U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

D-r DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ
PROFESOR UNIVERZITETA U BEOGRADU

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

SA PRILOZIMA I NUMERIČKIM TABLICAMA

I

DRUGO IZMENJENO I DOPUNJENO IZDANJE

NOLIT
BEOGRAD
1958

SADRŽAJ

IZ PREDGOVORA I IZDANJU

Exempla docent non minus quam praecepta
Newton

1. Zbornik matematičkih problema *sastojaće se iz više knjiga. Prva knjiga, koju sada objavljujem, podeljena je na ova poglavlja:* Uvodni problemi, Algebra, Analitička geometrija, Diferencijalni i integralni račun, Diferencijalne jednačine, Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije *i* Problemi iz raznih oblasti. *Na kraju knjige dolaze kao dodatak:* Prilozi, Mali atlas krivih *i* Numeričke tablice.

Ovaj Zbornik *ne pretstavlja skup zadataka za uvežbavanje tehnike operacija. To je donekle i bio razlog što u naslovu stoji* problem *a ne* zadatak. *U* Zborniku *ima blizu 800 problema. To je, ustvari, jedna mala antologija matematičkih problema. Po pravilu, birani su teži i interesantniji problemi, u okviru programa matematike za studije na tehničkim i prirodno-matematičkim fakultetima.*

Ovaj Zbornik *može korisno poslužiti i studentima viših pedagoških škola kao i nastavnicima srednjih škola, i to naročito zbog poglavlja* Uvodni problemi, *kome je cilj povezivanje srednjoškolske i univerzitetske nastave matematike. Učenici srednjih škola, koji imaju naklonosti prema matematici, naći će u ovom* Zborniku *niz problema koje mogu da reše, sa manje ili više truda. Ovakvih problema ima ne samo u poglavlju* Uvodni problemi *već i u poglavljima* Algebra, Analitička geometrija *i* Problemi iz raznih oblasti.

2. Pólya *i* Szegö *otpočeli su svoju odličnu zbirku problema* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis *(I—II, 1925, Berlin)* Spencer-*ovim aforizmom:*

»Šta znači predavati? To znači sistematski potsticati učenike na samostalna otkrića«.

Prihvativši ovu postavku, Pólya *i* Szegö *sastavili su navedenu zbirku problema koja zaista već godinama uspešno potstiče mlade matematičare na naučni rad.*

Delim u potpunosti navedeno gledište. Da bi se stekle navike matematičkog mišljenja i potrebna matematička kultura, neophodno je upućivati studente na probleme čije rešavanje zahteva ozbiljniji napor. Pomoću malih problema najlakše je pokazati studentima da matematika ima niz otvorenih pitanja. Ovo može dati potstreka za sistematski, uporan i samostalan rad. Interesantan nerešen problem drži se često godinama u mislima, prilazi se više puta njegovom rešavanju i traže se sve novi i novi putevi za njegovo rešenje. Ima slučajeva da se put za rešenje nalazi posle desetak i više godina od prvog pokušaja. Međutim, nije pravilno tražiti pomoć ako se ne uspe u prvom pokušaju u rešavanju zadatka, jer se čovek time lišava one istinske radosti koja se doživljava prilikom uspešnog rešenja nekog težeg i interesantnijeg problema.

Pokušao sam da ovim Zbornikom *ostvarim navedeno gledište. Stoga on ne pretstavlja sistematsku zbirku zadataka u kojoj bi bio dat niz funkcija za diferenciranje, za iznalaženje njihovih primitivnih funkcija, itd. Jedna od knjiga iz ovog* Zbornika *biće posvećena i toj vrsti zadataka, jer je takođe važno savladati tehniku operacija.*

3. Duschek-*ov udžbenik* Vorlesungen über höhere Mathematik *(knjiga I, 1949, Beč) počinje motom koji u slobodnijem prevodu glasi:*

Ako se na osnovu jedne knjige napiše druga — to je plagijat; treća knjiga proizišla iz druge dve, pretstavlja esej; na osnovu tri knjige napisana studija — to je doktorska teza; delo napisano na osnovu četiri knjige jeste peta učena knjiga.

Ne ulazeći u to koliko je navedeno mišljenje ispravno, hteo bih da istaknem da se na ovaj Zbornik matematičkih problema *navedeni moto ne bi mogao odnositi.*

Pre svega, ovaj Zbornik *proistekao je iz nastave.*

Odabiranje zadataka za Zbornik *vršio sam godinama. U tu svrhu sistematski sam pregledao veliki broj udžbenika i priručnika, i to ponajboljih. Stalno sam pratio časopise u kojima se objavljuju problemi:* The Mathematical Gazette, The American Mathematical Monthly, Revue de Mathématiques spéciales, Elemente der Mathematik, Mathesis, Matematisk tidsskrift, Nouvelles Annales de Mathématiques, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Quaterly Journal of Mathematics, Matematika ve škole, Matematikai Lapok, Математика в школе, *itd.*

Pregledao sam veliki broj zbirki zadataka, naročito ruskih, francuskih i engleskih. Imao sam takođe pri ruci zadatke koji su davani na ispitima u Francuskoj, Nemačkoj, Engleskoj, u SSSR, u SAD, kao i u Danskoj, Norveškoj, Švedskoj i drugim zemljama.

Isto su mi bili od koristi problemi koji su davani na matematičkim olimpijadama u SSSR, Čehoslovačkoj i Poljskoj.

Na osnovu te ogromne dokumentacije sastavio sam ovaj Zbornik.

Jedan deo problema uzeo sam tekstuelno iz navedenih izvora, neke probleme sam modifikovao, dopunio i generalisao, neke prilagodio potrebama naših programa studija. Izvestan broj problema potiče od jugoslovenskih matematičara. I ja sâm, spremajući godinama materijale za ovaj Zbornik, *sastavio sam znatan broj problema, od kojih su neki već objavljeni u časopisima u inostranstvu, a neki su u štampi.*

U ovom Zborniku *ima problema potpuno ili delimično rešenih; zatim problema sa rezultatima, datim u samom tekstu zadataka ili kao odgovor na postavljena pitanja pod nazivom:* rezultat. *Najzad, naveden je niz problema koji su namenjeni samostalnom radu čitaoca.*

Obično je svaki problem rešen na jedan način, dok su samo neki problemi izrađeni na dva ili više načina. Većinom nije navođeno najelegantnije rešenje, već ono koje zahteva što manje prethodnog znanja. Rešenja su vecma sažeta, tako da je dosta ostalo i za samostalan rad čitaoca. Od ovog je otstupljeno u izuzetnim slučajevima.

Kod nekih problema čitaocu je ukazano na moguće generalizacije, a pogdegde postavljeno je i po koje pitanje koje će možda potstaći čitaoca na tretiranje nekog pitanja iz koga bi se moglo doći i do izvesnih novih rezultata, naravno skromnih, kao što to biva na početku rada. Ovakav način davanja problema preporučljiv je na svakom stupnju nastave, jer se, bilo u srednjoj školi ili na univerzitetu, na ovaj način dolazi do saznanja da u matematici postoje mogućnosti za stvaranje novog, suprotno uverenju širokih krugova — a ono se ponekad sreće čak i u redovima univerzitetskih profesora — da je matematika nauka potpuno završena još pre mnogo vekova i da tu nema nikakve nove problematike, ni naučne ni metodske.

Prilikom spremanja materijala za ovaj Zbornik, *u mnogobrojnim slučajevima, imao sam prilike da naiđem u literaturi na netačna, a još više na nepotpuna rešenja. To isto važi i za rezultate. Nailazio sam na greške čak u desetom izdanju jednog uglednog zbornika zadataka, ma da je sastavljačima veliki kolektiv ukazao pomoć. Hteo sam da izbegnem ovo i stoga sam uložio dosta pažnje u proveravanju rešenja. U ovome su mi pružili dragocenu pomoć moji saradnici. Ali i pored svih predostrožnosti u* Zborniku *će svakako biti nedostataka i grešaka, jer sva rešenja i svi rezultati nisu dovoljno provereni. Imao sam da biram između dve alternative: ili da rukopis u sadašnjoj redakciji podvrgnem ponovnom sistematskom proveravanju, za što bi otišlo bar godinu dana, ili da odmah dam u štampu ovu knjigu u kojoj će svakako biti izvesnih nedostataka. Odlučio sam se na drugu alternativu, jer je studentima zaista neophodan ovakav* Zbornik *problema.*

4. *U rešavanju problema i proveravanju rešenja pomogli su mi:* D-r R. Bojanić, S. Ćetković, L. Karadžić, D-r Mamuzić, D-r D. Mihailović, K. Milošević, Ž. Pantić, D. Perčinkova, D-r M. Popadić, J. Ulčar *i* D-r S. Fempl.

Moja supruga Olga Mitrinović *pomogla mi je da u izvesnoj meri ostvarim svoju zamisao u povezivanju srednjoškolske i univerzitetske matematičke nastave preko* Uvodnih problema.

Februara 1957 D-r Dragoslav S. Mitrinović

PREDGOVOR II IZDANJU

Oni koji isključivo cene praksu bez teoretskih osnova slični su moreplovcu koji ulazi u brod bez krme i busole ne znajući kuda plovi.
Leonardo da Vinci

Lakše je naučiti matematiku nego raditi bez nje.
H. Bouasse

1. U ovom izdanju *Zbornika matematičkih problema I* učinjene su znatne izmene. Izostavljena su poglavlja: *Diferencijalne jednačine* i *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije*. Ostala poglavlja zadržana su u novom izdanju, ali je izvršeno pregrupisavanje problema, kako bi *Zbornik* što bolje odgovarao nastavnim potrebama. Sva poglavlja su znatno proširena novim materijalom na račun izostavljenih poglavlja koja su ušla u *Zbornik II*. Ponovo je redigovan sav tekst i na nekim mestima date su bolje formulacije.

2. U toku školske 1957/1958 godine na tehničkim fakultetima Univerziteta u Beogradu veći deo problema iz prvog izdanja *Zbornika I* proveren je na vežbama sa studentima. Do sada je konstatovano vrlo malo omaška od kojih nijedna nije principijelne prirode. U tome su mi predano pomogli asistenti, kao i stručni i naučni saradnici, koji su držali vežbanja sa studentima na tehničkim fakultetima Univerziteta u Beogradu. Smatram za dužnost da ih poimence navedem i da im za ovo odam priznanje. To su: *D. Adnađević, M. Bertolino, S. Ćetković, R. Dacić*, D-r *S, Fempl, N. Janković*, D-r *L. Karadžić, K. Milošević, B. Okiljević, D. Pajović, Ž. Pantić, S. Pavlović, O. Rakić* i *B. Tomić.*

Međutim, u novom izdanju samo $50^0/_0$ je starih problema. Drugu polovinu sačinjavaju novi problemi koje tek treba proveriti u praksi. U ovom izdanju ima 1240 problema, dok ih je u I izdanju bilo svega 777.

3. Poglavlje *Uvodni problemi* u I izdanju imalo je 90 problema, a sada 175. Ovo poglavlje sadrži sada raznovrsniji materijal, pa će još bolje moći da posluži potrebnom povezivanju srednjoškolske i univerzitetske matematičke nastave. Prosečan maturant, pa i učenik VII razreda gimnazije, trebalo bi da ume rešiti bar $80^0/_0$ ovih zadataka.

Poglavlje *Algebra* znatno je izmenjeno. *Determinante* su izostale i prebačene u *Zbornik II*, a *Metod matematičke indukcije* izdvojen u posebno poglavlje. Inače, poglavlje *Algebra* u ovom izdanju prošireno je i poboljšano. Ono sada sadrži 231 problem.

Umesto ranijih 66 problema, poglavlje *Analitička geometrija* sada ih ima 214, odnosno tri puta više. Materijali iz ovog dela namenjeni su prvenstveno studentima tehničkih fakulteta i viših pedagoških škola. To je najelementarnije poglavlje ovog *Zbornika.*

Poglavlje *Diferencijalni i integralni račun* sadrži 320 problema, dok ih je u prvom izdanju bilo 103. Ova zbirka je sada postala kvalitetnija i sadržajnija. Međutim, ukoliko dođe do III izdanja ove knjige, ovo poglavlje biće još obimnije. Osim toga, problemi će biti razvrstani u više odeljaka nego što je to do sada bio slučaj i za jedan niz problema biće dat rezultat ili iscrpno rešenje, ukoliko to već nije učinjeno.

Poglavlje *Metod matematičke indukcije* ima 100 problema (ranije ih je bilo 50). Ovo je, možda, najbolje obrađeni deo *Zbornika I* i on obuhvata probleme iz raznih oblasti matematike (Aritmetika, Algebra, Diferencijalni račun, Integralni račun, Geometrija). Ono se odlikuje raznovrsnošću tretirane materije. Svrha mi je bila da ovaj metod čitalac što bolje usvoji·

Pod nazivom *Problemi iz raznih oblasti* naveden je niz interesantnih problema od kojih su neki iz Teorije funkcija kompleksne promenljive, Matričnog računa, itd.

U ovom izdanju ima devet priloga, od kojih su tri nova.

Mali atlas krivih sadrži 96 krivih, dok ih je u I izdanju bilo 46, od kojih neke nisu ušle u Atlas ovog izdanja.

U poglavlju *Numeričke tablice* dodato je sedam malih tablica. Preporučuje se studentima da prilikom rešavanja zadataka u što većoj meri koriste numeričke tablice.

I još jedna napomena. Kao i u I izdanju iza Predgovora nalazi se pregled simbola i skraćenica. Novinu pretstavljaju: *Spisak velikih i znamenitih matematičara* i *Pregled literature*.

Spisak matematičara može korisno poslužiti da bi se čitalac donekle orijentisao u hronologiji razvoja matematike. U njemu se nalaze matematičari vrlo zaslužni za razvoj matematike, kao i takvi koji su došli do nekih rezultata o kojima se govori u opštem kursu matematike pa se njihovo ime pominje u nastavi, ma da oni nisu veliki matematičari. Spisak nije potpun. U njega je ušao i izvestan broj živih matematičara. Pri izboru jugoslovenskih matematičara kriterijum je bio nešto blaži.

U vezi sa ovim od interesa je *Bell*-ovo mišljenje o tome koji su najveći matematičari u istoriji čovečanstva. Po njemu, to su: *Arhimed, Gauss* i *Newton.* Uzgred navedimo ovde da su *Euler, Cayley* i *Cauchy,* ne samo veliki stvaraoci i krčioci novih puteva, već i matematičari do sada najproduktivniji. Detaljnije o ovome videti u izvanrednoj knjizi:

E. T. Bell: Les grands mathématiciens *(Zénon, Eudoxe, Archimède, Descartes, Fermat, Pascal, Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Monge, Fourier, Poncelet, Gauss, Cauchy, Lobatchewsky, Abel, Jacobi, Hamilton, Galois, Cayley, Sylvester, Weierstrass, Kowalewski, Boole, Hermite, Kronecker, Riemann, Kummer, Dedekind, Poincaré, Cantor)*, Paris, 1950.

Pregled literature sadrži samo jedan mali deo knjiga i časopisa koje sam koristio pri redigovanju *Zbornika.* Ali i takav nepotpun spisak koristiće čitaocu. U njemu se, pored ostalog, nalaze odabrana dela udžbeničke literature.

Onaj koji hoće da prati razvoj matematičkih nauka treba redovno da prati referativne časopise:

Математика. Реферативный журнал (Академия наук СССР, Институт научной информации—Москва);

Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Berlin);

Mathematical Rewiews (Providence, USA).

4. Poznato je da Matematika pretstavlja »kritičnu tačku« u nastavi na tehničkim fakultetima. Ma da je proteklo malo vremena od izlaska *Zbornika I* (početak oktobra 1957), ipak se na ispitima, koji su obavljeni na Elektrotehničkom fakultetu iz Matematike I, Matematike II i Matematike III, osetilo izvesno poboljšanje; broj položenih ispita je znatno veći nego ranije. Svakako da je tome doprineo, u izvesnoj meri, i *Zbornik*. Iskustva koja ćemo steći u narednim ispitnim rokovima pokazaće u kojoj je meri navedeni zaključak opravdan.

5. Studentima se preporučuje da se *Zbornikom* služe na sledeći način.

Prvo je potrebno izraditi jedan ili više problema koji su rešeni u knjizi. Budući da su rešenja data u sažetom a često i u vrlo konciznom obliku, student će i tu imati prilike za samostalan rad. Posle toga treba raditi probleme za čije je rešenje dato samo uputstvo ili za koje je naveden samo rezultat. Poslednja etapa bi bila rešavanje onih problema koji su navedeni bez ikakvih uputstava ili rezultata.

Iole originalni duhovi (a takvih je velik broj među studentima) tražiće svoj put, svoj metod, svoj postupak u rešavanju jednog problema, bez obzira na to što je u *Zborniku* odnosni problem rešen. I to je prirodno, jer svaki čovek na svoj način rezonuje. Dok će jedan prvenstveno tražiti analitičko rešenje, dotle će drugi pokušati da nađe geometrisko rešenje problema, a treći i jedno i drugo, itd.

Student treba da se vežba da pregledno, sažeto i tačno formuliše rešenje jednog problema. Uostalom, u *Zborniku* ima znatan broj rešenja koja bismo mogli nazvati *model-rešenja.* Ona ukazuju na to kako bi trebalo redigovati rešenje jednog zadatka.

6. Poneki problem u ovom *Zborniku* spada u kategoriju problema koji se u *USA* zovu *Advanced Problems*. Takvi problemi pozitivno deluju na sticanje opšte matematičke kulture i razvijaju stvaralačke sposobnosti studenata. Po sebi se razume da su teži problemi namenjeni studentima koji imaju dubljeg interesovanja za matematiku i povrh toga su u izvesnoj meri naklonjeni matematičkom načinu mišljenja. U takvu kategoriju studenata spada svakako *Dragomir Đoković*, student III godine Elektrotehničkog fakulteta, koji je samoinicijativno rešio više interesantnih i težih problema iz *Zbornika I*. Od tih rešenja neka izlaze u ovoj knjizi, dok će druga izići u *Zborniku II*, a neka od njih biće objavljena u engleskom časopisu *The Mathematical Gazette*, kao matematičke beleške.

Istakao sam ovde *D. Đokovića* zato što je on dao elegantna rešenja za više problema. Međutim, bilo je slučajeva da su neki studenti dali interesantna rešenja jednog ili dva problema, dok su drugi stavili primedbe na formulacije nekih problema (na primer, student *Jordan Pop-Jordanov*). Neka od ovih rešenja tako isto se objavljuju. Štampanje rešenja studenata imaće verovatno povoljnih posledica na dublje interesovanje za matematiku u redovima studenata.

7. Ukoliko dođe do III izdanja *Zbornika I*, pored usavršavanja teksta iz ovog izdanja i dopunjavanja novim problemima, na početku svakog poglavlja biće navedene potrebne definicije, klasifikacije i glavni rezultati iz gradiva koje se tretira u odnosnom poglavlju. To je opšta želja studenata koju bi trebalo ispuniti.

Za ovo imam dosta materijala koji sam pripremao godinama za potrebe nastave. Zahvaljući ome što sam, od 1946 godine do sada, imao prilike da održim niz kurseva[1], ti materijali obuhvataju razne oblasti matematike, a naročito Analizu i Algebru.

8. U proveravanju rešenja, kao i u samom rešavanju problema koji su dodati novom izdanju, pomogli su mi u izvesnoj meri *D-r S. Fempl, S. Ćetković, K. Milošević*, a naročito student *D. Đoković*. Zahvaljujući sugestijama i primedbama *D. Đokovića* na više mesta date su bolje formulacije.

D-r *D. Mihailović*, D-r *S. Fempl*, D-r *Z. Mamuzić* i D-r *M. Popadić* preporučili su *Univerzitetskoj komisiji za udžbenike i druge stručne i naučne publikacije* štampanje ovog *Zbornika*. Oni su pažljivo pregledali rukopis i dali sugestije koje su doprinele da se na nekim mestima poboljšaju formulacije.

D-r *Đ. Kurepa*, profesor Univerziteta u Zagrebu, pročitao je u rukopisu desetak rešenih problema. Njegova zapažanja doprinela su da pregledani tekstovi budu bolje izloženi.

9. U celokupnoj redakciji teksta kao i u vršenju štamparskih korektura uzela je živog učešća moja supruga *Olga Mitrinović*. U tehničkoj pripremi rukopisa za štampu pomogle su mi svesrdno *Olga Aleksić*, *Leposava Radenković* i moja sestra *Ružica Mitrinović*.

10. Grafički radnici *Miodrag Levčić*, *Miodrag Đukić* i *Živko Zarić* zaslužuju puno priznanje za visokokvalitetan rad. Oni su ostvarili u velikoj meri moja nastojanja da se matematičkom slogu da estetska forma i da se u isti mah strogo vodi računa o racionalnom korišćenju prostora.

Novembra 1958 godine

D-r Dragoslav S. Mitrinović
profesor Univerziteta u Beogradu

---

[1] Na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Skoplju (1946—1951) držao sam kurseve pod nazivima:

1° *Algebra* (determinante, matrice, grupe, polinomi);
2° *Diferencijalni i integralni račun;*
3° *Diferencijalne jednačine* (obične i parcijalne);
4° *Funkcije kompleksne promenljive;*
5° *Elementarna teorija grešaka.*

Na tehničkim fakultetima (uglavnom na Elektrotehničkom fakultetu) Univerziteta u Beogradu (od 1951 do sada) držao sam kurseve pod nazivima:

1° *Matematika I;*
2° *Matematika II;*
3° *Diferencijalne jednačine u fizici;*
4° *Matrični račun;*
5° *Funkcije kompleksne promenljive;*
6° *Laplace-ova transformacija.*

PREDGOVOR

Treća knjiga *Zbornika matematičkih problema* podeljena je na poglavlja: *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije**, *Specijalne funkcije*, *Apstraktna algebra*, *Projektivna geometrija*, *Problemi iz raznih oblasti*, *Prilozi*, *Numeričke tablice* i *Grafici nekih specijalnih funkcija*.

Poglavlje *Apstraktna algebra* sastavili su V. Devide i S. Prešić.

Poglavlje *Projektivna geometrija* izradio je J. Ulčar.

Ostala poglavlja sastavio je D. S. Mitrinović uz pomoć desetak saradnika, čiji je udeo, po pravilu, naveden na odnosnom mestu u knjizi. Od ovih saradnika najveći broj problema rešili su: D. Đoković, S. Prešić i D. Adamović.

U ovom *Zborniku* ima ukupno 870 zadataka i problema.

Poglavlje *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije* je najobimnije. Ono ima 375 zadataka i problema iz opšte teorije analitičkih funkcija i namenjeno je studentima prirodno-matematičkih i tehničkih fakulteta, kao i inženjerima na postdiplomskim studijama.

Poglavlje *Specijalne funkcije* ima 89 zadataka i problema i posebno je namenjeno studentima nuklearne fizike i inženjerima elektrotehnike. Ovo poglavlje trebalo bi znatno dopuniti i proširiti u novom izdanju *Zbornika* III ako do njega dođe.

Poglavlje *Apstraktna algebra* sadrži 89 zadataka i problema. Na početku poglavlja dat je niz definicija za pojmove koji su kasnije upotrebljeni u zadacima. Ovo poglavlje vredelo bi takođe dopuniti i proširiti. Međutim, i u ovom obliku ono će biti od koristi studentima prirodno-matematičkih fakulteta, kao i studentima tehničkih fakulteta (otsek za tehničku fiziku, otsek za elektroniku i telekomunikacije, itd.).

Poglavlje *Projektivna geometrija*, koje ima 224 zadatka i problema, namenjeno je studentima prirodno-matematičkih fakulteta.

Poglavlje *Problemi iz raznih oblasti* sadrži 93 problema, od kojih je znatan broj iz kompleksne analize. U svima poglavljima ima teških i interesantnih problema, a posebno u ovom.

U poglavlju *Prilozi* ima sedam članaka, od kojih je jedan redigovao D. Mitrović, a ostale D. S. Mitrinović. Među ovim člancima, čini nam se, posebnu pažnju zaslužuje ekspozicija: *O glavnoj vrednosti nesvojstvenog integrala*, koju bi trebalo proučiti u vezi sa izračunavanjem realnih integrala pomoću računa ostataka.

* U *Zborniku* II, čije drugo izdanje uskoro izlazi iz štampe, neće biti poglavlja: *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije*.

U poslednja dva poglavlja date su neke numeričke tablice kojih nema u našoj literaturi i grafici nekih specijalnih funkcija. Ovi materijali biće naročito od koristi fizičarima i inženjerima.

U ovom *Zborniku* ima lep broj originalnih problema koje su sastavili D. S. Mitrinović i njegovi saradnici. Neki od ovih problema već su objavljeni u časopisima:

Jahresbericht der Deutschen-Mathematiker Vereinigung,
The American Mathematical Monthly,
The Mathematical Gazette,
Mathematics Magazine,
Mathesis,

dok se neki nalaze pred objavljivanjem u istim časopisima.

Veći deo problema pripada drugim autorima. Po pravilu, naveden je autor svakog interesantnijeg problema, ukoliko je bio poznat.

Zbornik je mala antologija lepih i interesantnih problema, ali i zadataka koji će biti korisni za ilustraciju univerzitetskih kurseva. Stoga u *Zborniku* ima i lakših problema, tj. zadataka. Tako, na primer, u poglavlju *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije* navedeno je preko 50 zadataka koji se mogu koristiti u prvoj godini univerzitetskih studija kada se obrađuju kompleksni brojevi.

Jedan deo problema i zadataka koji su navedeni u *Zborniku* bio je na ispitima, poslednjih godina, na fakultetima u Francuskoj, Engleskoj, Švedskoj i u drugim zemljama. Prof. Vidav stavio je na raspolaganje nekoliko zadataka sa rešenjima iz višestrukih integrala koji su bili na ispitima na Prirodno-matematičkom fakultetu u Ljubljani.

Tekstovi problema uzeti iz literature često su modifikovani u raznim pravcima: neki su problemi generalisani i otežani, drugi uprošćeni, itd.

Svaka zbirka matematičkih problema potiče od kolektivnog rada velikog broja znanih i neznanih matematičara, velikih i malih, pa to važi i za *Zbornik*.

Za jednu zbirku problema, koja je objavljena pre nekoliko godina u Švedskoj, referent u časopisu *Mathematical Reviews* primetio je da se sa problemima tretiranim u njoj došlo do Euler-a. I zaista, to je slučaj sa većinom zbirki matematičkih zadataka i problema. Ovakav prigovor ne bi se mogao staviti *Zborniku.*

Rešenja zadataka i problema u ovom *Zborniku* po pravilu su originalna i ona su u većoj ili manjoj meri kritički pregledana. Po koje od rešenja moglo bi da posluži kao uzor kako treba rešavati i formulisati rešenje jednog problema. To ipak ne znači da se nekim rešenjima ne bi mogao staviti prigovor bilo na metod rešavanja, bilo na ekspoziciju rešenja, bilo na nepotpunost diskusije, itd.

Veliki broj zadataka i problema iz ovog *Zbornika* proveren je u nastavnoj praksi.

U sovjetskom časopisu *Реферативный журнал* (Moskva) rečeno je za *Zbornik* da je tipa dobro poznate zbirke problema: Pólya—Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Pomenuta zbirka ustvari je skup naučnih rezultata iz raznih

ŠIMBOLI I SKRAĆENICE[1]

1. $\frac{ab}{cd} \equiv (ab)/(cd) \equiv ab/(cd) \quad (cd \neq 0)$; $\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv (a/b) + (c/d) = a/b + c/d \quad (bd \neq 0)$.

2. $\therefore$ znači: *iz prethodnog neposredno sleduje;* ... znači: *itd.*

3. $P \longrightarrow Q$ znači: iz P sleduje Q;
$P \longleftarrow Q$ znači: iz Q sleduje P;
$P \longleftrightarrow Q$ znači: iz P sleduje Q i obrnuto, odnosno $\longleftrightarrow$ znači: ako i samo ako (odnosno tada i samo tada).

4. $n! \equiv \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n & (n \text{ prirodan broj}), \\ 1 & (n=0). \end{cases}$

$(2n)!! \equiv 2 \cdot 4 \cdots (2n)$; $\quad (2n+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

$n!$ se označava i sa $\underline{|n}$.

5. $\binom{a}{k} \equiv \begin{cases} a(a-1) \cdots (a-k+1/(k!) & (k \text{ prirodan broj, } a \text{ ma kakvo}), \\ 1 & (k=0). \end{cases}$

6. Relacija $a_1, a_2, \ldots, a_k \geqslant 0$ zamenjuje skup relacija

$$a_1 \geqslant 0, \quad a_2 \geqslant 0, \ldots, a_k \geqslant 0.$$

Ako je $\alpha \leqslant \beta$, tada relacija

$$\alpha \leqslant a_1, \ldots, a_k \leqslant \beta$$

zamenjuje skup relacija

$$\alpha \leqslant a_1 \leqslant \beta; \quad \alpha \leqslant a_2 \leqslant \beta; \ldots; \alpha \leqslant a_k \leqslant \beta,$$

tj. skup relacija

$$\alpha \leqslant a_\nu \leqslant \beta \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Relacija $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ znači:

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

7. Ako su a i b prirodni brojevi, tada relacija $(a, b) = 1$ označava da su a i b relativno prosti brojevi.

---

[1] *K. Menger* predlaže niz izmena u simbolima u svojoj knjizi: *Calculus — An Modern Approach* (Boston, 1955). Tako, na primer, *Menger* predlaže da se umesto:

$$D \sin x = \cos x \text{ i } \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2}$$

piše respektivno

$$D \sin = \cos \text{ i } \int_0^{\pi/2} \cos = [\sin]_0^{\pi/2}.$$

8. Ako je E jedan skup, relacija $x \in$ kazuje da x pripada skupu E.

   Ako su E_1 i E_2 dva skupa, relacija $E_1 \subset E_2$ kazuje da svaki element skupa E_1 pripada skupu E_2 ($\subset$ znak *inkluzije*).

   Relacija $E_1 \cap E_2$ (čita se *presek* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji istovremeno pripadaju i skupu E_1 i skupu E_2.

   Relacija $E_1 \cup E_2$ (čita se *unija* skupova E_1 i E_2) označava skup svih elemenata koji pripadaju bilo skupu E_1 bilo skupu E_2.

9. $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n brojeva $a_1, a_2 \ldots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog od ostalih brojeva iz ovog skupa. Na analogni način se definiše $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

10. Ako su brojevi a i b ($\neq 0$) celi brojevi, relacija $b \mid a$, tj. $a \equiv 0 \pmod{b}$ kazuje da se b sadrži u a bez ostatka.

    Ako su $P(x)$ i $Q(x)$ dva polinoma, relacija $Q \mid P$ izražava činjenicu da je $P \equiv QR$, gde je R treći polinom.

11. Ako je a realno, tada je

$$|a| \equiv a \operatorname{sgn} a \equiv \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a \leqslant a); \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} a \equiv \begin{cases} 1 & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -1 & (a < 0). \end{cases}$$

12. δ_{ik} *Kronecker*-ov simbol

$$\delta_{ik} \equiv \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

13. U realnom području $\sqrt[2n]{a}$ $(a \geqslant 0)$ (n prirodan broj) označava samo nenegativnu vrednost, tj.

$$\sqrt[2n]{a} = \left|\sqrt[2n]{a}\right|.$$

14. Ako je a realan broj, tada $[a]$ odnosno $E(a)$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje a.

15. $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija:

$$H(t) \equiv \begin{cases} 0 & (t < 0); \\ \frac{1}{2} & (t = 0); \\ 1 & (t > 0). \end{cases}$$

16. $\approx$ približno jednako (ovaj se znak upotrebljava u slučaju kada se eksplicitno ne daje ocena greške).

    Relacija $a \ll b$, između pozitivnih brojeva a i b, kazuje da je a veoma malo u poređenju sa b.

    Relacija $a \gg b$ $(a > 0,\ b > 0)$ kazuje da je a veoma veliko u poređenju sa b.

17. $i = \sqrt{-1}$ (u elektrotehnici, da bi se izbegle konfuzije, umesto i upotrebljava se j).

18. $R\{f(z)\}$ realni deo funkcije $f(z)$ $(z \equiv x + iy)$;

    $I\{f(z)\}$ imaginarni deo funkcije $f(z)$ $(z \equiv x + iy)$;

    $\bar{z}$ konjugovana vrednost kompleksnog broja z.

19. $\exp(x) \equiv e^x$ (e osnova prirodnih logaritama); $\exp_a x \equiv a^x$; $\operatorname{pot}_a x \equiv x^a$.

    $\log x = \log_e x$ $(x > 0)$.

20. Pod $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,cotg} x$ podrazumeva se, u realnom području, *glavna* vrednost odgovarajuće multiformne funkcije:

    $\operatorname{Arc\,sin} x \equiv \sin^{-1} x$, $\operatorname{Arc\,cos} x \equiv \cos^{-1} x$, $\operatorname{Arc\,tg} x \equiv \operatorname{tg}^{-1} x$, $\operatorname{Arc\,cotg} x \equiv \operatorname{cotg}^{-1} x$.

21. $\sin^k x \equiv (\sin x)^k$, $\operatorname{sh}^k x \equiv (\operatorname{sh} x)^k$.

22. $\dot{x} \equiv dx/dt$, $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2, \ldots$;

    $y' \equiv dy/dx$, $y'' \equiv d^2y/dx^2, \ldots$; $D^k \equiv d^k/dx^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $D^0 \equiv 1$.

23. $\dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv \partial z/\partial x \equiv z_x' \equiv z_x$; $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv \partial z/\partial y \equiv z_y' \equiv z_y$.

$p \equiv \partial z/\partial x, \quad q \equiv \partial z/\partial y, \quad r \equiv \partial^2 z/\partial x^2, \quad s \equiv \partial^2 z/\partial x\, \partial y, \quad t \equiv \partial^2 z/\partial y^2$ (*Monge*-ove oznake).

24. $[f(x)]_a^b \equiv f(x)\Big|_a^b \equiv f(b)-f(a)$ ($f(x)$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$).

$[f(x, y)]_{x=a}^{x=b} \equiv f(x, y)\Big|_{x=a}^{x=b} \equiv f(b, y)-f(a, y)$ ($f(x, y)$ neprekidna po $x \in [a, b]$).

25. area $P \equiv$ veličina površine P.

26. Ako su A i B dve tačke, tada $\overline{AB}$ označava merni broj dužine duži AB.

27. Pod krugom (O, r) podrazumeva se krug poluprečnika r čiji je centar u tački O.

28. *Jedinični krug* je krug čiji je poluprečnik *jedinica* i čiji se centar nalazi u koordinatnom početku.

29. $M \equiv \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ matrica; det $M \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ determinanta; E jedinična matrica $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Jedinična matrica reda n je

$$E_n \equiv \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{Vmatrix}, \text{ tj. } E_n \equiv \| \delta_{ik} \| \ (\delta_{ik} \ \textit{Kronecker}\text{-ov simbol}).$$

Nula-matrica (tipa $m \times n$) je matrica čiji su svi elementi jednaki nuli.

30. $(a_{pq}\, a_{rs}) \equiv \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix}$; $\quad (a_{pq}\, a_{rs}\, a_{uv}) \equiv \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pv} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{rv} \\ a_{uq} & a_{us} & a_{uv} \end{vmatrix}$; itd.

31. tr $A \equiv$ sp $A \equiv a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$, gde je

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

32. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori Dekartovih koordinatnih osa Ox, Oy, Oz.

33. Ako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tri vektora, tada je

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ skalarni proizvod; $\quad \vec{a} \times \vec{b}$ vektorski proizvod; $\quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ mešoviti proizvod.

Vektori se često označavaju slovima gotske azbuke.

34. $\vec{\nabla}$ (operator nabla). Njegove Dekartove projekcije su $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$.

35. grad $U(M)$ [obeležava se i sa $\overrightarrow{\text{grad}}\, U(M)$], gde je U skalarna funkcija tačke $M(x, y, z)$, definiše se izrazom

$$\text{grad } U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

36. div $\vec{F}(M) \equiv \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial Y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial z}$, gde je $\vec{F} = \{X, Y, Z\}$.

37. rot $\vec{F}(M) \equiv \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F}(M)$

$$\equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k}, \text{ gde je } \vec{F} = \{X, Y, Z\}.$$

38. $\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$

Operator $\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ zove se *laplasijan*.

39. $\square U(x, y, z, t) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$

Operator $\square$ zove se *dalambertijan*.

40. Oznaka $n = a\,(b)\,c$ upotrebljava se za opisivanje numeričkih tablica i znači da n uzima sve vrednosti članova aritmetičke progresije čiji je prvi član a, razlika b i poslednji član $\leqslant c$.

LATINSKA, GRČKA I GOTSKA AZBUKA

Slovo	
malo	veliko
a	A
b	B
c	C
d	D
e	E
f	F
g	G
h	H
i	I
j	J
k	K
l	L
m	M
n	N
o	O
p	P
q	Q
r	R
s	S
t	T
u	U
v	V
w	W
x	X
y	Y
z	Z

Slovo		Izgovor
malo	veliko	
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	dzeta
η	H	eta
θ (ϑ)	Θ	theta
ι	I	jota
κ	K	kapa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi
ν	N	ni
ξ	Ξ	ksi
o	O	omikron
π	Π	pi
ρ	P	ro
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	ipsilon
φ	Φ	fi
χ	X	hi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Slovo	
malo	veliko
$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{A}$
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{B}$
$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{C}$
$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{D}$
$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{E}$
$\mathfrak{f}$	$\mathfrak{F}$
$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{G}$
$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{H}$
$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{I}$
$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{J}$
$\mathfrak{k}$	$\mathfrak{K}$
$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{L}$
$\mathfrak{m}$	$\mathfrak{M}$
$\mathfrak{n}$	$\mathfrak{N}$
$\mathfrak{o}$	$\mathfrak{O}$
$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{P}$
$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{Q}$
$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{R}$
ſ, $\mathfrak{s}$, ß	$\mathfrak{S}$
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{T}$
$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{U}$
$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{V}$
$\mathfrak{w}$	$\mathfrak{W}$
$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{X}$
$\mathfrak{y}$	$\mathfrak{Y}$
$\mathfrak{z}$	$\mathfrak{Z}$

VELIKI I ZNAMENITI MATEMATIČARI

Apolonije (živeo oko 200 godine pre n. e.)
Arhimed (287—212 pre n. e.)
Diofant (rođen oko 325 godine naše ere)
Eudoks (408?—355? pre n. e.)
Euklid (365?—275? pre n. e.)
Pitagora (živeo u VI veku pre n. e.)

Abel	1802—1829
Ampère	1775—1836
Appell	1855—1930
Banach	1892—1945
Beltrami	1835—1900
Bernoulli	
Daniel	1700—1782
Jacques	1654—1705
Jean	1667—1748
Bertrand	1822—1900
Bessel	1784—1846
Bianchi	1856—1928
Binet	1786—1856
Bohr, Niels	1885
Bolzano	1781—1848
Bonnet	1819—1892
Boole	1815—1864
Borel	1871—1956
Born, Max	1882
Brianchon	1785—1864
De Broglie	1892
Bromwich	1875—1929
Cantor	1845—1918
Cardano	1501—1576
Cauchy	1789—1857
Cayley	1821—1895
Chasles	1793—1880
Cesàrò	1859—1906
Clairaut	1713—1765
Clausius	1822—1888
Coriolis	1792—1843
Courant	1888
Cramer	1704—1752
D'Alembert	1717—1783
Darboux	1842—1917
Dedekind	1831—1916
Denjoy	1884
Descartes	1596—1650
Dini	1845—1918
Dirac	1902
Dirichlet	1805—1859
Einstein	1879—1955
Eisenstein	1823—1852
Enriques	1871—1946
Euler	1707—1783
Fermat	1601—1665
Fermi	1901—1954
Fourier	1768—1830
Fredholm	1851—1927
Frenet	1816—1900
Fresnel	1788—1827
Fuchs	1833—1902
Galilei	1564—1642
Galois	1811—1832
Gauss	1777—1855
Gibbs	1839—1903
Goursat	1858—1936
Grassmann	1809—1877
Green	1793—1841
Guldin	1577—1643
Hadamard	1865
Hamilton	1805—1865
Heaviside	1850—1925
Heisenberg	1901
Hermite	1822—1901
Hilbert	1862—1943
Huyghens	1629—1695
Jacobi	1804—1851

Jordan	1838—1922
Julia	1893
Kamke	1890
Kepler	1571—1630
Klein, Felix	1849—1925
Kronecker	1823—1891
Kummer	1810—1893
Lagrange	1736—1813
Laguerre	1834—1886
Lamé	1795—1870
Landau	1877—1938
Laplace	1749—1827
Laurent, P. A.	1813—1854
de La Vallée-Poussin	1866
Lebesgue	1875—1941
Legendre	1752—1833
Leibniz	1646—1716
Le Verrier	1811—1877
Levi-Cività	1873—1942
Lie, Sophus	1842—1899
Liouville, J.	1809—1882
Lipschitz	1832—1903
Lissajous	1822—1880
Lorentz, H.	1853—1928
L'Hôspital	1661—1704
Maclaurin	1698—1746
Maxwell	1831—1879
Mercator	1512—1594
Minkowski	1864—1909
Mittag-Leffler	1846—1927
Möbius	1790—1868
de Moivre	1667—1754
Monge	1746—1818
Montel	1876
Neper	1550—1617
Neumann, J.	1903—1957
Newton	1642—1727
Painlevé	1863—1933
Pascal	1623—1662

Peano	1858—1932
Perron	1880
Pfaff	1765—1825
Picard	1856—1941
Picone	1885
Pincherle	1853—1936
Planck	1858—1947
Plücker	1801—1868
Poincaré	1854—1912
Poisson	1781—1840
Poncelet	1788—1867
Ramanujan	1887—1920
Rayleigh	1842—1919
Riccati	1676—1754
Riemann	1826—1866
Rolle	1652—1719
Ruffini	1765—1822
Schrödinger	1887
Schwarz	1843—1921
Sierpiński	1882
Simpson	1710—1761
Sommerfeld	1868—1951
Steiner	1796—1863
Stieltjes	1856—1894
Stirling	1692—1770
Stokes	1819—1903
Sturm	1803—1855
Sylvester	1814—1897
Taylor	1685—1731
Vandermonde	1735—1796
Varignon	1654—1722
Viète	1540—1603
Villat	1879
da Vinci, Leonardo	1452—1519
Volterra	1860—1940
Wallis	1616—1703
Waring	1734—1793
Weierstrass	1815—1897
Zermelo	1871—1953

Александров, П. С.	1896
Бернштейн, С. Н.	1880
Виноградов, И. М.	1891
Гельфонд, А. О.	1906
Ковалевская, С. В.	1850—1891
Колмогоров, А. Н.	1903
Крылов, А. Н.	1863—1945
Лобачевский, Н. И.	1792—1856

Лузин, Н. Н.	1883—1950
Ляпунов, А. М.	1857—1918
Марков, А. А.	1856—1922
Остроградский, М. В.	1801—1861
Петровский, И. Г.	1901
Смирнов, В. И.	1887
Стеклов, В. А.	1863—1926
Чебышев, П. Л.	1821—1894

Bošković Ruđer	1711—1757
Getaldić Marin	1568—1626
Petrović Mihailo	1868—1943

Plemelj Josif	1873
Varićak Vladimir	1865—1942

AFORIZMI O MATEMATICI *

Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина.* Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...*

Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы:* движение.

Ф. Энгельс

Теория без практики мертва или бесплодна, практика без теории невозможна, пагубна. Для теории нужно главным образом знание, для практики, сверх того, и умение...

...Цель науки состоит в том, чтобы на основании изучения прошедшего и настоящего предвидеть будущее, а на основании изучения существующего творить новое. Отсюда ясно, что наука должна состоять из объединения теории и практики, и все ее развитие должно быть основано на таком единстве, иначе будут создаваться бесплодные теории или недостаточно обоснованная практика.

А. Н. Крылов

Il est plus facile d'apprendre les Mathématiques que de s'en passer.

H. Bouasse

La rigueur n'a d'autre objet que de sanctionner et de légitimer les conquêtes de l'intuition

J. Hadamard

Il n'y a pas de problèmes résolus, il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus.

H. Poincaré

Un savant digne de ce nom, surtout un mathématicien, éprouve dans son travail la même impression qu'un artiste; son plaisir est aussi grand et de même nature.

H. Poincaré

Le mathématicien pur qui oublierait l'existence du monde extérieur serait semblable à un peintre qui saurait harmonieusement combiner les couleurs et les formes, mais à qui les modèles feraient défaut. Sa puissance créatrice serait bientôt bannie.

H. Poincaré

Les mathématiques sont une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai.

Bertrand Russel

Le mathématicien prépare d'avance des moules que le physicien viendra plus tard remplir.

H. Taine

Un mathématicien qui n'est pas aussi quelque peu poète ne sera jamais un mathématicien complet.

K. Weierstrass

Il n'y a aucune branche des mathématiques, si abstraite soit-elle, qui ne puisse un jour être appliquée aux phénomènes du monde réel.

Lobatchevsky

Toute notre vie moderne est comme imprégnée de mathématiques. Les actes quotidiens et les constructions des hommes en portent la marque et il n'est pas jusqu'à nos joies artistiques ou à notre vie morale qui n'en subissent l'influence.

P. Montel

Une découverte analytique survient au moment nécessaire pour rendre possible chaque nouveau progrès dans l'étude des phénomènes du nombre réel.

Ch. Hermite

---

* Aforizme donosimo na jeziku na kome su iskazani ukoliko smo do njih mogli doći.

L'analyse moderne tend de plus en plus à substituer les idées au calcul; il y a néanmoins certaines branches des mathématiques où le calcul conserve ses droits.

P. G. Lejeune-Dirichlet

La science des mathématiques pures, dans ses développements modernes, a le droit d'être considérée comme la création la plus originale de l'esprit humain.

A. N. Whitehead

J'ai entendu dire qu'on m'accusait d'être l'advérsaire, l'ennemi des mathématiques, alors que personne ne peut les apprécier plus hautement que moi, puisqu'elles accomplissent vraiment ce dont l'exécution m'a été refusée.

Goethe

Ainsi donc, on peut dire que le nombre régit le monde entier de la quantité, et les quatre règles d'arithmétique peuvent être considérées comme l'outillage complet du mathématicien.

J. C. Maxwell

Aussi étrange qui cela puisse paraître, le pouvoir des mathématiques repose sur le fait qu'elles s'abstiennent de toute pensée inutile et qu'elles économisent admirablement les opérations mentales.

E. Mach

Des exemples... qu'on pourrait multiplier à l'infini, prouvent combien il est souvent difficile pour un expérimentateur d'interpréter ses résultats sans l'aide des mathématiques.

Lord Rayleigh

The study of mathematics, like the Nile, begins in minuteness, but ends in magnificence.

C. C. Colton

Mathematics possesses not only truth but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture without appeal to any part of our weaker nature, sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.

Bertrand Russell

Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.

Kant

Mais il y a une autre raison qui explique la haute réputation des mathématiques, c'est du'elles procurent aux sciences naturelles exactes une certaine proportion de sécurité que, sans elles ces sciences ne pourraient obtenir.

A. Einstein

Les mathématiques constituent l'outil qui convient spécialement pour traiter les notions abstraites, de toute nature et, dans ce domaine, leur pouvoir est illimité. C'est pourquoi un livre sur la physique nouvelle, s'il n'est pas purement la description de travaux d'expériences, doit être essentiellement mathématique.

P. A. M. Dirac

Comment peut-il se faire que les mathématiques, qui sont après tout un produit de la pensée humaine, indépendant de l'expérience, soient si admirablement adaptées aux objets da la realité?

A. Einstein

L'infini! Jamais aucune autre question n'a troublé si profondément l'esprit de l'homme.

D. Hilbert

Une formule empirique est à la base de toute théorie. Avant d'imaginer la théorie cinétique des gaz, il a fallu connaître la formule empirique de *Mariotte*.

H. Bouasse

La logique, qui peut donner la certitude, est l'instrument de la démonstration; l'intuition est l'instrument de l'invention.

H. Poincaré

Histories make men wise; poets, witty, the mathematics, subtile;...

F. Bacon

LITERATURA*

I. Udžbenici, priručnici i monografije

1. E. P. Adams — R. L. Hippisley: *Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions*, Washington, 1947 (Smithsonian miscellaneous collections, vol 74, number 1, publication 2672).

2. L. V. Ahlfors: *Complex Analysis*, New York, 1953.

3. A. C. Aitken: *Determinants and Matrices*, Edinbourgh—London, 1949.

4. R. Albrecht — H. Hochmut: *Übungsaufgaben zur höheren Mathematik*, Teil I (1955), Teil II (1955), Teil III (1956), München.

5. A. Angot: *Compléments de mathématiques*, troisième édition, Paris, 1957.

6. P. Appell — G. Valiron: *Analyse mathématique*, t. I (1951), t. II (1951), Paris

7. G. Ascoli: *Lezioni di Algebra*, Torino, 1955.

8. P. Aubert — G. Papelier: *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*, t. I (1928), t. II (1924), Paris.

9. E. F. Beckenbach: *Modern Mathematics for the Engineer*, New York, 1956.

10. H. Behnke — F. Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 77).

11. A. Betz: *Konforme Abbildung*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1948.

12. G. Birkhoff — S. Maclane: *A Survey of Modern Algebra*, New York, 1953.

13. Ch. Blanc: *Les équations différentielles de la technique*, Neuchâtel, 1947.

14. M. Boll: *Tables numériques universelles*, Paris, 1947.

15. H. Bouasse — E. Turrière: *Exercices et compléments de mathématiques générales*, 1934, Paris.

16. G. Bouligand — J. Rivaud: *L'Enseignement des mathématiques générales par les problèmes*, t. I (1951), t. II (1953), Paris.

17. A. Buhl: *Nouveaux éléments d'Analyse*, t. I (1944), t. II (1948), t. III (1940), t. IV (1943), Paris.

18. R. V. Churchill: *Fourier Series and Boundary Value Problems*, New York, 1941.

19. R. V, Churchill: *Introduction to Complex Variables and Applications*, New York, 1948.

20. L. Collatz: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, zweite Auflage, Berlin, 1955.

21. E. T. Copson: *The theory of functions of a complex variable*, London, 1948.

---

* 1. Početnicima se naročito preporučuju knjige iz gornjeg popisa pod brojevima: 6, 8, 18, 24, 26, 28, 33, 38, 56, 58, 66, 74, 86, 99, 100, 116.

2. Naročito su važni priručnici, navedeni pod brojevima: 23, 27, 29, 36, 46, 55, 102, 112. Njima se treba sistematski i stalno služiti.

3. U III izdanju biće naveden potpuniji spisak literature. Tu će literatura biti razvrstana po strukama i za svaku knjigu biće data njena karakteristična crta.

22. R. Courant: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, dritte Auflage Bde. I—II, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1955.

23. R. Courant — D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. I (1931), Bd. II (1937), Berlin.

24. R. Deltheil: *Compléments de Mathématiques générales*, Paris, t. I (1953), t. II (1954), t. III (1955).

25. G. Dötsch: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, München. 1956.

26. A. Duschek: *Vorlesungen über höhere Mathematik*, Bd. I (1949), Bd. II (1950), Bd. III (1953), Wien.

27. A. Erdélyi — W. Magnus — E. Oberhettinger — F. G. Tricomi: *Higher Transcendental Functions (Bateman Project)*, vol. I—III, New York, 1953—1955.

28. G. Feigl — H. Rohrbach: *Einführung in die höhere Mathematik*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

29. A. Fletcher — J. C. P. Miller — L. Rosenhead: *An Index of Mathematical Tables*, London—New York, 1946.

30. S. Flüge: *Handbuch der Physik*, Bd. I *(Mathematische Methoden I)*, Bd. II *(Mathematische Methoden II)*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955—1956.

31. Ph. Franklin: *A Treatise on Advanced Calculus*, New York, 1946.

32. R. A. Frazer — W. J. Duncan — A. R. Collar: *Elementary Matrices*, Cambridge, 1950.

33. 1° A. Geary — H. V. Lowry — H. A. Hayden: *Advanced mathematics for technical students*, part I (1951) London;

2° H. V. Lowry — H. A. Hayden: *Advanced mathematics for technical students*, part II (1951), London.

34. S. Gellerstedt: *800 övningsuppgifter i matematik*, Stockholm, 1954.

35. G. Goudet: *Les fonctions de Bessel*, Paris, 1954.

36. W. Gröbner — N. Hofreiter: *Integraltafeln*, Bd. I *(Unbestimmte Integrale)*, Bd. II *(Bestimmte Integrale)*, Wien, 1949—1950.

37. J. Hadamard: *Cours d'Analyse*, t. I—II, Paris, 1927—1930.

38. G. H. Hardy: *A course of pure mathematics*, ninth edition, Cambridge, 1948.

39. G. H. Hardy — J. E. Littlewood — G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge, 1934.

40. D. R. Hartree: *Numerical Analysis*, London, 1952.

41. F. B. Hildebrand: *Advanced Calculus for Engineers*, New York, 1950.

42. E. W. Hobson: *The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge, 1931.

43. E. Jahnke — F. Emde: *Tables of Functions*, New York, 1945.

44. H. Jeffreys — B. S. Jeffreys: *Methods of Mathematical physics*, Cambridge, 1950.

45. G. Julia: *Exercices d'Analyse*, t. II, fasc. I, deuxième édition, Paris, 1947.

46. E. Kamke: *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig, Bd. I, 1942 (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 18).

47. W. Kaplan: *Advanced calculus*, Cambridge, 1952.

48. Th. v. Karman — M. A. Biot: *Les méthodes mathématiques de l'ingénieur*, Paris, 1949.

49. R. Lagrange: *Polynômes et fonctions de Legendre* (fasc. 97 du Mémorial des sciences mathématiques), Paris, 1939.

50. Ch.-J. de la Vallée Poussin: *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I (1947); dixième édition), t. II (1949; huitième édition), Louvain—Paris.

51. J. Lense: *Kugelfunktionen*, Leipzig, 1950 (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 23).

52. J. Lense: *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, Berlin—Leipzig, 1933.

53. E. Lindelöf: *Calcul des résudus*, Paris, 1905 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions).

54. T. M. MacRobert: *Functions of complex variable*, fourth edition, London, 1954.

55. W. Magnus — F. Oberhettinger: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2 Aufl., Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1948 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 52).

56. H. V. Mangoldt — K. Knopp: *Einführung in die höhere Mathematik*, Bd. I (1931), Bd. II (1932), Bd. III (1933), Leipzig.

57. H. Margenau — G. M. Murphy: *The Mathematics of Physics and Chemistry*, New York, 1949.

58. E. A. Maxwell: *An Analytical Calculus*, vol. I (1954), vol. II (1954), vol. III (1954), vol. IV (1957), Cambridge.

59. K. Menger: *Calculus — An Modern Approach*, Boston, 1955.

60. H. Mineur: *Techniques de Calcul numérique à l'usage des mathématiciens, astronomes, physiciens et ingénieurs*, Paris, 1952.

61. A. D. Michal: *Matrix and Tensor Calculus*, New York, 1948.

62. M. Picone — G. Fichera: *Trattato di Analisi matematica*, vol. I, Roma, 1954.

63. F. Neiss: *Determinanten und Matrizen*, Berlin, 1941.

64. K. L. Nielsen: *Methods in Numerical Analysis*, New York, 1956.

65. B. Niewenglowski: *Cours de Géométrie analytique*, t. I (1925), t. II (1926), Paris.

66. A. Ostrowski: *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung*, Bd. I (1948), Bd. II (1951), Bd. III (1954), Basel.

67. E. G. Phillips: *Functions of a Complex Variable*, Edinbourgh—London, 1951.

68. H. T. H. Piaggio: *Differential Equations*, 1946, London,

69. B. van der Pol — H. Bremmer: *Operational calculus based on the two-sided Laplace integral*, Cambridge, 1950.

70. Potron: *Exercices de Calcul différentiel et integral*, t. I (1926), t. II (1927), Paris.

71. G. Pólya — G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. I (1925), Bd. II (1925), Berlin.

72. G. Pólya: *Mathematics and Plausible Reasoning* (vol. I: Induction and Analogy in Mathematics; vol. II: Patterns of Plausible Inference), Princeton, 1954.

73. H. Pupke: *Einführung in die Matrizenrechnung*, Berlin, 1953.

74. R. Rothe — W. Schmeidler — I. Szabò: *Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure*, Bde I—VII (1953—1956), Berlin.

75. M. G. Salvadori — M. L. Baron: *Numerical Methods in Engineering*, New York, 1952.

76. J. B. Scarborough: *Numerical Mathematical Analysis*, Baltimore, 1950.

77. W. Schmeidler: *Vorträge über Determinanten und Matrizen in Physik und Technik*, Berlin, 1949.

78. L. Schwarz: *Cours du Certificat de Méthodes mathématiques de la Physique*, Paris.

79. H. Schwerdtfeger: *Introduction to linear algebra and theory of matrices*, Groningen, 1950.

80. I. N. Sneddon: *Partial Differential Equations*, New York, 1957.

81. G. Szegö: *Orthogonal Polynomials*, 1939 (American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. 23).

82. F. G. Tricomi: *Lezioni di Analisi matematica* (settima edizione totalmente riveduta) vol. I—II, Padova, 1956.

83. F. G. Tricomi: *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1955 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 76).

84. J. V. Uspensky: *Theory of Equations*, New York, 1948.

85. G. Valiron: *1° Théorie des fonctions*, 1948, Paris;
2° Équations fonctionnelles. Applications, 1945, Paris.

86. L. Vietoris — G. Lochs: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Innsbruck, 1951.

87. G. Vivanti — F. Sibirani: *Esercizi di Analisi infinitesimale*, seconda edizione Torino, 1920.

88. T. Vogel: *Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la Physique mathématique*, Paris, 1953.

89. G. N. Watson: *A Treatise of the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1922.

90. E. Whittaker — G. N. Watson: *A course of modern analysis*, fourth edition, Cambridge, 1952.

91. F. A. Willers: *Practical Analysis*, New York, 1948.

92. C. R. Wylie: *Advanced Engineering Mathematics*, New York, 1953.

93. R. Zurmühl: *Matrizen*, Berlin, 1950.

94. А. Д. Александров — А. Н. Колмогоров — М. А. Лаврентьев: *Математика, ее содержание, методы и значение*, том I—III, Москва, 1956.

95. С. В. Бахвалов — П. С. Моденов — А. С. Пархуменко: *Сборник задач по аналитической геометрии*, Москва—Ленинград, 1948.

96. Г. Н. Берман: *Сборник задач по курсу математического анализа*, издание шестое, Москва, 1956.

97. Ф. Р. Гантмахер: *Теория матриц*, Москва, 1954.

98. Н. М. Гюнтер — Р. О. Кузмин: *Сборник задач по высшей математике*, т. I (1945), т. II (1945), т. III (1947), Москва—Ленинград.

99. Н. А. Давидов — П. П. Коровкин — В. Н. Никольский: *Сборник задач по математическому анализу*, Москва, 1957.

100. Б. П. Демидович: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, издание третье, Москва, 1956.

101. В. А. Кречмар: *Задачник по алгебре*, Москва—Ленинград, 1950.

102. А. В. Лебедев — Р. М. Федорова: *Справочник по математическим таблицам*, Москва, 1956.

103. Н. Н. Лебедев: *Специальные функции и их приложения*, Москва, 1953.

104. А. Н. Мальцев: *Основы линейной алгебры*, Москва, 1956.

105. П. С. Моденов: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*, Москва, 1957.

106. В. П. Минорский: *Сборник задач по высшей математике*, Москва, 1955.

107. Г. Л. Невяжский: *Неравенства*, Москва, 1947.

108. С. С. Новоселов: *Специальный курс элементарной алгебры*, Москва, 1956.

109. Е. Пржевальский: *Сборник алгебраических задач*, Москва, 1941.

110. И. И. Привалов: *Введение в теорию функций комплексного переменного*, издание девятое, Москва, 1954.

111. И. В. Проскуряков: *Сборник задач по линейной алгебре*, Москва, 1957.

112. Н. М. Рыжик — И. С. Градштейн: *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, издание третье, Москва—Ленинград. 1951.

113. М. М. Смирнов: *Задачи по уравнениям математической физики*, издание третье, Москва, 1957.

114. А. Ф. Тимофеев: *Интегрирование функций*, Москва—Ленинград, 1948.

115. А. Н. Тихонов — А. А. Самарский: *Уравнения математической физики*, издание II, Москва, 1953.

116. Г. П. Толстов: *Курс математического анализа*, т. I—II (1957), Москва.

117. Д. К. Фаддеев—И. С. Соминский: *Сборник задач по высшей алгебре*, Москва, 1954.

118. В. Н. Фаддеева: *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва—Ленинград, 1950.

119. Машиностроение. *Энциклопедический справочник*, раздел I, том I, книга 1, Москва, 1947.

120. Энциклопедия элементарной математики под редакцией *П. С. Александрова, А. И. Маркушевича, А. Я. Хинчина*, кн. I—III, Москва. 1951.

II. Časopisi

1. *Elemente der Mathematik*, Basel.
2. *The American Mathematical Monthly*, Menasha (USA).
3. *The Mathematical Gazette*, London.
4. *Revue de Mathématiques spéciales*, Paris.
5. *Mathematics Magazine*, Los Angeles (USA).
6. *Mathesis*, Mons.
7. *Gazeta Matematică şi Fizică*, Bucureşti.
8. *Matematika ve škole*, Praha.
9. *Matymatika*, Warszawa.
10. *Matematisk Tidsskrift*, Kobenhavn.
11. *Wiskundige Opgaven*, Amsterdam.
12. *Intermédiaire des Mathématiciens**, Paris.
13. *Intermédiaire des Recherches mathématiques**, Paris.
14. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Tübingen.
15. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public*, Paris.
16. *Математика в школе*, Москва.
17. *Математическое просвещение*, Москва.
18. *Успехи математических наук*, Москва—Ленинград.
19. *Vesnik Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Srbije*, Beograd.
20. *Glasnik matematičko-fizički i astronomski*, Zagreb.
21. *Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od Narodna Republika Makedonija*, Skoplje.
22. *Periodico di Matematiche*, Bologna.
23. *Bollettino del'Unione matematica italiana*, Bologna.

III. Referativni časopisi

1. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik**, Berlin.
2. *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Berlin.
3. *Revue semestrielle des publications mathématiques**, Amsterdam.
4. *Mathematical Reviews*, Providence (U. S. A.).
5. *Bulletin signalétique* (ranije *Bulletin analytique*), Paris.
6. *Bulletin des sciences mathématiques*, Paris.
7. *Boletin del Centro de Documentacion cientifica y technica de Mexico*, Mexico.
8. *Реферативный журнал—Математика*, Москва.

---

* Ovaj časopis prestao je da izlazi.

IV. Važnije kolekcije

1. *Mémorial des Sciences mathématiques*, Paris.
2. *Actualités scientifiques et industrielles*, Paris.
3. *Collection sur la Théorie des Fonctions*, Paris.
4. *Cahiers scientifiques*, Paris.
5. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Berlin.
6. *Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Berlin.
7. *Colloquim Publications* (American Mathematical Society).
8. *Princeton Mathematical Series* (Princeton University).

Primedba. Detaljnija obaveštenja o matematičkoj dokumentaciji mogu se naći u članku:

D. S. Mitrinović: *Organizacija naučnog rada i priprema naučnih kadrova u oblasti matematike* (*Naučna saopštenja i obaveštenja*, Prvi kongres matematičara i fizičara FNRJ, 1951, str. 175—187).

V. Matematička biblioteka

(Edicija Katedre za matematiku Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu)

1. D. S. Mitrinović: *Savremene tendencije u nastavi matematike*, 1957.
2. D. Mihailović i drugi; *Kvalifikacioni ispit iz matematike održan 1956 godine na tehničkim fakultetima Univerziteta u Beogradu*, 1957.
3. D. S. Mitrinović: *Referati o srednjoškolskim udžbenicima iz matematike. Prilozi metodici matematičke nastave*, 1957.
4. D. S. Mitrinović: *Metod matematičke indukcije* (II izmenjeno izdanje), 1958.
5. D. Mihailović: *Vektorska obrada nekih problema analitičke geometrije ravni i prave*, 1957.
6. Z. Mamuzić: *Kombinatorika*, 1957.
7. D. S. Mitrinović: *Važnije nejednakosti*, 1958.
8. D. Mihailović: *Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru*, 1958.

UVODNI PROBLEMI

1. Data je jednačina $ax+by=c$, gde su a, b, c $(abc \neq 0)$ celi brojevi. Ako brojevi a i b imaju zajednički faktor koji nije faktor broja c, tada data jednačina nema celobrojnih rešenja (x, y). Dokazati ovaj stav.

2. Dokazati da kvadrat svakog neparnog broja ima oblik $8p+1$ (p prirodan broj ili nula). Kakav oblik ima zbir kvadrata dva neparna broja?

3. Dokazati ove stavove:

1° Ako je suma dva cela broja paran broj, njihova je razlika takođe paran broj;

2° Ako je suma dva cela broja neparan broj, njihova je razlika takođe neparan broj;

3° Ako je suma dva cela broja neparan broj, njihov proizvod je paran broj;

4° Ako je proizvod tri cela broja neparan broj, njihov zbir je takođe neparan broj.

4. Pokazati da je $x=1/(1-a)$ koren jednačine

$$x+\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}=a+\frac{1}{1-a}+\frac{a-1}{a} \qquad \{a(a-1)\neq 0\}$$

i odrediti ostale njene korene. — Rešiti ovu jednačinu takođe po a.

Rezultat. a, $(a-1)/a$.

5. Data je funkcija

$$f(x)\equiv a_0x^5+a_1x^3+a_2x+a_3,$$

gde su a_0, a_1, a_2, a_3 realni brojevi od kojih prva tri imaju iste znake.

Grafičkim putem pokazati da ova funkcija ima samo jednu realnu nulu, za ma kakve vrednosti koeficijenata $a_k\,(k=0, 1, 2, 3)$.

Ako su $a_k\,(k=0, 1, 2, \ldots, p)$ istog znaka, da li isti rezultat važi i za funkciju

$$f(x)\equiv a_0x^{2p+1}+a_1x^{2p-1}+\cdots+a_px+a_{p+1}\,?$$

6. Ako je $a>b>0$, tada je

$$\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2}\leqslant a-b. \tag{1}$$

Dokazati ovu nejednakost i dati jedno ograničenje izraza

$$\sqrt[n]{a^n+k^n}-\sqrt[n]{b^n+k^n} \qquad (n \text{ prirodan broj; } k\geqslant 0;\ a>b>0).$$

Kako treba napisati nejednakost (1), kada su a i b ma kakvi realni brojevi?

Rešenje. Pođimo od identiteta

$$(2) \qquad (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}) \equiv x^n-y^n$$

i stavimo

$$x=\sqrt[n]{a^n+k^n}, \qquad y=\sqrt[n]{b^n+k^n}.$$

Budući da je $x \geqslant a$ i $y \geqslant b$ (jer je $k \geqslant 0$) i $a>b>0$, relacija (2) dobija oblik

$$\left(\sqrt[n]{a^n+k^n}-\sqrt[n]{b^n+k^n}\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) \leqslant a^n-b^n.$$

Ako se i leva i desna strana poslednje nejednakosti podele pozitivnim brojem

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1},$$

dobija se

$$(3) \qquad \sqrt[n]{a^n+k^n}-\sqrt[n]{b^n+k^n} \leqslant a-b.$$

Za $n=2$ relacija (3) postaje

$$\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2} \leqslant a-b.$$

Ova relacija važi za $a \geqslant b \geqslant 0$, dok k može biti ma kakav realan broj (pozitivan, negativan ili nula).

Ako su a, b, k ma kakvi realni brojevi, tada je

$$\left|\sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2}\right| \leqslant \big||a|-|b|\big|.$$

Ovo interesantno rešenje dao je *D. Đoković.*

Primedba. Ako je n parno i ako su a, b, k ma kakvi realni brojevi, kakvo je ograničenje izraza

$$\sqrt[n]{a^n+k^n}-\sqrt[n]{b^n+k^n} \; ?$$

7. Jednakost $f(x)=0$ je identitet, ako je zadovoljena za sve vrednosti x iz definicionog područja funkcije $f(x)$.

Jednakost $f(x)=0$ je jednačina ako je zadovoljena samo za deo skupa definicionog područja.

Da li je jednakost $\operatorname{sgn} x=1$ jednačina ili identitet?

8. Dokazati da za $x \geqslant 0$ važi nejednakost

$$1+\frac{x}{5} \geqslant (1+x)^{1/5}.$$

Da li ova nejednakost važi za negativne vrednosti x?

9. Odrediti funkciju $F(x, y) \equiv xf_1(y/x)\cdot f_2(xy)+f_3(x^2+y^2)$ (f_1, f_2, f_3 linearne funkcije naznačenih argumenata) koja ispunjava uslove:

$$F(x, -y) \equiv F(x, y), \qquad F(0, 0)=0.$$

10. Grafičkim i računskim putem rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > \sqrt{x+1}.$$

11. Ako je $f(x+a) \equiv x^2+x+1$, obrazovati funkcije:

$$f(x-a), \qquad f(ax), \qquad f\{f(x)+a\}.$$

12. Da li se prirodan broj n može tako odrediti da broj 7^n-1 bude deljiv i sa 8 i sa 3?

Rešenje. $7^n-1=(6+1)^n-1=6^n+\binom{n}{1}6^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n-1}\cdot 6;$

$$7^n-1=(8-1)^n-1=8^n-\binom{n}{1}8^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\cdot 8+(-1)^n-1.$$

Potreban i dovoljan uslov da bi bile u važnosti relacije

$$8\,|\,(7^n-1), \qquad 3\,|\,(7^n-1)$$

je $(-1)^n-1=0$, odakle sleduje da je n paran broj.

13. Odrediti primitivni (osnovni) period funkcija:

$$1^\circ \quad \cos^4 x+\sin^4 x; \qquad 2^\circ \quad \cos^6 x+\sin^6 x.$$

Uputstvo. Date funkcije izraziti kao linearne kompozicije izraza oblika $\sin px$, $\cos px$. Ove funkcije imaju oblike:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x, \qquad \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$$

14. Eliminisati x i y iz jednačina:

$$\sin x+\sin y=2a, \qquad \cos x+\cos y=2b, \qquad \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2c.$$

Primedba. Proveriti da li je rezultat eliminacije

$$c\{(a^2+b^2)^2-a^2\}=ab.$$

15. Nacrtati grafik funkcije

$$f(x)=\frac{|x+1|-|x-1|}{2}.$$

16. Ako je $0<a<2c$, ispitati da li $(x+a)/(x^2+ax+c^2)$ leži između $-(2c+a)^{-1}$ i $(2c-a)^{-1}$.

17. Ako je $a=\cos\alpha$, $c=\sin\alpha$, $b^2=\sin 2\alpha$ $(0<\alpha<\pi/4)$, tada za funkciju

$$f(x)=(ax^2+bx+c)/(cx^2+bx+a)$$

važi

$$(\sec\alpha-1)(\operatorname{cosec}\alpha+1)\leqslant f(x)\leqslant(\sec\alpha+1)(\operatorname{cosec}\alpha-1).$$

Proveriti ovo tvrđenje.

18. Eliminisati x iz skupa jednačina:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ & ax^2+bx+c=0, & \alpha x^2+\beta x+\gamma=0; \\ 2^\circ & ax^3+bx^2+cx+d=0, & \alpha x^2+\beta x+\gamma=0; \\ 3^\circ & x^3+ax+b=0, & x^4+\alpha x^2+\beta=0. \end{array}$$

19. Ako je $p>m>0$, ispitati da li važi relacija

$$\frac{p+m}{p-m}\geqslant\frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2}\geqslant\frac{p-m}{p+m}. \tag{1}$$

Šta će biti ako je $p>m$ i $m<0$?

Za funkciju $(x^2-2x\cos a+1)/(x^2-2x\cos b+1)$ izvesti relaciju koja će biti slična relaciji (1).

20. Odrediti oblasti ravni Oxy u kojima treba da se nalazi tačka $M(x,y)$, da bi njene koordinate zadovoljavale nejednačinu

$$(x^2-4xy)/(x^2+3xy+2y^2)<0.$$

21. U kojim oblastima ravni Oab treba da se nalazi tačka $M(a, b)$ da bi jednačina $x^2-2ax+b=0$ imala dva realna korena u razmaku $(1, 2)$?

22. Dokazati nejednakost $(a+b+c)(bc+ca+ab)>9abc$, gde su a, b, c pozitivni brojevi i uz to nisu svi međusobno jednaki.

Rešenje. $(a+b+c)(bc+ca+ab)-9abc\equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6abc$

$$\equiv a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0.$$

Odavde se neposredno izvodi navedena nejednakost.

Primedba. Kakvu izmenu treba učiniti u datoj nejednakosti, ako su a, b, c negativni brojevi?

23. Dokazati relaciju $12\,|\,(n^4-n^2)$, gde je n ceo broj.

24. Za koje je vrednosti parametra a uslov

$$(x^2+ax+1)/(x^2+4x+8)<8$$

ispunjen za svako x?

25. Odrediti k tako da za svako x bude

$$|(x^2-kx+1)/(x^2+x+1)|<3.$$

Uputstvo. Data relacija ekvivalentna je skupu nejednakosti

$$-3<(x^2-kx+1)/(x^2+x+1)<+3.$$

Rezultat. $k\in(-5, +1)$.

26. Rešiti nejednačinu $\{(3x-1)/(2-x)\}^{1/2}>1$.

Rezultat. $x\in(3/4, 2)$.

27. Za koje je vrednosti x zadovoljena relacija $(1-\sqrt{1-8x^2})/(2x)\leqslant 1$?

28. Odrediti a i b tako da polinom $P(x)\equiv x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ bude potpun kvadrat jednog kvadratnog trinoma $p(x)$.

Uputstvo. $p(x)$ ima oblik $\pm x^2+rx\pm 2$, gde dolaze u obzir sve kombinacije znakova $+$ i $-$. Ostaje da se odredi parametar r.

29. Za svako θ važi nejednakost $5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0$.

Uputstvo. Izraz na levoj strani ove nejednakosti može se napisati u obliku polinoma po $\cos\theta$.

30. Ako je $f\{\operatorname{tg}(t/2)\}\equiv\cos t$, odrediti $f(\cos t)$.

31. Zbir jedne katete i hipotenuze pravouglog trougla je dat i iznosi s. Koliki je ugao između ove katete i hipotenuze u slučaju kada površina trougla ima maksimalnu vrednost?

Rezultat. $60°$.

32. Posmatrati u ravni pravilan šestougao $ABCDEF$ čiji je centar u tački O. Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ kao funkcije vektora $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

33. Obim jednog kružnog isečka je s. Koliki je centralni ugao ovog isečka za slučaj kada je površina isečka maksimalna?

34. Ako je

$$A_m = \frac{a^m + a^{-m}}{2}, \quad B_m = \frac{a^m - a^{-m}}{2},$$

verifikovati identitete:

$$A_m^2 - B_m^2 = 1, \quad A_{-m} = A_m, \quad B_{-m} = -B_m,$$

$$A_{m+n} = A_m A_n + B_m B_n, \quad B_{m+n} = A_m B_n + A_n B_m.$$

Takođe izraziti A_{m-n} i B_{m-n} pomoću A_m, A_n, B_m, B_n.

Primedba. Dovesti ove identitete u vezu sa formulama koje važe za hiperbolične funkcije.

35. Proveriti relacije

$$f(x) = f(-x), \quad 4f(2x)f(x) = 4f^2(x) + x^2,$$

gde je

$$f(x) = \frac{x}{a^x - 1} + \frac{x}{2}.$$

36. Odrediti funkciju koja će biti inverzna funkciji

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}.$$

37. Da li postoje takve vrednosti parametara a, b, c da bude ispunjen uslov $F\{F(x)\} = x$, ako je $F(x) = (ax+b)/(x+c)$.

38. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy odrediti jednačinu svih parabola čija je osa simetrije x-osa i čija se žiža nalazi u tački O.

Ispitati koliko parabola iz ove familije prolaze kroz jednu tačku $M(x_0, y_0)$ i, ako ih je više, odrediti ugao pod kojim se po dve i dve međusobno seku.

39. Dat je skup parabola $y^2 = 2cx + c^2$ (c realan parametar).

1° Pokazati da kroz svaku tačku $M(x_0, y_0)$ ravni Oxy, osim kroz tačke čija je ordinata nula, prolaze po dve parabole, i naći ugao pod kojim se seku u tački $M(x_0, y_0)$.

2° Pokazati da sve ove parabole imaju zajedničku žižu i osu simetrije.

40. Rešiti skup nejednačina $(2x-y)/y < 0$, $(2y-x)/x < 0$.

41. Uočiti krug poluprečnika r i jedan njegov prečnik AB; povući u tački B tangentu kruga i kroz tačku A jednu pravu koja seče krug u tački C, a tangentu u tački D. Kroz tačku C povući pravu paralelnu tangenti, a kroz D pravu paralelnu prečniku AB. Te dve prave seku se u tački E.

Odrediti i ispitati geometrisko mesto tačke E, kada sečica AC rotira oko tačke A.

42. Posmatrati zbir N dva prirodna broja m i n.

1° Navesti jedan dovoljan uslov (koji nije i potreban) da bi broj N bio deljiv sa 2.

2° Navesti potreban i dovoljan uslov da bi zbir N bio deljiv sa 2.

Odgovor. 1° Brojevi m i n su parni. 2° Brojevi m i n su iste parnosti (ili su oba parna ili oba neparna).

43. Posmatrati prirodan broj N.

1° Navesti jedan dovoljan uslov (koji nije i potreban) da bi broj N bio deljiv sa 9.

2° Navesti jedan potreban uslov (koji nije i dovoljan) da bi broj N bio deljiv sa 9.

3° Navesti potreban i dovoljan uslov da bi broj N bio deljiv sa 9.

Odgovor. 1° Sve cifre broja N su devetke. 2° Broj N je deljiv sa 3. 3° Zbir cifara broja N deljiv je sa 9.

44. Pokazati da su prave

$$(ar \pm bt)\,x + (br \mp at)\,y = r\,(a^2 + b^2) \qquad (t \text{ dužina tangente})$$

tangente kruga $x^2 + y^2 = r^2$, povučene iz tačke (a, b) koja se nalazi van ovog kruga.

45. Od kocaka ivice 1 cm složen je pravougli paralelepiped, čije su ivice a cm, b cm, c cm (a, b, c prirodni brojevi), pa je ovaj pravougli paralelepiped obojen spolja crveno.

Koliko između kocaka od kojih je sagrađen paralelepiped imaju:

1° samo tri strane obojene crveno;

2° samo dve strane obojene crveno;

3° samo jednu stranu obojenu crveno;

4° nijednu stranu obojenu crveno:

5° bar jednu stranu obojenu crveno?

46. Bez upotrebe logaritama ispitati da li je veći:

$$1^\circ \text{ broj } \sqrt[5]{5} \text{ ili } \sqrt[6]{6}\,; \qquad 2^\circ \text{ broj } \sqrt[5]{0{,}5} \text{ ili } \sqrt[6]{0{,}6}\,.$$

47. Izabrati a, b, c, d tako da iz relacije

$$y = f(x) = (ax + b)/(cx + d)$$

sleduje $x = f(y)$.

48. Ako je $f(x)$ funkcija definisana za svako x, tada se ona može pretstaviti kao zbir od jedne parne i jedne neparne funkcije.

Uputstvo. Primeniti identitet

$$f(x) \equiv \frac{1}{2}\,[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)]\,.$$

Primedba. Navesti neke funkcije za koje ova osobina ne važi.

Da li navedeni stav važi ako je funkcija $f(x)$ definisana na simetričnom intervalu $(-a, +a)$?

49. Grafički prikazati funkciju

$$2\sqrt{x^3} + \sqrt{x\,(x-4)^2} \qquad (x \geqslant 0)\,.$$

50. Nacrtati grafik funkcija: $x\sqrt{|x|}$, $\quad 1/(x\sqrt{|x|})$.

51. Dat je skup jednačina $\sin x \sin y = a, \quad \cos x \cos y = b$.

U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oab odrediti oblast u kojoj treba da se nalazi tačka (a, b) da bi ovaj skup imao realnih rešenja. Zatim rešiti dati skup.

52. Nacrtati krive $y=|x+3|+|2x+1|$, $y=|x+6|$, i odrediti koordinate njihovih preseka.

53. Rešiti jednačine:

1° $|x|-|x+2|=0$; 2° $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$;

3° $|x-2|+|x+1|=|2x+3|$; 4° $3x-2|x+1|-|x-5|=3$.

54. Nacrtati grafik funkcije

$$(x+1)/\{(2x-1)(x-1)\}, \quad x\in(0, 1).$$

55. Koja veza mora postojati između parametara a i b, da bi funkcija $a\sin x+b\sin 3x$, u intervalu $(0, \pi)$, imala dva relativna maksimuma i jedan relativni minimum?

56. Odrediti a tako da jednačina $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ ima realnih rešenja, pa ih zatim naći.

57. Po x rešiti jednačinu $\sin x+2\sin x\cos(a-x)=\sin a$.

Rezultat. $x_k=\frac{1}{3}(a+2k\pi)$, $x_n=a+(2n+1)\pi$,

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

58. Dokazati identitet

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}\equiv \operatorname{tg} 3x.$$

Uputstvo. Brojilac i imenilac napisati u obliku:

$$(\sin x+\sin 5x)+\sin 3x; \quad (\cos x+\cos 5x)+\cos 3x.$$

Za koje vrednosti x ovaj identitet gubi smisao?

59. Ako je $f(a)=(\operatorname{tg} a+\sin a)^{1/2}+(\operatorname{tg} a-\sin a)^{1/2}$, tada za $0<a<\pi/2$ važi formula

$$f(a)=2(\operatorname{tg} a)^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right).$$

Odrediti $f(a)$ u sledećim slučajevima:

1° $\pi/2<a<\pi$; 2° $\pi<a<3\pi/2$; 3° $3\pi/2<a<2\pi$.

60. Pokazati da su sva rešenja jednačine

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0$$

definisana relacijama

$$5x=k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad \text{i} \quad 8\cos 2x=1\pm\sqrt{17}.$$

Uputstvo. Poći od identiteta

$$(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 4x)+(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x)\equiv\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}.$$

Da li se ovim postupkom može rešiti generalnija jednačina

$$\operatorname{tg} px+\operatorname{tg}(p+q)x+\operatorname{tg}(p+2q)x+\operatorname{tg}(p+3q)x=0,$$

gde su p i q dva parametra nezavisna od x?

Ostavlja se čitaocu da postupak generališe na jednačine navedenog tipa, gde je na levo strani broj članova veći od 4.

61. Proveriti relacije:

$$\sin 3a+\cos a \equiv (\sin a+\cos a)(\sin 2a+\cos 2a);$$

$$\cos 3a+\sin a \equiv (\cos a-\sin a)(\cos 2a+\sin 2a);$$

$$\sin 3a-\cos a \equiv (\cos a-\sin a)(\sin 2a-\cos 2a);$$

$$\cos 3a-\sin a \equiv (\cos a+\sin a)(\cos 2a-\sin 2a);$$

$$\frac{\cos a-\sin a+1}{\cos a+\sin a-1} \equiv \operatorname{cotg}\frac{1}{2}a;$$

$$\frac{\sin(n+p)a+\cos na}{\cos(n+p)a+\sin na} \equiv \sec pa+\operatorname{tg} pa.$$

62. Ako je $n \equiv 1, 2 \pmod 5$ (n prirodan broj), tada je

$$\cos\frac{2n-1}{5}\pi+\cos\frac{4n}{5}\pi=0.$$

Uputstvo. Staviti: 1° $n-1=5p$; 2° $n-2=5p$ (p prirodan broj ili nula).

63. Ako je n nula ili prirodan broj, dokazati

$$\cos a\cos 2a\cos 4a\cdots\cos 2^n a \equiv \frac{\sin 2^{n+1}a}{2^{n+1}\sin a} \qquad (a\neq k\pi;\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

64. Dokazati:

$$1^\circ \quad \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}; \qquad 2^\circ \quad \cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Rešenje.

$$1^\circ \quad \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}}=\cos\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{4}.$$

65. Rešiti jednačine:

1° $\sin 3x=4\sin x\cos 2x$,

2° $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$,

3° $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$,

4° $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$.

Uputstvo. 3° Grupisati članove na levoj strani ovako:

$$(\sin x+\sin 3x)+(\sin 2x+\sin 4x).$$

4° Napisati jednačinu u obliku

$$(\sin x+\sin 3x)-(\cos x+\cos 3x)+(\sin 2x-\cos 2x)=0.$$

66. Verifikovati identitet $\dfrac{\cos 3t}{\cos t}-\dfrac{\cos 6t}{\cos 2t}\equiv 2(\cos 2t-\cos 4t)$.

Da li ovaj identitet važi za svako t?

67. Dato je pet tačaka u prostoru, pod uslovom da sve one ne leže u jednoj ravni ili na jednoj sferi.

Koliko ukupno postoji ravni ili sfera koje su podjednako udaljene od svih datih tačaka, pod uslovom da se četiri tačke nalaze s jedne strane ravni, a jedna s druge strane, ili da se četiri tačke nalaze u sferi (odnosno van sfere) i jedna van sfere (odnosno u sferi)?

Posebno, ako su date tačke:

$$A(-1,\ 0,\ -1),\quad B(2,\ -1,\ 2),\quad C(3,\ 1,\ 0),\quad D(-2,\ 1,\ 0),\quad E(3,\ 3,\ -1)$$

u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, odrediti jednačine ravni ili sfera koje će imati navedenu osobinu.

Rešenje. Neka se četiri tačke A, B, C, D nalaze s jedne strane ravni, odnosno sfere, a peta tačka E sa druge strane ravni (odnosno sfere). Kroz tačke A, B, C, D može se postaviti ili samo ravan (Π_1) ili samo sfera (S_1).

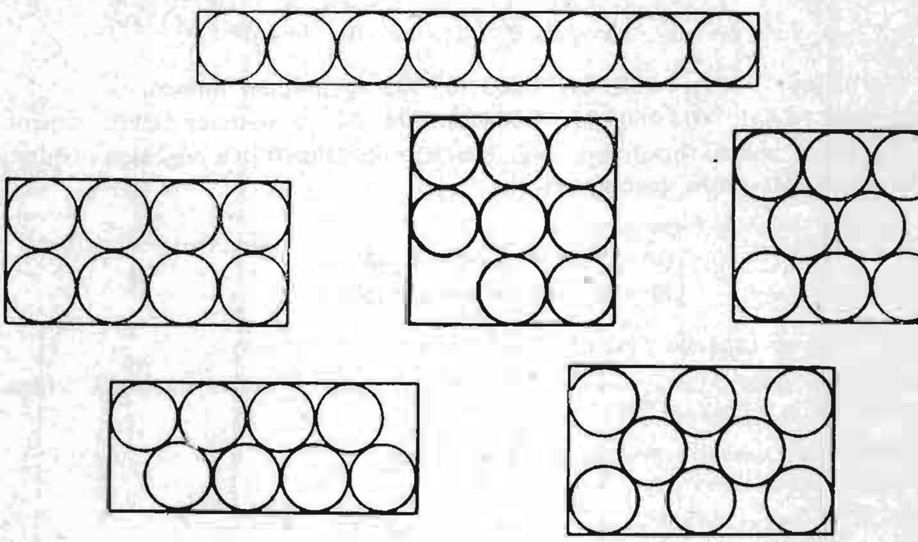
Ako je postavljena ravan (Π_1), treba postaviti novu ravan (P_1) koja će biti simetrala normalne duži spuštene iz tačke E na ravan (Π_1). *Ravan* (P_1) *ima osobinu da je podjednako udaljena od datih tačaka* A, B, C, D, E.

Ako je postavljena sfera (S_1) čiji je centar u tački O, treba postaviti novu sferu (σ_1), koncentričnu sa (S_1), pod uslovom da poluprečnik sfere (σ_1) bude $(\overline{OA}+\overline{OE})/2$. *Sfera* (σ_1) *ima osobinu da je od svih pet datih tačaka jednako udaljena.*

Budući da ima pet kombinacija (posebno četiri tačke, a posebno jedna), ukupno će biti *pet ravni ili sfera* sa zadatom osobinom.

Numerički primer ostavlja se čitaocu za vežbu.

68. Osam jednakih krugova smešteno je u pravougaonicima na više načina. U kome slučaju pravougaonik ima najmanji, a u kome najveći obim?



69. Odrediti zajedničke normale krivih

$$y=x^3,\qquad y=-(x-1)^2.$$

70. Ispitati da li se rešenja (x, y, z), u celim brojevima, *Diofantove* jednačine

$$x^2+y^2=z^n \qquad (n \text{ prirodan broj}) \tag{1}$$

mogu dobiti na sledeći način:

Treba poći od kompleksnog broja $a+ib$ i obrazovati:

$$(a+ib)^n = A(a, b) + iB(a, b).$$

Ako su a i b celi brojevi, tada je jedno rešenje (x, y, z) jednačine (1) definisano formulama:

$$x = A, \quad y = B, \quad z = a^2 + b^2 .$$

Proveriti tačnost navedenog rezultata prvo na partikularnim slučajevima: $n = 1, 2, 3, 4$, a zatim na slučajevima:

$$n = 4p, \quad n = 4p + 1, \quad n = 4p + 2, \quad n = 4p + 3$$

(p prirodan broj).

71. Rešiti jednačinu $\cos 4\theta + \cos 2\theta + \cos\theta = 0$.

Rezultat. $\theta_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\theta_k = (3k \pm 1)\frac{2\pi}{9}$ $(n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

72. Rešiti jednačine

$$1^\circ \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin |x|}; \qquad 2^\circ \quad |\sin(x^2)| = 1 .$$

73. Odrediti parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju skup jednačina $x - |y + 1| = 1$, $x^2 + y = 10$.

74. Rešiti skup jednačina:

$$a^2 + bc = 0, \quad ab + bd = 0, \quad ac + cd = 0, \quad bc + d^2 = 0 .$$

75. Rešiti skup jednačina:

$$a^2 + bc = 0, \quad ab + bd = 0, \quad ac + cd = 0, \quad bc + d^2 = 1 .$$

76. Brojevi 1 331, 1 030 301, 1 003 003 001 su potpuni kubovi. Brojevi 14 641, 104 060 401, 1 004 006 004 001 su potpuni četvrti stepeni. Ustanoviti zakon formiranja ovih brojeva, obrazložiti ovu činjenicu i ispitati da li se rezultat može generalisati.

Uputstvo. Koristiti formule:

$$(10^n + 1)^3 = 10^{3n} + 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n + 1;$$
$$(10^n + 1)^4 = 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 6 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1 .$$

77. Data je funkcija $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy$.

Koristeći izraz $f(x, y, z) = x(x + y + z) + y^2 + yz + z^2$ i dva analogna izraza, pokazati da je $f(x, y, z) \geqslant 0$.

Rešenje. *V. Janekoski* (Skoplje) dao je ovo rešenje.
Polazeći od identiteta

$$2[x^2 + y^2 + z^2 \pm (yz + zx + xy)] = (y \pm z)^2 + (z \pm x)^2 + (x \pm y)^2 ,$$

dolazi se do relacije

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm (yz + zx + xy) \geqslant 0 .$$

Ova relacija postaje jednakost, tada i samo tada, ako je

$$x = y = z = 0 \quad \text{(za slučaj znaka } +),$$
$$x = y = z \quad \text{(za slučaj znaka } -).$$

78. Odrediti aritmetičku progresiju koja ima osobinu:

$$a_m + a_n = a_{m+n} \quad (a_r \text{ označava } r\text{-ti član progresije}).$$

Rezultat. $a, 2a, 3a, \ldots$.

79. Proveriti jednakost

$$\frac{1}{\sin(y+z)}\left[\sin y+\frac{\sin x\sin z}{\sin(x+y+z)}\right]=\frac{1}{\sin(x+z)}\left[\sin x+\frac{\sin y\sin z}{\sin(x+y+z)}\right].$$

80. Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$f(x)=1/(\sin ax\cos ax)\qquad (a \text{ parametar}).$$

Nacrtati grafik funkcije $f(x)$.

Odrediti realan parametar b tako da jednačina $f(x)=b$ nema realnih rešenja.

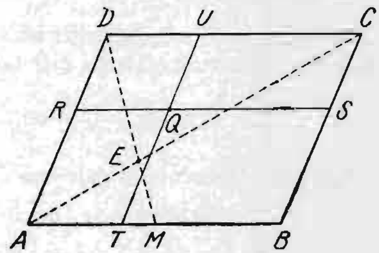
81. Verifikovati identitet

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}x-2\operatorname{cotg}2x\quad \{x\neq(\pi/2)+k\pi;\ \ x\neq k\pi;\ \ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\}.$$

i primeniti ga na izračunavanje vrednosti zbira

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k},\qquad \text{kada } n\to\infty.$$

82. $ABCD$ je paralelogram. Kroz tačku Q, koja se nalazi u paralelogramu, povući dve prave



$$RQS\parallel AB \quad\text{i}\quad UQT\parallel AD.$$

Pokazati da se prave RU, TS i AC seku u jednoj tački.

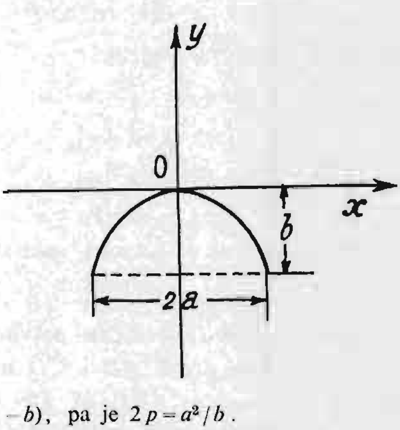
Zadatak rešiti metodom koordinata i pomoću vektora.

83. $ABCD$ je paralelogram i M sredina duži AB. Pokazati da je:

$$\overline{ED}=2\,\overline{EM},\quad \overline{EC}=2\,\overline{AE},$$

služeći se metodom koordinata.

84. Luk mosta ima oblik parabole. Odrediti otstojanje od žiže do temena te parabole kada je raspon luka $2a$, visina luka b.



Rešenje. Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxy neka je izabran kao što je na slici naznačeno.

Jednačina parabole je

$$x^2=-2py\qquad (p>0).$$

Ova parabola prolazi kroz tačke $(a,\ -b)$, $(-a,\ -b)$, pa je $2p=a^2/b$.

Jednačina parabole čiji je nacrtani luk — *luk mosta* — glasi $x^2=-(a^2/b)y$.

Traženo žižno otstojanje je $a^2/(4b)$.

Čitalac će odrediti dužinu luka ovog mosta.

Primedba. Ako luk mosta ima eliptičan oblik, da li je dovoljno znati raspon i visinu luka, da bi se odredilo otstojanje od temena do žiža elipse?

85. Po x rešiti jednačinu

$$\operatorname{tg} ax \operatorname{tg} bx = 1 \qquad \{a(\neq 0) \text{ i } b(\neq 0) \text{ realni parametri}\}.$$

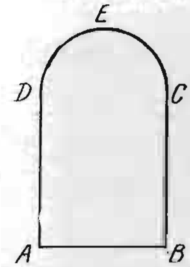
86. Grafički prikazati funkcije

$$f(x) = (1+\cos x)^{1/2} + (1-\cos x)^{1/2},$$

$$g(x) = (1+\sin x)^{1/2} - (1-\sin x)^{1/2}.$$

87. Geometriska figura ima oblik prikazan na slici. Ako je obim ove figure p, odrediti njene dimenzije tako da ova figura ograničava površinu maksimalne veličine.

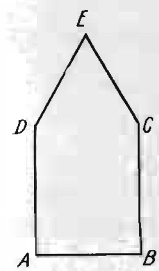
Primedba. $ABCD$ pravougaonik; CED polukrug nad prečnikom CD.



Slika uz problem 87

88. Geometriska figura ima oblik prikazan na slici. Odrediti dimenzije ove figure datog obima p, pod uslovom da ona ograničava površinu čija je veličina najveća.

Primedba. $ABCD$ pravougaonik; CDE ravnostrani trougao.



Slika uz problem 88

89. Pokazati da prirodan broj N i njegova potencija N^5 imaju jednake cifre na mestu jedinica.

90. Ako je $a > 0$, odrediti oblasti u ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema čije tačke (x, y) zadovoljavaju uslov

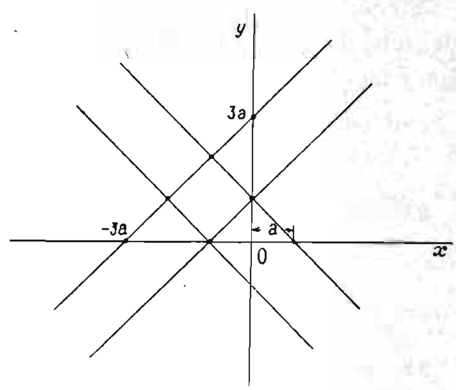
$$\big||x+a| - |y-a|\big| < a.$$

Uputstvo. Mogućnim slučajevima

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{array}{lll} 1^\circ & x+a>0, & y-a>0; \\ 2^\circ & x+a>0, & y-a<0; \\ 3^\circ & x+a<0, & y-a>0; \\ 4^\circ & x+a<0, & y-a<0 \end{array}$$

odgovaraju respektivno relacije:

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{array}{ll} 1^\circ & -a < x-y+2a < a; \\ 2^\circ & -a < x+y < a; \\ 3^\circ & -a < x+y < a; \\ 4^\circ & -a < x-y+2a < a. \end{array}$$



Slika uz problem 90

Da li je tražena oblast samo unutrašnjost kvadrata prikazanog na slici?

91. Dve paralelne prave AB i CD i jedna parabola (P) grade krivoliniski četvorougao $ABCD$ (temena četvorougla raspoređena su po redu: A, B, C, D).

Ako su obe prave AB i CD normalne na osi simetrije parabole (P) i ako je $\overline{AA'} = a$, $\overline{CA'} = c$, $\overline{A'D} = b$ (A' ortogonalna projekcija tačke A na CD), izraziti žižno otstojanje parabole (P) kao funkciju veličina a, b, c.

Primedba. Ovaj se zadatak pojavio u jednom praktičnom problemu automobilske industrije.

92. Rešiti jednačinu

$$(1-x^2)^3 - (x^2-1)^3 - (x^2+2x+1)(1-x)^2 = 0.$$

93. Izračunati zajedničku zapreminu dveju jednakih sfera koje su tako postavljene da centar svake od njih leži na površini druge.

Rezultat. $(5/12)\pi r^3$ (r poluprečnik sfere).

94. Ako je dati realan broj a koren jednačine

(1) $P(x) \equiv x^3 + px^2 + qx + r = 0$ (p, q, r realni brojevi),

odrediti uslov da bi ostali koreni ove jednačine bili realni.

Rešenje. Ako se polinom $P(x)$ podeli sa $x-a$, dobija se

$$Q(x) \equiv x^2 + (p+a)x + a^2 + ap + q .$$

S obzirom na to da su, po pretpostavci, a, p, q, r realni, koeficijenti ovog polinoma takođe su realni.

Nule polinoma $Q(x)$ biće realne, ako je zadovoljen uslov $p^2 - 2pa - 4q - 3a^2 \geqslant 0$.

95. 1° Odrediti a tako da $x=2$ bude koren jednačine

$$P(x) \equiv 6x^3 - 7x^2 - 16x + a = 0 .$$

2° Odrediti a tako da polinom $P(x)$ bude deljiv sa $x-2$.

3° Obrazložiti iz kojih je razloga dobijen isti rezultat u tačkama 1° i 2°.

4° Odrediti sve nule polinoma $P(x)$ za nađeno a.

96. 1° Ako se zna da su $x=2$, $x=3$ koreni jednačine

$$P(x) \equiv 2x^3 + ax^2 - 13x + b = 0 ,$$

odrediti parametre a i b.

2° Odrediti a i b pod uslovom da polinom $P(x)$ bude deljiv sa $x-2$ i $x-3$.

3° Protumačiti zbog čega je dobijen isti odgovor na pitanja postavljena u 1° i 2°.

4° Izračunati sve nule polinoma $P(x)$ za nađene vrednosti parametara a i b.

97. Broj $a^{n+4} - a^n$ (a i n prirodni brojevi) deljiv je sa 10. Dokazati ovaj stav.

Rešenje. Dati broj N napisaćemo u obliku $N \equiv a^n(a^4-1)$.

Posmatrajmo tablicu:

Poslednja cifra broja a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Poslednja cifra broja a^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Ako je a broj čija je poslednja cifra 0, stav je istinit, jer je tada a^n deljivo sa 10.

Ako je a broj čije su krajnje cifre 1, 3, 7, 9, stav je istinit, jer je tada a^4-1 deljivo sa 10.

Ako je a broj čije su krajnje cifre 2, 4, 6, 8, tada je broj a^4-1 deljiv sa 5, dok je broj a^n deljiv sa 2.

Ako je a broj čija je krajnja cifra 5, tada je a^n deljivo sa 5, dok je a^4-1 deljivo sa 2. Prema tome, stav je dokazan.

98. Rešiti nejednačine

1° $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$, 2° $\sqrt{7x-13} - \sqrt{3x-19} > \sqrt{5x-27}$.

Rezultat. 1° $5/2 \leqslant x < 3$; 2° $19/3 \leqslant x < 9$.

99. Pokazati da je izraz $2(b-c)^4+2(c-a)^4+2(a-b)^4$ potpun kvadrat jednog polinoma $P(a, b, c)$ čiji su koeficijenti celi brojevi.

100. Izraz $\prod_{k=1}^{4}(1 \cos 4^k\theta)$ napisati u obliku $\sum a_k \cos p_k\theta$, gde su a_k i p_k konstante koje treba odrediti.

