила, и казује их у облику теорема које доказује, у облику задатака које решава, додатака и последица које излазе из теорема.

5. Дефиницијом се назива исказ битних знакова каквог појма.

Основна правила или аксиоме зову се правила чија се истинитост увиђа непосредно, те с тога није потребно доказивати их, а и не могу се доказати. Таква су правила неопходно потребна математичким наукама. И у Геометрији вреде ове опште математичке аксиоме:

1. Свака је количина сама себи једнака;
2. Једнаке количине могу се једна другом заменити;
3. Свака је количина једнака са збиром својих делова, а већа је од сваког својег дела;
4. Кад се на једнаким количинама изврше једнаке промене, добиће се опет једнаке количине.

Теоремом називамо правило чија се истинитост мора доказати. У геометријској је теореми обично нека погодба везана с главном истином. У погодби је исказана претпоставка о предмету на који се односи теорема, и о приликама у којима она вреди. У главном правилу тврди се и исказује истина коју ваља доказати. Често пута је претпоставка казата у једној речи, употребљеној у теореми, а објашњеној раније. За сваку је теорему потребан доказ, тј. ваља доказати, да је истинитост теореме неизбежна последица аксиома или других правила, за која се већ зна да су тачна. Доказ може бити директан (непосредан) или индиректан (посредан). Код директна доказа изводи се теорема низом логичних закључака, из претпоставке и других

признатих правила. Код индиректна доказа потврђује се истинитост неке теореме тиме, што се показује, да супротна теорема води к последицама које се косе с претпоставком или с правилима, која су већ призната као истинита.

Неку теорему обрнути значи поставити другу, у којој се тврди оно што је код прве претпоставка, а претпоставља оно што се код прве тврдило. Кад нека теорема има само једну претпоставку и једно тврђење, онда се у том најпростијем случају може добити само једна обрнута теорема.

Ако је претпоставка, или тврђење, или једно и друго, састављено од више делова, онда има више обрнутих правила. Она се добивају, кад се једнак број делова из претпоставке и тврђења размене једно за друго. Кад се нека тачна теорема обрне, не мора се добити опет тачна теорема; с тога се ова мора нарочито доказати.

Последицама називамо правила која се могу непосредно или простим закључцима извести из каквог претходног правила. Додатком називамо правило, којим се проширује или одређеније казује какво претходно правило.

6. Задатком називамо захтев да се одреди нешто што ће испунити дате погодбе; сваки задатак тражи решење.

Геометријски су задаци конструктивни или рачунски; први траже геометријски облик, а другима је предмет: израчунавање просторних количина̂ помоћу броја.

ПРВИ ДЕО.

ПЛАНИМЕТРИЈА.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Праве линије и углови.

I. Права линија и равна површина.

7. Најпростија је линија пра̏ва линија, или просто пра̏ва. Права линија нема дефиниције; представа о правој линији мора се претпоставити као основна (елементарна).

Појмови, који се не могу дефиновати, зову се основни појмови; појмови, који се могу дефиновати, зову се изведени појмови.

Линија која није права, али је састављена од правих линија, назива се изломљена линија. Линија којој ни један део није прав, зове се кри̏ва.

Основно правило. Кроз две тачке може се повући само једна права.

Последице. a) Положај праве линије одређен је двема тачкама.

b) Две одвојене праве могу имати само једну заједничку тачку. За њих се каже да се секу у тој тачки, и та се заједничка тачка назива њихов пресек.

8. Најпростија је површина ра́вна површина или ра̂ван. И она је, као и права линија, основни појам.

Површина, којој ни један део није ра́ван, зове се крива површина.

Основно правило. Свака права, која има с неком равни две заједничке тачке, лежи сва у тој равни.

Кроз три тачке, које не леже на једној правој, може се поставити само једна раван. Јер ако повучемо праву кроз две од тих тачака, па замислимо да се око те праве (као око сталне осовине) обрће раван која кроз њу пролази, дотле док не прође и кроз трећу тачку, онда та раван не може заузети никакав други положај, док не напусти трећу тачку.

9. Онај део Геометрије, који проучава просторне облике што леже у једној истој равни, назива се Планиметрија. Просторне облике, који се не могу замислити у једној истој равни, проучава Стереометрија.

II. Зраци и дужи.

10. Неограничена права зове се зрак; зрак је сваком својом тачком подељен на две полуограничене праве, једна је на једној, а друга на другој страни заједничке граничне тачке, а имају, пошав од те тачке, супротне правце; сваки такав део зове се полузрак. Два су полузрака један другоме допуна.

Двема тачкама ограничена права зове се дуж; граничне тачке зову се крајње тачке. Дуж између две тачке одређује њихову раздаљину.

Тачка се означује једним словом.

Полузрак се означује граничном тачком и још једном која је на њему, а дуж означујемо њеним крајњим тачкама.

Тачка, која се креће, може на два начина описати дуж AB: у правцу од A ка B, или у супротном правцу од B ка A. Кад се има на уму та супротност у правцима, онда се AB назива дуж коју описује тачка идући од A ка B; а BA назива се дуж, коју описује тачка идући од B ка A, па се једна од тих дужи сматра као позитивна, а друга — њој супротна — као негативна. Према томе је $AB = -BA$ и $AB + BA = 0$.

Често пута се не узима у рачун та супротност у правцима, него се гледа само на апсолутне дужи.

Дужи као негативне количине јављају се у науци од 17. века. Разликовање између AB и BA потекло је од немачког математичара и астронома Мебијуса (1827).

11. Кад се две дужи положе једна на другу тако, да им се поклапа један пар крајњих тачака, онда су те дужи једнаке, ако им се поклапају и оне друге две крајње тачке; иначе су неједнаке. У том је случају краћа она дуж, чија друга крајња тачка пада између крајњих тачака оне друге дужи.

Кад наставимо дуж AB (сл. 1) преко B до C, онда се добивена дуж AC зове збир двеју дужи AB и BC; и обрнуто: дуж AB назива се разлика између дужи AC и BC.

Сл. 1.

12. Да бисмо измерили дану дуж, испитујемо, колико се пута у њој садржи друга дуж која је узета за јединицу.

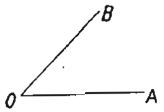
Као јединица за мерење дужи́на̂ узима се метар. Метар (m) је подељен на 10 десиметара (dm), 100 сантиметара (cm), 1000 милиметара (mm). 1000 метара чине километар (km), 10.000 метара чине миријаметар (μm).

III. Углови.

13. Кад у некој равни два полузрака полазе из исте тачке, онда се један од тих полузракова, обртањем у тој равни око заједничке тачке, може довести у правац другог полузрака; величина тог обртања́ назива се угао датих полузракова. Полузраци који граде угао зову се краци, а њихова заједничка тачка зове се теме тога угла. Равна површина између кракова зове се угаона површина.

Угао се бележи трима словима, једно се пише код темена, а два на крацима; при изговарању стављa се у средину оно слово, које је код темена; или се угао бележи једним словом, које се пише између кракова близу темена; или само једним словом код темена, ако то теме припада само једном углу.

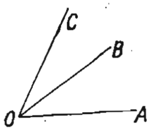
Полузрак који се обрће око тачке O (сл. 2) може на два начина описати угао AOB: обртањем из правца OA у правац OB, или обрнутим обртањем из OB у OA. Кад се води рачун о тој супротности у правцима обртања, онда је AOB угао који постаје кад се зрак обрће од OA ка OB, а BOA зове се угао који постаје обртањем од OB ка OA. Један од тих углова (обично онај, који постаје обртањем у смислу супротном кретању казаљке на часовнику) сматра се као позитиван, други као негативан. Према томе је $AOB = -BOA$ и $AOB + BOA = 0$.



Сл. 2.

Обично се не гледа на ту супротност у правцима обртања, него се угао сматра само као апсолутна количина.

14. Кад се два угла положе један на други тако, да им се поклапају и темена и један пар кракова, као и правци обртања, онда су ти углови једнаки, ако се поклапају и она друга два крака, иначе су неједнаки. У овом другом случају мањи је онај угао, чији други крак пада између кракова другог угла.



Сл. 3.

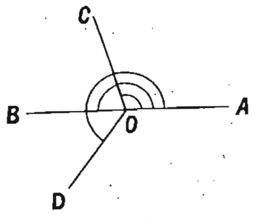
Кад се полузрак OA (сл. 3) у једној равни обрће око тачке O тако, да дође прво у правац OB, а даљим обртањем у правац OC, онда се тим обртањем произведени угао AOC назива збир углова AOB и BOC; и обрнуто, угао AOB разлика је између углова AOC и BOC.

15. Кад се полузрак обрће у једној равни око своје граничне тачке, онда он гради са својим првобитним положајем поступно све могућне углове.

Кад се покретни полузрак обрне толико, да дође опет у свој првобитни положај, онда је он извршио једно пуно обртање. Угао који постаје једним пуним обртањем назива се пун угао; његови се краци поклапају. Сви су пуни углови једнаки.

Кад покретни полузрак OA (сл. 4) дође у правац OB, супротан његовом првобитном правцу, онда је учинио половину обртања. Тако произведени угао AOB зове се опружен угао; његови краци леже у једној правој, а на супротним странама од темена. Опружен угао половина је пуног угла. Сви су опружени угли једнаки.

Угао AOC, који је мањи од опруженог, зове се издубен; угао AOD, који је већи од опруженог, зове се испупчен угао.



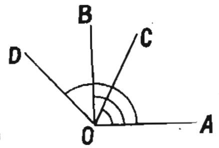
Сл. 4.

Сваком издубеном углу између два полузрака одговара увек и један испупчен угао њихов; ако није нарочито казато, онда се увек подразумева издубен угао.

16. Половина опруженог угла назива се пра̑в угао, на пр. AOB (сл. 5); он постаје четвртином пуног обртања. Сви су прави углови једнаки. Прав угао бележи се словом R.

Опружен је угао два пута, а пун угао четири пута већи од права угла.

Угао AOC, који је мањи од правог, зове се оштар; угао AOD, који је већи од правог а мањи од опруженог угла, зове се туп угао. Оштри и тупи углови називају се заједничким именом коси углови.



Сл. 5.

Два угла чији збир даје прав угао зову се комплементни, а два угла чији збир даје два права угла зову се суплементни углови.

Једнаки углови имају и једнаке комплементне, и једнаке суплементне углове.

Доказ. Ако је $m = n$, онда је и $R - m = R - n$; исто тако $2R - m = 2R - n$ (аксиома 4.).

Додатак. Кад се покретни полузрак, после једног пуног обртања, и даље обрће, онда он заузима поступно исте оне правце које је имао и за време првог обртања. Углови, који тако постају, имају онолико пута по четири права, колико је било пуних обртања, више онај угао који чини полузрак са својим првобитним правцем при првом обртању.

17. Два угла, који имају заједничко теме и један заједнички крак, и леже у истој равни на различним странама заједничког крака, називају се суседни углови.

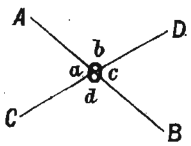
Два суседна угла чији незаједнички краци леже у једној правој, али у супротним правцима, називају се упоредни углови.

Теорема. Збир два упоредна угла једнак је с два права угла, јер они чине заједно један опружен угао.

Додаци. *a*) Збир свију узастопних суседних углова што леже на једној страни какве праве, која пролази кроз њихово заједничко теме, износи два права угла.

b) Збир свију суседних углова, који су око заједничког темена поређани један за другим, износи четири права угла.

18. Кад се краци једног угла продуже преко темена, онда се добивају два унакрсна угла, као a и c, или b и d (сл. 6).



Сл. 6.

Теорема. Унакрсни углови једнаки су.

Претпост. a и c унакрсни углови.

Доказати: $a = c$.

Доказ. a и c су суплементи истом углу b.

Како се доказује, да је $b = d$?

Последица. Кад је један од оних углова, што их граде две праве које се секу, пра̑в, онда су и остали прави; ако је један од тих углова ко̑с, онда су и остали коси.

19. За две праве, које се секу, кажемо да стоје једна на другој нормално (управно), ако је њихов угао прав; а кад граде косе углове, онда кажемо да једна према другој стоји ко̑со. Да је CD нормално на AB, означује се овако: $CD \perp AB$.

Нормално и вертикално ваља разликовати.

20. Углове меримо истражујући колико се пута у њима садржи други угао, који је узет за јединицу. Као јединица угаоне мере служи степен (°) тј. 360-ти део пуног угла. Степен делимо на 60 минута ('), а минут на 60 секунада (''). Према томе пун угао има 360°, опружен 180°, а прав 90°.

IV. Паралелне линије.

21. Права EF (сл. 7), која сече две или више правих линија, зове се њихова трансверсала (попречница).

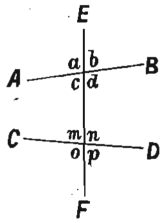
Кад се две праве AB и CD пресеку трећом EF, онда на пресецима постају осам углова.

Углови c, d, m, n, који леже између пресечених правих, зову се унутрашњи углови; а углови a, b, o, p, зову се спољашњи углови.

Један спољашњи и један унутрашњи угао, који леже на истој страни трансверсале, а на разним теменима, називају се сагласни углови; такви су углови a и m, b и n, c и o, d и p.

Два спољашња или два унутрашња угла на супротним странама трансверсале и на разним теменима називају се наизменични углови; такви су углови a и p, b и o, c и n, d и m.

Два спољашња или два унутрашња угла, који леже на истој страни трансверсале, зову се супротни углови; такви су углови a и o, b и p, c и m, d и n.



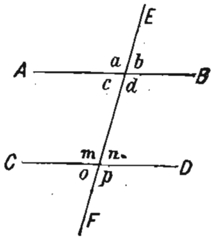
Сл. 7.

22. Теореме. 1. Кад су две праве пресечене трећом, па су два сагласна угла једнака, или два наизменична угла једнака, или два супротна угла суплементна, онда су и свака друга два сагласна угла једнака, свака друга два наизменична угла једнака, свака друга два супротна угла суплементна.

Доказ. Ако су два сагласна угла једнака, на пр. $a = m$ (сл. 8), онда морају бити једнаки и угли b и n као суплементи једнаких углова, d и p као унакрсни угловима a и m, c и o као суплементи једнаких углова a и m.

Како је $a = d$ као унакрсни, $d = p$ као сагласни, то је $a = p$, дакле су и наизменични углови једнаки.

Како је $a + c = 2R$, $c = o$, то је и $a + o = 2R$, тј. два супротна угла суплементна су.



Сл. 8.

Ако се претпостави, да су два наизменична угла једнака, на пр. $a = p$, онда је $p = m$, дакле $a = m$ тј. два сагласна угла једнака су, итд.

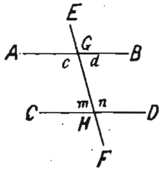
Ако су два супротна угла суплементна, на пр. b и p, онда мора бити $b = n$, јер је и угао n суплеменат углу p, итд.

2. Ако два сагласна, или два наизменична угла нису једнака, или два супротна угла нису суплементна, онда нису ни друга два сагласна или два наизменична угла једнака, нити два супротна угла суплементна.

Доказ индиректан.

23. Две праве, које леже у истој равни, па се никако не секу ма колико их продужили, зову се паралелне праве. Да су две праве AB и CD паралелне, пише се овако: $AB \parallel CD$. Да је такав положај могућан, излази из ове теореме:

Кад су две праве пресечене трећом, па су два сагласна или два наизменична угла једнака, или два супротне угла суплементна, онда су пресечене праве паралелне (сл. 9).



Сл. 9.

Доказ. Нека су праве AB и CD пресечене правом EF тако, да је угао $c = n$. Како тада мора бити и $d = m$, то се онај део равни што лежи између BG, GH и HD, т.ј. $BGHD$, може обртањем око средине дужи GH положити на $CHGA$ тако, да G падне на H, а H на G, а полузраци GB и HD на HC и GA. Ако би се претпоставило, да полузраци GB и HD имају заједничку тачку, онда би се морали сећи и полузраци GA и HC што би било противно чл. 7. b. Дакле су AB и CD паралелне.

Како су по теор. 22. свака два наизменична угла једнака, чим су једнака два сагласна угла, или чим су два супротна угла суплементна, то је горња теорема потпуно доказана.

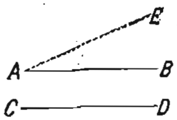
24. Основно правило. Кроз једну тачку ван неке праве може се повући само једна паралелна с том правом.

Последице. *a)* Кад су две праве паралелне с трећом, онда су оне паралелне и међу собом.

Сл. 10.

Ако је (сл. 10) $AB \parallel MN$ и $CD \parallel MN$, онда је и $AB \parallel CD$. Јер, ако AB и CD не би биле паралелне, онда би се оне — довољно продужене — морале сећи у једној тачки и тада бисмо имали две праве које пролазе кроз тај пресек а паралелне су са MN, што је по горњем основном правилу немогућно.

b) Кад су две праве AB и CD (сл. 11) паралелне, онда нека трећа права AE, која сече једну, на пр. AB, мора — довољно продужена — сећи и другу праву CD.



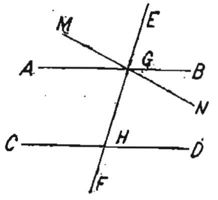
Сл. 11.

Ако AE не би секла праву CD, онда би морало бити $AE \parallel CD$; а како је и $AB \parallel CD$, то би кроз A пролазиле две праве паралелне са CD, а то се не слаже с основним правилом.

c) Кад су две паралелне пресечене трансверсалом, онда су два и два сагласна угла једнака, исто тако два и два наизменична угла, а два и два супротна угла суплементна су.

Ако сагласни углови, на пр. BGE и DHG, не би били једнаки, онда би се кроз G могла повући права MN тако, да буде угао $EGN = GHD$; ну тада би по теор. 23 било $MN \parallel CD$, а како је по претпоставци и $AB \parallel CD$, то би кроз тачку G биле могућне две паралелне са CD, што се не слаже с основним правилом.

Из теор. 22. излази тада, да су два и два наизменична угла једнака, а два и два супротна угла суплементна.



Сл. 12.

d) Кад су две праве пресечене трећом, па је збир два унутрашња супротна угла на једној страни трансверсале мањи од 180°, онда се те две праве — кад се довољно продуже — морају сећи на тој страни трансверсале (сл. 12).

Нека је на сл. 12 збир углова $HGN + GHD < 2R$. Ако повучемо кроз G праву AB тако, да буде $HGB + GHD = 2R$, онда је (по теор. 23) $AB \parallel CD$. Права MN, пошто сече праву AB, мора сећи и праву CD (по тач. b.); а тај пресек може бити само у правцу GN, пошто полузрак GN лежи између GB и GH, јер је $HGN < HGB$; према томе се GM налази између GA и GE, па се с тога полузрак GM не може никад сећи са CD.

25. Теореме.

1. Две праве, које стоје нормално на некој трећој, паралелне су међу собом.

Доказује се на основу чл. 23.

2. Кад су две праве паралелне, па једна од њих стоји нормално на некој трећој правој, онда и она друга стоји нормално на тој трећој правој.

Доказује се на основу чл. 24, c.

3. Из једне тачке ван неке праве може се на ту праву повући само **једна** нормала.

Индиректан доказ. Кад би се кроз ту тачку могло повући више нормала, оне би имале једну заједничку тачку, а морале би по теор. 1. бити паралелне што се никако не слаже.

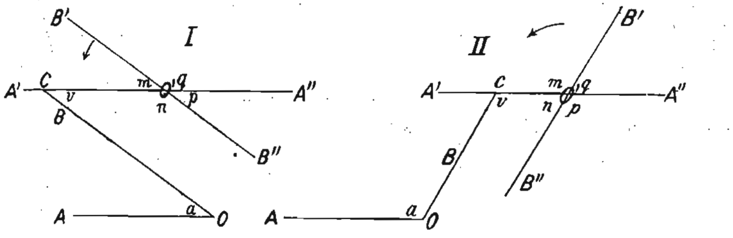
4. У једној тачки неке праве можемо повући само једну нормалу на ту праву.

Доказ као под 3.

5. Праве, које стоје нормално на крацима каквог било угла, само не опруженог, секу се.

У темену повуци нормалу на један крак и примени чл. 24, d и чл. 24, b.

26. Нека је дата тачка O' и угао AOB (сл. 13). Кад повучемо кроз O' праве $A'A'' \parallel AO$ и $B'B'' \parallel BO$, онда су краци оних углова, који постају код тачке O', неки у истом смислу паралелни с крацима данога угла, као на пр. $O'A'$ са OA или $O'B'$ са OB, а неки су у супротном смислу паралелни, као $O'A''$ и OA, или $O'B''$ и OB.



Сл. 13.

Теорема. 1. Кад су краци једног угла паралелни с крацима другог угла, онда су ти углови *a)* једнаки, ако су оба крака једног угла у истом, или оба у супротном смислу паралелна с крацима другог угла, *b)* суплементни, ако су два крака у истом, а друга два у супротном смислу паралелна.

Доказ. *a)* Кад продужимо OB до пресека C с правом $A'A''$, онда је (по чл. 24, c) $m = v$ и $a = v$, дакле и $m = a$.

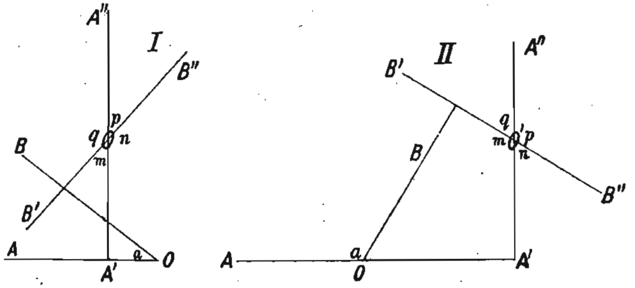
Из $m = a$ и $m = p$ излази да је и $p = a$.

b) Како је према доказу под *a)* угао $m = a$, а збир $n + m = 2R$, то је и $n + a = 2R$. Како је $n = q$, то је и $q + a = 2R$.

Исто тако доказује се ова теорема и онда, кад је тачка O' у угаоној површини AOB.

Кад се на сл. 13 праве $A'A''$ и $B'B''$ као целина обрну за 90^0 око тачке O' у правцу који је означен стрелицом, онда ће оне заузети према углу AOB положај као што показује сл. 14; тада ће бити $A'A'' \perp OA$ и $B'B'' \perp OB$, али се углови m, n, p, q, при том неће променити.

За краке ових углова у новом положају каже се, да стоје на крацима угла AOB у истом или у супротном смислу нормално, према томе, да ли су они пре обртања за 90^0 били у истом или у супротном смислу паралелни с крацима тог угла. Тако је $O'A'$ на OA, или $O'B'$ на OB у истом смислу нормално, а $O'A''$ на OA или $O'B''$ на OB у супротном смислу нормално.



Сл. 14.

Теорема. 2. Кад краци једног угла стоје нормално на крацима другог угла, онда су ти углови *a)* једнаки, ако оба крака једног угла стоје у истом или у супротном смислу нормално на крацима другог угла; *b)* суплементни, ако су два крака у истом, а друга два у супротном смислу нормална.

Излази из теореме доказане под 1.

За вежбање.

27. Докажи ове теореме:

1. На једној правој налазе се четири тачке овим редом: A, B, C, D. Докажи ова правила:

a) ако је $AB = CD$, онда је и $AC = BD$;

b) ако је $AC = BD$, онда је и $AB = CD$;

c) ако је $AB = BC$, онда је $BD = \frac{1}{2}(AD + CD)$;

d) ако је $BD = \frac{1}{2}(AD + CD)$, онда је $AB = BC$.

2. Из једне тачке O повучена су четири полузрака овим редом: OA, OB, OC, OD. Докажи ова правила:

a) ако је $AOB = COD$, онда је и $AOC = BOD$, и обрнуто.

b) ако је $AOB = BOC$, онда је $BOD = \frac{1}{2}(AOD + COD)$, и обрнуто.

3. Кад се кроз теме права угла повуче права изван угла, онда она гради с крацима комплементне углове.

4. Свака два комплементна угла могу се написати у облику $45^0 - \alpha$ и $45^0 + \alpha$. Ако је на пр. један угао $38^0\,24'\,43''$, колики је угао α?

Свака два суплементна угла могу се написати у облику $90^0 - \alpha$ и $90^0 + \alpha$. Ако је један угао на пр. $115^0\ 36'\ 40''$, колики је угао α?

5. Праве, које у темену неког угла стоје у супротном смислу нормално на његовим крацима, захватају угао суплементан датом углу.

6. Праве, које полове два упоредна угла, стоје једна на другој нормално, и обрнуто.

7. Кад два угла чине укупно један прав угао, онда праве које их полове захватају угао од 45^0.

8. Ако се кроз теме неког угла повуче нормала на праву која га полови, онда ће та нормала преполовити његов упоредни угао.

9. Права, која полови неки угао, полови и његов унакрсни угао.

10. Праве што полове два сагласна, или два наизменична угла, који постају кад се две паралелне пресеку трансверсалом, паралелне су.

11. Кад су две паралелне пресечене трансверсалом, онда праве, које полове два супротна угла, стоје једна на другој нормално.

12. Кад два угла имају паралелне краке, онда су праве, које их полове, паралелне или нормалне.

13. Три праве пролазе кроз једну тачку и граде шест углова; докажи да три ма која угла, што не леже један до другога, дају збир 180^0.

14. Кроз једну тачку у унутрашњости каква издубена угла α повучена је једна права паралелно с једним краком, а друга нормално на други крак угла α; у каквом односу стоје углови тих двеју правих према углу α?

ДРУГИ ОДЕЉАК.

Ограничени равни облици.

I. Троугао.

1. Дефиниције и опште особине троуглове.

28. Трима дужима ограничен део равни зове се троугао. Те три дужи зову се троуглове стране.

Сваки троугао има три темена, три стране и три угла. Наспрам сваке стране лежи по један угао, а на свакој страни леже по два угла; наспрам сваког угла лежи по једна страна, а оне друге две стране захватају тај угао.

Кад се у троуглу ABC узме за основицу која било страна AB, онда се троугловом висином назива нормала повучена од супротног темена до основице.

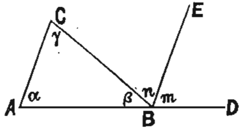
29. Троугао, који нема ни две једнаке стране, зове се разностран; троугао са две једнаке стране зове се равнокрак, а троугао с три једнаке стране назива се равностран.

Једнаке стране равнокраког троугла називају се његови краци, трећа страна назива се основица, а пресек оба крака зове се врх или теме троуглово.

30. Теорема. Збир углова у троуглу износи $2R$.

Доказ. Кад се продужи (сл. 15) страна AB преко B и повуче $BE \parallel AC$, онда је $m = \alpha$, $n = \gamma$; па како је $m + n + \beta = 2R$, то је и $\alpha + \gamma + \beta = 2R$.

Могла би се и кроз C повући с правом AB паралелна помоћна линија. Како се онда изводи доказ?



Сл. 15.

Последице. *a)* Два угла једног троугла, или њихов збир, одређују величину трећег угла; ако су, дакле, два угла једног троугла једнака са два угла другог троугла, онда морају и трећи углови бити једнаки.

b) У троуглу може само један угао бити прав; исто тако може само један угао бити туп.

Какав положај може имати троуглова висина?

31. Троугао се зове оштроугли, кад су му сви углови оштри; правоугли, кад му је један угао прав; тупоугли, кад му је један угао туп.

Страна наспрам правог угла у правоуглом троуглу зове се хипотенуза; стране, које захватају прав угао, зову се катете. Оштроугли и тупоугли троугли зову се заједничким именом косоугли троугли.

32. Спољашњим углом неког троугла назива се угао између једне његове стране и продушка друге које стране.

Теорема. Сваки спољашњи угао неког троугла једнак је са збиром она два унутрашња угла, који немају с њим заједничко теме (сл. 15).

Јер $CBD = m + n = \alpha + \gamma$.

Последица. Збир сва три спољашња угла троуглова износи $4R$.

33. Теореме.

1. Наспрам једнаких страна троуглових леже једнаки углови.

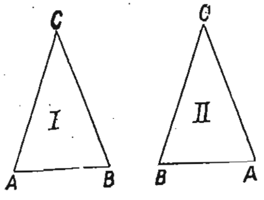
2. Наспрам веће стране троуглове лежи већи угао.

3. Наспрам једнаких углова троуглових леже једнаке стране.

4. Наспрам већег угла троуглова лежи већа страна.

Доказ 1. теореме.

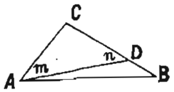
Нека је $AC = BC$ (сл. 16). Замислимо троугао I преврнут, као што показује II, и II положено на I тако, да се поклапају једнаки углови C. Како је $AC = BC$, то ће тада тачке B и A троугла II поклопити тачке A и B троугла I, дакле страна BA другог троугла поклопиће страну AB првог троугла; према томе угао A троугла II поклапа се с углом B троугла I; с тога је $A = B$.



Сл. 16.

Доказ 2. теореме (сл. 17).

Нека је страна $BC > AC$. Пренесимо $CD = CA$ и повуцимо дуж AD. Тада је у троуглу CAD угао $m = n$ (по теор. 1.); а како је угао $BAC > m$, то је и угао $BAC > n$. Угао n, као спољашњи угао троугла ABD, већи је од угла ABC, па тим пре угао $BAC > ABC$.



Сл. 17.

Теорема 3. доказује се индиректно. Нека је (сл. 16) угао $A = B$. Кад не би била страна $BC = AC$, онда би морало бити $BC \gtrless AC$. Али тада би по теореми 2. било и $A \gtrless B$, а то се не слаже с претпоставком по којој је $A = B$. Зато мора бити $BC = AC$.

И теорема 4. доказује се индиректно. Нека је (сл. 17) угао $BAC > ABC$. Кад бисмо претпоставили да није $BC > AC$, онда би морало бити $BC = AC$, или $BC < AC$. Ну тада би из прве претпоставке следовало да је угао $BAC = ABC$, а из друге да је угао $BAC < ABC$; ни једно ни друго не слаже се с претпоставком по којој је угао $BAC > ABC$. Зато мора бити $BC > AC$.

Последице. Из теор. 1. излази:

a) Углови на основици равнокраког троугла једнаки су. Једним углом равнокраког троугла одређена су и она друга два.

b) Спољашњи угао при врху равнокраког троугла два пута је већа од сваког угла на основици.

c) Углови равностраног троугла једнаки су и сваки има по 60°.

Из теор. 4. излази:

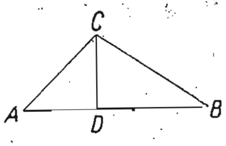
d) У правоуглом је троуглу хипотенуза већа од сваке катете.

e) У тупоуглом је троуглу највећа она страна, која лежи наспрам тупог угла.

34. Теореме. 1. Свака је троуглова страна мања од збира других двеју страна.

Доказ. Нека је AB (сл. 18) најдужа страна троугла ABC. Ако се повуче $CD \perp AB$, онда је

$$\begin{array}{l} AD < AC \text{ и} \\ BD < BC, \text{ с тога} \\ \hline AD + BD < AC + BC, \text{ или} \\ AB < AC + BC. \end{array}$$



Сл. 18.

Из претпоставке излази непосредно, да је $AC < AB + BC$ и $BC < AB + AC$.

2. Свака је троуглова страна већа од разлике других двеју страна.

Нека је AB (сл. 18) највећа, BC средња, а AC најмања страна троугла ABC.

По претходном је правилу

$$AC + BC > AB \text{ и } AB + AC > BC;$$

с тога је и

$$BC > AB - AC,\ AC > AB - BC,\ AB > BC - AC.$$

35. Кад се из једне тачке, која лежи ван неке праве, повуче к правој нормална или коса права, онда се њен пресек с датом правом зове њена подножна тачка.

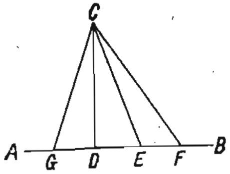
Подножна тачка нормале, спуштене од једне тачке на неку праву, зове се нормална пројекција или просто пројекција те тачке на даној правој. Свака тачка на правој уједно је и своја пројекција на тој правој. Пројекцијом дужи називају се укупне пројекције њених тачака. Она се добија, кад се вежу пројекције крајњих тачака. Ако је пројектована права нормална на некој правој, онда је њена пројекција тачка. У сл. 19 је, према томе, GD пројекција праве CG, а D је пројекција праве CD.

Теорема. Кад се из једне тачке, која лежи ван неке праве, повуку к тој правој једна нормална и више косих дужи, онда је:

1. Нормала најкраћа између свију тих дужи;

2. Две косе дужи, чије су подножне тачке једнако удаљене од нормале, једнаке су међу собом; и

3. Од две косе дужи, чије су подножне тачке неједнако удаљене од нормале, већа је она која има већу пројекцију.



Сл. 19.

Доказ. 1. Да је CD краће од CE, CF, CG, излази из чл. 33, d.

2. Нека је $DE = DG$; тада мора, кад се прав угао CDG обрне око CD, тачка G пасти на E, дакле и CG на CE; дакле је $CE = CG$.

3. У троуглу CDE угао CED оштар је, с тога је његов упоредни угао CEF туп, према томе у троуглу CEF страна $CF > CE$. Из теорема 2. и 3. излази индиректно, да вреде и обрнуте теореме.

Из једне тачке спуштена нормала на неку праву одређује раздаљину те тачке од праве.

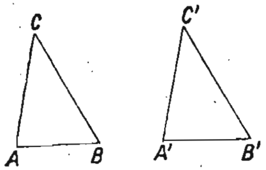
Последица. Из једне тачке, која лежи ван неке праве, могу се према тој правој повући увек две, али и само две једнаке косе дужи.

2. Подударност троуглова.

36. Два су троугла подударна (чл. 3) кад се, положена један на други, потпуно поклапају. Да би то било могућно, морају стране и углови једног троугла бити по реду једнаки са странама и угловима другог троугла. Отуд излази: У подударним троуглима једнаке су стране које леже наспрам једнаких углова, а тако исто једнаки су углови који леже наспрам једнаких страна.

Како стране и углови једног троугла зависе једни од других, то је довољан и мањи број од шест једнаких комада, па да се може закључити да су троугли подударни. Ти су случајеви обухваћени у ова четири правила о подударности.

37. I. Правило о подударности. Два су троугла подударна, кад су једна страна и оба угла на њој у једном троуглу по реду једнаки с једном страном и два угла на тој страни у другом троуглу.



Сл. 20.

Претпоставка. Страна $AB = A'B'$, угао $A = A'$ и $B = B'$ (сл. 20).

Доказ. Замислимо $\triangle A'B'C'$ положен на ABC тако, да тачке A' и B' падну на A и B; то је могућно, јер је $AB = A'B'$. Како је угао $A = A'$ то мора $A'C'$ пасти у правац AC; а како је и угао $B = B'$, то ће $B'C'$ пасти у правац BC.

А кад праве $A'C'$ и $B'C'$ падну у правце правих AC и BC, онда мора и њихов пресек C' поклопити тачку C. Дакле, троугли ABC и $A'B'C'$ поклапају се.

Последица. Два су троугла подударна, кад су једна страна, један угао на њој и супротни јој угао у једном троуглу по реду једнаки с једном страном, једним углом на њој и супротним углом у другом троуглу (чл. 30, a).

38. II. Правило о подударности. Два су троугла подударна, кад су две стране са захваћеним углом у једном троуглу посебице једнаке с двема странама и захваћеним углом у другом троуглу.

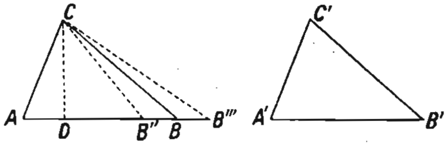
Претпоставка. Нека је $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ и $C = C'$ (слика 20).

Доказати: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Доказ. Замислимо троугао $A'B'C'$ положен на троугао ABC тако, да C' падне на C, $C'A'$ дође у правац CA, и $C'B'$ у правац CB; то је могућно, јер је по претпоставци угао $C' = C$. Како је $A'C' = AC$ и $B'C' = BC$, то мора и тачка A' пасти на A и тачка B' на B, дакле страна $A'B'$ на AB; према томе је $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

39. III. Правило о подударности. Два су троугла подударна, кад су две стране и угао наспрам веће стране у једном троуглу по реду једнаке с двема странама и углом наспрам веће стране у другом троуглу.

Претпоставка. Нека је (слика 21) $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, даље $BC > AC$, дакле и $B'C' > A'C'$, и напослетку угао $A = A'$.



Сл. 21.

Доказати: $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Доказ. Замислимо $\triangle A'B'C'$ положен на $\triangle ABC$ тако, да тачка A' падне на A, C' на C и $A'B'$ у правац AB; то је могућно, јер је по претпоставци $AC = A'C'$ и $A = A'$. Тада мора и B' пасти на B. Јер кад тачка B' не би пала на тачку B, онда би она морала пасти негде између A и B на пр. у B'', или негде на продужак праве AB, на пр. у B'''. Али дужи CB'' и CB''' не могу бити једнаке са CB, јер им пројекције нису једнаке. С тога мора тачка B' пасти на B, а тада је $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

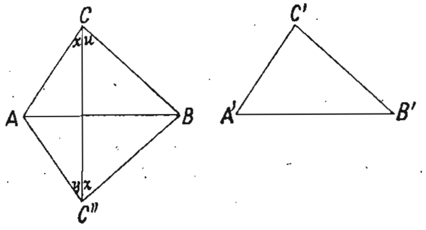
Додатак. Горњи доказ изведен је под погодбом да угао лежи наспрам веће стране. Ако су, дакле, две стране и угао наспрам мање стране у једном троуглу посебице једнаке с двема странама и углом наспрам мање стране у другом троуглу, онда се отуд не може закључити да су троугли подударни. (Упореди у сл. 53 $\triangle AB'C$ и $\triangle AB''C$).

40. IV. Правило о подударности. Два су троугла подударна, кад су све три стране једног троугла посебице једнаке са странама другог троугла.

Претпоставка. $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ (слика 22).

Доказати: $\triangle ABC \cong A'B'.C'$.

Доказ. Замислимо троугао $A'B'C'$ положен уз троугао ABC тако, да се поклопе две најдуже стране $A'B'$ и AB, а тачка C' да падне на супротну страну праве AB, у тачку C''. Тада су по претпоставци ACC'' и BCC'' равнокраки троугли, дакле углови на њиховим основицама једнаки, $x = y$, $u = z$; према томе је и $x + u = y + z$, или угао $ACB = AC''B = A'C'B'$. А кад је угао $ACB = A'C'B'$, онда је $\triangle ABC \cong A'B'C'$ (по члану 38).



Сл. 22.

41. Подударношћу троуглова служимо се, кад треба из три једнака комада у два троугла закључити, да су и остали комади једнаки; једнаке су стране наспрам једнаких углова, и обрнуто.

Како подударни троугли имају исти облик и исту величину, то излази, да величину и облик неког троугла одређују они комади његови, из чије једнакости код два троугла можемо закључити да су они подударни. Комади који одређују неки троугао јесу дакле: 1. страна и два угла; 2. две стране и захваћен угао; 3. две стране и угао наспрам веће стране; 4. све три стране.

42. Теорема. Кад су две стране једног троугла једнаке с двема странама другог троугла, а захваћени углови нису једнаки, онда нису једнаке ни треће стране; наспрам већег угла лежи и већа страна (сл. 23).

Нека је у троуглима ABC и ABC_1 страна $AB = AB$, $BC = BC_1$, а угао $ABC_1 > ABC$.

Доказати да је страна $AC_1 > AC$.

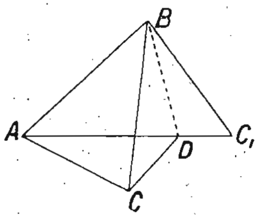
Доказ. Замислимо да је један троугао положен на други тако, да им се поклапају стране AB.

Угао CBC_1 разлика је између углова ABC и ABC_1; повуцимо праву BD која полови угао CBC_1 и вежимо C и D.

Троугли BDC и BDC_1 подударни су, јер је $BD = BD$, $BC = BC_1$, а угао $CBD = C_1BD$; с тога $CD = C_1D$.

У троуглу ACD је збир $AD + DC > AC$ или

$$AD + DC_1 > AC \text{ тј. } AC_1 > AC.$$



Сл. 23.

43. Теорема. Кад су две стране једног троугла посебице једнаке с двема странама другог троугла, а треће им стране нису једнаке, онда нису једнаки ни углови наспрам тих неједнаких страна; већи је угао наспрам веће стране.

Доказ. Нека је у два троугла

$$AB = A'B',\ AC = A'C', \text{а } BC > B'C'.$$

Тада је $\sphericalangle BAC > \sphericalangle B'A'C'$. Ако би био $\sphericalangle BAC \overset{=}{<} B'A'C$, онда би морала бити и страна $BC \overset{=}{<} B'C'$ (члан 42); једно и друго противи се претпоставци.

Примена правила о подударности.

44. За две тачке каже се да леже симетрично према некој правој, ако је дуж, која их везује, на тој правој нормална и ако је њоме преполовљена; права се зове симетријска осовина или симетрала.

Две равне слике леже симетрично према некој правој, кад према свакој тачки једне слике лежи симетрично по једна тачка друге слике; две равне слике у симетричном положају могу се, обртањем око симетрале, поклопити.

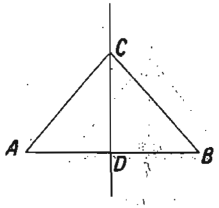
Равна слика зове се симетрична, кад се каквом правом (симетралом) може поделити на два дела у симетричном положају.

45. I. Свака је дуж симетрична; њена је симетрала нормала у њеној средини.

a) Свака тачка ду̑жне симетрале једнако је удаљена од крајњих тачака те дужи.

Излази из подударности правоуглих троуглова ADC и BDC (слика 24).

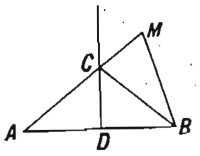
b) Кад тачка лежи изван ду̑жне симетрале, онда је она ближе оној крајњој тачки те дужи, с којом се налази на истој страни симетрале.



Сл. 24.

Доказ. (сл. 25). $MC + BC > MB$; како је $AC = BC$, то је и $MC + AC > MB$ или $AM > BM$.

Обрнута правила *a)* и *b)* доказују се индиректно.



Сл. 25.

2. Сваки је угао симетричан; његова је симетрала она права, која га полови.

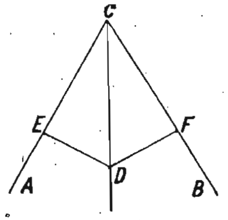
a) Ако је CD (слика 26) симетрала угла ACB, дакле $ACD = BCD$, и ако је $DE \perp AC$, $DF \perp BC$, онда излази из подударности правоуглих троуглова CED и CFD:

Свака тачка на симетрали каквог угла једнако је удаљена од његових кракова.

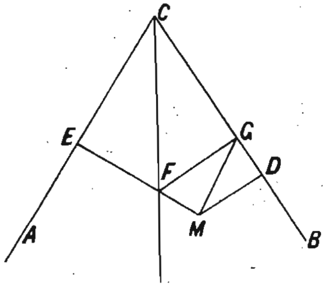
b) Ако нека тачка лежи изван симетрале каквог угла, онда је она ближе оном краку, с којим се налази на истој страни симетрале.

У сл. 27 је $FM + FG > MG$, тим пре $FM + FG > MD$, или $FM + EF > MD$; с тога $ME > MD$.

Обрнута правила *a)* и *b)* доказују се индиректно.



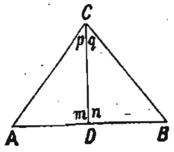
Сл. 26.



Сл. 27.

46. Теореме. 1. Права, повучена са врха равнокраког троугла ка средини његове основице, симетрала је и основици и углу на темену.

Претпоставка. $AC = BC$, $AD = BD$ (сл. 28).



Сл. 28.

Доказати, да је $CD \perp AB$ и $p = q$.

Доказ. $\triangle ACD \cong BCD$, с тога $m = n$, или $CD \perp AB$, и $p = q$.

2. Висина, која одговара основици равнокраког троугла, симетрала је и основици и углу на темену.

3. Симетрала угла на темену равнокраког троугла уједно је симетрала и његовој основици.

4. Симетрала основице равнокраког троугла пролази кроз теме и симетрала је углу на темену.

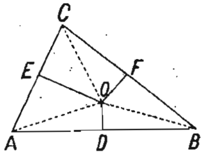
Према томе је равнокрак троугао симетрична слика. Његова је симетрала висина, која се поклапа са симетралом угла на темену и симетралом његове основице.

Равностран троугао симетричан је; свака му је висина симетрала. Свака је висина симетрала по једној страни и по једном углу.

47. Правила.

1. Симетрале свих страна једног троугла секу се у истој тачки, која је једнако удаљена од троуглових **темена.** (Прва значајна тачка у троуглу).

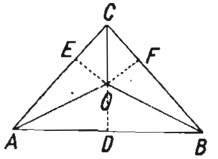
Доказ. Ако се (сл. 29) симетрале DO и EO двеју страна AB и AC секу у тачки O (чл. 25, 5), онда је по чл. 45, 1 *a* тачка O исто толико удаљена од A колико и од B, и од A исто толико колико и од C, с тога једнако удаљена од B и C. А кад је тачка O удаљена од B колико и од C, онда она лежи на симетрали стране BC.



Сл. 29.

2. Симетрале свих углова једног троугла секу се у истој тачки, која је једнако удаљена од троуглових **страна.** (Друга значајна тачка у троуглу).

Доказ. Ако се симетрале AO и BO (сл. 30) углова BAC и ABC секу у тачки O (чл. 24. *d*), онда је по чл. 45, 2 *a* тачка O удаљена од AB исто толико колико и од AC, и од AB исто толико колико од BC. А кад је тачка O једнако удаљена од AC и BC, онда она лежи на симетрали угла ACB.



Сл. 30.

Додатак ка 2. Исто тако доказује се, да се симетрала једног унутрашњег угла у троуглу са симетралама спољашњих углова код она друга два темена сече у једној тачки, једнако удаљеној од троуглових страна.

3. За вежбање.

48. 1. Кад се из једне тачке у троуглу повуку дужи до крајњих тачака једне стране, онда је *a)* збир тих двеју дужи мањи од збира других двеју страна, $b)$ а угао између тих двеју дужи већи од угла који захватају оне друге две стране.

Треба једну дуж наставити до пресека с једном страном, па применити чл. 34, 1 и чл. 32.

2. Кад се две тачке A и B вежу двема конвексним изломљеним линијама, онда је спољашња линија дужа од унутрашње.

3. Кад се сва три темена једног троугла вежу с једном тачком у троуглу, онда је збир тих трију дужи мањи од целог, а већи од полу-обима троуглова.

4. Троуглова висина мања је од полузбира оближњих јој страна.

5. Збир све три висине троуглове мањи је од његова обима.

6. Нека је α један угао у троуглу; колики угао захватају праве које полове она друга два угла?

7. Симетрала једног угла у троуглу гради са супротном страном два угла чија је разлика једнака са разликом углова на тој страни.

8. Угао између симетрале једног угла у троуглу и висине из темена истог угла једнак је с полуразликом она друга два угла у троуглу.

9. Збир од два спољашња угла код троугла већи је за 2 R од супротног унутрашњег угла.

10. Права, која полови спољашњи угао при врху равнокрака троугла, паралелна је с основицом.

11. Кроз врх равнокрака троугла повучена паралелна с основицом полови спољашњи угао при врху.

12. Угао између основице равнокрака троугла и висине која одговара једном краку, половина је угла при врху.

13. Висине, које одговарају крацима равнокрака троугла, једнаке су.

14. Троугао са две једнаке висине мора бити равнокрак.

15. У произвољној тачки P на основици равнокрака троугла повучена је нормала која сече краке у M и N; докажи да је збир $PM + PN$ константан.

16. Ако се хипотенуза правоугла троугла продужи на обадве стране толико, да сваки продужак буде једнак с оближњом катетом, онда праве, које везују крајње тачке тих продужака с теменом правог угла, захватају угао од 135°.

17. Кад се две произвољне тачке на двема паралелним правима вежу једном дужи, па ова преполови, онда је и свака друга дуж, која је повучена кроз средину прве дужи, а крајње су јој тачке на поменутим паралелним правима, преполовљена у средини прве дужи.

18. Кад је у правоуглом троуглу један оштар угао два пута већи од другога, онда је хипотенуза два пута већа од мање катете.

Ако се уз тај троугао положи други, с њим подударан, тако да им је заједничка већа катета, онда се добија равностран троугао.

19. Кад је у равнокраком троуглу један угао на основици (72°) два пута већи од угла при врху (36°), онда симетрала једног угла на основици дели троугао на два, опет равнокрака троугла.

20. Ако углови у каквом троуглу стоје у размери 1 : 2 : 3, онда је то правоугли троугао.

21. Ако је у неком троуглу један угао једнак са збиром она друга два, или с њиховом разликом, онда је то правоугли троугао.

22. Кад се прав угао у правоуглом троуглу подели на два дела тако, да су ти делови једнаки с оштрим угловима тог троугла, онда деона права полови хипотенузу или стоји на њој нормално, према томе, да ли су једнаки углови на истој страни деоне праве, или на супротним странама.

23. Кад се у троуглу ABC угао ACB преполови правом CD, па повуче $AE \parallel CD$ до пресека с продуженом страном BC, онда је $AC = CE$. — Ако бисмо преполовили спољашњи угао ACE симетралом CF, па повукли $AG \parallel CF$ до пресека G са страном BC, онда је $AC = CG$.

24. Дате су две праве које се секу и једна тачка; кроз ту тачку повуци праву под једнаким углима према датим линијама.

25. Дате су три тачке A, B, C; кроз C повуци праву CN тако, да A и B буду у једнаким раздаљинама од CN.

26. Дата је права MN и на истој страни две тачке A и B; нађи на MN тачку C тако, да је збир $AC + BC$ минимум.

Ако је A_1 симетрично према A, а C_1 једна тачка на MN, онда је збир $AC_1 + C_1B = A_1C_1 + C_1B$, а то је веће од дужи A_1B.

27. Од свих троуглова, који имају исту основицу и једнаке висине, који има најмањи обим?

28. Од свих троуглова, који имају једно заједничко теме а она друга два темена су им на крацима каква оштра угла, који има најмањи обим?

Ако је ABC троугао чије је теме B на краку OM, теме C на ON, па се конструишу тачке A_1 и A_2 тако, да је OM симетрала дужи A_1A, а ON симетрала дужи AA_2, онда је обим троугла ABC претворен у изломљену линију A_1BCA_2 итд.

29. Дате су две тачке A и B у углу MON; нађи једну тачку C на OM, а другу на ON, тако да збир $AC + CD + DB$ буде минимум.

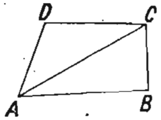
30. У троуглу ABC повуци $MN \parallel BC$, тако да је $MN = AM + BM$ (M на AC), или $MN = AM - BN$.

II. Четвороугао.

1. Дефиниције и теореме.

49. Са четири дужи ограничен део равни зове се четвороугао.

Дуж AC (сл. 31.), која везује два супротна темена, назива се дијагонала.



Сл. 31.

Четвороугао има четири темена, четири стране, четири угла и две дијагонале.

50. Теорема. Збир свију углова у четвороуглу износи 360°.

Доказ. Кад се четвороугао подели дијагоналом на два троугла, онда збир углова у сваком од та два троугла износи $2\,R$, а у оба троугла $4\,R$.

Према томе може само један угао у четвороуглу бити испупчен. Ми ћемо посматрати само четвороугле с издубеним угловима.

51. Према узајамном положају стра́на̂ деле се четвороугли на трапезоиде, трапезе и паралелограме.

Трапезоид је четвороугао који нема ни две паралелне стране; трапез је четвороугао који има један пар паралелних страна; паралелограм је четвороугао са два пара паралелних страна.

Теореме о паралелограмима.

52. 1. У паралелограма су два и два супротна угла једнака.

Ово правило излази непосредно из чл. 26, 1. *a*).

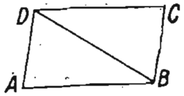
2. Четвороугао, у коме су два и два супротна угла једнака, мора бити паралелограм. (Обр. теор. 1.).

Доказ се оснива на чл. 50 и чл. 23.

Последица. Кад је у паралелограму један угао прав, онда су прави и остали; ако је један угао ко̂с, онда су и остали коси.

С тога разликујемо правоугле паралелограме од косоуглих.

53. 1. Сваки је паралелограм дијагоналом подељен на два подударна троугла.



Сл. 32.

Претпоставка. Нека је $ABCD$ (сл. 32.) паралелограм, дакле $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Доказати, да је $\triangle ABD \cong CDB$. Излази из чл. 24, *c* и чл. 37.

2. У паралелограма су две и две супротне стране једнаке. $AB = DC$, $AD = BC$. Следује из 1.

Ова теорема казује се и овако: паралелне између паралелних једнаке су.

Последица. Кад су две праве паралелне, онда су све тачке једне праве једнако удаљене од друге праве.

Јер нормале, које показују раздаљину појединих тачака једне паралелне од друге, паралелне су по чл. 25, 1, па су с тога једнаке по теор. 2. овог члана.

Стална раздаљина сваке тачке једне паралелне од друге зове се раздаљина тих паралелних. Кад се једна страна каква паралелограма узме за основицу, онда се њена раздаљина од супротне стране зове висина у паралелограма.

3. Кад су у четвороугла две и две супротне стране једнаке, онда је он паралелограм (обр. теор. 2).

Доказ. Нека је у четвороугла $ABCD$ (сл. 32.) $AB = DC$ и $AD = BC$. Тада је $\triangle ABD \cong CDB$, па су с тога једнаки наизменични углови ABD и CDB, ADB и CBD; према томе је $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$ (чл. 23).

4. Кад су у каквог четвороугла две супротне стране паралелне и једнаке, онда је он паралелограм.

Доказ. Нека је у четвороугла $ABCD$ (сл. 32.) $AB = DC$ и $AB \parallel DC$. Тада је $\triangle ABD \cong CDB$, па су једнаки и наизменични углови ADB и CBD, с тога $AD \parallel BC$.

5. У сваком паралелограму дијагонале се узајамно полове.

6. Кад се дијагонале у каквом четвороуглу полове, онда је он паралелограм.

Доказује се подударношћу троуглова.

54. Кад су у паралелограма једнаке две узастопне стране, онда су све једнаке; такав се паралелограм зове равностран. Ако две узастопне стране нису једнаке, онда се паралелограм зове разностран.

С погледом на величину углова и дужину стра́на̂ разликујемо четири врсте паралелограма: 1. Косоугли и разнострани паралелограм или ромбоид; 2. Косоугли и равнострани паралелограм или ромб; 3. правоугли и разнострани паралелограм или правоугаоник; 4. правоугли и равнострани паралелограм или квадрат.

55. 1. У правоугаоника су дијагонале једнаке.

2. У ромба је свака дијагонала симетрала оне друге, и симетрала оних углова чија темена везује.

3. Уквадрата су дијагонале једнаке, свака је дијагонала симетрала оне друге и симетрала она два угла чија темена везује.

Доказује се подударношћу троуглова и правилима о симетрали.

Додаци *a)* Правоугаоник је симетричан; симетрале су му праве које полове супротне стране.

b) Ромб је симетричан; свака му је дијагонала симетрала.

c) Квадрат је симетричан; његове су симетрале и обе дијагонале, и симетрале његових страна.

Према томе правоугаоник и ромб имају по две, а квадрат четири симетријске осовине.

Трапез.

56. Паралелне стране у трапеза зову се основице, а њихова је раздаљина висина трапезова. Непаралелне стране зову се краци; ако су они једнаки, онда се трапез зове равнокрак.

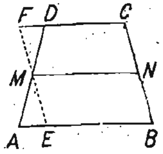
57. 1. Дуж између срединâ непаралелних страна трапезових *a)* паралелна је с основицама, и *b)* једнака је с њиховим полузбиром.

Доказ. Нека је (сл. 33) $AB \parallel DC, AM = MD$ и $BN = NC$.

a) Кад се повуче кроз M права $EF \parallel BC$ и продужи CD до F, онда је $\triangle AEM \cong DFM$, с тога $EM = MF$. Како је $EF = BC$, то је и $\frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} BC$, тј. $EM = BN$. Према томе је $BNME$ паралелограм (чл. 53, 4), дакле $MN \parallel EB$.

b) Из подударности троуглова AEM и DFM излази, да је $AE = DF$. Али је $MN = BE = AB - AE$, а исто тако је $MN = CF = CD + DF$, дакле $2MN = AB + CD$, а $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Дуж MN назива се средња линија у трапеза.

2. Кад се кроз средину једног крака у трапезу, повуче паралелна с основицама његовим онда ће она преполовити и други крак.



Сл. 33.

Доказ. Нека је (слика 33), $AM = MD$ и $MN \parallel AB$. Кад се кроз M повуче права $EF \parallel BC$ и продужи CD до F, онда је $\triangle AEM \cong DFM$, с тога $EM = MF$; али је $EM = BN$ и $MF = NC$, с тога и $BN = NC$.

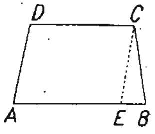
3. У равнокрака трапеза једнаки су углови на свакој од паралелних страна.

Доказ. Нека је (сл. 34) $AB \parallel CD$ и $AD = BC$. Кад се повуче $CE \parallel DA$, онда је $EC = AD = BC$, дакле у $\triangle BEC$ угао $B = E$; али је $E = A$, с тога и $A = B$. Према томе и $D = C$ (чл. 16).

4. Обрнуто: Кад су у трапеза једнаки углови на једној од паралелних страна, онда је тај трапез равнокрак.

Доказ. Нека је (сл. 34) $AB \parallel DC$ и $A = B$. Кад се повуче $CE \parallel DA$, онда је $CE = DA$ и угао $E = A = B$, с тога у $\triangle BEC$ страна $CE = CB$, према томе и $AD = BC$.

5. У равнокрака је трапеза симетрала једне основице уједно симетрала другој, и симетрала самог трапеза.



Сл. 34.

Доказује се поклапањем.

Равнокраки је трапез симетричан; има једну симетријску осовину.

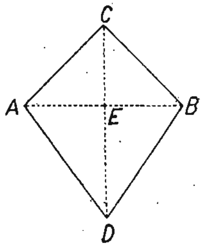
Делтоид.

58. Делтоидом се назива четвороугао који има два пара једнаких суседних страна.

Ако је (сл. 35) $AC = BC$ и $AD = BD$, онда је $ACBD$ делтоид. Он је састављен од два равнокрака троугла, којима је дијагонала AB заједничка основица. Према томе је CD симетрала дужи AB. Отуд излази:

1. Дијагонале у делтоида стоје једна на другој нормално.

2. Делтоид је симетричан; његова је симетрала она дијагонала, која везује темена у којима се стичу једнаке стране.



Сл. 35.

Теореме о паралелнима у троуглу.

59. 1. Дуж између срединâ двеју страна троуглових паралелна је с трећом страном и једнака је с њеном половином.

2. Права, повучена кроз средину једне троуглове стране паралелно с другом страном, полови и трећу страну.

Ове две теореме могу се извести непосредно из сличних правила о трапезу у чл. 57, 1 и 2, сматрајући троугао као трапез коме је мања паралелна страна сведена на тачку.

3. Кад се једна троуглова страна подели на неколико једнаких делова, па се кроз сваку раздеону

тачку повуче по једна паралелна с другом страном, онда ће бити подељена и трећа страна на толико исто једнаких делова (сл. 36).

Претпоставка. $AM = MN = NO = OP = PC$ и $MQ \| NR \| OS \| PT \| CB$.

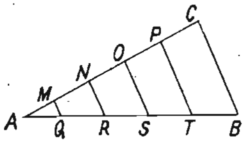
Доказати, да је $AQ = QR = RS = ST = TB$.

Доказ. $AQ = QR$ (по тач. 2.), а $QR = RS = ST = TB$ (по чл. 57, 2).

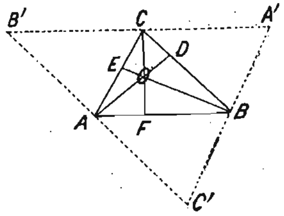
60. Теорема. Све три висине троуглове секу се у истој тачки. (Трећа значајна тачка у троуглу).

Доказ. Нека је у троуглу ABC (сл. 37) $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$.

Кад се повуку кроз A, B, C паралелне са странама BC, AC, AB, добија се троугао $A'B'C'$. Како је $AB' = BC = AC'$ то је A средина стране $B'C'$. Исто тако излази, да је тачка B средина стране $A'C'$, а C средина стране $A'B'$. Према томе су AD BE и CF висине у троуглу ABC, а симетрале страна у троуглу $A'B'C'$, па се с тога морају сећи у једној тачки.



Сл. 36.



Сл. 37.

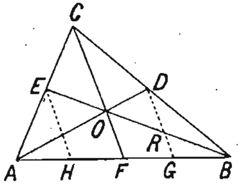
Где се секу висине *a)* оштроуглог, *b)* правоуглог, *c)* тупоуглог троугла?

Ова теорема била је позната још у старом веку, али је овај доказ дао Гаус. Гаус је рођен 1777 у Брауншвајгу, био је професор универзитета и директор опсерваторије у Гетингену, где је 1855 умро. Његови радови на пољу математике, физике, астрономије и геодезије имају трајне вредности.

61. Све три средње линије у троуглу, тј. дужи, које везују темена са срединама супротних страна, секу се у **једној** тачки, која дели сваку средњу линију тако, да је део до темена два пута већа од оног другог дела. (Четврта значајна тачка у троуглу)

Доказ. Нека су (сл. 38) D, E и F средине страна BC, AC и AB; O нека је пресек средњих линија BE и CF (чл. 24, *d*).

Кад се повуче DG и EH паралелно са CF, онда ће бити преполовљено BF и AF (по чл. 59,2). Према томе је $BG = GF = FH$, с тога (по чл. 59, 3) и $BR = RO = OE$, дакле $BO = 2OE$. Дакле, једна средња линија CF дели другу средњу линију BE у тачки O тако, да је одељак до темена B два пута већи од оног другог одсека. Кад се повуче и трећа средња линија AD, онда мора и она поделити линију BE на иста два дела, те с тога мора и она проћи кроз O.



Сл. 38.

Тачка O, у којој се секу све три средње линије каквог троугла, зове се тежиште троуглово.

2. За вежбање.

62. 1. У сваком конвексном четвороуглу збир обе дијагонале већи је од збира двеју супротних страна.

2. Средња линија у троуглу мања је од полузбира оних двеју страна, с којима се сече у истом темену.

3. Збир свих средњих линија у троуглу већи је од три четвртине његова обима.

4. Пресек паралелограмових дијагонала средина је свакој дужи, која пролази кроз тај пресек, а крајње су јој тачке на двема супротним странама.

5. Пресек ромбових дијагонала једнако је удаљен од свих страна његових.

6. Дијагонале равнокрака трапеза једнаке су.

7. Трапез с једнаким дијагоналама мора бити равнокрак.

8. Из буди које тачке на основици равнокрака троугла повучене паралелне с његовим крацима имају сталан збир.

9. Дијагонале у ромба симетрале су угловима између нормала̂, спуштених на стране из пресека обе дијагонале.

10. Кад се преполове све стране каква паралелограма, па се те средине вежу, добија се опет паралелограм (чл. 59, 1).

Ако је први паралелограм ромб, други је правоугаоник; ако је први правоугаоник, други је ромб; ако је први квадрат, и други је квадрат.

11. Средине стра́на̂ у равнокрака трапеза темена су равнострана паралелограма.

12. Кад се из једне тачке на основици равнокрака троугла повуку нормале на краке, онда је збир тих двеју нормала једнак с висином која одговара краку.

13. Симетрале унутрашњих углова (исто тако и спољашњих) каква паралелограма граде правоугаоник.

14. Праве, које везују средине двеју супротних страна каква паралелограма с крајњим тачкама једне дијагонале, деле другу дијагоналу на три једнака дела.

15. Праве, које полове углове између дијагонала у ромба, секу његове стране у тачкама које — кад се вежу — дају квадрат.

16. Кад се преполове стране каквог било четвороугла, па се те средине редом саставе, онда се добија паралелограм.

17. Кад се у каквом трапезоиду средине двеју супротних страна саставе са срединама његових дијагонала, онда се добија паралелограм.

18. Збир раздаљи́на̂ троуглових темена од произвољне праве једнак је са збиром раздаљи́на̂ све три средине његових страна од исте праве.

19. Кад се кроз тежиште једног троугла повуче права у којем било правцу, па се из његових теме́на̂ повуку нормале на ту праву, онда је збир двеју нормала на једној страни те праве једнак с нормалом на другој страни.

20. Кад се из теме́на̂ и тежишта једног троугла повуку нормале на какву праву, онда је збир нормала из теме́на̂ три пута већа од нормале из тежишта.

21. Средња линија у правоуглом троуглу, повучена из темена правог угла, једнака је с половином хипотенузе.

22. Ако је у троуглу једна средња линија половина оне стране, коју полови, онда је тај троугао правоугли.

23. У правоуглом је троуглу симетрала правог угла у исто доба симетрала углу између висине и средње линије, повучене из темена правог угла.

24. Ако стране једног паралелограма пролазе кроз темена другог паралелограма, онда им се дијагонале секу у истој тачки.

25. Из теме́на̂ једног квадрата пренесена је на његове стране једна иста дуж, идући у истом смислу по његову обиму; кад се тако добивене тачке вежу, добија се опет квадрат.

26. Из два супротна темена једног квадрата пренесена је иста дуж на стране које се у тим теменима секу; докажи, да су тако добивене тачке темена једног правоугаоника.

27. Повлачећи у правоугаонику паралелне с једном дијагоналом, а у једнаким раздаљинама с једне и друге стране те дијагонале, добијамо на његовим странама темена паралелограма сталног обима.

28. Кроз једно теме каква паралелограма повучена је произвољна права, па су из остала три темена повучене нормале до те праве; докажи, да је средња нормала једнака са збиром или разликом оне друге две нормале (Varignon).

29. Збир или разлика двеју нормала, повучених из произвољне тачке на две узастопне стране каква ромба, једнак је са збиром или разликом норма́ла̂ повучених из исте тачке на оне друге две стране.

30. У сваком је трапезу разлика паралелних страна мања од збира обе непаралелне стране, а свака од непаралелних страна мања је од оне друге непаралелне стране повећане разликом паралелних страна.

31. Два су трапеза подударна, кад су паралелне стране једног једнаке с паралелним странама другога, и непаралелне стране једног једнаке с непаралелним странама другог трапеза.

32. Дијагонале у трапеза захватају на његовој средњој линији дуж, која је једнака с полуразликом паралелних страна.

33. Ако се симетрале углова на већој основици каква трапеза секу на мањој основици, онда је мања основица једнака са збиром непаралелних страна.

34. У сваком трапезоиду праве, које везују средине супротних страна, и права која везује средине обе дијагонале, секу се у истој тачки.

35. Угао између симетрала два оближња унутрашња угла у каквом трапезоиду једнак је с полузбиром она друга два угла; угао између симетрала два спољашња угла на једној страни једнак је с полузбиром углова на истој страни.

36. Оштри угао између симетрала два супротна угла у трапезоиду једнак је с полуразликом она друга два угла.

37. Симетрале свих углова у трапезоиду граде нов трапезоид, у којем су супротни угли суплементни.

38. Збир раздаљи́на̂ сва четири темена каква трапезоида од произвољне праве већи је четири пута од раздаљине исте праве од оне тачке, у којој се секу праве што везују средине супротних страна.

39. У датоме квадрату упиши најмањи квадрат.

40. У углу MON дате су две тачке A и B, нађи на OM тачку C, а на ON тачку D, тако да збир $AC + CD + DB$ буде минимум.

III. Многоугао.

63. Део равни, ограничен са више дужи, назива се многоугао или полигон.

Многоугао има колико стра́на̂, толико и углова, толико и теме́на̂. Посматраћемо само многоугле с издубеним угловима.

Према броју страна имамо: тростране многоугле или троугле, четворостране или четвороугле, петостране или петоугле, ...n-стране или n-угле.

64. Дуж, која везује два неузастопна темена какве многоугла, зове се дијагонала.

Врло лако могу се доказати ова правила:

1. Из сваког темена n-страна многоугла могу се повући $(n—3)$ дијагонале.

2. У n—страном многоуглу има свега дијагонала: $\frac{n\,(n—3)}{2}$

3. Сваки n-страни многоугао може се, дијагоналама из једног темена, поделити на $(n—2)$ троугла.

65. Теорема. Збир свију углова у каквом многоуглу износи онолико пута по $2R$, колико казује за 2 умањени број његових страна.

Доказ. Кад поделимо n-страни многоугао, дијагоналама из једног темена, на $(n—2)$ троугла, онда збир свију њихових углова износи $(n—2).\ 2R$, а то је и збир полигонских углова.

Ова теорема могла би се доказати и на други начин, кад би се из једне тачке у многоуглу повукле дужи ка свима теменима.

66. Два су многоугла подударна, кад су све стране и сви углови једног многоугла по реду једнаки са странама и угловима другог троугла.

Теореме. 1. Кад се два многоугла, дијагоналама које су повучене у једном многоуглу исто онако као и у другом, могу поделити на троугле тако, да су троугли једног многоугла по реду подударни с троуглима другог многоугла, онда су подударни и сами многоугли.

Доказ. Кад се подударни троугли редом положе једни на друге, онда ће се поклопити и темена оба полигона; они су, дакле, подударни.

2. Обрнуто: Кад су два многоугла подударна, онда се они могу дијагоналама, које су повучене у једном многоуглу исто онако као и у другом, поделити на троугле тако, да су троугли једног многоугла по реду подударни с троуглима другог многоугла.

Доказ. Кад положимо два подударна многоугла један на други тако, да им се поклапају темена која одговарају једна другима, онда ће се поклопити и дијагонале које одговарају једне другима; према томе се поклапају и троугли једнаких положаја.

67. Број комада који одређују многоугао.

За троугао су потребна у опште три комада. За правоугли и равнокраки троугао тај се број своди на 2, за равнострани на 1.

Колики сме највише бити број датих углова у тим случајевима?

Како се паралелограм једном дијагоналом дели на два подударна троугла, то је он одређен у опште са три комада. За правоугаоник и ромб тај се број своди на 2, за квадрат на 1.

За трапез је довољно у опште четири комада. За један од она два троугла, који постају кад се у трапезу повуче једна дијагонала, потребна су три комада; за онај други троугао потребан је само још један комад; код равнокрака трапеза није потребан ни тај један комад. Сличним начином дознајемо, да је трапезоид одређен кад се знају пет комада.

Колико је комада потребно за делтоид?

Из чл. 66 излази, да је за подударност два n-страна многоугла потребна једнакост од $2n—3$ комада. С тога је n-страни многоугао у опште одређен са $2n—3$ комада; она три непозната комада не смеју бити саме стране. Јер, од углова може бити дат $n—1$ угао, а тиме је одређен и последњи; морају, дакле, бити дате најмање још $2n - 3 - n + 1 = n - 2$ стране; од n страна могу, према томе, изостати највише две.

68. Полигон, који има све стране и све углове једнаке, назива се правилан. Међу троуглима је равнострани троугао, а међу четвороуглима је квадрат правилан.

Сваки је угао правилног n-страног многоугла $2R - \frac{4R}{n}$ (члан 65).

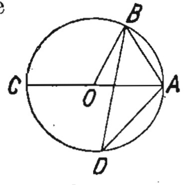
IV. Круг.

1. О кругу у опште.

69. Кад се у једној равни дуж OA (сл. 39) обрће око једне своје крајње тачке O, док не дође у свој првобитни положај, онда тачка A описује при том обртању криву линију која се зове кружна линија или круг. Тачка O зове се средиште *(centrum)* круга.

Све тачке на кружној линији једнако су удаљене од средишта. Та стална раздаљина назива се кружни полупречник *(radius)*. Сви полупречници једног круга једнаки су.

Сваки део кружне линије зове се лу̂к *(arcus)*, а цела кружна линија зове се периферија.



Сл. 39.

Дуж AB, која везује две тачке на периферији, зове се тетива *(chorda)*. Кад тетива пролази кроз средиште, као AC, онда се она зове пречник *(diameter)*. Сваки је пречник два пута већи од полупречника истог круга.

Угао AOB, чије је теме у средишту, па су му према томе краци два полупречника, зове се средишни угао.

Део кружне површине, који је ограничен тетивом и луком који јој припада, зове се кружни одсечак или сегмент. Део кружне површине, који ограничавају два полупречника и лук који лежи између њих, зове се кружни исечак или сектор.

Свакој тетиви припадају два средишна угла, два лука, два одсечка и два исечка, који у опште нису једнаки. Ну кад се нарочито не каже, онда се увек подразумева издубени средишни угао, за тим онај лук који је мањи од полу-периферије, и онај одсечак или исечак, који је мањи од половине кружне површине.

70. Средишна симетрија.

Две тачке A и A' налазе се, с погледом на тачку O, у положају средишне симетрије, ако је дуж AA' тачком O преполовљена. Слика се зове центрична, ако постоји једна тачка према којој су две и две тачке те слике центричне.

Центричне су слике ове:

1. Неограничена права. Свака њена тачка може се сматрати као центар.
2. Дуж. Средиште је симетрије њена средина.
3. Две дужи које се узајамно полове. Њихов је пресек средиште.
4. Сваки паралелограм. Пресек дијагонала средиште је.
5. Круг.

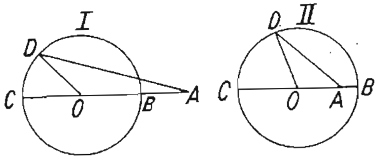
71. Положај тачке према кругу зависи од њене централне (или средишне) раздаљине, тј. раздаљине од средишта.

Тачка лежи **ван** круга, или **на** његовој периферији, или **у кругу,** како јој је кад централна раздаљина већа од полупречника, једнака с њим, или мања од полупречника.

Ови односи, који излазе непосредно из дефиниције о кругу у чл. 69., вреде и обрнуто.

Два круга с једнаким полупречницима подударна су.

72. Теорема. Између свију дужи, које се могу повући од неке тачке до кружне периферије, *a)* највећа је она, на којој је кружно средиште, а *b)* најмања је она, чиј продужак пролази кроз средиште.



Сл. 40.

Доказ. Нека је A дата тачка (сл. 40). Кад повучемо из A праву кроз средиште O, која сече круг у B и C, за тим коју било дуж AD до периферије, онда је

a) $AD < DO + AO$, тј. $AD < AC$;

b) $AD > AO - DO$ (у сл. I), или $AD > DO - AO$ (у сл. II) тј. $AD > AB$.

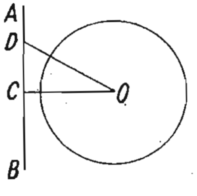
2. Праве и углови код круга.

73. Положај праве према кругу зависи од њене централне (средишне) раздаљине, тј. њене раздаљине од кружна средишта.

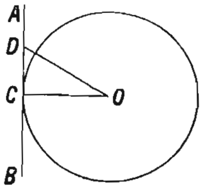
Теорема. Права и круг могу *a)* немати ни једне, или *b)* имати једну, или *c)* две заједничке тачке, како је кад њена централна раздаљина већа од полупречника, једнака с њим, или мања од полупречника.

Доказ. *a)* Кад је (сл. 41, I) нормала OC од средишта до праве AB већа од полупречника, онда је већ сама њена подножна тачка C изван круга, с тога тим пре и свака друга тачка D на правој AB ван круга, јер је $OD > OC$.

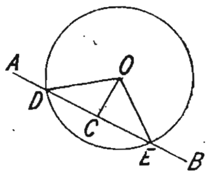
b) Ако је (сл. 41, II) нормала OC од O до AB једнака с полупречником, онда је њена подножна тачка C на периферији круга, а свака друга тако D на правој AB мора бити ван круга, јер је $OD > OC$.



Сл. 41, I.



Сл. 41, II.



Сл. 41, III.

c) Ако је, напослетку, нормала OC (сл. 41, III) од O до AB мања од полупречника, онда је њена подножна тачка у кругу; како је круг затворена слика, то мора неограничена права AB, да би изашла из његове унутрашњости, сећи периферију с обе стране тачке C, у тачкама D и E. Тада је $OD = OE =$ полупречнику. Права не може имати с кругом и неку трећу заједничку тачку, јер се од тачке O до праве AB могу повући само две једнаке дужи (чл. 35, посл.).

74. Кад права AB (сл. 41, II) има с кружном линијом само једну заједничку тачку, а све друге њене тачке леже изван круга, онда се каже: права и круг додирују се у тој тачки; таква се права назива тангента (дирка), а тачка, заједничка тангенти и кругу, назива се додирна тачка.

Кад права AB (сл. 41, III) има с кружном линијом две заједничке тачке, онда се каже: права сече круг у тим тачкама; таква се права назива сечица (секанта). Дуж DE на сечици, ограничена њеним пресецима с кругом, тетива је.

Тетиве у кругу.

75. Теореме. 1. Права, повучена из средишта каква круга ка средини једне тетиве, симетрала је и тој тетиви и њеном средишном углу.

2. Из средишта каква круга спуштена нормала на једну тетиву симетрала је и тетиви и њеном средишном углу.

3. Симетрала сваке тетиве пролази кроз средиште круга и полови средишни угао који одговара тој тетиви. Отуд излази, да је круг симетрична слика, и да му је сваки пречник симетрала.

Ове три теореме излазе непосредно из правила 1, 2 и 4 у члану 46.

76. Теорема. Три тачке A, B и C, које не леже на једној правој, потпуно одређују круг.

Доказ. Средишта свију кругова, који пролазе кроз тачке A и B, леже на симетрали дужи AB (чл. 75, 3); средишта свију кругова, који пролазе кроз A и C, леже на симетрали дужи AC. Према томе средиште оног круга, који пролази кроз све три тачке, мора бити она тачка O, у којој се секу те две симетрале (чл. 25, 5); његов је полупречник $OA = OB = OC$.

Како се те две симетрале могу сећи само у једној тачки O, то се може нацртати само један круг тако, да пролази кроз три тачке A, B и C.

77. Теореме.

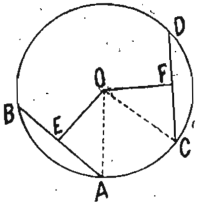
1. Једнаке тетиве једног круга имају и централне раздаљине једнаке.
2. Већа тетива има мању централну раздаљину.
3. Једнаким централним раздаљинама одговарају и тетиве једнаке.
4. Већој централној раздаљини одговара мања тетива.

Доказ. 1. теор. Ако је (сл. 42) $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, па повучемо још OA и OC, онда је $\triangle OAE \cong COF$, с тога $OE = OF$.

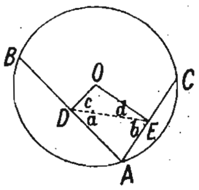
Доказ. 2. теор. Нека је (сл. 43) $AB > AC$, $OD \perp AB$ и $OE \perp AC$; кад се повуче DE, онда је у троуглу ADE угао $b > a$, с тога $d < c$, дакле и $OD < OE$.

Доказ 3. теорем. Нека је (слика 42) $OE = OF$. Тада је $AEO \cong CFO$, с тога $AE = CF$, дакле и $AB = CD$.

Доказ 4. теор. Нека је (сл. 43) $OD < OE$, дакле $d < c$, онда је угао $b > a$, с тога $AD > AE$ и $AB > AC$.



Сл. 42.



Сл. 43.

Последица. Пречник је највећа тетива.

78. Теореме. 1. Једнаким средишним угловима једног круга припадају једнаке тетиве и једнаки луци.

2. Једнаким тетивама једног круга припадају једнаки средишни углови и једнаки луци.

3. Једнаким луцима једног круга припадају једнаке тетиве и једнаки средишни углови.

Ова се правила доказују поклапањем.

79. Кад се кружна периферија подели на 360 једнаких делова, онда сваком делу одговара по један средишни угао од једног степена. С тога се и 360-ти део кружне периферије назива степен (лучни степен); степен (°) се дели на 60 лучних минута ('), а сваки минут на 60 лучних секунада ("). Како једнаким луцима једног круга припадају једнаки средишни углови, то број степена, минута и секунада каква кружна лука казује уједно и број степена, минута и секунада средишног угла који одговара том луку. У том смислу каже се, да је кружни лук мера свом средишном углу, и ако су угао и лук разнородне количине.

Подела круга на 360 делова била је позната још у старом Вавилону.

Тангенте круга.

80. Теореме. 1. Права, која у крајњој тачки једног полупречника стоји на њему нормално, додирује круг у тој тачки (излази из чл. 73, b.).

2. Полупречник, повучен ка додирној тачки, стоји на дирци нормално, јер је он најкраћа дуж од средишта до тангенте.

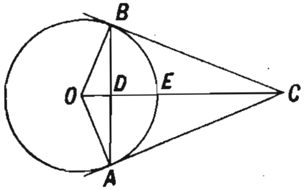
3. Из средишта повучена нормала на тангенту пролази кроз додирну тачку.

4. Права, која у додирној тачки стоји нормално на тангенти, пролази кроз средиште круга.

Индиректно доказује се, да вреде и обрнуте теореме 3. и 4.

81. Теореме. *a)* Тангенте једног круга, повучене из исте тачке ван круга, једнаке су.

Доказ. Нека су (сл. 44) AC и BC дирке кругу O, дакле $AC \perp OA$ и $BC \perp OB$. Кад се повуче дуж CO, онда је $\triangle OAC \cong OBC$, с тога $AC = BC$.



Сл. 44.

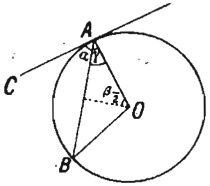
Тетива AB између додирних тачака круга и тангената AC и BC зове се додирна тетива.

b) Права, повучена од пресека двеју тангената једног круга до његова средишта, полови 1. угао између самих тангената и угао између два полупречника, повучених ка додирним тачкама, 2. лук између додирних тачака, 3. додирну тетиву и стоји на њој нормално.

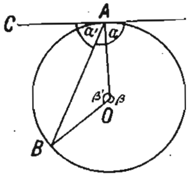
c) Угао двеју тангената једног круга суплеменат је углу који захватају полупречници, повучени ка додирним тачкама.

Периферијски углови.

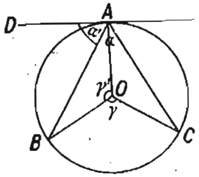
82. Угао, чије је теме на периферији, зове се периферијски угао, ако су му краци тетиве (сл. 39), или му је један крак тетива, а други дирка. Као лук, који припада средишном или периферијском углу, означује се лук између његових кракова.



Сл. 45, *a*.



Сл. 45, *b*.



Сл. 45, *c*.

83. Теорема. Периферијски угао половина је средишног угла на истоме луку.

1. Нека је један крак периферијског угла тетива, а други дирка.

a) Периферијски угао нека је оштар (сл. 45, *a*).

Тада је угао $\alpha = \frac{\beta}{2}$ као комплементи истог угла γ.

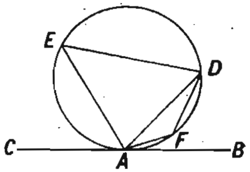
b) Периферијски угао нека је туп. (слика 45, *b*). Угао $\alpha = 2R - \alpha' = 2R - \frac{\beta'}{2} = \frac{4R - \beta'}{2} = \frac{\beta}{2}$.

2. Нека су оба крака периферијског угла тетиве (сл. 45 *c*).

По прав. 1. је $\alpha + \alpha' = \frac{\gamma + \gamma'}{2}$; како је $\alpha' = \frac{\gamma'}{2}$, то је $\alpha = \frac{\gamma}{2}$.

Последице. *a)* Периферијски углови на истом луку једнаки су, јер је сваки на по се једнак с половином средишног угла на истом луку.

b) Угао између дирке и тетиве, повучене кроз додирну тачку, једнак је с периферијским углом над истом тетивом у супротном кружном одсечку. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle AED$ и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle AFD$ (сл. 46).



Сл. 46.

c) У једном истом кругу припадају једнаким периферијским углима и једнаки луци (обр. прав. *a*).

d) Два периферијска угла над истом тетивом, али у супротним кружним одсечцима, допуњују се до $2R$, јер збир њихових средишних углова износи $4R$.

e) Угао у полукругу, тј. периферијски угао, чији краци пролазе кроз крајње тачке једног пречника, прав је, јер средишни угао над истим луком има 180°.

3. У кругу уписани и око круга описани троугли и четвороугли.

84. Полигон, чија су темена на периферији једног круга, па су према томе његове стране тетиве у том кругу, назива се у кругу уписан полигон; круг је тада око полигона описан.

Полигон, чије су стране дирке, зове се око круга описан, а круг је у полигону уписан.

У кругу уписан полигон зове се и тетивни полигон, а око круга описан многоугао назива се тангентни полигон.

85. Теорема.

1. **Око сваког троугла може се описати круг.**

Доказ. Симетрале троуглових страна (сл. 29) секу се у једној тачки O, која је једнако удаљена од свих темена његових (чл. 47, 1). Ако дакле том раздаљином AO опишемо круг око тачке O, он ће проћи кроз сва три троуглова темена.

2. **У сваком троуглу може се уписати круг.**

Доказ. Симетрале троуглових углова (сл. 30) секу се у једној тачки O, која је једнако удаљена од свих страна његових (чл. 47, 2). Ако дакле том раздаљином OD опишемо круг око тачке O, он ће додиривати све троуглове стране.

Додаци. *a)* Како се у равностраном троуглу поклапају симетрале страна са симетралама углова, то се поклапају и средишта уписаног и описаног круга. Како су симетрале страна и симетрале углова уједно и висине и средње линије, то имамо правило:

У равностраном је троуглу полупречник уписаног круга $\frac{1}{3}$, а полупречник описаног круга $\frac{2}{3}$ од висине.

b) Средиште круга, описанога око троугла, налази се код оштроуглог троугла у троуглу, а код тупоуглог изван троугла; код правоуглог је троугла средиште описаног круга у средишту хипотенузе. (чл. 83, и последица *e*).

c) Из додатка к чл. 47, 2 излази, да осим круга, о ком се говори у тачки под 2., има још три круга, од којих сваки додирује по једну троуглову страну и продушке других двеју страна. Та три круга називају се спољашњи додирни кругови, а онај први круг зове се унутрашњи додирни круг.

86. Теореме.

1. **У сваком тетивном четвороуглу једнаки су збирови по два супротна угла; сваки такав збир чини $2R$.**

Излази из чл. 83, *d*.

2. **У сваком тангентном четвороуглу једнаки су збирови по две супротне стране.**

Излази из чл. 81, *a*.

87. Обрнуте теореме.

1. **Четвороугао, у коме су збирови по два супротна угла једнаки, мора бити тетивни четвороугао.**

2. **Четвороугао, који има саме издубене углове, па су му збирови по две супротне стране једнаки, мора бити тангентни четвороугао.**

Доказ индиректан. Кад круг, описан кроз A, B и C, не би пролазио и кроз четврту тачку D, онда би он морао сећи страну CD или њен продужак у једној тачки D', која би са тачкама A, B и C одређивала тетивни четвороугао. Ну тада би изашло, да је у троуглу ADD' један спољашњи угао једнак с једним унутрашњим супротним углом, а то не може бити.

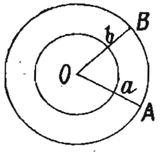
Доказ индиректан. Кад круг, који додирује три стране четвороуглове, не би додиривао и четврту страну, онда би се из једне крајње тачке ове четврте стране могла повући кругу тангента, чиме би се добио тангентни четвороугао. Ну тада би изашло, да је једна страна троуглова једнака са разликом других двеју страна његових, а то не може бити.

Који четвороугли могу бити *a)* тетивни, *b)* тангентни? Где су средишта тих кругова?

4. Узајамни положај два круга.

88. Два круга, који имају исто средиште, називају се концентрични (сл. 47).

Површина између периферијâ два концентрична круга назива се кружни прстен, а један његов део, као што је $aABb$, назива се исечак из прстена. Разлика aA између оба полупречника назива се ширина прстена или његова исечка.



Сл. 47.

89. Два круга, који немају исто средиште, називају се ексцентрични; зрак, који пролази кроз њихова средишта, зове се централа; дуж, која везује средишта, зове се централна раздаљина. Два ексцентрична круга могу имати једну или две заједничке тачке, или немају ни једне. Два круга не могу имати три заједничке тачке, јер би се тада поклапали (по чл. 76).

Кад два круга имају само једну заједничку тачку, онда се они додирују, и то споља кад је један круг ван другога, а изнутра кад је један круг у другоме. Кад два круга имају две заједничке тачке, онда се они секу у тим тачкама. Њихова заједничка површина зове се сочиво, а незаједнички делови њихови називају се месеци (lunulae).

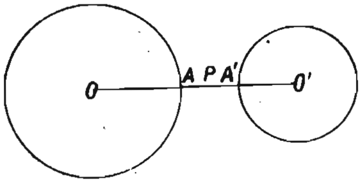
Углом, под којим се два круга секу, назива се угао између тангената, повучених кроз заједничку тачку.

90. Како је сваки пречник симетрала кругу, то су и два ексцентрична круга централом подељена на две симетричне половине. Ако имају само једну заједничку тачку, онда она мора, према томе, лежати на централи. Како је та тачка заједничка крајња тачка два полупречника, то имају оба круга у тој тачки једну заједничку тангенту, нормалну на централи. Ако два ексцентрична круга имају једну заједничку тачку изван централе, онда они морају имати још једну заједничку тачку која, с погледом на централу, има симетричан положај наспрам прве. Централа је симетрала заједничкој тетиви, средишним угловима и луцима који одговарају тој тетиви.

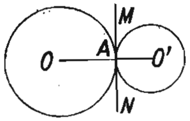
91. Два ексцентрична круга могу имати овакве положаје:

1. Један се круг налази изван другога, (слика 48.). Ако је c централна раздаљина, R и r полупречници, онда је $c > R + r$. Јер, ако је P изван оба круга, онда је $PO > R$, $PO' > r$, с тога $OO' > R + r$.

2. Кругови се додирују с поља (сл. 49); тада је $c = R + r$.



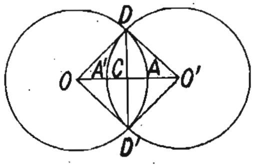
Сл. 48.



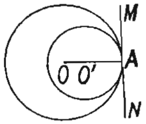
Сл. 49.

3. Кругови се секу. (сл. 50.). Тада је $R + r > c > R - r$ (чл. 34., 1. и 2.).

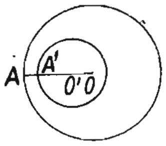
4. Кругови се додирују изнутра (сл. 51.). Тада је $c = R - r$.



Сл. 50.



Сл. 51.



Сл. 52.

5. Мањи је круг у већем (сл. 52.). Како је $OA' < R$ (чл. 72.) и $O'A' = r$, то је $OA' - O'A' < R - r$ или $c < R -- r$.

Како су у овим пет правила обухваћени сви могућни случајеви о односу између централне раздаљине и збира или разлике полупречника оба круга, а ти се случајеви узајамно искључују, то се даје индиректно доказити да су тачна и обр. правила.

5. За вежбање.

92. 1. Кад се два круга не секу, онда је њихова најкраћа раздаљина на њиховој централи; исто тако је највећа раздаљина двеју тачака на периферијама два круга на њиховој централи.

2. Између свих тетива, које се могу повући кроз једну тачку у кругу, најмања је она, која стоји нормално на полупречнику повученом кроз ту тачку (чл. 77, 4).

3. Две тетиве, које не пролазе кроз средиште круга, не могу се узајамно половити.

4. Кружни лукови између паралелних тетива једнаки су.

Доказује се једнакошћу наизменичних углова и на осн. чл. 83, с.

5. Кад су на кругу два лука једнака, онда су њихове крајње тачке темена равнокрака трапеза.

6. Крајње тачке двеју једнаких и паралелних тетива темена су једног правоугаоника.

7. Пречник, повучен ка додирној тачки једне дирке, полови све тетиве које су с дирком паралелне.

8. Кад се кроз крајње тачке једног пречника повуку две паралелне тетиве, онда су оне једнаке; а права, која везује њихове крајње тачке, пречник је.

9. Две су тетиве једнаке, ако су једнако нагнуте према пречнику који пролази кроз њихов пресек.

10. Две једнаке тетиве истог круга, које се секу, дијагонале су равнокрака трапеза.

11. Две једнаке тетиве истог круга и лукови над њима одсецају једнаке дужи на свакој сечици паралелној с правом која везује средине тих тетива.

12. Дирке у теменима правоугаоника, који је у кругу уписан, граде ромб (чл. 81).

13. Дирка у средини какваа лука паралелна је с тетивом тога лука.

14. У сваком тетивном многоуглу с парним бројем страна мора бити

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdot \cdot \cdot \cdot = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \cdot \cdot \cdot$$

где α_n означује n-ти угао многоугла.

Треба повући полупречнике к теменима, па применити чл. 83.

15. У сваком тангентном многоуглу с парним бројем страна мора бити

$$s_1 + s_3 + s_5 + \cdot \cdot \cdot \cdot = s_2 + s_4 + s_6 + \cdot \cdot \cdot$$

где s_n означује n-ту страну многоугла.

16. Кад се два круга секу, па се из њихових средишта спусте нормале на заједничку им сечицу која пролази кроз један њихов пресек,

онда је раздаљина између тих нормала једнака с полузбиром или с полуразликом двеју тетива на тој сечици.

17. Најдужа заједничка сечица, која се може повући кроз пресек два круга, паралелна је с њиховом централом.

18. Кад су два круга концентрична, онда су дирке мањег круга једнаке тетиве већега круга.

19. Кад се два круга додирују, па се кроз додирну тачку повуче заједничка сечица, онда она одсеца на тим круговима лукове који имају једнак број степена.

20. Кад се два круга додирују, па се кроз додирну тачку повуку две сечице, онда њихове крајње тачке одређују две паралелне тетиве.

21. Три круга, од којих сваки пролази кроз једно теме каквог троугла, тако да се два и два секу на странама тог троугла, морају имати једну заједничку тачку (чл. 86 и 87.)

22. Три круга, описана око темена̂ једног троугла а кроз оближње додирне тачке уписаног круга, додирују се по два и два.

23. Свака сечица, повучена кроз пресек два круга, одређује на њима два лука на истој страни сечице, чији је збир степена константан.

24. Кад се два круга секу, па се кроз један њихов пресек повуче у сваком кругу по један пречник, онда је права, која везује крајње тачке тих пречника, два пута већа од средишне раздаљине и пролази кроз онај други пресек оба круга.

25. Праве које везују пресек два круга с крајњим тачкама сечице повучене кроз други пресек тих кругова, захватају угао константне величине.

26. Дирке у крајњим тачкама једне сечице, која је повучена кроз пресек два круга, захватају угао сталне величине.

27. Тетиве, које везују крајње тачке двеју сечица повучених кроз пресек два круга, секу се под сталним углом.

28. Два се круга додирују изнутра у тачки A, кроз коју је повучен пречник AB великог круга; из тачке B повучена је дирка BCD, која додирује мањи круг у C, а сече већи у D; докажи да је AC симетрала углу BAD.

29. У истом кругу налазе се два једнака угла, један средишњи, а други периферијски. Тетиве, које одговарају тим угловима, могу бити једнаке само тада, кад је сваки од та два угла $\frac{4}{3}$ од правог угла.

30. Сваки паралелограм, уписан у кругу, мора бити правоугаоник; његове су дијагонале два пречника.

31. Сви кругови, који пролазе кроз два темена троуглова, секу две стране тог троугла тако да се добивају паралелне тетиве.

32. Кад се над истом основицом конструишу разни троуглови с једнаким угловима наспрам основице, па се из крајњих тачака те основице спусте нормале на супротне стране, онда права, која везује подножја тих нормала, има сталну дужину.

33. Висине једног троугла уједно су угаоне симетрале другог троугла, чија су темена у подножју висина̂ првог троугла.

34. Кругови, описани кроз два троуглова темена и пресек његових висина, једнаки су с кругом, описаним око истог троугла. (Carnot 1801).

35. Кроз дату тачку повуци сечицу датом кругу, тако да комад сечице у кругу има прописану дужину (зад. 18).

V. Конструктивни задаци.

93. Решити геометријски конструктивни задатак (чл. 6) значи наћи геометријски облик који ће испунити дане погодбе. Изналажење тог облика зове се конструкција, а резултат те конструкције назива се слика (фигура). Сваки конструктивни задатак тражи решење т.ј. треба показати и доказати поступак, којим се извршује конструкција тражене слике.

Задатак је одређен, кад је у њему дато онолико погодаба, које не зависе једне од других, колико је довољно, али и потребно за одређивање тражених комада; задатак, у коме је мање погодаба, назива се неодређен; задатак, у коме има више погодаба но што је потребно, зове се преодређен; такав је на пр. задатак: да се конструише троугао из једне стране и сва три угла. Одређен задатак може имати једно једино решење, или више решења којима се тачно може одредити број, па се према томе зове једнозначно или вишезначно одређен. Неодређен задатак има безбројно много решења. Преодређен задатак у опште се не може решити, јер дати комади стоје обично у супротности с особинама тражене слике.

Конструктивни задатак ваља сматрати као решен, чим је сведен на задатке чија се решења морају претпоставити као позната и који се с тога називају основне конструкције.

Основне конструкције планиметријске јесу:

1. Кроз две тачке повући праву, буди које дужине.
2. Око дане тачке описати круг даним полупречником.

За стварно извршење ових задатака служи врстар и шестар.

94. Решење каква задатка налази се по неки пут као непосредна последица какве геометријске теореме, али се највише оснива на вези више теорема. Размишљање, којим се налази поступак за конструкцију тражене слике, назива се анализа.

Из анализе изводи се конструкција, као и доказ којим се на основу математичких истина потврђује тачност конструкције.

За доказом долази често детерминација т.ј. претрес, под каквим је погодбама решење могућно, и да ли задатак има само једно, или више решења.

Према томе потпуно решење каквог геометријског конструктивног задатка има у опште ова четири дела: анализу, конструкцију, доказ и детерминацију.

Анализа се служи разним методама, од којих су особито важне ове: метода геометријских места, метода помоћних слика, метода сличних слика и алгебарска анализа.

О овим двема последњим методама моћи ћемо говорити тек доцније.

1. Основни задаци.

95. Они конструктивни задаци, који се као најпростији најчешће примењују и чије се решење код сложених задатака сматра као познато, називају се основни задаци.

1. Конструисати троугао, кад су дате све три стране његове, a, b и c.

Троуглова темена бележе се обично словима A, B и C, углови код тих темена грчким словима α, β и γ, а супротне стране словима a, b и c.

Анализа. Страном a одређена су два темена B и C троугла ABC. Да би треће теме A имало од темена C раздаљину b, оно мора бити на кругу описаном око C полупречником b; а да би A имало од B раздаљину c, оно мора бити и на кругу описаном око B полупречноком c; према томе тачка A може бити само у пресеку оба круга.

Конструкција излази из саме анализе.

Доказ је непосредно у конструкцији.

Детерминација. Стране a и b произвољне су, за c вреди погодба: $a + b > c > a - b$ (чл. 34, 1. и 2.).

Као особите случајеве имамо ове задатке:

a) Конструисати равнокрак троугао, кад је дата основица и крак. (Детерминација?)

b) Конструисати равностран троугао, кад је дата његова страна.

2. Конструисати троугао који је подударан с каквим датим троуглом.

Конструише се помоћу три стране данога троугла по зад. 1.

3. Дани угао пренети на дану праву код дате тачке.

Решење. Из темена датог угла треба на његове краке пренети две једнаке дужи, па саставити њихове крајње тачке једном дужи; тако се добија равнокрак троугао; за тим се конструише њему подударан троугао (по зад. 2) тако, да теме новог троугла падне на дану тачку, а један крак на дату праву.

За конструкцију није потребно да се цртају основице оба равнокрака троугла.

4. Конструисати троугао, кад је дата једна страна и два угла на њој.

На дату страну, на пр. a, треба код њених крајњих тачака пренети дате углове β и γ; тачка A, у којој се секу краци тих углова, треће је теме траженог троугла.

Доказ је у конструкцији.

Детерминација. Троугао је могућан само тада, кад је $\beta + \gamma < 2R$.

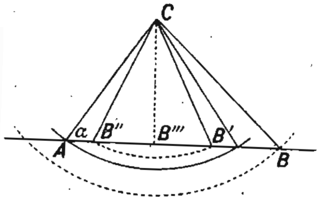
5. Конструисати троугао, кад су дате две стране и угао који оне захватају.

Треба конструисати дати угао, на његове краке пренети дате стране, па саставити крајње тачке једном дужи.

Особити случај:

Конструисати правоугли троугао, кад су дате обе катете.

6. Конструисати троугао, кад су дате две стране a и b и угао α наспрам једне од тих страна (сл. 53).



Сл. 53.

Конструкција. Треба конструисати дати угао α и пренети на један крак страну b на којој лежи тај угао; око крајње тачке C треба описати лук коме је полупречник она друга дата страна a, супротна углу α; тај лук сече други крак угла α у тачки B, коју треба везати с тачком C, па је ABC тражени троугао.

Доказ је у конструкцији.

Детерминација. Лук, описан око C полупречником a, сече други крак угла α само у једној тачки B, ако је $a > b$, пошто други пресек пада на допуну полузрака AB; добија се троугао

ABC, задатак има једно решење. Ако ли је $a < b$, онда се добивају два неподударна троугла (ACB' и ACB''), или један троугао (ACB'''), или ни један троугао, према томе да ли је $a \gtreqless CB'''$, ако је CB''' раздаљина тачке C од другог крака угла α. Један се троугао добија и у случају, кад је $a = b$.

Детерминација. Кад је $a > b$, онда може бити $\alpha \gtrless 90^\circ$. Кад је $a \leqq b$, онда мора бити $\alpha < 90^\circ$.

Као особити случај имамо једнозначно одређени задатак:

Конструисати правоугли троугао, кад је дата хипотенуза и једна катета.

7. Конструисати симетралу дате дужи AB.

Једним истим полупречником треба описати око A и B кружне лукове на једној и другој страни дане дужи; ти ће се лукови сећи у тачкама C и D, које имају од A и B једнаке раздаљине; с тога је CD симетрала дужи $A\ B$ (чл. 45, 1).

Овом је конструкцијом решен и задатак:

Преполовити дану дуж.

8. Конструисати симетралу датог угла ACB.

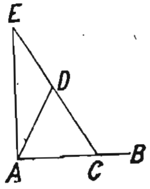
На крацима датог угла треба одредити две тачке M и N у једнаким раздаљинама од темена C, па конструисати симетралу дужи MN; она је уједно симетрала углу ACB.

Том је конструкцијом решен и овај задатак:

Преполовити дати угао.

9. Из тачке C, која се налази ван дате праве AB, повући нормалу на AB.

Око C треба описати кружни лук који сече AB у тачкама M и N, па конструисати симетралу дужи MN.



Сл. 54.

10. У тачки C, која се налази на датој правој AB, повући нормалу на AB.

На правој треба начинити $CM = CN$, па конструисати симетралу дужи MN.

11. У крајњој тачки A дане дужи AB повући нормалу на AB (сл. 54).

Конструкција. На датој дужи треба узети где било тачку C, над AC конструисати равностран троугао ACD, продужити CD за њену сопствену дужину до E, и повући AE; тада је AE тражена нормала.

Доказ. $CAD = 60^\circ$, а $DAE = \frac{1}{2}\ ADC = 30^\circ$; с тога $CAE = 90^\circ$.

12. Кроз тачку C, која се налази ван дате праве AB, повући паралелну с правом AB.

Решење. 1. Кроз C треба повући праву која сече AB у D, па пренети код C угао $DCE = ADC$, тако да су DCE и ADC наизменични углови; други крак CE тог конструисаног угла биће тражена паралелна.

Решење 2. Повуци $CF \perp AB$ и $CE \perp CF$; тада је $CE \parallel AB$.

Решење 3. Кроз C треба повући праву која сече AB у D, за тим око D полупречником DC описати кружни лук који сече праву AB у E; ако се истим полупречником опишу још лукови око C и E, па се њихов пресек F састави са C, онда је $CF \parallel AB$ (чл. 53, 3).

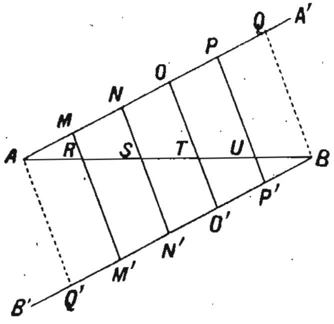
13. Дану дуж AB (сл. 36) поделити на више једнаких делова.

Из A треба повући под буди којим углом зрак AC и пренети на њега коју било дуж онолико пута, на колико делова хоћемо да поделимо AB, везати крајњу тачку C са B правом CB, па према овој дужи повући кроз све остале тачке паралелне MQ, NR, OS, PT; на тај начин биће дана дуж подељена на тражени број једнаких делова (чл. 59, 3).

Конструисање многих паралелних може се избећи, ако се кроз обе крајње тачке дате дужи повуку паралелне AA' и BB' (сл. 55), па се на сваку пренесе толико једнаких делова колико треба да их има дуж AB. Кад се деоне тачке вежу као што показује сл. 55., онда је

$$AR = RS = ST = TU = UB$$

(чл. 53, 4).



Сл. 55.

96. 1. Одредити средиште датоме кругу.

Помоћу симетрала двеју непаралелних тетива.

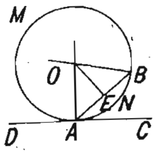
2. Преполовити кружни лук (чл. 78, 1).

3. Кроз дату тачку на периферији једног круга повући тангенту (чл. 80, 1).

4. Кроз тачку, дату ван круга, повући тангенте. Ако је C (сл. 44) дата тачка, а O средиште круга, онда треба повући дуж CO, и описати круг коме је та дуж пречник; овај се круг сече с датим кругом у тачкама A и B, праве CA и CB јесу тражене тангенте (чл. 80, чл. 83, *e*).

5. Над датом дужи, као над тетивом, описати кружни лук тако, да је у њему сваки периферијски угао над том тетивом једнак с неким датим углом.

Нека је BAC (сл. 56) дани угао, а AB дата дуж. Треба на AB подићи симетралу EO, повући $AO \perp AC$, па око пресека O правих EO и AO описати круг полупречником $AO = BO$. Тада је (по чл. 83, *b)* AMB кружни лук у којем се дани угао BAC налази као периферијски угао над тетивом AB; а ANB јесте онај кружни лук, у којем се као периферијски угао над тетивом AB налази суплеменат BAD датог угла.



Сл. 56.

2. Метода геометријских места.

97. Линија или површина, која има ту особину, да све њене тачке, и само те тачке, задовољавају неку дату погодбу, назива се геометријско место тих тачака.

Тако се на пр. све тачке у некој равни, које имају од неке дане тачке једну исту дату раздаљину, налазе на кружној линији која је око оне тачке описана даном раздаљином као полупречником, а сем тих тачака нема у равни ни једне друге тачке која би испунила исту погодбу. То се казује овим правилом:

1. *a)* геометријско место свих тачака, које имају од неке дате тачке дату раздаљину a, јесте круг описан око те тачке полупречником a.

Ово геометријско место садржи решења неодређеног задатка: одредити тачку, која има од дате тачке дану раздаљину.

Исто геометријско место може се исказати и овако:

1. *b)* геометријско место за средишта свих кругова, који пролазе кроз дату тачку, а имају дат полупречник a, јесте круг описан око те тачке полупречником a.

2. *a)* геометријско место свих тачака, једнако удаљених од две дате тачке, јесте симетрала оне дуже која везује две дате тачке.

2. *b)* геометријско место за средишта свих кругова, који пролазе кроз две дате тачке, јесте симетрала оне дужи која везује дате тачке.

3. *a)* геометријско место свих тачака, једнако удаљених од кракова датог угла, јесте његова симетрала

3. *b)* геометријско место за средишта свих кругова, који додирују две непаралелне праве, јесте симетрала њиховог угла.

4. *a)* геометријско место свих тачака, које имају од неке дате праве на једној страни њеној исту раздаљину a, јесте права повучена на тој страни паралелно с датом правом, у раздаљини a.

4. *b)* геометријско место за средишта свих кругова, који имају дати полупречник a и додирују дану праву на једно страни њеној, јесте права повучена у раздаљини a на тој страни паралелно с даном правом.

5. Геометријско место за темена свих правоуглих троуглова, који имају заједничку хипотенузу, јесте круг описан над том хипотенузом као над пречником.

6. Геометријско место за темена свих троуглова, у којима се наспрам једне дане стране налази дати угао, јесте кружни лук описан над том страном као тетивом тако, да је у њему периферијски угао над даном страном једнак с датим углом.

У чл. 96. зад. 5. показана је конструкција таквог угла.

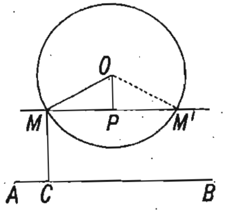
7. Геометријско место за средишта свих кругова, који додирују дату праву у једној њеној тачки, јесте нормала дате праве у тој тачки.

8. Геометријско место за средишта свих кругова, који додирују дати круг у једној тачки његовој, јесте права повучена кроз ту тачку и средиште датог круга.

9. Геометријско место за средишта свих кругова, који имају дат полупречник и додирују један дати круг, јесте круг концентричан с датим кругом, а полупречник му је збир или разлика оба полупречника, према томе, да ли се кругови додирују с поља или изнутра.

98. Кад се зна само једно геометријско место неке тачке, онда тиме није одређен њен положај, јер има безбројно много тачака на том геометријском месту. Ако ли су за неку тачку позната два геометријска места, онда има само једна, или одређен број тачака, које су заједничке једном и другом геометријском месту.

Метода геометријских места у томе је, да се код задатака, чије решење зависи од изналажења једне тачке, нађу из датих погодаба две линије (праве или кругови) као геометријска места те тачке; та се места налазе, кад се задржи само једна погодба коју треба да испуни тачка, а друга се занемари, па се за тим задржи друга погодба, а прва занемари. Заједничке тачке двају геометријских места, нађених тим путем, јесу тражене тачке.



Сл. 57.

За пример нека послуже ови задаци:

1. Одредити тачку, која од неке дане праве AB (слика 57) и од једне дане тачке O ван те праве има исту раздаљину a.

Анализа. Нека је M тражена тачка. Како M мора имати од AB раздаљину a, то је геом. место за M права MM' повучена паралелно са AB у раздаљини $CM = a$. Како M мора имати и од O раздаљину a, то је друго геом. место за M круг описан око O полупречником $OM = a$. Према томе се M налази у пресеку оба места.

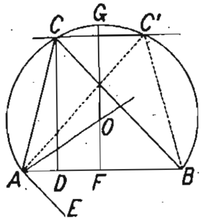
Конструкција. Треба повући $MM' \parallel AB$ у раздаљини $CM = a$, а око O описати круг полупречником a; овај круг сече ону паралелну у тачки $M (M')$ и то је тражена тачка.

Доказ. Излази непосредно из конструкције.

Детерминација. Задатак има два решења, или само једно, или нема ни једно, према томе да ли око O описани круг сече или додирује паралелну MM', или је никако не сече. Кад се повуче $OP \perp MM'$, онда ће се ова три случаја десити према томе, да ли је $a > OP$, $a = OP$ или $a < OP$.

2. Конструисати троугао, кад је дата једна страна c, угао γ наспрам ње и висина h која одговара тој страни.

Анализа. Нека је ABC (сл. 58) тражени троугао, у коме је $AB = c$, $ACB = \gamma$ и $CD = h$. Страном AB дата су темена A и B; остаје још да се одреди теме C. Како треба да буде $ACB = \gamma$, то је геом. место за C кружни лук описан над тетивом AB тако, да је у њему периферијски угао над том тетивом $= \gamma$. Како, даље, троуглова висина, тј. раздаљина темена од основице, треба да буде $= h$, то је друго геом. место за C права повучена у раздаљини h паралелно са AB; према томе је C у пресеку тих места.



Сл. 58.

Конструкција. На праву $AB = c$ треба код A пренети угао $BAE = \gamma$, повући $AO \perp AE$, и правој AB симетралу FG, која сече нормалу AO у O. Ако се сад око O опише кружни лук полупречником OA, па се у раздаљини $CD = h$ повуче $CC' \parallel AB$, онда се у пресеку праве CC' с кружним луком добија тачка C коју треба саставити са A и B; тада је ABC тражени троугао.

Доказ. У троуглу је ABC по самој конструкцији $AB = c$, угао $ACB = \gamma$, и висина $CD = h$.

Детерминација. Добивају се два, али подударна троугла ABC и ABC', или само један троугао или ни један, како је кад $h < FG$, $h = FG$ или $h > FG$.

3. Метода помоћних слика.

99. Код методе помоћних слика узима се ради анализе једна привремена слика као решење постављеног задатка, па се — применом геометријских теорема — испитује веза између датих

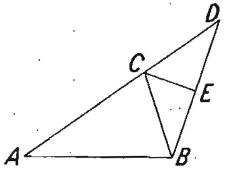
и тражених комада, кад се дати комади, који се не налазе непосредно у привременој слици, подесним помоћним линијама доведу у везу с том сликом, те се тако дознаје једна помоћна слика, која се може конструисати и из које се може извести тражена слика.

Ради примера решићемо ове задатке:

1. Конструисати троугао, кад је дата једна страна c, угао α на њој и збир s других двеју страна.

Анализа. Претпоставимо да је ABC (сл. 59) тражени троугао, тако да је $AB = c$, $BAC = \alpha$, $BC + AC = s$.

Како се за решавање овог задатка морају употребити сви дани комади, то се дуж s, која се неналази непосредно у слици, мора подесним начином довести у везу с троуглом. Ако се тога ради продужи AC, пренесе $CD = CB$ и повуче BD, добиће се помоћни троугао BAD, у којем су познате стране $AB = c$, $AD = s$, и захваћени угао $BAD = \alpha$; тај се троугао, дакле, може конструисати. А из тог троугла добија се тражени троугао BAC, кад се повуче страни BD симетрала, која ће сећи AD у тачки C, јер је $\triangle CBD$ равнокрак.



Сл. 59.

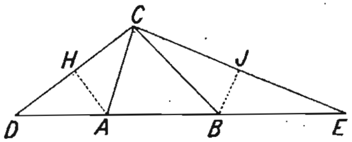
Конструкција. Треба повући $AB = c$, нацртати код A угао $BAD = \alpha$, пренети на један крак $AD = s$ и повући BD. Кад се конструише страни BD симетрала, која сече страну AD у C, онда је ABC тражени троугао.

Доказ излази непосредно из конструкције.

Детерминација. Задатак се може решити само тада, кад је $\alpha < 180^\circ$ и $c < s$; задатак има једно решење.

2. Конструисати троугао, кад је дат његов обим и знају се два угла.

Анализа. Нека је ABC (сл. 60) тражени троугао, који има дани обим $AB + AC + BC = o$, и дане углове $BAC = \alpha$ и $ABC = \beta$. Кад се o представи тако, да се AB продужи на обадве стране, и пренесе $AD = AC$, $BE = BC$, па се још повуче DC и EC, онда постаје помоћни троугао DEC који се може конструисати, јер је у њему познато $DE = o$, $EDC = \frac{\alpha}{2}$, $DEC = \frac{\beta}{2}$. Тиме је одређено и теме C траженог троугла. Она друга два темена A и B темена



Сл. 60.

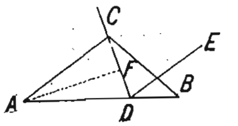
су два равнокрака троугла над основицама CD и CE, а налазе се на дужи DE; она су дакле пресеци стране DE са симетралама дужи CD и CE.

Конструкција. Треба нацртати дуж $DE = o$, пренети код D и E углове $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$, па продужити њихове краке до пресека C. Кад се за тим конструишу дужима CD и CE симетрале HA и JB, које секу DE у тачкама A и B, па се повуче AC и BC, онда је ABC тражени троугао.

Доказ је у анализи.

Детерминација. Претпоставља се да је $\alpha + \beta < 180^\circ$; тада се може увек наћи троугао, и то само један, који задовољава задатак.

3. Конструисати троугао, кад је дата једна страна, разлика других двеју страна и угао који захватају ове две стране.



Сл. 61.

Анализа. Нека је ABC (сл. 61) тражени троугао, у којем је $BC = a$, $AB - AC = d$, угао $BAC = \alpha$. Ако се пренесе на AB дуж $AD = AC$, онда је $DB = d$; а кад се повуче CD, онда је угао $ADC = R - \frac{\alpha}{2}$. Помоћни троугао BDC може се конструисати, јер је у њему позната страна $BC = a$, $BD = d$ и наспрам веће стране угао $BDC = R + \frac{\alpha}{2}$. Тиме су одређена и темена B и C траженог троугла. Треће теме A налази се тада као врх равнокраког троугла ACD.

Конструкција. Повуче се $BD = d$, нацрта угао $BDE = \alpha$, преполови његов упоредни угао ADE правом DC, па се око B полупречником a опише кружни лук који сече DC у C; за тим се повуче BC, конструише за дуж CD симетрала AF, која сече продужено BD у A; кад се још повуче AC, онда је ABC тражени троугао.

Доказ је у анализи.

Детерминација. Задатак се може решити, кад је $d < a$ и $\alpha < 180^\circ$.

4. Задаци за вежбање.

A) По методи геометријских места.

100. 1. Наћи тачку једнако удаљену од две дате тачке, а да се налази у прописаној раздаљини и од неке треће дане тачке.

2. На датој правој наћи тачку једнако удаљену од друге две дате тачке ван праве.

3. На датој правој наћи тачку у датој раздаљини од друге дате праве.

4. Дате су две паралелне праве и трећа која их сече; наћи тачку која је једнако удаљена од све три праве.

5. На једној страни датога троугла наћи тачку једнако удаљену од других двеју страна.

6. Наћи тачку у једнаким раздаљинама од два буди која темена датога четвороугла, а да буде и од она друга два темена једнако удаљена.

7. Међу краке датог угла пренети дану дуж d тако, да она стоји на једном краку нормално.

101. 1. Над даном дужи као над хипотенузом конструисати правоугли троугао тако, да му је теме на правој која је с датом дужи паралелна.

2. Конструисати правоугли троугао, кад се знају *a)* хипотенуза и висина која јој одговара; *b)* хипотенуза и један оштар угао; *c)* одсечци на које је хипотенуза подељена висином.

3. Конструисати равнокрак троугао *a)* из основице и висине, *b)* из крака и висине која му одговара.

4. Конструисати троугао, кад се знају *a)* једна страна, висина која јој одговара и један угао на тој страни; *b)* једна страна, супротни јој угао и висина која одговара другој којој страни; *c)* једна страна, висина и средња линија које одговарају тој страни; *d)* две стране и средња линија која одговара једној од њих.

5. Конструисати троугао кад је дато: *a)* један угао и висине које одговарају странама што захватају тај угао; *b)* две стране и висина која одговара једној од њих; *c)* две стране и висина која одговара трећој страни; *d)* једна страна, висина која јој одговара и висина која одговара друго којој страни; *e)* једна страна и висина које одговарају другим двема странама.

102. 1. Даним полупречником описати круг, који *a)* пролази кроз две дате тачке; *b)* додирује дану праву у датој тачки; *c)* додирује дану праву и пролази кроз дату тачку ван ње; *d)* додирује две праве које се секу.

2. Даним полупречником описати круг, који *a)* додирује дани круг у датој тачки; *b)* додирује дани круг и пролази кроз тачку дату ван круга: *c)* додирује дану праву и један дати круг; *d)* додирује два дата круга.

3. Описати круг који пролази кроз једну дату тачку и додирује *a)* једну дану праву у датој тачки, *b)* дати круг у даној тачки.

4. Описати круг тако, да додирује две праве које се секу, и то једну од њих у датој тачки.

5. Описати круг тако, да се с другим, даним кругом додирује у датој тачки и да додирује дату праву.

Своди се на задатак 4.

В) **По методи помоћних слика.**

103. Сваки је троугао висином подељен на два правоугла троугла који могу послужити као помоћне слике; исто тако и они троугли, на које је троугао подељен средњом линијом.

1. Конструисати правоугли троугао, кад је дата: *a)* једна катета и висина која одговара хипотенузи; *b)* висина и један оштар угао; *c)* катета и оближњи јој одсечак хипотенузин; *d)* висина и један хипотенузин одсечак.

2. Конструисати равностран троугао, кад је позната његова висина.

3. Конструисати равнокрак троугао *a)* помоћу крака и висине, *b)* помоћу висине и једног угла, *c)* помоћу основице и висине која одговара једном краку.

4. Конструисати равнокрако-правоугли троугао, кад је дата његова висина.

5. Конструисати троугао, кад се знају: *a)* једна страна, висина која одговара другој страни и угао наспрам ове друге стране; *b)* једна страна, њена средња линија и један угао на тој страни; *c)* висина која одговара једној страни и углови на тој страни; *d)* висине које одговарају двема странама и угао наспрам једне од тих страна; *e)* висина и средња линија које одговарају једној страни и један угао на тој страни.

104. Кад се међу датим комадима, који одређују неки троугао, налази збир или разлика двеју страна (или једне стране и висине), онда се продуживањем једне стране, или одузимањем од друге, добија као помоћна слика један троугао, у коме се дати збир или дана разлика јавља као страна.

1. Конструисати правоугли троугао кад се зна: *a)* хипотенуза и збир (разлика) двеју катета; *b)* једна катета и збир (разлика) хипотенузе и друге катете; *c)* један оштар угао и збир (разлика) двеју катета, *d)* збир (разлика) хипотенузе и једне катете и један оштар угао; *e)* збир (разлика) двеју катета и разлика њихових супротних углова; *f)* обим и један оштар угао.

2. Конструисати равностран троугао, кад је дат збир (разлика) његове стране и висине.

3. Конструисати равнокрак троугао кад се, поред збира (разлике) основице и крака, зна *a)* угао на основици, *b)* угао при врху; или, кад се, поред збира (разлике) крака и висине, зна *c)* основица, *d)* угао на основици (при врху).

4. Конструисати троугао, кад је дат *a)* збир (разлика) двеју страна, трећа страна и угао наспрам ове стране; *b)* збир (разлика) двеју страна, трећа страна и један угао на овој страни; *c)* збир (разлика) двеју страна и два угла.

105. Задаци о конструисању паралелограма или каквог било четвороугла могу се у опште решити конструкцијом једног од оних троуглова, који се добивају кад се у четвороуглу повуче једна дијагонала, или обе.

1. Конструисати квадрат из *a)* стране, *b)* дијагонале, *c)* збира (разлике) дијагонале и стране.

2. Конструисати правоугаоник, кад се знају: *a)* две суседне стране; *b)* једна страна и дијагонала; *c)* једна страна и наспрам ње угао између дијагонала; *d)* дијагонала и угао између обе дијагонале; *e)* збир (разлика) двеју страна и дијагонала; *f)* једна страна и збир (разлика) дијагонале и друге стране.

3. Конструисати ромб кад се знају: *a)* страна и један угао; *b)* страна и висина; *c)* страна и једна дијагонала; *d)* обе дијагонале; *e)* страна и збир (разлика) обе дијагонале; *f)* збир (разлика) стране и висине и један угао.

4. Конструисати ромбоид кад су дате: *a)* две стране и захваћен угао; *b)* две стране и једна дијагонала; *c)* обе дијагонале и једна страна; *d)* обе дијагонале и угао који оне захватају; *e)* две стране и висина која одговара једној од њих; *f)* један угао, једна дијагонала и збир (разлика) двеју страна; *g)* збир (разлика) обе дијагонале, једна страна и угао између обе дијагонале.

5. Конструисати делтоид, кад су дате: *a)* две неједнаке стране и дијагонала; *b)* обе дијагонале и једна страна.

106. Трапез је одређен једним од она два троугла, који постају кад се повуче дијагонала, и једним од оних комада другога троугла који не зависе од првог троугла; а равнокрак трапез одређен је једним од та два троугла.

Кад су дате обе паралелне стране, онда треба кроз крајњу тачку једне од тих страна повући паралелну с једним краком; тако се добија као помоћна слика један троугао, у коме је једна страна једнака са разликом паралелних страна.

1. Конструисати равнокрак трапез, кад се зна: *a)* једна од паралелних страна, крак и дијагонала: *b)* једна од паралелних страна, крак и висина; *c)* обе паралелне стране и висина; *d)* обе паралелне стране и крак; *e)* крак, дијагонала и висина; *f)* једна од паралелних

страна, један угао и висина; *g)* збир (разлика) једне од паралелних страна и крака, дијагонала и један угао.

2. Конструисати трапез кад су дате: *a)* све четири стране; *b)* три стране и висина; *c)* три стране и један угао између њих; *d)* једна од паралелних страна, углови на њој и дијагонала; *e)* обе паралелне стране, један крак и дијагонала; *f)* оба крака, једна дијагонала и висина; *g)* збир (разлика) једне од паралелних страна и једног крака, обе друге стране и дијагонала наспрам угла ових двеју страна; *h)* збир (разлика) једне од паралелних страна и једног крака, углови на тој паралелној страни и висина.

C) **Мешовити задаци.**

107. 1. Прав угао подели на три једнака дела.

Треба конструисати (сл. 54.) равностран троугао ACD, па преполовити угао CAD.

2. Дата је права и две тачке ван ње; наћи на правој једну тачку тако, да дужи, које везују ту тачку с даним тачкама, граде с даном правом једнаке углове.

Кад се из једне од датих тачака спусти нормала на дату праву, па се продужи за своју дужину, онда права, повучена кроз крајњу тачку продушка и ону другу дану тачку, сече дату праву у траженој тачки.

3. Кроз дану тачку повући праву тако да она с неком датом правом захвата прописан угао.

Код једне, буди које тачке на датој правој ваља пренети дани угао тако, да се један крак поклапа с датом правом, па кроз дану тачку повући паралелну с другим краком.

4. Кроз дану тачку, која се налази између кракова једног угла, повући праву тако, да је на њој дуж, која је ограничена крацима, преполовљена даном тачком.

Кроз дану тачку P треба повући паралелну с једним краком AC; она ће одсећи на другом краку дуж AD коју треба пренети још један пут на крак, дакле $AD = DE$; тачку E ваља везати с даном тачком P (чл. 59, 2).

5. Кроз дану тачку, која се налази између кракова даног угла, повући праву која ће одсећи на крацима једнаке дужи.

6. Између кракова даног угла повући праву прописане дужине тако, да она одсече на крацима једнаке дужи.

7. У даноме кругу повући тетиву прописане дужине, а паралелно с једном датом правом.

8. На датој правој наћи тачку тако, да дирке једном датом кругу, повучене из те тачке, имају прописану дужину.

У којој било тачки данога круга треба повући дирку прописане дужине, па кроз њену крајњу тачку повући круг концентричан с даним кругом; у пресеку тога круга с даном правом налази се тражена тачка.

108. 1. Конструисати многоугао подударан с датим многоуглом.

2. Конструисати n-страни многоугао, кад су дати комади који га одређују (чл. 67).

3. Конструисати правилан n-страни многоугао, кад је дата његова страна.

4. У даноме кругу уписати троугао, кад су дате: *a)* две стране; *b)* једна страна и један угао на њој; *c)* два угла; *d)* страна и висина која јој одговара; *e)* једна страна и средња линија која јој одговара; *f)* једна страна и висина која одговара другој којој страни.

Код зад. *c)* треба прво конструисати средишни угао 2α; тако се добија страна као тетива, па је задатак сведен на *b)*.

5. Око даног круга описати троугао, кад су дата: *a)* два угла; *b)* једна страна и један угао на њој; *c)* једна страна и висина која одговара другој којој страни.

Овде се примењује чл. 81., с).

6. Конструисати тетивни четвороугао кад су, поред полупречника описанога му круга, дате: *a)* три стране, *b)* две супротне стране и један угао, *c)* једна страна са два налегла угла.

7. Конструисати тангентни четвороугао, кад су, поред полупречника уписанога му круга, дате: *a)* две суседне стране са захваћеним углом, *b)* једна страна и углови на једној од оближњих страна.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

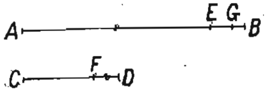
Пропорционалност дужи и сличност равних слика.

I. Геометријске размере и пропорције.

109. Једна просторна количина назива се *мером* друге просторне количине исте врсте, кад је ова друга састављена од једнаких делова, од којих је сваки једнак с првом количином. Ако је на пр. $A = aM$, где a значи буди који цео број, онда је M мера количини A. M се назива *заједничка мера* двеју количина A и B, ако се садржи у A и B.

Да бисмо нашли *једну заједничку меру двеју просторних количина*, треба мању количину B одузети од веће A онолико пута, колико се може; затим се исто тако остатак C одузме од мање количине B онолико пута, колико се може; нови остатак D одузме се од пређашњег остатка C итд. Кад се на тај начин дође до последњег остатка R, који се садржи као мера у претпоследњем остатку, онда је R једна заједничка мера за A и B, и то, као што се зна из Аритметике, њихова највећа заједничка мера.

Показаћемо овај поступак на двема дужима AB и CD (сл. 62).



Сл. 62.

Мању дуж CD ваља пренети на већу AB онолико пута, колико се може, овде 2-пута; остатак BE преноси се на мању дуж CD (2 пута), остатак FD на пређашњи остатак BE (1 пута), нови остатак GB на пређашњи FD у којем се он садржи тачно 2 пута. Тада је

$$\begin{aligned} FD &= 2\,GB, \\ EB &= FD + GB = 3\,GB, \\ CD &= 2\,EB + FD = 8\,GB, \\ AB &= 2\,CD + EB = 19\,GB. \end{aligned}$$

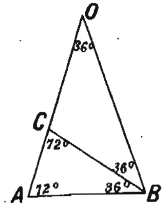
Према томе AB и CD имају највећу заједничку меру GB која се садржи у AB 19 пута, а у CD 8 пута.

110. Кад се, поступајући као што је показано у чл. 109, никако не добије остатак $= 0$, ма колико се продужило поновно одузимање остатака, онда дане количине немају заједничке мере.

Две количине, које имају заједничку меру, зову се самерљиве (commensurabel); а две количине, које немају заједничке мере, називају се несамерљиве (incommensurabel).

Пример двеју несамерљивих количина дају основица и крак равнокраког троугла, кад угао при врху има 36°.

Ако се преполови угао $B = 72^0$ (сл. 63), онда је $AB = BC = CO$ и $AC < AB$. Према томе се основица тог равнокраког троугла може на крак пренети само једанпута и остаје као остатак AC; сада се мора испитати, колико се пута AC садржи у AB. Ну како троугао ABC има исте углове као AOB, то вреди за AB исто што и за AO, итд. без краја. Према томе су AB и AO несамерљиве дужи.



Сл. 63.

У практичном мерењу двеју дужи не јавља се случај несамерљивости, јер се остатак, кад постане довољно мали, занемарује.

111. Одредити размеру $A : B$ двеју просторних количина значи наћи онај број, који казује колико се пута садржи B у A.

a) Нека су A и B самерљиве количине. Ако је α њихова највећа заједничка мера, и ако је

$$A = m\alpha, \; B = n\alpha, \text{ онда је } A : B = \frac{m}{n}.$$

Количник размере A:В цео је или разломљен број, како је кад је $n = 1$, или се разликује од 1. За пример на сл. 62 вреди $AB : CD = \frac{19}{8}$.

b) Нека су A и B несамерљиве количине.

Тада количник није ни цео ни разломљен број, дакле није ни $A : B = m$, нити је $A : B = \frac{m}{n}$ $(A = \frac{\mathrm{B}}{n}.\, m)$; јер би у првом случају B, а у другом $\frac{B}{n}$ била заједничка мера за A и B.

Али, ако се B подели на n једнаких делова, онда се A мора налазити између две узастопне множине од $\frac{B}{n}$; дакле је

$$\frac{(m+1)\,B}{n} > A > \frac{mB}{n}, \text{ или } \frac{m}{n} + \frac{1}{n} > \frac{A}{B} > \frac{m}{n}.$$

Узимајући $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ или $\frac{m}{n}$ за експоненат размере $A : B$, чини се грешка мања од $\frac{1}{n}$, која је тим мања што је веће n.

Према томе се количник размере двеју несамерљивих количина не може тачно изразити ни целим ни разломљеним бројем, али се он може затворити између два разломка као између две границе чија се разлика може начинити колико се хоће мала. Такви бројеви зову се ирационални, а цели и разломљени зову се рационални.

Теорема. Количник размере двеју самерљивих количина рационалан је а двеју несамерљивих количина ирационалан је.

112. Једначина двеју једнаких размера зове се пропорција.

Пропорција, у којој су унутрашњи чланови једнаки, назива се непрекидна пропорција, на пр. $A : B = B : C$; средњи члан назива се средња пропорционала (геометријска средина) између оба спољашња члана, а четврти члан назива се трећа непрекидна пропорционала за први и средњи члан.

Кад две врсте количина зависе једна од друге тако, да су A и B две њихове вредности које одговарају једна другој, па и вредности mA једне количине одговара вредност mB друге количине, где је m ма какав број; кад дакле две количине једне врсте стоје једна према другој у истој размери као оне количине друге врсте које им одговарају, онда се каже: обе врсте количина управо су пропорционалне, или просто пропорционалне. Ако ли, на против, вредности mA одговара вредност $\frac{B}{m}$, тако да две количине једне стоје у обрнутој размери са оним количинама друге врсте које им одговарају, онда се каже: да су те две врсте количина обрнуто пропорционалне.

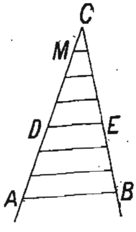
II. Пропорционалност дужи.

113. Више правих, које пролазе кроз једну тачку, а леже у једној равни, чине сноп зракова; заједничка тачка назива се теме. Свака права, која сече зраке једног снопа, зове се трансверсала. Хомологе дужи на зрацима зову се дужи од темена до трансверсале, или дужи између истих трансверсала.

Теорема. Сваке две паралелне трансверсале секу два зрака пропорционално.

Претпоставка. Нека је $DE \parallel AB$ (сл 64).

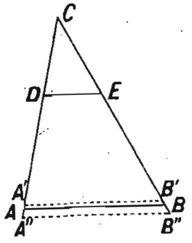
Доказати: $AD : CD = BE : CE$,
$AC : AD = BC : BE$,
$AC : CD = BC : CE$.



Сл. 64.

Доказ. *a)* Нека су дужи CD и AD самерљиве, CM једна њихова заједничка мера, и то $CD = m.$ CM, $AD = n.$ CM; тада је $AD : CD = n : m$. Ако се сад CD подели на m, а DA на n једнаких делова, па се кроз сваку раздеону тачку повуче по једна паралелна са AB, онда ће бити и CE подељено на m, а BE на n једнаких делова; према томе је $BE : CE = n : m$, дакле $AD : CD = BE : CE$.

b) Нека су CD и AD (сл. 65) несамерљиве дужи. Поделимо CD на m једнаких делова и пренесимо један такав део $\frac{CD}{m}$ од D ка A; нека је $A''D = (n+1)\ \frac{CD}{m}$ а $A'D = n.\ \frac{CD}{m}$. Тада је.



Сл. 65.

$$\frac{(n+1)\ CD}{m} > AD > n.\frac{CD}{m}$$

$$\frac{n}{m} + \frac{1}{m} > \frac{AD}{CD} > \frac{n}{m}.$$

Ако се кроз све раздеоне тачке повуку паралелне са AB до њихова пресека са BC онда ће и CE бити подељено на m једнаких делова; $(n+1)$ таквих делова биће у $B''E$, а n делова у $B'E$. Према томе је

$$\frac{(n+1)\ CE}{m} > BE > \frac{n.CE}{m}$$

$$\frac{n}{m} + \frac{1}{m} > \frac{BE}{CE} > \frac{n}{m}.$$

Ирационалне размере $\frac{AD}{CD}$ и $\frac{BE}{CE}$ леже дакле између истих граница, чију разлику можемо начинити колико хоћемо малом, ако само узмемо m довољно велико; то значи, да су те размере једнаке. Дакле, и у случају несамерљивости вреди $AD : CD = BE : CE$.

Из те пропорције излази, да је тачна и друга и трећа пропорција у овој теореми, јер је

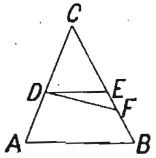
$(AD + CD) : AD = (BE + CE) : BE$ или $AC : AD = BC : BE$,
$(AD + CD) : CD = (BE + CE) : CE$ или $AC : CD = BC : CE$.

Исто тако може се доказати ова теорема у случају, кад теме зрачног снопа лежи између паралелних трансвесала.

Последица. Права, која је у неком троуглу повучена паралелно с једном страном његовом, сече оне друге две стране пропорционално.

114. Теорема. Две трансверсале, које пропорционално секу два зрака, морају бити паралелне.

Доказ. Нека је (сл. 66) $CA : CD = CB : CE$. Кад не би DE било паралелно са AB, него DF, онда би (по члану 113) било $CA : CD = CB : CF$. Ну тада би, с погледом на претпоставку, морало бити $CF = CE$, т.ј. тачке F и E идентичне су. С тога је $DE \parallel AB$.



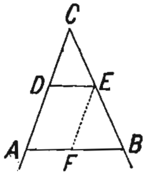
Сл. 66.

Последица. Кад нека трансверсала сече пропорционално две стране једног троугла, онда је она паралелна с трећом страном његовом.

115. Теорема. Кад две паралелне трансверсале секу два зрака, онда су одсечци на трансверсалама пропорционални с одсечцима на сваком поједином зраку (сл. 67).

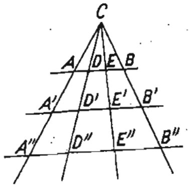
Доказ. Ако је $DE \parallel AB$, па се повуче $EF \parallel CA$, и сматра B као теме, дакле EF и CA као трансверсале, онда је и $AB : AF = CB : CE$, или како је $AF = DE$, $AB : DE = CB : CE$. Према томе је

$$AB : DE = CB : CE = CA : CD.$$



Сл. 67.

116. Кад две или више паралелних трансверсала секу један зрачни сноп онда су *a)* свака два одсечка једног зрака пропорционална с одговарајућим одсечцима сваког другог зрака, и *b)* свака два одсечка једне трансверсале пропорционална с одговарајућим одсечцима сваке друге трансверсале.



Сл. 68.

Претпоставка. $AB \parallel A'B' \parallel A''B''$.... (сл. 68).

Доказати: *a)* $CA : CA' : CA'' \ldots.$

$= CD : CD' : CD'' \ldots.$

$= CE : CE' : CE'' \ldots.$

b) $AD : A'D' : A''D'' \ldots.$

$= DE : D'E' : D''E'' \ldots.$

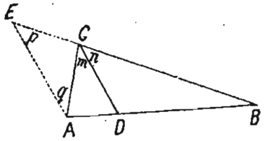
$= EB : E'B' : E''B'' \ldots.$

Доказ излази из чл. 113. и 115.

117. 1. Симетрала једног угла у троуглу дели супротну страну на два одсечка, који су пропорционални с ближњим странама троугловим.

Претпоставка. Нека је у троуглу ABC (сл. 69.) угао C преполовљен правом CD, тако да је $m = n$.

Доказати: $AD : BD = AC : BC$.



Сл. 69.

Доказ. Продужи се BC и повуче кроз A паралелна са CD, која ће сећи продужак од BC у тачки E. Тада је $m = q$, $n = p$, а како је $m = n$, то је и $p = q$, с тога $EC = AC$. Како је у троуглу ABE права $CD \parallel AE$, то вреди пропорција $AD : BD = EC : BC$, из које излази $AD : BD = AC : BC$.

2. Симетрала једног спољашњег угла код троугла сече продужену супротну страну у тачки, чије су раздаљине од крајњих тачака те стране пропорционалне с оним другим двема странама (Доказ сличан као за 1.).

III. Сличност равних слика.

118. Теореме. 1. Кад се на зрацима каква снопа (сл. 70.) тачкама A и a, B и b, C и c,... одсеку пропорционалне дужи, онда су у сликама $ABCD\ldots$ и $abcd\ldots$ пропорционалне оне дужи, које леже између истих зракова, а два и два угла између тих дужи једнака су.

Доказ. Нека је $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$

Из те претпоставке излази непосредно (члан 114), да је $AB \parallel ab$, $AC \parallel ac$, $BC \parallel bc, \ldots$, па према томе (чл. 115) и $AB : ab = SB : Sb$ и $BC : bc = SB : Sb$, с тога и $AB : ab = BC : bc$; исто тако је и $AB : ab = AC : ac$ итд.

Да је угао $ABC = abc$, угао $BAC = bac$, угао $BCD = bcd$, излази из чл. 26. 1.

Исти односи вреде, кад се теме S налази између слика $ABCD\ldots$ и $a'b'c'd'\ldots$, само су у том случају сваке две дужи које одговарају једна другој, у супротном смислу паралелне.

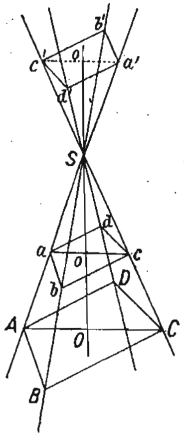
Додатак. Ако су $A, B, C, D\ldots$ тачке на периферији једног круга, онда су и $a, b, c, d\ldots$ тачке на периферији другог круга. Јер, ако је O средиште круга који пролази кроз $A, B, C\ldots$, а o тачка која на зраку SO одговара тачки O, онда је $AO : ao = BO : bo = CO : co = \ldots$; па како је $AO = BO = CO = \ldots$, то је и $ao = bo = co = \ldots$, тј. тачке $a, b, c\ldots$ налазе се на обиму круга коме је средиште o.

2. Обрнуто: Две равне слике, у којих су две и две дужи по реду пропорционалне и два и два угла по реду једнака, могу се увек положити на зрачни сноп тако, да сваке две тачке, које одговарају једна другој, падну на исте зраке, било на истој страни или на супротним странама од темена, и да имају од темена пропорционалне раздаљине (сл. 70.).

Доказ. Нека је

$$AB : ab = AC : ac = BC : bc = \ldots$$

и угао $ABC = abc$, $BAC = bac$, $BCD = bcd\ldots$



Сл. 70.

Кад се те две слике положе једна према другој тако, да буду две дужи једне слике, које се секу у једној тачки, у истом смислу паралелне с дужима које им у другој слици одговарају, онда ће због тога што су дужи по реду пропорционалне а углови по реду једнаки, и сваке друге две дужи, које одговарају једна другој, бити у истом смислу паралелне.

А кад се две слике налазе у таквом положају, да су им две и две дужи, које одговарају једна другој, паралелне, онда се све праве, повучене кроз две и две тачке које одговарају једна другој, морају сећи у једној заједничкој тачки.

Нека се зраци Aa и Bb секу у тачки S. Ако Cc не би прошло кроз S, него би секло Bb у S', онда би (по чл. 115.) било

$AB : ab = SB : Sb$ и $BC : bc = S'B : S'b$; па како је $AB : ab = BC : bc$, то би било и $SB : Sb = S'B : S'b$, одакле излази $(SB - Sb) : (S'B - S'b) = SB : S'B$, или $Bb : Bb = SB : S'B$, дакле $S'B = SB$. Дакле тачка S' мора бити идентична са S, тј. Cc мора проћи кроз тачку S. Исто тако излази, да и права Dd мора проћи кроз S, и да су према томе SA, SB, SC, SD... зраци једног снопа.

А тада је на основу чл. 113. и

$$SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \dots$$

Доказ остаје исти, кад су слике положене тако, да су им две и две дужи у супротном смислу паралелне.

119. Две равне слике, које се на какав зрачни сноп могу положити тако, да им две и две тачке, које одговарају једна другој, леже на истом зраку и да су им раздаљине од темена пропорционалне, називају се сличне ($\sim$), а у таквом положају још и перспективне.

Сваке две тачке, које одговарају једна другој, називају се хомологе тачке; исто тако две дужи (стране, дијагонале, висине, полупречници), које одговарају једна другој, називају се хомологе дужи.

Кад су две сличне слике у перспективном положају; онда су им хомологе дужи у истом или у супротном смислу паралелне.

Тачка, у којој се секу праве повучене кроз хомологе тачке две сличне слике у перспективном положају, назива се тачка сличности тих слика, и то спољашња или унутрашња, према томе да ли су хомологе тачке на истој или на супротним странама те тачке; у првом случају су хомологе дужи у истом, а у другом у супротном смислу паралелне. Сваки зрак, повучен кроз две хомологе тачке, зове се зрак сличности.

Стална размера раздаљйна̂ двеју хомологих тачака од тачке сличности назива се експоненат сличности или модуо сличних слика. Он је једнак и са сталном размером двеју хомологих дужи у сличних слика. Кад се гледа на положај тих раздаљина, онда је код спољашње тачке сличности модуо позитиван, а код унутрашње негативан. Ако је модуо $= +1$, онда су слике подударне; ако је -1, онда су оне центрично-симетричне.

Последице. *a)* У сличних слика су хомологе дужи пропорционалне, а њима захваћени углови једнаки.

b) Свака два круга слична су и леже перспективно.

Додатак. У овом тумачењу сличних слика налазе се тачнија обележја у чл. 3. исказаног појма о сличности, које је тамо поменуто само као једнакост облика.

Сличност троуглова.

120. Два су троугла слична, кад су им хомологе стране пропорционалне и углови, захваћени тим странама по реду једнаки. (чл. 118. и 119.).

Теорема. Кад се у троуглу повуче паралелна с једном страном, онда је дани троугао сличан троуглу који је том паралелном одсечен. (сл. 71.).

Доказ. Пропорционалност стра́на̂ у оба троугла јасна је по чл. 115., а једнакост углова излази из чл. 24., *c*.

По горњој дефиницији изгледа да су два троугла слична, ако су испуњене ових 6 погодаба: ако троугли имају три пара једнаких углова и три пара сразмерних страна. Тих 6 погодаба своде се међутим на 4; јер, из једнакости два пара углова излази да су једнаки и трећи, а из једнакости размере два пара хомологих страна са размером трећег пара излази да су и прве две размере једнаке. Ну може се доказати, да ни те 4 погодбе нису независне једна од друге, већ да су довољне две погодбе. Према томе се разликују четири правила о сличности.

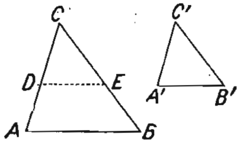
121. I. Правило о сличности. Троугли с два пара једнаких углова слични су.

Претпоставка. $A = A'$ и $C = C'$ (сл. 71.).

Доказати: $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Доказ. Кад се начини $CD = C'A'$ и повуче $DE \parallel AB$, онда је угао $CDE = A = A'$; с тога $\triangle DEC \cong A'B'C'$. Али је $\triangle ABC \sim DEC$ (чл. 120.), према томе и $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Последица. Два су троугла слична, кад су стране једног паралелне са странама другог троугла, или кад су једне на другима нормалне. (чл. 26.).



Сл. 71.

122. II. Правило о сличности. Кад су две стране једног троугла пропорционалне с двема странама другог троугла, а углови, захваћени тим странама, једнаки, онда су троугли слични.

Нека је (сл. 71.) $AC : A'C' = BC : B'C'$ и $C = C'$.

Кад се пренесе $CD = C'A'$ и повуче $DE \parallel AB$, биће $AC : CD = BC ; CE$ или $AC : A'C' = BC : CE$. Али је по претпоставци $AC : A'C' = BC : B'C'$, с тога $CE = B'C'$, дакле $\triangle DEC \cong A'B'C'$; па како је $\triangle ABC \sim DEC$, то је и $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

123. III. Правило о сличности. Кад су две стране једнога троугла пропорционалне с двема странама другог троугла, а углови наспрам већих страна једнаки, онда су ти троугли слични.

Доказ је с погледом на чл. 39. сличан оному у чл. 122.

124. IV. Правило о сличности. Кад су три стране једног троугла пропорционалне с трима странама другог троугла, онда су ти троугли слични.

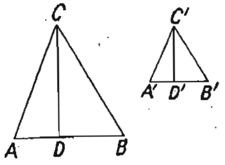
Нека је (сл. 71.) $AC : A'C' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

Кад се начини $CD = C'A'$ и повуче $DE \parallel AB$, онда је $AC : CD = AB : DE$ и $AC : CD = BC : CE$ или $AC : A'C' = AB : DE$ и $AC : A'C' = BC : CE$.

Кад се ове две пропорције упореде с онима у претпоставци, онда излази $DE = A'B'$ и $CE = B'C'$, дакле $\triangle CDE \cong A'B'C'$; па како је $\triangle ABC \backsim CDE$, то је и $\triangle ABC \backsim A'B'C'$.

125. Теорема. У сличних троуглова хомологе су висине пропорционалне с хомологим странама.

Доказ. Нека је (сл. 72.) $\triangle ABC \backsim A'B'C'$, CD и $C'D'$ њихове хомологе висине, које одговарају хомологим странама AB и $A'B'$.

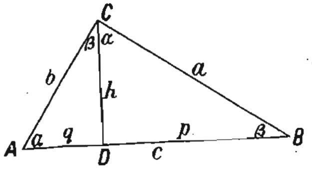


Сл. 72.

Троугли ACD и $A'C'D'$ имају два угла узајамно једнака, па су с тога слични; за то је $CD : C'D' = AC : A'C'$, дакле и $CD : C'D' = AB : A'B' = BC : B'C'$.

126. Теорема. Кад се у правоуглом троуглу из темена правог угла повуче нормала на хипотенузу, онда је 1. свака катета средња пропорционала између целе хипотенузе и њезина одсечка, оближња тој катети, 2. нормала средња пропорционала између оба одсечка хипотенузина.

Доказ. Нека је (сл. 73.) угао ACB прав, а $CD \perp AB$.



Сл. 73.

У троуглима ABC, ACD, CBD налазе се исти углови α, β, R; с тога је
$\triangle ABC \backsim ACD$, према томе $c : b = b : q$;
$\triangle ABC \backsim CBD$, према томе $c : a = a : p$;
$\triangle ACD \backsim CBD$, према томе $q : h = h : p$;

127. Ако a, b, c, h, p, q означују мерне бројеве појединих дужина сл. 73, онда из пропорцијâ, постављених у чл. 126, излази

$$b^2 = cq, \ a^2 = cp, \ h^2 = pq, \text{ и}$$
$$b = \sqrt{cq}, \ a = \sqrt{cp}, \ h = \sqrt{pq}.$$

Из $cq = b^2$ и $cp = a^2$ излази још, да је $cp + cq = a^2 + b^2$; али је $cp + cq = c\,(p + q) = c^2$; с тога $a^2 + b^2 = c^2$.

Дакле у сваком правоуглом троуглу квадрат мерна броја хипотенузина једнак је са збиром квадрата мерних бројева обе катете. (Питагорина теорема).

Додатак. Ако се под производом двеју дужи разуме производ њихових мерних бројева, дакле под квадратом неке дужи квадрат њеног мерног броја, онда се Питагорина теорема може краће казати овако:

У сваком је правоуглом троуглу хипотенузин квадрат једнак са збиром катетских квадрата.

У истом смислу може се тада и писати:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Докажи обрнуто правило.

Сличност многоуглова.

128. Два су многоугла слична, кад су им хомологе стране пропорционалне и њима захваћени угли по реду једнаки (чл. 119).

Из овог тумачења и чл. 118 излазе правила:

1. У сличних многоуглова хомологе дијагонале пропорционалне су с хомологим странама.
2. Хомологе дијагонале деле сличне многоугле на сличне троугле.
3. Многоугли, који се на један исти начин могу поделити на једнак број сличних троуглова, слични су.
4. Обими сличних многоуглова пропорционални су с хомологим странама.

Ако је q модуо, онда је

$$AB = A'B' \cdot q, \quad BC = B'C' \cdot q \cdots\cdots;$$

с тога

$$AB + BC + \cdots\cdots = (A'B' + B'C' + \cdots\cdot)\,q \text{ и}$$
$$(AB + BC \cdots\cdot) : (A'B' + B'C' + \cdots\cdot) = AB : A'B' = BC : B'C' = \cdots$$

5. Правилни многоугли с једнаким бројем страна слични су.

IV. Правила о сличности, примењена на круг.

129. Теорема. Кад се из једне тачке на кругу повуку тетиве до крајњих тачака једног пречника, и на тај пречник спусти нормала из тачке, онда је 1. свака тетива средња пропорционала између целог пречника и његова одсечка, оближња тој тетиви; 2. нормала средња пропорционала између оба одсечка на пречнику.

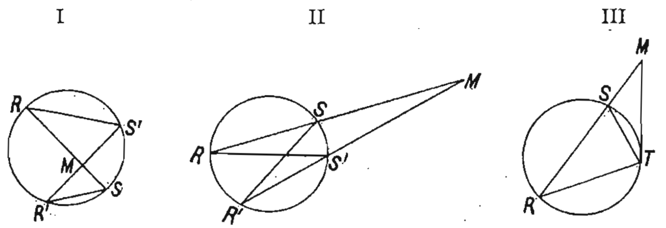
(Излази из чл. 83 и 126).

130. Кад се из једне тачке, која се налази у кругу или изван круга, повуче једна сечица, онда се дужи између те тачке и оба пресека с кругом називају одсечци те сечице.

Теореме. 1. Кад се из једне тачке повуку две сечице једног круга, онда производ одсечака на свакој сечици има исту вредност.

2. Кад се из неке тачке повуку две сечице и једна тангента кругу, онда је тангента средња пропорционала између оба одсечка те сечице.

Доказ за 1. Кад се (сл. 74, I. и II) повуку дужи RS' и $R'S$, онда је угао $MRS' = MR'S$ (чл. 83), с тога $\triangle MRS' \backsim MR'S$, па зато $MR : MR' = MS' : MS$ или $MR' \cdot MS' = MR \cdot MS$.



Сл. 74.

Доказ за 2. Кад се повуку (сл. 74, III) дужи RT и ST, онда је угао $MRT = MTS$ (чл. 83), с тога $\triangle MRT \backsim MTS$, дакле $MR : MT = MT : MS$ или $MT^2 = MS \cdot MR$.

Стални производ $MR \cdot MS$ (сл. 74) оба одсечка на сечици, која је повучена из дане тачке M, назива се потенција тачке M у односу на дати круг. Ако је тачка M изван круга, онда се одсечци MR и MS рачунају у истом правцу, с тога су оба позитивна, дакле и потенција позитивна. За сваку тачку у кругу рачунају се одсечци у супротном правцу од M, те је с тога потенција у том случају негативна. За сваку тачку на периферији потенција је нула.

Задатак.

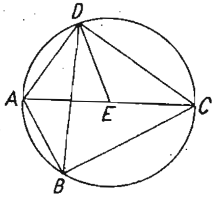
Ако је c централна раздаљина неке тачке, r полупречник круга, онда се може доказати, да је за сваку тачку $a)$ изван круга потенција $c^2 - r^2$, $b)$ у кругу потенција апсолутно $= r^2 - c^2$.

131. Теорема. У сваком тетивном четвороуглу производ дијагона́ла̂ једнак је са збиром произво́да̂ две и две супротне стране (Птоломејева теорема) (сл. 75).

Доказ. Ако се напрта угао $CDE = ADB$, онда из једнакости углова ACD и ABD (чл. 83) излази, да је $\triangle ECD \backsim ABD$, с тога $EC : CD = AB : BD$, или $EC \cdot BD = AB \cdot CD$.

Исто тако је $\triangle AED \backsim BCD$, с тога $AE : AD = BC : BD$, или $AE \cdot BD = AD \cdot BC$.

Према томе је $EC \cdot BD + AE \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, или $(EC + AE) \cdot BD = AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

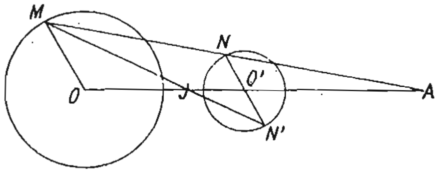


Сл. 75.

Какво правило вреди за уписан правоугаоник?

132. Теорема. Кад се у два круга крајње тачке свака два полупречника, који су у истом или у супротном смислу паралелни, повуку праве линије, онда се оне све секу у једној тачки на продуженој средишњој раздаљини или у једној тачки саме те раздаљине.

Ова је теорема последица чл. 118; ну ми ћемо је овде још нарочито доказати.



Сл. 76.

Нека је OM (сл. 76) са $O'N$ у истом, а са $O'N'$ у супротном смислу паралелно. Ако се стави $OM = R$, $O'N = O'N' = r$ и $OO' = c$, онда је

$$\frac{AO}{AO'} = \frac{R}{r} \text{ и } \frac{JO}{JO'} = \frac{R}{r}, \text{ с тога и}$$

$$\frac{AO}{AO - AO'} = \frac{R}{R - r} \text{ и } \frac{JO}{JO + JO'} = \frac{R}{R + r}, \text{ дакле}$$

$$AO = \frac{c\,R}{R - r} \text{ и } JO = \frac{c\,R}{R + r}$$

Како је $AO' = AO - c$ и $JO' = c - JO$, то је

$$AO' = \frac{c\,r}{R - r} \text{ и } JO' = \frac{c\,r}{R + r}.$$

Како вредности ових израза не зависе од положаја паралелних полупречника, па су према томе константне, то излази отуд да се у тачки A секу све праве, повучене кроз крајње тачке свака два у истом смислу паралелна полупречника; а у тачки J све праве, повучене кроз крајње тачке свака два у супротном смислу паралелна полупречника.

A је спољашња, а J унутрашња тачка сличности оба круга.

133. Зрак сличности, који сече један круг, мора сећа и други.

Нека спољашњи зрак сличности AM (сл. 76) сече круг O у тачки M. Ако се повуче OM, затим $O'N$ у истом смислу паралелно, онда права MN пролази кроз тачку A (чл. 132); према томе тачке M, N, A леже на једној правој, т.ј. AM сече и круг O' у тачки N.

Исто тако доказује се то правило и за унутрашњи зрак сличности JM.

Последице. *a)* Ако један зрак сличности има с једним кругом две заједничне тачке, онда он мора сећи и други круг у двема тачкама, т.ј. он је заједничка сечица оба круга.

b) Ако један зрак сличности има с једним кругом само једну заједничку тачку, онда он има и с другим кругом само једну заједничку тачку, т.ј. он је заједничка тангента оба круга, и то спољашња или унутрашња, како је кад зрак сличности споља или изнутра.

c) Ако зрак сличности нема ни једне заједничке тачке с једним кругом, онда он нема ни с другим кругом заједничке тачке, т.ј. он је изван оба круга.

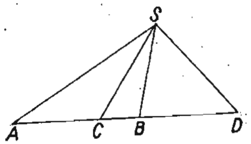
V. Хармонијска подела дужи.

134. Нека су SC и SD (сл. 77) симетрале једног унутрашњег и оближњег спољашњег угла у троуглу ASB.

Тада је (по чл. 117) $CA : CB = AS : BS$ и $DA : DB = AS : AS$; с тога:

$$CA : CB = DA : DB.$$

Према томе лежи тачка C на дужи AB, а D на њеном продушку, тако да су њихове раздаљине од крајњих тачака те дужи управо пропорционалне. Каже се, да је дуж AB тачкама C и D подељена хармонијски. Разменом спољашњих чланова у горњој пропорцији добија се: $DB : CB = DA : CA$ или $BD : BC = AD : AC$; т. ј. и дуж CD подељена је хармонијски тачкама A и B.



Сл. 77.

Тачке A, C, B, D зову се хармонијске тачке и то A и B, исто тако C и D, хармонијски спрегнуте тачке; и то, C је унутрашња а D спољашња тачка за дуж AB; исто тако је тачка B унутрашња, а A спољашња тачка за дуж CD.

Ако је $AC = BC$, где лежи тачка D која је хармонијски спрегнута с тачком C? Кад се C примиче тачки B, како се креће D?

Како се над AB могу конструисати бескрајно многи троугли, и на сваки се може применити конструкција сл. 77, то се могу наћи бескрајно многи спрегови тачака C и D, који хармонијски деле дуж AB; размера $CA : CB$ мења се с положајем тачке C.

135. Хармонијски зраци.

Четири зрака, повучена из тачке S кроз четири хармонијске тачке, зову се хармонијски зраци; два су зрака спрегнута, кад пролазе кроз две спрегнуте тачке. Сва четири зрака чине један хармонијски сноп зракова. Из претходних тумачења излази:

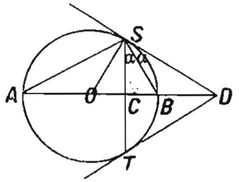
Симетрале једног угла у троуглу и његовог упоредног угла деле супротну страну хармонијски, и граде са оне друге две стране један хармонјски сноп зракова.

136. Из чл. 132 излази (сл. 76)

$$JO : JO' = R : r$$
$$AO : AO' = R : r; \text{ дакле}$$
$$JO : JO' = AO : AO'; \text{ тј.}$$

Унутрашња и спољашња тачка сличности за два круга деле њихову централну раздаљину хармонијски.

137. Кад се из једне тачке ван круга повуку дирке и сечица кроз средиште, онда је пречник, који се поклапа са сечицом, хармонијски подељен тачком из које су повучене дирке и тачком у којој га сече додирна тетива.



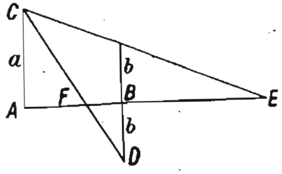
Сл. 78.

Нека је (сл. 78) лу̑к BS = лу̑ку BT, дакле $\alpha = \alpha'$; како је $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, то су SB и SA симетрале једног унутрашњег угла у троуглу CSD и упоредногa му спољашњег угла. С тога је CD тачкама A и B, исто тако AB тачкама C и D, хармонијски подељено.

138. Дану дуж AB поделити хармонијски.

a) Над AB ваља напртати какав било троугао ACB, па конструисати симетрале унутрашњег и спољашњег угла код C (чл. 134).

b) Кроз A и B повуци (сл. 79) паралелне, и пренеси на њих колике било дужи a и b, и то b у истом и у супротном смислу паралелно са a. Везујући њихове крајње тачке добијамо тачке E и F, које хармонијски деле дуж AB (Доказ). Из те конструкције види се лако, да је тачно правило у чл. 136.



Сл. 79.

c) Над AB, као над пречником, ваља описати круг и извршити конструкцију сл. 78.

Задатак је неодређен. Он постаје одређен, чим се дâ *a)* размера по којој ваља поделити дану дуж, *b)* унутрашња или спољашња деона тачка. За овај други случај изврши конструкције под *b)* и *c)*.

139. Задаци.

1. Дану дуж подели хармонијски по размери $m : n$.

2. У сваком је трапезу права, која везује средине паралелних страна, хармонијски подељена тачком у којој се дијагонале секу, и тачком у којој се непаралелне стране секу.

3. Шта је геометријско место свих тачака S (сл. 77) чије раздаљине од двеју датих тачака A и B стоје у одређеној размери?

Геометријско је место круг коме је пречник CD, ако тачке C и D деле дуж AB хармонијски по размери $AS : BS$ (сл. 77, и чл. 83 *e)*).

4. Конструиши троугао, кад је дата једна страна његова, висина која одговара тој страни, и размера осталих двеју страна.

5. Конструиши троугао, кад је дата једна страна његова, супротан јој угао, и размера других двеју страна.

6. Одреди геометријско место свих тачака, из којих се дужи AC и CB (сл. 77) виде под једнаким углима.

7. На једној правој три су дужи: AB, BC, CD. Нађи тачку из које се све три дужи виде под једнаким угловима.

VI. Конструктивни задаци.

1. Основни задаци.

140. За три дане дужи, a, b и c, наћи четврту пропорционалу.

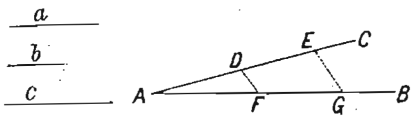
Напрта се какав било угао BAC (сл. 80), пренесе $AD = a$, $DE = b$, $AF = c$, повуче DF и $EG \parallel DF$; тада је FG четврта пропорционала за a, b и c.

2. За две дане дужи a и b конструисати трећу непрекидну пропорционалу.

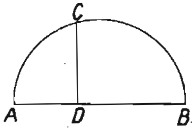
Решава се као зад. 1. кад се стави $c = b$.

3. За две дане дужи a и b конструисати средњу пропорционалу.

Напрта се (сл. 81) AB и подигне $DC \perp AB$; тада је DC средња пропорционала између AD и DB.



Сл. 80.



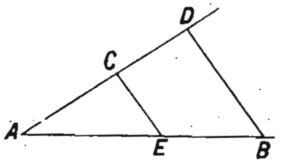
Сл. 81.

Како би се могао друкчије решити тај задатак, по чл. 129?

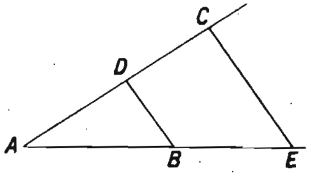
4. *a)* Дану дуж AB (сл. 82) поделити по размери $m : n$ изнутра, т.ј. тако, да раздеона тачка буде између A и B.

Начини се $AC = m$, $CD = n$, веже D са B и повуче $CE \parallel DB$. Тада је $AE : EB = m : n$.

b) Дану дуж AB (сл. 83) поделити по размери $m : n$ с поља т.ј. тако, да раздеона тачка буде на продуженој AB



Сл. 82.



Сл. 83.

Начини се $AC = m$, $CD = n$, веже D са B и повуче $CE \parallel DB$. Тада је $AE : EB = m : n$.

Сличним конструкцијама као под 4 *a)* и 4 *b)* може се решити и задатак, да се дана дуж у прописаној размери смањи или повећа.

5. Дану дуж AB поделити на делове по размери $m : n : p \ldots..$

Кроз тачку A повуче се полузрак AX, на њега пренесу, пошав од тачке A, дужи које стоје у размери $m : n : p \cdots$, па се даље ради као у зад. 13 чл. 95.

6. Конструисати троугао сличан даноме троуглу ABC (сл. 71).

Конструкција се може, с погледом на правила о сличности, извршити на четири начина, али је најпростији овај: на једну, колику било дуж $A'B'$, треба код крајњих тачака, пренети углове A и B, чији се краци секу у C; тада је $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

Задатак је неодређен, а био би одређен тек онда, кад би се оним двема погодбама што су обухваћене појмом о сличности додала и трећа погодба, на пр. да дуж $A'B'$ има одређену величину.

7. Дата су два круга, повући им заједничку тангенту.

Одреди се (чл. 132) њихова спољашња и унутрашња тачка сличности, па се из њих повуку тангенте једном кругу; оне су уједно тангенте и другоме кругу.

Детерминација. Кад је један круг сасвим ван другога, онда су могућне четири заједничке тангенте, две спољашње и две унутрашње; кад се кругови додирују с поља, онда имају две спољашње и само једну унутрашњу тангенту; кад се кругови секу, онда су могућне само две, и то спољашње тангенте; додирују ли се кругови изнутра, онда је могућна само једна спољашња тангента; ако је један круг сасвим у другоме, онда није могућна ни једна заједника тангента.

2. Метода сличних слика.

141. Кад неки од оних комада, који су дати зарад конструкције какве слике, одређују облик њен, тако да су сличне све оне слике у којима се ти комади налазе, онда се такав задатак може решити методом сличних слика. Помоћу комада, који одређују само облик, нацрта се пре свега помоћна слика, ма које величине, али слична траженој слици; па се у тој слици конструише и дуж, хомолога оној дужи, која је дата али није употребљена при конструкцији помоћне слике; размера тих двеју дужи казује и размеру свакиx двеју других хомологих дужи у траженој и помоћној слици. Да би се задатак решио, ваља само нацртати страну (дијагоналу, висину) тражене слике као четврту пропорционалу за оне две дужи и хомологу страну (дијагоналу, висину) помоћне слике.

Облик неког троугла одређују два његова угла, или размера двеју страна и захваћен угао, или размера свих трију страна.

У примени ове методе није потребно да се конструише слика, која ће бити слична целој траженој слици; више пута довољно је да се конструише један део помоћне слике, само ако се из тог дела могу наћи један или више од оних комада, који одређују целу слику, те се употребом њиховом задатак своди на какав познати задатак.

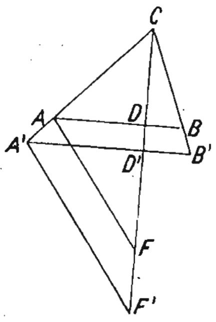
Размером висине према оближњој страни, или једним углом на основици, одређен је облик једноме од она два троугла, на која је троугао подељен висином.

Ова ће се метода још боље објаснити овим потпуно изведеним задатком:

Конструисати троугао, кад су дата два угла α и β и збир s висине из темена трећег угла и једне стране, оближње тој висини.

Анализа. Дати углови одређују облик траженом троуглу, тј. сваки троугао, у коме се налазе дати углови, сличан је траженом троуглу. Ако се у једном таквом сличном помоћном троуглу нацрта збир његове висине, повучене из темена трећег угла, и оближње јој стране, онда тај збир мора према даноме збиру стајати у истој размери, као буди која страна помоћног троугла према хомологој страни траженог троугла. С тога се може која било страна траженог троугла конструисати као четврта пропорционала за три познате дужи, а помоћу ње и датих углова лако је конструисати тражени троугао.

Конструкција. Нацрта се буди колика дуж $A'B'$ (сл. 84.), па се код њених крајњих тачака A' и B' пренесу дати углови α и β, тако да се добије троугао $A'B'C$. За тим се у том троуглу повуче висина CD', продужи за $D'F' = A'C$ и пренесе на CF' дуж CF једнака с даним збиром s. Ако се сад повуче $F'A'$, $FA \parallel F'A'$ и $AB \parallel A'B'$, онда је ABC тражени троугао.



Сл. 84.

Доказ. Како је $AB \parallel A'B'$, то је угао $BAC = B'A'C = \alpha$ и $ABC = A'B'C = \beta$. Даље је $CD : CD' = AC : A'C$, дакле и $(CD + AC) : (CD' + A'C) = AC : A'C = CF : CF'$, с тога и $(CD + AC) : CF' = s : CF'$, одакле излази $CD + AC = s$.

Детерминација. Задатак је увек одређен и само се један троугао може конструисати од датих комада.

VII. Правила и задаци за вежбање.

142. Теореме.

1. Висине у троуглу обрнуто су пропорционалне са странама на којима стоје нормално.

2. Сваке две висине у троуглу секу се тако, да је производ одсечака једне висине једнак с производом одсечака друге висине.

3. Кад се два троугла, који имају заједничку основицу и једнаке висине, пресеку трансверсалом која је паралелна с основицом, онда су одсечци ове трансверсале у троуглима једнаки.

4. Дијагонале у трапезу секу се пропорционално.

5. Кад се два круга додирују с поља, па се повуче њихова унутрашња и једна спољашња заједничка тангента, онда су три додирне тачке темена једног правоуглог троугла (чл. 83.).

6. Права, која везује средине паралелних страна у трапеза, пролази кроз пресек непаралелних страна, и кроз пресек дијагонала.

7. Права, повучена кроз пресек дијагонала у трапеза паралелно с његовим паралелним странама, преполовљена је том тачком.

8. Кад два троугла имају један пар једнаких и један пар суплементних углова, онда су стране наспрам једнаких углова пропорционалне са странама наспрам суплентних углова (чл. 48. зад. 23.).

9. Кроз буди коју тачку P на основици BC троугла ABC повучена је права PMN паралелно са тежишном линијом из тачке A; ако су M и N пресеци њени са странама AB и AC, онда је збир $PM + PN$ сталан (двогуба теж. линија).