101. Ako je

$$g(x) = \begin{cases} x+2 & (x \geqslant 2); \\ 2x-3 & (x<2), \end{cases}$$

rešiti jednačinu $\{g(x)\}^2 = 4x+1$.

102. Rešiti po k jednačinu $|x-k|+|x+k|=2|k|$.

103. Ako tri realna broja x, y, z zadovoljavaju uslove

$$(1) \qquad x+y+z=5, \qquad yz+zx+xy=8,$$

svaki od njih leži u intervalu $(1, 7/3)$.

Rešenje. Relacije (1) mogu se napisati u obliku

$$(2) \qquad y+z=5-x, \qquad yz=8-x(5-x).$$

Prema tome, y i z su rešenja kvadratne jednačine po t:

$$t^2-(5-x)t+(x^2-5x+8)=0.$$

Ova jednačina imaće realne korene ako je $1 \leqslant x \leqslant 7/3$.

S obzirom da su relacije (1) simetrične u odnosu na sve tri promenljive, zaključuje se:

$$1 \leqslant y \leqslant 7/3, \qquad 1 \leqslant z \leqslant 7/3.$$

104. Ako postoje relacije

$$(1) \qquad x+y+z=xyz, \qquad x^2=yz,$$

y i z imaće realne vrednosti, kada je $x^2 \geqslant 3$.

Rešenje. Relacijama (1) može se dati oblik

$$y+z=x^3-x, \qquad yz=x^2.$$

Prema tome, y i z su koreni kvadratne jednačine po t:

$$t^2-(x^3-x)t+x^2=0.$$

Ova jednačina imaće realne korene, kada je $(x^3-x)^2-4x^2 \geqslant 0$.

$$\therefore \quad x^2 \geqslant 3.$$

105. Ako je x realno, pokazati da funkcija

$$f(x) = (x^2-1)/(x^2-4)$$

nema vrednosti između $1/4$ i 1.

106. Izabrati realan parametar k tako da funkcija

$$f(x) = (x^2-x)/(1-kx)$$

može imati ma koju realnu vrednost ako se podesno izabere realna promenljiva x.

Ako je $k=-1$ i x realno, pokazati da funkcija $f(x)$ ne može ležati između

$$-3-2\sqrt{2} \quad \text{i} \quad -3+2\sqrt{2}.$$

Graficima ilustrovati dobijene rezultate.

107. Date su jednačine:

$$ax+by+cz=d, \qquad \alpha yz+\beta zx+\gamma xy=\delta,$$

gde su koeficijenti realni parametri.

Ako su x, y, z realni brojevi, odrediti intervale u kojima ovi brojevi mogu varirati.

108. Pokazati da funkcija $\operatorname{tg} 3x \operatorname{cotg} 2x$ ne može dobiti vrednost koja se nalazi između $1/9$ i $3/2$.

Rešenje. Ako se upotrebe formule

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \qquad \operatorname{tg} 3x=\frac{3 \operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3 \operatorname{tg}^2 x},$$

funkcija $y=\operatorname{tg} 3x \operatorname{cotg} 2x$ postaje

(1) $$y=\frac{3-a}{1-3a}\cdot\frac{1-a}{2},$$

gde je

(2) $$\operatorname{tg}^2 x=a.$$

Umesto jednačine (1) može se pisati

(3) $$a^2-2(2-3y)a+(3-2y)=0.$$

Ako je a imaginarno ili negativno, tada, prema (2), x nema realnih vrednosti. Taj će slučaj nastupiti:

1° ako jednačina (3), rešena po a, ima imaginarne korene, tj. kada je

$$9y^2-10y+1<0, \quad \text{odnosno} \quad 1/9<y<1;$$

2° ako jednačina (3), rešena po a, ima oba negativna korena, tj. kada je

$$2-3y<0, \quad 3-2y>0, \quad 9y^2-10y+1 \geqslant 0, \quad \text{odnosno} \quad 1<y<3/2.$$

Prema tome, ne postoji realna vrednost promenljive x za koju bi data funkcija dobila neku vrednost između $1/9$ i $3/2$, što je i trebalo dokazati.

Primedba. Grafikom ilustrovati dobijeni rezultat.

109. Eliminisati x, y, z iz relacija

(1) $xy=a^2$, (2) $yz=b^2$, (3) $zx=c^2$, (4) $x^2+y^2+z^2=d^2$ $(abc\neq 0)$.

Rešenje. Iz (1) i (3) sleduje $x^2yz=a^2c^2$, odakle se, na osnovu (2), dobija $x^2=a^2c^2/b^2$. Druge dve analogne kombinacije daju $y^2=a^2b^2/c^2$, $z^2=b^2c^2/a^2$.

Smenom x^2, y^2, z^2 u (4) kao rezultat eliminacije dobija se

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4=a^2b^2c^2d^2.$$

110. Šta iskazuju relacije:

1° $|a-b|+|b-c|+|c-a|>0$; 2° $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$?

111. Šta kazuje relacija $|x|+|y|+|z|\neq 0$, a šta relacija $xyz\neq 0$?

Šta kazuju opštije relacije

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\neq 0, \quad \prod_{k=1}^{n} x_k\neq 0?$$

112. Proveriti identitet

$$(x+y)^7-x^7-y^7\equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

113. Pokazati da iz relacija

$$\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)+\sin(x+\gamma)+\sin(x+\delta)=0,$$

$$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)+\cos(x+\delta)=0$$

sleduje:

$$\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\delta=2k\pi \qquad (k=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ \dots),$$

gde na levoj strani poslednje relacije jednovremeno treba uzeti po dva znaka *plus* i dva znaka *minus*.

114. Proveriti identitete:

$$\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)\equiv 0$$

$$\sin(b-c)\sin(a-d)+\sin(c-a)\sin(b-d)+\sin(a-b)\sin(c-d)\equiv 0.$$

Uputstvo. Upotrebiti identitet: $2\sin p\sin q\equiv\cos(p-q)-\cos(p+q)$.

115. Ako su a, b, t pozitivni brojevi, tada je $at+b/t\geqslant 2\sqrt{ab}$.

116. Dat je kvadratni trinom $P(y)\equiv Ay^2+By+C$.

Ako su $a, b\,(a\neq b)$ nule trinoma $P(y)-y$, pokazati da su a, b nule polinoma $P\{P(y)\}-y$, i odrediti sve nule ovog polinoma.

117. Rešiti nejednačinu $(\sin 3x)/(\sin x)^3<0$.

118. Rešiti nejednačinu $(\operatorname{tg} 3x)/(\operatorname{tg} x)>0$.

Uputstvo. Nacrtati grafik funkcije $(\operatorname{tg} 3x)/(\operatorname{tg} x)$.

119. Dokazati *Abel*-ov identitet

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\equiv\sigma_1(b_1-b_2)+\sigma_2(b_2-b_3)+\cdots+\sigma_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+\sigma_nb_n,$$

gde je

$$\sigma_k\equiv a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

120. Pokazati da je polinom

$$P(x)\equiv(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$$

pozitivan za sve realne vrednosti promenljive x.

Rešenje.
$$\begin{aligned}P(x)&\equiv\{(x-1)(x-6)\}\{(x-3)(x-4)\}+10\\&\equiv(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10\\&\equiv(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82\\&\equiv(x^2-7x+9)^2+1.\end{aligned}$$

Primedba. Ako je $a+b=c+d$, koje još uslove treba da zadovoljavaju realni parametri a, b, c, d, e da bi polinom

$$Q(x)\equiv(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+e^2$$

bio pozitivan za svako x realno?

121. Dati su skupovi nejednakosti:

$$(A)\qquad xyz>0,\quad yz+zx+xy>0,\quad x+y+z>0;$$

$$(B)\qquad x>0,\quad y>0,\quad z>0.$$

Da li su skupovi (A) i (B) ekvivaletni, tj. da li se skup (A) može zameniti skupom (B) i obrnuto?

Odgovor. Skupovi (A) i (B) su ekvivalentni.

122. Ispitati da li su skupovi nejednakosti

$$(1) \quad x>0, \ y>0 \quad \text{i} \quad (2) \quad x+y>0, \ xy>0$$

ekvivalentni?

123. 1° Da li iz uslova

$$(A) \qquad x>0, \quad y>0, \quad z>0$$

sleduje

$$(B) \qquad x+y+z>0, \quad xyz>0?$$

2° Da li iz uslova (B) sleduju uslovi (A)?

3° Da li su uslovi (A) i (B) ekvivalentni?

Primedba. Generalisati ovo pitanje.

124. Rastaviti na linearne faktore izraze:

$$1^\circ \quad (y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3;$$

$$2^\circ \quad (y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5.$$

Uputstvo i rezultat. Polazeći od činjenice da se oba polinoma anuliraju za $x=y$, za $x=z$ i za $y=z$, dobija se:

$$1^\circ \quad 3(y-z)(z-x)(x-y);$$

$$2^\circ \quad 5(y-z)(z-x)(x-y)(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z)(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z),$$

gde je $\varepsilon=(-1+i\sqrt{3})/2$.

125. Ako je

$$a+b+c=0, \qquad a^2+b^2+c^2=1,$$

izračunati $a^4+b^4+c^4$.

Rezultat. $1/2$.

126. Pokazati da je polinom

$$P(a, b, c) \equiv a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

deljiv polinomom $Q(a, b, c) \equiv (b-c)(c-a)(a-b)$, i odrediti količnik P/Q.

Rešenje. Kako je

$$P(a, a, c)=0, \quad P(a, b, b)=0, \quad P(c, b, c)=0,$$

polinom P deljiv je polinomom Q.

Količnik će biti homogena funkcija II stepena po a, b, c i to oblika

$$R(a, b, c)=\lambda bc+\mu ca+\nu ab.$$

Članovi oblika αa^2, βb^2, γc^2 neće figurisati, jer bi inače proizvod $\alpha a^2 Q$ imao član oblika $-\alpha a^4 b$.

Upoređenjem izraza P i QR dobija se

$$\lambda=\mu=\nu=-1.$$

Traženi količnik je $-(bc+ca+ab)$.

127. Pokazati da je polinom

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$$

deljiv polinomom $(b-c)(c-a)(a-b)$ i odrediti njihov količnik.

Rezultat. $-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$.

128. Polazeći od identiteta

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a+\varepsilon b+\varepsilon^2 c)(a+\varepsilon^2 b+\varepsilon c)\quad \{\varepsilon=(-1+i\sqrt{3})/2\},$$

rastaviti na tri linearna faktora izraz

$$P(x,y,z)\equiv(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3.$$

Rezultat. $P(x,y,z)\equiv 3(y-z)(z-x)(x-y)$.

Primedba. Čitalac će naći i neki drugi metod.

129. Data je aritmetička progresija

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \qquad (a_{k+1}-a_k=d).$$

Pokazati da niz

$$S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n},$$

$$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$$

$$\vdots$$

takođe čini aritmetičku progresiju i da je

$$S_{k+1}-S_k=n^2 d.$$

130. Ako je $n\ (>1)$ prirodan broj, tada u nizu prirodnih brojeva

$$n!+2,\quad n!+3,\ \ldots,\ n!+n$$

nema nijednog prostog broja.

Dokazati ovaj stav.

Dokaz. Broj $n!+n$ deljiv je sa n.

Broj $n!+(n-1)$ deljiv je sa $n-1$.

$\vdots$

Broj $n!+2$ deljiv je sa 2.

Tako, na primer, između brojeva

$$100!+2 \quad \text{i} \quad 100!+100$$

nema nijednog prostog broja.

131. Dokazati *Rajagopal*-ove identitete:

$$1^\circ\quad \Sigma bc(b-c)\equiv\Sigma a^2(b-c)\equiv\Sigma a(c^2-b^2)$$
$$\equiv-(b-c)(c-a)(a-b);$$

$$2^\circ\quad 3abc+\Sigma a(b^2+c^2)\equiv 3abc+\Sigma a^2(b+c)$$
$$\equiv-3abc+\Sigma a(b+c)^2$$
$$\equiv 3abc+\Sigma bc(b+c)$$
$$\equiv(a+b+c)(ab+bc+ca);$$

$$
\begin{aligned}
3^\circ \quad 2abc+\Sigma a(b^2+c^2) &\equiv 2abc+\Sigma a^2(b+c)\\
&\equiv -4abc+\Sigma a(b+c)^2\\
&\equiv 2abc+\Sigma bc(b+c)\\
&\equiv (a+b)(b+c)(c+a).
\end{aligned}
$$

Σ označava zbir izraza L (koji stoji iza znaka sumiranja) i izraza koji se iz L dobijaju cikličkom permutacijom slova a, b, c. Tako je, na primer,

$$(1) \qquad \Sigma a(b^2+c^2) \equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

Rešenje. 3° Izrazu koji se nalazi na desnoj strani jednačine (1) mogu se dati i sledeći oblici:

$$(2) \qquad a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b),$$

$$(3) \qquad a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-6abc,$$

$$(4) \qquad bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

Iz (1), (2), (3), (4) sleduje:

$$
\begin{aligned}
2abc+\Sigma a(b^2+c^2) &\equiv E,\\
2abc+\Sigma a^2(b+c) &\equiv E,\\
-4abc+\Sigma a(b+c)^2 &\equiv E,\\
2abc+\Sigma bc(b+c) &\equiv E.
\end{aligned}
$$

Iz tri poslednje relacije sabiranjem se dobija

$$
\begin{aligned}
3E &\equiv \Sigma(b+c)(a^2+ab+ac+bc) \equiv \Sigma(b+c)(c+a)(a+b)\\
&\equiv 3(a+b)(b+c)(c+a).\\
\therefore \quad E &\equiv (a+b)(b+c)(c+a).
\end{aligned}
$$

132. Pokazati da se polinom

$$P \equiv x^4+y^4+z^4-2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2$$

može napisati kao proizvod od četiri linearne forme sa realnim koeficijentima.

Rešenje.
$$
\begin{aligned}
P &\equiv (x^4+y^4+z^4+2y^2z^2-2z^2x^2-2x^2y^2)-4y^2z^2\\
&\equiv (x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2\\
&\equiv (x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)\\
&\equiv \{x^2-(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\}\\
&\equiv (x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z).
\end{aligned}
$$

133. Dat je izraz

$$E \equiv (kx-y+z)(x+ky-z)(x-y-kz)-(kx+y-z)(x-ky-z)(x-y+kz).$$

Pokazati da je izraz E deljiv sa $x-y$, $x-z$ i $y-z$ i na osnovu toga ustanoviti da postoji faktorizacija.

$$E \equiv 2(k^2-1)(x-y)(x-z)(y-z).$$

134. Dokazati da brojevi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.

Dokaz. Pretpostavimo da je suprotno tačno, tj. da su ti brojevi članovi jedne aritmetičke progresije i to neka je:

$\sqrt{2}$ član čiji je rang k;

$\sqrt{3}$ član čiji je rang m;

$\sqrt{5}$ član čiji je rang n.

Tada je

(1) $\sqrt{2}=a_1+(k-1)d, \quad \sqrt{3}=a_1+(m-1)d, \quad \sqrt{5}=a_1+(n-1)d$

(a_1 prvi član, d razlika aritmetičke progresije).

Iz (1) se dobija

$$\sqrt{3}-\sqrt{2}=(m-k)d, \qquad \sqrt{5}-\sqrt{2}=(n-k)d.$$

$$\therefore \quad (\sqrt{5}-\sqrt{2})/(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(n-k)/(m-k).$$

$$\therefore \quad (m-k)\sqrt{5}-(n-k)\sqrt{3}=(m-n)\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad \{5(m-k)^2+3(n-k)^2-2(m-n)^2\}/\{2(m-k)(n-k)\}=\sqrt{15}.$$

Napred učinjena pretpostavka dovela nas je do apsurda, jer je na levoj strani u poslednjoj relaciji racionalan broj, a na desnoj iracionalan.

Prema tome, indirektnim dokazom utvrdili smo da zaista $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.

135. Svaki se izraz

$$(1+\sqrt{2})^n \quad (n \text{ prirodan broj})$$

može pretstaviti u obliku

$$a+b\sqrt{2} \quad (a,\, b \text{ prirodni brojevi}).$$

Pokazati da je

$$(1+\sqrt{2})^{-n}\equiv(-1)^n a+(-1)^{n+1} b\sqrt{2}.$$

136. Dokazati stav:

Zbir kvadrata dva cela broja deljiv je sa 7 tada i samo tada, kada je svaki od tih brojeva deljiv sa 7.

Dokaz. Svaki se prirodan broj ili nula može prikazati jednim od izraza

(1) $7r,\ 7r+1,\ 7r+2,\ 7r+3,\ 7r+4,\ 7r+5,\ 7r+6$ (r prirodan broj ili nula).

Brojevi $(7r)^2$, $(7r+1)^2$, $(7r+2)^2$, $(7r+3)^2$, $(7r+4)^2$, $(7r+5)^2$, $(7r+6)^2$ respektivno su oblika

(2) $7p,\ 7p+1,\ 7p+4,\ 7p+2,\ 7p+2,\ 7p+4,\ 7p+1$ (p prirodan broj ili nula).

Posmatrajmo uporedo sa (1) jedan drugi proizvoljan prirodan broj ili nulu. Taj se broj može prikazati jednim od oblika

$7s,\ 7s+1,\ 7s+2,\ 7s+3,\ 7s+4,\ 7s+5,\ 7s+6$ (s nula ili prirodan broj).

Kvadrati ovih brojeva respektivno su oblika

(3) $7q,\ 7q+1,\ 7q+4,\ 7q+2,\ 7q+2,\ 7q+4,\ 7q+1$ (q prirodan broj ili nula).

Ako se formiraju svi zbirovi od dva sabirka od kojih jedan pripada skupu (2), a drugi skupu (3), tada se konstatuje da je zaista istinit stav koji je trebalo dokazati.

137. $P(x)$ je polinom čiji su koeficijenti celi brojevi. Pokazati da iz uslova

(1) $$6\,|\,P(2) \quad \text{i} \quad 6\,|\,P(3)$$

sleduje $6\,|\,P(5)$.

Rešenje.

(2) $$P(x)-P(2)\equiv(x-2)\,Q_1(x); \quad P(x)-P(3)\equiv(x-3)\,Q_2(x).$$

Q_1 i Q_2 su polinomi čiji je stepen $n-1$ ako je n stepen polinoma $P(x)$. Koeficijenti polinoma Q_1 i Q_2 su celi brojevi.

Iz (2) za $x=5$ dobija se:

$$(3) \qquad P(5)-P(2)\equiv 3\,Q_1(5); \quad P(5)-P(3)\equiv 2\,Q_2(5).$$

Na osnovu uslova (1) i relacija (3) zaključuje se

$$3\mid P(5), \quad 2\mid P(5). \quad \therefore \quad 6\mid P(5).$$

Primedba. Da li se ovaj rezultat može ovako generalisati:

Ako je $(ab)\mid P(a)$, $(ab)\mid P(b)$, tada je $(ab)\mid P(a+b)$

(a, b celi brojevi, različiti od nule).

138. Ako prirodan broj n nije multipl od 7, tada je:

$$E\equiv\cos\frac{n\pi}{7}+\cos\frac{3n\pi}{7}+\cos\frac{5n\pi}{7}=\begin{cases}1/2 & (n \text{ neparan broj}),\\ -1/2 & (n \text{ paran broj}).\end{cases}$$

Šta će biti kad je $n=7k$ (k ceo broj)?

Rešenje.

$$\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{4n\pi}{7}-\sin\frac{2n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{3n\pi}{7},$$

$$\sin\frac{6n\pi}{7}-\sin\frac{4n\pi}{7}=2\sin\frac{n\pi}{7}\cos\frac{5n\pi}{7}.$$

$$\therefore \quad E=\left(\sin\frac{6n\pi}{7}\right)\Big/\left(2\sin\frac{n\pi}{7}\right).$$

Ako je $n\neq 7k$ (k ceo broj), tada je

$$E=-\frac{1}{2}\cos n\pi=-\frac{1}{2}(-1)^n,$$

odakle se dobija napred navedeni rezultat.

Za $n=7k$ izraz E postaje

$$\cos k\pi+\cos 3k\pi+\cos 5k\pi=3\cdot(-1)^k,$$

odnosno

$$E=\begin{cases}-3 & (n=7k,\ k \text{ neparan broj});\\ 3 & (n=7k,\ k \text{ paran broj}).\end{cases}$$

Primedba. Čitalac će rešiti ovaj zadatak i nekim drugim načinom.

139. Ako je n prirodan broj, tada važi jednakost

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}\equiv\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

Rešenje. Izraz koji se nalazi na levoj strani date relacije može se napisati u obliku:

$$\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n-1)+1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{(2n-3)+3}{3\cdot(2n-3)}+\cdots+\frac{1+(2n-1)}{(2n-1)\cdot 1}\right]$$

$$\equiv\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right]$$

$$\equiv\frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right].$$

140. Ako postoji relacija $(m-p)\,|\,(mn+pq)$, tada je

$$(m-p)\,|\,(mq+np) \qquad (m,\, n,\, p,\, q \text{ prirodni brojevi; } m \neq p).$$

Uputstvo. Posmatrati identitet

$$(mn+pq)-(mq+np) \equiv (m-p)\,(n-q).$$

141. Dokazati formule:

$$(1) \qquad \sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2};$$

$$(2) \qquad \cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}.$$

Rešenje. 1° $\frac{7}{8}\pi=\pi-\frac{1}{8}\pi;\quad \frac{5}{8}\pi=\pi-\frac{3}{8}\pi.$

Izraz na levoj strani u (1) postaje

$$(3) \qquad 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}\right).$$

Budući da je $\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$, dobija se $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$, pa izraz (3) postaje

$$2\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}\right)=2\left\{\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right\}=2-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

2° Relaciju (2) dokazaće čitalac.

142. Odrediti $f\left(\frac{t^{1/2}-t^{-1/2}}{2}\right)$, ako je

$$f(x)=\frac{(x+1/x)^{1/2}+x^{1/2}}{(x+1/x)^{1/2}-x^{1/2}}.$$

143. Dokazati

$$\left(\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\right)^3+\left(\frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}\right)^3 \equiv 4\cos 6\theta+24\cos 2\theta.$$

Za koje vrednosti θ ovaj identitet ne važi?

Odrediti realna rešenja jednačine $4\cos 6\theta+24\cos 2\theta=0$.

144. Odrediti primitivni period funkcija

$$\operatorname{tg}\left(2\theta+\frac{1}{4}\pi\right), \qquad \sin\frac{4}{3}\theta, \qquad \cos\theta-\cos 3\theta.$$

145. Ako je

$$a\cos p+b\sin p=c, \qquad a\cos q+b\sin q=c,$$

tada važe relacije

$$\sin(p+q)=2ab/(a^2+b^2), \qquad \operatorname{cotg} p+\operatorname{cotg} q=2ab/(c^2-a^2).$$

Da li ove relacije važe za sve vrednosti parametara?

146. Proveriti identitet

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)+\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)\equiv\frac{2\sin a}{\cos a+\cos b}.$$

147. Faktorisati $a^{15}+1$.

Rezultat. $a^{15}+1 \equiv (a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)(a^2-a+1)(a^8+a^7-a^5-a^4-a^3+a+1)$.

148. U ravni su dati: krug C, prava L i tačka P.
Konstruisati ravnostrani trougao čije je jedno teme tačka P, drugo se teme nalazi na pravoj L, a treće na krugu C.

Hovard Eves (Mathematics Magazine, vol. 31, 1957—1958, p. 55—56) dao je sledeće konstruktivno rešenje navedenog zadatka:

Neka je L_1 prava koja se dobija kada L izvrši rotaciju od $\pm 60°$ oko tačke P. Pretpostavimo da L_1 seče krug C u tački Q. Simetrala duži PQ neka seče pravu L u taćki R. Tada je PQR traženi ravnostrani trougao.

Obrazložiti navedenu konstrukciju, odrediti kriterijum za egzistenciju rešenja i navesti broj rešenja.

149. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu šrafirati oblasti za koje je:

$$\{y<x\}\cap\{y>-\tfrac{1}{2}(x-3)\},$$

tj. odrediti oblasti čije tačke (x, y) zadovoljavaju uslove:

$$y<x, \quad y>-\tfrac{1}{2}(x-3).$$

Tako isto šrafirati oblasti za koje važe relacije:

$$1° \quad \{y^2<x\}\cap\{x^2+y^2>1\};$$

$$2° \quad \{y^3<x\}\cap\{x<y^2\}.$$

150. Ako apscise četiri tačke $M_k(x_k, y_k)$ $(k=1, 2, 3, 4)$ jedne grane hiperbole $y=a^2/x$ zadovoljavaju uslov

$$x_1/x_2=x_3/x_4,$$

tada je *area* pravoliniskog trapeza $M_1M_2N_2N_1 \equiv$ *area* pravoliniskog trapeza $M_3M_4N_4N_3$ (N_k je ortogonalna projekcija tačke M_k na x-osi).

Dokazati ovu osobinu hiperbole.

151. Neka su M_1 i M_2 dve tačke na jednoj grani hiperbole $y=a^2/x$, i neka su A_1 i A_2 njihove ortogonalne projekcije na x-osi, a B_1 i B_2 na y-osi.

Bez upotrebe integralnog računa proveriti da li postoji jednakost:

area krivoliniskog trapeza $A_1A_2M_2M_1=$ *area* krivoliniskog trapeza $B_1B_2M_2M_1$.

152. Za koje vrednosti x važi nejednakost

$$\sin x > 2\cos^2 x - 1\,?$$

Uputstvo. Ovo najpre utvrditi za $x \in [0, T]$, gde je T osnovni period funkcije

$$\sin x - 2\cos^2 x + 1.$$

153. Odrediti λ tako da skup jednačina

$$\lambda x+y+2\lambda z=2\lambda-1, \quad x+\lambda y+2z=2 \qquad (\lambda \text{ parametar})$$

ima rešenja (x, y, z).

154. Ako su n i k ($<n$) prirodni brojevi, da li je $\binom{n}{k}$ uvek deljivo sa n, ako je n prim-broj?

Odgovor. Da.

155. Proveriti formulu

$\sum_{k=1}^{2n} [k/2] = n^2$ ($[k/2]$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje $k/2$).

156. Proveriti relaciju

$$S \equiv \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_i b_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_k .$$

Izraz S označava se i sa $\sum\limits_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ k=1,2,\ldots,n}} a_i b_k$.

157. Uprostiti izraz

$$E = \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} .$$

Rezultat. $E = -3$.

158. Ako je $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$ i ako je $c+d \leqslant \min(a, b)$, tada je:

$$ad+bc \leqslant ab, \quad ac+bd \leqslant ab .$$

Rešenje. I. Ako je

$$(1) \qquad a \leqslant b ,$$

tada relacija

$$(2) \qquad c+d \leqslant \min(a, b)$$

postaje

$$(3) \qquad c+d \leqslant a .$$

Posle množenja sa d odnosno sa b, relacije (1) i (3) postaju respektivno

$$ad \leqslant bd, \quad bc+bd \leqslant ab .$$

Iz poslednjih dveju relacija, posle sabiranja, dobija se $ad+bc \leqslant ab$.

Ako je

$$(4) \qquad b \leqslant a ,$$

relacija (2) postaje

$$(5) \qquad c+d \leqslant b .$$

Posle množenja sa c odnosno a relacije (4) i (5) postaju respektivno

$$bc \leqslant ac, \quad ac+ad \leqslant ab .$$
$$\therefore \quad ad+bc \leqslant ab .$$

Na analogni način dokazuje se tačnost relacije $ac+bd \leqslant ab$.

II. *Underwood Dudley* (*The American Mathematical Monthly*, vol. 65, 1958, p. 447) dao je sledeće rešenje:

$$\begin{aligned} ad+bc &\leqslant (c+d)\max(a, b) \\ &\leqslant \min(a, b)\max(a, b) \\ &= ab . \end{aligned}$$

Primedba. Da li se ovaj rezultat može generalisati?

159. Dokazati relaciju $\sum_{k=1}^{n} \{n^2-(2k-1)n\}=0$.

Rešenje.
$$\sum_{k=1}^{n} \{n^2-(2k-1)n\} = n^2\sum_{k=1}^{n} 1 - n\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$
$$= n^3 - n\cdot\frac{1+\overline{2n-1}}{2}\,n$$
$$= n^3 - n\cdot n^2 = 0.$$

Primedba. Čitalac će navesti i drugi način dokazivanja navedene relacije.

160. Rešiti nejednačine:

$1^\circ\ x+|x|<1$; $2^\circ\ x-|x|>2$; $3^\circ\ |x^2-x|+x>1$; $4^\circ\ \sin x+|\sin x|>1$.

161. Da li su funkcije
$$|a+x|+|a-x|,\quad |x+a|-|x-a|,\quad \{|x+a|-|x-a|\}/(2x)$$
parne ili neparne, ili nisu ni jedno ni drugo?

162. Proveriti da li tačke:
$$\frac{(n-1)a+b}{n},\ \frac{(n-2)a+2b}{n},\ \ldots,\ \frac{2a+(n-2)b}{n},\ \frac{a+(n-1)b}{n}$$
dele segment $[a, b]$ na n jednakih delova.

163. Ako je $0<x,\ y<\pi/2$, tada je:
$$\sin(x+y)<\sin x+\sin y;\qquad \sin(x+y)<\cos x+\cos y.$$
Dokazati ove relacije.

164. Ako je $0<x,\ y<\pi/2$ i $0<x+y<\pi/2$, dokazati da je
$$0<\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y<1;\qquad \operatorname{tg}(x+y)<\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y.$$

165. Dokazati da relacija
$$\sin(x+y+z)<\sin x+\sin y+\sin z$$
važi ako su zadovoljeni uslovi
$$0<x, y, z<\pi/2;\quad 0<x+y+z<\pi/2.$$
Generalisati ovaj rezultat.

166. Rešiti skup nejednačina
$$y^2+4x-4>0,\qquad 8x^2-2x-3y-6>0.$$

167. Proveriti da li je tačan rezultat:

Ako je $a+b+c=0$ i $a\geqslant -1/4$, $b\geqslant -1/4$, $c\geqslant -1/4$, tada je
$$(4a+1)^{1/2}+(4b+1)^{1/2}+(4c+1)^{1/2}\leqslant 3.$$

Uputstvo. $(4a+1)^{1/2}\leqslant 2a+1\quad (a\geqslant -1/4)$.
Poći od navedene nejednakosti koju prethodno treba dokazati.
Generalisati.

168. Ako se iz skupa

$$E_{2n}=\{1, 2, \dots, 2n\}$$

od $2n$ prirodnih brojeva proizvoljno izabere $n+1$ brojeva, uvek postoje bar dva od njih od kojih je jedan deljiv drugim.

Dokazati ovaj stav.

Rešenje. Označimo sa E_{n+1} skup od $n+1$ proizvoljnih brojeva koji pripadaju skupu E_{2n}. Svaki parni od tih brojeva može se izraziti u obliku $2^s\lambda_s$, gde je s prirodan broj, a λ_s neparan broj. Neka je $\overline{E}_{n+1}$ skup brojeva λ_s i svih neparnih brojeva skupa E_{n+1}. Skup $\overline{E}_{n+1}$ sadrži $n+1$ elemenata (svi su oni neparni brojevi i manji od $2n$).

Budući da skup E_{2n} ima tačno n neparnih brojeva, znači da su bar dva broja u skupu $\overline{E}_{n+1}$ među sobom jednaki.

Odavde sleduje da u skupu E_{n+1} ima bar dva broja oblika $2^s\lambda$ i $2^r\lambda$ (s i r prirodni brojevi ili nula, dok je λ neparan broj). Ako je $s>r$, količnik je 2^{s-r} (prirodan broj).

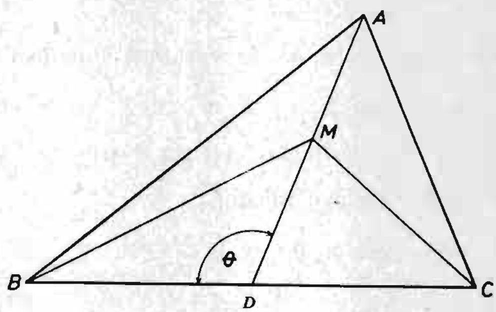
Ovaj interesantan i duhovit dokaz navedenog stava nalazi se u knjižici:

И. С. Соминский: Метод математической индукции (Москва, 1955, str. 22—23).

U istoj knjižici naveden je dokaz ovog stava pomoću matematičke indukcije. Taj dokaz je znatno duži. Njegov autor je *Fridman* (Lenjingrad) koji je dokaz dao kao student.

169. Posmatrati trougao ABC i medijanu AD. Odrediti na ovoj medijani tačku M za koju zbir $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ ima minimalnu vrednost.

Rešenje.



Oznake: $\overline{BC}=a,\quad \overline{AD}=m,\quad \overline{DM}=x.$

Prema kosinusnoj teoremi može se pisati:

$$\overline{BM}^2=\frac{1}{4}a^2+x^2-ax\cos\theta\,,$$

$$\overline{MC}^2=\frac{1}{4}a^2+x^2+ax\cos\theta\,.$$

Stoga je

$$S(x)=\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$$

$$=\frac{1}{2}a^2+2x^2+(m-x)^2=3x^2-2mx+m^2+\frac{1}{2}a^2\,.$$

Za $x=m/3$ funkcija $S(x)$ ima minimalnu vrednost $S_{\min}=\frac{1}{6}(4m^2+3a^2)$.

Ako su a, b, c trouglove strane, tada je $4m^2=2(b^2+c^2)-a^2$.

$$\therefore\quad S_{\min}=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\,.$$

Tražena tačka M je težište trougla ABC.

170. Data su dva skupa relacija:

(1) $$|b-c|<a<b+c\,,$$

(2) $$|a-c|<b<a+c\,.$$

Da li su skupovi (1) i (2) ekvivalentni?

171. Za razne vrednosti parametra a odrediti rešenja iracionalnih jednačina:

$$1^\circ\quad \sqrt{x+a}+\sqrt{x+1}=1\,;\qquad 2^\circ\quad \sqrt{x+a}+\sqrt{x}=a\,.$$

172. Dat je trougao čija su temena P_1, P_2, P_3.

Na stranama P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 ovog trougla fiksirati respektivno otsečke Q_1R_1, Q_2R_2, Q_3R_3 čije su krajnje tačke Q_k, R_k $(k=1, 2, 3)$.

Odrediti g. m. unutrašnjih tačaka M tog trougla za koje je

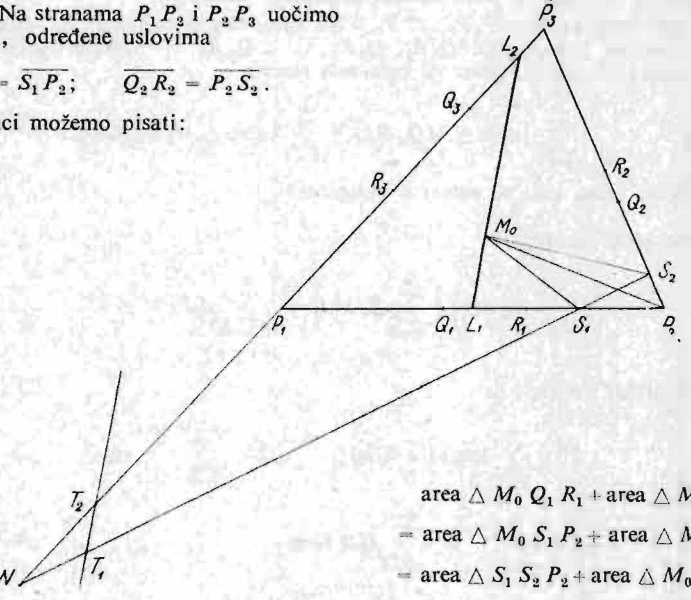
$$\sum_{k=1}^{3}\{\text{area}\ \triangle\ MQ_kR_k\}=\sum_{k=1}^{3}\{\text{area}\ \triangle\ M_0Q_kR_k\}=\text{const} \tag{1}$$

(M_0 fiksna tačka u trouglu).

Rešenje. Na stranama P_1P_2 i P_2P_3 uočimo tačke S_1 i S_2, određene uslovima

$$\overline{Q_1R_1}=\overline{S_1P_2};\qquad \overline{Q_2R_2}=\overline{P_2S_2}.$$

Prema slici možemo pisati:



$$\text{area}\ \triangle\ M_0Q_1R_1+\text{area}\ \triangle\ M_0Q_2R_2$$
$$=\text{area}\ \triangle\ M_0S_1P_2+\text{area}\ \triangle\ M_0P_2S_2$$
$$=\text{area}\ \triangle\ S_1S_2P_2+\text{area}\ \triangle\ M_0S_1S_2.$$

[Trouglovi $M_0S_1P_2$ i $M_0Q_1R_1$ imaju jednake površine, jer su im osnovice Q_1R_1 i S_1P_2 jednake, kao i visine koje odgovaraju ovim osnovicama].

Navedene relacije važe za slučaj kada se M_0 nalazi u četvorouglu $P_1S_1S_2P_3$.

Prema navedenim relacijama imamo:

$$\text{area}\ \triangle\ M_0Q_1R_1+\text{area}\ \triangle\ M_0Q_2R_2+\text{area}\ \triangle\ M_0Q_3R_3$$
$$=\text{area}\ \triangle\ S_1S_2P_2+(\text{area}\ \triangle\ M_0Q_3R_3+\text{area}\ \triangle\ M_0S_1S_2).$$

Za neku tačku M koja se nalazi u trouglu analogna relacija glasi:

$$\text{area}\ \triangle\ MQ_1R_1+\text{area}\ \triangle\ MQ_2R_2+\text{area}\ \triangle\ MQ_3R_3$$
$$=\text{area}\ \triangle\ S_1S_2P_2+(\text{area}\ \triangle\ MQ_3R_3+\text{area}\ \triangle\ MS_1S_2).$$

Uslov (1), za ovaj slučaj, glasi:

$$\text{area}\ \triangle\ MQ_3R_3+\text{area}\ \triangle\ MS_1S_2=\text{area}\ \triangle\ M_0Q_3R_3+\text{area}\ \triangle\ M_0S_1S_2. \tag{2}$$

Presek pravih P_3P_1 i S_1S_2 označimo sa N i neka je

$$\overline{NT_1}=\overline{S_1S_2},\qquad \overline{NT_2}=\overline{R_3Q_3}.$$

Tada je

$$\text{area}\ \triangle\ M_0Q_3R_3+\text{area}\ \triangle\ M_0S_1S_2=\text{area}\ \triangle\ M_0NT_2+\text{area}\ \triangle\ M_0NT_1 \tag{3}$$
$$=\text{area}\ \triangle\ NT_1T_2+\text{area}\ \triangle\ M_0T_1T_2.$$

Analogno ovome, za tačku M imamo

$$\text{area}\ \triangle\ MQ_3R_3+\text{area}\ \triangle\ MS_1S_2=\text{area}\ \triangle\ NT_1T_2+\text{area}\ \triangle\ MT_1T_2. \tag{4}$$

Na osnovu (3) i (4), relacija (2) postaje

$$\text{area}\,\triangle\, MT_1T_2 = \text{area}\,\triangle\, M_0T_1T_2\,.$$

Promenljivi trougao MT_1T_2 imaće površinu kao fiksni trougao $M_0T_1T_2$ ako se tačka M kreće po duži koja je paralelna pravoj T_1T_2.

Prema tome, traženo g. m. tačke M je otsečak L_1L_2 prave koja prolazi kroz M_0 paralelno sa T_1T_2.

Čitalac će utvrditi šta biva ako je $S_1S_2 \parallel P_1P_3$.

Primedba. Interesantno bi bilo rešiti ovaj zadatak metodom koordinata.

Generalizacija. Čitalac će rešiti sledeći generalniji zadatak:

Dat je konveksni poligon $P_1P_2 \ldots P_n$. Na njegovim stranama $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$ respektivno fiksirati ove otsečke $Q_1R_1, Q_2R_2, \ldots, Q_nR_n$. — Odrediti geometrisko mesto unutrašnjih tačaka M tog poligona za koje važi relacija

$$\sum_{k=1}^{n} \{\text{area}\,\triangle\, MQ_kR_k\} = \sum_{k=1}^{n} \{\text{area}\,\triangle\, M_0Q_kR_k\},$$

gde je M_0 fiksna tačka koja se nalazi u poligonu.

173. Proveriti relaciju

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \sum_{\substack{i,k=0\\ i+k\le n}}^{n} a_i b_k x^{i+k}\,.$$

174. Sumirati izraze:

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} \log(1+1/k); \qquad 2^\circ \quad \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} a_k\,.$$

Rezultat. 1° $\log(n+1)$; 2° $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k$.

175. Dato je p aritmetičkih progresija:

prvi član	1	2	3 $\cdots$	p
razlika	1	3	5	$2p-1$
zbir n prvih članova	s_1	s_2	s_3	s_p

Proveriti da li je tačna relacija

$$\sum_{k=1}^{p} s_k = \frac{1}{2}\, np\,(np+1)\,.$$

ALGEBRA

I. FAKTORIJELI, BINOMNI KOEFICIJENTI I BINOMNA FORMULA[1]

1. Polazeći od definicije

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} \dfrac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!} & (k=1,2,3,\ldots), \\ 1 \quad (k=0), \end{cases}$$

gde je a ma kakav broj, verifikovati formule:

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k, \quad \binom{-2}{k} = (-1)^k(1+k), \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k},$$

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = (-1)^k\, 2^{-2k} \binom{2k}{k},$$

$$\binom{-1}{k} + \binom{-2}{k} + \binom{-3}{k} + \cdots + \binom{-n}{k} + \binom{-n}{k+1} = 0.$$

2. Proveriti identitete:

$$\binom{n-1}{k} + 2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \binom{n+1}{k}; \quad n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}.$$

3. Ako je $(a)_r = a(a+1)(a+2)\cdots(a+r-1)$, tada važe relacije:

$$(a)_{n-1}(a-1) = (a-1)_n;$$

$$(a)_{n-r}(1-a-n)_r = (-1)^r (a)_n;$$

$$n!/(n-s)! = (-1)^s (-n)_s.$$

4. Ako je $V_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$, proveriti relaciju

$$V_{n+2}^r = V_n^r + 2r\, V_n^{r-1} + r(r-1)\, V_n^{r-2}.$$

5. Dokazati *Vandermonde*-ovu formulu

$$(p+q)_n = (p)_n + \binom{n}{1}(p)_{n-1}(q)_1 + \binom{n}{2}(p)_{n-2}(q)_2 + \cdots + (q)_n,$$

gde je $(m)_r = m(m-1)\cdots(m-r+1)$; n prirodan broj.

---

[1] Radi šireg upoznavanja sa kombinatorikom čitalac se upućuje na monografiju: *Z. P. Mamuzić*: *Kombinatorika* (1957, Beograd, 122 strane) koja je objavljena kao sveska 6 edicije *Matematička biblioteka*.

Rešenje. I. Iz identiteta

$$x^p \cdot x^q \equiv x^{p+q} \qquad (x>0)$$

diferenciranjem neposredno se dobija *Vandermonde*-ova formula.

II. *Vandermonde*-ova formula može se dokazati metodom matematičke indukcije. Pretpostavimo da formula (1) važi za neko n. Posle množenja sa

$$p+q-n, \quad \text{odnosno sa } \overline{p-n-k}+\overline{q-k}$$

formula (1) postaje

$$(2) \qquad (p+q)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p)_{n-k}\, (q)_k \,[(\overline{p-n-k})+\overline{q-k}]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p)_{n-k+1}\, (q)_k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p)_{n-k}\, (q)_{k+1},$$

jer je

$$(p)_{n-k}\,(\overline{p-n-k}) = (p)_{n-k+1}, \qquad (q)_k\,(q-k) = (q)_{k+1}.$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p)_{n-k}\, (q)_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (p)_{n-k+1}\, (q)_k,$$

formula (2) postaje

$$(p+q)_{n+1} = \binom{n+1}{0}(p)_{n+1} + \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] (p)_{n-k+1}\,(q)_k \right\} + \binom{n+1}{n+1}(q)_{n+1},$$

jer je

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}.$$

Kako je $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$, dobijamo

$$(p+q)_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (p)_{n-k+1}\,(q)_k\,.$$

Ako se ovome doda da formula (1) važi za $n=1$, induktivni dokaz je završen. *Formula (1) je tačna.*

Ovaj drugi dokaz je čisto algebarski.

6. Verifikovati identitete:

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^{n-1} \qquad (n \text{ parno});$$

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots+\binom{n}{n-1} = 2^{n-1} \qquad (n \text{ neparno}).$$

7. Na četiri tačne decimale izračunati $f(1{,}04)$ ako je

$$f(x) = x^7 - x^4 + 1\,.$$

Uputstvo. Primeniti binomnu formulu na izraz

$$(1+0{,}04)^7 - (1+0{,}04)^4 + 1\,.$$

8. Izračunati $0{,}996^{10}$ sa šest tačnih cifara.

9. Dokazati jednakosti:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{i+1} = \frac{1}{n}; \qquad n\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,.$$

Uputstvo. Poći od identiteta

$$(1-x)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^i$$

i izvršiti integraciju.

10. Da li za svaki prirodan broj k važi relacija

$$\frac{(2k-2)!}{k!\,(k-1)!} = \binom{2k-1}{k} \Big/ (2k-1).$$

11. Ako su m i n prirodni brojevi, pokazati da je i $(m+n)!/(m!\,n!)$ prirodan broj.

Uputstvo. Posmatrati binomne koeficijente u razvoju izraza $(a+b)^{m+n}$.

12. Proizvod od k uzastopnih prirodnih brojeva deljiv je sa $k!$

Rešenje. Ako je n neki prirodan broj, proizvod od k uzastopnih brojeva je

$$N = n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1).$$

Količnik $N/k!$ je binomni koeficijent

$$\binom{n+k-1}{k}. \tag{1}$$

Ako se izraz $(a+b)^{n+k-1}$ razvije, koeficijent uz $a^{n-1}b^k$ upravo je broj (1). To je jedan od brojeva koji čine *Pascal*-ov trougao, tj. svakako prirodan broj.

13. Ako je n prirodan broj, tada je i broj $(2n)!/(n!\,2^n)$ prirodan.

14. Dokazati jednakost

$$\binom{k}{2} + \binom{\binom{k}{2}}{2} = \binom{\binom{k}{2}+1}{2}.$$

15. Ako je n prirodan broj, da li *Diofantova* jednačina

$$\binom{x}{n} + \binom{y}{n} = \binom{z}{n}$$

ima rešenja x, y, z, gde $x, y, z \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Rezultat. $x = 2n-1, \quad y = 2n-1, \quad z = 2n$.

16. Dokazati jednakost

$$n! + \frac{(n+1)!}{1!} + \frac{(n+2)!}{2!} + \cdots + \frac{(n+k)!}{k!} = \frac{(n+k+1)!}{k!\,(n+1)}.$$

17. Dokazati da izraz

$$(2n-2)!/\{n!\,(n-1)!\} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

definiše prirodan broj.

Dokaz. Brojevi

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} \quad \text{i} \quad \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!}$$

jesu binomni koeficijenti i prema tome prirodni brojevi.

Budući da je

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}-\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-2)!}=\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!},$$

konstatujemo da je broj

$$(2n-2)!/\{n!\,(n-1)!\}$$

prirodan broj, jer je on razlika dva prirodna broja, odnosno dva binomna koeficijenta.

18. *Kramp*-ov faktorijel označava se sa $m^{\nu/d}$ ili sa $(m, d;\nu)$. Vrednost ovog faktorijela je

$$(m, d;\ \nu)=m\,(m+d)\ \cdots\ (m+\overline{\nu-1}\,d) \qquad (\nu=1, 2, 3, \dots);$$

$$(m, d;\ 0)=1;$$

$$(m, d;-\nu)=\frac{1}{(m-d)\,(m-2d)\ \cdots\ (m-\nu d)} \qquad (\nu=1, 2, 3, \dots).$$

Uopšte je

$$(m, d;\ \nu)=d^{\nu}\,\Gamma\,(m/d+\nu)/\Gamma\,(m/d) \qquad (\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots),$$

gde je Γ *gama*-funkcija.

Važne su ove relacije:

$$(m,\ -d,\ \nu)=(m-\overline{\nu-1}\ d,\ d;\ \nu)=(-1)^{\nu}\,(-m,\ d;\ \nu) \quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots);$$

$$\Gamma\,(m)\cdot(m,\ 1;\ \nu)=\Gamma\,(m+\nu) \quad (\nu=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots);$$

$$(1,\ 1;\ \nu)=(\nu,\ -1;\ \nu)=\nu! \quad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Dokazati ove relacije.

19. *Hankel*-ov simbol (ν, m) definiše se na sledeći način

$$(\nu, m)=\frac{1}{m!}\,\{\nu^2-(1/2)^2\}\,\{\nu^2-(3/2)^2\}\ \cdots\ \{\nu^2-(m-1/2)^2\} \quad (m\neq 0);$$

$$=1 \quad (m=0)$$

(ν ma kakav broj; m prirodan broj ili nula).

Ispitati da li su tačne relacije:

$$(\nu, m)=(\nu-1,\ m)\,\frac{\nu+(m-1/2)}{\nu-(m+1/2)};\quad (\nu, m)=(\nu+1,\ m)\,\frac{\nu-(m-1/2)}{\nu+(m+1/2)};$$

$$(\nu+1,\ m)+(\nu-1,\ m)=2\,(\nu,\ m)+2\,(2m-1)\,(\nu,\ m-1);$$

$$(\nu+1,\ 0)+(\nu-1,\ 0)=2;$$

$$(\nu+1,\ m)-(\nu-1,\ m)=4\nu\,(\nu,\ m-1);$$

$$(\nu+1,\ 0)-(\nu-1,\ 0)=0.$$

20. Dokazati formulu

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}=n^n.$$

Uputstvo. Poći od identiteta

$$n\equiv(n-1)+1.$$

21. Dokazati faktorijelnu binomnu formulu

$$(1)\qquad (a+b)^{n|h} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu|h}\, b^{\nu|h},$$

gde je

$$a^{k|h} = a(a-h)(a-2h)\cdots(a-\overline{k-1}\,h) \qquad (k=1,2,3,\ldots;\ h\neq 0);$$

$$a^{0|h} = 1.$$

Polazeći od (1), izvesti:

1° Binomnu formulu;

2° $\displaystyle\binom{m+n}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{m}{k-\nu}\binom{n}{\nu}$;

3° $\displaystyle\binom{n-m-1}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{n}{k-\nu}\binom{\nu+m}{\nu}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je formula (1) tačna za $n=k$, tj. da je

$$(2)\qquad (a+b)^{k|h} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{k-\nu|h}\, b^{\nu|h}.$$

Posmatrajmo izraz $(a+b)^{k+1|h}$ odnosno $(a+b)^{k|h}(a+b-kh)$, jer je

$$a^{k+1|h} = a(a-h)\cdots(a-\overline{k-1}\,h)(a-kh).$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
(a+b)^{k+1|h} &= (a+b)^{k|h}(a+b-kh)\\
&= [a-(k-\nu)h + b - \nu h] \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{k-\nu|h}\, b^{\nu|h}\\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{\overline{k+1}-\nu|h}\, b^{\nu|h} + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{k-\nu|h}\, b^{\nu+1|h}\\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a^{\overline{k+1}-\nu|h}\, b^{\nu|h} + \sum_{\nu=1}^{k+1} \binom{k}{\nu-1} a^{\overline{k+1}-\nu|h}\, b^{\nu|h}\\
&= a^{k+1|h} + b^{k+1|h} + \sum_{\nu=1}^{k} \left[\binom{k}{\nu} + \binom{k}{\nu-1}\right] a^{\overline{k+1}-\nu|h}\, b^{\nu|h}\\
&= a^{k+1|h} + b^{k+1|h} + \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k+1}{\nu} a^{k+1-\nu|h}\, b^{\nu|h}\\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\nu} a^{\overline{k+1}-\nu|h}\, b^{\nu|h}.
\end{aligned}$$

Za $n=1$ formula (1) je tačna, jer se dobija

$$(a+b)^{1|h} = \sum_{\nu=0}^{1} \binom{1}{\nu} a^{1-\nu|h}\, b^{\nu|h},$$

odnosno

$$a+b = a+b.$$

Prema tome, formula (1) je dokazana metodom potpune indukcije.

Partikularni slučajevi formule (1).

1° Za $h=0$ formula (1) se svodi na binomnu formulu

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + b^n .$$

2° Za $a=m,\quad b=n,\quad n=k,\quad h=1,$ formula (1) postaje

$$(m+n)^{k|1} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} m^{k-\nu|1} n^{\nu|1} .$$

Budući da je $x^{k|1} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1) = \binom{x}{k} k!$, prethodna relacija dobija oblik

$$k! \binom{m+n}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{m}{k-\nu} (k-\nu)! \binom{n}{\nu} \nu!$$

$$\therefore \quad \binom{m+n}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{m}{k-\nu} \binom{n}{\nu}, \quad \text{jer je } \binom{k}{\nu} (k-\nu)!\, \nu! = k!$$

3° Stavimo sada u (1) ove vrednosti: $a=n,\quad b=-m-1,\quad h=1,\quad n=k.$

Tada je

$$(n-m-1)^{k|1} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} n^{k-\nu|1} (-m-1)^{\nu|1} .$$

$$\therefore \quad \binom{n-m-1}{k} k! = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{n}{k-\nu} (k-\nu)! \binom{-m-1}{\nu} \nu!$$

$$\therefore \quad \binom{n-m-1}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n}{k-\nu} \binom{-m-1}{\nu} .$$

$$\therefore \quad \binom{n-m-1}{k} = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{\nu} \binom{n}{k-\nu} \binom{\nu+m}{\nu} .$$

Ovaj dokaz je dao *D. Đoković*.

22. Elementi *Pascal*-ovog trougla

1					
1	1				
1	2	1			
1	**3**	3	1		
1	4	**6**	4	1	
1	5	10	**10**	5	1
⋮					

imaju osobinu:

Razlika kvadrata ma koja dva konsekutivna (uzastopna) broja koji leže na trećoj hipotenuzi (elementi složeni iz polumasnog tipa) pretstavlja kub jednog prirodnog broja.

Dokazati.

23. Rešiti u prirodnim brojevima neodređenu jednačinu

$$\binom{x+1}{y}=\binom{x}{y+1}.$$

Primer. $\binom{15}{5}=\binom{14}{6}$, tj. $x=14$, $y=5$.

24. Posmatrati *Pascal*-ov trougao:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

U II vrsti ima dva neparna broja, u III vrsti 4, u IV vrsti 2, u V vrsti 4, u VI vrsti 4, u VII vrsti 8, itd. (Nulta vrsta je 1; prva vrsta je 1 1.)

Naslućujemo osobinu:

Binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$ za fiksirano n, koji su neparni brojevi, ima ukupno 2^r (r neki prirodan broj).

Da li je ovaj zaključak istinit?

Primedba. Jedan dokaz ovog stava dat je u časopisu: *The American Mathematical Monthly*, vol. 64, 1957, p. 26.

25. Postoji više metoda pomoću kojih se dokazuje *Dixon*-ova formula:

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}^3=(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}.$$

Literatura u vezi sa ovim data je u članku: *O. Kolberg: Et bevis for Dixons formel* (*Nordisk matematisk tidskrift*, Bd. 5, H. 2, 1957, p. 87—90.)

Svi dokazi formule (1), pa i onaj koji je naveden u *Kolberg*-ovom članku, komplikovani su.

Možda će čitalac naći neki jednostavan dokaz formule (1).

26. U prostoru je dat skup E od n ravni od kojih nikoje dve nisu paralelne, nikoje tri nisu paralelne istoj pravoj i nikoje četiri ne prolaze kroz jednu istu tačku.

Odrediti: 1° Broj pravih po kojima se seku ove ravni; 2° Broj tačaka preseka tri po tri ravni; 3° Broj poligonalnih oblasti, konačnih ili beskonačnih, određenih na ravnima iz skupa E; 4° Broj polijedarskih oblasti, konačnih ili beskonačnih, na koje je podeljen prostor ravnima iz skupa E.

Rezultat. 1° $\binom{n}{2}$; 2° $\binom{n}{3}$; 3° $\frac{n^2(n-1)}{2}+n$; 4° $(n+1)(n^2-n+6)/6$.

Generalizacija. Ostavlja se čitaocu da formuliše i reši analogni zadatak za hiperprostor od N dimenzija.

II. DELJIVOST POLINOMA

27. Odrediti a i b tako da polinom ax^4+bx^3+1 bude deljiv sa $(x-1)^2$. Za nađene vrednosti parametara a i b, odrediti nule polinoma ax^4+bx^3+1.

Rešenje. $ax^4+bx^3+1 \equiv (x-1)^2(Ax^2+Bx+1)$.

Posle identifikacije i rešavanja dobijenog skupa jednačina, dobija se

$$a=3, \quad b=-4; \quad A=3, \quad B=2.$$

Nule polinoma $3x^4-4x^3+1$ su:

$$x_1=1, \quad x_2=1, \quad x_3=\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}, \quad x_4=\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}.$$

Ovaj zadatak može se rešiti i na ovaj način. Budući da polinom ax^4+bx^3+1 ima dvostruku nulu $x=1$, važe uslovi:

$$a+b+1=0, \qquad 4a+3b=0,$$

odakle se dobija $a=3$, $b=-4$.

28. Ako su m i n prirodni brojevi, naći uslov da bi polinom

$$P(a)=a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+a+1$$

bio deljiv polinomom

$$Q(a)=a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1.$$

Rešenje. $P(a)=\dfrac{a^m-1}{a-1}, \quad Q(a)=\dfrac{a^n-1}{a-1} \quad (a\neq 1)$.

Pre svega mora biti $m \geqslant n$.

Napišimo m u obliku

$$m=np+q \qquad \{p \text{ prirodan broj}, \ q\,(<n) \text{ prirodan broj ili nula}\}.$$

Tada je

$$\frac{a^m-1}{a^n-1}=\frac{a^{np}\cdot a^q-1}{a^n-1}=\frac{(a^n)^p\,a^q-a^q+a^q-1}{a^n-1}=a^q\,\frac{(a^n)^p-1}{a^n-1}+\frac{a^q-1}{a^n-1}.$$

Ako je $(a^n-1)\mid(a^m-1)$, tada je $Q(a)\mid P(a)$. Ovo će nastupiti kada je $q=0$, tj. kada je $m=np$.

Zaključak bi bio ovaj: ako je $n\mid m$, tada je $Q(a)\mid P(a)$.

29. U oblasti kompleksnih brojeva faktorisati izraz $x^3+y^3+z^3-3xyz$, polazeći od identiteta

$$(1) \qquad x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

Rešenje.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ z+x+y & x & y \\ y+z+x & z & x \end{vmatrix} \equiv (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix}$$

$$\equiv (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

Budući da se dati izraz (1) može napisati u obliku

$$x^3+(\alpha y)^3+(\alpha^2 z)^3-3x(\alpha y)(\alpha^2 z) \qquad \left(\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i\sqrt{3}\right),$$

zaključuje se da je $x+\alpha y+\alpha^2 z$ faktor izraza (1). Slično ovome, pokazuje se da je $x+\alpha^2 y+\alpha z$ takođe faktor datog izraza.

Definitivno se dobija ova faktorizacija

$$x^3+y^3+z^3-3xyz \equiv (x+y+z)(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\alpha^2 y+\alpha z).$$

Da li je ovo jedina faktorizacija datog izraza?

30. Odrediti polinom $P(x)$ petog stepena koji zadovoljava ova dva uslova:

$$(1) \qquad (x-1)^3 \mid [P(x)+1], \qquad (2) \quad (x+1)^3 \mid [P(x)-1].$$

Rešenje. I. Uslov (1) kazuje da je polinom $P(x)+1$ deljiv sa $(x-1)^3$. To znači da je izvod tog polinoma, tj. $P'(x)$, deljiv sa $(x-1)^2$. Iz uslova (2) sleduje da je izvod polinoma $P(x)-1$, tj. $P'(x)$ deljiv sa $(x+1)^2$. Kako je, po pretpostavci, $P(x)$ polinom petog stepena, može se pisati

$$dP/dx \equiv A(x^2-1)^2 \qquad (A \text{ konstanta}).$$

Iz ove jednačine izlazi

$$P(x)=A\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right)+B \qquad (B \text{ integraciona konstanta}).$$

Budući da je $P(1)=-1$, $P(-1)=1$, traženi polinom $P(x)$ ima oblik

$$P(x) \equiv -\frac{3}{8}x^5+\frac{5}{4}x^3-\frac{15}{8}x.$$

II. Zadatak se može rešiti i ovim putem. Polinom $P(x)$ može se napisati u obliku:

$$(3) \qquad P(x) \equiv (x-1)^3(ax^2+bx+c)-1,$$

gde su a, b, c tri privremeno neodređena koeficijenta.

Vodeći računa o uslovu (2), može se polinomu $P(x)$ dati i ovaj oblik

$$(4) \qquad P(x) \equiv (x+1)^3(a_1x^2+b_1x+c_1)+1.$$

Na osnovu (3) i (4) dolazi se do identiteta

$$(x-1)^3(ax^2+bx+c)-1 \equiv (x+1)^3(a_1x^2+b_1x+c_1)+1.$$

$$\therefore \quad a=a_1, \quad b-3a=b_1+3a_1, \quad c-3b+3a=c_1+3b_1+3a_1,$$

$$-3c+3b-a=3c_1+3b_1+a_1, \quad 3c-b=3c_1+b_1, \quad -c-1=c_1+1.$$

$$\therefore \quad a_1=a, \quad b_1=b-6a, \quad c_1=c-6b+18a,$$

$$19a-9b+3c=0, \quad 3a-b=0, \quad 9a-3b+c=-1.$$

Iz triju poslednjih jednačina dobija se

$$(5) \qquad a=-3/8, \quad b=-9/8, \quad c=-1,$$

a zatim

$$(6) \qquad a_1=-3/8, \quad b_1=9/8, \quad c_1=-1.$$

Ako se u (3) zamene vrednosti (5) ili u (4) vrednosti (6), dolazi se do rezultata koji je pod I. napred dobijen.

31. Odrediti polinom $P(x)$ sedmog stepena koji zadovoljava uslove:

$$(x-1)^4 \mid [P(x)+1], \qquad (x+1)^4 \mid [P(x)-1].$$

Rešenje. Polinom $P(x)$ može se napisati na sledeća dva načina:

$$P(x) \equiv (x-1)^4(ax^3+bx^2+cx+d)-1,$$

$$P(x) \equiv (x+1)^4(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)+1,$$

odakle izlazi

$$(1) \qquad (x-1)^4(ax^3+bx^2+cx+d)-1 \equiv (x+1)^4(a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1)+1.$$

Ako se ovde umesto x stavi $-x$, dobija se

(2) $$(x-1)^4 (a_1 x^3 - b_1 x^2 + c_1 x - d_1) - 1 \equiv (x+1)^4 (ax^3 - bx^2 + cx - d) + 1 .$$

Iz (1) i (2) neposredno izlazi

$$a = a_1, \quad b = -b_1, \quad c = c_1, \quad d = -d_1 .$$

Rešavanjem jednačina koje se dobijaju polazeći od identiteta (1), nalazi se

$$P(x) \equiv \frac{5}{16} x^7 - \frac{21}{16} x^5 + \frac{35}{16} x^3 - \frac{35}{16} x .$$

Primedba. Čitalac će rešiti ovaj problem i primenom metoda koji je naveden u prethodnom problemu.

32. Ako je $m\,(\geqslant 2)$ prirodan broj, pokazati da je izraz

$$(x^{m-1}-1)\,(x^m-1)\,(x^{m+1}-1)$$

deljiv sa $(x-1)\,(x^2-1)\,(x^3-1)$.

33. Ostaci pri deobi polinoma $f(x)$ stepena $n\,(\geqslant 3)$ binomima $x-a$, $x-b$ i $x-c$, gde je $a \neq b \neq c \neq a$, jesu po redu A, B i C. Odrediti ostatak koji se dobija deobom datog polinoma izrazom $(x-a)\,(x-b)\,(x-c)$.

Rešenje. Prema pretpostavci je

(1) $$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad f(c) = C .$$

Uvek je mogućno jednoznačno odrediti polinom $g(x)$ i kvadratni polinom $h(x)$ tako, da je jednakost

(2) $$f(x) \equiv g(x)\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c) + h(x)$$

identički zadovoljena.

Polinom

(3) $$h(x) \equiv px^2 + qx + r$$

je ostatak koji treba odrediti.

Iz (1) i (2) sleduje

(4) $$h(a) = A, \quad h(b) = B, \quad h(c) = C .$$

Kako je $a \neq b \neq c \neq a$, prema *Lagrange*-ovoj interpolacionoj formuli i uslovima (4), dobija se traženi ostatak:

$$h(x) \equiv \frac{(x-b)\,(x-c)}{(a-b)\,(a-c)} A + \frac{(x-c)\,(x-a)}{(b-c)\,(b-a)} B + \frac{(x-a)\,(x-b)}{(c-a)\,(c-b)} C .$$

Odavde se dobijaju koeficijenti polinoma (3), naime:

$$p = \frac{A}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{B}{(b-a)\,(b-c)} + \frac{C}{(c-a)\,(c-b)},$$

$$q = -\frac{(b+c)\,A}{(a-b)\,(a-c)} - \frac{(c+a)\,B}{(b-a)\,(b-c)} - \frac{(a+b)\,C}{(c-a)\,(c-b)},$$

$$r = \frac{bcA}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{caB}{(b-a)\,(b-c)} + \frac{abC}{(c-a)\,(c-b)} .$$

Primedba. Čitalac će rešiti opštiji zadatak koji glasi:

Dat je polinom $P(x)$ stepena $n\,(\geqslant q)$. Ostaci deobe polinoma $P(x)$ binomima

$$x-a_1, \quad x-a_2, \ldots, \quad x-a_q \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_q \text{ različiti parametri})$$

jesu respektivno: $A_1, A_2, \ldots, A_q$.

Služeći se datim podacima odrediti ostatak deobe polinoma $P(x)$ polinomom $\prod_{k=1}^{q} (x-a_k)$.

34. Pokazati da je polinom $mx^{m+n}-(m+n)x^m+n$ (m, n prirodni brojevi) deljiv sa $(x-1)^2$ i odrediti količnik.

Rešenje. Izvršimo deljenje po *Horner*-ovoj shemi:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & m & 0 & 0 & \ldots & 0 & -(m+n) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n \\
\hline
1 & m & m & m & \ldots & m & -n & -n & -n & \ldots & -n & -n & 0 \\
1 & m & 2m & 3m & \ldots & nm & (m-1)n & (m-2)n & (m-3)n & \ldots & n & 0 &
\end{array}$$

Količnik je polinom ($s<m$):

$$mx^{m+n-2}+2mx^{m+n-3}+3mx^{m+n-4}+\cdots+nmx^{m-1}+(m-1)nx^{m-2}+(m-2)nx^{m-3}$$
$$+\cdots+(m-s)nx^{m-s-1}+\cdots+2nx+n.$$

Ovaj polinom se može kraće napisati u obliku

$$\sum_{k=0}^{m+n-2} a_k x^{m+n-k-2},$$

gde je

$$a_k=\begin{cases}(k+1)m & (k\leqslant n-1);\\ (m+n-k-1)n & (k\geqslant n).\end{cases}$$

Primedba. Da je dati polinom $P(x)\equiv mx^{m+n}-(m+n)x^m+n$ deljiv sa $(x-1)^2$ može se zaključiti i na osnovu činjenice da je $P(1)=0$, $P'(1)=0$.

35. Polinom $x^{2m}+x^m+1$ ($m=3k+1$; $k=0, 1, 2, \ldots$) deljiv je sa x^2+x+1 Dokazati ovo.

36. Da li je polinom

$$x^{2n}-n^2x^{n+1}+2(n^2-1)x^n-n^2x^{n-1}+1$$

deljiv sa $(x-1)^4$?

37. Svaki se polinom $P(x)$ može napisati u obliku $Q(x^2)+xR(x^2)$, gde su $Q(t)$ i $R(t)$ polinomi po t.

Odrediti ostatak koji se dobija pri deljenju polinoma $P(x)$ sa x^2+1.

Rezultat. Ostatak deljenja je $Q(-1)+xR(-1)$.

III. JEDNAČINE

38. Pokazati da su $1, 2, 3, \ldots, n$ nule polinoma

$$1-\binom{x}{1}+\binom{x}{2}-\binom{x}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{x}{n},$$

i faktorisati ovaj polinom.

39. Rešiti jednačinu

$$|(x+2)(x-1)|-|(x+1)(x-2)|=a \quad (a \text{ realan parametar}).$$

40. Rešiti jednačinu

$$|x^2+2x|+|x^2-1|-|x|=a \quad (a \text{ realan parametar}).$$

41. Naći racionalne korene sledećih jednačina:

1° $800x^4-102x^2-x+3=0$,

2° $2x^3-31x^2+112x+64=0$,

3° $x^4-x^3-30x^2-76x-56=0$,
4° $x^4-2x^3-13x^2+38x-24=0$,
5° $3x^4-23x^3+35x^2+31x-30=0$,
6° $x^4+x^3-2x^2+4x-24=0$,
7° $x^4-2x^3-19x^2+68x-60=0$,
8° $x^5-8x^4+22x^3-26x^2+21x-18=0$.

42. Za razne vrednosti parametra λ ispitati broj realnih korena jednačina:

1° $x^4+4x^3-2x^2-12x+\lambda=0$,
2° $x^5-20x+\lambda=0$,
3° $x^4-\lambda x^3+x^2-5=0$,
4° $\lambda^2x^4-2\lambda^2x^3+2x-1=0$.

43. Rešiti jednačinu

$$x^3-(2a+1)x^2+a(a+2)x-a(a+1)=0.$$

44. Rešiti jednačinu

$$x^3+3ax^2-(b^4+b^3+b^2-3a^2)x-(b^5+ab^4+b^4+ab^3+ab^2-a^3)=0.$$

Uputstvo. Nezavisni član rastaviti na faktore.

45. Naći relaciju koja mora postojati između koeficijenata jednačine

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,$$

da bi se smenom $x=y+h$ svela na oblik

$$b_0y^4+b_1y^2+b_2=0.$$

46. Data je jednačina $x^3+px^2+qx+r=0$.

1° Odrediti uslov da jedan koren ove jednačine bude harmoniska sredina druga dva korena.

2° Izračunati vrednost simetrične funkcije

$$f(a,b,c)\equiv(ab+bc-2ac)(bc+ac-2ab)(ac+ab-2bc),$$

gde su a, b i c koreni date jednačine.

Rešenje. 1° Neka je b harmoniska sredina korena a i c, tj. neka je $2/b=(1/a)+(1/c)$, odnosno $ab+bc=2ac$.

Prema tome, koreni date jednačine zadovoljavaju skup jednačina

$$(a+c)b-2(ac)=0,\quad (a+c)+b=-p,\quad (a+c)b+(ac)=q,\quad b(ac)=-r.$$

Eliminišući izraze $a+c$, ac i b, dobija se relacija

$$27r^2-9pqr+2q^3=0 \tag{1}$$

koja pretstavlja traženi uslov.

2° Iz relacija

$$ab+bc+ac=q,\quad abc=-r, \tag{2}$$

sleduje

$$ab+bc-2ac=q-3ac=(qb+3r)/b,$$
$$bc+ac-2ab=q-3ab=(qc+3r)/c,$$
$$ac+ab-2bc=q-3bc=(qa+3r)/a.$$

Na osnovu ovog dobija se

$$f(a,b,c) \equiv (1/abc)\,[27\,r^3 + 9\,r^2 q\,(a+b+c) + 3\,rq^2\,(ab+bc+ac) + q^3\,abc]\,.$$

Iz relacija (2) i $a+b+c=-p$ sleduje $f(a,b,c) \equiv -27\,r^2 + 9\,pqr - 2\,q^3$.

47. Pokazati da jednačina $x^3+x^2=ax+1$ ima tri realna korena ako je $a \geqslant 1$, i samo jedan realan koren ako je $a<1$.

48. Za razne vrednosti parametra a ispitati realnost korena jednačine

$$x^4+4\,x^3-2\,x^2-12\,x+a=0\,.$$

49. Po x rešiti jednačinu $\sum\limits_{k=1}^{n}(x-k)^3=0$.

Rezultat. $\frac{1}{2}(n+1)$, $\frac{1}{2}(n+1 \pm i\sqrt{n^2-1})$.

50. Eliminisati x, y, z iz relacija

$$x^2y+x^2z=a^3, \quad y^2z+y^2x=b^3, \quad z^2x+z^2y=c^3, \quad xyz=d^3\,.$$

Rezultat. $d^6\,(a^3+b^3+c^3+2\,d^3)=a^3\,b^3\,c^3$.

51. Za slučaj kada je $a<b<c<d$, ispitati da li su koreni jednačine

$$(x-a)\,(x-c)=k\,(x-b)\,(x-d)$$

realni za svako realno k.

52. Proveriti da li je tačan ovaj rezultat:
Jednačina $16\,x^4+24\,x^2+16\,kx+9=0$ (k realan parametar) ima: 1° sva četiri korena imaginarna ako je $k^2<4$; 2° dva realna i dva imaginarna korena ako je $k^2 \geqslant 4$.

53. Odrediti sa šest tačnih cifara onaj koren jednačine

$$x^3+3\,x^2-42\,x-41=0$$

koji leži između 5 i 6.

Rezultat. 5,67461.

54. 1° Grafičkim putem pokazati da jednačina

$$(E) \qquad x^4+4\,x-1=0$$

ima dva realna korena i izračunati ih sa dve tačne decimale.

2° Stavljajući $x=a+bi$ (a i b realni brojevi), odrediti imaginarne korene jednačine (E).

Rešenje. 2° Ako se stavi $x=a+bi$, data jednačina postaje

$$(a^4-6\,a^2b^2+b^4+4\,a-1)+i\,(4\,a^3\,b-4\,ab^3+4\,b)=0\,.$$

$$\therefore \quad a^4-6\,a^2b^2+b^4+4\,a-1=0, \quad a^3-ab^2+1=0, \quad \text{jer je } b \neq 0\,.$$

Ako se eliminiše b iz ovih jednačina, dobija se $4\,a^6+a^2-1=0$.
Ako se stavi $a^2=t$, poslednja jednačina postaje $4\,t^3+t-1=0$.
Jedini realan koren ove jednačine je $t=1/2$, tako da je $a=\pm\sqrt{2}/2$.
Budući da je $b^2=(a^3+1)/a$, dobijamo:

$$b^2=\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \quad \text{za} \quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \qquad b^2=-\frac{2\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{za} \quad a=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Kako su a i b realni brojevi, u obzir dolazi samo prvi par, tako da su imaginarni koreni date jednačine (E)

$$\left(1\pm i\sqrt{2\sqrt{2}+1}\right)/\sqrt{2}.$$

55. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy data je tačka $M(a, b)$. Ako se tačka M kreće u ravni, odrediti broj realnih korena jednačina:

$$1^\circ \quad t^5+at+b=0; \qquad 2^\circ \quad t^4-3t^2+at+b=0;$$

$$3^\circ \quad t^4+at+b=0; \qquad 4^\circ \quad t^7+at^3+b=0.$$

56. Data je jednačina IV stepena $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Staviti ovde $x^2=y+\lambda x$ i odrediti λ tako da dobijena jednačina po x i y definiše krug.

1° Koristeći ovaj rezultat, grafičkim putem razdvojiti realne korene jednačine

$$x^4-10x^3+35x^2-49x+22=0.$$

2° Ispitati takođe da li jednačina $x^4-4x^3+5x-1=0$ ima samo po jedan koren u razmacima $(0, 1)$ i $(-2, -1)$.

57. Ako je $a=\varepsilon+\varepsilon^4$, $b=\varepsilon^2+\varepsilon^3$ $[\varepsilon=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)]$, pokazati da je

$$a+b=-1, \quad ab=-1.$$

Polazeći od navedenih relacija, izračunati $\cos(2\pi/5)$ i $\cos(\pi/5)$.

Pokazati da je ε rešenje jednačine $x^{16}+x^9+x^4+x+1-\sqrt{5}=0$.

58. Razdvojiti realne korene jednačine

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+k(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=0 \quad (k\neq-1).$$

Da li se dobijeni rezultati mogu proširiti na analogne jednačine stepena $n(>4)$?

59. Jednačina $x^5-55x+21=0$ ima dva korena čiji je proizvod 1. Odrediti ih.

Rešenje. Ako su x_1 i x_2 koreni date jednačine za koje je $x_1x_2=1$, onda je polinom $x^5-55x+21$ deljiv polinomom

$$(1) \qquad (x-x_1)(x-x_2)\equiv x^2+\lambda x+1.$$

Prema tome postoji i polinom x^3+px^2+qx+r takav da je

$$x^5-55x+21\equiv(x^3+px^2+qx+r)(x^2+\lambda x+1),$$

odnosno

$$x^5-55x+21\equiv x^5+(p+\lambda)x^4+(1+p\lambda+q)x^3+(p+q\lambda+r)x^2+(q+r\lambda)x+r,$$

odakle se dobija skup jednačina

$$\lambda+p=0, \quad 1+p\lambda+q=0, \quad p+q\lambda+r=0, \quad q+r\lambda=-55, \quad r=21.$$

Eliminacijom parametara p, q i r dobijaju se relacije: $\lambda^3-2\lambda+21=0$, $\lambda^2+21\lambda+54=0$. Bez teškoće se proverava da su obe jednačine zadovoljene za $\lambda=-3$. S obzirom na (1), traženi koreni su koreni jednačine $x^2-3x+1=0$, tj. $x_{1,2}=(3\pm\sqrt{5})/2$.

60. Dat je polinom $P(x)\equiv ax^{n+1}+bx^n+1$ (n prirodan broj). Odrediti parametre a, b tako da je $x=1$ dvostruka nula polinoma $P(x)$.

Rezultat. $a=n$, $b=-n-1$.

61. Dat je polinom $P(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. Ako je $a_k\geqslant 0$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, tada polinom $P(x)$ nema pozitivnih korena. Dokazati ovaj stav.

62. Odrediti uslov da bi se polinom $P(x) \equiv x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ mogao napisati u obliku $P(x) \equiv (x^2+rx)^2+p(x^2+rx)+q$, gde su p, q, r tri parametra nezavisna od x.

Kada je traženi uslov zadovoljen, naći nule polinoma $P(x)$.

Izabrati a tako da se jednačina $x^4+ax^3+4x^2-15x+1=0$ može rešiti na osnovu navedene osobine.

Odgovor. Traženi uslov je $a^3-4ab+8c=0$.

Za dati partikularni slučaj parametar a se određuje iz jednačine $a^3-16a-120=0$. Jedan njen koren je $a_1=6$, dok se druga dva određuju iz jednačine $a^2+6a+20=0$ i oni su imaginarni. Čitalac će detaljno za svaki koren a_1, a_2, a_3 izvesti potrebne račune.

63. Računskim i grafičkim putem odrediti broj realnih rešenja jednačine $3x^4+3ax^3+15x^2-4=0$ za razne vrednosti parametra a.

64. 1° Ako se u jednačini

$$(E) \qquad (x+p)^4+(x+q)^4=r$$

izvrši smena

$$(T) \qquad x+p=X+a, \quad x+q=X-a,$$

dobiće se kvadratna jednačina po X^2.

Dokazati navedeni rezultat i primeniti ga na rešavanje jednačine

$$(x+3)^4+(x+1)^4=20.$$

2° Pokazati da se jednačina $(x+p)^{2n}+(x+q)^{2n}=r$, ako se u njoj izvrši navedena transformacija (T), svodi na jednačinu stepena n po X^2.

3° Posmatrati takođe jednačinu $(x+p)^{2n}-(x+q)^{2n}=r$.

Kakav će zaključak biti u ovom slučaju?

Rešenje. 1° Iz (T) dobija se $X=x+\frac{1}{2}(p+q)$, $a=\frac{1}{2}(p-q)$.

Jednačina (E) postaje $(X+a)^4+(X-a)^4=r$, tj. $X^4+6a^2X^2+a^4=r/2$, što je zaista kvadratna jednačina po X^2.

2° Jednačina $(x+p)^{2n}+(x+q)^{2n}=r$ postaje

$$X^{2n}+\binom{2n}{2}a^2X^{2n-2}+\binom{2n}{4}a^4X^{2n-4}+\cdots+\binom{2n}{2n-2}a^{2n-2}X^2+\binom{2n}{2n}a^{2n}=\frac{r}{2}.$$

To je jednačina stepena n po X^2.

65. Izračunati sa četiri tačne cifre pozitivni koren jednačine $x^3-x^2-7x-1=0$.

Rezultat. 3,249.

66. Sa tri tačne cifre izračunati pozitivni koren jednačine $x^3+3x-1=0$.

Rezultat. Traženi koren se nalazi između 0,3221 i 0,3222. Koren sa tri tačne cifre je 0,322.

67. Data je jednačina $P(x) \equiv 9x^4-14x^2+8x-1=0$.

Izračunati realne korene sa dve tačne decimale jednom od metoda za izračunavanje iracionalnih korena.

Polazeći potom od činjenice da je $P(x) \equiv 2x^2(3x-2)^2-(3x^2-4x+1)^2$, odrediti korene jednačine $P(x)=0$ i izračunati ih, na osnovu dobijenih izraza, na dve tačne decimale.

Rezultat. $-1{,}48$; 0,54; 0,18; 0,76.

68. Pokazati da jednačina $(x-1)(x-3)(x-5)+k(x-2)(x-4)(x-6)=0$ ima tri realna korena ako je $k \neq -1$. Ako je $k>0$, odrediti približno njihove položaje, odnosno razdvojiti korene.

Rezultat. U svakom od razmaka $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$ nalazi se samo po jedan koren. Čitalac će razdvojiti korene ako je $k<0$.
Proveriti rezultate polazeći od grafika funkcije $(x-1)(x-3)(x-5)/(x-2)(x-4)(x-6)$.

69. Odrediti a tako da se oba korena jednačine $x^2-2ax+a^2-1=0$ nalaze u intervalu $(-2, 4)$.

Rezultat. $a \in (-1, 3)$.

70. Ako je $p>q>0$, ispitati da li jednačina $x^3+x^2=px+q$ ima sva tri korena realna.

71. Pokazati da jednačina $e^x=2x+1$ ima samo jedan koren između 1,2 i 1,3. Koja je treća tačna cifra ovog rešenja?

72. Pokazati da su svi koreni jednačine

$$z^4-z+1=0$$

imaginarni, i izračunati njihove realne i imaginarne delove na tri tačne decimale.

Rezultat. $0{,}727 \pm i \cdot 0{,}430; \quad -0{,}727 \pm i \cdot 0{,}934$.

73. Dokazati da jednačina

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

smenom $x=t\sqrt{|p|}$, postaje

$$t^4+t^2+at+b=0 \quad (p>0),$$

$$t^4-t^2+at+b=0 \quad (p<0),$$

gde su a i b funkcije od p, q, r.

74. Rešiti jednačinu

$$P(x) \equiv a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,$$

kada se zna da $P'(x)$ i $P'''(x)$ imaju jednu zajedničku nulu.

75. Neka je $P(x)$ polinom stepena n. Odrediti red nule $x=a$ polinoma

$$\frac{1}{2}(x-a)[P'(x)+P'(a)]-P(x)+P(a).$$

76. Za razne vrednosti parametra k ispitati broj realnih rešenja jednačine

$$(x-a)^3(x-b)^3=k \quad (a, b \text{ realni brojevi}).$$

Uputstvo. Nacrtati najpre grafik funkcije $p(x) \equiv (x-a)(x-b)$, a zatim grafik funkcije $[p(x)]^3$.

77. Odrediti uslov da jednačina

$$3x^5-5qx^3+3r=0 \quad (q, r \text{ parametri})$$

ima tri realna korena.

Rezultat. $4q^5-9r^2>0$.

78. Izvesti uslov koji treba da zadovoljavaju koeficijenti jednačine

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0,$$

da bi njeni koreni ispunjavali uslov $x_1 x_2 + x_2 x_3 = 3 x_1 x_3$.

Rešenje. Pođimo od *Viète*-ovih formula:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -3 a_1/a_0, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = 3 a_2/a_0 \quad x_1 x_2 x_3 = -a_3/a_0.$$

Budući da je $x_1 x_2 + x_2 x_3 = 3 x_1 x_3$, dobija se $4 x_1 x_3 = 3 a_2/a_0$, odnosno

$$4 x_1 x_2 x_3 = (3 a_2/a_0) x_2, \quad \text{te je } x_2 = -(4 a_3)/(3 a_2).$$

Iz relacije $x_1 + x_2 + x_3 = -(3 a_1)/a_0$, posle množenja sa x_2, dobija se

$$x_1 x_2 + x_2^2 + x_2 x_3 = (4 a_1 a_3)/(a_0 a_2),$$

odakle se, na osnovu relacija

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 = (9 a_2)/(4 a_0) \quad \text{i} \quad x_2 = -(4 a_3)/(3 a_2)$$

nalazi traženi uslov

$$81 a_2^3 + 64 a_0 a_3^2 = 144 a_1 a_2 a_3.$$

79. Ako su p, q, r realni brojevi i ako koreni jednačine $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ imaju jednake module, kakve veze postoje između koeficijenata p, q, r?

80. Ako je $\Sigma x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, rešiti po $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skup jednačina:

$$\begin{aligned} x_1 \Sigma x_k + 1 \cdot 2 (\Sigma x_k)^2 &= 9 a^2, \\ x_2 \Sigma x_k + 2 \cdot 3 (\Sigma x_k)^2 &= 25 a^2, \\ x_3 \Sigma x_k + 3 \cdot 4 (\Sigma x_k)^2 &= 49 a^2, \\ &\vdots \\ x_n \Sigma x_k + n(n+1) (\Sigma x_k)^2 &= (2n+1)^2 a^2. \end{aligned}$$

81. Pokazati da se koreni jednačine $x^5 + x - 1 = 0$ mogu grafičkim putem razdvojiti pomoću kruga i jedne kubne parabole. — Navesti i druge načine razdvajanja korena u ovom slučaju. Efektivno izračunati realne korene sa dve tačne decimale.

82. Znajući da jednačina $x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 4 = 0$ ima jedan kompleksan koren čiji je argument $\pi/4$, odrediti taj koren.

Grafičkim putem razdvojiti realne korene ove jednačine i izračunati ih zatim sa dve tačne decimale.

83. Izraziti $\operatorname{tg} 6\theta$ kao funkciju od $\operatorname{tg}\theta$ i pokazati da su $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{12}$, $\operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}$ rešenja jednačine $x^3 - 15x^2 + 15x - 1 = 0$.

84. Proveriti da li je tačan rezultat:

Jednačina (E) $x^4 - 4x^2 + 4kx - 1 = 0$ (k realan parametar) ima četiri različita realna korena, ako je ispunjen uslov

$$\frac{5}{9}\sqrt{3} < |k| < 1.$$

Odrediti k pod uslovom da jednačina (E) ima bar jedan dvostruki koren i za te vrednosti k rešiti jednačinu (E).

85. Data je jednačina $x^2 \log x = a$, gde je a parametar. Za razne vrednosti a ispitati broj realnih rešenja te jednačine.

86. Za razne vrednosti parametra a odrediti broj realnih korena jednačine $x^3 - x + a = 0$ na segmentu $[-1, +1]$.

87. Data je jednačina

$$(E) \qquad x^4 - 2x^3 + x - a = 0 \qquad (-\infty < a < +\infty).$$

1° Grafičkim putem utvrditi broj realnih rešenja jednačine (E) kada se parametar a menja.

2° Takođe rešiti jednačinu (E) polazeći od činjenice da se polinom

$$x^4 - 2x^3 + x - a$$

može napisati u obliku

$$(x^2 - x + p)(x^2 - x + q),$$

gde parametre p i q treba prethodno odrediti.

88. Rešiti jednačinu

$$\prod_{k=1}^{4} (x + kh) = \sum_{k=1}^{4} (x + kh)^2 \qquad (h \text{ parametar}).$$

Uputstvo. Izvršiti smenu $x = t - \frac{5}{2} h$.

89. Po x rešiti jednačinu

$$(1 - x^4)/(1 - a^4) = (1 - x)/(1 - a) \qquad (a^4 \neq 1).$$

90. Data je jednačina

$$x^3 + ax + b = 0$$

čiji su koreni racionalni brojevi: p, q, r.

Pokazati da jednačina

$$py^2 + qy + r = 0$$

ima tako isto racionalne korene.

91. Jednačina $2x^4 + x^3 - 2x - 8 = 0$ ima četiri različita korena jednakih modula. Rešiti je.

Rezultat. $\pm \sqrt{2}$; $(-1 \pm i\sqrt{31})/4$.

92. Jednačina $6x^4 - x^3 + 10x^2 - x + 6 = 0$ ima četiri različita korena jednakih modula. Naći ove korene.

Rezultat. $(1 \pm i\sqrt{8})/3$, $(-1 \pm i\sqrt{15})/4$.

Primedba. Rešiti datu jednačinu i bez korišćenja navedene osobine njenih korena.

93. Ako su λ_1 i λ_2 rešenja jednačine $ax^2 + 2bx + c = 0$ i ako su μ_1 i μ_2 rešenja jednačine $py^2 + 2qy + r = 0$, tada su $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_1\mu_2$, $\lambda_2\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ rešenja jednačine

$$(apz^2 - 2bqz + cr)^2 - 4(ac - b^2)(pr - q^2) z^2 = 0.$$

94. Ako postoje uslovi

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n,$$

sve su nule polinoma

$$P(x)+\lambda Q(x) \quad (\lambda>0)$$

$$\left\{P(x)\equiv\prod_{k=1}^{n}(x-a_k), \quad Q(x)\equiv\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)\right\}$$

realne i razdvojene korenima polinoma $P(x)$ i $Q(x)$.

Uputstvo. Posmatrati znake izraza

$$P(x)+\lambda Q(x) \quad \text{za } x=a_k, b_k \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

95. Odrediti presečne tačke krivih

$$x^2+y=2, \quad x+y^2=6.$$

Primedba. Proveriti da li je tačan rezultat dat sledećom tablicom:

x	2	$-2{,}205569$	$0{,}102784 \pm 0{,}665456\,i$
y	-2	$-2{,}864534$	$2{,}432267 \mp 0{,}136796\,i$

96. Odrediti uslove da bi skup jednačina

$$a_k xy+b_k x+c_k y=d_k \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\{a_k, b_k, c_k, d_k \ (k=1, 2, 3) \text{ parametri}\}$$

imao rešenja po x i y.

97. Koristeći grafičke metode, ispitati da li jednačina

$$(1) \qquad \sin 2x \sin x=1$$

ima realnih rešenja?

Uputstvo. Poći od oblika

$$\sin 2x=1/\sin x$$

i posmatrati krive

$$y=\sin 2x, \quad y=1/\sin x.$$

Drugi bi se način sastojao iz sledećeg. Umesto (1) može se napisati

$$(2) \qquad 2(\cos x)^3-2\cos x+1=0.$$

Ako se stavi $\cos x=t$, jednačina (2) postaje

$$(3) \qquad t^3-t=-1/2.$$

Iz grafika funkcija

$$y=t^3-t, \quad y=-1/2$$

konstatujemo da je jedini realan koren t_0 jednačine (3) manji od -1, pa prema tome jednačina

$$\cos x=t_0$$

nema realnih rešenja.

Stoga jednačina (1) takođe nema realnih rešenja.

Primedba. Odrediti parametar a tako da jednačina

$$\sin 2x \sin x=a$$

ima realnih rešenja.

98. Kada se menja realan parametar a, odrediti broj realnih rešenja jednačine

$$(1) \qquad x^4-15x^2+ax-12=0.$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

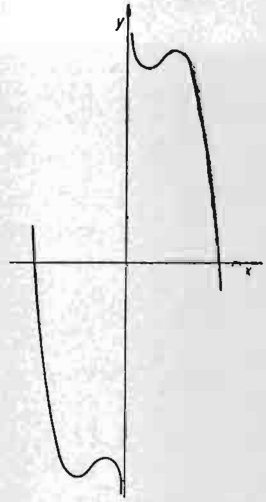
$$(2) \qquad y=-x^3+15x+12/x$$

koju dobijamo kada jednačinu (1) rešimo po a.

Grafik funkcije (2) prikazan je na slici.

$y_{max} = 28$ za $x = 2$; $y_{max} = -26$ za $x = -1$;

$y_{min} = 26$ za $x = 1$; $y_{min} = -28$ za $x = -2$.



Ako uporedo sa jednačinom (2) uočimo jednačinu

$$(3) \qquad y = a,$$

tada su realna rešenja jednačine (1) apscise tačaka preseka prave (3) i krive (2).

Jednostavnom analizom dolazi se do sledećeg rezultata:

Ako je $a < -28$, jednačina (1) ima dva realna rešenja (jedno negativno i jedno pozitivno);

Ako je $a = -28$, jednačina (1) ima četiri realna rešenja (dvostruko rešenje $x = -2$, još jedno negativno rešenje i jedno pozitivno rešenje);

Ako je $-28 < a < -26$, jednačina (1) ima sva četiri realna rešenja od kojih su tri negativna;

Ako je $a = -26$, jednačina (1) ima četiri realna rešenja od kojih je $x = -1$ dvostruko i još jedno negativno i jedno pozitivno;

Ako je $-26 < a < +26$, jednačina (1) ima dva realna rešenja od kojih je jedno pozitivno, a drugo negativno;

Ako je $a = 26$, jednačina (1) ima četiri realna rešenja od kojih je $x = 1$ dvostruko i još jedno pozitivno i jedno negativno;

Ako je $26 < a < 28$, jednačina (1) ima četiri različita realna rešenja od kojih su tri pozitivna i jedno negativno;

Ako je $a = 28$, jednačina (1) ima četiri realna rešenja (jedno dvostruko $x = 2$ i još jedno pozitivno i jedno negativno rešenje);

Ako je $a > 28$, jednačina (1) ima dva realna rešenja od kojih je jedno pozitivno, a drugo negativno.

Precizan grafik omogućava ne samo da se odredi broj realnih rešenja date jednačine, već da se ta rešenja razdvoje, tj. da se odredi razmak (p, q) u kome će se nalaziti samo jedno rešenje date jednačine. Ako je grafik dovoljno precizan, može se odrediti p i q tako da bude $q - p = 0{,}1$.

Čitalac će proveriti, uz pomoć *Horner*-ove sheme, da li je negativno rešenje jednačine (1) za $a = -1$ definisano nejednakošću $-3{,}94 < x < -3{,}93$. Pozitivno rešenje jednačine (1) za $a = -1$ je $x = 4$.

IV. NEJEDNAKOSTI[1]

99. Dokazati relaciju

$$(1) \qquad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Rešenje. Pretpostavimo da je tačno suprotno, tj.

$$(2) \qquad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} > \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$$

odakle sleduje

$$(3) \qquad |a+b| > |a| + |b| + 2|ab| + |ab|\,|a+b|,$$

što je nemogućno, jer je $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

Kako nas je hipoteza (2) dovela do kontradikcije (3), zaključujemo da je relacija (1) istinita.

---

[1] Radi šireg upoznavanja sa nejednakostima videti:
D. S. Mitrinović: Važnije nejednakosti, Beograd, 1958, 64 str. (sveska 7 *Matematičke biblioteke*).

Primedba. Da li relacija (1) važi za kompleksne brojeve a i b? Da li važi opštija relacija

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}{1+\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{1+|a_k|}?$$

100. Ako su a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ ma kakvi realni brojevi, tada je

$$\min(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|) \leqslant \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}\right)^{1/2} \leqslant \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

Dokazati ovaj stav.

Primedba. Izraz $\left[(1/n)\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^{1/2}$ naziva se kvadratna sredina brojeva a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

101. Dokazati nejednakost

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{1/2} \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

102. Za koje vrednosti x važi nejednakost

$$(a-x)^6-3a(a-x)^5+(5a^2/2)(a-x)^4-(a^4/2)(a-x)^2<0?$$

103. 1° Dokazati da je

$$x \log x \geqslant x-1 \quad (x>0). \tag{1}$$

2° Polazeći od ove relacije, izvesti nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i, \tag{2}$$

ako je $p_i>0$, $q_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ i ako je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{3}$$

Rešenje. 2° Budući da je $p_i/q_i>0$, prema relaciji (1), važi nejednakost

$$\frac{p_i}{q_i}\log\frac{p_i}{q_i} \geqslant \frac{p_i}{q_i}-1.$$

Kako je $q_i>0$, posle množenja sa q_i, poslednja relacija postaje

$$p_i \log\frac{p_i}{q_i} \geqslant p_i-q_i.$$

Ako se leva i desna strana poslednje relacije sumiraju po i, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log\frac{p_i}{q_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n}(p_i-q_i).$$

Vodeći računa o relaciji (3), poslednja relacija postaje

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log\frac{p_i}{q_i} \geqslant 0,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i \log p_i - p_i \log q_i) \geqslant 0,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i ,$$

što je i trebalo dokazati.

Ako je $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i samo tada, relacija (2) postaje jednakost. Nejednakost (2) pojavljuje se u *teoriji informacija*. Videti, na primer, *L. Brillouin: Science and Information Theory* (Academic Press, 1956), pp. 13—14.

104. Za koje vrednosti x važi relacija

$$(1) \qquad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leqslant (1+x)^{1/2} \leqslant 1 + \frac{x}{2} .$$

Rešenje. Ako je $x \geqslant -1$, tada je uvek

$$(2) \qquad (1+x)^{1/2} \leqslant 1 + \frac{x}{2} .$$

Pretpostavimo da je tačno suprotno, naime

$$(3) \qquad (1+x)^{1/2} > 1 + \frac{x}{2} .$$

$$\therefore \quad 1 + x > 1 + x + \frac{x^2}{4} .$$

Odavde sleduje

$$(4) \qquad 0 > x^2 .$$

Budući da je hipoteza (3) dovela do apsurda, iskazanog relacijom (4), relacija (2) je tačna za $x \geqslant -1$.

Za vrednosti x za koje je

$$(5) \qquad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < 0 \qquad (x \geqslant -1)$$

nejednakost

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < (1+x)^{1/2}$$

važi.

Polinom $1 + x/2 - x^2/8$ ima negativnu vrednost za sve vrednosti x van razmaka

$$(A) \qquad \{-2(\sqrt{3}-1),\ 2(\sqrt{3}+1)\} .$$

Kako, pored toga, mora biti zadovoljen i uslov $x \geqslant -1$, zaključujemo da je

$$(6) \qquad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < (1+x)^{1/2}$$

za svako $x \geqslant 2(\sqrt{3}+1)$.

Ako je $x \geqslant -1$ i ako x pripada razmaku (A), tj. ako je

$$(B) \qquad -1 \leqslant x \leqslant 2(\sqrt{3}+1),$$

tada je

$$x + 1 \geqslant 0 \quad \text{i} \quad 1 + x/2 - x^2/8 \geqslant 0,$$

pa se, posle dizanja na kvadrat izraza na levoj i desnoj strani relacije $1 + x/2 - x^2/8 \leqslant (1+x)^{1/2}$, dobija

$$x^3 (x-8) \leqslant 0,$$

što važi za

$$(C) \qquad 0 \leqslant x \leqslant 8 .$$

Uslovi (B) i (C), uzeti zajedno, svode se na

$$0 \leqslant x \leqslant 2(\sqrt{3}+1) .$$

Uzimajući u obzir sve gore navedene rezultate, zaključuje se da relacija

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant(1+x)^{1/2}$$

važi za svako $x\geqslant 0$.

Kako, povrh toga, (2) važi za $x\geqslant -1$, zaključujemo da relacija (1) važi za svako $x\geqslant 0$.

105. Dokazati nejednakost

$$(2n-1)!!/(2n)!!<1/\sqrt{n}.$$

Rešenje. Ako je $N\equiv\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$, iz relacije

$$\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}\qquad(k=1,2,3,\ldots)$$

sleduje

$$N<\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}=1\bigg/\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}=\frac{1}{(2n+1)N}<\frac{1}{2nN}<\frac{1}{nN}.$$

$$\therefore\quad N^2<1/n.\qquad\therefore\quad N<1/\sqrt{n}.$$

106. Dokazati nejednakost

$$(1)\qquad t(2+\cos t)>3\sin t,\qquad \text{ako je } t>0.$$

Rešenje. Budući da je $2+\cos t>0$ za svako t, nejednakost (1) se može pisati u obliku

$$f(t)\equiv t-\frac{3\sin t}{2+\cos t}>0.$$

Kako je

$$f'(t)=\left(\frac{1-\cos t}{2+\cos t}\right)^2\geqslant 0,$$

možemo tvrditi da funkcija $f(t)$ stalno raste, kada t raste od 0 do $+\infty$. Kako je $f(0)=0$, nejednakost (1) je dokazana

107. Kada je $x(\neq 1)$ proizvoljan pozitivan broj, u važnosti su relacije:

$$1^\circ\quad x^p-1>p(x-1)\qquad(p>1 \text{ ili } p<0);$$

$$2^\circ\quad x^p-1<p(x-1)\qquad(0<p<1).$$

Dokaz. 1° Posmatrajmo funkciju

$$f(x)=x^p-1-p(x-1).$$

$$\therefore\quad f(1)=0,\qquad f'(x)\equiv p(x^{p-1}-1).$$

Ako je $p>1$, tada je

$$f'(x)\begin{cases}<0 & (0<x<1);\\ =0 & (x=1);\\ >0 & (x>1).\end{cases}$$

Prema ovome, funkcija $f(x)$ dostiže minimum za $x=1$.

Ovim je dokazana relacija 1° za $p>1$.

Kada je $p<0$, tada:

$$x^{p-1}>1,\qquad \text{za } 0<x<1.$$

$$x^{p-1}<1,\qquad \text{za } x>1.$$

Na osnovu ovoga zaključujemo

$$f'(x)\begin{cases}<0 & (0<x<1);\\ =0 & (x=1);\\ >0 & (x>1).\end{cases}$$

Prema tome, relacija 1° važi i za $p < 0$.

2° Za slučaj kada je $0 < p < 1$, biće

$$x^{p-1} > 1, \quad \text{za } 0 < x < 1;$$

$$x^{p-1} < 1, \quad \text{za } x > 1.$$

Stoga je

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & (0 < x < 1); \\ = 0 & (x = 1); \\ < 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ dostiže maksimum za $x = 1$.

Ovim je dokazana relacija 2°.

108. Dokazati: $n! > n^{n/2}$ $\{n\,(>2)$ prirodan broj$\}$.

Dokaz. $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $(n!)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdots n^2$, što se može napisati u obliku

(1) $$\{1 \cdot n\}\,\{2\,(n-1)\}\,\{3\,(n-2)\} \cdots \{r\,(n-r+1)\} \cdots \{n \cdot 1\},$$

gde je r $(1 \leqslant r \leqslant n)$ prirodan broj.

Za fiksno r uvek je

(2) $$r\,(n-r+1) \geqslant n, \quad \text{tj.} \quad (r-1)\,(r-n) \leqslant 0.$$

Ako se u (2) stavlja redom $r = 1, 2, \ldots, n$, dobija se:

$$1 \cdot n = n; \quad 2\,(n-1) > n; \ \ldots, \ r\,(n-r+1) > n; \ \ldots; \ n \cdot 1 = n.$$

$$\therefore \quad (n!)^2 > n^n \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

$$\therefore \quad n! > n^{n/2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

109. Pokazati da je

(1) $$2x + x\cos x - 3\sin x > 0 \quad (0 < x < \pi/2).$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = 2x + x\cos x - 3\sin x$$

i njen izvod

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,(1 - \cos x) - x\sin x \\ &= 4\sin^2\frac{x}{2} - 2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sin x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Za vrednosti $x \in (0, \pi/2)$, izvodna funkcija $f'(x) > 0$, jer su u navedenom intervalu $\sin x$ i $\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{x}{2}$ pozitivni.

Kako je $f(0) = 0$ i kako je funkcija $f(x)$ rastuća za $x \in (0, \pi/2)$, jer je tu $f'(x) > 0$, izlazi da je istinita nejednakost (1).

Da li (1) važi za $0 < x < \pi$?

Primedba. Uporediti sa zadatkom 106 (str. 51 ovog *Zbornika*).

110. Dokazati nejednakost

(1) $$\sqrt[4]{x} \leqslant 2x + 3/8 \quad (x \geqslant 0).$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x^{1/4} - 2x \quad (x \geqslant 0)$$

i njene izvode:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4} - 2, \qquad f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-7/4} \qquad (x > 0).$$

Za $x = 1/16$, izvod $f'(x)$ se anulira, dok je $f''(x) < 0$.
Stoga $f(x)$ za $x = 1/16$ dostiže maksimum koji iznosi $3/8$. Prema tome je

$$\sqrt[4]{x} - 2x \leqslant 3/8 \qquad (x > 0),$$

što je trebalo dokazati.

Za $x = 0$ nejednakost (1) važi, jer je zaista $0 < 3/8$.

111. Ako je $p > 1$ i ako je $0 < x < \pi/2$, ispitati da li je

$$\frac{1-(\sin x)^{p-1}}{p-1} > \frac{1-(\sin x)^p}{p}.$$

Dokazati ovu nejednakost ili je opovrgnuti.

112. Ako su a i b realni brojevi ($|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$), tada važi nejednakost

$$(1) \qquad \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leqslant 2\sqrt{1-[(a+b)/2]^2}.$$

Uputstvo. Budući da su izrazi na obe strane nejednakosti pozitivni, važi nova nejednakost

$$(1-a^2)(1-b^2) \leqslant (1-ab)^2$$

koja je dobijena posle dizanja na kvadrat izraza sa leve i desne strane nejednakosti (1).
Čitalac će završiti dokaz.

113. Ako je $x = (2t)/(1+t^2)$, $y = (1-t^2)/(1+t^2)$, tada je

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{7-6x-3y}{9-8x-3y} \leqslant 1.$$

114. Polazeći od nejednakosti

$$\frac{1}{r(r+1)} < \frac{1}{r^2} < \frac{1}{r^2-1} \qquad (r > 1),$$

pokazati da je

$$\frac{m}{(m+1)(2m+1)} < \sum_{r=m+1}^{2m} \frac{1}{r^2} < \frac{m}{(m+1)(2m+1)} + \frac{3m+1}{4m(m+1)(2m+1)}$$

(m prirodan broj).

115. Ispitati da li važi relacija $x^2 \geqslant 1 + 2\log x$ za svako $x > 0$.

Uputstvo. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $f(x) \equiv x^2 - 1 - 2\log x$.

116. Za svako $x > 0$ važe nejednakosti

$$1 > \frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{1+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}} > \frac{1}{n}; \qquad n > \frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}} > \frac{1}{n}.$$

117. Ako je x realno, tada je

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \leqslant 2.$$

Dati geometrisko tumačenje ovom rezultatu.

118. Ako je x realno, funkcija $4x(1-x)/(1+x)^2$ ne može imati vrednosti veće od $1/2$.

119. Rešiti nejednačinu $\cos\varphi+\sin\varphi>1$, stavljajući

$$x=\cos\varphi, \qquad y=\sin\varphi,$$

ili koristeći neki drugi postupak.

120. Pokazati da je u važnosti relacija

$$\operatorname{cotg}(a/2)\geqslant 1+\operatorname{cotg} a$$

za sve vrednosti a između 0 i π.

121. Rešiti nejednačinu $\sin(x+y)>0$, tj. odrediti oblasti u ravni Oxy u kojima treba da se nalazi tačka (x, y) da bi data relacija bila u važnosti.

122. Grafičkim putem rešiti nejednačinu $|x+1|+|y-2|\leqslant 1$.

123. Za koje vrednosti x važi relacija

$$2<(3x^2-15x+16)/(x^2-4x+3)<3?$$

124. Ako je $a>b>0$, tada je

$$(1) \qquad \sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}<\sqrt[n]{a-b} \qquad \{n\,(>1) \text{ prirodan broj}\}.$$

Rešenje. Stavimo li $a-b=c>0$, tada nejednakost (1) postaje

$$(2) \qquad \sqrt[n]{b+c}<\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}.$$

Pretpostavimo da relacija (2) nije tačna, već da važi relacija

$$(3) \qquad \sqrt[n]{b+c}\geqslant\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}.$$

Ako je istinita relacija (3), istinita je i relacija

$$(\sqrt[n]{b+c})^n\geqslant(\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c})^n,$$

odnosno

$$b+c\geqslant b+c+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(\sqrt[n]{b})^{n-k}(\sqrt[n]{c})^k,$$

odakle sleduje

$$(4) \qquad 0\geqslant\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(\sqrt[n]{b})^{n-k}(\sqrt[n]{c})^k.$$

Pretpostavljajući da važi (3), došli smo do apsurdne relacije (4).
Prema tome, nejednakost (1) važi uz učinjene pretpostavke o parametrima n, a, b.
Ovo je rešenje *D. Đokovića* u nešto izmenjenoj redakciji.

125. Da li važi relacija

$$2^n/n<n^n/n!<3^{n-1} \qquad \{n\,(>3) \text{ prirodan broj}\}?$$

126. Proveriti relaciju

$$\frac{1}{3}n^3<\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2<\frac{1}{3}(n+1)^3.$$

127. Ispitati da li je tačno tvrđenje: Za ma kakve realne vrednosti a i x važi relacija

$$0\leqslant(x+a)^2/(x^2+x+1)\leqslant(4/3)(a^2-a+1).$$

128. Rešiti nejednačinu $\sin x>\sin 3x$ i to grafičkim i računskim putem.

129. Dokazati nejednakost

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \{n\,(>2) \text{ prirodan broj}\}.$$

130. Proveriti relaciju

$$-\sqrt{3} \leqslant \frac{3 \sin x}{2+\cos x} \leqslant +\sqrt{3}.$$

131. Dokazati da je $(x+1)\log(x+1) - x\log x > 0$ za $x > 0$.

132. Ako je $x > 1$, pokazati da je $x^3 + 3x + 2 + 6x\log x > 6x^2$.

133. Dokazati nejednakost

$$2^{n(n-1)/2} > n! \quad \{n\,(>2) \text{ prirodan broj}\}.$$

Uputstvo. Posmatrati broj $2^{n(n-1)/2}$ u obliku

$$2^{1+2+\cdots+(n-1)} = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^{n-1},$$

i upotrebiti nejednakost $2^n > n+1$ $(n \geqslant 2)$ koja se može dokazati metodom potpune indukcije.

134. Ako su zadovoljeni uslovi

$$0 < \alpha_k < \pi \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

da li važi nejednakost

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \alpha_k \leqslant \left\{ \sin \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right\}^n ?$$

135. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad n! < \{(n+1)/2\}^n \quad \{n\,(>1) \text{ prirodan broj}\}.$$

Dokaz. Pođimo od nejednakosti

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Za $k = 1, 2, 3, \ldots$ dobija se niz nejednakosti:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3 > 2, \ldots, \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} > 2, \quad \left(\frac{k+1}{k}\right)^k > 2.$$

Posle množenja dobija se

$$\frac{(k+1)^k}{2^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k} > 2^{k-1},$$

odakle neposredno sleduje nejednakost (1).

136. Da li je

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)^{1/3}.$$

137. Da li je $x \log x + e^{y-1} - xy \geqslant 0$ za $x > 0$, $y > 0$?

138. Dokazati nejednakost

$$x^a |\log x| < 1/(ae) \quad (0 < x < 1;\ a > 0).$$

139. Dokazati relaciju

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

$$\{n \text{ prirodan broj, } x \in (-\infty, +\infty)\}$$

Dokaz. Pođimo od binomne formule

$$(2)\qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n .$$

Posle diferenciranja po t i množenja sa t dobijamo

$$(3)\qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} t^k = nt(1+t)^{n-1} .$$

Posle ponovnog diferenciranja po t i množenja sa t biće

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} t^k &= nt(1+t)^{n-1} + n(n-1)t^2(1+t)^{n-2} \\ &= nt(1+nt)(1+t)^{n-2} . \end{aligned}$$

Ako je $x \neq 1$, relacije (2), (3), (4) smenom $t = x/(1-x)$ postaju respektivno

$$(5)\qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 ,$$

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx ,$$

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx) .$$

Direktnim proveravanjem zaključuje se da relacije (5), (6), (7) važe i za $x=1$.

Ako pomnožimo levu i desnu stranu jednakosti (5) sa n^2x^2, jednakosti (6) sa $-2nx$, jednakosti (7) sa 1 i ako potom saberemo izraze na levim i desnim stranama dobijenih jednakosti, dobijamo

$$\sum_{k=0}^{n} (n^2x^2 - 2nxk + k^2) x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} = nx(1-x+nx) - n^2x^2 ,$$

odnosno

$$(8)\qquad \sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 x^k \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} = nx(1-x) .$$

Budući da je

$$x(x-1) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} .$$

odnosno

$$x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 ,$$

sleduje

$$(9)\qquad x(1-x) \leqslant \frac{1}{4} .$$

Iz (8) i (9) sleduje relacija (1) koju je trebalo dokazati.

140. Ako je $a > b > 0$, tada je $A < B$, gde je:

$$A = \frac{1+a+\cdots+a^{n-1}}{1+a+\cdots+a^n} , \qquad B = \frac{1+b+\cdots+b^{n-1}}{1+b+\cdots+b^n} .$$

Rešenje.

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a\cdots+a^{n-1}},\quad \frac{1}{B}=1+\frac{b^n}{1+b\cdots+b^{n-1}},$$

odnosno

$$\frac{1}{A}=1+\frac{1}{1/a^n+1/a^{n-1}+\cdots+1/a};\quad \frac{1}{B}=1+\frac{1}{1/b^n+1/b^{n-1}+\cdots+1/b}.$$

$$\therefore\ 1/A>1/B.\quad \therefore\ A<B.$$

141. Izračunati izraze:

$$S_1=\sum_{k=n+1}^{m}\cos kx,\quad S_2=\sum_{k=n+1}^{m}\sin kx\quad [m\,(>n)\text{ prirodan broj}].$$

Pokazati da je

$$(1)\qquad (S_1^2+S_2^2)^{1/2}\leqslant 1/\sin(x/2)\quad (0<x<2\pi).$$

Rezultat. $S_1=\left\{\cos\frac{1}{2}(m+n+1)\,x\sin\frac{1}{2}(m-n)\,x\right\}/\sin(x/2);$

$$S_2=\left\{\sin\frac{1}{2}(m+n+1)\,x\sin\frac{1}{2}(m-n)\,x\right\}/\sin(x/2).$$

Primedba. Kako će glasiti nejednakost (1) ako $x\in(-\infty,+\infty)$?

142. Ako su A i B $(\cos B\neq\cos A)$ realni brojevi i ako je $k\,(>1)$ prirodan broj, tada je

$$(1)\qquad \left|\frac{\cos kB\cos A-\cos kA\cos B}{\cos B-\cos A}\right|<k^2-1.$$

Rešenje. Iz nejednakosti

$$|\sin rx|\leqslant r\,|\sin x|\quad (r\text{ prirodan broj}),$$

koja je dokazana u ovom *Zborniku* (problem 36 u poglavlju *Matematička indukcija*) sleduje

$$\left|\frac{\sin rx\sin sy}{\sin x\sin y}\right|\leqslant rs,\quad (r,\ s\text{ prirodni brojevi}).$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\sin rx\,\sin sy+\sin sx\,\sin ry}{\sin x\,\sin y}\right|\leqslant 2rs.$$

Stavimo li sada $r=k+1$, $s=k-1$, $x=(A+B)/2$, $y=(A-B)/2$, dobija se, posle nekih transformacija, nejednakost (1).

Ovo je rešenje dao *L. E. Bush* (*The American Mathematical Monthly*, vol. 64, 1957, p. 651).

143. Ako je k prirodan broj i ako su A i B realne konstante, tada je

$$(1)\qquad \left|\frac{\cos kB-\cos kA}{\cos B-\cos A}\right|\leqslant k^2\quad (\cos A\neq\cos B).$$

Dokaz. Polazeći od identiteta

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2},$$

dobija se

$$\frac{\cos kB-\cos kA}{\cos B-\cos A}=\frac{\sin k\frac{B+A}{2}\sin k\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2}}$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\cos kB-\cos kA}{\cos B-\cos A}\right|=\left|\frac{\sin k\frac{B+A}{2}}{\sin\frac{B+A}{2}}\right|\left|\frac{\sin k\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{B-A}{2}}\right|.$$

Kako je

(2) $\quad |\sin nx/\sin x| \leqslant n \quad$ (n prirodan broj),

poslednja relacija postaje upravo relacija (1).

Relacija (2) je dokazana u ovom *Zborniku* (*Matematička indukcija*, problem 36).

144. U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem date su dve tačke čije su koordinate:

$$\left\{\frac{1}{2}(v-u)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-x),\ \frac{\sqrt{3}}{2}(v-u)+\frac{1}{2}(y-x)\right\}, \quad \{w-u,\ z-x\},$$

gde su x, y, z, u, v, w ma kakvi realni brojevi.

Obrazovati kvadrat otstojanja između ovih tačaka i na osnovu toga izvesti nejednakost

$$(1) \quad (x^2+y^2+z^2)-(yz+zx+xy)+(u^2+v^2+w^2)-(vw+wu+uv) \geqslant \sqrt{3}\begin{vmatrix} u & x & 1 \\ v & y & 1 \\ w & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Koje uslove treba da ispunjavaju parametri x, y, z, u, v, w da bi nejednakost (1) postala jednakost?

Primedba. H. Langman (*The American Mathematical Monthly*, t. 35, 1928, p. 207) naišao je na nejednakost (1).

U navedenom časopisu data su dva dokaza ove nejednakosti (videti: *F. Ayres*, t. 36, 1919, p. 238 i *D. R. Curtiss*, t. 36, 1929, p. 289).

Ovaj problem formulisan je korišćenjem *Curtiss*-ovog dokaza nejednakosti (1). Taj dokaz je ne samo interesantan već i vrlo instruktivan.

V. SUMACIONE FORMULE

145. Dokazati formulu

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

Uputstvo. Poći od identiteta

$$r(r+1)\cdots(r+k-1) \equiv \frac{1}{k+1}\left[r(r+1)\cdots(r+k)-(r-1)r\cdots(r+k-1)\right]$$

i stavljati redom $r=1, 2, \ldots, n$.

Relacija (1) može se dokazati i primenom metoda matematičke indukcije.

146. Dat je niz

$$u_1=1^2/3, \quad u_2=(1^2+2^2)/5, \quad u_3=(1^2+2^2+3^2)/7, \quad u_4=(1^2+2^2+3^2+4^2)/9, \ldots$$

Odrediti: $v_n=\sum_{k=1}^{n} u_k, \quad w_n=\sum_{k=1}^{n} v_k.$

147. Sumirati

$$S(n) \equiv \frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n a_{n+1}} \quad \{a_k=a_1+(k-1)d\}.$$

Da li postoji granična vrednost $\lim_{n\to\infty} S_n$?

148. Dokazati:

$$a[a+(n-1)d]+(a+d)[a+(n-2)d]+\cdots+[a+(n-1)d]a$$
$$=adn^2+a(a-d)n+d^2\binom{n}{3}.$$

149. Dokazati identitete:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 3k=\frac{1}{2}n(n+1)(4n-1);$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\frac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}.$$

150. Sumirati:

$$ab+(a+p)(b+q)+\cdots+[a+(n-1)p][b+(n-1)q].$$

Rezultat. $\frac{n}{6}[2pqn^2+3(pb+qa-pq)n+pq-3(pb+qa)+6ab]$.

151. Sumirati

$$(1)\qquad S(n,x)=1\cdot x^{n-1}+2\cdot x^{n-2}+\cdots+n\cdot 1.$$

Rešenje. $x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+xy^{n-1}+y^n=y\frac{y^n-x^n}{y-x}\quad(y\neq x)$.

$$\therefore\quad\left[\frac{\partial}{\partial y}(x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+y^n)\right]_{y=1}=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{y^n-x^n}{y-x}\right)\right]_{y=1}$$

$$\therefore\quad S(n,x)=\frac{1+n-x^n}{1-x}-\frac{1-x^n}{(1-x)^2}\quad(x\neq 1).$$

Čitalac će, polazeći od (1), sumirati $S(n,1)$.

152. Pokazati da je

$$\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}x+3\binom{n}{2}x^2+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}x^n.$$

Polazeći od ovog rezultata, pokazati zatim da je izraz

$$S=\binom{n}{0}^2+2\binom{n}{1}^2+3\binom{n}{2}^2+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}^2$$

jednak koeficijentu uz x^n u izrazu

$$(1)\qquad\{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1},$$

odnosno

$$S=\frac{(2n-1)!\,(n+2)}{n!\,(n-1)!}.$$

Uputstvo. Koeficijent uz x^n u izrazu (1) je

$$(n+1)\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n},\quad\text{tj.}\quad\frac{(2n-1)!\,(n+2)}{n!\,(n-1)!}.$$

Koeficijent uz x^n u izrazu

$$\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}(1+x)^n$$

tj. u izrazu

$$\left\{\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}x+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}x^n\right\}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\},$$

jeste

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+2\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

odnosno

$$\binom{n}{0}^2+2\binom{n}{1}^2+\cdots+(n+1)\binom{n}{n}^2, \quad \text{jer je } \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

153. Ako je $u_i=i(i+1)\cdots(i+k-1)$, pokazati da je $(k+1)u_i=v_i-v_{i-1}$, gde je $v_i=i(i+1)(i+2)\cdots(i+k)$.

Dokazati zatim formulu $\sum_{i=1}^{n} u_i=v_n/(k+1)$.

154. Prirodni brojevi podeljeni su u ove podskupove:

$$\{1\};\quad\{2,3\};\quad\{4,5,6\};\ \cdots$$

(n-ti podskup sadrži n brojeva).

Odrediti zbir S_n brojeva u n-tom podskupu kao i $\sum_{k=1}^{n} S_k$.

Rezultat. $S_n=\frac{1}{2}n(n^2+1)$, $S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2)$.

155. Skup brojeva

$$A_k=a+(k-1)d \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

podeljen je u ove podskupove:

$$\begin{array}{llllll} a, & a+d; & & & & \\ a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d; & & \\ a+6d, & a+7d, & a+8d, & a+9d, & a+10d, & a+11d; \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

(svaki podskup ima dva člana više od prethodnog).

Ako S_n označava zbir svih članova u n-tom podskupu, odrediti

$$S_n,\quad \sum_{k=1}^{n} S_k,\quad \sum_{k=1}^{n}(S_k)^2.$$

156. Skup prirodnih brojeva podeljen je u ovakve podskupove:

$$\begin{array}{l} 1; \\ 2,\ 3,\ 4; \\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9; \\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16; \\ \vdots \end{array}$$

Odrediti zbir S_n brojeva u n-tom podskupu kao i $\sum_{k=1}^{n} S_k$.

157. Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija za $x\geqslant 1$ i neka je skup njenih vrednosti za $x=1, 2, 3, \ldots$ podeljen u sledeće podskupove:

Prvi podskup je $\{f(n)\,|\,n=1, 2, \ldots, k\}$;

Drugi podskup je $\{f(n)\,|\,n=k+1, k+2, \ldots, 2k+v\}$;

Treći podskup je $\{f(n)\,|\,n=2k+v+1, 2k+v+2, \ldots, 3k+3v\}$;

Četvrti podskup je: $\{f(n) \mid n = 3k+3\nu+1,\ 3k+3\nu+2, \ldots, 4k+6\nu\}$;

Peti podskup je: $\{f(n) \mid n = 4k+6\nu+1,\ 4k+6\nu+2, \ldots, 5k+10\nu\}$;

$\vdots$

(svaki podskup ima ν članova više od podskupa koji mu neposredno prethodi).

Odrediti prvi i poslednji član u N-tom podskupu i zbir S_N svih članova u N-tom podskupu u slučajevima, kada $f(n)$ ima jedan od oblika:

$$1^\circ\ n^2; \quad 2^\circ\ n(n+1); \quad 3^\circ\ \binom{n}{3}; \quad 4^\circ\ \sin(a+nh); \quad 5^\circ\ \cos(a+nh)$$

$(a, h$ nezavisni od $n)$.

Takođe sumirati $\sum_{N=1}^{M} S_N$, $M(>N)$ prirodan broj.

Proveriti da li je $f\left[Nk+\binom{n}{2}\nu\right]$ poslednji član u N-tom podskupu.

Poslednji član skupa $\{f(n)\}$ je član koji odgovara najvećem broju n.

158. Proveriti identitet

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-3)(4n-1) = \frac{1}{2^n}\frac{(4n)!\,n!}{(2n)!\,(2n)!}$$

(n prirodan broj).

159. Dat je skup prirodnih brojeva $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Izračunati

$$\sum pq \quad (p \neq q;\ p, q \in E).$$

Rezultat. $(1/24)\,n(n^2-1)(3n+2)$.

Uopštiti ovaj zadatak.

160. Dat je skup neparnih brojeva $E = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$. Izračunati

$$\sum pq \quad (p \neq q;\ p, q \in E).$$

Rezultat. $(1/6)\,n(n-1)(3n^2-n-1)$.

Uopštiti ovaj zadatak.

161. Matematičkom indukcijom ili kojim drugim načinom pokazati da je zbir n prvih članova izraza

$$1 + x(1+x) + x^2(1+x+x^2) + x^3(1+x+x^2+x^3) + \cdots$$

jednak količniku $(1-x^n)(1-x^{n+1})/\{(1-x)(1-x^2)\}$.

Rešenje. Treba sumirati

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k(1+x+x^2+\cdots+x^k). \tag{1}$$

Ako je $x \neq 1$, tada iz (1) sleduje

$$\begin{aligned}(1-x)\,S(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k(1-x^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k+1} \\ &= \frac{1-x^n}{1-x} - x\,\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} \quad (x \neq \pm 1).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (1-x)(1-x^2)S(x) \equiv (1+x)(1-x^n) - x(1-x^n)(1+x^n).$$

$$\therefore \quad S(x) \equiv (1-x^n)(1-x^{n+1})/\{(1-x)(1-x^2)\}.$$

Čitalac će odrediti vrednost izraza (1) za $x=1$ i $x=-1$.

162. Ako su $k, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativni celi brojevi, tada je

$$(1) \qquad \sum_{a_n=0}^{a_{n+1}} \sum_{a_{n-1}=0}^{a_n} \cdots \sum_{a_1=0}^{a_2} \binom{a_1}{k} \equiv \binom{a_{n+1}+n}{k+n}.$$

Rešenje. Posmatrajmo najpre zbir

$$\sum_{a_1=0}^{a_2} \binom{a_1}{k} = \binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \cdots + \binom{a_2}{k} \quad \text{čija je vrednost } \binom{a_2+1}{k+1}.$$

Tada se redom može pisati

$$\sum_{a_1=0}^{a_2} \binom{a_1}{k} = \binom{a_2+1}{k+1}, \quad \sum_{a_2=0}^{a_3} \binom{a_2+1}{k+1} = \binom{a_3+2}{k+2}, \ldots, \sum_{a_n=0}^{a_{n+1}} \binom{a_n+n-1}{k+n-1} = \binom{a_{n+1}+n}{k+n}.$$

Ovim je dokazana relacija (1), iz koje kao specijalan slučaj za $a_{n+1}=n$ i $k=0$ izlazi:

$$\sum_{a_n=0}^{n} \sum_{a_{n-1}=0}^{a_n} \sum_{a_{n-2}=0}^{a_{n-1}} \cdots \sum_{a_1=0}^{a_2} 1 \equiv \binom{2n}{n}.$$

163. Polazeći od izraza

$$(1+i\sqrt{3}/3)^n \quad (n \text{ prirodan broj}),$$

sumirati

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \cdots$$

Rešenje.

$$\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \equiv 1 + \binom{n}{1} i\frac{\sqrt{3}}{3} - \binom{n}{2}\frac{3}{9} - \binom{n}{3} i\frac{3\sqrt{3}}{27} + \binom{n}{4}\frac{9}{81} + \cdots$$

$$\therefore \quad \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \equiv \left(1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^n \equiv \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n \Big/ \cos^n\frac{\pi}{6}$$

$$\equiv \left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right) \Big/ \cos^n\frac{\pi}{6}.$$

Upoređenjem ovih izraza, dobija se

$$\binom{n}{1}\frac{\sqrt{3}}{3} - \binom{n}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \binom{n}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 - \cdots \equiv \left(\sin\frac{n\pi}{6}\right) \Big/ \cos^n\frac{\pi}{6},$$

odnosno

$$(1) \qquad \frac{1}{3}\binom{n}{1} - \frac{3}{3^3}\binom{n}{3} + \frac{3^2}{3^5}\binom{n}{5} - \frac{3^3}{3^7}\binom{n}{7} + \cdots \equiv 2^n\left(\sin\frac{n\pi}{6}\right) \Big/ 3^{(n+1)/2}.$$

Kakav će oblik imati poslednji član izraza (1), kada je:

1° $n=2p$, 2° $n=2p-1$ (p prirodan broj).

164. Sumirati $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k}$.

Rešenje. Iz razvoja

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{2n} = & \left[1-\binom{2n}{1}x+\binom{2n}{2}x^2-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}x^{n-1}\right] \\
& +(-1)^n\binom{2n}{n}x^n \\
& +\left[(-1)^{n+1}\binom{2n}{n+1}x^{n+1}+(-1)^{n+2}\binom{2n}{n+2}+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}\right]
\end{aligned}
$$

za $x=1$ sleduje

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}=(-1)^{n-1}\binom{2n}{n}.$$

165. Dat je beskonačni skup neparnih brojeva

$$E=\{1,3,5,7,\ldots\}.$$

Ovaj skup podeljen je u sledeće podskupove:

$$\{1,3,5,\ldots,2r-1\};\quad\{2r+1,2r+3,\ldots,4r-1\};\ldots$$

(svaki podskup sadrži r brojeva iz skupa E).

Navesti elemente n-tog podskupa i zbir S_n svih elemenata u tom podskupu.

Rezultat. Elementi n-tog podskupa su:

$$2(n-1)r+1,\ldots,2nr-1.$$

Zbir S_n je $r^2(2n-1)$.

166. Skup prirodnih brojeva podeljen je u sledeće podskupove:

$$\{(1,2),(3)\};\ \{(4,5,6),(7,8)\},\ \{(9,10,11,12),(13,14,15)\},$$
$$\{(16,17,18,19,20),(21,22,23,24)\},\ldots.$$

Svaki podskup podeljen je u dva nova podskupa koji su izdvojeni u okruglim zagradama. Ovi poslednji podskupovi imaju osobinu da je zbir elemenata jednog podskupa jednak zbiru elemenata drugog podskupa.

Dokazati ovu osobinu.

167. Ako je $S_k(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k$, tada postoji relacija

$$nS_k(n)=S_{k+1}(n)+S_k(n-1)+S_k(n-2)+\cdots+S_k(2)+S_k(1).$$

Dokaz. Posmatrajmo kvadratnu shemu:

$$
\begin{array}{ccccc}
1^k & 2^k & 3^k & \cdots & n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & & n^k \\
1^k & 2^k & 3^k & & \\
\vdots & & & & \\
1^k & 2^k & 3^k & & n^k
\end{array}
$$

Zbir svih brojeva u jednoj vrsti je $S_k(n)$. Budući da u tablici ima n vrsta, zbir svih brojeva u gornjoj shemi je $nS_k(n)$.

Ako sumiranje izvršimo po naznačenim izlomljenim linijama, dobijamo:

$$\begin{aligned} nS_k(n) = & \ 1^k \\ & + (1^k + 2\cdot 2^k) \\ & + (1^k + 2^k + 3\cdot 3^k) \\ & + \cdots \\ & + [1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n\cdot n^k]. \end{aligned}$$

Dalje možemo pisati:

$$\begin{aligned} nS_k(n) = & \ 1^{k+1} + [S_k(1) + 2^{k+1}] \\ & + [S_k(2) + 3^{k+1}] \\ & + \cdots \\ & + [S_k(n-1) + n^{k+1}] \\ = & \ S_{k+1}(n) + S_k(n-1) + \cdots + S_k(2) + S_k(1). \end{aligned}$$

168. Ako je n prirodan broj, sumirati:

$$1^\circ \quad S_1 = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 3^2\binom{n}{5} - 3^3\binom{n}{7} + \cdots .$$

$$2^\circ \quad S_2 = 1 - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \cdots .$$

Uputstvo. Poći od identiteta

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Rezultat. 1° $S_1 = 2^{n-1}$ $(n = 6k+1,\ n = 6k+2)$,

$S_1 = -2^{n-1}$ $(n = 6k+4,\ n = 6k+5)$,

$S_1 = 0$ $(n = 6k,\ n = 6k+3)$

(k prirodan broj).

2° $S_2 = (-2)^{n-1}$ $(n = 3k+1,\ n = 3k+2)$;

$S_2 = (-2)^n$ $(n = 3k)$

(k prirodan broj).

169. Izračunati $S_2(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ i $\sum\limits_{k=1}^{n} \{S_2(k)\}^2$.

Rezultat.

$$\sum_{k=1}^{n} \{S_2(k)\}^2 = \frac{1}{1260}\, n(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)(5n^2+10n-1).$$

170. Dokazati relaciju

$$\sum_{k=1}^{n} (a+bk)^2 = n\left\{a^2 + ab(n+1) + \frac{b^2}{6}(2n^2+3n+1)\right\}.$$

171. Sumirati:

$$1 + \binom{n}{1}\cos\theta + \binom{n}{2}\cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta;$$

$$\binom{n}{1}\sin\theta + \binom{n}{2}\sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta.$$

172. Izvesti relaciju

$$(1)\quad \frac{1}{2}-\cos a+\cos 2a-\cdots+(-1)^n\cos na=\frac{(-1)^n\cos\frac{2n+1}{2}a}{2\cos\frac{a}{2}}\qquad\left(\cos\frac{a}{2}\neq 0\right).$$

Da li se ona može dobiti polazeći od relacije

$$\frac{1}{2}+\cos a+\cos 2a+\cdots+\cos na=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}a}{2\sin\frac{a}{2}}\qquad\left(\sin\frac{a}{2}\neq 0\right)?$$

Uputstvo. Umesto a staviti $\pi+a$.
Relacija (1) može se izvesti ako se pođe od identiteta

$$(1-z^{n+1})/(1-z)\equiv 1+z+z^2+\cdots+z^n\qquad[z\,(\neq 1)\text{ kompleksan broj}].$$

173. Sumirati:

$$\operatorname{ch} a+r\operatorname{ch}(a+h)+\cdots+r^n\operatorname{ch}(a+nh);\quad \operatorname{sh} a+r\operatorname{sh}(a+h)+\cdots+r^n\operatorname{sh}(a+nh);$$

$$\operatorname{ch} a+2\operatorname{ch}2a+\cdots+n\operatorname{ch} na;\quad \operatorname{sh} a+2\operatorname{sh}2a+\cdots+n\operatorname{sh} na;$$

$$\operatorname{ch} a+2^2\operatorname{ch}2a+\cdots n^2\operatorname{ch} na;\quad \operatorname{sh} a+2^2\operatorname{sh}2a+\cdots+n^2\operatorname{sh} na.$$

Sumirati takođe:

$$\sum_{k=0}^{n} k^r\operatorname{ch} ka,\quad \sum_{k=0}^{n} k^r\operatorname{sh} ka\quad (r\text{ prirodan broj}).$$

VI. KONGRUENCIJE

174. Broj $f(n)=5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$, gde je $n=0$ ili prirodan broj, deljiv je sa 38. Dokazati ovo tvrđenje.

Ovaj zadatak se može i ovako formulisati:

Dokazati: $5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}\equiv 0\pmod{38}$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Rešenje. Dati izraz $f(n)$ može se svesti na oblik

$$\begin{aligned}2\,(10\cdot 50^n+9\cdot 12^n)&=[50^n\,(10+9)-9\,(50^n-12^n)]\cdot 2\\&=[19\cdot 50^n-9\,(50-12)\,(50^{n-1}+50^{n-2}\cdot 12+\cdots+12^{n-1})]\cdot 2\\&=2\,[19\cdot 50^n-9\cdot 38\cdot R]\qquad(R\text{ prirodan broj za } n\geqslant 2).\end{aligned}$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da je dati broj deljiv sa 38 za $n=2, 3, \ldots$
Stavljajući $n=0$ i 1, dobija se respektivno 38 i 1216. I ovi su brojevi deljivi sa 38.
Ovim je zadatak rešen.

Navedena osobina može se dokazati zaključkom od n na $n+1$. To se ostavlja čitaocu kao vežbanje.

175. Broj $f(n)\equiv 2^{12n+8}-3^{6n+2}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ deljiv je sa 13.

Rešenje.

$$\begin{aligned}f(n)&\equiv 2^8\,(2^{12n}-3^{6n})+3^{6n}\,(2^8-3^2)\\&\equiv 256\,[(2^{12})^n-(3^6)^n]+9^{3n}\cdot 13\cdot 19\\&\equiv 256\,(37\cdot 7\cdot 13)\,Q+9^{3n}\cdot 13\cdot 19,\end{aligned}$$

gde je $Q=0$ za $n=0$ i Q prirodan broj za $n\geqslant 1$.

Prema tome, dati broj deljiv je sa 13.

Ostavlja se čitaocu da dokaže tvrđenje zaključkom od n na $n+1$.

176. Ako je $n=0, 1, 2, \ldots$, broj 5^n+2^{n+1} deljiv je sa 3.

Rešenje. 5^n+2^{n+1} može se napisati u obliku

$$(5^n-2^n)+2^n(1+2)=(5-2)(5^{n-1}+5^{n-2}\cdot 2+\cdots+2^{n-1})+2^n(1+2).$$

Odavde se zaključuje da je broj 5^n+2^{n+1} $(n\geqslant 2)$ deljiv sa 3.
Stavljajući $n=0$ i $n=1$ u 5^n+2^{n+1}, dobija se 3 i 9, pa se zaključuje da je tvrđenje tačno.
Ostavlja se čitaocu da navedenu osobinu dokaže metodom potpune indukcije.

177. Ako je $n\,(>2)$ prirodan broj, dokazati $n^5-5n^3+4n\equiv 0 \pmod{120}$.

Rešenje. $n^5-5n^3+4n\equiv(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)$.
Dakle, imamo proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva, koji su svi pozitivni, jer je $n>2$. U skupu prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$ svaki drugi broj deljiv je sa 2, svaki treći sa 3, svaki četvrti sa 4, svaki peti sa 5. Prema tome, u proizvodu od pet uzastopnih brojeva mora biti takvih faktora koji su deljivi respektivno sa 2, 3, 4, 5, tj. broj n^5-5n^3+4n deljiv je sa 120.

Napomena. Ako je $n=2, 1, 0, -1, -2, \ldots$ da li je dati broj deljiv sa 120?

178. Ako je $S_k(n)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k$, tada postoji relacija

$$\binom{k+1}{1}S_k(n)+\binom{k+1}{2}S_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{k}S_1(n)\equiv 0\ \begin{cases}[\bmod\ n(n+1)(n+2)] & \text{za } k \text{ parno;}\\ [\bmod\ n(n+1)] & \text{za } k \text{ neparno.}\end{cases}$$

Rešenje. Pođimo od identiteta

$$(x+1)^{k+1}-x^{k+1}\equiv\binom{k+1}{1}x^k+\binom{k+1}{2}x^{k-1}+\cdots+\binom{k+1}{k}x+1 \quad (k \text{ prirodan broj}),$$

i stavljajmo redom $x=1, 2, 3, \ldots, n-1, n$.
Iz n tako formiranih jednačina dobijamo

$$(n+1)^{k+1}-(n+1)\equiv\binom{k+1}{1}S_k(n)+\binom{k+1}{2}S_{k-1}(n)+\cdots+\binom{k+1}{k}S_1(n).$$

Budući da je

$$(n+1)\,[(n+1)^k-1]\equiv 0\ [\bmod\ n(n+1)(n+2)] \text{ za } k \text{ parno;}$$

$$(n+1)\,[(n+1)^k-1]\equiv 0\ [\bmod\ n(n+1)] \text{ za } k \text{ neparno,}$$

neposredno sleduje navedena kongruencija.

179. Ako je prirodan broj a potpun kub, tada važi relacija

(1) $$(a-1)\,a\,(a+1)\equiv 0 \pmod{504}.$$

Uputstvo. Prema uslovu zadatka je $a=n^3$ (n prirodan broj).
Relacija (1) se svodi na kongruenciju

(2) $$n^9-n^3\equiv 0 \pmod{504}.$$

Budući da je 504 proizvod tri broja 7, 8, 9 koji su relativno prosti, umesto kongruencije (2) možemo posmatrati tri kongruencije

(3) $$n^9-n^3\equiv 0 \pmod 7,$$

(4) $$n^9-n^3\equiv 0 \pmod 8,$$

(5) $$n^9-n^3\equiv 0 \pmod 9.$$

Ako dokažemo da važe relacije (3), (4), (5), tada će važiti i relacija (2).

180. Proveriti kongruenciju

$$n^3(n^2-7)^2-36n\equiv 0 \pmod{5040} \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Uputstvo. $n^3(n^2-7)^2-36n=(n-3)(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)$.

181. Da li je tačna relacija

$$a^{n+4}-a^n\equiv 0 \pmod{10} \quad (a,\ n \text{ prirodni brojevi}).$$

182. Ako je n prirodan broj, da li su u važnosti sledeće kongruencije:

1° $n(n-1)(n+25)(n+50) \equiv 0 \pmod{24}$; 2° $3^{4n}-1 \equiv 0 \pmod{80}$;

3° $n(n^2-1)(29n^2+4) \equiv 0 \pmod{120}$; 4° $n^7-n \equiv 0 \pmod{42}$;

5° $(2n+1)^5-(2n+1) \equiv 0 \pmod{240}$; 6° $3^{2n+3}+40n \equiv 27 \pmod{64}$.

183. Dokazati kongruencije:

1° $2\cdot 7^n+3\cdot 5^n-5 \equiv 0 \pmod{24}$; 2° $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{17}$

$(n=0, 1, 2, \ldots)$.

184. 1° Dokazati relaciju $(2n)!! \equiv (-1)^n (2n-1)!! \pmod{2n+1}$.

2° Tako isto pokazati da je izraz

$$\prod_{\nu=0}^{k} (a+\nu d)+(-1)^k \prod_{\nu=0}^{k} (b+\nu d)$$

deljiv sa $a+b+kd$.

3° Pokazati da je rezultat pod 1° sadržan, kao specijalan slučaj, u rezultatu pod 2°.

Rešenje. Posmatrajmo dve aritmetičke progresije

$$a,\ a+d,\ a+2d, \ldots, a+kd; \quad b,\ b+d,\ b+2d, \ldots, b+kd.$$

Formirajmo izraz

$$E \equiv \prod_{\nu=0}^{k} (a+\nu d)+\lambda \prod_{\nu=0}^{k} (b+\nu d) \quad (\lambda \text{ parametar}).$$

Napišimo $\prod_{\nu=0}^{k} (a+\nu d)$ u obliku

$$[(a+b+kd)-b]\,[(a+b+kd)-(b+d)] \cdots [(a+b+kd)-(b+kd)]$$

$$\equiv (a+b+kd)^{k+1}-s_1(a+b+kd)^k+s_2(a+b+kd)^{k-1}- \cdots$$

$$+(-1)^k s_k (a+b+kd)+(-1)^{k+1} \prod_{\nu=0}^{k} (b+\nu d),$$

gde su s_ν elementarne simetrične funkcije stepena ν po b, $b+d$, $b+2d, \ldots, b+kd$.

Ako je $\lambda=-(-1)^{k+1}$, tj. $\lambda=(-1)^k$, tada je izraz E deljiv sa $a+b+kd$.

U partikularnom slučaju, kada je $a=2$, $b=1$, $d=2$, $k=n-1$, izraz E postaje

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (2+2\nu)+(-1)^{n-1} \prod_{\nu=0}^{n-1} (1+2\nu).$$

$$\therefore \quad (2n)!!-(-1)^n (2n-1)!!$$

Poslednji izraz je deljiv sa $a+b+kd \quad (=2n+1)$.

$$\therefore \quad (2n)!! \equiv (-1)^n (2n-1)!! \pmod{2n+1},$$

što je trebalo dokazati.

VII. RAZNI PROBLEMI

185. Odrediti broj rešenja

$$(x, y, z), \quad x \in E, \quad y \in E, \quad z \in E, \quad E = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

jednačine $2x + y + z = 2n$ (n prirodan broj).

Rešenje. Ako je $x = 0$, tada y i z mogu imati sledeće vrednosti:

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2n \\ \hline z & 2n & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 0 \end{array}.$$

Parova (y, z) ima ukupno: $2n+1$.

Ako je $x = 1$, tada y i z imaju vrednosti:

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2n-2 \\ \hline z & 2n-2 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & 0 \end{array}.$$

Parova (y, z) ovde ima: $2n-1$.

Kada je $x = 2$, tada y i z imaju vrednosti:

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 0 & 1 & 2 & \cdots & 2n-4 \\ \hline z & 2n-4 & 2n-5 & 2n-6 & \cdots & 0 \end{array}.$$

Ovde je $2n-3$ parova (y, z).

Kada promenljivoj x dajemo dalje redom vrednosti $x = 3, 4, \ldots, n$, dobijamo odgovarajuće tablice za parove (y, z), tako da za $x = n$ imamo tablicu:

$$\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline z & 0 \end{array}.$$

Ovde imamo samo jedan par (y, z).

Prema tome, ukupan broj svih trojki brojeva (x, y, z) je

$$1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Dakle, data *Diofantova* jednačina ima $(n+1)^2$ rešenja datog oblika.

Primedba. Dokaz se može uprostiti. Za $x = k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ jednačina $y + z = 2(n-k)$ ima nenegativnih celih rešenja $2(n-k)+1$, a data jednačina ima takvih rešenja ukupno:

$$\sum_{k=0}^{n} \{2(n-k)+1\} = (n+1)^2.$$

186. Data je neodređena jednačina

$$(1) \qquad x + 2y + 3z = 6n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Odrediti broj rešenja (x, y, z) ove jednačine, pod uslovom da x, y, z pripadaju skupu $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Rešenje. *D. Đoković* je na sledeći način rešio postavljeni zadatak.

Ako se jednačina (1) napiše u obliku

$$(2) \qquad x + 2y = 3(2n - z),$$

vidi se da z može uzimati vrednosti: $0, 1, 2, \ldots, 2n$, pa jednačina (2) dobija oblike:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \cdot 2n, \\ x + 2y &= 3(2n-1), \\ &\vdots \\ x + 2y &= 3 \cdot 1, \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Zadatak se svodi na određivanje rešenja

$$(x, y), \quad x \in E, \quad y \in E$$

jednačine

$$(3) \qquad x+2y=k \qquad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Broj rešenja (x, y) jednačine (3) je

$$N_k = [k/2]+1,$$

gde $[k/2]$ označava najveći ceo broj, koji ne premašuje $k/2$.

Prema tome, ukupan broj traženih rešenja jednačine (1) je

$$N = \sum_{k=0}^{2n} N_{3k} = \sum_{k=0}^{2n} \{1+[3k/2]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} (k+1) + \sum_{k=1}^{2n} [k/2]$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} + n^2,$$

jer je

$$\sum_{k=1}^{2n} [k/2] = n^2.$$

Definitivan rezultat je

$$N = 3n^2+3n+1.$$

187. Odrediti prirodne brojeve n i m za koje je

$$(1) \qquad 1!+2!+\cdots+n! = m^2.$$

Rešenje. Stavljajući redom $n=1, 2, 3, 4, 5$, vidimo da su rešenja date *Diofantove* jednačine

$$1^\circ \quad n=1, \quad m=\pm 1; \qquad 2^\circ \quad n=3, \quad m=\pm 3.$$

Pokazaćemo sada da nema drugih uređenih parova (n, m) prirodnih brojeva koji bi bili rešenja date neodređene jednačine (1).

Budući da je

$$1!+2!+3!+4!=33$$

i da su faktorijeli $5!, 6!, 7!, \dots$ prirodni brojevi čija je cifra na mestu jedinica uvek *nula*, izlazi da je $\sum_{r=1}^{n} r!$ za $n>5$ uvek broj čija je cifra na mestu jedinica 3. S druge strane, kvadrat prirodnog broja ne može biti broj čija je krajnja cifra 3.

Prema tome, sva rešenja jednačine (1) u prirodnim brojevima data su parovima 1° i 2°.

Primedba. Čitalac će pokušati da reši *Diofantove* jednačine

$$1!+2!+\cdots+n! = m^3,$$

$$1!+2!+\cdots+n! = m^4,$$

$$\vdots$$

188. Neka su x_k $(k=1, 2, \dots, n)$ nule polinoma

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Izraziti proizvod $\prod_{k=1}^{n} (x_k^2-1)$ kao funkciju koeficijenata a_k $(k=1, 2, \dots, n)$.

Rešenje. $$P(x) \equiv a_0 (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n).$$

$$\therefore \quad P(1) \equiv (-1)^n a_0 (x_1-1)(x_2-1) \cdots (x_n-1);$$

$$P(-1) \equiv (-1)^n a_0 (x_1+1)(x_2+1) \cdots (x_n+1).$$

$$\therefore \quad P(1)\, P(-1) = a_0^2 \prod_{k=1}^{n} (x_k^2-1).$$

Kako je

$$P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n;$$

$$P(-1) \equiv (a_n + a_{n-2} + \cdots) - (a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots),$$

dobija se

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k^2-1) = (1/a_0^2)\,[(a_n + a_{n-2} + \cdots)^2 - (a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots)^2].$$

Ako je, na primer $n=2p$, tada je

$$\prod_{k=1}^{2p} (x_k^2-1) \equiv (1/a_0^2)\,[(a_{2p} + a_{2p-2} + \cdots + a_0)^2 - (a_{2p-1} + a_{2p-3} + \cdots + a_1)^2].$$

Primedba. Na sličan način izraziti $\prod_{k=1}^{n} (x_k^2+1)$ kao funkciju parametara $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

189. Posmatrati identitete:

$$1^\circ \quad (a_0 x + a_1)(b_0 x + b_1) \equiv c_0 x^2 + c_1 x + c_2;$$

$$2^\circ \quad (a_0 x + a_1)(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) \equiv c_0 x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$$

Izračunati $a_k b_n$ $(k=0, 1;\ n=0, 1, 2)$ kao funkciju koeficijenata c_r.

Rešenje. 2° Izjednačenjem odgovarajućih koeficijenata dobija se:

$$(1) \qquad a_0 b_0 = c_0, \quad a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1, \quad a_0 b_2 + a_1 b_1 = c_2, \quad a_1 b_2 = c_3.$$

Mi tražimo: $a_0 b_0$, $\boxed{a_0 b_1}$, $\boxed{a_0 b_2}$, $\boxed{a_1 b_0}$, $\boxed{a_1 b_1}$, $a_1 b_2$. Ostaje još da nađemo četiri uokvirena proizvoda.

Umesto (1) posmatrajmo skup jednačina:

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1, \qquad a_0 b_2 + a_1 b_1 = c_2,$$

$$(a_0 b_1)(a_1 b_0) = c_0 (a_1 b_1), \qquad (a_0 b_2)(a_1 b_0) = c_0 c_3.$$

Ovo su četiri jednačine sa četiri nepoznate: $a_0 b_1$, $a_1 b_0$, $a_0 b_2$, $a_1 b_1$.

Nepoznata $a_0 b_1$ $(\equiv t)$ određuje se iz jednačine

$$t^3 - 2 c_1 t^2 + (c_1^2 + c_0 c_2)\, t + (c_0^2 c_3 - c_0 c_1 c_2) = 0.$$

Zatim imamo:

$$a_1 b_0 = c_1 - t, \qquad a_0 b_2 = c_0 c_3/(c_1 - t),$$

$$a_1 b_1 = c_2 - c_0 c_3/(c_1 - t).$$

Generalizacija. Čitalac će rešiti opštiji zadatak, naime izraziće proizvode $a_k b_n$ kao funkciju od c_r, polazeći od identiteta:

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) \equiv c_0 x^5 + c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5.$$

Interesantno je rešiti ovaj zadatak, kada se za polaznu tačku uzme identitet:

$$(a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_{p-1} x + a_p)(b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_{q-1} x + b_q)$$
$$\equiv c_0 x^{p+q} + c_1 x^{p+q-1} + \cdots + c_{p+q-1} x + c_{p+q}.$$

190. Ako se na jednačinu $x^3+3x-4=0$, koja ima jedan jedini realan koren $x=1$, primeni *Cardan*-ova formula, dobija se

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$

Proveriti ovaj rezultat.

Prilikom primene *Cardan*-ove formule na jednačinu

$$x^3+px+q=0$$

sa racionalnim koeficijentima dešava se, kao što je gore slučaj, da se njeni racionalni koreni izražavaju kao zbir iracionalnih brojeva. U vezi sa tim *Kummer* je dokazao da *Cardan*-ova formula daje racionalne korene, u vidu racionalnih brojeva, ako p i q imaju oblike

$$p=3(a^2-b^2), \qquad q=2b(3a^2+b^2) \qquad (a,\ b \text{ racionalni brojevi}).$$

Proveriti *Kummer*-ovo tvrđenje.

191. Dat je polinom

$$u_r=a_0r^k+a_1r^{k-}+\cdots+a_k$$

$(r=1,2,\ldots,n;\ a_0,a_1,\ldots,a_k$ parametri nezavisni od k i $n)$.

Pokazati da je $\sum_{r=1}^{n} u_r$ polinom (stepena $k+1$) po n.

Rešenje. Polinom

$$(1) \qquad u(x)\equiv a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k$$

može se izraziti u obliku

$$(2) \qquad b_0x(x+1)\cdots(x+k-1)+b_1x(x+1)\cdots(x+k-2)+\cdots+b_{k-1}x+b_k,$$

gde su $b_0, b_1, \ldots, b_k$ koeficijenti koji se mogu odrediti identifikacijom polinoma (1) i (2).

Polazeći od ove činjenice, biće

$$\sum_{r=1}^{n} u_r=b_0\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1)+b_1\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-2)+\cdots+b_{k-1}\left(\sum_{r=1}^{n} r\right)+nb_k.$$

Na osnovu identiteta

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+s-1)\equiv\frac{1}{s+1}n(n+1)\cdots(n+s),$$

dobija se

$$\sum_{r=1}^{n} u_r\equiv\frac{b_0}{k+1}n(n+1)\cdots(n+k)+\frac{b_1}{k}n(n+1)\cdots(n+k-1)+\cdots+nb_k.$$

To je polinom (stepena $k+1$) po n.

Ako se navedeni rezultat primeni na zbir $S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k$, dobija se

$$S_k=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+P_k(n),$$

gde je $P_k(n)$ polinom (stepena k) po n.

192. Ako je n prirodan broj i pošto je

$$(1) \qquad (1+x+x^2)^n\equiv\sum_{r=0}^{2n} a_rx^r,$$

biće

$$a_r = a_{2n-r}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2}(3^n - a_n),$$

$$(r+1)\,a_{r+1} = (n-r)\,a_r + (2n-r+1)\,a_{r-1}$$

$$(0 \leqslant r \leqslant 2n).$$

Rešenje. Polazeći od (1), može se pisati

$$\sum_{r=0}^{2n} a_r x^{-r} = (1 + x^{-1} + x^{-2})^n \qquad (x \neq 0).$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{2n} a_r x^{2n-r} \equiv (1 + x + x^2)^n \equiv \sum_{r=0}^{2n} a_r x^r \equiv \sum_{r=0}^{2n} a_{2n-r} x^{2n-r}.$$

Odavde sleduje

(2) $$a_r = a_{2n-r}.$$

Ako se u (1) stavi $x = 1$, dobija se

(3) $$\sum_{r=0}^{2n} a_r = 3^n.$$

Relaciji (3) može se dati oblik

$$a_n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r + \sum_{r=n+1}^{2n} a_r = 3^n.$$

S obzirom na (2), poslednja relacija postaje

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r = \frac{1}{2}(3^n - a_n).$$

Posle diferenciranja, iz identiteta (1) sleduje

$$n(1+2x)(1+x+x^2)^{n-1} \equiv \sum_{r=0}^{2n} r a_r x^{r-1}.$$

$$\therefore \quad n(1+2x) \sum_{r=0}^{2n} a_r x^r \equiv (1+x+x^2) \sum_{r=0}^{2n} r a_r x^{r-1}.$$

$$\therefore \quad n a_r + 2n a_{r-1} = (r+1)\,a_{r+1} + r a_r + (r-1)\,a_{r-1}.$$

$$\therefore \quad (r+1)\,a_{r+1} = (n-r)\,a_r + (2n-r+1)\,a_{r-1}.$$

193. Polazeći od identiteta

$$(1+x+x^2)^0 \equiv 1,$$

$$(1+x+x^2)^1 \equiv 1 + x + x^2,$$

$$(1+x+x^2)^2 \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4,$$

$$\vdots$$

$$(1+x+x^2)^n \equiv B_n^0 + B_n^1 x + \cdots + B_n^k x^k + \cdots + B_n^{2n} x^{2n},$$

$$\vdots$$

formirati aritmetički trougao

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

1° Utvrditi zakon formiranja ma kog elementa iz k-te vrste pomoću elemenata iz $(k-1)$-ve vrste.

2° Verifikovati identitete:

$$\sum_{k=0}^{2n} B_n^k = 3^n; \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_n^k = 1 .$$

3° Diferenciranjem po x leve i desne strane identiteta

$$\sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k = (1+x+x^2)^n$$

izvesti relacije između raznih brojeva B_n^k (diferencirati jednom, dva puta i tri puta).

Napomena. Interesantna bi bila generalizacija ovog problema. Jedna generalizacija bi se sastojala u tome da se pođe od identiteta

$$(1+x+x^2+ \cdots +x^\nu)^n = \sum_{k=0}^{n\nu} B_{n\nu}^k x^k$$

i da se izvedu neke osobine brojeva $B_{n\nu}^k$.

194. Kako je $(1+x+x^2)^k = a_0+a_1x+a_2x^2+ \cdots +a_{2k}x^{2k}$, pokazati da je

$$(1-x+x^2)^k = a_0-a_1x+a_2x^2- \cdots +a_{2k}x^{2k}$$

i na osnovu ovoga izvesti relaciju

$$a_0a_{2k}-a_1a_{2k-1}+a_2a_{2k-2}- \cdots +a_{2k}a_0 = a_k .$$

195. Verifikovati relaciju

$$(R)\quad (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+ \cdots +x^{2^n-1} \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Izraz na levoj strani za $x \neq 1$ može se napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} \\
&= \frac{(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} \\
&\;\;\vdots \\
&= \frac{(1-x^{2^{n-1}})(1+x^{2^{n-1}})}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{2^n}}{1-x}
\end{aligned}
$$

što neposredno vodi ka verifikaciji date relacije.

Relacija (R) može se dokazati i zaključkom od n na $n+1$, što se ostavlja kao zadatak čitaocu.

Čitalac će dokazati relaciju (R) za $x=1$.

196. Ako su m i n prirodni brojevi i kako je

$$(1) \qquad (1+x+x^2+\cdots+x^m)^n \equiv \sum_{r=0}^{mn} a_r x^r,$$

biće

$$\sum_{r=1}^{mn} r a_r = \frac{1}{2} mn(m+1)^n.$$

Rešenje. Iz (1), posle diferenciranja, dobija se

$$n(1+2x+\cdots+mx^{m-1})(1+x+x^2+\cdots+x^m)^{n-1} \equiv \sum_{r=0}^{mn} r a_r x^{r-1}.$$

Za $x=1$ biće

$$n(1+2+\cdots+m)(1+m)^{n-1} \equiv \sum_{r=1}^{mn} r a_r.$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{mn} r a_r \equiv \frac{1}{2} mn(m+1)^n.$$

197. Pokazati da se A i B mogu tako izabrati da bude

$$\frac{\alpha x^n+\beta}{(a+bx^n)(a'+b'x^n)} \equiv \frac{A}{a+bx^n} + \frac{B}{a'+b'x^n},$$

ako je

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Šta biva kada ovaj uslov nije zadovoljen?

198. Dokazati stav: Ako su a, b, c neparni brojevi, tada koreni kvadratne jednačine

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0$$

nisu racionalni brojevi.

Rešenje. Neka su a, b, c oblika

$$a=2p+1, \quad b=2n+1, \quad c=2q+1 \qquad (p,\ n,\ q \text{ celi brojevi}).$$

Tada diskriminanta jednačine (1) ima oblik

$$(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1) \equiv 4n^2+4n-4(2p+1)(2q+1)+1$$

$$\equiv 8\left\{\frac{n(n+1)}{2} - 2pq-p-q-1\right\}+5.$$

Budući da je $n(n+1)/2$ ceo broj, i izraz

$$n(n+1)/2-2pq-p-q-1$$

je ceo broj, što znači da je diskriminanta oblika $8r+5$.

Ovo ne bi mogao biti kvadrat ni parnog ni neparnog broja. Kvadrat neparnog broja je oblika $8r+1$ (r nula ili prirodan broj), što ovde nije slučaj.

Na osnovu izloženog navedeni stav je dokazan.

199. Dokazati relaciju

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2-x^n \equiv (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1})$$

(n prirodan broj).

Uputstvo.
$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\quad (x\neq 1);$$
$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1}\quad (x\neq 1);$$
$$1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}=\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\quad (x\neq 1).$$

Kako ćemo dokazati datu relaciju ako je $x=1$?

200. Dokazati: $\prod_{k=0}^{n-1}(a+b\varepsilon_k)=a^n+(-1)^{n-1}b^n\quad \left(\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$

Uputstvo. Staviti $x=-a/b$ u relaciji $x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$.

201. Dokazati: $\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2-2\varepsilon_k\cos\theta+1)=2(1-\cos n\theta)\quad \left(\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$

Uputstvo. Ako se stavi $x=\cos\theta+i\sin\theta$ i $x=\cos\theta-i\sin\theta$, identitet
$$x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\varepsilon_k)$$
postaje
$$e^{n\theta i}-1=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{\theta i}-\varepsilon_k),\qquad e^{-n\theta i}-1=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{-\theta i}-\varepsilon_k),$$
odakle se dobija
$$2(1-\cos n\theta)=\prod_{k=0}^{n-1}(\varepsilon_k^2-2\varepsilon_k\cos\theta+1)\qquad [\varepsilon_k=\exp(2k\pi i/n)].$$

202. Dokazati formule:
$$\frac{a+b+|b-a|}{2}=\max(a,b),\qquad \frac{a+b-|b-a|}{2}=\min(a,b)$$
(a, b realni brojevi).

203. Dokazati identitete:
$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2}=\max(|a|,\ |b|);$$
$$\frac{|a+b|-|a-b|}{2}=\{\operatorname{sgn}(ab)\}\min(|a|,\ |b|)$$
(a i b realni brojevi).

204. Dokazati identitete:
$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|,\ |b|)};$$
$$\frac{|a+b|-|a-b|}{2ab}=\frac{1}{\max(|a|,\ |b|)}.$$
(a i b realni brojevi; $ab\neq 0$).

205. Polazeći od

$$|a+b| = \max(|a|, |b|) + \{\operatorname{sgn}(ab)\} \min(|a|, |b|),$$

$$|a-b| = \max(|a|, |b|) - \{\operatorname{sgn}(ab)\} \min(|a|, |b|),$$

razviti

$$|a+b|^3 + |a-b|^3, \quad |a+b|^3 - |a-b|^3 \quad (a,\ b \text{ realni brojevi}).$$

206. Ako su x i y realni brojevi, tada je

$$(R) \qquad |x+y| + |x-y| \equiv |x+\sqrt{x^2-y^2}| + |x-\sqrt{x^2-y^2}|.$$

Rešenje. Ova se formula može dokazati pomoću identiteta

$$|x+y| + |x-y| \equiv 2\max(|x|, |y|).$$

Razlikovaćemo slučajeve: 1° $|x|>|y|$ i 2° $|x|<|y|$.

Za slučaj 1° imamo:

$$|x+y| + |x-y| \equiv 2|x|,$$

$$|x+\sqrt{x^2-y^2}| + |x-\sqrt{x^2-y^2}| \equiv 2\max(|x|, \sqrt{x^2-y^2}) = 2|x|.$$

Za slučaj 2° imamo:

$$|x+y| + |x-y| \equiv 2|y|,$$

$$|x+\sqrt{x^2-y^2}| + |x-\sqrt{x^2-y^2}| \equiv |x+i\sqrt{y^2-x^2}| + |x-i\sqrt{y^2-x^2}|$$

$$\equiv \sqrt{x^2+y^2-x^2} + \sqrt{x^2+y^2-x^2} \equiv 2\sqrt{y^2} \equiv 2|y|.$$

Ovim smo dokazali relaciju (R) za $|x| \neq |y|$. Čitalac će utvrditi da (R) važi i za $|x| = |y|$.

207. Za koju se vrednost parametra k izraz

$$F(x, y) \equiv (x^2 - 12xy - y^2 + 2x + 1) + k(x^2 + 2y^2 - x - 2)$$

može pretstaviti kao proizvod dva linearna faktora po x i y? Šta geometriski pretstavlja jednačina $F(x, y) = 0$ za nađeno k u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu?

208. 1° Verifikovati identitet

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+u^2)$$

$$\equiv (ax-by-cz-du)^2 + (bx+ay-dz+cu)^2 + (cx+dy+az-bu)^2 + (dx-cy+bz+au)^2.$$

Ovaj identitet izražava *Lagrange*-ovu teoremu iz teorije brojeva.

2° Navesti dva prirodna broja N_1 i N_2 koji su, svaki za sebe, zbir kvadrata četiri prirodna broja, pa pokazati da je proizvod $N_1 N_2$ jednak zbiru kvadrata četiri prirodna broja.

Na osnovu gornjeg identiteta konstatovati da li je razlaganje proizvoda $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+u^2)$ u zbir četiri kvadrata jednoznačno ili ne.

Tako, na primer, proizvod brojeva

$$30\ (= 1^2+2^2+3^2+4^2) \quad \text{i} \quad 54\ (= 2^2+3^2+4^2+5^2),$$

tj. 1620 može se napisati u oblicima

$$1620 = 6^2+12^2+12^2+36^2, \qquad 1620 = 7^2+13^2+21^2+31^2.$$

Da li ima i drugih rešenja?

3° *Fibonacci*-eva teorema iz teorije brojeva izražava se pomoću identiteta

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 .$$

Za ovaj slučaj tako isto proučiti pitanje postavljeno pod 2°.

209. Ako je n ceo broj (pozitivan, negativan ili nula), odrediti vrednosti x za koje je

$$[x]+[n-x] = n-1 \qquad ([x] \text{ najveći ceo broj} \leqslant x).$$

Uputstvo. Ispitati da li x može biti ceo broj, a zatim da li može biti broj koji nije ceo.

210. Ako je n ceo pozitivan broj, dokazati identitet

$$\big[[x]/n\big] = [x/n] \qquad ([x] \text{ najveći ceo broj} \leqslant x].$$

211. U ravni Oxy Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema odrediti oblasti čije tačke (x, y) zadovoljavaju uslov $[x]+[y]=0$.

212. Rešiti jednačinu $[x] = 2x+1$, gde $[x]$ označava najveći ceo broj koji ne premašuje x.

Uputstvo. Grafički prikazati funkcije $[x]$ i $2x+1$.

213. Ako su a, b, c, d realni brojevi i ako je

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1,$$

pokazati da je $E \equiv a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd > 1$.

Rešenje. Izraz E može se napisati u obliku

$$E \equiv 1 + \frac{1}{2}[(a+c)^2+(a-d)^2+(b+d)^2+(b+c)^2].$$

Izraz u uglastim zagradama anuliraće se ako su ispunjeni uslovi

$$a+c=0, \qquad a-d=0, \qquad b+d=0, \qquad b+c=0,$$

tj. kada je $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$.

Prema uslovu zadatka je

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \text{ dok je ovde } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Prema tome, $E > 1$ za svako a, b, c, d uz uslov (1).

214. Rastaviti funkciju $f(x) \equiv n!/\{x(x+1)\cdots(x+n)\}$ u parcijalne razlomke. Polazeći od ovog, pokazati da važe jednakosti:

$$\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1};$$

$$\frac{1}{2}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{4}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+2}\binom{n}{n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Rezultat. $$f(x) \equiv \binom{n}{0}\frac{1}{x} - \binom{n}{1}\frac{1}{x+1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\frac{1}{x+n}.$$

215. Ispitati da li je $abc=(a+b+c-4)^2$ rezultat eliminacije x, y, z iz relacija

$$(z+x-y)(x+y-z)=ayz,$$
$$(x+y-z)(y+z-x)=bzx,$$
$$(y+z-x)(z+x-y)=cxy.$$

216. Po x i y rešiti skup jednačina:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y=a, \qquad \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y=b.$$

217. Odrediti broj realnih rešenja jednačina:

$$1^\circ \quad x^a=a^x \quad (a>0); \qquad 2^\circ \quad x=e^{ax} \quad (a>0).$$

218. Rešiti iracionalne jednačine:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x}; \qquad \sqrt[3]{x}=\sqrt{x+1}+1.$$

219. Razdvojiti realne korene jednačine

$$x^5+x^2-1{,}83172=0$$

i izračunati ih sa četiri tačne decimale.

220. Polazeći od identiteta

$$(1) \qquad (1+x)^n \equiv \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{n}x^n,$$

sumirati izraze:

$$S_1 \equiv \frac{1}{1\cdot 2}\binom{n}{0}+\frac{1}{2\cdot 3}\binom{n}{1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\binom{n}{n},$$

$$S_2=\frac{2}{1}\binom{n}{0}+\frac{2^2}{2}\binom{n}{1}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}\binom{n}{n}.$$

Rešenje. Posle integracije u granicama od 0 do x, iz (1) sleduje

$$(2) \qquad \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} \equiv \binom{n}{0}x+\binom{n}{1}\frac{x^2}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Posle ponovne integracije u istim granicama, iz (2) se dobija

$$\frac{(1+x)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)} \equiv \binom{n}{0}\frac{x^2}{1\cdot 2}+\binom{n}{1}\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Stavljajući ovde $x=1$, nalazimo

$$S_1 \equiv \frac{2^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}.$$

Da bismo sumirali S_2, pođimo opet od (2) i tu stavimo $x=2$, pa dobijamo

$$S_2=(3^{n+1}-1)/(n+1).$$

221. Eliminisati θ i φ iz jednačina

$$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=1, \qquad a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi=1, \qquad a\operatorname{tg}\theta=b\operatorname{tg}\varphi.$$

Posebno ispitati slučaj $a=b$.

Rezultat. Za slučaj $a \neq b$ eliminanta je: $2ab-a-b=0$.

222. 1° Ako je $2\cos\theta = x + x^{-1}$, dokazati da je $2\cos m\theta = x^m + x^{-m}$,

2° Ako je $2\operatorname{ch}\theta = x + x^{-1}$, dokazati da je $2\operatorname{ch} m\theta = x^m + x^{-m}$

(m ceo broj).

223. Polazeći od identiteta

$$2^{m-1}\prod_{k=1}^{m}\sin\left(x+\frac{k-1}{m}\pi\right) \equiv \sin mx,$$

izvesti nove identitete:

$$\sum_{k=1}^{m}\operatorname{cotg}\left(x+\frac{k-1}{m}\pi\right) \equiv m\operatorname{cotg} mx,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sin^2\left(x+\frac{k-1}{m}\pi\right)} \equiv \frac{m^2}{\sin^2 mx}.$$

Uputstvo. Primeniti diferenciranje.

224. Ako su m i n različiti prirodni brojevi, rešiti jednačinu

(1) $$\sin(mx)\sin(nx) = 1.$$

Uputstvo. Jednačini (1) može se dati oblik

(2) $$\cos(m-n)x - \cos(m+n)x = 2,$$

odnosno

(3) $$\cos(m-n)x - 1 = \cos(m+n)x + 1.$$

Primenom formula

$$1-\cos\alpha \equiv 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1+\cos\alpha \equiv 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

jednačina (3) postaje

$$\sin^2\frac{m-n}{2}x + \cos^2\frac{m+n}{2}x = 0.$$

$$\therefore\quad \sin\frac{m-n}{2}x = 0, \quad \cos\frac{m+n}{2}x = 0.$$

$$\therefore\quad (m-n)x = 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$(m+n)x = (2\nu+1)\pi \quad (\nu=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

$$\therefore\quad (m+n)k - (m-n)\nu = \frac{1}{2}(m-n).$$

Rešavanje jednačine (1) svodi se, dakle, na određivanje celobrojnih rešenja k, ν) poslednje jednačine. Ovaj zadatak pretstavlja lepu primenu *Diofantovih jednačina.*

225. Proveriti relacije:

$$x \equiv \binom{x}{1}; \quad x^2 \equiv \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2}; \quad x^3 \equiv \binom{x}{3} + 4\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{3};$$

$$x^4 \equiv \binom{x}{4} + 11\binom{x+1}{4} + 11\binom{x+2}{4} + \binom{x+3}{4};$$

$$x^5 \equiv \binom{x}{5} + 26\binom{x+1}{5} + 66\binom{x+2}{5} + 26\binom{x+3}{5} + \binom{x+4}{5}.$$

Izraziti na analogni način potencije $x^6, x^7, \ldots, x^p$, gde je p prirodan broj.

Primedba. Koeficijenti koji stoje uz binomne koeficijente uživaju sledeću interesantnu osobinu

$$1=1!;\quad 1+1=2!;\quad 1+4+1=3!;\quad 1+11+11+1=4!;\quad 1+26+66+26+1=5!$$

Da li ova osobina važi i za koeficijente u izrazu x^p?

O ovome videti čehoslovački časopis za metodska pitanja: *Matematika ve škole*, ročnik VII, 4, 1957, str. 257—258.

Navedene činjenice dovesti u vezu sa problemom koji je postavio *P. A. Pizá* u časopisu: *The American Mathematical Monthly*, vol. 54 (1947), p. 601. Taj problem glasi:

Neka su celi brojevi ${}_nK_c$ definisani relacijama:

$${}_nK_1=1,\quad {}_nK_m=0\quad (m>n);\quad {}_{n+1}K_c=c\,({}_nK_c+{}_nK_{c-1})\qquad (c>1).$$

Dokazati sledeće sumacione formule

$$x^n\equiv\sum_{\nu=1}^{n}{}_nK_\nu\binom{x}{\nu},\qquad \sum_{a=1}^{x-1}a^n\equiv\sum_{\nu=1}^{n}{}_nK_\nu\binom{x}{\nu+1}.$$

226. Odrediti polinom $P(x)$ koji ispunjava uslov

$$P(x)-P(x-1)\equiv(2x-1)(2x+1)(2x+3).$$

Rezultat. $P(x)\equiv 2x^4+8x^3+7x-2$.

227. Polazeći od identiteta

$$\frac{1}{z-x}\equiv\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-x}\,\frac{x-a}{z-a},$$

izvesti identitet

$$\frac{1}{z-x}\equiv\frac{1}{z-a_1}+\frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_2)}+\cdots+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}$$
$$+\frac{1}{z-x}\,\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}.$$

228. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy šrafirati oblasti za koje važe relacije:

$$1^0\quad xy\,(x^2-y^2)>0;\qquad 2^\circ\quad (x^2-1)(x^2-y^2)<0.$$

229. Izraz $\prod_{p=1}^{n}(x+p)$ može se napisati u obliku

$$x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n.$$

Odrediti koeficijente A_1, A_2, A_3.

Rezultat. $A_1=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\quad A_2=\dfrac{(n-1)\,n\,(n+1)(3n+2)}{24}$, $\quad A_3=\dfrac{(n-2)(n-1)\,n^2\,(n+1)^2}{48}$.

230. Proveriti relaciju $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\cos^2\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)\equiv\frac{n}{2}$.

231. Proveriti identitete:

$$\cos(a+2mx)\equiv\cos a-2\sin x\,[\sin(a+x)+\sin(a+3x)+\cdots+\sin(a+\overline{2m-1}\,x)],$$
$$\sin(a+2mx)\equiv\sin a+2\sin x\,[\cos(a+x)+\cos(a+3x)+\cdots+\cos(a+\overline{2m-1}\,x)]$$
$$(m\ \text{prirodan broj}).$$

ANALITIČKA GEOMETRIJA

I. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

1. Konstruisati krive definisane sledećim jednačinama:

1° $5x^2-4xy+y^2+2x-y=0,$
2° $3x^2-4xy+y^2+2x-y=0,$
3° $3x^2-4xy+y^2+15x-6y+7=0,$
4° $2x^2-7xy+3y^2-9x+7y+4=0,$
5° $4x^2-12xy+9y^2+4x-5y+3=0,$
6° $4x^2-12xy+9y^2-8x+12y-7=0,$
7° $x^2+4xy+y^2-2x+1=0,$
8° $(2x+y+1)^2=x-2y,$
9° $x^2+xy+y^2-5x-4y+2=0,$
10° $x^2-6xy+9y^2-4x+y=0,$
11° $2x^2-3xy+3y^2+x-7y+1=0,$
12° $2x^2-5xy+5y-1=0,$
13° $4x^2-12xy+9y^2-36x+100=0,$
14° $x^2+3xy-y^2-4x+6y+2=0,$
15° $x^2-2xy-6y^2+4x-5y+1=0.$

Jednačine ovih krivih svesti na kanonički oblik.

2. Diskutovati prirodu krivih II stepena za razne vrednosti parametra λ:

1° $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+3=0,$
2° $x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2\lambda x+2y+\lambda+1=0,$
3° $x^2+2\lambda xy+y^2-2\lambda x+2y+2=0,$
4° $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2(\lambda+1)x+2y+2=0,$
5° $x^2-2\lambda xy+(\lambda+2)y^2-2x-2\lambda y-3=0,$
6° $x^2+2\lambda xy+y^2-2x+2y-\lambda=0,$
7° $\lambda x^2+2\lambda xy+y^2-2x-2\lambda y+\lambda=0.$

3. Tačka $M(\alpha, \beta)$ kreće se u ravni. Diskutovati prirodu konusnih preseka:

1° $\alpha x^2+2\beta xy-(\alpha-2)y^2+2x+2y+2=0,$
2° $x^2+2xy-(\beta^2-\alpha-1)y^2-2(\alpha-\beta)y-1=0,$
3° $\alpha x^2+2xy+\beta y^2-2\alpha x+\beta=0,$
4° $x^2-2\alpha xy+y^2-2\beta x+1=0,$
5° $\beta x^2-2\alpha xy+\beta^2 y^2-2\alpha x+1=0.$

4. Date su prave

$$(1) \qquad x+y-4=0, \quad x-y-4=0.$$

Jedna prava koja prolazi kroz koordinatni početak O seče prave (1) respektivno u tačkama A i B.

Odrediti g. m. sredine M duži AB, kad prava AB rotira oko tačke O.

Rešenje. Prava $y=mx$ ($|m|\neq 1$) seče prave (1) u tačkama

$$A\left(\frac{4}{1+m},\ \frac{4m}{1+m}\right),\quad B\left(\frac{4}{1-m},\ \frac{4m}{1-m}\right).$$

Koordinate tačke M su: $\quad \xi=\dfrac{4}{1-m^2},\quad \eta=\dfrac{4m}{1-m^2}.$

Ako se eliminiše parametar m, dobija se $\xi^2-\eta^2=4\xi$.

G. m. tačke M je hiperbola $x^2-y^2=4x$.

5. Dat je skup elipsi $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ($a=$const, b promenljivo).

Pokazati da se tangente ovih elipsi, povučene u tačkama sa jednakim apscisama, seku u zajedničkoj tački koja se nalazi na x-osi.

Koristeći ovu činjenicu, dati postupak za geometrisku konstrukciju tangente elipse.

6. Odrediti skup krugova koji prolaze kroz tačke $B(0,\ 2)$ i $B'(0,\ -1)$.

Proveriti da li je kriva

$$x^2=(y-2)(y+1)$$

geometrisko mesto preseka pravih AB i $A'B'$, gde su A i A' tačke u kojima x-osa seče posmatrane krugove.

Generalizacija. Odrediti jednačinu skupa (S) krugova koji prolaze kroz tačke $B(0,\ a)$ i $B'(0,\ b)$. Šta je skup preseka pravih AB i $A'B'$, ako su A i A' tačke u kojima x-osa seče krugove (S)?

7. Dokazati da dve parabole koje prolaze kroz četiri tačke jednog kruga imaju normalne ose.

Dokaz. Jednačine parabola, čije ose imaju koeficijente pravca k_1 i k_2, u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxy mogu se napisati u obliku

$$(1)\qquad \begin{aligned} f_1&\equiv(y-k_1x)^2+a_1x+b_1y+c_1=0,\\ f_2&\equiv(y-k_2x)^2+a_2x+b_2y+c_2=0.\end{aligned}$$

Krive drugog stepena koje prolaze kroz presek parabola (1) su

$$(2)\qquad f_1+\lambda f_2\equiv(k_1^2+\lambda k_2^2)x^2-2(k_1+\lambda k_2)xy+(1+\lambda)y^2+\cdots=0\qquad(\lambda \text{ parametar}).$$

Parametar λ može se tako izabrati da (2) bude jednačina kruga. To će biti onda, kada je

$$(3)\qquad 1+\lambda=k_1^2+\lambda k_2^2\neq 0.$$

$$(4)\qquad k_1+\lambda k_2=0.$$

Eliminacijom λ iz (3) i (4) dobijamo

$$(5)\qquad k_2-k_1=k_1k_2(k_1-k_2).$$

Iz (5) sleduje $k_1k_2=-1$ ili $k_1=k_2$. Drugu mogućnost treba odbaciti, jer dve parabole paralelnih osa ne mogu imati više od dve zajedničke tačke.

Važi i obrnuti stav. Ostavlja se čitaocu da ovo verifikuje.

Primedba. U časopisu *The American Mathematical Monthly* (vol. 64, 1957, p. 595) data su dva rešenja sledećeg zadatka:

Ako se dva konusna preseka seku u četiri različite tačke, te tačke su konciklične tada, i samo tada, ako su ose simetrije ova dva konusna preseka paralelne ili normalne.

8. Ravnostrana hiperbola presečena je jednim krugom u četiri tačke M_1, M_2, M_3, M_4.

Pokazati da je $\sum\limits_{k=1} \overline{OM_k}^2=4r^2$ (O centar hiperbole, r poluprečnik ovog kruga).

Rešenje. Ako se ose simetrije hiperbole uzmu za koordinatne ose (x-osa: osa simetrije na kojoj leže žiže), tada jednačina hiperbole ima oblik

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = c^2 .$$

Krug je definisan jednačinom

$$(2) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 .$$

Ako se x eliminiše iz (1) i (2), dobija se

$$(3) \qquad (2y^2 - 2by + a^2 + b^2 + c^2 - r^2)^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 = 0 .$$

Iz ove jednačine mogu se izračunati ordinate tačaka preseka krivih (1) i (2).

Izraz $\sum_{k=1}^{4} \overline{OM_k}^2$ postaje $\sum_{k=1}^{4} (x_k^2 + y_k^2)$.

Budući da je $x_k^2 - y_k^2 = c^2$, možemo pisati

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{OM_k}^2 = \sum_{k=1}^{4} (2y_k^2 + c^2) = 2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) + 4c^2 .$$

Da bismo izračunali poslednji izraz, upotrebićemo identitet

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)^2 - 2(y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4) .$$

Prema tome, jednačinu (3) treba napisati u obliku

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0 ,$$

pa je

$$\Sigma y_k = -B/A, \quad \Sigma y_k y_j = C/A .$$

Iz (3) dobijamo

$$A = 4, \ B = -8b, \ C = 4(2b^2 + c^2 - r^2) .$$

Na osnovu ovoga je

$$\Sigma y_k^2 = 4b^2 - 2(2b^2 + c^2 - r^2) = 2(r^2 - c^2) .$$

Najzad dobijamo

$$\Sigma \overline{OM_k}^2 = 4(r^2 - c^2) + 4c^2 = 4r^2 ,$$

što je trebalo dokazati.

9. Dat je ravnokraki trougao ABC ($\overline{AB} = 2a$, $\overline{AC} = \overline{BC}$). Prava BC i normala u tački A na AC seku se u P.

Odrediti geometrisko mesto tačke P kada se tačka C kreće, dok je osnovica ravnokrakog trougla ABC nepomična.

Rešenje. Neka je x-osa prava AB (pozitivan smer od A ka B), O (sredina osnovice) koordinatni početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema.

Jednačina prave BC je ($\overline{OC} = \lambda$)

$$(1) \qquad x/a + y/\lambda = 1 ,$$

a jednačina prave koja prolazi kroz A i stoji $\perp$ na AC ima oblik

$$(2) \qquad y = -(a/\lambda)(x + a) .$$

Kretanjem tačke C po pravoj OC menja se parametar λ.

Ako se iz (1) i (2) eliminiše λ, dobija se

$$(3) \qquad x^2 - y^2 = a^2 .$$

Da li je traženo geometrisko mesto ravnostrana hiperbola (3) ili samo njen deo? Čitalac će ovo ispitati.

10. Dati su: nepokretna duž AB ($\overline{AB}=2a$), čija je sredina tačka O, i dve pokretne tačke C i D na normalama podignutim u tačkama A i B na duž AB, tako da je ugao COD prav.

Odrediti i ispitati geometrisko mesto preseka pravih AD i BC.

Uzeti i slučaj kad je $\sphericalangle COD=\theta\,(\neq\pi/2)$.

Rešenje. Pravu AB izabraćemo za x-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema (pozitivan smer od A ka B), tačku O za koordinatni početak. Tada tačke A, B, C, D imaju koordinate

$$(-a,0),\quad (a,0),\quad (-a,r),\quad (a,s),$$

gde je $\overline{AC}=r$, $\overline{BD}=s$.

Jednačine pravih AD i BC su respektivno

$$(1)\qquad y=\frac{s}{2a}(x+a),\qquad\qquad (2)\qquad y=-\frac{r}{2a}(x-a).$$

Uslov normalnosti pravih OC i OD je

$$(3)\qquad rs=a^2.$$

Iz jednačina (1), (2) i (3) dobija se

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2/4}=1.$$

Geometrisko mesto je elipsa čije su poluose a i $a/2$.

Ako je kretanje neprekidno, da li je cela periferija elipse g. m. ili samo njen deo?

Ostavlja se čitaocu slučaj: $\sphericalangle COD=\theta\neq\pi/2$.

Takođe je interesantno posmatrati slučaj kada tačka O ne leži na sredini duži AB, već se nalazi između tačaka A i B tako da je $\overline{OB}=b$, $\overline{OA}=2a-b$. I ova se generalizacija ostavlja čitaocu za ispitivanje.

11. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy dat je kvadrat $OABC$: teme A ima koordinate (a, b); temena O, A, B, C dolaze jedno za drugim, kako je naznačeno, u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.

Neka je $OA'B'C'$ drugi kvadrat čija temena u napred navedenom smislu dolaze jedno za drugim redom kako je naznačeno. Teme A' ima koordinate (a', b').

Pokazati da se prave AA', BB', CC' seku u jednoj tački.

Rešenje. Koordinate tačaka B i C su respektivno: $(a-b, a+b)$, $(-b, a)$.

Koordinate tačaka B' i C' su: $(a'-b', a'+b')$, $(-b', a')$.

Jednačine pravih AA', BB', CC' su respektivno:

$$(1)\qquad (b'-b)\,x-(a'-a)\,y=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix},$$

$$(2)\qquad (a'+b'-a-b)\,x-(a'-b'-a+b)\,y=2\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix},$$

$$(3)\qquad (a'-a)\,x+(b'-b)\,y=\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}.$$

Ove tri jednačine nisu nezavisne. Sabiranjem izraza sa levih i desnih strana jednačina (1) i (3), dobijaju se izrazi na levoj i desnoj strani jednačine (2).

Kako se tačke A i A' ne poklapaju, determinanta

$$\begin{vmatrix} b'-b & -(a'-a) \\ a'-a & b'-b \end{vmatrix}$$

različita je od nule. Presečna tačka ima koordinate

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}{(a-a')^2+(b-b')^2}\begin{vmatrix} 1 & -(a'-a) \\ 1 & b'-b \end{vmatrix},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}{(a-a')^2+(b-b')^2}\begin{vmatrix} b'-b & 1 \\ a'-a & 1 \end{vmatrix}.$$

12. U sistemu Dekartovih pravouglih osa date su tri tačke:

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3),$$

uz pretpostavku da su kako $x_k (k=1, 2, 3)$ tako i $y_k (k=1, 2, 3)$ među sobom različiti.

1° Odrediti jednačinu parabole (P_1) koja prolazi kroz tačke M_1, M_2, M_3 i čija je osa simetrije paralelna x-osi.

2° Odrediti jednačinu parabole (P_2) koja prolazi kroz iste tačke i čija je osa simetrije paralelna y-osi.

3° Odrediti koordinate tačaka preseka parabola (P_1) i (P_2).

4° Primeniti dobijene rezultate na partikularan slučaj

$$M_1(1,-1),\ M_2(2,-4),\ M_3(6,4).$$

Rešenje. Parabola koja prolazi kroz tačke M_1, M_2, M_3 i čija je osa simetrije paralelna x-osi definisana je relacijom (*Lagrange*-ova interpolaciona formula):

$$x=\frac{(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_2)(y_1-y_3)}x_1+\frac{(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_1)(y_2-y_3)}x_2+\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_1)(y_3-y_2)}x_3,$$

odnosno

$$(P_1) \qquad x=Qy^2+Ry+S.$$

Parabola koja prolazi kroz iste tačke M_1, M_2, M_3 i čija je osa simetrije paralelna y-osi određena je jednačinom

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3,$$

odnosno

$$(P_2) \qquad y=qx^2+rx+s.$$

Parabole (P_1) i (P_2) seku se u četiri tačke od kojih su tri unapred date: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Koordinate četvrte presečne tačke odredićemo na sledeći način.

Eliminacijom y iz jednačina (P_1) i (P_2) nalazi se

$$(1) \qquad x=Q(qx^2+rx+s)^2+R(qx^2+rx+s)+S.$$

Eliminacijom x iz jednačina (P_1) i (P_2) dobija se

$$(2) \qquad y=q(Qy^2+Ry+S)^2+r(Qy^2+Ry+S)+s.$$

Prema *Viète*-ovim formulama dobija se:

$$(3) \qquad x_1+x_2+x_3+x_4=-2(r/q),$$

$$(4) \qquad y_1+y_2+y_3+y_4=-2(R/Q).$$

Budući da je

$$q=\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$-r=\frac{x_2+x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1+\frac{x_3+x_1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2+\frac{x_1+x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3,$$

iz (3) sleduje

$$x_4=2\,\frac{(x_2^2-x_3^2)\,y_1+(x_3^2-x_1^2)\,y_2+(x_1^2-x_2^2)\,y_3}{(x_2-x_3)\,y_1+(x_3-x_1)\,y+(x_1-x_2)\,y_3}-(x_1+x_2+x_3),$$

što se može napisati u elegantnijoj formi:

$$x_4=2\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}-(x_1+x_2+x_3).$$

Primenom već navedenog postupka, dolazi se i do formule:

$$y_4=2\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1^2&y_2^2&y_3^2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}-(y_1+y_2+y_3).$$

Koordinate tačke M_4 za dati partikularni slučaj su: $(3,-5)$.

13. 1° Pokazati da jednačina tangente u tački $P(a\operatorname{ch}t,\ b\operatorname{sh}t)$ hiperbole $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ glasi

(1) $$(x/a)\operatorname{ch}t-(y/b)\operatorname{sh}t=1.$$

Ako tangenta seče asimptote u tačkama Q i R, tada je tačka P sredina duži QR i area $\triangle\, OQR=\text{const}$ (O centar hiperbole).

2° Ako je prava FP (F jedna žiža hiperbole) paralelna jednoj od asimptota ove hiperbole, pokazati da tangenta u P seče ovu asimptotu na direktrisi koja odgovara žiži F, dok drugu asimptotu seče na pravoj »latus rectum« kroz F.

Rešenje. 1° Asimptote $y=(b/a)\,x$ i $y=(-b/a)\,x$ i prava (1) seku se u tačkama:

$$Q\left(\frac{a}{\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t},\ \frac{b}{\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t}\right),\quad R\left(\frac{a}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t},\ -\frac{b}{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\right).$$

Koordinate sredine duži QR su: $(a\operatorname{ch}t,\ b\operatorname{sh}t)$, dok je area $\triangle\, OQR=ab$.

2° Uzmimo žižu F sa koordinatama $(c,\,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Bez teškoća se nalazi da dve presečne tačke o kojima je gore reč imaju za koordinate: $(a^2/c,\ ab/c)$, $(c,\ -bc/a)$ i te se tačke zaista nalaze na pravama: direktrisi za F i «latus rectum» kroz F.

14. Normala u tački $M(t)$ elipse

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1,\quad \text{tj.}\quad x=a\cos t,\ y=b\sin t,$$

seče u tačkama P i Q one prečnike glavnog kruga ($x^2+y^2=a^2$) elipse koji prolaze kroz tačke ovog kruga što imaju istu apscisu kao tačka M.

Izračunati koordinate tačaka P i Q kao funkciju ekscentrične anomalije tačke M.

Odrediti geometriska mesta tačke P i tačke Q, kada M opiše elipsu.

Rešenje. Normala u tački $M(t)$ definisana je jednačinom

$$(1)\qquad (a\sin t)\,x-(b\cos t)\,y-(a^2-b^2)\sin t\cos t=0.$$

Tačka P je presek prave (1) i prave

$$(2)\qquad x\sin t-y\cos t=0.$$

Tačka Q je presek prave (1) i prave

$$(3)\qquad x\sin t+y\cos t=0.$$

Koordinate tačaka P, Q su respektivno

$$\{(a+b)\cos t,\ (a+b)\sin t\},\quad \{(a-b)\cos t,\ -(a-b)\sin t\}.$$

Kada M opiše elipsu, tačke P i Q opisuju krugove koji se zovu *Chasles*-ovi krugovi. Sredina duži PQ je tačka M.

15. Uočiti dve tačke $A(at_1^2,\ 2at_1)$ i $B(at_2^2,\ 2at_2)$ na paraboli $y^2=4ax$. Dokazati da je $t_1t_2=-1$, ako prava AB prolazi kroz žižu ove parabole.

Prava koja prolazi kroz tačku $P(\alpha,\beta)$ i žižu S parabole seče ovu parabolu u tačkama Q i R. Pokazati da je

$$(1)\qquad \beta^2\cdot\overline{QR}=4a\cdot\overline{SP}^2.$$

Rešenje. Jednačina prave koja prolazi kroz tačke $A(at_1^2,\ 2at_1)$ i $B(at_2^2,\ 2at_2)$ glasi

$$y-2at_1=\frac{2}{t_1+t_2}(x-at_1^2).$$

Ako ova prava prolazi kroz žižu parabole $y^2=4ax$, dakle kroz tačku $S(a,0)$, tada je

$$-2at_1=\frac{2}{t_1+t_2}(a-at_1^2),\quad \text{tj.}\quad -t_1(t_1+t_2)=1-t_1^2,$$

$$\therefore\quad t_1t_2=-1.$$

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $P(\alpha,\beta)$ i žižu $S(a,0)$ je

$$y=\frac{\beta}{\alpha-a}(x-a).$$

Apscise x_1 i x_2 presečnih tačaka Q i R ove prave sa parabolom dobijamo iz jednačine

$$\frac{\beta^2}{(\alpha-a)^2}x^2-\left[\frac{2a\beta^2}{(\alpha-a)^2}+4a\right]x+\frac{a^2\beta^2}{(\alpha-a)^2}=0,$$

odakle je

$$x_1+x_2=2a+\frac{4a(\alpha-a)^2}{\beta^2}.$$

S obzirom da je rastojanje od tačke na paraboli do žiže jednako rastojanju od te tačke do direktrise, za tačke Q i R je

$$\overline{SR}=x_1+a,\quad \overline{SQ}=x_2+a,$$

odakle sabiranjem dobijamo

$$\overline{QR}=x_1+x_2+2a,\quad \text{tj.}\quad \overline{QR}=4a+4a\frac{(\alpha-a)^2}{\beta^2}.$$

Kvadrat rastojanja između tačaka $S(a,0)$ i $P(\alpha,\beta)$ je $\overline{SP}^2=(\alpha-a)^2+\beta^2$, pa se dobija

$$4a\cdot\overline{SP}^2=4a\{(\alpha-a)^2+\beta^2\}.$$

Ovim smo dokazali relaciju (1).

16. Nad jednom fokalnom tetivom AB date parabole kao prečnikom opisan je krug koji seče uočenu parabolu u tačkama A, B, P, Q.

Pokazati da krug koji prolazi kroz tačke P, Q i S (S—žiža parabole) dodiruje datu parabolu.

Rešenje. Jednačina fokalne tetive parabole $y^2 = 2px \; (p > 0)$ je

$$y = m(x - p/2). \tag{1}$$

Koordinate tačaka preseka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ ove tetive sa parabolom određuju se iz skupa jednačina

$$m^2x^2 - (m^2+2)px + \frac{m^2p^2}{4} = 0 \qquad y = m\left(x - \frac{p}{2}\right). \tag{2}$$

Iz prve od jednačina (2) sleduje

$$x_1 + x_2 = \frac{m^2+2}{m^2}p, \qquad x_1x_2 = \frac{p^2}{4}, \tag{3}$$

a druga od jednačina (2) daje

$$y_i = m\left(x_i - \frac{p}{2}\right) \qquad (i = 1, 2),$$

tj., prema (3),

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{m}, \qquad y_1y_2 = -p^2. \tag{4}$$

Prečnik AB ima dužinu:

$$\overline{AB} = \{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 + (y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2\}^{1/2}. \tag{5}$$

Prema (3) i (4), obrazac (5) posle uprošćenja postaje

$$\overline{AB} = \frac{2p(1+m^2)}{m^2},$$

a poluprečnik kruga je

$$r = \frac{p(1+m^2)}{m^2}. \tag{6}$$

Koordinate centra su

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{m^2+2}{2m^2}p, \qquad \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{p}{m}. \tag{7}$$

Jednačina kruga koji ima tetivu AB za prečnik, prema (6) i (7),

$$\left(x - \frac{m^2+2}{2m^2}p\right)^2 + \left(y - \frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2(1+m^2)^2}{m^4},$$

ili posle uprošćenja:

$$x^2 + y^2 - \frac{m^2+2}{m^2}px - \frac{2p}{m}y - \frac{3p^2}{4} = 0. \tag{8}$$

Ordinate tačaka preseka parabole

$$y^2 = 2px \tag{9}$$

i kruga (8) određuju se iz jednačine

$$y^4 + \frac{2p^2(m^2-2)}{m^2}y^2 - \frac{8p^3}{m}y - 3p^4 = 0. \tag{10}$$

Kako krug (8) prolazi kroz tačke A i B, jednačinu (10) moraju zadovoljavati ordinate ovih tačaka, tj. $y=y_1$ i $y=y_2$ pretstavljaju korene jednačine (10). Zbog ovoga polinom na levoj strani jednačine (10) mora biti deljiv sa:

$$(y-y_1)(y-y_2)\equiv y^2-(y_1+y_2)\,y+y_1y_2,$$

tj. prema (4) sa

$$(11)\qquad y^2-(2\,p/m)\,y-p^2.$$

Posle izvršene deobe dobija se jednačina

$$(12)\qquad y^2+(2\,p/m)\,y+3\,p^2=0$$

za određivanje ordinata y_3 i y_4 tačaka P i Q.

Iz (12) sleduje

$$(13)\qquad y_3+y_4=-2\,p/m,\qquad y_3y_4=3\,p^2,$$

a prema (9) je

$$x_3+x_4=\frac{y_3^2+y_4^2}{2\,p}=\frac{(y_3+y_4)^2-2\,y_3y_4}{2\,p},\qquad x_3\,x_4=\frac{y_3^2y_4^2}{4\,p^2},$$

tj., s obzirom na (13),

$$(14)\qquad x_3+x_4=\frac{p\,(2-3\,m^2)}{m^2},\qquad x_3\,x_4=\frac{9}{4}p^2.$$

Jednačina kruga koji prolazi kroz tačke $P(x_3,y_3)$, $Q(x_4,y_4)$ i $F(p/2,0)$ ima oblik:

$$(15)\qquad x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

gde se a b i c određuju iz jednačina:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0,\\ &x_4^2+y_4^2+ax_4+by_4+c=0,\\ &\frac{p^2}{4}+\frac{ap}{2}+c=0. \end{aligned}$$

Iz ovih jednačina se dobija

$$(17)\qquad a=-\frac{p\,(3+m^2)}{2\,m^2},\qquad b=\frac{p\,(1-3\,m^2)}{2\,m^3},\qquad c=\frac{3\,p^2}{4\,m^2},$$

pa jednačina (15) postaje

$$(18)\qquad x^2+y^2-\frac{p\,(3+m^2)}{2\,m^2}\,x+\frac{p\,(1-3\,m^2)}{2\,m^3}\,y+\frac{3\,p^2}{4\,m^2}=0.$$

Ordinate tačaka preseka kruga (18) i parabole (9) određuju se iz jednačine

$$(19)\qquad y^4+\frac{3\,(m^2-1)}{m^2}\,p^2\,y^2+\frac{2\,p^3\,(1-3\,m^2)}{m^3}\,y+\frac{3\,p^4}{m^2}=0.$$

Pošto ordinate y_3 i y_4 moraju zadovoljavati ovu jednačinu, prema (12) polinom na njenoj levoj strani deljiv je sa

$$(20)\qquad (y-y_3)(y-y_4)\equiv y^2+(2\,p/m)\,y+3\,p^2.$$

Posle deobe polinoma na levoj strani jednačine (19) polinomom (20), dolazi se do jednačine

$$y^2-2\frac{p}{m}\,y+\left(\frac{p}{m}\right)^2=0,$$

koja ima dvostruki koren $y=p/m$.

Na osnovu (9) je $x=p/2\,m^2$. To znači da se u tački $D\,(p/2\,m^2,\ p/m)$ dodiruju: krug koji prolazi kroz tačke P, Q, F i parabola $y^2=2\,px$.

17. Krug koji prolazi kroz teme parabole $y^2=4\,ax$ seče ovu parabolu još u tačkama P, Q, R. Tangente date parabole u tačkama P, Q, R obrazuju trougao LMN.

Pokazati da se sredine strana trougla LMN nalaze na paraboli $2\,y^2+ax=0$.