10. У сваком су троуглу средиште описаног круга, тежиште и пресек висина у једној правој. Раздаљина двеју последњих тачака два пута је већа од раздаљине првих двеју. (Euler).

11. Праве, које везују подножја трију висина у троуглу, граде три троугла слична првобитном троуглу.

12. Ако су стране једног троугла једнаке с тежишним линијама другог троугла, онда су тежишне линије другог троугла $\frac{3}{4}$ од страна првога троугла. (Нека су у троуглу ABC средишње линије AD, BF, CE; треба повући $DG \parallel CE$ и $DG = CE$, па је тада у троуглу AGD страна $AG = BF$).

13. Кад се две стране каквог троугла пројектују једна на другу, онда су стране пропорционалне с пројекцијама.

143. Конструктивни задаци.

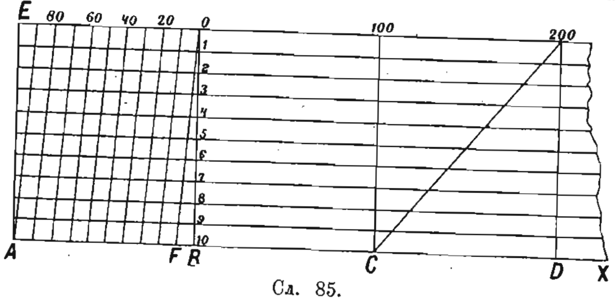
1. Даноме кругу уписати троугао, сличан каквом даном троуглу.

2. Кроз тачку, дату између кракова неког угла, повући дуж ограничену крацима тако, да она буде даном тачком подељена по размери $m : n$. Помоћу једне паралелне.

3. Конструисати полигон који ће бити сличан неком датом полигону тако, да његове стране према странама датога полигона стоје у одређеној размери $m : n$.

4. Конструисати размерник 1 : 1000.

На једну праву AX (сл. 85.) треба пренети 10 једнаких делова; у тачкамаа A, B, и у осталим раздеоним тачкама ваља подићи нормале на AX и повући с правом AX 10 паралелних у једнаким раздаљинама. За тим се подели AB и њој супротна дуж Eo на 10 једнаких делова, што се може лакше извршити, кад се у ма којој прегради повуче дијагонала, нпр. C 200. Напослетку се још повуку трансверсале кроз F и o, и редом кроз остале раздеоне тачке на AB и Eo. Ако нам оних 10 дужи, пренесених на AX, представљају 1000 једнаких делова, онда има у AB 100, у FB 10, у трансверсалама троугла FBo 1, 2, 3.... итд. таквих делова. Ако се дужина целе дужи AX узме нпр. за један метар, онда AB представља 1 десиметар, BF један сантиметар, а најмања трансверсала троугла FBo један милиметар.



Сл. 85.

Доказ се оснива на сличности троуглова.

Овакав трансверсални размерник конструисао је први пут Хомел у Лајпцигу (око половине 16. века).

5. Конструисати правоугли троугао, кад се зна један оштар угао и поред тога *a)* збир хипотенузе и висине која јој одговара, *b)* тежишна линија ка хипотенузи.

Овај задатак, као и конструктивне задатке који долазе, ваља решити по методи сличних слика.

6. Конструисати правоугли троугао кад је дата размера обе катете и поред тога *a)* хипотенуза, *b)* висина, која одговара хипотенузи.

7. Конструисати равнокрак троугао, кад се зна један угао и збир основице и висине.

8. Конструисати троугао кад се знају: *a)* два угла и збир једне супротне стране и висине која јој одговара; *b)* размера двеју страна, угао који оне захватају и збир (разлика) треће стране и висине која јој одговара; *c)* једна страна и њене размере према другим двема странама.

9. Конструисати четвороугао кад је дата једна дијагонала и она четири угла, које захвата друга дијагонала са странама.

10. Помоћу деоних троуглова конструисати троугао, кад су дате размере једне висине према оближњим странама и осим тога *a)* трећа страна; *b)* тежишна линија ка трећој страни.

11. Конструисати троугао кад је дата размера једне висине према једној оближњој страни, угао наспрам те стране и *a)* једна од оних других двеју страна, *b)* збир других двеју страна.

12. Конструисати правоугаоник из размере једне стране према дијагонали и збира друге стране и дијагонале.

13. Конструисати правоугаоник из размере двеју страна, кад је осим тога дата *a)* дијагонала, *b)* разлика (збир) дијагонале и једне стране.

14. Конструисати паралелограм из размере двеју страна и угла између тих страна, кад се поред тога зна *a)* висина, *b)* збир дијагонале и једне стране, *c)* збир обе дијагонале.

15. Дате су на кругу две тачке A и B, нађи на истом кругу трећу тачку X тако, да размера $AX : BX$ буде једнака с неком датом размером $m : n$.

16. Кроз дату тачку повуци сечицу даноме кругу тако, да спољашњи одсечак стоји према целој сечици у размери као $m : n$.

17. Датоме троуглу уписати правоугаоник сличан датом правоугаонику, тј. тако да његове стране стоје у датој размери $m : n$.

18. Кроз две дате тачке повуци круг тако, да он преполови периферију другог, датог круга.

19. Две дате тачке A и B вежи с једном тачком C на периферији датог круга тако, да тетива, коју захватају праве CA и CB, буде паралелна с правом AB.

20. Дате су две тачке A и B, нађи трећу тачку X тако да је размера $AX : BX$ једнака с датом размером $m : n$.

Шта је геометријско место тачке C?

21. Кроз дату тачку повуци круг који додирује две дате праве.

144. Рачунски задаци.

1. Нека су у правоуглом троуглу a и b катете, c хипотенуза; израчунај коју било од тих количина, кад су познате оне друге две (члан 127.).

2. У правоуглом троуглу зна се хипотенуза и размера једне катете наспрам друге; израчунај катете.

3. Из једне катете и размере друге катете наспрам хипотенузе израчунај ту другу катету.

4. Нека су a и b катете правоуглог троугла, а p и q оближњи им одсечци хипотенузе c, који постају кад се повуче висина h из темена правог угла; израчунај непознате количине, кад су дате *a)* b и q, *b)* p и q, *c)* p и h.

5. У правоуглом троуглу дата је хипотенуза и *a)* збир, *b)* разлика обе катете; колика је свака катета?

6. У правоуглом троуглу дата је једна катета и *a)* збир, *b)* разлика хипотенузе и друге катете; одреди хипотенузу и ту другу катету.

7. У равностраном троуглу нека је a страна, h висина; из једне од тих количина нађи другу.

Налази се $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Ако су R и r полупречници описаног и уписаног круга, онда из чл. 61. и 85. излази;

$$R = \frac{a}{3}\sqrt{3},\quad r = \frac{a}{6}\sqrt{3}.$$

8. Основица равнокраког троугла нека је a, крак b, висина h; из сваке две од тих количина одреди трећу.

9. У квадрату нека је a страна, d дијагонала; из једне од тих двеју количина одреди другу.

10. Дат је збир стране и дијагонале једног квадрата; нађи страну и дијагоналу.

11. Из тачке, чија је најкраћа раздаљина од неког круга a, повучена је тангента; колики је полупречник тог круга, кад тангента има дужину t?

12. Посматрач на површини Земљиној види на њој толико, докле досеже дирка повучена из његова ока; колика је видна даљина w, или колика је дирка, ако је h висина посматрачева ока над Земљом, а r Земљин полупречник?

13. Докле се може догледати са висине од 48 m.? ($r = 6378$ km.).

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК.

Површина праволинијских равних слика.

145. Да би се одредила површина равне ограничене слике, испитује се, колико се пута у даној површини садржи друга површина која је узета за јединицу. За јединицу површине узима се површина квадрата чија је страна једнака с дужинском јединицом. Ако се на пр. метар узме за дужинску јединицу, онда је квадратни метар *(m^2)* површинска јединица.

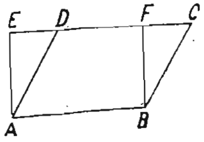
Две ограничене површине, које имају једнаку величину, називају се једнаке.

Како се површина какве слике не може директно измерити изабраном површинском јединицом, то се површина одређује рачуном.

I. Једнакост површина.

146. Теорема. Сваки косоугли паралелограм има површину једнаку с правоугаоником исте основице и висине.

Доказ. Нека је $ABCD$ (сл. 86) косоугли паралелограм. Кад се повуче AE $\perp AB$ и $BF \perp AB$, онда правоугаоник $ABFE$ и паралелограм $ABCD$ имају исту основицу и једнаке висине. Како је $\triangle ADE \cong BCF$, то је и $ABFD + ADE = ABFD + ACF$ т.ј. $ABFE = ABCD$.



Сл. 86.

Последица. Паралелограми једнаких основица и висина имају и површине једнаке.

147. Теорема. Троугао је половина паралелограма који има с њим једнаку основицу и висину.

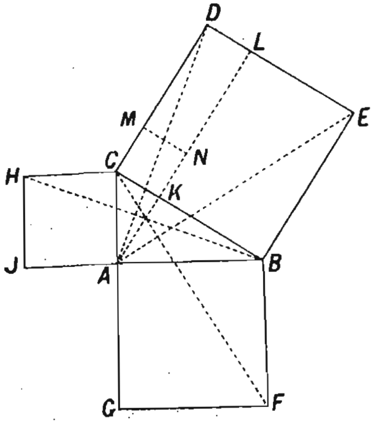
Излази из чл. 53, 1.

Последица. Троугли једнаких основица и висина имају и површине једнаке.

148. Теорема. Сваки трапез има једнаку површину с паралелограмом исте висине, коме је основица полузбир паралелних страна трапезових.

Доказ се оснива на чл. 57, 1.

149. Теореме. У сваком је правоуглом троуглу *a)* квадрат сваке катете једнак с правоугаоником од целе хипотенузе и пројекције те катете на хипотенузи; *b)* квадрат над хипотенузом једнак са збиром катетских квадрата; *c)* квадрат висине, која одговара хипотенузи, једнак с правоугаоником хипотенузиних одсечака.



Сл. 87.

Доказ. *a)* Кад се из A (сл. 87) повуче на BC нормала AK и продужи до L, онда су правоугаоници $BELK$ и $CDLK$ једнаки с квадратима $ABFG$ и $ACHJ$. Јер, кад се повуче AE и CF, биће $\triangle ABE = \frac{BELK}{2}$ и $\triangle BCF = \frac{ABFG}{2}$ (чл. 147); па како је $\triangle ABE \cong FBC$, то је и $BELK = ABFG$.

Ако се још повуче AD и BH, онда је исто тако $\triangle ACD = \frac{CDLK}{2}$, $\triangle BCH = \frac{ACHJ}{2}$; па како је $\triangle ACD \cong HCB$, то је и $CDLK = ACHJ$.

b) Сабирањем налазимо:

$$BELK + CDLK = ABFG + ACHJ$$
$$\text{или } BC^2 = AB^2 + AC^2,$$

ако се квадрат над BC обележи са BC^2 (Питагорина теорема).

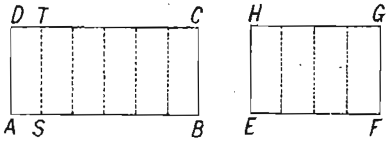
Тачност ове теореме у аритметичком смислу доказана је још у чл. 127.

c) Из троугла AKC излази $AK^2 = AC^2 - CK^2 = CDLK - CK^2 = DLNM$, ако је (сл. 87) $CM = CK$. Ну $DLNM$ је правоугаоник чије су стране једнаке с одсечцима CK и KB.

II. Размере површина.

150. Теореме. 1. Кад два правоугаоника имају једнаке висине, онда им површине стоје у размери као њихове основице.

Доказ. Нека су у правоугаоника $ABCD$ и $EFGH$ (сл. 88) висине AD и EH једнаке, а основице AB и EF самерљиве. Ако је у том случају AS заједничка мера основицама, и то $AB = m \cdot AS$ и $EF = n \cdot AS$, онда је $AB : EF = m : n$. Кад се подели AB на m, а EF на n делова, од којих је сваки једнак са AS, па се у раздеоним тачкама повуку нормале на основице, онда ће тиме и правоугаоник $ABCD$ бити подељен на m, а правоугаоник $EFGH$ на n правоугаоника, од којих је сваки подударан са $ASTD$; с тога је



Сл. 88.

$$ABCD = m \cdot ASTD \text{ и } EFGH = n \cdot ASTD,$$

према томе $ABCD : EFGH = m : n$, дакле

$$ABCD : EFGH = AB : EF.$$

Ако основице AB и EF нису самерљиве, онда се теорема доказује слично чл. 113 *b)*.

2. Кад два правоугаоника имају једнаке основице, онда им површине стоје у размери као њихове висине.

Излази из 1. пошто се у правоугаоницима $ABCD$ и $EFGH$ могу AD и EH сматрати као основице, а AB и EF као висине.

Последице. *а)* Кад два паралелограма, или два троугла, имају једнаке висине, онда им површине стоје у размери као њихове основице.

b) Кад два паралелограма, или два троугла, имају једнаке основице, онда им површине стоје у размери као њихове висине.

151. Теорема. Површине два правоугаоника стоје у размери као производи мерних бројева њихових основица и висина.

Доказ. Ако су B и b мерни бројеви основица, H и h мерни бројеви висина у два правоугаоника P и p, а нека је P' правоугаоник чија основица има мерни број b, а висина мерни број H, онда је (чл. 150).

$P : P' = B : b$

$P' : p = H : h$; с тога множењем

$P : p = B \cdot H : b \cdot h$.

То се правило казује обично овако (чл. 127, додатак):

Површине два правоугаоника стоје у размери као производи њихових основица и висина.

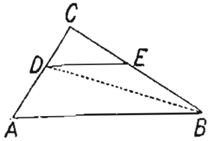
Последице. *а)* Површине два паралелограма, или два троугла, стоје у размери као производи њихових основица и висина.

b) Површине два квадрата стоје у размери као други степени њихових страна.

152. Теорема. Површине два троугла, који имају један заједнички угао, стоје у размери као производи оних страна које тај угао захватају.

Доказ. Троугли ABC и CDE (сл. 89) имају заједнички угао C. Кад се повуче BD, онда је

$$\triangle ABC : DBC = AC : CD$$
$$\triangle DBC : DEC = BC : CE$$



Сл. 89.

отуд множењем:

$$\sphericalangle ABC : DEC = AC \cdot BC : CD \cdot CE.$$

Последица. Два троугла, који имају један заједнички угао, имају и површине једнаке, ако су једнаки производи оних страна које захватају тај угао.

153. Теорема. Површине два слична троугла стоје у размери као квадрати хомологих страна.

Доказ. Нека је $\triangle ABC \backsim A'B'C'$ и $BC = a$, $AC = b$. $B'C' = a'$, $A'C' = b'$. Како је угао $C = C'$, то је по чл. 152.

$$\triangle ABC : A'B'C' = a \cdot b : a' \cdot b' = (a : a')\ (b : b').$$

Али је по претпоставци $b : b' = a : a'$, с тога се заменом налази:

$$\triangle ABC : A'B'C' = (a : a')\ \ (a : a') = a^2 : a'^2.$$

154. Теорема. Површине два слична полигона стоје у размери као квадрати хомологих страна.

Излази из чл. 128, 2 и чл. 153.

III. Одређивање површине.

155. Теорема. Површина правоугаоника једнака је с производом основице и висине.

Доказ. Нека је P правоугаоник коме је основица B, а висина H, а M нека је јединица површине, т.ј. квадрат чија је страна m дужинска јединица. Тада је по чл. 151.

$$\frac{P}{M} = \frac{B \cdot H}{m \cdot m} = \frac{B}{m} \cdot \frac{H}{m}$$

Овде је $\frac{P}{M}$ број који казује колико се пута површинска јединица садржи у правоугаонику, а $\frac{B}{m}$ и $\frac{H}{m}$ бројеви су који казују колико се пута m као дужинска јединица садржи у основици B и висини H тог правоугаоника.

Дакле, мерни број за површину правоугаоника једнак је с производом мерних бројева његове основице и висине.

Ово се правило казује краће у облику горње теореме.

Последица. Површина квадрата једнака је с другим степеном његове стране.

156. Теореме. 1. Површина косоуглог паралелограма једнака је с производом његове основице и висине (чл. 146 и 155).

2. Површина троугла једнака је с половином производа његове основице и висине (чл. 147 и 156, 1).

3. Површина трапеза *a)* једнака је с производом полузбира паралелних страна и висине (чл. 148), или *b)* једнака је с производом средње линије и висине (чл. 57, 1).

4. Површина четвороугла с нормалним дијагоналама једнака је с половином производа његових дијагонала.

_ Упореди четвороугао с правоугаоником, чије су стране једнаке с дијагоналама тог четвороугла.

5. Површина неправилног многоугла одређује се, кад се он дијагоналама подели на троугле, па се њихове површине саберу.

IV. Конструктивни и рачунски задаци.

157. Претварање праволинијских слика.

Претворити једну слику у другу значи конструисати другу тако, да има с пр̀вом једнаку површину, а да задовољава неке дане погодбе.

1. Дани троугао претворити у равнокрак коме је основица једна страна даног троугла.

Решава се помоћу геометријских места.

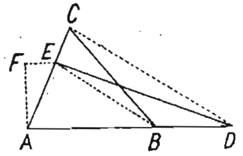
2. Дани троугао претворити у други, који има с даним троуглом једну заједничку страну, а на тој страни да буде дани угао α.

Решење помоћу геометријских места.

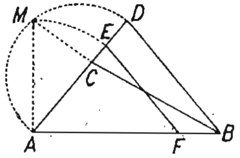
3. Троугао ABC (сл. 90) претворити у други који има с њим заједнички угао A, а основица да има прописану дужину c.

Пренесе се c на AB до D, повуче CD, за тим $BE \parallel CD$. Кад се веже D са E, добиће се тражени троугао ADE. Јер, $\triangle ADE = ABC$, пошто је и $\triangle BED = BEC$.

4. Троугао ABC (сл. 90) претворити у други, који има с њим заједнички угао A, али прописану висину h.



Сл. 90.



Сл. 91.

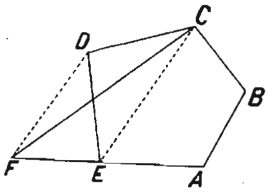
Ако се подигне $AF = h$ нормално на AB, повуче $FE \parallel AB$, $CD \parallel EB$ и веже E са D, биће $\triangle ADE = ABC$.

5. Троугао ABC (сл. 91) претворити у други који ће имати с њим заједнички угао A, а страна наспрам тог угла да буде паралелна с даном правом BD.

Анализа. Ако је AFE тражени троугао, дакле $EF \parallel DB$, онда је $AB : AF = AD : AE$. Да буде $\triangle ABC = AFE$, мора (по чл. 152 послед.) бити и $AB \cdot AC = AF \cdot AE$, или $AB : AF = AE : AC$. Дакле $AD : AE = AE : AC$, т.ј. AE је средња геометријска пропорционала за AD и AC.

Конструкција. За дужи AD и AC нађе се средња геометријска пропорционала AM, пренесе $AE = AM$, и повуче $EF \parallel DB$; тада је AFE тражени троугао.

6. Многоугао $ABCDE$ (сл. 92) претворити у други који има једну страну мање.



Сл. 92.

Од даног многоугла одсече се дијагоналом CE троугао CDE, повуче кроз D права $DF \parallel CE$; DF сече продужену AE у F; кад се повуче CF, онда је многоугао $ABCDE = ABCF$, јер су оба састављена од једнаких делова.

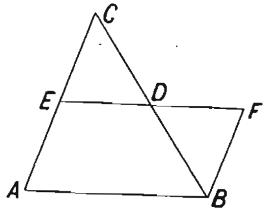
Понављањем ове конструкције може се сваки полигон претворити у троугао.

7. Претварање троугла у паралелограм с истом основицом.

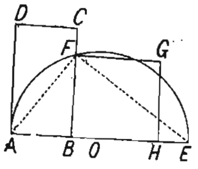
Начини се (сл. 93) $BD = CD$, повуче $EF \parallel AB$ и $BF \parallel AC$, тада је $ABFE = ABC$.

8. Правоугаоник $ABCD$ (сл. 94) претворити у квадрат.

Начини се $BE = BC$, опише се над AE полукруг који сече BC у F. Над BF конструисани квадрат $BFGH$ има површину једнаку с даним правоугаоником (чл. 149, c).



Сл. 93.



Сл. 94.

Примењујући конструкције 6, 7 и 8, можемо сваки многоугао претворити у квадрат (квадратура многоугла).

9. Конструисати квадрат, који је једнак *a)* са збиром, *b)* са разликом два дата квадрата.

a) Конструише се правоугли троугао чије су катете једнаке са странама даних квадрата; хипотенуза је страна траженог квадрата.

b) Решење се оснива на чл. 149.

10. **Конструисати квадрат једнак са збиром три или више квадрата.**

По зад. 9 *a)* треба прво сабрати два квадрата, за тим добивени квадрат с трећим итд.

158. Дељење праволинијских слика.

1. Дани троугао поделити, правима које полазе из једног темена, *a)* на једнаке делове, *b)* на делове по даној размери.

Треба поделити супротну страну *a)* на једнаке делове, *b)* по даној размери, па раздеоне тачке саставити са теменом.

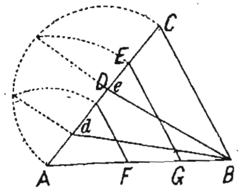
2. Троугао ABC поделити, правима које полазе из тачке M на страни AB, на три дела по размери $m:n:p$.

Троугао се подели (по 1.) правима CD и CE по датој размери, па се (по зад. 3 чл. 157) троугли ADC и BEC претворе у два троугла над основицама AM и BM.

3. Троугао ABC (сл. 95) поделити, правима које су паралелне са страном BC, на делове по даној размери $m:n:p$.

Кад се AC подели тачкама d и e по размери $m:n:p$, онда троугли ABd, dBe, eBC имају тражену величину. За тим се троугли ABd и ABe, задржавајући им угао A, претворе (по чл. 157, зад. 5) у троугле AFD и AGE у којима су стране FD и GE паралелне са BC; тада су FD и GE тражене раздеоне линије.

Ако је $m=n=p$, онда је $\triangle ABC$ подељен на једнаке делове.



Сл. 95.

4. Поделити паралелограм, правима које су с једном страном паралелне, *a)* на једнаке делове, *b)* по даној размери.

5. Поделити трапез, правима које секу паралелне стране, *a)* на једнаке делове, *b)* по даној размери.

159. Рачунски задаци.

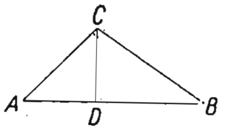
1. У равностраном је троуглу 1) страна a, 2) висина h; колика је површина p?

$$1)\ p=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \qquad 2)\ p=\frac{h^2}{3}\sqrt{3}.$$

2. У равнокраком је троуглу a основица, b крак; колика је површина p?

$$p=\frac{a}{4}\sqrt{4\,b^2-a^2}.$$

3. У троуглу су дате све три стране a, b, c; да се израчуна једна висина и површина.



Сл. 96.

Нека је у троуглу ABC (сл. 96) висина $CD=h$, а дуж $AD=x$.

Из троуглова ACD и BCD добија се $h^2=b^2-x^2$, $h^2=a^2-(c-x)^2$, с тога $b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$, а одатле $x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}$; према томе је $h^2=b^2-x^2=(b+x)\ (b-x)$,

$$\text{или } h^2=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}\right)\cdot\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,c}\right)=$$

$$=\frac{2\,bc+b^2+c^2-a^2}{2\,c}\cdot\frac{2\,bc-b^2-c^2+a^2}{2\,c}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2\,c}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2\,c}, \text{ дакле}$$

$$h=\frac{1}{2\,c}\sqrt{(b+c+a)\ (b+c-a)\ (a+b-c)\ (a-b+c)}$$

Ако се стави $a+b+c=2\,s$, биће

$$h=\frac{2}{c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Ако је p површина троугла ABC, онда је $p=\dfrac{c\cdot h}{2}$,

$$\text{или } p=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Изведи образац у случају кад је угао A туп.

Тај образац за троуглову површину зове се Херонов образац. (Херон александријски, око 100 г. пре Хр.)

Ако је $a=15$, $b=14$, $c=13$, онда је

$$p=\sqrt{21\,.\,6\,.\,7\,.\,8}=\sqrt{3\,.\,7\,.\,2\,.\,3\,.\,7\,.\,2\,.\,4}=3\,.\,7\,.\,2\,.\,2=84.$$

4. Дате су све четири стране a, b, c и d једног трапеза, да се израчуна његова висина и површина.

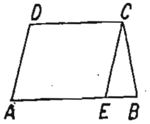
Нека је (сл. 97) $AB=a$, $CD=b$, $AD=c$ и $BC=d$, висина h и површина p. Кад се повуче $CE\parallel DA$, онда су у троуглу BEC стране $BE = a - b$, $BC = d$, $CE = c$, с тога (по зад. 3) висина h, која одговара страни BE:

$$h = \frac{1}{2(a-b)} \cdot \sqrt{(c+d+a-b)\,(c+d-a+b)\,(a-b+c-d)\,(a--b-c+d)}$$

Како је h и трапезова висина, а његова је површина

$$p = \frac{a+b}{2} \cdot h, \text{ то је}$$

$$p = \frac{a+b}{4(a-b)} \sqrt{(b+c+d-a)\,(a+c+d-b)\,(a+d-b-c)\,(a+c-b-d)}.$$



Сл. 97.

Димензије. За производ каже се да има n димензија, ако су му чиниоци мерни бројеви од n линија. Димензија каква количника разлика је између димензије његова дељеника и делитеља. Димензија какве степене количине налази се, кад се димензија основе помножи експонентом. Димензија корене количине налази се, кад се димензија поткорене количине подели кореним изложиоцем.

Линија је увек одређена изразом од једне димензије, а површина изразом од две димензије. Ако су изрази геометријских количина збирови или разлике, онда они морају бити хомогени, т.ј. сви чланови морају бити исте димензије. Код геометријских задатака може се по димензији резултата познати, да ли је задатак могућан.

Одреди димензије досадашњих образаца.

V. Правила и задаци за вежбање.

160. Правила за доказивање.

1. Праве, које везују тежиште једног троугла с његовим теменима, деле троугао на три једнака дела.

2. Кад се из једне тачке у равностраном троуглу повуку три нормале на његове стране, онда је збир тих нормала једнак с троугловом висином.

3. Кад се над странама правоугла троугла конструишу квадрати, па вежу њихова спољашња темена, онда се добивају три троугла; сваки од тих троуглова једнак је с првобитним.

4. Свака права, повучена кроз пресек обе дијагонале каква паралелограма, полови паралелограм.

5. Кад се из средине једне од непаралелних страна у трапеза повуку дужи до крајњих тачака оне друге стране, онда се добија троугао који је половина трапезове површине.

6. Кад се кроз свач етири темена каква четвороугла повуку паралелне с дијагоналама, онда постаје паралелограм два пута већи од четвороугла.

7. Кад се кроз буди коју тачку на дијагонали каква паралелограма повуку паралелне с његовим странама, онда су једнака она два паралелограма, која нису пресечена том дијагоналом.

8. Докажи конструкцијом, да су ови аритметички обрасци тачни и у геометријском смислу:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$
$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2.$$

9. Кад се над странама правоугла троугла, као над хомологим странама, конструишу слични многоугли, онда је многоугао над хипотенузом једнак са збиром многоуглова̂ над катетама (чл. 154 и 149).

10. Површина правоугла троугла једнака је с површином правоугаоника из оних одсечака хипотенузиних, које одређује додирна тачка уписаног круга.

11. Дат је троугао и око њега описан круг, па су полупречници ка његовим теменима продужени до кружне периферије; кад се крајње тачке тако добивених пречника вежу с троугловим теменима, добија се у кругу уписан шестоугао чија је површина два пута већа од површине датог троугла.

12. Кад два троугла имају једнаке висине, онда површине уписаних правоугаоника, који имају једнаке висине, стоје у истој размери као површине датих троуглова.

13. Над странама AB и AC каквог троугла нацртани су паралелограми $ABDE$ и $ACFG$, па је тачка H, у којој се секу DE и FG, везана с теменом A, и права HA продужена преко њена пресека M са страном BCтолико да је продужак $MN = HA$, па је конструисан над страном BC паралелограм, коме је друга страна $= MN$. — Докажи, да је овај трећи паралелограм једнак са збиром $ABDE$ и $ACFG$. (Clairaut).

Из те теореме изведи Питагорину.

14. Два четвороугла имају једнаке површине, кад су им дијагонале једнаке, и кад се секу под истим углом.

15. Свака права, повучена у трапезу кроз средину његове средње линије тако да сече паралелне стране, полови и трапез.

16. Површина трапеза једнака је с производом једне од његових непаралелних страна и раздаљине те стране од средине супротне јој стране (зад. 5).

17. Сва четири темена једног паралелограма везана су с једном тачком у његовој унутрашњости; докажи, да је збир два троугла, чије

су основице две супротне стране паралелограма, једнак са збиром она друга два троугла.

18. Два полигона, с парним бројем страна, имају једнаке површине, ако им стране имају исте средине.

19. У сваком је правоуглом троуглу збир реципрочних вредности катетских квадрата једнак реципрочној вредности квадрата оне висине која одговара хипотенузи.

20. Дат је правоугли троугао ABC с правим углом код A и углом од 60^0 код B. Над катетом AB нацртан је равностран троугао ABF, над катетом AC равностран троугао ACG, а $BCDE$ нека је квадрат хипотенузе BC. Израчунај површину четвороугла $DEFG$, кад се зна хипотенуза.

21. Од свих троуглова с једнаком основицом и једнаким обимом равнокраки је троугао највећи (Maximum).

Нека је a основица, s збир других двеју страна, и нека је, за случај да ове нису једнаке, $\frac{s}{2} + x$ већа, $\frac{s}{2} - x$ мања страна; тада је површина

$$p = \frac{1}{4} \sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}.$$

Што је мање x, тим је веће p; а највеће је онда кад је $x = o$, т.ј. кад је троугао равнокрак.

22. Од свих троуглова с једнаком основицом и једнаком површином, равнокраки троугао има најмањи обим (Minimum).

Из $p = \frac{1}{4} \sqrt{(s^2 - a^2)(a^2 - 4x^2)}$ излази $s = \sqrt{\frac{16\,p^2}{a^2 - 4\,x^2} + a^2}$.

Отуд излази да ће s, дакле и обим $o = s + a$, добити најмању вредност, кад буде $x = o$, т.ј. кад је троугао равнокрак.

161. Конструктивни задаци.

1. Претворити троугао у равнокрак, кад је дата *a)* основица, *b)* крак равнокраког троугла.

2. Косоугли троугао претворити у правоугли (зад. 5 у чл. 157), не мењајући му један угао.

3. Претворити троугао у правоугли, кад је дата *a)* једна катета, *b)* хипотенуза.

4. Дати троугао претворити у равностран троугао (зад. 2. и 5. у чл. 157).

5. Један троугао претворити у други, сличан трећему (зад. 5. у чл. 157).

6. Претворити један паралелограм у други, у којем се налази *a)* један дати угао, *b)* једна дата страна *c)* један дати угао и једна дата страна.

7. Дани троугао преполовити правом која је на једној страни нормална (зад. 1 у чл. 158 и горњи зад. 2).

8. Над датом дужи a конструиши правоугаоник, једнак са збиром два дата правоугаоника (зад. 13. чл. 160).

9. Над датом дужи a конструиши паралелограм, једнак са разликом два дата паралелограма.

10. Сабери два равнострана троугла (или више њих) у један, опет равностран троугао.

11. Конструиши квадрат који је 2, 3... n — пута већи од датог квадрата (чл. 157, 10).

12. Конструиши квадрат који је 2, 3... n — пута мањи од датог квадрата.

13. Разлику између два равнострана троугла представи опет као равностран троугао.

14. Претвори један паралелограм у други с прописаним странама a и b.

15. Претвори троугао у паралелограм с дијагоналама d_1 и d_2.

16. Претвори квадрат у правоугаоник с дијагоналом d.

17. Паралелограм претвори у ромб *a)* са страном a, *b)* с дијагоналом d.

18. Произвољан трапез претвори у равнокрак с истим паралелним странама и истом висином.

162. Рачунски задаци.

1. Дата је *a)* хипотенуза и једна катета, *b)* једна катета и висина која одговара хипотенузи; израчунај површину тог правоуглог троугла.

2. Израчунај површину правоуглог троугла, кад је дата:
a) хипотенуза и збир обе катете;
b) једна катета и збир хипотенузе и друге катете.

3. Позната је површина правоуглог троугла и висина која одговара његовој хипотенузи; израчунај његове стране.

4. Позната је површина и хипотенуза правоуглог троугла; одреди обе катете.

5. Израчунај стране правоуглог троугла, кад се знају обим и површина.

6. Израчунај површину квадрата, кад је позната његова дијагонала (36 cm.).

7. Израчунај површину неком правоугаонику, кад се зна страна (7·2 m) и дијагонала (12·5 m).

8. Познат је обим неког правоугаоника и површина његова, одреди стране.

9. Колика је страна равностраног троугла, кад му је површина 2 m^2?

10. Одреди површину равностраног троугла, кад је дат збир његове стране и висине.

11. Израчунај крак b равнокраког троугла, кад је дата основица a (2·34 m) и површина p (3·76 m^2).

12. Одреди површину равнокраког троугла, кад су дате:

a) висине;

b) основица и висина која одговара краку;

c) обим и висина која одговара основици.

13. Познате су две стране a и b једног троугла и висина h која одговара трећој страни; израчунај површину.

14. Израчунај површину троугла чије су стране 21 m, 17 m, 10 m.

15. Израчунај површину p троугла, кад су дате две стране a и b и тежишна линија m к трећој страни.

Продужи у $\triangle ABC$ тежишну линију CD за њену сопствену дужину до E, и повуци AE; тада је $\triangle ABC = AEC$, с тога по чл. 159, 3

$$p = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+2m)(b+2m-a)(a+2m-b)(a+b-2m)}.$$

16. Дате су све три тежишне линије једног троугла, m, m' и m''; израчунај површину p.

Како је (чл. 61 и сл. 38) $\triangle ABC = 3AOB$, то се добија по зад. 15.

$$p = \frac{1}{3}\sqrt{(m+m'+m'')(m'+m''-m)(m+m''-m')(m+m'-m'')}.$$

17. Дате су све три висине једног троугла, h, h' и h''; одреди му површину P.

$$P = \frac{1}{\sqrt{(p+p'+p'')(p'+p''-p)(p+p''-p')(p+p'-p'')}};$$

где је $p = \frac{1}{h}$, $p' = \frac{1}{h'}$, $p'' = \frac{1}{h''}$.

18. Делтоидове су дијагонале D (45 cm) и d (32 cm), колика му је површина?

19. Израчунај површину ромба, кад су дате *a)* обе дијагонале, *b)* страна и једна дијагонала.

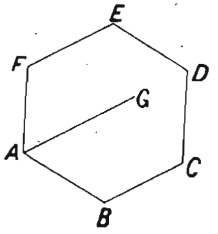
ПЕТИ ОДЕЉАК.

Правилни полигони и мерење круга.

I. Правилни полигони.

163. Теореме. 1. У правилном је полигону симетрала сваког угла, а тако исто и симетрала сваке стране, уједно и симетрала самог полигона.

Нека је AG (сл. 98) симетрала угла A. Обртањем за 180° око AG долази страна AB у правац AF, па како је $AB = AF$, то ће тачка B пасти на F. Како је $BC = FE$, а угао $B = F$, то ће пасти BC на FE итд. Исто тако доказује се и други део теореме.

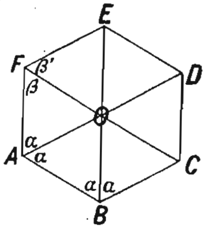


Сл. 98.

2. Правилан n-страни многоугао има n симетрала. Ако је n паран број, онда два и два супротна угла, а исто тако две и две супротне стране, имају исту симетралу, јер број темена на једној страни такве симетрале мора бити једнак с бројем темена на другој страни. Ако је n непаран број, онда се из истог разлога поклапа свака симетрала стране са симетралом супротног угла.

3. У сваком правилном полигону секу се све симетрале страна и све симетрале углова у истој тачки која је једнако удаљена *a)* од свих темена, *b)* од свих страна полигонских.

Нека су AO и BO (сл. 99.) симетрале углова A и B; оне се секу у тачки O (чл. 24, d). Ако се та тачка веже са осталим теменима, онда се добивају симетрале осталих углова. Јер $\triangle AOB \cong AOF$, с тога $\beta = \alpha$, па и $\beta' = \alpha$ и $OB = OA = OF$ итд. Троугли AOB, AOF, EOF.... равнокраки су, с тога морају симетрале полигонских страна проћи све кроз O; раздаљине те тачке од страна полигонских једнаке су као хомологе висине у подударних троуглова. O се зове средиште правилног полигона.



Сл. 99.

4. Сваки је правилан полигон с парним бројем страна централно симетрична слика; његово је средиште центар симетрије.

Повуци од средишта правилног n-страног многоугла дужи до појединих темена; колики је угао на темену, а колики на основици, сваког равнокраког троугла који тако постаје?

Израчунај те углове нарочито:

a) за равностран троугао; *b)* за квадрат;
c) за правилан петоугао; *d)* за правилан шестоугао;
e) за правилан десетоугао; *f)* за правилан дванаестоугао.

164. Теореме. 1. Сваком правилном многоуглу може се и уписати и описати круг.

Доказ је у чл. 163.

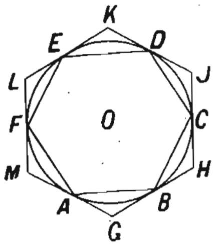
Раздаљина средишта правилног многоугла од темéнâ полупречник је описаног круга, а раздаљина средишта од странâ полупречник је уписаног круга.

2. Ако је кружна периферија подељена на n једнаких делова, онда *a)* тетиве између две и две узастопне раздеоне тачке граде уписан, а *b)* дирке у раздеоним тачкама граде описан правилан n-страни полигон.

Доказ. Нека је (сл. 100) лук $AB = BC = CD = \ldots.$

a) Ако се повуку тетиве AB, BC, CD,.... онда су у многоуглу $ABCD\ldots.$ стране AB, BC, CD,.... једнаке (чл. 78, 3) и углови A, B, C, D,.... једнаки су (чл. 83); с тога је полигон $ABCD\ldots$ правилан.

b) Ако се кроз A, B, C, D,... повуку дирке, које се секу у тачкама G, H, J, K,... онда су због једнаких страна AB, BC, CD,... и налеглих им углова (чл. 83) троугли AGB, BHC, CJD,... подударни и равнокаки; према томе су једнаки и збирови по два и два крака, дакле $GH = HJ = JK = \ldots.$ Из подударности тих троуглова излази да су једнаки и углови MGH, GHJ,....; дакле је и полигон $GHJK\ldots$ правилан.



Сл. 100.

165. Број комада који одређују правилан многоугао.

Кад се крајње тачке једне стране правилна полигона вежу са његовим средиштем, онда се добија одредбени троугао тог полигона.

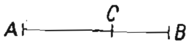
Тај се троугао може конструисати, кад је дата једна страна његова и кад је познат број полигонских страна.

Према томе правилан многоугао одређују два податка.

166. Страна правилнога, у кругу уписаног шестоугла једнака је с полупречником.

Доказ. Кад се повуку дужи од средишта до темèнâ шестоуглових, онда се добивају равнострани троугли, јер у њима сваки угао има по 60°.

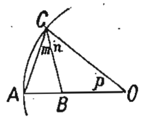
167. За неку дуж каже се да је подељена по непрекидној пропорцији, ако је њен већи одсечак средња пропорционала између целе дужи и мањег одсечка, тј. ако постоји (слика 101.) пропорција $AB : AC = AC : BC$ (златан пресек).



Сл. 101.

Теорема. Страна правилнога десетоугла, који је у кругу уписан, једнака је с већим одсечком полупречника, подељенога по непрекидној пропорцији.

Доказ. Нека је AC (сл. 102) страна уписаног правилног десетоугла. Кад се повуку полупречници OA и OC, онда је $AOC = 36°$, па с тога у равнокраком троуглу ACO угао $ACO = 72°$. Ако се преполови угао ACO, тако да је $m = n = p$, онда је (чл. 117) $CO : AC = BO : AB$, или $AO : BO = BO : AB$ и $BO > AB$.



Сл. 102.

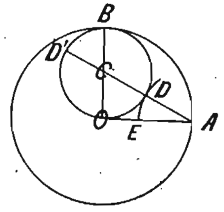
168. У кругу уписати правилан десетоугао.

Треба полупречник AO (слика 103) поделити непрекидно. Тога ради повуче се $BO \perp AO$, опише над BO као над пречником круг и повуче сечица AD' кроз A и C; кад се начини $AE = AD$, онда је AO тачком E подељено непрекидно.

Доказ.

$$AD' : AO = AO : AD,$$
$$(AD' - AO) : AO = (AO - AD) : AD,$$
$$AE : AO = EO : AE$$

или $AE^2 = AO \cdot EO$; с тога је AE страна уписаног правилног десетоугла.



Сл. 103.

169. 1. У правилним многоуглима с једнаким бројем страна стоје полупречници уписаних или описаних кругова у размери као две стране.

2. Обими правилних многоуглова с једнаким бројем страна стоје у размери као полупречници уписаних или описаних кругова.

170. Површина правилног многоугла једнака је с половином производа његова обима и полупречника уписаног круга.

Доказ. Нека су s, r и p мерни бројеви једне стране, полупречника уписаног круга и површине правилног n-угла. Ако се повуку дужи од средишта до свих темена, онда ће полигон бити подељен на n подударних троуглова. Површина једног таквог троугла је $\frac{sr}{2}$, с тога

$$p = n \cdot \frac{s \cdot r}{2} = \frac{ns \cdot r}{2},$$

где је ns мерни број многоуглова обима.

Површина правилног шестоугла је $\frac{3s^2}{2}\sqrt{3}$.

171. Задаци.

1. Подели периферију круга на *a)* 2, 4, 8... *b)* 3, 6, 12... једнаких делова.

2. Подели периферију круга на 5, 10, 20,... једнаких делова.

3. Подели периферију круга на 15, 30,... једнаких делова $\left(\frac{p}{15} = \frac{p}{6} - \frac{p}{10}\right)$.

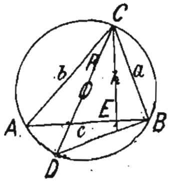
4. Око круга опиши правилан полигон од *a)* 4, 8... *b)* 3, 6, 12... *c)* 5, 10, 20... *d)* 15, 30... страна. Такве полигоне и упиши кругу.

5. Над датом страном конструиши правилан осмоугао и дванаестоугао.

II. Израчунавање тетивних и тангентних многоуглова.

172. Тетивни и тангентни троугао.

1. Нека је O (сл. 104) средиште, CD пречник круга описаног око троугла ABC, $CE \perp AB$, $CE = h$ и $OC = R$. Како је $\triangle CBD \sim CEA$, то је $CD : CB = AC : CE$, или $2R : a = b : h$; отуд $2hR = ab$, и $2chR = abc$, или $4pR = abc$, где p означује површину троугла ABC.



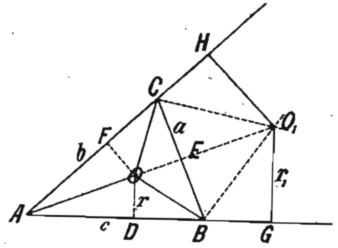
Сл. 104.

Према томе је

$$p = \frac{abc}{4R}, \text{ а } R = \frac{abc}{4p} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Овај се образац налази у једном астрономском делу индијског математичара Брамагупте (рођ. 598 после Хр.).

2. Нека је O (сл. 105) средиште, $OD = OF = OE = r$ полупречник круга уписаног у троуглу ABC, а p нека је површина тог троугла. Тада је



Сл. 105.

$$p = \triangle BOC + AOC + AOB, \text{ или}$$

$$p = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c) = rs, \text{ а } r = \frac{p}{s} \text{ или}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Додатак. Ако је O_1 средиште једног спољашњег додирног круга (чл. 85, додатак с), а O_1G његов полупречник, онда је

$$p = ABO_1 + ACO_1 - BCO_1 = \frac{cr_1}{2} + \frac{br_1}{2} - \frac{ar_1}{2},$$

према томе

$$p = \frac{r_1}{2}(b + c - a) = \frac{r_1}{2} \cdot 2(s-a) = r_1(s-a), \quad r_1 = \frac{p}{s-a}.$$

Исто тако налазе се полупречници она друга два спољашња додирна круга: $r_2 = \frac{p}{s-b}$, $r_3 = \frac{p}{s-c}$.

Из свију тих образаца излази:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a+s-b+s-c}{p} = \frac{s}{p} = \frac{1}{r}, \text{ и даље}$$

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{p^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{p^3}{r^2 s} = \frac{p^2}{r^2} \cdot \frac{p}{s} = \frac{p^2}{r},$$

$$\text{дакле } r r_1 r_2 r_3 = p^2.$$

Полупречници кругова, уписаних и описаних равностраном троуглу, налазе се најпростије директно (упореди чл. 144, зад. 7).

173. Уписан и описан квадрат.

Ако су s_4 и S_4 стране уписаног и описаног квадрата, а r полупречник круга, онда је

$$s_4 = r\sqrt{2}, \qquad S_4 = 2r,$$

и обрнуто

$$r = \frac{s_4}{2}\sqrt{2} = \frac{S_4}{2}.$$

174. Уписан правилан десетоугао.

Ако је $AO = r$ (сл. 103) полупречник, онда је

$$CO = \frac{r}{2},\ AC = s_{10} + \frac{r}{2},$$

с тога

$$\left(s_{10} + \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4},\ s_{10} + \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{5},$$

а само

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

175. Из стране s_n у кругу уписаног правилног многоугла одредити страну S_n око истог круга описаног правилног многоугла с толиким истим бројем страна.

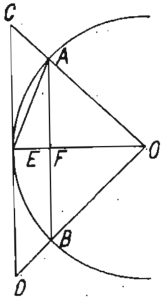
Ако је (сл. 106) $OA = r$ полупречник круга, $AB = s_n$ страна уписаног правилног n-угла, па се повуче $OE \perp AB$ и кроз E тангента која сече продужене полупречнике OA и OB у C и D, онда је $CD = S_n$ страна описаног правилног n-угла. Како је троугао

$$CDO \backsim ABO, \text{ то је}$$

$$CD : AB = OE : OF, \text{ или}$$

$$S_n : s_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}, \text{ дакле}$$

$$S_n = \frac{rs_n}{\sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}}.$$



Сл. 106.

За страну правилног шестоугла добија се

$$S_6 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\frac{r}{2}\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

176. Из стране s_n у даноме кругу уписаног правилног многоугла израчунати страну s_{2n} у истоме кругу уписаног правилног многоугла с два пута већим бројем страна.

Ако је r полупречник, s_n страна уписаног полигона, онда је (сл. 106) тетива $AE = s_{2n}$. По чл. 129, 1 имамо:

$$s^2_{2n} = 2r \cdot EF = 2r(r - OF) = 2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2_n}{4}}\right)$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2_n}{4}}\right)}$$

За страну уписаног дванаестоугла добија се:

$$s_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)} = \sqrt{2r\left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)} =$$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

III. Одређивање кружне периферије и површине.

177. Теорема. Кружна периферија налази се увек између обима у кругу уписаног и око њега описаног многоугла, ма колики био број полигонских страна.

Доказ. Кад се у кругу, коме је какав полигон уписан, свака два узастопна темена полигонска вежу с једном тачком на луку између тих темена, онда се добија нов уписан многоугао с два пута већим бројем страна, чији је обим већи од обима пређашњег полигона (чл. 34, 1). Кад се на тај начин увећава број страна уписаних многоуглова, онда с бројем страна расте и обим полигона, али се никад не може поклопити с кружном периферијом, јер су све полигонске стране, као тетиве, у кругу.

Кад је око круга описан какав полигон, па се између две и две узастопне стране његове повуче по једна тангента, онда се добија нов описани многоугао с два пута већим бројем страна, чији је обим мањи од обима пређашњег многоугла (члан 34, 1). Кад на тај начин број страна описаних многоуглова расте, онда обим опада, али се никад не може поклопити с кружном периферијом, јер су све полигонске стране, као тангенте, изван круга.

Кад је у неком кругу један правилан полигон уписан, а други око круга описан, онда се њихови обими приближују кружној периферији као заједничкој граничној вредности, кад број полигонских страна бескрајно расте, и то, обим уписанога приближује се растући, а обим описанога опадајући. Исто вреди и за површине уписаних и описаних многоуглова и круга.

На томе се оснивају ове дефиниције:

Дужина кружне периферије заједничка је гранична вредност за обиме уписаних и описаних правилних полигона, кад им број страна бескрајно расте; **кружна је површина заједничка гранична вредност за површине тих полигона.**

178. Периферије два круга стоје у размери као њихови полупречници, или као њихови пречници.

Излази из чл. 169 и појма о граничној вредности.

Последице. *a)* Ако су o и O периферије два круга, r и R њихови полупречничи, d и D њихови пречници, онда је $o : O = r : R$ и $o : O = d : D$. Из ове друге пропорције излази: $o : d = O : D$, тј. размера обима према пречнику стална је за све кругове. Та стална размера обележена је бројем π, тако да је $\frac{o}{d} = \frac{o}{2r} = \pi$.

b) Из последњих израза излази: $o = d\pi$ или $o = 2r\pi$, тј. кружна периферија једнака је с производом пречника и броја π.

c) за $r = 1$ биће $o = 2\pi$, дакле $\pi = \frac{o}{2}$. Број π може се, према томе, сматрати као мерни број полу-периферије оног круга, чији је полупречник $= 1$.

179. Израчунавање броја π.

Кад је полупречник $= 1$, онда је (по чл. 178, *c*) 2π мерни број целе кружне периферије. Да би се тај број приближно одредио, треба израчунати обим правилног уписаног и описаног n-страног многоугла, кад је $r = 1$. Децимали, у којима се та два обима слажу, вреде и за периферију круга; та приближна вредност биће у толико тачнија, што је веће n.

Ради примера да израчунамо број π на 4 децимала тачно. Ако израчунавање почнемо, као што је и најподесније, с правилним уписаним шестоуглом, чија је страна $s_6 = r = 1$, а обим $o_6 = 6$, онда се (члан 175) за описани шестоугао налази страна $S_6 = 1\cdot1547005\ldots$ а обим $O_6 = 6\cdot928203\ldots$ Из o_6 и O_6 налази се по чл. 175. и 176. обим o_{12} и O_{12}, а отуд o_{24} и O_{24} итд., док се не дође до $o_{1536} = 6\cdot283181\ldots$ и $O_{1536} = 6\cdot283194\ldots$ Како се ти обими разликују тек у петом децималу, то је на 4 децимала тачно $2\pi = 6\cdot2832\ldots$, с тога

$$\pi = 3\cdot1416\ldots$$

Радећи тако даље, налази се на 20 децимала тачно

$$\pi = 3\cdot14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots$$

Архимед је први одредио број π, и нашао $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$. Често се узима прва вредност, где се не тражи велика тачност; та је вредност тачнија од често употребљене вредности $3\cdot14$.

Ludolf von Ceulen. († 1610) израчунао је π са 35 децимала; по њему се π и назива Лудолфов број; тај је број бескрајан, непериодан десетни разломак.

Поступком, који је овде описан (а који је Архимед први применио на полигон од 96 страна), хоће само да се покаже могућност израчунавања броја π. У Вишој Математици показују се подесније методе.

180. Теореме. 1. Површина круга једнака је с половином производа његове периферије и полупречника.

Тачност ове теореме излази из чл. 170 и појма о граничној вредности.

Последица. Ако је r полупречник, o обим, p површина круга, онда је $p = o.\frac{r}{2}$ или, како је $o = 2r\pi$,

$$p = r^2\pi,$$

тј. површина круга једнака је с производом полупречникова квадрата и броја π.

2. Површине два круга стоје у размери као квадрати њихових полупречника.

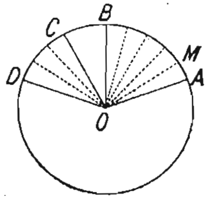
3. Ако су R и r полупречници два концентрична круга, онда је површина прстена $P = R^2\pi - r^2\pi = \pi\ (R^2 - r^2) = \pi\ (R + r)\ (R - r)$.

IV. Одређивање кружних лукова и кружних исечака.

181. Теорема. Луци једног истог круга стоје у размери као њихови средишни углови.

Доказ. Нека су луци AB и CD (сл. 107.) самерљиви; AM нека им је заједничка мера, и то $AB = m \cdot AM$, $CD = n \cdot AM$; дакле $AB : CD = m : n$. Кад се повуку полупречници ка свакој раздеоној тачки оба кружна лука, онда је и угао $AOB = m \cdot AOM$, угао $COD = n \cdot AOM$, с тога угао AOB : углу $COD = m : n$, дакле лу̑к AB : лу̑ку CD = угао AOB : углу COD.

Да ова пропорција вреди и онда, кад су AB и CD несамерљиви лукови, излази из члана 113, *b*.



Сл. 107.

182. Дужина кружног лука.

1. Ако је l дужина кружног лука, који припада средишном углу α, r полупречник круга, онда је по чл. 181.

$$l : r\pi = \alpha : 180,\ \text{с тога}\ l = r \cdot \frac{\alpha\pi}{180}\cdot$$

2. Ако је $r = 1$, онда је $l = \frac{\alpha\pi}{180}$. Дакле израз $\frac{\alpha\pi}{180}$ даје *дужину лука од α степена за полупречник 1*; тај израз обележићемо, ради краткоће, са *arc* α.

3. Дужина лука, кад је полупречник 1, узима се често као *мера* углу који му одговара, па се према томе ставља 2π место пуног угла, π место положеног, $\frac{\pi}{2}$ место правог угла, у опште *arc* α место угла α. Ну како се дужине и углови као разнородне количине не могу мерити једне другима, то се замењивање угла дужином лука има разумети тако, да се из дужине лука, који је мерен полупречником као јединицом, може несумњиво дознати број степена средишног угла који му одговара.

183. Теорема. *Сектори једног истог круга стоје у размери као средишни углови који им припадају.*

Доказ је сличан чл. 181.

184. Теорема. *Површина кружна исечка једнака је с половином производа дужине његова лука и полупречника.*

Доказ. Ако је p површина кружна исечка, r полупречник, α средишни угао, а l дужина лука на том исечку, онда је (по чл. 183) $p : r^2\pi = \alpha : 360$, дакле $p = \frac{r^2\alpha\pi}{360}$ или, како је $\frac{r\alpha\pi}{180} = l$, то је

$$p = \frac{lr}{2}.$$

Додатак. *Површина кружна сегмента*, кад је он мањи од полукруга, једнака је с разликом између површине кружна сектора који му одговара, и површине троугла између тетиве и оба полупречника; а кад је већи од полукруга, онда је његова површина једнака са збиром тих површина.

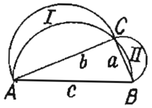
V. Задаци за вежбање.

185. А. *Правила за доказивање.*

1. Дијагонале тетивног четвороугла стоје у размери као збирови производа оних страна, које се стичу у њиховим крајњим тачкама.

Одреде се површине она два троугла, на која је четвороугао подељен једном дијагоналом, и то, с погледом на чл. 172, 1, из три стране и полупречника описанога круга; за тим се исто тако одреде површине она друга два троугла, на која је четвороугао подељен другом дијагоналом, па се стави да је збир прва два троугла једнак са збиром друга два.

2. Кад се над катетама правоуглог троугла, који је у полукругу уписан, опишу полукругови, онда је збир два месеца (чл. 89), који тако постају, једнак с површином правоуглог троугла (Хипократова теорема).



Сл. 108.

Површина троугла и оба мања полукруга (сл. 108) једнака је с површином великог полукруга и оба месеца, дакле $\frac{ab}{2} + \frac{b^2\pi}{8} + \frac{a^2\pi}{8} = \frac{c^2\pi}{8} + \mathrm{I} + \mathrm{II}$; а како је $a^2 + b^2 = c^2$, то је и $\frac{ab}{2} = \mathrm{I} + \mathrm{II}$.

3. Колики је збир оба месеца у зад. 2., ако је правоугли троугао равнокрак, а хипотенуза c.

4. Ако се над странама квадрата, који је у кругу уписан, опишу полукругови, онда је збир од четири месеца, који тако постају, једнак с површином квадрата.

5. Кад се пречник једног круга подели на произвољан број једнаких делова, па се над сваким делом као над пречником опише круг, онда је збир обима свију тих кругова једнак с периферијом првобитног круга.

6. Кад се пречник AB једног круга подели на три једнака дела $AC = CD = BD$, па опишу полукругови над AC и AD, и испод CB и BD, онда ће површина круга бити подељена на три једнака дела.

7. Дат је полукруг над пречником AB; у једној тачки C, узетој на AB, подигнута је на AB нормала до пресека M с полукругом, а над AC и BC описани су полукругови. Докажи да је полукруг над AB, смањен полукруговима над AC и BC, једнак с кругом коме је пречник CM (Архимед).

8. У квадранту AOB нацртана су два полукруга тако да је једноме пречник AO, а другоме BO. Пресек оба полукруга нека је C. Докажи 1.) да су тачке A, B, C у једној правој линији, 2.) да је површина сочива OC једнака с површином између лукова AC, BC и AB, 3.) да је површина између полупречника AO, лука AC и лука CO једнака $\frac{r^2}{4}$. $(A0 = r)$.

9. Нека су AB и CD два нормална пречника круга O; око тачке C описан је лук AMB полупречником CA; израчунај површину између лукова AMB и ACB.

10. Кад се у правоуглу троуглу повуче висина која одговара хипотенузи, па се у добивеним троуглима упишу кругови, онда је збир њихових површина једнак с површином круга који је уписан у прво-

битном троуглу (чл. 160, зад. 9.). — То вреди и за површине описаних кругова.

В. Конструктивни задаци.

1. Конструиши круг чија је периферија једнака *a)* са збиром, *b)* са разликом периферија два дата круга.

2. Конструиши круг чија је површина једнака *a)* са збиром, *b)* са разликом површина два дата круга.

3. Дати кружни прстен претвори у круг.

4. Нацртај круг који има 2, 3,... n — пута већу површину од датог круга.

5. Нацртај круг који има 2, 3... n — пута мању површину од датог круга.

6. Дати круг претвори у кружни прстен, кад је дат полупречник унутрашњег круга.

186. Рачунски задаци.

1. Нека је r полупречник, o обим, p површина круга; кад је позната једна од тих количина, израчунати оне друге две.

Дато: *a)* $r = 5{\cdot}28$ m; *b)* $o = 17{\cdot}75$ m; *c)* $p = 4{\cdot}0115$ dm^2; *d)* $r = 6{\cdot}2872\ldots$m; *e)* $o = 24{\cdot}8562\ldots$m; *f)* $p = 13{\cdot}402734\ldots$m^2.

2. Колика је брзина тачке на Земљину полутару услед њена обртања око осовине? Колика је брзина тачке у географ. ширини од 60^0? (полупречник полутарев 12756 km).

3. Точак од 2·5 m у полупречнику обрне се 40 пута у минуту, колика је брзина једне тачке на његову обиму?

4. Точак има у обиму 2 m; колико се пута мора обрнути у минуту, да би се тачке на периферији кретале брзином од 6 m?

5. Око два точка од 900 mm. и 600 mm у пречнику иде кајиш од 8 m дужине; колико се пута обрне мањи точак, а колико пута кајиш, кад се већи точак обрне 1000 пута.

6. Како се мења полупречник у круга, кад *a)* периферија, *b)* површина постане n — пута већа?

7. Периферије два круга стоје у размери $m:n$; у каквој размери стоје њихове површине?

8. Површине два круга стоје у размери $m:n$; у каквој размери стоје њихове периферије?

9. Доња површина на вентилу сигурности има 50 mm у пречнику; колики мора бити спољашњи притисак, да би се вентил подигао парном експанзијом од 6 атмосфера?

10. Површину круга, коме је полупречник r, ваља преполовити концентричним кругом; израчунај полупречник тог круга.

11. Површину круга треба да поделе два концентрична круга по размери 2 : 3 : 4. Колики су полупречници тих кругова?

12. Полупречник једног круга подељен је по размери $m:n$, па је кроз раздеону тачку повучен круг концентричан с датим кругом; израчунај делове данога круга.

13. Дата је тетива s и висина h њеног лука, израчунај периферију и површину круга.

Висина лука AB сл. 106 зове се EF.

14. Нека је r полупречник, α^0 средишни угао, а l дужина лука који одговара том углу, и најзад p површина сектора који одговара луку l; из две од тих количина израчунати оне друге две.

15. Израчунај дужину *arc* 1^0, *arc* 1', *arc* 1''.

16. Колико степена има лук, чија је дужина једнака с полупречником?

$$\varrho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57{\cdot}29578\ldots{}^0$$

17. Француска комисија на крају 18. века измерила је лук између Барцелоне и Динкерка и нашла је 551584·72 тоазе; колики је Земљин полупречник, ако се она сматра као лопта, а средишни угао који том луку одговара има 9^0 40' 25·7''? (1 тоаза = 1·949 m).

18. Кружни исечак има 15 m^2 површине, а полупречник је 3 m; израчунај средишни угао у том исечку.

19. Кружни исечак има 10 m^2 површине; израчунај полупречник, кад је средишни угао 24^0 12'.

20. Колики је средишни угао кружног исечка чија је површина једнака с површином *a)* уписаног квадрата, *b)* уписаног равностраног троугла?

21. Око једног темена равностраног троугла описан је круг троугловом висином, као полупречником; колики су делови, на које је троугао тако подељен?

22. Три једнака круга додирују се узајамно, израчунај површину између њих.

23. Израчунај површину сегмента, кад је тетива једнака с полупречником r, а сегменат *a)* мањи, *b)* већи од полукруга.

24. Колика је површина сегмента, кад му је тетива страна уписаног равностраног троугла?

25. Израчунај сегменат, одсечен страном уписаног правилног осмоугла.

26. Познате су периферије два круга, израчунај површину њихова прстена.

27. Позната је површина и ширина кружна прстена, колики су полупречници оба круга?

28. Колика је површина прстенова исечка, који одговара средишном углу од 48^0, а полупречници су 0·5 m и 0·4 m?

29. Стране једног троугла имају дужине: 21 m, 17 m, 10 m. Израчунај полупречнике уписаног, описаног и трију спољашњих додирних кругова. Израчунај и збир сегмената између троугла и описанога му круга.

30. Колики је полупречник једног спољашњег додирног круга код равностраног троугла?

31. Кругу, чији је полупречник r, уписан је и описан је *a)* равностран троугао, *b)* правилан шестоугао; израчунај површину између та два полигона.

32. Кругу, чији је полупречник r, уписан је равностран троугао; израчунај периферију и површину круга описаног око тог троугла.

33. Израчунај страну и површину у кругу уписаног и око круга описаног правилног осмоугла, кад је познат полупречник тог круга.

34. Позната је страна правилног десетоугла, уписанога у кругу чији је полупречник r; израчунај страну уписаног правилног петоугла (чл. 176).

35. Страна у кругу уписаног правилног петоугла хипотенуза је правоуглог троугла, коме је једна катета полупречник а друга је катета страна уписаног правилног десетоугла (Питагорина теорема).

36. У кругу полупречника r уписана су два равнострана троугла тако, да граде правилну шестоперу звезду. Докажи, да је свака страна једног троугла подељена странама другога на три једнака дела; израчунај површину те звезде као и унутрашњу површину, заједничку троуглима.

37. Познате су стране тетивног четвороугла, израчунај његове дијагонале (чл. 131 и 185, 1).

38. У кругу полупречника r уписан је правоугаоник чија је једна страна a; колика је површина тог правоугаоника?

39. У каквој размери стоје површине два равнострана троугла, кад круг, који је једном троуглу уписан, има површину једнаку с кругом који је око другог троугла описан.

40. У квадранту неког круга, чији је полупречник r, уписан је круг тако да додирује краке и лук тога квадранта; израчунај површину трећег круга, чији је полупречник збир квадрантова полупречника и полупречника уписанога му круга ($2\,r^2\,\pi$).

41. Основица неког правоугаоника једнака је са страном равностраног троугла, уписанога у кругу чији је полупречник r, а висина му је једнака са страном правилног шестоугла који је око истог круга описан; колики је обим оног круга, који има с тим правоугаоником једнаку површину ($2\,r\sqrt{2\,\pi}$).

Додатак Планиметрији.

Решавање конструктивних задатака по методи алгебарске анализе.

1. Геометријске конструкције алгебарских израза.

187. Кад се дане дужи изразе њиховим мерним бројевима, онда се и за друге дужи, које на неки одређен начин зависе од даних дужи, добивају одређени бројни изрази. Ако су на пр. a и b мерни бројеви катета правоуглог троугла, онда је $\sqrt{a^2 + b^2}$ бројни израз за хипотенузу. И обрнуто, бројном изразу облика $\sqrt{a^2 + b^2}$ може се дати геометријски значај, кад се он конструише као хипотенуза правоуглог троугла чије катете имају a и b дужинских јединица.

Конструкција дужи, чији је мерни број x одређен каквим алгебарским изразом, може се свести на један од ових главних случајева:

1. Ако треба конструисати $x = a + b$, онда се на неку дану праву пренесе $AB = a$, за тим у истом правцу даље $BC = b$; тако је збир $a + b$ представљен као једна дуж AC.

2. Да бисмо конструисали $x = a - b$, пренећемо на неку дану праву $AB = a$, за тим од тачке B у супротном правцу $BC = b$; дуж AC представља разлику $a - b$.

Ако је дуж $b > a$, дакле x негативно, онда се AC појављује од A у правцу који је супротан првобитно узетом правцу AB.

3. Израз $x = \frac{bc}{a}$, који постаје из пропорције $a : b = c : x$, конструише се као четврта пропорционала за три дате дужи a, b, c, по чл. 140, 1.

4. $x = \frac{b^2}{a}$ даје пропорцију $a : b = b : x$ и налази се као трећа непрекидна пропорционала за a и b. Конструкција се врши по чл. 140, 2.

5. $x = \sqrt{ab}$, постало из $x^2 = ab$, или из пропорције $a : x = x : b$, конструише се по чл. 140, 3 као средња пропорционала за дужи a и b.

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ конструише се као хипотенуза правоуглог троугла чије су катете a и b. Кад је $a = b$, онда се $x = a\sqrt{2}$ налази као хипотенуза равнокрако правоуглог троугла чија је катета a.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ конструише се као катета правоуглог троугла, коме је хипотенуза a, а друга катета b.

Ако је $b = \frac{a}{2}$, онда се $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ налази као висина равностраног троугла чија је страна a.

188. Примери.

1. $x = a - b + c$. Конструиши $m = a - b$, за тим $x = m + c$.

2. $x = \frac{abc}{df}$. Конструиши $m = \frac{ab}{d}$, за тим $x = \frac{mc}{f}$.

3. $x = \frac{ab + cd}{f}$. Конструиши $m = \frac{ab}{f}$, $n = \frac{cd}{f}$, за тим $x = m + n$.

4. $x = 2a - a\sqrt{2}$. Конструиши $m = a\sqrt{2}$, за тим $x = 2a - m$.

5. $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ страна је правилног десетоугла, уписаног у кругу полупречника r (чл. 168).

Конструкција: $x = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} - \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$.

6. $x = \sqrt{a^2 + bc}$. Конструиши $m = \sqrt{bc}$, за тим $x = \sqrt{a^2 + m^2}$.

7. $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Конструиши прво $m = \sqrt{a^2 + b^2}$, за тим $n = \sqrt{m^2 - c^2}$, и напослетку $x = \sqrt{n^2 + d^2}$.

8. $x = a\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 - a^2\sqrt{2}}$. Конструиши $m = a\sqrt{2}$, $n = \sqrt{am}$, за тим $x = \sqrt{m^2 - n^2}$.

2. Алгебарско решавање геометријских конструктивних задатака.

189. Ако решење каквог геометријског конструктивног задатка зависи од изналажења једне дужи, онда се може применити метода алгебарске анализе, по којој се за мерни број непознате дужи тражи алгебарски израз, па се он конструише геометријски.

Тога ради морају се пре свега погодбе данога задатка превести на језик алгебарских знакова; тражена дуж обележи се словом x, а дане количине другим словима, па се применом геометријских теорема нађе однос између x и познатих количина, и тако изведе једначина. Решавањем те једначине добија се за x алгебарски израз, који се опет мора свести на геометријско значење, тј. мора се конструисати геометријски.

У самој је анализи доказ, да је решење тачно. Детерминација се оснива на геометријском тумачењу нађеног бројног израза.

Решавање геометријских задатака алгебарском анализом показао је прво француски математичар Vieta (1540 — 1603).

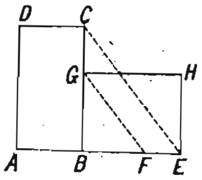
Израђени примери.

190. Задатак. Дани правоугаоник $ABCD$ (сл. 109.) претворити у други чија је једна страна дата.

Алгебарска анализа. Задатак ваља сматрати као решен чим је нађена дужина друге стране захтеваног правоугаоника. Ако ту непознату дужину назовемо x, а познату страну a, а у даном правоугаонику ставимо $AB = b$ и $BC = c$, онда због једнакости површинâ оба правоугаоника мора бити

$$ax = bc, \text{ с тога}$$

$$x = \frac{bc}{a}.$$



Сл. 109.

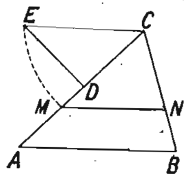
x је, дакле, четврта пропорционала за a, b и c.

Конструкција. Начини се $BF = AB = b$, повуче дуж EC и с њом паралелна FG, која сече BC у G. Тада је $BE : BF = BC : BG$ или $a : b = c : BG$; дакле $x = BG$, а $BEHG$ тражени правоугаоник.

Детерминација. Решење овог задатка могућно је увек, и то само на један начин.

191. Задатак. Троугао ABC (сл. 110) поделити на два једнака дела правом MN, која је паралелна с једном страном AB.

Анализа. Овде је главно да се нађе она тачка M, кроз коју ће се повући $MN \parallel AB$, дакле да се одреди дуж CM коју ћемо назвати x. Нека је $AC = b$, онда је $\triangle CMN \sim CAB$, с тога (по чл. 153) $\triangle CMN : CAB = x^2 : b^2$.



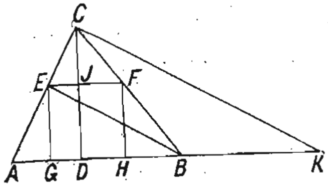
Сл. 110.

Да би био $\triangle CMN = \frac{CAB}{2}$, мора бити и $x^2 = \frac{b^2}{2} = b \cdot \frac{b}{2}$; према томе је x средња пропорционала за b и $\frac{b}{2}$.

Конструкција. Види се из сл. 110.

192. Задатак. У даноме троуглу ABC (сл. 111) уписати квадрат.

Анализа. Да би се тражени квадрат $EFGH$ могао конструисати, очевидно је довољно да се на страни AC нађе она тачка E, кроз коју треба повући $EF \parallel AB$, па да буде и $EF = EG$. Нека је с тога непозната дуж $AE = x$, даље $AC = b$, $AB = c$, а висина $CD = h$.



Сл. 111.

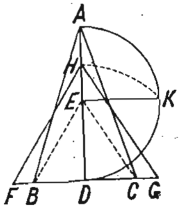
Како је $\triangle ABC \backsim EFC$, то је $AB : CD = EF : CJ = EG : CJ = AE : CE$ или $c : h = x : (b - x)$, одавде $x = \frac{bc}{c + h}$.

Према томе је x четврта пропорционала за $c + h$, b и c.

Конструкција. Продужи се AB за $BK = CD$, повуче KC и $BE \parallel KC$; тада је $AK : AC = AB : AE$ или $(c + h) : b = c : AE$, дакле $AE = x$, а $EFHG$ захтевани квадрат.

193. Задатак. Равнокрак троугао претворити у равностран.

Анализа. Мека је ABC (сл. 112) равнокрак троугао са основицом BC и висином AD; нека је CBE равностран троугао над страном BC, а HFG тражени равнострани троугао. Овај ће троугао бити одређен, чим се нађе тачка H. Ако ставимо $DH = x$, $AD = m$, $DE = n$, онда је



Сл. 112.

$$\triangle BDE : FDH = n^2 : x^2 \text{ или}$$
$$\triangle BDE : BDA = n^2 : x^2;$$
али је и $\triangle BDE : BDA = n : m$

с тога $n^2 : x^2 = n : m$, дакле $x = \sqrt{mn}$. Према томе је x средња пропорционала за m и n.

Конструкција. Над AD опише се полукруг и повуче $EK \perp AD$; тада $DK = \sqrt{AD \cdot DE} = \sqrt{mn} = x$. Ако се дакле пренесе $DH = DK$, повуче $HF \parallel BE$ и $HG \parallel EC$, онда је HFG тражени равнострани троугао.

3. Задаци за вежбање.

194. Одреди димензију овим изразима, и конструиши их:

1. $x = \frac{ab}{a - b}$. 2. $x = \frac{abc^2}{def}$. 3. $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$.

4. $x = \frac{b^2 + bc}{a}$. 5. $x = \frac{ab + bc}{a - b}$. 6. $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

7. $x = \sqrt{ab + cd - cf}$. 8. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab}$.

9. $x = \sqrt{\frac{a^2b + c^2d}{f + g}}$. 10. $x = \sqrt{\{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}\}}$.

195. Помоћу алгебарске анализе реши ове задатке:

1. Конструисати правоугаоник, кад је дат збир s двеју страна и њихова разлика d.

2. Већу страну даног правоугаоника поделити на два дела тако, да разлика између квадрата тих делова буде једнака с површином тог правоугаоника.

3. Око сваког темена даног троугла описати по један круг тако, да сваки од тих кругова додирује она друга два с поља.

4. Над једном страном каквог троугла конструисати правоугаоник тако, да његова површина буде једнака с правоугаоником других двеју страна.

5. У даноме троуглу повући с једном страном паралелну која ће бити једнака с неком даном дужи.

6. У даноме троуглу ABC повући са страном BC паралелну MN тако, да је одсечак AM једнак с одсечком NC.

7. Уз дати правоугаоник конструисати квадрат тако, да њихови обими стоје у истој размери као њихове површине.

8. Дану дуж a поделити на два дела тако, да је разлика између квадрата тих делова једнака с неким датим квадратом m^2.

9. Конструисати правоугли троугао кад се зна једна катета a и збир s друге катете и хипотенузе.

10. Конструисати правоугаоник кад се зна једна страна и збир дијагонале и друге стране.

11. Правоугаоник ab претворити у квадрат x^2.

12. Паралелограм, чије су стране a и b, претворити у ромб који има с паралелограмом један заједнички угао (чл. 152, послед.).

13. Из тачке ван круга повући сечицу тако, да она буде преполовљена кружном периферијом.

14. У даноме кругу уписати равностран троугао.

Ако је x страна уписаног троугла, а r полупречник круга, онда је

$$x = \sqrt{3r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2}.$$

15. Равностран троугао, чија је страна a дата, претворити у квадрат x^2.

Како је висина тог троугла $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, то му је површина $\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$, дакле $x^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$, или $x = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}}$.

16. Конструисати правоугаоник xy, кад се зна његова дијагонала d и разлика m двеју страна његових.

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} + \frac{m}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2d^2 - m^2} - \frac{m}{2}.$$

17. Дану тетиву a једног круга продужити толико, да дирка, повучена из крајње тачке тог продушка, има дужину d.

Продужак $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + d^2}.$

18. Квадрат са страном a претворити у ромб, у коме је збир обе дијагонале једнак с квадратовим обимом.

Ако су $2x$ и $2y$ дијагонале у ромбу, онда је

$$x = a + \frac{a}{2}\sqrt{2}, \qquad y = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

19. Конструисати квадрат x^2, кад се зна збир s његове стране и дијагонале.

$$x = -s + s\sqrt{2}.$$

20. Конструисати правоугаоник xy, кад се зна обим u и површина a^2.

$$x = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2} \qquad y = \frac{u}{4} \mp \sqrt{\frac{u^2}{16} - a^2}\,.$$

21. Конструисати равнокрако-правоугли троугао, кад је дат његов обим u.

$x = u - \frac{u}{2}\sqrt{2}$, ако је x катета.

22. Конструисати правоугли троугао, кад се зна збир s обе катета и висина h која одговара хипотенузи.

Ако је x хипотенуза, онда је

$$x = -h + \sqrt{s^2 + h^2}.$$

23. Конструисати правоугли троугао, кад се зна разлика d обе катете и висина h која одговара хипотенузи.

24. Конструисати правоугли троугао, кад су дати збирови a и b хипотенузе и по једне катете.

Ако је хипотенуза z, а катете x и y, онда је

$z = a + b - \sqrt{2ab}$, с тога $x = \sqrt{2ab} - b$, $y = \sqrt{2ab} - a$.

25. Конструисати правоугли троугао, кад су дате разлике a и b између хипотенузе и по једне катете.

26. У кружном квадранту полупречника r уписати круг тако, да додирује оба крака и лук тог квадранта.

Ако је x раздаљина средишта траженог круга од квадрантова лука, мерена на симетрали правог угла, онда је

$$x = -r \pm r\sqrt{2}.$$

Какав значај може имати негативна вредност за x?

27. Трапез преполовити једном правом, која је с основицама паралелна.

Дужина те праве, која полови трапез, јесте $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

28. Дуж a поделити по непрекидној пропорцији.

Већи је одсечак $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Упореди конструкцију у чл. 168.

29. Дати троугао преполовити правом, повученом из дате тачке на једној његовој страни.

30. Дате су две праве које се секу и једна тачка; кроз ту тачку повуци праву тако, да она са двема датим правима гради троугао одређене површине.

31. Дате су две праве које се секу и једна тачка; кроз ту тачку повуци праву тако, да она одсече од датих правих две дужи чији је производ једнак с датим правоугаоником или у опште с неком датом површином.

32. Опиши круг кроз две дате тачке тако, да додирује један дати круг.

33. Дати круг претворити у кружни прстен дате ширине.

ДРУГИ ДЕО.

СТЕРЕОМЕТРИЈА.

ПРВИ ОДЕЉАК.

Праве линије и равни у простору.

196. Две праве у простору могу имати тројак међусобни положај: 1. могу бити паралелне (чл. 23); 2. могу се, довољно продужене, сећи у једној тачки; 3. могу бити непаралелне, а и не сећи се; једна пролази мимо другу, и тада се каже да се укрштају. У прва два случаја може се кроз обе праве поставити раван.

197. Раван је одређена:

1. трима тачкама које не леже на једној правој (чл. 8).

С тога је раван одређена и

2. једном правом и тачком ван те праве,
3. двема правима које се секу,
4. двема паралелним правима.

198. Права према равни може имати тројак положај: 1. може сва лежати у равни; 2. може, довољно продужена, сећи раван; 3. може никад не сећи раван, ма колико праву продужили и раван проширили; тада се каже, да је права према равни паралелна.

199. Теорема. Права, која не лежи у некој равни а није ни паралелна према њој, може је продрети само у **једној** тачки.

Јер, кад би права продирала раван још у једној тачки, она би морала сва лежати у равни (чл. 8. осн. прав.).

Тачка, у којој нека права продире какву раван, зове се траг те праве у равни.

200. Две равни могу имати једна према другој тројак положај: 1. могу се поклапати и тада чине једну раван; 2. могу се, ма колико биле проширене, не сећи никако, и тада су паралелне; 3. могу се, довољно проширене, сећи.

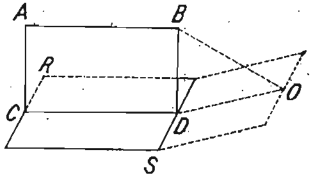
Теорема. Кад се две равни секу, онда је њихов пресек пра̑ва линија.

Аке пресек не би био права линија, онда би се на њему могле наћи три тачке које не леже на једној правој. Тада би те три тачке лежале у обема равнима, и ове би се с тога поклапале, а то се не слаже с претпоставком.

I. Паралелне праве и равни.

201. Теореме. 1. Кад је права ван неке равни паралелна с једном правом у тој равни, онда је она паралелна и с том равни.

Доказ. Нека је (сл. 113) $AB \parallel CD$. Ако би права AB и раван RS имале једну заједничку тачку O, онда би та тачка била и у оној равни која је одређена правима AB и CD; тачка O била би дакле заједничка обема равнима, т. ј. она би била једна тачка и њихова пресека CD и праве AB, а то се не слаже с претпоставком.



Сл. 113.

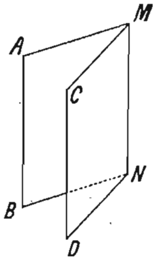
2. Кад је права у простору паралелна с неком равни, па се кроз ту праву постави раван која сече прву раван, онда је њихов пресек паралелан с правом у простору.

И та се теорема доказује индиректно.

3. Кад су две праве паралелне, па се кроз сваку постави по једна раван, онда је пресек тих равни паралелан с једном и другом правом.

Доказ. Нека су AB и CD (слика 114) две паралелне праве, $ABMN$ раван кроз AB, $CDMN$ раван кроз CD, а MN њихов пресек. По теор. 1. мора бити $CD \parallel ABMN$, а по теор. 2. $CD \parallel MN$. — Исто тако је $AB \parallel CDMN$, дакле $AB \parallel MN$.

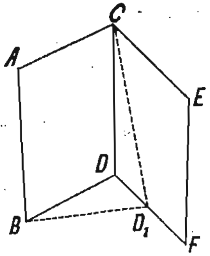
4. Кад су две праве паралелне с трећом, онда су оне паралелне и међу собом (те три праве нису у једној равни).



Сл. 114.

Нека је $AB \parallel EF$ и $CD \parallel EF$ (слика 115). Ваља доказати да је и $AB \parallel CD$.

Доказ. Замислимо једну раван кроз CD и EF, а другу кроз AB и тачку C, и нека би њихов пресек био CD_1. По теореми 3. мора бити $CD_1 \parallel EF$, а по претпоставци је $CD \parallel EF$. Према томе бисмо у равни $CDEF$ имали кроз тачку C две праве паралелне с правом EF, а то не може бити.



Сл. 115.

202. Теореме. 1. Кад је нека раван паралелна с двема правима које се секу, онда је она паралелна и са оном равни коју одређују те две праве.

Доказ. Нека су AB и AC две праве које се секу у тачки A, а RS раван паралелна с тим правима. Ако би раван RS секла раван ABC, онда би тај пресек морао бити у исто доба паралелан са AB и AC (по теор. 201, 2), а то не може бити, јер се AB и AC секу.

2. Кад се две паралелне равни пресеку трећом, онда су пресеци паралелни.

Доказ индиректан.

3. Паралелне дужи између паралелних равни једнаке су.

Доказује се на основу теор. 2. и чл. 53, 2.

4. Кроз једну тачку може се поставити само једна раван, паралелна с неком датом равни.

Доказ. Ако би се кроз тачку A могле поставити две равни R_1 и R_2, паралелне с датом равни R, онда би једна нова раван S, коју бисмо поставили кроз A тако да не пролази и кроз пресек равни R_1 и R_2, секла равни R_1 и R_2 по двема правима које би пролазиле кроз исту тачку A и биле паралелне према пресеку равни S и R, а то је немогућно.

Последице. 1. Геометријско место свих правих, које су повучене кроз дату тачку паралелно с једном датом равни, јесте раван паралелна с датом равни.

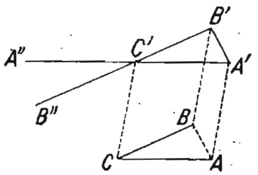
2. Кад су две равни паралелне, па нека трећа раван сече једну од тих двеју равни, онда она мора сећи и другу.

3. Кад је једна раван паралелна с другим двема, онда су и ове две међу собом паралелне.

203. Теорема. Кад се два угла налазе у простору, па су краци једнога паралелни с крацима другога, онда су *a)* ти углови једнаки, ако су краци једног угла у истом или у супротном смислу паралелни с крацима другог угла, *b)* суплементни, ако су два крака у истом, а друга два у супротном смислу паралелна, *c)* равни тих углова паралелне.

Доказ. *a)* Нека је (сл. 116) $AC \parallel A'A''$ и $BC \parallel B'B''$.

Кад се начини $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$, па повуку дужи AA', BB', CC', AB и $A'B'$ онда је $A'A$ паралелно и једнако са CC' (чл. 53, 4); исто тако BB' паралелно и једнако са CC', па је према томе и AA' паралелно и једнако са BB' (чл. 201, 4), с тога $AB = A'B'$ (члан 53, 4). А тада је $\triangle ACB \cong A'C'B'$, с тога угао $ACB = A'C'B'$. Како је и угао $A'C'B' = A''C'B''$, то је угао $ACB = A''C'B''$.



Сл. 116.

b) Како је према доказу под *a)* угао $ACB = A'C'B'$, а збир $A'C'B' + A''C'B' = 2R$, то је и $ACB + A''C'B' = 2R$.

c) Како је $AC \parallel$ према равни $A'C'B'$, а и $BC \parallel A'C'B'$ (чл. 201, 1), то је и раван $ACB \parallel A'C'B'$ (чл. 202, 1).

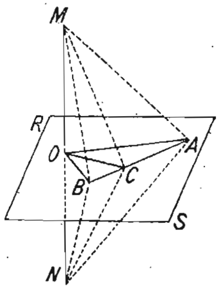
Додатак. Углом двеју правих, које се укрштају, назива се угао двеју правих које су кроз произвољну тачку повучене паралелно с датим правима. Ове две праве одређују раван, паралелну с правима које се укрштају.