Rešenje. Jednačina kruga koji prolazi kroz teme parabole

$$y^2=4\,ax \tag{1}$$

ima oblik

$$x^2+y^2+Ax+By=0. \tag{2}$$

Ordinate tačaka preseka parabole (1) i kruga (2) date su jednačinom

$$\frac{y^4}{16a^2}+\left(1+\frac{A}{4a}\right)y^2+By=0.$$

Ako se izuzme teme parabole ($x=0$, $y=0$), ordinate ostalih tačaka preseka određene su jednačinom

$$y^3+4a\,(A+4a)\,y+16a^2B=0. \tag{3}$$

Tangente u tačkama $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ i $R(x_3, y_3)$ imaju jednačine:

$$y_1\,y=2a\,(x+x_1), \qquad y_2\,y=2a\,(x+x_2), \qquad y_3\,y=2a\,(x+x_3). \tag{4}$$

Koordinate temena trougla LMN dobijaju se rešavanjem po dve i dve od ovih jednačina, naime nalazi se:

$$L\left(\frac{x_2y_3-x_3y_2}{y_2-y_3},\ 2a\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\right),\quad M\left(\frac{x_1y_3-x_3y_1}{y_1-y_3},\ 2a\frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}\right),\quad N\left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2},\ 2a\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right).$$

Kako je $x_k=y_k^2/(4a)$ $(k=1, 2, 3)$, dobija se, na primer,

$$\frac{x_2y_3-x_3y_2}{y_2-y_3}=\frac{1}{4a}\,\frac{y_2^2y_3-y_3^2y_2}{y_2-y_3}=\frac{y_2\,y_3}{4a}, \qquad 2a\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{1}{2}\,\frac{y_2^2-y_3^2}{y_2-y_3}=\frac{y_2+y_3}{2}.$$

Stoga će koordinate temena L, M, N biti respektivno

$$\left(\frac{y_2y_3}{4a},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right), \qquad \left(\frac{y_1y_3}{4a},\ \frac{y_1+y_3}{2}\right), \qquad \left(\frac{y_1y_2}{4a},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right). \tag{5}$$

Ako su S_1, S_2 i S_3 respektivno sredine duži MN, NL i LM, tada su koordinate ovih tačaka:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{y_1\,(y_2+y_3)}{8a},\ \frac{2\,y_1+y_2+y_3}{4}\right),\\ &\left(\frac{y_2\,(y_1+y_3)}{8a},\ \frac{y_1+2\,y_2+y_3}{4}\right),\\ &\left(\frac{y_3\,(y_1+y_2)}{8a},\ \frac{y_1+y_2+2\,y_3}{4}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Budući da je u jednačini (3) koeficijent uz y^2 jednak nuli, mora biti: $y_1+y_2+y_3=0$, a odavde sleduje

$$y_2+y_3=-y_1, \qquad y_1+y_3=-y_2, \qquad y_1+y_2=-y_3. \tag{7}$$

Na osnovu (7) koordinate (6) imaju vrednosti:

$$\left(-\frac{y_1^2}{8a},\ \frac{y_1}{4}\right), \qquad \left(-\frac{y_2^2}{8a},\ \frac{y_2}{4}\right), \qquad \left(-\frac{y_3^2}{8a},\ \frac{y_3}{4}\right).$$

Odavde se zaključuje da sredine strana trougla LMN leže na paraboli $2\,y^2+ax=0$, što je trebalo pokazati.

18. Odrediti pravu koja je u isti mah tangenta i normala krive

$$(1) \qquad y = \pm x/\sqrt{x-1}.$$

Rešenje. Stavimo li $y = tx$, dobija se

$$t = \pm 1/\sqrt{x-1}. \qquad \therefore \quad x = (1/t^2) + 1.$$

Prema tome, kriva (1) može se definisati jednačinama

$$(2) \qquad x = 1 + (1/t^2), \qquad y = t + (1/t).$$

Jednačina tangente krive (2) u tački $t = t_0\ (\neq 0)$ glasi

$$(3) \qquad y - t_0 - \frac{1}{t_0} = \frac{1}{2}(t_0 - t_0^3)\left(x - 1 - \frac{1}{t_0^2}\right).$$

Jednačina normale krive (2) u tački $t = t_1\ (\neq 0)$ je

$$(4) \qquad y = \frac{2}{t_1(t_1^2-1)}\, x + \frac{(t_1^2+1)^2(t_1^2-2)}{t_1^3(t_1^2-1)}.$$

Jednačine (3) i (4) određuju istu pravu ako su ispunjeni uslovi:

$$(5) \qquad \frac{1}{2}(t_0 - t_0^3) = \frac{2}{t_1^3 - t_1},$$

$$(6) \qquad t_0 + \frac{1}{2t_0} + \frac{t_0^3}{2} = \frac{(t_1^2+1)^2(t_1^2-2)}{t_1^3(t_1^2-1)}.$$

Presek krive (2) i tangente (3) dobićemo iz jednačine

$$t + \frac{1}{t} - t_0 - \frac{1}{t_0} = \frac{1}{2}(t_0 - t_0^3)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t_0^2}\right).$$

$$\therefore \quad t - t_0 + \frac{t_0 - t}{t t_0} = \frac{1}{2} t_0 (1 - t_0^2) \frac{t_0^2 - t^2}{t^2 t_0^2}.$$

Tražimo rešenje $t \neq t_0$, pa možemo podeliti levu i desnu stranu poslednje jednačine sa $t - t_0$, te dobijamo

$$2 t_0 t^2 - (1 + t_0^2)\, t + t_0 - t_0^3 = 0.$$

Ova jednačina ima korene:

$$t = t_0 \quad \text{i} \quad t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_0} - t_0\right).$$

Prema tome, tangenta u tački t_0 krive (2) seče ovu krivu u tački

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_0} - t_0\right).$$

Ovaj rezultat olakšava rešavanje skupa jednačina (5) i (6). Umesto jednačina (5) i (6) možemo uzeti jednačinu (5) i

$$(7) \qquad t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_0} - t_0\right).$$

Ako se ova vrednost za t_1 unese u (5), dobija se

$$(8) \qquad (1 - t_0^2)^2 (t_0^4 - 6 t_0^2 + 1) = 32 t_0^2,$$

ili u razvijenom obliku

$$(9) \qquad u^4 - 8u^3 + 14u^2 - 40u + 1 = 0 \qquad (t^2 \equiv u).$$

Ako se $t_1=(1/2)(1/t_0-t_0)$ uvrsti u (6), dolazi se takođe do jednačine (8).

Analizom jednačine (9) utvrđuje se da postoje četiri prave koje imaju osobinu da su jednovremeno i tangente i normale date krive.

Ostaje još da se izračuna u sa tačnošću koja bi unapred bila data.

Primedba. Čitalac će prilikom obrade ovog pitanja nacrtati potrebne grafike.

19. Uslov da tri kruga

$$(1) \qquad x^2+y^2+a_k x+b_k y+c_k=0 \qquad (k=1, 2, 3)$$

imaju jednu zajedničku tačku može se napisati u obliku

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešenje. Skup jednačina (1) može se zameniti ekvivalentnim skupom ($D\neq 0$)

$$x^2+y^2=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad x=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & c_1 & b_1 \\ 1 & c_2 & b_2 \\ 1 & c_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$y=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Eliminacijom x, y iz ovih relacija dobija se uslov koji je napred naveden.

20. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy data je kriva

$$(E) \qquad 2x(x^2+3y^2)=3(x^2-y^2).$$

1° Izraziti koordinate (x, y) tačke ove krive kao racionalne funkcije jednog parametra.

2° Naći jednačinu krive (E), ako koordinatne ose izvrše rotaciju od 45° u direktnom smislu oko koordinatnog početka.

Uputstvo. Staviti $y=tx$ (t parametar).

21. Date su narabole

$$(1) \qquad y^2+4x-4=0, \qquad (2) \qquad 8x^2-2x-3y-6=0.$$

1° Odrediti koordinate njihovih presečnih tačaka.

2° U presečnim tačkama povući normale na krivu (1) i pokazati da se tri od ovih normala seku u jednoj tački.

3° Da li presečne tačke određene u 1° leže na jednom krugu?

Rezultat. 1° Presečne tačke su: $(0, -2)$, $(1, 0)$, $(3/4, -1)$, $(-5/4, 3)$.

2° Tri normale (podnožja: prva, treća i četvrta od navedenih tačaka) seku se u tački $(-11/4, 3/4)$.

22. Tangenta hiperbole (H) u njenoj tački P seče asimptote ove hiperbole u tačkama Q i R. Pokazati da je P sredina duži QR.

Ako su: O centar hiperbole (H), A i B tačke u kojima normala hiperbole (H) u tački P seče ose simetrije ove hiperbole, ispitati da li se tačke O, A, B, Q, R nalaze na jednom krugu.

23. Data je elipsa

$$(1) \qquad x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

i na njoj dve pokretne tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$ čije koordinate zadovoljavaju uslov

$$(2) \qquad 1/x_1+1/x_2=1/y_1+1/y_2.$$

Odrediti i konstruisati g. m. pola prave M_1M_2 u odnosu na elipsu (2).

Rešenje. Ako se sa (p, q) označe koordinate pola, jednačina sečice M_1M_2 glasi

$$(3) \qquad px/a^2+qy/b^2=1.$$

Ako se iz (1) i (3) eliminiše y, dobija se

$$(a^2q^2+b^2p^2)x^2-2a^2b^2px+a^4(b^2-q^2)=0.$$

$$\therefore \quad 1/x_1+1/x_2=2b^2p/\{a^2(b^2-q^2)\}.$$

Istim postupkom se nalazi $1/y_1+1/y_2=2a^2q/\{b^2(a^2-p^2)\}$.

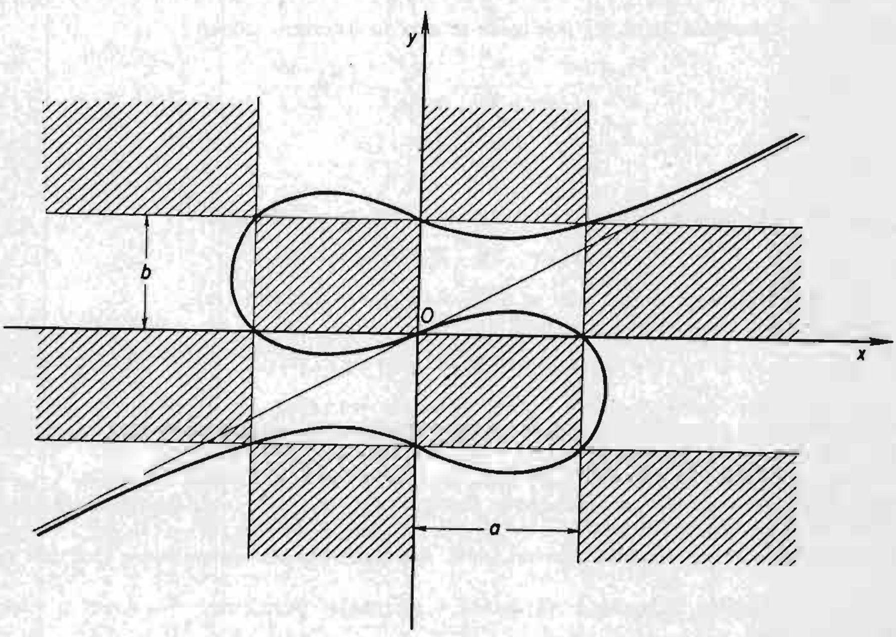
Traženo geometrisko mesto pola je

$$(4) \qquad b^4(a^2-x^2)x=a^4(b^2-y^2)y.$$

Za crtanje ove krive podesno je primeniti *metod oblasti.* U tu svrhu napišimo jednačinu (4) u obliku

$$(5) \qquad b^4(a-x)(a+x)x=a^4(b-y)(b+y)y.$$

Pravama $x=0$, $x=-a$, $x=a$, $y=0$, $y=-b$, $y=b$ ravan Oxy podeljena je na više oblasti, kao što je na slici naznačeno (slika je nacrtana uz pretpostavku $a>b$).



U šrafiranim oblastima nema tačaka krive, što se bez teškoće proverava.

Da li geometriskom mestu pripadaju temena pravougaonika?

24. Data je kriva

(1) $$y=x^2/(x^2-1).$$

1° U tački apscise x odrediti jednačinu tangente, a zatim naći koordinate tačke u kojoj ta tangenta seče krivu (1).

2° Odrediti pravu koja je u isti mah i tangenta i normala krive (1).

Rešenje. 1° Jednačina tangente krive (1), tj. krive

(2) $$Y=X^2/(X^2-1)$$

u tački $X=x$ glasi

(3) $$Y-\frac{x^2}{x^2-1}=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}(X-x).$$

Ako se Y eliminiše iz (2) i (3), dobija se

(4) $$\frac{2x}{(x^2-1)^2}X^3+\left[1-\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\right]X^2-\frac{2x}{(x^2-1)^2}X+\left[\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\right]=0.$$

Budući da je $X=x$ bar dvostruki koren jednačine (4), sleduje da se apscisa x_3 tačke u kojoj tangenta (2) seče krivu (3) dobija iz jednačine

$$x^2x_3=-\left[\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\right]\frac{(x^2-1)^2}{2x}.$$

$$\therefore \quad x_3=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \qquad (x\neq 0).$$

2° Jednačina normale krive (2) u tački $X=x_3$ ima oblik

(5) $$Y-\frac{x_3^2}{x_3^2-1}=\frac{(x_3^2-1)^2}{2x_3}(X-x_3).$$

Tangenta i normala krive (2) poklopiće se ako su ispunjeni uslovi:

(6) $$\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x_3^2}{x_3^2-1}-\frac{(x_3^2-1)^2}{2},$$

(7) $$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x_3^2-1)^2}{2x_3}.$$

Ako se u (6) umesto x_3 stavi $-(1/2)(x+1/x)$, dobija se jednačina

(8) $$f(x)\equiv(x^2-1)^6-32x^4(x^2+1)=0.$$

Do iste jednačine se dolazi, ako se u (7) stavi $x_3=-(1/2)(x+1/x)$.

Jednačina (8) smenom $x^2=t$ postaje

(9) $$t^6-6t^5+15t^4-52t^3-17t^2-6t+1=0.$$

Nas interesuju samo pozitivni koreni poslednje jednačine, jer je $x=\pm t^{1/2}$. Grafičkim putem utvrđujemo da se jedan pozitivan koren jednačine (9) nalazi u razmaku (0,1), a drugi u razmaku (5,6).

Prema tome, postoje ukupno četiri prave koje su u isti mah tangente i normale krive (1). Apscise tačaka dodira ovih tangenata su u razmacima: $(-3,\ -2)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$, što se može proveriti izračunavanjem $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

Budući da je kriva simetrična prema y-osi, dovoljno je izračunati pozitivne vrednosti za x.

25. 1° Odrediti jednačine tangente i normale parabole $y^2=4ax$ u njenoj tački $(at^2,\ 2at)$.

2° Tangente ove parabole u tačkama $P(at_1^2,\ 2at_1)$ i $Q(at_2^2,\ 2at_2)$ seku se u tački $T(t_1\neq t_2)$. Normale parabole u tačkama P i Q seku se u tački S.

Šta je geometrisko mesto tačke S, ako se tačka T kreće po pravoj paralelnoj osi simetrije parabole?

3° Tangenta parabole u tački $R(at_3^2, 2at_3)$ $(t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_1)$ seče prave PT i QT respektivno u tačkama C i D. Pokazati da je

$$\overline{TC}/\overline{CP} = \overline{DQ}/\overline{TD}.$$

4° Ako se tačka T kreće po krugu $x^2+y^2=1$, odrediti geometrisko mesto tačke S.

5° Ako se tačka S kreće po pravoj $y=ak$ ($k=$const), odrediti geometrisko mesto tačke T.

Rešenje. 1° Jednačine tangente i normale su respektivno:

$$x-ty+at^2=0, \qquad xt+y-2at-at^3=0.$$

2° Koordinate tačke T su $\{at_1t_2,\ a(t_1+t_2)\}$.

Koordinate tačke S su $\{a(t_1^2+t_1t_2+t_2^2+2),\ -at_1t_2(t_1+t_2)\}$.

Kada se tačka T kreće po pravoj koja je paralelna x-osi, tada je

$$a(t_1+t_2)=ak=\text{const},$$

pa se iz jednačina

$$x=a[(t_1+t_2)^2-t_1t_2+2], \qquad y=-at_1t_2(t_1+t_2), \qquad t_1+t_2=k,$$

posle eliminacije izraza t_1+t_2 i t_1t_2, dobija

$$x-(y/k)=a(k^2+2).$$

Čitalac će ispitati da li je g. m. tačke S ova prava ili samo njen deo.

3° Tačke C i D imaju respektivne koordinate:

$$\{at_1t_3,\ a(t_1+t_3)\} \quad \text{i} \quad \{at_2t_3,\ a(t_2+t_3)\}.$$

Budući da je

$$\overline{TC}/\overline{CP} \equiv |a|\,|t_2-t_3|\sqrt{t_1^2+1}/(|a|\,|t_1-t_3|\sqrt{t_1^2+1}),$$

$$\overline{DQ}/\overline{TD} \equiv |a|\,|t_2-t_3|\sqrt{t_2^2+1}/(|a|\,|t_1-t_3|\sqrt{t_2^2+1}),$$

izlazi

$$\overline{TC}/\overline{CP} = \overline{DQ}/\overline{TD},$$

što je i trebalo pokazati.

4° i 5° Postavljena pitanja mogu se ovako generalisati:

Ako se tačka T (odnosno S) kreće po krivoj $F(x\ y)=0$, šta će biti geometrisko mesto tačke S (odnosno T).

Ova se pitanja rezervišu za čitaoca, sa napomenom da se pre njihovog rešavanja treba malo upoznati sa teorijom eliminacije. Pitanja postaju relativno laka, ako je $F(x, y)$ linearna unkcija po x i y.

26. Tri tangente jedne parabole grade trougao. Pokazati da krug opisan oko ovog trougla prolazi kroz žižu parabole.

Rešenje. Posmatrajmo parabolu, definisanu jednačinom

$$y^2=2px \tag{1}$$

u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, i tri tangente parabole (1):

$$y=ax+\frac{p}{2a}, \quad y=bx+\frac{p}{2b}, \quad y=cx+\frac{p}{2c}. \tag{2}$$

[a, b, c $(a \neq b \neq c \neq a)$ koeficijenti pravaca ovih tangenata].

Konusni presek, koji prolazi kroz tačke preseka tangenata (2), definisan je relacijom

$$(3)\qquad \nu\left(bx+\frac{p}{2b}-y\right)\left(cx+\frac{p}{2c}-y\right)+\lambda\left(cx+\frac{p}{2c}-y\right)\left(ax+\frac{p}{2a}-y\right)$$

$$+\mu\left(ax+\frac{p}{2a}-y\right)\left(bx+\frac{p}{2b}-y\right)=0\,.$$

U jednačini (3) ν, λ i μ su tri parametra, privremeno neodređena.

Jednačina (3) pretstavljaće krug, ako su ispunjeni uslovi:

$$(4)\qquad \nu bc+\lambda ca+\mu ab=\nu+\lambda+\mu\,,$$

$$(5)\qquad \nu(b+c)+\lambda(c+a)+\mu(a+b)=0\,.$$

Ispitajmo sada da li se tačka $(p/2,\ 0)$ nalazi na krivoj (3) koja je krug, ako su zadovoljeni uslovi (4) i (5).

Jednačina (3) je identički zadovoljena za $x=p/2$, $y=0$, ako je determinanta

$$D=\begin{vmatrix} bc-1 & ca-1 & ab-1 \\ b+c & c+a & a+b \\ \left(b+\dfrac{1}{b}\right)\left(c+\dfrac{1}{c}\right) & \left(c+\dfrac{1}{c}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right) & \left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right) \end{vmatrix}$$

identički jednaka nuli.

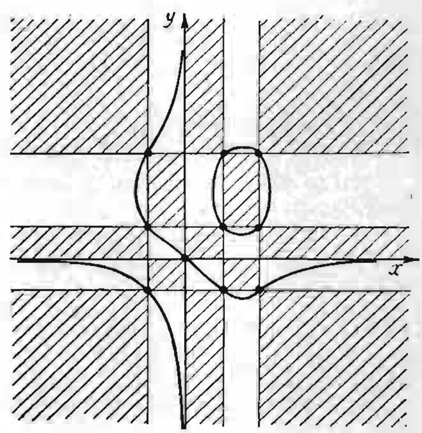
Budući da je zaista $D\equiv 0$, iskazan stav o tangentama parabole je dokazan.

Čitalac će posebno proučiti slučaj kada je jedna tangenta $x=0$, a ostale dve $y=(ax)+p/(2a)$, $y=(bx)+p/(2b)$, gde je $a\neq b$, $ab\neq 0$.

Primedba. Dati i geometriski dokaz ovog stava.

27. Odrediti krive drugog stepena (C) koje prolaze kroz tačke $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Zatim odrediti i konstruisati g. m. podnožja normala povučenih iz tačke $(2,3)$ na krive (C).



Rešenje. Krive (C) definisane su jednačinom

$$(x^2-1)+a(y^2-1)=0 \qquad (a \text{ parametar}).$$

Jednačina normale krive (C) u njenoj tački (x_0,y_0) glasi

$$(x-x_0)/x_0=(y-y_0)/(ay_0)\,.$$

Normala prolazi kroz tačku $(2,3)$ pa je stoga

$$(1)\qquad (2-x_0)/x_0=(3-y_0)/(ay_0)\,.$$

Tačka (x_0,y_0) nalazi se na krivoj (C), te je

$$(2)\qquad (x_0^2-1)+a(y_0^2-1)=0\,.$$

Eliminacijom parametra a iz jednačina (1) i (2) dobija se traženo geometrisko mesto

$$y(2-x)(x^2-1)=x(y-3)(y^2-1).$$

Metodom oblasti dolazimo do grafika krive. (Videti sliku.)

28. 1° Konstruisati krivu

$$(C) \qquad y = x + 1/x^2.$$

2° U tački $M(x_0, y_0)$ ove krive povučena je njena tangenta (t). Odrediti koordinate tačke N u kojoj tangenta seče krivu (C).

3° Odrediti geometrisko mesto sredine duži MN kada se M kreće po onoj grani krive (C) koja leži u I kvadrantu.

4° U tački N podignuta je normala (n) na krivu (C). Odrediti tačke M i N za koje se prave (t) i (n) poklapaju.

Rešenje. 2° Jednačina tangente (t) krive

$$(1) \qquad y = x + 1/x^2$$

u tački $M(x_0, y_0)$ ima oblik

$$(2) \qquad y = \left(1 - \frac{2}{x_0^3}\right) x + \frac{3}{x_0^2}.$$

Da bismo odredili koordinate (x_1, y_1) tačke N, eliminisaćemo y iz jednačina (1) i (2). Tako dobijamo

$$x^3 - \frac{3x_0}{2} x^2 + \frac{x_0^3}{2} = 0.$$

Ova jednačina ima jedan dvojni koren x_0, te je stoga $x_1 = -x_0/2$.

Tako je određena tačka: $N\left(-\frac{x_0}{2}, -\frac{x_0}{2} + \frac{4}{x_0^2}\right)$.

3° Koordinate sredine duži MN su:

$$X = \frac{x_0 + x_1}{2}, \qquad Y = \frac{y_0 + y_1}{2},$$

odnosno

$$(3) \qquad X = \frac{x_0}{4}, \qquad Y = \frac{x_0}{4} + \frac{5}{2x_0^2}.$$

Ako se tačka $M(x_0, y_0)$ kreće po grani krive (C) koja je u I kvadrantu, tada je $x_0 > 0$, pa ćemo, eliminacijom x_0 iz jednačina (3), dobiti

$$Y = X + 5/(32X^2) \qquad (X > 0).$$

Traženo geometrisko mesto je kriva koja ima oblik sličan krivoj (C) i s obzirom na uslov $x_0 > 0$, tj. $X > 0$, pretstavlja granu koja se nalazi u I kvadrantu.

4° Da bi se normala (n) i tangenta (t) poklopile, potrebno je da su koeficijenti pravaca ovih pravih jednaki, pošto obe prolaze kroz zajedničku tačku N. Tako dobijamo uslov

$$[-1/y']_{x=x_1} = [y']_{x=x_0},$$

odnosno

$$-\frac{x_0^3}{x_0^3 + 16} = \frac{x_0^3 - 2}{x_0^3}.$$

Smenom $x_0^3 = t$ dobićemo jednačinu $t^2 + 7t - 16 = 0$, odakle zaključujemo da će se tangenta i normala poklopiti u tačkama sa apscisama

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{-7 + \sqrt{113}}{2}}, \qquad x_3 = \sqrt[3]{\frac{-7 - \sqrt{113}}{2}}.$$

29. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu odrediti jednačinu konusnog preseka koji prolazi kroz tačke (0,0), (1,0), (0,1) i čiji je centar tačka (2,3).

Proveriti da li je $5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0$ tražena jednačina?

30. Transformisati na kanonički oblik jednačinu ravnostrane hiperbole koja prolazi kroz tačke (0,3), (8,2) i dodiruje apscisnu osu u tački (4,0).

Podaci su dati u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem.

Rezultat. Jednačina hiperbole je $24x^2-11xy-24y^2-192x-56y+384=0$.

Njen kanonički oblik je $x_1^2-y_1^2=3840/(97)^{3/2}$.

31. Kroz tri nekolinearne tačke A, B, C povući tri paralelne prave u ravni trougla ABC tako da je jedna od njih podjednako udaljena od druge dve.

Zadatak rešiti metodom koordinata i geometriski. Koliko ima rešenja?

Diskutovati i slučaj kada su tačke A, B, C kolinearne.

32. Odrediti i nacrtati geometrisko mesto tačaka simetričnih s centrom elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (odnosno hiperbole $x^2/a^2-y^2/b^2=1$) u odnosu na njene tangente.

Izračunati veličinu površine prstena ograničenog elipsom i geometriskim mestom u vezi sa elipsom.

Rezultat. Geometrisko mesto za elipsu:

$$(x^2+y^2)^2=4\,(a^2x^2+b^2y^2).$$

Geometrisko mesto za hiperbolu:

$$(x^2+y^2)^2=4\,(a^2x^2-b^2y^2).$$

Posmatrati ove krive u polarnim koordinatama i naročito proučiti slučaj $a=b$.

33. Prave (L_1) i (L_2) seku se u tački O. Na (L_1) su uzete tačke $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a na (L_2) tačke $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Odrediti broj trouglova čija su temena tačke:

$$1^\circ \quad A_k,\ B_k \quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n);$$

$$2^\circ \quad O,\ A_k,\ B_k \quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n).$$

Rezultat. 1° $n^2(n-1)$; 2° n^3.

34. Data je nepomična parabola (P). Kraci pravog ugla, koji leži u ravni parabole (P) i čije se teme poklapa sa temenom O ove parabole, seku parabolu u dve tačke M i N. Pokazati da prava MN rotira oko jedne nepomične tačke (koju treba odrediti), kada posmatrani ugao rotira oko svog temena O.

Rezultat. Prava MN rotira oko tačke koja se nalazi na osi simetrije parabole na otstojanju (u pravcu žiže) koje iznosi $4\cdot\overline{OF}$ (F žiža parabole).

35. Dat je nepokretan prav ugao MON. Na kraku OM uočiti dve nepomične tačke A i B i na kraku ON jednu pomičnu tačku C.

U tački A normalno na AC povučena je prava AA'; u tački B normalno na BC povučena je prava BB'.

Odrediti geometrisko mesto preseka pravih AA' i BB', kada se tačka C kreće od O ka N.

36. Odrediti g. m. tačke M iz koje se mogu povući na parabolu II reda tangente koje zaklapaju ugao θ.

37. Naći najkraće otstojanje između parabole $y^2 = 2px$ i prave $Ax + By + C = 0$. Primeniti rezultat na slučaj $4x + 3y + 46 = 0$, $y^2 = 64x$.

Rezultat. Za partikularni slučaj $d_{\min} = 2$.

38. Uočiti krug $(O; r)$, jedan njegov prečnik AB i jednu tačku M na krugu. Tačka M ortogonalno se projektuje u tačku Q na AB. Prava AN (N sredina duži MQ) seče dati krug u D.

Odrediti i ispitati geometrisko mesto preseka P pravih BD i QM, kada tačka M opiše krug $(O; r)$.

Uputstvo i rezultat. Za x-osu Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema uzeti pravu AB (sa pozitivnim smerom od A ka B) i neka je O koordinatni početak.

Traženo geometrisko mesto je elipsa $x^2/r^2 + y^2/(4r^2) = 1$.

Rešiti opštiji zadatak u slučaju kada tačka N deli duž QM u razmeri $m:n$.

39. U ravni Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy prave

$$y = 2x, \quad x = 2y, \quad x + y = a, \quad x + y = 2a \quad (a \text{ parametar})$$

ograničavaju četvorougao.

Pokazati da se oko ovog četvorougla može opisati krug i odrediti jednačinu kruga.

Odrediti g. m. centra ovog kruga kad parametar a varira od 1 do 4.

40. Neka su d_1 i d_2 otsečci koje na y-osi Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy čine tangente povučene iz tačke $M(p, q)$ na krug

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Odrediti g. m. tačke M, kada je zadovoljen jedan od tri uslova:

$$d_1 + d_2 = k; \quad d_1 d_2 = k^2; \quad d_1^2 + d_2^2 = k^2 \quad (k = \text{const}).$$

41. Dat je konusni presek

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0.$$

Iz tačke $M(p, q)$ povučene su tangente na krivu (1) koje na y-osi čine otsečke d_1 i d_2.

Odrediti g. m. tačke M, kada je ispunjen jedan od tri uslova:

$$d_1 + d_2 = k; \quad d_1 d_2 = k^2; \quad d_1^2 + d_2^2 = k^2 \quad (k = \text{const}).$$

Posebno tretirati slučajeve kada (1) ima jedan od oblika

$$y^2 = 2px, \quad xy = a^2, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

42. U ravni su dati: $\sphericalangle MON$ i tačka P. Kroz tačku P povučena je jedna prava koja seče krake OM i ON datog ugla respektivno u tačkama A i B. Normala na kraku OM, povučena u A, seče krak ON u tački A'. Normala na kraku ON, povučena u B, seče krak OM u tački B'.

Ako prava AB rotira oko nepomične tačke P, tada postoji nepomična tačka P' oko koje rotira prava $A'B'$. Dokazati ovo.

Uputstvo. Zadatak ima elegantno rešenje u Dekartovom kosouglom sistemu. Neka O bude koordinatni početak, OM osa x, a ON osa y.

Zadatak tako isto rešiti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu.

43. Date su dve ortogonalne prave L_1 i L_2. Temena A i B trougla ABC ($\overline{AB}=c$, $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$) kreću se respektivno po pravama L_1 i L_2.

Odrediti i ispitati geometrisko mesto temena C.

44. Nacrtati krivu

$$(1) \qquad y=(x^2-x-6)/(x^2+2x-3).$$

Posmatrajući sliku, može se naslutiti da kriva (1) ima centar simetrije. Proveriti ovo premeštajući koordinatni početak u centar simetrije.

Koristeći navedene rezultate, odrediti uslov da bi kriva

$$y=(x^2+px+q)/(x^2+rx+s) \qquad (p,\ q,\ r,\ s \text{ parametri})$$

imala centar simetrije.

45. Posmatrati jedan promenljiv pravougaonik $ABCD$. Teme A ovog pravougaonika je fiksirano, dok se teme B kreće po jednoj fiksiranoj pravoj (L). Prava CD prolazi kroz jednu fiksiranu tačku O prave (L).

Odrediti g. m. temena C, tj. temena koje leži naspram temena A.

Uputstvo. Za početak Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema uzeti tačku O, a za y-osu pravu (L); tada se dobija ovaj

Rezultat. G. m. je kriva $x(x^2+y^2)+y(x_0y-y_0x)=0$, gde su $(x_0,\ y_0)$ koordinate tačke A. Da li je ova kriva unikurzalna?
Čitalac će konstruisati ovu krivu.

46. U jednoj ravni dati su: jedan krug (C) i jedna tačka P. Odrediti g. m. tačke M koja je podjednako udaljena od kruga (C) i tačke P. U slučaju kada se tačka P nalazi van kruga, konstruisati ovo g. m.

47. Pokazati da jednačina

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

definiše krug čiji jedan dijametar ima za krajnje tačke $(x_1,\ y_1)$ i $(x_2,\ y_2)$.

48. Tačka M parabole (P) projektuje se u tačku N na njenoj osi simetrije. Odrediti geometrisko mesto sredine duži MN kada se tačka M kreće po paraboli (P).

49. Ako se tačka P, koja se nalazi u ravni date elipse (E), spoji sa žižom F elipse i u F podigne normala na pravu PF, tada se: ova normala, polara tačke P i direktrisa elipse koja odgovara žiži F seku u istoj tački.

Dokazati ovaj stav.

50. Dokazati da ma koja tangenta parabole seče svoju fokalnu sečicu koja je normalna na osi simetrije kao i direktrisu u tačkama podjednako udaljenim od fokusa.

51. Iz nepomične tačke P kruga $(O; r)$ povučena je njegova tetiva PQ. Odrediti i nacrtati g. m. tačke M kada je

$$\overrightarrow{PM}=k\cdot\overrightarrow{PQ}, \quad k(>0) \text{ parametar.}$$

Razlikovati slučajeve: 1° $k>1$; 2° $k\leqslant 1$.

52. Date su dve krive II reda

$$(\Gamma_k) \quad A_k x^2+2B_k xy+C_k y^2+2D_k x+2E_k y+F_k=0 \quad (k=1,\ 2).$$

1° Koje uslove treba da zadovoljavaju koeficijenti jednačina (Γ_k) da bi kroz presečne tačke krivih (Γ_k) prolazio krug?

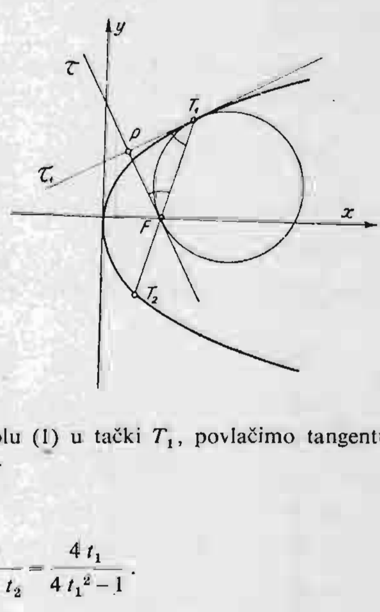
2° Kada su krive (Γ_k) dve parabole od kojih jedna ima za osu simetrije pravu paralelnu x-osi, a druga pravu paralelnu y-osi, da li su uslovi o kojima je reč uvek zadovoljeni?

53. T_1FT_2 je jedna fokalna tetiva date parabole. Posmatrati: krug C_1 koji prolazi kroz fokus F i dodiruje parabolu u tački T_1, i krug C_2 koji prolazi kroz F i dodiruje parabolu u T_2.

Dokazati da se krugovi C_1 i C_2 seku ortogonalno.

Dokaz. Neka je parabola (videti sliku) data svojom metrično-kanoničnom jednačinom

$$(1) \qquad y^2=2px,$$



i neka T_1 i T_2 imaju koordinate (x_1, y_1) i (x_2, y_2). Podesno je, umesto (1), koristiti jednačine

$$x=2pt^2, \qquad y=2pt.$$

Tačkama T_1 i T_2 neka odgovaraju vrednosti t_1 i t_2 parametra t.

Tačke T_1, T_2, F su kolinearne; zato važi

$$\begin{vmatrix} 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 2pt_2^2 & 2pt_2 & 1 \\ p/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

odakle sleduje

$$(2) \qquad 4t_1t_2+1=0.$$

Na krug C_1, koji prolazi kroz F i dodiruje parabolu (1) u tački T_1, povlačimo tangentu τ sa dodirom u F, kao i tangentu τ_1 sa dodirom u T_1.

Koeficijent pravca tangente τ_1 je $k_1=\dfrac{p}{y_1}=\dfrac{1}{2t_1}$.

Koeficijent pravca prave T_1T_2 je $k_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{t_1+t_2}=\dfrac{4t_1}{4t_1^2-1}$.

Koeficijent pravca tangente τ neka je k.

Trougao T_1FP (P je presek tangenata τ i τ_1) je ravnokrak sa vrhom u P. Zato je

$$\measuredangle PT_1F=\measuredangle T_1FP,$$

pa imamo

$$\operatorname{tg}(P\widehat{T_1}F)=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \qquad \operatorname{tg}(T_1\widehat{F}P)=\frac{k-k_2}{1+kk_2}.$$

$$\therefore \quad \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{k-k_2}{1+kk_2}.$$

Ako ovde unesemo vrednosti za k_1 i k_2, dobijamo

(3) $$k=(12\,t_1^2-1)/\{2\,t_1\,(4\,t_1^2-3)\}.$$

Na isti način dobijamo za koeficijent pravca k' tangente u F na krug C_2, koji prolazi kroz F i dodiruje parabolu (1) u T_2:

(4) $$k'=(12\,t_2^2-1)/\{2\,t_2\,(4\,t_2^2-3)\}.$$

Iz (3), (4) i (2) sleduje $k\,k'=-1$.

Zaista, krugovi C_1 i C_2 seku se ortogonalno, što je trebalo dokazati.

54. Tačkama A_1, A_2, A_3 jedne elipse odgovaraju tri potega čija je dužina:

$$\overline{FA_1}=2,\qquad \overline{FA_2}=4,\qquad \overline{FA_3}=8,$$

(F jedna od žiža ove elipse) i uz to su dati uglovi

$$(FA_1,\ FA_2)=\pi/2,\qquad (FA_1,\ FA_3)=\pi.$$

Odrediti metričke elemente ove elipse.

Rezultat. $a=16/3$, $b=16\sqrt{15}/15$, $p=16/5$, $e=\sqrt{10}/5$.

55. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu data je hiperbola $x^2/a^2-y^2/b^2=1$. Sečica paralelna y-osi seče ovu hiperbolu u tačkama M i M'. Prave MF i $M'F'$ (F i F' žiže hiperbole) seku se u tački P.

Odrediti g. m. tačke P, ako se sečica MM' kreće ostajući stalno paralelna y-osi.

Rešenje. Neka je $M(p,\,q)$ jedna tačka hiperbole; tada tačka M' ima koordinate $(p,\,-q)$. Jednačine pravih MF i $M'F'$ su respektivno

(1) $$y=\frac{q}{p-c}(x-c),\qquad (2)\quad y=\frac{-q}{p+c}(x+c)\qquad \{c=(a^2+b^2)^{1/2}\}.$$

Parametri p i q zadovoljavaju takođe uslov

(3) $$p^2/a^2-q^2/b^2=1.$$

Iz (1) i (2) se nalazi: $p=c^2/x$, $q=-cy/x$. Ako se ove vrednosti unesu u (3), dobija se

(4) $$\frac{x^2}{c^4/a^2}+\frac{y^2}{b^2\,c^2/a^2}=1.$$

Čitalac će ispitati da li je elipsa (4) traženo g. m. tačke P, ili samo deo njenog luka.

56. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy data je hiperbola $xy=1$. Uočiti na njoj tri tačke A, B, C čije su apscise $1/y_1$, $1/y_2$, $y_1y_2y_3$, i odrediti tačku koja je podjednako udaljena od tačaka A, B, C.

Da li se tačka $(1/y_3,\,y_3)$ nalazi na krugu koji prolazi kroz tačke A, B, C?

57. Odrediti g. m. sredina tetiva koje stoje normalno na paraboli.

Rezultat. Geometrisko mesto je kriva

$$x=p+y^2/p+p^3/(2\,y^2).$$

Primedba. Prilikom rešavanja zadatka pošlo se od sledeće jednačine parabole

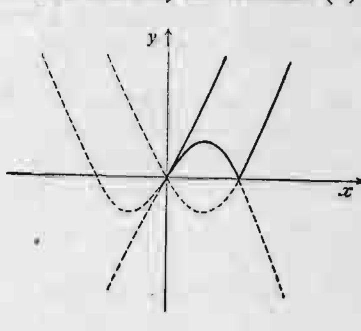
$$y^2=2\,px.$$

58. Dati su parabola i krug koji prolazi kroz žižu ove parabole. Odrediti oblasti u kojima treba da se nalazi centar kruga, da bi tačke preseka ovih krivih bile ili sve realne, ili sve imaginarne, ili dve realne i dve imaginarne.

59. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy koordinate (x, y) tačke M definisane su relacijama:

$$(E) \quad x = |t+1|, \quad y = |t^2 - 1|, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Nacrtati g. m. tačke M.



Rešenje. Umesto (E) možemo pisati:

(1) $x = -t-1, \quad y = t^2 - 1, \quad t \in (-\infty, -1];$

(2) $x = t+1, \quad y = -t^2 + 1, \quad t \in [-1, +1];$

(3) $x = t+1, \quad y = t^2 - 1, \quad t \in [1, +\infty).$

Ako se iz relacija (1), (2), (3) eliminiše t, dobijaju se respektivne krive

$$y = (x+1)^2 - 1 \ (x \geqslant 0); \quad y = -(x-1)^2 + 1 \ (x \in [0, 2]); \quad y = (x-1)^2 - 1 \ (x \geqslant 2).$$

To su, ustvari, segmenti lukova tri parabole.

Jednačinama (E) određena je funkcija $y(x)$ koja je definisana samo za $x \geqslant 0$. Ta funkcija je multiformna. (Videti sliku).

60. AB je nepokretni prečnik, CD pokretni prečnik kruga $ABCD$, tačka E sredina kružnog luka BC.

Prave DE i AC seku se u P.

Ispitati kakav je položaj prave DE prema geometriskom mestu tačke P, kada CD rotira oko svoje sredine u ravni kruga.

Rezultat. Prava DE je u svakoj tački P normala geometriskog mesta. Čitalac će odrediti i ispitati g. m. tačke P.

61. Data je parabola $(P)\, y^2 = 2px$ i jedna pokretna prava (L) koja prolazi kroz žižu ove parabole i seče parabolu u tačkama M_1 i M_2.

1° Pokazati da su tangente u tačkama M_1 i M_2 parabole (P) normalne među sobom i da se presek tangenata nalazi na direktrisi parabole (P).

2° Odrediti geometrisko mesto preseka normala povučenih na parabolu u tačkama M_1 i M_2, kada sečica (L) rotira oko žiže posmatrane parabole.

3° Ako su tačke Q_1 i Q_2 podnožja normala povučenih iz koordinatnog početka na tangente parabole u tačkama M_1 i M_2, pokazati da je geometrisko mesto tačaka Q_1 i Q_2, kada prava (L) rotira oko žiže, jedna kriva III stepena. Nacrtati ovo geometrisko mesto.

62. Pokazati da kriva $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ ima centar simetrije.

Odrediti tačke krive koje imaju minimalno i maksimalno otstojanje od centra i reći šta te tačke pretstavljaju za krivu.

63. Date su dve prave L_1 i L_2 koje se seku pod pravim uglom. U ravni određenoj ovim pravama naći jednačinu geometriskog mesta tačaka čiji je kvadrat otstojanja od prave L_1 direktno proporcionalan otstojanju od prave L_2.

Na osnovu dobijene jednačine odrediti osu simetrije parabole

$$(x + y - 1)^2 = 2(x - y + 2).$$

64. Odrediti geometrisko mesto ortocentra trougla MF_1F_2, kada tačka M opisuje datu elipsu čije su žiže tačke F_1 i F_2.

65. Pokazati da je prava geometrisko mesto centara krugova koji su bisektrise periferija dva data nepomična kruga u ravni.

66. Na krugu su date četiri tačke: A, B, C, D, poređane u naznačenom redu. Ako su tačke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sredine lukova AB, BC, CD, DA, kakav je međusobni položaj pravih $\alpha\gamma$ i $\beta\delta$?

67. Na elipsi $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ uzeti dve tačke A i B. Paralelno pravoj OA povući jednu tangentu elipse koja dodiruje elipsu u tački P. Paralelno pravoj OB povući jednu tangentu iste elipse koja dodiruje elipsu u tački Q. Ove dve tangente seku se u tački T. Ispitati da li su jednaki količnici

$$\overline{TP}/\overline{TQ} \text{ i } \overline{OA}/\overline{OB},$$

gde je O koordinatni početak.

68. Odrediti g. m. centara krugova koji seku elipsu $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ u tačkama A, B, C, D, tako da prava AB prolazi kroz koordinatni početak i prava CD kroz utvrđenu tačku $M_0(x_0, y_0)$.

69. Tangenta u tački P elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ seče pravu $y=b$ u tački T. Odrediti g. m. tačke M koja se dobija presekom prave OP i prave koja prolazi kroz T paralelno y-osi (O koordinatni početak), kad P opiše datu elipsu.

70. Prava (L) koja prolazi kroz tačku $M(\alpha, \beta)$ seče elipsu $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ u tačkama A i B. Tangente elipse u tim tačkama seku se u tački C. Odrediti geometrisko mesto tačke C kada prava (L) rotira oko M.

71. Dokazati da se otsečak ma koje elipsine tangente, zahvaćen između elipsinih tangenata u temenima, koja se nalaze na glavnoj osi elipse, vidi iz fokusa pod pravim uglom.

72. U jednoj ravni dati su krug C i tačka M. Ako se jedno teme ravnostranog trougla nalazi u M, a drugo na periferiji kruga C, odrediti g. m. trećeg temena ovog trougla.

73. Odrediti geometrisko mesto ortogonalnih projekcija žiže jedne elipse na njenim tangentama.

74. Odrediti geometrisko mesto tačke M tako da prava PQ bude tangenta jedne elipse, gde su tačke P i Q ortogonalne projekcije tačke M na osama simetrije date elipse.

75. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy prava OD rotira oko tačke O. Nepomična tačka $A(a, 0)$ ortogonalno se projektuje u P na OD; tačka P se ortogonalno projektuje u Q na Oy; tačka Q se ortogonalno projektuje u M na OD. Odrediti i nacrtati geometrisko mesto tačke M.

76. Odrediti i ispitati g. m. centara krugova upisanih u pravougle trougle sa zajedničkom hipotenuzom.

77. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu temena kvadrata su: $O(0, 0)$, $A(a, 0)$, $B(a, a)$, $C(0, a)$. Prava $y=mx$ seče pravu BC u tački E, prava AE seče y-osu u tački D. Prave OE i BD seku se u tački P.

Pokazati da je g. m. tačke P, kad se m menja, skup elipsi sa parametrom a. Izračunati veličinu površine tih elipsi i odrediti geometrisko mesto centara ovih elipsi kad se a menja.

78. Odrediti i ispitati geometrisko mesto sredina tetiva jednog kruga koje prolaze kroz jednu utvrđenu tačku.

79. Odrediti i ispitati geometrisko mesto temena parabola

$$y^2-2\,axy+a^2\,x^2-x=0 \quad (a \text{ parametar}).$$

80. Odrediti geometrisko mesto sredina tetiva normalnih na jednoj paraboli. Konstruisati dobijenu krivu.

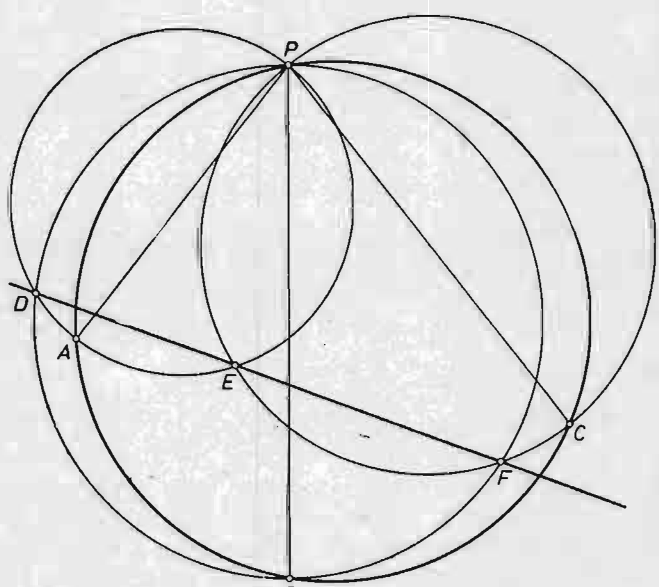
81. Naći i ispitati g. m. tačaka koje su podjednako udaljene od parabole i njene žiže.

82. Odrediti jednačinu normale parabole $y^2=2\,px$, kad je m koeficijent pravca normale. Šta je g. m. tačaka iz kojih se na datu parabolu mogu povući dve uzajamno normalne normale?

83. Naći geometrisko mesto ortogonalnih projekcija žiže parabole na njenim normalama.

84. Data je parabola $y^2=2\,px$. Jedna pokretna sečica S ove parabole prolazi kroz nepokretnu tačku $(a, 0)$. Odrediti i ispitati g. m. preseka normala parabole u tačkama preseka parabole i sečice S.

85. Iz tačke P jednog kruga povučene su tri tetive: PA, PB, PC (A, B, C tačke na krugu). Ako se nad ovim tetivama kao prečnicima konstruišu tri kruga, oni se dva po dva seku u tačkama D, E, F koje su kolinearne.



Uputstvo. Rešiti problem pomoću polarnih koordinata. Tačke D, E, F pripadaju jednoj pravoj.

86. Odrediti jednačinu kruga čije su dve tetive date jednačinama

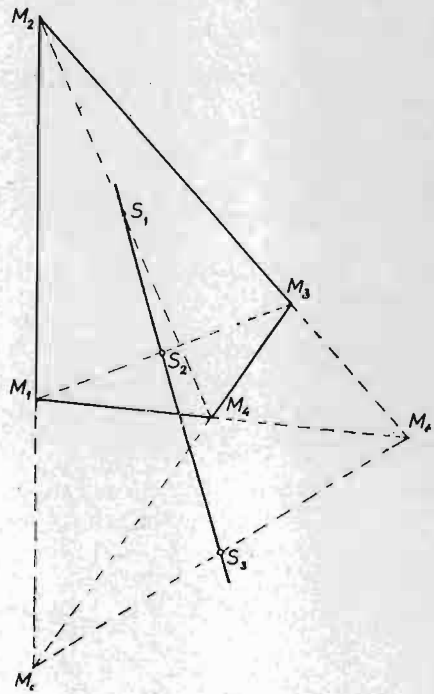
$$x^2+y^2+a_\nu\,x+b_\nu\,y+c_\nu=0, \qquad A_\nu\,x+B_\nu\,y+C_\nu=0 \qquad (\nu=1, 2).$$

Da li ovaj zadatak uvek ima rešenja?

87. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu date su koordinate temena četvorougla $M_1 M_2 M_3 M_4$ (videti sliku), tj.

$$M_k(x_k, y_k) \quad (k=1,2,3,4).$$

Pokazati da su sredine S_1, S_2, S_3 triju dijagonala ovog četvorougla kolinearne.



Rešenje. Posmatrati determinantu

$$\Delta = 4 \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_3) & \frac{1}{2}(y_1+y_3) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_2+x_4) & \frac{1}{2}(y_2+y_4) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_5+x_6) & \frac{1}{2}(y_5+y_6) & 1 \end{vmatrix}.$$

Ona pretstavlja dvostruku veličinu površine trougla čija su temena tačke S_1, S_2, S_3.

Determinanta Δ može se napisati kao zbir sledeće četiri determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_6 & y_6 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_5 & y_5 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sve ove determinante su jednake nuli budući da su tačke M_1, M_2, M_5, odnosno M_1, M_4, M_6 odnosno M_5, M_2, M_4, odnosno M_5, M_3, M_4 kolinearne.

Stoga je $\Delta=0$, što znači da su tačke S_1, S_2, S_3 kolinearne.

88. Ako je $r>0$ i ako su A_k, B_k, C_k $(k=1,2)$ realni parametri, odrediti oblasti ravni Oxy za koje je

$$\big|\,|A_1 x + B_1 y + C_1| - |A_2 x + B_2 y + C_2|\,\big| < r.$$

Posebno posmatrati slučaj

$$\big|\,|x-a| - |y-b|\,\big| < r.$$

89. Dat je pravougli trougao ABC ($\sphericalangle BAC = 90^0$). Tačka H je ortogonalna projekcija tačke A na pravoj BC. Na kateti AB, između tačaka A i B, uočiti tačku M. Iz M je spuštena normala MN (N podnožje normale) na pravu AH. Normala u tački N na pravoj NC seče pravu AB u tački Q.

Proveriti da li je $\overline{BM} = \overline{AQ}$.

90. U odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem data je tačka $M(1, 1)$. Prava kroz M rotira oko tačke M i seče x-osu i y-osu respektivno u tačkama A i B. Sastaviti jednačinu g. m. preseka pravih od kojih jedna prolazi kroz A paralelno y-osi, a druga kroz B paralelno x-osi.

Ispitati ovo geometrisko mesto.

91. Odrediti geometrisko mesto sredina strana kvadrata koji su upisani u dati kvadrat.

92. Obrazovati jednačinu parabole koja prolazi kroz tačke $(0, -1)$, $(0, 3)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$, koje su date u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem.

Odrediti koordinate temena i žiže ove parabole.

Rezultat. Jednačina parabole glasi $(x-y)^2 - 2(x+y) - 3 = 0$.

93. Ako su ose dve parabole paralelne, zajednička sečica ovih parabola polovi njihovu zajedničku tangentu.

Dokazati ovu osobinu.

Rešenje. U pravouglom koordinatnom sistemu Oxy uočimo dve parabole od kojih jedna

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

ima za osu simetrije x-osu, dok je osa druge paralelna x-osi, tj. jednačina druge je

$$y^2 = 2qy + 2rx + s. \tag{2}$$

Neka su $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ koordinate dodira zajedničke tangente parabola (1) i (2) i neka je P_3 sredina duži $P_1 P_2$.

Jednačina tangente krive (1) u tački P_1 je

$$yy_1 = p(x + x_1). \tag{3}$$

Jednačina tangente krive (2) u tački P_2 je

$$yy_2 = q(y + y_2) + r(x + x_2) + s. \tag{4}$$

Kako se tačke P_2 i P_1 nalaze na pravama (3) i (4), važe relacije

$$y_2 y_1 = p(x_2 + x_1),$$

$$y_1 y_2 = q(y_1 + y_2) + r(x_1 + x_2) + s.$$

Odavde sleduje

$$q(y_1 + y_2) + (r - p)(x_1 + x_2) + s = 0. \tag{5}$$

Jednačina zajedničke sečice krivih (1) i (2) je

$$2qy + 2(r - p)x + s = 0. \tag{6}$$

Koordinate sredine duži $P_1 P_2$ su $\{(x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2\}$. Da li se tačka P_3 nalazi na pravoj (6)? Odgovor je potvrdan, jer je izraz

$$q(y_1 + y_2) + (r - p)(x_1 + x_2) + s$$

jednak nuli s obzirom na relaciju (5).

Ovim smo dokazali navedenu osobinu parabola koje imaju paralelne ose.

II. ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU[1]

94. Dokazati stav:

Da bi se jedan prav ugao (α), čiji nijedan krak nije ortogonalan na ravni P, ortogonalno projektovao na ravan P u prav ugao, potrebno je i dovoljno da jedan od krakova ugla (α) bude paralelan sa ravni P.

---

[1] Videti knjižicu: *D. Mihailović: Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru* (1958, Beograd, 180 strana; sveska 8 edicije *Matematička biblioteka*).

U ovoj knjižici naveden je niz interesantnih zadataka iz analitičke geometrije, koji su rešeni vektorskim metodom.

Dokaz. Neka ravan P bude Oxy-ravan ortogonalnog trijedra $Oxyz$. — Označimo teme ugla (α) sa A i na kracima ugla uzmimo dve tačke B i C. Vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ definisani su svaki sa tri skalara, naime:

$$\overrightarrow{AB}=\{a, b, c\}, \qquad \overrightarrow{AC}=\{a', b', c'\}.$$

Vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ projektuju se na ravan P u vektore

$$\overrightarrow{A'B'}=\{a, b, 0\}, \qquad \overrightarrow{A'C'}=\{a', b', 0\}.$$

Budući da je $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$, postoji uslov

$$(1) \qquad aa'+bb'+cc'=0.$$

Ako je ugao $B'A'C'$ prav, tj. ako je

$$(2) \qquad aa'+bb'=0,$$

tada iz (1) i (2) sleduje $cc'=0$.

Ako su uslovi (1) i (2) jednovremeno zadovoljeni, tada je $cc'=0$, tj. bar jedan od faktora c, c' jednak je nuli, odnosno bar jedan od krakova AB, AC ugla (α) paralelan je sa ravni P. Ovim smo dokazali da je uslov naveden u stavu *potreban*.

Ako je $cc'=0$, tj. ako je bar jedan od krakova AB, AC ugla (α) paralelan sa P, tada relacija (1) povlači za sobom (2), tj. ugao — projekcija $B'A'C'$ je prav. Ovim smo dokazali da je uslov naveden u stavu i dovoljan.

95. Data je sfera (S) $x^2+y^2+z^2-1=0$ i tačka $M(4, 5, 6)$.

1° Koja je tačka sfere (S) najbliža tački M?

2° Kolika je veličina onog dela sferne površine (S) koji se vidi iz tačke M?

3° Šta je geometrisko mesto tačaka dodira tangenata povučenih iz tačke M na datu sferu?

96. Neka su A, B, C, D četiri tačke u prostoru; neka je P sredina duži AB, a Q sredina duži CD.

Dokazati vektorsku relaciju $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Rešenje. Prema pretpostavci je

$$(1) \qquad \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=0, \qquad (2) \qquad \overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DQ}=0.$$

Možemo pisati ove relacije:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD})+(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC})$$
$$=2\overrightarrow{PQ} \quad \{\text{na osnovu (1) i (2)}\};$$
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QC})+(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD})$$
$$=2\overrightarrow{PQ} \quad \{\text{na osnovu (1) i (2)}\}.$$

97. Dokazati relaciju

$$(1) \qquad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0,$$

gde su A, B, C, D četiri tačke u prostoru.

Uputstvo.

$$(2) \qquad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}.$$

Relacija (1) može se dokazati ne uzimajući relacije (2) kao polazne.

98. Koji uslovi treba da budu ispunjeni da bi n tačaka $P_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ležalo u jednoj ravni.

Odgovor. Ako je rang pravougaone matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ y_1 & y_2 & & y_n \\ z_1 & z_2 & & z_n \end{Vmatrix}$$

jednak 3, tada sve tačke P_k leže u jednoj ravni.

Ovaj se rezultat može formulisati i bez upotrebe matrica, što se ostavlja kao zadatak čitaocu.

99. U pravouglom trijedru osa $Oxyz$ date su četiri prave:

$$(1) \quad y = a, \quad z = a'; \qquad (2) \quad z = b, \quad x = b';$$

$$(3) \quad x = c, \quad y = c'; \qquad (4) \quad x = y = z.$$

1° Odrediti jednačine prave koja prolazi kroz tačku (k, k, k) i seče prave (1) i (2).

2° Pokazati da postoje dve prave (P_1) i (P_2) koje seku sve četiri prave (1), (2), (3), (4) i da prave (P_1) i (P_2) seku pravu (4) u dve tačke, određene sa (k, k, k), gde je k definisano kvadratnom jednačinom

$$(k-a)(k-b)(k-c) = (k-a')(k-b')(k-c').$$

Rezultat. 1° $$\frac{x-k}{(a'-k)(b'-k)} = \frac{y-k}{(a-k)(b-k)} = \frac{z-k}{(a'-k)(b-k)}.$$

100. U Dekartovom pravouglom trijedru osa $Oxyz$ date su tačke

$$A(2a, 0, 0), \quad B(0, 3a, 0), \quad C(0, 0, 9a).$$

Odrediti veličinu površine trougla ABC i jednačine kruga koji prolazi kroz tačke A, B, C.

Rezultat. area $\triangle ABC = (33/2)\,a^2$.

101. Odrediti sve ravni koje su podjednako udaljene od četiri nekomplanarne tačke $P_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Uputstvo i rezultat. Takvih ravni ima ukupno 7. Prilikom određivanja jednačina tih ravni treba razlikovati dva slučaja: 1° tri tačke se nalaze sa jedne strane tražene ravni, a četvrta sa druge strane. — Ako se date četiri tačke smatraju kao temena jednog tetraedra, tada se rezultatu može dati geometrisko tumačenje, što će čitalac učiniti.

102. U prostoru posmatrati dve fiksne prave (L_1) i (L_2) koje obrazuju prav ugao (one mogu biti i mimoilazne). Ako je P jedna varijabilna tačka na (L_1) i ako je (Π) jedna promenljiva ravan koja prolazi kroz pravu (L_2), pokazati da prava koja prolazi kroz P i koja stoji normalno na (Π) leži u jednoj fiksnoj ravni.

103. Duž AB je zajednička normala pravih AP i BQ koje leže u prostoru. Tačka H je sredina duži AB, a tačka M sredina duži PQ.

Dokazati da su prave HM i AB ortogonalne.

104. Po pravama

$$(L_1) \quad \frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}, \qquad (L_2) \quad \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

kreću se respektivno dve tačke M i N sa jednakim i stalnim brzinama. Dok se tačka M kreće po (L_1) u oblasti $z>0$, dotle se tačka N kreće po (L_2) u oblasti $z<0$, tako da one jednovremeno prolaze kroz ravan Oxy.

Odrediti jednačinu površine koju opisuje prava što prolazi kroz tačke M i N.

105. Date su tri tačke $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$ $(a \neq 0)$ u odnosu na pravougli trijedar osa $Oxyz$.

1° Odrediti jednačinu sfere (S_1) koja prolazi kroz tačke O, A, B, C.

2° Odrediti jednačinu sfere (S_2) čiji glavni krug prolazi kroz tačke A, B, C.

3° Kada parametar a varira, krug koji prolazi kroz tačke A, B, C opisuje jednu površinu. Odrediti jednačinu ove površine i reći koja je to površina.

Rešenje. 1° Krug (K) koji prolazi kroz tačke A, B, C može biti definisan jednačinama

$$(1) \qquad x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad x+y+z=a.$$

Jednačina sfera koje prolaze kroz krug (K) ima oblik

$$(2) \qquad x^2+y^2+z^2-a^2+\lambda(x+y+z-a)=0 \qquad (\lambda \text{ parametar}).$$

Da bismo odredili onu od sfera (2) koja prolazi kroz tačku $(0,0,0)$ u (2) stavimo: $x=0$, $y=0$, $z=0$, pa dobijamo $\lambda=-a$.

Prema tome, sfera koja prolazi kroz tačke $O, A, B. C$ definisana je jednačinom

$$x^2+y^2+z^2-a(x+y+z)=0.$$

2° Krug (K) biće glavni krug sfere koja prolazi kroz tačke A, B, C ako centar sfere (2), odnosno tačka $(-\lambda/2,\ -\lambda/2,\ -\lambda/2)$, leži u ravni

$$x+y+z-a=0.$$

Iz ovog uslova sleduje $\lambda=-2a/3$.

Jednačina sfere, čiji glavni krug prolazi kroz tačke A, B, C, glasi

$$x^2+y^2+z^2-(2a/3)(x+y+z)-a^2/3=0.$$

3° Ako se iz jednačina (1) eliminiše parametar a, dobija se

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2, \quad \text{tj.} \quad xy+yz+zx=0.$$

Geometrisko mesto je obrtni konus čija je osa obrtanja prava $x=y=z$.

Da li tačka $(0,0,0)$ pripada geometriskom mestu?

106. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ date su ravni (E_1) $x=0$ i (E_2) $y=2$ i prava

$$(L) \qquad x=1+t, \quad y=2(1+t), \quad z=-t \qquad (-\infty<t<+\infty).$$

Prava (L) seče ravni (E_1) i (E_2) respektivno u tačkama P_1 i P_2.

Na preseku ravni (E_1) i (E_2) odrediti tačku P_3 tako da je area trougla $P_1 P_2 P_3$ minimalna.

107. Odrediti uslov da tri ravni

$$A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0 \qquad (k=1, 2, 3)$$

budu paralelne jednoj istoj pravoj.

108. Ako su A, B, C, D četiri tačke u prostoru koje zadovoljavaju uslov

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2,$$

tada je prava BC normalna na pravoj AD.

109. Da li su prave

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta}=\frac{y-a}{\alpha}=\frac{z-a-d}{\alpha+\delta}, \qquad \frac{x-b+c}{\beta-\gamma}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

komplanarne?

110. Iz tačke $M(p, q, r)$ povučena je normala MP (P podnožje normale) na pravu

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Normala MP produžena je (u smislu od M ka P) za PQ, tako da je $\overline{PQ}=2\,\overline{MP}$.

Izračunati koordinate tačke Q.

111. Odrediti uslov da jednačine

$$qz-ry=a, \quad rx-pz=b, \quad py-qx=c$$

pretstavljaju projekcije jedne iste prave u ravnima Oyz, Ozx, Oxy Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$.

112. Odrediti jednačinu sfere (S) koja prolazi kroz nekomplanarne tačke $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1, 2, 3, 4)$ i izračunati zapreminu tela koje ograničavaju tangentne ravni sfere (S) u njenim tačkama M_k $(k=1, 2, 3, 4)$.

113. Pokazati da postoji jedna fiksna prava oko koje rotira ravan

$$(1) \qquad (t+1)^2 x+(t^2-t+1)\,y+(t^2+1)\,z=0,$$

kada se t menja.

Diskutovati o broju ravni (1) koje prolaze kroz datu tačku (x_0, y_0, z_0).

114. Iz tačke $(0, 0, 6)$ povučene su tangente na sferu

$$2x^2+2y^2+2z^2-7x-6y-9z+13=0.$$

Odrediti jednačinu površine, koju obrazuje ovaj skup tangenata, i jednačinu preseka (S) te površine sa Oxy ravni.

Odrediti veličinu površine koju ograničava presek (S) u ravni Oxy.

115. Data je površina

$$(S) \qquad z=\left|\frac{u}{u-1}\right|^2 \qquad (u=x+iy,\ i=\sqrt{-1},\ z \text{ kota}).$$

1° U odnosu na ravan Oxy odrediti nivoske linije ove površine i ispitati ih.

2° Posmatrati prave koje su normalne na x-osi i prolaze kroz tačku $(1, 0, 0)$. Odrediti preseke ove prave sa površinom (S).

116. Sastaviti jednačinu sfere čiji je centar tačka (2, 3, −1) i koja otseca na pravoj

$$5x-4y+3z+20=0, \quad 3x-4y+z-8=0$$

duž veličine 16.

Rezultat. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=289.$

117. Sastaviti jednačinu sfere koja prolazi kroz krugove:

$$(C_1) \qquad x^2+z^2=25, \quad y=2;$$

$$(C_2) \qquad x^2+z^2=16, \quad y=3.$$

Rešenje. Neka je $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ jednačina sfere.
Presek sa ravni $y=2$ je krug $(x-a)^2+(z-c)^2=r^2-(2-b)^2$.
Na osnovu (C_1) imamo:

$$a=0, \quad c=0, \quad r^2-(2-b)^2=25.$$

Polazeći od (C_2), dobija se,

$$a=0, \quad c=0, \quad r^2-(3-b)^2=16.$$

Tražena sfera je

$$x^2+(y+2)^2+z^2=41.$$

Primedba. Da li se iz jednačina (C_1) i (C_2) može neposredno zaključiti, gde se nalazi centar sfere?

118. Kroz pravu

$$x=4t+4, \quad y=3t+1, \quad z=t+1 \quad (-\infty<t<+\infty)$$

provesti ravni koje će dodirivati sferu

$$x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0.$$

Uputstvo. Odrediti međusobni položaj date prave i sfere.
Rezultat. Jedina ravan sa navedenom osobinom je $x-y-z-2=0$. Obrazložiti ovaj rezultat.

119. Obrazovati jednačinu sfere koja prolazi kroz tačku $A(2, -1, 1)$ i kroz krug

$$(1) \qquad x^2+y^2+z^2-2x+3y-6z-5=0,$$

$$(2) \qquad 5x+2y-z-3=0.$$

Rešenje. Tražena sfera neka je definisana jednačinom

$$(3) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Skup svih sfera koje sadrže krug definisan sa (2) i (3) je

$$(4) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2+k(5x+2y-z-3)=0 \qquad (k \text{ parametar}).$$

Jedna od tih sfera je sfera definisana sa (1).
Jednačine (1) i (4) biće identične ako su ispunjeni uslovi:

$$(5) \qquad -2a+5k=-2, \quad -2b+2k=3, \quad -2c-k=-6, \quad a^2+b^2+c^2-r^2-3k=-5.$$

Budući da se tačka A nalazi na sferi (3), postoji još uslov

$$(6) \qquad (2-a)^2+(1+b)^2+(1-c)^2=r^2.$$

Iz jednačina (5) i (6) sleduje

$$a=-13/2, \quad b=-9/2, \quad c=9/2, \quad r^2=387/4, \quad k=-3.$$

120. Izračunati najkraće otstojanje između sledeće dve prave:

$$(1) \qquad x+y-z=1, \quad 2x+z=3;$$

$$(2) \qquad x=y=z-1.$$

Uputstvo i rezultat. Posmatrati prave (1) i (2) u parametarskom obliku

$$(1') \qquad x=t, \ y=4-3t, \ z=3-2t \quad (t \text{ parametar});$$

$$(2') \qquad x=\tau, \ y=\tau, \ z=\tau+1 \quad (\tau \text{ parametar}).$$

Kvadrat otstojanja između proizvoljne tačke na pravoj (1') i proizvoljne tačke na pravoj (2') je

$$D^2=(t-\tau)^2+(3t+\tau-4)^2+(2t+\tau-2)^2.$$

D^2 je funkcija promenljivih t i τ. Primenom stava za određivanje extremuma funkcija, koje zavise od dve promenljive, nalazi se $(D^2)_{\min}=104/169$.

Krajnje tačke duži koja je normalna na pravama (1') i (2') su

$$(12/13, 16/13, 15/13), \quad (10/13, 10/13, 23/13).$$

Primedba. Rešiti ovaj zadatak i bez upotrebe izvoda.

121. Date su dve neparalelne ravni P i Q i jedan vektor $\overrightarrow{MN}$. Odrediti g. m. krajeva vektora jednakih vektoru $\overrightarrow{MN}$, pod uslovom da se počeci i krajevi ovih vektora nalaze stalno u ravnima P i Q. — Zadatak rešiti u opštem slučaju i posebno kada su u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu dati ovi podaci:

$$(P) \quad x+y-z-1=0, \qquad (Q) \quad 3x-y+z-2=0;$$

$$M(3, 1, -1), \quad N(-1, 2, 0).$$

122. Neka su A, B, C, D četiri kolinearne tačke u naznačenom redu i neka je P jedna tačka u prostoru.

Pokazati da relacija

$$\overline{PA}+\overline{PD}\geqslant\overline{PB}+\overline{PC}$$

važi za sve položaje tačke P, ako je $\overline{AB}=\overline{CD}$.

123. Izračunati površinu zone sfere

$$x^2+y^2+z^2-4x-3y+2z=0$$

između ravni

$$x+2y-z=4, \quad x+2y-z=8.$$

Rezultat. $4\pi\,(29/6)^{1/2}$.

124. U Dekartovom pravouglom trijedru osa date su dve ravni

$$(1) \qquad Ax+By+Cz+D_1=0, \quad Ax+By+Cz+D_2=0 \quad (|D_1|+|D_2|\neq 0)$$

i sfera

$$(2) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Odrediti površinu zone sfere (2) između ravni (1).

125. Ako se sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ preseče sa ravni $lx+my+nz=p$, tada dobijamo ove rezultate:

1° Poluprečnik preseka (kruga) je

$$r^2=a^2-p^2/(l^2+m^2+n^2);$$

2° Koordinate centra preseka (kruga) određene su relacijama

$$x/l=y/m=z/n=p/(l^2+m^2+n^2);$$

3° Jednačina projekcije preseka u xy-ravni je

$$(l^2+n^2)\,x^2+(m^2+n^2)\,y^2+2\,lmxy-2\,p\,(lx+my)+p^2-a^2n^2=0.$$

Proveriti navedene rezultate.

126. Odrediti parametar a tako da ravan $x+y+az=1$ seče elipsoid

$$3\,x^2+2\,y^2+z^2=1.$$

Rezultat. $6\,a^2\geqslant 1$.

127. Pokazati da je $1/\sqrt{3}$ najkraće rastojanje između pravih

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1} \quad \text{i} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}.$$

Ispitati da li zajednička normala ovih pravih leži u preseku ravni

$$4\,x+y-5\,z=0, \qquad 7\,x+y-8\,z=31.$$

128. Iz temena A jednog pravouglog paralelepipeda povučene su tri dijagonale na stranama tog paralelepipeda i svaka od tih dijagonala produžena je za polovinu svoje dužine.

Krajevi produženih dijagonala i teme pravouglog paralelepipeda, koje leži naspram A, jesu komplanarni. Dokazati ovu osobinu.

Da li ovo važi i za kosougli paralelepiped?

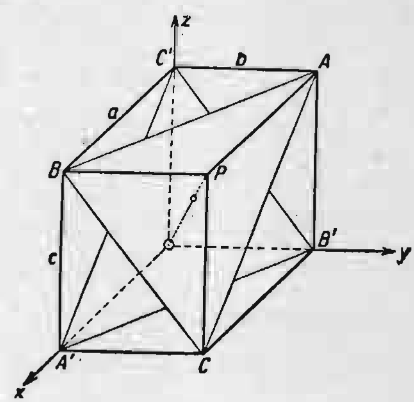
129. U Dekartovom pravouglom triedru osa $Oxyz$ uočiti tačku $P(a,b,c)$ čije su ortogonalne projekcije u koordinatnim ravnima tačke A, B, C, a ortogonalne projekcije na koordinatnim osama tačke A', B', C'.

Odrediti jednačine ravni kroz tačke A, B, C i kroz tačke A', B', C' (videti sliku).

Pokazati da su ove ravni paralelne i izračunati njihovo otstojanje.

Rezultat. Otstojanje između ravni iznosi

$$abc\,/\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^{1/2}.$$



130. Dat je trougao ABC i jedna proizvoljna tačka P u prostoru. Ispitati da li je

$$3\,(\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2)\geqslant\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2.$$

Za koji položaj tačke P važi znak jednakosti?

131. Promenljiva sfera dodiruje ravan Oxy u tački P i prolazi kroz tačke

$$M(a, 0, b), \quad N(0, 0, c), \text{ gde je } b \neq c \text{ i } bc > 0.$$

Pokazati da je geometrisko mesto tačke P krug.

132. Dat je tetraedar čija su temena A, B, C, D i neka je P jedna tačka u ovom tetraedru.

Tačke A', B', C', D' su ortogonalne projekcije tačaka A, B, C, D u ravnima

$$BCD, \ CDA, \ DAB, \ ABC.$$

Dokazati relaciju

$$\Sigma \overline{PA} (\text{area } \triangle BCD) \geqslant 3 \, \Sigma \overline{PA'} (\text{area } \triangle BCD),$$

gde je, na primer,

$$\begin{aligned} \Sigma \overline{PA} (\text{area } \triangle BCD) \equiv \ & \overline{PA} (\text{area } \triangle BCD) \\ & + \overline{PB} (\text{area } \triangle CDA) \\ & + \overline{PC} (\text{area } \triangle DAB) \\ & + \overline{PD} (\text{area } \triangle ABC). \end{aligned}$$

Uputstvo. Neka su $H_A, H_B \ H_C, H_D$ visine tetraedra, ako se za osnovu uzmu respektivno trouglovi

$$BCD, \quad CDA, \quad DAB, \quad ABC.$$

Tada je

$$H_A \leqslant \overline{PA} + \overline{PA'},$$

$$H_B \leqslant \overline{PB} + \overline{PB'}$$

itd.

133. Tačka M se kreće duž krive

$$x = t^3, \quad y = t^2, \quad z = 1 - t.$$

T je tačka koordinatne ravni $z = 0$ koja se sa tačkom M i tačkom $A(0, 0, 1)$ nalazi na istoj pravoj.

1° Šta je geometrisko mesto tačaka T?

2° Kada tačka M krene iz položaja $t = -2$ u smeru u kome parametar t raste, da li se ona približuje ili se udaljuje od tačke A?

134. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ data je površina

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,xyz = 1.$$

1° Ispitati preseke površine (1) sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima.

2° Ispitati preseke površine (1) sa ravnima koje su bisektrise uglova koje grade po dve i dve koordinatne ravni.

135. Dokazati da su preseci površine $xz - y^2 = 0$ sa ravnima, koje su paralelne ravni $x + y + z = 0$, krugovi.

136. Odrediti jednačinu cilindra čija je generatrisa prava

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{4},$$

a direktrisa parabola $x^2=2y,\ z=0$.

137. Odrediti jednačinu konusa čije je teme u tački $(0, 0, 1)$, a direktrisa je krug $(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$.

138. Odrediti jednačinu rotacione površine koja postaje rotacijom krive $x^2=z+1,\ y=0$ oko z-ose.

139. Kroz tačke kruga $x^2+y^2=1,\ z=1$ i kroz tačke prave $x=0,\ z=0$ povlače se prave paralelne Ozx ravni.

1° Naći jednačinu $z=f(x, y)$ površine koju čine ovako povučene prave.

2° Proučiti preseke površine $z=f(x, y)$ sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima.

140. Ravan (P) koja prolazi kroz z-osu seče ravni $z=\lambda x$ i $z=\mu y$ respektivno po pravama (L_1) i (L_2). Odrcditi ravan (P) tako da prave (L_1) i (L_2) budu normalne među sobom i ispitati kakve uslove moraju zadovoljavati parametri λ i μ da bi zadatak bio mogućan.

141. Date su prave

$$(L_1)\quad \begin{aligned} x&=a,\\ y&=b; \end{aligned} \qquad\qquad (L_2)\quad \begin{aligned} x+\lambda y+z&=0,\\ \lambda x-y-z&=0. \end{aligned}$$

1° Naći jednačinu zajedničke normale ove dve prave.

2° Odrediti geometrisko mesto ovih normala kad parametar λ varira.

142. Direktrisa konusne površine data je jednačinama

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad x+y+z=R,$$

a njena generatrisa prolazi kroz tačku $M(\lambda, 0, 0)$. Odrediti jednačinu konusne površine i jednačinu njenog preseka sa Oyz ravni.

Kad se parametar λ menja, ispitati prirodu preseka.

143. Pod kojim će uslovima prave

$$(L_1)\quad \frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}, \qquad (L_2)\quad \frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$

imati samo jednu zajedničku tačku R. Pokazati da u tom slučaju ravan, određena pravama (L_1) i (L_2), prolazi kroz koordinatni početak.

144. Ako se spoje po dve i dve od tačaka $(2, 2, 3)$, $(1, 4, 4)$, $(0, 0, 5)$, $(-1, 5, 3)$, one određuju šest duži.

Ispitati da li šest simetriskih ravni ovih duži imaju zajedničku tačku i, u potvrdnom slučaju, odrediti je.

145. Dati su elipsoid

$$(1) \qquad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

i ravan

$$(2) \qquad x + y + z = 0.$$

U svima presečnim tačkama elipsoida (1) i ravni (2) podignute su normale na elipsoid (1) i one obrazuju geometrisko mesto S.

Pokazati da je elipsa $3x^2 + 9xy + 15y^2 = 2$ presek geometriskog mesta S sa ravni $z = 0$.

Rešenje. Označimo sa (x, y, z) podnožje normale elipsoida i sa (X, Y, Z) tekuće koordinate.

Normala u tački (x, y, z) definisana je relacijama

$$(3) \qquad \frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1},$$

gde je $p = -x/3z$, $q = -2y/3z$.

Tačka (x, y, z) zadovoljava uslove

$$(4) \qquad x + y + z = 0, \qquad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6.$$

Da bismo našli presek površine S sa ravni $Z = 0$, u (3) stavimo $Z = 0$, što daje

$$(5) \qquad X = (2/3)\,x, \qquad Y = (1/3)\,y.$$

Ako se iz (4) i (5) eliminišu parametri x, y i z, dobija se

$$3X^2 + 9XY + 15Y^2 = 2,$$

kao što je i trebalo pokazati.

Čitalac će odrediti parametre položaja i forme ove elipse.

146. Odrediti parametre a, b, α, β tako da bi postojala sfera (S) na kojoj se nalaze krugovi:

$$(C_1) \qquad x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = \alpha;$$

$$(C_2) \qquad y^2 + z^2 = b^2, \qquad x = \beta.$$

147. Odrediti jednačinu sfere koja dodiruje ravan

$$x + y + 2z = 12$$

i na kojoj se nalazi krug

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 27 = 0, \qquad z = 0.$$

148. Obrazovati jednačinu sfere koja prolazi kroz koordinatni početak i krug

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \qquad 2x - 3y + 5z - 5 = 0.$$

149. Date su vektorske jednačine dve prave

$$(L_1) \qquad \vec{r} = \vec{a} + \lambda_1 \vec{b}_1, \qquad\qquad (L_2) \qquad \vec{r} = \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}_2,$$

gde su: $\vec{r}$ vektor položaja ma koje tačke prave (L_1) odnosno (L_2) s obzirom na fiksnu tačku O; λ_1 i λ_2 dva skalarna parametra; $\vec{a}$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ tri vektora.

Data je takođe vektorska jednačina ravni

$$(P) \qquad \vec{r}\cdot\vec{n}=p,$$

gde su: $\vec{r}$ vektor položaja ma koje tačke ravni u odnosu na tačku O; $\vec{n}$ ort normale povučene iz tačke O na ravan (P); p jedan skalar.

Kao funkciju datih veličina $\vec{a}$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{n}$, p, izraziti, površinu trougla, čije je jedno teme u preseku pravih (L_1) i (L_2), a druga dva temena u preseku istih pravih sa ravni (P).

150. Počeci vektora $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ nalaze se u istoj tački O. Napisati jednačinu ravni u kojoj se nalaze oba vektora i jednačinu prave koja prolazi kroz krajnje tačke datih vektora.

151. Dokazati formule:

1° $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{B}\times\vec{C})=[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\,\vec{B}$;

2° $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})+(\vec{B}\times\vec{C})\cdot(\vec{A}\times\vec{D})+(\vec{C}\times\vec{A})\cdot(\vec{B}\times\vec{D})=0$;

3° $|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+|\vec{C}|^2+|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|^2=|\vec{A}+\vec{B}|^2+|\vec{B}+\vec{C}|^2+|\vec{C}+\vec{A}|^2$;

4° $\vec{A}\times\{\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})\}=[\vec{A}\,\vec{C}\,\vec{D}]\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D})$;

5° $\vec{D}\cdot\{(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{A}\times\vec{C})\}=(\vec{A}\cdot\vec{D})\,[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]$.

Navesti geometrisku interpretaciju formule 3°.

152. Ako je

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{D}, \qquad \vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}\times\vec{D},$$

šta se može reći o vektorima $\vec{A}-\vec{D}$ i $\vec{B}-\vec{C}$?

153. Dati su vektori:

$$\vec{A}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \qquad \vec{B}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}, \qquad \vec{C}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}.$$

1° Razložiti vektor $\vec{C}$ u komponente po pravcima vektora $\vec{A}$, $\vec{B}$ i $\vec{A}\times\vec{B}$.

2° Izračunati ugao koji zaklapa vektor $\vec{C}$ sa ravni određenom vektorima $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

154. Šta se može reći o vektorima $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, ako je $(\vec{C}\times\vec{B})\times\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\times\vec{B}$?

155. Dokazati relaciju

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{\alpha}\,\vec{\beta}\,\vec{\gamma}]^4,$$

gde je

$$\vec{a}=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}), \qquad \vec{b}=(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\times(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}), \qquad \vec{c}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\times(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}).$$

156. Dokazati relaciju

$$[(\vec{A}\times\vec{P})(\vec{B}\times\vec{Q})(\vec{C}\times\vec{R})]+[(\vec{A}\times\vec{Q})(\vec{B}\times\vec{R})(\vec{C}\times\vec{P})]+[(\vec{A}\times\vec{R})(\vec{B}\times\vec{P})(\vec{C}\times\vec{Q})]\equiv 0.$$

157. Tri tačke A, B, C koje ne leže na istoj pravoj definisane su vektorima položaja $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, u odnosu na nepomičnu tačku O.

1° Naći vezu koja postoji između vektora položaja $\vec{r}$ ma koje tačke ravni koja prolazi kroz tačke A, B, C i vektora položaja te tri tačke.

2° Izraziti veličinu površine trougla ABC u funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$.

3° Izraziti otstojanje od tačke C do prave koja prolazi kroz tačke A i B u funkciji od $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$.

158. Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori položaja tačaka A, B, C u odnosu na pol O, pokazati da je vektor $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$ normalan na ravni kroz tačke A, B, C.

159. Neka su $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ vektori položaja tačaka A i B prema polu O. Izraziti najkraće otstojanje tačke O od prave AB u funkclji od $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$.

160. Ako su četiri tačke definisane svojim vektorima položaja, napisati uslov da bi one bile komplanarne.

161. Tri tačke A, B, C definisane su vektorima položaja $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ u odnosu na utvrđenu tačku O. — Izvesti uslov koji treba da zadovoljavaju $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ da bi tačke A, B, C ležale na jednoj pravoj.

162. Koji uslov moraju zadovoljavati vektori $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ da bi vektori

$$\vec{B}\times\vec{C},\quad \vec{C}\times\vec{A},\quad \vec{A}\times\vec{B}$$

bili linearno nezavisni?

163. Pokazati da su vektori $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$, $\vec{A}\times\vec{D}$ komplanarni.

164. Dokazati relaciju

$$(1)\qquad [\vec{B}\,\vec{C}\,\vec{D}]\,\vec{A}-[\vec{C}\,\vec{D}\,\vec{A}]\,\vec{B}+[\vec{D}\,\vec{A}\,\vec{B}]\,\vec{C}-[\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}]\,\vec{D}=0.$$

Rešenje. Klamkin je dokazao relaciju (1) na sledeći način. Posmatrajmo vektor

$$\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{A} & \vec{B} & \vec{C} & \vec{D}\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}$$

gde je:

$$\vec{A}=\{a_1, a_2, a_3\},\quad \vec{B}=\{b_1, b_2, b_3\},\quad \vec{C}=\{c_1, c_2, c_3\},\quad \vec{D}=\{d_1, d_2, d_3\}.$$

Budući da je

$$\vec{E}\cdot\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{A}\cdot\vec{i} & \vec{B}\cdot\vec{i} & \vec{C}\cdot\vec{i} & \vec{D}\cdot\vec{i}\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{vmatrix}=0,$$

i da je $\vec{E}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{E}\cdot\vec{k}=0$, izlazi da je $\vec{E}=0$.

Ako se determinanta, koja definiše vektor $\vec{E}$, razvije po elementima prve vrste, dobija se relacija (1) koju je trebalo dokazati.

Primedba. Čitalac će dokazati relaciju (1) i nekim drugim načinom.

165. Ako su D, E, F respektivno sredine strana BC, CA, AB trougla ABC, tada važe vektorske relacije:

$$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{FC},$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0.$$

Dokazati navedene relacije.

166. Koja je tačka ravni $Ax+By+Cz+D=0$ najbliža koordinatnom početku?

167. Odrediti koordinate tačke M' koja je simetrična tački $M(a, b, c)$ u odnosu na ravan $Ax+By+Cz+D=0$.

168. Odrediti koordinate tačke M' koja je simetrična tački $M(4, 3, 10)$ u odnosu na pravu

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}.$$

169. Odrediti najkraće otstojanje prave

$$(1)\qquad y=-x+1,\qquad z=-2x+1$$

od z-ose. — Napisati jednačine prave na kojoj leži zajednička normala prave (1) i z-ose.

170. Pokazati da su tačke $P(a, b, c)$, $Q(b, c, a)$, $R(c, a, b)$ temena ravnostranog trougla.

Odrediti koordinate težišta i jednačinu ravni ovog trougla.

171. 1° Pokazati da ravni

$$(P)\qquad x+y+z=2,\qquad x+2y+3z=4,\qquad 2x+3y+4z=7$$

obrazuju jednu prizmatičnu površinu.

2° Izračunati zapreminu tela koje ograničavaju ravni (P) sa ravnima

$$3x-y+z=4,\qquad 3x-y+z=10.$$

3° Izvesti uslove koji treba da budu zadovoljeni da bi n ravni

$$A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0\qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

obrazovale jednu prizmatičnu površinu sa n strana.

172. Posmatrati pravougli paralelepiped, čije su dve paralelne strane pravougaonici $ABCD$ i $A'B'C'D'$ ($AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$; $\overline{DC}=b$, $\overline{DA}=a$, $\overline{DD'}=c$).

1° Pokazati da je ravan (P_1) koja prolazi kroz pravu BC i presek dijagonala pravougaonika $ADD'A'$ paralelna ravni (P_2) koja prolazi kroz pravu $A'D'$ i presek dijagonala pravougaonika $BCC'B'$.

2° Ravni (P_1) i (P_2) dele dijagonale AC' i DB' na tri dela čije dužine treba izračunati.

Primedba. Zadatak rešiti metodom analitičke geometrije.

173. Pravougli trijedar osa $Oxyz$ sa temenom u tački O preseći jednom ravni (P) koja seče ose Ox, Oy, Oz respektivno u tačkama A, B, C.

Dokazati metodom analitičke geometrije:

1° Da ortogonalna projekcija tačke O na ravan (P) pada u ortocentar trougla ABC;

2° Da je *area* trougla OBC srednja proporcionala između *area* projekcije trougla OBC na ravan (P) i *area* trougla ABC;

3° Da postoji relacija

$$(\text{area}\,\Delta\, OBC)^2+(\text{area}\,\Delta\, OCA)^2+(\text{area}\,\Delta\, OAB)^2=(\text{area}\,\Delta\, ABC)^2.$$

174. Metodom koordinata, ili na koji drugi način, izračunati otstojanje između jedne dijagonale pravouglog paralelepipeda i jedne njegove ivice koja ne seče ovu dijagonalu.

Na osnovu dobijenog rezultata napisati izraze koji određuju otstojanja između uočene dijagonale i ostalih ivica tog paralelepipeda koje se sa ovom dijagonalom mimoilaze. Dužine ivica su: a, b, c.

Rezultat. Otstojanja su:

$$bc/\sqrt{b^2+c^2}, \qquad ca/\sqrt{c^2+a^2}, \qquad ab/\sqrt{a^2+b^2}.$$

175. Data je ravan (Π) $Ax+By+Cz+D=0$ i dve tačke $M(a, b, c)$, $N(\alpha, \beta, \gamma)$. Odrediti geometrisko mesto tačaka $P(x, y, z)$ u ravni (Π) iz kojih se duž MN vidi pod pravim uglom. Koji uslov moraju zadovoljavati parametri A, B, C, D, a, b, c, α, β, γ da bi navedeno geometrisko mesto postojalo?

176. Pokazati da su tačke $A(0, 2, -4)$, $B(2, 5, 2)$, $C(3, -4, -2)$ temena jednog kvadrata i odrediti koordinate njegovog četvrtog temena.

Ako su A i B dva susedna temena jednog kvadrata, odrediti geometrisko mesto ostalih temena ovog kvadrata.

177. Pokazati da se sfere

$$x^2+y^2+z^2=9, \quad x^2+y^2+z^2-8x+4y+8z-45=0$$

dodiruju i odrediti koordinate tačke dodira i jednačinu zajedničke tangentne ravni.

178. Data je sfera (S) $x^2+y^2+z^2-1=0$ i tačka $M(4, 5, 6)$.

1° Koja je tačka sfere (S) najbliža tački M?

2° Kolika je veličina onog dela sferne površine (S) koji se vidi iz tačke M?

3° Šta je geometrisko mesto tačaka dodira tangenata povučenih iz tačke M na datu sferu?

179. Data je jednačina sfere (S) $x^2+y^2+z^2=4$ i ravan (P) $x+y+z-2=0$. Naći poluprečnik i koordinate centra kruga koji se dobija presekom sfere (S) i ravni (P). — Odrediti jednačine tangentnih ravni u tačkama sfere koje su najbliže i najdalje od ravni (P).

180. Odrediti: 1° poluprečnik i koordinate centra kruga koji se dobija u preseku sfere $x^2+y^2+z^2=25$ i ravni $x+2y+2z=9$; 2° koordinate tačke tog kruga koja je najbliža ravni Oxy.

181. U Dekartovom pravouglom trijedru osa $Oxyz$ posmatrati tetraedar čija su temena O, A, B, C, gde tačke A, B, C leže respektivno u koordinatnim ravnima Oyz, Ozx, Oxy.

Odrediti koordinate temena ovog tetraedra pod uslovom da je on pravilan i da je dužina njegove ivice a.

Rezultat. Ukupno ima osam pravilnih tetraedara. Čitalac će odrediti koordinate njihovih temena.

182. Sfera $x^2+y^2+z^2=29$ izvršila je rotaciju za ugao α oko svog prečnika MN. Odrediti ugao α i jednačine prave na kojoj leži prečnik MN, ako je tačka $(4, -3, 2)$ sfere, prilikom ove rotacije, došla u položaj $(5, 0, -2)$ duž jednog velikog kruga sfere.

183. Odrediti i ispitati ortogonalnu projekciju u ravni Oxy krive koja se dobija presekom obrtnog paraboloida

$$x^2+y^2-2az=0 \qquad (a \text{ parametar})$$

i ravni

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

184. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ uočiti cilindar

$$(C) \qquad b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0 \qquad (a>b)$$

i ravan

$$(P) \qquad z=y\operatorname{tg}\alpha.$$

Posmatrati zatim nov Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxy_1z_1, gde je $z_1=0$ ravan (P).

Odrediti jednačinu preseka cilindra (C) i ravni (P) u sistemu Oxy_1z_1. Da li se ugao α može tako odrediti da taj presek bude krug?

Ako je $a<b$, da li cilindar ima kružnih preseka? U potvrdnom slučaju, odrediti ravan preseka u kojoj krug leži.

185. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ posmatrati elipsoid $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ $(a>b>c)$ i ravan (P) koja prolazi kroz y-osu.

U novom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Ox_1yz_1 neka ravan $x_1=0$ bude ravan (P).

U novom sistemu odrediti jednačinu preseka elipsoida i ravni (P) i naći one ravni (P) koje će seći elipsoid po krugu. Šta će biti preseci sa ravnima koje su paralelne ravni (P)?

186. Odrediti prave koje prolaze kroz datu tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ i seku krivu $y=x^2$, $z=x^3$ u dve tačke.

187. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ data je tačka $A(x_1, y_1, z_1)$ i prava

$$(L) \qquad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

koja je tako orijentisana da sa z-osom gradi oštar ugao.

Odrediti koordinate tačke B koja se dobija, kada tačka A izvrši rotaciju od θ radijana, u direktnom smislu, oko ose (L).

188. Dati geometrisku interpretaciju jednačine

$$(S) \qquad x^2+y^2-\lambda^2 z^2=0 \quad (\lambda \text{ parametar}).$$

Odrediti ortogonalnu projekciju u ravni Oxy krive koja se dobija presekom date površine (S) sa ravni $z=nx+p$ $(n\neq 0)$. Ispitati dobijenu krivu.

189. Pod kojim uslovom n ravni

$$A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

prolaze kroz jednu tačku?

Rezultat. Traženi uslov: rang matrice

$$\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \vdots & & & \\ A_n & B_n & C_n & D_n \end{Vmatrix}$$

mora biti jednak 3.

190. Odrediti jednačine tangentnih ravni elipsoida $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ koje na koordinatnim osama otsecaju duži čije su apsolutne vrednosti jednake.

191. Neka je P jedna tačka preseka elipsoida

$$(1) \qquad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

i ravni

$$(2) \qquad y=mx.$$

Normala u tački P elipsoida seče ravan Oxy u tački Q. Odrediti geometrisko mesto tačke Q kada se P kreće po liniji preseka elipsoida (1) i ravni (2).

192. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ date su prave:

$$(D_0)\ \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \quad (D_1)\ \begin{cases} y=x\sqrt{3}, \\ z=2x; \end{cases} \quad (D_2)\ \begin{cases} y=-x\sqrt{3}, \\ z=2x; \end{cases} \quad (D_3)\ \begin{cases} y=0, \\ z=-x. \end{cases}$$

Obrazovati jednačine šest ravni:

$$(D_0, D_1), \quad (D_0, D_2), \quad (D_0, D_3), \quad (D_2, D_3), \quad (D_3, D_1), \quad (D_1, D_2),$$

određene pravama (D_0), (D_1), (D_2), (D_3) koje su uzete dve po dve.

Ispitati da li su međusobno normalne ove ravni:

$$(D_0, D_1) \text{ i } (D_2, D_3); \ (D_0, D_2) \text{ i } (D_3, D_1); \ (D_0, D_3) \text{ i } (D_1, D_2).$$

193. Tri ivice pravouglog paralelepipeda koje polaze iz temena O su: OA, OB, OC, a dijagonala iz istog temena je OD (A, B, C, D temena pravouglog paralelepipeda).

Jedna ravan seče OA, OB, OC i OD u tačkama A_1, B_1, C_1, D_1.

Metodom koordinata ili kojim drugim načinom pokazati da važi relacija

$$\frac{\overline{OA}}{OA_1}+\frac{\overline{OB}}{OB_1}+\frac{\overline{OC}}{OC_1}=\frac{\overline{OD}}{OD_1}.$$

194. 1° Odrediti sve prave (L) koje seku tri prave:

$$(L_1) \qquad x=0, \quad y=0;$$

$$(L_2) \qquad x=1, \quad z=0;$$

$$(L_3) \qquad y=1, \quad z=-1.$$

2° Da li postoji nepomična tačka kroz koju prolaze sve prave (L)?

Rezultat. 1° (L) $\quad a(x-1)+z=0, \quad a(y-1)+y+z=0$ $\quad$ (a parametar).

195. Koje uslove treba da zadovolje parametri

$$(1) \qquad a_\nu,\ b_\nu,\ c_\nu,\ r_\nu,\ \alpha_\nu,\ \beta_\nu,\ \gamma_\nu,\ \delta_\nu \qquad (\nu=1,2),$$

da bi krugovi

$$(2) \qquad (x-a_\nu)^2+(y-b_\nu)^2+(z-c_\nu)^2=r_\nu^2, \qquad \alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z+\delta_\nu=0$$
$$(\nu=1,2)$$

ležali na istoj sfernoj poršini? Kada su uslovi zadovoljeni, odrediti sfere sa navedenom osobinom.

Posebno posmatrati slučaj kada su ravni

$$\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z+\delta_\nu=0 \qquad (\nu=1,2)$$

paralelne.

Uputstvo. Skupovi sfera na kojima se nalaze krugovi (1) imaju oblik

$$(3) \qquad (x-a_\nu)^2+(y-b_\nu)^2+(z-c_\nu)^2-r_\nu^2+\lambda_\nu(\alpha_\nu x+\beta_\nu y+\gamma_\nu z+\delta_\nu)=0 \qquad (\nu=1,2),$$

gde su λ_1, λ_2 dva parametra.

Treba napisati uslove da jednačine (3) pretstavljaju jednu istu sferu.

196. Odrediti jednačine tetiva elipsoida

$$(1) \qquad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

koje su tačkom $P(\alpha, \beta, \gamma)$ prepolovljene.

Rešenje. Prava koja prolazi kroz tačku P definisana je relacijama

$$(2) \qquad \frac{x-\alpha}{m}=\frac{y-\beta}{n}=\frac{z-\gamma}{p}=t,$$

odnosno

$$(3) \qquad x=\alpha+mt, \quad y=\beta+nt, \quad z=\gamma+pt.$$

Ako se iz (1) i (3) eliminišu x, y, z, dobija se

$$(4) \qquad \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha m}{a^2}+\frac{\beta n}{b^2}+\frac{\gamma p}{c^2}\right)t+\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=1.$$

Kako je prema hipotezi tačka P sredina tetive elipsoida, biće

$$(5) \qquad \alpha=(x_1+x_2)/2, \qquad \beta=(y_1+y_2)/2, \qquad \gamma=(z_1+z_2)/2,$$

gde su (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) krajevi tetive.

Budući da je $x_1=\alpha+mt_1$, $x_2=\alpha+mt_2$, iz relacija (5) sleduje $t_1+t_2=0$, odnosno, prema (4),

$$(6) \qquad \alpha m/a^2+\beta n/b^2+\gamma p/c^2=0.$$

Ako se parametri m, n, p eliminišu iz (2) i (6), dobija se

$$(7) \qquad \frac{\alpha}{a^2}(x-\alpha)+\frac{\beta}{b^2}(y-\beta)+\frac{\gamma}{c^2}(z-\gamma)=0.$$

Iz navedenih rezultata izlazi da ima beskonačno mnogo tetiva površine (1) koje su tačkom P prepolovljene. Ove tetive leže na pravama (2), gde m, n, p zadovoljavaju uslov (6). Sve ove tetive leže u jednoj ravni, naime u ravni (7). U ravni (7) nalazi se geometrisko mesto tetiva elipsoida (1) koje su tačkom P prepolovljene. To geometrisko mesto je deo ravni (7) koji je ograničen krivom

$$(8) \qquad \begin{aligned} &x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,\\ &(\alpha/a^2)(x-\alpha)+(\beta/b^2)(y-\beta)+(\gamma/c^2)(z-\gamma)=0. \end{aligned}$$

Kriva (8) je ustvari elipsa koja leži u ravni (7) i čiji je centar u tački (α, β, γ).

Primedba I. Navedeni rezultati mogu se upotrebiti za rešenje zadatka:

Odrediti koordinate centra elipse koja se dobija presekom elipsoida

$$(9) \qquad x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$$

i ravni

$$(10) \qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

Rešenje. Koordinate centra (α, β, γ) elipse odredićemo iz uslova koji kazuju da se ravan (10) poklapa sa ravni

$$(\alpha/a^2)(x-\alpha)+(\beta/b^2)(y-\beta)+(\gamma/c^2)(z-\gamma)=0.$$

Posle jednostavnih računa dobija se

$$\alpha=-a^2AD\,\triangle, \qquad \beta=-b^2BD\,\triangle, \qquad \gamma=-c^2CD\,\triangle,$$

gde je $1/\triangle=A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2$.

Primer. $(2, 0, 1/2)$ su koordinate centra elipse koja se dobija u preseku elipsoida $x^2/16+y^2/4+z^2=1$ i ravni $x+4z-4=0$.

Primedba II. Koordinate centra elipse o kojoj je ovde reč mogu se odrediti polazeći od osobine da se centar krive projektuje u centar njene projekcije.

Čitalac će na osnovu ove osobine odrediti koordinate centra elipse.

197. Odrediti geometrisko mesto tačaka koje od pravih

$$x=t, \qquad y=2t, \qquad z=1 \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

i

$$x=-2\tau, \qquad y=\tau, \qquad z=-1 \qquad (-\infty<\tau<+\infty)$$

imaju jednaka otstojanja.

198. Uslov da prava

$$(L) \qquad x = a + lt, \quad y = b + mt, \quad z = c + nt \quad (t \text{ parametar})$$

dodiruje površinu

$$(S) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

glasi

$$(Aal + Bbm + Ccn)^2 = (Al^2 + Bm^2 + Cn^2)(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + D).$$

Proveriti ovaj rezultat.