II. Нормалне праве и равни.

204. Кад је нека права нормална на свима правима које су повучене кроз њен траг у једној равни, онда се каже, да права и раван стоје једна на другој нормално или управно; у противном случају права и раван стоје косо једна према другој.

205. Теорема. Кад је нека права нормална на двема правима, које су кроз њен траг у једној равни повучене, онда је она нормална и на свакој правој, која би се повукла кроз њен траг у истој равни.

Доказ. Нека су (сл. 117) OA и OB две праве у равни RS, и $MO \perp OA$, $MO \perp OB$; нека је OC трећа права, повучена у тој равни кроз тачку O у ком било правцу. Треба продужити праву MO испод O, пренети $ON = OM$, повући праву AB која сече OC у C, и на послетку MA и NA. Тада је $MA = NA$ (чл. 45, 1.). Кад се повуче MB и NB, онда

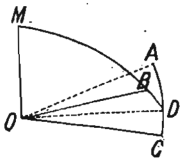


Сл. 117.

је исто тако $MB = NB$. Према томе је $\triangle MAB \cong NAB$. Ако се $\triangle NAB$, обртањем око AB, положи на троугао MAB, онда ће пасти NC на MC, па је с тога $CO \perp MN$ (чл. 45, 1.).

Последица. Кад је нека права нормална на двема правима које се секу, онда је она нормална и на равни коју одређују те две праве.

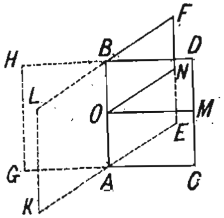
206. Теорема. Кад је нека права нормална на трима правима у њиховом заједничком пресеку, онда су те три праве у **једној** равни.



Сл. 118.

Доказ. Нека је OM (сл. 118) нормално на OA, OB и OC. Поставимо кроз OA и OC раван AOC. Ако OB не би било у тој равни, па бисмо кроз OM и OB поставили раван која би секла раван AOC по правој OD, онда би морао бити угао $MOD = 90^0$ (чл. 205). а то је по чл. 25, 4 немогућно.

207. Кад се две равни секу, онда оне граде диедар; њиховим углом назива се величина обртања које мора извршити око њихова заједничког пресека једна од тих равни, да би дошла у положај оне друге равни. Заједнички пресек назива се ивица, а обе равни зову се стране у диедра.



Сл. 119.

На сл. 119 AB је ивица, AD и AF стране су у диедра $D(AB)F$ који граде равни AD и AF.

Диедар $F(AB)H$ назива се упоредан, а диедар $H(AB)L$ унакрсан диедру $D(AB)F$.

Често пута се диедар тумачи као део простора који захватају две равни које се секу.

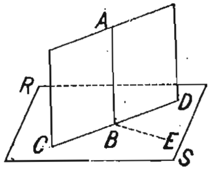
208. Кад се у којој било тачки O (сл. 119) на ивици AB каква диедра повуку праве OM и ON нормално на ту ивицу, тако да је једна нормала у једној а друга у другој страни тог диедра, онда угао MON има једну исту величину, па биле нормале повучене у ма којој тачки ивице AB, јер свака два таква угла имају у истом смислу паралелне краке. Тај стални угао назива се нагибни угао двеју равни које граде диедар.

Теорема. Једнаки диедри имају једнаке нагибне углове и обрнуто. (Доказује се поклапањем). С тога се величина нагибног угла између стра́на каква диедра узима за меру величини тога диедра.

209. За две равни каже се да су једна на другој нормалне или управне, кад им је нагибни угао прав.

Теореме. 1. Кад је права нормална на некој равни, онда је и свака раван, постављена кроз ту праву, нормална на првој равни.

Нека је $AB \perp RS$ (слика 120), онда мора бити и раван $ACD \perp RS$. Ако се у равни RS повуче $BE \perp CD$, онда је ABE нагибни угао равни ACD и RS, а тај је угао $ABE = 90^0$, јер је $AB \perp RS$; с тога је раван $ACD \perp RS$.



Сл. 120.

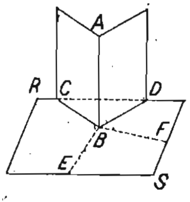
2. Кад су две равни једна на другој нормалне, па се у једној од њих повуче нормала на њихов пресек, онда је та нормала нормална и на другој равни.

Нека је $ACD \perp RS$ и $AB \perp CD$. Ако се у равни RS повуче $BE \perp CD$, онда је $\sphericalangle ABE = 90^0$, јер је раван $ACD \perp RS$. Па како је $AB \perp CD$ и $AB \perp BE$, то је и $AB \perp RS$.

3. Кад су две равни једна на другој нормалне, па се у једној тачки њихова пресека повуче нормала на једну од тих равни, онда она мора сва лежати у другој равни.

Ако се права, која у тачки B стоји нормално на равни RS (сл. 120), не би поклопила с правом AB која је у равни ACD повучена нормално на CD, онда бисмо имали у тачки B две нормале на RS.

210. Теорема. Кад су две равни, које се секу, нормалне на некој трећој равни, онда је и њихов пресек нормалан на тој равни.



Сл. 121.

Нека је (сл. 121) $AC \perp RS$ и $AD \perp RS$. Ако се у равни RS повуче $BE \perp BC$ и $BF \perp BD$, онда је (чл. 209, 2) $BE \perp AC$, с тога и $BE \perp AB$; исто тако $BF \perp AD$, с тога и $BF \perp AB$, према томе $AB \perp RS$.

211. Раван, која сече две паралелне равни, гради с њима једнаке нагибне углове.

Ваља поставити раван нормалну на паралелним пресецима; пресеци те четврте равни с двема паралелним равнима и с трећом равни граде нагибне углове који су као сагласни једнаки.

212. Теорема. Кад су стране једног диедра у истом или у супротном смислу паралелне са странама другог диедра, онда су они једнаки.

Ваља наставити једну страну једног диедра, док не пресече једну страну другог диедра, па применити чл. 211.

213. Неке теореме стоје у таквом односу, да се из једне добија друга, њој приређена, ако се само размене речи „права“ и „раван.“ (Закон дуалности).

Такве су теореме ове што долазе.

214 *a* У једној тачки неке равни могућна је само **једна** нормала на ту раван.

Кад би биле могућне две нормале, па бисмо кроз њих поставили раван, онда би она секла дату раван по једној правој, на којој би две праве стајале нормално у истој тачки, а то не може бити.

214 *b* У једној тачки неке праве могућна је само **једна** номална раван на ту праву.

Претпоставимо да су могућне две нормалне равни. Тада би се кроз праву могла поставити раван која би секла нормалне равни по двема правима, и у тој равни имали бисмо две праве које у истој тачки стоје нормално на једној правој, а то не може бити.

215 *a* Из једне тачке ван неке равни може се повући само једна нормала на ту раван.

Кад би биле могућне две нормале, па бисмо везали њихове трагове једном дужи, онда бисмо добили троугао са два права угла.

215 *b* Из једне тачке ван праве могућна је само једна раван, нормална на ту праву.

Кад би биле могућне две нормалне равни, онда би се везивањем дате тачке с траговима дате праве у тим равнима добио троугао са два права угла.

216 *a* Кад су две праве паралелне, па једна од њих стоји нормално на некој равни, онда је и она друга нормална на тој равни.

Нека је $AB \parallel CD$ и AB управно на равни R. Повуцимо у равни R праве BE и BF, а кроз D праве $DG \parallel BE$, $DH \parallel BF$. Углови ABE и ABF прави су по претпоставци, а углови CDG и CDH једнаки су с угловима ABE и ABF по чл. 203 *a*, с тога је по чл. 205 и $CD \perp R$.

216 *b* Кад су две равни паралелне, па је једна од њих нормална на некој правој, онда је и друга нормална на тој правој.

Ваља поставити две равни кроз праву. Свака таква раван сече дате равни по двема паралним правима, из чега излази да је теорема тачна.

217 *a* Кад су две праве на једној равни нормалне, онда су оне међу собом паралелне.

Нека су праве AB и CD нормалне на равни R. Ако права CD не би била паралелна са AB, онда нека је $C'D \parallel AB$. Ну тада би морало бити (чл. 219 *a*) и $C'D \perp R$ што је противно теор. 217 *a*.

217 *b* Кад су две равни нормалне на једној правој, онда су оне међу собом паралелне.

Кад би се те две равни секле, па бисмо једну тачку њихова пресека везали с траговима њихове заједничке нормале, онда бисмо добили троугао са два права угла.

218. Кад се из једне тачке у простору повуче нормала на какву раван, онда се траг те нормале зове пројекција (нормална пројекција) тачке на равни, а раван се зове пројекцијска раван.

Пројекцијом линије на некој равни назива се она линија у тој равни, на којој се налазе пројекције свих тачака прве линије.

219. Пројекција праве линије на некој равни у опште је опет права.

Доказ. Нека су A_1, B_1, C_1.... пројекције тачака A, B, C... праве AB на равни R. Праве AA_1, BB_1, CC_1.... паралелне су (чл. 217 *a*), па с тога леже све у равни одређеној правима AA_1 и AB; према томе су њихова подножја A_1, B_1, C_1.... у пресеку те равни са R, тј. на правој линији.

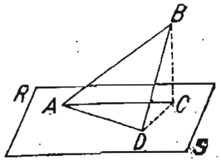
Изузетак. Пројекција праве, која стоји нормално на пројекцијској равни, тачка је.

Пројекција тачке или праве, која лежи у пројекцијској равни, јесте сама тачка или права.

Пројекцијом какве равне слике на некој равни назива се она слика, која је ограничена пројекцијама граничних линија дате слике.

220. Теорема. Угао између какве дужи и њене пројекције на некој равни најмањи је између свих углова, које та дуж захвата с правима, повученим у тој равни кроз њен траг.

Доказ. Нека је (сл. 122) $BC \perp RS$, дакле AC пројекција дужи AB на равни RS. Кад се повуче кроз A у равни RS која било права $AD = AC$, за тим CD и BD, онда је $BC < BD$ (члан 35, 1). Тада је у троуглима BAC и BAD и угао $BAC < BAD$ (члан 43).

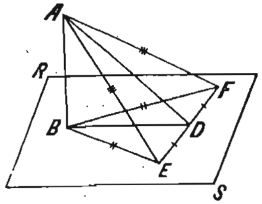


Сл. 122.

Угао између неке дужи и њене пројекције на каквој равни узима се као мера нагибу те дужи према равни и зове се нагибни угао те дужи.

221. Теорема. Ако је нека дуж у простору нормална на једној правој у каквој равни, онда је и пројекција те дужи нормална на правој у равни.

Нека је (сл. 123) $AD \perp EF$, а BD пројекција дужи AD у равни RS. Пренесимо $DE = DF$ и повуцимо AE, AF, BE и BF. Како је AD симетрала дужи EF, то је $AE = AF$. Како је $\triangle ABE \cong ABF$, то је $BE = BF$. Према томе је BD симетрала дужи EF, дакле $EF \perp BD$.



Сл. 123.

Исто тако доказује се и обрнута теорема.

222. Теорема. Ако се од једне тачке ван неке равни повуку до те равни нормала и више косих дужи, онда

1. између свију тих дужи нормала је најкраћа,
2. дужи, које имају једнаке пројекције на тој равни, једнаке су међу собом,
3. од две косе дужи, чије су пројекције у равни неједнаке, већа је она која има већу пројекцију.

Кад се поставе равни кроз нормалу и косе дужи, онда је доказ сличан ономе у чл. 35.

Из теореме под 2. и 3. излазе индиректно и обрнута правила.

Нормала од једне тачке до неке равни показује раздаљину те тачке од равни.

Последице. *a)* Кад се од једне тачке ван неке равни повуку до те равни косе једнаке дужи, онда се њихови трагови налазе на кругу чије је средиште траг нормалне праве.

b) Геометријско место свих тачака, једнако удаљених од три тачке у простору које нису на једној правој, јесте права која пролази кроз средиште круга одређенога оним трима тачкама, а нормална је на равни тога круга.

Теореме.

223 *a* Две паралелне праве, које секу једну раван, нагнуте су према њој под једнаким углима.

Кад се на свакој правој узме по једна тачка, па се из тих тачака повуку нормале на раван, онда су углови између тих нормала и датих правих једнаки (чл. 217 *a*, чл. 203), па су тада и нагибии углови, као њихови комплементи, једнаки.

223 *b* Две паралелне равни граде с једном истом правом једнаке нагибне углове.

Ако се из буди које тачке те праве повуче нормала на једну раван, онда је она нормална и на другој равни. Кад се кроз ту нормалу и дату праву постави раван, онда њени пресеци са датим равнима граде с датом правом нагибне углове који су као сагласни једнаки.

224. Праве у простору, које пролазе кроз исту тачку, чине свежањ зракова; њихова заједничка тачка зове се теме.

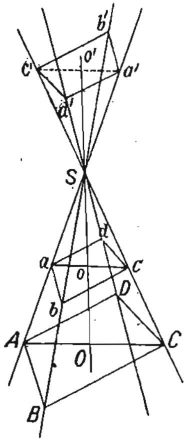
Теореме. 1. Две паралелне равни секу зраке једног свежња пропорционално.

Нека је раван $ABCD$ (сл. 124) паралелна са $abcd$. Како су SA и SB у једној равни, то је (чл. 113 и 202, 2) $SA : Sa = SB : Sb$; исто тако је $SB : Sb = SC : Sc$, према томе и $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots\ldots$

2. Две равни, које пропорционално секу зраке каква свежња, морају бити паралелне.

Ако је $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$ онда је $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$; с тога су и равни $ABCD$ и $abcd$, које су постављене кроз краке углова ABC и abc, паралелне (чл. 114, члан 203. *c*).

3. Кад се зраци каквог свежња пресеку двема паралелним равнима, па се пресечне тачке у једној равни вежу дужима истим редом као и у другој, онда се добивају две сличне слике.



Сл. 124.

Ако је раван $ABCD \parallel abcd$, онда је (чл. 202, 2) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd, \ldots$ Отуд излази (чл. 115): $AB : ab = SB : Sb$ и $BC : bc = SB : Sb$, с тога и $AB : ab = BC : bc$. Исто тако је $BC : bc = CD : cd$, итд. За тим је $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, $\sphericalangle B = b$, $\sphericalangle C = c$, итд., према томе $ABCD \cong abcd$.

Исти односи вреде, кад се теме свежњево налази између паралелних равни (сл. 124).

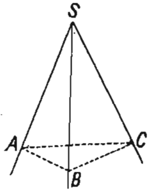
III. Рогљеви.

225. Кад се полузрак обрће око своје граничне тачке, тако да клизи по обиму каква полигона, чија раван не пролази кроз ту тачку, онда он производи равнине које делимично ограничавају простор који се зове рогаљ. Права која производи рогаљ зове се производиља, а полигон се зове водиља.

Стална тачка, око које се обрће производиља, зове се теме, а пресеци граничних равни зову се ивице у рогља. Две и две узастопне ивице граде ивичне углове или стране рогљеве; напослетку нагибни углови између две и две узастопне граничне равни зову се углови у рогљу.

Под рогљем ваља од сад разумети само рогаљ с издубеним угловима.

Ако је (сл. 125) S теме каква рогља чије су ивице SA, SB и SC, онда се рогаљ означује овако: $SABC$; стране се означују, као и ра́вни углови, овако: ASB, ASC, BSC, или овако: (AB), (AC), (BC).



Сл. 125.

Рогаљ има колико ивица, толико и страна; по њихову броју називају се и рогљеви тространи, четворострани,.... n-страни, или троивични, четвороивични,.... n-ивични. Рогаљ се зове равностран, кад су му све стране једнаке; а равноугли, ако су му сви угли једнаки. У правилна рогља једнаки су сви угли и све стране.

Унакрсни и поларни рогљеви.

226. *a)* Кад се све ивице каква рогља продуже преко темена, онда се рогаљ, чије су ивице ти продушци, назива унакрсни рогаљ првоме рогљу.

Два унакрсна рогља $SABC$ и $SA'B'C'$ (сл. 127, I) имају исте стране и углове, али нису подударни, јер стране и углови једног рогља не иду једно за другим оним редом, као у другога, него у супротном смислу обртања.

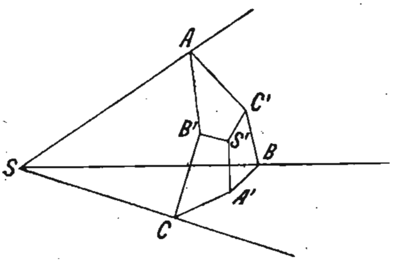
b) Кад се из буди које тачке у рогљу спусте нормале на све његове стране, онда су те нормале ивице једног новог рогља, који се назива поларни рогаљ даноме рогљу.

Ако је (сл. 122) S' једна тачка у унутрашњости рогља $SABC$, а $S'A' \perp SBC$, $S'B' \perp SAC$, $S'C' \perp SAB$, онда је $S'A'B'C'$ поларни рогаљ рогљу $SABC$.

Поларни рогаљ конструише се најлакше, кад се у темену данога рогља повуку с поља нормале на равни ивичних углова.

Теореме. 1. Сваки је рогаљ поларни рогаљ свом поларном рогљу.

Како је (сл. 126) $S'A' \perp SBC$, то је и раван $S'A'CB' \perp SBC$; како је $S'B' \perp SAC$, то је раван $S'A'CB' \perp$ и на SAC; према томе је и пресек SC равни́нâ SBC и SAC нормалан на равни $S'A'CB'$. Исто тако налази се, да је ивица $SB \perp S'A'BC'$ и ивица $SA \perp S'B'AC'$.



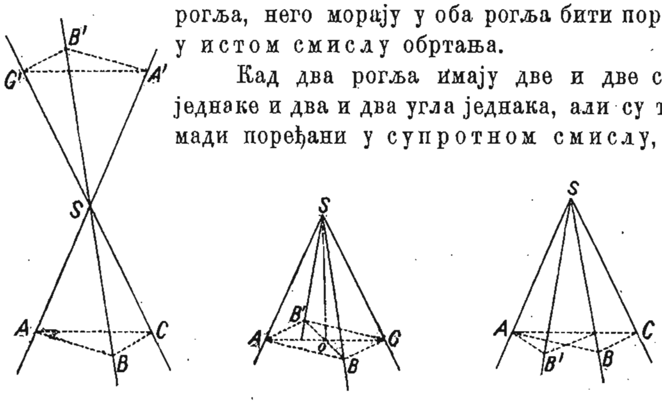
Сл. 126.

2. Кад су два рогља узајамно поларна, онда су стране једнога суплементи угловима другог рогља.

Страни BSC рогља $SABC$ одговара у поларном рогљу $S'A'B'C'$ угао на ивици $S'A'$, а тај је угао $BA'C$, пошто је $S'A'$ нормално на равни SBC, дакле нормално и на $A'C$ и $A'B$. Па како је $SC \perp S'A'CB'$ и $SB \perp S'A'BC'$, то су у четвороуглу $SBA'C$ углови SCA' и SBA' прави, према томе и $BSC + BA'C = 2R$. — Исто тако доказује се, да је $ASC + AB'C = 2R$ и $ASB + AC'B = 2R$.

227. Два се рогља зову подударна, кад се могу положити један у други тако, да им се поклапају све ивице и све стране. А да би то било могућно, морају све стране и сви углови једнога рогља бити не само једнаки са странама и угловима другога рогља, него морају у оба рогља бити поређани у истом смислу обртања.

Кад два рогља имају две и две стране једнаке и два и два угла једнака, али су ти комади поређани у супротном смислу, онда се такви рогљеви у опште не могу положити један у други тако да се поклапају.



I
II
III

Сл. 127.

Доказ. Нека су $SABC$ и $SA'B'C'$ унакрсни рогљеви (сл. 127 I).

Страна $(A'C')$ може се положити на страну (AC) на два начина:

1. Ако се $(A'C')$ у својој равни обрће око S, онда она може поклопити страну (AC) (сл. 127 II); али се тада ивице SB и SB' налазе на супротним странама равни SAC, па се за то рогљеви не могу поклопити.

2. Ако се $SA'B'C'$ обрне за 180° око симетрале DE угла $A'SC$, онда ће се опет поклопити стране $(A'C')$ и (AC). Ивице SB' и SB налазе се тада на истој страни равнине SAC (сл. 127 III), али ће се поклопити само тада, ако би случајно били једнаки диедри $B(AS)C$ и $A(CS)B$, дакле и диедри $B(AS)C$ и $A'(C'S)B'$. Према томе се два рогља у опште не могу поклопити ни на тај начин.

Два рогља, у којих су две и две стране једнаке, исто тако два и два угла једнака, али су поређани у супротном смислу обртања зову се симетрични.

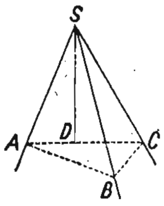
Последице. *a)* Унакрсни рогљеви симетрични су.

b) Кад су два рогља симетрична с трећим, онда су они подударни.

c) Кад су два рогља подударна, па је један од њих симетричан с неким трећим рогљем, онда је и онај други симетричан с тим трећим рогљем.

228. Теорема. У сваком је тространом рогљу *a)* збир двеју страна већи, *b)* разлика њихова мања од треће стране.

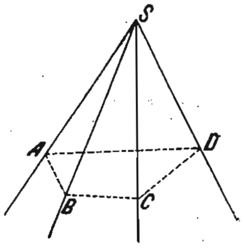
Доказ. *a)* Ако је (AC) највећа страна, онда треба у равни ASC (сл. 128) повући праву SD тако, да буде $ASD = ASB$ и начинити још $SD = SB$, па замислити кроз B и D какву било раван, која сече ивице SA и SC у A и C. Тада је $\triangle ASD \cong ASB$, дакле $AD = AB$. Како је $AB + BC > AD + CD$, то је $BC > CD$, дакле и угао $BSC > DSC$, т.ј. $(BC) > (AC) - (AB)$ или $(BC) + (AB) > (AC)$.



Сл. 128.

b) Доказ је сличан ономе у чл. 34, 2.

229. Тeoреме. 1. У сваком је n-страном рогљу збир свих страна мањи од $4R$.



Сл. 129.

Ако се n-страни рогаљ (сл. 129) пресече једном равни, која сече све ивице, онда је пресек n-страни полигон, а на рогљевим

странама добивају се n троуглова. Нека у тим троуглима збир свих углова око S износи s, а збир угловакод $A, B, C, \ldots$ нека је s', онда је

$$s + s' = 2nR,$$
$$s' > 2nR - 4R \text{ (чл. 228, } a\text{):}$$

дакле $s < 4R$.

2. Збир свих углова n-странога рогља већи је од $2nR - 4R$, а мањи од $2nR$. Нека је σ_1 збир углова n-странога рогља, а σ_2 збир страна поларног рогља; тада је $\sigma_1 + \sigma_2 = 2nR$ (чл. 226, *b*), према томе $\sigma_1 < 2nR$. Па како је $\sigma_2 < 4R$, то се одузимањем од претходне једначине налази $\sigma_1 > 2nR - 4R$. Дакле

$$2nR > \sigma_1 > 2nR - 4R.$$

За тространи је рогаљ $n = 3$, с тога збир његових углова лежи између $6R$ и $2R$.

230. Теореме.

1. Наспрам једнаких углова у тространом рогљу леже једнаке стране.

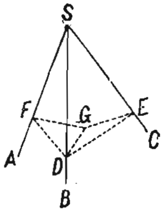
2. Наспрам већег угла у тространом рогљу лежи већа страна.

3. Наспрам једнаких страна тространог рогља леже једнаки углови.

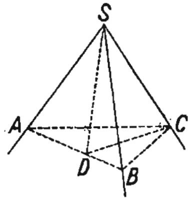
4. Наспрам веће стране лежи у тространом рогљу већи угао.

Доказ теор. 1. Нека је (сл. 130) $A(SC)B = B(SA)C$.

Из једне тачке D на ивици SB ваља спустити нормалу DG на ASC, за тим $DE \perp SC$, $DF \perp SA$ и повући GE и GF; тада је (чл. 221) $GE \perp SC$ и $GF \perp SA$, и углови DEG и DFG једнаки су по претпоставци. Према томе су правоугли троугли DGE и DGF подударни, с тога $DE = DF$; с тога је и $\triangle SED \cong SFD$, дакле $(DE) = (DF)$.



Сл. 130.



Сл. 131.

Доказ теор. 2. Нека је (сл. 131) $A(SC)B > B(SA)C$. Кроз SC ваља поставити раван CSD тако, да она са ASC гради угао једнак са $B(SA)C$; тада тространи рогаљ $SACD$ има два једнака угла, па су с тога по правилу 1. једнаке и супротне стране (AD) и (CD). А у тространом је рогљу $SBCD$ збир $(BD)+(CD)>(BC)$; с тога и $(BD)+(AD)>(BC)$, или $(AB)>(BC)$.

Теор. 3 доказује се индиректно, помоћу теор. 2.

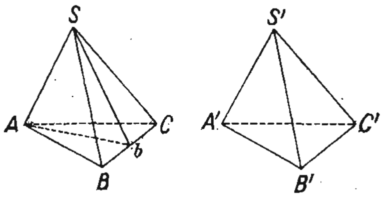
Доказ теор. 4 индиректан је, помоћу 1. и 2.

231. Теореме о подударности и симетрији тространих рогљева.

1. Кад су две стране и захваћени угао једног тространог рогља по реду једнаки с двема странама и захваћеним углом другог рогља, онда су ти рогљеви подударни или симетрични.

2. Кад су два угла и страна између њих у једном тространом рогљу по реду једнаки с два угла и страном између њих у другоме рогљу, онда су ти рогљеви подударни или симетрични.

Доказ за 1. Нека је (сл. 132) $(AB)=(A'B')$, $(BC)=(B'C')$ и $A(SB)C=A'(S'B')C$. Треба положити један рогаљ у други тако, да им се поклапају стране $(A'B')$ и (AB); тада мора због једнакости углова, страна $B'S'C'$ пасти на страну BSC, а због једнакости страна $(B'C')$ и (BC) мора ивица $S'C'$ поклопити ивицу SC. Напослетку морају се поклопити и стране $A'S'C'$ и ASC, јер се кроз две праве — које се секу — може поставити само једна раван. Према томе се рогљеви поклапају.



Сл. 132.

Ако су једнаки комади поређани у супротном смислу, онда је један рогаљ подударан с унакрсним рогљем другога, па је с тога (чл. 227 *a* и *c*) симетричан с другим.

Доказ за 2 Ако замислимо да су за оба рогља конструисани поларни рогљеви, онда морају у овима (чл. 226, *b*) бити једнаке две стране са захваћеним углом, с тога рогљеви по теор. 1. подударни. А тада су у њима по реду једнаки сви комади који одговарају један другоме, па с тога мора то исто да вреди и за дате рогљеве; они су дакле подударни.

Доказ за симетрију као под 1.

3. Кад су у једном тространом рогљу две стране и угао наспрам једне од тих страна по реду једнаке с двема странама и углом наспрам једне стране у другом рогљу, а углови наспрам оног другог пара једнаких страна нису суплементни, онда су рогљеви подударни или симетрични.

4. Кад су у једном тространом рогљу два угла и страна наспрам једног од њих по реду једнаки с два угла и страном наспрам једног угла у другом рогљу, а стране наспрам оног другог пара једнаких углова нису суплементне, онда су рогљеви подударни или симетрични.

Доказ за 3. Нека је (сл. 132) $(AB)=(A'B')$, $(AC)=(A'C')$, $A(SC)B=A'(S'C')B'$ и $A(SB)C+A'(S'B')C' \gtrless 2R$. Кад се положи један рогаљ у други тако, да падне (AC) на $(A'C')$, онда ће због једнакости углова страна $C'S'B'$ пасти на CSB; а тада мора и ивица $S'B'$ поклопити ивицу SB. Јер, ако $S'B'$ не би пало на SB, него рецимо на Sb, онда би (по 1.) био рогаљ $SAbC \cong S'A'B'C'$, с тога $A(Sb)C=A'(S'B')C'$ и $(Ab)=(A'B')=(AB)$, дакле, (по чл. 230, 3) и $A(SB)b=A(Sb)B$; а како је $A'(Sb)B+A(Sb)C=2R$ (као упоредни диедри) то би било и $A(SB)b+A'(S'B')C'=2R$ или $A(SB)C+A'(S'B')C'=2R$, што је противно претпоставци. Ивице $S'B'$ и SB морају се, дакле, поклопити, и с тога морају рогљеви бити подударни.

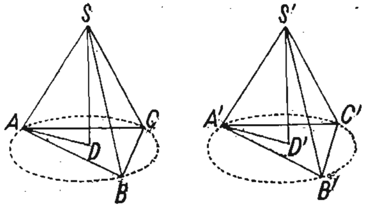
Доказ за симетрију као под 1.

Доказ за 4. помоћу поларних рогљева, позивајући се на теор. 3.

5. Два тространа рогља, у којима су све три стране по реду једнаке, подударна су или су симетрична.

6. Два тространа рогља, у којима су сва три угла по реду једнака, подударна су или су симетрична.

Доказ за 5. Нека је (сл. 133) $(AB)=(A'B')$, $(AC)=(A'C')$ и $(BC)=B'C')$. Кад се начини $SA=SB=SC=S'A'=S'B'=S'C'$, па се кроз тачке A, B, C и кроз тачке A', B', C' поставе равни и повуче за тим $SD \perp ABC$, $S'D' \perp A'B'C'$, па опишу кругови око троуглова ABC и $A'B'C'$, онда се њихова средишта поклапају с подножним тачкама D и D' нормáлâ SD и $S'D'$ (чл. 222, *a*). Како је



Сл. 133.

$\triangle ASB \cong A'S'B'$, то је $AB = A'B'$, исто тако $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$; према томе су подударни и троугли ABC и $A'B'C'$, па за то морају бити једнаки и кругови описани око тих троуглова, дакле и њихови полупречници $AD = A'D'$. Из подударности правоуглих троуглова ADS и $A'D'S'$ излази тада $DS = D'S'$.

Ако се сад рогаљ $S'A'B'C'$ положи у рогаљ $SABC$ тако, да се поклопе троугли $A'B'C'$ и ABC, онда ће се поклопити и описани им кругови, дакле и њихова средишта D' и D; па како се у D може повући само једна нормала на ABC, то ће $D'S'$ пасти у правац DS, и тачка S' у S, јер јер ја $D'S' = DS$; поклапају се, дакле, ивице и стране оба рогља.

Доказ за симетрију као под 1.

Доказ за 6. помоћу поларних рогљева као под 2., позивајући се на 5.

IV. Задаци.

232. 1. Из дате тачке у простору спустити нормалу на дату праву.

Кроз тачку и праву ваља поставити раван и у њој повући из дате тачке нормалу на дату праву.

2. Кроз дату тачку у простору повући паралелну праву с датом правом.

Решење слично претходном.

3. Кроз тачку, дату на једној правој, поставити раван нормално на ту праву (чл. 205, послед.).

4. Из тачке A изван равни RS повући нормалу на ту раван.

Повуци у равни RS какву било праву BC; за тим у равни, постављеној кроз A и BC, спусти из A нормалу AD на BC; кроз D повуци у равни RS праву $DE \perp BC$, и на послетку у равни угла ADE спусти из A нормалу AF на DE; тадъ је AF нормално на равни RS.

Јер, BC је по конструкцији нормално на равни ADF, с тога је и раван $RS \perp ADE$ (чл. 209, 1) према томе и $AF \perp$ на равни RS (чл. 209, 2).

5. У једној тачки D, датој нъ равни RS, подићи нормалу на RS.

Из једне тачке A изван равни RS ваља спустити на RS нормалу AB, па кроз AD и D поставити раван и у њој повући $DC \parallel AB$; тада је DC тражена нормала.

6. Кроз праву, дату у једној равни, поставити раван нормалну на тој равни.

7. Кроз дату тачку поставити раван паралелну с датом правом.

8. Кроз дату тачку поставити раван паралелну с двема правима које се укрштају.

9. Кроз тачку, дату изван једне равни, поставити раван нормалну на тој равни.

10. Кроз праву, дату изван једне равни, поставити раван нормалну на тој равни.

11. Да ли су две праве и међу собом паралелне, ако су паралелне с једном истом равни?

12. Кроз тачку, дату изван неке равни, повуци праву под датим углом према тој равни.

13. Дуж од $2\,m\ 3\,dm$ нагнута је према некој равни под *a)* 45°, *b)* 30°, *c)* 60°; израчунај дужину њене пројекције.

14. Под коликим углом мора бити нека дуж нагнута према једној равни, да би јој пројекција била два пута мања?

15. Пројекција косе дужи на некој равни краћа је, што је већи њен нагибни угао.

16. Колика је пројекција равнострана троугла, коме је страна a, кад му је једна страна у пројекцијској равни, а троугао је сâм нагнут према тој равни под *a)* 45°, *b)* 60°?

17. Дата је раван и према њој паралелна права; поставити кроз ту праву раван, паралелну с датом равни.

18. Кад две равни одсецају на трима паралелним правима (које нису у једној равни) једнаке дужи, онда су оне паралелне.

19. Три паралелне равни ограничавају на свакој правој, која их сече, две дужи чија је размера независна од положаја тих правих.

20. Двема правима, које се укрштају, одређене су две паралелне равни.

21. Кад су права и раван паралелне, онда је свака раван, која је на правој нормална, нормална и на равни.

22. Конструиши раван под датим нагибним углом према датој равни.

23. Дата је раван и према њој паралелна права; кроз ту праву постави раван, која је према датој равни нагнута под углом α.

24. Нађи геометријско место свих тачака, које су једнако удаљене од крајњих тачака једне дужи.

25. Нађи геометријско место оних тачака у простору, које су једнако удаљене од теме́нâ каква троугла.

26. Шта је геометријско место свих тачака, једнако удаљених од стра́нâ каква диедра?

27. Шта је геометријско место свих тачака, једнако удаљених од стра́нâ тространа рогља.

28. Шта је геометријско место свих тачака у простору, које имају једнаке раздаљине од кракова каква угла? (симетрална раван).

29. Кроз тачку, дату у каквом диедру, повуци праву паралелну с његовим странама.

30. Кроз тачку, дату између стра́на какво диедра, постави раван, нормално на његову ивицу.

31. Шта је геометријско место тачака чије раздаљине од стра́на̂ каква диедра стоје у размери $m:n$?

32. Шта је геометријско место свих правих, које пролазе кроз теме једног угла, а захватају с његовим крацима једнаке углове?

33. Симетралне равни углова каквог било троугла секу се у једној правој; та је права геометријско место свих тачака, једнако удаљених од стра́на̂ датог троугла.

34. Ако раван R полови дуж AB, онда се тачке A и B налазе у једнаким раздаљинама од те равни.

35. Нека су A_1 и B_1 нормалне пројекције тачака A и B на равни R. Ако су дате дужи $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$, израчунај *a)* дуж AB, *b)* раздаљину њене средине од равни R; *c)* колико се мора продужити AB до продора кроз раван R.

Пример. $a = 3\,m$, $b = 2{\cdot}3\,m$, $c = 2{\cdot}4\,m$.

36. Једна тачка у простору удаљена је од теме́на правоугла троугла за исту дужину d. Израчунај раздаљину те тачке од троуглове равни, ако су поред d дате и катете a и b.

Пример· $a = 5\,cm$, $b = 12\,cm$, $d = 42{\cdot}5\,cm$.

37. И у витопером четвороуглу (чија темена нису у једној равни) средине стра́на̂ темена су једног паралелограма.

38. Кад се две праве укрштају, како се налази трећа која на обадвема стоји нормално?

39. Кад су две праве, које се укрштају, пресечене трећом тако, да су пресеци P_1 и P_2 једнако удаљени од тачака F_1 и F_2 у којима те праве сече њихова заједничка нормала, онда та трећа права гради с датим правима једнаке углове.

40. У неком рогљу има једна страна 105^0, а друга 63^0; одреди границе трећој страни.

41. Одреди границе једном углу, за тим једној страни n-страног рогља.

42. У сваком је тространом рогљу разлика између збира од два угла и трећег угла мања од $2R$.

43. У сваком је тространом рогљу разлика између два угла увек мања од разлике између $2R$ и трећег угла.

44. Ако у тространом рогљу два угла имају 130^0 и 75^0, између којих граница лежи трећи угао?

45. Ако у тространом рогљу две стране имају по 90^0, онда имају и углови наспрам тих страна по 90^0.

46. Ако у тространом рогљу све стране имају по 90^0, онда су и сви углови прави.

ДРУГИ ОДЕЉАК.

О телима у опште.

I. Тела ограничена равним површинама.

233. Тело, ограничено самим равнима, зове се рогљасто тело или полиедар. Да би се могао ограничити полиедар, потребне су најмање четири равни. Поједине граничне равни зову се стране полиедарске, а све скупа чине његову површину; пресеци стра́на̂ зову се ивице, а рогљеви, које граде стране, називају се полиедарски рогљеви.

1. Пирамида.

234. Кад се какав рогаљ пресече једном равни, која сече све његове ивице, онда се тако ограничени полиедар зове пира̀мида. Површина пресека зове се основа, оне друге граничне површине зову се стране; пресеци стра́на̂ зову се бочне ивице, а пресеци стра́на̂ с основом зову се основне ивице. Заједнички пресек бочних ивица назива се врх, а његова раздаљина од основе висина пирамидина.

У пирамиде су стране троугли.

Према броју основних ивица деле се пирамиде на тростране, четворостране и многостране пирамиде. Тространа је пирамида најпростији полиедар.

Кад су све бочне ивице једнаке, онда се пирамида зове пра̏ва, иначе ко̏са. У праве је пирамиде основа тетивни полигон, чије је средиште у подножју пирамидине висине (чл. 222, посл. *a)*; стране су равнокраки троугли.

Права пирамида, чија је основа правилан полигон, зове се правилна пирамида. Њене су стране подударни равнокраки троугли; висина сваког таквог троугла зове се бочна висина пирамидина.

Пирамида, у које су све ивице једнаке, зове се равноивична; она је и правилна. Како су њене стране равнострани троугли, то може равноивична пирамида имати највише пет страна.

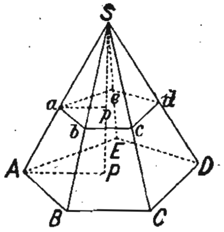
Равни пресеци пирамиде.

235. 1. Кад се пирамида пресече једном равни, која је с њеном основом паралелна, онда је *a)* пресек сличан основи, *b)* површине пресека и основе стоје у размери као квадрати њихових раздаљина од врха.

Доказ. Нека је (сл. 134) $abcde \parallel ABCDE$.

a) Излази непосредно из чл. 224, 3.

b) Ако је $SP \perp ABCDE$, дакле и $Sp \perp abcdc$, па се кроз ASP постави раван која сече оба полигона по дужима ap и AP, онда је $ap \parallel AP$, с тога $ab : AB = Sa : SA = Sp : SP$. Па како је $abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2$, то је и $abcde : ABCDE = Sp^2 : SP^2$.



Сл. 134.

Кад се пирамида пресече једном равни, која је паралелна с њеном основом, онда се део пирамиде између паралелних површина назива **зарубљена пирамида**; а део од пресека до врха зове се **допуна зарубљеној пирамиди**. Зарубљену пирамиду ограничавају два паралелна и слична полигона као основе и онолико трапеза са стране, колико страна има сваки од та два полигона. Раздаљина од једне основе до друге назива се **висина** зарубљене пирамиде.

Ако је пирамида **пра̂ва** или **правилна**, онда је таква и зарубљена пирамида. У праве зарубљене пирамиде сви су бочни трапези равнокраки, а у правилне су још и подударни. Код ове последње висина сваког бочног трапеза зове се **бочна висина** правилне зарубљене пирамиде.

2. Кад се кроз две неузастопне бочне ивице какве пирамиде постави раван, онда је пресек троугао и зове се дијагонални пресек пирамиде.

Сваку многострану пирамиду можемо дијагоналним пресецима раставити на тростране пирамиде, које имају исту висину као и цела пирамида.

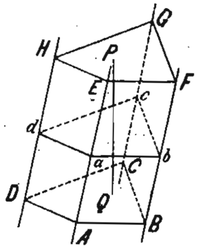
2. Призма.

236. Паралелним помицањем неограничене праве AE (сл. 135) по обиму полигона $ABCD\ldots$ добивају се равни, које се секу по паралелним линијама; те равни обухватају простор, који је са две стране отворен, и зове се **призматичан простор**. AE је производиља, $ABCD\ldots$ линија водиља. Кад се призматичан простор пресече двема паралелним равнима, онда се тако ограничено тело зове **призма**. Паралелни пресеци зову се **основе**, а остале граничне површине **стране** или **бокови**. У призме су основе подударни полигони (чл. 202), а стране су паралелограми. Пресеци обе основе са странама зову се **основне ивице**, а пресеци стра́на̂ зову се **бочне ивице**; бочне су ивице једнаке. Раздаљина PQ од једне основе до друге зове се **висина** призме.

Раван, постављена кроз две неузастопне ивице какве призме, даје **дијагонални пресек**; тај је пресек паралелограм.

Кад се призма пресече једном равни, која је нормална на бочним ивицама њеним, онда се пресек зове **попречни пресек**.

237. Према броју бочних ивица зове се призма **тространа**, **четворострана** и **многострана**. С погледом на положај бочних ивица према основи разликујемо **пра̂ве** и **ко̂се** призме, према томе да ли бочне ивице стоје према основи нормално или косо.



Сл. 135.

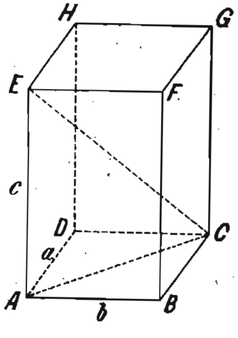
Права призма, чије су основе правилни полигони, зове се **правилна**.

Призма, чије су основе паралелограми, зове се **паралелопипед**. Прав паралелопипед, чије су основе правоугаоници, зове се **правоугли** паралелопипед (квадер). Правоугли паралелопипед с једнаким ивицама зове се **коцка** или **куб**. Сваки је паралелопипед ограничен са шест паралелограма, правоугли паралелопипед са шест правоугаоника, а коцка са шест квадрата.

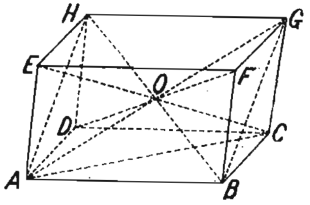
238. **Дијагоналом** у паралелопипеду назива се дијагонала његова дијагонална пресека. Паралелопипед има четири дијагонале.

Теореме. 1. У сваком паралелопипеду секу се све дијагонале у једној тачки и полове се узајамно.

Доказ. Ако се кроз ивице AB и HG (сл. 136) постави раван, онда је пресек $ABHG$ паралелограм; у њему се дијагонале AG и BH морају узајамно половити у тачки O. Али се и CE и BH морају половити, дакле и BH пролази кроз O итд.



Сл. 137.



Сл. 136.

2. У сваком правоуглом паралелопипеду дијагонале су једнаке, јер сваке две дијагонале припадају једном правоугаонику.

3. У сваком је правоуглом паралелопипеду квадрат једне дијагонале једнак са збиром квадрата трију ивица које се у једном темену стичу.

Нека је $ABCDEFGH$ (сл. 137) правоугли паралелопипед. Тада је

$$EC^2 = AC^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

239. Пресеци призме. 1. Кад се призма пресече једном равни, која је паралелна с њеном основом, онда је пресек подударан с основом.

$abcd \cong ABCD$ (сл. 135) Доказ се оснива на чл. 202.

2. Сваку многострану призму можемо дијагоналним пресецима раставити на тростране призме које имају с целом призмом исту висину.

3. Полиедри у опште, и правилни на по̂ се.

240. Полиедар, који има саме издубене углове, зове се испупчен (конвексан). Посматраћемо само такве полиедре.

Теореме. 1. У сваком је полиедру број (u) свију ивичних углова два пута већи од броја (i) свих ивица.

На сваком полиедру има толико углова, колики је број страна свих површина које га ограничавају; ну овај је број два пута већи од броја ивица, јер је свака ивица заједничка двема полиедарским странама; с тога је

$$u = 2i.$$

2. У сваком је полиедру утројени број рогљева (r), исто тако и утројени број страна (s), мањи, или највише једнак с удвојеним бројем ивица (i).

Код сваког рогља, исто тако на свакој страни, има најмање три угла; према томе је $3r$, исто тако $3s$, једнако или мање од броја свих углова; а овај је број $2i$ (по теор. 1.), дакле

$$3r \leqq 2i \quad \text{и} \quad 3s \leqq 2i.$$

241. Теореме. 1. Збир свих углова на површини сваког полиедра даје онолико пута по $4R$, колико показује за 2 смањени број рогљева.

Доказ. Кад се све стране полиедарске пројектују на једну раван, која није нормална ни на којој ивици, онда је пројекција сваке полиедарске стране опет полигон с толико исто страна; с тога је збир S свих углова на полиедарској површини једнак са збиром свих полигонских углова у пројекцији. Ако пројекције од r_1 теме́на̂ полиедарских падају на обим полиедарске пројекције, а пројекције од r_2 рогљева падају у унутрашњост полиедарске пројекције, онда збир свих полиедарских углова износи толико, колики је збир углова једног полигона од r_1 темена више r_2 пуна угла; с тога је

$$S = 2(r_1 - 2)\cdot 2R + r_2\cdot 4R = (r_1 + r_2 - 2)\cdot 4R,$$

или, како је $r_1 + r_2 = r$,

$$S = (r - 2)\cdot 4R.$$

2 Збир свих углова на површини сваког полиедра даје и онолико пута по $4R$, колико показује разлика између броја ивица (i) и броја страна полиедарских (s).

Доказ. Ако је $n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots$ број страна на појединим површинама полиедарским, онда су збирови углова у тим полигонима $(n_1 - 2)\cdot 2R$, $(n_2 - 2)\cdot 2R$, $(n_3 - 2)\cdot 2R, \ldots$ с тога збир свих углова на полиедарској површини:

$$S = (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots)\, 2R - s\cdot 4R.$$

Али је $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = 2i$, јер су у свакој ивици спојене две полигонске стране; дакле $S = i\cdot 4R - s\cdot 4R$, или

$$S = (i - s)\cdot 4R.$$

242. Теорема. У сваком је полиедру збир од броја рогљева (r) и броја страна (s) за два већа од броја ивица (i).

Ту је теорему поставио Leonhard Euler 1752. год., и она се по њему и зову Ајлерова теорема. Ајлер, један од најзнаменитијих математичара, рођен је у 1707 у Базелу, био је професор у Петрограду и Берлину, а умро је 1783. год. у Петрограду.

Доказ. По чл. 241. збир углова на површини полиедарској износи: $S = (r - 2)\cdot 4R$, и $S = (i - s)\cdot 4R$. Отуд излази

$$r - 2 = i - s, \text{ или}$$

$$r + s = i + 2.$$

Једначина $r + s = i + 2$, као и оне у чл. 240. изведене неједначине $3r \overset{=}{<} 2i$ и $3s \overset{=}{<} 2i$, симетричне су по r и s, т.ј. оне се не мењају, кад се у њима r и s узајамно замене.

243. Полиедар, чије су стране подударни и правилни полигони, и рогљеви подударни и правилни, зове се правилан полиедар

Теорема. Правилних полиедара не може бити више од пет.

Доказ. Нека су стране каквог правилног полиедра m-страни полигони, од којих сваких n граде по један рогаљ, r нека је број рогљева, s број страна, i број ивица полиедарских. Тада је укупни број полигонских страна $2i$, јер је свака ивица заједничка страна двају полигона; ну тај је број и $n \cdot r$, јер се у сваком рогљу стичу n страна, а тако исто и $m \cdot s$, пошто свака полиедарска страна има m полигонских страна. Према томе је $n \cdot r = 2i$ и $m \cdot s = 2i$, или

$$r = \frac{2i}{n} \text{ и } s = \frac{2i}{m}.$$

Али је (по чл. 242) $r + s = i + 2$, с тога $\frac{2i}{n} + \frac{2s}{m} = i + 2$, дакле

$$i = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}.$$

Да би i било позитивно, могу m и n имати само такве вредности, за које је $2(m+n) > mn$, или $\frac{2m}{m-2} < n$. Према томе су правилни полиедри могућни само за ове вредности m и n:

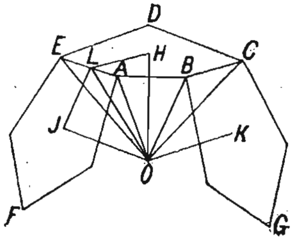
1. $m = 3$, $n = 3$, отуд $i = 6$, $r = 4$, $s = 4$ (тетраедар.)
2. $m = 3$, $n = 4$, „ $i = 12$, $r = 6$, $s = 8$ (октаедар.)
3. $m = 3$, $n = 5$, „ $i = 30$, $r = 12$, $s = 20$ (икосаедар.)
4. $m = 4$, $n = 3$, „ $i = 12$, $r = 8$, $s = 6$ (хексаедар.)
5. $m = 5$, $n = 3$, „ $i = 30$, $r = 20$, $s = 12$ (додекаедар.)

Хексаедар и октаедар имају једнак број ивица, а број рогљева једнога једнак је с бројем страна другога полиедра, за тим је број ивица на свакој страни једнога полиедра једнак с бројем ивица сваког рогља другога полиедра. С тога се та два правилна полиедра зову један другоме приређени. Из истог узрока узајамно су приређени: додекаедар и икосаедар.

Тетраедар је сâм себи приређен; он има колико теме́нâ толико и стра́нâ, а на свакој је страни толико ивица колико их се стиче у једном рогљу.

244. Теорема. У сваком правилном полиедру има једна тачка која је једнако удаљена *a)* од свих страна полиедарских, и *b)* од свих темена његових.

Доказ. *a)* Нека су (сл, 138) AEC, AEF,... стране правилног полиедра, а H, J,... њихова средишта. Кад се из H и J повуку дужи HL и JL до средине L ивице AE, онда су оне нормалне на AE, па је с тога HLJ нагибни угао између равни AEC и AEF, и ове су равни нормалне на равни угла HLJ. Ако се, дакле, у тачкама H и J повуку нормале на AEC и AEF, онда оне морају лежати у равни HLJ (чл. 209, 3) па се према томе морају сећи у једној тачки O. Кад се повуче OL, онда је $\triangle OHL \cong OJL$, с тога $OH = OJ$; тј. тачка O удаљена је од стране AEF толико исто, колико и од AEC. Због једнакости свих углова и страна мора и нормала сваке друге полиедарске стране, обличње страни AEC, сећи нормалу OH у истој тачки O; закључујући тако даље, налазимо да је тачка O једнако удаљена од свих страна правилног полиедра.



Сл. 138.

b) Како су OH, OJ, OK,... нормалне на странама AEC, AEF, BCG,... а пролази кроз њихова средишта H, J, K,... то морају (по чл. 222) све косе дужи од O до теме́нâ полиедарских бити једнаке. Дакле тачка O једнако је удаљена и од свих темена полиедарских.

Тачка O зове се средиште правилног полиедра. На пређашњој теореми и на двојпој приређености правилних полиедара, доказаној у чл 243., оснивају се ова правила о мењању облика тих тела:

1. Кад се стране правилног полиедра замене њиховим средиштима, онда су те тачке темена приређеног правилног полиедра.

2. Кад се сва темена правилног полиедра замене равним површинама, које су једнако нагнуте према њиховим ивицама, онда су те површине стране приређеног правилног полиедра.

II. Тела ограничена кривим површинама.

245. Тела, која су сасвим или делимице ограничена кривим површинама, зову се тела с кривом површином.

1. Купа.

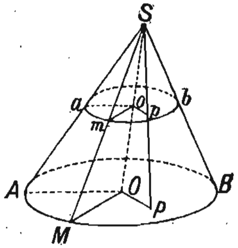
246. Кад се права креће тако, да клизи по периферији једног круга и да увек пролази кроз једну сталну тачку ван равни тога круга, док не дође у свој првобитни положај, онда она описује криву површину која се зове купаста или конусна површина. Дата кружна линија зове се линија водиља, а дата стална тачка зове се врх купасте површине.

Теорема. Сваки пресек купасте површине, који је паралелан са равнином њене водиље, круг је.

Доказ. Нека је S (сл. 139) врх, а круг AMB водиља купасте површине, и нека је раван $amb \parallel AMB$. Кад вежемо врх S са средиштем круга AMB правом SO, која продире раван amb у тачки o, па поставимо једну раван кроз SO и буди коју тачку m на пресеку, онда ће она сећи купасту површину по правој SmM, и тада ће бити

$$om : OM = So : SO, \quad oa : OA = So : SO,$$

дакле и $om : OM = oa : OA$; па како је $OM = OA$, то је и $om = oa$. Дакле све тачке на периферији пресека једнако су удаљене од тачке o, и према томе је тај пресек круг.



Сл. 139.

247. Кад се купаста површина пресече једном равни, која је паралелна према равни њене водиље, онда се тако ограничено тело зове купа или конус. Раван пресек је кружна површина и зове се основа, а ограничена купаста површина зове се омотач у купе. Дуж од врха купина до средишта њене основе зове се осовина; а свака дуж, по којој је омотач пресечен равнином што пролази кроз осовину, зове се страна у купе. Раздаљина од врха до основе зове се висина.

Кад је осовина на основи нормална, онда се купа зове пра̑ва, иначе ко̑са. Може се замислити да права купа постаје, кад се правоугли троугао обрће око једне катете своје. У праве купе све су стране једнаке, а осовина је уједно и висина. У косе купе има једна најдужа и једна најкраћа страна; обе су у оној равни, која пролази кроз осовину и њену пројекцију на основи.

Кад је у праве купе страна једнака с пречником њене основе, онда се купа зове равнострана.

Кад се кроз једну тачку на обиму купине основе повуче страна и дирка на основу, онда раван, одређена тим двема линијама, има ту страну заједничку с површином купе; она се зове додирна раван купе.

248. Пресеци. 1. Кад се купа пресече једном равни, која је паралелна с њеном основом, онда је *а)* тај пресек круг, *b)* површине тог пресека и основе стоје у размери као квадрати њихових раздаљина од купина врха.

Доказ. Нека је (сл. 131) раван $amb \parallel AMB$.

а) Излази из чл. 246.

b) Ако је $SP \perp AMB$, дакле и $Sp \perp amb$, па се кроз O и SP постави раван која сече оба круга по OP и op, онда је $op \parallel OP$, с тога $Sp : SP = So : SO = ao : AO$. Па како је $amb : AMB = ao^2 : AO^2$, то је и $amb : AMB = Sp^2 : SP^2$.

Кад се купа пресече једном равни, која је паралелна с њеном основом, онда се њен део између пресека и основе зове зарубљена купа, а део од пресека до врха допуна зарубљеној купи. Зарубљену купу ограничавају две паралелне неједнаке кружне површине као основе и онај део купастог омотача, који је између њих. Свака дуж, по којој је омотач пресечен једном равни која пролази кроз осовину, зове се страна зарубљене купе. Раздаљина од једне основе до друге зове се висина зарубљене купе.

Зарубљена је купа, као и цела купа, права или коса.

2. Кад се кроз осовину какве купе постави раван, онда се такав пресек зове осни или осовински пресек. Сваки осни пресек је троугао.

Јер свака раван, постављена кроз осовину, сече основу по једном пречнику, а омотач по двема дужима.

У праве купе сви су осни пресеци равнокраки, подударни и према основи нормални троугли. У косе је купе само један троугао нормалан на основи, и то онај који пролази кроз пројекцију осовине на основи; то је значајни троугао, у њему је најдужа и најкраћа страна купе. У косе је купе само један троугао равнокрак, и то онај чија раван сече основу по пречнику нормалноме према пројекцији купине осовине (чл. 221.). Равни та два троугла нормалне су једна на другој.

3. Осни пресек зарубљене купе је трапез.

Јер свака раван, постављена кроз осовину, сече основе по паралелним пречницима, а омотач по двема непаралелним дужима.

За осне пресеке праве и косе зарубљене купе вреди исто што и за осне пресеке целе купе.

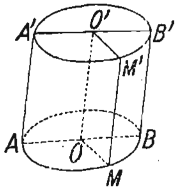
2. Облица.

249. Кад се права креће у простору тако, да клизи по периферији једног круга и да увек буде паралелна с једном сталном правом која продире раван тога круга у његову средишту, док не дође у свој првобитни положај, онда она описује криву површину која се зове цилиндарска површина.

Дати круг зове се линија водиља, а она стална права што пролази кроз његово средиште, зове се осовина цилиндарске површине.

Теорема. Сваки пресек цилиндарске површине, који је паралелан са равнином њене водиље, круг је истога полупречника као у водиље.

Доказ. Нека је круг ABM (сл. 140) водиља цилиндарској површини, а једна, с тим кругом паралелна раван $A'B'M'$ нека сече осовину OO' у тачки O'. Кад се кроз OO' и буди коју тачку M' на пресеку постави раван, која сече цилиндарску површину по правој MM', онда је $OO' \parallel MM'$ и $O'M' \parallel OM$; с тога је $OO'M'M$ паралелограм, дакле $O'M' = OM$. Дакле раздаљина сваке тачке на пресеку од O' једнака је с полупречником линије водиље, тј. пресек је круг, подударан с водиљом.



Сл. 140.

250. Кад се цилиндарска површина пресече двема равнима које су паралелне са равнином њене водиље, онда се тако ограничено тело зове облица или ваљак. Она два равна пресека две су подударне кружне површине и зову се основе; цилиндарска површина, ограничена основама, зове се омотач. Дуж, која везује средишта обе основе, зове се осовина; а сваки пресек омотача с каквом равни, која пролази кроз осовину, назива се страна обличина. Раздаљина од једне основе до друге зове се висина облице.

У облице све су стране паралелне и једнаке. Ако је осовина нормална на основама, онда се облица зове пра̂ва, иначе ко̂са. Може се замислити да права облица постаје, кад се правоугаоник обрће око једне своје стране. У праве је облице осовина исто што и висина.

Кад је у праве облице страна једнака с пречником њене основе, онда се облица зове равнострана.

Кад се кроз једну тачку на обиму обличине основе повуче страна и дирка основи, онда раван, одређена тим двема линијама, има ту страну заједничку с површином облице; она се зове додирна раван облице.

251. Пресеци. 1. Кад се облица пресече једном равни која је паралелна с њеном основом, онда је пресек круг подударан с основом.

То је последица чл. 249.

2. У облице је сваки осовински пресек паралелограм, јер су у добивеном четвороуглу пресеци с омотачем две стране у облице, а оне су паралелне и једнаке.

У праве облице сви су осовински пресеци подударни правоугаоници и стоје на основи нормално. У косе облице ти су пресеци неједнаки и у опште косоугли паралелограми, међу којима је само један нормалан на основи, и то онај, чија раван пролази кроз пројекцију осовине на основи; то је значајни паралелограм на облици. Кад се кроз обличину осовину постави раван нормална према равни значајног паралелограма, онда она сече облицу по правоугаонику.

3. Лопта.

252. Кад се полукруг обрће око свог пречника дотле, док не дође опет у свој првобитни положај, онда он описује криву површину, која се зове лоптина површина. Лоптином површином ограничено тело зове се лопта.

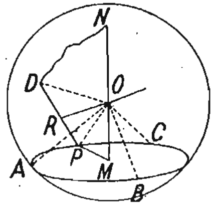
Све тачке на лоптиној површини једнако су удаљене од средишта оног круга, који производи лопту. Та се тачка с тога и зове средиште лоптино. Дуж од средишта до површине зове се полупречник; дуж која пролази кроз средиште и везује две тачке лоптине површине зове се пречник. Сви су полупречници једне лопте једнаки; исто тако сви пречници. Крајње тачке једног пречника зову се супротне тачке на лопти.

О положају тачке према лопти упореди чл. 71.

Последица. Геометријско место свих тачака у простору, које имају од једне дате тачке исту раздаљину r, јесте површина лопте, описане око те тачке полупречником r.

253. Теорема. Четири тачке A, B, C и D (сл. 141), које нису у једној равни, одређују једну лопту.

Геометријско место свих тачака, једнако удаљених од A, B и C, јесте права MN, повучена кроз средиште M круга одређенога тим трима тачкама, а управно на његову раван. Свака тачка на овој нормали једнако је удаљена од свих тачака на периферији тога круга. Ако се, дакле, постави раван кроз MN и ону четврту тачку D ван равни круга ABC, па пресек P те равни и периферије вежемо с тачком D, и у овој равни повучемо симетралу дужи DP, онда ће она сећи нормалу MN у тачки O, која је једнако удаљена не само од D и P, него је од D удаљена исто толико, колико и од тачака A, B и C. Према томе је O средиште лопте на чијој се површини налазе тачке A, B, C и D.



Сл. 141.

Како се праве MN и RO само у једној тачки секу, то је могућна и само једна лоптина површина кроз A, B, C и D.

Права и лопта.

254. Права сече лопту у двема тачкама, или је додирује у једној тачки, или је сва изван лопте, према томе да ли је њена средишна раздаљина, тј. њена раздаљина од лоптина средишта, мања од полупречника, једнака с њим, или већа од полупречника.

За праву, која додирује лопту, вреде иста правила као и за дирку круга (чл. 80, 1—4).

За какву раван вреди теорема 4?

Све дужи, повучене из једне тачке ван лопте тако да додирују лопту, једнаке су (чл. 81).

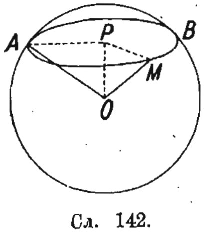
Раван и лопта.

255. Средишна раздаљина једне равни, тј. њена раздаљина од лоптина средишта мања је од полупречника, или је толика иста, или је већа од полупречника. У првом случају раван сече лопту, у другом је додирује (додирна раван), а у трећем лежи сва изван лопте.

О додирној равни вреде слична правила као и за дирку.

Теорема. Сваки ра́ван лоптин пресек круг је.

Доказ. Нека је AMB (сл. 142) ра́ван лоптин пресек. Ако се из лоптина средишта O повуче нормала OP на површину пресека, па се од P повуку дужи PA и PM до периферије тог пресека, и повуку још полупречници OA и OM, онда је $PA = PM$ (чл. 222). Отуд излази да се све тачке на периферији пресека налазе у истој раздаљини од P, што значи да је пресек круг.



Сл. 142.

Круг AM зове се лоптин круг.

256. Теореме о лоптиним круговима.

1. Дуж од лоптина средишта до средишта каква лоптина круга нормална је на равни тога круга.
2. Из лоптина средишта повучена нормала на раван каква лоптина круга пролази кроз његово средиште.
3. Права, која је у средишту каква лоптина круга нормална на његовој равни, пролази кроз лоптино средиште.
4. Једнаки лоптини кругови имају једнаке средишне раздаљине, и обрнуто.

5. Већи лоптин круг има мању средишну раздаљину, и обрнуто.

Додаци. *a)* Између свију кругова на лопти највећи су они, чије равни пролазе кроз лоптино средиште. Они се с тога и зову највећи лоптини кругови или главни кругови. Полупречник каквог главног круга исто је што и полупречник саме лопте.

b) Равни два главна круга секу се увек по једном пречнику лоптину и полове се узајамно.

c) Сваке две тачке на лоптиној површини, које нису супротне, одређују несумњиво положај једног главног круга на лопти. Мањи лук главног круга, који пролази кроз две тачке, одређује сферну раздаљину тих тачака.

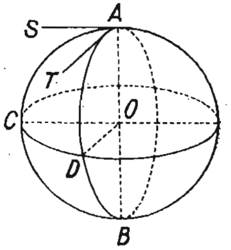
d) Свака крајња тачка лоптина пречника, који је нормалан на равни каква лоптина круга, има исту сферну раздаљину од свих тачака на периферији лоптина круга. С тога се те две тачке зову сферна средишта лоптина круга.

257. Два дела, на која је лопта подељена равнином једног свог круга, зову се лоптини одсечци или сегменти; а делови лоптине површине, који им припадају, зову се лоптине капе или калоте. Кружна је површинаоснова и одсечцима и калотама. Калотом и њеном основом ограничени део оног пречника, који је на тој основи нормалан, назива се висина лоптина одсечка и калоте.

Део лопте између равни два паралелна круга њена зове се лоптин слој, а део лоптине површине између два паралелна круга назива се лоптин појас или зона. Раздаљина између два круга зове се висина лоптина слоја и појаса.

Кад се кружни исечак обрће око једног свог полупречника, онда он описује тело које се зове лоптин сектор или исечак. Он је састављен од једног лоптина сегмента и једне купе.

258. Нагибни угао између равни два главна круга једне лопте назива се сферни угао та два круга. Он се може мерити луком CD (сл. 143) који је за 90° удаљен од сваког пресека оба главна круга. Како је $CO \perp AO$ и $DO \perp AO$, то је COD нагибни угао између равни два највећа круга ACB и ADB, и лук CD мера је том углу; тај је угао једнак и с углом SAT између дирака, које додирују оба главна круга у њихову пресеку.



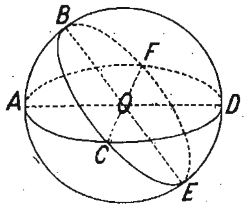
Сл. 143.

259. Део лоптине површине, који ограничавају два највећа полукруга на лопти, на пр. $ACBDA$ (сл. 143), зове се сферни двоугао.

Једнаким сферним угловима једне лопте припадају и једнаки сферни двоугли, и обрнуто.

Доказује се поклапањем.

260. Део лоптине површине, који ограничавају три лука највећих лоптиних кругова, зове се сферни троугао, на пр. ABC (сл. 144).



Сл. 144.

Лукови AB, AC и BC зову се стране, а сферни углови ACB, ABC и BAC углови сферног троугла. Величина стра́на̂ казује се увек у лучној мери.

Стране сваког сферног троугла уједно су стране другог сферног троугла, који заједно с првим чини целу површину лопте. Ако није нарочито напоменуто, онда се увек подразумева онај сферни троугао, који је мањи од полу-лопте.

261. За лопту се каже да је уписана неком полиедру, ако све полиедарске стране додирују лопту; а лопта је описана око каква полиедра, ако су сва полиедарска темена на лоптиној површини.

Сваком правилном полиедру може се лопта уписати и описати (излази из чл. 244).

Узајамни положај две лопте.

262. Две лопте, које имају исто средиште, зову се концентричне. Две лопте, које немају исто средиште, зову се ексцентричне; зрак који пролази кроз оба средишта, зове се централа; а дуж, која везује средишта, зове се средишна раздаљина.

Кад се два круга обрћу око своје централе, онда они описују две лопте. С тога морају између средишне раздаљине и полупречника обе лопте вредети у свима случајевима слични односи као код два круга (чл. 91).

Кад се две лопте секу, онда је њихов пресек круг. Њега описује при обртању сл. 50 заједничка тетива DD'. Централа је нормална на равни заједничког круга. Кад се две лопте додирују, било с поља или изнутра, онда оне имају у додирној тачки заједничке дирке и једну заједничку додирну раван.

III. Задаци.

263. Конструктивни задаци.

1. Кроз тачку, дату изван облице, купе, или лопте, поставити додирну раван.

2. Кроз дату праву поставити раван која додирује лопту.

3. Око датог средишта описати лопту тако, да она додирује дату раван, или дату лопту.

4. Датим полупречником описати лопту, која додирује једну раван, или лопту, у датој тачки.

5. Одреди геометријско место за средишта свима лоптама датога полупречника, које додирују: *a)* једну раван, *b)* једну лопту с поља или изнутра.

6. Уписати октаедар коцки.

7. Описати коцку око октаедра.

8. Конструиши мрежу:

a) правилне, тростране призме,

b) правилне, четворостране пирамиде,

c) правилне, тростране зарубљене пирамиде,

d) коцке, кад је дата њена дијагонала, или дијагонала једне њене стране.

e) правилног тетраедра,

f) октаедра,

g) праве облице,

h) праве купе,

i) праве зарубљене купе.

264. Задаци.

1. У којој раздаљини од врха ваља пресећи пирамиду паралелно према основи, да би површина пресека била *a)* половина, *b)* четвртина основе?

2. У зарубљене пирамиде основе су B и b, а висина је h, израчунај висину њене допуне.

3. Нека су B и b основе зарубљеној пирамиди, а h нека је њена висина; у којој раздаљини од доње основе, а паралелно с том основом ваља пресећи пирамиду, да би површина пресека била геометријска средина између обе основе?

4. Нека је у правилне четворостране пирамиде основна ивица a, а једна бочна ивица $3a$; израчунај полупречник уписане и описане лопте.

5. Докажи да је у призме пресек двеју дијагоналних равни паралелан с њеним бочним ивицама.

6. Изрази дијагоналу правоугла паралелопипеда оним дијагоналама његових страна, које се у једном темену стичу.

7. Израчунај полупречнике правилној призми уписане и описане облице, кад је та призма *a)* тространа, *b)* четворострана, *c)* шестострана, а основна јој је ивица a (чл. 286).

8. Исти задатак за тространу призму, кад су јој основне ивице a, b и c; нпр. $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

9. Ивице правоугла паралелопипеда стоје у размери 1 : 2 : 3. Израчунај полупречник описане лопте, кад је прва ивица a.

10. Какви се закључци могу извести из Ајлерова правила о броју рогљева и стра́на̂ полиедарских, ако је број ивица *a)* паран, *b)* непаран?

11. Средине у два пара супротних ивица правилна тетраедра темена су једног паралелограма чија је раван паралелна с трећим паром ивица.

12. Дужи, које везују средине три пара супротних ивица правилна тетраедра, секу се у истој тачки.

13. Средине свих ивица правилна тетраедра темена су правилна октаедра.

14. Равни, које полове шест диедарских углова какла било тетраедра, секу се у истој тачки која је једнако удаљена од све четири стране.

15. Шест равнина, постављених кроз средине тетраедарских ивица, а нормално на те ивице, секу се у истој тачки.

16. Четири праве, које везују темена каква тетраедра са тежиштем супротне стране, секу се у истој тачки која дели те праве по размери 3 : 1 (идући од врха ка супротној страни).

17. Кад се на супротним странама какве коцке повуку дијагонале које се укрштају, онда су те дијагонале супротне ивице правилна тетраедра.

Како се, према томе, може у коцки уписати правилан тетраедар?

18. Две и две супротне ивице правилна тетраедра укрштају се под правим углом.

19. Кад се правилан тетраедар пресече равнима, које су паралелне са две супротне ивице његове, онда су ти пресеци правоугаоници сталног обима.

20. Раван, постављена кроз средине трију коцкиних ивица, које се не секу у истој тачки, а нису ни паралелне, сече коцку по правилном шестоуглу.

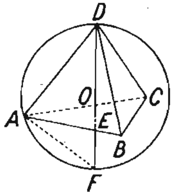
21. Ако је ϱ полупречник круга, описаног око једне стране правилна полиедра, а R и r нека су полупречници полиедру описане и уписане лопте, онда је $R^2 = \varrho^2 + r^2$.

22. Позната је коцкина ивица a; израчунај полупречник уписане и описане лопте.

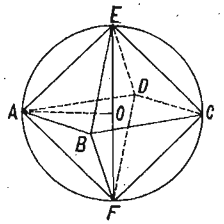
23. Позната је тетраедарска ивица a; израчунај полупречник уписане и описане лопте.

Нека је око тетраедра $ABCD$ (сл. 145) описана лопта и нека је $DE \perp ABC$; тада је E средиште круга описаног око ABC; ако се продужи DE до F, онда је DF пречник описане лопте, а AE полупречник круга описаног око троугла ABC. Из правоугла троугла DAF добија се $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

Из $r^2 = R^2 - \varrho^2$ излази $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.



Сл. 145.



Сл. 146.

24. Позната је октаедарска ивица a; израчунај полупречник описане и уписане лопте.

Ако се у октаедру (сл. 146) повуче дијагонала EF, онда је она пречник описане лопте; она је нормална на $ABCD$, а њено подножје O средиште је и описаној лопти и кругу описаноме око квадрата $AECF$. С тога је $EO = R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Из $r^2 = R^2 - \varrho^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}$ излази $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$.

25. Значајни осни пресек косе купе има најмању, а на њему нормални осни пресек има највећу површину.

26. Зарубљену купу пресеци паралелно с основама тако, да површина пресека буде *a)* аритметичка, *b)* геометријска средина обе основе. Одреди раздаљину таквог пресека од мање основе.

27. Права облица пресечена је паралелно према њеној основи тако, да је површина тог пресека n-ти део осног пресека; одреди раздаљину тог пресека од осовине.

28. Две непаралелне додирне равни једне облице секу се по правој паралелној према осовини те облице.

29. Одреди геометријско место оних тачака у простору које, везане са две сталне тачке, дају прав угао.

30. Кад се кроз једну праву поставе две равни које додирују једну лопту, а трећа раван кроз ту праву и лоптино средиште, онда ова трећа раван полови угао између додирних равни.

31. Нека је R полупречник једне лопте; одреди геометријско место за средишта свих лоптиних кругова чији је полупречник r.

32. Једна права продире лопту; како ваља поставити раван кроз ту праву, да би пресек био *a)* максимум, *b)* минимум?

33. Лопта је пресечена једном равни која дели по размери $m:n$ онај пречник, који на њој стоји нормално; колики је полупречник пресека?

34. Кад се две концентричне лопте пресеку једном равни, онда је пресек прстен чија је површина стална.

ТРЕЋИ ОДЕЉАК.

Подударност, симетрија и сличност тела.

265. Два се тела називају подударна, кад се могу једно у друго положити тако, да им се стране поклапају.

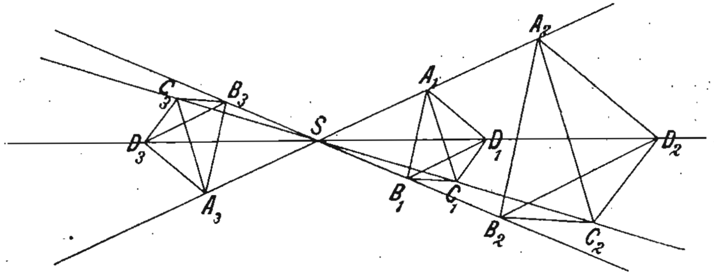
Два се тела називају симетрично једнака, кад се могу на супротним странама једне равни ставити у такав положај једно према другоме, да су дужи, које везују две и две наспрамне тачке, на тој равни нормалне и да су њоме преполовљене. Та раван зове се симетријска раван. Симетрично су једнаке на пр. лева и десна рука, или предмет и његов лик у равном огледалу.

У подударних, а тако исто у симетричних тела, једнаке су две и две дужи (ивице, висине, дијагонале, полупречници, осе) које одговарају једна другој, тако исто диедри који одговарају један другоме, а подударне су две и две површине које одговарају једна другој; само су рогљеви, који одговарају један другоме, подударни у подударних, а симетрично једнаки у симетричних тела.

Да бисмо даноме полиедру конструисали симетричан полиедар, треба само једном рогљу данога тела конструисати унакрсни рогаљ, па полазећи од тог рогља, конструисати друго тело тако, да има са задатим по реду једнаке ивице, подударне стране и једнаке диедре. Тада су рогљеви оба тела симетрични, а сама тела симетрично једнака.

266. Сличност тела.

Кад се из једне тачке S (сл. 147) повуку кроз темена каква тела зраци SA_2, SB_2 SC_2 итд. па се на сваком зраку одреди по једна тачка $(A_1, B_1, C_1 \ldots)$ на истој страни, или $(A_3, B_3, C_3 \ldots)$ на супротној страни тачке S, тако да хомологи одсечци на тим зрацима стоје у истој сталној размери, онда свака група тих тачака припада телу, које се према датом телу налази у перспективно сличном положају. Две и две тачке, дужи, површине, исто тако два и два диедра и рогља, што одговарају једно другоме, зову се хомологи елементи, а тачка S је тачка сличности; тачка сличности може бити спољашња или унутрашња (слично чл. 119). Стална размера зрачних одсечака зове се модуо сличности. У сличних тела стоје хомологе дужи у истој сталној размери, која је једнака с модулом сличности, хомологи углови једнаки су, а хомологи рогљеви подударни су или симетрични, према томе да ли је тачка сличности с поља или изнутра. У првом случају тела се зову слична, а у другом симетрично слична. Ако је модуо сличности $+1$, онда се сличност претвара у подударност, ако је модуо -1, онда се симетрична сличност претвара у симетричну једнакост.



Сл. 147.

Две су лопте, онако исто као и два круга, увек сличне и у перспективном положају. Оне имају увек једну спољашњу и једну унутрашњу тачку сличности.

Примери сличних тела: 1. цела пирамида и она мања која се добија кад се цела пресече паралелно основи. 2. цела купа и мања која постаје кад се цела пресече паралелно с основом.

Две су купе сличне, исто тако и две облице, кад им осовине стоје у истој размери као пречници њихових основа, и кад су им осовине једнако нагнуте према основи.

ЧЕТВРТИ ОДЕЉАК.

Мерење тела.

267. При мерењу тела одређује се њихова површина и кубна садржина или запремина (волумен).

Површина тела налази се, кад се израчунају све површине које га ограничавају, па се сабору.

Да бисмо одредили запремину неког тела, т.ј. величину простора обухваћенога његовим граничним површинама, испитујемо, колико се пута у даноме телу садржи друго тело које је узето за јединицу.

Као јединица запреминске мере узима се коцка чија је ивица дужинска јединица, а зове се у системи метарских мера кубни метар (m^3), кубни десиметар (dm^3),.... $1\ m^3 = 1000\ dm^3$, $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$, $1\ cm^3 = 1000\ mm^3$. Литар је $1\ dm^3$; 100 литара $=$ 1 хектолитар.

За два тела, која имају једнаке запремине, каже се да су запремински једнака.

Површина је одређена изразом од две, а запремина изразом од три димензије (чл. 159).

268. Каваљеријево правило.

Два тела, постављена на једну раван, имају једнаке запремине, ако су им пресеци са сваком паралелном равни једнаки.

Да би се разумело ово правило, ваља замислити да су оба тела паралелним равнима исечена на бескрајно танке плочице, које су по две и две једнаке; с тога морају и збирови тих плочица, т.ј. оба тела, имати исту запремину.

I. Мерење рогљастих тела.

1. Призма.

Површина призме.

269. Површина p какве призме налази се, кад се одреде површине њених страна, па се тако добивеном омотачу o дода двогуба површина основе b; дакле $p = o + 2b$.

Омотач праве призме једнак је с правоугаоником, коме је основица обим призмине основе, а висина иста као у призме.

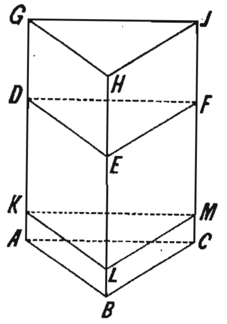
270. Теорема. Праве призме с подударним основама стоје у размери као њихове висине.

a) Нека призме $ABCDEF$ и $ABCGHJ$ (сл. 148.) имају самерљиве висине AD и AG, нека је AK, њихова заједничка мера и $AD = m \cdot AK$, $AG = n \cdot AK$; према томе $AD : AG = m : n$. Ако се кроз раздеоне тачке на AD и AG поставе равни паралелне основи, онда се добивају подударне призме. Тада је

$$ABCDEF = m \cdot ABCKLM,$$
$$ABCGHJ = n \cdot ABCKLM,$$

с тога

$$ABCDEF : ABCGHJ = m : n, \text{ дакле и}$$
$$ABCDEF : ABCGHJ = AD : AG.$$



Сл. 148.

b) Ако висине обе призме нису самерљиве, онда је доказ сличан ономе у чл. 113. *b*.

Запремина правоуглог паралелопипеда.

271. Нека је P правоугли паралелопипед ових димензија (мерних бројева): a, b, c. Упоредимо ова три правоугла паралелопипеда:

P: димензије $a, b, c.$
P': „ $a, b, 1.$
P'': „ $a, 1, 1.$
K: „ $1, 1, 1.$

Тада је: $P : P' = c : 1,$
$P' : P'' = b : 1,$
$P'' : K = a : 1.$

Из тих пропорција добија се:

$$P = abc.\ K \text{ или}$$

$$\frac{P}{K} = abc.$$

Како је $\frac{P}{K}$ мерни број запремине правоуглог паралелопипеда P, то вреди правило:

Запремина правоугла паралелопипеда једнака је с производом мерних бројева трију ивица које се стичу у једном темену.

Како је ab мерни број за површину основе, а c мерни број висине правоугла паралелопипеда, то се може рећи:

Запремина правоугла паралелопипеда једнака је с производом мерних бројева његове основе и висине. (Краће: производ основе и висине).

За коцку је $a = b = c = s$, дакле њена запремина $V = s^3$.

Другој коцки, чија је ивица s', запремина је $V' = s'^3$, према томе

$$V : V' = s^3 : s'^3.$$

Запремине две коцке стоје у размери као трећи степени њихових ивица.

Запремина какве било призме.

272. Како је по Каваљеријеву правилу свака призма једнака с правоуглим паралелопипедом исте основе и висине, то је запремина сваке призме једнака с производом њене основе и висине. $V = b \cdot h$.

Из те једначине излазе ова правила:

a) Кад две призме имају једнаке основе, онда им запремине стоје у размери као њихове висине.

b) Кад две призме имају једнаке висине, онда им запремине стоје у размери као њихове основе.

c) Кад су две призме сличне, онда им запремине стоје у размери као трећи степени хомологих димензија.

Доказ. Нека су P и p две сличне призме, B и b њихове основе, H и h њихове висине, A и a две хомологе ивице. Тада је

$$P : p = B \cdot H : b \cdot h.$$

Како су им основе B и b сличне, а висине H и h стоје у размери двеју хомологих ивица A и a, то је

$$B : b = A^2 : a^2, \text{ и } H : h = A : a.$$

Множећи те две пропорције, налазимо

$$B \cdot H : b \cdot h = A^3 : a^3, \text{ или}$$
$$P : p \quad = A^3 : a^3.$$

2. Пирамида.

Површина и запремина пирамиде.

273. Да бисмо добили површину p какве пирамиде, треба израчунати површине њених страна, па тако добивеном омотачу o додати површину њене основе b; дакле $p = o + b$.

Омотач правилне пирамиде једнак је с половином производа обима њене основе и бочне висине.

274. Теорема. Две пирамиде једнаких основа и висина имају запремине једнаке.

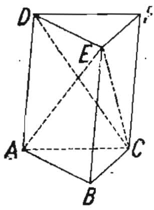
Ако су основе тих пирамида на једној равни, онда су пресеци обе пирамиде са сваком равни, која је паралелна према њиховим основама, једнаки. Јер, ако им је основа B, висина h, а d раздаљина пресека од врха, и на послетку P и P' површине пресека, онда је

$$B : P = h^2 : d^2, \text{ и}$$
$$B : P' = h^2 : d^2, \text{ с тога}$$

$P = P'$. Обе су пирамиде, дакле, тела на која се може применити Каваљеријева теорема, па су с тога једнаке.

275. Теорема. Свака тространа призма може се раставити на три тростране пирамиде једнаких запремина (сл. 149).

Доказ. Ако се кроз тачке A, E и C постави раван, онда је призма подељена на тространу пирамиду $EABC$ и четворострану $EACFD$. Ова четворострана пирамида може се поделити на две тростране пирамиде $EACD$ и $ECDF$, кад се постави раван кроз тачке C, E и D. Према томе је цела призма састављена од три тростране пирамиде $EACD$, $ECDF$ и $EABC$, од којих је прва једнака с другом, а друга с трећом (чл. 274).



Сл. 149.

Последица. Свака је тространа пирамида трећина тростране призме исте основе и висине.

276. Теореме. *a)* Запремина тростране пирамиде једнака је с трећим делом производа њене основе и висине.

Излази из чл. 275 и 272.

b) Запремина сваке пирамиде једнака је с трећим делом производа њене основе и висине.

Јер је свака вишестрана пирамида једнака с тространом, ако су им једнаке основе и висине. (чл. 274).

277. Теорема. Запремине двеју сличних пирамида стоје у размери као трећи степени њихових хомологих ивица.

Доказ је сличан чл. 272, *c*.

Површина и запремина зарубљене пирамиде.

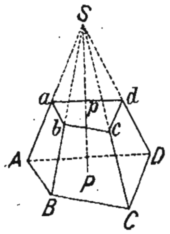
278. Површина p зарубљене пирамиде налази се, кад се одреди омотач o, т.ј. збир свих бочних површина, па му се дода површина једне и друге основе B и b, дакле

$$p = o + B + b.$$

Омотач правилне зарубљене пирамиде једнак је с производом обима средњег пресека и бочне висине.

Јер, ако се кроз средину једне бочне ивице постави раван паралелно с основом, онда ће она преполовити и све остале бочне ивице, па се с тога као средњи пресек добија правилан полигон. По теореми чл. 156, 3, b јасно је, да је тачно ово правило.

279. Теорема. Запремина зарубљене пирамиде једнака је са запреминама трију пирамида, којима су основе обе основе зарубљене пирамиде и њихова геометријска средина, а висина иста као у зарубљене пирамиде.



Сл. 150.

Доказ. Ако се зарубљена пирамида $ABCD$ $abcd$ (сл. 150) допуни, тако да се добије цела пирамида, онда је запремина зарубљене пирамиде

$$v = \text{пирам. } SABCD - \text{пирам. } Sabcd.$$

Ако су B и b основе, h висина Pp, а x непозната висина Sp, онда је

$$v = \frac{B\,(h+x)}{3} - \frac{bx}{3} = \frac{Bh}{3} + \frac{x}{3}\,(B-b).$$

Висина x одређује се из пропорције (чл. 235, 1):

$$B : b = (h+x)^2 : x^2 \text{ или } \sqrt{B} : \sqrt{b} = (h+x) : x.$$

Отуд излази $(\sqrt{B} - \sqrt{b}) : \sqrt{b} = h : x$, отуд $x = \dfrac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}$.

Према томе је

$$v = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3\,(\sqrt{B}-\sqrt{b})}\,(B-b) = \frac{Bh}{3} + \frac{h\sqrt{b}}{3}\,(\sqrt{B}+\sqrt{b})$$

$$= (B + \sqrt{Bb} + b)\cdot\frac{h}{3}.$$

Овај је образац саопштио Леонардо Фибонаци у своме делу: Practica Geometriae, 1220.

3. Правилни полиедри.

280. 1. Површина правилна полиедра налази се, кад се одреди површина једне његове стране, па помножи бројем страна.

2. Запремина правилна полиедра једнака је с трећим делом производа његове површине и полупречника уписане му лопте.

Доказ се оснива на чл. 244 и 276.

II. Мерење тела, ограничених кривом површином.

1. Купа.

Површина и запремина купе.

281. Кад се у основи какве купе упише, или око ње опише правилан полигон, па се он узме за основу пирамиде која има с купом заједнички врх, онда се та пирамида зове у купи уписана, или око ње описана. Бочне ивице уписане пирамиде стране су, а бочне површине описане пирамиде додирне су равни купиној површини.

Ако број страна уписане и описане пирамиде расте, онда омотач и запремина уписане пирамиде расту, а описане опадају. Омотач праве купе заједничка је гранична вредност омотача уписане и описане пирамиде, кад број њихових страна бескрајно расте. Исто тако је запремина купе заједничка гранична вредност запремина уписане и описане пирамиде, кад број њихових страна бескрајно расте.

282. Омотач праве купе једнак је с половином производа обима њене основе и стране.

Ако је r полупречник у основе праве купе, а страна s, онда је њен омотач $o = 2\,r\pi\,\dfrac{s}{2} = r\pi s$.

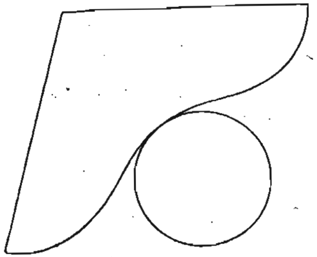
Укупна је површина $p = r^2\pi + r\pi s = r\pi\,(r+s)$.

У равностране је купе $s = 2r$, с тога $o = 2r^2\pi$, а $p = 3r^2\pi$.

Образац за израчунавање омотача праве купе може се наћи и развијањем омотача; добија се кружни исечак чији је лук $2r\pi$, а полупречник s.

Омотач је према томе $2\,r\pi\cdot\dfrac{s}{2} = r\pi s$.

Омотач косе купе не може се израчунати по том обрасцу; он изгледа као што показује сл. 151.



Сл. 151.

283. Теорема. Запремина купе једнака је с трећим делом производа њене основе и висине.

Излази из појма о граничној вредности и чл. 276.

Ако је r полупречник основе, а h висина купе, онда је запремина

$$v = \frac{r^2 \pi h}{3}.$$

Ако је купа права, а њена страна s, онда је $h = \sqrt{s^2 - r^2}$, с тога

$$v = \frac{r^2 \pi}{3} \sqrt{s^2 - r^2}.$$

У равностране је купе $s = 2r$, с тога $v = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$.

Запремине сличних купа стоје у размери као трећи степени хомологих димензија.

Површина и запремина зарубљене купе.

284. Теорема. Површина омотача праве зарубљене купе једнака је с производом обима њена средња пресека и стране.

Излази из појма о граничној вредности и чл. 278.

Ако су R и r полупречници обе основе праве зарубљене купе, а s њена страна, онда је $\frac{R+r}{2}$ полупречник средњег пресека, с тога површина омотача $o = (R + r) \pi \cdot s$, а укупна површина

$$p = [R^2 + r^2 + (R + r) s] \cdot \pi.$$

285. Теорема. Запремина зарубљене купе једнака је са запреминама три купе, којима су основе обе основе зарубљене купе и њихова геометријска средина, а висина иста као у зарубљене купе.

Излази из чл. 279.

Ако су R и r полупречници обе основе, а h висина зарубљене купе, онда је запремина

$$v = (R^2 \pi + r^2 \pi + R r \pi) \frac{h}{3} = (R^2 + r^2 + Rr) \cdot \frac{h\pi}{3}.$$

2. Облица.

286. Кад се у основи какве облице упише, или око ње опише правилан полигон, па се он узме за основу призме чије су стране паралелне и једнаке с обличином осовином, онда се таква призма зове у облици уписана или око ње описана.

Бочне ивице уписане призме стране су, а бочне површине описане призме додирне су равни облици.

И код праве облице је, као и код купе, омотач заједничка гранична вредност омотача уписане и описане призме, кад број страна бескрајно расте; исто тако је запремина облице заједничка вредност запремина облици уписане и описане призме, кад број њихових страна бескрајно расте.

287. Омотач праве облице једнак је с производом обима њене основе и висине.

Излази из чл. 286 и 269.

Ако је r полупречник основе, h висина праве облице, онда је омотач $o = 2 r h \pi$, с тога укупна површина

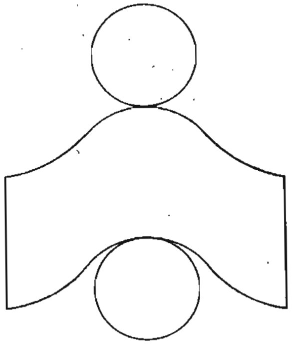
$$p = 2 r^2 \pi + 2 r h \pi = 2 r \pi (r + h).$$

У равностране је облице $h = 2r$, с тога $p = 6 r^2 \pi$.

Образац за омотач праве облице може се наћи и развијањем омотача. Добија се правоугаоник, чија је основица обим основе, а висина иста као у облице; према томе је

$$o = 2 r \pi h.$$

Омотач косе облице не може се израчунати по том обрасцу; он изгледа као што показује сл. 152.



Сл. 152.

288. Теорема. Запремина облице једнака је с производом њене основе и висине.

Излази из чл. 286 и 272.

Ако је r полупречник основе, а h висина у облице, онда је њена запремина $v = r^2 h \pi$.

У равностране је облице $h = 2r$, с тога $v = 2 r^3 \pi$.

Запремине сличних облица стоје у размери као трећи степени хомологих димензија.

3. Обртне површине и обртна тела.

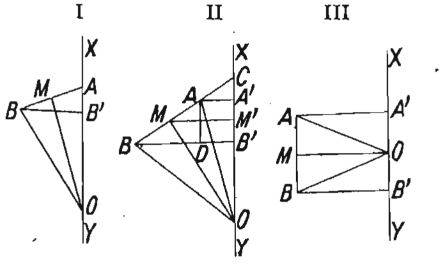
289. Кад се каква права, изломљена, или крива линија, или каква равна слика обрће око једне сталне праве, онда свака њена тачка описује за време једног пуног обртања кружну линију чија је раван нормална на сталној правој. Стална права назива се осовина обртања или просто осовина; површина коју описује линија што се обрће, зове се обртна површина те линије; а тело, произведено обртањем равне слике, зове се обртно тело те слике.

Кад се дуж обрће око осовине, која је с њом у једној равни, онда обртна површина те дужи може бити омотач праве купе, или праве зарубљене купе, или праве облице, или најзад — ако је дуж нормална на осовини — површина круга или кружна престена.

Кад се изломљена линија обрће око осовине, која је с њом у једној равни, онда је њена обртна површина збир обртних површи́на̂ свију дужи од којих је састављена та изломљена линија.

290. Теорема. Обртна површина полу-обима правилна многоугла с парним бројем страна, кад се обртна оса поклапа с дијагоналом која везује два супротна темена полигонска, једнака је с производом обима у целом полигону уписана круга и осовине.

Доказ. Кад се средиште полигонско веже с теменима на једној половини многоугла, онда се добивају равнокраки троугли, чије основице секу осовину саме или у својим продужцима, или су с осовином паралелне (сл. 153, I, II, III). Дуж AB (сл. 153, II) производи омотач праве зарубљене купе, чија је површина $m = 2\pi.\ MM' \cdot AB$. Како је $MM'O \backsim ADB$, то је $MO : MM' = AB : AD$ и $MM'.AB = MO.AD$. С тога је



Сл. 153.

$$m = 2\pi.MO.AD = 2r\pi.A'B',\ \text{ако је}\ OM = r.$$

У том је случају произведена површина једнака с производом обима у многоуглу уписана круга и пројекције праве AB на оси. Лако је доказати да то правило вреди и за случај I и III.

Сабирајући површине, које производе основице свих равнокраких троуглова, налазимо целу обртну површину. Ако је та површина P, а $p_1, p_2 \ldots$ пројекције појединих правих на оси, онда је $P = 2r\pi(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots) = 2r\pi a$, где a значи дужину осе.

Додатак. Ако се не тражи цела обртна површина, него само она која постаје обртањем једног дела полигонског полу-обима, онда треба a заменити пројекцијом тога дела.

291. Запремина тела, које постаје кад се половина правилна многоугла обрће око осе која пролази кроз два супротна темена, једнака је с производом трећег дела укупне површине обртног тела и полупречника у целом полигону уписана круга.

Доказ. И овде ваља разликовати три случаја као у чл. 290

I. Ако сама основица равнокраког троугла сече осу, онда је троуглом AOB (сл. 153, I) произведено обртно тело, чију ћемо запремину обележити $V(AOB)$, састављено од две купе, с тога $V(AOB) = \frac{1}{3}\pi BB'^2.OA$; али је $BB'.OA = AB.OM$, јер сваки тај производ значи двогубу површину троугла AOB; с тога је и $V(AOB) = \pi BB'.AB.\frac{1}{3}OM$, или, како је $\pi BB'.AB$ омотач m_1 купе коју описује основица AB,

$$V(AOB) = m_1 \cdot \frac{r}{3} \cdot$$

Тај доказ вреди за сваки троугао AOB у којем је $AO > B'O$.

II. Ако продужена основица равнокраког троугла сече осовину (сл. 153, II), онда је

$$V(AOB) = V(BOC) - V(AOC) = m_2 \frac{r}{3},$$

ако је m_2 површина обртног тела.

III. Ако ли је основица паралелна према оси (сл. 153, III), онда је купа, коју описује $\triangle AA'O$, $\frac{1}{3}$ облице коју описује правоугаоник $AA'OM$; с тога тело, које описује $\triangle AOM$, $\frac{2}{3}$ исте облице. Исто тако налази се да је тело, које описује $\triangle BOM$, $\frac{2}{3}$ облице коју описује правоугаоник $BB'OM$. Према томе је

$$V(AOB) = \frac{2}{3}V(AA'B'B) = \frac{2}{3}\pi OM'.A'B' = m_3 \frac{r}{3},$$

где је m_3 површина обртног тела.

Запремину V обртног тела полу-полигона налазимо сабирајући обртна тела свих равнокраких троуглова. Добија се

$$V = \frac{r}{3}(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots) = \frac{P}{3}r,$$

где P значи укупну површину.

Додатак. Ако не тражимо цело обртно тело, него само оно које постаје обртањем једног дела полу-полигона, онда ваља на место P ставити одговарајући део обртне површине.

4. Лопта.

Површина и запремина.

292. Кад се у кругу упише и око круга опише правилан полигон с парним бројем страна, па се оба полигона с кругом обрћу око једне угаоне симетрале, онда полукруг описује лопту, а полу-обим полигона обртну површину, а полу-полигон обртно тело, које је лопти уписано или описано.

Кад број полигонских страна расте, онда површина и запремина уписаног обртног тела расте, а описаног опада.

Лоптина је површина заједничка гранична вредност уписаних и описаних обртних површина, кад број полигонских страна расте; њена је запремина заједничка гранична вредност запреминама истих обртних тела.

293. Теорема. Лоптина је површина $4r^2\pi$ тј. четири пута већа од површине њеног највећег круга.

Излази из појма о граничној вредности, чл. 292, 290. Ако је r мерни број лоптина полупречника, онда је њена површина

$$p = 2r\pi \,.\, 2r = 4r^2\pi.$$

Додатак. Површине две лопте стоје у размери као квадрати њихових полупречника, јер је

$$P : p = 4R^2r : 4r^2\pi = R^2 : r^2.$$

294. Теорема. Лоптина је запремина једнака с трећим делом производа њене површине и њена полупречника.

Излази из чл. 292 и 291.

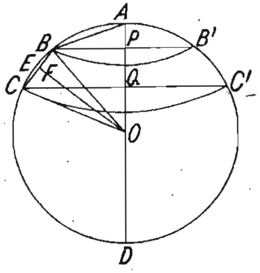
Ако је r полупречник, p површина, а v запремина једне лопте, онда је $p = 4r^2\pi$, с тога $v = 4r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$

Додатак. Запремине две лопте стоје у размери као трећи степени њихових полупречника, јер је

$$V : v = \frac{4}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi = R^3 : r^3.$$

Површина калоте и појаса.

295. Теорема. Површина калоте једнака је с производом обима највећег лоптиног круга и висине.



Сл. 154.

Излази из појма о граничној вредности чл. 290, додатак.

Ако је (сл. 154) $OA = r$ полупречник лопте, а $AP = h$ висина калоте ABB', онда је површина те калоте

$$K = 2r\pi h \ldots.\ 1).$$

Ако је дато $\varrho = BP$ и h, онда је

$$\varrho^2 = (2r - h)\,h, \text{ дакле}$$
$$2rh = \varrho^2 + h^2, \text{ и}$$
$$K = (\varrho^2 + h^2)\,\pi \ldots.\ 2).$$

Ако је дата тетива $AB = s$, онда из 1) или 2) излази

$$K = s^2\pi \ldots\ldots..\ 3).$$

296. Теорема. Површина лоптина појаса једнака је с производом обима највећег лоптиног круга и висине.

Излази из чл. 290, додатак.

Ако је Z површина појаса, који описује лук $BCC'B'$, даље $OA = r$, $PQ = h$, онда је

$$Z = 2r\pi \cdot h \ldots..\ 1).$$

Ако су, поред r, дати и полупречници $CQ = \varrho_1$ и $BP = \varrho_2$ обе основе, онда је $h = OP - OQ$, а појас

$$Z = 2r\pi\ (\sqrt{r_2 - \varrho_2{}^2} - \sqrt{r^2 - \varrho_1{}^2}) \ldots.\ 2).$$

Запремина лоптина исечка, одсечка и слоја.

297. Теорема. Запремина лоптина исечка једнака је са запремином оне купе, којој је основа калота на том исечку, а висина лоптин полупречник.

Излази из појма о граничној вредности чл. 291, додатак.

Ако r и h значе исто што у чл. 295, онда је запремина v лоптина исечка, који постаје обртањем кружна исечка AOB (сл. 154).

$$v = 2r\pi h \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}r^2h\pi.$$

298. Запремина лоптина одсечка, према томе да ли је он мањи или већи од полулопте, једнака је са разликом или са збиром запремина̂ исечка који му одговара и купе, чија је основа основа одсечка, а висина раздаљина те основе од лоптина средишта.

Ако r, ϱ и h значе исто што у чл. 295, онда се за запремину S лоптина одсечка ABB', који одговара луку AB (сл. 154), налази

$$S = \frac{2}{3}\, r^2 h \pi - \frac{1}{3}\, \varrho^2 (r - h)\, \pi,$$

или, како је $\varrho^2 = (2r - h)\, h$,

$$S = \frac{2}{3}\, r^2 h \pi - \frac{1}{3}\, h\, (2r - h)(r - h)\, \pi, \text{ или}$$

$$S = \frac{1}{3}\, h^2 (3r - h)\, \pi.$$

Образац вреди и за одсечак већи од полулопте.

299. Да се израчуна запремина v тела које постаје обртањем кружна одсечка BCF (сл. 154).

Тражена запремина разлика је између два тела, која постају обртањем кружна исечка $BECO$ и троугла BCO.

Ако је $PQ = h$, онда је

$$v = 2\pi \cdot OE \cdot h \cdot \frac{OE}{3} - 2\pi \cdot OF \cdot h \cdot \frac{OF}{3} = \frac{2\pi h}{3}(OE^2 - OF^2) =$$

$$\frac{2\pi h}{3} \cdot (OB^2 - OF^2) = \frac{h \pi s^2}{6},$$

ако се стави, да је тетива $BC = s$.

300. Запремина лоптина слоја.

Нека су ϱ_1 и ϱ_2 полупречници обе основе, а h висина слоја. Његова је запремина једнака са запремином праве зарубљене купе поменутих димензија, повећаној запремином обртног тела које производи кружни одсечак $BECF$ (сл. 154).

Дакле

$$v = \frac{\pi s^2 h}{6} + \frac{h \pi}{3} (\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + \varrho_1 \varrho_2). \text{ Како је}$$

$$s^2 = h^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2, \text{ то је}$$

$$v = \frac{h^3 \pi}{6} + \frac{h\pi}{2} (\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2).$$

Запремина лоптина слоја налази се, кад се аритметичкој средини двеју облица, којима су основе једна и друга основа слоја а висина висина слоја, дода лопта чији је пречник висина слоја.

Напомена. Запремина лопте и лоптина слоја може се наћи и по Каваљеријеву правилу (упореди чл. 302, 61 и 62). Површина лоптина може се за тим дознати из запремине.

III. Задаци.

301. Задаци о рогљастим телима.

1. У коцке је ивица a, дијагонала d, површина p, а запремина v; из једне од тих количина израчунај остале.

Дато: 1) $a = 1\,m\ \ 3\,dm\ \ 3\,cm$; 2) $d = 0{\cdot}755\,m$;
3) $p = 10\,cm^2$; 4) $v = 12{\cdot}326391\,m^3$;
5) $v = 42{\cdot}627483\ldots..dm^3$.

2. Површину и запремину коцке изрáзи обимом o дијагоналног пресека.

3. Од p грама једног метала, чија је специфична тежина s, и p' грама другог метала, чија је специфична тежина s', саливена је коцка; колика је ивица њена?

4. Ако се ивица једне коцке, чија је специфична тежина s, повећа за $b\,cm$, онда се тежина коцке повећава за q грама. Израчунај ивицу те коцке.

5. У правоуглом паралелопипеду с квадратном основом нека је a ($3{\cdot}2\,dm$) основна ивица, p ($52{\cdot}48\,dm^2$) површина; израчунај запремину v.

6. Израчунај: *a)* површину и запремину правоугла паралелопипеда, кад је познат збир трију ивица $x + y + z = s$ и њихова размера $x : y : z = m : n : o$, нпр. $s = 74{\cdot}4\,cm$, $x : y : z = 5 : 4 : 3$; *b)* ивице, кад је позната запремина v правоугла паралелопипеда и размера $m : n : o$ тих ивица; *c)* површину p и запремину v правоугла паралелопипеда, кад је позната размера трију ивица и дијагонала једне стране.

Ако су x, y, z неједнаке ивице, па је $x : y : z = m : n : o$, а d дијагонала оне стране на којој су ивице y и z, онда је

$$p = \frac{2(mn + mo + no)}{n^2 + o^2} \cdot d, \quad v = \frac{mno}{(n^2 + o^2)\sqrt{n^2 + o^2}} \cdot d^2.$$

7. Из запремине v правоугла паралелопипеда и размере $m : n : o$ трију ивица израчунај ивице.

8. Израчунај површину и запремину правоугла паралелопипеда, кад је познат збир трију ивица $x + y + z = s$ и њихова размера $x : y : z = m : n : o$.

Пример: $s = 74{\cdot}4\,cm$, $x : y : z = 5 : 4 : 3$.

9. Правоугли паралелопипед, чије су ивице a, b и c, а специфична тежина s, ваља издубсти ваљкасто и ту шупљину залити металом

чија је специфична тежина s'. До које се дубине мора издубсти, да би n-ти део тела утоњо у воду, кад је $2r$ пречник шупљине?

10. Нека је h висина праве призме, а основа *a)* равностран троугао, *b)* правилан шестоугао коме је страна s; одреди *a)* површину, *b)* запремину те призме. $h = 4{\cdot}1\,dm$, $s = 2{\cdot}1\,dm$.

11. Од прāва, призматична дрвена стуба, коме је основа правилан шестоугао, истесана је највећа правилна тространа призма; колика је запремина отпадака, ако је у шестостране призме основна ивица $15\,cm$, а бочна ивица $1\,m$?

12. Позната је површина p правилне равноивичне призме; колика је једна ивица, ако је призма *a)* тространа, *b)* шестострана?

13. Позната је тежина q равноивичне, правилне, шестостране призме; израчунај ивицу кад је специфична тежина s.

14. Покажи да се запремина тростране призме може наћи, кад се површина једне, које било стране помножи половином раздаљине те стране од супротне јој ивице.

15. Запремина правилне призме једнака је с производом њена омотача и половине полупречника оног круга, који је уписан њеној основи.

16. Ако је висина тростране призме два пута већа од пречника круга, описаног око призмине основе, онда та призма има запремину једнаку с паралелопипедом чије су димензије једнаке са странама призмине основе.

17. У праве пирамиде, чија је основа равностран троугао, нека је дата *a)* основна ивица a и бочна ивица s; или *b)* основна ивица a и висина h; одреди површину и запремину.

18. Пирамида, којој је висина h, а запремина v, има за основу равностран троугао; колика је њена основна ивица?

19. Позната је површина праве пирамиде чија је основа равностран троугао; колика је основна ивица, ако је висина у пирамиде два пута већа од те ивице?

20. Израчунај површину и запремину праве пирамиде, кад јој је основа правилан шестоугао са страном a, а висина h.

21. Пирамида има за основу равностран троугао са страном a; колика је површина и запремина те пирамиде, кад су бочне ивице једна на другој нормалне?

22. У праве тростране пирамиде основне су ивице $24\,cm$, $32\,cm$, $40\,cm$. Бочне ивице имају по $36\,cm$. Израчунај површину и запремину те пирамиде.

23. У правилне квадратне пирамиде основна је ивица a, а бочна s; израчунај површину и запремину те пирамиде.

24. Пирамида из прим. 23. пресечена је паралелно с основом, а кроз средину висине. Израчунај површину и запремину пирамиде над пресеком.

25. Правилна квадратна пирамида има површину p, а висину h; израчунај основну ивицу.

26. Запремина правилне пирамиде налази се, кад се површина њена омотача помножи трећином раздаљине једне стране од средишта пирамидине основе.

27. Запремина каквог било тетраедра једнака је с производом једне трећине које било ивице и пројекције тог тетраедра на једној равни нормалној на тој ивици.

28. Ако је основа једној пирамиди трапез, онда се запремина те пирамиде налази, кад се једна трећина збира паралелних страна њене основе помножи пројекцијом те пирамиде на једној равни, која је нормална на паралелним странама поменутог трапеза.

29. На двема правима које се укрштају узете су две дужи AB и CD; докажи, да тетраедар, коме су темена тачке A, B, C, D, има сталну запремину.

30. Кроз свако теме једног тетраедра постављена је раван паралелна са супротном страном; докажи, да је тако добивени тетраедар 27 пута већи од првобитног тетраедра.

31. Зарубљена пирамида има висину h, а запремину v; израчунај њене основе посебице, ако је познат њихов збир s.

32. Нека пирамида има основу b, а запремину v. У којој раздаљини над основом ваља пресећи ту пирамиду паралелно према основи, да би запремина зарубљене пирамиде била v'?

33. Зарубљена пирамида има основе B и b, а висина њене допуне је h; колика је запремина зарубљене пирамиде?

34. У праве зарубљене пирамиде бочна је ивица s, а основе су *a)* равнострани троугли, *b)* квадрати, *c)* правилни шестоугли са странама a_1 и a_2; колика је површина и запремина?

35. Пирамида, чија је основа b, а висина h, пресечена је у раздаљини a од врха једном равни паралелно према основи; израчунај запремину оба пирамидина дела.

36. У којој раздаљини од врха ваља пресећи пирамиду паралелно с основом, да би се *a)* њен омотач, *b)* њена запремина поделила по размери $m:n$.

37. Позната је ивица a тетраедра, коцке или октаедра; одреди површину p и запремину v тих тела.

За тетр. је $p = a^2\sqrt{3}$, за окт. $p = 2\,a^2\sqrt{3}$, за коцку је $p = 6a^2$.

„ „ „ $v = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$, „ „ $v = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$, „ „ „ $v = a^3$.

Из запремине *a)* тетраедра, *b)* октаедра одреди полупречник уписане лопте (чл. 280, 2).

38. Одреди површину и запремину коцке, тетраедра и октаедра, кад се зна полупречник *a)* уписане *b)* описане лопте.

39. Рогљеви једне коцке одрубљени су равнима које пролазе кроз средине њених ивица. Одреди површину и запремину тако добивена тела.

40. Пра̂в паралелопипед и правилна пирамида имају исту висину и квадрат са страном a као заједничку основу. Израчунај ту висину, ако је површина једне призмине стране n-пута већа од пирамидине стране.

41. Правилан шестоууао са страном a заједничка је основа правилној призми и правилној пирамиди које имају исту висину. Израчунај разлику између *a)* површина, *b)* запремина оба тела.

42. Права тространа призма пресечена је косо, и њене су паралелне ивице a, b, c, а основа B. Докажи да је њена запремина $v = B \cdot \frac{a+b+c}{3}$.

302. Задаци о телима с кривом површином.

1. У праве купе је r полупречник њене основе, h висина, s страна, o омотач, v запремина; одреди

a) h, s, o, кад је дато r, v;
b) r, h, v, „ „ „ s, o;
c) r, o, v, „ „ „ h, s.

Дато: 1) $r = 4\,dm$, 2) $s = 8{\cdot}1\,dm$, 3) $h = 1{\cdot}32\,m$,
$v = 70{\cdot}37167$; $o = 89{\cdot}1873$; $s = 1{\cdot}43\,m$.

2. Израчунај полупречник равностране купе, кад је *a)* дат омотач, *b)* дата запремина.

Пример: $o = 24{\cdot}27\,m^2$; $v = 126{\cdot}257\,dm^3$.

3. Нека је p обим у основе једне праве купе, а осни пресек нека је правоугли троугао, израчунај површину и запремину те купе.

4. Израчунај запремину купе, кад је r полупречник њене основе, а развијен омотач *a)* квадрант, *b)* секстант.

5. Докажи да се запремина купе добија, кад се

a) површина њеног омотача помножи трећином раздаљине од средишта њене основе до стране, или

b) површина правоуглог троугла, који производи купу, помножи трећином обима купине основе.

6. Једна пирамида, чија је основа равностран троугао, квадрат или правилан шестоугао, уписана је у правој купи (r, h), а друга је описана око купе; израчунај површине и запремине тих пирамида.

7. Израчунај омотач и површину равностране купе, кад је позната њена висина.

8. Косоугли троугао, чије су стране a, b и c, обрће се око једне, за тим око друге, и на послетку око треће стране; израчунај запремине обртних тела која тако постају.

9. У праве зарубљене купе нека су R и r полупречници обе основе, а p површина; одреди запремину.

10. Колика је висина h у праве зарубљене купе, кад су R и r полупречници њених основа, а омотач једнак са збиром обе основе?

11 Ако је страна зарубљене купе једнака са збиром полупречника обе основе, а висина два пута већа од геометријске средине тих полупречника, онда је запремина зарубљене купе једнака с једном шестином производа њене укупне површине и висине.

12. У зарубљеној купи, чија је висина h, а R и r полупречници обе основе, уписана је зарубљена пирамида с квадратном или правилно-шестостраном основом, а око купе је описана таква пирамида; израчунај запремине тих пирамида.

13. Нека су R и r полупречници обе основе, а s страна праве зарубљене купе. Између једне и друге основе налази се круг чија је површина геометријска средина између обе основе. Колики је доњи део омотача зарубљене купе?

14. Ако се запремина зарубљене купе замени запремином облице исте висине, којој је полупречник основе једнак средњем полупречнику зарубљене купе, колика је тада грешка?

15. У којој раздаљини од мање основе ваља пресећи зарубљену купу једном паралелном равни према основи, да би *a)* површина пресека била $\frac{m}{n}$ од веће основе, *b)* пресеком била преполовљена зарубљена купа?

16. У праве облице нека је r полупречник основе, h висина, o омотач, v запремина; израчунај две, које било од тих количина, кад су познате оне друге две.

Дато: 1) $r = 1{\cdot}064\,m$, 2) $r = 6{\cdot}42\,dm$, 3) $o = 20\,dm^2$,
$h = 2{\cdot}725\,m$; $o = 15{\cdot}18\,dm^2$; $v = 7{\cdot}07356\,dm^3$.

17. Израчунај полупречник равностране облице, кад се зна *a)* омотач, *b)* запремина. Нпр. $o = 150\,dm^2$; $v = 30{\cdot}456\,dm^3$.

18. У праве облице, чија је запремина v, стоји висина према пречнику основе у размери $m:n$; колика је површина те облице?

19. Израчунај *a)* запремину цилиндарске цеви, кад јој је спољашњи полупречник R, унутрашњи r, а висина h; *b)* дебљину d, кад је позната запремина v, висина h, и спољашњи полупречник R.

20. Колики је унутрашњи пречник цилиндарске цеви, у којој се налази стуб од живе дужине l, а тежине P?

21. Тространој правилној призми једна је облица уписана, а друга описана; у каквој размери стоје запремине тих облица?

22. Запремина кружне облице једнака је с производом површине њена омотача и половине њена полупречника.

23. Запремина кружне облице добија се, кад се површина правоугаоника, који производи облицу, помножи периферијом круга који описује пресек дијагонала тог правоугаоника.

24. У праве кружне облице стоји површина омотача према ззиру обе основе у размери као висина према полупречнику.

25. У праве кружне облице стоји површина осна пресека према површини основе у размери као висина према једној четвртини обима.

26. Кад се правоугаоник обрће око основице, за тим око висине, онда запремина прве облице стоји према запремини друге у размери као висина датог правоугаоника према његовој основици.

27. Суд од једног литра запремине ($1\,dm^3$) има облик облице у које је висина два пута већа од пречника; колике су димензије тог суда у милиметрима?

28. Суд од једног десилитра запремине има облик зарубљене купе у које је горњи пречник једнак с пречником равностране облице исте запремине, а доњи пречник $\frac{5}{4}$ горњега; колике су димензије тог суда?

29. На свакој основи једне праве облице (r, h) налази се по једна купа чији је врх у средишту оне друге основе; одреди обим круга заједничкога омотачима тих двеју купа, као и делове њихове.

30. Правој облици, чији је полупречник r, а висина h, уписана је призма с квадратном основом; колика је свака страна те призме?

31. Висину праве облице изрази површином и омотачем.

32. У каквој размери стоје *a)* омотачи, *b.)* површине равностране купе и равностране облице, клд су им запремине једнаке?

33. У каквој размери стоје запремине равностране купе и равностране облице, кад су им површине једнаке?

34. Равнокрак трапез, чије су паралелне стране a и $a + m$, а висина h, обрће се око стране a; одреди *a)* обртну површину, *b)* обртно тело.

35. Трапез се обрће прво око веће, за тим око мање основице; запремине тако произведених обртних тела стоје у размери $m : n$. У каквој размери стоје паралелне стране тог трапеза?

36. Равностран троугао ABC обрће се око праве MN; израчунај површину и запремину обртног тела, кад је страна $BC \parallel MN$, теме A удаљено од MN за d, а страна троуглова $= s$.

37. Квадрат се обрће око праве MN која је нормална на његовој дијагонали; израчунај површину и запремину обртног тела, кад је квадратова страна s, а једно теме његово удаљено од MN за d.

38. Правоугаоник, чије су стране a и b, обрће се око праве MN која пролази кроз једно теме његово и стоји нормално на дијагонали из тог темена; израчунај површину и запремину обртног тела.

39. Израчунај *a)* површину, *b)* запремину тела, које постаје, кад се правилан шестоугао, чија је страна $8\,cm$, обрће око једне своје угаоне симетрале.

40. Нека је r полупречник, p површина, v запремина једне лопте; кад је позната једна од тих количина, израчунај остале две.

Дато: 1) $r = 0{\cdot}3589\,m$; 2) $r = 1\,m\ 1\,dm\ 5{\cdot}8\,cm$.
3) $p = 64{\cdot}184\,dm^2$; 4) $v = 5{\cdot}33774\,dm^3$.

41. Израчунај полупречник оне лопте, која има исту површину, или исту запремину, с једном датом облицом, или купом, или зарубљеном купом.

42. Метална шупља лопта, којој је спољашњи пречник $2r$ ($18\,cm$) а дебљина d ($2\,cm$), претопљена је у масивну лопту; колики је пречник ове лопте?

43. Већи полупречник шупље лопте је r, а запремина љуске је v; колика је дебљина?

44. Шупља лопта, чији је спољашњи пречник $2r$, тоне у води до половине. Израчунај њену дебљину, ако је специфична тежина материјала s.

45. Посматрач на Земљиној површини види калоту, ограничену кружном линијом која пролази кроз додирне тачке свију тангената, повучених из ока посматрачева до површине Земљине. Колика је та калота, кад је h висина посматрачева ока над Земљином површином, а r Земљин полупречник?

$$p = \frac{2r^2 h\pi}{r + h}\,.$$

46. Колика се површина на Земљи може видети са висине од $137{\cdot}88\,m$? (Земљин полупречник $= 6378\,km$).

47. Полупречник лопте је r; израчунај висину оне калоте, чија је површина n-пута већа од њеног основног круга.

48. Светла тачка удаљена је од средишта једне лопте (r) за дужину d; колика је осветљена површина? Колика је та површина за $d = \infty$?

49. Калота има површину C, а висину h; израчунај површину њеног основног круга и запремину лоптина одсечка, ограничена том калотом.

50. Лопта, чији је полупречник r, пресечена је једном равни тако да њене калоте стоје у размери $m:n$; колике су запремине њених сегмената?

$$S_1 = (m + 3n) \cdot \frac{4m^2 r^3 \pi}{3(m+n)^3}, \qquad S_2 = (3m + n) \cdot \frac{4n^2 r^3 \pi}{3(m+n)^3}.$$

51. Одсечак једне лопте, чији је полупречник r, два пута је већи од запремине друге лопте којој је висина одсечка полупречник; колика је та висина?

52. Висина лоптина слоја с једнаким основама нека је једнака с половином лоптина полупречника; који део лоптине запремине заузима тај слој?

53. Једна је лопта стална, а друга промењива пролази кроз средиште оне прве; докажи да калоте, које она прва исеца на другој, имају сталну површину.

54. Кад се од исечка једног круга k начини омотач једне купе и над основом те купе опише калота, онда је површина ове калоте једнака с површином круга k.

55. Познати су полупречници r и r_1 двеју ло́пта̂ и њихова средишна раздаљина d; израчунај онај део друге лопте, који је осветљен првом (претпостављајући да је ова светла). Нпр. Земљин полупречник $r_1 = 6378\,km$, Сунчев полупречник $r = 693345\,km$, d (у перихелу) $=$ 146·2 милиона километара.

56. Правој купи уписана је лопта. Докажи да површине та два тела стоје у истој размери као и њихове запремине.

57. У равностраној облици уписана је лопта и права купа; у каквој размери стоје запремине та три тела?

58. Запремина купе, описане око једне лопте, једнака је с производом укупне површине купине и $\frac{1}{3}$ лоптина полупречника.

59. Запремине зарубљене купе, описане око једне лопте, једнака је с производом укупне површине купине и $\frac{1}{3}$ лоптина полупречника.

60. Кад се око две једнаке лопте опишу два, каква било тела, онда њихове запремине стоје у истој размери као и њихове укупне површине.

61. Запремина простора између две концентричне лопте једнака је са запремином зарубљене купе, чије су основе велики кругови те две лопте, а висина четворострука разлика њихових полупречника.

62. Око лопте описана је равнострана облица и равнострана купа; у каквој размери стоје $a)$ површине, $b)$ запремине та три тела?

63. Лопту, чија је површина p, ваља претворити у праву облицу исте запремине, али тако да површина омотача буде једнака с површином лопте; колики је полупречник, а колика је висина те облице?

64. Равностраном троуглу уписан је круг; обртањем око висине описује троугао купу, а круг лопту. У каквој размери стоји површина купина омотача према површини лопте?

65. Око коцке, чија је ивица a, описана је лопта, а око те лопте тетраедар; колика је $a)$ површина, $b)$ запремина тог тетраедра?

66. Лопта је пресечена једном равни, која дели према њој нормални пречник по размери $m:n$; на пресеку стоје две купе чија су темена у крајњим тачкама тог пречника. У каквој размери стоји запремина те двојне купе према лоптиној запремини?

67. Нека је r полупречник основе, а s страна праве купе којој је лопта уписана. Колики је полупречник ϱ додирног круга лопте и купе, а колика је запремина лоптина одсечка, ограничена тим додирним кругом?

$$\varrho = \frac{r(s-r)}{s}, \qquad v = \frac{\varrho^3 \pi}{3} \cdot \frac{2s+r}{s+r} \sqrt{\frac{s-r}{s+r}}.$$

68. Површина једне лопте једнака је с површином појаса на другој лопти; висина је тог појаса h, а полупречник те друге лопте је r. Израчунај површину и запремину октаедра коме је прва лопта уписана.

69. Октаедру је једна лопта уписана, а друга описана; одреди размеру њихових полупречника, површи́на̂ и запремина.

70. Лоптин слој има висину h, тежину p, а једна му је основа највећи круг на лопти; израчунај полупречник те лопте, ако је специфична тежина материјала s.

71. Лопта, чији је полупречник r, пробушена је ваљкасто, тако да осовина те облице пролази кроз лоптино средиште. Израчунај запремину и површину лоптастог прстена, кад му је висина h.

72. Израчунај површину и запремину лопте која се може правој купи (r, h) $a)$ уписати, $b)$ описати.

73. У правилне, четворостране пирамиде основна је ивица a, а бочна $3a$. Израчунај површину и запремину уписане и описане лопте.

74. Исти задатак, кад је поред основне ивице a дата пирамидина висина.

75. Са које раздаљине од лопте може се прегледати њен n-ти део?

76. Кад се равнокрако-правоугли троугао обрће око једне праве, повучене кроз теме правог угла паралелно с хипотенузом, онда он производи тело чија је запремина једнака са запремином лопте којој је хипотенуза пречник.

77. Кад се конструише лопта, која додирује свих шест ивица правилна тетраедра, онда је њен полупречник средња пропорционала између полупречника лопте уписане у тетраедру и лопте описане око тетраедра.

78. Израчунај запремину биконвексна сочива, које постаје од две једнаке лопте, кад је d пречник, а m дебљина сочива.

79. Запремина полулопте једнака је са разликом између запремине описане јој облице и тој облици уписане купе.

Упутство. Докажи прво да је круг, који се добија као пресек лопте (r) с једном равни паралелном према обличиној основи, једнак с кружним прстеном који постаје као пресек исте равни с купом и облицом. (И круг, и прстен, имају површину $\pi(r^2 - h^2)$, где h значи раздаљину пресека од основе обличине). За тим примени Каваљеријево правило. Тако се налази да је лоптина запремина $\frac{4}{3} r^3 \pi$.

80. Кад се три тела из зад. 78. пресеку двема равнима, које су паралелне према обличиној основи, онда је по Каваљеријеву правилу запремина тако добивена лоптина слоја једнака с прстеном који је тим паралелним равнима исечен између купе и облице.

Упутство. Ако је h раздаљина паралелних равни, m и n $(m > n)$ раздаљине њихове од лоптина средишта, онда је запремина простора између облице и купе

$$= r^2\pi h - \frac{\pi h}{3}(m^2 + n^2 + mn) = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 2m^2 - 2n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{\pi h}{6}[3(r^2 - m^2) + 3(r^2 + n^2) + (m - n)^2] = ?$$

ТРЕЋИ ДЕО.

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

I. Гониометрија и решавање троуглова.

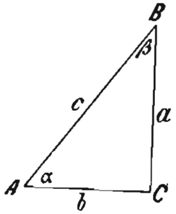
303. Да би се узајамна зависност троугловних страна и углова могла изразити једначинама, тако да се помоћу тих једначина из познатих комада — који одређују троугао — могу израчунати остали комади, заведене су у место углова размере извесних дужи којима су углови несумњиво одређени. Како те размере зависе од величине углова, а у Математици се свака количина која од друге зависи назива Функција те друге количине, то се оне зову Функције тих углова, или гониометријске, и тригонометријске функције, а наука о њиховим особинама и узајамним односима зове се Гониометрија.

Примена угаоних функција на израчунавање троуглова предмет је Тригонометрије.

304. Гониометријске функције оштрих углова.

Између стра́на̂ правоуглог троугла ABC (сл. 155) могућне су ове размере: $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ и реципрочне:

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}.$$



Сл. 155.

Кад бисмо нацртали други правоугли троугао с тим угловима, онда би он био сличан првоме. С тога имају размере стра́на̂ у оба троугла исту вредност

$$\left(\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'},\ \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \text{ итд.}\right)$$

Те размере зависе дакле само од углова, па се могу употребити као њихове мере и зову се гониометријске функције углова.

$\frac{a}{c}$ зове се синус, $\frac{b}{c}$ косинус, $\frac{a}{b}$ тангента, $\frac{b}{a}$ котангента, $\frac{c}{b}$ секанта, $\frac{c}{a}$ косеканта угла α.

За гониометријске функције оштрог угла у правоуглом троуглу имамо, према томе, ове дефиниције:

1. **Синус је размера супротне катете према хипотенузи.**

2. **Косинус је размера налегле катете према хипотенузи.**

3. **Тангента је размера супротне катете према налеглој.**

4. **Котангента је размера налегле катете према супротној.**

5. **Секанта је размера хипотенузе према налеглој катети.**

6. **Косеканта је размера хипотенузе према супротној катети.**

У знацима:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \ \cos\alpha = \frac{b}{c}, \ \text{tang}\ \alpha = \frac{a}{b}, \ \cot\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}, \ \text{cosec}\ \alpha = \frac{c}{a}.$$

Све су гониометријске функције неименовани бројеви.

305. Угао $\beta = 90^0 - \alpha$ (сл. 155); по чл. 304 његове су тригонометријске функција:

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^0-\alpha) &= \frac{b}{c} = \cos\alpha, \ \cos(90^0-\alpha) = \frac{a}{c} = \sin\alpha \\ \text{tang}\ (90^0-\alpha) &= \frac{b}{a} = \cot\alpha, \ \cot(90^0-\alpha) = \frac{a}{b} = \text{tang}\,\alpha, \\ \sec(90^0-\alpha) &= \frac{c}{a} = \text{cosec}\,\alpha, \ \text{cosec}\ (90^0-\alpha,) = \frac{c}{b} = \sec\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots 1.$$

Из тих једначина читамо правило:

Кад се два угла допуњују до 90⁰, онда су функције једнога (синус, тангента, секанта) једнаке с кофункцијама (косинус, котангента, косеканта) другога.

306. Задаци.

1. Дат је $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; нађи угао α конструкцијом правоуглог троугла.

2. Одреди исто тако угао α, кад је *a)* $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, *b)* $\text{tang}\ \alpha = \frac{5}{2}$, *c)* $\cot\alpha = 1$, *d)* $\sec\alpha = \frac{5}{4}$, *e)* $\text{cosec}\ \alpha = \frac{4}{3}$.

307. Израчунавање функција углова од *a)* 45⁰, *b)* 60⁰, *c)* 30⁰.

a) Ако је (сл. 155) $\alpha = 45^0$, онда је $a = b$, $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$.

Према томе је $\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg}\ 45^0 = 1, \qquad \cot 45^0 = 1,$$

$$\sec 45^0 = \frac{b\sqrt{2}}{b} = \sqrt{2}, \qquad \text{cosec}\ 45^0 = \sqrt{2}.$$

b) Ако је (сл. 155.) $\alpha = 60^0$, онда је $b = \frac{c}{2}$, $a = \frac{c}{2}\sqrt{3}$.

Према томе је $\sin 60^0 = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$$\cos 60^0 = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2},$$

$$\text{tang}\ 60^0 = \frac{\frac{c}{2}\sqrt{3}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}, \quad \cot 60^0 = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec 60^0 = \frac{c}{\frac{c}{2}} = 2, \quad \text{cosec}\ 60^0 = \frac{c}{\frac{c}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

c) Како су углови од 30⁰ и 60⁰ комплементни, то је $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\text{tang}\ 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot 30^0 = \sqrt{3}$, $\sec 30^0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\text{cosec}\ 30^0 = 2$.

Задаци.

1. $\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$ страна је правилна десетоугла, уписанога у кругу полупречника r; колике су функције угла од 18⁰? (На 3 дец.).

3. Колике су функције угла од 18^0?

По чл. 176. види се, да се могу израчунати тригонометријске функције и других углова. Подесне методе за њихово израчунавање долазе у област Више Математике; резултати тог израчунавања сложени су у таблице. Како су гониометријске функције понајвише ирационални бројеви, то ће оне бити у толико тачније одређене, што је више децимала познато; али је тада у толико теже множити и делити те функције. Да би се отклонила та тешкоћа, служимо се у тригонометријским рачунима логаритмима; тога ради израчунати су Бригови логаритми функција појединих углова и сложени у логаритамске таблице. По чл. 305. види се, да се у тим таблицама могу наћи функције, односно њихови логаритми, и ако оне иду само до 45^0.

308. Односи између функција истога угла.

Како су по дефиницијама у чл. 304. котангента, секанта и косеканта реципрочне вредности тангенте, косинуса и синуса, то је

$$\cot\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha}\cdots 2)\quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\cdots 3)\quad \text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\cdots 4);$$

Даље је по сл. 155.

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdots\cdots 5)$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b:c}{a:c} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdots\ .\ 6).$$

Кад се једначина $a^2 + b^2 = c^2$ подели са c^2, a^2, b^2, добија се:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \qquad \text{тј.} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ldots .7)$$

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \qquad „ \qquad 1 + \cot^2\alpha = \text{cosec}^2\,\alpha\cdots 8)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \qquad „ \qquad \text{tang}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha\cdots 9).$$

309. Кад се зна једна функција једног оштрог угла, онда се помоћу горњих једначина могу одредити и остале.

Ако је на пр. дат $\sin\alpha$, онда је по једначини 7)

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Из 5) и 6) добија се тада

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\ \cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

На послетку једначине 3) и 4) дају

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}},\quad \text{cosec}\quad \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Задаци.

1. Изрáзи гониометријске функције угла α овим функцијама: *a)* $\cos\alpha$, *b)* $\text{tang}\,\alpha$, *c)* $\cot\alpha$, *d)* $\sec\alpha$, *e)* $\text{cosec}\,\alpha$.

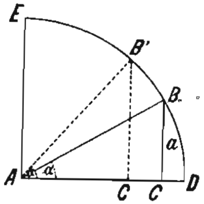
Израчунај гониометријске функције угла α кад је

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, *b)* $\cos\alpha = \frac{4}{17}$, *c)* $\text{tang}\,\alpha = \frac{7}{24}$, *d)* $\cot\alpha = \frac{5}{12}$, *e)* $\sec\alpha = \frac{41}{40}$, *f)* $\text{cosec}\,\alpha = 3\frac{4}{7}$.

310. Промене гониометријских функција, кад угао расте од 0^0 до 90^0.

Ако се хипотенуза (сл. 156) не мења, а угао α расте, онда катета a расте, а b опада. С тога синус и тангента расту, а косинус и косеканта опадају, кад угао расте.

за $\alpha = 0^0$ је $a = o$, $b = c$, с тога је $\sin 0^0 = 0$, $\cos\ 0^0 = 1$, $\text{tang}\ 0^0 = 0$, $\cot\ 0^0 = \infty$.
за $\alpha = 90^0$, биће $b = o$, $a = c$, с тога $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\text{tang}\ 90^0 = \infty$, $\cot\ 90^0 = 0$.



Сл. 156.

Дакле, синус и тангента оштрих углова прâви су разломци, а тангента и котангента могу имати све вредности од 0 до ∞.

За логаритме тригонометријских функција важни су ови случајеви:

$\log\ \sin\ 0^0 = -\infty$, $\log\ \sin\ 90^0 = 0$, $\log\ \cos\ 0^0 = 0$,
$\log\ \cos\ 90^0 = -\infty$, $\log\ \text{tang}\ 0^0 = -\infty$, $\log\ \text{tang}\ 45^0 = 0$,
$\log\ \text{tang}\ 90^0 = \infty$, $\log\ \cot\ 0^0 = \infty$, $\log\ \cot\ 45^0 = 0$,
$\log\ \cot\ 90^0 = -\infty$.

Према томе су логаритми синуса и косинуса, тангенте од 0^0—45^0, котангенте од 45^0—90^0 негативни. У свима тим случајевима добивена је позитивна мантиса тиме, што је логаритму додато 10. Да би се добила права вредност, мора се од табличне вредности одузети 10. Код логаритама тангената од 45^0—90^0 и котангената од 0^0—45^0 може изостати то додавање и одузимање.

У неким таблицама додато је само онолико позитивних јединица, колико је потребно, па се те јединице морају одузети, што је назначено знаком „—“ над карактеристиком.

Опширније о уређењу тих таблица налази се у њима самим.

Нађи у логаритамским таблицама ове логаритме.

1. $\log \sin 38^0\ 17'$
2. $\log \sin 17^0\ 8'\ 20''$
3. $\log \sin 51^0\ 58'\ 33''$
4, $\log \sin 76^0\ 48'\ 37''$
5. $\log \operatorname{tang} 1^0\ 25'\ 40''$
6. $\log \operatorname{tang} 69^0\ 27'\ 39''$
7. $\log \operatorname{tang} 23^0\ 23'\ 23''$
8. $\log \operatorname{tang} 89^0\ 19'\ 31''$
9. $\log \cos 57^0\ 48'$
10. $\log \cos 39^0\ 9'\ 47''$
11. $\log \cos 50^0\ 9'\ 9''$
12. $\log \cos 71^0\ 2'\ 12''$
13. $\log \cot 77^0\ 31'$
14. $\log \cot 8^0\ 8'\ 54''$
15. $\log \cot 0^0\ 40'\ 29''$
16. $\log \cot 53^0\ 29'\ 8''$.

Нађи углове, који одговарају овим логаритмима:

1. $\log \sin x = 9{\cdot}49654-10$
2. $\log \sin y = 9{\cdot}79358-10$
3. $\log \sin z = 8{\cdot}74109-10$
4. $\log \sin \alpha = 9{\cdot}99736-10$
5. $\log \operatorname{tang} \alpha = 0{\cdot}13264$
6. $\log \operatorname{tang} \beta = 0{\cdot}64570$
7. $\log \operatorname{tang} \gamma = 8{\cdot}95629-10$
8. $\log \operatorname{tang} \beta = 8{\cdot}47380-10$
9. $\log \cos \gamma = 8{\cdot}49033-10$
10. $\log \cos x = 9{\cdot}17973-10$
11. $\log \cos y = 9{\cdot}97706-10$
12, $\log \cos z = 8{\cdot}82544-10$
13. $\log \cot \alpha = 1{\cdot}44266$
14. $\log \cot \beta = 0{\cdot}21671$
15. $\log \cot \gamma = 8{\cdot}90828-10$
16. $\log \cot \alpha = 2{\cdot}44033$.

311. Решавање правоуглог троугла.

Решити троугао значи израчунати његове стране и углове из датих комада који га одређују. Правоугли троугао одређен је једном страном и једним оштрим углом, или двема странама. За израчунавање непознатих комада служе једначине, добивене из члана 304.

Тако је (сл. 155).

$$1.\quad a = c \sin \alpha, \qquad b = c \cos \beta;$$

тј. свака је катета једнака с производом хипотенузе и синуса угла наспрам те катете.

$$2.\quad b = c \cos \alpha, \qquad a = c \cos \beta;$$

тј. свака је катета једнака с производом хипотенузе и косинуса оштрог угла на тој катети.

$$3.\quad a = b \operatorname{tang} \alpha, \qquad b = a \operatorname{tang} \beta;$$

тј. свака је катета једнака с производом друге катете и тангенте угла наспрам прве катете.

$$4.\quad b = a \cot \alpha, \qquad a = b \cot \beta;$$

тј. свака је катета једнака с производом друге катете и котангенте оштрог угла на првој катети.

Овим тригонометријским правилима ваља додати још Питагорину теорему $c^2 = a^2 + b^2$, којом је изражена веза између све три стране.

При одређивању димензије тригонометријских образаца ваља имати на уму, да су угаоне функције неименовани бројеви и да се према томе не узимају у рачун при одређивању димензије.

312. Случајеви при решавању правоуглог троугла.

I. Дате су обе катете a и b.

Угао β налази се по обрасцу $\operatorname{tang} \beta = \frac{b}{a}$; за c налазимо $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а за логаритамско рачунање подеснији је образац $c = \frac{b}{\sin \beta}$.

Нека је на пр. $a = 418$, $b = 325$. Тада је

$$\begin{aligned} \log b &= 2{\cdot}51\ 188 \\ \log a &= \underline{2{\cdot}62\ 118} \\ \log \operatorname{tang} \beta &= 9{\cdot}89\ 070-10 \\ \beta &= 37^0\ 51'\ 54'' \\ \alpha &= 52^0\ 8'\ 6''. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 2{\cdot}51\ 188 \\ \log \sin \beta &= \underline{9{\cdot}78\ 803-10} \\ \log c &= 2{\cdot}72\ 385 \\ c &= 529{\cdot}48. \end{aligned}$$

II. Дата хипотенуза c и једна катета b.

$$\sin \beta = \cos \alpha = \frac{b}{c},\ a = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta}, \text{ или } a = \sqrt{(c+b)(c-b)}.$$

III. Дата једна катета b и један угао, на пр. β.

$$\alpha = 90^0 - \beta,\quad a = \frac{b}{\operatorname{tang} \beta},\qquad c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

IV. Дата хипотенуза c и један угао, на пр. β.

$$\alpha = 90^0 - \beta,\qquad b = c \sin \beta,\qquad a = c \cos \beta.$$

313. Израчунавање површине правоуглог троугла.

Ако хоћемо да употребимо само дате комаде, онда имамо, с погледом на случајеве поменуте у чл. 312., ове обрасце:

$$p = \frac{ab}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{(c+b)(c-b)} = \frac{b^2}{2 \operatorname{tang} \beta} = \frac{c^2}{2} \sin \beta \cos \beta.$$

314. Бројни примери за израчунавање правоуглих троуглова:

	a	b	c	α	β	p
1.	208	105	233	$63^0\ 12'\ 53''$	$26^0\ 47'\ 7''$	10920
2.	325	228	397	$54^0\ 56'\ 56''$	$35^0\ 3'\ 4''$	37050

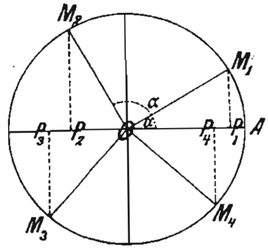
	a	b	c	α	β	p
3.	377	366	505	$48^0\,17'\,28''$	$41^0\,42'\,32''$	63336
4.	40·3	39·6	56·5	$45^0\,30'\,\;5''$	$44^0\,29'\,55''$	797·94
5.	3·171	2·083	3·794	$56^0\,41'\,58''$	$33^0\,18'\,\;2''$	3·3026
6.	1·8828	1·3988	2·3456	$53^0\,23'\,23''$	$36^0\,36'\,37''$	1·31685.

7. Површина правоугла троугла је $23{\cdot}86\,m^2$, а угао $\alpha = 52^0\,36'$; израчунај стране.

8. У правоуглом је троуглу $a : b = \frac{2}{3}$; израчунај углове.

315. Гониометријске функције буди каквих углова.

Кад се (сл. 156) полупречник AB (хипотенуза правоуглог троугла ABC) обрће од AD до AE, онда α добија све вредности од 0^0 до 90^0. За сваки положај хипотенузин биће катета b њена пројекција на пројекцијској оси AD, а катета a пројекциона нормала. Ако се обртање настави, онда полупречник описује сва четири квадранта (сл. 157); углови, које он захвата са својим првобитним положајем (OA), називају се, ради краткоће, углови у 1., 2., 3. и 4. квадранту, према томе да ли је полупречник у 1., 2., 3. или 4. квадранту. Примењујући дефиниције гониометријских функција оштрих углова и на углове које било величине, добијамо за пројекционе троуглове у свима квадрантима:



Сл. 157.

1. размера нормале према хипотенузи (полупречнику) синус је углу α, $\frac{MP}{OM} = \sin\alpha$ (сл. 157);

2. размера пројекције према хипотенузи (полупречнику) косинус је углу α, $\frac{OP}{OM} = \cos\alpha$;

3. размера нормале према пројекцији тангента је углу α, $\frac{MP}{OP} = \operatorname{tang}\alpha$;

4. размера пројекције према нормали котангента је угла α, $\frac{OP}{MP} = \cot\alpha$;

5. размера хипотенузе (полупречника) према пројекцији секанта је углу α, $\frac{OM}{OP} = \sec\alpha$;

6. размера хипотенузе (полупречника) према нормали косеканта је углу α, $\frac{OM}{MP} = \operatorname{cosec}\alpha$.

У чл. 308 изведене једначине између функција оштрог угла вреде за сваки угао.

316. Знаци угаоних функција.

За углове у разним квадрантима налази се нормала час над, час испод пројекцијске осе OA, а пројекција час десно, час лево од темена O. Та супротност положаја бележи се знацима $+$ и $-$, услед чега и угаоне функције добивају знак према величини угла.

Узима се у опште, да су нормале и пројекције позитивне кад имају положај онакав као код угла у првом квадранту, т.ј. кад је нормала над OA, а пројекција десно од O. Нормале испод OA и пројекције лево од O морају се тада сматрати као негативне.

Према томе је нормала за углове у 1. и 2. квадранту позитивна, за углове у 3. и 4. квадранту негативна; пројекција је за углове у 1. и 4. квадранту позитивна, а за углове у 2. и 3. квадранту негативна.

Како се хипотенуза (полупречник) узима увек апсолутно (позитивно), то вреде за знаке угаоних функција ови односи:

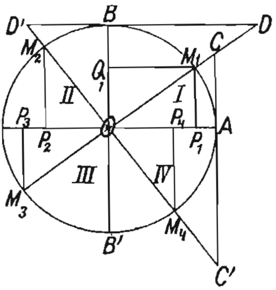
1. Синус и косеканта имају исти знак као нормала; они су за углове у 1. и 2. квадранту позитивни, а у 3. и 4. негативни.

2. Косинус и секанта имају исти знак као пројекција, па су према томе за углове у 1. и 4. квадранту позитивни, а у 2. и 3. негативни.

3. Тангента и котангента позитивне су, ако нормала и пројекција имају једнаке знаке, а негативне су ако нормала и пројекција имају различне знаке; према томе су оне за углове у 1. и 3. квадранту позитивне, а у 2. и 4. негативне.

317. Представљање угаоних функција на кругу.

Кад се у кругу, чији је полупречник r, повуку два нормална пречника AA' и BB', (сл. 158) онда они деле круг на четири квадранта. Кад се полупречник OM пошавши од сталног полупречника OA, обрће око O у смислу супротном кретању казаљке на часов-



Сл. 158.

нику, онда ће он, пролазећи кроз све квадранте, захватати са сталним полупречником OA поступно све могуће углове око тачке O.

a) Ако је $AOM = \alpha$ један од тих углова, па се из крајње тачке M покретног полупречника OM спусти нормала MP на стални полупречник OA или на његов продужак OA', онда је за све квадранте (с погледом на индекс).

$$\frac{MP}{OM} = \frac{MP}{r} = \sin\alpha,\ \frac{OP}{OM} = \frac{OP}{r} = \cos\alpha.$$

b) Подигнемо ли у крајњој тачки A сталног полупречника OA нормалу AC на тај полупречник, онда она сече продужени покретни полупречник OM у C, тако да је $\triangle\ OAC \backsim OPM$; с тога

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{r} = \operatorname{tang}\alpha,\ \frac{OM}{OP} = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{r} = \sec\ \alpha.$$

c) Повуче ли се кроз B нормала BD на OB, онда она сече продужени покретни полупречник OM у D, тако да је $\triangle\ OBD \backsim MPO$; с тога

$$\frac{OP}{MP} = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{r} = \cot\ \alpha,\ \frac{OM}{MP} = \frac{OD}{OB} = \frac{OD}{r} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

Дужи MP, OP, AC, OC, BD и OD, чије размере према полупречнику r одређују угаоне функције, зову се гониометријске линије, и то MP синусна линија*), OP косинусна линија†), AC тангентна линија**), OC секантна линија***), BD котангентна линија†), и OD косекантна линија†).

Како размере ових линија према полупречнику зависе само од величине угла α, и имају исту вредност за сваки произвољни полупречник, то се може сама дужинска јединица узети за полупречник, дакле ставити $r = 1$, а да се тиме не утиче на вредности угаоних функција. Тада се горње размере своде на ове изразе:

$$MP = \sin\ \alpha,\quad AC = \operatorname{tang}\ \alpha,\quad BD = \cot\ \alpha,$$
$$OP = \cos\ \alpha,\quad OC = \sec\ \alpha,\quad OD = \operatorname{cosec}\ \alpha;$$

само што сад MP, OP, AC, OC, BD и OD не значе гониометријске линије, него њихове мерне бројеве.

Угаоне функције могу се дакле сматрати као мерни бројеви гониометријских линија на кругу чији је полупречник $= 1$.

Разни положаји гониометријских линија казују се знацима.

Синусна и тангентна линија над сталним пречником AA' позитивне су, а испод AA' негативне су.

Косинусна и котангентна линија десно од сталног пречника BB' позитивне су, а лево од BB' негативне су.

Секантна и косекантна линија позитивне су, ако се добивају продуживањем покретна полупречника у напред, а негативне су ако се добивају продуживањем у назад.

Од сада неће бити говора о секанти и косеканти, јер се оне ретко кад примењују.

318. Растење и опадање функција, кад угао расте.

Кад се мења угао α, онда се мењају и његове гониометријске линије, дакле и њихови мерни бројеви, тј. угаоне функције.

А. Величина синуса и косинуса (сл. 158).

1. Што је мањи угао α, тим је мањи и синус, док се косинус непрестано приближује јединици; кад се оба крака поклопе, онда је $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = +1$. За врло мале углове разлика између лука и синуса у толико је мања, што се више угао приближује нули, али је увек синус мањи од лука.

2. Расте ли α од 0^0 до 90^0, онда расте и $\sin\alpha$, испрва брже, за тим спорије; а $\cos\alpha$ опада, испрва спорије, за тим брже; оба су позитивна. Кад је $\alpha = 90^0$, онда се синусна линија поклапа с покретним полупречником, па је с тога $\sin 90^0 = +1$, $\cos 90^0 = 0$.

3. Расте ли α од 90^0 до 180^0, онда је синус позитиван и опада; а косинус негативан и расте по апсолутној вредности. Кад је $\alpha = 180^0$, онда је $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$.

4. Кад α расте од 180^0 до 270^0, онда је $\sin\alpha$ негативан и расте апсолутно; и $\cos\alpha$ је негативно, али апсолутно опада; $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$.

5. Кад је $\alpha > 270^0$, а $< 360^0$, онда је синус негативан и опада по апсолутној вредности, а косинус позитиван и расте. За $\alpha = 360^0$ биће синус и косинус исти као за $\alpha = 0^0$, тј. $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = +1$.

---

*) Реч sinus је по свој прилици постала од s. ins. : semissis inscriptae, половина уписане тетиве, јер је MP половина тетиве удвојеног средишног угла; али је такво тумачење у опште непоуздано.

**) јер је она тангента кругу.

***) јер она сече круг. Називе тангенте и секанте увео је Fink (Geometria rotundi, 1583).

†) Назив косинус, од complementi sinus = co. sinus, потекао је од енглеског математичара Gunter-a (умро 1626). Слично су постале речи котангента и косеканта.

Према томе се синус и косинус налазе увек у границама $+1$ и -1.

В. Величина тангенте (сл. 159).

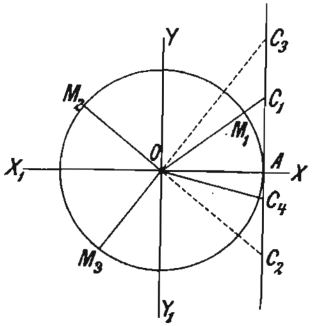
1. Што мањи угао, мања и тангента; кад се краци поклапају, онда је $\tang 0^\circ = 0$. Даље: што мањи угао, тим је мања и разлика између његова лука и тангенте, али је тангента увек већа од лука.

2. Расте ли угао од 0° до 90°, онда је $\tang \alpha$ позитивно и расте. За $\alpha = 90^\circ$ постаје тангента бескрајно велика.

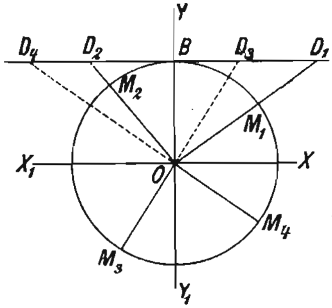
3. Кад угао α расте од 90° до 180°, онда тангента постаје негативна и опада по апсолутној вредности. За $\alpha = 180^\circ$ биће $\tang 180^\circ = 0$.

4. Расте ли α од 180° до 270°, онда је тангента позитивна и расте. За $\alpha = 270^\circ$ тангента је бескрајно велика.

5. Расте ли α преко 270° до 360°, онда је тангента негативна, њена апсолутна вредност опада и на послетку је $\tang 360^\circ = 0$.



Сл. 159.



Сл. 160.

Према томе тангента може имати сваку могућну вредност између $-\infty$ и $+\infty$; код 90° и 270° прекида своју поступност и прелази из $+\infty$ у $-\infty$.

С тога се пише и овако: $\tang 90^\circ = \pm\infty$, $\tang 270^\circ = \pm\infty$.

C. Величина котангенте (сл. 160).

1. Кад угао опада, котангента расте и постаје бескрајно велика за $\alpha = 0^\circ$.

2. У првом квадранту котангента опада, кад α расте од 0° до 90°; $\cot 90^\circ = 0$.

3. У другом квадранту котангента је негативна, њена апсолутна вредност расте кад угао расте од 90° до 180°; за $\alpha = 180^\circ$ биће котангента бескрајно велика.

4. У трећем квадранту је котангента позитивна и опада, док угао расте; $\cot 270^\circ = 0$.

5. У четвртом квадранту је котангента негативна, апсолутно расте и постаје за $\alpha = 360^\circ$ бескрајно велика.

Према томе се и котангента креће између граница $+\infty$ и $-\infty$; код 180° и 360° (0°) прекида своју поступност, и прелази из $-\infty$ у $+\infty$. С тога се пише и овако: $\cot 180^\circ = \mp\infty$, $\cot 360^\circ$ или $\cot 0^\circ = \mp\infty$.

Промене гониометријских функција виде се прегледно из ове таблице:

УГАО α	СИНУС	КОСИНУС	ТАНГЕНТА	КОТАНГЕНТА
$\alpha = 0^\circ$	0	1	0	$\mp\infty$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+, расте	+, опада	+, расте	+, опада
$\boldsymbol{\alpha = 90^\circ}$	1	0	$\pm\infty$	0
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+, опада	—, опада	—, расте	—, опада
$\boldsymbol{\alpha = 180^\circ}$	0	-1	0	$\mp\infty$
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	—, опада	—, расте	+, расте	+, опада
$\boldsymbol{\alpha = 270^\circ}$	-1	0	$\pm\infty$	0
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	—, расте	+, расте	—, расте	—, опада

Значај знака $\pm\infty$ и $\mp\infty$ ваља овако разумети: кад се угао, који је мањи од 90°, приближује правом углу као граничној вредности, онда тангента остаје позитивна и расте бескрајно; према томе је у том случају гранична вредност тангенте $+\infty$. Ако се угао, који је већи од 90°, опадајући приближује граничној вредности 90°, онда тангента остаје негативна а њена апсолутна вредност расте опет бескрајно; према томе је у том случају њена гранична вредност $-\infty$. Тангента прелази, дакле, из вредности $+\infty$ у $-\infty$, кад угао растући пролази кроз вредност R.

Додатак. Свака функција има у четири поједина квадранта четири једнаке апсолутне вредности, од којих су две позитивне а две негативне. Док један дати угао има несумњиво одређене функције, дотле једној датој позитивној, а тако исто једној датој негативној функцији одговарају два угла у два разна квадранта. Али ако је реч о углу каквога троугла, онда је он несумњиво одређен својим косинусом, тангентом или котангентом, а синусом је двозначно одређен.

Обртање покретног крака може се наставити и преко 360°. Тако постају углови који се разликују за неколико пуних обртања;

они се, дакле, могу претставити овако: α и $\alpha + 2n\pi$, где n значи цео број. Такви углови имају једнаке тригонометријске функције.

Дакле

$$\begin{aligned} \sin\,(\alpha + 2n\pi) &= \sin\,\alpha, \\ \cos\,(\alpha + 2n\pi) &= \cos\,\alpha, \\ \text{tang}\,(\alpha + 2n\pi) &= \text{tang}\,\alpha, \\ \text{cotg}\,(\alpha + 2n\pi) &= \cot\,\alpha. \end{aligned}$$

С тога задатак, да се једној датој функцији одреди угао који јој одговара, има бескрајно много решења. За све тригонометријске функције понављају се вредности после 2π; оне су, дакле, периодне. Посматрамо ли поједине функције и промене њихових вредности, онда је периодност синуса и косинуса везана за 2π, а тангенте и котангенте за π.

319. Свођење функција каквих било углова на функције оштрог угла.

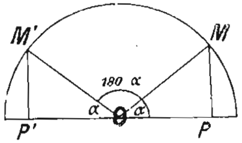
Како су угаоне функције периодне, то се функције углова у другом, трећем или четвртом квадранту, као и углова већих од 360°, могу свести на функције оштрих углова.

a) Ако је $M'OP' = MOP = \alpha$ (сл. 161) онда је

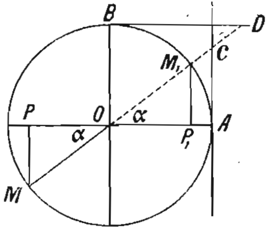
$$M'OP = 180^0 - \alpha.$$

Ако се узме $OM = 1$, онда је

$$\left.\begin{aligned} \sin\,(180^0 - \alpha) &= M'P' = MP = \sin\,\alpha, \\ \cos\,(180^0 - \alpha) &= OP' = -OP = -\cos\,\alpha; \\ \text{с тога } \text{tg}\,(180^0 - \alpha) &= -\text{tang}\,\alpha, \\ \cot\,(180^0 - \alpha) &= -\cot\,\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 11).$$



Сл. 161.



Сл. 162.

Функције тупог угла једнаке су с истим функцијама суплементног оштрог угла, али са супротним знаком, изузимајући синус који има исти знак.

b) Ако је угао $AOM = 180^0 + \alpha$ онда је (сл. 162)

$$\begin{aligned} \sin\,(180^0 + \alpha) &= MP = -M_1P_1 = -\sin\,\alpha, \\ \cos\,(180^0 + \alpha) &= OP = -OP_1 = -\cos\,\alpha; \end{aligned}$$

с тога

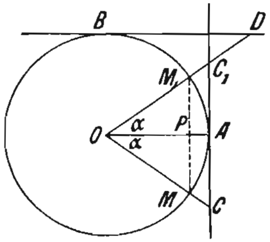
$$\begin{aligned} \text{tang}\,(180^0 + \alpha) &= \text{tang}\,\alpha, \\ \cot\,(180^0 + \alpha) &= \cot\,\alpha. \end{aligned}$$

c) За угао AOM (сл. 163) у четвртом квадранту имамо:

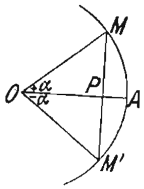
$$\begin{aligned} \sin\,(360^0 - \alpha) &= MP = -M_1P = -\sin\,\alpha, \\ \cos\,(360^0 - \alpha) &= OP = \cos\,\alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{с тога } \text{tang}\,(360^0 - \alpha) &= -\text{tang}\,\alpha, \\ \cot\,(360^0 - \alpha) &= -\cot\,\alpha. \end{aligned}$$

d) За углове веће од 360° вреде обрасци из чл. 318, додат. на пр. $\sin 800^0 = \sin\,(80^0 + 2.360^0) = \sin 80^0$ итд.



Сл. 163.



Сл. 164.

321. Негативни углови (сл. 164).

Ако се углови, који постају обртањем покретног крака од A ка M (супротно кретању казаљке на часовнику) сматрају као позитивни, онда се углови, који постају обртањем покретног крака у супротном смислу од A ка M', морају сматрати као негативни.

Ако је, дакле, угао $AOM' = AOM$, па се стави $AOM = +\alpha$, онда је $AOM' = -\alpha$. Стави ли се $OM = OM' = 1$, и веже M са M', онда је OP симетрала дужи MM', па је с тога

$$\sin\,\alpha = MP,\ \sin\,(-\alpha) = M'P = -MP, \text{ а}$$

$$\cos\,\alpha = OP,\ \cos\,(-\alpha) = OP; \text{ према томе}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\,(-\alpha) = -\sin\,\alpha,&\ \ \cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha \\ \text{с тога } \text{tang}\,(-\alpha) = -\text{tang}\,\alpha,&\ \cot\,(-\alpha) = -\cot\,\alpha. \end{aligned}\right\} \cdots 12)$$

Функције негативних углова једнаке су с истим функцијама позитивних углова, али са супротним знаком, осим косинуса који задржава исти знак.

322. Задаци.

1. Конструиши угао у сва четири квадранта, кад је $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.
2. Исто како, кад је $\sin\alpha = +\frac{4}{5}$.

3. То исто, кад је $\operatorname{tang}\alpha = +3$, $\operatorname{tang}\alpha = -3$.

4, То исто, кад је $\cot\alpha = +4$, $\cot\alpha = -4$.

5. Ако је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, израчунај $\cos\alpha$, $\operatorname{tang}\alpha$, $\cot\alpha$, узимајући угао α у *a)* првом, *b)* другом квадранту.

6. Ако је $\operatorname{tang}\alpha = -4$, израчунај $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cot\alpha$, узимајући угао α у *a)* другом, *b)* четвртом квадранту.

7. Изрáзи функцијама оштрих углова:

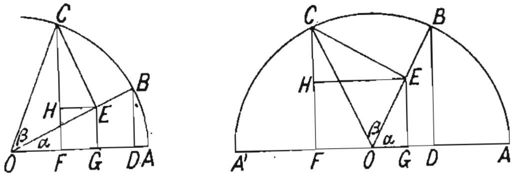
a) $\sin 125^0$, *b)* $\sin 200^0$ *c)* $\sin 430^0$, *d)* $\sin 98^0\,12'$;
e) $\cos 139^0$, *f)* $\cos 288^0$, *g)* $\cos 538^0$; *h)* $\cos 110^0\,38'\,42''$;
i) $\operatorname{tang} 91^0$, *k)* $\operatorname{tang} 199^0$, *l)* $\operatorname{tang} 620^0$, *m)* $\operatorname{tang} 159^0\,9'\,30''$;
n) $\cot 163^0$. *o)* $\cot 315^0$, *p)* $\cot 726^0$, *q)* $\cot 128^0\,41'\,55''$.

8. Израчунај функције углова од 120^0, 135^0, 150^0.

323. Функције збира од два угла.

a) Нека су α и β (сл. 165, *a*) оштри углови, и нека је $\alpha + \beta < 90^0$.

Ако је угао $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, онда је $AOC = \alpha + \beta$. Повуче ли се $BD \perp OA$, $CE \perp OB$, $CF \perp OA$, $EG \perp OA$ и $EH \perp CF$, онда је — с претпоставком да је полупречник $OC = 1$,



a Сл. 165. *b*

$$BD = \sin\alpha,\quad CE = \sin\beta,\quad CF = \sin(\alpha+\beta),$$
$$OD = \cos\alpha,\quad OE = \cos\beta,\quad OF = \cos(\alpha+\beta).$$

Тада је

$$\sin(\alpha+\beta) = CF = FH + HC = EG + HC = OE\cdot\sin\alpha + CE\cos\alpha$$
$$= \cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha \ldots\ldots 13)$$

Даље је

$$\cos(\alpha+\beta) = OF = OG - FG = OG - HE = OE\cos\alpha - CE\sin\beta$$
$$= \cos\beta\cos\alpha - \sin\alpha\sin\beta \ldots\ldots 14).$$

b) Нека су α и β оштри углови, и нека је $\alpha + \beta > 90^0$, (слика 165, *b*).

У овом је случају доказивање исто као под *a)*, само се због негативне вредности $\cos(\alpha+\beta)$ не сме ставити $OF = FG - OG$, него $OF = OG - FG$, дакле као под *a)*.

Горњи обрасци вреде, дакле, за све оштре углове α и β.

c) Кад обрасци 13) и 14) вреде за буди која два угла α и β, онда они вреде и онда, кад се један од њих повећа за 90^0, кад на пр. α заменимо углом $\alpha' = 90^0 + \alpha$. Јер

$$\sin(\alpha'+\beta) = \sin(90^0+\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) \quad \text{(чл. 319.)},$$
$$\cos(\alpha'+\beta) = \cos(90^0+\alpha+\beta) = -\sin(\alpha+\beta);$$

према томе је

$$\sin(\alpha'+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha'+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Али је $\cos\alpha = \sin(90^0+\alpha)$ (чл. 319) $= \sin\alpha'$,
$\sin\alpha = -\cos(90^0+\alpha) = -\cos\alpha'$; с тога
$\sin(\alpha'+\beta) = \sin\alpha'\cos\beta + \cos\alpha'\sin\beta$,
$\cos(\alpha'+\beta) = \cos\alpha'\cos\beta - \sin\alpha'\sin\beta$.

А отуд излази, да обрасци 13) и 14) вреде у опште. Јер, како они вреде за збир од два оштра угла, то они вреде и онда, кад се једном од та два угла дода 90^0; они вреде и тада, кад се једном или другом углу додаје непрестано по 90^0; ти обрасци вреде дакле у опште за збир од два буди колика угла.

Како је

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

то се, делећи бројитељ и именитељ производом $\cos\alpha\cos\beta$, добија

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta} \ldots\ldots 15).$$

Исто тако налази се

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha} \ldots\ldots 16).$$

324. Функције удвојених углова и полу-углова.

Кад се у обрасцима 13) до 16) стави $\beta = \alpha$, добија се

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \ldots 17) \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \ldots 18)$$

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}^2\alpha} \ldots 19) \qquad \cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \ldots\ldots 20)$$

Из тих једначина могу се наћи функције двогубог угла, кад су познате функције простог угла.

Ставимо ли у обрасцима 17) и 18) свуда α на место 2α, дакле $\frac{\alpha}{2}$ место α, онда се они претварају у ова два:

$$\sin\alpha = 2\,\mathrm{siu}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdots 21),\qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cdots 22).$$

Како је

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \text{ по 7), а}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$$

то налазимо, сабирањем и одузимањем ових двеју једначина, да је

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdots\cdots 23)\quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdots\cdots 24)$$

$$\text{с тога } \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdots 25)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdots 26).$$

Из та два израза добија се дељењем:

$$\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cdots 27)\quad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\cdots 28).$$

Помоћу образаца 25) до 28) можемо одредити функције полуугла, кад је познат косинус целог угла.

325. Функција разлике два угла.

Угао $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$.

Примењујући једначине 13) и 14) на овај збир, добијамо

$$\sin\alpha = \sin(\alpha-\beta)\cos\beta + + \cos(\alpha-\beta)\sin\beta,$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta.$$

Ако решимо ове две једначине, сматрајући у њима $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$ као непознате, и имајући на уму да је

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1, \text{ онда добијамо:}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots 29)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots 30).$$

Ови обрасци вреде у опште, као и они под 13) и 14) из којих су изведени.

Једначине 29) и 30) могу се и независно од других извести исто онако, као једначине 13) и 14) у чл. 323.

Из образаца 29) и 30) добија се, као и у чл. 323,

$$\mathrm{tang}\,(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\beta}{1 + \mathrm{tang}\,\alpha\;\mathrm{tang}\,\beta}\cdots\cdots 31)$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}\cdots\cdots 32).$$

326. Збир и разлика двеју функција.

Из образаца 13), 14), 29) и 30) добија се сабирањем и одузимањем:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta,$$

или ако ставимо

$$\alpha + \beta = \varphi,\qquad \text{дакле } \alpha = \frac{1}{2}(\varphi + \psi),$$
$$\alpha - \beta = \psi,\qquad \beta = \frac{1}{2}(\varphi - \psi),$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdots\cdots 33)$$
$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdots\cdots 34)$$
$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdots\cdots 35)$$
$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)\cdots 36).$$

Из 33) и 34) налазимо дељењем:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi+\psi)}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}\cdots\cdots 37)$$

$$\frac{\sin\varphi \pm \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\cdots\cdots 38).$$

327. Задаци.

1. Из $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ израчунај функције угла од 15^0.
2. Из $\sin 30^0$ и $\sin 18^0$ израчунај синус од 12^0, 48^0, 42^0, 78^0.
3. Израчунај функције угла од 36^0.

4. Из $\sin 36^0$ и $\sin 30^0$ израчунај синус од 6^0, 84^0, 66^0, 24^0.

5. Претвори

a) $\cos\alpha + \dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha}$ у израз у коме се налази само $\sin\alpha$;

b) $\sin\alpha\cos - \dfrac{\mathrm{tang}\,\alpha}{\sin\alpha}$ „ „ „ „ „ „ „ $\cos\alpha$·

c) $1 - \cos^2\alpha\cot^2\alpha(\mathrm{tang}^2\alpha - 1)$ „ „ „ „ „ „ „ $\mathrm{tang}\,\alpha$;

d) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \mathrm{tang}^2\alpha(\cot^2\alpha - 1)$ „ „ „ „ „ „ „ $\cot\alpha$.

Докажи да су тачни ови обрасци:

6. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,\alpha}{1 + \mathrm{tang}^2\alpha}$.   7. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tang}^2\alpha}{1 + \mathrm{tang}^2\alpha}$.

8. $\mathrm{tang}(45^0 \pm \alpha) = \dfrac{1 \pm \mathrm{tang}\,\alpha}{1 \mp \mathrm{tang}\,\alpha}$.   9. $\cot(45^0 \pm \alpha) = \dfrac{\cot\alpha \mp 1}{\cot\alpha \pm 1}$.

10. $\dfrac{\mathrm{siu}\,2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \mathrm{tang}\,\alpha.$ 11. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \cot\alpha.$

12. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \mathrm{tang}\,\alpha.$ 13. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2}$.

14. $\mathrm{tang}\,\alpha \pm \mathrm{tang}\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.   15. $\cot\alpha \pm \cot\beta = \dfrac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

16. $\dfrac{\mathrm{tang}\,\alpha \pm \mathrm{tang}\,\beta}{\cot \pm \cot\beta} = \pm\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta.$

17. *a)* $\sin\alpha \pm \cos\alpha$, *b)* $1 \pm \sin\alpha$ претвори у производ.

18. $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha + \gamma - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) =$
$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

19. $\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma) =$
$4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ако је $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, онда је:

20. $\mathrm{siu}\,\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

21. $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$:

22. $\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\beta}{2} + \cos\dfrac{\gamma}{2} = 4\cos\dfrac{\alpha + \beta}{4}\cos\dfrac{\alpha + \gamma}{4}\cos\dfrac{\beta + \gamma}{4}$.

23. $\mathrm{taug}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta + \mathrm{tang}\,\gamma = \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{tang}\,\gamma.$

24. $\cot\dfrac{\alpha}{2} + \cot\dfrac{\beta}{2} + \cot\dfrac{\gamma}{2} = \cot\dfrac{\alpha}{2}\cot\dfrac{\beta}{2}\cot\dfrac{\gamma}{2}$.

Како се обрасци 22, и 24. изводе супституцијом 20 и 23?

25. Образац $p = \dfrac{c^2}{2}\sin\beta\cos\beta$ из чл. 313 преиначити тако, да се у њему налази само једна функција угла 2β.

329. Гониометријске једначине.

Једначине, у којима се налазе гониометријске функције непознатих углова, зову се гониометријске једначине. Ако се у једначини налази само један непознати угао, онда ваља једначину тако трансформовати, да се у њој налази само једна функција тог угла. Ако у једначини има више непознатих углова, онда ваља из датих једначина извести такве, у којима се налази само једна функција сваког непознатог угла, или њихова збира или разлике.

Примери. 1. $2\cos x = \cot \mathrm{x}.$

Кад ставимо $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ на место $\cot x$, добијамо.

$$2\cos x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \text{или}$$

$$\cos x\left(2 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0,\ \text{дакле}$$

$$\sin x = \frac{1}{2},\ \text{или}\ \cos x = 0$$

а тиме је угао x одређен.

Из $\sin x = \dfrac{1}{2}$ излази $x = 30^0$. Ну то није једина вредност угла x. Како се и у другом квадранту налази један угао чији је синус $= \dfrac{1}{2}$, а то је суплеменат углу од 30^0, то је $x = 150$ друга вредност угла x. Ако се појам о углу прошири и на углове веће од 360^0 и на негативне углове, онда имамо као општа решења $x = 30^0 \pm n \cdot 360^0$ и $x = 150^0 \pm n \cdot 360^0$, где је $n = 0$ или буди који цео број. Према тако проширеном појму о углу може x имати безбројно много вредности; али се обично ограничавамо на оне две вредности, које се налазе у прва четири квадранта. Исто тако добивају се из $\cos x = 0$ решења $x = 90^0$, 270^0.

2. $a \cdot \sin(\alpha + x) = b\cos(\beta + x).$

Имамо:

$a\sin\alpha\cos x + a\cos\alpha\sin x = b\cos\beta\cos x - b\sin\beta\sin x$, или

$\sin x\,(a\cos\alpha + b\sin\beta) = \cos x\,(b\cos\beta - a\sin\alpha)$, с тога

$$\mathrm{tang}\,x = \frac{b\cos\beta - a\sin\beta}{a\cos\alpha + b\sin\beta}.$$

3. $a\sin x + b\cos x = c.$

Из те је једначине $b \cos x = c - a \sin x$; ако ову једначину дигнемо на квадрат и ставимо $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, добићемо

$$\sin x = \frac{ac \pm b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Мора се још испитати, која од тих двеју вредности задовољава једначину $a \sin x + b \cos x = c$, а која једначину $a \sin x - b \cos x = c$; нпр. $2 \sin x + \sqrt{3} \cos x = \frac{3}{2} \sqrt{3}$.