Koji uslovi treba da budu ispunjeni da bi prava (L) ležala na površini (S)?

199. Odrediti uslov (R) da prave

$$(L_1) \qquad x = a_1 + b_1 t, \quad y = a_2 + b_2 t, \quad z = a_3 + b_3 t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

$$(L_2) \qquad x = c_1 + d_1 \tau, \quad y = c_2 + d_2 \tau, \quad z = c_3 + d_3 \tau \quad (-\infty < \tau < +\infty)$$

leže u jednoj ravni.

Odrediti ravan pravih (L_1) i (L_2) kada je uslov (R) zadovoljen.

Primeniti rezultat na partikularni slučaj:

$$x = 2t - 1, \quad y = 3t + 2, \quad z = 2t - 3;$$

$$x = 2\tau + 3, \quad y = 3\tau - 1, \quad z = 2\tau + 1.$$

200. Date su tri nekolinearne tačke

$$M_k(x_k, y_k, z_k) \quad (k = 1, 2, 3)$$

i sfera

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Na sferi (1) odrediti tačku S tako da zapremina tetraedra $SM_1M_2M_3$ bude: 1° najveća; 2° najmanja.

Posebno posmatrati partikularni slučaj:

$$r = 2, \quad M_1(4, 0, 4), \quad M_2(4, 4, 4), \quad M_3(4, 4, 0).$$

201. Odrediti i ispitati projekcije krive

$$y^2 + z^2 = x, \quad x + 2y - z = 0$$

u koordinatnim ravnima.

202. Odrediti površinu drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

koja prolazi kroz tri date tačke

$$(x_k, y_k, z_k) \quad (k = 1, 2, 3).$$

203. Odrediti parametar λ tako da prava

$$2x + 3y - z + \lambda = 0, \quad 3x + \lambda y + 2z - 6 = 0$$

seče: 1° x-osu; 2° y-osu; 3° z-osu.

204. Iz tačke $M(\alpha, \beta, \gamma)$ povučene su normale na elipsoid

(1) $$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1.$$

Pokazati da ovih normala može biti najviše šest.

Rešenje. U tački $N(x_0, y_0, z_0)$ elipsoida (1) jednačine normale su:

(2) $$\frac{x-x_0}{x_0/a^2}=\frac{y-y_0}{y_0/b^2}=\frac{z-z_0}{z_0/c^2}.$$

Kako se tačka M nalazi na normali (2), a tačka N na površini (1), biće

(3) $$\frac{\alpha-x_0}{x_0/a^2}=\frac{\beta-y_0}{y_0/b^2}=\frac{\gamma-z_0}{z_0/c^2},$$

(4) $$x_0{}^2/a^2+y_0{}^2/b^2+z_0{}^2/c^2=1.$$

Stavimo li

(5) $$\frac{\alpha-x_0}{x_0/a^2}=\frac{\beta-y_0}{y_0/b^2}=\frac{\gamma-z_0}{z_0/c^2}=t,$$

dobija se

(6) $$x_0=\frac{a^2\alpha}{t+a^2},\qquad y_0=\frac{b^2\beta}{t+b^2},\qquad z_0=\frac{c^2\gamma}{t+c^2}.$$

Ako se iz relacija (4) i (6) eliminišu parametri x_0, y_0, z_0, dobija se jednačina

$$\frac{a^2\alpha^2}{(t+a^2)^2}+\frac{b^2\beta^2}{(t+b^2)^2}+\frac{c^2\gamma^2}{(t+c^2)^2}=1.$$

To je jednačina šestog stepena i ona može imati najviše šest realnih korena. Prema tome, maksimalan broj normala koje se mogu povući iz tačke M na elipsoid (1) ne može biti veći od *šest*.

205. Odrediti jednačinu skupa tačaka podjednako udaljenih od ravni $x=a$ i od tačke $(-a, 0, 0)$

Koju površinu definiše ovaj skup tačaka?

Rezultat. $y^2+z^2=-4ax$.

206. Odrediti uslove da bi jednačine

$$x=cy+bz,\qquad y=az+cx,\qquad z=bx+ay$$

definisale jednu pravu.

207. Iz tačke $(8, 0, 3)$ povučene su tangente na sferu čija je jednačina

$$x^2+y^2+z^2-6x-6z+9=0.$$

Odrediti jednačinu površine koju obrazuje ovaj skup tangenata, kao i jednačinu preseka S te površine sa yz-ravni.

Kolika je veličina površine koju ograničava presek S?

208. Iz tačke $(5, 5, 5)$ povučene su tangente na elipsoid

$$x^2+y^2/2+z^2=1.$$

Odrediti jednačinu površine koju obrazuje ovaj skup tangenata i jednačinu preseka S te površine sa xy-ravni.

Ispitati presek S.

209. Rešiti skup jednačina

$$2x+z=1, \quad x+y+z=3, \quad 3x+y+2z=4$$

i rešenju dati geometrisko tumačenje u Dekartovom pravouglom trijedru osa.

210. Date su tačke $A(0, 1, 1)$, $B(2, -3, 0)$, $C(-2, 0, -1)$ i elipsoid

$$x^2/2+y^2+z^2=1.$$

Odrediti na ovom elipsoidu tačku D tako da zapremina tetraedra, čija su temena tačke A, B, C, D, bude maksimalna.

211. Ispitati prirodu površina drugog reda:

$$1^\circ \quad x^2-y^2+2z^2-xy-1=0,$$

$$2^\circ \quad x^2+y^2+z^2+2xy-3x+2y-z=0,$$

$$3^\circ \quad x^2-4yz-2x+8y=0.$$

212. Posmatrati krivu (C), definisanu presekom paraboloida

$$x^2+y^2-2pz=0 \quad (p=\text{const})$$

i ravni

$$z=\lambda(x-q) \quad (q=\text{const}; \ \lambda \text{ parametar}).$$

1° Pokazati da su projekcije krive (C) na xy-ravan krugovi.

2° Odrediti geometrisko mesto centara krive (C) kad se λ menja.

Rezultat. 2° Traženo geometrisko mesto je parabola

$$z=(x^2-qx)/p, \qquad y=0.$$

213. Odrediti skup tačaka u prostoru podjednako udaljenih od tri date prave.

214. Odrediti skup tačaka u prostoru podjednako udaljenih od tri tačke čije su koordinate

$$M_k(x_k, y_k, z_k) \quad (k=1, 2, 3)$$

u Dekartovom pravouglom trijedru osa.

DIFERENCIJALNI I INTEGRALNI RAČUN

I. UVODNI PROBLEMI

1. Niz $\{x_n\}$ definisan je rekurzivno relacijom

$$(1) \qquad x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2} \qquad (x_0,\ x_1 \text{ dati}).$$

Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rešenje. Napišimo (1) u obliku

$$(2) \qquad x_n - x_{n-1} = -(x_{n-1} - x_{n-2})/n.$$

Odavde sleduje

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_{n-1} - x_{n-2} &= -(x_{n-2} - x_{n-3})/(n-1), \\ x_{n-2} - x_{n-3} &= -(x_{n-3} - x_{n-4})/(n-2), \\ &\vdots \\ x_2 - x_1 &= -(x_1 - x_0)/2. \end{aligned}$$

Iz (2) i (3) dobija se

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^n (x_0 - x_1)/n!$$

Posle sumiranja biće

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (x_0 - x_1)/k!$$

$$\therefore \qquad x_n - x_0 = (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k / k!$$

Ako $n \to \infty$, iz poslednje relacije sleduje

$$x_n \to x_0 + (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k!$$

Kako je

$$e^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k!,$$

dobija se

$$x_n \to x_0 + (x_0 - x_1)(e^{-1} - 1),$$

odnosno

$$x_n \to x_1 + (x_0 - x_1)\, e^{-1} \qquad (n \to \infty).$$

2. Za $k > 1$ dati su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, gde je

$$a_n = [k(k-1) + a_{n-1}]^{1/2}, \quad a_1 = [k(k-1)]^{1/2};$$

$$b_n = (k b_{n-1})^{1/2}, \quad b_1 = k^{1/2}.$$

Dokazati: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = k.$

3. Odrediti $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{\log_a x-\log_x a}$ $(a>0,\ x>0)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\log x}/(\log x)^x$.

4. Odrediti $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\log\operatorname{ch}x)$.

Rezultat. $\log 2$.

5. Odrediti a i b tako da je

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^3-ax^2+1)^{1/3}-(x^3-bx^2+1)^{1/3}]=1/3.$$

6. Odrediti parametre A, B, C, D tako da bi postojala granična vrednost

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^5}\left(e^x-\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}\right).$$

Rezultat. $A=-C=1/2$; $B=D=1/12$.

7. 1° Rešiti jednačine:

$$M(a,r)\equiv\sin a+\sin ra+\sin(2r-1)a=0,$$

$$N(a,r)\equiv\cos a+\cos ra+\cos(2r-1)a=0.$$

2° Pokazati da je

$$M(a,r)/N(a,r)=\operatorname{tg} ra,$$

osim za niz vrednosti $a_k=a_k(r)$ koje treba naći, pa zatim izračunati

$$\lim_{a\to a_k}\{M(a,r)/N(a,r)\}.$$

Uputstvo. Upotrebiti identitete:

$$\begin{aligned}\sin a+\sin ra+\sin(2r-1)a&\equiv[\sin a+\sin(2r-1)a]+\sin ra\\&\equiv 2\sin ra\cos(r-1)a+\sin ra\\&\equiv(\sin ra)[2\cos(r-1)a+1];\\ \cos a+\cos ra+\cos(2r-1)a&\equiv(\cos ra)[2\cos(r-1)a+1].\end{aligned}$$

8. Date su funkcije

$$f(x)\equiv\frac{\sin(\pi x^\nu)}{\sin(\pi x)},\qquad g(x)\equiv\frac{\cos(\pi x)}{\cos(2^{\nu-1}\pi x)}\qquad(\nu \text{ prirodan broj}).$$

Ispitati da li postoje granične vrednosti

$$\lim_{x\to x_p}f(x),\qquad \lim_{x\to x_q}g(x),$$

gde su x_p i x_q nule funkcije $\sin(\pi x)$ odnosno $\cos(\pi x)$.

9. Da li funkcija

$$\frac{Ax^3}{x+a}+\frac{Bx^3}{x+b}+\frac{Cx^3}{x+c},$$

podesnim izborom parametara A, B, C, a, b, c, može ostati ograničena kada $|x|\to\infty$?

10. Da li su tačni rezultati

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=\operatorname{sgn}x,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} nx=\operatorname{sgn}x.$$

11. Odrediti granične vrednosti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+2)(k+4)}{\sum\limits_{k=1}^{n}k(2k+1)(k+2)},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+3)(2k+1)}.$$

12. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(a+3h)-3\sin(a+2h)+3\sin(a+h)-\sin a}{h^3}$.

Rezultat. $-\cos a$.

13. 1° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$, 2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2\right]$.

Rezultat. 1° 1.

14. Izračunati

$$L=\lim_{a\to0}(\pi^2/\sin^2\pi a-1/a^2).$$

Primedba. Proveriti da li je rezultat $L=\pi^2/3$.

15. Odrediti $\lim\limits_{x\to0}\{(x-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x)/x^5\}$.

Rezultat. $-1/20$.

16. Iz relacija $2z^3=x+3z$, $5z^2=y+2z$ odrediti dy/dx za $x=0$.

Rezultat. $dy/dx=2/3$ ili $(\pm5\sqrt{6}-2)/6$ za $x=0$.

17. Data je funkcija $f(x)=\sin x\operatorname{sh}x$. Odrediti

$$\{f(x)\}^{(n)}\quad\text{i}\quad\{f(x)\}^{(4n+2)}\quad\text{za}\quad x=0.$$

18. Data je funkcija

$$f(x)=\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\quad(x\neq0),$$
$$=-\frac{1}{2}\quad(x=0).$$

1° Dokazati da je $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\frac{1}{2}$.

2° Izračunati $f'(0)$.

Rešenje. 1° Primenom *L'Hôspital*-ovog stava dobijamo

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}=\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}=-\frac{1}{2}.$$

2° Polazeći od definicije izvoda i primenjujući *L'Hôspital*-ov stav, biće

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h-e^h+1}{he^h-h}+\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h-2\,e^h+2+he^h}{2\,h^2\,(e^h-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-e^h+he^h}{4\,he^h-4\,h+2\,h^2 e^h} = \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{4\,e^h+8\,he^h-4+2\,h^2 e^h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h+he^h}{12\,e^h+12\,he^h+2\,h^2 e^h} = \frac{1}{12}.$$

Primedba. Funkcija $f(x)$ neprekidna je za sve vrednosti promenljive x $\{$ i za $x=0$, jer je $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\}$.

Funkcija

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)' \qquad (x \neq 0), \\ &= \frac{1}{12} \qquad (x=0) \end{aligned}$$

takođe je neprekidna za sve vrednosti promenljive x, pa i za $x=0$, jer je

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1/12.$$

19. 1° Dati su polinomi:

$$(1) \qquad P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}, \qquad Q(x) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^{m-\nu} \qquad (a_0 b_0 \neq 0).$$

Ako $x \to +\infty$, tada važe relacije:

$$\begin{aligned} P(x)/Q(x) &\to +\infty, && \text{ako je } n>m \text{ i } a_0 b_0>0; \\ &\to -\infty, && \text{ako je } n>m \text{ i } a_0 b_0<0; \\ &\to a_0/b_0, && \text{ako je } n=m; \\ &\to 0, && \text{ako je } n<m. \end{aligned}$$

2° Ako su p i q prirodni brojevi i ako je

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, \quad \text{kada je } p \text{ parno}; \\ b_0 &> 0, \quad \text{kada je } q \text{ parno}, \end{aligned}$$

tada za polinome (1) važe sledeće relacije kada $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \sqrt[p]{P(x)}/\sqrt[q]{Q(x)} &\to +\infty, && \text{ako je } n/p>m/q \text{ i } \sqrt[p]{a_0}\,\sqrt[q]{b_0}>0; \\ &\to -\infty, && \text{ako je } n/p>m/q \text{ i } \sqrt[p]{a_0}\,\sqrt[q]{b_0}<0; \\ &\to \sqrt[p]{a_0}/\sqrt[q]{b_0}, && \text{ako je } n/p=m/q; \\ &\to 0, && \text{ako je } n/p<m/q. \end{aligned}$$

Proveriti navedene rezultate.

20. Izračunati: 1° $\partial^2 \log_{ab} x/\partial a^2$; 2° $\partial^2 \log_{ab} x/\partial a\, \partial b$.

21. Ako je $f(n)=\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$, odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$.

Rešenje.
$$f(n)=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+1/\sqrt{n}}+\sqrt{1-1/\sqrt{n}}}\to 1 \quad (n\to\infty).$$

22. Da li se parametar a može tako odrediti da funkcija
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\leqslant 1),\\ 3-ax^2 & (x>1)\end{cases}$$
bude neprekidna?

Rezultat. $a=1$.

Primedba. Nacrtati grafik funkcije za $a=1$ i reći da li je ta funkcija diferencijabilna u tački $x=1$.

23. Da li se parametri a i b mogu tako izabrati da funkcija
$$\begin{aligned} f(x)&=-2\sin x && (x\leqslant-\pi/2),\\ &=a\sin x+b && (-\pi/2<x<\pi/2),\\ &=\cos x && (x\geqslant\pi/2)\end{aligned}$$
bude neprekidna? Ako je to mogućno, nacrtati grafik ove neprekidne funkcije.

24. Da li je funkcija
$$\begin{aligned} f(x,a)&=2a && (x\geqslant a^2),\\ &=2x/a && (|x|\leqslant a^2), \qquad (a \text{ parametar})\\ &=-2a && (x\leqslant -a^2)\end{aligned}$$
neprekidna?

25. U jednom krugu posmatrati dva segmenta od kojih jednom odgovara centralni ugao α, drugom 2α. Ako se sa h_1 i h_2 označe visine tih segmenata, pokazati da je $\lim\limits_{\alpha\to 0}(h_2/h_1)=4$.

26. Izračunati $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)-\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)$, gde je
$$f(y)=\log\left|\frac{y+\sqrt{y^2+r^2}}{y+\sqrt{y^2+R^2}}\right| \qquad (R \text{ i } r \text{ dve pozitivne konstante}).$$

27. Odrediti:
$$1^\circ\ \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right);\quad 2^\circ\ \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1};\quad 3^\circ\ \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}.$$

Rešenje. 1° Pođimo od identiteta
$$\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)/k^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right).$$

Ako se faktori kombinuju na sledeći način:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\,\frac{n-1}{n}\right)\frac{n+1}{n},$$

dobija se

$$\frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2},\quad \text{kada } n\to\infty.$$

2° 2/3.

3° Kako je $k^2+k-2\equiv(k-1)(k+2)$, može se pisati:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-3)\,n}{(n-2)(n-1)}\cdot\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)\,n}\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\to\frac{1}{3},\quad \text{kada } n\to\infty.$$

28. Da li se r može tako odrediti da granična vrednost

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x-\sin x-r}{x^r\sin x}$$

bude konačna i različita od nule?

29. Odrediti parametar a tako da funkcija

$$\operatorname{tg} x+a\operatorname{tg}(3\,x)$$

ostane konačna kada $x\to\pi/2$.

30. Dokazati identitet

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\frac{d^3x}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^2x}{dy^2}=0\qquad\{y=y(x)\}.$$

31. Odrediti izvode funkcija:

1° $(\sin x)^n\cos nx$; 2° $(\sin x)^n\sin nx$; 3° $(\cos x)^n\sin nx$; 4° $(\cos x)^n\cos nx$.

Rezultat. 1° $n(\sin x)^{n-1}\cos(n+1)\,x$; 2° $n(\sin x)^{n-1}\sin(n+1)\,x$;

3° $n(\cos x)^{n-1}\cos(n+1)\,x$; 4° $-n(\cos x)^{n-1}\sin(n+1)\,x$.

32. Ako je

$$ae^x+be^y=1\qquad(a,\ b \text{ proizvoljne konstante}),$$

pokazati da je

$$y''=y'(1-y')\qquad('=d/dx,\ \ldots).$$

Izraziti y''' i $y^{(4)}$ kao funkcije od y'.

33. Ako je $x^2=\sin(At+B)$, gde su A i B ma kakve konstante, tada je

$$x(1-x^4)\frac{d^2x}{dt^2}+(1+x^4)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$$

Proveriti ovo tvrđenje.

34. Proveriti da li je tačno tvrđenje:

Maksimalna vrednost izraza

$$a\cos p+b\cos q\qquad(p+q=\theta)$$

jeste $(a^2+b^2+2ab\cos\theta)^{1/2}$.

35. Data je funkcija

$$f(x)=\sin(\alpha x+\beta_1)\sin(\alpha x+\beta_2) \qquad (\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2 \text{ konstante}).$$

Odrediti osnovni period funkcije $f(x)$ i navesti za koje vrednosti x funkcija $f(x)$ dostiže maksimum i minimum.

36. Ako se iz relacija

$$(1) \qquad x=t, \quad y=t \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

eliminiše t, dobija se

$$(2) \qquad y=x.$$

Ako se iz relacija

$$(3) \qquad x=\sin\theta, \quad y=\sin\theta \qquad (-\infty<\theta<+\infty)$$

eliminiše θ, dobija se (2).

Ako se iz relacija

$$(4) \qquad x=e^{\tau}, \quad y=e^{\tau} \qquad (-\infty<\tau<+\infty)$$

eliminiše τ, dobija se (2).

Da li svi skupovi relacija (1), (3), (4) zaista definišu pravu (2)?

37. Proveriti da li je tačna relacija

$$\begin{vmatrix} tu & tv & tw \\ (tu)' & (tv)' & (tw)' \\ (tu)'' & (tv)'' & (tw)'' \end{vmatrix} = t^3 \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix},$$

gde su u, v, w, t funkcije promenljive x koje imaju neprekidne druge izvode.

38. Ako su $f(x)$ i $g(x)$ dva polinoma stepena n po x, tada izraz

$$fg^{(n)}-f'g^{(n-1)}+f''g^{(n-2)}+\cdots+(-1)^n f^{(n)}g$$

ne zavisi od x. Dokazati.

39. Ako je $\pi \geqslant \arccos x \geqslant 0$, odrediti funkcije:

$$\sin(\arccos x), \quad \cos(\arccos x), \quad \operatorname{tg}(\arccos x), \quad \operatorname{cotg}(\arccos x).$$

40. Pokazati da izraz

$$F(y)=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \qquad \{y=y(x)\}$$

zadržava isti oblik ako se y smeni sa $1/y$.

Da li ova osobina važi ako se y zameni izrazom

$$\frac{ay+b}{cy+d} \qquad \left(a,\ b,\ c,\ d \text{ konstante; } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right)?$$

41. Pod kojim se uglom seku krive

$$y=\frac{1}{2p}x^2-\frac{p}{2}, \quad y=-\frac{1}{2q}x^2+\frac{q}{2},$$

gde su p i q dva realna parametra?

42. Data je funkcija $y = |\sin x| + |\cos x|$.

1° Odrediti njen primitivni period T i grafički prikazati ovu funkciju na segmentu $[0, T]$;

2° Da li je funkcija neprekidna? Ima li u svima tačkama izvod?

43. Data je jedna prava kupa čija je visina h i poluprečnik osnove r. Na otstojanju x od osnove postavljena je ravan paralelna osnovi. Presek te ravni i kupe je osnova jednog pravog cilindra čija se druga osnova nalazi na osnovi kupe. Odrediti x tako da: 1° zapremina cilindra bude maksimalna; 2° veličina površine cilindra bude maksimalna.

44. Izračunati površinu P trougla kao funkciju njegovih strana a, b, c i dokazati da je

$$\frac{\partial P}{\partial a} = R\cos\alpha, \quad \frac{\partial P}{\partial b} = R\cos\beta, \quad \frac{\partial P}{\partial c} = R\cos\gamma$$

(R poluprečnik kruga opisanog oko trougla; α, β, γ uglovi trougla prema stranama a, b, c).

Ako se pri merenju strana učine greške Δa, Δb, Δc, odrediti približnu formulu za izračunavanje greške ΔP.

45. Jedna kriva definisana je jednačinama

$$x = a \sec t, \qquad y = b \operatorname{tg} t \qquad (t \text{ parametar}).$$

Izbacivanjem parametra odrediti koja je to kriva.

Isto pitanje za krivu

$$x = a \operatorname{ch} t, \qquad y = b \operatorname{sh} t.$$

Geometriski protumačiti značenje parametra t u oba slučaja.

II. FUNKCIJE

46. Proveriti relaciju

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} x_k = \operatorname{sgn}(x_1 x_2 \cdots x_n),$$

gde je

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0). \end{cases}$$

47. Data je funkcija

$$\begin{aligned} f(x) &= \ \ |\sin x| \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi), \\ &= -|\sin x| \quad (2\pi < x < 4\pi). \end{aligned}$$

Periodički produžiti ovu funkciju i tako formiranu funkciju označiti sa $F(x)$. Za razne vrednosti parametra a diskutovati broj realnih rešenja jednačine

$$F(x) = a.$$

48. U odnosu na isti Dekartov pravougli koordinatni sistem grafički prikazati funkcije

$$1^\circ \quad f(x)=\log x \quad (x>1); \quad 2^\circ \quad g(x)=1/[1+\sqrt{1+1/x}] \quad (x>1);$$
$$3^\circ \quad f(x)\,g(x) \quad (x>1).$$

Da li je funkcija $f(x)\,g(x)$ (za $x>1$) rastuća funkcija?
Grafike što preciznije nacrtati.

49. Data je funkcija

$$f(x,\lambda)=\lim_{m\to 0}\left[\frac{6\lambda}{m^2}\left(\frac{\sin mx}{\sin m\lambda}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \quad (x,\ \lambda \text{ nezavisni od } m).$$

Za razne vrednosti parametra λ ispitati funkciju $f(x,\lambda)$ i rezultate grafički prikazati.

Rezultat. $f(x,\lambda)=x(\lambda^2-x^2)$.

50. Odrediti funkcije $f(x)$ i $z(x,y)$ iz uslova:

$$z(x,y)\equiv\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1), \quad z(x,1)\equiv x \quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$$

Rešenje. Iz $1+f(\sqrt{x}-1)=x$, posle zamene $\sqrt{x}-1=t$, izlazi

$$f(t)\equiv x-1\equiv(t+1)^2-1\equiv t^2+2t,$$

pa je

$$z(x,y)\equiv\sqrt{y}+(\sqrt{x}-1)^2+2(\sqrt{x}-1)\equiv\sqrt{y}+x-1.$$

51. Odrediti $f(x)$ i $z(x,y)$ iz uslova:

$$z(x,y)\equiv x+y+f(x-y), \quad z(x,0)\equiv x^2.$$

Rezultat. $f(x)\equiv x^2-x$, $\quad z(x,y)\equiv 2y+(x-y)^2$.

52. Ako je $f(x+y,\ y/x)\equiv x^2-y^2$, odrediti $f(x,y)$.

53. Odrediti primitivni period T funkcije

$$y=\sin x\sin(x+\alpha) \quad (0<\alpha<\pi/2)$$

i grafički prikazati ovu funkciju na segmentu $[0,\ T]$ promenljive x.

54. Ispitati funkcije

$$a\sin x+\frac{1}{\sin x} \quad (a>1); \qquad a\operatorname{ch} x+\frac{1}{\operatorname{ch} x} \quad (a>1)$$

i grafički ih prikazati.

55. Ispitati funkciju

$$\frac{1}{2}\left(a\sin x+\frac{b}{\sin x}\right) \quad (a>b>0)$$

i grafički je prikazati.

56. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Ocf nacrtati grafik funkcije

$$f(c)=Ac^2\exp(-c^2/a) \quad (c\geqslant 0),$$

gde su A i a pozitivne konstante (*Maxwell*-ova jednačina rasporeda brzina).

57. Data je funkcija $f(x)=2(x-1)^2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

Periodički produžiti ovu funkciju van segmenta [0, 2] i napisati njen oblik za ma koji segment.

Da li je tako obrazovana funkcija parna?

58. Ispitati rašćenje funkcije

$$f(x)\equiv(1/\sin x)-(1/x)$$

na intervalu $0<x\leqslant\pi/2$.

Izračunati $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

59. Proveriti da li su funkcije

$$ax,\quad a\sin bx,\quad a\operatorname{sh} bx \qquad (a,\ b \text{ konstante})$$

rešenja funkcionalne jednačine

$$f(x+y)\,f(x-y)=[f(x)]^2-[f(y)]^2.$$

60. Odrediti najkraće rastojanje između krivih:

$$1^\circ \qquad y=|x| \quad \text{i} \quad y=-|x|-1;$$

$$2^\circ \qquad y=|\sin x| \quad \text{i} \quad y=-|\sin x|-2.$$

61. Odrediti minimum funkcije

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} p_\nu\,(x-a_\nu)^2 \qquad (p_\nu>0).$$

62. Data je funkcija $f(x)=x^3-3x+\lambda$, gde je λ jedan realan parametar.

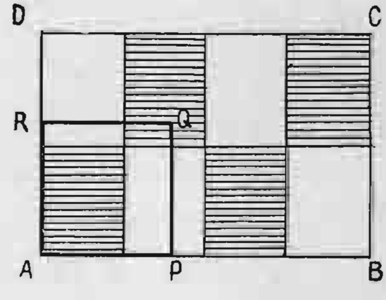
1° Odrediti λ tako da funkcija $f(x)$ ima: a) tri realna različita korena; b) dvostruki koren; c) samo jedan realan koren.

2° Nacrtati grafik funkcija: $f(x)$ i $1/f(x)$ uzimajući posebno slučajeve a), b), c).

63. Uzimajući u obzir sve kombinacije znakova *plus* i *minus*, grafički prikazati funkcije

$$\pm\frac{1}{x}\pm\frac{1}{x-1}\pm\frac{1}{x+1}.$$

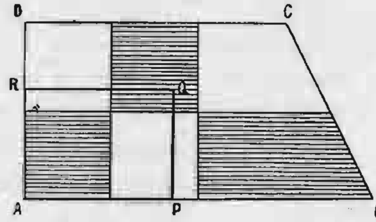
64. Strana AB $(\overline{AB}=4a)$ pravougaonika $ABCD$ podeljena je na četiri jednaka dela, a AD $(\overline{AD}=2b)$ na dva jednaka dela. Ugao PAR kvadrata $APQR$ $(\overline{AP}=x)$ i ugao BAD pravougaonika poklapaju se.



Ako se tačka Q pomera, menja se uočeni kvadrat (videti sliku).

Veličina S šrafirane površine kvadrata $APQR$ funkcija je promenljive x. Sastaviti formulu koja definiše funkciju $S(x)$.

65. Dat je pravougli trapez $ABCD$ ($\overline{AB}=4a$, $\overline{AD}=2a$, $\overline{DC}=3a$, $\measuredangle BAD=90°$). Strana AB podeljena je na četiri jednaka dela, strana AD na dva jednaka dela i površina je podeljena u polja kao što je na slici naznačeno.

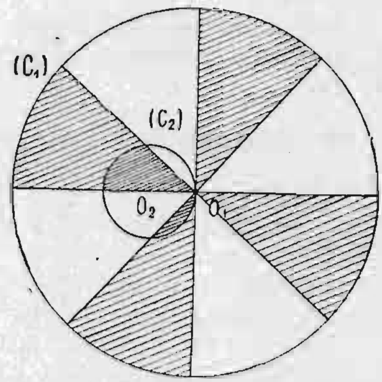


$\measuredangle BAD$ datog trapeza i $\measuredangle PAR$ pravougaonika $APQR$ poklapaju se.

Veličina S nešrafirane površine uočenog pravougaonika je funkcija od $x\,(=\overline{AP})$ i $y\,(=\overline{PQ})$.

Obrazovati formulu koja definiše funkciju $S(x, y)$.

66. Nacrtati krug $C_1(O_1; r)$ i njegova četiri prečnika koji dele krug na osam jednakih delova od kojih svaki drugi redom šrafirati.



Na jednom od pomenutih prečnika krugova uzeti tačku O_2 tako da je $\overline{O_1O_2}=d$.

Sa centrom u O_2 nacrtati promenljivi krug C_2 poluprečnika $x\,(\leqslant r-d)$.

Sastaviti formulu koja definiše veličinu $y(x)$ šrafirane površine koja je ograničena krugom C_2 (videti sliku).

67. Nacrtati krivu čija je jednačina, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy, oblika

$$(C) \qquad |x^2+y^2-1|+|y^2-2x|=1.$$

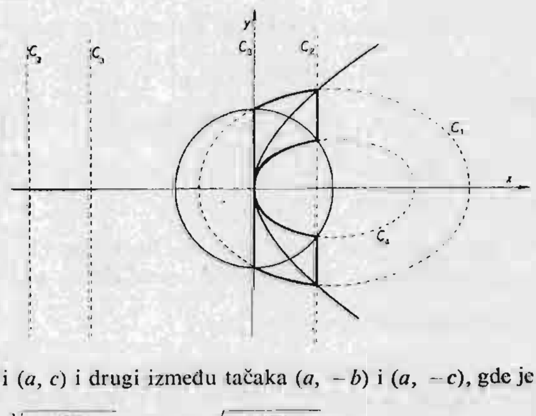
Rešenje. Posebno ćemo ispitati četiri mogućna slučaja:

$$1° \quad x^2+y^2-1\geqslant 0, \quad y^2-2x\geqslant 0; \qquad 3° \quad x^2+y^2-1\leqslant 0, \quad y^2-2x\geqslant 0;$$
$$2° \quad x^2+y^2-1\geqslant 0, \quad y^2-2x\leqslant 0; \qquad 4° \quad x^2+y^2-1\leqslant 0, \quad y^2-2x\leqslant 0.$$

Jednačina krive (C), uz uslove 1°, 2°, 3°, 4°, dobija respektivno sledeće oblike:

$$(C_1) \quad x^2+2y^2-2x-2=0; \qquad (C_2) \quad x^2+2x-2=0;$$
$$(C_3) \quad x^2+2x=0; \qquad (C_4) \quad x^2+2y^2-2x=0.$$

Jednačine (C_1) i (C_4) definišu dve koncentrične elipse koje su na slici nacrtane. Centa ovih elipsi je u tački $(1, 0)$. Njihove ose simetrije su: $y=0$, $x=1$. Jednačine (C_2) i (C_3) definišu četiri prave paralelne y-osi.



Slučaj 1°. Krivoj (C) pripadaju samo oni delovi elipsine periferije (C_1) koji se nalaze u isti mah van kruga $x^2+y^2=1$ i van parabole $y^2=2x$ (oblast u kojoj se ne nalazi žiža). Ti lukovi su masno izvučeni na slici. Krajnje tačke ovih lukova takođe pripadaju krivoj (C).

Slučaj 2°. Krivoj (C) pripadaju oni otsečci pravih $x=-1\pm\sqrt{3}$ koji se nalaze u isti mah van kruga $x^2+y^2=1$ i u paraboli $y^2=2x$. To su dva otsečka prave $x=-1+\sqrt{3}$: prvi između tačaka (a, b) i (a, c) i drugi između tačaka $(a, -b)$ i $(a, -c)$, gde je:

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=\sqrt{2\sqrt{3}-3}, \qquad c=\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}.$$

Slučaj 3°. Krivoj (C) pripadaju oni otsečci pravih $x=0$, $x=-2$ koji se nalaze jednovremeno u krugu $x^2+y^2=1$ i van parabole $y^2=2x$. To je otsečak y-ose od tačke $(0, -1)$ do tačke $(0, 1)$.

Slučaj 4°. Najzad, krivoj (C) prapada onaj luk elipse (C_4) koji se istovremeno nalazi u krugu $x^2+y^2=1$ i u paraboli $y^2=2x$. Na slici je taj luk masno nacrtan. Krajnje tačke tog luka takođe pripadaju krivoj (C).

Primedba. Šta se može reći o funkciji $y(x)$, definisanoj jednačinom (C)?

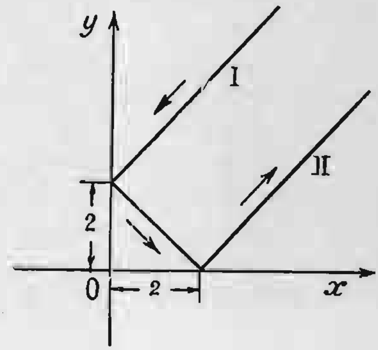
Kolika je veličina površine koju ograničava kriva (C)?

68. Data je funkcija $f(x)\equiv\log x-ax$ (a parametar).

1° Grafički prikazati ovu funkciju.

2° Odrediti a tako da funkcija ima jednu nulu drugog reda.

3° Diskutovati broj realnih nula funkcije $f(x)$, kada parametar a varira od $-\infty$ do $+\infty$.



69. Nacrtati g. m. tačke $\{x(t), y(t)\}$, gde je

$$x=|1+t|,\quad y=|1-t|\quad (-\infty<t<+\infty).$$

Rešenje. Umesto $x=|1+t|$, $y=|1-t|$ može se napisati:

a) $x=-1-t,\quad y=1-t,\quad$ za $\quad -\infty<t\leqslant-1;$

b) $x=1+t,\quad y=1-t,\quad$ za $\quad -1\leqslant t\leqslant+1;$

c) $x=1+t,\quad y=t-1,\quad$ za $\quad +1\leqslant t<+\infty.$

Relacije a) definišu deo prave $x-y+2=0$ koji je nacrtan na slici (poluprava I).

Relacije b) definišu otsečak prave $x+y-2=0$ od tačke $(0,2)$ do tačke $(2,0)$.

Relacije c) definišu deo prave $x-y-2=0$ koji je nacrtan na slici (poluprava II).

Kad t varira od $-\infty$ do $+\infty$, tačka (x, y), polazeći po polupravoj I iz beskrajnosti opisuje nacrtanu konturu u smislu protivnom kretanju kazaljke na satu.

70. 1° Navesti funkcije oblika $f\{f[f(x)]\}$.

Da li funkcija $\sqrt[8]{x}$ pripada ovoj klasi funkcija?

2° Obrazovati funkciju $F_5(x)$, ako je

$$F_k(x)\equiv x F_{k-1}(x)-x^2 F_{k-2}(x)\quad (k=3, 4, 5, \ldots),$$

gde je

$$F_1(x)\equiv x,\quad F_2(x)\equiv x^2-1.$$

3° Obrazovati funkciju $F_6(x)$, ako je

$$F_k(x)\equiv F_{k-1}\{F_{k-2}(x)\}\quad (k=3, 4, 5, \ldots),$$

gde je

$$F_1(x)\equiv\log_e x,\quad F_2(x)\equiv\exp x.$$

71. Ako je $f(x+1)\equiv(x^2+x+1)/(x^2-x+1)$, obrazovati funkcije: $f(x-1)$, $f(1/x)$ i $f(2x)$.

72. Odrediti uslov da bi funkcija $(1-x^2)/(ax^2+bx+c)$ mogla imati sve vrednosti, kada x varira od $-\infty$ do $+\infty$.

Rezultat. $b^2>(a+c)^2$.

73. 1° Pokazati da funkcija $f(x)\equiv(x^2+2x+a)/(x^2+4x+b)$, gde su a i b dva realna parametra, može uzeti ma koju realnu vrednost ako je, na primer, $b=3a$ $(0<a<1)$ ili $b=a$ $(a<0)$.

2° Odrediti zatim oblasti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oab (O koordinatni početak) u kojima treba da se nalazi tačka $M(a, b)$ da bi funkcija $f(x)$ uzela ma koju realnu vrednost.

3° Utvrditi da li su rezultati dobijeni u tački 1° obuhvaćeni rezultatima iz tačke 2°.

74. Ako je $f(x) \equiv (a-x^n)^{1/n}$ $(x>0)$, tada je $f\{f(x)\} \equiv x$. Dokazati ovo i odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x)$.

75. 1° Pokazati da je

$$H(x) \equiv (1/2)(1+\operatorname{sgn} x),$$

$$H(x)=\begin{cases} 1 & (x>0), \\ 1/2 & (x=0), \\ 0 & (x<0); \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & (x>0), \\ 0 & (x=0), \\ -1 & (x<0). \end{cases}$$

2° Grafički prikazati funkciju

$$y=(1/2)\,k\,[\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b)] \qquad (a<b;\ k \text{ parametar}).$$

3° Ispitati da li je $|x|=\int\limits_0^x \operatorname{sgn} t\,dt$.

76. Dokazati identitete:

1° $\quad H(t-\log\alpha) \equiv H(e^t-\alpha)$;

2° $\quad H\{(t-a)(t-b)\} \equiv H\{t-\max(a, b)\}+H\{\min(a, b)-t\}$

$\{H(t)$ označava *Heaviside*-ovu funkciju argumenta t; $a, b, \alpha=\text{const}$; $\alpha>0$; $a \neq b\}$.

77. Grafički prikazati funkcije

$$f_1(t) \equiv h[H(t)+H(t-\tau)+H(t-2\tau)+\cdots],$$

$$f_2(t) \equiv h[H(t)-H(t-\tau)+H(t-2\tau)-\cdots],$$

$$f_3(t) \equiv h\left[\frac{t}{\tau}H(t)-H(t-\tau)-H(t-2\tau)-\cdots\right],$$

$$f_4(t) \equiv 2h\left[\frac{1}{2}H(t)-H(t-\tau)+H(t-3\tau)-H(t-5\tau)+\cdots\right],$$

$$f_5(t) \equiv h[H(t)-H(t-\tau)-H(t-2\tau)+H(t-3\tau)+H(t-4\tau)-\cdots],$$

$$f_6(t) \equiv \frac{h}{\tau}[t\,H(t)-(t-\tau)\,H(t-\tau)],$$

$$f_7(t) \equiv \frac{2h}{\tau}\Big[\frac{t}{2}H(t)-(t-\tau)\,H(t-\tau)+(t-2\tau)\,H(t-2\tau) \\ -(t-3\tau)\,H(t-3\tau)+\cdots\Big],$$

$$f_8(t) \equiv \frac{2h}{\tau}\Big[\frac{1}{2}H(t)-(t-\tau)\,H(t-\tau)+(t-3\tau)\,H(t-3\tau) \\ -(t-5\tau)\,H(t-5\tau)+\cdots\Big]$$

$\{h$ i τ pozitivne konstante; $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija$\}$.

78. Grafički prikazati funkciju

$$t\,H(t)+(t-1)\,H(t-1)+\cdots+(t-n)\,H(t-n),$$

gde je $H(t)$ *Heaviside*-ova funkcija.

79. Proveriti da li su tačne relacije

$$\sum_{k=0}^{n}(t-k)\,H(t-k)\equiv\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(t-k)\,\{1+\operatorname{sgn}(t-k)\}\equiv\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\{(t-k)+|t-k|\}.$$

80. Ispitati sledeće funkcije i grafički ih prikazati:

1°	$\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;	2°	$\dfrac{4}{x+a^2}-\dfrac{1}{x+b^2}$;
3°	$\dfrac{x}{4x^2-3x+4}$;	4°	$\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{4x-3}$;
5°	$(\sin x)/(2+\cos x)$;	6°	$4\cos^2 x-\cos 2x$;
7°	$\sin x\sin(x-a)$;	8°	$\sin^2 x\cos 2x$;
9°	$\sin 3x-3\sin x$;	10°	$\cos^2 x\sin 2x$;
11°	$(\log x)/x$;	12°	$x^3 e^{-3x}$;
13°	$a^x x^{-a}$;	14°	$x^b e^{-ax^2}$
15°	$\cos^3 x\, e^{-3x}$;	16°	$\sin^2 x\, e^{-2x}$;
17°	$\sin^3 x\, e^{-3x}$;	18°	$\cos^2 x\, e^{-2x}$

(a, b realni brojevi).

81. Nacrtati krive:

1° $|x+y-1|+x-1=0$;

2° $|x+y-1|-|x|=1$;

3° $|x|+|y|-|x-1|=x$;

4° $|x+y-1|+|y+x^2|=1$;

5° $|x+y-1|+|x^2+y^2-1|=1$.

82. Nacrtati krive:

1° $y=(1-x)\,e^x$; 2° $y=x/(e^x-1)$; 3° $y=(x-2)/(x^2+1)^{1/2}$.

83. Data je funkcija

$$f(x)\equiv(x-a)^l\,(x-b)^m\,(x-c)^n\quad(l,\ m,\ n \text{ prirodni brojevi}).$$

Odrediti maksimalne i minimalne vrednosti ove funkcije u sledeća dva slučaja: 1° l, m, n su parni brojevi; 2° l, m, n su neparni brojevi.

Rezultat. Označimo sa α, β $(\alpha<\beta)$ korene jednačine

$$l\,(x-b)\,(x-c)+m\,(x-c)\,(x-a)+n\,(x-a)\,(x-b)=0.$$

Ako su l, m, n parni brojevi, tada je:

$$f_{\max}(x)=\begin{cases}f(\alpha),\\ f(\beta);\end{cases}\qquad f_{\min}(x)=\begin{cases}f(a)=0,\\ f(b)=0,\\ f(c)=0.\end{cases}$$

Ako su l, m, n neparni brojevi, tada je: $f_{\max}(x)=f(\alpha)$, $f_{\min}(x)=f(\beta)$.

84. Pokazati da za svako $0 < a < 1$ funkcija $(x^2 + 2x + a)/(x^2 + 4x + 3a)$ može uzeti ma koju realnu vrednost.

Rešenje. Stavimo $(x^2 + 2x + a)/(x^2 + 4x + 3a) = y$. Tada se dobija

$$(1 - y)x^2 + 2(1 - 2y)x + a(1 - 3y) = 0.$$

Ova jednačina imaće po x realne korene ako je

$$(1 - 2y)^2 - a(1 - y)(1 - 3y) \geqslant 0 \qquad (\text{za svako } y \text{ realno})$$

tj. ako je $(1 - 2y)^2(1 - a) + ay^2 \geqslant 0$. A ovo će biti sigurno ispunjeno ako je $0 \leqslant a \leqslant 1$..

Za $a = 0$ i $a = 1$ funkcija $y(x)$ ne može uzeti vrednost 1 ni za jedno x konačno, pa je $0 < a < 1$, kao što je trebalo pokazati.

85. Funkcija $f(x)$ u intervalu $(0, +\infty)$ definisana je kao što sleduje:

Za $0 < x \leqslant 1$ njen grafik je luk hiperbole $y = 1/x$;

Za $1 < x < +\infty$ njen grafik je luk parabole čija je osa simetrije paralelna y-osi i koja je u oskulaciji sa hiperbolom $y = 1/x$ u tački $(1, 1)$.

1° Sastaviti formulu funkcije $f(x)$ i ispitati da li ta funkcija ima treći izvod u tački čija je apscisa $x = 1$.

2° Izračunati veličinu $P(a, b)$ površine koju omeđuju kriva $y = f(x)$ i prave $x = a\ (0 < a < 1)$ i $x = b\ (b > 1)$. Čemu teži $P(a, b)$ kada $a \to 0^+$?

86. Grafički prikazati funkciju $f(x) = \int dx/|x^2 - 1|^{1/2}$.

Uputstvo. Prvo proučiti funkciju $g(x) = 1/\sqrt{|x^2 - 1|}$.

87. U istom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu nacrtati krive

$$y = \pm(1 - \sqrt{1 - x^4})/x, \qquad y = \pm(1 + \sqrt{1 - x^4})/x.$$

Pokazati da obe krive zajedno čine jednu algebarsku krivu čiju jednačinu $F(x, y) = 0$ treba odrediti.

88. Grafički prikazati funkcije:

$$1^\circ \quad f(x) = \log(1 - 2\cos x); \qquad 2^\circ \quad g(x) = \log|1 - 2\cos x|.$$

89. Grafički prikazati funkciju $y(x)$, definisanu relacijom $\operatorname{sh}(x^3 - y^3) = 0$.

90. Ako je $x > 0$, pokazati da je $x - \operatorname{th} x > 0$ i na osnovu toga izvesti zaključak da je

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) > 0 \quad \text{za} \quad x > 0.$$

91. Pokazati da je funkcija

$$f(x) = \operatorname{sh}\frac{nx}{2}\operatorname{sh}\left(a + \frac{n-1}{2}x\right) \Big/ \operatorname{sh}\frac{x}{2} \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

stalno rastuća.

Uputstvo. Dokazati identitet

$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a + x) + \operatorname{sh}(a + 2x) + \cdots + \operatorname{sh}(a + \overline{n-1}\,x) \equiv f(x),$$

gde je $f(x)$ funkcija, koja je ranije definisana.

Zatim posmatrati izvod

$$f'(x) = \operatorname{ch}(a + x) + 2\operatorname{ch}(a + 2x) + \cdots + (n-1)\operatorname{ch}(a + \overline{n-1}\,x).$$

92. Nacrtati krive definisane jednačinama:

$$1^\circ \quad x=|t|, \quad y=t+1; \qquad 2^\circ \quad x=|\sin t|, \quad y=\cos t,$$

gde t varira od $-\infty$ do $+\infty$.

93. Grafički prikazati funkcije:

$$1^\circ \quad f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x); \qquad 2^\circ \quad f(x)=\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x);$$

$$3^\circ \quad f(x)=g[g(x)], \quad \text{gde je} \quad g(x)=\frac{1}{2}(x+|x|).$$

94. Ispitati da li je funkcija $f(x)=\operatorname{sgn} x$ rešenje funkcionalne jednačine

$$f(xy)=f(x)f(y)?$$

95. Odrediti minimum funkcije

$$f(x)=\max\{2|x|, |1+x|\}.$$

Rezultat. $f_{\min}=2/3$.

96. Odrediti minimalnu vrednost funkcije

$$|x-x_1|+|x-x_2|+\cdots+|x-x_n| \quad (x_1<x_2<\cdots<x_n).$$

97. Data je funkcija $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$.

1° Odrediti njen osnovni period T.

2° Nacrtati grafik funkcije $f(x)$ za $x \in [0, T]$.

3° Izračunati zapreminu obrtnog tela koje nastaje kada površina, ograničena x-osom, pravama $x=0$, $x=T$ i krivom $y=f(x)$, rotira oko x-ose.

98. Odrediti minimum funkcije

$$f(x, y)=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y, \tag{1}$$

gde su x i y vezani relacijom

$$\sin^2 x+\sin^2 y=3/2. \tag{2}$$

Uputstvo. Transformisati $f(x, y)$ na oblik

$$f(x, y)=\frac{\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin^2 x\sin^2 y}{1-\sin^2 x-\sin^2 y+\sin^2 x\sin^2 y},$$

koji, prema uslovu (2), postaje

$$\frac{1}{2\sin^2 x\sin^2 y-1}-2. \tag{3}$$

Poslednja funkcija dostiže *minimum*, kada funkcija $\sin^2 x\sin^2 y$, pri uslovu (2), dostigne *maximum*.

Traženi minimum je 6.

99. Data je funkcija

$$f(x)=\frac{(1-x)^{-1/2}-(1+x)^{1/2}}{(1-x/2)^{-1/2}-(1+x/2)^{1/2}} \qquad (x \neq 0).$$

Pod kojim će uslovom (uslov C) ova funkcija biti neprekidna u tački $x=0$? Ako je uslov C zadovoljen, da li je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački $x=0$?

Rezultat. Dopunski uslov C je: $f(x)=4$ za $x=0$.

III. INTEGRALI

100. Odrediti funkcije

$$\int \frac{x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2}\,dx; \quad \int \frac{\log x}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx; \quad \int \cos x\sqrt{\cos 2x}\;dx.$$

101. Izračunati integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x - \sin^2 x + \lambda} \qquad (\lambda \text{ realan parametar}).$$

102. Ispitati da li su tačni rezultati:

$$1^\circ \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{ab}; \qquad 2^\circ \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x\operatorname{ch}\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha};$$

$$3^\circ \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\cos 3\theta\sqrt{\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{8\sqrt{2}};$$

$$4^\circ \quad \int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Ako je $ab < 0$, da li i tada važi formula 1°?

103. Odrediti funkcije:

$$1^\circ \quad \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}\,dx; \qquad 2^\circ \quad \int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}\,dx;$$

$$3^\circ \quad \int \frac{\operatorname{ch}\alpha x}{a\operatorname{ch}\alpha x + b\operatorname{sh}\alpha x}\,dx; \qquad 4^\circ \quad \int \frac{\operatorname{sh}\alpha x}{a\operatorname{ch}\alpha x + b\operatorname{sh}\alpha x}\,dx$$

(a, b, α realne konstante).

Uputstvo. Formirati dve podesne linearne kombinacije integrala 1° i 2°.

104. Pokazati da se relacija

$$\int [f(x) + f'(x)]\,e^x\,dx = e^x f(x) + \text{const}$$

može primeniti na određivanje funkcija

$$\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,e^x\,dx; \qquad \int \frac{x}{(1+x)^2}\,e^x\,dx.$$

105. Da li se integral $\int (\operatorname{tg} x)^r\,dx$, gde je r racionalan broj, može izraziti elementarnim funkcijama u konačnom broju?

Za slučajeve $r = 1/2$ i $r = 1/3$ račun izvesti do kraja.

106. Izračunati određene integrale:

1° $\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$; 2° $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$; 3° $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\,dx$;

4° $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$; 5° $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x\log x}{(x^2+1)^2}\,dx$; 6° $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

7° $\int_0^\infty \frac{x^3\log x}{(x^4+1)^3}\,dx$; 8° $\int_1^\infty \frac{dx}{x(\sqrt{x-1}+1)}$; 9° $\int_1^{5/4} \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

10° $\int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{x}$; 11° $\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$; 12° $\int_0^1 x^2(\log x)^2\,dx$;

13° $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$; 14° $\int_0^\infty x^2e^{-2x}\,dx$; 15° $\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x+\cos x+1}$;

16° $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$; 17° $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$; 18° $\int_0^1 x^2\arcsin x\,dx$;

19° $\int_0^{\pi/2} 2x\cos^2 x\,dx$; 20° $\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx$; 21° $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$;

22° $\int_0^{\pi/2} x\sin^2 x\cos x\,dx$; 23° $\int_0^1 2x\operatorname{arc\,cotg}\sqrt{x}\,dx$; 24° $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$;

25° $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x)^2}\,dx$; 26° $\int_0^\pi x^2\sin^2 x\,dx$; 27° $\int_0^{\pi^2/4} x\sin\sqrt{x}\,dx$.

Uputstvo. Nacrtati grafik podintegralne funkcije.

107. Izračunati integrale:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}; \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x\,dx}{\cos^2 x+3\cos x+2};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1/2)(1+x^2)^{1/2}}; \qquad \int_0^{\pi/2} a^{\log\sin x}\cos^3 x\,dx \quad (a \geqslant 1).$$

108. Dokazati relaciju

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx \quad (x = \pi - t)$$

i primeniti je na izračunavanje integrala $\int_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x\, dx$.

109. Izračunati integral

$$J_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\, dx \quad (n \text{ prirodan broj}; \ J_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}).$$

Koristeći dobijeni rezultat, izračunati integral

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\, dx \quad (a > 0).$$

110. Dati su integrali:

$$I_n = \int (1/\operatorname{th} x)^n\, dx, \quad K_n = \int (\operatorname{th} x)^n\, dx \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Izvesti formule:

$$I_{2p} = x - \left[\frac{1}{\operatorname{th} x} + \frac{1}{3\operatorname{th}^3 x} + \cdots + \frac{1}{(2p-1)\operatorname{th}^{2p-1} x}\right] + \text{const};$$

$$I_{2p+1} = \log|\operatorname{sh} x| - \left[\frac{1}{2\operatorname{th}^2 x} + \frac{1}{4\operatorname{th}^4 x} + \cdots + \frac{1}{2p\operatorname{th}^{2p} x}\right] + \text{const};$$

$$K_{2p} = x - \left[\operatorname{th} x + \frac{1}{3}\operatorname{th}^3 x + \cdots + \frac{1}{2p-1}\operatorname{th}^{2p-1} x\right] + \text{const};$$

$$K_{2p+1} = \log \operatorname{ch} x - \left[\frac{1}{2}\operatorname{th}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{th}^4 x + \cdots + \frac{1}{2p}\operatorname{th}^{2p} x\right] + \text{const}.$$

111. Odrediti primitivnu funkciju funkcije

$$1/(\cos x - \cos a) \quad (a \text{ parametar}).$$

Posebno ispitati slučaj: $a = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Rezultat. Tražena funkcija je $\dfrac{1}{\sin a} \log \left| \sin \dfrac{x+a}{2} \Big/ \sin \dfrac{x-a}{2} \right| + \text{const.}$

112. Ako je $n > 1$, tada je

$$0{,}5 < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < 0{,}524.$$

113. Izračunati $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$, ako je

$$\begin{aligned} &f(0)=1; \\ &f'(x)=1-x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1); \\ &f'(x)=x-1 \quad (1 \leqslant x \leqslant 2). \end{aligned}$$

114. Polazeći od grafika funkcije $4-x^2+x^3$, nacrtati grafik funkcije

$$1/\sqrt{4-x^2+x^3}.$$

Koristeći nacrtani grafik, ili koji drugi način, dokazati da je

$$\frac{1}{2}<\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\frac{\pi}{6}.$$

Ispitati da li je tačna relacija

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}}<\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x+x^3}}.$$

115. Izračunati integrale:

$1°\quad \int\limits_0^2 |x^2-1|\,dx;\qquad 2°\quad \int\limits_a^b x\,|x|\,dx;\qquad 3°\quad \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin|x|\,dx.$

116. Na dve tačne decimale izračunati integral

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

117. Da li je tačna relacija

$$\int\limits_0^{4\pi} \sqrt{1-\cos x}\,dx=\sqrt{2}\int\limits_0^{4\pi} \sin(x/2)\,dx=0?$$

Ako nije, u čemu je greška?

118. Odrediti

$$J(a)=\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

za $a>0$ i $a<0$.

Primedba. Proveriti da li je $J(a)=(\operatorname{sgn} a)\dfrac{\pi a^4}{16}$.

119. Data je funkcija

$$J(a, b)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2+a^2}\,dx.$$

Ako je $a>0$ i $b>0$, tada je $J(a, b)=\pi e^{-ab}$.

Budući da je $J(-a, b)\equiv J(a, b)$ i $J(a, -b)\equiv -J(a, b)$, napisati vrednost datog integrala za ma kakvo realno a i b $(ab\neq 0)$.

Rezultat. $J(a, b)=(\operatorname{sgn} b)\, e^{-|ab|}$.

120. Polazeći od formule

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kh)\equiv\frac{\sin\frac{n}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right),$$

izvesti (p prirodan broj):

$$(2)\qquad \frac{\sin 2px}{\sin x}\equiv 2\{\cos(2p-1)x+\cos(2p-3)x+\cdots+\cos x\},$$

$$(3)\qquad \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\equiv 2\{\cos 2px+\cos(2p-2)x+\cdots+\cos 2x\}+1.$$

Na osnovu (2) i (3) izračunati

$$\int_0^\pi\frac{\sin 2px}{\sin x}\,dx,\qquad \int_0^\pi\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\,dx.$$

Rešenje. Ako po a diferenciramo izraze na levoj i desnoj strani identiteta (1), dobijamo

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kh)\equiv\frac{\sin\frac{n}{2}h}{\sin\frac{1}{2}h}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right).$$

Stavljajući ovde $a=x$, $h=2x$, $n=2p$, biće

$$\frac{\sin 2px}{\sin x}\cos 2px\equiv\sum_{k=0}^{2p-1}\cos(2k+1)x.$$

$$\therefore\ \frac{\sin px}{\sin x}\cos px\equiv\sum_{k=0}^{p-1}\cos(2k+1)x.\qquad \therefore\ \frac{\sin 2px}{\sin x}\equiv 2\sum_{k=0}^{p-1}\cos(2k+1)x.$$

Ovim je izvedena formula (2).

Ako se u (4) stavi $n=2p+1$, $a=0$, $h=2x$, dobija se jedno za drugim

$$\sum_{k=0}^{2p}\cos 2kx\equiv\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\cos 2px,$$

$$1+2\sum_{k=1}^{p}\cos 2kx\equiv\frac{2\sin(p+1)x\cos px}{\sin x}-1,$$

$$1+2\sum_{k=1}^{p}\cos 2kx\equiv\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}.$$

Ovim je dokazana relacija (3).

Polazeći od (2) i (3), dobija se

$$\int_0^\pi\frac{\sin 2px}{\sin x}\,dx=0,\qquad \int_0^\pi\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\,dx=\pi.$$

121. Izračunati integral

$$\int_0^1 x^m\,dx/(x+1)^{2m+2} \qquad (m=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Uputstvo. Razviti $[(x+1)-1]^m$ po binomnoj formuli ili upotrebiti *beta*-funkciju.

Rezultat. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(m!)^2}{(2m+1)!}$.

122. Izračunati integrale:

$$1^\circ.\ \int_1^\infty dx/(x\sqrt{x^2+1}); \qquad 2^\circ\ \int_{-1}^{+1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx; \qquad 3^\circ\ \int_0^{\pi/4} x\,dx/\cos^2 x.$$

Uputstvo. 1° Smena $x=1/t$ ili $x=\operatorname{sh} t$.
Nacrtati grafike funkcija:

$$1/(x\sqrt{x^2+1}), \quad x^2\sqrt{1-x^2}, \quad x/\cos^2 x.$$

123. Ako je n prirodan broj, pokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{n\pi}{2},$$

i izračunati integrale:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\,d\theta, \qquad \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Uputstvo. Obrazovati I_n-I_{n-1} i J_n-J_{n-1}, gde je

$$I_n=\int_0^{\theta} \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta, \qquad J_n=\int_0^{\theta} \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta.$$

124. Proveriti formule:

$$\int \cos ax\cos bx\cos cx\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}+\frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}+\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right]+\text{const};$$

$$\int \sin ax\sin bx\sin cx\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c}+\frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a}+\frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c}-\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}\right]+\text{const};$$

$$\int \sin ax\cos bx\cos cx\,dx$$
$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}-\frac{\cos(b+c-a)x}{b+c-a}+\frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c}+\frac{\cos(a+c-b)x}{a+c-b}\right]+\text{const};$$

$$\int \cos ax\sin bx\sin cx\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}-\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}-\frac{\sin(b+c-a)x}{b+c-a}\right]+\text{const}.$$

Ove formule važe ako je zadovoljen uslov

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\neq 0.$$

125. Pokazati da je

$$\int_0^{2a} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\sin^2 a}{a} + \int_0^a \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

i na osnovu ovoga zaključiti da je

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx.$$

Uputstvo. Primeniti metod parcijalne integracije na integral

$$\int_0^a (\sin x)^2\, d(-1/x).$$

126. Pokazati da je

$$0{,}4 < \int_0^{2/5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < 0{,}412.$$

Rešenje. Za $|x|<1$ važi

$$1 > 1-x^4 > 1-x^2. \quad \therefore \quad 1 < \frac{1}{1-x^4} < \frac{1}{1-x^2}, \quad \therefore \quad 1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

pa se dobija

$$\int_0^{2/5} dx < \int_0^{2/5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \int_0^{2/5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

odakle neposredno sleduje relacija koju je trebalo verifikovati.

127. Dokazati relaciju

$$-\frac{\pi}{4} < \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{4+x^2}\,dx \leqslant +\frac{\pi}{4} \qquad (a \text{ realan parametar}).$$

128. Izračunati integrale:

$$1^\circ \quad \int_1^{+\infty} dx/\{x(1+x^n+x^{2n})\}^{1/2} \qquad (n \text{ pozitivan broj});$$

$$2^\circ \quad \int_0^{\pi/4} dx\,\{(\cos x - \sin x)/(\cos x + \sin x)\}^n \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Uputstvo. 1° $x^n = t$. 2° $x = (\pi/4) - t$.

129. Ako je funkcija $f''(x)$ neprekidna, odrediti

$$\int_{x-1}^{x} \Big[\int_y^{y-1} f''(t)\,dt\Big]\,dy.$$

130. Dokazati formulu

$$\int P(x)\, e^{ax}\, dx \equiv e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+\text{const}$$

$\{P(x)$ polinom stepena $n\}$.

131. Ako je $ab \neq 0$, verifikovati formulu

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(a^2+b^2-2ab\cos t)^{1/2}}\,dt=\frac{|a+b|-|a-b|}{ab}=\frac{2}{\max(|a|,\ |b|)}.$$

132. Odrediti funkcije

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-4}},\qquad \int(x^3+x^2)^{1/3}\,dx,\qquad \int\frac{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}{\operatorname{sh}x}\,dx,$$

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x},\qquad \int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x},\qquad \int\frac{1+(a+x)^{1/3}}{1-(a+x)^{1/3}}\,dx.$$

133. Pokazati da izrazi $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ i $\sqrt{(x-\alpha)/(\beta-x)}$ postaju racionalne funkcije po $\sin\theta$ i $\cos\theta$, ako se stavi

$$x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta \qquad (\alpha<\beta).$$

Primeniti ovo na izračunavanje integrala

$$\int[(x-a)/(2a-x)]^{1/2}\,dx.$$

134. Izračunati integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2k+1}x}{x}\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ldots).$$

135. Proveriti relaciju

$$\int_0^t f(x)\sin x\,dx=F'(t)\sin t-F(t)\cos t+F(0),$$

gde je

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-f^{(6)}(x)+\cdots \qquad \{f(x)\ \text{polinom po}\ x\}.$$

136. Dati su integrali

$$J_1=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\qquad J_2=\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$$

Pokazati da je

$$(R)\qquad a^2J_1+J_2=\pi/(2b),\qquad b^2J_1+J_2=\pi/(2a)\qquad (a>0,\ b>0).$$

Polazeći od relacija (R), izračunati integrale J_1 i J_2.

Generalisati ovaj postupak za izračunavanje integrala

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\cdots(x^2+a_n^2)},\qquad \int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a_1^2)(x^2+a_2^2)\cdots(x^2+a_n^2)}.$$

137. Proveriti formulu

$$\int \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2}{(1-a^2)^{1/2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{1/2} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] + \text{const} \quad (|a|<1);$$

$$= \frac{1}{(a^2-1)^{1/2}} \log \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{1/2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{1/2}} \right| + \text{const} \quad (|a|>1);$$

$$= -\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + \text{const} \quad (a=-1);$$

$$= \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \text{const} \quad (a=1).$$

Primenom navedene formule pokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos\alpha\cos x} = \frac{\alpha}{\sin\alpha} \quad \left(0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}\right).$$

138. Ako su p i q prirodni brojevi, tada je

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}\,dx = (-1)^{q-1}(b-a)^{p+q-1}\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

139. Izračunati $J = \int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) dx.$

Uputstvo i rezultat. Upotrebiti smenu $x=\pi/2-y$, pa se dobija $J=\pi^2/8$.

140. Odrediti uslov koji treba da ispunjavaju parametri $a_0, a_1, \ldots, a_n$ da bi funkcija

$$\int \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) e^x\,dx$$

bila *elementarna.*

Rešenje. Ako je k prirodan broj, tada se, primenom parcijalne integracije, dobija

$$\int \frac{e^x}{x^k}dx = -\left[\frac{1}{k-1}\frac{1}{x^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\frac{1}{x^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)(k-2)\cdots 1}\frac{1}{x}\right]e^x + \frac{1}{(k-1)!}\int \frac{e^x}{x}dx.$$

Na osnovu ovog traženi uslov glasi

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0.$$

Dodatak. Čitalac će rešiti ovaj sličan zadatak: Odrediti uslove da bi funkcije

$$\int P(1/x)\sin x\,dx, \qquad \int P(1/x)\cos x\,dx$$

$$\{P(1/x) = a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + \cdots + a_n/x^n\}$$

bile *elementarne.*

141. Izračunati integral

$$J = \int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx/(x^2+1/2)^2.$$

Rešenje. Primenimo li parcijalnu integraciju na neodređeni integral

$$I_1 = \int \frac{\exp(-x^2)}{2x}\,\frac{2x}{(x^2+1/2)^2}\,dx,$$

dobija se

$$I_1 = \frac{\exp(-x^2)}{2x}\,\frac{-1}{x^2+1/2} - \int \frac{\exp(-x^2)}{x^2}\,dx.$$

Primeni li se parcijalna integracija na neodređeni integral

$$I_2 = \int [\exp(-x^2)]\,dx/x^2,$$

dobija se

$$I_2 = -\frac{1}{x}\exp(-x^2) - 2\int [\exp(-x^2)]\,dx,$$

tako da je

$$I_1 = \frac{x\exp(-x^2)}{x^2+1/2} + 2\int [\exp(-x^2)]\,dx.$$

Prema tome $J = \sqrt{\pi}$.

142. Pod srednjom vrednošću funkcije $f(x)$ u intervalu $(0, +\infty)$ naziva se broj

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dx.$$

Odrediti srednju vrednost funkcije $\operatorname{arc\,tg} x$ u intervalu $(0, +\infty)$.

Rezultat. $\pi/2$.

143. Dat je integral

$$I(p, q, r) = \int_0^1 x^p(1-x)^q(1+x)^r\,dx \qquad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0).$$

Pomoću smene promenljivih $xy + x + y - 1 = 0$, pokazati da je

$$I(p, q, r) = 2^{q+r+1}\, I(q, p, -p-q-r-2).$$

Koristeći ovaj rezultat, izračunati

$$\int_0^1 \frac{[x(1-x)]^{1/2}}{(1+x)^3}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{(1+x)^6}\,dx.$$

Drugi od ovih integrala izračunati polazeći od funkcije $x(1-x)^2/(1+x)^6$, razložene na parcijalne razlomke.

Rešenje. Integral $I(p, q, r)$ smenom $xy + x + y - 1 = 0$, tj. $x = (1-y)/(1+y)$, postaje

$$I(p, q, r) = 2^{q+r+1}\int_0^1 y^q(1-y)^p(1+y)^{-p-q-r-2}\,dy,$$

te je zaista

$$(1) \qquad I(p, q, r) = 2^{q+r+1}\, I(q, p, -p-q-r-2).$$

Prema ovom rezultatu imamo

$$\int_0^1 \frac{[x(1-x)]^{1/2}\,dx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx.$$

Delimičnom integracijom dobijamo najpre

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}\,\Big|_0^1 + \frac{1}{8}\int_0^1 dx/(x-x^2)^{1/2}.$$

Kako je dalje

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-x^2)^{1/2}} = \int_0^1 \frac{2\,dx}{[1-(1-2x)^2]^{1/2}} = -\arcsin(1-2x)\,\Big|_0^1 = \pi,$$

biće

$$\int_0^1 \frac{[x(1-x)]^{1/2}\,dx}{(1+x)^3} = \frac{\pi}{16\sqrt{2}}.$$

Ako funkciju $x(1-x)^2/(1+x)^6$ rastavimo na parcijalne razlomke, dobijamo

$$\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^6} \equiv -\frac{4}{(1+x)^6} + \frac{8}{(1+x)^5} - \frac{5}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1+x)^3}.$$

Integracijom nalazimo

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{(1+x)^6}\,dx = \frac{4}{5}\frac{1}{(1+x)^5}\Big|_0^1 - 2\frac{1}{(1+x)^4}\Big|_0^1 + \frac{5}{3}\frac{1}{(1+x)^3}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

S druge strane, prema relaciji (1) je

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{(1+x)^6}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^1 x^2(1-x)(1+x)\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{60}.$$

144. Odrediti funkciju definisanu integralom

(1) $$\int (x-y)\,dx/(x+y),$$

gde su x i y vezani relacijom

(2) $$y(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = 0 \quad (a \text{ parametar}).$$

Uputstvo. U (2) staviti $y = tx$, pa se x i y izražavaju kao funkcije promenljive t, tj.

$$x = \frac{a(1-t^2)}{t(1+t^2)}, \quad y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Zatim treba izračunati dx i smeniti u (1).

145. Ako je $I_n = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\,dx$, pokazati da je

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Na osnovu ovog pokazati da je

$$I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

146. Odrediti funkcije definisane integralima

$$J_1 = \int (\sin x)^{n-1} \cos(n+1)\, x\, dx, \qquad J_2 = \int (\sin x)^{n-1} \sin(n+1)\, x\, dx,$$

$$J_3 = \int (\cos x)^{n-1} \cos(n+1)\, x\, dx, \qquad J_4 = \int (\cos x)^{n-1} \sin(n+1)\, x\, dx$$

(n prirodan broj).

Rešenje. Formirajmo kompleksne integrale:

$$J_1 + iJ_2 = \int (\sin x)^{n-1} e^{i(n+1)x}\, dx, \qquad J_3 + iJ_4 = \int (\cos x)^{n-1} e^{i(n+1)x}\, dx.$$

Ako se ovde stavi

$$\sin x = \frac{1}{2i} \frac{e^{2ix}-1}{e^{ix}}, \qquad \cos x = \frac{1}{2} \frac{e^{2ix}+1}{e^{ix}},$$

dobija se

$$J_1 + iJ_2 = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \int (e^{2ix}-1)^{n-1} e^{2ix}\, dx = \frac{1}{n(2i)^n}(e^{2ix}-1)^n + \text{const.}$$

$$\therefore \quad J_1 + iJ_2 = \frac{1}{n} e^{inx} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \right)^n = \frac{1}{n} (\cos nx + i \sin nx)(\sin x)^n + \text{const.}$$

$$\therefore \quad J_1 = \frac{1}{n} (\cos nx)(\sin x)^n + \text{const}; \qquad J_2 = \frac{1}{n} (\sin nx)(\sin x)^n + \text{const.}$$

Istim postupkom nalazi se

$$J_3 = \frac{1}{n} (\sin nx)(\cos x)^n + \text{const}; \qquad J_4 = -\frac{1}{n} (\cos nx)(\cos x)^n + \text{const.}$$

147. Izračunati integral

$$J = \int_0^\infty (1 - \cos ax \cos bx)(dx/x^2) \qquad (a,\ b \text{ realni brojevi}).$$

Rešenje. Na osnovu identiteta

$$2 \cos ax \cos bx \equiv \cos(a-b)\, x + \cos(a+b)\, x,$$

integral J postaje

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{1-\cos(a-b)\, x}{x^2} + \frac{1-\cos(a+b)\, x}{x^2} \right] dx,$$

tj.

$$J = J_1 + J_2, \quad J_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(a-b)\, x, \qquad J_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{2}(a+b)\, x.$$

Smenom $(1/2)\,|a-b|\,x = t$, integral J_1 postaje

$$J_1 = \frac{|a-b|}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

Smenom $(1/2)\,|a+b|\,x=t$, integral J_2 dobija oblik

$$J_2=\frac{|a+b|}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Iz dobijenih rezultata sleduje

$$J=\frac{|a+b|+|a-b|}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

Budući da je

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2},$$

dobija se

$$J=\frac{\pi}{2}\,\frac{|a+b|+|a-b|}{2}.$$

Ovoj formuli može se dati sledeći sažeti oblik $J=(\pi/2)\max(|a|,\ |b|)$.

148. Dokazati

$$J=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\sin^m x\,dx=2^{-m}\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx \qquad (m \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje.
$$(\cos x\sin x)^m=2^{-m}(\sin 2x)^m.$$

$$\therefore\quad J=2^{-m}\int_0^{\pi/2}(\sin 2x)^m\,dx.$$

Smenom $2x=(\pi/2)-t$, dobija se

$$J=2^{-m-1}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^m t\,dt=2^{-m}\int_0^{+\pi/2}\cos^m t\,dt.$$

149. Verifikovati identitet

$$J(x)\equiv\underbrace{\int_a^x g'(x)\,dx\int_a^x g'(x)\,dx\cdots}_{\nu\text{ puta}}\int_a^x f(x)\,dx\equiv\frac{1}{(\nu-1)!}\int_a^x[g(x)-g(t)]^{\nu-1}f(t)\,dt$$

$$(g'(x)\equiv dg/dx)$$

i navesti pod kojim uslovima ovaj identitet važi.

Izračunati $J(x)$, ako je:

$$g(x)\equiv x^s \qquad (s \text{ prirodan broj}),$$
$$f(x)\equiv x^{n-1}(1-x)^m \qquad (m,\ n \text{ prirodni brojevi}).$$

150. Dokazati da u intervalu $(0,\pi/2)$ postoji nejednakost

$$(\sin x)/x>2/\pi,$$

i na osnovu nje izvesti novu nejednakost

$$\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin x}\,dx<\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}) \qquad (R>0).$$

Dokaz. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x\,(x-\operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

U intervalu $(0, \pi/2)$ funkcija $x-\operatorname{tg} x$ ima stalno negativnu vrednost.

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{x} \text{ stalno opada u intervalu } (0, \pi/2).$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\therefore \quad \sin x > (2/\pi)\,x, \quad -R\sin x < -(2/\pi)\,xR, \quad e^{-R\sin x} < \exp(-2\,xR/\pi).$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin x}\,dx < \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}xR}\,dx = e^{-\frac{2}{\pi}xR}\cdot\frac{\pi}{-2R}\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2R}(1-e^{-R}).$$

Primedba. Nejednakost

$$2\,x/\pi \leqslant \sin x \leqslant x \qquad (0\leqslant x\leqslant \pi/2)$$

zove se *Jordan*-ova nejednakost i ona ima važnu primenu prilikom izračunavanja određenih integrala pomoću računa ostataka.

151. 1° Da li je funkcija

$$f(k)\equiv\int_0^{\infty}[\exp(-e^{x^k})](\log x)\,dx/(1+x^2)$$

neparna?

2° Za koje je vrednosti realnog parametra k funkcija

$$f(k)\equiv|k|^{-k}\int_0^{\infty}x^k\,dx/(k^2+x^2)$$

neparna?

152. Da li se parametar a može tako izabrati da primitivna funkcija funkcije

$$f(x, a)\equiv(x^3-a)/(\{x-1)^3(x+1)^2\}$$

bude racionalna funkcija po x?

Odgovor. $a=1$.

153. Proveriti rezultat

$$\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}=\frac{1}{3}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

Uputstvo. Upotrebiti smenu $1+x^3=t^2$.

154. Ako je k prirodan broj, tada je

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2k\theta}{\sin\theta}\,d\theta=2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}\right].$$

155. Izračunati integral $\int\limits_0^{2\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$.

156. Izračunati $J=\int\limits_0^{\infty}\frac{x\log x}{(1+x^2)^3}\,dx$.

Uputstvo. Izvršiti smenu $x^2=t$, a zatim primeniti parcijalnu integraciju.

Rezultat. $J=-1/8$.

157. Izračunati $J=\int\limits_0^{\pi/4}\log(1+\operatorname{tg}x)\,dx$.

Rešenje. Smenom $x=\pi/4-t$ integral J postaje

$$J=\int\limits_0^{\pi/4}\log\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right]dt=\int\limits_0^{\pi/4}\log\left[1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\log\frac{2}{1+\operatorname{tg}x}\,dx=\int\limits_0^{\pi/4}(\log 2)\,dx-J.$$

$$\therefore\quad J=\frac{\pi}{8}\log 2.$$

158. Ako se primitivna funkcija $f(x)$ može izraziti u konačnom obliku, sti će slučaj biti i sa inverznom funkcijom $f^{-1}(x)$ funkcije $f(x)$.
Primeniti ovaj stav na funkcije $\sin x$ i e^x.

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $g(x)=\int f^{-1}(x)\,dx$.
Stavi li se $y=f^{-1}(x)$, tada je $x=f(y)$, $dx=f'(y)\,dy$.
Stoga je

$$g(x)=\int yf'(y)\,dy=yf(y)-\int f(y)\,dy\qquad\{y=f^{-1}(x)\}.$$

Po pretpostavci, $\int f(x)\,dx$ može se izraziti u konačnom obliku, pa prema tome i $\int f(y)\,dy$.

159. Odrediti izvod d^nf/dx^n funkcije

$$f(x)=\int\limits_c^{x}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-t)^k}{k!}\right)e^{nt}\,dt.$$

160. Dokazati formule:

$$1^\circ\quad \int\limits_0^{\pi}f(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int\limits_0^{\pi/2}\{f(\sin x,\ \cos x)+f(\sin x,\ -\cos x)\}\,dx;$$

$$2^\circ\quad \int\limits_0^{2\pi}f(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}f(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\{f(\sin x,\ \cos x)+f(-\sin x,\ \cos x)\}\,dx$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\{f(\sin x,\ \cos x)+f(\sin x,\ -\cos x)+f(-\sin x,\cos x)+f(-\sin x,-\cos x)\}dx.$$

Uputstvo. 1° Izvršiti smenu $\pi - x = t$ u integralu

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x, \quad \cos x)\, dx.$$

161. Proveriti rezultat

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} [\exp(-x^2]\, dx = \frac{1}{2} n! \qquad (n \text{ prirodan broj ili nula}).$$

IV. PRIMENE

162. Data je funkcija

$$f(x) \equiv (x^3 - 3\,x^2 + ax + b)\, e^{-x} \qquad (a,\ b \text{ parametri}).$$

1° Odrediti a i b tako da kriva $y = f(x)$ dodiruje x-osu i da $\int_0^{\lambda} f(x)\, dx \to 0$. kada $\lambda \to +\infty$.

2° Konstruisati krivu $y = f(x)$, koja zadovoljava uslove 1°.

Rešenje. 1° Najpre dobijamo:

$$\int (x^3 - 3\,x^2 + ax + b)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x}\,(x^3 + ax + a + b) + \text{const}.$$

$$\therefore \quad \int_0^{\infty} (x^3 - 3\,x^2 + ax + b)\, e^{-x}\, dx = a + b.$$

Prema 1° imamo

$$(1) \qquad a + b = 0.$$

Budući da je

$$f'(x) = e^{-x}\,[-x^3 + 6\,x^2 - (a+6)\,x + a - b],$$

uslovi da kriva $y = f(x)$ dodiruje x-osu u tački $x = \lambda$ (λ privremeno neodređeno) glase:

$$(2) \qquad e^{-\lambda}\,[-\lambda^3 + 6\lambda^2 - (a+6)\,\lambda + a - b] = 0,$$

$$(3) \qquad e^{-\lambda}\,(\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

Iz (1), (2), (3) sleduje

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + (a+6)\,\lambda - 2\,a = 0, \qquad \lambda^3 - 3\,\lambda^2 + a\,\lambda - a = 0.$$

Iz poslednjih relacija, posle eliminacije parametra a, dobija se jednačina

$$\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda = 0,$$

čiji je jedini realan koren $\lambda = 0$. Ovoj vrednosti odgovara: $a = 0$, $b = 0$.

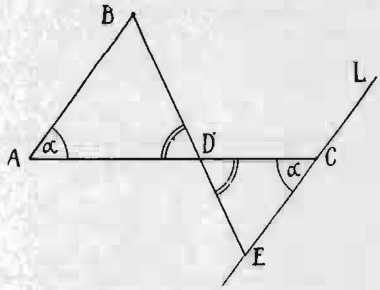
Prema tome, funkcija $f(x)$ koja zadovoljava uslove 1° ima oblik

$$f(x) \equiv e^{-x}\,(x^3 - 3\,x^2).$$

2° Kriva $y = e^{-x}\,(x^3 - 3\,x^2)$ dodiruje x-osu u tački (0, 0).

Čitalac će nacrtati ovu krivu.

163. Duži AB i AC čine ugao α. Kroz C povučena je prava L paralelno pravoj AB. Prava kroz B seče prave AC i L respektivno u D i E. Odrediti tačku D tako da zbir površina trouglova ABD i DCE bude minimalan.



Rešenje. Pretpostavimo da se tačka D nalazi između A i C i uvedimo oznake:

$$\overline{AB}=a,\quad \overline{AC}=b,\quad \overline{AD}=x \quad (0<x<b).$$

Formirajmo izraz

$$S(x)\equiv \text{area}\,\Delta ABD+\text{area}\,\Delta CDE$$

$$=\frac{1}{2}ax\sin\alpha+\frac{1}{2}(b-x)^2\frac{a}{x}\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}a\sin\alpha\left[x+\frac{(b-x)^2}{x}\right].$$

Tada se nalazi $S_{\min}=(\sqrt{2}-1)\,ab\sin\alpha$ (za $x=b/\sqrt{2}$).

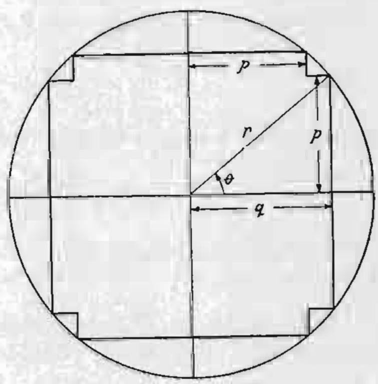
Ostaje da se prouči slučaj kada se D ne nalazi između A i C.

164. U krug poluprečnika r upisati krst kao što je naznačeno na slici. Odrediti p i q tako da veličina površine krsta bude što veća pri datom r. Rešenje ovog zadatka ima primene u elektrotehnici.

Rešenje. Veličina površine datog krsta je $P=4\,[pq+p\,(q-p)]=4\,(2\,pq-p^2)$.

Ako se p i q zamene sa $p=r\sin\theta$, $q=r\cos\theta$ $(0<\theta<\pi/2)$, tada je

$$P(\theta)=4\,r^2(\sin 2\theta-\sin^2\theta).$$



Budući da je

$$P'(\theta)=4\,r^2(2\cos 2\theta-\sin 2\theta),$$

$$P''(\theta)=-8\,r^2(2\sin 2\theta+\cos 2\theta),$$

funkcija $P(\theta)$ dostiže ekstremnu vrednost za

$$\operatorname{tg} 2\theta=2 \quad (\therefore\ \theta_1=31^0\,43').$$

Kako je $P''(\theta)<0$ za $\theta=\theta_1$, veličina $P(\theta)$ površine ima maksimalnu vrednost za $\theta=\theta_1$.

Dimenzije p i q imaju vrednosti

$$p=r\sin\theta\approx 0{,}526\,r,$$

$$q=r\cos\theta\approx 0{,}851\,r.$$

$$\therefore\quad P\approx 2{,}472\,r^2,$$

što znači da je iskorišćeno $78{,}7\,^0/_0$ kružne površine

165. Date su dve paralelne prave L_1 i L_2 i tačka C koja se nalazi između njih.

1° Odrediti pravougli trougao ABC, pod uslovom da teme njegovog pravog ugla bude tačka C, da se njegova temena A i B nalaze respektivno na pravama L_1 i L_2 i da je area trougla ABC minimalna (videti sliku 1).

2° Odrediti pravougli trougao ABC, pod uslovom da se teme A njegovog pravog ugla nalazi na pravoj L_1, da tačka B leži na pravoj L_2 i da je area trougla ABC minimalna (videti sliku 2).

Rešenje. 1° Položaj temena pravog ugla C određen je u odnosu na prave (L_1) i (L_2) rastojanjem d ovih pravih i rastojanjem $\overline{CD}=a$ temena C od prave (L_1).

Položaj i elementi traženog trougla ABC određeni su dužima d i a i uglom

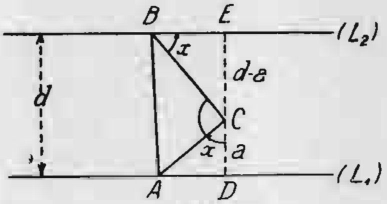
$$\sphericalangle ACD=\sphericalangle CBE=x.$$

Površina trougla ABC je

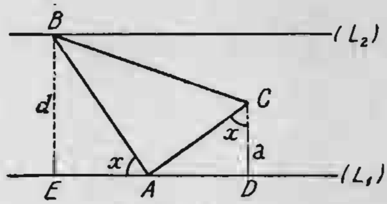
(1) $$P = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}.$$

Iz pravouglih trouglova ADC i CEB sleduje

(2) $$\overline{AC} = \frac{a}{\cos x}, \quad \overline{BC} = \frac{d-a}{\sin x}.$$



Sl. 1



Sl. 2

Zamenom u (1) dobija se

(3) $$P(x) = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d-a}{\sin x} = \frac{a(d-a)}{\sin 2x}.$$

Površina će dostići minimalnu vrednost kad $\sin 2x$ dostigne maksimum, tj. kada bude

$$\sin 2x = 1, \text{ odnosno } x = \pi/4.$$

Minimalna površina ima vrednost $P_{\min} = a(d-a)$.

2° Položaj i elementi traženog trougla određeni su u ovome slučaju (videti sliku 2) rastojanjima d i a i uglom: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle EAB = x$.

Iz pravouglih trouglova ACD i EAB sleduje

$$\overline{AC} = \frac{a}{\cos x}, \quad \overline{AB} = \frac{d}{\sin x},$$

pa je površina trougla ABC data formulom

$$P(x) = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d}{\sin x} = \frac{ad}{\sin 2x}.$$

Površina $P(x)$ dostiže svoju minimalnu vrednost, kada $\sin 2x$ dostigne svoj maksimum, tj. kad bude $\sin 2x = 1$. To će biti za $x = \pi/4$. Minimalna površina ima vrednost $P_{\min} = ad$.

166. Neka je $P(x, y)$ tačka u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy, definisana pomoću relacija

(1) $$x = 1 - 3t^2, \quad y = 3t - t^3 \quad (t \text{ parametar}).$$

1° Obrazovati jednačinu (2) $F(x, y) = 0$, tj. geometrisko mesto (Γ) tačke $P(x, y)$ kada t varira.

2° Nacrtati geometrisko mesto (Γ), polazeći bilo od (1), bilo od (2).

3° Odrediti veličinu površine koju ograničava kriva (Γ).

Rezultat. 1° $27y^2 = (8+x)^2(1-x)$.

167. Nacrtati krive

$$xy^n = a^n, \quad xy^n = b^n \quad \{a, b \text{ pozitivne konstante, } n\,(>1) \text{ prirodan broj}\}$$

i odrediti veličinu površine koju ograničavaju navedene krive i prave $x = 1$, $x = 2^n$. Posebno ispitati slučaj $n = 1$.

Rezultat. Tražena površina je $\frac{n}{n-1}\,|b-a|\,(2^{n-1}-1)$.

168. Nacrtati dijagram (Γ) funkcije $f(x) = \log x - (x/e)$.

U tački $M(e, 0)$ dijagrama ove funkcije nalazi se teme pravog ugla čiji kraci seku dijagram (Γ) u tačkama P i Q.

Kraci i dijagram (Γ) ograničavaju dve površine. Odrediti položaj ugla tako da veličine navedenih površina budu među sobom jednake.

169. Ako parabola

$$(P_1) \qquad y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$

izvrši rotaciju za ugao α, u direktnom smislu, oko svog temena, dobija se parabola (P_2).

1° Izvesti jednačinu parabole (P_2).

2° Parabole (P_1) i (P_2) seku se, osim u temenu, u tački M. Geometriskim ili računskim putem pokazati da je prava OM simetrala ugla između osa simetrije parabola (P_1) i (P_2). — Na osnovu ovoga izvesti da su

$$\left(2p\cot g^2\frac{\alpha}{2},\ 2p\cot g\frac{\alpha}{2}\right)$$

koordinate tačke M.

Proveriti ovaj rezultat pomoću jednačine koja definiše parabolu (P_2).

3° Proveriti da li je veličina površine koju ograničavaju parabole (P_1) i (P_2) data izrazom $\frac{4}{3}p^2\cot g^3\frac{\alpha}{2}$.

170. Odrediti parametre a i b tako da krive

$$y = x^2 + 4x + a, \qquad y = x^3 + 2x^2 + bx - 2$$

imaju dodir što je mogućno višeg reda.

U dodirnoj tački odrediti zajedničku tangentu ovih krivih.

171. Odrediti tangente krive $y = 1/x^2$ koje su u isti mah i normale ove krive.

172. Date su parabole:

$$(P) \quad 2y = x^2, \qquad (Q) \quad y = -(x-9)^2.$$

1° Pokazati da postoji samo jedna prava (L) koja je normala i parabole (P) i parabole (Q).

2° Odrediti najkraće rastojanje između parabola (P) i (Q).

3° Prava (L) otseca i od jedne i od druge parabole po jedan otsečak. Izračunati zapreminu tela koje nastaje kada navedeni otsečci izvrše potpunu rotaciju oko prave (L).

173. Ako P, P_1 i P_2 označavaju respektivno veličine površine kruga, pravilnog poligona od n strana upisanog u ovom krugu i pravilnog poligona od n strana opisanog oho istog kruga, tada

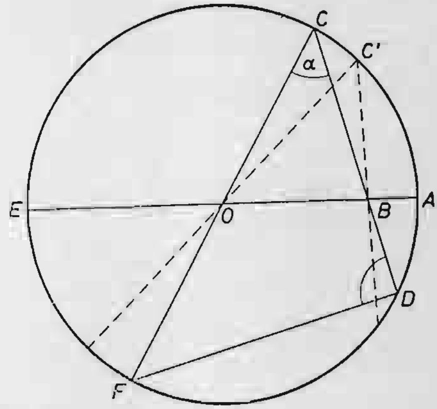
$$n^2(P_2 - P_1) \to \pi^2 P, \qquad \text{kada } n \to \infty;$$

$$n^4(2P_2 + P_1 - 3P) \to \frac{2}{5}\pi^4 P, \qquad \text{kada } n \to \infty.$$

Proveriti ovaj rezultat.

174. Posmatrati periferiske uglove koji pripadaju krugu $(O; r)$. Ako jedan krak periferiskog ugla prolazi kroz centar kruga O, a drugi kroz utvrđenu tačku u krugu (na sl. tačka B), odrediti maksimalnu veličinu periferiskog ugla.

Rešenje. **I.** Primenjujući poznati stav iz geometrije, iz slike proizilazi



(1) $\overline{CB}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{BE}$

$(\overline{CB}=x;\ \overline{BD}=y;\ \overline{OB}=a)$.

Prema oznakama na slici imamo:

(2) $\overline{AB}=r-a,\quad \overline{BE}=r+a$

$(\overline{OA}=\overline{OC}=r)$,

a iz pravouglog trougla FDC sleduje

(3) $x+y=2r\cos\alpha$.

Relacija (1) na osnovu (2) daje:

(4) $xy=r^2-a^2$.

Iz (3) i (4) sleduje

(5) $$\cos\alpha=\frac{x^2+r^2-a^2}{2rx}.$$

Budući da maksimalnoj vrednosti ugla α odgovara minimalna vrednost $\cos\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, treba tražiti minimum funkcije (5).

Funkcija $\cos\alpha$ dostiže minimalnu vrednost za

$$x_0=\sqrt{r^2-a^2},$$

koja iznosi

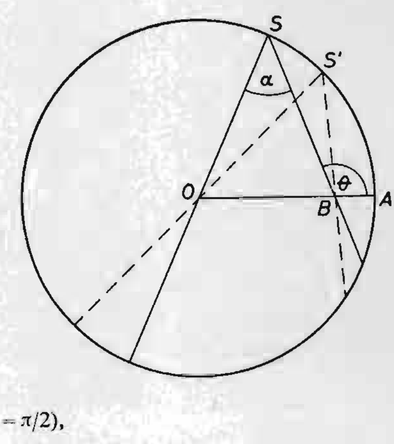
(6) $$(\cos\alpha)_{\min}=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}.$$

To znači da je

(7) $$\alpha_{\max}=\arccos\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}.$$

Iz (6) se vidi da će u slučaju maksimalnog periferiskog ugla krak BC tog ugla stajati normalno na prečniku EA.

II. Iz trougla OBS, primenom sinusne teoreme, dobija se:



$$\frac{r}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{a}{\sin\alpha}\quad(\sphericalangle ABS=\theta;\ \overline{OB}=a;\ \overline{OS}=r),$$

odakle je

$$\sin\alpha=\frac{a}{r}\sin\theta.$$

Pošto je $0<\alpha<\pi/2$, ugao α u tome intervalu dostići će maksimalnu vrednost, kad $\sin\alpha$ dostigne maksimalnu vrednost.

Iz poslednje relacije sleduje:

$$\max(\sin\alpha)=\frac{a}{r}\max(\sin\theta),$$

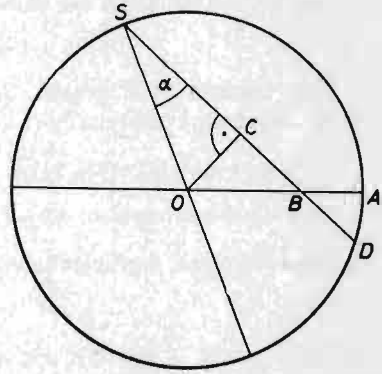
ili kako je

$$\max(\sin\theta)=1\qquad(\theta=\pi/2),$$

biće

$$\max(\sin\alpha)=\frac{a}{r}.$$

To znači da periferiski ugao α dostiže maksimalnu vrednost $\alpha_{\max} = \arcsin \dfrac{a}{r}$, kada je krak SB toga ugla normalan na poluprečniku OA u tački B.



III. Neka je $\overline{OC} = d$, $\overline{OS} = r$.

Tada je: $\sin \alpha = d/r$.

Kako $\alpha \in [0, \pi/2]$, ugao α biće maksimalan, kada i d bude maksimalno. Budući da tetiva SD prolazi kroz tačku B, imamo:

$$\max d = \overline{OB} = a,$$

$$\max (\sin \alpha) = a/r,$$

$$\alpha_{\max} = \arcsin a/r.$$

Primedba. III rešenje dao je student *D. Đoković*.

175. Neka su $P(t)$ i $Q(u)$ respektivne tačke dveju elipsi

$$(E_1) \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t; \qquad (E_2) \quad x = b \cos u, \quad y = a \sin u.$$

Odrediti $\max \overline{PQ}$.

Rezultat. $\max \overline{PQ} = \{2(a^2 + b^2)\}^{1/2}$.

176. Grafički prikazati funkciju $f(x) \equiv (x+1)^{2/3} - x^{2/3}$.

Odrediti broj realnih rešenja jednačine $f(x) = a$ za razne vrednosti parametra a. Služeći se grafikom, razdvojiti rešenja o kojima je reč.

Rešenje. Funkcija je definisana u intervalu $(-\infty, +\infty)$. Njen prvi izvod

$$f'(x) \equiv \frac{2}{3}[(x+1)^{-1/3} - x^{-1/3}]$$

ne anulira se ni za jednu vrednost x. Prvi izvod nije definisan za $x = 0$ i $x = -1$.

Tačke $(0, 1)$ i $(-1, -1)$ su povratne sa tangentama koje su paralelne y-osi. Ove tačke pretstavljaju u isti mah i tačke ekstremuma funkcije $f(x)$. Tačka $(-1/2, 0)$ je prevojna tačka, budući da je $f''(-1/2) = 0$.

Kako je $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x+1)^{2/3} - x^{2/3}] = 0$, prava $y = 0$ je asimptota.

Da bi smo odredili broj realnih rešenja jednačine $f(x) = a$, posmatrajmo preseke prave $y = a$ sa krivom $y = f(x)$.

Za $-\infty < a < -1$ jednačina nema realnih rešenja.
Za $a = -1$ rešenje jednačine je $x = -1$.
Za $-1 < a < 0$ jednačina ima dva realna rešenja, od kojih se jedno nalazi u intervalu $(-\infty, -1)$, a drugo u intervalu $(-1, -1/2)$.
Za $a = 0$ jednačina ima jedno rešenje $x = -1/2$.
Za $0 < a < 1$ rešenja jednačine su: jedno u intervalu $(-1/2, 0)$, a drugo u intervalu $(0, +\infty)$.
Za $a = 1$ rešenje jednačine je $x = 0$.
Za $-1 < a < +\infty$ jednačina nema realnih rešenja.
Čitalac će nacrtati grafik funkcije $f(x)$.

177. Između pravouglih paralelepipeda, date površine P i čija je osnova kvadrat, naći onaj koji ima najveću zapreminu V.

Rezultat. $V_{\max} = (P/6)^{3/2}$. Traženi paralelepiped je kocka.

178. Između trouglova čija je jedna strana c i obim $2s$ naći onaj koji ima najveću površinu.

Rezultat. Ravnokraki trougao čija je osnovica c.

179. Između pravih kružnih konusa date površine P odrediti onaj koji ima najveću zapreminu.

Rezultat. Traženi konus ima osobinu $r:s=1:3$ (r poluprečnik osnove, s izvodnica konusa),

$$V_{\max}=(P/12)(2P/\pi)^{1/2}.$$

180. Između svih pravih kružnih konusa čija je izvodnica s odrediti onaj čija je zapremina najveća.

Rezulat. $V_{\max}=[(2\pi/(9\sqrt{3})]s^3$.

Ovaj konus ima osobinu: $h:r=1:\sqrt{2}$ (h visina; r poluprečnik osnove).

181. Površina, ograničena lukom parabole

$$(1) \qquad y=9x^2-28x+24,$$

otsečkom prave $x=a$ $(0\leqslant a\leqslant x_0$, gde je x_0 apscisa temena date parabole) i otsečcima koordinatnih osa, rotira oko y-ose.

Iz dobijenog tela T iseći pravi kružni cilindar Z, koaksijalan sa telom T, tako da zapremina cilindra bude što veća.

Uputstvo. Na slici je nacrtana jedna parabola čija je jednačina

$$(2) \qquad y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

$$(\gamma>0;\quad \beta^2-4\alpha\gamma<0;\quad \alpha>0;\quad \beta<0).$$

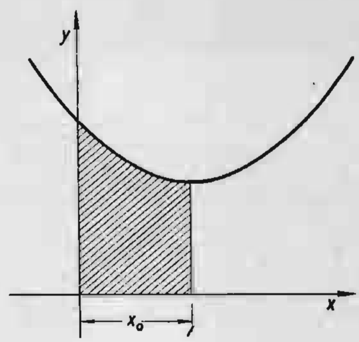
Ako šrafirana površina rotira oko y-ose, dobija se rotaciono te o.

Za parabolu (1) zapremina V cilindra Z je

$$V(x)=\pi x^2(9x^2-28x+24) \quad (0\leqslant x\leqslant 14/9).$$

Maksimalna zapremina iznosi $V=3920\,\pi/729$.

Primedba. Čitalac će rešiti zadatak za parabolu (2) koja sadrži parabolu (1) kao partikularni slučaj.



182. Ako je C centar krivine krive $y=x^2$ u tački M čija je apscisa x_0, odrediti geometrisko mesto tačke S, gde je S sredina duži CM.

183. Posmatrati skupove parabola

$$(P) \qquad x=\alpha^2-\frac{y^2}{4\alpha^2}, \qquad\qquad (Q) \qquad x=\frac{y^2}{4\beta^2}-\beta^2,$$

gde su α i β dva parametra.

Četiri parabole, koje se dobijaju kada se parametrima α i β pripišu respektivno vrednosti: α_1, α_2 i β_1, β_2 obrazuju četiri krivoliniska četvorougla.

1° Pokazati da su dijagonale posebno u svakom od ovih četvorouglova međusobno jednake.

2° Izračunati uglove posmatranih četvorouglova.

3° Odrediti veličinu površine ovih četvorouglova.

184. Ako je $\sin p/\sin q=m$, odrediti ekstremum funkcije $\sin(p+\theta)/\sin(q+\theta)$, gde je θ dato.

185. Koja tačka kruga $x^2+y^2=1$, $z=0$ ima od ravni $x+2y+3z=12$ najmanje otstojanje?

186. Odrediti koordinate tačke $M(x_m, y_m)$ u kojoj oskulatorni krug elipse

$$(1) \qquad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

u njenoj tački (x_0, y_0) ponovo preseca ovu elipsu.

Rešenje. Oskulatorni krug elipse je isto što i krug krivine

$$(2) \qquad (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

gde su (p, q) koordinate centra kruga krivine, tj.

$$(3) \qquad p = c^2 x_0^3/a^4, \qquad q = -c^2 y_0^3/b^4 \qquad (c^2 = a^2 - b^2),$$

i gde je r poluprečnik kruga krivine.