Задатак се простије решава увођењем каквог помоћног угла. Ако једначину доведемо на облик

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a},$$

па одредимо један помоћни угао φ тако, да је $\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a}$, онда је

$$\sin x + \operatorname{tang} \varphi \cos x = \frac{c}{a}, \text{ или}$$

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{a} \cos \varphi, \text{ даље}$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Како је φ познато, то се из ове једначине може наћи $x + \varphi$, а отуд и са̂м угао x.

4. Нека су дате две једначине:

$$\sin^2 x + \cos^2 y = a \qquad \text{и} \qquad \cos^2 x - \sin^2 y = b.$$

Ако се у другој једначини стави

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \ \sin^2 y = 1 - \cos^2 y$$

добија се

$$-\sin^2 x + \cos^2 y = b.$$

Из ове и прве налази се сабирањем: $2 \cos^2 y = a + b$, а одузимањем $2 \sin^2 x = a - b$, дакле

$$\sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a-b)}, \quad \cos y = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (a+b)}.$$

5. $x + y = \beta$; $\qquad \sin x - \sin y = n$.

Пре свега је $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2} (x + y) \sin \frac{1}{2} (x - y)$

$$= 2 \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} (x - y),$$

дакле

$$2 \cos \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} (x - y) = n, \text{ отуд}$$

$$\sin \frac{1}{2} (x - y) = \frac{n}{2 \cos \frac{1}{2} \beta}.$$

Из те једначине може се наћи $\frac{1}{2} (x - y)$, па се за тим из познатог полузбира $\frac{1}{2} (x + y) = \frac{1}{2} \beta$ и полуразлике $\frac{1}{2} (x - y)$ налазе вредности за x и y.

329. Задаци.

а) Реши ове гониометријске једначине:

1. $2 \sin x = \operatorname{tang} x$.
2. $2 \sin x = 3 \cot x$.
3. $\sin x = \cos^2 x$.
4. $\operatorname{tang} x - \cot x = 4 \sqrt{2}$.
5. $2 (\operatorname{tang} x + \cot x) = 5$.
6. $2 \operatorname{tang} y + 3 \cot y = 5$.
7. $\sin (\varphi - x) = \cos (\varphi + x)$.
8. $\sin (\alpha - x) = \cos (\beta + x)$.
9. $\sin x + \operatorname{tang} x = 1 + \cos x$.
10. $\cot x - \cos x = 1 - \sin x$.
11. $5 \sin^2 x + \cos^2 x = 2$.
12. $(\cos x - \sin x)^2 = \sin 2 x$.
13. $1 + \cos x = \sqrt{3} \cos \frac{x}{2}$.
14. $1 - \cos 2 x = (\sqrt{2} - 1) \sin 2 x$.
15. $3 (\cos y + \cot y) =$ $= 2 (1 + \sin y)$.
16. $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x +$ $+ \frac{5}{4} \cos^2 x = 0$.
17. $\frac{\operatorname{tang} 2 x}{\operatorname{tang} x} - \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} 2 x} = 2$.
18. $\sin x = \sqrt{2} \sin y$.
    $\operatorname{tang} x = \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{tang} y$.
19. $\sin x + \sin y = 1$,
    $\cos x + \cos y = 1{\cdot}7$.
20. $x + y = 60^0$,
    $\cos x + \cos y = 1{\cdot}71$.
21. $x + y = 45^0$,
    $\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = \frac{1}{3}$.
22. $x + y = 120^0$,
    $\sin x \sin y = 0{\cdot}5$.
23. $x + y = 60^0$,
    $\operatorname{tang} y = 2 \operatorname{tang} x$.
24. $x + y = 45^0$,
    $\sin x \cos y = 0{\cdot}53$.
    Употреби једначину,
    $\sin (x + y) + \sin (x - y) = ?$
25. $x - y = 14^0$,
    $\cos x \cos y = 0{\cdot}76$.
26. $5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$,
    $3.5^{\sin x} - 2.3^{\sin y} = 5$.

27. Кад је у неком правоуглом троуглу $a^2 = bc$, колики су његови углови?

b) Увођењем помоћног угла удеси за логаритамско рачунање ове изразе:

1. $x = \dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$, за $a > b$. Стави $\sqrt{b} = a \cos \varphi$.

2. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, за $a > b$.

3. $x = \sqrt{a+b} \pm \sqrt{a-b}$, за $a > b$.

4. $x = a \sin \alpha \pm b \cos \alpha$. Стави $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tang} \varphi$.

5. $x = \dfrac{a}{\sqrt{b - c \cos \alpha}}$.

6. $x = \dfrac{a}{\sqrt{b + c \cos \alpha}}$.

7. $x = \sin \alpha \sin \beta \pm \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$.

Издвој $\sin \alpha$ као заједничко, па стави $\cot \alpha \cos \gamma = \operatorname{tang} \varphi$.

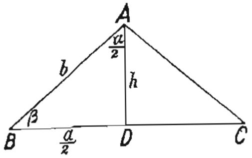
8. $x = m \sin \alpha - \cos \alpha$.

9. $x = \sqrt{a^2 + 2\,ab \cot \alpha}$.

10. $x = \sqrt{a^2 - 2\,ab \operatorname{tang} \alpha}$.

Решавање равнокраког троугла и израчунавање правилних полигона.

330. Равнокрак троугао ABC (сл. 166) одређен је, чим су дата два комада, која не зависе један од другог.



Сл. 166.

Како је равнокрак троугао висином AD, која одговара основици BC, подељен на два подударна правоугла троугла, то се сваки задатак о равнокраком троуглу може свести на решавање правоуглог троугла.

Ако је a основица b крак, α угао на темену, β угао на основици, а p површина равнокраког троугла ABC, онда се из правоуглог троугла ADB изводе ове једначине за решавање:

$$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0, \qquad a = 2\,b \sin \frac{\alpha}{2} = 2\,b \cos \beta,$$

$$h = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \beta = b \sin \beta,$$

$$p = \frac{ah}{2} = \sqrt{\left(b + \frac{a}{2}\right)\left(b - \frac{a}{2}\right)} = \frac{a^2}{4} \operatorname{tang} \beta = \frac{b^2}{2} \sin 2\beta.$$

331. Примери. За израчунавање равнокраких троуглова:

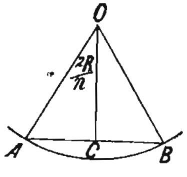
	a	b	h	α	β	p
1.	88	125	117	41° 13' 6''	69° 23' 27''	5148
2.	240	241	209	59° 43' 32''	60° 8' 14''	25080
3.	672	505	377	83° 25' 4''	48° 17' 28''	126672
4.	3·12	2·05	1·33	99° 6'	40° 27'	2·0748
5.	4·5	2·3995	0·8338	139° 20'	20° 20'	1·876

6. У једном равнокраком троуглу је збир основице и висине два пута већи од крака; израчунај углове.

332. Правилни полигони.

Из стране и броја стра́на̂ правилна полигона израчунати полупречник уписаног и описаног круга, и површину полигона.

Нека је $AB = s$ (сл. 167) страна правилног n-страног полигона, $AO = R$ полупречник описаног, $OC = r$ полупречник уписаног круга, а p површина полигонска. Тада је:



Сл. 167.

$$r = \frac{s}{2} \cot \frac{180^0}{n}, \qquad R = \frac{s}{2 \sin \dfrac{180^0}{n}},$$

$$p = \frac{n s r}{2} = \frac{n s^2}{4} \cot \frac{180^0}{n}.$$

333. Бројни примери за израчунавање правилних полигона.

	n	s	r	R	p
1.	5	2·6042	1·7922	2·2153	11·669
2.	8	1·5	1·8107	1·9598	10·864
3.	10	1·5596	2·4	2·5235	18·715
4.	15	0·83165	1·9563	2·	12·202
5.	24	0·39251	1·4907	1·5036	7·0213.

6. Један правилан дванаестоугао има површину толику исту као и један правилан шестоугао коме је страна $s = 4$; колики је полупречник круга, уписаног у правилном дванаестоуглу?

Троугао у опште.

334. У сваком троуглу стоје стране у истој размери као синуси супротних углова (синусна теорема).

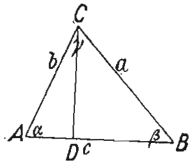
Ако се повуче $CD \perp AB$ (сл. 168), онда је у правоуглим троуглима BDC и ADC

$$CD = a \sin \beta, \quad CD = b \sin \alpha,$$

према томе

$$a \sin \beta = b \sin \alpha, \text{ или}$$

$$\text{Исто тако је} \quad \left.\begin{array}{l} a : b = \sin \alpha : \sin \beta. \\ a : c = \sin \alpha : \sin \gamma. \\ b : c = \sin \beta : \sin \gamma. \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{ I)}$$



Сл. 168.

Докажи тачност прве пропорције, кад је угао α туп.

Према томе је $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, т.ј. у једном истом троуглу размера стране према синусу супротног јој угла стална је количина; она се зове троуглова константа.

Како је у сл. 104. $\sphericalangle\ CDB = CAB = \alpha$, то је $a = 2\ R.\sin\alpha$, $\frac{a}{\sin\alpha} = 2\ R$. Како се и у троуглу ABC налази иста страна a и исти угао α, то је и за тај троугао $\frac{a}{\sin\alpha} = 2\ R$, т.ј. троуглова је константа једнака с пречником описанога му круга.

335. У сваком је троуглу квадрат једне стране једнак са збиром квадра́та̂ других двеју страна, мање удвојени производ тих страна и косинуса њима захваћеног угла (косинусна теорема).

Ако се повуче (сл, 168) $CD \perp AB$, онда је

$$a^2 = CD^2 + BD^2 = b^2 - AD^2 + (c - AD)^2$$
$$= b^2 - AD^2 + c^2 - 2c \cdot AD + AD^2, \text{ или}$$

Исто тако је
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\ bc \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\ ac \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\ ab \cos\gamma \end{aligned}\right| \ldots\ \text{II)}$$

336. Молвајдове једначине.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2\ R\sin\alpha + 2\ R\sin\beta}{2\ R\ \sin\gamma} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Како је $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0 - \frac{1}{2}\gamma$, дакле $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \cos\frac{1}{2}\gamma$, то је

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

Исто тако налази се $\qquad \ldots$ III)

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Искажи те обрасце речима.

337. Из $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ излази и ова пропорција:
$(a+b) : (a-b) = (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta)$, или (чл. 326, 37):

$$(a+b) : (a-b) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta) \cdots\cdots \text{IV)}.$$

Та се теорема зове тангентна и гласи:

Збир двеју страна у троуглу стоји према разлици истих страна у истој размери као тангента полузбира према тангенти полуразлике супротних углова.

Тангентна теорема може се извести и из образаца III дељењем.

Случајеви при решавању.

За косоугли троугао имамо, слично правилима о подударности, четири случаја при решавању.

338. I. Дата једна страна a и два угла β и γ.

Пре свега налази се трећи угао $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$.

Из пропорција $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$ и $c : a = \sin\gamma : \sin\alpha$ излазе једначине:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

На пр. $a = 788$, $\beta = 55^0\ 43'\ 18''$, $\gamma = 72^0\ 12'\ 35''$.

Тада је $\alpha = 52^0\ 4'\ 7''$.

$$\begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}89653 \\ \log\sin\beta = & \underline{9{\cdot}91715-10} \\ & 2{\cdot}81368 \\ \log\sin\alpha = & \underline{9{\cdot}89694-10} \\ \log b = & 2{\cdot}91674 \\ b = & 825{\cdot}54. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log a = & 2{\cdot}89653 \\ \log\sin\gamma = & \underline{9{\cdot}97872-10} \\ & 2{\cdot}87525 \\ \log\sin\alpha = & \underline{9{\cdot}89694-10} \\ \log c = & 2{\cdot}97831 \\ c = & 951{\cdot}28. \end{array}$$

339. II. Дате две стране a и b са захваћеним углом γ.

Из једначине IV. у чл. 337 добија се

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}\gamma,$$

па се отуд налази $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Како је $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, познато, то је

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \alpha, \quad \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \beta.$$

Страна c налази се из $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ или још боље по чл. 336 из

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}, \text{ или } c = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}.$$

Нека је на пр. $a = 748$, $b = 375$, $\gamma = 63^0\ 35'\ 30''$.

Тада је

$$a + b = 1123,$$
$$a - b = 373$$
$$\frac{1}{2} \gamma = 31^0\ 47'\ 45''$$
$$\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 58^0\ 12'\ 15''$$
$$\frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 28^0\ 10'\ 54''$$
$$\alpha = 86^0\ 23'\ 9''$$
$$\beta = 30^0\ \ 1'\ 21''.$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{1}{2} \gamma$$
$$\log (a - b) = 2{\cdot}57171$$
$$\log \cot \frac{1}{2} \gamma = 10{\cdot}20766-10$$
$$12{\cdot}77937-10$$
$$\log (a + b) = 3{\cdot}05038$$
$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 9{\cdot}72899-10$$
$$\frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 28^0\ 10'\ 54''.$$

За израчунавање стране c по Молвајдовим једначинама имамо

$$\log (a + b) = 3{\cdot}05038 \quad \text{или} \quad \log (a - b) = 2{\cdot}57171$$
$$\log \sin \frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}72172-10 \qquad \log \cos \frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}92938-10$$
$$12{\cdot}77210-10 \qquad 12{\cdot}50109-10$$
$$\log \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 9{\cdot}94520-10 \qquad \log \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 9{\cdot}67410-10$$
$$\log c = 2{\cdot}82690 \qquad \log c = 2{\cdot}82690$$
$$c = 671{\cdot}27.$$

Кад се обе вредности подударају, онда је то знак да је рачун тачан.

Додаци. *a)* Углови α и β могу се и посебице израчунати непосредно из a, b и γ.

Из $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ добија се $b \sin \alpha = a \sin \beta$,
или $b \sin \alpha = \sin (\alpha + \gamma) = a \sin \alpha \cos \gamma + a \cos \alpha \sin \gamma$
с тога $b \operatorname{tang} \alpha = a \operatorname{tang} \alpha \cos \gamma + \alpha \sin \gamma$, дакле

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}.$$

Овај је образац неподесан за логаритамско рачунање али се може удесити завођењем помоћног угла.

Ако је $\gamma < 90^6$, па се стави $\frac{a \cos \gamma}{b} = \sin^2 \varphi$, онда је

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b \cos^2 \varphi}.$$

Ако је $\gamma > 90^0$, онда ћемо ставити $-\frac{a \cos \gamma}{b} = \operatorname{tang}^2 \psi$, па ћемо добити $\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \gamma \cos^2 \psi}{b}$.

b) И трећа страна c може се израчунати из a, b и γ независно од углова α и β. Имамо

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2\, ab \left(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \gamma\right)$$

$$= (a-b)^2 + 4\, ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma = (a-b)^2 \cdot \left[1 + \frac{4\, ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2}\right].$$

Ако се сад одреди један помоћни угао φ тако, да је $\frac{4\, ab \sin^2 \frac{1}{2} \gamma}{(a-b)^2} = \operatorname{tang}^2 \varphi$, онда је

$$c^2 = \frac{(a-b)^2}{\cos^2 \varphi}, \text{ с тога } c = \frac{a - b}{\cos \varphi}.$$

340. III. Дате две стране a и b, и то $a > b$, и угао α наспрам веће стране.

Из $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$ налази се $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$.

Како се угао β одређује из синуса, то се за β може узети не само оштри угао који том синусу одговара, него и његов суплеменат; али како је $a > b$, па с тога и $\alpha > \beta$, то мора угао β бити оштар, ма колики био угао α.

Из α и β налази се тада $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Страна c налази се из једначине $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$.

На пр. за $a = 1238$, $b = 519$, $\alpha = 78^0\ 17'\ 20''$ налази се

$$\beta = 24^0\ 14'\ 10'',\ \gamma = 77^0\ 28'\ 30'',\ c = 1234{\cdot}2.$$

Ако би поред стра́на̂ $a = 1238$ и $b = 519$ био дат угао $\beta = 24^0\ 14'\ 10''$ наспрам мање стране, онда бисмо из једначине

$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b}$ добили два угла, пошто α може бити оштар или туп. Налазимо

$$\begin{array}{llll} \alpha = 78^0\ 17'\ 20'' & \text{или} & \alpha = 101^0\ 42'\ 40'', & \text{дакле} \\ \gamma = 77^0\ 28'\ 30'' & \text{„} & \gamma = 54^0\ 3'\ 10''. & \end{array}$$

Из једначине $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ добија се тада $c = 1234{\cdot}2$ или $c = 1023{\cdot}5$. — Задатак има, дакле, два решења.

(Упореди $\frac{a \sin \beta}{b} \gtreqless 1$ и чл. 95, 6).

341. IV. Дате све три стране a, b и c.

Ако су мерни бројеви стра́нä једноцифрени или двоцифрени, онда се углови могу одредити по косинусној теореми.

На пр. $a = 2$, $b = 4$, $c = 5$.

Имамо $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{37}{40}$, а угао $\alpha = 22^0\ 30'$.

Али ако су мерни бројеви вишецифрени, онда ваља употребити обрасце подесне за логаритмовање.

На сл. 105 добија се из $\triangle AOD$:

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{AD} = \frac{r}{s-a}\ ^{*)}$$

$$= \frac{p}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}}$$

Тада је

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\ (s-a)}{bc}}$$

с тога

$$\text{tang}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ (s-c)}{s\ (s-a)}} = \frac{1}{s-a} \sqrt{\frac{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}{s}} = \frac{r}{s-a}$$

Сличне обрасце добијамо и за функције углова

$$\frac{\beta}{2} \text{ и } \frac{\gamma}{2}.$$

---

*) Како је $AD + BE + CF = s$ или $AD + BE + CE = s$, то је $AD = s - (BE + CE) = s - a$.

Ако је тражени полу-угао врло мали, онда се он не може посредством косинуса наћи тачно, јер се косинус угла, који је близу 0°, врло мало мења. Иста напомена вреди о обрасцу за синус, ако је полу-угао близу 90°. С тога је у сваком случају најбоље применити обрасце за тангенте.

Нека је на пр. $a = 1011$, $b = 956$, $c = 533$; тада је

$$\text{tang}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a},\quad \text{tang}\ \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b},\quad \text{tang}\ \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}.$$

$$\begin{array}{rcr} a &=& 1011 \\ b &=& 956 \\ c &=& 533 \\ \hline 2s &=& 2500 \\ s &=& 1250 \\ s-a &=& 239 \\ s-b &=& 294 \\ s-c &=& 717 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} \log\ (s-a) &=& 2{\cdot}37\ 840 \\ \log\ (s-b) &=& 2{\cdot}46\ 835 \\ \log\ (s-c) &=& 2{\cdot}85\ 552 \\ \hline & & 7{\cdot}70\ 227 \\ \log s &=& 3{\cdot}09\ 691 \\ \hline \log r^2 &=& 4{\cdot}60\ 536 \\ \log r &=& 2{\cdot}30\ 268 \end{array}$$

$$\log\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\ \alpha = 9{\cdot}92\ 428-10$$

$$\log\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\ \beta = 9{\cdot}83\ 433-10$$

$$\log\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\ \gamma = 9{\cdot}44\ 716-10$$

$$\frac{1}{2}\ \alpha = 40^0\ \ 1'\ 48''\ \text{с тога}\ \alpha = 80^0\ \ 3'\ 36'';$$

$$\frac{1}{2}\ \beta = 34^0\ 19'\ 40'',\ \text{с тога}\ \beta = 68^0\ 39'\ 20'';$$

$$\frac{1}{2}\ \gamma = 15^0\ 38'\ 32'',\ \text{с тога}\ \gamma = 31^0\ 17'\ \ 4''.$$

342. Израчунавање површине косоуглог троугла.

Ако је h висина, која одговара страни a, онда је $h = b \sin \gamma$, с тога

$$p = \frac{ah}{2} = \frac{ab}{2} \sin \gamma \ldots\ldots 1)$$

тј. троуглова је површина једнака с половином производа двеју страна и синуса њима захваћеног угла.

По том правилу може се израчунати површина непосредно, кад су дате две стране са захваћеним углом; у осталим случајевима морају се прво наћи они комади у горњем обрасцу, који нису дати.

За четврти случај познат је још из Планиметрије (чл. 159, 3) образац, којим се може површина израчунати непосредно; исти образац може се тригонометријски извести овако:

$$p = \frac{ab}{2}\ \sin\gamma = \frac{ab}{2}\cdot 2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma,$$

с тога, с погледом на чл. 341,

$$p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\ \ldots\ldots\ 2).$$

Ако је у том случају при израчунавању углова употребљен полупречник r у троуглу уписаног круга, онда се за површину може узети простији образац (чл. 172, 2).

$$p = rs \ldots\ldots\ 3)$$

343. Примери за израчунавање косоуглих троуглова.

У примерима 1—8 изабери такве комаде, да задатак буде одређен.

	a	b	c	α	β	γ	p
1.	17	113	120	7° 37' 40"	61° 55' 40"	110° 26' 40"	900
2.	119	145	156	46° 23' 50"	61° 55' 40"	71° 40' 30"	8190
3.	388	389	195	75° 10' 52"	75° 45' 0"	29° 4' 8"	36666
4.	569	281	680	55° 17' 31"	23° 57' 8"	100° 45' 21"	78540
5.	330·1	412·2	371·3	49° 29' 50"	71° 42' 42"	58° 47' 29"	58188
6.	15·47	17·39	22·88	42° 30' 44"	49° 25' 48"	88° 3' 27"	134·43
7.	1·275	1·2753	0·0565	88° 25' 36"	89° 2' 5"	2° 32' 19"	0·03601
8.	1·2344	1·4303	0·9332	58° 32' 56"	81° 17' 28"	40° 9' 26"	0·56932

9. Реши ове троугле: 1. $a = 438{\cdot}2$, $b = 200$, $\beta = 30^0$; 2. $a = 438{\cdot}2$, $b = 219{\cdot}1$, $\beta = 30^0$; 3. $a = 438{\cdot}2$, $b = 356{\cdot}8$, $\beta = 30^0$; 4. $a = 46{\cdot}2$, $b = 30{\cdot}6$, $\beta = 54^0\ 36'$; 5. $a = 46{\cdot}2$, $b = 40{\cdot}23$, $\beta = 54^0\ 36'$.

У троуглу ABC (сл. 168) нека је $CD = h$, $BD = m$, $AD = n$.

Реши тај троугао, кад је дато:

10. a, b, h;
11. b, h, m;
12. m, n, h;
13. h, α. β;
14. m, n, γ;
15. p, a, h_b.

16. Реши троугао, кад је дата једна његова тежишна линија и углови између ње и облишњих страна.

Продужи тежишну линију за њену сопствену дужину.

17. h_a, h_b, α;

$$a h_a = b h_b,\ \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}\ \text{итд.}$$

18. Из стране a и два угла α и β израчунај висину h која одговара страни a и површину p.

19. Израчунај стране једном троуглу, кад је дата његова површина p са два угла α и β.

20. Изведи образац за tang $\frac{\alpha}{2}$ (чл. 341) непосредно, помоћу полупречника у троуглу уписаног круга.

Кад се средиште уписаног круга веже с додирним тачкама и теменима троугловим, онда је у једном тако добивеном троуглу једна катета r, а супротни угао $\frac{\alpha}{2}$; друга катета може се наћи по чл. 81, а.

344. Израчунавање троугла из комбинованих података.

Ако нису непосредно дата три комада, који одређују троугао, онда се троугао може решити на два начина:

a) Из познатих података конструише се помоћни троугао, који служи за израчунавање непознатих комада троугла који ваља решити.

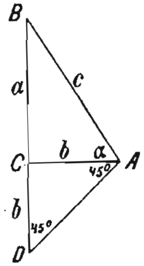
b) употребе се једначине између датих и тражених комада, па се из њих израчунају непознати комади (аналитично решавање).

Примери:

1. Реши правоугли троугао из $a + b = s$ и α.

a) Помоћним троуглом.

Начини ли се (сл. 169) $CD = b$, онда се добија помоћни троугао ABD из којега се може израчунати страна c.



Сл. 169.

$$(a + b) : c = \sin\,(\alpha + 45^0) : \sin\,45^0,$$

$$c = \frac{(a+b)\,\sin 45^0}{\sin\,(\alpha + 45^0)} = \frac{s}{\sqrt{2}\,\sin\,(\alpha + 45^0)}$$

за тим је $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$.

b) Аналитично решавање.

$$a + b = s; \qquad a = c\sin\alpha, \qquad b = c\cos\alpha,$$

с тога

$$c\sin\alpha + c\cos\alpha = s$$

$$c = \frac{s}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{s}{\sqrt{2}\,\sin\,(\alpha + 45^0)}\ .$$

2. Реши троугао, кад се знају његови углови и обим $2s$.

a) Помоћном сликом.

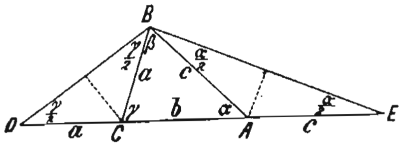
Начини ли се (сл. 170) $CD = a$, $AE = c$, онда се добија помоћни троугао BDE; ако се стави $BD = d$, онда је из троугла BDE:

$$d : 2s = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\left(\beta + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

$$\frac{d}{2} = \frac{s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(90^0 + \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

Али је $\frac{d}{2} = a\cos\frac{\gamma}{2}$, с тога $a = \dfrac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} =$

$$\frac{s\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{s\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$



Сл. 170.

Стране b и c налазе се по синусној теореми:

$$b = \frac{s\sin\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \frac{s\sin\gamma}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

b) Аналитично решење.

Ако је $2R$ пречник око троугла описаног круга, онда је

$$a = 2R\sin\alpha, \qquad b = 2R\sin\beta, \qquad c = 2R\sin\gamma;$$

с тога

$$2s = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$2R = \frac{s}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Према томе

$$a = \frac{s\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \text{ итд.}$$

При рачунању бројног примера тражи се прво $\log 2R$, затим стране по једначинама $a = 2R\sin\alpha$ итд.

345. Реши правоугли троугао, кад је дато (сл. 73.):

1. $a - b = d$ и α;
2. $c + a = s$ и α;
3. $c - a = d$ и α;
4. $a + b + c = 2s$ и α;
5. $a + b - c = d$ и α;
6. $p - q = d$ и α;
7. $a - b = d$ и $p - q = d'$;
8. $p - q = d$ и h;
9. $a + b$ и $a : b$.

346. Реши косоугли троугао, кад је дато:

1. $a + b = s$, h_c, α;
2. $a - b = d$, h_c, α;
3. $a + b = s$, c, γ (чл. 336, III.) Детерминација:

$$c \gtreqless (a + b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Упореди резултат аналитичног извођења с конструктивним резултатом који даје помоћни троугао.

4. $a - b = d$, c, γ;
5. $a + b = s$, c, $\alpha - \beta$;
6. $a - b = d$, c, $\alpha - \beta$;
7. $a + b = s$, α, β (При аналит. решавању тражи се $2R$, или по чл. 336).
8. $a - b = d$, α, β;
9. $a + b - c = d$, α, β. Сличан као у члану 344, зад. 2.
10. $a + b$, c, α.

Почни овако: $(a + b + c) : (a + b - c) = ?$ (Или помоћни троугао, примењујући чл. 337).

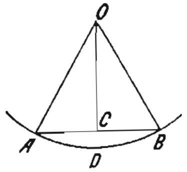
11. $a + b = s$, R, γ;
12. $a - b = d$, R, γ;
13. $a - b = d$, R, $\alpha - \beta$;
14. $h_a - h_b$, α, β (Упореди чл. 343, 17).
15. Израчунај површину троугла, кад се знају сви његови углови и обим $2s$.
16. Дат је обим равнокраког троугла и угао на темену; реши тај троугао: обим $= 1682$, $\alpha = 83^0\ 25'\ 4''$.

II. Примена Равне Тригонометрије.

1. Задаци из Планиметрије.

347. Израчунавање тетива, средишних углова, кружних исечака и одсечака.

У кругу (сл. 171) нека је полупречник $OA = r$, тетива $AB = s$, према њој средишни угао $AOB = \alpha$; нека је $\varDelta$ површина троугла AOB, P површина кружна исечка AOB, а p површина кружна одсечка $ADBC$.



Сл. 171.

1. Дато r и s; тражи се α.

$$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{s}{2r}.$$

2. Дато r и α, тражи се s, $\varDelta$, P и p.

$$s = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha,$$

$$\varDelta = \frac{r^2}{2}\sin\alpha,\ P = \frac{r^2\pi}{2}\cdot\frac{\alpha}{180},$$

$$p = P - \varDelta = \frac{r^2}{2}\left\{\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right\}.$$

3. Дато s и α; тражи се r, $\varDelta$, P и p.

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},\ \varDelta = \frac{s^2}{4}\cot\frac{1}{2}\alpha,\ P = \frac{s^2\pi}{8\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{\alpha}{180},$$

$$p = P - \varDelta = \frac{s^2}{4}\left\{\frac{\pi}{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{\alpha}{180} - \cot\frac{1}{2}\alpha\right\}.$$

348. Дати су углови једног троугла, α, β и γ и полупречник r уписанога му круга; израчунај његове стране.

Ако је (сл. 105) $OD = OE = OF = r$ полупречник круга уписанога у троуглу ABC, онда је

$$BE = r\cot\frac{1}{2}\beta,\qquad EC = r\cot\frac{1}{2}\gamma;\ \text{с тога}$$

$$a = r(\cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma) = \frac{r\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{r\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma} =$$

$$\frac{r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{r\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = m\sin\alpha,$$

$$\text{где је } m = \frac{r}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Исто тако налази се

$$b = m\sin\beta,\qquad c = m\sin\gamma.$$

349. Нађи површину p паралелограма, кад су дате две стране a и b са захваћеним углом α.

Налази се $p = ab\sin\alpha$.

350. Одреди површину p четвороугла, кад су дате његове дијагонале d и d_1 и њихов угао φ.

Кад се одреде површине она четири троугла, на која је четвороугао подељен дијагоналама, па се оне саберу, онда се добија

$$p = \frac{dd_1}{2}\sin\varphi.$$

351. Израчунати углове и површину тетивног четвороугла, кад су дате његове стране.

У тетивном четвороуглу $ABCD$ (сл. 75) стране су $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, углови A, $Б$, C, D по реду α, β, γ, δ. Из троуглова ABD и BCD добијамо, примењујући косинусну теорему на страну BD;

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad + 2bc}$$

а отуд, слично чл. 341, кад ставимо $a + b + c + d = 2s$,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}},\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

Како се налазе углови β, γ, δ?

Сабирајући површине троуглова ABD и BCD, налазимо да је површина четвороугла:

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Овај је образац први извео Брамагупта (упор. чл. 172).

2. Задаци из практичне Геометрије.

352. Одредити висину каква предмета AB (торња), кад се може измерити једна хоризонтална права (основица) ка подножју тог предмета.

1. Основица иде до подножја A.

Ваља измерити од једне тачке C дуж $CA = a$, и код C угао $ACB = \alpha$; тада је $h = a \operatorname{tang} \alpha$.

2. Основица не иде до подножја.

У једној вертикалној равни кроз B ваља измерити дуж $CD = a$ као основицу и код њених крајњих тачака углове $ACB = \alpha$ и $ADB = \beta$;

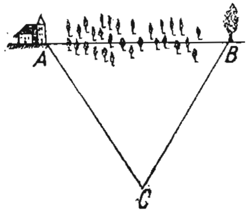
$$\text{тада je } h = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)} \cdot$$

353. Одредити у пољу раздаљину тачке A од B (сл. 172) кад се она не може мерити непосредно, због какве сметње између A и B.

Ваља узети трећу тачку C, па измерити дужи $CB = a$ и $CA = b$, и угао $ACB = \gamma$. Тада је

$$AB = \frac{a - b}{\cos \varphi} \text{ (чл. 339, додатак } b\text{)},$$

$$\text{ако je } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma \sqrt{ab}}{a - b} \cdot$$

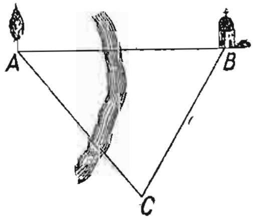


Сл. 172.

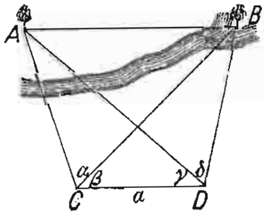
354. Одредити у пољу раздаљину тачке A од B (сл. 173) кад је само једна приступачна.

Ваља изабрати трећу тачку C, тако да се може измерити њена раздаљина од A или B, па измерити дуж $BC = a$, као и углове $B = \beta$ и $C = \gamma$. Тада је

$$AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} \cdot$$



Сл. 173.



Сл. 174.

355. Одредити у пољу раздаљину тачке A од B (сл. 174) ако се не може ни једној приступити.

Треба изабрати две тачке C и D, па измерити основицу $CD = a$, и код њених крајњих тачака углове $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$, $ADC = \gamma$, $ADB = \delta$. Тада је

$$\text{у } \triangle ACD \ldots\ldots\ldots\ AD = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)} = b,$$

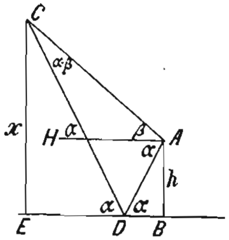
$$\text{у } \triangle BCD \ldots\ldots\ldots\ BD = \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma + \delta)} = c,$$

$$\text{у } \triangle ABD \ldots\ldots\ldots\ AB = \frac{b - c}{\cos \varphi},$$

$$\text{ако je } \operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \delta \sqrt{bc}}{b - c} \cdot$$

356. Одредити висину облака помоћу његова лика у води.

Посматрач A (сл. 175) нека се налази у висини $AB = h$ над површином воде BDE у којој се огледа облак; он визира к једној одређеној тачки C на облаку и измери угао $CAH = \beta$ (елевациони угао) између визирног зрака AC и хоризонтале AH повучене кроз око у вертикалној равни ACE. Облак се огледа у води, и посматрач види у води лик тачке C у правцу AD, па измери угао $HAD = \alpha$ (депресиони угао) између правца AD и хоризонтале AH. Из података h, α, β ваља одредити висину $CE = x$ облака над површином воде.



Сл. 175.

Из $\triangle CED$ је $x = CD . \sin CDE$, па како је по законима рефлексије угао $CDE = ADB = \alpha$, то је $x = CD . \sin \alpha$.

Дуж CD налази се из троугла CAD, јер је

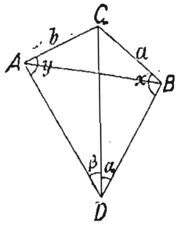
$$CD : AD = \sin (\alpha + \beta) : \sin (\alpha - \beta); \text{ с тога}$$

$$CD = AD \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)} \cdot$$

Напослетку је у троуглу ADB дуж $AD = \frac{h}{\sin \alpha}$. Према томе

$$x = h \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot$$

357. У трапезоида $ACBD$ (слика 176) познате су стране a и b и углови ACB, α и β. Да се израчунају стране DA, DB и DC. (Pothenot-ов проблем: из три тачке одређенога положаја у пољу, A, B и C, одредити положај четврте тачке D, кад се могу измерити само углови између визирних линија из D у тачке A, B, C).



Сл. 176.

Нека је дат троугао ABC (сл. 176), и то $BC = a$, $AC = b$, угао $ACB = C$. Треба измерити код тачке D углове $BDC = \alpha$ и $ADC = \beta$.

За тачку D ваља одредити угао $CBD = x$, $CAD = y$ и раздаљине AD, BD и CD.

Како је $x + y = 360^0 - (\alpha + \beta + C)$, то ваља одредити још $x - y$.

Из $a : CD = \sin\alpha : \sin x$ и

$b : CD = \sin\beta : \sin y$ излази

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin\alpha}{a \sin\beta} \text{ с тога}$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{b \sin\alpha - a \sin\beta}{b \sin\alpha + a \sin\beta} = \frac{\cot\varphi - 1}{\cot\varphi - 1},$$

ако се угао φ одреди тако, да је $\cot\varphi = \dfrac{b \sin\alpha}{a \sin\beta}$; или

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y)} = \cot(45^0 + \varphi) \text{ (чл. 327, 9); отуд}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x+y) \cot(45^0 + \varphi).$$

Из $\frac{1}{2}(x+y)$ и $\frac{1}{2}(x-y)$ налази се x и y. Тада је

$$DB = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}, \quad DA = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin\beta},$$

$$DC = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Какво ће бити решење, кад је D у троуглу ABC или на страни AB?

Овај је задатак поставио и решио Snellius 1617; али га је 1624 решио и Schickard, а 1692 Pothenot; по овом последњем зове се Потенотов проблем.

III. Задаци за вежбање.

358. 1. Израчунај *a)* стране и површину једног правоугаоника, кад се зна дијагонала и угао између ње и једне стране; *b)* површину правоугаоника, кад је позната разлика двеју узастопних страна и угао

између дијагонала; *c)* углове између једне дијагонале и стра́нâ, кад су познате стране.

2. Израчунај: *a)* углове једног ромба, кад су познате његове дијагонале, нпр. $d = 2{\cdot}486$ m $d' = 3{\cdot}048\,m$;

b) полупречник круга који има једнаку површину с ромбом чија је страна $a = 25\,cm$, а један угао $\alpha = 38^0\ 0'\ 2''$.

3. Израчунај стране у паралелограма, кад се знају: једна дијагонала d и углови φ и ψ између те дијагонале и оних страна, кроз чији пресек она пролази. $d = 14{\cdot}8$, $\varphi = 73^0\ 24'$, $\psi = 58^0\ 36'$.

4. Израчунај стране и углове паралелограма кад су дате: *a)* дијагонале d и d' и угао γ који оне захватају нпр. $d = 13{\cdot}7\,m$, $d' = 19{\cdot}5\,m$, $\gamma = 67^0\ 24'$; или *b)* обе дијагонале и површина, нпр. $d = 84{\cdot}5\ cm$, $d' = 364\,cm$ и површина $p = 14280\,cm^2$.

5. Израчунај *a)* углове равнокрака трапеза, кад се знају паралелне стране a и b и површина p; *b)* површину, кад су паралелне стране $a = 94\,m$, $b = 68\,m$, а један угао $\alpha = 65^0\ 5'\ 43''$; *c)* стране и углове, кад се знају дијагонала d и углови φ и ψ које гради та дијагонала са странама код једног темена, нпр. $d = 0{\cdot}834\,m$, $\varphi = 36^0\ 24'$, $\psi = 44^0\ 16'$.

6. Зна се један крак равнокрака трапеза, $c = 8\,m$, и полупречник описаног круга, $r = 10\,m$; површина трапеза пети је део од површине круга; колике су стране, а колики углови тог трапеза?

$$a = 18{\cdot}05\,m,\ b = 5{\cdot}95\,m,\ \alpha = 40^0\ 53'\ 15'' \text{ (чл. 334).}$$

7. Израчунај *a)* површину трапеза, кад је позната једна од паралелних страна a, углови α и β на тој страни и страна c која са страном a захвата угао α; *b)* површину и непаралелне стране, кад су дате две паралелне стране a и b и углови α и β на страни a, нпр. колика је површина ливаде, која има облик трапеза, кад су паралелне стране $a = 318\,m$, $b = 215\,m$, а на дужој страни налегли углови $\alpha = 63^0\ 45'$ и $\beta = 58^0\ 40'$?

8. У кругу, чији је полупречник r познат, поручене су две паралелне тетиве чије су средишне раздаљине d и d'; колика је површина између тих паралелних тетива?

9. Тетива, која одговара једном кружном исечку, дугачка је $440\,m$, висина лука (EF сл. 106) над том тетивом чини $\frac{1}{20}$ тетиве; израчунај полупречник, средишни угао и површину тог исечка.

10. Сечица и дирка једног круга секу се под 60^0, спољашњи је одсечак сечице $= 1$, а унутрашњи $= 3$: колики је полупречник тог круга?

11. Колики је угао између спољашњих заједничких тангената два круга чији су полупречници r и r', кад је средишна раздаљина c?

12. Три круга додирује се с поља, а њихови су полупречници R, r, ϱ; одреди углове између њихових централа.

13. Израчунај површину троугла, кад је поред углова $\alpha = 65^0 28' 14''$ и $\beta = 42^0 30' 4''$ дат *a)* полупречник $R = 205\,mm$ описаног, или *b)* полупречник $r = 150\ mm$ уписанога му круга.

$$a)\ p = 2 R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma; \qquad b)\ p = r^2 \cot\frac{\alpha}{2} \cot\frac{\beta}{2} \cot\frac{\gamma}{2}\,.$$

14. Дати су углови α, β, и γ једног троугла и полупречник R описанога му круга; одреди полупречник r уписанога му круга.

$$r = 4 R \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma.$$

15. Од једног тетивног четвороугла дате су две супротне стране a и c, један угао α и полупречник R описаног круга; израчунај оне друге две стране (чл. 334).

16. Од једног тетивног четвороугла дате су обе дијагонале m и n, угао ε који оне захватају, и полупречник R описаног круга; одреди углове и стране тог четвороугла (чл. 334).

17. Од једног тангентног четвороугла дате су две узастопне стране a и b, угао β који оне захватају, и полупречник r уписаног круга; израчунај његове углове и стране.

18. (Паралелограм сила). Нека су p и q две силе које дејствују на једну тачку под углом φ, а α и β нека су углови између њих и резултанте r. Кад су дате три од тих шест количине, и то:

1) $p,\ q,\ \varphi$; 3) $p,\ r,\ \alpha$; 5) $p,\ r,\ \varphi$; 7) $r,\ \alpha,\ \beta$;
2) $p,\ q,\ \alpha$; 4) $p,\ r,\ \beta$; 6) $p,\ \alpha,\ \beta$; 8) $p,\ q,\ r$;

одреди остале три.

19. Колика је висина Сунца, кад вертикалан предмет од $24\,m$ висине баца на једну хоризонталну раван сенку од $72\,m$ дужине?

20. Месечев полупречник види се са Земље под углом од 15' 31·69'', а средња месечева раздаљина од Земље износи 384415 *km*; колики је прави пречник месечев?

21. Под којим се углом види пречник Зорњаче, кад је она удаљена од Земље за 40 милиона *km* а прави јој је пречник $a = 12000\ km$?

22. На којем се одстојању од подножја неког брда налази лађа у моменту, кад се са ње угледа врх тога брда (висина брда позната)?

23. Да би се неки предмет могао видети у нормалној даљини јасног виђења од 25 *cm*, мора његов угао вида имати најмање 40''; најмање, према томе, мора бити пречник неког предмета, да би се предмет могао видети?

24. Под којим углом φ видимо торањ од 65 *m* висине у раздаљини од 85 *m*, ако је наше око 1·6 *m* над површином Земље?

25. Колики је крст на торњу од 50·2 висине, кад се он види под углом од $1^0\ 32'$, са једне тачке која је у хоризонталном правцу удаљена од подножја тог торња за 63·7 *m*?

26. На једној обали реке налази се зграда и на њој два отвора, један 10 *m* испод другога, На другој обали налази се пра̂во према згради, а у истој вертикалној равни с отворима, једна тачка која се из она два отвора види под депресионим угловима $\varphi = 17^0\ 21'\ 14''$ и $\psi = 10^0\ 37'\ 10''$; колика је ширина реке?

27. На једној обали измерена је основица $a = 60\ m$. Визирне линије из њених крајњих тачака ка једној мотки на другој обали захватају с основицом углове $\beta = 60^0\ 26'$ и $\gamma = 52^0\ 28'$. Колика је ширина реке?

28. Колика је висина брда чији се врх види под депресионим угловима $\alpha = 63^0\ 26'$ и $\beta = 71^0\ 34'$ са крајњих тачака једне хоризонталне основице од $100\ m$ дужине која пролази кроз подножје брда? (чл. 352, 2).

29. Над местом A налази се ваздушна лопта S; у хоризонталној равни кроз A измерена је основица $BC = m$ и углови $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$ и $ABS = \delta$. Израчунај висину балона над A.

30. Израчунај висину неког брда, кад основица AB — која пролази кроз његово подножје — није хоризонтална. Зна се основица $AB = m$, угао γ између основице и хоризонталне равни, и углови α и β визирних линија из A и B ка врху према хоризонталној равни.

$$h = m\,\frac{\sin(\beta - \gamma)\sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)\cos\gamma}\,.$$

31. Изра́зи средње линије у троуглу странама његовим.

Ако је t_a средња линија која одговара страни a, онда она дели троугао на два дела. Примењујући косинусну теорему добијамо две једначине, а из њих

$$t_a{}^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\,.$$

32. Угаоне симетрале у троуглу изра́зи његовим странама.

Површина целог троугла једнака је са збиром она три троугла, на која је дати троугао подељен угаоним симетралама. За симетралу угла α добија се:

$$\frac{2\sqrt{bcs\,(s - a)}}{b + c}\,.$$

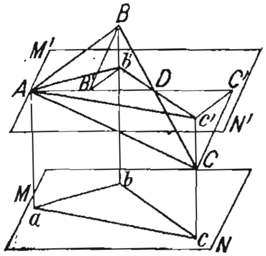
359. Стереометријско-тригонометријски задаци.

1. Дуж од 3·48 m нагнута је према некој равни под углом од 56° 35'; израчунај њену пројекцију на равни.

2. Колика је пројекција равностраног троугла чија једна страна $a = 0·47\ m$ лежи у пројекцијској равни, а сâм је троугао према пројекц. равни нагнут под углом од 42° 30'?

3. Дат је троугао D и његов нагибни угао α према равни MN; одреди пројекцију d тог троугла на равни.

Упутство. Нека је ABC дати троугао D (сл. 177). Увек се може кроз једно његово теме A поставити раван $M'N' \parallel MN$, која сече троугао ABC по правој AD. Тада је пројекција $A\,b'\,c'$ троугла ABC на равни $M'N'$ очевидно подударна с његовом пројекцијом abc на равни MN. Права AD дели како троугао ABC на троугле ADB и ADC тако и његову пројекцију $A\,b'\,c'$ на троугле ADb' и ADc'.



Сл. 177.

Ако се повуче $BB' \perp AD$ и веже B' са b', онда је угао $BB'\,b' = \alpha$; одреди $Ab'\,D$ и $Ac'\,D$, и покажи да је $d = D \cos \alpha$.

4. Дат је многоугао P и његов нагибни угао α према некој равни MN; одреди пројекцију тог полигона у равни MN.

$$p = P \cos \alpha.$$

Излази из зад. 3., кад се полигон дијагоналама подели на троугле.

5. Ако су s и s' две бочне ивице једне пирамиде, а α и β њихови нагибни углови према основици, онда је $s : s' = \sin \beta : \sin \alpha$.

6. Израчунај угао двеју страна *a)* тетраедра, *b)* октаедра.

7. У правилне, тростране пирамиде једна је страна n-пута већа од основе; израчунај нагибни угао једне стране према основи.

8. Израчунај нагибни угао коцкине дијагонале према једној страни.

9. Израчунај угао под којим се секу коцкине дијагонале.

10. Ако су α, β, γ углови између дијагонале правоугла паралелопипеда и његових ивица, које се с том дијагоналом секу у једном темену, онда је $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

11. У праве, тростране призме, чија је висина h, основа је равностран троугао са страном a. Кроз једну основну ивицу и супротно теме друге основе постављена је раван; израчунај њен нагибни угао према основи. Колики је тај угао у праве, равноивичне призме?

12. Изрáзи тригонометријски полупречник лопте, уписане у правилном полиедру, полупречником ϱ једној полиедарској страни уписаног круга и нагибним углом φ двеју полиедарских страна.

13. Реши и задатке 16 и 17 у чл. 264, као и задатак 13.

14. Правој зарубљеној купи *(R, r)* уписана је лопта; израчунај њен полупречник и нагибни угао једне стране према основама.

15. Осовина у косе купе (полупречник r) нагнута је према основи под 40°. Израчунај карактеристични и равнокраки осни пресек, ако је оса у купе једнака с пречником њене основе.

16. Правоугли осни пресек косе облице већи је од карактеристичног пресека њена *a)* $\sqrt{2}$ пута, *b)* три пута. Одреди нагибни угао њене осе према основи.

17. Израчунај дужину једног степена на београдском упореднику (геогр. шир. 44° 50' 15''); колика је брзина једне тачке на том упореднику услед дневног обртања Земље? (земљин полупречник 6378 km),

18. Две се тачке налазе на истом упореднику и имају ширину φ, а њихова се времена разликују за 3 часа; колики је лу̂к тог упоредника између тих тачака?

19. Колика је дужина лука на Земљи *a)* у степенима, *b)* у километрима, који се може сагледати са висине од 2000 m?

20. Даноме исечку једне лопте уписана је лопта. Израчунај полупречник уписане лопте, ако је угао у осном пресеку исечка *a)* 60°, *b)* 40°, а полупречник дане лопте 0·385 m.

21. Израчунај површину и запремину прâва, призматична стуба, коме је основа правилан n-угао, основна ивица a, бочна ивица s?

Пример $n = 8$, $a = 0·947$ m, $s = 2·624\ m$.

22. Основа једној призми је троугао чији су углови α, β и γ; R је полупречник круга описаног око тог троугла, а бочне ивице у призме имају дужину s и нагнуте су према основи под углом φ. Колика је запремина те призме? $v = 2\,s\,R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \varphi$.

23. Кроз једну основну ивицу a правилне, тростране призме постављена је раван под углом φ према основи. Израчунај запремину v одсечене пирамиде.

$$a = 0·875\ m,\ \varphi = 56^0\ 24'.$$

24. Ако је у претходном задатку познато v и φ, одреди пресек.

25. Дате су стране једног троугла, 14 m, 15 m и 15 m.; тај је троугао основа једној косој призми чије бочне ивице имају по 18·5 m, а нагнуте су према основи под углом од 70°. Израчунај запремину тој призми уписане и описане облице.

26. Два су угла у основи једне тростране призме α и β, а запремина је њена v. Израчунај запремину описане облице.

27. Дата је запремина v праве пирамиде с квадратном основом и нагибни угао α бочне ивице према основи; одреди *a)* основну ивицу, *b)* бочну ивицу.

28. У једне тростране пирамиде је свака бочна ивица 40 *cm*, а од основе знају се две њене стране 23 *cm* и 12 *cm* са захваћеним углом $74^0\ 52'\ 42''$; колика је запремина те пирамиде?

29. У правилне, n-стране пирамиде основна је ивица a, бочна ивица s; колика је *a)* површина, *b)* запремина?

30. У једне правилне, десетостране пирамиде је свака бочна ивица $s = 132$ *cm*, а нагнута је према основи под углом $\alpha = 35^0\ 15'$; колика је запремина те пирамиде? $v = \frac{5}{6}\ s^3 \sin\ 2\ \alpha \cos\alpha\ \sin\ 36^0$.

31. Израчунај површину и запремину правилне, n-стране пирамиде, кад јој је основна ивица a, а висина два пута већа од полупречника круга који је око основе описан.

32. Позната је запремина v правилне пирамиде чија је основа n-страни полигон са страном a; колики је нагибни угао бочне ивице према основи?

33. У праве, тростране пирамиде основне су ивице 10, 17, 21, а запремина је 224. Израчунај бочну ивицу и њен нагибни угао према основи.

34. У правилне зарубљене пирамиде већа је основа осмоугао са страном a, пројекција једне бочне ивице на већој основи је p, а њен нагибни угао α; израчунај *a)* површину *b)* запремину те зарубљене пирамиде.

35. Колика је површина и запремина праве купе, кад је њена страна s нагнута према основи под углом φ?

36. Запремина праве купе је V, а стране су јој нагнуте према основи под углом α; колики је омотач?

$$M = \sqrt[3]{\left(\frac{3\ V}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{\pi}{\cos\alpha}}\ .$$

37. Израчунај омотач и запремину праве купе, кад се зна полупречник r њене основе и угао α на темену осног пресека.

38. У једне косе купе оса је a нагнута према основи под углом α, а полупречник у основе нека је r; колика је висина, запремина, најмања и највећа страна те купе? $r = 4\ dm$, $a = 7\ dm$, $\alpha = 70^0$.

39. У једне косе купе α је најмањи нагибни угао једне стране према основи, h је висина, а p пројекција купине осе на основи; израчунај запремину.

40. Колика је запремина косе купе, кад је њена најмања страна $b = 15\ dm$ нагнута према основи под углом $\alpha = 74^0\ 36'$, највећа страна нагнута под углом $\beta = 36^0\ 48'$, а висина лежи између најмање и највеће стране?

$$v = \frac{b^3\pi}{12}\ \frac{\sin\alpha\ \sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}\ .$$

41. Израчунај површину и запремину праве двојне купе, кад се знају нагибни углови α и β њених страна према основи и полупречник r те основе.

$$r = 0{\cdot}675\ m,\ \alpha = 68^0\ 54',\ \beta = 53^0\ 48'.$$

42. Реши задатак 42, кад су обе купе на једној страни заједничке основе.

43. Правој купи (r, h) уписана је и описана је правилна n-страна пирамида. Израчунај површине и запремине тих пирамида.

44. Израчунај површину и запремину праве купе, кад је позната периферија p њене основе и угао α на темену њена осна пресека.

45. Права купа описана је око лопте чија је запремина v; у једном осном пресеку те купе на темену је угао α. Нађи омотач и запремину те купе.

46. Израчунај запремину праве зарубљене купе, кад се зна страна s, њен нагибни угао α према основи и омотач m.

$$v = \frac{\pi s}{4} \cdot \sin\ \alpha\ \cdot \left(\frac{m^2}{s^2\pi^2} + \frac{s^2}{3}\cos^2\ \alpha\right)$$

47. Колика је запремина праве зарубљене купе, кад је њен омотач $194{\cdot}35\ \mathrm{cm}^2$, страна $7{\cdot}9$ cm, нагибни угао стране према основи $84^0\ 28'\ 30''$?

48. Омотач праве, зарубљене купе, чија је страна 1 m, једнак је с површином веће основе, а нагибни је угао стране према основи *a)* 60^0, *b)* 45^0, *c)* 30^0; колики су полупречници, а колики је омотач?

49. У праве зарубљене купе нека су R и r полупречници обе основе, а v запремина; колики је *a)* нагибни угао α стране према основи, *b)* омотач m, а колика је страна s?

$$\mathrm{tang}\ \alpha = \frac{3\,v}{\pi\,(R^3 - r^3)},\quad s = \frac{R - r}{\cos\alpha},\quad m = \frac{\pi\,(R^2 - r^2)}{\cos\alpha}\ .$$

50. Колики је омотач праве зарубљење купе, кад су стране нагнуте према основи под углом α, а разлика обе основе $= d$.

51. Нека су у праве зарубљене купе R и r полупречници обе основе, а α нагибни угао једне стране према основи. Израчунај полупречник оне лопте, чија је површина једнака с омотачем зарубљене купе. $R = 45$ cm, $r = 34$ cm, $\alpha = 50^0$.

52. У косе је облице оса a нагнута под углом α према основи чији је полупречник r; израчунај *a)* површину осног пресека, који је нормалан према основи, *b)* запремину облице.

53. Колика је површина, а колика запремина обртног тела, које постаје, кад се правилан осмоугао са страном a обрће око једне своје угаоне симетрале?

54. Троугао, у којем стране a и b захватају угао γ, обрће се око треће стране која није дата; колика је запремина обртног тела? $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 80^0$.

55. Троугао са страном $b = 5$ dm и налеглим угловима $\alpha = 54^0\ 36'$, $\gamma = 74^0\ 54'$ обрће се око стране b; колика је површина и запремина обртног тела?

$$p = \frac{2\pi b^2}{\sin^2\beta} \sin\alpha \sin\gamma \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\, ;\ v = \frac{b^3\pi}{3}\left(\frac{\sin\ \alpha\ \sin\ \gamma}{\sin\ \beta}\right)^2 .$$

56. Троугао са страном b и налеглим угловима α и γ обрће се око једне праве, повучене кроз B паралелно са b; израчунај запремину обртног тела.

57. Правоугли троугао обрће се око катете a; колика је површина обртног тела, кад је познат производ хипотенузе и катете m, и угао α?

58. Троугао са страном a и налеглим угловима β и γ обрће се око стране c. Израчунај површину и запремину обртног тела.

59. Позната је површина p једне лопте и једна њена калота m; одреди средишни угао α оног лука, који својим обртањем производи калоту.

60. Кружни исесак са средишним углом $2\ \alpha$ и полупречником r обрће се око једног свог граничног полупречника. Израчунај површину обртног тела.

61. Израчунај полупречник r једне лопте, кад се зна запремина v једног њеног исечка и угао α у осном пресеку његову.

62. Лопти, чија је површина $p = 50$ dm^2. ваља уписати праву купу у чијем се осном пресеку на врху налази угао $\alpha = 34^0\ 18'\ 36''$; колика је запремина те купе?

$$v = \frac{2\ \pi}{3}\ r^3 \left(\ \sin\ \alpha\ \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 .$$

63. Оса a једне косе купе нагнута је под углом α према основи чији је полупречник r; колики је полупречник лопте, описане око те купе? $r = 3$ dm, $a = 5$ dm, $\alpha = 70^0$.

64. Кружни исечак, чији је средишни угао α а полупрочник r, обрће се око пречника који је паралелан с тетивом његова лука; колика је површина и запремина обртног тела?

$$p = 2\ r^2\pi\left(2\ \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right),\quad v = \frac{4\ r^3\pi}{3}\ \sin\ \frac{\alpha}{2} .$$

65. Дати су полупречници R и r веће и мање основе праве зарубљене купе и нагибни угао α њених страна према основама; одреди висину лоптине калоте, чија је површина једнака с површином омотача зарубљене купе, а припада лопти којој је висина зарубљене купе полупречник.

66. Одреди омотач, запремину и нагибни угао стра́нâ према основама једној зарубљеној правој купи, описаној око дане лопте (r), кад њене основе стоје у размери 2 : 1.

67. Израчунај површину појаса, кад је познат полупречник Земље и географске ширине граничних кругова.

68. Одреди висину и површину *a)* жарког појаса, *b)* умереног појаса, *c)* хладног појаса на Земљи, кад је њен полупречник $r = 6378\ km$, а $\varphi = 23^0\ 27'$ раздаљина поларног круга од стожера, као и раздаљина обртника од полутара.

69. Кружни исечак обрће се око једног свог граничног полупречника. Колики мора бити средишни угао, да би *a)* добивена калота била једнака с омотачем купе, *b)* одсечак био једнак с купом?

70. Колики мора бити средишни угао у осном пресеку једног лоптиног исечка, да би укупна површина његова била једнака с највећим лоптиним кругом?

71. Кружни одсечак обрће се око пречника паралелна с његовом граничном тетивом. Израчунај запремину и површину обртног тела, ако луку тог одсечка одговара полупречник r и средишни угао $2\,\alpha$.

72. Кружни исечак с полупречником r и средишним углом $2\,\alpha$ обрће се око пречника, паралелна с тетивом која одговара луку тог исечка; израчунај разлику између запремине обртног тела и лопте.

73. У праве је купе висина h, а на врху њена осна пресека угао је $2\ \alpha$; израчунај запремину лоптина исечка, коме је купа један део.

74. У праве шупље купе полупречник је r, а угао на врху осна пресека је $2\ \alpha$. У ту купу метнута је лопта која се с омотачем додирује по периферији купине основе; колика је она калота те лопте која се налази у купи?

ЧЕТВРТИ ДЕО.

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

I. Сферни троугли.

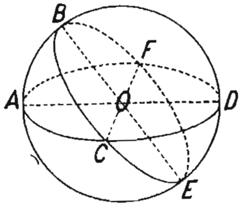
360. У чл. 260 налази се дефиниција сферног троугла.

Кад се стране сферног троугла (сл. 178) продуже тако да се добију цели кругови, онда ће лоптина површина бити подељена на 8 сферних троуглова, од којих се два и два зову *упоредни*, а два и два *унакрсни троугли*, према томе да ли имају једну заједничку страну или заједничко теме.

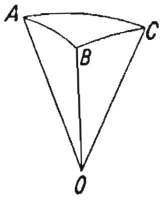
Кад су темена једног сферног троугла супротне тачке теменима другог сферног троугла, онда се такви троугли зову *супротни*, на пр. ABC и DEF.

Посматраћемо само такве сферне троугле, у којих су стране и углови мањи од 180°.

361. Нека је ABC (сл. 179) сферни троугао коме је свака страна мања од 180°, а O нека је лоптино средиште. Кад се повуку полупречници AO, BO и CO, па се кроз два и два поставе равни, онда постаје тространи рогаљ $OABC$; стране тога рогља, AOB, AOC и BOC мере се странама AB, AC и BC сферног троугла, а углови између стра́на̂ тога рогља исто су што и углови



Сл. 178.



Сл. 179.

сферног троугла. Према томе постоје између страна и углова сферног троугла исти односи као између страна и углова тространога рогља.

С погледом на чл. 228, 229 и 230. вреде, дакле, и за сферне троугле ове теореме:

1. *Свака страна сферног троугла већа је од разлике, а мања је од збира других двеју страна.*
2. *Збир све три стране мањи је од 360°.*
3. *Збир сва три угла већи је од 180° а мањи од 540°.*
4. *Наспрам једнаких углова леже једнаке стране.*
5. *Наспрам веће стране лежи већи угао.*
6. *Наспрам једнаких страна леже једнаки углови.*
7. *Наспрам већег угла лежи већа страна.*

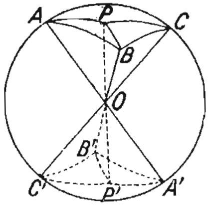
Сферни троугао зове се *равностран* кад су му све три стране једнаке, *равнокрак* кад су му две стране једнаке, *разностран* кад нема ни две једнаке стране.

У сферном троуглу могу бити (по тач. 3) два, па и три права угла. Сферни троугао, у коме ни један угао није прав, зове се *косоугли троугао*; ако ли се у њему налази један прав угао, онда се он зове *правоугли троугао*.

362. Кад су све стране и сви углови једног сферног троугла посебице једнаки са странама и угловима другог троугла, онда су ти троугли *подударни* или *симетрични*; то зависи од тога, да ли су им једнаки комади поређани у истом или у супротном смислу.

За подударност и симетрију сферних троуглова вреде сличне теореме као и за подударност и симетрију тространих рогљева (чл. 231).

363. *Два сферна супротна троугла имају једнаке површине.*



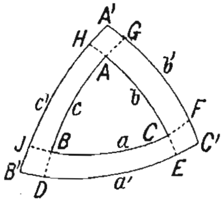
Сл. 180.

Доказ. Нека су ABC и $A'B'C'$ (сл. 180) два супротна троугла. Ако се опише круг кроз A, B и C, исто тако кроз A', B' и C', онда су ти кругови једнаки, јер су у исто доба описани око два подударна равна троугла, чије су стране тетиве странама оба сферна троугла. Ако су P и P' сферна средишта поменутих једнаких лоптиних кругова, онда су једнаке и сферне раздаљине PA, PB и PC, исто тако $P'A'$, $P'B'$ и $P'C'$ (чл. 256,d). Према томе су троугли PAB, PAC

и PBC, исто тако троугли $P'A'B'$, $P'A'C'$ и $P'B'C'$ равнокраки, па с тога прва три по реду подударна с друга три троугла. Тада и збирови тих троуглова, т.ј. троугли ABC и $A'B'C'$, имају једнаке површине.

364. Ако се око темéнâ сферна троугла, као око пóлова, опишу највећи кружни луци, онда постаје нов сферни троугао, који се зове поларни троугао првоме троуглу.

Ако је ABC (сл. 181) сферни троугао, па се начини $AD = AE = BF = BG = CH = CJ = 90^0$ и кроз тачке D и E, F и G, H и J опишу највећи кружни луци $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$, онда је $A'B'C'$ поларни троугао сферном троуглу ABC, а овај је опет поларни троугао троуглу $A'B'C'$, јер је $AC' = BC' = 90^0$, дакле AB један највећи кружни лук коме је пол C' итд.



Сл. 181.

Теореме. 1. Кад су два сферна троугла узајамно поларна, онда су узајамно поларни и тространи рогљеви којима они припадају.

Јер, кад се повуку лоптини полупречници к теменима оба сферна троугла, онда су ти полупречници ивице у два тространа рогља којима припадају сферни троугли. Сваки полупречник једног троугла стоји нормално на два полупречника другог троугла, јер су стране једнога за 90^0 удаљене од темéнâ другога троугла; према томе је такав један полупречник нормалан и на равни постављеној кроз она друга два полупречника; дакле је свака ивица једног тространог рогља нормална на једној страни другога, т.ј. рогљеви су узајамно поларни.

2. У два сферна поларна троугла стране једнога суплементи су угловима другога троугла.

Ако су A, B, C углови, a, b и c супротне им стране у сферном троуглу ABC; а A', B' и C' углови, a', b' и c' стране у поларном троуглу $A'B'C'$, онда је

$$a + A' = 2R, \qquad b + B' = 2R, \qquad c + C' = 2R,$$
$$a' + A = 2R, \qquad b' + B = 2R, \qquad c' + C = 2R.$$

Излази из чл. 226, b, а може се читати и непосредно из слике 181.

Површина сферног двоугла и сферног троугла.

365. Теорема. Површина сферног двоугла налази се, кад се површина највећег лоптиног круга помножи размером сферног угла према 90^0.

Ако је p површина сферног двоугла, а m^0 његов сферни угао, онда је $p : 4r^2\pi = m^0 : 360^0$, дакле

$$p = r^2\pi \cdot \frac{m^0}{90^0}.$$

366. Нека су, A, B, C углови сферног тоугла ABC (сл. 178) дати у степенима, p површина тог троугла, а r лоптин полупречник.

Сферни троугли ABC и BCD чине двоугао $ACDBA$, па је с тога по чл. 365.

$$ABC + BCD = r^2\pi \cdot \frac{A}{90^0}\text{; исто тако је}$$

$$ABC + ACE = r^2\pi \cdot \frac{B}{90^0},$$

а како је $DEC = ABF$ (чл. 363), то је и

$$ABC + DEC = r^2\pi \cdot \frac{C}{90^0},$$

Сабирањем налазимо:

$$2\,ABC + (ABC + BCD + DEC) = r^2\pi \cdot \frac{A+B+C}{90^0}, \text{ или}$$

$$2p + 2r^2\pi = r^2\pi \cdot \frac{A+B+C}{90^0}, \text{ дакле}$$

$$p = r^2\pi \cdot \frac{A + B + C - 180^0}{180^0} = \frac{r^2\pi e}{180^0}$$

где e значи увек позитивну разлику $A + B + C - 180^0$ која се зове сферни ексцес или сферни сувишак троугла ABC.

Површину сферног троугла израчунао је прво Жирарди 1629; потпунији доказ саопштио је Каваљери 1632.

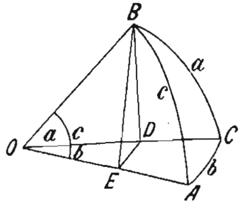
II. Решавање сферних троуглова.

1. Правоугли сферни троугли.

367. У сферном троуглу може бити један, два или и три права угла. Ако су сва три угла права, онда су све три стране квадранти; ако су два угла права, онда су и њима супротне стране квадранти, а трећа страна мора имати исто толико степена колико и трећи угао. У та два случаја не може, дакле, бити никаква задатка, с тога ваља посматрати само таке сферне троугле у којима је само један угао прав.

368. Теореме о правоуглом сферном троуглу.

Нека је ABC (сл. 182) правоугли сферни троугао с правим углом код C, O нека је средиште лопте на чијој се површини налази троугао; c је хипотенуза, a и b су катете. Претпоставићемо да су стране и углови у троуглу мањи од 90°, осим C.



Сл. 182.

Ако се повуче $BD \perp OC$, $BE \perp OA$ и веже E са D, онда је (чл. 209, 2) $BD \perp AOC$, дакле DE пројекција праве BE на равни AOC и (чл. 221.) $OA \perp ED$. С тога је $\sphericalangle BED = A$. Стави ли се лоптин полупречник $= 1$, онда је $OE = \cos c$, $BE = \sin c$, $OD = \cos a$, $BD = \sin a$.

У $\triangle OED$ је $OE = OD \cos b$, с тога $\cos c = \cos a \cos b$. 1)

Из $\triangle EBD$ излази:

$$\sin A = \frac{BD}{BE} = \frac{\sin a}{\sin c},\ \text{или } \sin a = \sin A \sin c \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ 2)$$

$$\cos A = \frac{ED}{BE} = \frac{OE \operatorname{tang} b}{OE \operatorname{tang} c} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}\ \text{или } \operatorname{tang} b = \cos A \operatorname{tg} c \ 3)$$

$$\operatorname{tang} A = \frac{BD}{ED} = \frac{OD \operatorname{tang} a}{OD \sin b} = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b} \Big\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \ 4)$$

Ова се једначина може извести и из 2) и 3), дељењем.

По 4) је

$\operatorname{tang} A = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$, и слично томе

$\operatorname{tang} B = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\sin a}$; с тога

$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = \dfrac{1}{\cos a \cos b} = \dfrac{1}{\cos c}$; дакле

$\cos c = \cot A . \cot B \ldots\ldots\ldots$ 5)

Даље је

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c} = \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\cos c}{\sin c} = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos c}{\cos b} =$$

$\sin B \cos a$ (По 1. и 2.) .... 6)

Кад у ових шест једначина катете a и b заменимо њиховим комплементима a' и b', добићемо:

$\cos c = \sin a' \sin b'$.
$\cos a' = \sin A \sin c$.
$\cot b' = \cos A \operatorname{tang} c$; или $\cos A = \cot b' \cot c$;

$\cot b' = \operatorname{tang} B \cos a'$; или $\cos a' = \cot b' \cot B$; (једначина 4 примењена на B).

$\cos c = \cot A \cot B$;

$\cos A = \sin B \sin a'$.

Ови се обрасци могу запамтити по овом правилу које је поставио Napier:

B a'
c b'
A

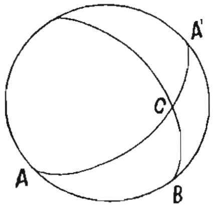
Изостави прав угао, па остале углове и стране напиши редом по обиму једног круга, замењујући при том катете комплементима. Тада је косинус којег било комада једнак с производом синуса два супротна му, или с производом котангената два оближња му комада.

Ти обрасци вреде без икаква ограничења за све правоугле троугле, као што се може показати супституцијом на упоредним и унакрсним троуглима.

Нека су на пр. у правоуглом сферном троуглу ABC (слика 183) хипотенуза c и катета b веће од 90°, тада су у упоредном троуглу $A'BC$ њихове допуне $2R - c$ и $2R - b$ мање од 90°; с тога имамо у том троуглу:

$$\cos (2R - c) = \cos a \cos (2R - b) \text{ или}$$
$$\cos c = \cos a \cos b$$

према томе образац 1 вреди и за троугао ABC; итд.



Сл. 183.

Последица. У једначини $\cos A = \cos a \sin B$ (6) увек је $\sin B$ позитиван, с тога морају $\cos A$ и $\cos a$ имати увек једнаке знаке, тј.

Катета и супротни јој угао у правоуглом сферном троуглу у исто доба су мањи или већи од 90°.

Кад је лоптин полупречник бескрајно велики, онда се сферни троугао претвара у раван, ако му стране имају мале димензије. Тада се синуси и тангенте стра́на̂ могу заменити самим странама. Које теореме у равној геометрији одговарају једначинама $\sin b = \sin c \sin B$, $\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} c \cos A$, $\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} B \sin a$?

Случајеви при решавању.

369. Правоугли сферни троугао одређен је, кад су поред правог угла позната још два комада. Има шест случајева за решавање.

I. Дате обе катете a и b.

Из $\cos c = \sin a' \ \sin b'$, $\cos b' = \cot a' \cot A$, $\cos a' = \cot B . \cot b'$ добија се

$$\cos c = \cos a \cos b ; \ \mathrm{tang}\, A = \frac{\mathrm{tang}\, a}{\sin b} ; \quad \mathrm{tang}\, B = \frac{\mathrm{tang}\, b}{\sin a} .$$

Нека је на пр. $a = 27^0\ 28'\ 36''$, $b = 51^0\ 12'\ 8''$. Тада је

$$\begin{array}{l} \log\ \cos\ a = 9{\cdot}94802 \\ \log\ \cos\ b = 9{\cdot}79697 \\ \hline \log\ \cos\ c = 9{\cdot}74499 \\ \qquad\quad c = 56^0\ 13'\ 40'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log\ \mathrm{tang}\ a = 9{\cdot}71\ 605 \\ \log\ \ \sin\ b = 9{\cdot}89\ 175 \\ \hline \log\ \mathrm{tang}\ A = 9{\cdot}82\ 431 \\ \qquad\quad A = 33^0\ 42'\ 52'' \end{array} \qquad \begin{array}{l} \log\ \mathrm{tang}\ b = 10{\cdot}09\ 477 \\ \log\ \ \sin\ a = \ \ 9{\cdot}66\ 406 \\ \hline \log \mathrm{tang}\ B = 10{\cdot}43\ 071 \\ \qquad\quad B = 69^0\ 38'\ 56''. \end{array}$$

Каква се вредност добија за хипотенузу, кад су *a)* обе катете мање, *b)* обе веће од једног квадранта, *c)* кад је једна већа а друга мања од једног квадранта?

II. Дата хипотенуза c и једна катета a.

Из $\cos = \sin b' \sin a'$, $\cos a' = \sin c \sin A$, $\cos B = \cot c \ \cot a'$ излази

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a} , \ \sin A = \frac{\sin a}{\sin c} , \ \cos B = \frac{\mathrm{tang}\, a}{\mathrm{tang}\, c} .$$

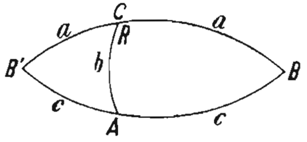
И ако синусу A одговарају у опште два угла, један оштар и један туп, ипак овде отпада свака сумња, јер се мора узети $A \gtrless 90^0$, према томе да ли је $a \gtrless 90^0$.

III. Дата једна катета b и супротни јој угао B. (двозначан).

Из $\cos b' = \sin c \sin B$, $\cos a' = \cot b' \cot B$, $\cos B = \sin b' \sin A$ излази

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin B} , \ \sin a = \frac{\mathrm{tang}\, b}{\mathrm{tang}\, B} , \ \sin A = \frac{\cos\ B}{\cos\ b} .$$

Детерминација. b и B могу бити једнаки или различни. Ако је $b = B$, онда је $c = 90^0$, $a = A = 90^0$.



Сл. 184.

Ако су b и B различни, онда мора и једно и друго у исто доба бити веће или мање од 90^0, јер $\sin a$ мора увек бити позитивно; ако је и b и $B < 90^0$, онда мора бити $b < B$, ако је и b и $B < 90^0$, онда мора бити $b > B$, јер је $\sin\ a < 1$. Како се за c, a и A добивају две вредности, то је задатак двозначан (сл. 184).

IV. Дата једна катета b и налегли јој оштри угао A.

Из $\cos\ A = \cot\ b'\ \cot\ c$, $\cos\ b' = \cot\ A\ \cot\ a'$ $\cos\ B = \sin\ b'\ \sin\ A$ излази

$$\mathrm{tang}\ c = \frac{\mathrm{tang}\, b}{\cos\ A} ; \ \mathrm{tang}\, a = \sin b\ \mathrm{tang}\ A ; \ \cos\ B = \cos\ b\ \sin\ A .$$

V. Дата хипотенуза c и један налегли јој угао B.

Из $\cos b' = \sin c \sin B$, $\cos B = \cot a' \cot c$, $\cos c = \cot B \cot A$ излази

$$\sin b = \sin c\ \sin B , \ \mathrm{tang}\ a = \mathrm{tang}\ c\ \cos B , \ \cot\ A = \cos c\ \mathrm{tang}\ B .$$

Овде је страна b несумњиво одуђена својим синусом, јер се мора узети $b \gtrless 90^0$, према томе да ли је $B \gtrless 90^0$.

VI. Дата оба коса угла A и B.

Из $\cos c = \cot A \cot B$, $\cos B = \sin b' \sin A$, $\cos A = \sin a' \sin B$ излази

$$\cos c = \cot\ A\ \cot\ B ; \ \cos b = \frac{\cos B}{\sin A} ; \ \cos\ a = \frac{\cos A}{\sin B} .$$

Детерминација: $450^0 > A + B > 90^0$ и $B - A < 90^0$ ако је $B > A$ (чл. 229 и чл. 232, зад. 32 33).

Ако је у каквом сферном троуглу једна страна 90^0, онда се он зове **квадрантни троугао**. Такав је троугао поларан једном правоуглом сферном троуглу. С тога се решавање квадрантног троугла може свести на правоугли сферни троугао.

Задатак.

Постави основне једначине за квадрантни троугао.

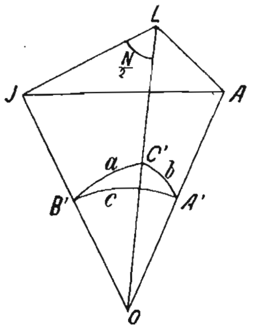
370. Примери за решавање правоуглог сферног троугла.

	Дато	Израчунато
1.	$a = 36^0\ 27'$, $b = 43^0\ 32'\ 31''$	$c = 54^0\ 20'$ $A = 46^0\ 59'\ 45''$, $B = 57^0\ 59'\ 17''$.
2.	$c = 106^0\, 3'\, 32''$, $a = 127^0\, 56'\, 33''$	$b = 63^0\ 15'\ 48''$. $A = 124^0\ 51'$, $B = 68^0\ 20'$.
3.	$b = 46^0\, 38'\, 45''$, $B = 48^0\, 26'\, 30''$.	$\begin{cases} a_1 = 69^0\ 53'\ 10''\ \ c_1 = 76^0\ 20'\ 45''\ \ A_1 = 75^0\ 5'. \\ a_2 = 110^0\ 6'\ 50'',\ c_2 = 103^0\ 39'\ 15''\ A_2 = 104^0\ 55' \end{cases}$
4.	$b = 65^0\, 46'\, 53''$, $A = 83^0\, 48'\, 12''$	$a = 83^0\ 12'\ 38''$, $c = 87^0\ 13'\ 13''$, $B = 65^0\ 55'\ 55''$
5.	$c = 80^0\ 6'\ 5''$, $B = 33^0\ 13'\ 56''$	$a = 78^0\ 12'\ 57''$, $b = 32^0\ 40'\ 30''$, $A = 83^0\, 34'\, 26''$.
6.	$A = 38^0\, 15'\, 44''$, $B = 70^0\, 36'\, 30''$	$c = 63^0\ 29'\ 35''$, $a = 33^0\ 39'\ 15'$, $b = 57^0\ 34'\ 37''$.

371. Израчунавање правилних полиедара. Правилан полиедар нека је ограничен *са* p страна, свака страна нека је m-страни полигон, у сваком рогљу нека се стичу n полигонских страна, а s нека је дужина једне ивице.

Нађи (сл. 138 и 185).

a) половину нагибног угла $JLO = \frac{N}{2}$ између двеју страна које се секу у једној ивици;



Сл. 185.

b) полупречник $OJ = r$ полиедру уписане лопте;

c) полупречник $OA = R$ полиедру описане лопте.

d) површину P; и

e) запремину v полиедра.

Тространом рогљу $OJLA$ одговара сферни троугао $A'B'C'$ у којем се код C' налази прав угао. У том је троуглу угао $B' = \sphericalangle LJA = \frac{2R}{m}$, а угао $A' = \frac{2R}{n}$, јер се у OA секу $2n$ равнина под једнаким угловима.

С тога је

$$\cos b = \frac{\cos B'}{\sin A'} = \frac{\cos\frac{2R}{m}}{\sin\frac{2R}{n}}, \cos a = \frac{\cos A'}{\sin B'} = \frac{\cos\frac{2R}{n}}{\sin\frac{2R}{m}}.$$

Како су $\frac{N}{2}$ и a комплементи, то је

$$\sin\frac{N}{2} = \cos a = \frac{\cos\frac{2R}{n}}{\sin\frac{2R}{m}}.$$

Из троугла JOL добија се:

$$r = JL \operatorname{tang}\frac{N}{2} = \frac{s}{2}\cot\frac{2R}{m}\operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

Из троугла JOA добија се:

$$r = R\cos c = R\cdot\cot A'\cdot\cot B' = R\cot\frac{2R}{n}\cot\frac{2R}{m};$$ с тога

$$R = \frac{r}{\cot\frac{2R}{n}\cot\frac{2R}{m}} = \frac{\frac{s}{2}\cot\frac{2R}{m}\operatorname{tang}\frac{N}{2}}{\cot\frac{2R}{n}\cdot\cot\frac{2R}{m}} = \frac{s}{2}\operatorname{tang}\frac{2R}{m}\operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

Површина је $P = \frac{pms^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{m}$.

Запремина је по чл. 280, 2.:

$$V = \frac{mps^3}{24}\cot^2\frac{2R}{m}\operatorname{tang}\frac{N}{2}.$$

Задаци.

1. Одреди нагибни угао двеју страна правилног *a)* тетраедра, *b)* октаедра, *c)* додекаедра, *d)* икосаедра.

2. Одреди површину и запремину правилног додекаедра и икосаедра, кад је позната ивица s.

3. Позната је запремина једне лопте; одреди запремину уписаног и описаног правилног додекаедра.

4. Одреди размеру полупречника у правилном тетраедру уписано и око њега описане лопте.

2. Косоугли сферни троугли.

Теореме и обрасци о косоуглом сферном троуглу.

372. 1. Нека је ABC (сл. 186) косоугли сферни троугао, a, b, c његове стране, A, B, C углови наспрам тих страна.

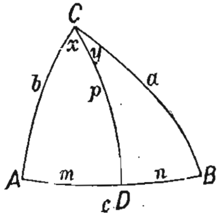
Ако се кроз C повуче највећи кружни лук $CD \perp AB$, па лукови AD, BD и CD обележе словима m, n и p, онда је у правоуглим троуглима BDC и ADC

$\cos p' = \sin a \sin B$, и

$\cos p' = \sin b \sin A$; с тога

$\sin a \sin B = \sin b \sin A$, или

$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$



Сл. 186.

Слично обрасцу

$$\left.\begin{array}{l}\sin a \sin B = \sin b \sin A\\ \text{добија се}\\ \sin a \sin C = \sin c \sin A\\ \sin b \sin C = \sin c \sin B\end{array}\right\} \ldots\ldots \text{I)}$$

Једначине I) вреде и у случају, кад лук CD пада изван троугла ABC; тада се, као и горе, добија $\sin(180^\circ - A)$, $\sin(180^\circ - B)$ или $\sin(180^\circ - C)$, а те се функције своде на $\sin A$, $\sin B$ или $\sin C$.

Из истих једначина излази

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C;$$

т.ј. у сваком сферном троуглу стоје синуси страна у истој размери као синуси супротних углова (синусна теорема).

2. У правоуглом је троуглу BDC (сл. 187):

$$\cos a = \sin p' \sin n' = \cos p \cos n = \cos p \cos (c-m), \text{ или}$$
$$\cos a = \cos p \cos c \cos m + \cos p \sin c \sin m.$$

Али је $\cos p \cos m = \cos b$, а

$\operatorname{tang} m = \cos A \operatorname{tang} b$; множењем ових двеју једначина добија се $\cos p \sin m = \cos b \operatorname{tang} b \cos A = \sin b \cos A$.

С тим вредностима добијамо за $\cos a$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \\ \text{Слично томе је} \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C; \end{array}\right\} \cdots\cdots \text{II } a);$$

т.ј. у сваком је сферном троуглу косинус једне стране једнак с производом косинуса других двеју страна, више производ синуса тих страна и косинуса њима захваћеног угла. (Косинусна теорема за страну).

3. Поларни троугао троуглу ABC (сл. 187) има стране $2R-A$, $2R-B$, $2R-C$, а углове $2R-a$, $2R-b$, $2R-c$.

Ако се на тај троугао примене обрасци II) $a)$, добиће се

$$\cos (2R-A) = \cos (2R-B) \cdot \cos (2R-C) +$$
$$\sin (2R-B) \cdot \sin (2R-C) \cos (2R-a), \text{ или:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a; \\ \text{исто тако налази се} \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c; \end{array}\right\} \cdots\cdots \text{II } b).$$

т.ј. у сваком је сферном троуглу косинус једног угла једнак с негативним производом косинуса она друга два угла, више производ синуса тих углова и косинуса стране на којој они леже. (Косинусна теорема за угао).

Којем правилу Равне Тригонометрије одговара једначина

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C?$$

Кад се у обрасцу II $a)$ на место $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ стави $1 - 2\sin^2\frac{a}{2}$, $1 - 2\sin^2\frac{b}{2}$, $1 - 2\sin^2\frac{c}{2}$, онда се после некојих трансформација, а с погледом на то да треба ставити $\cos a = 1$, добија косинусно правило Равне Тригонометрије.

Које правило о равном троуглу добијамо из косинусне теореме за угао сферног троугла?

373. 1. Да би се из једначина II $a)$ добили обрасци. подесни за логаритамско рачунање, ваља наћи из прве једначине

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}, \text{ за тим}$$

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c},$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos (b+c)}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c) \sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2\frac{A}{1} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c) \sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c},$$

Ако још ставимо $a + b + c = 2\,s$, добићемо за полууглове:

$$\left.\begin{array}{r} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \text{отуд } \operatorname{tang}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin s \sin (s-c)}}. \end{array}\right\} \cdots\cdots \text{III } a).$$

Исто тако добивају се функције за $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$.

Која се правила Равне Тригонометрије добивају из образаца III $a)$?