Ako se iz jednačina (1) i (2) eliminiše x, dobija se

$$\{b^2(p^2+q^2-r^2+a^2) - 2b^2 qy - c^2 y^2\}^2 + 4a^2 b^2 p^2 (y^2 - b^2) = 0.$$

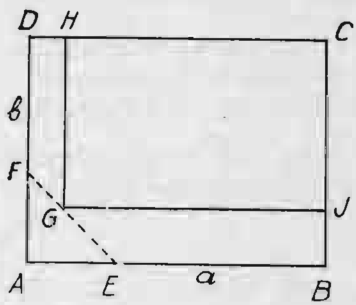
Koeficijent uz y^4 je c^4, koeficijent uz y^3 je $4b^2 c^2 q$. Na osnovu *Viète*-ovih formula je

$$(4) \qquad 3y_0 + y_m = -4b^2 c^2 q/c^4,$$

jer se u tački (x_0, y_0) slivaju tri tačke.

Iz (4) sleduje: $y_m = (4y_0^3/b^2) - 3y_0$.

Na analogan način nalazi se $x_m = (4x_0^3/a^2) - 3x_0$.



187. Dat je pravougaonik $ABCD$ (v. sliku), gde je $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$. Uočiti na strani AB jednu tačku E i na strani AD tačku F ($\overline{AE} = p$, $\overline{AF} = q$).

Na duži EF uzeti jednu tačku G i povući prave $GH \parallel BC$, $GJ \parallel AB$. Odrediti položaj tačke G na duži EF, tako da pravougaonik $GJCH$ ima maksimalnu površinu.

188. Date su dve ortogonalne prave (L_1) i (L_2). Na pravoj (L_2) sa iste strane prave (L_1) uočiti dve tačke A i B čija su otstojanja od prave $(L_1$ respektivno a i b $(a < b)$.

1° Odrediti ugao θ pod kojim se duž AB vidi iz jedne tačke S na pravoj (L_1) u funkciji od a, b, s, gde je s otstojanje tačke S od prave (L_2).

2° Za koje vrednosti s ugao θ dostiže maksimalnu vrednost?

3° Ako su veličine a, b, θ date, odrediti s. Ispitati pod kojim uslovima postoji rešenje i uporediti dobijene rezultate sa onima koji su nađeni pod tačkom 2°.

189. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $Oxyz$ data je površina

$$(1) \qquad 2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (A, B, C \text{ realne konstante}).$$

1° Ispitati preseke (G) ove površine sa ravni (P) koja prolazi kroz z-osu.

2° Odrediti krivinu krivih (G) u koordinatnom početku i ekstremne vrednosti krivine.

3° Naći jednačinu krive preseka površine (1) i ravni koja prolazi kroz x-osu. Koja je to kriva?

4° Ispitati nivoske linije date površine s obzirom na ravan Ozx.

190. Odrediti onaj pravi kružni cilindar koji pri datoj zapremini V ima najmanju površinu.

Rezultat. $P_{\min}=6\pi\{V/(2\pi)\}^{2/3}$.

Traženi cilindar je ravnostran.

191. Odrediti pravi kružni cilindar zapremine V za koji će zbir površina jedne osnove i omotača biti najmanji.

Rezultat. $P_{\min}=3\pi(V/\pi)^{2/3}$.

Visina ovog cilindra jednaka je radijusu osnove.

192. Pokazati da je kriva

$$x=1/t, \quad y=(t+1)/t, \quad z=1/(t^2-1)$$

ravna. Odrediti njene ortogonalne projekcije u koordinatnim ravnima i ispitati ih.

193. Izračunati površinu sektora ograničenog lukom parabole $\rho=p/(1-\cos\theta)$ i potezima koji odgovaraju polarnim uglovima θ i $\theta+a$, gde je a dato. Za koju je vrednost θ ta površina minimalna?

194. Luk kruga poluprečnika a kome odgovara centralni ugao 2θ, gde je $2\theta<\pi$, rotira oko svoje tetive. Pokazati da je veličina tako dobijene površine

$$4\pi a^2(\sin\theta-\theta\cos\theta).$$

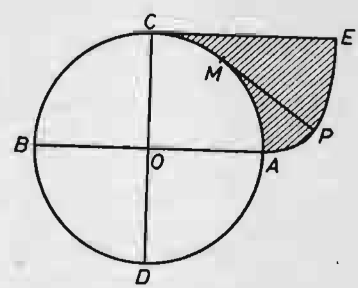
195. Odrediti veličinu $P(\varepsilon)$ površine između krive $x=y^2(1-x)$ i prave

$$x=\varepsilon \quad (0<\varepsilon<1).$$

Da li postoji $\lim\limits_{\varepsilon\to 1-} P(\varepsilon)$.

196. Dat je list hartije u obliku kvadrata $ABCD$ čija je strana a. Presavijanjem ovog lista neka teme C padne na stranu AB u tačku C'. Odrediti položaj tačke C' na strani AB pod uslovom da zbir površina tri pravougla trougla koji su dobijeni presavijanjem, bude maksimalan.

197. Dat je krug i njegova dva ortogonalna dijametra AB i CD. U tački M ovog kruga povučena je tangenta i na ovoj je uzeta tačka P tako da su jednake veličine duži MP i luka AM (videti sliku).



Odrediti g. m. tačke P kada tačka M opiše luk AC. Izračunati veličinu šrafirane površine (CE tangenta kruga).

198. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy date su parabole

$$y=x^2-2x, \quad y=2x-(1/2)x^2.$$

1° Na kome otstojanju od x-ose treba povući pravu (L), paralelnu toj osi, da bi date parabole na pravoj (L) otsecale tetive jednakih dužina?

2° Lukovi datih parabola grade zatvorenu konturu. Odrediti onu od tetiva ove konture koja ima maksimalnu dužinu i koja stoji normalno na: a) x-osi; b) y-osi. Rešiti ovaj zadatak i za slučaj kada tetiva gradi sa x-osom ugao $\theta\ (\neq\pi/2)$.

199. U oblasti ograničenoj kvadratom data je jedna tačka. Kroz ovu tačku povući pravu tako da ona od kvadrata otseca trougao minimalne površine. Koliko ima rešenja?

U unutrašnjosti kocke data je jedna tačka M. Koja ravan, postavljena kroz tačku M, otseca od kocke piramidu minimalne zapremine?

Odgovoriti na analogno pitanje za ravnostrani trougao i pravilni tetraedar.

200. Bez upotrebe izvoda odrediti ekstremne vrednosti funkcije

$$(1) \qquad y = x/(a+bx^2).$$

Nacrtati grafik funkcije (1) za slučaj kada je $ab>0$.

201. Odrediti tačke preseka cikloide

$$x = a(t-\sin t), \qquad y = a(1-\cos t)$$

i prave $y=x$.

202. Odrediti a tako da prava $y=x$ dodiruje krivu $y=a^x$.

Rezultat. $a=e^{1/e}$.

203. Odrediti parametre a, b, c, p, q, r tako da krive

$$(1) \quad y=p+qx+rx^2, \qquad (2) \quad y=a+be^{cx}$$

u tački $x=0$ imaju dodir II reda.

Ako je $y=1+x-x^2/2$ kriva tipa (1), odrediti odgovarajuću krivu tipa (2).

Rezultat. $y=2-e^{-x}$.

204. Površina ograničena x-osom i krivom

$$y=|(x+2)(x-1)|-|(x+1)(x-2)|+2|x(x-1)|$$

rotira oko y-ose.

Izračunati zapreminu tako dobijenog obrtnog tela.

205. Parabole $y^2=ax$ $(a>0)$, $x^2=by$ $(b>0)$ ograničavaju jedan deo ravni Oxy Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema: oblast G.

Ako je $b=a$, ispitati da li je tačno da je obim zatvorene konture oblasti G dat izrazom $\frac{a}{2}\,[\log(2+\sqrt{5})+2\sqrt{5}]$.

Rešenje. Obim s konture oblasti G izračunaćemo služeći se obrascem

$$s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad \text{gde je} \quad y=f(x).$$

Kako su krive $y^2=ax$ i $x^2=ay$ simetrične u odnosu na pravu $y=x$, biće

$$s=2\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\int_0^a\sqrt{1+(2x/a)^2}\,dx.$$

$$\therefore \quad s=a\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{a}{2}\Big[t\sqrt{1+t^2}+\log(t+\sqrt{1+t^2})\Big]_0^2.$$

$$\therefore \quad s=\frac{a}{2}\Big[2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\Big].$$

206. Pokazati da kriva

$$(C) \qquad x^4+y^4=1$$

leži u jednom kvadratu i da je ona zatvorena.

Kako se može nacrtati kriva (C), polazeći od kruga $x^2+y^2=1$?

Kakav međusobni položaj imaju dati krug i kriva (C)?

207. Data je kriva

$$(1) \qquad x^2+y^2=1 \quad (y \geqslant 0).$$

Spojiti tačku $(1, 0)$ ove krive sa tačkom $(-2, 0)$ lukom jedne parabole (P) koju treba tako izabrati da kriva sastavljena od krive (1) i parabole (P) ima u svima tačkama krivinu.

208. Iz tačke $P(a, b)$ povučene su tangente na krivu (C) koja je, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy, definisana jednačinom $y=x^3$.

1° Odrediti oblasti ravni Oxy u kojima treba da se nalazi tačka P da bi se na krivu (C) mogle povući tri tangente.

2° Obrazovati jednačinu kruga (K) koji prolazi kroz tačke u kojima tangente dodiruju krivu (C).

3° Odrediti takvo geometrisko mesto tačke (P) da bi krug (K) prolazio kroz koordinatni početak.

209. Nacrtati krivu $y^5-y-x=0$ i koristiti je za rešavanje jednačine

$$y^5-y=a \quad (a \text{ realan parametar}).$$

210. Dat je krug $(O; r)$. Prečnikom AB ovaj krug je podeljen na dva dela: I i II. Ako se poluprečnik ON produži kad je tačka N na polukrugu I, odnosno skrati kad je na polukrugu II i to za rastojanje tačke N od prečnika AB, dobija se tačka M.

1° Odrediti geometrisko mesto (C) tačke M kada N opiše ceo krug.

2° Konstruisati krivu (C).

3° Izračunati veličinu površine obuhvaćene krivom (C), kao i dužinu luka te krive.

211. Odrediti jednačinu tangente parabole

$$y^2=-2p(x-k) \quad (p, k>0)$$

i dužinu njenog otsečka između koordinatnih osa.

Kolika je minimalna dužina ovog otsečka?

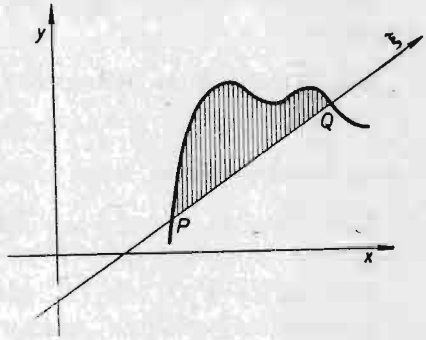
Rezultat. Proveriti da li je kvadrat tražene minimalne vrednosti

$$(2m^2k+p)^2(1+m^2)/4m^4,$$

gde je

$$m^2=(1/4k)[p+(p^2+16kp)^{1/2}].$$

212. Data je kriva (Γ) $y = f(x)$ i prava (Δ) $Ax + By + C = 0$ koja seče krivu (Γ) u tačkama P i Q. Pretpostavlja se da kriva (Γ) i prava (Δ) ograničavaju jednu površinu i da svaka normala na pravoj (Δ) seče krivu (Γ) samo u jednoj tački. Jedna takva kriva prikazana je na slici.



Izračunati zapreminu obrtnog tela, koje se dobija kad šrafirana površina izvrši potpunu rotaciju oko prave (Δ).

Rešenje. Pretpostavićemo da je $AB \neq 0$. U protivnom slučaju, zadatak se svodi na dobro poznate formule.

Označimo sa (a, α) i (b, β) koordinate tačaka P i Q.

Ako se formula $V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x)\, dx$ primeni na ovaj slučaj, dobija se

$$V_{\xi} = \left| \pi \int_{(a,\alpha)}^{(b,\beta)} \left[\frac{Ax + Bf(x) + C}{(A^2 + B^2)^{1/2}} \right]^2 d\xi \right| \tag{1}$$

gde je prava PQ osa ξ.

Kako je $d\xi^2 = dx^2 + dy^2 = [1 + (dy/dx)^2]\, dx^2 = [(A^2 + B^2)/B^2]\, dx^2$, formula (1) postaje

$$V_{\xi} = \left| \frac{\pi}{B(A^2 + B^2)^{1/2}} \int_a^b [Ax + Bf(x) + C^2]^2\, dx \right|.$$

Redigovano prema rešenju koje je dao *Chih-yi Wang* u časopisu *Mathematics Magazine*, vol. 30, 1956, p. 17.

213. Tangenta u tački P krive $y = f(x)$ seče x-osu u tački T, y-osu u tački T_1. Normala u tački P seče x-osu u N, a y-osu u N_1. Dokazati da je

$$\overline{T_1 N} / \overline{T N_1} = |y'|.$$

214. Date su dve tačke M_1 i M_2 ma koje elipse. Odrediti treću tačku M_3 elipse pod uslovom da površina trougla $M_1 M_2 M_3$ ima ekstremnu vrednost.

215. Nacrtati krivu

$$(C) \qquad y = 1/(a + \log|x|),$$

gde je a pozitivna konstanta.

Pokazati da prevojne tačke krive (C), kada se a menja, leže na jednoj stalnoj pravoj.

216. Data je elipsa (E) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1° Tangenta u tački t seče x-osu u tački A, a y-osu u tački B. Pokazati da površje trougla AOB, gde je O koordinatni početak, nije nikad manje od ab. Konstruisati tačke elipse za koje je area $\Delta\, AOB = ab$.

2° Odrediti i ispitati geometrisko mesto sredina duži AB, kada t varira.

217. Odrediti normale elipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ koje su najviše udaljene od centra ove elipse i naći to maksimalno otstojanje.

218. Od lista hartije koji ima oblik kruga poluprečnika a izrezati sektor od koga se može načiniti konus (levak) najveće zapremine.

Izračunati centralni ugao tog sektora (tačno na minut) i maksimalnu zapreminu.

219. Najveći oštar ugao pod kojim se seku elipsa

$$x^2/a^2+y^2/b^2=1$$

i krug koncentričan sa ovom elipsom iznosi $\operatorname{arc\,tg}[(a^2-b^2)/(2ab)]$.

220. Tangenta u ma kojoj tački P krive $y=x^3$ seče x-osu u tački T, a ortogonalna projekcija tačke P na x-osi je tačka N.

Pokazati da je $\overline{OT}=2\cdot\overline{TN}$, gde je O koordinatni početak.

Odrediti odgovarajuću relaciju za krivu $y=x^s$, pa na osnovu te relacije dati konstrukciju tangente za slučaj kada je s prirodan broj.

221. Tangenta elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ seče x-osu u tački P, a y-osu u tački Q. Pokazati da najmanja dužina duži PQ iznosi $a+b$.

222. 1° U istom Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu nacrtati krive:

$$(\Gamma)\qquad y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\qquad y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

2° Krive (Γ) i prave $x=a$ i $y=b$ $(a>1,\ b>1)$ obrazuju krivoliniski petougao. Izračunati veličinu $P(a, b)$ površine tog petougla i ispitati čemu teži $P(a, b)$ kada $a\to+\infty$, $b\to+\infty$.

3° Izračunati zapreminu $V(a, b)$ tela koje se dobija kada petougao izvrši potpunu rotaciju oko x-ose. Ispitati da li postoji granična vrednost izraza $V(a, b)$ kada $a\to+\infty$, $b\to+\infty$, tj. kada se četiri temena petougla udaljuju u beskonačnost.

223. Nacrtati krivu

$$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$$

i izračunati veličinu $P(\lambda)$ površine između ove krive i pravih: $y=1$, $x=0$, $x=\lambda$ $(\lambda>0)$. Ispitati da li postoji $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P(\lambda)$.

224. Data je kriva $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$. Površina ograničena datom krivom i x-osom okreće se oko svoje ose simetrije. Naći zapreminu dobijenog obrtnog tela.

225. 1° Nacrtati krive

$$(C_1)\qquad y=e^{-x}(1-2x),$$

$$(C_2)\qquad y=4e^{-x}-3e^{-2x}.$$

2° Krive (C_1) i (C_2) otsecaju na pravoj $x=x_0$ $(\geqslant 0)$ otsečak dužine d. Za koju će vrednost x_0 dužina d biti maksimalna?

3° Izračunati veličinu $P(\lambda)$ površine koju ograničavaju krive (C_1) i (C_2) u oblasti $x\geqslant 0$ i prava $x=\lambda$ (>0). Ispitati da li postoji $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P(\lambda)$.

226. Naći veličinu površine između parabole i jedne koje bilo njene normale.

227. 1° Nacrtati krivu (C) $(y-x)^2=x^3$.

2° Kriva (C) i prava $x=1$ grade krivoliniski trougao. Izračunati: a) površinu trougla; b) zapreminu tela koje nastaje kada trougao oko x-ose izvrši rotaciju od 360°.

3° Za razne vrednosti parametra y, odrediti broj realnih rešenja jednačine (C), rešene po x. Kada je $y=4/27$, rešiti jednačinu (C).

228. Dokazati da je veličina površine, omeđene elipsama

$$(1) \qquad [\lambda(x-2)+3y]^2+4(x+1)(x-2)=0,$$

nezavisna od parametra λ, i da sve elipse imaju jednu zajedničku tačku.

Kroz svaku tačku M ravni prolaze dve elipse iz posmatranog skupa elipsi. Naći oblast u kojoj treba da se nalazi tačka M, da bi krive bile realne.

229. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy posmatrati krivu (C) $x^3-ay^2=0$ $(a>0)$, i na ovoj tačku $M(x_0, y_0>0)$.

1° Izračunati veličinu površine između luka $\overset{\frown}{OM}$ i tetive OM krive (C).

2° Izračunati zapremine V_x i V_y tela koja nastaju rotacijom površine između luka $\overset{\frown}{OM}$ i tetive OM oko x-ose, odnosno y-ose; odrediti tačku M tako da zapremine V_x i V_y budu jednake.

3° Tangenta u proizvoljnoj tački $M(x_0, y_0)$ krive (C) seče ovu krivu u tački N. Pokazati da x-osa deli duž MN na dva dela koji stoje u razmeri 8:1.

230. Pokazati da je kriva

$$(C) \qquad y=3-x^2\pm 2\sqrt{2-x^2}$$

zatvorena i nacrtati je.

Ispitati da li je veličina površine koju ograničava kriva (C) jednaka veličini površine elipse $x^2/8+y^2/2=1$.

231. Izračunati veličinu $P(a)$ površine između krive $y=1/\operatorname{ch} x$, x-ose, y-ose i prave $x=a$ $(a>0)$ i ispitati da li postoji $\lim\limits_{a\to+\infty} P(a)$.

232. 1° Nacrtati krivu

$$(C) \qquad y=1/(\operatorname{ch} x+\operatorname{ch}\alpha) \qquad (\alpha \text{ parametar}).$$

2° Izračunati veličinu $P(a, b)$ površine između krive (C), x-ose i pravih $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$.

Da li $P(a, b)$ ima graničnu vrednost kada $a\to-\infty$, $b\to+\infty$?

233. Uočiti krug čiji je centar u tački O i jedan njegov prečnik AB. Neka je P ortogonalna projekcija jedne tačke M kruga na AB, a Q ortogonalna projekcija tačke P na pravoj OM.

Odrediti jednačinu geometriskog mesta tačke Q, kada tačka M opiše krug, i nacrtati ga.

Izračunati veličinu površine koju ograničava navedeno geometrisko mesto.

Uputstvo. Zadatak rešiti u jednom polarnom koordinatnom sistemu.

234. U krajnjim tačkama A i B jednog luka $\overset{\frown}{AB}=\alpha$ na krugu poluprečnika 1 povučene su tangente AC i BC toga kruga (C presečna tačka tangenata).

1° Odrediti $\lim\limits_{\alpha\to 0} \delta/\Delta$, gde je Δ površina trougla ABC i δ površina kružnog otsečka koji pripada tetivi AB.

2° Polazeći od izračunate granične vrednosti, izvesti približnu formulu za izračunavanje površine kružnog otsečka, kada je α malo.

235. Približno nacrtati krivu

$$y=x^{2/3}(x-5).$$

Izračunati veličinu površine između ove krive i x-ose.

236. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu date su tačke:

$$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3),\ (4,\ -1).$$

1° Odrediti jednačinu parabole III reda koja prolazi kroz ove tačke i približno nacrtati ovu parabolu.

2° Naći razmak $(a,\ b)$ u kome se nalazi presečna tačka ove parabole sa x-osom, gde a i b treba izračunati sa jednom decimalom tako da je $b-a=0{,}1$.

3° Približno izračunati veličinu površine između x-ose, y-ose i parabole, koristeći izračunate vrednosti za a i b. Da li su dobijene približne vrednosti za veličinu površine manje ili veće od njene tačne vrednosti?

237. Odrediti jednačinu parabole P čije je teme $(-2,\ 1)$, a žiža $(-2,\ 3)$ u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu. Zatim izračunati zapreminu tela koje nastaje kada površina, ograničena parabolom P, x-osom, y-osom i pravom $x=a$, rotira oko x-ose.

238. Data je kriva

$$x=a\cos\theta+b\sin\theta+c,\qquad y=a'\cos\theta+b'\sin\theta+c',$$

gde su koeficijenti konstante, a θ parametar.

Navesti koja je ova kriva. Izračunati veličinu površine koju eventualno ograničava uočena kriva.

239. Za razne vrednosti parametra $a\,(>0)$ proučiti varijacije funkcije

$$(C)\qquad y=1/(a+\sin x),$$

i rezultate grafički prikazati.

Kad je $a>1$, izračunati veličinu površine između krive (C), x-ose i pravih

$$x=0,\ x=\pi.$$

240. 1° Nacrtati krivu $y=(x-1)^2(x+2)^3$.

2° Ako ta kriva ograničava sa x-osom jednu zatvorenu površinu P, izračunati veličinu površine P i zapreminu tela koje se dobija obrtanjem površine P oko x-ose.

241. Evoluta elipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ je jedan krivoliniski četvorougao. Koja elipsa ima osobinu da taj četvorougao leži sav u njoj, a koja da navedeni četvorougao ima sve strane jednake? U poslednjem slučaju izračunati obim i površinu četvorougla.

242. Nacrtati krivu

$$(C) \qquad y=\frac{x\log x}{(1+x^2)^2}.$$

Izračunati veličinu $P(h)$ površine koju ograničavaju kriva (C), x-osa i prave $x=1$ i $x=h$ (>1). Odrediti, ako postoji, $\lim_{h\to+\infty} P(h)$.

243. Odrediti poluprečnik krivine u jednoj tački krive $y=a\operatorname{ch}(x/a)$. Ako normala u tački P ove krive seče x-osu u tački Q, pokazati da je $|\overrightarrow{PQ}|=R$, gde je R poluprečnik krivine u tački P uočene krive.

244. Odrediti tačke na krivoj $y=e^x$ u kojima ona ima maksimalnu krivinu.

245. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu data je kriva

$$(C) \qquad y=x^2-x^3.$$

1° U tački P čija je apscisa α povučena je tangenta ove krive. Pokazati da ta tangenta seče krivu (C) u jednoj tački Q, čije koordinate treba odrediti kao funkciju od α.

2° U tri proizvoljne tačke P_1, P_2, P_3 krive (C) povučene su tangente na tu krivu, i one je seku respektivno u tačkama Q_1, Q_2, Q_3. Pokazati da tačke Q_1, Q_2, Q_3 leže na jednoj pravoj ako tačke P_1, P_2, P_3 leže na pravoj.

3° Kada se tačka P kreće po krivoj (C), sredina duži PQ opisuje jednu krivu čiju jednačinu treba odrediti.

246. U dati polukrug upisati trapez maksimalne površine.

247. U dati kružni isečak upisati pravougaonik maksimalne površine.

248. U dati kružni otsečak upisati pravougaonik: 1° maksimalne površine, 2° maksimalnog obima.

249. Parabola čija je osa simetrije paralelna y-osi prolazi kroz tačke $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ i njena tangenta u tački O zaklapa sa x-osom ugao od 45°.

1° Odrediti jednačinu ove parabole.

2° Odrediti koordinate temena trapeza maksimalne površine, čija je veća osnovica duž OA, a manja jedna od tetiva parabole koje su paralelne sa OA.

3° Izračunati zapreminu tela koje postaje kada segment parabole, određen manjom osnovicom trapeza, rotira oko y-ose.

250. Neka je P jedna tačka koja se nalazi na konturi ravnostrana trougla visine $3a$ i neka je tačka O težište trougla.

Posmatrati vektore $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-b(\overrightarrow{OP}/|\overrightarrow{OP}|)$, gde je $b\,(0<b<a)$ konstantan skalar.

Kada tačka P opisuje konturu trougla, tačka Q opisuje jednu krivu (Γ) koju treba odrediti.

Izračunati veličinu površine koju ograničava kriva (Γ).

251. Nacrtati krivu $y=1+xe^y$ i izračunati veličinu površine koju ograničavaju: ova kriva, x-osa, y-osa i tangenta u tački koja je najviša prema y-osi.

252. Date su krive $y=4x^2$, $y=2x^3$, $y=x^4$.

Pokazati da za sve vrednosti x dužine subtangenata ovih krivih obrazuju harmonisku progresiju.

253. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy dati su krugovi

$$x^2+y^2-2x=0, \qquad x^2+y^2-4x-9=0.$$

Prava $y=x\operatorname{tg}\alpha$ seče ove krugove redom u tačkama A, O, B, C.

Izraziti $d=\overline{AO}+\overline{BC}$ kao funkciju od α i odrediti za koje vrednosti α veličina d ima ekstremne vrednosti.

254. Normala u tački $M(x_0, y_0)$ parabole $y^2=2px$ seče ovu parabolu u tački N. Odrediti koordinate tačke M tako da duž MN ima minimalnu dužinu.

255. Odrediti a, b, c, d tako da krive

$$y=e^x \quad \text{i} \quad y=(ax+b)/cx+d)$$

budu u oskulaciji u tački čija je apscisa $x=0$.

256. Izvesti uslov da se dodiruju krive $y=a^x$ i $y^2=2px$, gde su a i p dve pozitivne konstante.

257. Pokazati da kriva $y=(x+1)/x^2+1)$ ima tri kolinearne prevojne tačke.

258. Izračunati veličinu površine između krivih $y=\operatorname{ch}\alpha x$, $y=\operatorname{sh}\alpha x$ $(\alpha>0)$ i y-ose u I kvadrantu ravni xy.

259. Nacrtati krivu $x^3-y^3=a^3$ i računskim putem pokazati da ona seče y-osu pod pravim uglom.

260. Dokazati da sve normale krive

$$x=\frac{2at}{1+t^2}, \qquad y=\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$$

prolaze kroz jednu nepomičnu tačku.

261. Površina S, ograničena parabolom $y^2=2px$ i pravom $x=p/2$, rotira oko prave $y=p$.

Izračunati zapreminu dobijenog obrtnog tela.

Rezultat. $V=(4/3)\pi p^3$.

Primedba. Kolika će biti zapremina, ako S rotira oko prave $y=a$ $(\geqslant p)$?

262. Nacrtati krivu

$$(1) \qquad y=|x|\,e^{-x^2}$$

i izračunati veličinu površine S koju ograničavaju: kriva (1), x-osa i prava $x=a$ (>0).

Takođe izračunati zapreminu $V(a)$ obrtnog tela koje nastaje, kada površina S rotira oko x-ose. Da li postoji $\lim\limits_{a\to+\infty} V(a)$?

263. Odrediti intervale u kojima funkcija

$$f(x)=x^r e^{-x} \qquad (x\geqslant 0,\ r\geqslant 0)$$

raste, kao i intervale u kojima ona opada.

Odrediti $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ i na osnovu toga skicirati grafik funkcije $f(x)$.

264. 1° Nacrtati krivu

(1) $$y = x^2 e^x.$$

2° Izračunati veličinu površine S koju ograničavaju kriva (1), x-osa i prava $x = a$ (< 0).

3° Izračunati zapreminu V_x obrtnog tela koje se dobija, kada površina S rotira oko x-ose.

4° Izračunati zapreminu V_y obrtnog tela koje nastaje obrtanjem površine S oko y-ose.

265. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu $O\xi\eta$ kriva $\eta = (1 - \xi^2)^{1/2}$, prave $\xi = 0$ i $\xi = x$ $(x \in [0, 1])$ i ξ-osa ograničavaju površinu čija je veličina $P(x)$.

Ispitati i grafički prikazati funkcije $P(x)$ i $P'(x)$.

266. Ispitati i grafički prikazati funkciju

$$f(x) = x^3 \log |ax| \quad (a \text{ realna konstanta}).$$

Da li kriva $y = f(x)$ ograničava jedan deo ravni? Ako je to slučaj, izračunati veličinu površine tog dela ravni.

267. Ispitati da li krive $y = x^2 \log x$ i $y = x^2$ ograničavaju deo ravni Oxy. Ako je to slučaj, izračunati veličinu P površine S tog dela ravni, kao i zapreminu tela koje nastaje, kada površina S rotira oko y-ose.

268. Ispitati tok krive

$$y = x^{-k} \log x \quad (k \geqslant 0).$$

Pokazati da ona ima jedan maksimum i naći krivu na kojoj se taj maksimum nalazi, dok k varira od 0 do ∞. Zatim odrediti između krivih onu čija maksimalna tačka ima za apscisu e^3. Izračunati odgovarajući maksimum sa tri tačne decimale.

269. Ako je $f(x) \equiv e^{ax} \operatorname{tg} x$ $(a \geqslant 0)$, diskutovati kako utiče parametar a na lokaciju ekstremuma i prevoja funkcije $f(x)$.

270. Između pravouglih paralelepipeda čija je dijagonala d odrediti onaj čija je površina maksimalna.

271. Konstruisati krive

$$1° \quad x^4 - y^4 = 2xy; \qquad 2° \quad x^2 - y^2 = 2xy\,(x^2 + y^2),$$

i pomoću njih odrediti broj realnih korena jednačina

$$1° \quad x^4 - \lambda^4 = 2x\lambda; \qquad 2° \quad x^2 - \lambda^2 = 2x\lambda\,(x^2 + \lambda^2),$$

kada parametar λ varira u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

272. Funkcija

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - (1 + x)\,e^{-x}$$

pozitivna je ako je $x > 0$ i raste zajedno sa x.

Proveriti ovaj rezultat.

V. RAZNI PROBLEMI

273. Po x rešiti jednačinu

$$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

274. Ako je $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y + \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg} a$, koja algebarska relacija postoji između x, y, z?

Na šta se svodi ta relacija ako je $a=0$?

275. Da li je tačna relacija

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \qquad \{a,\ b \neq 0;\ |\operatorname{arc\,tg} x| < \pi/2\}.$$

Da li ona važi za svako a i b? Da li je ta relaclja istinita, na primer, za $a=-1$, $b=1$?

276. Dokazati identitet

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

277. Nacrtati krive čije su jednačine:

1° $|y^2-2x|+|x^2-2y|=1$; 2° $|xy-1|+|y^2-x|=2$;

3° $|x^2+y^2-1|-|y^2-2x|=1$; 4° $|x^2+4y^2-4|+|y-x|=3$;

5° $|\sin x|+|\sin y|=1$; 6° $|\cos x|+|\cos y|=1$;

7° $|x^2+y^2-1|+|(x-1)^2+(y-1)^2-1|=1$; 8° $|x|+|y|+|y^2-2x|=1$.

278. Nacrtati krive:

1° $|2x^2-3y^2|=12$; 2° $y=|x|+|x-1|-|x-2|+|x-4|$;

3° $y=-\frac{1}{2}|x+1|-|x|+\frac{1}{2}|x-1|+|x-2|+2x+1$.

279. Šta kazuje relacija $|\partial f/\partial x|+|\partial f/\partial y| \neq 0$ o funkciji $f(x, y, z)$?

280. Pomoću jedne relacije napisati uslov da funkcija $f(x, y, z, t)$ ne zavisi ni od y ni od z.

281. Odrediti tangente cikloide

(1) $$x = a(t-\sin t), \qquad y = a(1-\cos t)$$

koje su jednovremeno normale ove cikloide.

Rešenje. Jednačina tangente cikloide (1) u tački $t=t_1$ glasi:

(2) $$y-y_1 = \left(\operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}\right)(x-x_1).$$

Jednačina normale cikloide u tački $t=t_0$ ima oblik

(3) $$y-y_0 = -\left(\operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\right)(x-x_0).$$

Ako su ispunjeni uslovi

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2} = -\operatorname{tg}\frac{t_0}{2},$$

$$\text{(5)} \qquad (1-\cos t_1) - \left(\operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}\right)(t_1 - \sin t_1) = (1-\cos t_0) + \left(\operatorname{tg}\frac{t_0}{2}\right)(t_0 - \sin t_0),$$

jednačine (2) i (3) pretstavljaće istu pravu.

Iz (4) sleduje

$$\text{(6)} \qquad t_0 = t_1 - (2k+1)\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Jednačini (5) može se dati oblik

$$\text{(7)} \qquad \cos t_0 - \cos t_1 = \left(t_0 \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} + t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}\right) - \left(\sin t_0 \operatorname{tg}\frac{t_0}{2} + \sin t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}\right).$$

Ako se uzme u obzir jednačina (6), poslednja relacija postaje

$$-2\cos t_1 = \{t_1 - (2k+1)\pi\} \operatorname{tg}\left(\frac{t_1}{2} - \frac{2k+1}{2}\pi\right) + t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}$$

$$+ \sin t_1 \operatorname{tg}\left(\frac{t_1}{2} - \frac{2k+1}{2}\pi\right) - \sin t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}.$$

Odavde sleduje

$$\text{(8)} \qquad 2\cos t_1 + (2k+1)\pi \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2} = 2\sin t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2}.$$

Budući da je

$$\sin t_1 \operatorname{cotg}\frac{t_1}{2} - \cos t_1 \equiv 1,$$

iz (8) se dobija

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{tg}\frac{t_1}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Jednačine (6) i (9) određuju t_0 i t_1.

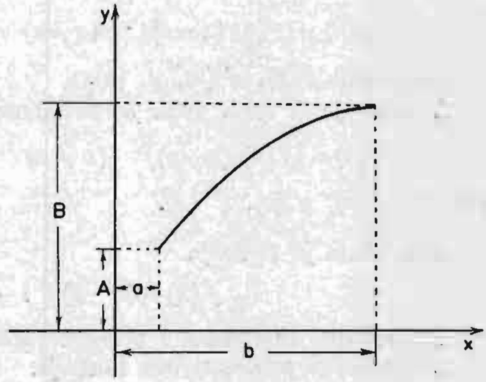
282. Pokazati da je zapremina tela, koje postaje obrtanjem površine

$$0 \leqslant y \leqslant f(x), \qquad 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$$

oko y-ose, definisana formulom

$$\text{(1)} \qquad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Podaci se odnose na Dekartov pravougli koordinatni sistem.



Uputstvo. Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna na segmentu $[a, b]$, tada se formula (1) može izvesti, polazeći od formule

$$V_y = 2\pi \int_A^B x^2\, dy,$$

gde je x definisano relacijom $y = f(x)$.

Formula (1) važi i pod opštijim uslovima, tj. kada je $f(x)$ neprekidna funkcija koja ne mora biti diferencijabilna. Ostavlja se čitaocu da ovaj opštiji rezultat dokaže.

Primena. Formulu (1) primeniti na zadatak:

Data je kriva $y = \sin x$ $\{x \in [0, \pi]\}$. Površina ograničena ovom krivom i x-osom okreće se oko svoje ose simetrije. Izračunati zapreminu tako nastalog obrtnog tela.

283. Proveriti sledeće asimptotske relacije:

$$1^\circ \qquad (x-3)^2(x-5) \sim \begin{cases} 4(x-5), & x \to 5; \\ -2(x-3)^2, & x \to 3; \\ x^3, & x \to \infty. \end{cases}$$

$$2^\circ \qquad ax^2+bx^3+cx^4 \sim \begin{cases} ax^2, & x \to 0 \quad (a \neq 0); \\ cx^4, & x \to \infty \quad (c \neq 0). \end{cases}$$

Primedba. Za dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ kaže se da su asimptotski jednake, kada $x \to a$, ako

$$f(x)/g(x) \to 1, \qquad \text{kada } x \to a.$$

To se označava sa

$$(1) \qquad f(x) \sim g(x) \qquad (x \to a)$$

i čita: $f(x)$ je asimptotski jednako $g(x)$, kada $x \to a$.

(1) je asimptotska relacija.

284. Dokazati sledeće asimptotske relacije:

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x} \sim 1/(2\sqrt{x}) \quad (x \to \infty); \qquad \sqrt[4]{1+x}-\sqrt[4]{x} \sim \frac{1}{4}x^{-3/4} \quad (x \to \infty);$$

$$\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[5]{x} \sim \frac{1}{5}x^{-4/5} \quad (x \to \infty).$$

285. Odrediti α i β tako da funkcija

$$f(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} (a_k x^2 + 2\, b_k x + c_k)^{1/2} - (\alpha x + \beta)$$

$$\{a_k\, (>0),\ b_k,\ c_k\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \text{ realni brojevi}\}$$

ima osobinu $f(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$.

Kada parametri α i β tako budu određeni, koji je znak funkcije $f(x)$ za velike vrednosti promenljive x?

286. 1° Neka je a jedna prosta nula polinoma $f(x)$ i neka je $g(x)$ polinom definisan na sledeći način:

$$g(x) = \{f(x)/(x-a)\}^2 \quad (x \neq a) \quad \text{i} \quad g(a) = \lim_{x \to a} \{f(x)/(x-a)\}^2.$$

Izračunati $g(a)$, $g'(a)$, $g''(a)$.

2° Ako je a nula reda k polinoma $f(x)$ čiji je stepen $n\,(>k)$, i ako je

$$g(x) = \{f(x)/(x-a)\}^k \quad (x \neq a) \quad \text{i} \quad g(a) = \lim_{x \to a} \{f(x)/(x-a)\}^k,$$

odrediti $g(a)$, $g'(a)$, $g''(a)$.

287. Data je funkcija

$$f(x) = (a-x)\sqrt{1-x^2} \qquad (a > 1).$$

1° Odrediti ekstremne i prevojne tačke funkcija $f(x)$ i $1/f(x)$.

2° Grafički prikazati ove funkcije.

3° Pokazati da je

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{f(x)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

i ovom rezultatu dati jedno geometrisko tumačenje.

288. Data je kriva (Γ) $y = x\sin^2 x$.

1° Pokazati da se ekstremne tačke ove krive nalaze na jednoj algebarskoj krivoj i da njene prevojne tačke takođe leže na jednoj algebarskoj krivoj.

2° Izračunati sa jednom tačnom decimalom apscise maksimalne i prevojne tačke koje su najbliže koordinatnom početku.

3° Ispitati krivu (Γ) i približno je nacrtati.

4° Izračunati integrale $\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx$ i $\pi\int_0^\pi x^2\sin^4 x\,dx$ i dati im jedno geometrisko tumačenje.

5° U okolini tačke $x=0$ aproksimirati funkciju $x\sin^2 x$ *Taylor*-ovim polinomom III stepena i proceniti grešku aproksimacije.

289. Utvrditi da je funkcija

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

neparna i da monotono raste, kada x raste od 0 do $+\infty$.

Ispitati da li kriva (Γ) $y = f(x)$ ima prevojnih tačaka i asimptota. Nacrtati krivu (Γ).

Primedba. $\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

290. Približno nacrtati krivu

$$x = a^2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{a^4+t^4}}, \qquad y = \int_0^t \frac{t^2\,dt}{\sqrt{a^4+t^4}} \qquad (t \text{ parametar})$$

i odrediti njen poluprečnik krivine kao funkciju parametra t.

291. Na krivoj $y = e^{-x^2}$ uočiti tačku $M(a, b)$ $(a>0)$ i njenu ortogonalnu projekciju P na x-osi. Krivoliniski četvorougao, koji obrazuju x-osa, y-osa, prava MP i data kriva, izvrši rotaciju od 2π oko y-ose. Izračunati zapreminu $V(b)$ dobijenog obrtnog tela i ispitati da li postoji granica od $V(b)$, kada $a\to\infty$.

Pokazati da su dijagonale d_1 i d_2 navedenog četvorougla uvek nejednake i odrediti parametar a tako da bude $d_1 = kd_2$, Za koje vrednosti k poslednja relacija ima rešenja?

Isti zadatak rešiti za krivu $y = e^{-x}$.

Uzeti opštiju krivu $y = \exp(-\lambda x^\mu)$, pa za nju rešiti navedeni zadatak Ovde pretpostaviti: da je λ pozitivna konstanta i da je μ takav pozitivan broj da se neodređeni integral koji se javlja pri izračunavanju zapremine može izraziti pomoću elementarnih funkcija u konačnom broju.

292. 1° Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{x}}$ i rezultate grafički prikazati.

2° Razviti $\log(1+x)$ u okolini $x=0$ po *Taylor*-ovoj formuli i iskoristiti ovaj razvoj da bi se dobila aproksimativna formula funkcije

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Proceniti učinjenu grešku ako se $g(x)$ aproksimira sa prva tri člana.

293. Neka su A i B dve date tačke i O sredina duži AB. Odrediti geometrisko mesto tačaka M koje zadovoljavaju uslov

$$|\overrightarrow{OM}| = \left| |\overrightarrow{MA}| - |\overrightarrow{MB}| \right| \qquad \{ |\overrightarrow{AB}| = 2a = \text{const} \}.$$

Jednačinu geometriskog mesta izvesti u podesno izabranom polarnom koordinatnom sistemu, a zatim je transformovati u Dekartove koordinate.

Pokazati da veličina površine koju ograničava nađeno geometrisko mesto iznosi

$$\frac{4}{9} a^2 (2\pi + 3\sqrt{3}).$$

294. Nacrtati krivu $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, i izračunati dužinu njenog luka.

295. U polarnom koordinatnom sistemu data je jednačina konusnih preseka

$$(C) \qquad \rho = p/(1 - e\cos\theta).$$

Pokazati da fokalna tetiva PQ krive (C) ima osobinu

$$\frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ}} = k = \text{const},$$

gde je O pol koordinatnog sistema {žiža krive (C)}.

U polarnom sistemu odrediti jednačinu geometriskog mesta sredina tetiva PQ i transformovati ovu jednačinu uvodeći Dekartove koordinate. Ispitati ovo geometrisko mesto (S).

Za slučaj kada je kriva (C) elipsa, odrediti veličinu površine koju ograničava kriva (S).

296. Nad duži AB (O sredina duži; $\overline{AB} = 2r$) kao prečnikom konstruisati polukrug i na njemu uzeti tačku M tako da ugao BOM $(=\alpha)$ bude oštar. U tački M povući tangentu kruga koja seče pravu AB u tački T.

Kontura sastavljena od luka AM polukruga i otsečka MT tangente rotira oko ose AT. Izračunati u funkciji od α i r veličinu $P(\alpha, r)$ dobijene rotacione površine i zapreminu $V(\alpha, r)$ tela ograničenog tom površinom.

Za koje vrednosti parametra α veličine P i V dostižu ekstremnu vrednost?

297. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu date su tačke $(1,1)$ i $(-1,1)$. Odrediti jednačinu parabole koja prolazi kroz dve date tačke i dodiruje x-osu u tački $(\lambda, 0)$. Pokazati da je veličina površine koju omeđuju prava $y = 1$ i parabola nezavisna od λ.

Odrediti jednačinu ose simetrije ove parabole i ispitati da li ta osa prolazi kroz neku fiksnu tačku, kad se λ menja.

298. Odrediti uslov između m, n, p da bi prava $y = mx + n$ bila normala parabole $y^2 = 2px$. Naći koordinate tačaka u kojima posmatrana normala seče datu parabolu.

U funkciji od m i n izračunati veličinu $P(m, n)$ površine koju ograničavaju parabola, x-osa i prava $x = \lambda$, gde je λ apscisa tačke u kojoj posmatrana prava seče parabolu ortogonalno. Za koju će vrednost m veličina P dostići ekstremnu vrednost?

299. Ispitati funkcije

$$f(x)=x+\sqrt{a^2-x^2}, \quad g(x)=1/f(x) \quad (a>0).$$

Izračunati integral $\int\limits_0^a g(x)\,dx$.

Rešenje. *Hakija Turajlić*, student I godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, izračunao je integral

$$(1) \qquad J=\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (a>0)$$

na sledeći način.

Smenom $x=a\sin t$ integral J postaje

$$(2) \qquad J=\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt.$$

Ako se u (1) izvrši smena $x=a\cos t$, dobija se

$$(3) \qquad J=\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt.$$

Iz (2) i (3), posle sabiranja, sleduje

$$2J=\int\limits_0^{\pi/2} dt=\pi/2. \qquad \therefore \qquad J=\pi/4.$$

Primedba. Da li integral $\int\limits_0^a g(x)\,dx$ ima smisla ako je $a<0$?

300. Data je funkcija $f(x)=\int\limits_0^x dt/\sqrt{1+t^4}$.

1° Pokazati da je funkcija $f(x)$ neparna i monotona za sve vrednosti x, i odrediti njene prevoje.

2° Polazeći od nejednakosti $(1+t^2)^2 \geqslant 1+t^4$, odrediti jednu donju granicu za $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3° Grafički prikazati funkciju $g(x)=1/\sqrt{1+x^4}$ i polazeći od zbira $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(k)$ i nejednakosti $1/\sqrt{1+x^4}<1/x^2$, odrediti jednu gornju granicu za $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4° Na osnovu dobijenih podataka skicirati grafik funkcije $f(x)$.

301. 1° Odrediti parametre a i b tako da funkcija

$$f(x)=(\sin^2 x+a\sin x+b)/(\cos^2 x+a\cos x+b)$$

ostane konstantna kada se x menja.

2° Odrediti geometrisko mesto tačke $P(a, b)$ da funkcija $f(x)$ za izvesne vrednosti x ima neodređenu vrednost.

302. Nacrtati krivu $x=te^{-t}, \quad y=(t+1)e^{-t} \quad (-\infty<t<+\infty)$. Odrediti jednačinu njene tangente koja prolazi kroz koordinatni početak.

303. 1° Veličina površine koju omeđuju krive

$$xy^2 = a^2(a-x), \qquad (a-x)\,y^2 = a^2 x$$

iznosi $(\pi-2)\,a^2$.

2° Zapremina tela dobijenog obrtanjem gornje površine oko prave $x=a/2$ iznosi $\pi a^3(4-\pi)/4$.

Proveriti navedene rezultate.

304. Odrediti parametre a i b tako da kriva

$$y=\int_x^{+\infty}(t-a)\,(t-b)\,e^{-t}\,dt$$

dodiruje x-osu u tački apscise 1.

Zatim konstruisati tako dobijenu krivu.

305. Odrediti i ispitati geometrisko mesto prevojnih tačaka skupa krivih

$$y=(x-a)^3/(x^2+x+1) \qquad (a \text{ parametar}).$$

Primedba. Geometrisko mesto je jedna unikurzalna kriva.

306. Nepomična tačka A nalazi se u krugu poluprečnika r i udaljena je od centra kruga za a. Odrediti geometrisko mesto podnožja normala spuštenih iz tačke A na tangente posmatranog kruga. Izračunati veličinu površine koju omeđuje ovo geometrisko mesto *(podera)*.

307. Nacrtati krivu $x^2 y = x^2 + y^2$ i odrediti poluprečnik krivine u jednoj njenoj tački.

Da li je ova kriva unikurzalna? U afirmativnom slučaju, izraziti x i y kao racionalne funkcije jednog parametra.

308. Dat je skup krivih (C) $y=(x+\lambda)\,e^x$.

1° Odrediti geometrisko mesto ekstremnih tačaka i geometrisko mesto prevojnih tačaka skupa krivih (C), kada λ varira.

2° Ispitati i nacrtati krive (C).

3° Krivoliniski trougao OAB $\{O$ koordinatni početak, A presek krive x-ose, B presek krive i y-ose; OA, OB duži, AB luk krive $(C)\}$ izvrši rotaciju od α $(\alpha < 2\pi)$ radijana oko x-ose. Izračunati zapreminu dobijenog obrtnog tela.

4° Za koje se vrednosti λ mogu povući tangente na krivu (C) iz koordinatnog početka?

309. Data je funkcija $f(x)=1/(x^2-1)$ $(|x| \neq 1)$.

1° Pokazati da je izvod $d^k f(x)/dx^k$ oblika

$$(1) \qquad P_k(x)/(x^2-1)^{k+1} \quad \{P_k(x) \text{ polinom po } x \text{ stepena } k\}.$$

2° Odrediti nule polinoma $P_k(x)$.

Rešenje. 1° Iz relacije

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]$$

sleduje

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k}=(-1)^k\,\frac{k!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{k+1}}-\frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right].$$

Zaista je k-ti izvod funkcije $f(x)$ oblika (1), gde je

$$(2) \qquad P_k(x) \equiv (-1)^k \frac{k!}{2}\{(x+1)^{k+1}-(x-1)^{k+1}\},$$

odnosno

$$P_k(x) \equiv \begin{cases} k!\left[(k+1)x^k+\binom{k+1}{3}x^{k-2}+\cdots+1\right] & (k \text{ parno}); \\ -k!\left[(k+1)x^k+\binom{k+1}{3}x^{k-2}+\cdots+\binom{k+1}{k}x\right] & (k \text{ neparno}). \end{cases}$$

2° Nule funkcije $P_k(x)$ dobijaju se iz jednačine

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{k+1}=1, \quad \therefore \quad \frac{x-1}{x+1}=e^{\frac{2n\pi i}{k+1}} \qquad (n=1, 2, \ldots, k).$$

Prema tome, sve nule polinoma $P_k(x)$ su

$$x_k = i \operatorname{cotg}\frac{n\pi}{k+1} \qquad (n=1, 2, \ldots, k).$$

Da li su sve nule polinoma $P_k(x)$ čisto imaginarne?

Primedba. Čitalac će osobinu 1° dokazati metodom matematičke indukcije.

310. Ispitati da li se kardioide

$$r=a(1+\cos\theta), \qquad r=b(1-\cos\theta)$$

seku pod pravim uglom.

311. Ako je funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ integrabilna u *Riemann*-ovom smislu i ograničena, tada je

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\frac{1-\cos kx}{k}\,dx=0.$$

Dokaz. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\frac{1-\cos kx}{k}\,dx\right| \leqslant \frac{2(b-a)M}{|k|},$

gde je M jedna gornja granica modula $|f(x)|$ na segmentu $[a, b]$.

Ako $k\to\infty$, tada $2(b-a)M/k\to 0$, pa je ovim dokazana relacija (1).

312. Odrediti zapreminu $V(a)$ i površinu $P(a)$ tela koje nastaje kada površina, ograničena lukom lančanice

$$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$$

i otsečkom prave

$$y=\frac{a}{2}(e+e^{-1})$$

izvrši rotaciju oko y-ose.

Rezultat. $V=\frac{1}{2}\pi a^3(e+5e^{-1}-4)$; $\quad P=2\pi a^2(1-e^{-1})$.

313. Parametar b odrediti tako da funkcija

$$\begin{aligned} f(x) &= x-(x^2-a^2)^{1/2} && (|x|\geqslant a>0), \\ &= bx && (|x|\leqslant a) \end{aligned}$$

bude neprekidna u intervalu $(-\infty, +\infty)$.

314. Grafički prikazati funkciju

$$y = x^2/\log|x|.$$

Za koje vrednosti parametra a jednačina

$$x^2/\log|x| = a \qquad (a \text{ realan parametar})$$

nema realnih rešenja.

315. Grafički prikazati funkcije $f(x)$ i $1/f(x)$, gde je

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{2/3}.$$

316. Data je funkcija

$$f(x) = \sqrt[p]{(x+a)^q} - \sqrt[p]{(x+b)^q} \qquad (a \neq b;\ p \neq q),$$

gde su a i b dve konstante p i q dva prirodna broja.

Odrediti $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ za razne vrednosti parametara p i q.

317. Nacrtati krivu čija je jednačina

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2) = a^2 \qquad (a \text{ realan parametar}).$$

318. Nacrtati krivu

$$x = t^4 + \frac{4}{3}t^3, \quad y = t^4 - \frac{4}{3}t^3 \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Ova kriva i x-osa ograničavaju površinu S. Izračunati veličinu ove površine i dužinu njene konture.

319. Data je funkcija

$$f(x) = (\log x)/(x-1)^{3/2} \qquad (x > 1).$$

1° Odrediti $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2° Izračunati veličinu $P(a, b)$ površine koju ograničavaju kriva $y = f(x)$, x-osa i prave $x = a\ (>1)$ i $x = b\ (>a)$.

Da li postoji $\lim\limits_{\substack{a \to 1+ \\ b \to +\infty}} P(a, b)$?

320. Odrediti graničnu vrednost L funkcije

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log(1 + x^2) - x \operatorname{arc\,tg} x + \exp(\sin x) - \exp(x)}{\sin x - x},$$

kada $x \to 0$.

Ispitati da li je funkcija

$$F(x) = \begin{cases} f(x)/g(x) & (x \neq 0), \\ L & (x = 0) \end{cases}$$

diferencijabilna u intervalu $(-\infty, +\infty)$ i, ako jeste, naći $F'(0)$.

MATEMATIČKA INDUKCIJA[1]

1. Dokazati da je broj $13^{2n}+6$ (n nula ili prirodan broj) deljiv sa 7.

Rešenje. Pretpostavimo li da je ovaj stav istinit za $n=k$, tj. da je

$$(1) \qquad 13^{2k}+6=7N \qquad (N \text{ prirodan broj}),$$

tada je

$$13^{2k+2}+6=169\cdot 13^{2k}+6=169\,(7N-6)+6=7\,(169N-24\cdot 6).$$

Prema tome, ako važi relacija (1), tada važi i relacija $7\mid(13^{2k+2}+6)$.

Kako je, pored toga, broj $13^{2n}+6$ deljiv sa 7 za $n=0$, sleduje da je deljiv sa 7 za $n\in\{0,1,2,\ldots\}$.

2. Ako je n prirodan broj, dokazati relaciju

$$54\mid(2^{2n+1}-9n^2+3n-2).$$

Rešenje. Ako je $f(n)=2^{2n+1}-9n^2+3n-2$, tada je

$$f(n+1)-f(n)=6\,(2^{2n}-3n-1).$$

Označimo izraz $2^{2n}-3n-1$ sa $g(n)$. Tada je

$$g(n+1)-g(n)=3\,(2^{2n}-1).$$

Označimo zatim izraz $2^{2n}-1$ sa $h(n)$, pa je

$$h(n+1)-h(n)=3\cdot 2^{2n}$$

Budući da je $3\mid h(1)$ i da je $3\mid h(n+1)$ ako je $3\mid h(n)$, izlazi da je $3\mid h(n)$ za $n\in\{1,2,\ldots\}$.

Kako je $9\mid g(1)$ i $9\mid g(n+1)$ kada je $9\mid g(n)$, kao zaključak se dobija: $9\mid g(n)$ za $n\in\{1,2,\ldots\}$.

Najzad iz činjenice $54\mid f(1)$ i budući da je $54\mid f(n+1)$, kada je $54\mid f(n)$, izlazi

$$54\mid f(n) \quad \text{za} \quad n\in\{1,2,\ldots\},$$

što je i trebalo dokazati.

$f(0)$ je takođe deljivo sa 54.

Primedba. Primeniti tako isto način dokazivanja upotrebljen u prethodnom zadatku.

3. Matematičkom indukcijom ili na koji drugi način dokazati da je izraz

$$11^{n+2}+12^{2n+1} \qquad (n \text{ prirodan broj ili nula})$$

deljiv sa 133.

[1] O metodu matematičke indukcije videti knjižicu: D. S. *Mitrinović: Metod matematičke indukcije* (1958, Beograd, 64 strane) koja je objavljena kao sveska 4 edicije *Matematička biblioteka*.

4. Dokazati $3^{2n+2}-8n-9\equiv 0 \pmod{64}$ (n prirodan broj).

Rešenje. $N(n)=3^{2n+2}-8n-9$.

Pretpostavimo da je broj $N(n)$ deljiv sa 64 ako je $n=k$, pa ispitajmo da li se iz ove pretpostavke može zaključiti da je broj $N(n)$ deljiv sa 64 ako je $n=k+1$.

$$\begin{aligned} N(k+1) &= 3^{2k+4}-8k-17 \\ &= 9\cdot 3^{2k+2}-8k-17 \\ &= 9(3^{2k+2}-8k-9)+64(k+1) \\ &= 9N(k)+64(k+1). \end{aligned}$$

Na osnovu ovog se zaključuje da je broj $N(k+1)$ deljiv sa 64 ako je to slučaj sa $N(k)$.

$N(n)$ je deljiv sa 64 za $n=1$, pa, prema gornjem, $N(n)$ uživa istu osobinu za $n=2, 3, \ldots$, tj. za svako n, gde je n prirodan broj.

Brojevi $N(0)$ i $N(-1)$ takođe su deljivi sa 64.

5. 1° Ako su p i q prirodni brojevi, dokazati kongruenciju

(1) $$p^5q-pq^5\equiv 0 \pmod{30}.$$

2° Da li relacija (1) važi, ako su p i q proizvoljni celi brojevi?

Rešenje. 1° Posmatrajmo broj

(2) $$S(p, q)=p^5q-pq^5.$$

Broj $S(p, 1)$ može se napisati u obliku

(3) $$S(p, 1)=(p-1)p(p+1)(p^2+1).$$

Proizvod $(p-1)p(p+1)$ od tri konsekutivna broja uvek je deljiv sa 6.

Svaki prirodan broj p može se izraziti u obliku

$$p=5N+r \quad (N \text{ prirodan broj};\ r=0, 1, 2, 3, 4).$$

Ako je $r=0$, 1, 4 proizvod $(p-1)p(p+1)$ deljiv je sa 5.

U slučajevima kada je $p=5N+2$ i $p=5N+3$, izraz p^2+1 postaje respektivno

$$5(5N^2+4N+1), \quad 5(5N^2+6N+2).$$

Prema tome, dokazali smo relaciju

(4) $$S(p, 1)=p^5-p\equiv 0 \pmod{30}.$$

Obrazujmo sada razliku

(5) $$\begin{aligned} S(p, q+1)-S(p, q) &= \{p^5(q+1)-p(q+1)^5\}-(p^5q-pq^5) \\ &= S(p, 1)-5pq(q^3+2q^2+2q+1). \end{aligned}$$

Pokazaćemo da je izraz

$$R(q)=q(q^3+2q^2+2q+1)=q(q+1)(q^2+q+1)$$

deljiv sa 6 kada je q proizvoljan prirodan broj.

Svaki prirodan broj q može se napisati u obliku

$$q=6n+s \quad (n \text{ prirodan broj};\ s=0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Prema tome, $R(q)$ ima ove oblike:

$$\begin{aligned} &6n(6n+1)(36n^2+6n+1) \\ &(6n+1)(6n+2)(36n^2+18n+3), \\ &(6n+2)(6n+3)(36n^2+30n+7), \\ &(6n+3)(6n+4)(36n^2+42n+13), \\ &(6n+4)(6n+5)(36n^2+54n+21), \\ &(6n+5)(6n+6)(36n^2+66n+31). \\ &\therefore \quad 6 \mid R(q). \end{aligned}$$

Polazeći od relacije (5), dolazimo do ovog zaključka:
Budući da je

$$30 \mid S(p,\, 1) \quad \text{i} \quad 30 \mid \{5\, q\, (q+1)\, (q^2+q+1)\}$$

i ako se pretpostavi da je $30 \mid S(p, q)$, sleduje $30 \mid S(p, q+1)$.

Ovim je dokazana kongruencija (1).

2° Čitalac će sam rešiti drugi deo zadatka.

Primedba. Relacija (1) može se dokazati i primenom samo matematičke indukcije. Videti o ovome članak:

O. Mitrinović: Sur une congruence (Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od Narodna Republika Makedonija, 1955).

6. Dokazati identitet

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-6)(4n-2) \equiv (n+1)(n+2) \cdots (2n-1)(2n).$$

Rešenje. Označimo izraz na levoj strani sa $F(n)$, a na desnoj sa $G(n)$. Relacija

$$(1) \qquad F(n) - G(n) \equiv 0$$

važi za $n=1$.

Ako relacija (1) važi za $n=k$, tj. ako je $F(k) - G(k) \equiv 0$, tada je

$$\begin{aligned} F(k+1) - G(k+1) &\equiv F(k)(4k+2) - G(k)\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1} \\ &\equiv \frac{F(k)}{k+1}[(4k+2)(k+1) - (2k+1)(2k+2)] \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Prema tome, matematičkom indukcijom dokazali smo istinitost relacije (1) za svaki prirodan broj n.

Ovaj se problem može rešiti i na sledeći način.

Najpre imamo

$$F(n) = 2^n (2n-1)!!, \qquad G(n) = (n+1)(n+2) \cdots (2n).$$

$$\therefore \quad n!\, F(n) = (2n)!!\,(2n-1)!!, \qquad n!\, G(n) = (2n)!$$

$$\therefore \quad n!\, F(n) = (2n)! \qquad \therefore \quad F(n) = G(n).$$

7. Ako je $n\,(\geqslant 2)$ prirodan broj, dokazati relaciju

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (n^2-k^2)^2 \equiv \frac{1}{2}\{n^4 + (-1)^n n\}.$$

Rešenje. Za $n=2$ relacija (1) je tačna. Pretpostavimo da je ona tačna za $n=r$, tj. da je

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k+1} (r^2-k^2)^2 \equiv \frac{1}{2}\{r^4 + (-1)^r r\}.$$

Posmatrajmo sada izraz

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \{(r+1)^2 - k^2\}^2$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} (r^2-k^2)^2 + 2(2r+1) \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} (r^2-k^2) + (2r+1)^2 \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1},$$

što je, prema (2), identički jednako izrazu

$$\frac{1}{2}\{r^4+(-1)^r r\}+2r^2(2r+1)\frac{1-(-1)^r}{2}+2(2r+1)(-1)^r\frac{r(r+1)}{2}+(2r+1)^2\frac{1-(-1)^r}{2}$$

budući da je:

$$\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}=\frac{1-(-1)^r}{2},\qquad \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{r+1}\binom{r+1}{2}.$$

Kada se izvrše naznačene operacije, dobija se

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\{(r+1)^2-k^2\}^2=\frac{1}{2}\{(r+1)^4-(-1)^r(r+1)\}.$$

Ovim je dokazano: ako je relacija (2) tačna, tada je relacija (3) takođe tačna; iz (2) dobija se (3) kada se r zameni sa $r+1$.

Budući da je relacija (1) tačna za $n=2$, izlazi, prema (2) i (3), da je ona tačna za $n=3$, a zatim za $n=4$, itd. odnosno relacija (1) je tačna za svaki prirodan broj $n\geqslant 2$.

8. Ako su n i p prirodni brojevi, pokazati da je

$$(E)\qquad 1\cdot 2\cdots p+2\cdot 3\cdots(p+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+p-1)$$
$$=[n(n+1)\cdots(n+p)]/(p+1).$$

Rešenje. Radi kratkoće uvedimo oznaku

$$S_n\equiv[1\cdot 2\cdots p]+[2\cdot 3\cdots(p+1)]+\cdots+[n(n+1)\cdots(n+p-1)].$$

Tada je $S_{k+1}\equiv S_k+[(k+1)(k+2)\cdots(k+p)]$.

Ako data formula (E) važi za $n=k$, tj. ako je

$$S_k\equiv[k(k+1)\cdots(k+p)]/(p+1),$$

onda je

$$S_{k+1}\equiv\frac{k(k+1)\cdots(k+p)}{p+1}+[(k+1)(k+2)\cdots(k+p)]\equiv\frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+p+1)}{p+1}.$$

Budući da je, uz to, formula (E) u važnosti za $n=1$, zaključuje se da je ona istinita i za svako $n=1, 2, 3,\ldots$

9. Dokazati identitet

$$(1)\qquad \binom{x}{0}-\binom{x}{1}+\binom{x}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{x}{n}\equiv(-1)^n\binom{x-1}{n}\quad(n=1, 2, 3,\ldots)$$

Rešenje. Za $n=1$ relacija (1) važi.

Pretpostavimo da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj.

$$(2)\qquad \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}\equiv(-1)^k\binom{x-1}{k}.$$

Ako se izrazima na levoj i desnoj strani relaciije (2) doda $(-1)^{k+1}\binom{x}{k+1}$, dobija se respektivno:

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{x}{\nu}+(-1)^{k+1}\binom{x}{k+1}\equiv\sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu\binom{x}{\nu};$$

$$(-1)^k\binom{x-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{x}{k+1}\equiv(-1)^{k+1}\binom{x-1}{k}\left(\frac{x}{k+1}-1\right)\equiv(-1)^{k+1}\binom{x-1}{k+1}.$$

Ako je istinita relacija (2), tada je istinita i ova

$$\sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^{\nu}\binom{x}{\nu}=(-1)^{k+1}\binom{x-1}{k+1}.$$

Na osnovu izloženog, zaključuje se da relacija (1) važi za $n=1, 2, 3, \ldots$

10. Ako je n prirodan broj, dokazati:

$$(1)\qquad \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}.$$

Dokaz.

$$u_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}.$$

$$\therefore\quad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}.$$

Ako se izraz na desnoj strani identiteta (1) označi sa v_n, tada je

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}.$$

Pretpostavi li se da je $u_n=v_n$, izlazi $u_{n+1}=v_{n+1}$.
Budući da je uz to $u_1=v_1$, zaključuje se da je $u_n=v_n$ za svako $n\in\{1, 2, 3,\ldots\}$.

11. Metodom matematičke indukcije dokazati identitet

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.$$

Rešenje. Pretpostavimo da ova relacija važi za $n=m$, tj.

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{m}{3^m}=\frac{3}{4}-\frac{2m+3}{4\cdot 3^m}.$$

Tada važi i relacija

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{m}{3^m}+\frac{m+1}{3^{m+1}}&=\frac{3}{4}-\frac{2m+3}{4\cdot 3^m}+\frac{m+1}{3^{m+1}}\\&=\frac{3}{4}-\frac{2m+5}{4\cdot 3^{m+1}}\\&=\frac{3}{4}-\frac{2(m+1)+3}{4\cdot 3^{m+1}}.\end{aligned}$$

Dakle, ako data relacija važi za $n=m$, u važnosti je i za $n=m+1$. Za $n=1$ ta relacija sigurno važi, pa je ovim dati identitet dokazan.
Ovaj identitet važi i za $n=0$.

12. Data je determinanta D_n reda n koja ima oblik

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & & & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \text{\Large 0} & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & & 1 & 2\cos\theta & & & \\ & & & 1 & \ddots & 1 & \\ & \text{\Large 0} & & & & 2\cos\theta & 1 \\ & & & & & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}.$$

Potpunom indukcijom pokazati da je $D_n=\cos n\theta$.

Rešenje. Formirajmo determinantu D_{n+1}. Ako je razvijemo po elementima poslednje vrste, dobijamo

$$(1)\qquad D_{n+1} \equiv 2(\cos\theta)\, D_n - D_{n-1}.$$

Pretpostavimo sada da su istinite formule:

$$(2)\qquad D_n \equiv \cos n\theta, \qquad D_{n-1} \equiv \cos(n-1)\theta.$$

Tada je, prema (1),

$$(3)\qquad \begin{aligned} D_{n+1} &\equiv 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n\theta-\theta) \\ &\equiv \cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta \\ &\equiv \cos(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Iz definicije determinante D_n imamo:

$$(4)\qquad D_1 \equiv \cos\theta, \qquad D_2 \equiv \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \equiv \cos 2\theta.$$

Prema tome formula

$$(5)\qquad D_k \equiv \cos k\theta$$

važi za $k=n$ ako su istinite formule (2) za $k=n-1$ i $k=n-2$.

Formula (5) je istinita za $k=3$, jer je, prema (4), u važnosti za $k=1$ i $k=2$. Formula (5) dalje važi za $k=4$, jer je istinita za $k=2$ i $k=3$; itd., tj. formula (5) je u važnosti za svako n (n prirodan broj).

13. Dokazati formulu

$$(1)\qquad \sin a\sin 2a + \sin 2a\sin 3a + \cdots + \sin na\sin(n+1)a$$

$$\equiv \frac{n}{2}\cos a - \frac{\cos(n+2)a\sin na}{2\sin a} \qquad (n \geqslant 1).$$

Rešenje. Za $n=1$ formula (1) važi. Pretpostavimo da je ona u važnosti za ma koji prirodni broj $n=k$, naime

$$(2)\qquad S_k \equiv \sum_{r=1}^{k} \sin ra\sin(r+1)a \equiv \frac{k}{2}\cos a - \frac{\cos(k+2)a\sin ka}{2\sin a}.$$

Formirajmo

$$S_k + \sin(k+1)a\sin(k+2)a \equiv \frac{k}{2}\cos a - \frac{\cos(k+2)a\sin ka}{2\sin a} + \sin(k+1)a\sin(k+2)a.$$

Kako je $\sin(k+1)a\sin(k+2)a \equiv \frac{1}{2}\cos a - \frac{1}{2}\cos(2k+3)a$, poslednja jednakost postaje

$$(3)\qquad \begin{aligned} S_{k+1} &\equiv \frac{k+1}{2}\cos a - \frac{1}{2\sin a}\,[\cos(k+2)a\sin ka + \cos(2k+3)a\sin a]. \\ &\equiv \frac{k+1}{2}\cos a - \frac{1}{2\sin a}\,\frac{1}{2}\,[\sin(2k+2)a - \sin 2a + \sin(2k+4)a - \sin(2k+2)a]. \\ &\equiv \frac{k+1}{2}\cos a - \frac{\cos(k+3)a\sin(k+1)a}{2\sin a}. \end{aligned}$$

Ako označimo desnu stranu jednakosti (2) sa σ_k, s obzirom na (3) možemo formulisati zaključak: ako je istinita relacija $S_k=\sigma_k$, tada je istinita i relacija $S_{k+1}=\sigma_{k+1}$.

Ovim je završen induktivni dokaz.

14. Dokazati nejednakost

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\quad (n\geqslant 2).$$

Rešenje. Za $n=2$ zaista je $1+(1/\sqrt{2})>\sqrt{2}$.

Pretpostavimo da nejednakost (1) važi za $n=k$, tj. da je

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k},$$

$$\therefore\quad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Pokazaćemo sada da je u važnosti nejednakost

$$(2)\qquad \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\quad (k\geqslant 2).$$

Pretpostavimo da je za $k\geqslant 2$ tačno suprotno, odnosno

$$(3)\qquad \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqslant\sqrt{k+1}.$$

$$\therefore\quad k+\frac{1}{k+1}+2\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant k+1.\qquad \therefore\quad 2\sqrt{\frac{k}{k+1}}\leqslant\frac{k}{k+1}.$$

$$\therefore\quad \frac{4k}{k+1}\leqslant\frac{k^2}{(k+1)^2}.\qquad \therefore\quad 4\leqslant\frac{k}{k+1}.$$

$$\therefore\quad 3k+4\leqslant 0.$$

Budući da nas je hipoteza (3) dovela do apsurda, relacija (2) je tačna.

Prema tome, utvrdili smo da, ako važi nejednakost (1), tj. $f(n)>g(n)$, tada važi i nejednakost $f(n+1)>g(n+1)$.

Budući da je $f(2)>g(2)$, izlazi da je $f(3)>g(3)$, $\therefore$ $f(4)>g(4), \ldots, f(n)>g(n), \ldots$

15. Dokazati nejednakost

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)\quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Rešenje. Za $n=1$ nejednakost (1) doista važi. Pretpostavimo istinitost nejednakosti (1) za $n=k$, naime pretpostavimo

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-1).$$

Tada je

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Ako još pokažemo da je

$$(2)\qquad 2(\sqrt{k+1}-1)+(1/\sqrt{k+1})>2(\sqrt{k+2}-1)\quad (k\geqslant 1),$$

tada smo dokazali važenje nejednakosti (1) za svako n iz skupa prirodnih brojeva.

Ispitajmo da li (2) važi za $k\geqslant 1$, tj. da li je

$$2\sqrt{k+1}+(1/\sqrt{k+1})>2\sqrt{k+2}.$$

Pretpostavimo da važi relacija

(3) $$2\sqrt{k+1}+(1/\sqrt{k+1})\leqslant 2\sqrt{k+2}.$$

$$\therefore\quad 2k+3\leqslant 2\sqrt{(k+1)(k+2)};$$

$$\therefore\quad 9\leqslant 8.$$

Budući da je hipoteza (3) dovela do apsurda, izlazi da nejednakost (2) važi za $k\geqslant 1$. Prema izloženom, sleduje da nejednakost (1) važi za svako $n\in\{1, 2, 3,\ldots\}$.

16. Dokazati nejednakost

(1) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}\qquad (n=2, 3, 4,\ldots).$$

Rešenje. Uvedimo oznaku $f(n)\equiv\sum\limits_{k=1}^{n} 1/(k+n)$.

Pretpostavimo da nejednakost (1) važi za $n=k\ (\geqslant 2)$, naime

(2) $$f(k)>1/2.$$

Da bismo utvrdili da li iz hipoteze (2) sleduje

(3) $$f(k+1)>1/2,$$

umesto (2) napišimo

$$f(k)-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2},$$

$$f(k+1)>\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}.$$

Budući da je

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2},\quad \text{tj.}\quad \frac{1}{2k+1}>\frac{1}{2k+2},$$

zaključujemo da (3) važi, ako je to slučaj sa (2).

Kako je pored toga $f(2)>1/2$, dokazali smo

$$(n)>1/2\quad \text{za svaki prirodan broj } n\geqslant 2.$$

Čitalac će dokazati nejednakost (1) i nekim drugim putem.

17. Dokazati metodom matematičke indukcije nejednakost

$$f(n)\equiv\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1\qquad (n=1, 2, 3,\ldots).$$

Rešenje. Pretpostavimo da data nejednakost važi za neki prirodan broj $n=k\ (\geqslant 1)$, naime

(1) $$f(k)>1.$$

Ako levoj i desnoj strani ove nejednakosti dodamo

$$-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4},$$

dobijamo

(2) $$f(k+1)>1-\frac{2}{3k+3}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}.$$

Ako je

$$(3) \qquad 1-\frac{2}{3k+3}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>1,$$

tada iz induktivne hipoteze (1) sleduje

$$f(k+1)>1.$$

Nejednakost (3), odnosno

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\frac{2}{3k+3}$$

odista važi, što se vidi ako se ona napiše u obliku

$$1/\{(3k+3)^2-1\}>1/(3k+3)^2.$$

Budući da je povrh toga $f(1)=13/12>1$, zaključuje se da je $f(n)>1$ za svaki prirodan broj n.

18. Matematičkom indukcijom dokazati nejednakost

$$(1) \qquad 4^n/(n+1)<(2n)!/(n!)^2 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Rešenje. Za $n=2$ relacija (1) odista važi, jer je

$$16/3<4!/(2!)^2=6.$$

Pretpostavimo da je relacija (1) u važnosti za proizvoljan prirodan broj $n=k$ ($\geqslant 2$), naime

$$4^k/(k+1)<(2k!)/(k!)^2,$$

odnosno

$$(2) \qquad (2k)!/(k!)^2>4^k/(k+1).$$

Posle množenja leve i desne strane relacije (2) sa

$$(2k+1)(2k+2)/(k+1)^2,$$

dobija se

$$(3) \qquad (2k+2)!/\{(k+1)!\}^2>(2k+1)(2k+2)4^k/(k+1)^3,$$

što se može napisati u obliku

$$(4) \qquad \frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2}>\frac{4^{k+1}}{k+2}\cdot\frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2}.$$

Kako je

$$\frac{(k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2}=1+\frac{k}{2(k+1)^2}>1 \quad (\text{za svako } k>0),$$

dobija se

$$(5) \qquad \frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2}>\frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Ovim je dokaz nejednakosti (1) završen.

Dokaz može biti izveden i na sledeći način.

Iz induktivne hipoteze

$$\frac{4^k}{k+1}<\frac{(2k)!}{(k!)^2} \quad (k\geqslant 2)$$

sleduje

$$\frac{4^{k+1}}{k+2}<\frac{(2k)!}{(k!)^2}\,\frac{4(k+1)}{k+2}=\frac{(2k+2)!}{\{(k+1)!\}^2}\,\frac{4(k+1)^3}{(k+2)(2k+1)(2k+2)}.$$

Budući da je

$$\frac{2(k+1)^2}{(k+2)(2k+1)}<1, \quad \text{tj.} \quad 0<k,$$

dobija se

$$4^{k+1}/(k+2)<(2k+2)!/\{(k+1)!\}^2.$$

19. Proveriti identitet

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \equiv \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{x} - \binom{n}{1}\frac{1}{x+1} + \binom{n}{2}\frac{1}{x+2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{x+n}\right].$$

20. Ispitati da li je izraz

$$10^n - (5+\sqrt{17})^n - (5-\sqrt{17})^n$$

deljiv sa 2^{n+1} (n prirodan broj).

21. Ako je n prirodan broj, dokazati da je $a^n - b^n$ deljivo sa $a-b$.

22. Metodom matematičke indukcije dokazati formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin ax \equiv a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

23. Metodom indukcije dokazati identitete:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r(k-n)+k}{r+k}\binom{r+k}{k} \equiv n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r(k^2-n^2)+k(2k-1)}{r+k}\binom{r+k}{k} \equiv n^2.$$

24. Dokazati nejednakosti:

$$n^n > (2n-1)!!, \qquad (n+1)^n > (2n)!! \qquad (n>1).$$

Rešenje. 1° Za $n=2$ relacija

$$(1) \qquad n^n > (2n-1)!!$$

je tačna.

Pretpostavimo sada da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj. da je

$$(2) \qquad k^k > (2k-1)!!$$

Tada je tačna i relacija koja se dobija kada se izrazi na levoj i desnoj strani relacije (2) pomnože sa $(k+1)^{k+1}/k^k$, odnosno relacija

$$(3) \qquad (k+1)^{k+1} > (2k-1)!!\,(k+1)^{k+1}/k^k.$$

Ako je

$$(4) \qquad (2k-1)!!\,(k+1)^{k+1}/k^k > (2k+1)!!,$$

tada je

$$(5) \qquad (k+1)^{k+1} > (2k+1)!!$$

Relacija (4) je tačna. Zaista, umesto (4) možemo posmatrati

$$(6) \qquad (k+1)^{k+1} - (2k+1)\,k^k > 0.$$

Izraz na levoj strani relacije (6), posle primene binomne formule, postaje

$$\binom{k+1}{2}k^{k-1}+\binom{k+1}{3}k^{k-2}+\cdots+\binom{k+1}{k}k+\binom{k+1}{k+1},$$

i on je pozitivan za svaki prirodan broj k.

Iz hipoteze (2), odnosno $f(k)>g(k)$ izveli smo $f(k+1)>g(k+1)$. Kako je, pored toga, relacija (2) tačna za $k=2$, znači da je tačna za svako $k\in\{2, 3, 4, \ldots\}$.

2° Čitalac će dokazati drugu od navedenih nejednakosti.

25. Dokazati relaciju

(1) $$(2k)! < 2^{2k}(k!)^2.$$

Dokaz. Za $k=1$ važi relacija (1), koju ćemo označiti sa $f(k)<g(k)$. Pretpostavimo da relacija (1) važi za neko k. Ako dokažemo da je istinita nejednakost

(2) $$(2k+1)(2k+2) < 2^2(k+1)^2 \quad \text{za } k\geqslant 1,$$

tada iz (1) i (2) sleduje

(3) $$(2k+2)! < 2^{2k+2}\{(k+1)!\}^2,$$

tj. $f(k+1)<g(k+1)$.

Bez teškoće utvrđuje se istinitost relacije (2), jer se ona svodi na nejednakost

$$0<2k+2$$

koja važi za svako $k>-1$.

26. Dokazati nejednakost

(1) $$2!\,4!\cdots(2n)! > \{(n+1)!\}^n \quad (n\geqslant 2).$$

Rešenje. Za $n=2$ nejednakost (1) je istinita. Pretpostavmo sada da je ona istinita za $n=k-1$, tj. da je

(2) $$2!\,4!\cdots(2k-2)! > (k!)^{k-1}.$$

$$\therefore\quad 2!\,4!\cdots(2k-2)!\,(2k)! > (2k)!\,(k!)^{k-1}$$

$$=\frac{(2k)!\,(k!)^k}{k!}=(2k)(2k-1)\cdots(k+1)(k!)^k$$

$$>(k+1)^k(k!)^k=\{(k+1)\}^k,$$

jer je svaki od faktora $2k,\ 2k-1, \ldots, k+2$ veći od $k+1$.

Prema tome, indukcijom je dokazana relacija (1).

27. Dokazati nejednakost

(1) $$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{n}+1.$$

Rešenje. Pretpostavimo da je ova nejednakost istinita za neko n, recimo za $n=k-1$, tj. učinimo induktivnu hipotezu

(2) $$\sqrt{k-1+\sqrt{k-2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} < \sqrt{k-1}+1.$$

Koren

$$\sqrt{k+\sqrt{k-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$$

na osnovu (2) manji je od korena

$$\sqrt{k+\sqrt{k-1}+1}$$

koji je sigurno manji od korena

$$\sqrt{(\sqrt{k})^2+2\sqrt{k}+1}=\sqrt{k}+1\,.$$

Ako je, dakle, relacija (1) tačna za $n=k-1$, ona je tačna i za $n=k$. Relacija (1) je tačna za $n=1$, jer je zaista $1<\sqrt{1}+1$.

Prema tome, relacija (1) je tačna za svaki prirodan broj n.

Primedba. Nejednakost

$$\sqrt{k+\sqrt{k-1}+1}<\sqrt{k}+1$$

možemo dokazati na sledeći način.

Pretpostavimo da je tačna relacija

$$\sqrt{k+\sqrt{k-1}+1}\geqslant\sqrt{k}+1\,.$$

$$\therefore\quad \sqrt{k-1}\geqslant 2\sqrt{k}\,.$$

$$\therefore\quad -(3k+1)\geqslant 0,$$

što je apsurd, budući da je $k\geqslant 2$. Redukcijom na apsurd dokazali smo nejednakost

$$\sqrt{k+\sqrt{k-1}+1}<\sqrt{k}+1\qquad (k\geqslant 1).$$

28. Dokazati nejednakost

$$(1)\qquad \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}}\geqslant\frac{n+1}{n-1}\qquad (a>0;\ n \text{ prirodan broj} >1).$$

Rešenje. Za $n=2$ relacija (2) je tačna. Pretpostavimo da je ona tačna za $n=k$, tj. da je

$$(2)\qquad \frac{1+a+\cdots+a^k}{a+a^2+\cdots+a^{k-1}}\geqslant\frac{k+1}{k-1}\,.$$

Budući da je $a>0$, relaciji (2) može se dati oblik

$$(3)\qquad 1+a+\cdots+a^k\geqslant\frac{k+1}{k-1}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1})\,.$$

Ako važi relacija (3), tada je

$$1+a+\cdots+a^k+a^{k+1}\geqslant\frac{k+1}{k-1}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1})+a^{k+1}\,.$$

Utvrdimo li da je

$$(4)\qquad \frac{k+1}{k-1}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1})+a^{k+1}\geqslant\frac{k+2}{k}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1}+a^k)\,,$$

tada smo dokazali da nejednakost (1) važi za $n=k+1$, ako važi za $n=k$.

Pretpostavimo da je tačno suprotno, odnosno da je

$$(5)\qquad \frac{k+1}{k-1}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1})+a^{k+1}<\frac{k+2}{k}\,(a+a^2+\cdots+a^{k-1}+a^k)\,.$$

Tada bi bilo

$$2(a+a^2+\cdots+a^{k-1}+a^k)+(k^2+k)\,a^k(a-1)<0,$$

što je nemogućno, jer je izraz na levoj strani poslednje relacije uvek pozitivan za $a>1$.

Prema tome, relacija (4) je tačna za $a\geqslant 1$.

Ako se stavi $a=1/b$ $(b>0)$, tada izraz na levoj strani nejednakosti (1) postaje

$$f(b)\equiv\frac{1+b+b^2+\cdots+b^n}{b+b^2+b^3+\cdots+b^{n-1}}.$$

Napred smo dokazali relaciju

$$f(b)\geqslant(n+1)/(n-1)\quad \text{za}\quad n>1\quad \text{i}\quad b\geqslant 1.$$

Odavde sleduje da relacija (1) važi za svaki prirodan broj $n\,(>1)$ i za ma kakav realan broj $a\,(>0)$.

Metodom matematičke indukcije dokazali smo, dakle, nejednakost (1).

29. Metodom matematičke indukcije dokazati da je poslednja cifra broja 2^{2^n} (n prirodan broj $\geqslant 2$) uvek 6.

Rešenje. Pretpostavimo da je

$$2^{2^n}=N\qquad (N \text{ broj čija je poslednja cifra } 6).$$

Ako se obe strane ove nejednakosti dignu na kvadrat, dobija se

$$(2^{2^n})^2=N^2,\ \text{odnosno}\ 2^{2^{n+1}}=N^2.$$

Kako se broj N^2 završava cifrom 6, ako je to slučaj sa brojem N, znači da se broj $2^{2^{n+1}}$ završava sa 6 ako takvu osobinu ima broj 2^{2^n}. Budući da, povrh toga, broj 2^{2^n} ima ovu osobinu za $n=2$, zaključuje se da je krajnja cifra broja

$$2^{2^n}\quad (n\geqslant 2)$$

uvek 6.

30. Dokazati da je broj

$$3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4\qquad (n \text{ prirodan broj})$$

deljiv sa 9.

Rešenje. Za $n=1$ ovaj broj deljiv je sa 9. Pretpostavimo da je dati broj deljiv sa 9 za neko n, tj. da je

$$3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4\equiv 9N\qquad (N \text{ prirodan broj}).$$

Na osnovu ove hipoteze biće

$$3\cdot 4^{n+2}+10^n-4\equiv 36N+12+6\cdot 10^{n-1}.$$

Broj $10^{n-1}+2$ deljiv je sa 3 ako je n proizvoljan prirodan broj. Za $n=1$ ovo tvrđenje je tačno. Učinimo li hipotezu da je broj $10^{n-1}+2$ deljiv sa 3 za neko n i obrazujemo li 10^n+2, tj. $10\cdot 10^{n-1}+2$, tj. $10(10^{n-1}+2)-18$, zaključujemo da je broj $10^{n-1}+2$ deljiv sa 3 za svaki prirodan broj.

Budući da je broj

$$36N+6(10^{n-1}+2)$$

deljiv sa 9 ako je to slučaj sa brojem

$$3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$$

i da je povrh toga poslednji broj deljiv sa 9 za $n=1$, zaključujemo da je broj $3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4$ deljiv sa 9 za svaki prirodan broj n.

31. Dokazati nejednakost

(1) $$n^{n+1} > (n+1)^n \quad \{n(>2) \text{ prirodan broj}\}.$$

Dokaz. Za $n=3$ relacija (1) je tačna. Pretpostavimo da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj. da je

(2) $$k^{k+1} > (k+1)^k \quad (k>2).$$

Budući da je

$$(k+1)^2 > k(k+2), \quad \text{tj.} \quad \frac{k+1}{k} > \frac{k+2}{k+1},$$

biće

(3) $$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1} > \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}.$$

Iz (2) i (3), posle množenja, dobija se

(4) $$(k+1)^{k+2} > (k+2)^{k+1}.$$

Ovim smo dokazali da je relacija $f(k+1) > g(k+1)$ tačna, ako je to slučaj sa relacijom $f(k) > g(k)$, gde je

$$f(k) = k^{k+1}, \quad g(k) = (k+1)^k.$$

Prema tome, indukcijom smo dokazali tačnost relacije (1) za $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$.

32. Dokazati nejednakost

(1) $$\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) < \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \quad (0 < x_k < \pi;\ k=1, 2, \ldots;\ n>1);$$

Uputstvo. Upotrebiti metod matematičke indukcije. Najpre dokazati

$$\sin(x_1+x_2) < \sin x_1 + \sin x_2 \quad (0 < x_1 < \pi; \quad 0 < x_2 < \pi),$$

polazeći od identiteta

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2.$$

$$\therefore \quad |\sin(x_1+x_2)| < |\sin x_1| + |\sin x_2|.$$

S obzirom na to da je

$$0 < x_1 < \pi, \quad 0 < x_2 < \pi,$$

poslednja relacija se može napisati u obliku

$$\sin(x_1+x_2) < \sin x_1 + \sin x_2.$$

Dakle, relacija (1) je tačna za $n=2$.
Čitalac će završiti dokaz i naći i neki drugi metod dokazivanja.

33. Dokazati relaciju

(1) $$a + a^2 + \cdots + a^{2n} \leqslant n(a^{2n+1}+1) \quad (a>0,\ n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Za $n=1$ relacija (1) postaje

(2) $$a + a^2 \leqslant a^3 + 1 \quad (a>0), \quad \text{tj.} \quad a(a+1) \leqslant (a^2-a+1)(a+1),$$

što je tačno, jer je

$$a \leqslant (a-1)^2 + a \quad \text{za svako} \quad a>0.$$

To znači da (2) važi za $a>0$. Za $a=1$ imamo znak jednakosti.

Učinimo sada sledeću hipotezu: nejednakost (1) je u važnosti za proizvoljan prirodan broj $n=k$, naime

(3) $$a + a^2 + \cdots + a^{2k} \leqslant k(a^{2k+1}+1) \quad (a>0),$$

što ćemo kraće zabeležiti sa

(4) $$f(k)\leqslant g(k) \quad (a>0).$$

$$\therefore \quad f(k+1)\leqslant k(a^{2k+1}+1)+a^{2k+1}+a^{2k+2}.$$

Prema tome, ako je

(5) $$k(a^{2k+1}+1)+a^{2k+1}+a^{2k+2}\leqslant(k+1)(a^{2k+3}+1) \quad (a>0),$$

tada je

$$f(k+1)\leqslant g(k+1) \quad (a>0),$$

čim je (4) u važnosti.

Relacija (5) može se transformisati na ekvivalentnu relaciju

(6) $$(k+1)\,a^{2k+1}(1-a^2)\leqslant 1-(a^2)^{k+1} \quad (a>0).$$

Dokazaćemo da nejednakost (6) važi za $a>0$. Zaista, ako je $0<a\leqslant 1$, ona se svodi na oblik

(7) $$(k+1)\,a^{2k+1}\leqslant 1+a^2+\cdots+a^{2k}.$$

Za $0<a\leqslant 1$ imamo niz nejednakosti

$$a^{2k+1}\leqslant 1, \quad a^{2k+1}\leqslant a^2, \ldots, a^{2k+1}\leqslant a^{2k},$$

odakle sleduje nejednakost (7). Za $a=1$ relacija (7) postaje jednakost.

Ako je $a\geqslant 1$, tada (6), posle deljenja sa $1-a^2$, postaje

(8) $$(k+1)\,a^{2k+1}\geqslant 1+a^2+\cdots+a^{2k}.$$

Vodeći računa o uslovu $a\geqslant 1$, možemo pisati niz nejednakosti

$$a^{2k+1}\geqslant 1, \quad a^{2k+1}\geqslant a^2, \ldots, a^{2k+1}\geqslant a^{2k},$$

odakle sleduje (8).

Dakle, relacija (5) važi za svako $a>0$.

Ovim smo dokazali relaciju (1).

34. Dokazati nejednakost

(1) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{(3n+1)^{1/2}} \quad (n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Za $n=1$ relacija je u važnosti.

Pretpostavimo da ona važi za $n=k$, tj. da je

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\leqslant\frac{1}{(3k+1)^{1/2}} \quad \text{ili kraće } f(k)\leqslant g(k).$$

Pomnožimo levu i desnu stranu poslednje relacije pozitivnim brojem $(2k+1)/(2k+2)$. Tada dobijamo

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{(3k+1)^{1/2}}\,\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Ako dokažemo da je

(2) $$\frac{1}{(3k+1)^{1/2}}\,\frac{2k+1}{2k+2}\leqslant\frac{1}{[3(k+1)+1]^{1/2}},$$

tada iz hipoteze $f(k)\leqslant g(k)$ sleduje $f(k+1)\leqslant g(k+1)$.

Pretpostavimo da relacija (2) nije istinita, tj. da je

$$(2k+1)/\{(3k+1)^{1/2}(2k+2)\}>1/[3(k+1)+1]^{1/2}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{3k+1}\cdot\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2}>\frac{1}{3k+4}.$$

$$\therefore \quad 12k^3+28k^2+19k+4>12k^3+28k^2+20k+4.$$

$$\therefore \quad 19k>20k,$$

što nije tačno kad je $k\geqslant 0$.

Prema tome relacija (2) je istinita. Ovim smo dokazali nejednakost (1).

35. Matematičkom indukcijom dokazati nejednakost

$$(1) \qquad n\log n-n<\log(n!)<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

$$\{n\,(>1) \text{ prirodan broj}\}.$$

Dokaz. Uvedimo oznake:

$$u(n)\equiv n\log n-n, \qquad v(n)\equiv\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1.$$

Posmatrajmo najpre nejednakost

$$(2) \qquad u(n)<\log(n!).$$

Za $n=1$ ona je istinita. Pretpostavimo da nejednakost (2) važi za proizvoljan prirodan broj $n=k$, naime:

$$(3) \qquad u(k)<\log(k!);$$

tada je

$$u(k)+\log(k+1)<\log(k!)+\log(k+1)=\log\{(k+1)!\}.$$

Ako dokažemo

$$(4) \qquad (k+1)\log(k+1)-(k+1)<k\log k-k+\log(k+1),$$

tada smo utvrdili da je

$$u(k+1)<\log\{(k+1)!\}$$

i na taj način dokazali važenje relacije (2) za svaki prirodan broj n.

Pretpostavimo da je tačno suprotno, tj. da je

$$(5) \qquad (k+1)\log(k+1)-(k+1)\geqslant k\log k-k+\log(k+1).$$

$$\therefore \quad k\log\frac{k+1}{k}\geqslant 1. \qquad \therefore \quad \log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geqslant 1,$$

odakle sleduje

$$(6) \qquad \left(1+\frac{1}{k}\right)^k\geqslant e.$$

Prema tome, polazeći od nejednakosti (5), napisali smo niz nejednakosti i najzad došli do nejednakosti (6) koja nije istinita. Ovim je dokazana nejednakost (4), kao i nejednakost (2).

Uzmimo sada nejednakost

$$(7) \qquad \log(n!)<\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1\equiv v(n).$$

Za $n=2$ dobijamo $\log(2!)<\frac{5}{2}\log 2-1$, jer je $\log 2\approx 0{,}69$ (obe decimale su tačne).

Učinimo sada hipotezu da je relacija (7) istinita za $n=k$, naime

(8) $$\log(k!)<v(k).$$

Ako ova nejednakost važi, isti će slučaj biti i sa nejednakosti

$$\log(k!)+\log(k+1)<\left(k+\frac{1}{2}\right)\log k-k+1+\log(k+1).$$

Dokažemo li da je

(9) $$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log k-k+1+\log(k+1)<\left(k+\frac{3}{2}\right)\log(k+1)-(k+1)+1,$$

tada smo dokazali važenje nejednakosti (7).

Relacija (9) se može posmatrati u obliku

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\frac{k}{k+1}+1<0,$$

ili u obliku

(10) $$\log\frac{k}{k+1}+\frac{2}{2k+1}<0, \quad \text{jer je } k>2.$$

Uočimo sad funkciju

$$f(x)\equiv\log\frac{x}{x+1}+\frac{2}{2x+1} \qquad (x>0).$$

$$\therefore \quad f'(x)\equiv\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2}.$$

Za $x>0$, izvod $f'(x)$ je stalno pozitivan, pa je $f(x)$ za $x>0$ rastuća funkcija. Kad $x\to+\infty$, funkcija $f(x)\to 0$. Kad $x\to 0+$, tada funkcija $f(x)\to-\infty$.

Prema tome, $f(x)<0$ za svako $x>0$.

Ovim smo dokazali ne samo važenje relacije (10) već i relacije (1).

Primedba. Ostavlja se čitaocu da pokaže važenje relacije

$$\log(n!)>\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{12n} \qquad \{n\,(\geqslant 1) \text{ prirodan broj}\}.$$

36. Ako je n prirodan broj, tada je

(1) $$\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right|\leqslant n \qquad (x\neq k\pi, \quad k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

Rešenje. I. Za $n=1$ relacija je tačna. Pretpostavimo da za $n=k$ važi nejednakost (1), naime

(1) $$\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right|\leqslant k.$$

Posmatrajmo količnik

$$\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}, \quad \text{tj.} \quad \frac{\sin kx}{\sin x}\cos x+\cos kx.$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right|=\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\cos x+\cos kx\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin kx}{\sin x}\right||\cos x|+|\cos kx|.$$

Vodeći računa o pretpostavci (2), iz poslednje relacije sleduje

$$\left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\right| \leqslant k+1.$$

Ovim je nejednakost (1) dokazana.

II. Nejednakost (1) može se takođe dokazati, polazeći od identiteta

$$\frac{\sin 2px}{\sin x} \equiv 2\{\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2p-1)\} \qquad (p \geqslant 1);$$

$$\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x} \equiv 1 + 2\{\cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2px\} \qquad (p \geqslant 1).$$

$$\therefore \quad \left|\frac{\sin 2px}{\sin x}\right| \leqslant 2p, \qquad \left|\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}\right| \leqslant 2p+1.$$

37. Za $n=0, 1, 2, \ldots$ važi $2^n > n$.

Dokaz. Za $n=0$ tvrđenje je tačno. Pretpostavimo da je ovo tvrđenje tačno za $n=k$, tj. da je

(1) $$2^k > k \qquad \{k\,(\geqslant 0) \text{ ceo broj}\}.$$

Budući da je

(2) $$2^k \geqslant 1 \quad \text{za} \quad k \geqslant 0,$$

iz (1) i (2) izlazi

$$2 \cdot 2^k > k+1, \quad \text{tj.} \quad 2^{k+1} > k+1.$$

Prema tome, iz pretpostavke da je nejednakost $2^n > n$ istinita za $n=k$ izveli smo zaključak da je ona istinita za $n=k+1$. Kako je ta nejednakost istinita za $n=0$, prema dokazanom, ona je istinita za $n=1$, a na osnovu toga za $n=2$, itd. Dakle, data nejednakost važi za $n=0, 1, 2, 3, \ldots$

38. Dokazati nejednakosti:

1° $\quad 2^n > n^2 \quad (n=5, 6, 7, \ldots);$

2° $\quad 2^n > n^3 \quad (n=10, 11, 12, \ldots);$

3° $\quad 3^n > n^4 \quad (n=8, 9, 10, \ldots).$

Dokaz. 3° Za $n=8$, zaista je $3^8 > 8^4$. Pretpostavimo da je istinita nejednakost

(1) $$3^k > k^4 \qquad (k \geqslant 8).$$

Ako je istinita i nejednakost

(2) $$3 > (k+1)^4/k^4 \qquad (k \geqslant 8).$$

tada, množenjem, iz nejednakosti (1) i (2) izlazi

(3) $$3^{k+1} > (k+1)^4 \qquad (k \geqslant 8).$$

Istinitost nejednakosti (2) dokazaćemo posmatranjem izraza

$$\frac{(k+1)^4}{k^4} \equiv \left(1+\frac{1}{k}\right)^4 \text{ koji je } < 3,$$

jer je $(4/k)+(6/k^2)+(4/k^3)$ svakako manje od 1 za $k=8, 9, \ldots$
Čitalac će završiti dokaz.

Primedba. Pri dokazivanju nejednakosti 1° i 2°, treba prethodno dokazati nejednakosti

$$2 > (n+1)^2/n^2 \qquad (n=5, 6, \ldots);$$

$$2 > (n+1)^3/n^3 \qquad (n=10, 11, \ldots).$$

39. 1° Dokazati *Bernoulli*-evu teoremu:

Ako jedna aritmetička i jedna geometriska progresija imaju jednaka prva dva člana a_1 i a_2 $(a_1 \neq a_2,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0)$, tada je svaki sledeći član aritmetičke progresije manji od odgovarajućeg člana geometriske progresije.

2° Dokazati takođe ovu teoremu:

Ako jedna aritmetička i jedna geometriska progresija imaju jednaka prva dva člana: a_1 i a_2 $(a_1 \neq a_2,\ a_1 < 0,\ a_2 < 0)$, tada je svaki sledeći član aritmetičke progresije veći od odgovarajućeg člana geometriske progresije.

3° Iskazati napred navedene teoreme u obliku jedne jedine teoreme.

Dokaz. I.* 1° Posmatrajmo progresije:

$$a_1,\ a_2,\ a_1 + 2(a_2 - a_1),\ \ldots,\ a_1 + n(a_2 - a_1);$$

$$a_1,\ a_2,\ a_1 \cdot (a_2/a_1)^2,\ \ldots,\ a_1 \cdot (a_2/a_1)^n.$$

Razlika trećih članova iznosi

$$a_1 (a_2/a_1)^2 - a_1 - 2(a_2 - a_1),$$

tj. posle sređivanja

$$(a_2 - a_1)^2/a_1,$$

odakle se zaključuje da je teorema u važnosti za $n = 2$.

Pretpostavimo sada da je ova teorema tačna za $n = k\ (\geqslant 2)$, tj.

$$a_1 (a_2/a_1)^k > a_1 + k(a_2 - a_1). \tag{1}$$

Uz učinjene pretpostavke u važnosti je relacija

$$(a_2/a_1)^k (a_2 - a_1) > a_2 - a_1. \tag{2}$$

Zaista, ako je $a_2 > a_1$, tada je

$$(a_2/a_1)^k > 1 \quad \text{i} \quad a_2 - a_1 > 0,$$

pa je gornja relacija tačna.