2. Примењујући овако извођење на обрасце II $b)$ и стављајући $A + B + C = 2\,S$, добијамо за полустране:

$$\left.\begin{array}{r} \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}}, \\ \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \operatorname{tang}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}}. \end{array}\right\} \cdots\cdots \text{III } b).$$

Како је (члан 229) $3R > S > R$, то је $\cos S$ негативно; остали су чиниоци позитивни. Јер, за поларни је троугао (чл. 228) $2R-B+2R-C > 2R-A$, $\quad 2R > B+C-A$, $\quad R > S-A$ итд.

Обрасци III b могу се извести и применом образаца III a на поларни троугао.

Исто тако налазе се функције за $\frac{b}{2}$ и $\frac{c}{2}$.

374. Гаусове једначине.

Кад се у једначини

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ замене њиховим вредностима из III a), добиће се

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}(A+B)&=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\ \sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\ \sin c}}\\&+\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-a)}{\sin b\ \sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\\&=\frac{\sin(s-b)+\sin(s-c)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\ \sin(s-c)}{\sin a\ \sin b}}\end{aligned}$$

$$=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{1}{2}(a-b)}{2\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\cos\frac{1}{2}C.$$

дакле

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C.$$

Исто тако налази се

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c&=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C,\\\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c&=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,\\\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}c&=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C,\end{aligned}\right\}\ \text{IV}).$$

Ако ове једначине напишемо у облику једнаких количника

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

онда из једне излазе све остале, кад се на једној страни написани знак, а на другој функциони знаци sin и cos промене.

Последица. Како су у једначини

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}c=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C$$

$\cos\frac{1}{2}c$ и $\sin\frac{1}{2}C$ навек позитивни, то морају $\cos\frac{1}{2}(A+B)$ и $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ имати увек једнаке знаке. Ако је, дакле, $a+b\lesseqgtr 180^\circ$, онда мора бити и $A+B\lesseqgtr 180^\circ$, и обрнуто.

375. Неперове аналогије (једначине).

1. Кад се четврта Гаусова једначина под IV) подели трећом, затим друга првом, добија се

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c\\\tan\frac{1}{2}(a-b)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\tan\frac{1}{2}c\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ \text{V}\ a)$$

2. Кад се подели прва Гаусова једначини трећом, и друга четвртом, добија се

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C\\\tan\frac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\frac{1}{2}C\end{aligned}\right\}\ \ldots\ \text{V}\ b).$$

Ради лакшег памћења једначи́нâ Va и Vb: кад се у једначинама Va мала слова замене великим, а велика малим, онда ваља и tang на десној страни заменити са cotg, те се тако добивају обрасци Vb.

Како се може из последње једначине извести тангентни образац Равне Тригонометрије?

Случајеви при решавању.

Из правила о подударности тространих рогљева излази, да је косоугли сферни троугао одређен кад се знају три комада његова. Отуд излазе шест случајева за решавање.

376. I. Дате две стране a и b и угао C који оне захватају.

Углови A и B налазе се по Неперовим једначинама V b). Трећа страна c може се тада најлакше израчунати по једној Гаусовој једначини под IV).

Ако је на пр. $a = 97^\circ\,30'\,20''$, $b = 55^\circ\,12'\,10''$, $C = 39^\circ\,58'$, онда је $\frac{1}{2}(a+b) = 76^\circ\,21'\,15''$, $\frac{1}{2}(a-b) = 21^\circ\,9'\,5''$, $\frac{C}{2} = 19^\circ\,59'$.

$$\begin{array}{rl@{\qquad}rl}
\log\cos\frac{1}{2}(a-b) = & 9{\cdot}96\ 971 & \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = & 9{\cdot}55\ 731 \\
\log\cot\frac{1}{2}C = & 10{\cdot}43\ 933 & \log\cot\frac{1}{2}C = & 10{\cdot}43\ 933 \\
\hline
 & 20{\cdot}40\ 904 & & 19{\cdot}99\ 664 \\
\log\cos\frac{1}{2}(a+b) = & 9{\cdot}37\ 276 & \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = & 9{\cdot}98\ 757 \\
\hline
\log\mathrm{tang}\frac{1}{2}(A+B) = & 11{\cdot}03\ 628 & \log\mathrm{tang}\frac{1}{2}(A-B) = & 10{\cdot}00\ 907 \\
\frac{1}{2}(A+B) = & 84^\circ\,44'\,40'' & \frac{1}{2}(A-B) = & 45^\circ\,35'\,54'' \\
\text{с тога}\quad A = & 130^\circ\,20'\,34'', & B = & 39^\circ\,8'\,46''.
\end{array}$$

Ради израчунавања стране c из једначина IV) имамо на пр.

$$\cos\frac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cdot\cos\frac{1}{2}C,$$

или

$$\sin\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\cos\frac{1}{2}C$$

па се добије по једном или другом обрасцу $c = 56^\circ\,40'\,20''$.

О тачности резултата увериһемо се примењујући више Гаусових једначина.

Додатак. Страну c можемо и независно од A и B израчунати непосредно из датих комада; тога ради узима се из једначина под II a) ова:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C,$$

која се мора, увођењем једног помоһног угла, удесити за логаритамски рачун овако:

$$\cos c = \cos a\ (\cos b + \sin b\ \mathrm{tang}\ a\ \cos C).$$

Ако се помоһни угао w одреди тако, да је $\mathrm{tang}\,w = \mathrm{tang}\,a\cos C$, онда је

$$\cos c = \cos a\ (\cos b + \sin b\ \mathrm{tang}\,w)$$

$$= \frac{\cos a}{\cos w}\ (\cos b\cos w + \sin b\sin w);\ \text{дакле}$$

$$\cos c = \frac{\cos a\ \cos(b-w)}{\cos w}.$$

377. II. Дата два угла A и B и страна c на којој они леже.

Стране a и b налазе се из Неперових једначина V a), а угао C из једне Гаусове једначине.

Додатак. Угао C може се и непосредно израчунати из датих комада помоһу једначине система II b).

$$\cos C = -\cos A\cos B + \sin A\sin B\cos c$$
$$= \cos A\ (-\cos B + \sin B\ \mathrm{tang}\,A\cos c)$$

Ако ставимо $\cot w = \mathrm{tang}\,A\cos c$, добиһемо

$$\cos C = \cos A\ (-\cos B + \sin B\cot w) =$$

$$\frac{\cos A}{\sin w}\ (-\cos B\sin w + \sin B\cos w),\ \text{дакле}$$

$$\cos C = \frac{\cos A\ \sin(B-w)}{\sin w}.$$

378. III. Дате су две стране a и b и угао A наспрам једне стране.

За угао B налази се из система I)

$$\sin B = \frac{\sin A\sin b}{\sin a}.$$

Вредност за $\sin B$ мора бити позитивна и мања од 1 или $= 1$. Ако је $\sin B = 1$, онда је $B = 90^\circ$ (што се слаже с једначином 2 у чл. 368.) Ако је $\sin B < 1$, онда се за B добивају две суплементне вредности. Да ли се обе вредности могу сматрати као решења, дознаје се овако: ако је $a \gtrless b$, онда мора бити и $A \gtrless B$; ако је $a + b \gtreqqless 180^\circ$, онда мора бити и $A + B \gtreqqless 180^\circ$, Може се десити, да задатак има једно решење или два.

Кад је одређено B, онда се за c и C добија из V a и V b:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B).$$

Нека је на пр. $a = 57^0\ 38'$, $b = 31^0\ 12'$, $A = 104^0\ 25'\ 30''$.

Добија се пре свега $B = 36^0\ 26'\ 23''$.

Суплеменат $B' = 143^0\ 33'\ 37''$ не може се употребити, јер мора бити $A > B$, пошто је $a > b$.

$$\begin{array}{ll}
a+b = 88^0\ 50' & \frac{1}{2}(a+b) = 44^0\ 25, \\
a-b = 26^0\ 26' & \frac{1}{2}(a-b) = 13^0\ 13' \\
A+B = 140^0\ 51'\ 53'' & \frac{1}{2}(A+B) = 70^0\ 25'\ 56{\cdot}5'' \\
A-B = 67^0\ 59'\ 7'' & \frac{1}{2}(A-B) = 33^0\ 59'\ 33{\cdot}5''
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
\log\sin\frac{1}{2}(A+B) = 9{\cdot}97\ 417 & \log\sin\frac{1}{2}(a+b) = 9{\cdot}84\ 502 \\
\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}37\ 080 & \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) = 9{\cdot}82\ 887 \\
\hline
19{\cdot}34\ 497 & 19{\cdot}67\ 389 \\
\log\sin\frac{1}{2}(A-B) = 9{\cdot}74\ 748 & \log\sin\frac{1}{2}(a-b) = 9{\cdot}35\ 914 \\
\hline
\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = 9{\cdot}59\ 749 & \log\cot\frac{1}{2}C = 10{\cdot}31\ 475 \\
\frac{1}{2}c = 21^0\ 35'\ 40'' & \frac{1}{2}C = 25^0\ 50'\ 52'' \\
c = 43^0\ 11'\ 20'' & C = 51^0\ 41'\ 44''.
\end{array}$$

379. IV. Дата су два угла A и B и страна a насрам једног угла.

За страну b имамо $\sin b = \dfrac{\sin a \sin B}{\sin A}$.

За c и C дају Неперове једначине V a) и V b)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}c = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\cot\frac{1}{2}C = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B).$$

Како се b одређује из $\sin b$, то се мора као у случају III испитати, да ли вреде обе вредности за b.

380. V. Дате су све три стране, a, b и c.

Углови се налазе по обрасцима III a) чл. 373.

На пр.

$$\begin{array}{rl}
a = & 50^0\ 54'\ 32'' \\
b = & 37^0\ 47'\ 18'' \\
c = & 74^0\ 51'\ 50'' \\
\hline
a+b+c = & 163^0\ 33'\ 40'' \\
s = & 81^0\ 46'\ 50'' \\
s-a = & 30^0\ 52'\ 18'' \\
s-b = & 43^0\ 59'\ 32'' \\
s-c = & 6^0\ 55'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\log\sin(s-b) = & 9{\cdot}84\ 171 \\
\log\sin(s-c) = & 9{\cdot}08\ 072 \\
\hline
 & 18{\cdot}92\ 243 \\
\log\sin s = & 9{\cdot}99\ 552 \\
\log\sin(s-a) = & 9{\cdot}71\ 021 \\
\hline
 & 19{\cdot}21\ 670 \\
\hline
\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}A = & 9{\cdot}60\ 835 \\
\frac{1}{2}A = & 22^0\ 5'\ 20'' \\
A = & 44^0\ 10'\ 40''.
\end{array}$$

Исто тако налази се $B = 33^0\ 22'\ 44''$ и $C = 119^0\ 55'\ 6.''$

Додатак. Ако треба израчунати сва три угла, онда је најбоље израчунати прво

$$\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = \operatorname{tang} r;$$

тада је

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{\operatorname{tang} r}{\sin(s-a)},\ \operatorname{tang}\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{tang} r}{\sin(s-b)},\ \operatorname{tang}\frac{C}{3} = \frac{\operatorname{tang} r}{\sin(s-c)}.$$

Како гласи детерминација? О значају $\operatorname{tang} r$ упореди чл. 383. зад. 11.

381. VI. Дата су сва три угла, A, B и C.

Стране се налазе по обрасцима III b) чл, 373.

Додатак. Ако треба израчунати све три стране, онда је најподеснија супституција

$$\sqrt{\frac{-\cos(S-A)\,\cos(S-B)\,\cos(S-C)}{\cos S}} = \cot R,$$

па се рачуна по обрасцима

$$\cot\frac{a}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S-A)},\ \cot\frac{b}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S-B)},\ \cot\frac{c}{2} = \frac{\cot R}{\cos(S-C)}\ .$$

Детерминација: чл. 229 и чл. 232, зад. 32. О значају $\cot R$ упореди чл. 383, зад. 12.

382. Одређивање површине сферног троугла. Кад су дати углови A, B и C сферног троугла, и полупречник r лопте на којој се налази тај троугао, онда је површина (чл. 366).

$$p = r^2\pi \cdot \frac{A+B+C-180^0}{180^0},$$

где $A+B+C-180^0 = e$ значи сферни сувишак.

Ако је на пр. $A = 55^0\ 52'\ 43''$
$B = 88^0\ 12'\ 20''$
$C = 59^0\ \ 4^0\ 25''$, онда је
$p = 0{\cdot}40418\cdots r^2$.

О израчунавању сферног сувишка, кад су дате све три стране, упореди чл. 383, зад. 10.

383. Задаци за вежбање.

Примери за решавање косоуглих сферних троуглова.

	Дато	Израчунато
a)	$a = 47^0\ 42'\ 1'$ $b = 63^0\ 15'\ 12''$ $C = 59^0\ \ 4'\ 25''$.	$B = 88^0\ 12'\ 24''$ $A = 55^0\ 52'\ 42''$ $c = 50^0\ \ 1'\ 56''$.
b)	$a = 99^0\ 28'\ 18''$ $B = 73^0\ 38'\ 28''$ $C = 65^0\ 31'\ 34''$.	$b = 78^0\ 35'\ 38''$ $c = 68^0\ 24'\ 22''$ $A = 105^0\ 5'\ 38''$.
c)	$a = 29^0\ 24'\ 36''$ $b = 27^0\ 49'\ 28''$ $A = 78^0\ 13'\ 15''$.	$B = 68^0\ 30'\ 53''$ $c = 17^0\ 48'\ 43''$ $C = 37^0\ 34'\ 52''$.
d)	$a = 41^0\ 48'\ 24''$ $b = 73^0\ 57'\ 16''$ $A = 22^0\ 39'\ 44''$.	$B_1 = 33^0 44' 35''$ $B_2 = 146^0 15' 25''$ $c_1 = 109^0 19' 30''$ $c_2 = 36^0\ 3'\ 8''$ $C_1 = 146^0 56' 47''$ $C_2 = 19^0 53' 12''$.
e)	$A = 78^0\ 24'\ 36''$ $B = 44^0\ 53'\ 18''$ $a = 21^0\ 36'\ 45''$.	$b = 15^0\ 23'\ 16''$ $c = 18^0\ 50'\ 36''$ $C = 59^0\ 12'\ 20''$
f)	$A = 36^0\ 24'\ 20''$ $B = 51^0\ 36'\ 35''$ $a = 40^0\ 15'\ 10''$.	$b_1 = 58^0\ 34'\ 37''$ $b_2 = 121^0 25' 23''$ $c_1 = 80^0\ 31'\ 48''$ $c_2 = 154^0 56'\ 8''$ $C_1 = 115^0\ 2'\ 25''$ $C_2 = 157^0\ 6'\ 6''$.
g)	$a = 63^0\ 14'\ 39''$ $b = 107^0\ 52'\ 24''$ $c = 125^0\ \ 5'\ 41''$.	$A = 69^0\ 25'\ 12''$ $B = 93^0\ 46'\ 26''$ $C = 120^0\ 55'\ 32''$.
h)	$A = 146^0\ 58'\ 20''$ $B = 24^0\ 54'\ 47''$ $C = 32^0\ 54'\ 28''$	$a = 109^0\ 39'\ 16''$ $b = 46^0\ 42'\ 16''$ $c = 69^0\ 50'$.

2. Образац за $\sin\frac{A}{2}$ чл. 373, 1. трансформовати у случају кад је сферни троугао равностран.

3. Реши равностран сферни троугао, коме је страна *a)* $70^0\ 25'$, *b)* $58^0\ 30'$.

4. Реши равностран сферни троугао кад му је угао *a)* $70^0 40'$, *b)* 120^0.

Докажи да вреде за сваки сферни троугао ове једначине:

5. $\sin b\ \cos A = \cos a\ \sin c - \sin a\ \cos c\ \cos B$.

6. $\sin B\ \cos a = \cos A\ \sin C + \sin A\ \cos C\ \cos b$.

Из система *II a)* и *II b)*, замењујући у првој једначини $\cos b$, односно $\cos B$, њиховим вредностима из друге једначине.

7. $\cot a\ \sin b = \cot A\ \sin C + \cos C\ \cos b$.

8. $\cot A\ \sin B = \cot a\ \sin c - \cos c\ \cos B$.

Из 6. и 5. замењујући $\sin B$ и $\sin b$ вредностима $\frac{\sin A \sin b}{\sin a}$ и $\frac{\sin a \sin B}{\sin A}$.

$$9.\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)}\ .$$

Из Наперових једначина у *V a)*.

10. Сферни сувишак косоуглог троугла изразити странама.

$e = (A + B) - (180^0 - C)$, с тога

$\frac{e}{4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (A + B) - \left(90^0 - \frac{C}{2}\right) \right\}$, даље по чл. 326, 38, чл. 374, IV и 373, 1.

$$\operatorname{tang} \frac{e}{4} = \frac{\sin \frac{1}{2} (s - b) \sin \frac{1}{2} (s - a)}{\cos \frac{s}{2} \cos \frac{1}{2} (s - c)} \sqrt{\frac{\sin s \sin (s - c)}{\sin (s - a) \sin (s - b)}},$$

$$\text{или } \operatorname{tang} \frac{e}{4} = \sqrt{\operatorname{tang} \frac{s}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (s - a) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (s - b) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (s - c)}.$$

овај се израз зове L'Huilier-ов образац.

11. Израчунати полупречник круга, уписанога у сферном троуглу,

Кад се кроз темена сферног троугла повуку главни кругови који полове углове сферног троугла, онда се они секу у једној тачки која је средиште уписанога круга. Његов је полупречник сферна раздаљина средишта од једне стране. Теме A, додирна тачка на страни AB и средиште уписаног круга одређују правоугли сферни троугао у коме је једна катета $s - a$. Из тог троугла добија се

$$\operatorname{tang} r = \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}{\sin s}}.$$

Како се из ове једначине изводи образац за раван троугао?

12. Израчунати полупречник круга, описаног око сферног троугла.

Ако се кроз средине стра́на̂ сфернога троугла замисле главни кругови, који стоје нормално на тим странама, онда се они секу у једној тачки која је средиште описаног круга. Његов је полупречник сферна раздаљина средишта од једног темена. Теме A, средина стране AB и средиште описаног круга одређују правоугли сферни троугао у којем се код A налази угао $S - C$. Из тог троугла налази се:

$$\cot R = \sqrt{-\frac{\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos S}}.$$

13. Израчунај површину равностраног сферног троугла, кад му свака страна има 70^0, а лоптин је полупречник 2·5 m.

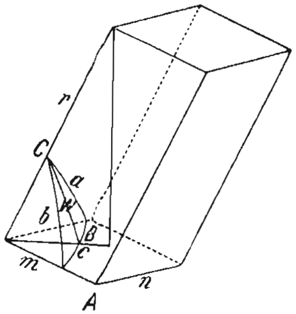
14. На лопти, чији је полупречник 0·8 m, налази се сферни троугао у кога су стране 70^0, 80^0 и 65^0. Израчунај запремину оног лоптиног исечка коме је тај троугао основа.

15. Стране сферног троугла имају по 90^0. Израчунај полупречник уписаног и описаног круга.

3. Примена сферне Тригонометрије.

а) Задатак из Стереометрије.

384. Одредити запремину косоуглог паралелопипеда, кад се знају три ивице m, n, r и углови a, b и c између две и две ивице.



Сл. 187.

Ако су (сл. 187) m и n две основне ивице, а нагибни угао бочне ивице r према основи назовемо w, онда је запремина

$$V = mnr \sin c \sin w$$

Ако се у тространом рогљу, коме су ивице m, n и r, конструише сферни троугао, онда су a, b и c његове стране; тада се нагибни угао w појављује у том рогљу као лук, повучен из темена C нормално на супротну страну c. С тога се, с погледом на чл. 368 и 373, 1, налази

$$\sin w = \sin a \sin B = 2 \sin a \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$= \frac{2}{\sin c} \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)};$$

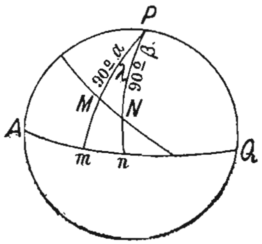
према томе је

$$V = 2\, mnr \sqrt{\sin s \sin (s - a) \sin (s - b) \sin (s - c)}.$$

b) Задаци из математичког замљописа и сферне астрономије.

385. Одредити сферну раздаљину између два места на Земљи, кад су познате њихове географске ширине и разлика њихових дужи́на̂. (Земља се као лопта претпоставља).

Ако су M и N та два места (сл. 188), онда је њихова раздаљина MN лук једног највећег лоптиног круга. Нека је P пол, а AQ полутар; тада су Mm и Nn ширине тих места, а разлика њихових дужина mn једнака је с углом MPN.



Сл. 188.

Стави ли се $Mm = \alpha$, $Nn = \beta$, $mn = \lambda$, онда су у сферном троуглу MNP познате две стране $MP = 90^0 - \alpha$ и

$$NP = 90^0 - \beta$$

захваћени угао $MPN = \lambda$, па је с тога (по чл. 376, додатак)

$$\cos MN = \frac{\sin \alpha \sin (\beta + w)}{\cos w},$$

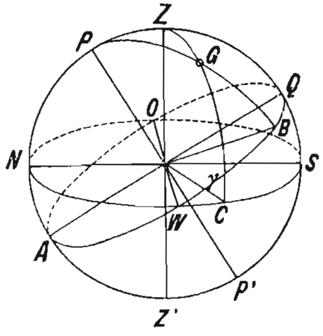
где се помоћни угао w налази из

$$\operatorname{tang} w = \cot \alpha \cos \lambda.$$

Тражи се, дакле, прво w, затим лук MN, па се он претвара у географске миље, од којих 15 долазе на један степен.

386. У Астрономији се положај звездама најчешће одређује према хоризонту или према екватору.

Нека је (сл. 189) G звезда, Z пол хоризонта NS или зенит, N нека је северна а S јужна тачка, P пол екватора AQ, дакле PP' светска оса, $ZSZ'N$ меридијан онога места где се налази посматрач, Z нека је његов зенит, а ♈ тачка пролетње равнодневице. Ако се кроз G и полове Z и P повуку највећи кругови, који дакле стоје нормално на хоризонту и екватору, онда се први зове висински а други деклинациони круг; тада су координате у односу на хоризонат: $CG = h$ висина, лук SC или $\sphericalangle SZC = w$ азимут; а у односу на екватор: $BG = \delta$ деклинација, ♈B ректасцензија. $\sphericalangle QPB = s$ зове се часовни угао звезде G.



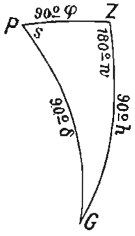
Сл. 189.

Азимут је, према томе, угао између висинског круга једне звезде и меридијана, часовни угао између деклинационог круга и меридијана, И један и други угао рачунају се у правцу привидног дневног обртања звезде од југа к западу, од 0° до 360°. Ректасцензија се рачуна од пролетње тачке супротно привидном обртању звезде од 0° до 360°. Висина и деклинација рачунају се од хоризонта, односно од екватора, од 0° до 90°, па су позитивне или негативне, према томе да ли звезда стоји северно или јужно од хоризонта, односно од екватора.

Тачка B деклинационог круга обиђи ће екватор за оно исто време које је потребно звезди да изврши једно пуно обртање; то је време за сваку некретницу, осим Сунца, један звездани дан; за Сунце један прâви сунчани дан; на 15° часовнога угла долази, дакле, за некретницу један час звезданога дана, а за Сунце један час прâвог сунчаног дана. С тога се часовни угао може казати не само у угаоној мери, него и у времену.

387. За решавање сферног троугла ZPG потребна су три комада (податка); од свију могућних задатака нарочито је важно претварање екваторијалних координата у хоризоталне и обрнуто.

Стране тог троугла могу се изразити и висином, деклинацијом и географском ширином (полном висином) φ дотичног места, углови код P и Z часовним углом и азимутом звезде.



Сл. 190.

1. Дата је висина h и азимут w једне звезде и полна висина φ једног места; израчунај деклинацију δ и часовни угао s те звезде.

У троуглу ZPG (сл. 190), за који ћемо претпоставити да је h позитивно а $w < 2R$, страна је

$$ZG = 90^0 - h,\ ZP = 90^0 - \varphi,\ \sphericalangle Z = 180^0 - w.$$

Случај чл. 376, I.

Каковаља решити задатак, кад је $w \gtreqless 2R$?

2. Дата је деклинација δ, часовни угао s и полна висина φ једног места; одреди висину и азимут звезде.

Решење је слично решењу под 1.

388. Одреди време и место рађању и залажењу једне звезде.

Пол, северна тачка и звезда кад залази, одређују правоугли сферни троугао, у којем је прав угао код северне тачке, а угао $180^0 -- s$ код пола. Хипотенуза је $90^0 - \delta$, а катете су φ (полна висина) и $180^0 - w$. Из тог троугла добија се: $\cos s = - \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \delta$,

$$\cos w = - \frac{\sin \delta}{\operatorname{coc} \varphi} \cdot$$

Часовни угао и азимут звезде кад се рађа добија се одузимањем тих количина кад звезда налази од 360°.

На пр. кад се Сунце рађа, а кад залази у Бечу, кад је деклинација 18° 25'? Беч има географску ширину (полну висину) $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$. Налази се $s = 111^0\ 52'\ 21''$, или у времену $7^h\ 27'\ 29''.^h$

То је време за Сунце уједно и право сунчано време његова заласка, а време рађања је $24^h - s^h = 16^h\ 32'\ 31''$, тј. $4^h\ 32'\ 31''$ у јутру.

Кад се половина дневна лука Сунчева претвори у време па удвоји, онда се добија дужина дана. За најдужи или најкраћи дан. Сунчева је деклинација једнака с нагибом еклиптике, дакле $\pm \delta = \pm 23^0\ 27'\ 8{\cdot}5''$ (за 1. јануар 1899).

За коју било другу некретницу налази се звездано време њена заласка, кад се часовни угао при њену заласку дода њеној ректасцензији, једно и друго изражено временом. Одузимањем тих вредности налази се звездано време рађања.

Које су вредности часовног угла звезде која се рађа или залази и дневног лука, кад је $\delta \gtreqless 0^0$?

Које су вредности азимута? s је могућно само дотле, док је $\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} \varphi < 1$, или $\operatorname{tang} \delta < \operatorname{tang} (90^0 - \varphi)$, дакле $\delta < 90^0 - \varphi$.

Шта бива кад је $\delta \gtreqless 90^0 - \varphi$? Колика мора бити географска ширина једног места на Земљи, па да Сунце један пут у години не зађе?

При решавању тог задатка ваља апстраховати атмосферско преламање светлости.

389. Задаци за вежбање.

1. Основа једне косе облице има полупречник r, а њена је оса m нагнута према основи под углом a; један осни пресек те облице сече основу по једној дужи која с пројекцијом осе m гради угао b; колика је површина осног пресека?

2. Израчунај запремину тростране призме, кад су познате три ивице m, n, r, које се стичу у једном темену и углови a, b, c између две и две ивице.

3. Израчунај запремину тростране пирамиде кад су познате три њене ивице m, n, r које се у једном темену стичу и углови a, b, c између две и две ивице.

Добија се $v = \frac{1}{3}\, mnr \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$ где је $2s = a + b + c$.

4. Израчунај запремину тростране пирамиде, кад су познате три ивице m, n, r које се стичу у једном темену и углови A, B, C између две и две стране које се секу у датим ивицама.

Из резултата у зад. 3. добија се, узимајући у помоћ обрасце $III\,a)$ и $III\,b)$ у чл. 373 и $I)$ у чл. 372,

$$v = -\frac{2\,mnr}{3 \sin A \sin B \sin C} \cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C),$$

где је $2S = A + B + C$.

5. Беч има географску ширину $48^0\ 12'\ 35''$ а Рим $41^0\ 53'\ 54''$, географска дужина*) Беча је $16^0\ 22'\ 42''$, а Рима $12^0\ 28'\ 48''$; колика је сферна раздаљина између та два места?

6. Сферна раздаљина Беч-Париз износи 139·67 геогр. миља, географска је ширина Беча $48^0\ 12'\ 35''$, а Париза $48^0\ 50'\ 12''$; колику разлику времена показују часовници та два места?

7. Познате су географске ширине и дужине трију места на Земљи и полупречник Земљин; израчунај стране, углове и површину сферног троугла, одређеног тим местима. (Нпр. Напуљ, ширина $40^0\ 51{\cdot}8'$, дужина $14^0\ 15{\cdot}5'$ ист. од Гринича; Мадрид, ширина $40^0\ 24{\cdot}5'$ дужина $3^0\ 41{\cdot}3'$ западно од Гринича; Париз, ширина $48^0\ 50{\cdot}2'$, дужина $2^0\ 20{\cdot}2'$ источно од Гринича; $r = 6378\,\mathrm{km}$.).

8. Једна лађа остави Лисабонско пристаниште под азимутом од 30^0; где ће она, под којим углом, и после коликог пута пресећи екватор, кад плови по највећем кругу? (ширина Лисабона $38^0\ 42'\ 30''$, западна дужина $9^0\ 11'\ 12''$).

9. Којим правцем мора пловити лађа најкраћим путем из Кадикса (шир. $36^0\ 27'\ 42''$, зап. луж. $6^0\ 12'\ 24''$) у Пернамбуко (шир. $8^0\ 3'\ 24''$, зап. дужина $34^0\ 52'$)?

10. Колики су за Беч азимути α Касиопеје у источној и западној позицији? ($\delta = 55^0\ 59'\ 18''$, $\varphi = 48^0\ 12'\ 35''$).

Прав је угао код звезде.

11. У колико сати залази Сунце у Бечу 15^0 северно од западне тачке?

12. Одреди место и време Сунчева рађања 10 августа у Бечу, кад јој је деклинација $\delta = 15^0\ 39'\ 53''$.

13. Израчунај време и место Сунчева рађања кад је најдужи дан у Бечу. ($\delta = 23^0\ 27'\ 8''$ за 1. јан. 1899.

14. У које доба и у којој висини стоји Сунце над Бечем тачно на истоку, кад је дан најдужи? ($\delta = 23^0\ 27'\ 8''$).

Прав је угао у зениту.

15. Одреди правац једној правој бечкој улици, у којој 1. маја у 6 часова изјутра нема хлада? Колику ће сенку у то доба бацити мотка од $1\,m$ дужине? ($\delta = 15^0\ 25''$).

16. Одреди висину и азимут једној звезди, кад је њена деклинација $21^0\ 58'\ 15''$, часовни угао $15^0\ 38'\ 42''$ а полна висина посматрачева места $50^0\ 5'\ 18''$.

17. Израчунај висину и азимут Сунца 15. априла у 11 часова пре подне у Грацу, кад је полна висина за Грац $47^0\ 4'\ 36''$, а деклинација $9^0\ 45'\ 36''$.

---

*) Географске дужине рачунате су по Гриничком меридијану.

18. У којој је висини Сунце 1. јуна над хоризонтом бечке опсерваторије у 3 часа средњег времена после подне?

($\delta = 22^0\ 4'\ 42''$, једначина времена тј. средње време, мање право време $= -\ 2'\ 26''$).

19. Кад у једном месту, чија је геогр. ширина $50^0\ 36'$, Сунце стоји у 8 часова пре подне у висини $31^0\ 16'$, колика је његова деклинација?

20. Праг има географску ширину $50^0\ 5'\ 18''$, а Трст $45^0\ 38'\ 48''$. Колико траје најдужи дан у једном, а колико у другом месту?

21. Колика је географска ширина једног места, кад најдужи дан у том месту траје 18 часова?

ПЕТИ ДЕО.

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЈА.

390. *Аналитична Геометрија* истражује особине геометријских облика рачуном (анализом).

Овде ћемо се ограничити само на Аналитичну Геометрију *равнине*.

I. Тачка.

391. *Дужи као релативне количине.*

Кад се води рачуна о правцу једне дужи, онда се дуж AB разликује од дужи BA. Правац једне дужи бележи се знаком; усвојићемо знак $+$ за правац на десно, а $-$ за правац на лево. На вертикалној правој означићемо правац на више знаком $+$, а на ниже знаком $-$. Према томе је $AB + BA = 0$, дакле $AB = -BA$. Даље је $AB = AC + CB$ за сваки положај тачке C. Јер десна страна ове једначине значи кретање од A до C и од C до B, тако да је на послетку раздаљина покретне тачке од A једнака AB, што казује и лева страна једначине.

392. *Одређивање тачке на правој линији.*

Тачка M на правој XX' одређена је, кад је позната њена раздаљина од једне сталне тачке O на тој правој, и кад је знаком казато на којој се страни од O налази она. Знаком снабдевена раздаљина OM зове се *апсциса* тачке M, XX' је *апсцисна оса*, а O *почетак*. OM бележи се словом x.

Свакој тачки на апсцисној оси одговара један потпуно одређен број између $-\infty$ и $+\infty$, и обрнуто: сваком броју између тих граница одговара једна потпуно одређена тачка.

Задатак.

На датој апсцисној оси одреди тачке $+\ 2$, $-\ 3\ +\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, $\sqrt{6}$, $-\sqrt{3}$.

393. Почетак O премештен је у тачку O' на оси. Одреди нову апсцису x' тачке M, кад је $OO' = m$.

За сваки положај тачке O' вреди:

$$O'M = O'O + OM = OM - OO', \text{ или } x' = x - m.$$

Задатак.

Кад је почетак O, онда тачка M_1, M_2, M_3 имају апсцисе $+4$, -5, $+\frac{2}{3}$; колике су им апсцисе, ако је апсциса новог почетка O' α) $+5$, β) -2?

394. Одредити раздаљину од тачке $M_1(x_1)$ до $M_2(x_2)$ на апсцисној оси, по дужини и знаку.

За све тачке вреди $M_1 M_2 = M_1 O + OM_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$.

Задатак.

Одреди по дужини и знаку раздаљину $M_1 M_2$, кад је 1) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, 2) $x_1, = 7$, $x_2 = 4$, 3) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, 4) $x_1 = -2$, $x_2 = -4$.

395. Одреди апсцису ξ оне тачке P, која дели дуж $M_1 M_2$ по даној размери.

Нека је та размера $\frac{M_1 P}{P M_2} = \lambda$.

Тада је $\lambda = \frac{\xi - x_1}{x_2 - \xi}$, отуд $\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

Ако је P између M_1 и M_2, онда су дужи $M_1 P$ и $P M_2$ једнако означене, дакле λ позитивно.

Ако ли је P изван дужи $M_1 M_2$, онда су $M_1 P$ и $P M_2$ супротно означене, и у том је случају λ негативно.

Ако је P на средини дужи $M_1 M_2$, онда је $\lambda = 1$, с тога $\xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

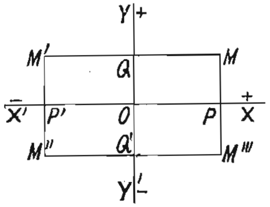
Задатак.

M_1 (1); M_2 (5) нађи апсцису оне тачке која дели дуж $M_1 M_2$ по размери *a)* 2, *b)* -2.

396. Одређивање тачке у равни. Положај тачке у равни одређује се њеним положајем према двема сталним линијама, које се зову координатне осе. Најпростији је ортогонални или правоугли координатни систем, и њиме се најчешће служимо.

Повуку се (слика 191) две сталне праве XX' и YY' које у тачки O управно стоје једна на другој; XX' зове се апсцисна оса, YY' ординатна оса, O је почетак.

Нека је M тачка у 1. квадранту. Ако се повуче $MP \perp XX'$, $MQ \perp YY'$, онда су положајем тачке M несумњиво одређене и њене раздаљине MP и MQ од координатних оса. И обрнуто: ако би биле дате раздаљине MP и MQ, онда би тиме био одређен и положај тачке M; треба само у P дићи нормалу на XX', а кроз Q повући нормалу на YY', па је у њихову пресеку тачка M.



Сл. 191.

Раздаљине MQ и MP зову се ортогоналне или правоугле координате тачке M, и то: раздаљина MQ или — што је исто — OP зове се апсциса, а раздаљина MP или OQ ордината. Апсциса се обично бележи словом x, а ордината словом y, ако је реч о буди којој тачки.

Ако нека одређена тачка M има координате $OP = a$ и $MP = b$, онда се то аналитички казује једначинама

$$x = a, \ y = b,$$

које се зову једначине тачке M.

На тај начин је једна иста тачка увек представљена истим двема једначинама, и две исте једначине одређују увек исту тачку. Према томе је тачка M геометријски представник једначинâ $x = a$ и $y = b$, а ове су опет аналитички преставник тачке M.

Тачку M, чије су координате a и b, означујемо краће и овако: *(a, b)*.

397. У сваком од остала три квадранта може се наћи по једна тачка, која има исте координате као тачка M у првом квадранту. С тога положај једне тачке није несумњиво одређен, ако се знају само апсолутне вредности њених координата, а одређен је ако се знају знаци координатама. Апсцисе десно од ординатне осе сматрају се као позитивне, лево као негативне; исто тако ординате над апсцисном осом као позитивне, испод као негативне.

С том претпоставком имамо, ако ставимо (сл. 191), $OP = OP' = a$, $OQ = OQ' = b$,

за тачку $M \cdots\ x = +a, \ \ y = +b;$
„ $M' \cdots\ x = -a, \ \ y = +b;$
„ $M'' \cdots\ x = -a, \ \ y = -b;$
„ $M''' \cdots\ x = +a, \ \ y = -b.$

За тачке на апсцисној оси ординате су $= o$; за тачке на ординатној оси апсцисе су $= o$. За тачку O, која припада и ординатној и апсцисној оси, имамо $x = o$, $y = o$.

Права, која везује неку тачку са почетком, зове се потег те тачке (radius vector); он је увек позитиван.

Ако се на краку OM (сл. 157) једног угла у којем било квадранту узме тачка $M (x, y)$, онда се дефиниције тригонометријских функција (чл. 315, 1—4) могу добити и у овом облику:

Синус сваког угла размера је ординате према потегу.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}\,.$$

Косинус сваког угла размера је апсцисе према потегу.

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}\,.$$

Тангента сваког угла размера је ординате према апсциси.

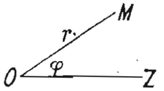
$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}\,.$$

Котангента сваког угла размера је апсцисе према ординати.

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}\,.$$

Поларне координате.

398. По неки пут служимо се и поларним координатама. У том систему узима се једна стална тачка O (сл. 192), која се зове пол, и из те тачке повучен сталан полузрак OZ који се зове поларна оса.



Сл. 192.

Тада је положај тачке M потпуно одређен, кад је позната њена раздаљина MO од пола и угао ZOM између MO и поларне осе. Раздаљина MO зове се потег; он се узима увек у апсолутном смислу и бележи се у опште словом r. Угао $ZOM = \varphi$ зове се аномалија и рачуна се у позитивном правцу од 0° до 360°. Количине r и φ зову се поларне координате тачке M.

399. Трансформација координата. У аналитичким истраживањима јавља се често пута потреба, да се координате једне тачке у једном одређеном координатном систему замене координатама те тачке у другом, новом систему чији је положај према првоме познат. Тај се поступак зове трансформација координата.

Једна таква трансформација извршена је још у чл. 393.

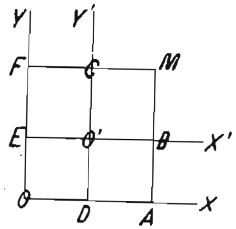
Нека су овде поменута још два проста случаја.

a) Трансформација координата једног правоуглог система у други правоугли, кад су нове и старе осе паралелне.

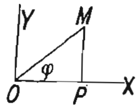
Нека су x, y координате тачке M (сл. 193) у систему O, а x', y', њене координате у систему O'. Координате саме тачке O' нека су m и n. Трансформацију, показану у чл. 393, ваља сад применити на обе осе. Према томе је за сваки положај тачака D и E, дакле и тачке O',

$$x' = x - m, \qquad y' = y - n; \text{ а}$$

$$x = x' + m, \qquad y = y' + n.$$



Сл. 193.



Сл. 194.

b) Трансформација поларних координата у правоугле, и обрнуто.

По дефиницији тригонометријских функција (чл. 315 и 397) вреди за сваки положај тачке M (сл. 194).

$$\frac{x_1}{r} = \cos\varphi, \qquad \frac{y_1}{r} = \sin\varphi, \text{ с тога}$$

$$x_1 = r\cos\varphi, \qquad y_1 = r\sin\varphi.$$

По тим једначинама могу се поларне координате претворити у правоугле.

И обрнуто:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x_1}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y_1}{r}\,.$$

400. Израчунати потег једној тачки $(x_1\ y_1)$ и његов угао према апсцисној оси.

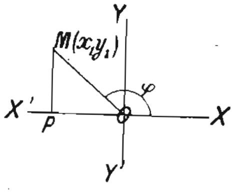
Из правоуглог троугла OMP (сл. 195) налази се за сваки положај тачке M:

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

За одређивање угла између потега и апсцисне осе имамо једначине

$$\sin\varphi = \frac{y_1}{r}, \quad \cos\varphi = \frac{x_1}{r}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{y_1}{x_1}$$

$$\cot\varphi = \frac{y_1}{x_1}\,.$$



Сл. 195.

Угао се рачуна у позитивном смислу од позитивног правца апсцисне осе од 0° до 360°.

401. Одредити раздаљину d двеју тачака, и угао између d и апсцисне осе.

Нека су дате тачке (сл. 196) $M_1\ (x_1 y_1)$ и $M_2 (x_2 y_2)$.

Почетак координатног система треба преместити у M_1, а нове осе повући у истом смислу паралелно са старима. Тада је задатак сведен на чл. 400; тачка M_2 има нове координате $\xi = x_2 - x_1$ и $\eta = y_2 - y_1$; према томе је

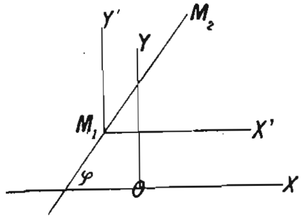
$$d = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Угао φ између $M_1 M_2$ и $M_1 X'$ одређује се по обрасцима:

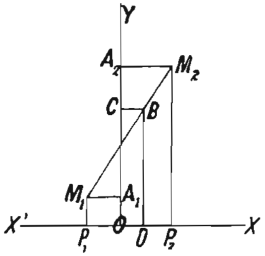
$$\sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{d},\ \cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{d},\ \operatorname{tang}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\cot\varphi = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Угао φ рачуна се као у чл. 400.



Сл. 196.



Сл. 197.

402. Дуж $M_1 M_2$ поделити по даној размери.

По којој је размери подељена дуж $M_1 M_2$ (сл. 197) тачком B, по истој су и пројекције њене на координатним осама подељене пројекцијама тачке B. Примењујући чл. 395 на обе осе, добијамо за координате $\xi\,\eta$ раздеоне тачке:

$$\xi = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad \eta = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Ако је тачка B на средини дужи $M_1 M_2$, онда је $\lambda = 1$, а

$$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad \eta = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

403. Одредити површину троугла, кад су дате координате његових теме́на̂.

a) Нека је једно теме у почетку.

Ако је $O M_1 = r_1$, $O M_2 = r_2$, онда је за сл. 198 *a*

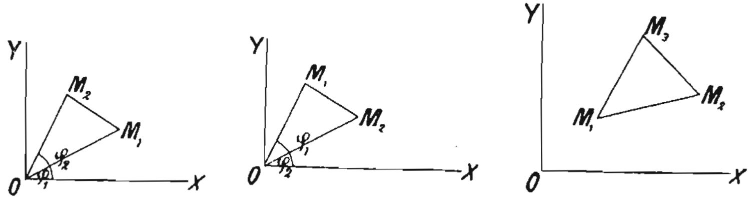
$$p = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) =$$

$$= \frac{1}{2} r_1 r_2 \left(\frac{y_2}{r_2} \cdot \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \cdot \frac{y_1}{r_1}\right) = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Ако се рачун изведе за сл. 198 *b*, онда се добија

$$p = \frac{1}{2} (y_1 x_2 - x_1 y_2) = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Ова два израза за p разликују се само у знаку. Ако се у оба случаја узме за површину једначина $p = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - y_1 x_2)$, онда нам апсолутна вредност десне стране ове једначине даје не само



a Сл. 198. *b* *c*

површину, него нам својим знаком даје обавештења о положају тачака M_1 и M_2. Ако је знак позитиван, онда се мора OM_1 обртати око O у позитивном правцу кроз троуглову површину, да би дошло у положај $O M_2$; ако ли је знак негативан, онда се то обртање мора извршити у негативном смислу. Или, тачке O, M_1, M_2 иду једна за другом у позитивном или негативном правцу, према томе, да ли је знак + или —.

b) Почетак се не поклапа ни с једним теменом (сл. 198 *c*).

Нека су троуглова темена $M_1\ (x_1,\ y_1)$, $M_2\ (x_2,\ y_2)$ и $M_3\ (x_3,\ y_3)$. Почетак координата ваља преместити у M_1; а нове осе узети у истом смислу паралелне са старима; тада је задатак сведен на зад. *a)*. Нове су координате за $M_2 : x_2 - x_1,\ y_2 - y_1$, а за $M_3 : x_3 - x_1,\ y_3 - y_1$. Тада је

$$p = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] =$$

$$= \frac{x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)}{2}$$

Апсолутна вредност овог израза даје површину троугла.

Ако је знак +, онда се мора $M_1 M_2$ обртати око M_1 у позитивном правцу кроз троуглову површину, да би пало на $M_1 M_3$.

Ако је знак —, онда то обртање мора бити негативно. Или, тачке M_1, M_2, M_3 иду једна за другом у позитивном, или у негативном смислу.

Ради лакшег памћења горњег обрасца ваља имати на уму ово: из првог члана $x_1 (y_2 - y_3)$ могу се добити други и трећи кружном разменом казаљака 1, 2, 3, тј. напиши казаљке 1, 2, 3 на периферији једног круга, па замењуј у истом правцу сваку казаљку најближом.

404. Погодба да три тачке леже у једној правој.

Ако су тачке M_1, M_2, M_3 у истој правој, онда је површина троугла $M_1 M_2 M_3 = 0$. Дакле (чл. 403, *b*)

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0, \text{ или}$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Да би, дакле, три тачке лежале на једној правој, морају разлике ордината сваке две тачке бити пропорционалне са разликама њихових апсциса.

405. Задаци. 1. Одреди положај тачака чије су координате:

a) $x = 3$, $y = 4$; *b)* $x = -2$, $y = 3$; *c)* $x = -1$, $y = -4$;
d) $x = -2$, $y = 1$; *e)* $x = 0$, $y = 2$; *f)* $x = -3$, $y = 0$:

2. Конструиши троугао ABC чија су темена $A(-2, 0)$, $B(2, -3)$, $C(4, 4)$.

3. Одреди раздаљине између тачака *a)* (7, 10) и (— 5, 5), *b)* (6, —5) и (—2, 1), *c)* (12, —12) и (—9, 7); затим углове под којима су према апсцисној оси нагнуте праве које везује две и две тачке.

4. Изрази једначином да је тачка (x, y) удаљена од тачке (5, 4) толико исто колико од тачке (3, 2).

5. Одреди тачку која је једнако удаљена од тачака (3, 4), (2, —3) и (—2, 3), и израчунај ту раздаљину.

6. Дуж, која везује тачке $M_1 (-3, +4)$ и $M_2 (2, -5)$ *a)* подели тачком P тако, да је $M_1 P : P M_2 = 1 ; 3$, *b)* продужи преко M_2 до P тако да је $M_2 P = 2 M_1 M_2$ и израчунај координате тачке P.

7. Два су троуглова темена (4, — 2) и (3, 2), а треће је у почетку; одреди *a)* дужину свакој страни, *b)* координате срединама на свакој страни, *c)* површину троугла и објасни значај њена знака; *d)* нађи тежиште том троуглу.

8. Одреди координате тежишту троугла чија су темена $(x_1 \; y_1)$, (x_2, y_2), (x_3, y_3).

9. Темена су једног троугла (3, 4), (2, —3), (—2, 3). Одреди његову површину и објасни значај њена знака.

10. На којој страни праве OM_1 лежи M_2, кад је $M_1 (+3, -4)$ а $M_2 (-2, +3)$?

11. Одреди поларне координате тачака (5, 0), (0, 3), (3, 3), (—2, 0), (0, —3), (4, —4).

12. Одреди ортогоналне координате тачака, чије су поларне координате:

a) $r = 2$, $\varphi = 60^\circ$; *b)* $r = 4$, $\varphi = 90^\circ$; *c)* $r = 6$, $\varphi = 135^\circ$;
d) $r = 3$, $\varphi = 240^\circ$; *e)* $r = 2$, $\varphi = 321^\circ$.

13. Тачке M_1 (0, 0) и M_2 (0, 6), нападне су тачке двеју сила: 12 *kg* и 18 *kg*; одреди нападну тачку резултанте, кад су силе директно или инверсно паралелне.

14. Испитај, да ли су на једној правој ове тачке:

a) $M_1 (1, 5)$, $M_2 (3, 9)$, $M_3 (-2, -1)$;
b) $M_1 (2, 3)$, $M_2 (5, -7)$, $M_3 (-4, -3)$.

15. $M_1 (2, -7)$, $M_2 (-3, +4)$, $M_3 (1, y)$; одреди y тако, да права $M_1 M_2$ пролази кроз M_3.

16. Дате су тачке A (2, 3), B (4, 7), C (6, 5); одреди тачку D тако, да $ABCD$ буде паралелограм.

Ваља применити једну особину паралелограмских дијагонала.

II. Једначине са две промењљиве и њихова геометријска места.

406. Количине, које у току каква рачуна имају одређену непромењљиву вредност, зову се константне (сталне); а количине, које могу имати сваку произвољну вредност (која се слаже с њиховом природом), зову се промењљиве количине.

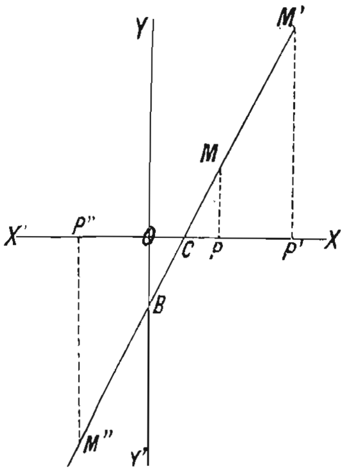
Односи између промењљивих и константних количина казују се једначинама; на пр. $y = 2x + 3$. Ако овде x значи промењљиву количину, онда је и y промењљиво, пошто се вредност $2x + 3$ мења са x; па како свакој специјалној вредности од x одговара једна одређена вредност од y, добивеној из $y = 2x + 3$, то y зависи од x. Према томе разликујемо независно и зависно промењљиве; првима се може дати свака произвољна вредност, која се слаже с њиховом природом, а вредност другима одређује се тада према вредности независно промењљивих.

Кад једна променљива y зависи од друге x, онда се каже да је y **функција од** x.

407. Једна једначина са две променљиве има безбројно много решења; кад се x поступно замени разним специјалним вредностима, онда свакој вредности од x одговара по једна или више вредности од y, које се добивају из једначине. Сматрајући сваки спрег вредности за x и y, које одговарају једна другој, као координате једне тачке M у каквом одређеном систему осовѝна̑, и конструишући ту тачку, представићемо геометријски свако решење дате једначине.

Што је мања разлика између узастопних вредности од x, тим ће ближе бити и тачке, одређене координатама. Кад x прође кроз све стварне, негативне и позитивне вредности од $-\infty$ до $+\infty$, онда променљива тачка M описује одређену **линију**, која има ту особину, да координате сваке њене тачке задовољавају дату једначину. С тога се та линија зове **геометријско место једначине**.

При конструисању линије одређујемо онолико тачака, колико је потребно да би се она могла потпуно представити.



Сл. 199.

Ради бољега разумевања нека послуже ови примери:

1. Да се конструише једначина првог степена

$$y = 2x - 1$$

т.j. да се одреди њено геометријско место.

Нека је XX' (сл. 199) апсцисна оса, а O почетак координата.

Кад је $x = 1, 2, 3, \ldots -1, -2, -3, \ldots$
онда је $y = 1, 3, 5 \ldots -3, -5, -7, \ldots$

Ако пренесемо позитивне вредности од x на апсцисну осу од O до $P, P' \ldots$, а негативне од O до $P'' \ldots$ итд. и у тим тачкама подигнемо нормале и пренесемо на њих односне вредности од y, и то позитивне на више а негативне на ниже, онда се тачке M, M', $M'' \ldots$ налазе на једној линији која је једначином $y = 2x - 1$ аналитички одређена. Како су ординатне разлике пропорционалне са апсцисним разликама, то је линија права (по чл. 404).

Да бисмо нашли тачку B, у којој та права сече ординатну осовину, ваља имати на уму да је за ту тачку $x = 0$; тада је $y = 2x - 1 = -1$, дакле $OB = -1$. За тачку C, у којој права сече апсцисну осу, мора бити $y = 0$, дакле $2x - 1 = 0$, отуд $x = \frac{1}{2}$; дакле је $OC = \frac{1}{2}$.

Конструиши исто тако једначину $y = -2x$.

Која геометријска места одговарају овим једначинама:

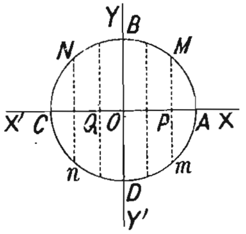
a) $y = 0$, *b)* $x = 0$, *c)* $y = \pm b$, *d)* $x = \pm a$, *e)* $y = +x$, *f)* $y = -x$?

Свакој једначини првог степена одговара права линија.

2. Да се конструише квадратна једначина

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ или } y = \pm\sqrt{9 - x^2}.$$

За $x = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \ldots \quad -1, \quad -2, \quad -3$
биће $y = \pm 3, \pm\sqrt{8}, \pm\sqrt{5}, \quad 0 \ldots \quad \pm\sqrt{8}, \quad \pm\sqrt{5}, \quad 0.$



Сл. 200.

Ако се сваке две вредности од x и y, које одговарају једна другој, сматрају као координате једне тачке у систему чија је апсцисна оса XX' (слика 200) а почетак O, онда се види да свакој апсциси одговарају две једнаке супротне ординате, и тако исто свакој ординати две једнаке супротне апсцисе. Према томс је линија, која одговара горњој једначини, састављена од четири дела који имају према координатним осама симетричан положај.

Кад је $x = 0$, онда је $y = \pm 3$; ако се дакле узме $OB = +3$, а $OD = -3$, онда су B и D тачке у којима линија сече ординатну осу. Кад је $y = 0$, онда је $x = \pm 3$; ако се дакле пренесе $OA = +3$, а $OC = -3$, онда су исто тако A и C пресеци те линије с апсцисном осом.

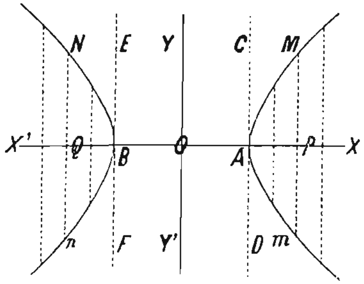
За све позитивне и негативне вредности од x, које су (апсолутно) веће од 3, нема ордина̑та̑, јер је y уображено кад је $x > 3$; исто тако не може ни y бити (апсолутно) веће од 3. Та је крива линија, дакле, ограничена.

3. Конструисати квадратну једначину

$$x^2 - y^2 = 9, \text{ или } y = \pm\sqrt{x^2 - 9}$$

Кад је $x = \pm 3, \quad \pm 4, \quad \pm 5, \quad \pm 6,$
онда је $y = 0, \quad \pm\sqrt{7}, \quad \pm 4, \quad \pm\sqrt{27}.$

За све вредности од x између -3 и $+3$ биће y уображено, с тога линија нема тачака у тој области (сл. 201). Ако се дакле, пренесе $OA = +3$, а $OB = -3$, па се у A и B подигну на AB нормале CD и EF, онда између тих нормала нема тачака. За $x = \pm 3$ биће $y = 0$; линија дакле сече апсцисну осу у раздаљинама $OA = +3$ и $OB = -3$. Како даље свакој позитивној апсциси, чија је апсолутна вредност већа од 3, одговарају по две једнаке и супротне ординате, то је линија састављена од две одвојене гране које леже симетрично према апсцисној оси. Како све већим и већим апсцисама одговарају све веће и веће ординате, то излази, да је свака грана састављена од два дела која се над апсцисном осом, и испод ње, пружају у бескрајност.



Сл. 201.

Како свакој вредности од y одговарају по две супротне и (апсолутно) једнаке вредности од x, то је линија симетрична и према ординатној оси.

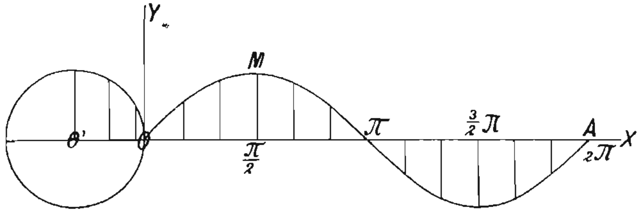
Конструиши још ове квадратне једначине:

a) $y^2 = 6x - x^2$, *c)* $y = x^2 + 3x - 2$, *e)* $4x^2 + 9y^2 = 36$,
b) $y^2 = 4x$, *d)* $xy = 10$, *f)* $4y^2 - 9y^2 = 36$.

Из претходних примера види се, да геометријска места квадратних једначина могу бити по облику врло различна.

4. Да се конструише још трансцендентна једначина $y = \sin x$ (сл. 202).

Периферију круга, коме је полупречник 1, ваља пренети као праву линију на апсцисну осу, а ординате које одговарају



Сл. 202.

тачкама 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{6}$ итд. могу се узети из круга O'. Како се периферија може преносити лево и десно од O колико се пута хоће, то је линија $y = \sin x$ неограничена.

408. Као што се свака једначина између x и y може геометријски представити линијом, тако се може и свака линија — кад се зна како постаје — изразити једначином. Јер, ако се на линији узме једна променљива тачка M, онда мора између координата те тачке постојати неки одређен однос који излази из какве било карактеристичне особине те линије. Кад се тај однос између x и y изрази једначином, онда се она зове једначина те линије.

Према томе је једначина између две променљиве аналитички представник дате линије, као што је обрнуто линија геометријски представник дане једначине. На том узајамном односу оснива се Аналитична Геометрија. Њен је задатак да изведе једначину дане линије из какве познате карактеристичне особине њене, тако да та једначина буде задовољена координатама сваке тачке те линије; с друге стране опет да изнађе линију која је представљена даном једначином између две променљиве; а посебице да дозна особине линијама, модификујући, комбинујући и тумачећи геометријски њихове једначине.

У наредним члановима испитаћемо аналитички по реду поједине линије, које се могу изразити једначинама првог и другог степена.

III. Права линија.

409. Општа једначина праве линије.

a) Права пролази кроз почетак.

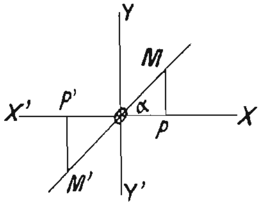
Та је права одређена својим углом α према X-оси; он се рачуна од позитивног правца апсцисне осе према позитивном правцу ординатне осе.

За тачку M (сл. 203) вреди

$$\frac{MP}{OP} = \frac{y}{x} = \text{tang}\,\alpha; \text{ за } M' \text{ вреди}$$

$$\frac{M'P'}{OP'} = \frac{y}{x} = \text{tang}\,(\alpha + \pi) = \text{tang}\,\alpha;$$

кад ставимо $\text{tang}\,\alpha = m$, онда је за све тачке на правој линији $\frac{y}{x} = m$, или $y = mx$.

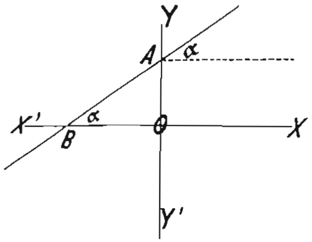


Сл. 203.

Докажи да је та једначина тачна и у случају, кад права пролази кроз други и четврти квадрант.

b) Права не пролази кроз почетак.

Она је одређена одсечком $OA = b$ на ординатној оси и углом α (сл. 204).



Сл. 204.

Кад би се почетак преместио у A, а новим осама дао правац у истом смислу паралелан, онда би једначина праве била $\eta = m\xi$; па како је $\xi = x$, $\eta = y - b$, то је у системи O једначина праве

$$y - b = mx, \text{ или}$$
$$y = mx + b.$$

Како m и b могу значити сваки произвољан стваран број, то је једначина $y = mx + b$ аналитички израз за све могуће праве линије. За неку одређену праву имају и m и b сасвим одређене, константне вредности, а x и y су променљиве т.ј. за сваку другу тачку те праве добивају друге вредности. Количина $m = \operatorname{tang} \alpha$ зове се константна правца, пошто зависи само од правца праве према апсцисној оси.

410. Дискусија једначине $y = mx + b$.

1. Како се у једначини $y = mx + b$ налазе две константне m и b, које су неодређене све дотле док није реч о каквој одређеној правој, то излази отуд, да су за потпуно одређење неке праве потребне две погодбе.

2. Константна правца m позитивна је или негативна, према томе да ли је угао α између праве и позитивне апсцисне осе оштар или туп. Константна b позитивна је или негативна, према томе да ли права сече ординатну осу изнад апсцисне осе, или испод ње.

С тога се може већ по знацима константних количина познати, на којој страни права сече координатне осе.

3. Кад се стави $b = 0$, добија се $y = mx$ као једначина праве која пролази кроз координатни почетак. У тој се једначини налази још само једна константна, пошто је једна погодба дата тиме што права пролази кроз почетак.

Како гласе једначине правих које пролазе кроз почетак, а захватају с апсцисном осом угао од 30^0, 45^0, 60^0, 120^0 135^0, 150^0?

4. Да би се права, која пролази кроз почетак, а има једначину $y = mx$, поклопила с апсцисном осом, мора се узети угао $\alpha = 0$, дакле и $m = 0$; добија се, дакле, $y = 0$ као једначина апсцисне осе.

Разменом једне и друге осе налази се $x = 0$ као једначина ординантне осе.

5. Да би права била паралелна с апсцисном осом, и то у раздаљини b, мора се у једначини $y = mx + b$ узети угао $\alpha = 0$, дакле и $m = 0$, па се добија $y = b$ као једначина праве која је у раздаљини b паралелна с апсцисном осом.

Разменом једне и друге осе налази се $x = a$ као једначина праве која је у раздаљини a паралелна с ординатном осом.

Према томе једначина $y = mx + b$ обухвата све поменуте специјалне случајеве, па се с тога зове општа једначина праве. У њој се променљиве координате јављају у првом степену.

На место константне m може се увести и одсечак a $(OC$, сл. 199) на апсцисној оси; он је позитиван или негативан, према томе, да ли је на позитивној или негативној страни апсцисне осе.

За пресек праве и апсцисне осе вреди $x = a$, $y = 0$, с тога је $0 = am + b$, дакле $m = -\frac{b}{a}$. Према томе једначина $y = mx + b$ добија облик $y = -\frac{b}{a}\, x + b$, или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

411. Геометријско место једначине првога степена са две променљиве јесте права линија.

Доказ. Свака једначина првога степена са две променљиве може се довести на облик $y = mx + b$. Ако једначину $y = mx + b$ сматрамо као аналитички израз какве линије, узимајући да су x и y координате њених тачака, а m и b константне количине, онда ће за буди које три тачке $(x_1\ y_1)$, (x_2, y_2), $(x_3\ y_3)$ вредети

$$y_1 = mx_1 + b, \qquad y_2 = mx_2 + b, \qquad y_3 = mx_3 + b.$$

Одузимајући прву од друге и треће, налазимо

$$y_2 - y_1 = \mathrm{m}\,(x_2 - x_1) \text{ и } y_3 - y_1 = m\,(x_3 - x_1)$$

дакле

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Те три тачке леже, према томе, на једној правој (чл. 404), т.ј. геометријско место једначине $y = mx + b$ јесте права линија.

412. Конструкција праве чија је једначина дата.

Одреде се две тачке, кроз које треба да прође права, кад се из једначине нађу по две вредности за x и y, које одговарају једне другима, па се оне конструишу. У опште је најподесније, да се одреде пресеци те праве с једном и другом осом, одстављајући у једначини један пут $y = 0$, други пут $x = 0$. Одсечци на координатним осама виде се непосредно, кад се једначина праве доведе на облик $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Тако се за праву $y = 2x - 1$ (чл. 407, 1) добија облик $\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{1} = 1$; према томе су одсечци на осама $\frac{1}{2}, -1$ (сл. 199).

413. Једначина праве која пролази кроз дату тачку (x_1, y_1).

Тражена једначина има облик

$$y = mx + b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1);$$

m и b ваља одредити према погодбама задатка.

Да би права прошла кроз тачку (x_1, y_1), морају координате те тачке задовољити једначину 1); дакле мора бити

$$y_1 = mx_1 + b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2)$$

у овој се једначини, поред познатих бројева x_1 и y_1, налазе још и непознате m и b. Кад би било познато m, онда би се нашло $b = y_1 - mx_1$, па би се једначина 1) претворила у ову

$$y = mx + y_1 - mx_1, \text{ или } y - y_1 = m\,(x - x_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 3).$$

У овој једначини 3), која се могла добити из једначина 2) и 1) одузимањем, налази се још само једна неодређена константна m која може имати све могуће вредности од $+\infty$ до $-\infty$; с тога тој једначини одговарају бескрајно многе праве, као што и мора бити, пошто се кроз једну тачку могу повући безбројно многе праве. Али ако би се дао задатак, да се нађе једначина праве која пролази кроз тачку $(x_1\ y_1)$ и сече X-осу под одређеним углом, онда m има одређену вредност, или, има само једна права која задовољава погодбе у задатку.

414. Једначина праве која пролази кроз две тачке, (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Тражена једначина има облик

$$y = mx + b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1);$$

m и b ваља одредити према погодбама у задатку.

Да би права пролазила кроз обе тачке, морају њихове координате задовољити једначину 1); према томе морају постојати погодбене једначине

$$y_1 = mx_1 + b \cdot \cdot \cdot \cdot 2) \quad \text{и} \quad y_2 = mx_2 + b \cdot \cdot \cdot \cdot 3).$$

Из ових једначина могу се одредити m и b, па њихове вредности ставити у 1); тако ће непознате константне m и b у 1) бити изражене координатама датих тачака.

Брже се долази до циља, кад се једначина 2) одузме од 1), за тим од 3)

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \cdot \cdot \cdot \cdot 4) \quad y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1) \cdot \cdot \cdot \cdot 5)$$

па из ових једначина 4) и 5) елиминује m. Тако се налази тражена једначина

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 6).$$

Како се може та једначина извести из чл. 404?

Из једначине 6) изведи једначину $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

415. Нормални облик једначине праве линије.

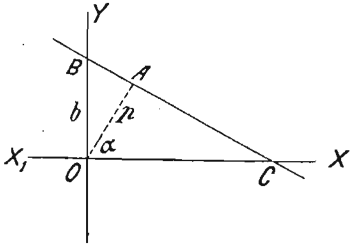
Ако је $p = OA \perp BC$ (сл. 205), и угао $XOA = \alpha$, онда је положај праве BC одређен количинама p и α.

p се узима апсолутно, а α у позитивном смислу од 0° до 360°.

Из $\triangle\, OAC$ добија се

$$a = \frac{p}{\cos\alpha}, \text{ а из}$$

$$\triangle\, OAB \cdot \cdot \cdot \cdot b = \frac{p}{\sin\alpha}\ .$$



Сл. 205.

Ако се тим вредностима замене одсечци a и b у сегментној једначини праве BC:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

добија се $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$, или

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0.$$

Тај облик једначине праве линије зове се нормални облик.

Усвима облицима једначине праве линије налази се x и y у првом степену; једначина се даје увек довести на облик $Ax + By + C = 0$.

416. Једначину праве $Ax + By + C = 0$ довести на нормалан облик.

Значај једначине не може се променити, ако је помножимо једним сталним, коначним бројем. Тај број ваља изабрати тако, да коефицијенат од x буде косинус, а коефицијенат од y синус истог угла. Нека је тај број λ. Тада је:

$$\lambda A x + \lambda B y + \lambda C = 0.$$

Да би ова једначина добила нормални облик

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

мора се λ изабрати тако да је

$$\lambda A = \cos \alpha,$$
$$\lambda B = \sin \alpha.$$

Из тих једначина налази се: $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Знак се мора узети тако, да буде $\lambda C = -p$, тј. да буде апсолутни члан у нормалном облику једначине негативан.

Да бисмо на пр. једначини $3x + 4y + 6 = 0$ дали нормалан облик, узећемо $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{9+16}} = -\frac{1}{5}$, па ће према томе нормални облик бити: $-\frac{3}{5}x - \frac{4y}{5} - \frac{6}{5} = 0.$

Како је овде $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, то је угао α, дакле и нормала, у трећем квадранту.

За једначину $3x + 4y - 6 = 0$ било би $\lambda = \frac{1}{5}$, а нормални облик

$$\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} - \frac{6}{5} = 0.$$

Како је овде $\cos \alpha = +\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = +\frac{4}{5}$, то је угао α, дакле и нормала, у првом квадранту.

Израчунај угао α у оба примера.

417. Раздаљина тачке од праве.

Разликоваћемо два случаја.

a) Тачка $M(\xi, \eta)$ и почетак O нису на истој страни праве AB. Једначина праве AB нека је

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

где је $p = OC$.

Ако се кроз M повуче $MD \parallel AB$, онда је једначина праве MD: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = o$ где је $p_1 = OD$.

Како је $M(\xi, \eta)$ на MD, то мора бити и

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p_1 = 0,$$

одавде: $p_1 = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$.

Према томе је тражена раздаљина

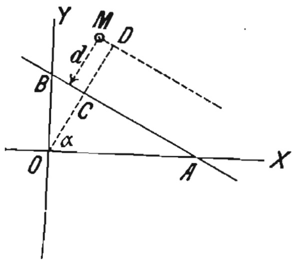
$$d = OD - OC = p_1 - p = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p.$$

Како је $OD > OC$, то је d позитивно.

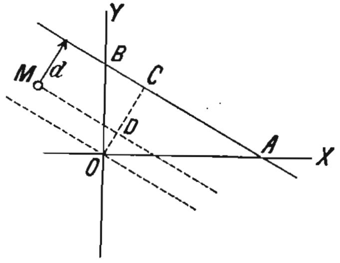
b) Тачка $M(\xi, \eta)$ и почетак O налазе се на истој страни дате праве AB, али је $d < OC$.

Једначина праве MD гласи

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - OD = 0.$$



Сл. 206.



Сл. 207

Како је $M(\xi, \eta)$ на MD, то мора бити и

$$\xi \cos \alpha + y \sin \alpha - OD = 0,$$

одавде је:

$$OD = \xi \cos \alpha + y \sin \alpha.$$

Према томе је тражена раздаљина

$$d = OC - OD = p - \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \text{ или}$$
$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p = -d.$$

Нека је на послетку $d > OC$. (сл. 208).

Једначина праве MD гласи сада:

$$x \cos (180^\circ + \alpha) + y \sin (180^\circ + \alpha) - OD = 0$$

или $-x \cos \alpha - y \sin \alpha - OD = 0$

Па како је M на MD, то мора бити и

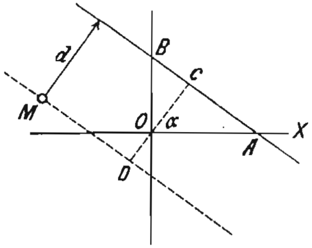
$$-\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha - OD = 0,$$

одавде $OD = -\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$.

Према томе је тражена раздаљина

$$d = OD + OC = -\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + p, \text{ или}$$

$$\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha - p = -d.$$



Сл. 208.

Отуд правило: Кад се у триному једначине дате праве, сведене на нормалан облик, променљиве координате x и y замене координатама ξ, η дате тачке M, онда се добија раздаљина те тачке од дате праве. Ако је та раздаљина позитивна, онда су тачке M и O на разним странама праве AB; а ако је негативна, онда је тачка M на истој страни дате праве, на којој је и почетак 0.

Пример. Дата је права $3x + 4y + 6 = 0$ и тачка М (1, 1). Једначина праве у нормалном облику гласи

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{6}{5} = 0;$$

Кад се овде стави $x = 1$, $y = 1$, добиће се

$$-\frac{3}{5} - \frac{4}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{13}{5} = -2{\cdot}6.$$

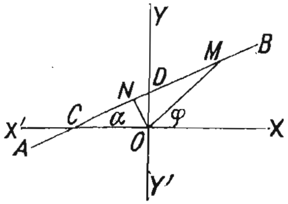
За тачку $M(-2, -1)$ налази се $+\frac{6}{5} + \frac{4}{5} - \frac{6}{5} = 0{\cdot}8$.

Ако права MD пролази кроз 0, онда је $d = p$.

418. Поларна једначина праве.

Да бисмо добили једначину праве AB (сл. 209) у поларним координатама, узећемо да је почетак O правоуглих координата у исто време пол, а апсцисна оса OX поларна оса; тада је за тачку M:

$$r = OM, \qquad \varphi = XOM.$$



Сл. 209.

Ако је $ON = p$ раздаљина пола од праве AB, а угао $XCB = \alpha$, онда се из правоуглог троугла MNO добија

$$OM = \frac{ON}{\sin NMO},$$

или, како је $NMO = \varphi - \alpha$,

$$r = \frac{p}{\sin(\varphi - \alpha)},$$ као поларна једначина праве AB.

Та се једначина добија и из $y = mx + b$, кад се стави $y = r \sin \varphi$, $x = r \cos \varphi$ и има на уму да је $m = \operatorname{tang} \alpha$, $b \cos \alpha = p$.

Две праве.

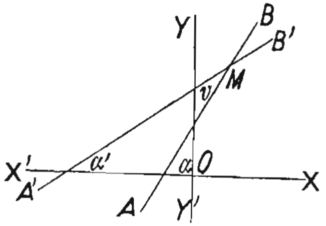
419. Пресек двеју правих.

Нека су
$$y = mx + b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1),$$
$$y = m'x + b' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2)$$

једначине двеју правих AB и $A'B'$ (сл 210); да се нађу координате њихова пресека M.

За све тачке на правој AB вреди $y = mx + b$; за све тачке на правој $A'B'$ вреди

$$y = m'x + b';$$



Сл. 210.

за тачку M, у којој се обе праве секу, морају дакле вредети у исто доба обе једначине $y = mx + b$ и $y = m'x + b'$. С тога ће тачки M припасти оне координате x и y, које у исто доба задовољавају обе једначине; а те се вредности налазе решавањем датих једначина; добија се

$$x = \frac{b - b'}{m' - m}, \qquad y = \frac{m'b - mb'}{m' - m}.$$

420. Угао двеју правих.

1. Ако су $y = mx + b$, $\quad y = m'x + b'$

једначине правих AB и $A'B'$ (сл. 210) које су према апсцисној оси нагнуте под углима α и α', где је $m = \operatorname{tang} \alpha$, $m' = \operatorname{tang} \alpha'$, онда се угао $AMA' = v$ између AB и $A'B'$ налази овако:

$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = \frac{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \alpha'}{1 + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha'} \text{ или}$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

Ако је угао v' упоредан углу v, тада је

$$\operatorname{tang} v' = -\operatorname{tang} v = -\frac{m - m'}{1 + mm'}.$$

2. Ако су праве AB и $A'B'$ паралелне, онда је $v = 0$, дакле $\operatorname{tang} v = 0$; с тога мора бити $m = m'$ и $\alpha = \alpha'$.

Ако праве AB и $A'B'$ стоје једна на другој **нормално**, онда је $v = 90^0$, дакле $\tang v = \infty$; с тога мора бити $1 + mm' = 0$, према томе $m' = -\frac{1}{m}$.

Да би нека права прошла кроз тачку x', y' и била паралелна с правом чија је константна правца m, једначина јој мора гласити $y - y' = m(x - x')$. А да би та права стајала нормално на правој чија је константна правца m, једначина јој мора гласити: $y - y' = -\frac{1}{m}(x - x')$.

421. Једначина угаоне симетрале, кад су краци тог угла дати својим једначинама.

Нека су дате једначине кракова у нормалном облику: $x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$ и $x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$, које ћемо, ради краткоће, симболички изразити овако:

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2 = 0.$$

Како две праве граде четири угла са две симетрале, то ћемо и разликовати два случаја.

а) За симетралу S оног угла, у којем се налази почетак O, биће раздаљине сваке њене тачке од кракова: $-A_1$ и $-A_2$; а за тачке исте симетрале у унакрсном углу раздаљине су од кракова: $+A_1$ и $+A_2$. Како су те раздаљине у оба случаја апсолутно једнаке и једнако означене, то је њихова разлика нула, с тога је

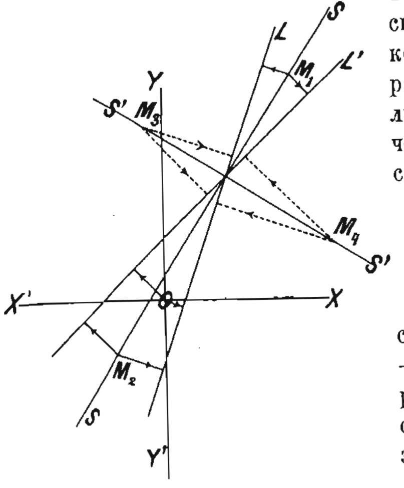
$$A_1 - A_2 = 0.$$

једначина симетрале S.

b) За симетралу S_1 упоредног угла биће раздаљине сваке њене тачке од кракова: $-A_1$ и $+A_2$; па како су те раздаљине апсолутно једнаке, а супротно означене, то је њихов збир нула, с тога

$$A_1 + A_2 = 0$$

једначина симетрале S_1.



Сл. 211.

Отуд правило: ако су једначине двеју правих дате у нормалном облику, онда се одузимањем тих једначина добија једначина симетрале оног угла, у којем се ɔалази координатни почетак; а сабирањем налази се једначина симетрале оног угла, у којем није почетак.

Пример. Нађи једначине симетралама углова, које граде праве $4x - 3y - 2 = 0$ и $12x + 5y + 3 = 0$.

Дате једначине гласе у нормалном облику овако:

$$\frac{4x}{5} - \frac{3y}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$$-\frac{12x}{13} - \frac{5y}{13} - \frac{3}{13} = 0$$

Одузимањем налазимо $y = 8x - \frac{11}{14}$ као једначину симетрале оног угла, у којем је почетак. Сабирањем налазимо $y = -\frac{x}{8} - \frac{41}{64}$ као једначину симетрале оног угла, у којем није почетак.

422. Погодба да се три праве секу у истој тачки.

Нека су $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ једначине трију правих, где је $P = 0$ симбол за једначину праве у општем или нормалном облику.

Ако три дате једначине помножимо редом трима чиниоцима λ_1, λ_2, λ_3, који не смеју бити нуле, онда ће се те три праве сећи у истој тачки, ако се чиниоци λ_1, λ_2, λ_3 могу одредити тако да је $\lambda_3 P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ идентична једначина.

Јер, ако се посебне вредности за x и y, које задовољавају једначине $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$, па с тога припадају њихову пресеку, унесу у идентичну једначину $\lambda_3 P_3 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, онда је други део $= 0$, па с тога мора бити и први део $\lambda_3 P_3 = 0$; па како λ_3 није нула, то мора бити $P_3 = 0$. Те посебне вредности за x и y задовољавају, према томе, све три дане једначине, што значи, да се све три праве секу у истој тачки.

У примени је најчешће $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, и тада горња идентична једначина добија облик:

$$P_3 = P_1 + P_2.$$

Она казује правило: кад је једначина једне праве једнака са збиром једначина других двеју правих, онда се све три праве секу у истој тачки.

423. Ради примене горњег правила доказаћемо аналитички неке теореме о троуглу:

1. Симетрале унутрашњих углова у троуглу секу се у истој тачки. (чл. 47, 2).

Ако су једначине троуглових страна у нормалном облику

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

онда су — претпостављајући да је координатни почетак у троуглу — једначине угаоних симетрала:

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A_1 - A_3 = 0, \quad A_3 - A_2 = 0.$$

Како је прва једначина једнака са збиром друге и треће, то се по чл. 422. све три симетрале секу у истој тачки.

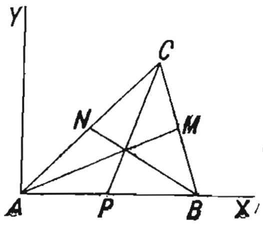
2. Симетрала једног унутрашњег угла у троуглу и симетрале спољашњих углова код она друга два темена секу се у истој тачки.

По чл. 421. налазе се ове три једначине:

$$A_2 - A_1 = 0, \quad A_1 + A_3 = 0, \quad A_2 + A_3 = 0$$

Трећа је једначина збир прве и друге; дакле, све се три симетрале секу у истој тачки.

3. Средње линије у троуглу секу се у истој тачки (члан 61.).



Сл. 212.

Нека је теме A троугла ABC (слика 212.) координатни почетак, а страна AB апсцисна оса. Тада су координате троуглових темена:

$$A = (0,\ 0), \quad B = (x_2,\ 0,) \quad C = (x_3,\ y_3),$$

Ако су M, N, P средине супротних страна, онда је

$$M = \left(\frac{x_2 + x_3}{2},\ \frac{y_3}{2}\right), \quad N = \left(\frac{x_3}{2},\ \frac{y_3}{2}\right), \quad P = \left(\frac{x_2}{2}, 0\right).$$

За средње линије AM, BN, CP добијамо по чл. 414. редом ове једначине:

$$y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2}} \cdot x, \quad y = \frac{\frac{y_3}{2}}{\frac{x_3}{2} - x_2}(x - x_2), \quad y = \frac{y_3}{x_3 - \frac{x_2}{2}}\left(x - \frac{x_2}{2}\right),$$

које се могу и овако написати:

$$\begin{gathered}(x_2 + x_3)\ y - y_3 x = 0,\\ (x_3 - 2x_2)\ y - y_3 x + x_2 y_3 = 0,\\ (2x_3 - x_2)\ y - 2y_3 x + x_2 y_3 = 0.\end{gathered}$$

Како је трећа једначина збир прве и друге, то се све три тежишне линије секу у истој тачки.

424. Задаци.

1. Нађи једначину оне праве, која *a)* одсеца од ординатне осе комад — 2, а нагнута је према апсцисној оси под углом од 45°; *b)* одсеца од апсцисне осе комад — 3, а од ординатне осе комад 2.

2. Конструиши праве:

a) $y = 3x + 5$, *b)* $y = -2x + 3$, *c)* $y = 2x$.

3. Дате су тачке:

a) $(1, -1)$ и $(-2, 2)$, *b)* $(2, 7)$ и $(-1, 1)$,

c) $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ и $(3, 0)$, *d)* $(0, -2)$ и $\left(-\frac{2}{3}, 3\right)$;

Нађи једначину праве која пролази кроз те тачке.

4. Права пролази кроз тачку $(-2, +5)$ и паралелна је *a)* са x-осом, *b)* са y-осом, *c)* с једном угаоном симетралом између оса. Нађи њену једначину.

5. Одреди једначину оне праве, која пролази кроз тачку $(4, -1)$ и кроз пресек правих $y = 2x - 4$ и $y = -x - 5$.

6. Одреди једначину оне праве, која пролази кроз тачку $(-4, 3)$, а паралелна је с правом $5y = 2x - 4$.

7. Одреди једначину оне праве, која пролази кроз тачку $(1, 4)$, а нормална је на правој $2y + x - 2 = 0$.

8. Дата су темена троугла ABC; нађи једначине оних правих, које пролазе кроз почетак, а према странама троугловим имају *a)* паралелан, *b)* нормалан положај. $A(2, 3)$, $B(-4, 6)$, $C(3, -5)$,

9. Кроз пресек правих $\frac{x}{3} + y = 1$ и $\frac{x}{2} - y = 1$ повучена је нормала на ову другу праву; нађи њену једначину.

10. Дате су крајње тачке неке дужи $(1, -2)$ и $(3, -4)$; одреди једначину њене симетрале.

11. Стране једног троугла имају једначине $y = -x - 3$, $7y = -2x - 6$ и $3y = 2x - 14$; нађи *a)* координате његових темена, *b)* површину тог троугла.

12. Темена једног четвороугла имају координате: $(3, 4)$, $(2, 0)$, $(-2, -1)$, $(-2, 2)$; нађи пресек дијагонала.

13. Једначину праве $2x - 3y + 1 = 0$ доведи на нормалан облик и одреди угао α.

14. Одреди раздаљину *a)* тачке $(2, 3)$ од праве $4y = 3x + 12$; *b)* тачке $(-7, -4)$ од праве $15y = -8x - 30$.

15. Темена једног троугла имају координате $(-2, 2)$, $(4, 2)$, и $(1, 6)$; нађи *a)* једначине стра̂на̂; *b)* једначине виси̂на̂; *c)* саме висине; *d)* координате средишта уписаног и описаног круга.

16. Одреди раздаљину почетка од правих $2x + 3y - 7 = 0$ и $3x + 5y + 2 = 0$.

17. Дате су једначине кракова једног угла: *a)* $3y + 4x = 2$ и $4y = 3x - 5$; *b)* $10y - 24x = 1$ и $6y - 8x = 5$; нађи једначине обе угаоне симетрале.

18. Довести на нормалан облик ове једначине: *a)* $x - y = 0$; *b)* $x + y = 0$; *c)* $2x - 7 = 0$; *d)* $2x + 7 = 0$; *e)* $3y - 4 = 0$; *f)* $3y + 4 = 0$; *g)* $y + x\sqrt{3} = 0$; *h)* $y - x\sqrt{3} = 0$.

Ако права пролази кроз почетак, онда је угао α у нормалном облику онај мањи од два позитивна угла које гради у почетку подигнута нормала на дату праву с позитивном страном апсцисне осе.

19. Пролазе ли праве *a)* $2x + 3y - 48 = 0$; *b)* $x + 2y + 7 = 0$ кроз пресек правих $y = -3x + 5$ и $y = -2x - 4$?