Ako je $a_2 < a_1$, tada je

$$(a_2/a_1)^k < 1 \quad \text{i} \quad a_2 - a_1 < 0,$$

na osnovu čega se zaključuje da je relacija (2) opet u važnosti.

Relacija (2) je bitna za naš dokaz.

Iz relacija (1) i (2), posle sabiranja, dobija se:

$$a_2 (a_2/a_1)^k > a_1 + (k+1)(a_2 - a_1),$$

odnosno

$$a_1 \cdot (a_2/a_1) \cdot (a_2/a_1)^k > a_1 + (k+1)(a_2 - a_1)$$

i najzad

$$a_1 \cdot (a_2/a_1)^{k+1} > a_1 + (k+1)(a_2 - a_1).$$

Ova relacija kazuje da je teorema tačna za $n = k+1$, ako je tačna za $n = k$.

Dakle, zaključkom od k na $k+1$ dokazali smo *Bernoulli*-evu teoremu.

2° I ova se teorema može dokazati zaključkom od k na $k+1$.

U ovom slučaju umesto relacija (1) i (2) imaćemo relacije:

$$a_1 (a_2/a_1)^k < a_1 + k(a_2 - a_1) \quad (k \geqslant 2) \tag{1'}$$

$$(a_2/a_1)^k (a_2 - a_1) < a_2 - a_1. \tag{2'}$$

Pokazaćemo da je relacija (2') tačna uz naše pretpostavke o parametrima a_1, a_2 i k, dok dokaz same teoreme nećemo iznositi.

---

* Redigovano prema članku:

O. D. Mitrinović: O jednoj Bernoulli-evoj teoremi (Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija, knj. V, 1954, str. 30—33).

Ako je $a_1 > a_2$, tada je $(a_2/a_1)^k > 1$ i $a_2 - a_1 < 0$, na osnovu čega se zaključuje da je relacija (2′) tačna.

Ako je $a_1 < a_2$, tada je

$$(a_2/a_1)^k < 1, \qquad a_2 - a_1 > 0,$$

čime je opet potvrđena tačnost relacije (2′).

Napomena. Ako su obe progresije rastuće i svi članovi pozitivni, tada se *Bernoulli*-eva teorema dokazuje i na sledeći način:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1)(n-1) \\ &= a_1 \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right)(n-1) \right] \\ &= a_1 \, [1 + (q-1)(n-1)] \qquad (q = a_2/a_1). \end{aligned}$$

Dalje imamo $(n > 2)$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \, [1 + (q-1) \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n-1}] \\ &< a_1 \, [1 + (q-1)(q^{n-2} + q^{n-3} + \cdots + 1)], \end{aligned}$$

jer je

$$q^{n-2} > 1, \; q^{n-3} > 1, \ldots, \; q > 1.$$

Stoga je

$$a_n < a_1 \left[1 + (q-1) \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right] = a_1 q^{n-1}.$$

$$\therefore \quad a_n < b_n \qquad (n > 2).$$

II. *D. Đoković* dao je sledeći dokaz *Bernoulli*-eve teoreme.

Prema hipotezi je $a_1 \neq a_2$, $a_1 a_2 > 0$. Odavde sleduje

$$(1) \qquad \frac{a_2}{a_1} > 0, \qquad \frac{a_2 - a_1}{a_1} > -1;$$

$$(2) \qquad \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{a_2 - a_1}{a_1} \right)^{n-1}.$$

Budući da je $(a_2 - a_1)/a_1 > -1$, na izraz (2) može se primeniti *Bernoulli*-eva nejednakost, pa relacija (2) postaje

$$(3) \qquad \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n-1} = \left(1 + \frac{a_2 - a_1}{a_1} \right)^{n-1} > 1 + (n-1) \frac{a_2 - a_1}{a_1} \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

Posle množenja sa a_1 nejednakost (3) postaje

$$\begin{aligned} a_1 (a_2/a_1)^{n-1} &> a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) \qquad (a_1 > 0), \\ a_1 (a_2/a_1)^{n-1} &< a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) \qquad (a_1 < 0). \end{aligned}$$

Poslednje dve nejednakosti izražavaju respektivno *Bernoulli*-evu teoremu 1° i 2°.

40. Parovi brojeva (a_n, b_n) obrazuju se po zakonu

$$(1) \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dokazati formule:

$$(2) \qquad a_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 - \frac{1}{4^n}\right), \qquad b_n = a + \frac{2}{3}(b-a)\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4^n}\right)$$

$$(a_0 = a, \quad b_0 = b).$$

Rešenje. Za $n=1$ formule (2) su tačne. Pretpostavimo da formule (2) važe za indeks $n-1$, tj. da je

$$(3) \qquad a_{n-1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right), \qquad b_{n-1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}\right).$$

Na osnovu (1) i (3) dobija se

$$(4) \qquad a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Pođimo opet od (1), zatim od pretpostavke (3) za b_{n-1} i formule (4). Tada dobijamo

$$b_n=a+\frac{1}{3}(b-a)\left(2+\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}}-\frac{1}{4^n}\right).$$

$$\therefore \quad b_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4^n}\right).$$

Ovim je dokazano da formule za a_n i b_n važe za svako n iz skupa prirodnih brojeva.

41. Dokazati formulu

$$(1) \qquad \frac{d^k}{dx^k}(x^k \log x)=k!\left[\log x+\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}\right] \qquad (x>0).$$

Rešenje. Induktivna hipoteza: Formula (1) je tačna za prirodan broj k.

Formirajmo izraz

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}\log x)=\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{d}{dx}(x^{k+1}\log x)\right]$$

$$=(k+1)\frac{d^k}{dx^k}(x^k \log x)+k!$$

Prema učinjenoj hipotezi poslednja formula postaje

$$(2) \qquad \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}\log x)=(k+1)\left[k!\left(\log x+\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}\right)\right]+k!$$

$$=k!\left[(k+1)\left(\log x+\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}\right)+1\right]$$

$$=(k+1)!\left[\log x+\sum_{r=1}^{k+1}\frac{1}{r}\right].$$

Dakle, ako je tačna formula (1), tačna je i formula (2).

Kako je, povrh toga, formula (1) tačna za $k=1$, zaključuje se da je formula (1) tačna za svaki prirodan broj.

Primedba. Formula (1) se može dokazati i primenom *Leibniz*-ove formule.

42. Potpunom indukcijom dokazati da se

$$\cos nx \quad (n \text{ prirodan broj})$$

može izraziti kao polinom stepena n po $\cos x$.

Rešenje. 1° Tvrđenje je tačno za $n=1$, $n=2$ i $n=3$, jer je:

$$\cos x = \cos x,$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x-1,$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x-3\cos x.$$

2° Između $\cos(k+1)x$, $\cos kx$ i $\cos(k-1)x$ postoji sledeća relacija

$$\cos(k+1)x \equiv 2\cos kx \cos x - \cos(k-1)x. \tag{1}$$

Pretpostavimo da se $\cos(k-1)x$ i $\cos kx$ mogu izraziti kao polinomi po $\cos x$ respektivno stepena $k-1$ i k. Polazeći od relacije (1), zaključuje se da se $\cos(k+1)x$ može izraziti kao polinom po $\cos x$ stepena $k+1$.

3° Budući da je navedeno tvrđenje istinito za $n=1$ i $n=2$, ono je, prema dokazanom pod 1°, istinito i za $n=3$. Budući da je istinito za $n=2$ i $n=3$, tvrđenje je istinito za $n=4$, itd. Prema tome, $\cos nx$ može se izraziti kao polinom po $\cos x$ stepena n za svaki prirodni broj n.

Primedba. Na osnovu dokazane osobine i identiteta

$$\sin(k+1)x \equiv 2\cos kx \sin x + \sin(k-1)x$$

dokazati da se

$$\sin nx \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

može izraziti u obliku

$$\sin x\, P(\cos x) \qquad \{P(t) \text{ polinom po } t \text{ stepena } k-1\}.$$

43. Ako je $n=1, 2, \ldots$, proveriti da li važi relacija

$$\frac{d^n}{dx^n}\operatorname{arc\,tg} x \equiv (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0).$$

44. Pomoću indukcije ili kojim drugim načinom dokazati formulu

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \sin x) \equiv 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Rešenje. Pretpostavimo da je formula istinita za $n=k$, tj.

$$D^k(e^x \sin x) \equiv 2^{k/2} e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right) \qquad (D^k \equiv d^k/dx^k,\ D^0 \equiv 1). \tag{2}$$

Obrazujmo izraz

$$D^{k+1}(e^x \sin x) \equiv D\,[D^k(e^x \sin x)].$$

Vodeći računa o induktivnoj hipotezi (2), dobijamo

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^x \sin x) &\equiv 2^{k/2} D\left[e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right] \\ &\equiv 2^{k/2} e^x \left[\sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right] \\ &\equiv 2^{(k+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{k+1}{4}\pi\right). \end{aligned}$$

Iz ovoga i budući da formula (1) važi za $n=0$, sleduje da je formula (1) istinita za $n=0, 1, 2, \ldots$.

45. Data je funkcija

$$f(x) \equiv x^{n-1}\exp(1/x) \qquad (n \text{ prirodan broj; } x \neq 0).$$

Dokazati prelazom od $n-1$ na n da je tačna formula

$$D^n f(x) \equiv (-1)^n x^{-n-1}\exp(1/x). \tag{1}$$

Rešenje. Pretpostavimo da je zakon (1), po kome se dobija izvod funkcije $f(x)$, tačan za izvode reda $n-1$, tj. da važi relacija

$$D^{n-1}[x^{n-2}\exp(1/x)] = (-1)^{n-1} x^{-n}\exp(1/x). \tag{2}$$

Dalje možemo pisati

$$D^n[x^{n-1}\exp(1/x)] \equiv D^n[x\cdot x^{n-2}\exp(1/x)].$$

Primenom *Leibniz*-ove formule dobijamo

$$xD^n[x^{n-2}\exp(1/x)]+nD^{n-1}[x^{n-2}\exp(1/x)].$$

Vodeći računa o induktivnoj pretpostavci (2), biće

$$xD[(-1)^{n-1}x^{-n}\exp(1/x)]+n(-1)^{n-1}x^{-n}\exp(1/x)\equiv(-1)^n x^{-n-1}\exp(1/x).$$

Formula (1) je tačna za $n=1$. Prema tome, ona je tačna kada je n proizvoljan prirodan broj.

Primedba. Formula (1) može se dokazati i na sledeći način. Formirajmo

$$\begin{aligned}D^{k+1}(x^k e^{1/x}) &\equiv D^k D(x^k e^{1/x}) \equiv D^k(k x^{k-1}e^{1/x}-x^{k-2}e^{1/x})\\ &\equiv kD^k(x^{k-1}e^{1/x})-D\,D^{k-1}(x^{k-2}e^{1/x}).\end{aligned}$$

Sada treba pretpostaviti da (1) važi za $n=k-1$ i $n=k$, pa se dobija

$$D^{k+1}(x^k e^{1/x})\equiv(-1)^{k+1}x^{-k-2}e^{1/x}.$$

Čitalac će završiti dokaz.

Napomenimo da je

$$D^k f(x)\equiv(d^k/dx^k)f(x) \qquad (k=1,2,3,\ldots);$$
$$D^0 f(x)\equiv f(x).$$

46. Posmatrajmo funkciju $u=f(z)$, gde je z funkcija promenljivih x i y, definisana relacijom $z=x+yg(z)$. Dokazati *Lagrange*-ovu formulu

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[g(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}. \tag{1}$$

Rešenje. Pokazaćemo da *Lagrange*-ova formula važi za $n=1$, tj. da je

$$\frac{\partial u}{\partial y}=g(z)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2}$$

Najpre imamo

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial y},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=g(z)+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial y}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=1+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{4}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f'(z)g(z)}{1-yg'(z)},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f'(z)}{1-yg'(z)}.$$

Iz poslednjih dveju relacija neposredno se dobija relacija (2).

Pretpostavimo sada da je relacija (1) u važnosti za $n=k$, tj. da je

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{[g(z)]^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\}. \tag{5}$$

Posmatrajmo sada sledeći parcijalni izvod koji se određuje iz (5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}} &\equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{[g(z)]^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\right)\\ &\equiv \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left\{[g(z)]^k\frac{\partial u}{\partial x}\right\}\right)\\ &\equiv \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(k[g(z)]^{k-1}g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+[g(z)]^k\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right).\end{aligned}$$

Ako budemo ustanovili da je

$$(6)\qquad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left\{[g(z)]^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \equiv \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left(k\,[g(z)]^{k-1}g'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + [g(z)]^k\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right),$$

tada smo matematičkom indukcijom dokazali važenje obrasca (1) i to za svako n iz skupa prirodnih brojeva.

Izraz na levoj strani u poslednjoj relaciji može se pisati u obliku

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{(k+1)\,[g(z)]^k g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + [g(z)]^{k+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}.$$

Prema tome, identitet (6) je u važnosti ako je

$$(7)\qquad kg'(z)\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + g(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - (k+1)\,g(z)\,g'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - [g(z)]^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv 0.$$

Ako se $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 u/\partial x^2$ zamene odgovarajućim izrazima, utvrđuje se da odista važi identitet (7).

Prema tome, pokazali smo da je formula (1) u važnosti za $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Lagrange-ova formula je važna u teoriji *Lagrange*-ovog reda koji se primenjuje, između ostalog, na *Kepler*-ovu jednačinu.

47. Ako je n prirodan broj i $r = \sqrt{x^2+y^2}$, tada je izraz

$$\frac{\partial^{n+1}\log r}{\partial x^n\,\partial y}\,dx - \frac{\partial^{n+1}\log r}{\partial x^{n+1}}\,dy$$

totalan diferencijal jedne funkcije $u(x, y)$.

Rešenje. Za $n=0$ tvrđenje je istinito, jer je zaista

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\log r\right) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\log r\right).$$

Pretpostavimo da je navedena osobina istinita za $n=k$ (k nula ili ma kakav prirodan broj), naime da važi identitet

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k+1}\log r}{\partial x^k\,\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k+1}\log r}{\partial x^{k+1}}\right) = 0.$$

Posmatrajmo sada izraz

$$\frac{\partial^{k+2}\log r}{\partial x^{k+1}\,\partial y}\,dx - \frac{\partial^{k+2}\log r}{\partial x^{k+2}}\,dy$$

i ispitajmo da li je on totalni diferencijal. U tu svrhu, formirajmo izraz

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k+2}\log r}{\partial x^{k+1}\,\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k+2}\log r}{\partial x^{k+2}}\right),$$

odnosno

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{k+1}\log r}{\partial x^k\,\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k+1}\log r}{\partial x^{k+1}}\right)\right\}.$$

Ako je navedena osobina istinita za $n=k$, ona je istinita i za $n=k+1$, jer (1) povlači kao posledicu da se izraz (2) identički anulira.

Budući da je osobina o kojoj je reč istinita takođe za $n=0$, ona je istinita za ma kakav prirodan broj n.

48. Za *beta*-funkciju

$$(1) \qquad \mathrm{B}(p, q) \equiv \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (p>0,\ q>0)$$

važe identiteti:

$$(2) \qquad \mathrm{B}(p, q) \equiv \mathrm{B}(p+1, q)+\mathrm{B}(p, q+1),$$

$$(3) \qquad \mathrm{B}(p, q) \equiv \mathrm{B}(q, p).$$

Pomoću potpune indukcije dokazati formulu

$$(4) \qquad \mathrm{B}(p, q) \equiv \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} \qquad (p, q \text{ prirodni brojevi}).$$

Rešenje. Za $p=m$, gde je m proizvoljan prirodan broj, i za $q=1$, iz relacija (1) i (4) sleduje respektivno:

$$\mathrm{B}(m, 1) \equiv \int_0^1 x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m}; \qquad \mathrm{B}(m, 1) \equiv \frac{(m-1)!}{m!} \equiv \frac{1}{m}.$$

Na osnovu poslednjih relacija zaključuje se da je relacija (4) istinita za svaki prirodan broj p, ako je $q=1$.

Pretpostavimo sada da za svaki prirodan broj p i za $q=n$, gde je n proizvoljan ali određen prirodan broj, važi relacija (4), tj.

$$(5) \qquad \mathrm{B}(p, n) \equiv \frac{(p-1)!\,(n-1)!}{(p+n-1)!}.$$

Iz relacije (2) sleduje

$$\mathrm{B}(p, n+1) \equiv \mathrm{B}(p, n) - \mathrm{B}(p+1, n).$$

Rešenje. Formula (1) je tačna za $n=1$, jer je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2},$$

što sleduje iz formule

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + \text{const.}$$

Pretpostavimo sada da je formula (1) tačna za $n=k-1$, tj. da je

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k} = \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \pi.$$

Budući da je

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{1}{2k} \frac{x}{(1+x^2)^k} + \frac{2k-1}{2k} \int \frac{dx}{(1+x^2)^k},$$

dobijamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{2k-1}{2k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k},$$

na osnovu (2),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{2k-1}{2k} \frac{(2k-3)!!}{(2k-2)!!} \pi = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi.$$

Ovim je formula (1) dokazana.

50. Matematičkom indukcijom dokazati formulu

$$I_n \equiv \int_0^{2a} x^n (2ax - x^2)^{1/2} dx = \pi a^{n+2} (2n+1)!/[2^n n! (n+2)!]$$

(n nula ili prirodan broj; $a>0$).

Rešenje. Za $n=0$ formula je tačna, jer je zaista

$$I_0 = \int_0^{2a} (2ax - x^2)^{1/2} dx = \pi a^2/2.$$

Pretpostavimo dalje da data formula važi za $n=k$, tj. da je

$$\int_0^{2a} x^k (2ax - x^2)^{1/2} dx = \pi a^{k+2} (2k+1)!/[2^k k! (k+2)!].$$

Posmatrajmo zatim integral

$$I_{k+1} = \int_0^{2a} x^{k+1} (2ax - x^2)^{1/2} dx = \int_0^{2a} x^{k+3/2} (2a - x)^{1/2} dx.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$I_{k+1} = -\frac{2}{3} x^{k+3/2} (2a-x)^{3/2} \Big|_0^{2a} + \frac{2k+3}{3} \int_0^{2a} x^{k+1/2} (2a-x)^{3/2}\, dx.$$

$$\therefore \quad I_{k+1} = \frac{2k+3}{3} \int_0^{2a} x^k \cdot x^{1/2} (2a-x)(2a-x)^{1/2}\, dx$$

$$= 2a \cdot \frac{2k+3}{3} \int_0^{2a} x^k (2ax-x^2)^{1/2}\, dx - \frac{2k+3}{3} \int_0^{2a} x^{k+1} (2ax-x^2)^{1/2}\, dx$$

$$= 2a \cdot \frac{2k+3}{3} I_k - \frac{2k+3}{3} I_{k+1}.$$

$$\therefore \quad I_{k+1} = a \frac{2k+3}{k+3} I_k = \pi a^{k+3} \frac{2k+3}{k+3} \cdot \frac{2k+2}{2k+2} \cdot \frac{(2k+1)!}{2^k k!\,(k+2)!}.$$

$$\therefore \quad I_{k+1} = \pi a^{k+3} (2k+3)!/\{2^{k+1} (k+1)!\,(k+3)!\}.$$

Prema tome, ako je data formula istinita za $n=k$, ona je istinita za $n=k+1$. Budući da je formula u važnosti za $n=0$, izlazi da važi i za $n=1, 2, 3, \ldots$

51. Numeričke vrednosti polinoma $P(x) = x^2+x+41$ za $x=0, 1, 2, \ldots, 39$ su prosti brojevi *(prim-brojevi)*. Da li se na osnovu toga može zaključiti da su: $P(40)$, $P(41), \ldots$ prosti brojevi?

Odgovor. Ne. $P(40) = 41^2$ nije prost broj.

52. Svi faktori izraza

$$x^n - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, 104)$$

jesu polinomi čiji koeficijenti pripadaju skupu celih brojeva koji po apsolutnoj vrednosti ne premašuju 1.

Primer. $x^6-1 = (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

Da li se na osnovu ove činjenice može zaključiti da x^n-1 ima navedenu osobinu za proizvoljno n?

Odgovor. Ne. Sovjetski matematičar *B. Иванов* (*Успехи математических наук*, выпуск IX, 1941, стр. 313—317) pokazao je da je jedan od faktora polinoma $x^{105}-1$ sledeći polinom

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}$$
$$+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}-x^9-x^8-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1.$$

1° U vezi sa ovim navedimo slučaj koji je zabeležio poljski matematičar *W. Sierpiński*. Ako je n prirodan broj, tada

$$991\,n^2+1 \neq \text{ kvadrat celog broja za } n<N,$$

$$991\,n^2+1 = (379\ 516\ 400\ 906\ 811\ 930\ 638\ 014\ 896\ 080)^2 \text{ za } n=N$$

$$(N = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767).$$

Kao što vidimo, tvrđenje da broj $991\,n^2+1$ nije kvadrat celog broja istinito je u veoma velikom broju slučajeva, tj. za sve prirodne brojeve od 1 do $N-1$, ali to tvrđenje nije istinito za $n=N$.

2° *Goldbach*-ov problem mogao bi se tako isto navesti kao interesantan primer, gde je sakupljen ogroman eksperimentalni materijal, ali sâm problem još nije rešen.

Godine 1742 *Goldbach* je u jednom pismu, upućenom *Euler*-u, iskazao hipoteze:

1. Svaki paran broj ($\geqslant 6$) zbir je od dva neparna prim-broja;
2. Svaki neparan broj ($\geqslant 9$) zbir je od tri neparna prim-broja.

Euler, matematičar velike intuicije, odgovorio je *Goldbach*-u da je uveren u tačnost navedenih stavova, ali da nije mogao naći polaznu tačku da bi ih dokazao.

Euler je dve navedene hipoteze sveo na jednu. Odista, neka je N jedan neparan broj. Obrazujmo razliku $N-p$, gde je p jedan neparan prim-broj $< N$. Razlika $N-p$ je paran broj. Prema tome, ako je istinita prva *Goldbach*-ova hipoteza, isti će slučaj biti i sa drugom.

Goldbach-ove hipoteze eksperimentalno su proverene do 100 000 (prema knjizi: *O. Ore: Number theory and its history*, 1948, New York, p. 84), odnosno do 9 000 000 (prema knjizi: *Б. В. Гнеденко: Очерки по истории математики в России*, 1946, Moskva, str. 189).

Eksperimentalni podaci nisu dali nijedan kontra-primer *Goldbach*-ovim hipotezama, već su ih naprotiv potvrđivali.

Primeri:

$$6=3+3 \qquad 14=3+11$$

$$8=3+5 \qquad 16=3+13$$

$$10=3+7 \qquad 18=5+13$$

$$12=5+7 \qquad 20=3+17$$

$$48=5+43=7+41=11+37=17+31=19+29$$

$$9=3+3+3 \qquad 15=3+5+7$$

$$11=3+3+5 \qquad 17=3+7+7$$

$$13=3+3+7 \qquad 19=3+5+11.$$

Posle mnogobrojnih proučavanja, sovjetski matematičar *Виноградов* dokazao je, 1937 godine, da se svaki *dovoljno veliki* neparan broj može pretstaviti kao zbir tri prim-broja. Međutim, ostaje otvoreno pitanje koliki je taj dovoljno veliki neparan broj. Ostaje i dalje otvoreno pitanje teži *Goldbach*-ov problem, tj. hipoteza prema kojoj se svaki paran broj ($\geqslant 6$) može pretstaviti kao zbir dva neparna prim-broja. Takvo je sadašnje stanje *Goldbach*-ovog problema.

53. Metodom matematičke indukcije ili kojim drugim načinom dokazati:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1};$$

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Sumirati:

$$\frac{1^3}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^3}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$\frac{1^4}{1\cdot 3}+\frac{2^4}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\vdots$$

54. Matematičkom indukcijom ili rastavljanjem funkcije

$$1/[(2r-1)(2r+1)(2r+3)]$$

na parcijalne razlomke, dokazati identitet

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)(2r+3)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right].$$

55. Matematičkom indukcijom pokazati da je zbir prvih n članova izraza

$$1 + \frac{2n-2}{2n-3} + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-3)(2n-5)} + \cdots$$

jednak $2n-1$.

56. Dokazati da je broj

$$N(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

deljiv sa 7.

Rešenje. I. $3^{2n+1} = 3\cdot 9^n = 3(2+7)^n = 3\cdot 2^n + 7k$ (k prirodan broj)

$2^{n+2} = 4\cdot 2^n$.

$\therefore \quad N(n) = 3\cdot 2^n + 4\cdot 2^n + 7k = 7\cdot 2^n + 7k$.

$\therefore \quad 7 \mid N(n)$.

Broj $N(0)$ deljiv je takođe sa 7.

II. Čitalac će matematičkom indukcijom dokazati ovaj rezultat.

57. Dokazati da je broj

$$N(n) = 2^{2n} - 3n - 1 \qquad (n \text{ prirodan broj})$$

deljiv sa 9.

Rešenje. I. $N(n+1) - N(n) = 3(2^{2n} - 1)$.

$M(n+1) - M(n) = 2^{2n+4} - 2^{2n} = 2^{2n}\cdot 15$, gde je $M(n) = 2^{2n} - 1$.

Budući da je broj $M(1)$ deljiv sa 3 i da je $M(n+1)$ deljiv sa 3 ako je to slučaj sa $M(n)$, izlazi da je broj $M(n)$ deljiv sa 3 za svako $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Kako je, zatim, broj $N(1)$ deljiv sa 9 i kako je $N(n+1)$ deljiv sa 9, kada je to slučaj sa $N(n)$, zaključuje se da je broj $N(n)$ deljiv sa 9 za svako $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Broj $N(0)$ deljiv je takođe sa 9.

II. Čitalac će dokazati ovaj rezultat koristeći binomnu formulu.

58. Zaključkom od n na $n+1$ dokazati identitete:

1° $\quad (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right);$

2° $\quad (\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right);$

3° $\quad (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

59. Ako je n prirodan broj, proveriti da li su tačni identiteti:

$$1^\circ \quad \binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right);$$

$$2^\circ \quad (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\left(\cos\frac{1}{2}n\theta+i\sin\frac{1}{2}n\theta\right)\cos^n\frac{1}{2}\theta.$$

60. Matematičkom indukcijom dokazati

$$2\sum_{r=1}^{n}\cos^2 rx=n+[\cos(n+1)x\sin nx]/(\sin x),$$

$$2\sum_{r=1}^{n}\sin^2 rx=n-[\cos(n+1)x\sin nx]/(\sin x)$$

$$(x\neq k\pi;\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

61. Ako je n prirodan broj, dokazati relacije:

$1^\circ \quad 2^{2n}+15n-1\equiv 0 \pmod 9$;

$2^\circ \quad 3^{2n+3}+40n-27\equiv 0 \pmod{64}$;

$3^\circ \quad 3^{2n+5}+160n^2-56n-243\equiv 0 \pmod{512}$;

$4^\circ \quad 3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 0 \pmod{17}$.

62. Metodom matematičke indukcije dokazati

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}=1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos nx;$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x}=\begin{cases}2\cos(n-1)x+2\cos(n-3)x+\cdots+2\cos x & (n \text{ parno}),\\ 2\cos(n-1)x+2\cos(n-3)x+\cdots+1 & (n \text{ neparno}).\end{cases}$$

63. Matematičkom indukcijom dokazati identitete:

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2;$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n}k!\,k=(n+1)!-1;$$

$$3^\circ \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\binom{n+1}{2}.$$

Primedba. 2° Evo jednog interesantnog rešenja:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k!\,k&=\sum_{k=1}^{n}(\overline{k+1}-1)(k!)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!\\&=(n+1)!-1.\end{aligned}$$

64. Ako sa D_n označimo sledeću determinantu reda n

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2x \end{vmatrix},$$

tada je

$$(1) \quad D_n = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}\{[x+(x^2-1)^{1/2}]^{n+1}-[x-(x^2-1)^{1/2}]^{n+1}\} \quad (|x|>1).$$

Rešenje. Bez teškoće se izvodi sledeća rekurentna relacija

$$(2) \qquad D_{n+1} = 2x\,D_n - D_{n-1}.$$

Pretpostavimo da je formula (1) tačna za $n=k-1$ i $n=k$. Tada je, prema (2),

$$\begin{aligned} 2(x^2-1)^{1/2} D_{k+1} &= 2x\{[x+(x^2-1)^{1/2}]^{k+1}-[x-(x^2-1)^{1/2}]^{k+1}\} \\ &\quad -\{[x+(x^2-1)^{1/2}]^k-[x-(x^2-1)^{1/2}]^k\} \\ &= [x+(x^2-1)^{1/2}]^k[2x^2+2x(x^2-1)^{1/2}-1] \\ &\quad -[x-(x^2-1)^{1/2}]^k[2x^2-2x(x^2-1)^{1/2}-1]. \end{aligned}$$

Budući da je:

$$2x^2+2x(x^2-1)^{1/2}-1 \equiv [x+(x^2-1)^{1/2}]^2,$$

$$2x^2-2x(x^2-1)^{1/2}-1 \equiv [x-(x^2-1)^{1/2}]^2,$$

biće

$$D_{k+1} \equiv \frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}\{[x+(x^2-1)^{1/2}]^{k+2}-[x-(x^2-1)^{1/2}]^{k+2}\}.$$

Iz hipoteze da je formula (1) tačna za $n=k-1$ i $n=k$ zaključili smo da je ona tačna i za $n=k+1$. Kako je pored toga formula (1) tačna za $n=1$ i $n=2$, sleduje da ona važi za svaki prirodan broj n.

65. Proveriti da li je determinanta (reda n)

$$\begin{vmatrix} 2\operatorname{cosec} x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 2\operatorname{cosec} x & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{cosec} x & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 2\operatorname{cosec} x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2\operatorname{cosec} x \end{vmatrix}$$

$$(x \neq k\pi;\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

jednaka izrazu $(2^n/\sin^n x)[\sin^{2n}(x/2)+\cos^{2n}(x/2)]$.

Uputstvo. Ako se označi data determinanta sa D_n, obrazovati D_{n+1} i izvesti rekurentnu relaciju između D_{n+1}, D_n, D_{n-1}. Posle toga primeniti metod matematičke indukcije.

66. Dokazati formulu

$$(1)\qquad \left[\frac{d^m}{dx^m}(D^k y)\right]_{x=0} = m^k \left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]_{x=0} \quad \left(D \equiv x\frac{d}{dx}\right),$$

$\{y$ funkcija promenljive x koja u tački $x=0$ ima izvod reda $m+k$ (m, k nenegativni celi brojevi)$\}$.

Dokaz. Za $k=0$ formula (1) je tačna. Obrazujmo

$$\frac{d^m}{dx^m}(D^{k+1}y) = \frac{d^m}{dx^m}(DD^k y) = \frac{d^m}{dx^m}\left\{x\frac{d}{dx}(D^k y)\right\}.$$

Primenom *Leibniz*-ove formule dobija se dalje

$$\frac{d^m}{dx^m}(D^{k+1}y) = x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(D^k y) + m\frac{d^m}{dx^m}(D^k y).$$

Ako se pretpostavi da je relacija (1) tačna, tada je tačna i relacija

$$\left[\frac{d^m}{dx^m}(D^{k+1}y)\right]_{x=0} = m^{k+1}\left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]_{x=0}.$$

Prema tome, potpunom indukcijom dokazali smo formulu (1).

67. Dokazati potpunom indukcijom, ili kojim drugim metodom, stav:

Ako je n prirodan broj i $a>b\geqslant 0$, tada je $a^n>b^n$.

Važi i obrnuto: Ako je $a>b\geqslant 0$, tada je $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Primedba. Valja imati na umu da u realnoj analizi izraz $\sqrt[n]{a}$ $(a\geqslant 0)$ označava nenegativnu vrednost za n parno.

68. Dokazati formule:

$$\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{k+1} = \frac{1-(-1)^{\nu}}{2}; \qquad \sum_{k=1}^{2\nu}(-1)^{k+1}k^3 = -\nu^2(4\nu+3).$$

69. Matematičkom indukcijom dokazati formulu

$$D^n f(x) \equiv e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta + n\theta) \qquad \{f(x)\equiv e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\}.$$

70. Matematičkom indukcijom ili kojim drugim načinom dokazati formule:

$$1^\circ \qquad \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

$$2^\circ \qquad \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

71. Metodom matematičke indukcije ili kojim drugim načinom proveriti identitet

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)^2}{k(k+4)} = n\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}+\frac{1}{4(n+4)}\right\}.$$

72. Izraz

$$E(x) = a_1 x^{r_1} + a_2 x^{r_2} + \cdots + a_\nu x^{r_\nu} + \lambda x$$

definiše prirodan broj, ako su ispunjeni uslovi:

1° r_k $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ prim-brojevi;

2° $a_k = 1/r_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$;

3° $\lambda = 1 - \sum_{k=1}^{\nu} a_k$;

4° x prirodan broj.

Dokaz. Za $x = 1$ izraz E postaje

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \lambda.$$

Prema 3° poslednji izraz je 1. Dakle, tvrđenje je tačno za $x = 1$.

Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za $x = n$ (n prirodan broj), pa posmatrajmo izraz

$$E(n+1) = a_1 (n+1)^{r_1} + a_2 (n+1)^{r_2} + \cdots + a_\nu (n+1)^{r_\nu} + \lambda (n+1),$$

koji se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} & [a_1 n^{r_1} + a_2 n^{r_2} + \cdots + a_\nu n^{r_\nu} + \lambda n] \\ & + [a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu + \lambda] \\ & + \frac{1}{r_1}\left[\binom{r_1}{1} n^{r_1 - 1} + \binom{r_1}{2} n^{r_1 - 2} + \cdots + \binom{r_1}{r_1 - 1} n\right] \\ & \vdots \\ & + \frac{1}{r_\nu}\left[\binom{r_\nu}{1} n^{r_\nu - 1} + \binom{r_\nu}{2} n^{r_\nu - 2} + \cdots + \binom{r_\nu}{r_\nu - 1} n\right]. \end{aligned}$$

Prema induktivnoj hipotezi i prema 3°, prva dva sabirka u ovom zbiru su prirodni brojevi.

Vodeći računa o uslovu 1°, zaključuje se da su binomni koeficijenti

$$\binom{r_k}{s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, r_k - 1),$$

deljivi sa r_k.

Prema tome, izrazi

$$\binom{r_k}{1} n^{r_k - 1} + \binom{r_k}{2} n^{r_k - 2} + \cdots + \binom{r_k}{r_k - 1} n \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

deljivi su sa r_k.

Na taj način, metodom matematičke indukcije, dokazali smo navedeno tvrđenje.

Ovaj stav važi i u slučaju kada je $r_k = 1$.

73. Ako je $S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, sumirati

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} S_k^1, \quad S_n^3 = \sum_{k=1}^{n} S_k^2, \quad \ldots, \quad S_n^\nu = \sum_{k=1}^{n} S_k^{\nu-1},$$

tj. izraziti S_n^ν eksplicitno pomoću n i ν.

Rešenje. I.
$$S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)$$
$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$
$$\therefore \quad S_n^1 = 2\binom{n+2}{3}.$$

Kako je
$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} S_k^1,$$
dobija se
$$S_n^2 = S_1^1 + S_2^1 + S_3^1 + \cdots + S_n^1$$
$$= 2\left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n+2}{3}\right].$$

Koristeći formulu

$$(1) \qquad \binom{a}{a} + \binom{a+1}{a} + \binom{a+2}{a} + \cdots + \binom{m}{a} = \binom{m+1}{a+1},$$

gde su m i a $(m \geqslant a)$ prirodni brojevi, dobijamo
$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$
odnosno
$$S_n^2 = 2\binom{n+3}{4}.$$

Primenjujući isti postupak, dobijamo
$$S_n^3 = 2\binom{n+4}{5}, \qquad S_n^4 = 2\binom{n+5}{6}.$$

Na osnovu izvedenih formula naslućujemo da izraz za S_n^ν treba da glasi

$$(2) \qquad S_n^\nu = 2\binom{n+\nu+1}{\nu+2}.$$

Primenom metoda matematičke indukcije ispitaćemo da li formula (2) važi za svaki prirodan broj ν.

Pretpostavićemo da formula (6) važi za proizvoljan prirodan broj $\nu = p$.

Prema definiciji je
$$S_n^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} S_k^p,$$
odnosno
$$S_n^{p+1} = S_1^p + S_2^p + S_3^p + \cdots + S_n^p,$$
tj.
$$S_n^{p+1} = 2\left[\binom{p+2}{p+2} + \binom{p+3}{p+2} + \binom{p+4}{p+2} + \cdots + \binom{n+p+1}{p+2}\right].$$

Na osnovu formule (1) dobija se

$$S_n^{p+1} = 2\binom{n+p+2}{p+3}.$$

Prema tome, dokazali smo da formula (2) važi za svaki prirodan broj v.

II. Podimo od identiteta

$$S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)]$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);$$

$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{3\cdot 4}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)]$$

$$= \frac{1}{3\cdot 4}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

tako da možemo naslutiti da je uopšte

$$(1') \qquad S_n^{v} = \sum_{k=1}^{n} S_k^{v-1} = \frac{2}{(v+2)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+v+1).$$

Ovo ćemo dokazati metodom matematičke indukcije.

Pretpostavićemo da je obrazac (1′) tačan za $v=p$.

Pošto je

$$S_n^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} S_k^{p} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(p+2)!}k(k+1)\cdots(k+p+1)$$

i kako je

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+p+1) = \frac{1}{p+3}\sum_{k=1}^{n}[k(k+1)\cdots(k+p+2)-(k-1)k\cdots(k+p+1)]$$

$$= \frac{1}{p+3}n(n+1)(n+2)\cdots(p+n+2),$$

dobićemo

$$S_n^{p+1} = \frac{2}{(p+3)!}n(n+1)(n+2)\cdots(p+n+2).$$

Ovim je dokazana formula (1′).

Primedba. Prvo rešenje je *Nade Janković*, a drugo *Kovine Milošević*.

Generalizacija. Odrediti sumacionu formulu za

$$S_n^{v} = \sum_{k=1}^{n} S_k^{v-1} \qquad (v = 2, 3, 4, \ldots)$$

u slučaju kada je

$$S_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m).$$

74. Dokazati stav: Ako je n nula ili prirodan broj, tada je broj

$$A_n \equiv \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

prirodan.

Dokaz. Posmatrajmo zbir

$$A_{n-1} + A_{n-2} \equiv \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$+ \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}.$$

Podesnim grupisanjem sabiraka dobija se:

$$A_{n-1} + A_{n-2} \equiv \frac{5-\sqrt{5}}{10}\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}.$$

Budući da je

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

dobija se

$$(1) \qquad A_{n-1} + A_{n-2} = A_n.$$

Za $n=0$ i $n=1$ imamo respektivno: $A_0=1$, $A_1=1$.

Pretpostavimo da je broj A_n prirodan kada je $n=k-1$ i $n=k-2$ (k prirodan broj $\geqslant 2$). Tada je, na osnovu relacije (1) i A_k prirodan broj.

A_2 je prirodan broj, jer su takvi brojevi A_0 i A_1. Broj A_3 je prirodan, budući da su A_1 i A_2 prirodni brojevi, itd.

Napomena. Brojevi

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots, \text{ tj. } 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

čine *Fibonacci*-ev niz.

75. Dat je skup prirodnih brojeva $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Obrazovati podskupove $N_r\,(2\leqslant r)$ skupa N od kojih svaki sadrži r brojeva skupa N među kojima nema dva konsekutivna broja. Koliko ima podskupova N_r?

Rezultat. Parcijalni skupovi N_2 su:

$$\begin{array}{lll} \{1,3\}, & \{2,4\}, & \ldots, \{n-2, n\}. \\ \{1,4\}, & \{2,5\}, & \\ \vdots & \vdots & \\ \{1, n-1\}, & \{2, n\}, & \\ \{1, n\}. & & \end{array}$$

Njihov broj je

$$N_2 = 1+2+\cdots+(n-2), \quad \text{tj.} \quad \binom{n-1}{2}.$$

Podskupova N_r ima ukupno

$$(E) \qquad \binom{n-r+1}{r}.$$

Izraz (E) dokazati potpunom indukcijom ili na koji drugi način.

Primedba. Da li r mora zadovoljavati uslov $r \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$?

76. Ako su n i r prirodni brojevi, broj

(1) $$(nr)!/\{n!\,(r!)^n\}$$

tako isto je prirodan broj.

Dokaz. Za $n=1$ izraz (1) ima navedenu osobinu (P). Pretpostavimo sada da je ta osobina istinita za $n=k$, tj. da je broj

(2) $$(kr)!/\{k!\,(r!)^k\}$$

prirodan.

Formirajmo izraz

$$\frac{\{(k+1)\,r\}!}{(k+1)!\,(r!)^{k+1}} \Big/ \frac{(kr)!}{(k!)\,(r!)^k} = \frac{\{(k+1)\,r\}!}{(k+1)\,(r!)\,(kr)!}$$

$$= \frac{(kr+r)!}{(kr)!\,r!\,(k+1)}$$

$$= \frac{(kr+r-1)!}{(kr)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{(kr+r-1)\,(kr+r-2)\,\ldots\,(kr+1)}{(r-1)!}.$$

U brojitelju poslednjeg razlomka pojavljuje se proizvod $r-1$ uzastopnih prirodnih brojeva.

Budući da je proizvod $r-1$ uzastopnih prirodnih brojeva deljiv sa $(r-1)!$ {videti problem 12 na str. 31 ovog *Zbornika*}, iz poslednje relacije sleduje

$$\frac{\{(k+1)\,r\}!}{(k+1)!\,(r!)^{k+1}} = N\frac{(kr)!}{k!\,(r!)^k} \qquad (N \text{ prirodan broj}).$$

Prema tome, ako je osobina (P) istinita za $n=k$, ona je istinita i za $n=k+1$.

Indukcijom smo, dakle, dokazali istinitost osobine (P).

77. Prelazom od n na $n+1$ dokazati identitet

$$\operatorname{tg} a\ \operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2a\ \operatorname{tg} 3a + \cdots + \operatorname{tg}(n-1)\,a\ \operatorname{tg} na = (\operatorname{tg} na)/(\operatorname{tg} a) - n.$$

Uputstvo. Upotrebiti relaciju

$$\operatorname{tg}(n+1)\,a\ \operatorname{tg} na = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\,a - \operatorname{tg} na}{\operatorname{tg} a} - 1 \qquad (\operatorname{tg} a \neq 0),$$

koja sleduje iz

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}[(n+1)\,a - na] = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\,a - \operatorname{tg} na}{1 + \operatorname{tg}(n+1)\,a\ \operatorname{tg} na}.$$

78. Metodom matematičke indukcije dokazati identitet

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}/k = \sum_{k=1}^{n} 1/(n+k).$$

79. Svaki prirodan broj $n\,(>1)$ može se pretstaviti kao proizvod prostih brojeva (prim-brojeva).

Dokazati ovaj stav metodom matematičke indukcije.

Dokaz. Pretpostavimo da stav važi za prirodne brojeve: $n=2, 3, \ldots, k$. Posmatrajmo sada broj $k+1$. Ako je $k+1$ prost broj, tada je stav u važnosti. Ako je broj $k+1$ složen, tada se on može pretstaviti kao proizvod bar od dva prirodna broja, recimo a i b od kojih je svaki manji od $k+1$.

Prema induktivnoj hipotezi, i broj a i broj b ($a \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $b \in \{1, 2, \ldots, k\}$) mogu se pretstaviti kao proizvodi prim-brojeva, tj.

$$a=p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \qquad b=q_1 \cdot q_2 \cdots q_s \qquad (p_i,\ q_i \text{ prirodni brojevi}).$$

Navedeni stav je tačan za $n=2$.

Prema tome, stav je tačan za svako $\in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Primedba. Da li je gornji stav ekvivalentan stavu:

Svaki prirodan broj ili je prost ili proizvod prostih brojeva?

80. Ispitati da li je tačna relacija

$$\prod_{k=1}^{r} (6\,N_k+5) \equiv \begin{cases} 5 \pmod 6 & (r \text{ neparno}), \\ 1 \pmod 6 & (r \text{ parno}), \end{cases}$$

$$(N_k \text{ prirodni brojevi}).$$

81. Funkcija $1+\cos(2n-1)\theta$ (n prirodan broj) ima kao faktor funkciju $1+\cos\theta$.

Rešenje. Zadatak se svodi na to da dokažemo da je funkcija $\cos\frac{2n-1}{2}\theta$ deljiva sa $\cos\frac{\theta}{2}$, kada je n prirodan broj.

Za $n=1$ funkcija $f(n, \theta)=\cos\frac{2n-1}{2}\theta$ deljiva je sa $\cos\frac{\theta}{2}$.

Pretpostavimo da je funkcija $\cos\frac{2n-1}{2}\theta$ deljiva sa $\cos\frac{\theta}{2}$ za neko n, pa formirajmo funkciju

$$f(\theta, n+1)=\cos\left(\frac{2n-1}{2}\theta+\theta\right)=\cos\frac{2n-1}{2}\theta\cos\theta-\sin\frac{2n-1}{2}\theta\sin\theta.$$

Budući da je $\sin\theta$ deljivo sa $\cos\frac{\theta}{2}$ i uzimajući u obzir induktivnu hipotezu, zaključuje se da je $\cos\frac{2n+1}{2}\theta$ deljivo sa $\cos\frac{\theta}{2}$ ako je to slučaj sa $\cos\frac{2n-1}{2}\theta$.

Ovim smo dokazali istinitost navedenog tvrđenja.

Primedba. Nule funkcije $1+\cos\theta$ su:

(1) $$\theta_k=(2k+1)\pi \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

Izraz $1+\cos(2n-1)\theta$ za vrednost (1) postaje

$$1+\cos\{(2k+1)(2n-1)\theta\}.$$

Ovaj izraz ima vrednost nule, jer je $(2k+1)(2n-1)$ neparan broj.

Polazeći od navedene činjenice, zaključuje se takođe da je $1+\cos\theta$ faktor izraza

$$1+\cos(2n-1)\theta \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

82. Ako je $a_0 \neq 0$ i ako je $\sum\limits_{r=0}^{k} a_r \neq 0$ za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dokazati identitet

$$(1) \qquad \sum_{p=1}^{n} \Big\{ a_p \Big/ \Big(\sum_{r=0}^{p-1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{p} a_r\Big)\Big\} = \Big(\sum_{r=1}^{n} a_r\Big)\Big/\Big(a_0 \sum_{r=0}^{n} a_r\Big).$$

Rešenje. Za $n=1$ je

$$\frac{a_1}{a_0\,(a_0+a_1)} = \frac{a_1}{a_0\,(a_0+a_1)}.$$

Pretpostavimo da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj. da je

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{k} \Big\{ a_p \Big/ \Big(\sum_{r=0}^{p-1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{p} a_r\Big)\Big\} = \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big/\Big(a_0 \sum_{r=0}^{k} a_r\Big),$$

ili u obliku $f(k) \equiv g(k)$, gde su $f(k)$ i $g(k)$ izrazi na levoj i desnoj strani relacije (2). Tada je tačna i relacija

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{k+1} \Big\{ a_p \Big/ \Big(\sum_{r=0}^{p-1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{p} a_r\Big)\Big\} = \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big/\Big(a_0 \sum_{r=0}^{k} a_r\Big)$$
$$+\, a_{k+1}\Big/\Big\{\Big(\sum_{r=0}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big)\Big\}$$
$$= \Big\{\Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big) + a_0 a_{k+1}\Big\}\Big/\Big\{a_0\Big(\sum_{r=0}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big)\Big\}.$$

Takođe važi relacija

$$(4) \qquad \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big) + a_0 a_{k+1} = \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big(a_0 + \sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big) + a_0 a_{k+1}$$
$$= \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big) + a_0 \sum_{r=1}^{k} a_r + a_0 a_{k+1} = \Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big) + a_0 \sum_{r=1}^{k+1} a_r$$
$$= \Big(\sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k} a_r\Big).$$

Na osnovu (4) relacija (3) postaje

$$\sum_{p=1}^{k+1} \Big\{ a_p \Big/ \Big(\sum_{r=0}^{p-1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{p} a_r\Big)\Big\} = \Big(\sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k} a_r\Big)\Big/\Big\{a_0\Big(\sum_{r=0}^{k} a_r\Big)\Big(\sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big)\Big\}$$
$$= \Big(\sum_{r=1}^{k+1} a_r\Big)\Big/\Big(a_0 \sum_{r=0}^{k+1} a_r\Big).$$

Poslednja relacija kazuje da iz hipoteze $f(k) \equiv g(k)$ sleduje $f(k+1) \equiv g(k+1)$.

Prema tome, matematičkom indukcijom smo pokazali da je identitet (1) u važnosti za svaki prirodan broj n.

83. Dokazati identitet

$$(1) \qquad 4 \sum_{r=1}^{n} \Big\{ 3^{r-1} \sin^3 \frac{\theta}{3^r} \Big\} = 3^n \sin \frac{\theta}{3^n} - \sin\theta.$$

Dokaz. Za $n=1$ relacija (1) je tačna, jer je

$$4\sin^3\frac{\theta}{3}\equiv 3\sin\frac{\theta}{3}-\sin\theta.$$

Ovo sleduje iz formule

$$\sin 3a\equiv 3\sin a-4\sin^3 a. \tag{2}$$

Pretpostavimo sada da je relacija (1) tačna za $n=k$, tj. da je

$$4\sum_{r=1}^{k}\left\{3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right\}\equiv 3^k\sin\frac{\theta}{3^k}-\sin\theta. \tag{3}$$

Iz (3) izlazi

$$4\sum_{r=1}^{k+1}\left\{3^{r-1}\sin^3\frac{\theta}{3^r}\right\}\equiv\left(3^k\sin\frac{\theta}{3^k}-\sin\theta\right)+4\cdot 3^k\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}} \tag{4}$$

$$\equiv 3^k\left(\sin\frac{\theta}{3^k}+4\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)-\sin\theta.$$

Na osnovu (2) je

$$\sin\frac{\theta}{3^k}+4\sin^3\frac{\theta}{3^{k+1}}\equiv 3\sin\frac{\theta}{3^{k+1}}.$$

Stoga zaključujemo:

Ako je relacija (1) tačna za $n=k$, ona je tačna i za $n=k+1$.

Prema tome, matematičkom indukcijom dokazali smo tačnost relacije (1).

84. Proučiti niz

$$\{s_n\},\ \text{gde je}\ s_1=\sqrt{2},\ s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}}.$$

Rešenje. Pretpostavi li se da je $s_k<2$, sleduje

$$s_{k+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_k}}<\sqrt{2+2}=2,$$

tj. $s_{k+1}<2$, ako je $s_k<2$. Budući da je $s_1=\sqrt{2}<2$, zaključuje se da je $s_n<2$ za svako $n\in\{1,2,\ldots\}$.

Prema tome, niz $\{s_n\}$ je ograničen s gornje strane.

Kako je $s_2>s_1$ i $s_{k+1}^2-s_k^2=\sqrt{s_k}-\sqrt{s_{k-1}}$, iz hipoteze $s_k>s_{k-1}$ sleduje $s_{k+1}>s_k$.

Prema tome, niz $\{s_n\}$ je monotono rastući. Odavde sleduje $s_n\to s\leqslant 2$.

s nalazimo iz relacije $s=\sqrt{2+\sqrt{s}}$, odakle sleduje

$$s=\frac{1}{3}\{[(79+3\sqrt{249})/2]^{1/3}+[(79-3\sqrt{249})/2]^{1/3}-1\}.$$

Čitalac će detaljno izvesti potrebna izračunavanja i odrediti s na dve tačne decimale.

85. Ako je $a_0=0$, $a_1=1$ i $a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=2$ $(n\geqslant 1)$, tada je $a_n=n^2$. Dokazati ovo metodom matematičke indukcije.

86. Prva diferencija funkcije $f(x)$ označava se sa $\Delta f(x)$ i definiše na sledeći način

$$\Delta f(x)\equiv f(x+1)-f(x) \tag{1}$$

$\{$funkcije $f(x)$ i $f(x+1)$ definisane su za svako $x\}$.

Diferencija reda k definiše se pomoću formule

$$\Delta^k f(x) \equiv \Delta\{\Delta^{k-1} f(x)\} \quad \{k=2, 3, \ldots; \ \Delta^0 f(x) \equiv f(x)\}.$$

Polazeći od navedenih definicija, metodom matematičke indukcije dokazati formulu:

$$(2) \qquad \Delta^n f(x) \equiv f(x+n) - \binom{n}{1} f(x+n-1) + \binom{n}{2} f(x+n-2) - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je formula (2) tačna za induktivnu promenljivu n, pa polazeći od (2), formirajmo

$$(3) \qquad \Delta\{\Delta^n f(x)\} \equiv \Delta f(x+n) - \binom{n}{1} \Delta f(x+n-1) + \binom{n}{2} \Delta f(x+n-2) - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} \Delta f(x).$$

vodeći računa o tome da za operator Δ važe relacije

$$\Delta(f+g) \equiv \Delta f + \Delta g, \qquad \Delta(kf) \equiv k\,\Delta f,$$

gde je k konstanta, a f i g funkcije definisane za svako x. Relacija (3) prema (1) postaje

$$\Delta\{\Delta^n f(x)\} \equiv \{f(x+n+1) - f(x+n)\} - \binom{n}{1}\{f(x+n) - f(x+n-1)\}$$
$$+ \binom{n}{2}\{f(x+n-1) - f(x+n-2)\} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}\{f(x+1) - f(x)\}.$$

Posle podesnog grupisanja članova na desnoj strani poslednje relacije dobija se

$$\Delta\{\Delta^n f(x)\} \equiv f(x+n+1) - \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\} f(x+n) + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\} f(x+n-1) - \cdots$$
$$+ (-1)^{k+1}\left\{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}\right\} f(x+n-k) + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} f(x).$$

Uzimajući u obzir formulu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \equiv \binom{n+1}{k+1},$$

poslednja relacija postaje

$$(4) \qquad \Delta\{\Delta^n f(x)\} \equiv f(x+n+1) - \binom{n+1}{1} f(x+n) + \binom{n+1}{2} f(x+n-1)$$
$$- \cdots + (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} f(x+n-k) + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1} f(x).$$

Ako je tačna formula (2), tada je tačna i formula (4).

Formula (2) je tačna za $n=1$.

Prema tome, formula (2) je tačna za svako $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

87. Date su matrice:

$$A_1 = \| 1 \|, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad A_5 = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ldots$$

Odrediti matrice $A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2, A_5^2, \ldots$ i utvrditi da li one imaju osobinu:

$$(A_k)^r = E \quad (E \text{ jedinična matrica, } r \text{ prirodan broj}),$$

gde su elementi a_{ij} matrice A_k definisani relacijama:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (-1)^{j-1}\tbinom{j-1}{i-1} && (i<j), \\ &= (-1)^{i-1} && (i=j), \\ &= 0 && (i>j). \end{aligned}$$

88. Ispitati metodom matematičke indukcije da li je tačna relacija

$$A^k = \begin{Vmatrix} k+1 & -k \\ k & -k+1 \end{Vmatrix} \quad (k \text{ prirodan broj}),$$

gde je A matrica

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

89. Dokazati formulu

$$(1) \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx \, dx = \pi/2^{n+1} \quad (n \text{ prirodan broj})$$

primenom metoda matematičke indukcije.

Rešenje. Za $n=1$ integral J_n postaje

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2x) \, dx = \frac{\pi}{2^2}.$$

Dakle, formula (1) je tačna za $n=1$. Pretpostavimo sada da je formula (1) tačna za $n=k$, tj. da je

$$(2) \qquad J_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k x \cos kx \, dx = \pi/2^{k+1}.$$

Integral J_{k+1} može se napisati u obliku

$$\begin{aligned} (3) \qquad J_{k+1} &\equiv \int_0^{\pi/2} \cos^{k+1} x \cos(k+1)x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^k x \cos(k+1)x \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^k x \{\cos(k+2)x + \cos kx\} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^k x \cos(k+2)x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^k x \cos kx \, dx. \end{aligned}$$

Diferencijal $\cos^k x \cos(k+2)\,x\,dx$ može se ovako transformisati:

$$\begin{aligned}\cos^k x\cos(k+2)\,x\,dx &= \cos^k x\,\{\cos(k+1)\,x\cos x-\sin(k+1)\,x\sin x\}\,dx\\ &= \frac{1}{k+1}\cos^{k+1}x\,d\,(\sin\overline{k+1}\,x)+\frac{1}{k+1}\sin\overline{k+1}\,x\,d\,(\cos^{k+1}x)\\ &= \frac{1}{k+1}\,d\,(\sin\overline{k+1}\,x\cos^{k+1}x).\end{aligned}$$

Iz formule (3), vodeći računa o induktivnoj hipotezi (2), sleduje

$$J_{k+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{k+1}\sin\overline{k+1}\,x\cos^{k+1}x\,\Bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

$$\therefore\quad J_{k+1}=\pi/2^{k+2}.$$

Prema tome, formula (1) zaista je tačna.

Primetimo da formula (1) važi i za $n=0$.

Napred navedeni dokaz formule (1) pomoću indukcije dao je *Aleksandar Đulejić*, student II godine *Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu*, školske 1954/55 godine.

90. Metodom matematičke indukcije dokazati formulu

$$f_k(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)\,(x-t)^{k-1}\,dt,$$

gde je

$$f_\nu(x)=\int_0^x f_{\nu-1}(t)\,dt\qquad(\nu=2,3,4,\ldots),$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt\qquad(\nu=1).$$

Primedba. Kakve uslove treba da zadovoljava funkcija $f(x)$ da bi navedena formula imala smisla?

91. Dokazati formule:

$$(1)\qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\sin\left(y+\frac{n+1}{2}\pi\right)dy,$$

$$(2)\qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\sin\left(y+\frac{n}{2}\pi\right)dy.$$

Rešenje. Pretpostavimo da je formula (1) tačna za $n=k-1$, tj.

$$(3)\qquad \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^k}\int_0^x y^{k-1}\sin\left(y+\frac{k}{2}\pi\right)dy.$$

Diferenciranjem po x dobija se

$$(4)\qquad \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \equiv -\frac{k}{x^{k+1}}\int_0^x y^{k-1}\sin\left(y+\frac{k}{2}\pi\right)dy + x^{-1}\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right).$$

Ako je

$$(5)\qquad -\frac{k}{x^{k+1}}\int_0^x y^{k-1}\sin\left(y+\frac{k}{2}\pi\right)dy + \frac{1}{x}\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right) \equiv \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x y^k \sin\left(y+\frac{k+1}{2}\pi\right)dy,$$

ada iz hipoteze da je formula (1) tačna za $n=k-1$ sleduje da je ona tačna za $n=k$.

Parcijalnom integracijom dobija se

$$\int_0^x y^{k-1}\sin\left(y+\frac{k}{2}\pi\right)dy \equiv \frac{x^k}{k}\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right) - \frac{1}{k}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k}{2}\pi\right)dy.$$

Ako se ovo smeni u (5) i budući da je

$$\cos\left(y+\frac{k}{2}\pi\right) \equiv \sin\left(y+\frac{k+1}{2}\pi\right),$$

konstatuje se da je (5) zaista identitet.

Formula (1) važi za $n=1$.

Prema tome, indukcijom smo dokazali njeno važenje za svako $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Čitalac će dokazati formulu (2).

92. Dokazati relacije:

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \{x \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Uputstvo. Poći od relacija koje su dokazane u prethodnom zadatku.

93. Dat je niz

$$x_1 = \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}, \ \ldots, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}, \ \ldots,$$

gde je $0 < x_0 < b$ i $a > 0$ (a, b, x_0 dati).

Dokazati da ovaj niz monotono raste i da je ograničen. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$.

Rešenje. Ispitajmo da li je

$$x_0 < x_1, \quad \text{tj.} \quad x_0 < [(ab^2 + x_0^2)/(a+1)]^{1/2}.$$

Pretpostavimo li da je tačno

$$x_0 \geqslant [(ab^2 + x_0^2)/(a+1)]^{1/2},$$

posle kvadriranja dobija se

$$(a+1)\,x_0^2 \geqslant ab^2 + x_0^2, \quad \text{tj.} \quad ax_0^2 \geqslant ab^2.$$

$$\therefore \quad x_0^2 \geqslant b^2 \qquad (\text{jer je } a > 0).$$

Ovo je u kontradikciji sa datom relacijom $x_0 < b$, pa je zaista $x_0 < x_1$.

Pretpostavimo sada da je za neko n

$$x_{n-1} < x_n \quad \text{(induktivna hipoteza)}.$$

$$\therefore \quad \frac{ab^2 + x_{n-1}^2}{a+1} < \frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{ab^2 + x_{n-1}^2}{a+1}} < \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}.$$

$$\therefore \quad x_n < x_{n+1}.$$

Ovim smo metodom matematičke indukcije dokazali da niz

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$$

monotono raste.

Pokazaćemo sada da je

$$x_n < b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Za $n = 1$ ovo je tačno, jer je zaista

$$\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1} < b^2, \quad \text{tj.} \quad x_0^2 < b^2 \quad \text{(prema tekstu zadatka)}.$$

Ako za neko n važi relacija $x_n < b$, tada važi i relacija

$$\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1} < \frac{ab^2 + b^2}{a+1} = b^2,$$

odnosno $x_{n+1} < b$.

Ovim smo završili induktivni dokaz.

Dokazali smo da je zaista

$$x_n < b \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dati niz monotono raste i ograničen je s gornje strane. Prema tome, on ima graničnu vrednost.

Da bismo odredili graničnu vrednost, posmatrajmo relacije

$$x_1^2 (a+1) = ab^2 + x_0^2,$$

$$x_2^2 (a+1) = ab^2 + x_1^2,$$

$$x_3^2 (a+1) = ab^2 + x_2^2,$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1}^2 (a+1) = ab^2 + x_n^2.$$

Posle množenja druge relacije sa $a+1$, treće sa $(a+1)^2, \ldots,$ poslednje sa $(a+1)^n$ i sabiranja odgovarajućih strana ovih relacija, dobija se

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 (a+1)^{n+1} &= x_0^2 + ab^2 \left[1 + (a+1) + (a+1)^2 + \cdots + (a+1)^n\right] \\ &= x_0^2 + ab^2 \frac{(a+1)^{n+1} - 1}{(a+1) - 1} \\ &= x_0^2 + b^2 \left[(a+1)^{n+1} - 1\right]. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_{n+1}^2 = b^2 - \frac{b^2 - x_0^2}{(a+1)^{n+1}}.$$

Kako je $a>0$, biće

$$(a+1)^{n+1}\to\infty \qquad (n\to\infty).$$

Prema tome dobijamo

$$x_{n+1}\to b \qquad (n\to\infty).$$

94. 1° Dokazati *Bernoulli*-evu nejednakost

(1) $$(1+a)^n>1+na \qquad (a>-1,\ a\neq 0;\ n=2, 3, 4, \ldots).$$

2° Polazeći od *Bernoulli*-eve nejednakosti, dokazati nejednakost

(2) $$\beta^{1/m}\leqslant 1+\frac{\beta-1}{m} \qquad (\beta>0;\ m=1, 2, 3, \ldots).$$

3° Na osnovu (2) dokazati relaciju

(3) $$(\alpha^{m-1}b)^{1/m}\leqslant\frac{(m-1)\alpha+b}{m} \qquad (\alpha>0,\ b>0).$$

4° Primenom relacije (3) dokazati nejednakost

(4) $$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$(n=1, 2, 3, \ldots;\quad a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi).

Dokaz. 1° Za $n=2$ relacija (1) je tačna za svako $a\neq 0$. Pretpostavimo li da je relacija (1) tačna za neko n, tada je tačna i relacija

(5) $$(1+a)^n(1+a)>(1+na)(1+a)=1+(n+1)a+na^2,$$

jer je $a+1>0$ (po pretpostavci).

Iz nejednakosti (5) sleduje

$$(1+a)^{n+1}>1+(n+1)a.$$

Ovim je induktivni dokaz *Bernoulli*-eve nejednakosti završen.

Ako je $n=1$ ili ako je $a=0$, nejednakost (1) pretvara se u jednakost.

Prema tome, važi nejednakost

(6) $$(1+a)^n\geqslant 1+na \qquad (a>-1;\ n=1, 2, 3, \ldots).$$

2° Prema nejednakosti (6) biće

(7) $$\left(1+\frac{\beta-1}{m}\right)^m\geqslant 1+m\frac{\beta-1}{m}=\beta,$$

ako je $(\beta-1)/m>-1$ i $m=1, 2, 3, \ldots$, tj. ako je

$$\beta>1-m \quad \text{i} \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

Ovi uslovi biće uvek ispunjeni kada je

$$\beta>0 \quad \text{i} \quad m=1, 2, 3, \ldots$$

Iz relacije (7) sleduje

$$1+\frac{\beta-1}{m}\geqslant\beta^{1/m}$$

Ovim je dokazana relacija (2).

3° Pomnožimo li levu i desnu stranu nejednakosti (2) pozitivnim brojem α, dobija se

$$(\alpha^m \beta)^{1/m} < \alpha + \alpha \frac{\beta - 1}{m}.$$

Stavimo li sada $\alpha\beta = b$, poslednja relacija postaje

$$(\alpha^{m-1} b)^{1/m} < \alpha + \frac{b-\alpha}{m} = \frac{\alpha(m-1)+b}{m}.$$

Ovim smo dokazali nejednakost (3).

4° Nejednakost (4) je tačna za $n=2$, pa pretpostavimo da je tačna za neko n, tj. induktivna hipoteza je

$$(8) \qquad \alpha < \frac{1}{n} A \qquad \{\alpha = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \qquad A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}.$$

Na osnovu (3) važi

$$(\alpha^n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{\alpha n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Vodeći računa o induktivnoj hipotezi (8), poslednja relacija postaje

$$(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} < \frac{A + a_{n+1}}{n+1} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}}{n+1}$$

Ovim je završen dokaz važne nejednakosti (4).

95. Ako su n i r prirodni brojevi, a $g(x)$ dovoljno puta diferencijabilna funkcija, dokazati formulu

$$(1) \qquad (x-a)^r D^{n+r} [(x-a)^n g(x)] \equiv D^n [(x-a)^{n+r} D^r g(x)].$$

Dokaz. Pretpostavimo da je ova formula tačna za $n=k$ i uvedimo skraćenice

$$(x-a)^{k+r} D^r g(x) \equiv h(x); \qquad D^{k+r} [(x-a)^k g(x)] \equiv H(x).$$

Tada možemo pisati

$$D^{k+1} [(x-a)^{k+r+1} D^r g(x)] \equiv D^{k+1} [(x-a) h(x)].$$

Primenom *Leibniz*-ove formule dobija se

$$D^{k+1} [(x-a) h(x)] \equiv (x-a) D^{k+1} h(x) + (k+1) D^k h(x).$$

Uzimajući u obzir induktivnu hipotezu

$$(2) \qquad (x-a)^r H(x) \equiv D^k h(x),$$

poslednja relacija postaje

$$\begin{aligned} D^{k+1} [(x-a) h(x)] &\equiv (x-a) D [(x-a)^r H(x)] + (k+1)(x-a)^r H(x) \\ &\equiv (k+r+1)(x-a)^r H(x) + (x-a)^{r+1} DH(x). \end{aligned}$$

Posmatrajmo sada izraz

$$(x-a)^r D^{k+r+1} [(x-a)^{k+1} g(x)],$$

odnosno

$$(x-a)^r D^{k+r+1} [(x-a) \cdot (x-a)^k g(x)].$$

Primenom *Leibniz*-ove formule dobija se

$$(x-a)^r D \{(x-a) H(x) + (k+r) D^{k+r-1} [(x-a)^k g(x)]\},$$

odnosno

$$(x-a)^{r+1} DH(x) + (k+r+1)(x-a)^r H(x).$$

Prema tome, pokazali smo da je formula (1) tačna za $n=k+1$, ako je tačna za $n=k$. Kako je povrh toga formula (1) tačna za $n=0$, induktivni dokaz je završen.

96. Ako je n prirodan broj i ako je $|x| \neq 1$, tada važi relacija

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots+\frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1}{1-x}\frac{x-x^{2^n}}{1-x^{2^n}}.$$

Metodom indukcije dokazati ovu relaciju.

97. Metodom indukcije dokazati relaciju

$$\binom{k}{1}+2\binom{k}{2}+3\binom{k}{3}+\cdots+k\binom{k}{k}=k\cdot 2^{k-1}$$

(k prirodan broj).

98. Ostatak koji se dobija pri deljenju polinoma $P(x)$ sa $x-x_0$ jednak je $P(x_0)$.

Dokazati ovaj stav (*Bézout*-ov stav) metodom matematičke indukcije.

99. Indukcijom ili kojim drugim načinom dokazati relaciju

$$\{n^2-n+1\}+\{(n^2-n+1)+2\}+\{(n^2-n+1)+4\}+\cdots$$
$$+\{(n^2-n+1)+2(n-1)\}=n^3.$$

100. Dokazati da n pravih, koje leže u ravni, dele ovu ravan na oblasti, koje je mogućno prevući belom i crnom bojom, tako da sve susedne oblasti (tj. oblasti koje imaju zajednički otsečak prave) budu prevučene različitim bojama.

Primedba. Ovaj problem je uzet iz članka: *С. И. Зетель: Метод математической индукции и геометрические построения* (*Из опыта преподавания математики в VIII—X классах средней школы* — Сборник статей под редакцией *П. В. Стратилова*, Москва, Учпедгиз, 1955).

U ovom interesantnom članku naveden je niz problema iz primene metoda matematičke indukcije na geometriske konstrukcije,

PROBLEMI IZ RAZNIH OBLASTI

1. Pokazati da se izraz

$$\frac{\sin x}{\sin(x-a)\sin(x-b)} \qquad (a \neq b;\ x \neq a,\ b)$$

može napisati u obliku

$$\frac{A}{\sin(x-a)} + \frac{B}{\sin(x-b)},$$

gde su A i B nezavisni od x.

Proširiti ovaj rezultat na izraz

$$\frac{\sin^2 x}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)},$$

gde je $(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$ i $x \neq a,\ b,\ c$.

Kakva bi se dalja generalizacija mogla dati?

Rešenje. Pretpostavimo li da postoji identitet

$$\frac{\sin x}{\sin(x-a)\sin(x-b)} \equiv \frac{A}{\sin(x-a)} + \frac{B}{\sin(x-b)},$$

tada je

$$A = \frac{\sin a}{\sin(a-b)}, \qquad B = \frac{\sin b}{\sin(b-a)}.$$

Pokazaćemo sada da zaista važi identitet

$$\frac{\dfrac{\sin a}{\sin(a-b)}}{\sin(x-a)} + \frac{\dfrac{\sin b}{\sin(b-a)}}{\sin(x-b)} \equiv \frac{\sin x}{\sin(x-a)\sin(x-b)}.$$

Izraz na levoj strani može se svesti na oblik

$$\frac{\sin a \sin(x-b) - \sin b \sin(x-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)}.$$

Ako se izraz u brojitelju razvije, dobija se

$$\frac{\sin x \sin(a-b)}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b)} \equiv \frac{\sin x}{\sin(x-a)\sin(x-b)}.$$

Na sličan način, polazeći od pretpostavke

$$(1)\qquad \frac{\sin^2 x}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)} \equiv \frac{A}{\sin(x-a)} + \frac{B}{\sin(x-b)} + \frac{C}{\sin(x-c)},$$

dobijamo

$$A = \frac{\sin^2 a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}, \qquad B = \frac{\sin^2 b}{\sin(b-a)\sin(b-c)}, \qquad C = \frac{\sin^2 c}{\sin(c-b)\sin(c-a)}.$$

Sada bi trebalo pokazati da je izraz na desnoj strani u (1), za nađene vrednosti A, B, C, zaista jednak izrazu na levoj strani.

2. Ispitati da li se $(\sin x)^{n-1}/\{\prod_{\nu=1}^{n} \sin(x-a_\nu)\}$ može napisati u obliku:

$$\frac{A_1}{\sin(x-a_1)} + \frac{A_2}{\sin(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{\sin(x-a_n)}.$$

Rešenje. Dokazaćemo identitet

$$(1)\qquad \sin^{n-1} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{n} \sin(x-a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \Big/ \sin(x-a_\nu),$$

gde je

$$A_\nu = \sin^{n-1} a_\nu \Big/ \prod_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{n} \sin(a_\nu - a_i) \qquad (x \neq a_\nu + k\pi, \quad a_\nu - a_i \neq k\pi \text{ za } \nu \neq i).$$

Formula je tačna za $n=2$. Da bismo ovo pokazali, pođimo od relacije

$$\frac{\sin x}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)} \equiv \frac{A}{\sin(x-a_1)} + \frac{B}{\sin(x-a_2)}.$$

$$\therefore \quad \sin x \equiv A\sin(x-a_2) + B\sin(x-a_1) \equiv (A\cos a_2 + B\cos a_1)\sin x$$
$$-(A\sin a_2 + B\sin a_1)\cos x.$$

$$\therefore \quad A\cos a_2 + B\cos a_1 = 1, \qquad A\sin a_2 + B\sin a_1 = 0.$$

$$\therefore \quad A = \sin a_1/\sin(a_1-a_2), \qquad B = \sin a_2/\sin(a_2-a_1).$$

Pretpostavimo sada da je razlaganje (1) mogućno za $n=k$, odnosno da je

$$(2)\qquad \sin^{k-1} x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k} \sin(x-a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \Big/ \sin(x-a_\nu).$$

Posle množenja sa $\sin x/\sin(x-a_{k+1})$, iz (2) se dobija

$$\sin^k x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin(x-a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \sin x \Big/ [\sin(x-a_\nu)\sin(x-a_{k+1})].$$

No, svaki sabirak na desnoj strani možemo napisati kao zbir dva sabirka oblika: $A_\nu'/\sin(x-a_\nu) + A_{k+1}^{\nu}/\sin(x-a_{k+1})$. Učinimo li to, dobijamo:

$$\sin^k x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin(x-a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu' \Big/ \sin(x-a_\nu) + \Big(\sum_{\nu=1}^{k} A_{k+1}^{\nu}\Big) \Big/ \sin(x-a_{k+1}).$$

Stavimo li $A_{k+1}' = \sum_{\nu=1}^{k} A_{k+1}^{\nu}$, imaćemo

$$\sin^k x \Big/ \prod_{\nu=1}^{k+1} \sin(x-a_\nu) \equiv \sum_{\nu=1}^{k+1} A_\nu' \Big/ \sin(x-a_\nu).$$

Na taj način smo dokazali da za proizvoljno n postoji relacija (1). Ostaje još da se izračunaju koeficijenti A_ν.

Kako je

$$\frac{\sin^{n-1} x}{\left[\prod_{\nu=1}^{n} \sin(x-a_\nu)\right]\left[\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu / \sin(x-a_\nu)\right]} \equiv 1,$$

biće

$$\lim_{x\to a_k} \frac{\sin^{n-1} x}{\left[\prod_{\nu=1}^{n} \sin(x-a_\nu)\right]\left[\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu / \sin(x-a_\nu)\right]} = 1,$$

ako postoji navedena granična vrednost.

Granična vrednost koja se javlja na levoj strani poslednje relacije iznosi

$$\frac{\sin^{n-1} a_k}{A_k \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n} \sin(a_k-a_\nu)},$$

pa je stoga

$$A_k = \frac{\sin^{n-1} a_k}{\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n} \sin(a_k-a_\nu)}.$$

Ovaj interesantan dokaz dao je *D. Đoković*.

Primedba. N. A. Kolmogorov, rešavajući jedan problem geometrije, takođe je izveo formulu (1). Algebarski dokaz koji je napred naveden, ima preimućstvo nad geometriskim dokazom *Kolmogorova*. *Đokovićev* dokaz je kraći i podesniji za unošenje u literaturu.

Formula (1) je interesantna po tome što je ona analogna formuli za razlaganje racionalne funkcije na parcijalne razlomke.

Literatura:

1° *Н. А. Колмогоров: Свойства систем точек, лежащих на прямой линии, на окружности и на равносторонней гиперболе* (*Ученые записки*, Факультет физико-математический, Кировский государственный педагогический институт им. *В. И. Ленина*, вып. 7, 1953, стр. 15—28).

2° *Mathematical Reviews*, vol. 17, 1956, p. 997 (referat *N. Court*-a o navedenom članku Kolmogorova).

3. Proveriti identitete:

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)} \equiv \sum \frac{\sin a \cos a}{\sin(x-a)\sin(a-b)\sin(a-c)};$$

$$\frac{\sin x}{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)} \equiv \sum \frac{\sin a \cos(x-a)}{\sin(x-a)\sin(a-b)\sin(a-c)}.$$

4. Ispitati da li se funkcija

$$f(x) \equiv (\sin x)/\{\sin(x-a)\sin(x-b)\sin(x-c)\}$$
$$(a\neq b\neq c\neq a)$$

može razložiti u zbir od tri sabirka oblika

$$A/\sin(x-a),\quad B/\sin(x-b),\quad C/\sin(x-c),$$

gde su A, B, C nezavisni od x.

Ako je ovo mogućno, odrediti funkciju $\int f(x)\,dx$, gde je $f(x)$ ranije definisana funkcija.

Da li se dobijeni rezultati mogu primeniti na opštiji slučaj

$$F(x) \equiv (\sin x)^{n-3} / \prod_{k=1}^{n} \{\sin(x-a_k)\} \qquad (n \geqslant 3)?$$

5. Posmatrati u ravni n pravih od kojih nikoje dve nisu paralelne, a nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku.

Odrediti broj poligonalnih oblasti, konačnih ili beskonačnih, na koje je ova ravan izdeljena.

Rešenje. Od datih pravih uočimo $k-1$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ pravih i označimo sa s_{k-1} broj njihovih preseka. Ako sada uzmemo još jednu pravu, tada je broj preseka

$$(1) \qquad s_k = s_{k-1} + k - 1,$$

jer ta prava seče $k-1$ uočenih pravih u $k-1$ tačaka.

Stavljajući u (1) redom $k=2, 3, \ldots, n$, dobija se skup jednačina:

$$(2) \qquad s_2 = s_1 + 1, \quad s_3 = s_2 + 2, \; \ldots, \; s_n = s_{n-1} + n - 1.$$

Kako je $s_1 = 0$, iz (2) sleduje

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = n(n-1)/2.$$

Prema tome, n pravih koje imaju navedenu osobinu seku se u $\binom{n}{2}$ tačaka.

Posmatrajmo opet $k-1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ pravih i označimo sa S_{k-1} broj oblasti na koje je podeljena data ravan. Uzmimo još jednu pravu. Ona seče sve uočene prave u $k-1$ tačaka i na taj način se dobija k novih oblasti. Stoga postoji sledeća rekurentna relacija:

$$(3) \qquad S_k = S_{k-1} + k.$$

Ako se ovde stavlja $k=1, 2, \ldots, n$, dobija se

$$(4) \qquad S_1 = S_0 + 1, \quad S_2 = S_1 + 2, \; \ldots, \; S_n = S_{n-1} + n.$$

Budući da je $S_0 = 1$, iz (4) izlazi

$$S_n = 1 + (1 + 2 + \cdots + n) = \binom{n+1}{2} + 1.$$

6. 1° Pokazati da je funkcija

$$(1) \qquad f(x_1, x_2) \equiv F(x_1 + x_2) \pm \{G(x_1) - G(x_2)\} \qquad (F \text{ i } G \text{ neprekidne funkcije})$$

rešenje funkcionalne jednačine.

$$(2) \qquad \{f(x_1, x_2 + x_3) + f(x_2 + x_3, x_1)\} + \{f(x_2, x_3 + x_1) + f(x_3 + x_1, x_2)\} \\ - 2\{f(x_3, x_1 + x_2) + f(x_1 + x_2, x_3)\} = 0.$$

2° Pokazati da je funkcija

$$(3) \qquad f(x_1, x_2) \equiv F(x_1 + x_2) + G(x_1) + G(x_2)$$

rešenje funkcionalne jednačine

$$(4) \qquad A\{f(x_1, x_2 + x_3) - f(x_2 + x_3, x_1)\} + B\{f(x_2, x_3 + x_1) - f(x_3 + x_1, x_2)\} \\ + C\{f(x_3, x_1 + x_2) - f(x_1 + x_2, x_3)\} = 0$$

$$(A, B, C \text{ ma kakve konstante}).$$

Primedba. Ostaje otvoreno pitanje da li jednačina (2), odnosno (4), ima i drugih rešenja osim (1), odnosno (3).

7. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu Oxy date su tačke

$$P_k(x_k, y_k) \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Odrediti tačku $P_0(x_0, y_0)$ tako da zbir kvadrata otstojanja od tačke P_0 do tačaka P_k bude što manji.

8. Diskutovati broj realnih rešenja jednačine

$$(E) \qquad \operatorname{th} x = a x$$

prema raznim vrednostima parametra a.

Jednačina (E) za $a=1$ ima rešenje $x=0$. Odrediti red nule $x=0$ funkcije

$$\operatorname{th} x - x.$$

9. Eliminisati parametre θ i φ iz relacija

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 2a, \qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2a,$$

$$\sin(\theta/2)\sin(\varphi/2) = 1/2.$$

Proveriti da li je relacija $y^2 = 4a^2 - 4ax$ rezultat eliminacije.

10. Izvesti formulu

$$\operatorname{tg} nx \equiv \frac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + C_n^5 \operatorname{tg}^5 x - \cdots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + C_n^4 \operatorname{tg}^4 x - \cdots} \qquad \{n \text{ prirodan broj; } C_n^k = \tbinom{n}{k}\}.$$

Rešenje. Polazeći od *Moivre*-ove formule

$$(\cos x + i\sin x)^n \equiv \cos nx + i\sin nx,$$

dobija se:

$$\cos nx \equiv \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots,$$

$$\sin nx \equiv \binom{n}{1}\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \sin^5 x - \cdots.$$

Iz poslednjih relacija sleduje

$$\operatorname{tg} nx \equiv \frac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + C_n^5 \operatorname{tg}^5 x - \cdots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + C_n^4 \operatorname{tg}^4 x - \cdots}.$$

Tako je, na primer,

$$\operatorname{tg} 5x \equiv \frac{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}{1 - 10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}, \qquad \operatorname{tg} 6x \equiv \frac{6\operatorname{tg} x - 20\operatorname{tg}^3 x + 6\operatorname{tg}^5 x}{1 - 15\operatorname{tg}^2 x + 15\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}.$$

11. Svaku stranu trougla ABC podeliti na tri jednaka dela i označiti deone tačke sa:

A_1 i A_2 na strani BC; B_1 i B_2 na strani AC; C_1 i C_2 na strani AB.

Tačke su raspoređene po sledećem redu: $A, C_1, C_2, B, A_1, A_2, C, B_1, B_2, A$.

Prave C_1C, A_1A i B_1B ograničavaju trougao T_1.

Prave C_2C, A_2A i B_2B ograničavaju trougao T_2.

1° Ispitati, metodom koordinata, da li su veličine površina ovih trouglova jednake.

2° Odrediti razmere: area $\triangle ABC/$area $\triangle T_1$ i area $\triangle ABC/$area $\triangle T_2$.

12. Dokazati

$$(1)\qquad \left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n \equiv \frac{1+i\operatorname{tg}n\theta}{1-i\operatorname{tg}n\theta}$$

$\left\{\theta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \theta \text{ realno; } n \text{ prirodan broj; } k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$

Rešenje.

$$\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta} \equiv \frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta} \equiv (\cos\theta+i\sin\theta)^2;$$

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\theta}{1-i\operatorname{tg}\theta}\right)^n \equiv (\cos\theta+i\sin\theta)^{2n} \equiv \cos 2n\theta + i\sin 2n\theta;$$

$$\frac{1+i\operatorname{tg}n\theta}{1-i\operatorname{tg}n\theta} \equiv (\cos n\theta+i\sin n\theta)^2 \equiv \cos 2n\theta+i\sin 2n\theta.$$

Ovim smo verifikovali identitet (1).

Generalizacija. Da li gornji identitet ostaje u važnosti ako je n ma kakav: 1° racionalan broj, 2° realan broj?

13. 1° Polazeći od relacija

$$(R)\qquad \sin\theta+\sin\varphi=a, \qquad \cos\theta+\cos\varphi=b,$$

dobija se

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{4a}{a^2+b^2+2b}.$$

Dokazati ovo i izvesti analogni rezultat za hiperbolične funkcije.

2° Uzimajući kao polaznu tačku iste relacije (R), odrediti

$$\cos(\theta+\varphi), \qquad \sin(\theta+\varphi).$$

Rešenje. 1°

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \equiv \frac{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \equiv \frac{2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}.$$

Umesto $\sin\theta+\sin\varphi=a$, $\cos\theta+\cos\varphi=b$, može se pisati:

$$2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a, \qquad 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=b,$$

odakle se dobija

$$\operatorname{tg}\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{a}{b}, \qquad \sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}=\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Dalje je

$$\cos\frac{\theta-\varphi}{2}=a\Big/\left(2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right), \qquad \cos\frac{\theta+\varphi}{2}=b\Big/\left(2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=\frac{b}{a}\sin\frac{\theta+\varphi}{2}.$$

Izraz $\dfrac{2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+\cos\frac{\theta-\varphi}{2}}$ postaje $\dfrac{4a\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}}{2b\sin^2\frac{\theta+\varphi}{2}+a^2}$

i najzad

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{4a}{a^2+b^2+2b}.$$

Ova formula nema smisla ako je $a^2+b^2+2b=0$.
Na analogan način dolazi se do formule za hiperbolične funkcije.

14. Jedna tetiva nekog kruga ima osobinu da deli pripadajući joj sektor na dva dela jednakih površina. Koliki je centralni ugao koji odgovara toj tetivi?

Rezultat. 108° 36′ 14″.

15. I. Neka su: Π jedna ravan, O jedna tačka ravni Π i L_k $(k=1, 2, \ldots, s)$ konačan niz pravih koje prolaze kroz tačku O i leže u ravni Π.

Neka je $E_k=\{S_k^1, S_k^2, \ldots, S_k^{n_k}\}$ skup od n_k tačaka prave L_k, gde O ne pripada skupu E_k.

a) Koliko ima trouglova čija temena pripadaju skupu:

1° $E_1 \cup E_2$; 2° $E_1 \cup E_2 \cup E_3$; 3° $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_s$.

b) Koliko ima trouglova čija su temena: tačka O i dve druge tačke koje pripadaju dvama različitim E_k.

II. Neka su L_k $(k=1, 2, \ldots, s)$ s pravih koje prolaze kroz tačku O, tako da nikoje tri nisu komplanarne.

a) Ako E_k ima isto značenje kao u I delu ovog problema, odrediti kardinalni broj skupa tetraedara čija temena pripadaju skupu:

1° $E_1 \cup E_2 \cup E_3$; 2° $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_s$ $(s \geqslant 4)$.

b) Koliko ima tetraedara čija su temena: tačka O i tri tačke koje pripadaju trima različitim E_k?

III. Generalisati pitanja za prostor od $N\,(\geqslant 4)$ dimenzija.

16. U prostoru je dato $n\,(\geqslant 4)$ tačaka pod uslovom da nikoje četiri ne leže u jednoj ravni. Ako se od ovih tačaka uzmu po tri one određuju N ravni.

Da li postoji takvo n da broj pravih koje se dobijaju međusobnim presekom tih N ravni bude jednak broju pravih koje su određene sa po dve od datih tačaka?

Da li je potreban i uslov da tri tačke ne leže na jednoj pravoj?

17. Odrediti relativnu i procentnu grešku koja se čini kad se na krugu poluprečnika r luk koji pripada centralnom uglu od 3° zameni odgovarajućom tetivom.

18. 1° Ako je $P(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, odrediti maksimum funkcije $|d^2P(x)/dx^2|$ na segmentu $[-1, +1]$.

2° Odrediti maksimum funkcije $|d^4P(x)/dx^4|$ na segmentu $[-1, +1]$, gde je

$$P(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

19. Date su dve sfere poluprečnika R i r $(<R)$. Centralno rastojanje ovih sfera je $a\,(R-r<a\leqslant R+r)$.

Izraziti zapreminu V prave kružne kupe, opisane oko ovih sfera, kao funkciju veličina $k\,(=R-r)$, a, R.

Odrediti a pod uslovom da zapremina V ima minimalnu vrednost.

20. Primenom *Taylor*-ove formule izračunati približnu vrednost određenog integrala $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ tako da greška bude manja od 10^{-4}.

21. Data je funkcija

(1) $f(x, a, b) \equiv (x-a)^n (x-b)^n$ (a, b parametri; n prirodan broj).

Primenom *Leibniz*-ove formule odrediti $\partial^n f(x, a, b)/\partial x^n$ i zatim formirati

(2) $$\partial^n f(x, a, a)/\partial x^n.$$

S druge strane, polazeći od (1) odrediti

$$\partial^n (x-a)^{2n}/\partial x^n.$$

Upoređujući dobijene rezultate, da li će se doći do identiteta

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\equiv\binom{2n}{n}?$$

22. Na tetivi OM parabole (P) $y^2=(3/2)x$ nanesena je duž OA čija je veličina $1/\overline{OM}$ (O koordinatni početak).

1° Naći geometrisko mesto tačaka A kad se tačka M kreće po paraboli i nacrtati ga.

2° Izračunati veličinu površine S, ograničene dobijenim geometriskim mestom i parabolom (P), i zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine S oko x-ose.

23. Konac dužine l, učvršćen jednim krajem u tački M, provučen je kroz alku koja klizi duž pravog horizontalnog štapa čija je srednja tačka na vertikali kroz M, a na rastojanju d od te tačke. O slobodan kraj konca obešen je teg. Uzimajući idealne podatke (da je konac bez težine, da je štap prava, da su alka i teg svedeni na odgovarajuće tačke),

1° odrediti geometrisko mesto koje opisuje kraj konca kad se alka kreće duž štapa;

2° izračunati veličinu površine koju opisuje pri kretanju deo konca od alke do tega.

24. Ako je $r=f(\theta)$ jednačina krive u polarnim koordinatama, pokazati da je jednačina tangente krive u tački $M_0(r_0, \theta_0)$ data jednačinom

$$r r_0 \cos(\theta-\theta_0) = r_0^2 + r\, r_0' \sin(\theta-\theta_0),$$

gde je $r_0' = f'(\theta_0)$.

25. Duž luka AB elipse, čije su poluose $\overline{OA}(=a)$, $\overline{OB}(=b<a)$, kreće se tačka M, počev od tačke M_0, prema tački B tako da je vektor ubrzanja stalno normalan na vektoru $\overrightarrow{OM}$. Hoće li tačka M dospeti u tačku B?

26. Pokazati da diferencna jednačina

$$f(x+2)-5f(x+1)+6f(x)=0$$

ima dva rešenja oblika $f(x) \equiv r^x$, gde je r konstanta koju treba odrediti.

Ispitati da li je linearna homogena kombinacija tih rešenja takođe rešenje date diferencne jednačine.

Rešiti diferencne jednačine:

1° $f(n)-f(n-1)-8f(n-2)+12f(n-3)=0$;

2° $f(n)-2(\cos\theta)f(n-1)+f(n-2)=0$,

gde je θ jedan parametar.

27. Krive definisane jednačinama

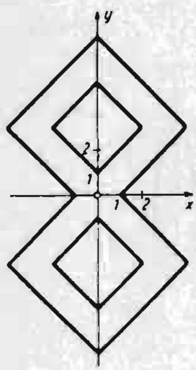
$$1^\circ \qquad \Big|\,|x| + \big||y| - 3\big| - 3\,\Big| = 1;$$

$$2^\circ \qquad \Big|\big||x| - 1\big| - 1\Big| = \Big|\big||y| - 3\big| - 1\Big| - 1$$

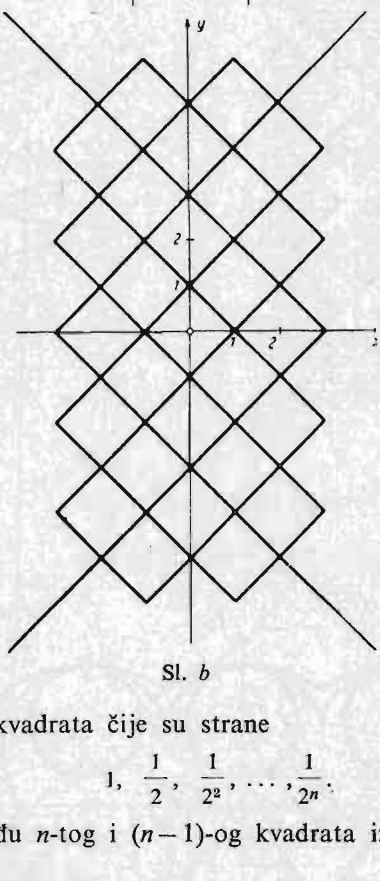
prikazane su na slikama *a* i *b*. Proveriti.

28. Na slici *c* šrafirati oblasti za koje je

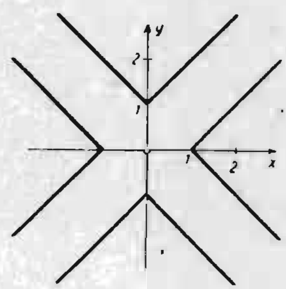
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant 1.$$



Sl. *a*



Sl. *b*

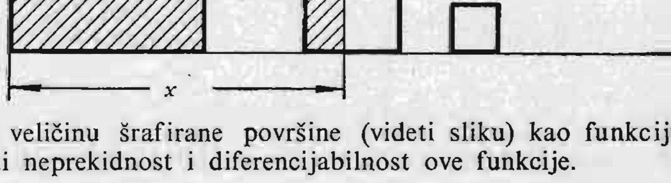


Sl. *c*

29. Dat je niz kvadrata čije su strane

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n}.$$

Rastojanje između n-tog i $(n-1)$-og kvadrata iznosi $1/2^{n-1}$.



Izraziti veličinu šrafirane površine (videti sliku) kao funkciju rastojanja x i ispitati neprekidnost i diferencijabilnost ove funkcije.

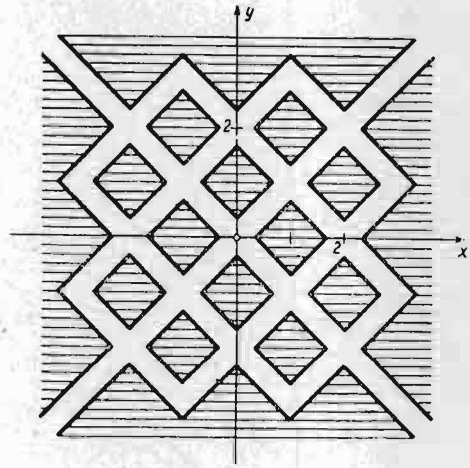
30. Proveriti da li relacija

$$\Big|\,\big|\,||x|-1|-1\,\big|-\big|\,||y|-1|-1\,\big|\,\Big|\geqslant\frac{1}{3}$$

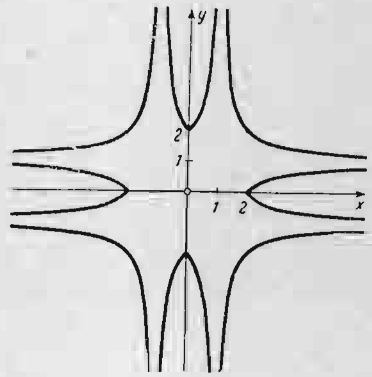
definiše šrafiranu oblast na slici *A*.

31. Na slici *B* šrafirati oblasti za koje je

$$|(|x|-1)(|y|-1)|\leqslant 1.$$



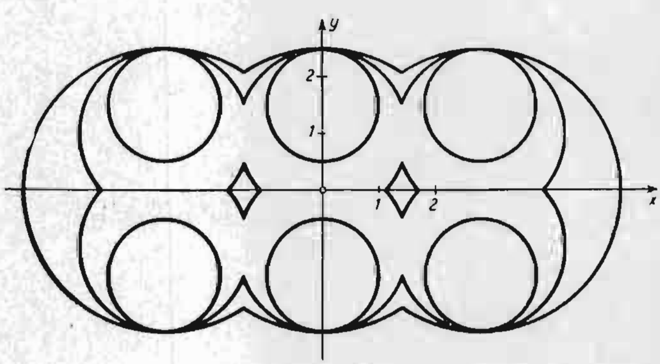
Sl. *A*



Sl. *B*

32. Na slici *C* šrafirati oblasti za koje je

$$\left|\,\left|\,2\,\frac{\{||x|-1{,}4|-1{,}4\}^2+(2{,}5-|y|)^2}{2{,}5-|y|}-5\right|-3\right|=2.$$



Sl. *C*

33. Proveriti da li se izraz

$$\frac{1+x-x^2}{(1+2x)(1-x)(1+x^2)},$$

ako je x malo, može aproksimirati binomom $a+bx^3$ (a i b konstante).

34. Dokazati relaciju

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\binom{k+\nu}{k}\binom{2k+1}{k-\nu}=1.$$

Rešenje. Ako je $|x|<1$, tada je

$$(1+x)^{-k-1}=1+\binom{-k-1}{1}x+\binom{-k-1}{2}x^2+\cdots+\binom{-k-1}{\nu}x^{\nu}+\cdots$$

Važi i razvoj

$$(1+x)^{2k+1}=1+\binom{2k+1}{1}x+\binom{2k+1}{2}x^2+\cdots+\binom{2k+1}{k-\nu}x^{k-\nu}+\cdots+x^{2k+1}.$$

Koeficijent uz x^k u razvoju

$$(1+x)^{-k-1}\cdot(1+x)^{2k+1} \quad \text{odnosno} \quad (1+x)^k$$

ima oblik $\sum_{\nu=0}^{k}\binom{-k-1}{\nu}\binom{2k+1}{k-\nu}$. Vrednost ovog zbira je 1.

Budući da je

$$\binom{-k-1}{\nu}=(-1)^{\nu}\binom{k+\nu}{k},$$

dokazali smo relaciju (1).

35. Dokazati $\sum_{k=0}^{2n}2^k\binom{4n-k}{2n}\binom{2n+k}{2n}(4^{n-k}-1)=0.$

Rešenje. Za svaku funkciju $f(x)$ važi

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{2n}f(k)=\sum_{k=0}^{2n}f(2n-k).$$

Funkcija

$$f(k)=2^k\binom{4n-k}{2n}\binom{2n+k}{2n}(4^{n-k}-1)$$

uživa i posebnu osobinu

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{2n}f(k)=-\sum_{k=0}^{2n}f(2n-k).$$

Sabiranjem, iz jednačina (1) i (2) dobija se

$$\sum_{k=0}^{2n}f(k)=0,$$

što je i trebalo dokazati.

36. Dat je izraz

$$L[y]=D^n y+f_1(x)D^{n-1}y+\cdots+f_{n-1}(x)Dy+f_n(x)y,$$
$$(D^k=d^k/dx^k, \quad k=1,2,\ldots,n; \quad D^0y=y),$$

gde su $f_k(x)$ diferencijabilne funkcije.

Dokazati formulu

$$D^{r-n}L[y]=D^r y+g_{1,r}(x)D^{r-1}y+\cdots+g_{r-1,r}(x)Dy+g_{r,r}(x)y,$$

gde je $g_{q,r}(x)=\sum_{k=u}^{k=v}\binom{r-n}{q-k}D^{q-k}f_k(x)$ $\{u=\max(1,\ q-r+n),\ v=\min(q,\ n)\}$.

Videti: *D. S. Mitrinovitch: Sur une formule d'Analyse* (*Revista de Ciencias*, Lima, **40**, 1938, p. 449—452).

37. Na osnovu grafika funkcije

$$x^p \quad (p \text{ pozitivan broj})$$

utvrditi da je

$$a^p < \frac{1}{b-a}\int_a^b x^p\,dx < b^p \qquad (0 \leqslant a < b).$$

Polazeći od ove relacije, pokazati da važi dvostruka nejednakost

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p < \frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}.$$

38. Ako je $n = \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu$ (n prirodan broj; n_ν prirodan broj), tada je

$$(1) \qquad n!/\prod_{\nu=1}^{k}(n_\nu!) \leqslant n^n/\prod_{\nu=1}^{k}(n_\nu^{\,n_\nu}).$$

Dokaz. Iz relacije

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

sleduje

$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)^n = n^n.$$

Kako je svaki član u razvoju izraza $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)^n$ pozitivan i manji od zbira svih članova, biće

$$\frac{n!}{\prod_{\nu=1}^{k}(n_\nu!)} \prod_{\nu=1}^{k} (n_\nu^{\,n_\nu}) \leqslant n^n,$$

odakle sleduje (1).

Ako je $n = n_1$, tada (1) postaje jednakost.

Ovo interesantno rešenje naveo je *Chih-yi Wang* (*Mathematics Magazine*, vol. 31, No. 2, 1957, p. 113).

39. Neka su A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) temena jednog kvadrata i neka je P proizvoljna tačka u ravni tog kvadrata.

Dokazati relaciju

$$\sum_{k=1}^{4} \overline{A_k P} \geqslant (1+\sqrt{2}) \max_k \overline{A_k P} + \min_k \overline{A_k P}$$

i odrediti tačku P za koju važi znak jednakosti.

40. Sumirati:

$$(1) \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k (n-k)\binom{2n}{k}; \quad (2) \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{2n}{k}; \quad (3) \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k \binom{2n}{k}.$$

Rešenje. 1° Kao polaznu tačku uzmimo identitet

$$(1-x)^{2n}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = (1-x)^{2n-2} = \left[\sum_{r=0}^{2n}(-1)^r\binom{2n}{r}x^r\right]\left(\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1}\right) \qquad (|x|<1),$$

odnosno $M = N = P$, gde je, na primer, $N = (1-x)^{2n-2}$.

Koeficijent uz x^{n-1} u izrazu N je

$$(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1},$$

dok je izraz (1) koeficijent uz x^{n-1} u izrazu P.