Докажи аналитички ове теореме:

20 Симетрале једног угла и његова упоредна угла стоје једна на другој нормално.

21. Све три висине у троуглу секу се у истој тачки.

22. Све три симетрале троугловних страна секу се у истој тачки.

23. Једном троуглу је основа a, а d^2 је разлика између квадрата других двеју страна; одреди геометријско место темену.

24. Одреди геометријско место оних тачака, које имају од праве $4x - 3y + 5 = 0$ раздаљину *a)* 4, *b)* -3.

25. Над дужи $AB = c$ конструиши троугле ABC тако, да стране AC и BC стоје у размери као њихове пројекције на AB; нађи геометријско место за C.

26. Над дужи $AB = c$ конструиши троугле ABC тако да их висина из C дели по размери $m:n$; нађи геометријско место за C.

27. Дат је прав угао. Нађи геометријско место оних тачака, за које је *a)* збир, *b)* разлика њихових раздаљина од кракова константна количина. Како гласи једначина геометријског места, кад збир тих раздаљина стоји према њиховој разлици у сталној размери $a:b$?

28. Дат је равностран троугао; нађи геометријско место оних тачака, чије су раздаљине од основице тог троугла једнаке с полузбиром њихових раздаљина од оних других двеју страна.

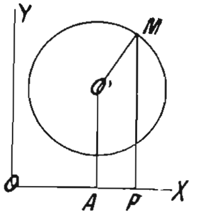
IV. Кружна линија.

425. Општа једначина круга.

Све тачке на кружној линији једнако су удаљене од средишта. Да бисмо добили једначину круга, треба само ту карактеристичну особину његову превести на језик аналитичких знакова.

Ако су (сл. 213) $OP = x$, $MP = y$ координате тачке M на кружној линији чији је полупречник $O'M = r$, а $OA = p$, $O'A = q$ координате средишта O', онда је за сваку тачку на периферији

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \text{ (чл. 401)} \ldots\ldots 1).$$



Сл. 213.

Ова једначина зове се општа једначина круга; како она не мења свој значај, кад се помножи једном константном a, то се она може довести на облик:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0 \ldots\ldots 2).$$

У општој једначини круга налази се, дакле, x и y у другом степену, а производа xy нема; чланови са x^2 и y^2 имају једнаке коефицијенте.

И обрнуто, може се доказати да свака једначина горњег облика представља круг. Јер, она се може трансформовати у ову:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2};$$

а ова значи круг коме је

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{c}{2a}, \quad r = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}.$$

Али је још потребно, да буде $b^2 + c^2 > 4ad$; кад би било $b^2 + c^2 < 4ad$, онда би x и y било уображено. За $b^2 + c^2 = 4ad$ морало би бити $x = -\frac{b}{2a}$, $y = -\frac{c}{2a}$. Једначина би тада представљала тачку.

426. За особите положаје круга добија његова једначина простије облике.

1. Ако је средиште круга на позитивној апсцисној полу-оси, и то у раздаљини $p = r$ од O, онда се једначина 1) претвара у ову:

$$x^2 + y^2 = 2rx \ldots\ldots 3).$$

Та се једначина зове тѐмена једначина круга.

2. Ако ли је средиште круга у координатном почетку, онда је $p = o$, $q = o$, и тада се из 1) добија једначина

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots 4).$$

Та се једначина зове средишна једначина круга.

427. Претрес једначине $x^2 + y^2 = r^2$.

Узимамо средишну једначину као најпростију.

1. Из $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ и $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ излази, да свакој вредности од $x\ (y)$, за коју у опште постоји стварно $y\ (x)$, одговарају две једнаке али супротно означене вредности од $y\ (x)$;

према томе је кружна линија подељена апсцисном (ординатном) осом на два симетрична дела.

За тачке, у којима кружна линија сече апсцисну осу, ордината је $y = o$, с тога $x = \pm r$. За тачке, у којима круг сече ординатну осу, апсциса је $x = o$, с тога $y = \pm r$. Према томе кружна линија сече и апсцисну и ординатну осу у двема тачкама на супротним странама координатна почетка у раздаљини r.

3. За $x > r$ постаје y уображено, за $y > r$ постаје x уображено; полупречник је, дакле, највећа вредност која се може ставити на место x или y.

428. Поларна једначина круга.

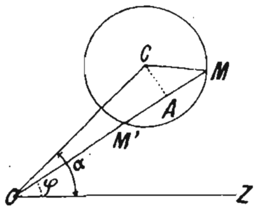
Нека је (сл. 214) C средиште круга, $CM = a$ његов полупречник, за тим O пол поларног координатног система, $OC = \varrho$ потег средишта, а $ZOC = \alpha$ угао који захвата OC са поларном осом OZ. Ако је M буди која тачка на кругу, дакле $r = OM$ њен потег, а $\varphi = ZOM$ аномалија, онда се из једначине круга

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = a^2,$$

замењујући у њој $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $p = \varrho \cos \alpha$, $q = \varrho \sin \alpha$, добија

$$r = \varrho \cos (\alpha - \varphi) \pm \sqrt{a^2 - \varrho^2 \sin^2 (\alpha - \varphi)}$$

као општа поларна једначина круга.



Сл. 214.

За $\varrho = o$ добија та једначина облик $r = a$.

Дискутуј једначину. При томе ваља имати на уму, да је $AC = \varrho . \sin (\alpha - \varphi)$. Изведи из једначине правило, да је $OM.OM'$ константно.

429. Положај праве према кругу.

Узећемо средишну једначину круга и једначину праве у нормалном облику.

За тачке, у којима се обе линије секу, вреде једначине

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{и}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

Решавајући ове две једначине, налазимо:

$$y = \frac{p - x \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$x^2 + \frac{(p - x \cos \alpha)^2}{\mathrm{siu}^2 \alpha} = r^2$$

$$x^2 \sin^2 \alpha + p^2 + x^2 \cos^2 \alpha - 2px \cos \alpha = r^2 \sin^2 \alpha,$$

$$x^2 - 2px \cos \alpha = r^2 \sin^2 \alpha - p^2,$$

$$x = p \cos \alpha \pm \sqrt{p^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha - p^2}$$

$$= p \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{r^2 - p^2}.$$

Из те једначине читамо, да права, чија је раздаљина од кружног средишта $= p$, има с кругом две заједничке тачке, једну, или ни једну, према томе да ли је

$$r \gtreqless p \text{ (чл. 73).}$$

430. Задаци.

1. Једначина круга гласи:

$$a)\ x^2 + y^2 = 6x + 8y + 24; \quad b)\ x^2 + y^2 = 2x;$$

$$c)\ 36x^2 + 36y^2 + 36x + 144y + 89 = 0.$$

Одреди координате његова средишта и полупречник; да ли је почетак у кругу, или изван круга?

2. Конструиши кругове:

$$a)\ x^2 + y^2 - 6y = 16; \quad b)\ 2x^2 + 2y^2 - x = 0;$$

$$c)\ 4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y = 19; \quad d)\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0.$$

3. Једначина круга дата је пропорцијом $x : y = (y - 6) : (8 - x)$; конструиши тај круг. Пролази ли он кроз почетак?

4. Одреди пресеке круга $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ са коорд. осама; какву особину имају производи одсечака на осама?

5. Како гласи једначина круга који пролази кроз почетак, а средиште му је $(4, -5)$?

6. Постави једначину круга, који пролази кроз почетак и тачке $(2, -1)$, $(3, -2)$.

7. Нађи једначину круга који пролази кроз тачке $(4, -2)$, $(-1, 3)$ и $(-5, -1)$. Сече ли он осе?

8. Нађи једначину круга, који пролази кроз спољашњу и унутрашњу тачку сличности два дата круга, а пречник му је раздаљина тих тачака.

9. Како гласе једначине оних кругова, који додирују *a)* апсцисну осу у тачки $x = m$, *b)* ординатну осу у тачки $y = n$, *c)* обе координатне осе?

10. Нађи једначину круга, који додирује праву $2x + 3y - 26 = 0$, а средиште му је $(3, -2)$.

11. Круг, коме је средиште (p, q), додирује праву $y = mx + b$; како гласи његова једначина?

12. Полупречником $r = 5$ описан је круг, који додирује праву $4y + 3x = 25$ у тачки чија је апсциса $x = 3$; како гласи једначина тог круга?

13. Нађи једначину круга који пролази кроз тачку (6, 8) и додирује праву $4x + 3y + 1 = 0$ у тачки чија је апсциса $x = -1$.

14. Стране једног троугла имају једначине:

$$y = 3, \quad x + y + 1 = 0 \quad x - y - 1 = 0;$$

нађи једначину уписаног круга.

15. Нађи једначину круга, који пролази кроз тачке (— 2, 0) и (2, 0) и додирује праву $3x - 4y + 6 = 0$.

16. Нађи једначину круга, који пролази кроз тачке (0, 0) и (2, 0) и додирује круг $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ с поља.

17. Дата су два круга својим једначинама:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4;$$

нађи *a)* једначину њихове централе; *b)* раздаљину координатног почетка од те централе; *c)* одреди положај оба круга.

18. Колика је дужина заједничке тетиве ова два круга:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad (x - 1)^2 + y^2 = 4?$$

19. Колико заједничких тачака има права *a)* $y = x + 2$, *b)* $4x + 3y = 50$, *c)* $3y = x + 40$ с кругом $x^2 + y^2 = 100$?

20. Круг $4x^2 + 4y^2 = 25$ и права $2y = 14x - 25$ секу се; одреди *a)* координате тих пресека, *b)* дужину тетиве између тих тачака; *c)* средишни угао који одговара тој тетиви.

21. Одреди једначину геометријског места за темена свих троуглова, који имају заједничку основицу a, и у којих је *a)* збир квадрата других двеју страна m^2; *b)* размера других двеју страна $= m : n$. Конструиши те линије.

22. У троуглима AB_1C основица је $BC = a$ константна; одреди место за средину стране AC, ако AB има сталну дужину c.

23. Одреди геометријско место оних тачака у унутрашњости равнокраког троугла, за које је раздаљина од основице средња пропорционала између њихових раздаљи́на́ од кракова. Конструиши ту линију.

V. Елипса.

431. Елипса је у равни линија такве особине, да је за сваку њену тачку збир њених раздаљи́на́ од двеју датих тачака сталан.

Ако су F и F' (сл. 215) дате тачке, а $2a$ стални збир раздаљи́на́ сваке тачке на елипси од оних двеју тачака, онда је M тачка на елипси, ако је $FM + F'M = 2a$.

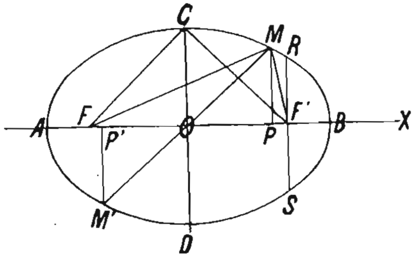
Две дате тачке F и F' зову се жиже у елипсе, а дужи FM и $F'M$ од тачке M на елипси до једне и друге жиже зову се потези те тачке.

432. Одређивање потега.

Нека је O (сл. 215) средина дужи FF' и уједно почетак координата, а AB апсцисна оса. Ако је M буди која тачка на елипси, дакле $FM + F'M = 2a$, а $x = OP$, $y = MP$ координате те тачке, онда се — стављајући $OF = OF' = e$ — по чл. 401 налази

$$FM^2 = (x + e)^2 + y^2$$
$$F'M^2 = (x - e)^2 + y^2, \text{ с тога}$$
$$FM^2 - F'M^2 = 4ex, \text{ или}$$
$$(FM + F'M)\,(FM - F'M) = 4ex;$$

па како је $FM + F'M = 2a$, то је



Сл. 215.

$$FM - F'M = \frac{2ex}{a}; \text{ решавајући те једначине}$$

налазимо $FM = a + \dfrac{ex}{a}$,

$$F'M = a - \frac{ex}{a}\cdot$$

433. Једначина елипсе.

Из $\triangle FPM$ (сл. 215) излази $MP^2 = FM^2 - FP^2$, или

$$y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 - (x + e)^2 = a^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} - x^2 - e^2$$
$$= a^2 - e^2 - \frac{a^2 - e^2}{a^2}\cdot x^2, \text{ с тога}$$
$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - e^2)$$

Како је увек $FM + F'M > FF'$, дакле $2a > 2e$, или $a > e$, то мора разлика $a^2 - e^2$ бити увек позитивна. Ако ставимо $a^2 - e^2 = b^2$, добићемо

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

као једначину елипсе. Она се може написати и у облику:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

434. Дискусија једначине $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Решавајући ту једначину прво по y, за тим по x, налазимо

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2};$$

отуд видимо, да свакој вредности од x, за коју је y у опште стварно, одговарају по две једнаке али супротно означене вредности од y; и да тако исто свакој вредности од y, за коју је x у опште стварно, одговарају по две једнаке али супротно означене вредности за x. Елипса је дакле једном и другом координатном осом подељена на две симетричне половине.

Како се у једначини елипсе налазе само квадрати од x и y, то ће она бити задовољена и онда кад се на место x и y стави $-x$ и $-y$; то значи, ако је $M(+x, +y)$ једна тачка на елипси, онда је и тачка $M'(-x, -y)$ на елипси. Вежемо ли M са M' правом линијом, онда њена средина има координате 0, 0, т.ј. та је средина почетак O. У елипсе дакле свака тетива која пролази кроз O, преполовљена је том тачком; с тога се O зове средиште у елипсе, свака тетива кроз средиште пречник, а једначина $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ средишна једначина елипсе.

2. За $y = 0$ налази се $x = \pm a$, а за $x = 0$ добија се $y = \pm b$. Елипса сече, дакле, апсцисну осу у раздаљинама $+a$ и $-a$, а ординатну осу у раздаљинама $+b$ и $-b$ од коорд. почетка.

3. Највећа вредност, коју може добити x, јесте a; а највећа вредност за y јесте b; за $x > a$ биће y, а за $y > b$ биће x уображено. Ако се, дакле, повуку две паралелне према ординатној оси у раздаљинама $+a$ и $-a$, и две паралелне према апсцисној оси у раздаљинама $+b$ и $-b$, онда оне граде правоугаоник у којем је цела елипса затворена. Отуд излази да је елипса затворена крива линија.

4. Ако је d раздаљина OM које било тачке M на елипси од средишта O, онда је

$$d = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + x^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x^2}.$$

За $x = \pm a$ добивају се, апсолутно узевши, две највеће вредности $d = \sqrt{a^2} = a = OB = OA$. За $x = 0$ добивају се две најмање вредности $d = \sqrt{b^2} = b = OC = OD$. С тога је између свих тетива, повучених кроз средиште, AB највећа, а CD најмања. Зато се $AB = 2a$ зове велика, $CD = 2b$ мала оса у елипсе; тачке A и B зову се темена велике, C и D темена мале осе.

Отуд излази и ово правило: Збир оба потега сваке тачке на елипси једнак је с великом осом.

5. Из $a^2 - e^2 = b^2$ добија се

$$FO = F'O = e = \sqrt{a^2 - b^2};$$

ова се количина зове линеарна ексцентричност у елипсе. Размера $\frac{e}{a} = \varepsilon$ зове се бројна ексцентричност.

6. Што је мања ексцентричност, тим је мања разлика између a и b, тим се више елипса приближује кругу; кад је $e = o$, онда је $a = b$, и једначина елипсе претвара се у једначину круга. Круг се, према томе, може сматрати као елипса у које је ексцентричност нула.

7. За $x = e = \sqrt{a^2 -- b^2}$ добија се $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Тетива RS, повучена крој једну жижу нормално на велику осу, зове се параметар у елипсе. Ако се тај параметар обележи са $2p$, онда је $p = \frac{b^2}{a}$, тј. половина параметра трећа је непрекидна пропорционала великој и малој полу-оси.

435. Темена једначина елипсе.

Ако се на место средишта O (сл. 215) узме теме A за координатни почетак, а задржи велика оса AB као апсцисна оса, онда пређашње ординате вреде и за нови координатни систем, а нове су апсцисе веће од старих за половину велике осе, т.ј. за a. Ако су x, y координате једне тачке M на елипси у старом систему, а x', y' њене координате у новом систему, онда је $x = x' - a$, $y = y'$ (упореди и чл. 399, a). Једначина $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ претвара се, дакле, у ову:

$$b^2 (x' - a)^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2, \text{ или } y'^2 = \frac{b^2}{a^2} (2\,ax' - x'^2)$$

или, кад се изоставе казаљке и стави $\frac{b^2}{a} = p$:

$$y^2 = \frac{p}{a} (2\,ax - x^2) = 2\,px - \frac{px^2}{a}.$$

436. Поларна једначина елипсе.

Нека је F (сл. 215) пол, а FB поларна оса. За тачку M је $FM = r = a + \frac{ex}{a}$, ако је x апсциса у систему O. Ако се тај систем помери паралелно у F, и ако је x' нова апсциса, онда је $x = x' - e$, дакле $r = a + \frac{e\,(x' - e)}{a}$; па како је $x' = r \cos \varphi$, то се добија $a r = a^2 + e r \cos \varphi - e^2$,

$$r\,(a - e \cos \varphi) = a^2 - e^2$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a - e \cos \varphi} = \frac{b^2}{a - e \cos \varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a} \cos \varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

као поларна једначина елипсе; овде је $\varepsilon < 1$.

Задаци.

437. 1. Одреди тачке на елипси, кад је дата велика оса и обе жиже.

Између жижа ваља узети тачку; она дели велику осу на два неједнака дела; тим деловима као полупречницима ваља описати око обе жиже кружне лукове; пресеци тих лукова јесу тачке на елипси.

2. Конструисати тачке на елипси, кад су дате обе осе.

3. Одреди једначину елипси, кад је дата једна њена тачка (2, 1) и велика оса = 8.

4. Која тачка на елипси $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ има једнаку апсцису и ординату? Како се може та тачка наћи конструкцијом?

5. Како гласи темена једначина елипсе у које је мала оса $2b$, а параметар $2p$?

6. Како гласи средишна једначина оне елипсе, у које је $p = 2$, $b = 4$?

7. У каквом односу према великој оси једне елипсе стоје потези једне тачке, кад је та тачка a) у елипси, b) изван елипсе? Какав је знак тринома $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2$ у оба случаја?

8. Какав је положај тачке a) (4, 3), b) (3, 3) према елипси $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$?

9. Дате су две, које било од ових количина: a, b, e, p; нађи остале конструкцијом?

10. Раздаљине Земље од Сунца у перихелу и афелу стоје у размери 29 : 30. Израчунај бројну ексцентричност Земљине путање.

11. Шта представљају једначине $a)$ $25 x^2 + 16 y^2 = 400$, $b)$ $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$?

12. Координате средишта једне елипсе нека су m и n, а осе њене $2a$ и $2b$; како гласи једначина те елипсе, кад су њене осе паралелне с координатним осама?

13. Дата је једначина елипсе $9 x^2 + 16 y^2 + 36 x - 96 y + 36 = 0$; одреди $a)$ координате њена средишта, $b)$ обе осе. Координатне осе треба померити паралелно, па изабрати координате новог почетка тако, да нестане чланова са x и y; или, из чланова са x, исто тако из чланова са y, ваља издвојити заједничке чиниоце, па изразе у загради допунити до потпуних квадрата.

14. Дата је једначина елипсе: $9 x^2 + 16 y^2 = 144$, и једначина праве: $a)$ $y = 3x + 5$, $b)$ $y = x + 5$, $c)$ $y = 2x - 9$; колико заједничких тачака има елипса са сваком правом?

15. Нађи ону тетиву елипсе $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$, која је преполовљена тачком (2, 1).

16. Израчунај координате оних тачака, у којима симетрале углова између координатних оса секу елипсу $5 x^2 + 7 y^2 = 35$.

17. Израчунај дужину оног пречника у елипсе $5 x^2 + 7 y^2 = 35$, који је паралелан с правом $5y - 2x = 7$.

18. Израчунај дужину оног пречника у елипсе, који полови угао између обе осе.

19. Кад се узме пол у средишту елипсе, а позитивна страна апсцисне осе за поларну осу, онда поларна једначина елипсе гласи: $r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$.

20. Израчунај онај пречник у елипсе, који је према великој оси нагнут под углом φ.

$$\left(d^2 = \frac{4\,a^2\,b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}\right).$$

21. Колике су у елипсе оне тетиве, које су повучене кроз једну жижу паралелно према угаоним симетралама између обе осе? (поларна једначина).

22. У елипсе је свака тетива, која пролази кроз жижу, трећа геометријска пропорционала великој оси и пречнику који је с том тетивом паралелан. (Поларна једначина).

23. Израчунај површину квадрата, уписаног у елипси

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

24. У кругу су са свију тачака његове периферије спуштене нормале на један пречник; наћи геометријско место за средине тих нормала.

25· Права сталне дужине помиче се тако, да јој се крајње тачке крећу по крацима права угла; наћи место оној тачки те праве, чије су раздаљине од крајњих тачака a и b.

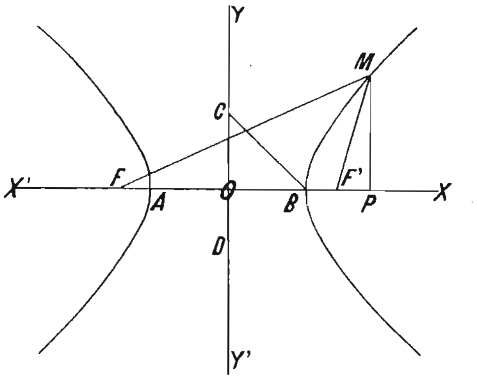
26. Над једном истом страном $2e$ конструисани су троугли, у којих је збир других двеју страна $2a$; наћи геометријско место за тежишта тих троуглова.

27. Са свију тачака на периферији једног круга спуштене су нормале на једну праву; наћи геометријско место за средине свију тих нормала.

28. Наћи геометријско место за врхове A свих троуглова над BC, *a)* у којима је страна AB средња пропорционала између одсечака на које је подељена страна BC висином из A; *b)* у којих је квадрат висине на BC m-пута већи од правоугаоника из одсечака на које је подељена страна BC висином из A. ($m = 1$?).

VI. Хипербола.

438. Хипербола је у равни линија такве особине, да је за сваку њену тачку разлика између њених раздаљйна̂ од двеју тачака стална.



Сл. 216.

Ако су F и F' (сл. 216) дате тачке, а $2a$ стална разлика између раздаљина сваке тачке на хиперболи, онда је M тачка на хиперболи, ако је $MF - MF' = 2a$.

Две дате тачке F и F' зову се жиже у хиперболе, а дужи FM и $F'M$ потези тачке M.

439. Одређивање потега. Ако се средина O између обе жиже узме за почетак координата, а FF' за апсцисну осу, па се стави $OF = O'F = e$, онда се, слично као код елипсе у чл. 432, за неку произвољну тачку M на хиперболи налази:

$$FM = \frac{ex}{a} + a,$$

$$F'M = \frac{ex}{a} - a.$$

440. Једначина хиперболе.

Из троугла FMP (сл. 216) добија се истим путем као код елипса у чл. 433.:

$$(a^2 - e^2)\, x^2 + a^2 y^2 = a^2\, (a^2 - e^2).$$

Разлика $a^2 - e^2$, која је код елипсе била позитивва, мора се овде узети негативна, јер је $FM - F'M < FF'$, дакле $2a < 2e$, или $a < e$, према томе и $a^2 < e^2$. Ако дакле ставимо $a^2 - e^2 = - b^2$, онда се добија као једначина хиперболе:

$$- b^2 x^2 + a^2 y^2 = - a^2 b^2, \text{ или } b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Та се једначина може писати и овако:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Хиперболина једначина разликује се од једначине елипсе у томе, што је на место b^2 дошло $- b^2$.

441. Дискусија једначине $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$.

1. Та једначина даје

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}.$$

Док је (апсолутно) $x < a$, биће y уображено; начини ли се $AO = BO = a$, и подигну у тачкама A и B нормале на апсцисну осу, онда између тих нормала нема ни једне тачке хиперболине. Свакој апсциси $x > a$ одговарају по две једнаке, али супротне вредности од y; исто тако добивају се за сваку вредност од y две једнаке али супротне апсцисе. Хиперболу чине дакле две одвојене гране у симетричном положају према ординатној оси; свака је грана апсцисном осом подељена на два симетрична дела. Како се у једначини налазе само квадрати од x и y, то мора и тачка $(- x, - y)$ припадати хиперболи, ако је $(+ x, + y)$ тачка на хиперболи. Исто онако као код елипсе у чл. 434. долази се до закључка, да је O средиште у хиперболе; с тога се једначина $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ зове средишна једначина хиперболе.

2. Како вредности за x и y могу бити произвољно велике. то излази, да се гране у хиперболе простиру у бескрајност.

3. За $y = o$ биће $x = \pm a$; хипербола сече дакле апсцисну осу у двема тачкама A и B, чија је раздаљина $2\,a$. Дуж $AB = 2\,a$ зове се прва или главна оса у хиперболе; A и B зову се њена темена.

Отуд излази: разлика између потега сваке тачке на хиперболи једнака је с главном осом.

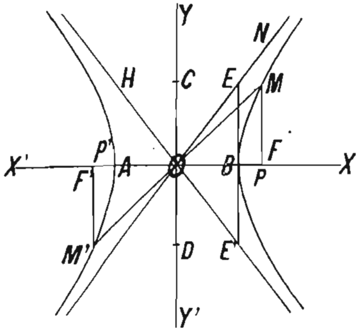
4. Хипербола не сече ординатну осу, али се због значајних односа дужи b према хиперболи преносе на ординатну осу дужи $OC = OD = \pm b$, па се, као и код елипсе, дуж $CD = 2\,b$ назива оса, и то споредна оса у хиперболе.

5. Из $a^2 - e^2 = - b^2$, или $e^2 = a^2 + b^2$ излази

$$OF = OF' = e = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Количина e зове се линеарна, а количина $\frac{e}{a} = \varepsilon$ бројна ексцентричност.

6. За $x = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ добија се $y = \pm \frac{b^2}{a}$. И код хиперболе се тетива, која у жижи стоји нормално на главној оси, зове параметар. Ако се он обележи са $2\,p$, онда је $p = \frac{b^2}{a}$, т.ј. половина параметра трећа је непрекидна пропорционала главној и споредној полу-оси.



Сл. 217.

7. Кад је $a = b$, онда се хипербола зове равнострана; њена је једначина $x^2 - y^2 = a^2$.

8. Ако се једначина хиперболе веже с једначином $y = mx$ једне праве $M'M$ која пролази кроз 0 (сл. 217) онда се за тачке, у којима се обе линије секу, налази:

$$x = \frac{\pm\, a\, b}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}, \qquad y = \frac{\pm\, a m b}{\sqrt{b^2 - a^2 m^2}}$$

где горњи знак вреди за тачку M, а доњи за тачку M'. Из тих израза види се, да је пресек такве праве са хиперболом могућан само онда, кад је $b^2 > a^2 m^2$, или кад је (апсолутно) $m < \frac{b}{a}$; чим би било $m > \frac{b}{a}$, вредности за x и y биле би уображене.

9. Нарочито су значајне оне две праве, за које је $b^2 = a^2 m^2$, дакле $m = \pm \frac{b}{a}$. Да бисмо те праве конструисали, ваља у тачки B подићи на OX нормалу, и на њу пренети $BE = BE' = b$, па повући праве OE и OE'; за те праве је

$$\operatorname{tang} NOB = \frac{b}{a} \text{ и } \operatorname{tang} HOB = -\frac{b}{a}.$$

Из хиперболине једначине налази се за ординату сваке тачке њене $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$; из те једначине види се, да се за једну исту апсцису ординате хиперболине тачке (M) и тачке (N) на тој правој разликују у толико мање, што је веће x, т.ј. да се гране у хиперболе све више приближују тој правој, не достижући је никад.

Права, која се једној кривој линији све више приближује, али се с њом никад не састаје, зове се асимптота те криве линије. Хипербола има две асимптоте; њихове су једначине:

$$y = +\frac{b}{a} \cdot x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

442. Темена једначина хиперболе.

Узимајући координатни почетак у B, налазиме исто онако као код елипсе,

$$y^2 = 2\,px + \frac{px^2}{a}.$$

443. Поларна једначина хиперболе.

Нека је на сл. 216. F', пол, а $F'X$ поларна оса; тада су $F'M = r$ и $XF'M = \varphi$ поларне координате тачке M.

Ако је x апсциса у систему O, онда је $F'M = r = \frac{ex}{a} - a$; померајући осе паралелно, тако да почетак дође у F', добићемо између нове апсцисе x' тачке M и њене старе апсцисе x однос: $x = x' + e$; тада је $r = \frac{e\,(x' + e)}{a} - a$, или $ar = er \cos \varphi + e^2 - a^2$ (пошто је $x' = r \cos \varphi$), или

$$r\,(a - e \cos \varphi) = b^2$$

$$r = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\ \psi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\ \cos\varphi}\ .$$

То је поларна једначина хиперболине гране BM; овде је $\varepsilon > 1$.

Задаци.

444. 1. Одредити произвољан број тачака једне хиперболе, кад су дате главна оса и обе жиже.

На продуженој главној оси, а изван жи́жâ, ваља узети колико се хоће тачака, па њиховим раздаљинама од сваког темена описати лукове око обе жиже; ти се лукови секу у хиперболиним тачкама.

2. Дата је једна тачка (x', y') хиперболе и главна оса $2\,a$; како гласи једначина те хиперболе?

3. Нађи на хиперболи $b^2x^2 - ay^2 = a^2b^2$ ону тачку која има једнаку апсцису и ординату. (Када је могућно решење овог задатка?)

4. Изведи једначину хиперболе из главне осе $2\,a$ и параметра $2p$.

5. Познате су две, које било, од ових количина: a, b, e, p; конструиши оне друге две.

6. a и b у хиперболе изра́зи количинама p и ε.

7. Израчунај ε у равностране хиперболе.

8. Нађи жиже једној хиперболи, кад су познате асимптоте и темена главне осе.

9. Која линија одговара једначини $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$?

10. У каквом односу стоје потези једне тачке према главној оси, ако је та тачка *a)* између хиперболских грана, *b)* на издубеној страни једне хиперболске гране? Какав је знак тринома $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$ у тим случајевима?

11. Какав је положај тачака $(5\sqrt{2}, 4)$, $(2, 3)$, $(10, 4)$ према хиперболи $16\,x^2 - 25\,y^2 = 400$?

12. Дата је хипербола $4\,x^2 - 9\,y^2 = 36$; постави једначине њених асимтота и израчунај њихове углове према апсцисној оси.

13. Синус асимптотног угла (EOE' сл. 217) у хиперболе изра́зи количином ε.

14. Нормала од једне жиже до асимптоте једнака је с половином споредне осе.

15. Конструиши линију $3\,x^2 + 6\,x - 5\,y^2 + 20\,y = 32$ (Упор. чл. 437, 12 и 13).

16, Колико заједничких тачака имају хипербола $4\,x^2 - 9\,y^2 = 36$ и права *a)* $y = \frac{4}{3}\,x + 2$, *b)* $y = 2\,x - 8$, *c)* $6\,y = 5\,x - 9$; нађи те тачке.

17. У колико тачака сече хиперболу једна права која је с једном асимптотом паралелна?

18. Израчунај површину правоугаоника, одређенога пресецима хиперболе $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и круга који има с хиперболом заједничко средиште, а полупречник му је њена ексцентричност.

19. Одреди на хиперболи $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ону тачку, из које се стварна оса види под углом *a)* 45^0, *b)* 30^0, *c)* 60^0.

20. Постави поларну једначину хиперболе, кад је пол у њену средишту, а позитивна страна апсцисне осе поларна оса.

21. Израчунај дужину оног пречника у хиперболе, који гради са X-осом угао φ.

22. Кроз жижу једне елипсе или хиперболе повучена је тетива у ком било правцу, па је конструисан правоугаоник од њених одсечака. Други је правоугаоник конструисан од целе тетиве и параметра. У којој размери стоје површине та два правоугаоника?

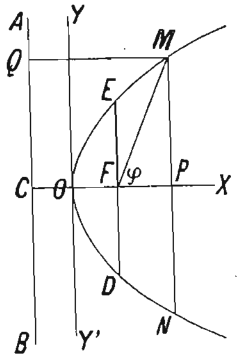
23. Нађи геометријско место за средишта свих кругова који с поља додирују кругове $x^2 + y^2 = 9$ и $(x - 5)^2 + y^2 = 4$.

24. Нађи геометријско место за врхове A свих троуглова који имају заједничку основицу a и у којих је $\beta = 2\gamma$.

25. У кругу повуци пречник AB чији продужак сече дирку CD у C; кад се у C подигне нормала CF на продужени пречник и начини $CF = CD$, шта је геометријско место за тачку F?

VII. Парабола.

445. Парабола је у равни линија такве особине, да је за сваку њену тачку раздаљина од једне дате тачке једнака с њеном раздаљином од једне дате праве.



Сл. 218.

Ако је F (сл. 218) дата тачка, а AB дата права, и $MQ \perp AB$, онда је M једна тачка параболе, ако је $MF = MQ$.

Дата тачка F зове се жижа, дата права AB водиља у параболе, а FM потег за тачку M.

446. Одређивање потега.

Повуцимо (сл. 218) $CF \perp AB$ и узмимо средину O нормале CF за координатни почетак, а COX за апсцисну осу. Ако је M буди која тачка на параболи, па ставимо

$OC = OF = \frac{p}{2}$, онда је $FM = MQ = CP = CO + OP$, дакле $FM = X + \frac{p}{2}$.

447. Једначина параболе.

По чл. 401 и 446 (сл. 218) имамо:

$$FM^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2;$$

с тога

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2; \text{ отуд}$$

$$y^2 = 2px$$

као једначину параболе.

448. Дискусија једначине $y^2 = 2px$.

1. Из те једначине излази $y = \pm\sqrt{2px}$. Свакој позитивној вредности од x одговарају две једнаке, али супротне ординате; парабола је дакле симетрична према апсцисној оси; OX зове се *оса* у параболе.

2. Кад је $x = o$, биће и $y = o$, дакле је и координатни почетак O једна тачка на параболи; она се зове теме, па с тога $y^2 = 2px$ темена једначина параболе. Што веће x, тим је веће и y; линија се, дакле, све више удаљује од апсцисне осе, она није затворена.

3. За негативно x постаје y уображено; с тога негативним апсцисама не одговарају никакве тачке на параболи.

4. Ставимо ли $x = \frac{p}{2} = OF$, биће $y = \pm p$; с тога је $DE = 2p$. Дакле $2p$ је тетива DE која у жижи стоји нормално на оси; она се зове параметар у параболе.

5. Из $y^2 = 2px$ излази $2p : y = y : x$, тј. ордината сваке тачке на параболи средња је пропорционала између апсцисе те тачке и параметра.

6. Ако су x' и x'' апсцисе, а y' и y'' ординате двеју тачака на параболи чији је параметар $2p$, онда је

$$y'^2 = 2px' \quad y''^2 = 2px'', \text{ с тога}$$

$$y'^2 : y''^2 = x' : x'',$$

тј. квадрати ординатâ двеју тачака на параболи стоје у размери њихових апсцисâ.

Додатак. Све криве линије, до сад посматране, могу се представити овом заједничком теменом једначином:

$$y^2 = 2px + qx^2$$

у којој p значи полупречник, ако једначина представља круг, а половину параметра за остале криве линије; за круг је $q = -1$, за елипсу је $q = -\frac{p}{a} = -\frac{b^2}{a^2}$, дакле негативно и апсолутно < 1, за хиперболу је $q = \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2}$, дакле позитивно, а за параболу је $q = 0$.

Упоређујући површину квадрата над ординатом тачке на елипси, хиперболи и параболи с правоугаоником од апсцисе те тачке и параметра, дошло се до имéнâ: ἔλλειψις, ὑπερβολή, παραβολή.

449. Поларна једначина параболе.

Ако се узме (сл. 218) да је пол у жижи F, а поларна оса FX, онда је за тачку M на параболи потег $r = FM$, $\varphi = XFM$. За сваки положај те тачке M вреди:

$$r = CP = CF + FP = p + r\cos\varphi;$$

према томе $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$.

Додатак. Све криве линије, посматране до сад, могу се представити заједничком поларном једначином

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi'}$$

у којој p значи полупречник ако једначина представља круг, а половину параметра за све остале линије; ε је за круг $= o$, за елипсу < 1, за хиперболу > 1, за параболу $= 1$.

Задаци.

450. 1. Конструкција параболе.

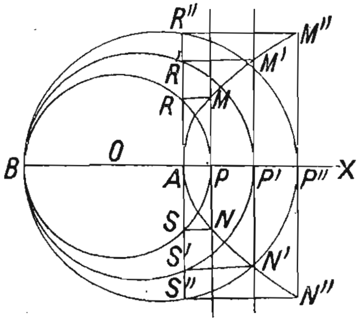
а) Према дефиницији. Нека је дата водиља и жижа. Прво се одређује оса и теме; за тим се на оси узимају произвољне тачке, кроз њих повлаче нормале на осу, и раздаљином сваке тачке од водиље као полупречником опишу око жиже кружни лукови, који ће сећи одговарајућу нормалу у тачкама параболе.

b) Према једначини (чл. 448, 5).

Нека је AB (сл. 219) параметар, A теме, AX оса у параболе. Узме се $BO > p$ и опише полупречником BO круг око 0, па се сматра

AP као апсциса једне параболине тачке; тада је AR ордината, с тога M тачка на параболи. Тако се налазе и M', M'' итд. па и сама парабола везивањем тих тачака.

2. У каквој размери стоји потег једне тачке према њеној раздаљини од водиље, ако је тачка *a)* на испупченој, *b)* на издубеној страни параболе?



Сл. 219.

Какав је знак у бинома $y^2 - 2px$ у та два случаја?

3. Како леже тачке $(4, -4)$, $(1, 3)$, $(5, 2)$ према параболи $y^2 = 4x$?

4. Одреди линије $y^2 = -16x$, $x^2 = 12y$, $x^2 = -10y$.

5. Параметар у параболе је $2p$, а оса јој је паралелна с апсцисном осом; координате темена нека су m и n; како гласи једначина те параболе?

Имај на уму, да ће се услед тог премештања координатног система појавити у једначини један члан са y и један константан члан.

6. Како гласи једначина параболе, кад се узме почетак у пресеку осе и водиље, а апсцисна оса поклапа се са параболском осом?

7. Једначина једне параболе гласи $y^2 - 4y - 6x - 3 = 0$; одреди *a)* координате њена темена, *b)* параметар.

Координатни систем треба померити паралелно и изабрати координате новог почетка тако, да нестане члана са y и константна члана. Или трансформацијом дате једначине у облик зад. 5.

8. У параболи $y^2 = 2px$ уписан је равностран троугао тако, да му је једно теме у параболину темену, а висина му поклапа осу у параболе; израчунај његову страну и површину и нацртај га.

8. Колико заједничких тачака имају парабола $y^2 = 5x$ и права *a)* $4y = 5x + 4$, *b)* $y = 2x - 1$, *c)* $y = 3x + 2$?

10. У колико тачака сече параболу права паралелна с њеном осом?

11. Кроз жижу једне параболе повучена је тетива нормално на праву $y = 2x$; одреди средину тој тетиви.

12. Тело, које се налази у висини h над хоризонтом, креће се у хоризонталном правцу једнаком брзином c (у секунду), а услед своје тежине у вертикалном правцу с убрзањем g. *a)* Какву линију представља његова путања? *b)* после ког времена, и *c)* у којој хоризонталној раздаљини од полазне тачке стиже оно у хоризонталну раван?

13. Израчунај збир реципрочних вредности одсечака на тетиви која пролази кроз жижу у елипсе, хиперболе и параболе. (Поларна једначина).

14. Четворогуби правоугаоник од одсечака параболске тетиве, која пролази кроз жижу, једнак је с правоугаоником од целе тетиве и параметра. (Поларна једначина).

15. Нађи једначину геометријског места за средишта оних кругова, који пролазе кроз тачку (1, 1) и додирују ординатну осу.

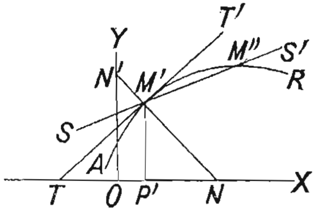
16. Нађи једначину геометријског места за средишта оних кругова, који додирују праву $y = -4$ и круг $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ с поља, или изнутра.

17. Нађи једначину геометријског места за средишта оних кругова, који додирују један дати круг и једну праву повучену кроз његово средиште.

VIII. Тангенте и нормале кривих линија.

451. Општи појам о тангенти.

Нека је AR (сл. 220) каква било крива линија, а M' тачка у којој треба да је додирује права TT'. Замислимо прво сечицу, која пролази кроз ту додирну тачку M' и једну оближњу тачку M''; кад се та сечица обрће око M' тако да се тачка M'' све више приближује тачки M', онда ће се и сечица SS' све више примицати тангенти TT', и напослетку ће је поклопити, кад M'' падне на M'.



Сл. 220.

Према томе се тангента какве криве линије може сматрати као њена сечица, која је обртањем око једне пресечне тачке доведена у такав положај, да се друга пресечна тачка поклапа с првом.

Права $M'N$, која у додирној тачки M' стоји нормално на тангенти, зове се **нормала** криве линије.

При додиру праве и криве линије важне су ове четири количине:

1. **тангента** $M'T$, тј. на дирци дуж од додирне тачке до пресека с апсцисном осом.

2. **под-тангента** $P'T$, тј. пројекција тангенте на апсцисној оси;

3. **нормала** $M'N$, тј. дужина нормалне линије између додирне тачке и апсцисне осе.

4. **поднормала**, тј. пројекција нормале на апсцисној оси.

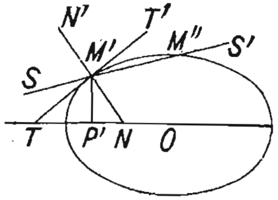
Дужине те четири линије зову се додирне количине за тачку M'. Тангента и нормала узимају се увек позитивно, а подтангента и поднормала позитивно или негативно, према томе да ли се налазе десно или лево од ординате; оне су у сваком случају одређене разликом $x - x'$, где x значи апсцису пресека тангенте, односно нормале, с апсцисном осом, а x' апсцису додирне тачке (чл. 394).

1. Елипса и круг.

452. Једначине тангенте и нормале.

Ако су x', y' и x'', y'' координате двеју оближњих тачака M' и M'' (сл. 221) једне елипсе, чија је једначина

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$



Сл. 221.

онда сечица, SS', која пролази кроз M' и M'', има једначину:

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x'),$$

с којом у исто доба вреде погодбене једначине

$$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2,$$
$$b^2x''^2 + a^2y''^2 = a^2b^2;$$

одузимањем добијамо из ових једначина:

$$b^2\,(x''^2 - x'^2) + a^2\,(y''^2 - y'^2) = 0, \quad \text{или}$$

$$b^2\,(x'' - x')\,(x'' + x') + a^2\,(y'' + y')\,(y'' - y') = 0, \text{ с тога}$$

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = -\,\frac{b^2\,(x'' + x')}{a^2\,(y'' + y')}\,.$$

Кад се ова вредност замени у горњој једначини сечице SS', онда та једначина добија облик:

$$y - y' = -\,\frac{b^2\,(x'' + x')}{a^2\,(y'' + y')}\,(x - x').$$

1. Кад се тачке M' и M'' поклопе, онда сечица SS' прелази у положај тангенте TT'; ако дакле у последњој једначини ставимо $x'' = x'$, $y'' = y'$, онда се за тангенту TT' добија једначина

$$y - y' = -\,\frac{b^2x'}{a^2y'}\,(x - x') \,\ldots\ldots\, 1),$$

која се може и овако представити:

$$b^2xx' + a^2yy' = a^2b^2.$$

У овом облику даје се једначина тангенте непосредно и лако извести из једначине елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, кад се квадрати x^2 и y^2 замене производима xx' и yy'.

2. За нормалу NN', која стоји у тачки M' нормално на тангенти, добија се једначина

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}\,(x - x') \,\ldots\ldots\, 2).$$

Додатак. Кад је $a = b = r$, онда се елипса претвара у круг. Према томе је за круг

a) једначина тангенте

$$y - y' = -\,\frac{x'}{y'}\,(x - x'), \text{ или } xx' + yy' = r^2;$$

b) једначина нормале

$$y - y' = \frac{y'}{x'}\,(x - x'), \text{ или } y = \frac{y'}{x'}\,x;$$

из ове последње једначине види се, да у круга свака нормала пролази кроз средиште.

453. Израчунавање додирних количина.

1. Кад се у једначини тангенте стави $y = o$, добија се $OT = \frac{a^2}{x'}$ као апсциса тачке T (сл. 221); с тога је подтангента

$$P'T = OT - x' = \frac{a^2 - x'^2}{x'}\,.$$

Тај израз показује, да подтангента независи од мале осе $2b$, и да према томе све елипсе, па дакле и круг, које су описане над истом великом осом, имају за једну исту апсцису и једнаке подтангенте.

2. За тангенту $M'T$ добија се:

$$M'T^2 = M'P'^2 + P'T^2 = y'^2 + \frac{(a^2 - x'^2)^2}{x'^2} = \frac{y'^2}{x'^2}\left(x'^2 + \frac{a^4y'^2}{b^4}\right)\,.$$

С тога тангента $M'T = \frac{y'}{b^2x'}\,\sqrt{b^4x'^2 + a^4y'^2}.$

3. Ако се у једначину нормале унесу координате тачке $N\;(x = ON,\ y = o)$, добија се за поднормалу

$$ON - x' = -\,\frac{b^2x'}{a^2}\,.$$

4. Нормала $M'N$ одређује се овако:

$$M'N^2 = M'P'^2 + P'N^2 = y'^2 + \frac{b^4 x'^2}{a^4} = \frac{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}{a^4}$$

с тога

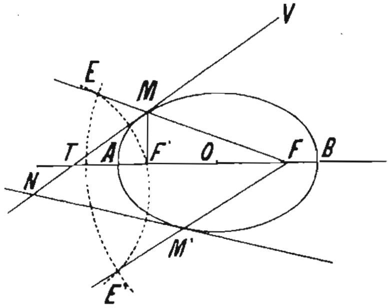
$$\text{нормала } M'N = \frac{\sqrt{b^4 x'^2 + a^4 y'^2}}{a^2}.$$

Додатак. Кад је $a = b = r$, онда је за круг

a) под-тангента $= \frac{r^2 - x'^2}{x'}$; *b)* тангента $= \frac{r\,y'}{x'}$;

c) поднормала $= - x'$; *d)* нормала $= r$.

454· Свака дирка у елипсе гради с потезима додирне тачке једнаке углове.



Сл. 222.

Нека су (сл. 222) FM и $F'M$ потези тачке $M(x', y')$ на елипси чије је средиште O.

По чл. 453, 1. има тачка T, у којој дирка у елипсе сече апсцисну осу, апсцису $\frac{a^2}{x'}$.

Ако је $F'ME$ спољашњи угао троугла $FF'M$, MT његова симетрала, а T њен пресек с апсцисном осом, онда је по члану 117, 2.

$$F'T : FT = F'M : FM$$

или, с погледом на чл. 432,

$$(OT - e) : (OT + e) = \left(a - \frac{e x'}{a}\right) : \left(a + \frac{e x'}{a}\right)$$

а отуд, као и горе, иста вредност за $TO = \frac{a^2}{x'}$.

Дакле тачка, у којој симетрала угла $F'ME$ сече апсцисну осу, идентична је с пресеком дирке и апсцисне осе; тј. дирка у тачки M симетрала је углу $F'ME$.

Како је $EMT = FMV$, а $F'MT = EMT$, то је и $F'MT = FMV$.

То правило објашњује ове појаве, које се оснивају на законима о рефлексији. Кад из једне жиже елиптична огледала полазе светлосни, топлотни или звучни зраци, онда их огледало одбија тако, да се они скупљају у другој жижи. Кад се у суду елиптична облика, у коме се налази каква течност, у једној жижи изазове таласасто кретање, онда се одбијени таласи састају у другој жижи.

2. Хипербола.

455. Тангенте и нормале у хиперболе.

Једначине тангенте и нормале, као и дужине тангенте, подтангенте, нормале и поднормале могу се извести слично као код елипсе (чл. 452 и 453); ну оне се могу одмах написати и из резултата, тамо добивених, кад се у њима на место b^2 стави $- b^2$.

456. Свака дирка у хиперболе гради с потезима додирне тачке једнаке углове.

Доказује се, с погледом на чл. 117, 1, слично као у чл. 453.

На овом правилу оснива се појава, да хиперболно издубено огледало одбија светлосне зраке, која долазе из једне жиже, тако као да одбијени зраци долазе из друге жиже.

3. Парабола.

457. Једначине тангенте и нормале.

Једначина сечице, која пролази кроз тачке (x', y') и (x'', y'') на параболи $y^2 = 2px$, гласи

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

Ну како је $y'^2 = 2px'$ и $y''^2 = 2px''$, то је

$$y''^2 - y'^2 = 2p(x'' - x'), \text{ а } \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{2p}{y'' + y'}.$$

Заменом добија се као једначина сечице

$$y - y' = \frac{2p}{y'' + y'}(x - x').$$

1. Кад се тачке (x'', y'') и (x', y') поклопе, онда је $y'' = y'$, и тада се добија као једначина тангенте

$$y - y' = \frac{p}{y'}(x - x') \ldots\ldots 1)$$

или

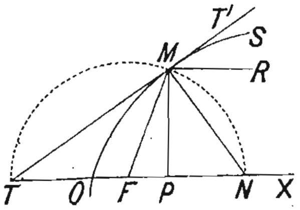
$$y y' = p(x + x').$$

2. За нормалу, која одговара тој тангенти, добија се из 1)

$$y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x') \ldots\ldots 2).$$

458. Израчунавање додирних количина.

1. Кад се у једначини тангенте стави $y = o$, онда се добија апсциса OT (сл. 223) тачке T: $OT = - x'$.



Сл. 223.

Под-тангента $PT = - 2x'$.

Под-тангента параболске тачке два пута је већа од њене апсцисе (по апсолутној вредности).

2. За тангенту MT налазимо

$$MT^2 = MP^2 + TP^2 = y'^2 + 4x'^2 = \\ = 2px' + 4x'^2,$$

према томе тангента

$$MT = \sqrt{2x'(p + 2x')}.$$

3. Кад се у једначини нормале стави $y = o$, добија се

$$ON - x' = p;$$

с тога је поднормала $PN = p$.

У параболе је поднормала стална и једнака с половином параметра.

4. За нормалу MN добија се

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = y'^2 + p^2 = 2px' + p^2,$$

дакле

$$\text{нормала} \quad MN = \sqrt{p(p + 2x')}.$$

Додатак. Додирна тачка и пресеци осе с дирком и нормалом једнако су удаљени од параболске жиже.

Јер је

$$FP = x' - \frac{p}{2}, \text{ с тога } MF = TF = FN = x' + \frac{p}{2}.$$

459. Тангента у параболе гради с потегом додирне тачке исти угао као и с правом, повученом кроз додирну тачку паралелно према оси.

Како је, по чл. 458. додатак, $\triangle FMT$ (сл. 223) равнокрак, то је угао $FMT = FTM$; али је $\sphericalangle RMT' = FTM$, с тога $FMT = RMT'$.

На овом правилу оснива се примена параболних издубених огледала. Кад су светлосни, топлотни или звучни зраци паралелни с параболском осом, онда их огледало одбија тако, да се после одбијања скупљају у жижи. И обрнуто: кад зраци полазе из жиже, онда их огледало одбија паралелно с осовином.

Задаци.

460. Круг.

1. Како гласи једначина праве која у тачки $(x' y')$ додирује круг $(x - p)^2 + (y - 9)^2 = r^2$?

2. Кроз тачке $(- 4, 3)$ и $(- 3, 4)$, које се налазе на кругу $x^2 + y^2 = 25$, повучене су дирке; одреди *a)* њихове једначине, *b)* њихов угао, *c)* додирне количине.

3. Из тачке (ξ, η), која се налази изван круга $x^2 + y^2 = r^2$, повући дирке и одредити *a)* координате додирних тачака, *b)* једначину додирне тетиве, *c)* једначине обе дирке.

Једначина дирке гласи $xx' + yy' = r^2 \cdots 1)$. Како дирка треба да прође кроз тачку (ξ, η), то мора бити и $\xi x' + \eta y' = r^2 \cdots 2)$, како додирна тачка $(x' y')$ припада кругу, то мора бити и $x'^2 + y'^2 = r^2 \cdots 3)$. Из 2) и 3) ваља одредити x' и y' па те вредности унети у једначину 1). — Специјално: $x^2 + y^2 = 25$, $\xi = - 1$, $\eta = 7$.

4. Права $2x + y = 10$ сече круг $x^2 + y^2 = 25$ у двема тачкама; кроз те тачке повучене су дирке. У којој се тачки секу те дирке, и под којим углом?

5, У пресецима X-осе с кругом $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = o$ повучене су дирке; нађи њихове једначине.

6. На круг $x^2 + y^2 = 100$ повући дирку паралелну с правом $y = \frac{3x}{4} + 15$; како гласи њена једначина?

7. Нађи једначине оних дирака круга $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$, које су нормалне на правој $y - x - 7 = 0$.

8. Под којом погодбом додирује права $Ax + By + C = 0$ круг $x^2 + y^2 = r^2$?

a) Напиши једначину праве у нормалном облику и стави да је њена раздаљина од средишта једнака с полупречником.

b) Једначина дирке гласи $\frac{xx'}{r^2} + \frac{yy'}{r^2} - 1 = 0$, а једначина праве може се написати у облику $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$; ако је права дирка, онда мора бити $-\frac{A}{C} = \frac{x'}{r^2}, -\frac{B}{C} = \frac{y'}{r^2}$.

Кад се вредности за x' и y', добивене из тих једначина, унесу у једначину круга, онда се добија иста погодба између A, B, C, и r, као под *a)*.

Добија се $r^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}$. (Решење зад. 3, *c)* по тој једначини).

9. Коју вредност мора имати r у једначини $x^2 + y^2 = r^2$, да би $3x + 4y - 12 = 0$ била дирка тога круга?

10. Под којом је погодбом $A x + B y + C = 0$ дирка кругу $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$?

Добија се $r^2 = \dfrac{(A p + B q + C)^2}{A^2 + B^2}$.

11. Коју вредност мора добити C у једначини $2 x + y + C = 0$, да би та права додиривала круг $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$?

12. Нађи координате додирних тачака оних дирака, које су из почетка повучене на круг $x^2 + y^2 - 4 y - 6 x + 12 = 0$.

13. Нађи једначине заједничких тангената ова два круга: $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 1$.

14. Дата су два круга: $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Нађи координате оне тачке, из које се могу повући на оба круга једнаке тангенте, дужине 5.

15. Докажи аналитички да права, која везује пресек двоју тангената једног круга с његовим средиштем, стоји нормално на додирној тетиви.

16. Под којим се углом секу линије $2 y - 3 x = 6$ и $x^2 + y^2 = 25$?

17. Под којим се углом секу кругови $x^2 + y^2 = 64$ и $(x - 10)^2 + y^2 = 9$?

18. Одреди геометријско место оној тачки, у којој се под правим углом секу дирке кругу $x^2 + y^2 = r^2$.

Уочи четвороугао, коме је једно теме у средишту, два у додирним тачкама, а четврто у пресеку дирака?

19. Нађи геометријско место тачака, које имају према кругу $x^2 + y^2 = r^2$ исту потенцију t^2, узимајући тачке с поља, или у кругу (апсолутно). Упореди чл. 130. зад.

20. Нађи геометријско место оних тачака, које имају исту потенцију према круговима $x^2 + y^2 = 4$ и $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$.

Геометријско место тих тачака зове се потенцијска линија за та два круга. Одреди у овом примеру положај потенцијске линије према централи оба круга.

461. Елипса.

1. Повући дирку кроз тачку M, дату на елипси.

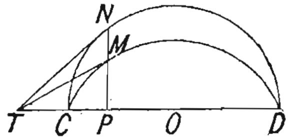
Решење 1. Ако се продужи потег FM (сл. 222) преко M, онда ваља само преполовити угао $F'ME$, да бисмо добили дирку MN (члан 454).

Решење 2. По чл. 453, 1. Над великом осом (сл. 224) ваља описати круг, продужити ординату MP до N, конструисати у N дирку NT за круг и повући TM.

2. Повући дирке из тачке N (сл. 222), дате ван елипсе. Ако је MN тражена дирка и $ME = MF'$, онда је MN симетрала дужи

EF'. За тачку E једно је геометријско место круг са средиштем F а полупречником $2 a$, а друго круг са средиштем N а полупречником NF'. Кад вежемо E са F, онда EF сече елипсу у додирној тачки.

Како се добивају две тачке E, то се налазе и две дирке.



Сл. 224.

3. Дата је елипса $x^2 + 25 y^2 = 25$ и на њој тачка $(-3, y' > 0)$; како гласи једначина дирке у тој тачки?

Израчунај угао те дирке према апсцисној оси.

4. У тачки $\left(4, \dfrac{6}{5}\right)$ на елипси $4 x^2 + 25 y^2 = 100$ повучена је дирка и нормала; израчунај додирне количине.

5. У каквој размери стоје одсечци, на које је апсциса једне тачке на елипси подељена нормалом у тој тачки?

6. Како гласе једначине тангената, повучених из тачке (0, 2) на елипсу $2 x^2 + 3 y^2 = 6$? (упореди чл. 460, 3).

7. Како гласе једначине тангената, повучених на елипсу $9 x^2 + 25 y^2 = 225$, паралелно или нормално према правој $5 y + 4 x = 7$?

8. Из тачака (8, 3) и (6, — 4) повучене су дирке на елипсу $x^2 + 4 y^2 = 100$; одреди координате њихова пресека, *b)* угао између тих тангената, *c)* једначине њихових угаоних симетрала.

9. Одреди нормалну раздаљину средишта у елипсе од дирке у тачки $(x'\ y')$.

10. Производ од нормале једне тачке на елипси и нормалне раздаљине средишта од дирке у истој тачки сталан је и једнак с квадратом мале полуосе.

11. Одреди нормалну раздаљину једне жиже у елипсе од дирке у тачки (x', y').

12. Производ нормалних раздаљина обе жиже у елипсе од које било дирке њене сталан је и једнак с квадратом мале полуосе.

13. Из једне жиже у елипсе спуштена је нормала на тангенту, чија је додирна тачка (x', y'); одреди координате оној тачки где та нормала сече дирку.

14. Кад се једна жижа у елипсе пројектује на коју било дирку исте елипсе, онда је раздаљина те пројекције од средишта једнака с половином велике осе.

15. Одреди координате оне тачке на елипси, у којој су тангента и нормала једнаке; нађи ту тачку конструишући израз за једну координату њену. Израчунај додирне количине.

16. Под којим се углом секу линије *a)* $9 x^2 + 25 y^2 = 225$ и $y = 3 x$; *b)* $x^2 + y^2 = 4$ и $3 x^2 + 5 y^2 = 15$?

17. Под којом погодбом додирује права $Ax + By + C = 0$ елипсу $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$?

Решење: *a)* чл. 460, зад. 8, *b*,

b) Из квадратне једначине за израчунавање координата пресечних тачака.

Добија се $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

18. У једначини праве $y = 3x + b$ одреди b тако, да права додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$.

19. У једначини елипсе $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$ одреди b тако, да права $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ буде дирка.

20. Кад је дата темена једначина елипсе, онда дирка у тачки x', y' има једначину $yy' = p(x + x') - \frac{p}{a}xx'$.

21 Ако је дирка једне елипсе нагнута према великој оси под углом α, а њена је раздаљина од средишта $= d$, онда је $d^2 = a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha$.

22. Над истом великом осом конструисане су елипсе; нађи једначину геометријског места додирних тачака свих тангената, повучених из тачке *(m, o)* на те елипсе (чл. 453, 1).

23. Нормала у тачки M једне елипсе сече велику осу у N. У N је подигнута на велику осу управна, и на њу пренето $AN = MN$. Нађи геометријско место за A.

462. Хипербола.

1, Повући дирку кроз тачку, дату на хиперболи.

Решење је слично решењу 1 у чл. 461, зад. 1.

2. Дата је тачка $\left(\frac{20}{3},\ 4\right)$ на хиперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$, повући у тој тачки дирку и наћи њену једначину.

3. Повући дирке из тачке, дате ван хиперболе.

Решава се као и задатак 2. у чл. 461.

4. Како гласе једначине двеју тангената, повучених из тачке (1, 0) на хиперболу $x^2 - 2y = 2$?

5. Свака тачка на хиперболи средина је оном делу дирке у тој тачки, који се налази између асимптота.

6. Нађи ону тачку на хиперболи, у којој су под-тангента и под-нормала једнаке.

7. Под којим се углом секу линије

$$x^2 + y^2 = 60\frac{4}{9}, \quad 9x^2 - 16y^2 = 144?$$

8. Повучена је дирка у оној тачки хиперболе $25x^2 - 16y^2 = 400$ која има једнаку апсцису и ординату; израчунај додирне количине за ту тачку.

9. Како гласи једначина праве, која додирује хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, а нагнута је према апсцисној оси под 45°?

10. Како гласи једначина праве, која додирује хиперболу $x^2 - y^2 = 4$, а нагнута је према апсцисној оси под 60°; израчунај додирне количине.

11. Под којом погодбом додирује права $Ax + By + C = 0$ хиперболу $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$? (Упор. чл. 461, зад. 17).

Добија се $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

Постави сличне задатке као у чл. 461, зад. 18, 19.

12 Кад елипса и хипербола имају заједничке жиже, онда се оне секу под правим углом (тј. њихове дирке у пресецима стоје нормално једна на другој) (чл. 454. и слично правило о хиперболи).

13. У равностране хиперболе везано је средиште с додирном тачком једне дирке. Какав однос вреди за константне праваца те праве и дирке?

14. Кад се из средишта једне равностране хиперболе спусти нормала OP на једну дирку и продужи до пресека Q с хиперболом, онда је $OP \cdot OQ = a^2$.

15. Троугао, који образује хиперболска дирка с асимптотама, има сталну површину.

463. Парабола.

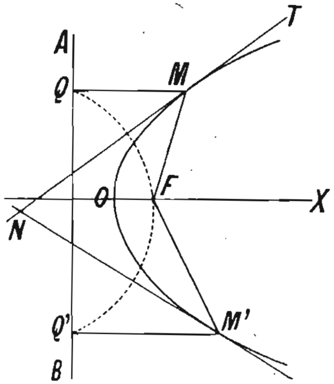
1. Повући дирку кроз тачку M, дату на параболи.

Решење 1. Полов љењем угла FMQ (чл. 459) (сл. 225).

Решење 2. С погледом на чл. 458, 1. Начини (слика 223) $OT = OP$ и повуци TM.

Решење 3. По чл. 458. додатак. Опише се потегом FM као полупречником око жиже F кружни лук који сече продужену осу у T, па се повуче TM.

2. Како гласи једначина дирке у тачки $(2,\ y' > 0)$ на параболи параметра $4\frac{1}{2}$?



Сл. 225.

3. Повући дирке из тачке N (сл. 225) дате ван параболе.

С погледом на 1. решење зад. 1. главно је наћи на водиљи ону тачку Q, кроз коју се мора повући према оси паралелна QM, да би она прошла кроз додирну тачку M. Како је MN симетрала дужи QF, то је $NF = NQ$. С тога ваља полупречником NF описати око N круг, који сече водиљу у Q, повући $QM \parallel OX$ и за тим праву NM.

Како тај круг сече водиљу и у другој тачки Q', то се повлачењем праве $Q'M' \parallel OX$ добија још једна додирна тачка M', тако да је и NM' дирка параболе.

4. Дата је једначина парабола $y^2 = 16x$; нађи једначину оне дирке њене, која је према правој $y - x + 3 = 0$ *a)* паралелна, *b)* нормална.

5. На једну параболу, чија је једначина $y^2 = 4x$, повучене су две дирке у тачкама чије су ординате 2 и — 4; одреди *a)* пресек тих дирака, *b)* њихов угао, *c)* површину троугла ограниченога тим диркама и додирном тетивом.

6. Нормална раздаљина параболске жиже од које било дирке њене средња је пропорционала између потега додирне тачке и четвртине параметра.

7. Упореди нормалну раздаљину параболске жиже од које било дирке са нормалом која припада тој дирци.

8. Под којим се углом секу линије $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$?

9. Како гласе једначине тангената, повучених на линије $4x^2 - 9y^2 = 36$ и $y^2 = \frac{10}{9}x$ у њиховим пресецима? Под којим се углом секу те дирке?

10. У којој тачки на параболи ваља повући дирку, да би она била према оси нагнута под 45°?

11. Под којом је погодбом $Ax + By + C = 0$ дирка параболе $y^2 = 2px$? (Упор. чл. 461, 17).

Добија се $B^2 y = 2AC$.

12. Како гласи темена једначина оне параболе, коју додирује права $y = 2x + 3$?

13. Која дирка параболе $y^2 = 6x$ сече праву $y = 3x + 5$ под 45°?

14. Повучена је дирка на параболу $y^2 = 2px$; одреди њену једначину, кад је *a)* тангента, *b)* потег додирне тачке, једнак с нормалом у додирној тачки.

15. Повући ону тангенту параболи, која је једнака с половином параметра; одреди њен угао према оси.

16. Нађи једначине тангената, повучених из тачке (— 1, — 1) на параболу $y^2 = 4x$.

17. Нађи геометријско место свих тачака, из којих тангенте, повучене на једну параболу, стоје једна на другој нормално.

Ако су y', y'' ординате додирних тачака, онда мора бити $\frac{p^2}{y'y''} = -1$. Производ $y'\,y''$ може се прочитати из квадратне једначине, која служи за одређивање додирних тачака дирке повучене из (x, y) на параболу.

IX. Пречници елипсе, хиперболе и параболе.

464. 1. По чл. 452 једначина сечице за елипсу гласи:

$$y - y' = -\frac{b^2 (x'' + x')}{a^2 (y'' + y')}(x - x').$$

Ако се преполови тетива, која лежи на тој сечици, онда та средина има координате:

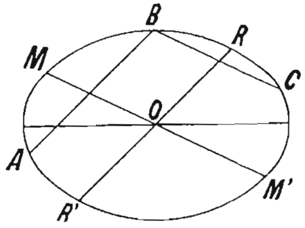
$$\xi_1 = \frac{x' + x''}{2}, \quad \eta_1 = \frac{y' + y''}{2};$$

Замењујући у једначини сечице $x' + x''$ и $y' + y''$ вредностима $2\xi_1$ и $2\eta_1$, добијамо

$$y - y' = -\frac{b^2 \xi_1}{a^2 \eta_1}(x - x')$$

у којој је једначини $-\frac{b^2 \xi_1}{a^2 \eta_1}$ константна правца. За какву другу сечицу нашло би се $-\frac{b^2 \xi_2}{a^2 \eta_2}$. За паралелне тетиве имају ти количници сталну вредност m. Према томе је геометријско место за средине свих паралелних тетива одређено једначином: $-\frac{b^2 x}{a^2 y} = m$, или $y = -\frac{b^2}{a^2 m'}x$. То је геометријско место права која пролази кроз почетак. Она се зове пречник у елипсе.

Нека је $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$ константна правца једног пречника у елипсе; кад се замисли један систем према њему паралелних тетива, онда је за пречник, који полови те тетиве, константна правца $m'' = -\frac{b}{a^2 m'} = m$; тј. пречник, који полови тај други систем, паралелан је с тетивама првога система.



Сл. 226.

Два пречника, од којих сваки полови тетиве које су паралелне с другим, зову се спрегнути (коњуговани) пречници; њихов угао зове се коњугациони угао. На сл. 226 пречници MM' и RR' спрегнути су.

За два спрегнута пречника производ је њихових константа правaца: $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, има дакле сталну вредност. За велику осу је $m = o$, с тога $m' = \infty$, $\alpha' = 90°$. Отуд се види, да су у елипсе обе осе спрегнути пречници.

2. Исто тако налази се за хиперболу:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m}\, x = m' x;$$

једначина спрегнутог пречника гласи:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m'}\, x = m x.$$

За два спрегнута пречника у хиперболе производ је њихових константа праваца: $m m' = \frac{b^2}{a^2}$. За $\alpha = 0$ биће $\alpha' = 90^\circ$; тј. и у хиперболе су обе осе спрегнути пречници.

3. По чл. 457. једначина сечице за параболу гласи

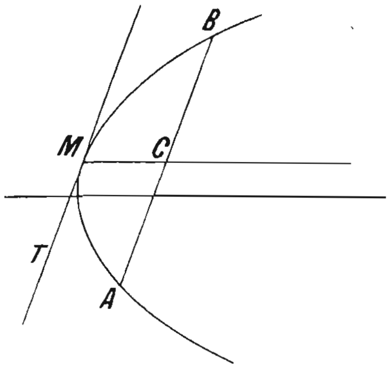
$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''}\,(x - x');$$

ако се и овде унесе у једначину ордината η тачке која полови тетиву на тој сечици, добиће се

$$y - y' = \frac{p}{\eta}\,(x - x').$$

Исто онако као код елипсе налази се као једначина геометријског места за средине паралелних тетива, тј. као једначина пречника: $\frac{p}{y} = m$, или $y = \frac{p}{m}$. У параболе је, дакле, пречник паралелан према x-оси.

Кад се кроз крајњу тачку M (сл. 227) једног пречника повуче дирка на параболу, онда је њена константна правца $\frac{p}{y} = m$; тј. параболина дирка у крајњој тачки једног пречника њена паралелна је према тетивама, које тај пречник полови. С тога се један пречник и дирка у његовој крајњој тачки називају спрегнути пречници у параболе.



Сл. 227.

Ако су тетиве према оси нормалне, онда је

$$\alpha = 90^\circ,\ m = \infty;$$

с тога $y = o$. Дакле, оса у параболе и дирка у темену спрегнути су пречници.

Задаци.

1. Нађи средиште даној елипси.
2. Дата је једна тетива у елипси; конструиши јој спрегнути пречник.

3. Једном пречнику у елипсе (хиперболе) конструиши спрегнути пречник.
4. Кад се кроз крајњу тачку једног пречника у елипсе (хиперболе) повуче дирка, онда је она паралелна с тетивама које полови тај пречник, дакле паралелна и са спрегнутим пречником.
5. Дата је једначина једне елипсе: $9x^2 + 25y^2 = 225$. У унутрашњости те елипсе дата је тачка M *a)* $(1, 1)$, *b)* $(1, \sqrt{3})$; кроз ту тачку повучен је пречник, нађи једначину спрегнутог пречника и коњугациони угао.
6. Нађи геометријско место за средине свих тетива у елипси $9x^2 + 16y^2 = 144$, које су нормалне на правој $x - 2y = 4$.
7. Докажи да се две параболске тангенте секу на пречнику који полови њихову додирну тетиву.
8. Дата је тачка (x', y') у параболи $y^2 = 2px$; нађи једначину оне тетиве, која је преполовљена том тачком.
9. Дата су два спрегнута пречника једне параболе и теме њено; конструиши је.

X. Површина елипсе и параболина одсечка.

465. *a)* Ако се над великом осом једне елипсе, као над пречником, опише круг (главни круг), онда ординате тачака на елипси и кругу, које имају исту апсцису, стоје у размери као мала и велика полуоса.

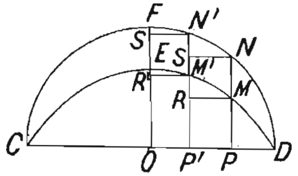
Стави ли се (сл. 228) $OP = x$, $MP = y$, $NP = \eta$, онда је

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - x^2), \quad \eta^2 = a^2 - x^2; \text{ с тога}$$

$$y^2 : \eta^2 = b^2 : a^2, \text{ или } y : \eta = b : a.$$

b) Површина елипсе једнака је с производом обе полу-осе и броја π.

Ако се (сл. 228) кроз произвољан број тачака M, M'.... на елипси повуку ординате, које у својим продушцима секу над великом осом CD описани круг у тачкама N, N'...., за тим према великој оси паралелне дужи MR, $M'R'$,.... NS, $N'S'$,.... онда два и два правоугаоника, као што су $MPP'R$ и $NPP'S$, стоје у размери као $b : a$. У истој размери стоје, дакле, и збирови свију тих правоугаоника. Узимајући тачке M, M'.... бескрајно близу једну до друге, налазимо, да у истој размери $b : a$ морају стајати и граничне вредности, којима се они збирови бескрајно

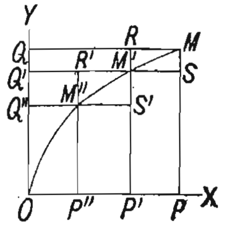


Сл. 228.

приближују, а то су површине елипсе и круга. Површина круга је $a^2\pi$; ако је p површина елипсе, онда је $p : a^2\pi = b : a$, с тога $p = ab\pi$.

466. Површина, ограничена координатама једне параболске тачке и параболним луком између тих координата, чини $\frac{2}{3}$ производа тих координата.

Нека је OM (сл. 229) параболан лук. Ако се кроз произвољан број тачака M, M', M'',.... повуку нормале на апсцисну осу OX и ординатну осу OY, и стави $OP = x$, $MP = y$, $OP' = x'$, $M'P' = y'$...., онда је правоугаоник



Сл. 229.

$$PMRP' = (x - x')\,y = \frac{(y^2 - y'^2)\,y}{2p},$$

а правоугаоник $QMSQ' = x\,(y - y')$; с тога

$$\frac{PMRP'}{QMSQ'} = \frac{(y + y')\,y}{2px}.$$

Што се ближе узму параболске тачке, тим се више приближују њихове координате, тим се више размера правоугаоника

$$PMRP' \text{ и } QMSQ'$$

приближује граничној вредности

$$\frac{(y + y')\,y}{2px} = \frac{2y^2}{2px} = 2.$$

Истој граничној вредности 2 приближује се, под том претпоставком, и размера свака два правоугаоника као што су $P'M'R'P''$ и $Q'M'S'Q''$, и т. д., па дакле и размера збира правоугаоника $PMRP' + P'M'R'P'' + \cdots\cdots$ према збиру правоугаоника

$$QMSQ' + Q'M'S'Q'' + \cdots\cdot$$

А гранична вредност ове последње размере уједно је размера површине OMP према површини OMQ; према томе је размера

$$\frac{OMP}{OMQ} = 2.$$

Отуд излази

$$2\,OMQ = OMP, \text{ с тога } 3\,OMQ = OMP + OMQ = xy;$$

дакле

$$OMQ = \frac{1}{3}\,xy, \quad OMP = \frac{2}{3}\,xy.$$

Задаци.

467. 1. Дате су стране једног троугла: 5, 6, 7.

Израчунај површину елипсе чије су жиже у крајњим тачкама прве стране, а сама елипса пролази кроз треће теме.

2. У каквом односу стоји површина елипсе према површини описаног и уписаног јој круга?

3. Над елипсом конструисан је њен главни круг. Површину између круга и елипсе преполовити елипсом над истом великом осом.

4. Дата је бројна ексцентричност ε једне елипсе и њена површина P; израчунај осе.

5. У елипсе је мала оса $2b$; колика мора бити велика оса, да би површина елипсе била толика, колики је омотач равностране купе чија је висина једнака с половином мале осе?

6. Елипса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ једнака је с омотачем праве зарубљене купе чије основе имају у пречнику $2a$ и $2b$; колика је висина те зарубљене купе?

7. Кроз жижу параболину повучена је тетива, нормална на оси. Израчунај одсечени сегменат.

8. На параболи $y^2 = 4x$ дате су две тачке чије су ординате 2 и — 4; израчунај одсечак, ограничен тетивом између тих тачака.

9. Кроз параболино теме повучена је тетива под углом од 60° према оси; колики је одсечени сегменат?

10. У параболи $y^2 = 12x$ уписан је равнокрак троугао тако, да му је једно теме у параболину темену; колики су сегменти одсечени крацима тог троугла, ако му висина стоји према основици у размери 5 : 4?

11. На параболу $y^2 = 2px$ повучена је дирка под углом од 30° према оси; из додирне тачке спуштена је према оси нормална тетива; тако добивени одсечак претвори у квадрат (конструктивно).

12. Дата је парабола $y^2 = 8x$, и на њој тачка чија је ордината 4; кроз ту тачку повучена је дирка. Израчунај површину, ограничену том дирком, ординатном осом и дотичним параболним луком. Колики ће параболни сегменат одсећи нормала у тој тачки.

13. Израчунај делове на које је круг $x^2 + y^2 = 8$ подељен параболом $y^2 = 2x$.

14. На истој страни параболине осе дате су на параболи две тачке чије су ординате a и b размакнуте једна од друге за дуж c. Израчунај површину сегмента, који је одсечен тетивом између тих тачака.

Додатак.

Историјске напомене о елементарној Геометрији.

а) Планиметрија.

Геометрија је постала у најстаријој културној земљи старога века, у Египту. Величанствене грађевине и потреба, да се сваке године после нилских поплава земља премерава, доказују, да су Египћани били искусни практични геометри. То потврђује и садржина једног папируса, који се налази у британском музеју. У њему се налазе задаци поглавито о мерењу геометријских слика. Види се да су Египћани знали за правила о угловима и паралелним линијама, за одређивање троугла, паралелограма и трапеза из појединих комада, за израчунавање површине тих слика и за елементе науке о кругу. Правила о сличности слика била су им непозната, јер не знађаху за пропорције.

Египћани су били у Геометрији учитељи Грцима. Тале из Милета, Питагора, Платон и други ишли су у Египат и били су ученици мисирских свештеника.

Тале (рођен око 624 пре Хр.) био је оснивач јонске философске школе. Он сâм није много обогатио науку, али му је главна заслуга у ширењу геометријског знања међу Грке.

Много више унапредила је Геометрију Питагорина философска школа. Њен оснивалац, Питагора из Самоса, рођен је око 568 пре Хр. и кажу да је живео 80 до 90 година. Он се дуго бавио у Египту, вратио се опет у Самос, а око 510 године основао је по њему названу философску школу у Кротону у јужној Италији.

Геометрију, која је пре Питагоре служила само практичним потребама подигао је Питагора на ступањ науке.

Увођењем науке о пропорцијама створена је могућност проучавања сличности праволинијских слика, а проналаском средње геометријске пропорционале решено је претварање правоугаоника у квадрат. Његово је име највише везано за проналазак правила о квадратима над странама правоуглог троугла, које се по њему и назива. Не зна се, како је он то правило доказао; доказ у чл. 149 дао је Евклид. Њему се приписује и златни пресек, као и конструкција правилног петоугла, уписаног у кругу. У осталом наука о кругу није се даље развијала.

У столећу после Питагоре покушавали су геометри да реше поглавито ова два задатка: поделу угла на произвољан број једнаких делова, и израчунавање површине круга и његових делова.

Први задатак решио је Хипиас од Елиса, савременик Сократов; другим задатком бавио се Хипократ из Хија (око 400 пре Хр.). Он је покушавао да реши задатак помоћу кружних месеца над разним тетивама, али није нашао решење.

Вишега полета добила је Геометрија у школи Платоновој (429—348 пре Хр.). Значај Платонов није толико у самосталном геометријском истраживању, колико у истицању важности саме Геометрије. На вратима своје учионице написао је речи: *„Μηδεὶϱ ἀγεωμέτϱητος εἰςίτω μοῦ τὴν στέγην“* (нека не улази нико, ко не зна Геометрије) итд. Платонова је школа тачно утврдила основне појмове геометријске, тачније развила теорију ирационалних бројева, који су били познати Питагориној школи, и теорију геометријских места.

Врхунац развитку грчкој Геометрији пада између 300—200 пре Хр. Том добу припадају Евклид, Архимед, Ератостен и Аполоније. Евклид је живео око године 300 пре Хр. у Александрији Он нам је у својим Елементима оставио потпун преглед Математике онога доба; то је дело све до наших дана сматрано не само као углед геометријског уџбеника, него је оно и за историју Геометрије значајно, јер завршује један период у којем се развитак Геометрије оснивао често на нагађању.

Архимед је рођен 287 пре Хр. у Сиракуси, бавио се неко време у Египту где је по свој прилици стајао у вези с Александријским научницима. Он је се вратио опет у Сиракусу где га је 212 пре Хр., убио један римски војник, кад је ту варош освојио Марцел. Он је израчунао обим у кругу уписаног и око круга описаног правилног полигона од 96 страна, и отуд нашао периферију и површину круга (упореди чл. 179.); то је био први пример приближног решавања задатака. Осем тога је он одредио површину елипсе и параболног сегмента. Ератостен (рођ. 276 пре Хр.) израчунао је дужину меридијанског степена.

Аполоније (рођ. између 247 и 221 пре Хр.) проучавао је особине елипсе, пароболе и хиперболе и дао је тим линијама имена којима се и данас служимо.

Од доцнијих геометара поменућемо још Херона и Папуса. Херон, око год. 100 пре Хр., бавио се поглавито мерењем површина и запремина и нашао је образац за израчунавање троуглове површине помоћу све три стране. Папус је живео при крају 3. или 4. столећа после Хр, Он нам је у својим „математичким збиркама“ оставио споменик о старој Математици. У том делу налазе се не само открића његових претходника, него и његови оригинални радови од највећег значаја.

У скоро после Папуса настао је у развитку Геометрије застој, који је трајао скоро 1000 година.

b) Стереометрија.

Египћани су врло мало знали Стереометрију. Знали су, по мишљењу Бретшнајдерову, погодбу за нормалан положај праве према равни и неку ограничену теорију о паралелизму правих и равни у простору. О телима знали су само за призму, четворострану правилну пирамиду, праву облицу, купу и правилна тела (изузев додекаедар). Само су им лоптине особине биле тачније познате, јер су се бавили Астрономијом.

Јонска философска школа није никако унапредила Стереометрију. Питагора и његова школа развили су науку о рогљевима и правилним телима, и у вези с правилним петоуглом открили су додекаедар. После Питагоре бавили су се геометри поглавито удвајањем коцке, тзв. Делиским проблемом. Хипократ од Хија конструисао је не само страну удвојене коцке, него је решио тај задатак за сваку множину њену.

Тек Платонова школа знатно је унапредила Стереометрију. Евдокс је нашао правило, да је пирамида трећи део призме исте основе и висине, за тим исто правило за купу и облицу. По свој прилици је од Евдокса и правило, да запремине две лопте стоје у размери као 3. степени њихових пречника.

Лоптину запремину израчунао је тек Архимед, и то упоређењем с описаном облицом. У првим правилима његова дела: „О лопти и облици“ налази се израчунавање омотача праве облице, купе и зарубљене купе, за тим израчунавање калоте, површине и запремине лопте, њена одсечка и исечка. Архимед је сâм сматрао тај рад као најзнатнији, па је желео да му се у надгробном камену уреже лопта с описаном облицом. Марцел му је испунио ту жељу, и по том знаку је Цицерон доцније познао гроб тог великог човека који у историји Математике чини епоху.

Каваљеријево правило, које је у овој књизи примењено за израчунавање запремине, објавио је 1635 године Каваљери (1598—1647).

c) Тригонометрија.

Природно је, да се после Планиметрије и Стереометрије развила Тригонометрија. Повод је дала Астрономија. Тригонометрију је вероватно основао Хипарход Никеје, који је живео око половине 2. столећа пре Хр. Он је показао, како се помоћу кружних тетива могу израчунати углови. И Менелај (од прилике 98. год. после Хр.) употребио је тетиве за израчунавање равних и сферних троуглова. Најстарија очувана тетивна таблица налази се у чувеном Алмагесту*) Птоломејеву (око 140 после Хр. у Александрији); у њој се налазе у сексагезималним деловима полупречника израчунате тетиве углова од 0°—180° у размацима од 30'. Оне су израчунате на основи Птоломејеве теореме. Осем тога се у делу налази израчунавање равних и сферних троуглова. У Индији служили су се за мерење углова половином тетиве удвојена лука, т.ј. синусом. Тај начин мерења углова примили су Арављани; њихово тригонометријско дело било је Сендхенд, године 772 преведено са индијског, доцније прерађено и поправљено према Алмагесту. Арављани су се служили и тангентом за мерење углова и то је прво учинио Албатегније (умро 928); ускоро за тим израчунате су таблице тангената и котангената.

Тригонометрију су знатно унапредили Немци у 15. и 16. веку. Њихова је заслуга пре свега у томе, што су поправили таблице. Они су напустили непрактичну сексагезималну поделу полупречника и завели децималну поделу. Јован Милер 1436—1476, по месту рођења Кенигсберг назван Региомонтанус, израчунао је синусне и тангентне таблице и проширио их је на поједине минуте, али су најбоље таблице од Георга Јоахима, 1514—1576, који се по свом завичају Форарлбергу звао Ретикус. Под његовим надзором тачније су израчунате таблице, којима је додао секантну таблицу, да би се избегло дељење. Он није доживео свршетак свога дела, које је после његове смрти издао његов ученик Otho под насловом Opus Palatinum 1596. Али је и начин решавања троуглова знатно поправљен. До тада су решавање косоуглог троугла сводили, конструкцијом једне висине, на правоугли троугао. Али је то било сувишно, чим су нађене основне теореме о косоуглом троуглу. Региомонтанус је нашао синусну теорему (доказ у чл. 334. дао је Clavius, 1537—1612), Финк је у својој Geometria rotundi 1583 објавио тангентну теорему (чл. 337) Vieta 1593 косинусну теорему (чл. 335), а Ретикус обрасце за tang $\frac{\alpha}{2}$ итд. (чл. 341).

К томе су још дошле логаритамске таблице од Непера 1614 и Брига 1618; тиме су створене не само олакшице у нумеричном рачунању, него је и Гониометрија унапређена изналажењем образаца, подесних за логаритамско рачунање. Ајлерова је за-

---

*) Постало од арапског члана *al* и наслова тог дела: Μεγάλη σύνταξις.