Stoga je

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)\binom{2n}{k}\equiv(-1)^{n-1}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Na analogni način čitalac će sumirati izraze (2) i (3). Za sumiranje izraza (3) može se poći od identiteta

$$-2n(1-x)^{2n-2}\equiv\frac{1}{1-x}\frac{d}{dx}(1-x)^{2n}$$

$$\equiv(1+x+\cdots+x^n+\cdots)\left[-\binom{2n}{1}\cdot 1+\binom{2n}{2}\cdot 2x+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}(n-1)x^{n-2}\right.$$
$$\left.+\cdots+\binom{2n}{2n}(2n)x^{2n-1}\right].$$

$$\therefore\quad -2n(-1)^{n-2}\binom{2n-2}{n-2}\equiv(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}(n-1)+(-1)^{n-2}\binom{2n}{n-2}(n-2)$$
$$+\cdots+(-1)\cdot\binom{2n}{1}.$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k\binom{2n}{k}\equiv(-1)^{n-1}(2n)\binom{2n-2}{n-2}.$$

Generalizacija. Sumirati:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k^r\binom{2n}{k},\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)^r\binom{2n}{k}\qquad (r \text{ prirodan broj}).$$

41. Ako je

$$s_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\cos \nu x,\qquad s_0(x)=\frac{1}{2},$$

tada je:

$$(1)\qquad S_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}s_r(x)=\frac{1}{2k}\left[\frac{\sin(kx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2;\qquad \int_0^{\pi}S_k(x)\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Rešenje. Poći ćemo od formula

$$(2)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kx)=\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}x\right),$$

$$(3)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kx)=\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}x\right).$$

Formula (2) može se dokazati, na primer, metodom matematičke indukcije. Formula (3) sleduje iz (2) diferenciranjem po a.

Prema (3) dobijamo

$$s_n(x)+\frac{1}{2}=\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\therefore\quad s_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Stoga je

$$S_k(x)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{2k\sin\frac{x}{2}}\sum_{r=0}^{k-1}\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)x.$$

Stavimo li u (2) $a=x/2$, dobija se

$$\sum_{r=0}^{k-1}\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\sin^2(kx/2)}{\sin(x/2)},$$

pa S_k postaje

$$S_k=\frac{1}{2k\sin(x/2)}\frac{\sin^2(kx/2)}{\sin(x/2)}=\frac{1}{2k}\left[\frac{\sin(kx/2)}{\sin(x/2)}\right]^2.$$

Posmatrajmo sada integral

$$\int_0^\pi S_k(x)\,dx=\frac{1}{k}\int_0^\pi\sum_{r=0}^{k-1}s_r(x)\,dx=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\int_0^\pi s_r(x)\,dx.$$

Kako je

$$\int_0^\pi s_r(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\qquad(r=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

biće

$$\int_0^\pi S_k(x)\,dx=\frac{1}{k}\,\frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{k-1}1=\frac{\pi}{2}.$$

42. Ako je $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$ i ako je

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{k}a_\nu\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu\qquad(k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n),$$

tada važi

$$(2)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2.$$

Dokaz. Posle množenja sa a_k-a_{k+1} relacija (1) postaje

$$(3)\qquad (a_k-a_{k+1})\sum_{\nu=1}^{k}a_\nu\leqslant(a_k-a_{k+1})\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu\qquad(k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n),$$

gde je $a_{n+1}=0$.

Sumirajući od $k=1$ do $k=n$ obe strane relacije (3), dobija se

$$(4)\qquad \sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu.$$

Uzimajući u obzir *Schwarz*-ovu nejednakost

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right)^2\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\right),$$

relacija (4) postaje

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)^2\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right)^2\leqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\right)$$

odnosno

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2.$$

Znaku jednakosti ima mesta tada i samo tada, kada je

$$a_\nu=b_\nu\qquad(\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n).$$

43. Ako je

$$(1) \qquad a < x < b$$

i ako se x aproksimira vrednošću

$$(2) \qquad x \approx x_0 = \frac{b+a}{2}.$$

tada je

$$(3) \qquad |x - x_0| < \frac{b-a}{2}.$$

Dokazati navedeni stav.

Primena. Za izračunavanje integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \; (= \log_e 2)$$

primeniti metod upisanih i opisanih pravougaonika podelivši, pri tome, interval (0, 1) na osam jednakih delova.

Sa kojom je greškom, prema gornjem stavu, izračunat $\log_e 2$? Sa koliko je sigurno tačnih cifara izračunat ovaj logaritam?

Rešenje. Umesto relacije (1) može se pisati

$$x = a + \theta (b-a) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Na osnovu ovoga je

$$x - x_0 = \frac{b-a}{2} (2\theta - 1) \qquad (0 < \theta < 1),$$

odakle sleduje

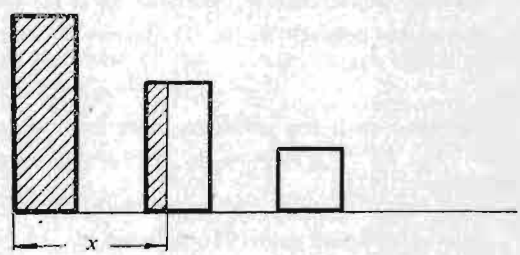
$$|x - x_0| < \frac{b-a}{2}.$$

Čitalac će primeniti ovaj stav na navedeni integral.

44. Tri pravougaonika zauzimaju međusobni položaj kao što je naznačeno na slici (oni nemaju zajedničku površinu). Njihove dimenzije su respektivno:

$$a \times b, \quad a \times c, \quad a \times d.$$

Otstojanje između dve susedne strane I i II pravougaonika je λ, dok je otstojanje između dve susedne strane II i III pravougaonika jednako μ.



Izraziti veličinu šrafirane površine kao funkciju promenljive x i parametara

$$a, \; b, \; c, \; d, \; \lambda, \; \mu.$$

45. Odrediti $f^{(n)}(0)$, gde je $f(x) = x^3/(x^2-1)$.

Rezultat. $f^{(n)}(0) = 0$ (n parno); $f^{(n)}(0) = -n!$ [$n (>1)$ neparno]; $f'(0) = 0$.

46. Dokazati formule:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{\cos x}{x}=\left[P_n(x)\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)+Q_n(x)\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)\right]x^{-n-1};$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{\sin x}{x}=\left[R_n(x)\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)+S_n(x)\cos\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)\right]x^{-n-1},$$

gde su $P_n(x)$ i $R_n(x)$ polinomi po x stepena n, a $Q_n(x)$ i $S_n(x)$ polinomi stepena $n-1$.

47. Dokazati:

$$\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\frac{h^4}{4!}\sin x+\cdots;$$

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\frac{h^4}{4!}\cos x+\cdots.$$

48. Proveriti formulu

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[S_{2n-1}(x)\cos x-C_{2n}(x)\sin x],$$

gde su S_{2n-1} i C_{2n} izrazi oblika

$$S_{2n-1}(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$C_{2n}(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\cdots-(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Primedba. Da li se u poslednjim dvema formulama mogu izostaviti $\sin x$ i $\cos x$?

49. Ako su x_k realni brojevi, dokazati da su skupovi nejednakosti

(1) $\qquad \sigma_k>0 \quad (k=1, 2, \ldots, n);$

(2) $\qquad x_k>0 \quad (k=1, 2, \ldots, n)$

ekvivalentni.

σ_k označava osnovnu simetričnu funkciju promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reda $k\ (\leqslant n)$, tj. $\sigma_k=\Sigma x_1 x_2\cdots x_k$.

Rešenje. Neposredno se zaključuje da iz (2) sleduje (1).

Da bismo pokazali da iz (1) sleduje (2), obrazujmo algebarsku jednačinu (stepena n), čiji su koreni $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Ta jednačina ima oblik

$$x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0.$$

Ispitajmo da li ova jednačina može imati negativnih korena, tj. posmatrajmo jednačinu

$$(-x)^n-\sigma_1(-x)^{n-1}+\sigma_2(-x)^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0,$$

odnosno

$$x^n+\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}+\cdots+\sigma_n=0.$$

Ako su ispunjeni uslovi (1), polinom

$$x^n+\sigma_1 x^{n-1}+\sigma_2 x^{n-2}+\cdots+\sigma_n$$

ne anulira se ni za jednu vrednost x koja je pozitivna. Kako se pak poslednji polinom anulira za

$$x=-x_k \qquad (k=1, 2, \ldots n),$$

izlazi da je

$$x_k>0 \qquad (k=1, 2, \ldots n),$$

odnosno iz uslova (1) sleduju uslovi (2).

Dakle, skupovi nejednakosti (1) i (2) su ekvivalentni.

50. Funkcija $f(x)$ je neprekidna na segmentu $[0, a]$, gde je $a>0$, i diferencijabilna u intervalu $(0, a)$.

Povrh toga je: $f(0)=0$, $f'(x)>0$ $(0<x<a)$.

Dokazati stav:

Ako $f'(x)$ raste kad x raste od 0 do a, tada $f(x)/x$ raste u istom intervalu.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je izvod

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

pozitivan, dakle da je $h(x)>0$, gde je

$$h(x)=xf'(x)-f(x).$$

Odavde sleduje

$$h'(x)=xf''(x),$$

pa zaključujemo da je $xf''(x)>0$ za $x\in(0, a)$, jer je po pretpostavci $f'(x)$ rastuća funkcija u intervalu $(0, a)$, što znači da je $f''(x)>0$ u posmatranom intervalu.

Prema tome, $[f(x)/x]'>0$ za $x\in(0, a)$, odakle sleduje da je $f(x)/x$ rastuća funkcija za $x\in(0, a)$.

No, po pretpostavci f' raste, pa je $f''>0$ i $xf''>0$ za $x\in(0, a)$; to znači da u $(0, a)$ i funkcija h strogo raste; kako je $h(0)=0$, biće $h>0$ u $(0, a)$, što se i htelo pokazati.

51. Ako je n prirodan broj, izvesti faktorizaciju

$$P(x)\equiv x^{2n}-2(\cos na)x^n+1\equiv\sum_{k=1}^{n}\left[x^2-2x\cos\frac{na+2(k-1)\pi}{n}+1\right]$$

i, na osnovu nje, izračunati

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\left[\frac{a}{2}+\frac{(k-1)\pi}{n}\right].$$

Rešenje. Nule polinoma $P(x)$ su:

$$x=\exp\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)i \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1);$$

$$x=\exp\left(-a+\frac{2k\pi}{n}\right)i \qquad (k=1, 2, 3, \ldots, n).$$

Grupišimo ove nule po parovima konjugovanih vrednosti

$$x_k=\exp\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)i, \qquad \overline{x}_k=\exp\left(-a+\frac{2(n-k)\pi}{n}\right)i$$

$$(k=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Kako je

$$x_k+\overline{x}_k\equiv 2\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad x_k\overline{x}_k\equiv 1,$$

dobijamo

$$P(x)\equiv\prod_{k=0}^{n-1}(x-x_k)(x-\overline{x}_k)\equiv\prod_{k=0}^{n-1}[x^2-(x_k+\overline{x}_k)x+x_k\overline{x}_k]$$

$$\equiv\prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2-2x\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right].$$

Za $x=1$ ovaj identitet postaje

$$P(1)=2(1-\cos na)=4\sin^2\frac{na}{2}=\prod_{k=0}^{n-1} 2\left[1-\cos 2\left(\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\right]=4^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{n}\right).$$

Posle korenovanja odavde dobijamo

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left|\sin\frac{na}{2}\right|=\left|\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\right|.$$

Jednostavnom analizom se može pokazati da izrazi pod oznakom apsolutne vrednosti, na levoj i desnoj strani poslednje jednakosti, uvek imaju isti znak, tako da možemo pisati

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{na}{2}.$$

Primedba. Iz poslednje relacije možemo dobiti izraz za proizvod $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ na sledeći način.

Napišimo dobijenu relaciju u obliku:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\qquad (a\neq 0).$$

Pustimo li da a teži nuli, dobićemo

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ovo je rešenje dao *D. Đoković.*

52. Odrediti parametre a, b, c, p, q, r tako da krive

$$y=p+qx+rx^2,\qquad y=a+be^{cx}$$

u tački $x=0$ imaju dodir što je mogućno višeg reda.

Koji je red dodira krivih $y=1+x-x^2/2$, $y=2-e^{-x}$ u tački $x=0$?

Generalizacija. Odrediti parametre tako da krive

$$(1)\qquad y=\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x^{n-\nu},$$

$$(2)\qquad y=a+be^{cx},$$

imaju u tački $x=0$ dodir što je mogućno višeg reda, i za taj slučaj, ako je kriva (2) data, naći krivu (1).

53. Dat je integral

$$I_n=2n\operatorname{cotg}^n a\int_0^a \operatorname{tg}^n x\,dx\qquad (0<a<\pi/2;\ n \text{ prirodan broj}).$$

Pokazati da važi relacija

$$(1)\qquad \int_0^a \operatorname{tg}^n x\,dx\leqslant\int_0^a \operatorname{tg}^n x\sec^2 x\,dx$$

i na osnovu nje izvesti majorantnu formulu

$$(2)\qquad I_n<2\operatorname{tg} a.$$

Da li relacije (1) i (2) važe ako je n ma kakav realan broj?

54. Ako su n i k prirodni brojevi, uporediti po veličini izraze

$$n^{n+k} \quad \text{i} \quad (n+k)^n.$$

55. Ako su a i b prirodni brojevi, tada važi relacija

$$a^{42}-b^{42} \equiv 0 \pmod{49}.$$

Dokazati ovaj stav.

56. Odrediti koordinate centra kruga po kome se seku sfere

$$x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9, \qquad (x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25.$$

Odrediti koordinate vrha pravog konusa koji dodiruje obe sfere.

Rezultat. 1° $(-1, 1, 3)$; 2° $(-3, 1, 5)$.

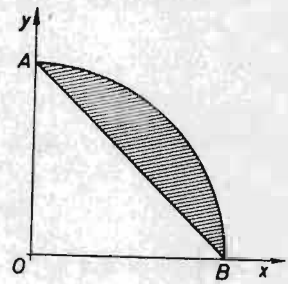
57. Izračunati dvostruki integral

$$\iint_D (x+1)^{-3/2}(x^2+y^2)^{-1/2}\,dx\,dy,$$

gde je D oblast ravni Oxy ograničena lucima parabola

$$y^2-4x-4=0, \quad y^2+6x-9=0, \quad y^2-2x-1=0, \quad y^2+4x-4=0.$$

58. Odrediti srednju vrednost otstojanja tačaka površine sfere (poluprečnika r) od jedne nepomične tačke koja se nalazi na otstojanju d od centra sfere.



59. Iz kruga poluprečnika r isečen je jedan kvadrant. Izračunati zapreminu tela koje postaje kad šrafirani otsečak izvrši potpunu rotaciju oko tetive AB (videti sliku).

60. Data je površina $xyz=1$. Odrediti jednačinu tangentne ravni koja prolazi kroz pravu

$$x+y-z+2=0, \quad 2x-y+3z-1=0.$$

61. Neka su

$$x=x_1(u), \quad y=y_1(u), \quad z=z_1(u);$$
$$x=x_2(v), \quad y=y_2(v), \quad z=z_2(v)$$

parametarske jednačine dve krive koje u svima tačkama imaju tangente.

Pokazati da je najkraće rastojanje između te dve krive jedna duž koja stoji normalno i na jednoj i na drugoj krivoj.

62. Odrediti jednačine zajedničkih tangentnih ravni elipsoida

$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1, \quad x^2/b^2+y^2/c^2+z^2/a^2=1, \quad x^2/c^2+y^2/a^2+z^2/b^2=1.$$

63. Kroz tačku $(1, 1, 2)$ postaviti ravan koja će sa koordinatnim ravnima zaklapati tetraedar minimalne zapremine. Odrediti jednačinu te ravni.

64. Pokazati da funkcija $(x \log x)/(x^2+1)$ monotono opada počev od jedne vrednosti $x=x_0$. Odrediti $[x_0]+1$, gde je $[x_0]$ najveći ceo broj koji ne premašuje x_0.

Za koje vrednosti x konvergira potencijalni red

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n\log n}{n^2+1}x^n?$$

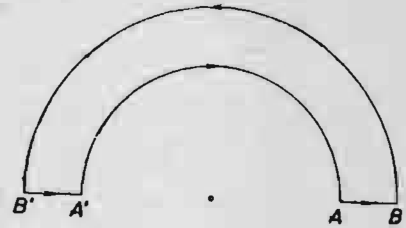
65. Primenom računa ostataka izračunati

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx \qquad (-1<a<+1).$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $f(z)=z^a/(1+z^2)$ kompleksne promenljive z. Jedini njeni singulariteti na konačnoj daljini su $z=\pm i$ (polovi) i $z=0$ (kritički singularitet).

Funkcija $f(z)$ je multiformna, tj.

$$f(z)=e^{a\,\mathrm{Log}\,z}/(1+z^2).$$



Ako se argument promenljive z uzme u razmaku od 0 do 2π, tada je funkcija $\mathrm{Log}\,z$ uniformna. Posmatraćemo determinaciju

$$\mathrm{Log}\,z=a\,(\log|z|+i\theta) \quad (0\leqslant\theta<2\pi).$$

Prema tome, funkcija

$$f(z)=e^{a(\log|z|+i\arg z)}/(1+z^2) \qquad (0\leqslant \arg z<2\pi)$$

uniformna je u konturi Γ (videti sliku).

Tačka z opisuje konturu Γ u direktnom smislu polazeći od tačke A. Duž otsečka AB je $r\leqslant z\leqslant R$ (r i R poluprečnici krugova i to $R>1$).

Argument tačke z, kad stigne u B' je π. Stoga je, duž otsečka $B'A'$,

$$\begin{aligned} f(z)&=e^{a(\log|z|+\pi i)}/[1+(|z|\,e^{\pi i})^2]\\ &=e^{a\pi i}\,\rho^a/(1+\rho^2) \qquad (\rho=|z|). \end{aligned}$$

Ostatak funkcije $f(z)$ za pol $z=i$ je

$$\lim_{z\to i}\frac{e^{a(\log|z|+i\arg z)}}{z+i} \qquad (0\leqslant \arg z<2\pi).$$

U našem slučaju je $|z|=1$, $\arg z=\pi/2$, pa je

$$\mathrm{Res}\,\{f(z)\}_{z=i}=\frac{1}{2i}\,e^{a\pi i/2}.$$

Prema *Cauchy*-evoj teoremi biće

$$(1) \qquad \int_{AB} f(z)\,dz+\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz+\int_{B'A'} f(z)\,dz+\int_{\widehat{A'A}} f(z)\,dz=\pi e^{a\pi i/2}.$$

Uočimo modul

$$\left|\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz\right|=\left|\int_0^\pi \frac{R^a\,e^{a\theta i}}{1+R^2\,e^{2\theta i}}\,Rie^{\theta i}\,d\theta\right|\leqslant\int_0^\pi \frac{R^{a+1}}{R^2-1}\,d\theta=\frac{R^{a+1}}{R^2-1}\,\pi.$$

Kad $R\to\infty$, ovaj količnik se ponaša kao R^{a-1}. Ako je $a-1<0$, tj. $a<1$, tada

$$\left|\int_{\widehat{BB'}} f(z)\,dz\right|\to 0, \qquad \text{ako } R\to\infty.$$

Na analogni način utvrđuje se da za $-1<a$ važi

$$\left|\int_{\widehat{A'A}} f(z)\,dz\right|\to 0, \qquad \text{ako } r\to 0.$$

Ako, dakle, $R\to\infty$, $r\to 0$, tada (1) postaje

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx - e^{a\pi i}\int_\infty^0 \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \pi e^{a\pi i/2},$$

jer duž otsečka $B'A'$ imamo $z=e^{\pi i}\,|z| = -\rho = -x$.

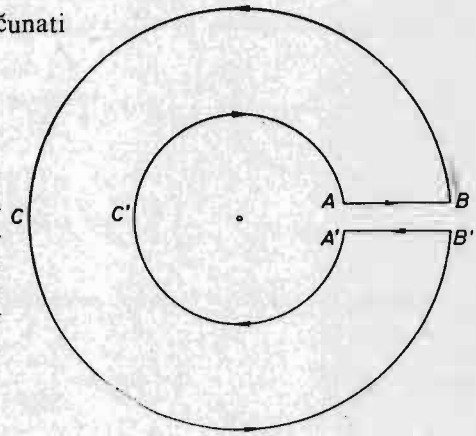
$$\therefore\quad \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi e^{ai\pi/2}}{1+e^{a\pi i}},$$

odnosno

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{a\pi}{2} \qquad (-1<a<+1).$$

66. Primenom računa ostataka izračunati

$$\int_0^\infty x^{a-1}\,dx/(1+x) \qquad (0<a<1).$$



Rešenje. Posmatrajmo kompleksnu funkciju $f(z)=z^{a-1}/(1+z)$. Jedini njeni singulariteti na konačnoj daljini su: $z=-1$ (pol) i $z=0$ (kritički singularitet). Funkcija $f(z)$ je uniformna u konturi Γ, naznačenoj na slici. Pretpostavićemo da argument promenljive z varira od 0 do 2π i time smo završili definisanje funkcije $f(z)$.

Prema *Cauchy*-evoj teoremi je

$$(1)\qquad \int_{AB}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \oint_{BCB'}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \int_{B'A'}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz + \oint_{A'C'A}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,\{f(z)\}_{z=-1}.$$

Posmatrajmo modul

$$\left|\oint_{BCB'}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi}\frac{R^{a-1}e^{(a-1)\theta i}}{1+Re^{\theta i}}\,Rie^{\theta i}d\theta\right| < \int_0^{2\pi}\frac{R^a}{R-1}\,d\theta = \frac{2\pi R^a}{R-1}.$$

Budući da je $0<a<1$, imamo

$$\left|\oint_{BCB'} f(z)\,dz\right| \to 0,\quad \text{kad } R\to\infty.$$

Analogno ovome dokazuje se

$$\left|\oint_{A'C'A} f(z)\,dz\right| \to 0,\quad \text{kad } r\to 0.$$

Integraliti duž AB znači staviti $z=x$ (x realno) i uzeti x od r do R. Dakle

$$\int_{AB}\frac{z^{a-1}}{1+z}\,dz = \int_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Kad tačka z, polazeći od B, stigne u B', njen argument u tački B' je 2π. Prema tome duž otsečka $B'A'$ je

$$z^{a-1} = e^{(a-1)(\log|z|+2\pi i)} = e^{2\pi i(a-1)}\, e^{(a-1)\log|z|}$$

$$= \rho^{a-1} \cdot e^{2\pi i(a-1)} \qquad (|z| = \rho).$$

Stoga je

$$\int_{B'A'} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = e^{2\pi i(a-1)} \int_R^r \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}\, d\rho.$$

Ostatak funkcije $f(z)$ za pol $z = -1$ je

$$\lim_{z\to -1} z^{a-1} = (e^{\pi i})^{a-1} = e^{\pi i(a-1)},$$

jer je argument, po učinjenoj konvenciji, u tački $z = -1$ jednak π.

Ako sada pustimo da $R \to \infty$ i $r \to 0$, relacija (1) postaje

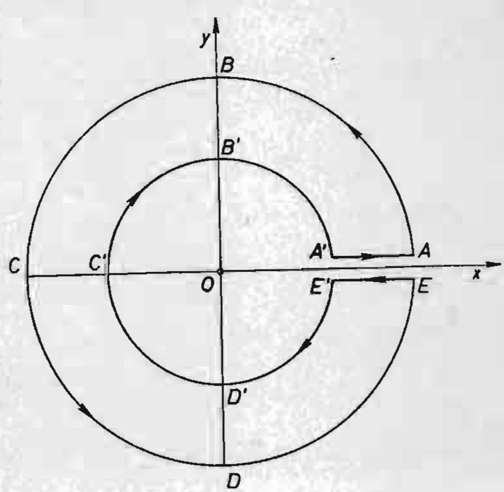
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx + e^{2\pi i(a-1)} \int_\infty^0 \frac{x^{a-1}}{1+x} = 2\pi i e^{\pi i(a-1)}.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = 2\pi i \frac{e^{\pi i(a-1)}}{1-e^{2\pi i(a-1)}} = \frac{-\pi}{\sin(a-1)\pi}.$$

Kako je $\sin(a\pi - \pi) = -\sin a\pi$, poslednja formula postaje

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0 < a < 1).$$

67. Neka je $f(z)$ jedna racionalna funkcija, holomorfna duž pozitivnog dela realne osovine i koja teži nuli kad z beskrajno raste u pozitivnom pravcu, i neka se svi polovi funkcije $f(z)$ nalaze u zatvorenoj konturi $ABCDE - EE' - E'D'C'B'A' - A'A$ (videti sliku).



1° Primeniti *Cauchy*-evu teoremu na krivoliniski integral

$$J = \int z^{a-1} f(z)\, dz \qquad (a > 1)$$

uzet duž naznačene konture.

2° Pustivši da poluprečnik r (manjeg kruga) teži nuli, a da poluprečnik R (većeg kruga) beskrajno raste, na osnovu prethodnog rezultata izračunati integral

$$\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx.$$

68. Polazeći od aritmetičkih progresija

$$a_r, \quad a_r+\alpha_r, \quad \ldots, \quad a_r+(n-1)\alpha_r \quad (r=1, 2, \ldots, p);$$

$$b_s+(n-1)\beta_s, \quad b_s+(n-2)\beta_s, \quad \ldots, \quad b_s \quad (s=1, 2, \ldots, q)$$

formirati sledeće proizvode

$$(1) \quad \prod_{r=1}^{p} a_r, \quad \prod_{r=1}^{p}(a_r+\alpha_r), \quad \ldots, \quad \prod_{r=1}^{p}[a_r+(n-1)\alpha_r];$$

$$(2) \quad \prod_{s=1}^{q}[b_s+(n-1)\beta_s], \quad \prod_{s=1}^{q}[b_s+(n-2)\beta_s], \quad \ldots, \quad \prod_{s=1}^{q} b_s.$$

Odrediti zbir proizvoda respektivnih članova nizova (1) i (2).

Primedba. Zbir

$$\prod_{r=1}^{p} a_r + \prod_{r=1}^{p}(a_r+\alpha_r)+\cdots+\prod_{r=1}^{p}[a_r+(n-1)\alpha_r]$$

odredila je K. *Milošević* (*Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije*, knjiga II, sveska 1—2 (1950) str. 69—74).

69. Odrediti neprekidna rešenja funkcionalne jednačine

$$a f(x) = f(x+b) \quad (a, b \text{ realne konstante}).$$

70. Ako tačka $z\,(=x+iy)$ opiše krug $|z|=1$, odrediti i ispitati trajektoriju tačke

$$w=(z^2-az)/(az-1) \quad (w=u+iv),$$

gde je a kompleksna konstanta.

71. U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu posmatrati krivu čija je jednačina

$$(E) \quad |P(x, y)|+|Q(x, y)|=a^2 \quad (a=\text{const}),$$

gde su $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekidne funkcije promenljivih x i y.

Ispitati da li jednačina (E) definiše zatvorenu krivu.

72. Data je parcijalna jednačina

$$(E_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=a z^b \frac{\partial z}{\partial x} \quad (a, b \text{ realne konstante}).$$

Integraliti jednačinu (E_1) pomoću elementarnih metoda kada su a i b ma kakvi ili navesti bar partikularne slučajeve parametara a i b za koje se jednačina (E_1) integrali.

Na isto pitanje odgovoriti za opštiju jednačinu

$$(E_2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=a(y)\, z^b \frac{\partial z}{\partial x} \quad (b=\text{const}),$$

gde je $a(y)$ diferencijabilna funkcija sa čijim se oblikom može proizvoljno raspolagati.

73. Odrediti sva neprekidna rešenja funkcionalnih jednačina

$$[f(x)+ag(x)]\,[f(y)+bg(y)]=f(x)+f(y);$$

$$f^{(m)}(x)\,f^{(n)}(y)=af^{(p)}(x)+bf^{(q)}(y)+c$$

$\{a, b, c$ proizvoljne konstante; m, n, p, q nenegativni celi brojevi; $f^{(k)}(t)=d^k f(t)/dt^k\}$.

74. Dokazati *Trigg*-ovu relaciju

$$\{1\cdot 2\cdots k\}\{n(n-1)\cdots(n-k+1)\}+\{2\cdot 3\cdots(k+1)\}\{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\}$$
$$+\cdots+\{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n\}\{k(k-1)\cdots 2\cdot 1\}$$
$$\equiv (k!)^2\binom{n+k+1}{2k+1}.$$

75. Ispitati da li važi relacija

$$(A\cup B)\cap(C\cup D)\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap D),$$

gde su A, B, C, D ma kakvi podskupovi jednog skupa E.

Rezultat. Ne važi.

76. Dat je skup

$$N=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \quad (a_k<a_r \text{ za } k<r),$$

gde su a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ prirodni brojevi.

Posmatrati podskupove N_{pq} skupa N, gde se svaki podskup sastoji od rastućeg niza od $p\,(1<p<n)$ elemenata, takvih da razlika između dva uzastopna elementa niza (o kome je reč) bude q (= prirodan broj).

Odrediti broj podskupova N_{pq} u sledećim slučajevima:

1° $a_k=k$; 2° $a_k=a_1+(k-1)d$ (d prirodan broj);
3° $a_k=k^2$; 4° $a_k=k(k+1)$; 5° $a_k=2^{k-1}$.

77. Ako su a, b, c tri različita realna broja, dokazati relaciju

$$3\min(a, b, c)<\sum a-\left(\sum a^2-\sum ab\right)^{1/2}$$
$$<\sum a+\left(\sum a^2-\sum ab\right)^{1/2}<3\max(a, b, c),$$

gde je

$$\sum a\equiv a+b+c, \qquad \sum a^2\equiv a^2+b^2+c^2, \qquad \sum ab\equiv ab+bc+ca.$$

Dokaz. Posmatrajmo funkciju

$$f(x)\equiv(x-a)(x-b)(x-c)\equiv x^3-\left(\sum a\right)x^2+\left(\sum ab\right)x-abc.$$

Funkcija $f(x)$ anulira se za $x=a$, $x=b$, $x=c$. Izvod funkcije $f(x)$ anulira se za vrednosti x koje su rešenja jednačine

$$3x^2-2\left(\sum a\right)x+\sum ab=0.$$

Ta rešenja leže između $\min(a, b, c)$ i $\max(a, b, c)$. Na osnovu toga dobija se navedena relacija.

78. *D. Rebić*, kao student II godine Elektrotehničkog fakulteta Beogradu, dao je sledeći postupak za izračunavanje determinante četvrtog reda:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

1° Izvršiti cikličku permutaciju druge, treće i četvrte kolone, dok prva kolona ostaje na svom mestu u determinanti;

2° Dopisati prve tri kolone sdesna za sve tri determinante koje se dobijaju cikličkom permutacijom i izvršiti množenje elemenata, kao što to strelice pokazuju;

3° Znak *plus* i *minus* uzimati naizmence, kao što to pokazuje priložena shema;

4° Determinanta D jednaka je zbiru 24 sabirka koji su navedeni.

Na taj način dobijaju se ove tri determinante četvrtog reda:

$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$
$$
\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{array}\right|
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43}
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
+a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44}\\
-a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{41}\\
+a_{13} & a_{24} & a_{31} & a_{42}\\
-a_{14} & a_{21} & a_{32} & a_{43}\\
+a_{14} & a_{23} & a_{32} & a_{41}\\
-a_{11} & a_{24} & a_{33} & a_{42}\\
+a_{12} & a_{21} & a_{34} & a_{43}\\
-a_{13} & a_{22} & a_{31} & a_{44}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$
$$
\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12}\\
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22}\\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32}\\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42}
\end{array}\right|
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{13} & a_{14}\\
a_{21} & a_{23} & a_{24}\\
a_{31} & a_{33} & a_{34}\\
a_{41} & a_{43} & a_{44}
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
+a_{11} & a_{23} & a_{34} & a_{42}\\
-a_{13} & a_{24} & a_{32} & a_{41}\\
+a_{14} & a_{22} & a_{31} & a_{43}\\
-a_{12} & a_{21} & a_{33} & a_{44}\\
+a_{12} & a_{24} & a_{33} & a_{41}\\
-a_{11} & a_{22} & a_{34} & a_{43}\\
+a_{13} & a_{21} & a_{32} & a_{44}\\
-a_{14} & a_{23} & a_{31} & a_{42}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$
$$
\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13}\\
a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23}\\
a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33}\\
a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43}
\end{array}\right|
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{14} & a_{12}\\
a_{21} & a_{24} & a_{22}\\
a_{31} & a_{34} & a_{32}\\
a_{41} & a_{44} & a_{42}
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{cccc}
+ & - & + & -\\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
+a_{11} & a_{24} & a_{32} & a_{43}\\
-a_{14} & a_{22} & a_{33} & a_{41}\\
+a_{12} & a_{23} & a_{31} & a_{44}\\
-a_{13} & a_{21} & a_{34} & a_{42}\\
+a_{13} & a_{22} & a_{34} & a_{41}\\
-a_{11} & a_{23} & a_{32} & a_{44}\\
+a_{14} & a_{21} & a_{33} & a_{42}\\
-a_{12} & a_{24} & a_{31} & a_{43}
\end{array}
$$

Čitalac će proveriti da li je navedeni rezultat tačan i ispitati da li se *Rebićev* postupak (koji je analogan *Sarrus*-ovom postupku) može proširiti na determinante proizvoljnog reda.

79. Proveriti relaciju

$$\int\limits_{x=0}^{x=1}\int\limits_{y=x}^{y=1}\int\limits_{z=x}^{z=y} f(x)\,f(y)\,f(z)\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{3!}\Big[\int\limits_{0}^{1} f(t)\,dt\Big]^3.$$

Rešenje. Stavimo li

$$J=\int\limits_{x=0}^{x=1}\int\limits_{y=x}^{y=1}\int\limits_{z=x}^{z=y} f(x)\,f(y)\,f(z)\,dx\,dy\,dz \qquad \Big\{F(t)=\int f(t)\,dt\Big\},$$

biće

$$J=\int\limits_{x=0}^{x=1}\int\limits_{y=x}^{y=1}\Big[f(x)\,f(y)\,dx\,dy\int\limits_{x}^{y} f(z)\,dz\Big]$$

$$=\int\limits_{x=0}^{x=1}\int\limits_{y=x}^{y=1} f(x)\,f(y)\,[F(y)-F(x)]\,dx\,dy$$

$$=\int\limits_{x=0}^{x=1}\Big[f(x)\,dx\int\limits_{x}^{1} f(y)\,F(y)\,dy\Big]-\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F(x)\,[F(1)-F(x)]\,dx.$$

Kako je

$$\int f(y)\,F(y)\,dy=F^2(y)-\int f(y)\,F(y)\,dy,$$

dobija se

$$\int f(t)\,F(t)\,dt=\frac{1}{2}F^2(t).$$

Stoga je

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}[F^2(1)-F^2(x)]\,f(x)\,dx-F(1)\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F(x)\,dx+\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx+\frac{1}{2}F^2(1)\,[F(1)-F(0)]-\frac{1}{2}F(1)\,[F^2(1)-F^2(0)].$$

$$\therefore\qquad J=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx-\frac{1}{2}F(0)\,F(1)\,[F(1)-F(0)].$$

Kako je

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx=F^3(x)\Big|_0^1-2\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx,$$

dobija se

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\,F^2(x)\,dx=\frac{1}{3}\,[F^3(1)-F^3(0)].$$

Prema tome, integral J postaje

$$J=\frac{1}{6}\,[F^3(1)-F^3(0)]-\frac{1}{2}F(0)\,F(1)\,[F(1)-F(0)]=\frac{1}{6}\,[F(1)-F(0)]^3.$$

$$\therefore\qquad J=\frac{1}{3!}\Big[\int\limits_{0}^{1} f(t)\,dt\Big]^3.$$

Primedba. Kakva se pretpostavka o funkciji $f(t)$ mora učiniti?

80. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad (a^4+b^4)(a^5+b^5)<2(a^9+b^9) \qquad (a,\ b>0;\ a\neq b).$$

Rešenje. Umesto (1) može se posmatrati njoj ekvivalentna nejednakost

$$(2) \qquad a^4 b^4 (a+b) < a^9+b^9 .$$

Posle deljenja sa $a+b$ (>0) dobija se ekvivalentna nejednakost

$$(3) \qquad ab(a^6+b^6)+a^3 b^3 (a^2+b^2)<(a^6+b^6)(a^2+b^2),$$

odnosno

$$(4) \qquad ab(a^4-a^2 b^2+b^4)+a^3 b^3<a^6+b^6,$$

odnosno

$$(5) \qquad 0<(a-b)^2(a^4+a^3 b+a^2 b^2+ab^3+b^4),$$

odakle sleduje

$$(6) \qquad 0<a^4+a^3 b+a^2 b^2+ab^3+b^4 .$$

Nejednakosti (1) i (6) su ekvivalentne za $a,\ b>0$ i $a\neq b$.

Kako nejednakost (6) važi za svako pozitivno a i b $(a\neq b)$, zaključuje se da je nejednakost (1) tačna.

Primedba. Dokazati relaciju (1) metodom *reductio ad absurdum.*

81. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad (a^2+b^2)(a^3+b^3)<2(a^5+b^5) \qquad (a,\ b>0;\ a\neq b).$$

Rešenje. Pretpostavimo da je tačno suprotno bar za jedno $(a,\ b)$, gde je $a,\ b>0$ i $a\neq b$, naime

$$(2) \qquad (a^2+b^2)(a^3+b^3)\geqslant 2(a^5+b^5),$$

odnosno

$$(3) \qquad a^2 b^2 (a+b)\geqslant a^5+b^5 .$$

Posle deljenja sa $a+b$ (>0) dobija se relacija

$$0\geqslant a^4-a^3 b-ab^3+b^4,$$

odnosno

$$0\geqslant (a-b)^2(a^2+ab+b^2),$$

odnosno

$$(4) \qquad 0\geqslant a^2+ab+b^2 .$$

Relacija (4) ne važi ni za jednu vrednost $a\,(>0)$ i $b\,(>0)$.

Prema tome, hipoteza (2) dovela nas je do apsurda (4). Na osnovu ovog se zaključuje da je relacija (1) tačna.

82. Ako je

$$(1) \qquad a_1\geqslant a_2\geqslant \cdots \geqslant a_n \quad \text{i} \quad b_1\geqslant b_2\geqslant \cdots \geqslant b_n,$$

tada je

$$(2) \qquad \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n}{n}.$$

Ovo je nejednakost *Čebiševa.*

Dokaz. Ako je $\sum a = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sum b = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $\sum ab = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, tada je:

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}(a_\mu b_\mu - a_\mu b_\nu) = \sum_{\mu}\left(n a_\mu b_\mu - a_\mu \sum b\right) = n\sum ab - \sum a \sum b,$$

$$\sum_{\mu}\sum_{\nu}(a_\nu b_\nu - a_\nu b_\mu) = \sum_{\nu}\left(n a_\nu b_\nu - a_\nu \sum b\right) = n\sum ab - \sum a \sum b.$$

$$\therefore \quad n\sum ab - \sum a \sum b = \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}(a_\mu b_\mu - a_\mu b_\nu + a_\nu b_\nu - a_\nu b_\mu)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu}\sum_{\nu}(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu).$$

Na osnovu (1) biće

$$(a_\mu - a_\nu)(b_\mu - b_\nu) \geqslant 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Prema tome, dobija se nejednakost

$$n\sum ab - \sum a \sum b \geqslant 0.$$

To je nejednakost *Čebiševa* koju je trebalo dokazati.

Ako je

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \quad \text{i} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n,$$

tada i samo tada u relaciji (2) važi znak jednakosti.

Generalizacija. Ako je

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n, \ \ldots, \ l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n,$$

tada važi relacija

$$\frac{\sum a}{n}\,\frac{\sum b}{n}\cdots\frac{\sum l}{n} \leqslant \frac{\sum ab\cdots l}{n}.$$

Primer. Ako su a, b, c pozitivni brojevi i ako je n prirodan broj, tada je

$$(a+b+c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n).$$

83. Koje uslove moraju zadovoljavati koeficijenti A, B, C, D, E, F da bi izraz

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

bio pozitivan za sve vrednosti promenljivih x i y?

Rezultat. Ovaj izraz biće pozitivan za svako x i y tada i samo tada ako je

$$1^\circ \qquad A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} > 0;$$

ili ako je:

$$2^\circ \qquad A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} > 0;$$

ili ako je:

$$3^\circ \qquad A = B = D = 0, \quad C > 0, \quad \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} > 0;$$

ili ako je:

$$4^\circ \qquad A = B = C = D = E = 0, \quad F > 0.$$

Primedba. Binom $ax+b$ je pozitivan za svako x ako je $a=0$ i $b>0$. Trinom $ax^2+2bx+c$ je pozitivan za svako x ako je

$$a>0, \quad ac-b^2>0,$$

ili ako je

$$a=b=0, \quad c>0.$$

Generalizacija. Koje uslove moraju ispunjavati koeficijenti izraza

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_1 yz + 2B_2 zx + 2B_3 xy + 2C_1 x + 2C_2 y + 2C_3 z + D$$

da bi ovaj bio pozitivan za sve vrednosti promenljivih x, y, z?

84. Ako su a, b, c pozitivni, tada je

$$(1) \qquad \frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Rešenje. Polazeći od relacija

$$(2) \qquad \frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2}\geqslant\sqrt{ca}, \quad \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

dobija se

$$\frac{1}{b+c}\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{bc}}, \quad \frac{1}{c+a}\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{ca}}, \quad \frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

$$\therefore \qquad \frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}).$$

Na osnovu relacija (2) poslednja nejednakost postaje

$$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Ovim je dokazana nejednakost (1).

Relacija (1) postaje jednakost ako je $a=b=c$.

85. Dokazati relaciju $a^3 b+ab^3\leqslant a^4+b^4$.

86. Dokazati nejednakost

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3)(a^6+b^6)<4(a^{11}+b^{11}) \qquad (a,\ b>0;\ a\neq b).$$

87. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad (a+b)^n<2^{n-1}(a^n+b^n) \qquad \{n\,(>2) \text{ prirodan broj; } a,\ b>0;\ a\neq b)\}.$$

Rešenje. Za $n=2$ relacija (1) je tačna. Pretpostavimo zatim da je ona tačna za neko n, pa pomnožimo levu i desnu stranu relacije (1) brojem $a+b$ (>0). Tada se dobija

$$(a+b)^{n+1}<2^{n-1}(a+b)(a^n+b^n).$$

Ako dokažemo da važi relacija

$$(2) \qquad 2^{n-1}(a+b)(a^n+b^n)<2^n(a^{n+1}+b^{n+1}),$$

tada je induktivni dokaz završen.

Relacija (2) je ekvivalentna sledećoj

$$(a+b)(a^n+b^n)<2(a^{n+1}+b^{n+1}),$$

odnosno

$$a^n b+ab^n<a^{n+1}+b^{n+1},$$

odnosno

$$0<a^n(a-b)-b^n(a-b),$$

odnosno

$$0<(a-b)^2(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

Ova relacija važi za $a>0$, $b>0$ $(a\neq b)$.

Relacija (2) je tačna, odakle sleduje da je i relacija (1) tačna.

88. Funkcija

$$y_1(x) = (ax+b)/(x^2-2Bx+C) \qquad (a,\ b,\ B,\ C \text{ parametri})$$

zadovoljava jednačinu

$$(x^2-2Bx+C)\,y'' + 4\,(x-B)\,y' + 2y = 0,$$

odakle sleduje da je $y_1^{(n)}$ rešenje diferencijalne jednačine

$$(x^2-2Bx+C)\,y'' + 2\,(n+2)\,(x-B)\,y' + (n+1)\,(n+2)\,y = 0.$$

Proveriti ove rezultate.

89. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $x(y, z)$, definisane relacijom

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+5=0.$$

90. Dokazati nejednakost

$$x^m y^n + x^n y^m < x^{m+n} + y^{m+n} \qquad (x \neq y;\ x, y > 0;\ m \text{ i } n \text{ prirodni brojevi}).$$

Uputstvo. Posmatrati izraz

$$x^{m+n} - x^m y^n - x^n y^m + y^{m+n} \quad \text{odnosno} \quad (x^m - y^m)(x^n - y^n).$$

91. Metodom matematičke indukcije dokazati nejednakost

$$(n!)^2 < k!\,(2n-k)!$$

gde su n i k $(< 2n)$ prirodni brojevi.

92. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad x^{2n-1} + x < x^{2n} + 1 \qquad (x \neq 1;\ n \text{ prirodan broj})$$

i, polazeći od (1), dokazati nejednakost

$$x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} < x^n + \frac{1}{x^n} \qquad (x \neq 1,\ x > 0;\ n \text{ prirodan broj}).$$

Uputstvo. Posmatrati proizvod $(x^{2n-1}-1)(x-1)$.

93. Sumirati $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{\nu=1}^{k} \nu^p$ za slučaj kada je $p = 1, 2, 3, 4$.

Primedba. Za $p=2$ biće

$$\sum_{\nu=1}^{k} \nu^2 = \frac{1}{6}\,k\,(k+1)\,(2k+1),$$

$$\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(2k+1) = \frac{1}{12}\,n\,(n+1)^2\,(n+2).$$

94. Pokazati da bar jedna od relacija

$$\left|\frac{a+\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right| < 1, \qquad \left|\frac{a-\sqrt{a^2+2b^2}}{2b}\right| < 1$$

važi za svako a i b $(ab \neq 0)$ realno.

95. Data je funkcija

$$f(x, a) = 1 - x^2/a^2 \qquad (a \text{ realan parametar}).$$

1° Nacrtati grafike funkcija: $f(x, a)$ i $[f(x, a)]^2$.

2° Izračunati veličinu $P(a)$ površine koju omeđuju krive

$$y = f(x, a) \quad \text{i} \quad y = [f(x, a)]^2.$$

3° Nacrtati grafik funkcije $|P(a)|$.

4° Na kojoj krivoj leže prevojne tačke krivih $y = [f(x, a)]^2$, kad se a menja. Ispitati da li tangente u prevojnim tačkama ove krive prolaze kroz jednu fiksnu tačku.

5° Nacrtati grafik funkcije $y = 1/f(x, a)$ i izračunati integral $\int\limits_0^x dt/f(t, a)$.

96. Za razne vrednosti realnog parametra a odrediti broj realnih rešenja jednačine $(x+1)^2\, e^x = a$.

97. Odrediti obim zatvorene figure čije su strane delovi krivih

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

Kolika je veličina površine koju ograničava ova figura?

98. Proveriti relaciju

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{ca}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{-(b+c)}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{-(c+a)}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{-(a+b)}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \end{Vmatrix},$$

gde je $(b-c)(c-a)(a-b) \neq 0$.

Ustanoviti da li se zakon formiranja elemenata gornje inverzne matrice može generalisati na matrice reda n

$$\begin{Vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{Vmatrix}.$$

99. Ako postoje relacije

$$(1) \qquad \begin{aligned} &l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1, \\ &l_1\, l_2 + m_1\, m_2 + n_1\, n_2 = l_2\, l_3 + m_2\, m_3 + n_2\, n_3 = l_3\, l_1 + m_3\, m_1 + n_3\, n_1 = 0, \end{aligned}$$

tada je:

$$(2) \qquad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad m_1\, n_1 + m_2\, n_2 + m_3\, n_3 = 0, \quad \text{itd.}$$

Izvesti ove relacije i dati im geometrisko tumačenje.

Uputstvo. Ako se pođe od matrice

$$A = \begin{Vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{Vmatrix},$$

i uzmu u obzir relacije (1), dobija se

$$AA' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

Odavde sleduje

$$A' A = A' (A')^{-1} = E.$$

Iz poslednje jednakosti dobijaju se relacije (2).

100. Pokazati da je matrica A/n (A matrica reda n čiji su svi elementi jednaki 1) idempotentna, tj. da je

$$(A/n)^s = A/n$$

za svaki prirodan broj s.

101. Ako je

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a_1 \\ 0 & -1 & a_1 & a_2 \\ -1 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Vmatrix},$$

ispitati da li je matrica HA simetrična i da li je $HAH^{-1} = A'$.

Generalisati ove rezultate.

102. Ako je

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

tada je

$$\det (A - \lambda E) = \lambda^4 - a_1 \lambda^3 - a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda - a_4.$$

Proveriti ovaj rezultat i ispitati da li se može generalisati na matrice reda n.

103. Ako je $c \neq a$, proveriti da li važi relacija

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 1 & c & c^2 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{c(c-2a)}{(a-c)^2} & \dfrac{ca}{a-c} & \dfrac{a^2}{(c-a)^2} \\ -\dfrac{2a}{(a-c)^2} & -\dfrac{c+a}{a-c} & -\dfrac{2a}{(c-a)^2} \\ \dfrac{1}{(a-c)^2} & \dfrac{1}{a-c} & \dfrac{1}{(c-a)^2} \end{Vmatrix}.$$

104. Ako je

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & -\operatorname{tg} t \\ \operatorname{tg} t & 0 \end{Vmatrix},$$

proveriti da li je

$$E+A=\begin{Vmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{Vmatrix} (E-A).$$

105. Ako su

$$(1) \qquad X=AZ, \quad Y=A'Z,$$

gde je

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{Vmatrix}; \quad a,\ b,\ c \text{ realne konstante; } X=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad Y=\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}, \quad Z=\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix},$$

pokazati da je direktna transformacija od X na Y ortogonalna.

Uputstvo. Ako se iz (1) eliminiše matrica Z, dobija se

$$(2) \qquad X=A(A')^{-1}Y.$$

(Transformacija $X=BY$ zove se ortogonalna, ako je matrica B ortogonalna).

Da bismo utvrdili da li je matrica $A(A')^{-1}$ ortogonalna, treba ispitati da li je

$$\{A(A')^{-1}\}\{A(A')^{-1}\}'=E,$$

odnosno da li je

$$(3) \qquad A'A=AA'.$$

Za gore navedenu matricu A uslov (3) je zadovoljen. Prema tome, transformacija (2) je ortogonalna.

106. Ako je x jednokolona matrica, obrazovati $x'x$ i xx'. Ispitati da li je matrica xx' simetrična.

107. Proveriti da li matrice

$$H=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

imaju osobine:

$$H=K^{-1}, \quad H'=K, \quad H^{-1}=H'.$$

108. Odrediti inverznu matricu matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad (a,\ b \text{ skalari}).$$

109. Dokazati formulu

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -x & 1 \end{vmatrix} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n.$$

110. Pokazati da je proizvod od r unitarnih matrica tako isto jedna unitarna matrica.

Dokaz. Neka su A_k $(k=1, 2, \ldots, r)$ unitarne matrice, tj. matrice za koje važe uslovi

$$(1) \qquad A_k^{-1} = \overline{A}_k{}' \qquad (k=1, 2, \ldots, r).$$

Posmatrajmo izraz

$$(A_1 A_2 \cdots A_r)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad A_r^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

Ovaj se izraz, prema (1), svodi na oblik

$$\overline{A}_r{}' \cdots \overline{A}_2{}' \overline{A}_1{}' = (\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_r)'$$
$$= (\overline{A_1 A_2 \cdots A_r})'.$$

Prema tome, dokazali smo relaciju

$$(A_1 A_2 \cdots A_r)^{-1} = (\overline{A_1 A_2 \cdots A_r})',$$

Ovim je dokazan navedeni stav.

Primedba. Da li navedeni stav važi za ortogonalne matrice?

111. Izračunati determinantu $D_n = |a_{ik}|$, gde je:

$$a_{ii} = 2\cos\theta \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad a_{i,\,i+1} = 1 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$
$$a_{i,\,i-1} = 1 \quad (i=2, 3, \ldots, n), \qquad a_{ik} = 0 \quad (k \neq i,\ k \neq i \pm 1).$$

Uputstvo. Ako se determinanta D_n razvije po elementima prve vrste, dobija se rekurentna relacija

$$D_n = 2D_{n-1}\cos\theta - D_{n-2}.$$

Za $n=1$ i $n=2$ je

$$D_1 \sin\theta = \sin 2\theta, \qquad D_2 \sin\theta = \sin 3\theta,$$

odakle se naslućuje formula

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (\sin\theta \neq 0).$$

Tačnost ove formule može se dokazati metodom matematičke indukcije, što će čitalac učiniti.

112. Ako je

$$ax + by + cz = 1, \quad cx + ay + bz = 0, \quad bx + cy + az = 0,$$

ispitati da li je vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

recipročna vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

i da li je

$$\begin{vmatrix} ax+cy+bz & bx+ay+cz & cx+by+az \\ by+az+cx & cy+bz+ax & ay+cz+bx \\ cz+bx+ay & az+cx+by & bz+ax+cy \end{vmatrix} = 1.$$

113. Dokazati formulu

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Rešenje. Identitet $[(-1)+1]^{n+1}=0$ može se napisati u obliku

$$(-1)^{n+1}+\binom{n+1}{1}(-1)^n+\binom{n+1}{2}(-1)^{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{r}(-1)^{n-r+1}+\cdots+1=0.$$

$$\therefore \quad \binom{n+1}{1}(-1)^n+\binom{n+1}{2}(-1)^{n-1}+\cdots+\binom{n+1}{r}(-1)^{n-r+1}+\cdots+1=(-1)^n.$$

Posle deljenja sa $(-1)^n(n+1)$ dobija se

$$(2) \qquad 1-\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{2}+\cdots+(-1)^{r-1}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{r}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Kako je

$$\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{r}=\frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2)}{r!}$$

$$=\frac{1}{r}\,\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

$$=\frac{1}{r}\binom{n}{r-1},$$

relacija (2) postaje

$$\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{r-1}\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}=\frac{1}{n+1}.$$

Ako se ovde stavi $r-1=k$, dobija se upravo formula (1).

Primedba. Čitalac će pokušati da nađe neki drugi metod izvođenja formule (1).

114. Data je funkcija

$$f(x)=(x-a)\,(x-b).$$

1° Nacrtati grafike funkcija:

$$f(x), \quad 1/f(x), \quad \{f(x)\}^2, \quad \{f(x)\}^{1/2}.$$

2° Odrediti a i b tako da krive

$$y=f(x) \quad \text{i} \quad y=1/f(x)$$

ograničavaju jednu površinu, pa izračunati veličinu ove površine.

3° Ako krive

$$y=f(x) \quad \text{i} \quad y=1/f(x)$$

ograničavaju jednu površinu, za koje vrednosti λ krive

$$y=\{f(x)\}^{\lambda} \quad \text{i} \quad y=\{1/f(x)\}^{\lambda}$$

tako isto ograničavaju jednu površinu? U potvrdnom slučaju izračunati njenu veličinu.

115. Ispitati i konstruisati krivu

$$x=\cos t\sin^2 t, \qquad y=\sin t\,(1+\cos^2 t).$$

Izračunati dužinu njenog luka od tačke $t=0$ do tačke $t=\pi/2$.

116. Iz tačke $P(x_0, y_0)$ povučene su tangente PA i PB (A i B tačke dodira) na parabolu $y=x^2$.

Proveriti da li je

$$\overline{PA}/\overline{PB}=(R_A/R_B)^{1/3},$$

gde su R_A i R_B poluprečnici krivine parabole $y=x^2$ u tačkama A i B.

117. Ispitati da li je funkcija

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} && (x \neq 0) \\ &\equiv \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} && (x = 0) \end{aligned}$$

diferencijabilna u tački $x=0$.

U potvrdnom slučaju, odrediti $f'(0)$.

Rezultat. $f'(0)=1$.

118. 1° Pokazati da se matrica

$$M=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix}$$

može napisati u obliku

$$\begin{Vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix}.$$

2° Izračunati det M.

3° Da li se matrica

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$$

može napisati u obliku

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 0 & x_4 & y_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} ?$$

4° Generalisati ovaj rezultat.

119. Odrediti $D^n\{x^2(x-1)\}^{-1}$.

Razviti funkciju $\{x^2(x-1)\}^{-1}$ u red oblika $\sum A_n(x+1)^n$.

Rezultat. $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{x+n+1}{x^{n+2}}\right]$;

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-2^{-n-1}-n)(x+1)^n.$$

120. Sumirati:

$$1^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} u_k; \qquad 2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} 1/u_k,$$

gde je

$$u_k=\prod_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d].$$

Rešenje. Polazeći od izraza

$$w_k\equiv[a+(k+r)d]\,u_k,$$

dobijamo

$$w_k-w_{k-1}\equiv[a+(k+r)d]\prod_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d]$$

$$-[a+(k+r-1)d]\prod_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-2)d].$$

$$\therefore \quad w_k-w_{k-1}\equiv(r+1)d\prod_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d]$$

$$\equiv(r+1)d\,u_k.$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}(w_k-w_{k-1})\equiv(r+1)d\sum_{k=1}^{n}u_k.$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n}u_k\equiv\frac{w_n-w_0}{(r+1)d}.$$

$$\therefore \quad \sum_{k=}^{n}u_k\equiv\frac{1}{(r+1)d}\prod_{\nu=1}^{r+1}[a+(n+\nu-1)d]-\frac{1}{(r+1)d}\prod_{\nu=1}^{r+1}[a+(\nu-1)d].$$

Primeri.

(1) $$1\cdot2\cdot3\cdots r+2\cdot3\cdot4\cdots(r+1)+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)$$

$$\equiv\frac{1}{r+1}\prod_{\nu=1}^{r+1}(n+\nu-1)-\frac{1}{r+1}\prod_{\nu=1}^{r+1}(\nu-1)\equiv\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r+1},$$

jer je u ovom slučaju $a=0$, $d=1$.

(2) $$2\cdot5\cdot8+5\cdot8\cdot11+8\cdot11\cdot14+\cdots+(3n-1)(3n+2)(3n+5)$$

$$\equiv\frac{1}{12}n(81n^3+378n^2+459n+42).$$

U ovom slučaju je: $a=-1$, $d=3$, $r=3$.

2° Stavimo li $z_k = (a+kd)/u_k$, dobijamo

$$z_k - z_{k-1} = \frac{a+kd}{u_k} - \frac{a+(k-1)d}{u_{k-1}}$$

$$= \frac{a+kd}{\prod\limits_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d]} - \frac{a+(k-1)d}{\prod\limits_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-2)d]}$$

$$= \frac{a+kd}{\prod\limits_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d]} - \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r-1}[a+(k+\nu-1)d]}$$

$$= \frac{(a+kd)-[a+(k+r-1)d]}{\prod\limits_{\nu=1}^{r}[a+(k+\nu-1)d]}$$

$$= (1-r)\,d/u_k.$$

$$\therefore \qquad \sum_{k=1}^{n}(z_k - z_{k-1}) = (1-r)\,d\sum_{k=1}^{n} 1/u_k.$$

$$\therefore \qquad z_n - z_0 = (1-r)\,d\sum_{k=1}^{n} 1/u_k.$$

$$\therefore \qquad \sum_{k=1}^{n} 1/u_k = (z_n - z_0)/[(1-r)\,d].$$

$$\therefore \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k} = \left\{\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r-1}[(a+(n+\nu)d]} - \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r-1}(a+\nu d)}\right\}\Big/\,[(1-r)\,d].$$

Primeri.

$$(1) \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(r+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}$$

$$= \frac{1}{1-r}\left\{\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r-1}(n+\nu)} - \frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{r-1}\nu}\right\}.$$

Ovde je: $a=0$, $d=1$.

$$(2) \qquad \frac{1}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + \frac{1}{4\cdot 7\cdot 10\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)}$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{28} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)}\right].$$

U ovom slučaju je: $a=-2$, $d=3$, $r=4$.

121. Odrediti $\min|z|$, ako se $z\ (=x+iy)$ kreće po pravoj $3x+4y+5=0$.

Rešenje. Traženi minimum je 1.

122. Rešiti skup jednačina

$$2(x^2+y^2)-3xy+2(x+y)-39=0,$$
$$3(x^2+y^2)-4xy+(x+y)-50=0.$$

Rešenje geometriski protumačiti u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu.

123. Sumirati n prvih članova reda

$$mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)+\cdots$$

Rezultat. $\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$.

124. Dokazati identitet

$$\binom{n}{1}\cdot 1^n-\binom{n}{2}\cdot 2^n+\binom{n}{3}\cdot 3^n-\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\cdot n^n=(-1)^{n+1}n!$$

125. Ako je $P(x)$ polinom po x, ispitati konvergenciju reda, čiji je opšti član:

$$1^\circ \quad u_n=P(n)\frac{x^n}{n!}; \qquad 2^\circ \quad u_n=P(n)x^n.$$

126. Dokazati da je broj

$11\cdot 3^n+3\cdot 7^n-6$ (n nula ili prirodan broj) deljiv sa 8.

127. Dat je skup brojeva

$N=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $\{a_k\ (k=1, 2, \ldots, n)$ prirodni brojevi; $a_k<a_r\ (k<r)\}$.

Posmatrati podskupove N_{pq} skupa N pod uslovom da se svaki podskup sastoji od rastućeg niza od $p\,(1<p<n)$ elemenata takvih da razlika između dva konsekutivna elementa toga niza bude $\geqslant q$ (q prirodan broj).

Odrediti broj podskupova N_{pq} u sledećim slučajevima:

$$1^\circ \quad a_k=k; \qquad 2^\circ \quad a_k=k^2; \qquad 3^\circ \quad a_k=2^{k-1}.$$

128. Proveriti relaciju

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}x^k\right)^2=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k+\sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)x^k.$$

Uputstvo. Posmatrati izraz

$$(1) \qquad (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})^2$$

ili izraz

$$(2) \qquad \left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)^2 \quad \text{odnosno} \quad \frac{x^{2n}-2x^n+1}{(x-1)^2},$$

koji je identičan izrazu (1) ako je $x\neq 1$.

Ako se pođe od (2), treba primeniti *Horner*-ov postupak deljenja.

129. Dokazati relaciju

$$2|y-z|+\big|2x-y-z-|y-z|\big|+\big|2x-y-z+|y-z|\big|$$
$$=4\{\max(x, y, z)-\min(x, y, z)\},$$

gde su x, y, z tri ma kakva realna broja.

Rešenje. Ako se identitet

$$(1) \qquad |a+b|+|a-b| \equiv 2\max(|a|,\ |b|)$$

primeni na izraz

$$J \equiv \Big|2x-y-z+|y-z|\Big|+\Big|2x-y-z-|y-z|\Big|,$$

dobija se

$$(2) \qquad J \equiv 2\max(|2x-y-z|,\ |y-z|).$$

Prema (1), može se pisati

$$2\max(|a|,\ |b|) \equiv |a+b|+|a-b|$$

tj., u slučaju (2),

$$2\max(|2x-y-z|,\ |y-z|) \equiv |2x-y-z+y-z|+|2x-y-z-y+z| \equiv 2|x-z|+2|x-y|.$$

Prema tome

$$2|y-z|+\Big|2x-y-z-|y-z|\Big|+\Big|2x-y-z+|y-z|\Big|$$

$$\equiv 2\{|x-z|+|x-y|+|y-z|\}$$

$$\equiv 4\{\max(x,\ y,\ z)-\min(x,y,z)\}.$$

Ostavlja se čitaocu da zadatak reši posmatrajući direktno izraze u relaciji čiju istinitost treba utvrditi, tj. bez korišćenja relacije (1).

130. Odrediti kompleksne vrednosti koje zadovoljavaju jednačine:

$$1^\circ \quad e^{\frac{z+i}{z}} = 1-i, \qquad 2^\circ \quad \operatorname{tg} z = e^{ki}, \qquad 3^\circ \quad z^3+z+2i=0.$$

131. 1° Izraziti $\prod_{k=1}^{n} \cos a_k$ kao zbir kosinusa, tako da svaki član zbira bude oblika

$$C\cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n) \qquad (C=\text{const}).$$

2° Izraziti $\prod_{k=1}^{n} \sin a_k$ kao zbir sinusa ili kosinusa prema tome da li je n neparno ili parno.

3° Izraziti $\left(\prod_{k=1}^{n} \sin a_k\right)\left(\prod_{j=1}^{m} \cos b_j\right)$ kao zbir sinusa ili kosinusa prema tome da li je n neparno ili parno.

Uputstvo. Upotrebiti formule

$$\sin a \equiv \frac{1}{2i}(e^{ai}-e^{-ai}), \qquad \cos a \equiv \frac{1}{2}(e^{ai}+e^{-ai}).$$

132. Dokazati relaciju

$$\begin{Vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{Vmatrix}^n \equiv \begin{Vmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{Vmatrix} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Uputstvo. Primeniti metod potpune indukcije.

133. Odrediti sve matrice koje su komutativne s matricama:

$$1^\circ \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}; \qquad 2^\circ \quad \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}; \qquad 3^\circ \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. 3° Tražena matrica

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix}$$

treba da zadovoljava uslov

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduju skalarne jednakosti:

$$\begin{array}{llll} a_2=0, & b_2=a_1, & c_2=b_1, & d_2=c_1, \\ a_3=0, & b_3=a_2, & c_3=b_2 & d_3=c_2, \\ a_4=0, & b_4=a_3 & c_4=b_3 & d_4=c_3, \\ & 0=a_4 & 0=b_4 & 0=c_4. \end{array}$$

Prema tome, matrica komutativna s matricom 3° ima oblik

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{Vmatrix}.$$

Ako izostavimo indekse, kao najopštiju matricu koja je komutativna s matricom 3° dobijamo

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}.$$

134. Razviti determinantu reda n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Rešenje. Posmatrajmo determinantu reda $n+1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

i razvijmo je: 1° po elementima poslednje vrste i 2° kao *Vandermonde*-ovu determinantu.

Determinanta Δ može se napisati u obliku

$$\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n+1} (x_i - x_k).$$

Koeficijent uz x_{n+1}^{n-1} u ovom proizvodu je

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k).$$

U determinanti Δ algebarski komplement elementa x_{n+1}^{n-1} je $-D_n$.
Prema tome dobijamo

$$D_n = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k).$$

Primedba. Primenom ovog postupka dobija se

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & & x_2^n \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & & x_n^n \end{vmatrix} = \sigma_{n-s}\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k)$$

(σ_p pretstavlja osnovnu simetričnu funkciju reda p od elemenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$).
Tako, na primer, ako je $s=1$, imaćemo

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n^2 & x_n^3 & & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= x_1 x_2 \cdots x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k)$$

$$= \left(\prod_{r=1}^{n} x_r\right)\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{x_r}\right)\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n} (x_i - x_k).$$

135. Odrediti BAB', gde je A koso-simetrična matrica tipa $n\times n$ i gde je

$$B = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & & b_2 \\ b_3 & b_3 & & b_3 \end{vmatrix}$$

matrica tipa $3\times n$.

136. Rešiti po X matrične jednačine:

1° $AX=B$; 2° $XA=B$;

3° $AX=BA^{-1}B$ 4° $XA=BA^{-1}B$,

gde je

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

137. Data je matrica

$$A = \begin{Vmatrix} 2t & 4\sqrt{t} & 4t \\ 0 & 2\sqrt{t} & 4t \\ \sqrt{1-t} & 0 & 2\sqrt{1-t} \end{Vmatrix}.$$

1° Odrediti max det A $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

2° Odrediti X iz matrične jednačine

$$AX = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (0 < t < 1).$$

138. Po x rešiti jednačinu stepena n

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} = 0$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n$ različiti parametri, nezavisni od $x)$.

Red determinante koja se ovde javlja je $n+1$.

Rezultat. Koreni su: $x_k = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

139. Po x rešiti jednačinu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & & 1 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

Determinanta koja se ovde javlja je reda n.

140. Neka je

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}, \quad z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix},$$

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Polazeći od relacija

$$y = Ax, \qquad z = By,$$

izraziti x pomoću z.

141. Iz relacija

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix}$$

izračunati $\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$ pomoću $\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}$.

Rezultat.

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 26 & -8 & 18 \\ -41 & 8 & -25 \\ 40 & -10 & 26 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}.$$

142. Date su matrice

$$(1) \qquad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{Vmatrix} \qquad (a \text{ skalar}).$$

Odrediti a tako da budu zadovoljeni uslovi:

$$(2) \qquad ABC = -E, \qquad CA = B \qquad (C \text{ kvadratna matrica II reda}).$$

Rešenje. Ako se iz relacija (2) eliminiše matrica C, dobija se

$$AB^2 A^{-1} = -E, \qquad \text{odakle sleduje } B^2 = -E.$$

Za partikularne vrednosti (1) poslednja relacija postaje

$$\begin{Vmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Odavde sleduje $a = \pm 1$.

143. Ako su matrice A i B (tipa $n \times n$) komutativne, da li su matrice

1° $P(A)$ i $Q(B)$ (P i Q matrični polinomi po A i B);

2° $P(A, B)$ i $Q(A, B)$ (P i Q matrični polinomi po A i B)

komutativne?

U slučaju potvrdnog odgovora, generalisati rezultat.

Uputstvo. Prethodno dokazati da su matrice

$$A^r \text{ i } B^s \qquad (r, s \text{ nenegativni celi brojevi})$$

komutativne, ako je to slučaj sa matricama A i B.

Videti: *D. S. Mitrinović: Metod matematičke indukcije* (Beograd, 1958, 64 str.), str. 53—55.

144. Data je matrica

$$A = \begin{Vmatrix} E_r & M \\ 0 & E_s \end{Vmatrix}$$

(E_r, E_s jedinične matrice; M matrica tipa $r \times s$). Odrediti inverznu matricu A^{-1}.

Odgovor. $A^{-1} = \begin{Vmatrix} E_r & -M \\ 0 & E_s \end{Vmatrix}$.

145. Da li je tačna relacija

$$(A + A^{-1})^{2n+1} = 2^{2n+1} A \quad (n \text{ nula ili prirodan broj}),$$

ako je

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}?$$

146. Proveriti da li se polinom

$$P(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + z^4$$

može napisati u obliku determinante

$$\begin{vmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ a & b & c & d+z \end{vmatrix}$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} z^2 & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ a+bz & c & d+z \end{vmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ a & b+cz & d+z \end{vmatrix}.$$

147. Da li se parametri a i b mogu tako odrediti da matrice

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ a & 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} b & b & 5 \\ 9 & a & a \\ a & 8 & a \end{Vmatrix}$$

budu komutativne?

148. Neka je

$$D_{2n} = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, 2n)$$

determinanta reda $2n$, gde je

$$a_{ik} = \begin{cases} \lambda & (i = k), \\ \mu & (i + k = 2n + 1), \\ 0 & (\text{u ostalim slučajevima}). \end{cases}$$

Odrediti D_{2n} u obliku polinoma po λ i μ.

Uputstvo. Obrazovati jednu rekurentnu relaciju.

149. Rešiti po X matričnu jednačinu

$$\begin{Vmatrix} 0 & -b & -b \\ a & 0 & -b \\ a & a & 0 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 0 & b & b \\ -a & 0 & b \\ -a & -a & 0 \end{Vmatrix},$$

gde su a i b realni brojevi.

Uzeti u obzir slučajeve:

$$1^\circ \quad 0 \neq a \neq b \neq 0; \qquad 2^\circ \quad a = b \neq 0.$$

150. Date su dve ortogonalne matrice reda n:

$$A = \| a_{ik} \|, \qquad B = \| b_{ik} \|.$$

Ispitati da li ove matrice imaju osobinu

$$\det \| a_{ik} - b_{ik} \| = 0,$$

ako je

$$\det \| a_{ik} \| - \det \| b_{ik} \| = 0.$$

Uputstvo. Poći od relacije

$$B' - A' = A' (A - B) B',$$

koju najpre treba dokazati.

151. Ako su vektori $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ linearno nezavisni, da li se parametri λ, μ, ν mogu tako jednoznačno odrediti da bi vektori

$$\vec{A}, \quad \vec{A} + \mu \vec{B}, \quad \vec{A} + \nu \vec{B} + \lambda \vec{C}$$

činili ortogonalni trijedar desne orijentacije?

152. Ako vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ nisu među sobom ortogonalni i ako je projekcija vektora $\vec{A}$ na nosač vektora $\vec{B}$ jednaka projekciji vektora $\vec{B}$ na nosač vektora $\vec{A}$, tada je $|\vec{A}| = |\vec{B}|$.

Dokazati ovaj stav.

153. Ako su $\vec{A}$ i $\vec{B}$ dva vektora i a, b, c, d četiri skalara, tada je

$$(a\vec{A} + b\vec{B}) \times (c\vec{A} + d\vec{B}) = (ad - bc)\,(\vec{A} \times \vec{B}).$$

Dokazati ovo.

154. Ako su $\vec{A}$ i $\vec{B}$ dva jedinična vektora, proveriti da li se ugao θ, koji grade ova dva vektora, određuje iz jednačine

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - (\vec{A} \cdot \vec{B})}{2}}.$$

155. Dati su vektorl

$$\vec{A} = \{1, 1, 1\}, \ \vec{B} = \{3, 2, 1\}, \ \vec{C} = \{1, 2, 3\}, \ \vec{D} = \{4, 0, 1\}, \ \vec{E} = \{2, 1, 2\}.$$

Odrediti skalarne parametre λ i μ tako da vektor

$$\vec{A} + \lambda \vec{B} + \mu \vec{C}$$

bude normalan na vektorima $\vec{D}$ i $\vec{E}$.

156. Ako za vektore $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ važi relacija

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=0$$

i ako su vektori $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ linearno nezavisni, tada su svaka tri od datih vektora linearno nezavisni.

Dokazati ovaj stav.

157. Tačke A i B opisuju respektivno ose Ox i Oy Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema Oxy.

Prave BC, CA, AB prolaze respektivno kroz utvrđene tačke P, Q, R.

Odrediti geometrisko mesto tačke C, ako su:

1° tačke O, P, Q kolinearne;

2° tačke P, Q, R kolinearne.

158. Promenljiva tetiva MN jednog kruga stoji normalno na nepokretnoj tetivi AB istog kruga.

Odrediti i ispitati geometrisko mesto preseka pravih AM i BN.

159. Proizvod dva integrala diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx}=f(x)-\frac{1}{\operatorname{sh} x}+\operatorname{ch} x\left[\frac{1}{\operatorname{sh} x}-2f(x)\right]y+f(x)\,y^2$$

iznosi 1.

Odrediti ove integrale.

160. Odrediti srednju vrednost funkcije

$$\log(1-2a\cos x+a^2)$$

na segmentu $[0, 2\pi]$.

161. Odrediti veličinu površine koju ograničava kriva

$$y^2=x^3(2-x).$$

Za razne vrednosti parametra a odrediti broj realnih rešenja jednačine

$$x^3(2-x)=a^2.$$

162. Ako je osnovna (glavna) permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

odrediti broj inverzija u permutaciji

$$n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1.$$

Rezultat. Broj inverzija iznosi

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1, \quad \text{tj.} \quad \binom{n}{2}.$$

163. Ako je glavna permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, 2n,$$

odrediti broj inverzija u permutacijama:

1° $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;

2° $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$.

Rezultat. 1° $\binom{n}{2}$; 2° $\binom{n+1}{2}$.

164. Ako je glavna permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, 3n,$$

koliki je broj inverzija u permutacijama:

1° $3, 6, 9, \ldots, 3n, \quad 1, 4, 7, \ldots, 3n-2, \quad 2, 5, 8, \ldots, 3n-1;$

2° $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, \quad 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, \quad 3, 6, 9, \ldots, 3n;$

3° $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, \quad 3, 6, 9, \ldots, 3n, \quad 1, 4, 7, \ldots, 3n-2.$

Rezultat. 1° $n(3n+1)/2$.

165. Ako je glavna permutacija

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots, 4n,$$

odrediti broj inverzija u permutaciji

$$(2) \qquad P_0\, P_1\, P_2\, P_3,$$

gde $P_r (r=0, 1, 2, 3)$ označava glavnu permutaciju brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 4n\}$ koji pri deljenju sa 4 daju ostatak $r\ (r=0, 1, 2, 3)$.

Polazeći od (2), obrazovati 24 permutacije od slova P_0, P_1, P_2, P_3 i za svaku odrediti broj inverzija, ako se permutacija (1) smatra kao glavna.

166. Neka je dat uređen skup prirodnih brojeva

$$(1) \qquad E=\{1, 2, 3, \ldots, kn\} \qquad (k, n \text{ prirodni brojevi}).$$

Neka je

$$E_r \subset E \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

gde je E_r uređen skup svih brojeva iz skupa E koji pri deljenju sa k daju ostatak r.

Od podskupova $E_r\ (r=0, 1, 2, \ldots, k-1)$ mogu se obrazovati $k!$ permutacija (P). Ako je k parno, jedna od tih permutacija (P) biće

$$(2) \qquad E_0 E_2 \cdots E_{k-2} E_1 E_3 \cdots E_{k-1}.$$

Ako je glavna permutacija

$$1, 2, 3, \ldots, kn,$$

odrediti broj inverzija u permutaciji (2).

Odrediti broj inverzija u ma kojoj od permutacija (P).

167. Dužina luka parabole

$$y^2 = 4ax \qquad (a>0)$$

od temena do tačke čija je apscisa x, iznosi

$$s=\sqrt{x(x+a)} + a \log(\sqrt{1+(x/a)} + \sqrt{(x/a)}).$$

Proveriti ovaj rezultat i odrediti x tako da dužina luka bude 4, ako je $a=1$.

168. Izvesti formulu

$$\int_x^1 P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x)-P_{n+1}(x)] \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

gde je $P_n(x)$ *Legendre*-ov polinom.

Uputstvo. Poći od formule

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

169. Dokazati relaciju

$$(1) \qquad |1+z| \geqslant \frac{1+|z|}{\sqrt{2}} \qquad (R\{z\} \geqslant 0;\ z \text{ kompleksan broj}).$$

Rešenje. I. Pretpostavimo da bar za neko z iz oblasti $R\{z\} \geqslant 0$ važi

$$|1+z| < \frac{1+|z|}{\sqrt{2}}.$$

Tada važi i relacija

$$(1+z)(1+\bar{z}) < \frac{(1+|z|)^2}{2},$$

odnosno

$$2(z+\bar{z}) < -(|z|-1)^2$$

odnosno

$$4R\{z\} < -(|z|-1)^2.$$

Poslednja relacija nije mogućna ni za jedno z za koje je $R\{z\} \geqslant 0$.

Prema tome, relacija (1) je tačna.

II. Može se i ovako rezonovati. Ako je tačna relacija (1) za svako z za koje je $R\{z\} \geqslant 0$, tada je tačna i relacija

$$4R\{z\} \geqslant -(|z|-1)^2.$$

Ova relacija uvek važi ako je $R\{z\} \geqslant 0$.

170. Ako je $a>0$ i $b>1$, tada nejednačina

$$(1) \qquad |a+z| \geqslant \frac{a+|z|}{b}$$

važi za svako z, koje zadovoljava uslov

$$(2) \qquad R\{z\} \geqslant \frac{(2-b^2)a}{2(b^2-1)}.$$

Dokazati ovaj stav.

Rešenje. Ako važi relacija (1), tada važi i relacija

$$(a+z)(a+\bar{z}) \geqslant \frac{a^2+2a|z|+|z|^2}{b^2},$$

odnosno

$$(3) \qquad (b^2-1)|z|^2-2a|z|+a^2(b^2-1)+2ab^2R\{z\} \geqslant 0.$$

Po pretpostavci je $b>1$, pa je i $b^2-1>0$ (koeficijent uz $|z|^2$). Ako je

$$a^2-a^2(b^2-1)^2-2ab^2(b^2-1)R\{z\}\leqslant 0, \tag{4}$$

tada važi relacija (3).

Relacija (4) ekvivalentna je relaciji (2). Ovim je dokazan navedeni stav.

Primedba. Da li relacija (1) važi za još neke vrednosti z koje nisu obuhvaćene uslovom (2)?

171. Koju krivu definiše jednačina

$$\sum_{k=1}^{n} a_k|z-z_k|^2=b \qquad (a_k,\ b \text{ realne konstante; } z \text{ kompleksan broj})$$

u kompleksnoj ravni?

Odgovor. Ova jednačina definiše krug ili pravu prema tome da li je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\neq 0 \text{ ili } =0.$$

172. Izračunati krivoliniski integral

$$\int\limits_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z-a|^2} \qquad (|a|\neq 0;\ a \text{ i } z \text{ kompleksni brojevi}).$$

Uputstvo. Koristiti relacije $z\bar{z}=r^2$ i $|dz|=-ir\,dz/z$.

173. Dati geometrisku interpretaciju relaciji

$$|1-z|^2\leqslant 1-|z|^2 \qquad (z \text{ kompleksan broj}).$$

Uputstvo. Ova relacija ekvivalentna je relaciji

$$\left|z-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

174. Dat je integral

$$\int_0^a\frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \qquad (0<a<1).$$

Izračunati ga pomoću jedne od sledeće tri smene:

1° $y=(1/x)-x$; 2° $x=(1+t)/(1-t)$; 3° $(1-x^2)/(1+x^2)=u$

(y, t, u nove integracione promenljive).

Primedba. Ovaj integral je pseudo-eliptičan.

175. Ako su x_1 i x_2 apscise preseka krive

$$y^2=x^3-1$$

i prave

$$y=t(x-1) \qquad (t \text{ parametar}),$$

ispitati da li izraz

$$S=\int_a^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}+\int_a^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}\qquad (a=\text{const})$$

zavisi od t.

Odgovor. S ne zavisi od t.

176. Neka je M matrica

$$\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}\qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ kompleksni brojevi}),$$

i neka je M^* matrica

$$\begin{Vmatrix}\bar\alpha & \bar\beta\\ \bar\gamma & \bar\delta\end{Vmatrix}\qquad (\bar\alpha \text{ konjugovana vrednost od } \alpha,\ \ldots).$$

Odrediti matrice M tako da obadve matrice

$$M+M^* \text{ i } MM^*$$

budu skalarne i da je $\det M\geqslant 0$.

Skup ovih matrica označimo sa $\{m\}$.

Pokazati da svaka matrica $M\,(\neq 0)$ iz skupa $\{m\}$ ima inverznu matricu koja takođe pripada skupu $\{m\}$.

177. 1° Površina ograničena krivom

$$y=\sin x\qquad (0\leqslant x\leqslant \pi/2)$$

i otsečcima pravih

$$y=1,\qquad x=0$$

rotira oko y-ose.

Od dobijenog rotacionog tela T iseći kružni cilindar što veće zapremine, tako da cilindar i telo T budu koaksijalni.

2° Isti problem rešiti za površinu ograničenu krivom

$$y=\cos x\qquad (0\leqslant x\leqslant \pi/2)$$

i koordinatnim osama.

3° Isti problem rešiti za površinu ograničenu krivom

$$y=\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\qquad (a>0)$$

i otsečcima pravih $x=0$, $y=b\,(>a)$.

178. Koje jednačine petog stepena

$$x^5-5x+a=0\qquad (a \text{ parametar})$$

imaju tri realna i dva imaginarna korena? Razdvojiti u tome slučaju ta tri realna korena.

Primedba. Zadaci 178—199 bili su na pismenom delu diplomskog ispita iz Teoriske matematike u periodu od 1920—1925 na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

179. Izračunati površinu, ograničenu x-osom, lukom krive trećeg stepena

$$y \equiv f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 30$$

i pravama $x = a$ i $x = b$, gde su a i b vrednosti za koje $f(x)$ dostiže ekstremne vrednosti.

180. Odrediti linije krivine na hiperboloidu $xy + z = 0$.

181. Odrediti realni i imaginarni deo funkcije

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

pri kretanju tačke z po periferiji kruga opisanog oko početka poluprečnikom 1.

182. Naći asimptote krive

$$x^3 - 5xy^2 + 7 = 0$$

i ovlaš je konstruisati.

183. Šta se može reći o realnim korenima algebarske jednačine

$$x^5 + ax + b = 0,$$

kada se tačka $M(a, b)$ kreće u ravni *Descartes*-ovog pravouglog koordinatnog sistema Oab?

184. Naći jednačine normale i tangente krive $y = 3x^{2x}$ u njenim tačkama maksimuma i minimuma prema x-osi, kao i poluprečnik krivine.

185. Integraliti diferencijalnu jednačinu

$$x \log x \frac{dy}{dx} - y \log y = 0$$

i naći singularitete njenih partikularnih integrala.

186. Naći n-ti izvod funkcije

$$x^{n-1} \log(1 - x)$$

i ispitati za koje je vrednosti x ovaj izvod pozitivan. Naći vrednost toga izvoda za $x = 0$.

187. Integraliti linearnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \cos 2x.$$

188. Dat je skup parabola koje imaju teme u koordinatnom početku, a x-osu za svoju osu simetrije. Odrediti skup krivih od kojih će svaka seći svaku od tih parabola pod stalnim uglom od $\pi/4$ radijana.

189. Konstruisati krivu

$$y = \sin 2x + 2\cos x \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Odrediti u tome intervalu maksimume, minimume i prevojne tačke.

190. Po x rešiti jednačinu

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (xi)^{ni} = A \qquad (A \text{ data konstanta; } i=\sqrt{-1}).$$

Ispitati realnost rešenja.

191. Odrediti ortogonalne trajektorije paraboloida

$$x^2+y^2=2\,az \qquad (a \text{ parametar}).$$

192. Izračunati vrednost određenog integrala $J=\int_a^b dx/\rho$, gde je ρ poluprečnik krivine jedne krive u njenoj tački $M(x, y)$, znajući da dirka na toj krivoj gradi sa x-osom u tački $x=a$ ugao α, a u tački $x=b$ ugao β.

193. Grafički rešiti jednačinu

$$e^{x^2}\log x+a=0,$$

i ispitati kako se menjaju njeni realni koreni, kada se a menja.

194. Odrediti sve realne funkcije promenljive x koje imaju tu osobinu da su jednake svome n-tom izvodu.

195. Ispitati oblik krivih

$$ay-x^a=0 \qquad (a>0).$$

Naći obvojnicu tih krivih (a parametar). Ako je $x=\alpha$, $y=\beta$ jedna tačka M koja se nalazi sa desne strane y-ose, koliko od gornjih krivih prolazi kroz tu tačku?

196. Neka je A jedan proizvoljan broj oblika $A=Re^{\varphi i}$ (R i φ stalni); odrediti sve korene transcendentne jednačine $e^{1/z}=A$ $(z=x+yi)$. Pokazati da svi oni leže na krivoj, čija je jednačina

$$x^2+y^2-\frac{x}{\log R}=0$$

i da ih ima beskonačno mnogo u okolini početka. Dokazati da je tačka $z=0$ esencijalni singularitet funkcije $e^{1/z}$.

197. Odrediti na paraboloidu $\dfrac{z}{\sqrt{3}}=x+\dfrac{y^2}{2}$ sve krive, čije će dirke zaklapati sa z-osom stalan ugao od $\pi/6$ radijana.

198. Naći takvu površinu, da rastojanje od projekcije ma koje njene tačke $M(x, y, z)$ na ravan Oxy do prave preseka ravni Oxy sa tangentnom ravni u istoj tački tražene površine, ima stalnu dužinu a.

199. Naći dirke krive

$$2\,x^2+5\,xy+8\,y^2-7\,x+y=0$$

u temenima prečnika, koji prolazi kroz koordinatni početak.

200. Odrediti M^n ako je n prirodan broj i

$$M = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Rešenje. Matrica M^n imaće oblik

$$\begin{Vmatrix} A(n) & B(n) \\ C(n) & D(n) \end{Vmatrix},$$

gde su A, B, C, D funkcije po n.

Funkcije A, B, C, D odredićemo iz relacije

$$\begin{Vmatrix} A(n+1) & B(n+1) \\ C(n+1) & D(n+1) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^{n+1} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^{n} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{Vmatrix} A(n) & B(n) \\ C(n) & D(n) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4A(n)+B(n) & 2A(n)+3B(n) \\ 4C(n)+D(n) & 2C(n)+3D(n) \end{Vmatrix}$$

Odavde sleduje

(1) $$A(n+1) = 4A(n) + B(n),$$

(2) $$B(n+1) = 2A(n) + 3B(n),$$

(3) $$C(n+1) = 4C(n) + D(n),$$

(4) $$D(n+1) = 2C(n) + 3D(n).$$

Ove četiri relacije su *diferencne* jednačine.

Iz jednačina (1) i (2), posle eliminacije funkcije B, dobija se

$$A(n+2) - 7A(n+1) + 10A(n) = 0.$$

Opšte rešenje ove diferencne jednačine je

$$A(n) = \alpha_1 \cdot 5^n + \alpha_2 \cdot 2^n \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2 \text{ proizvoljne konstante}).$$

Analogno, iz jednačina (3) i (4) sleduje

$$C(n) = \alpha_3 \cdot 5^n + \alpha_4 \cdot 2^n \qquad (\alpha_3,\ \alpha_4 \text{ proizvoljne konstante}).$$

Kako je

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A(1) & B(1) \\ C(1) & D(1) \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} A(2) & B(2) \\ C(2) & D(2) \end{Vmatrix},$$

za $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ dobijamo

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{3} \quad \alpha_4 = -\frac{1}{3}.$$

Prema tome, funkcije $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ su određene.

Traženi rezultat je

$$\begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} \frac{2}{3} \cdot 5^n + \frac{1}{3} \cdot 2^n & \frac{2}{3} \cdot 5^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n \\ \frac{1}{3} \cdot 5^n - \frac{1}{3} \cdot 2^n & \frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n \end{Vmatrix}$$

Ovo interesantno rešenje dao je *S. Prešić*.

Primedba I. Da li ovaj rezultat važi ako je n ceo negativan broj?

Primedba II. Na ovakav postupak nismo naišli u literaturi. Ovde je iznet samo jedan partikularni slučaj. Međutim, navedeni postupak može se uspešno primeniti na kvadratne matrice ma kog reda.

PRILOZI

I. ZBIROVI POTENCIJA n PRVIH PRIRODNIH BROJEVA

1. Izvešćemo rekurzivnu formulu za izračunavanje zbirova $S_k = \sum_{r=1}^{n} r^k$.

Na osnovu binomne formule možemo pisati identitete:

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} &= n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} n + 1,\\
n^{k+1} &= (n-1)^{k+1} + \binom{k+1}{1}(n-1)^k + \binom{k+1}{2}(n-1)^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k}(n-1) + 1,\\
&\vdots\\
3^{k+1} &= 2^{k+1} + \binom{k+1}{1} 2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot 2 + 1,\\
2^{k+1} &= 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} \cdot 1 + 1.
\end{aligned}$$

Posle sabiranja izraza koji se nalaze na levim stranama i izraza koji se nalaze na desnim stranama ovih identiteta, dobija se

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_1 + n,$$

odakle sleduje

$$(1)\qquad \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k} S_1 = (n+1)\left[(n+1)^k - 1\right].$$

Iz ove rekurzivne formule možemo izračunati S_k, ako znamo

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{k-1}.$$

Budući da je

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1),$$

možemo zatim izračunati S_2, potom S_3, itd.

2. Polazeći od formule (1), dobijaju se sledeće sumacione formule[1]:

---

[1] Na formule S_k ($k = 13, 14, \ldots, 20$) nismo naišli u literaturi. Te su formule izvele: *Danica Perčinkova* i *Kovina Milošević*. U članku: *Hj. Tallqvist: Die Potenzsummen der ganzen Zahlen (Commentationes physico-mathematicae*, Societas scientarium fennica, t. 15, № 1, 1951, 7 strana) navedene su formule S_k ($k = 1, 2, \ldots, 12$). Iz istog članka uzeli smo numeričke tablice koje će korisno poslužiti za izračunavanje zbirova S_k.

Za ovo izdanje *Zbornika D. Đoković* je izveo formule $S_k(n)$ za $21 \leqslant k \leqslant 31$, korišćenjem *Bernoulli*-evih brojeva. Ove formule su proverene za $n = 1$ i $n = 2$. Treba primetiti da u ovim formulama faktori

$$n^2 (n+1)^2 \quad \text{za } n \text{ neparno;}$$

odnosno

$$n(n+1)(2n+1) \quad \text{za } n \text{ parno,}$$

nisu izdvojeni kao u formulama $S_k(n)$ za $1 \leqslant k \leqslant 20$.

$$S_1 = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)\ 2n+1),$$

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$S_5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2+2n-1),$$

$$S_6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1),$$

$$S_7 = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (3n^4+6n^3-n^2-4n+2),$$

$$S_8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3),$$

$$S_9 = \frac{1}{20} n^2 (n+1)^2 (2n^6+6n^5+n^4-8n^3+n^2+6n-3),$$

$$S_{10} = \frac{1}{66} n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5),$$

$$S_{11} = \frac{1}{24} n^2 (n+1)^2 (2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10),$$

$$S_{12} = \frac{1}{2\,730} n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1\,050n^7-1\,190n^6+2\,310n^5$$
$$+1\,420n^4-3\,285n^3-287n^2+2\,073n-691),$$

$$S_{13} = \frac{1}{420} n^2 (n+1)^2 (30n^{10}+150n^9+125n^8-400n^7-326n^6+1\,052n^5+367n^4$$
$$-1\,786n^3+202n^2+1\,382n-691),$$

$$S_{14} = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(3n^{12}+18n^{11}+24n^{10}-45n^9-81n^8+144n^7+182n^6$$
$$-345n^5-217n^4+498n^3+44n^2-315n+105),$$

$$S_{15} = \frac{1}{48} n^2 (n+1)^2 (3n^{12}+18n^{11}+21n^{10}-60n^9-83n^8+226n^7+203n^6-632n^5$$
$$-226n^4+1\,084n^3-122n^2-840n+420),$$

$$S_{16} = \frac{1}{510} n(n+1)(2n+1)(15n^{14}+105n^{13}+175n^{12}-315n^{11}-805n^{10}+1\,365n^9$$
$$+2\,775n^8-4\,845n^7-6\,275n^6+11\,835n^5+7\,485n^4-17\,145n^3-1\,519n^2+10\,851n-3\,617)$$

$$S_{17} = \frac{1}{180} n^2 (n+1)^2 (10n^{14}+70n^{13}+105n^{12}-280n^{11}-565n^{10}+1\,410n^9+2\,165n^8$$
$$-5\,740n^7-5\,271n^6+16\,282n^5+5\,857n^4-27\,996n^3+3\,147n^2+21\,702n-10\,851),$$

$$S_{18} = \frac{1}{3\,990} n(n+1)(2n+1)(105n^{16}+840n^{15}+1\,680n^{14}-2\,940n^{13}-9\,996n^{12}$$
$$+16\,464n^{11}+48\,132n^{10}-80\,430n^9-167\,958n^8+292\,152n^7+380\,576n^6$$
$$-716\,940n^5-454\,036n^4+1\,039\,524n^3+92\,162n^2-658\,005n+219\,335),$$

$$S_{19} = \frac{1}{840} n^2 (n+1)^2 (42n^{16}+336n^{15}+616n^{14}-1\,568n^{13}-4\,263n^{12}+10\,094n^{11}$$
$$+22\,835n^{10}-55\,764n^9-87\,665n^8+231\,094n^7+213\,337n^6-657\,768n^5$$
$$-236\,959n^4+1\,131\,686n^3-127\,173n^2-877\,340n+438\,670),$$

$$S_{20} = \frac{1}{6\,930} n(n+1)(2n+1)(165n^{18}+1\,485n^{17}+3\,465n^{16}-5\,940n^{15}-25\,740n^{14}$$
$$+41\,580n^{13}+163\,680n^{12}-266\,310n^{11}-801\,570n^{10}+1\,335\,510n^9$$
$$+2\,806\,470n^8-4\,877\,460n^7-6\,362\,660n^6+11\,982\,720n^5+7\,591\,150n^4$$
$$-17\,378\,085n^3-1\,540\,967n^2+11\,000\,493n-3\,666\,831),$$

$$S_{21} = \frac{1}{660}\,(30\,n^{22} + 330\,n^{21} + 1155\,n^{20} - 7\,315\,n^{18} + 53\,295\,n^{16} - 319\,770\,n^{14} + 1\,469\,650\,n^{12} - 4\,910\,246\,n^{10} + 11\,191\,950\,n^{8} - 15\,875\,013\,n^{6} + 12\,063\,425\,n^{4} - 3\,666\,831\,n^{2}),$$

$$S_{22} = \frac{1}{7\,590}\,(330\,n^{23} + 3\,795\,n^{22} + 13\,915\,n^{21} - 97\,405\,n^{19} + 793\,155\,n^{17} - 5\,393\,454\,n^{15} + 28\,601\,650\,n^{13} - 112\,935\,658\,n^{11} + 314\,618\,150\,n^{9} - 573\,768\,327\,n^{7} + 610\,409\,305\,n^{5} - 309\,236\,081\,n^{3} + 46\,998\,215\,n),$$

$$S_{23} = \frac{1}{7\,920}\,(330\,n^{24} + 3\,960\,n^{23} + 15\,180\,n^{22} - 116\,886\,n^{20} + 1\,057\,540\,n^{18} - 8\,090\,181\,n^{16} + 49\,031\,400\,n^{14} - 225\,871\,316\,n^{12} + 755\,083\,560\,n^{10} - 1\,721\,304\,981\,n^{8} + 2\,441\,637\,220\,n^{6} - 1\,855\,416\,486\,n^{4} + 563\,978\,580\,n^{2}),$$

$$S_{24} = \frac{1}{150\,150}\,(6\,006\,n^{25} + 75\,075\,n^{24} + 300\,300\,n^{23} - 2\,532\,530\,n^{21} + 25\,325\,300\,n^{19} - 216\,531\,315\,n^{17} + 1\,487\,285\,800\,n^{15} - 7\,905\,496\,060\,n^{13} + 31\,233\,001\,800\,n^{11} - 87\,021\,529\,595\,n^{9} + 158\,706\,419\,300\,n^{7} - 168\,842\,900\,226\,n^{5} + 85\,536\,751\,300\,n^{3} - 13\,000\,025\,005\,n),$$

$$S_{25} = \frac{1}{12\,012}\,(462\,n^{26} + 6\,006\,n^{25} + 25\,025\,n^{24} - 230\,230\,n^{22} + 2\,532\,530\,n^{20} - 24\,059\,035\,n^{18} + 185\,910\,725\,n^{16} - 1\,129\,356\,580\,n^{14} + 5\,205\,500\,300\,n^{12} - 17\,404\,305\,919\,n^{10} + 39\,676\,604\,825\,n^{8} - 56\,280\,966\,742\,n^{6} + 42\,768\,375\,650\,n^{4} - 13\,000\,025\,005\,n^{2}),$$

$$S_{26} = \frac{1}{29\,106}\,(1\,078\,n^{27} + 14\,553\,n^{26} + 63\,063\,n^{25} - 630\,630\,n^{23} + 7\,597\,590\,n^{21} - 79\,774\,695\,n^{19} + 688\,963\,275\,n^{17} - 4\,743\,297\,636\,n^{15} + 25\,226\,655\,300\,n^{13} - 99\,679\,206\,627\,n^{11} + 277\,736\,233\,775\,n^{9} - 506\,528\,700\,678\,n^{7} + 538\,881\,533\,190\,n^{5} - 273\,000\,525\,105\,n^{3} + 41\,491\,102\,653\,n),$$

$$S_{27} = \frac{1}{4\,312}\,(154\,n^{28} + 2\,156\,n^{27} + 9\,702\,n^{26} - 105\,105\,n^{24} + 1\,381\,380\,n^{22} - 15\,954\,939\,n^{20} + 153\,102\,950\,n^{18} - 1\,185\,824\,409\,n^{16} + 7\,207\,615\,800\,n^{14} - 33\,226\,402\,209\,n^{12} + 111\,094\,493\,510\,n^{10} - 253\,264\,350\,339\,n^{8} + 359\,254\,355\,460\,n^{6} - 273\,000\,525\,105\,n^{4} + 82\,982\,205\,306\,n^{2}),$$

$$S_{28} = \frac{1}{66\,990}\,(2\,310\,n^{29} + 33\,495\,n^{28} + 156\,310\,n^{27} - 1\,828\,827\,n^{25} + 26\,126\,100\,n^{23} - 330\,495\,165\,n^{21} + 3\,505\,251\,750\,n^{19} - 30\,343\,153\,995\,n^{17} + 209\,020\,858\,200\,n^{15} - 1\,111\,806\,535\,455\,n^{13} + 4\,393\,282\,243\,350\,n^{11} - 12\,241\,110\,266\,385\,n^{9} + 22\,325\,092\,089\,300\,n^{7} - 23\,751\,045\,684\,135\,n^{5} + 12\,032\,419\,769\,370\,n^{3} - 1\,828\,708\,499\,233\,n),$$

$$S_{29} = \frac{1}{4\,620}\,(154\,n^{30} + 2\,310\,n^{29} + 11\,165\,n^{28} - 140\,679\,n^{26} + 2\,177\,175\,n^{24} - 30\,045\,015\,n^{22} + 350\,525\,175\,n^{20} - 3\,371\,461\,555\,n^{18} + 26\,127\,607\,275\,n^{16} - 158\,829\,505\,065\,n^{14} + 732\,213\,707\,225\,n^{12} - 2\,448\,222\,053\,277\,n^{10} + 5\,581\,273\,022\,325\,n^{8} - 7\,917\,015\,228\,045\,n^{6} + 6\,016\,209\,884\,685\,n^{4} - 1\,828\,708\,499\,233\,n^{2}),$$

$$S_{30} = \frac{1}{14\,322}\,(462\,n^{31} + 7\,161\,n^{30} + 35\,805\,n^{29} - 484\,561\,n^{27} + 8\,099\,091\,n^{25} - 121\,486\,365\,n^{23} + 1\,552\,325\,775\,n^{21} - 16\,502\,417\,085\,n^{19} + 142\,933\,380\,975\,n^{17} - 984\,742\,931\,403\,n^{15} + 5\,238\,144\,213\,225\,n^{13} - 20\,698\,604\,632\,251\,n^{11} + 57\,673\,154\,564\,025\,n^{9} - 105\,183\,202\,315\,455\,n^{7} + 111\,901\,503\,855\,141\,n^{5} - 56\,689\,963\,476\,223\,n^{3} + 8\,615\,841\,276\,005\,n),$$

$$S_{31} = \frac{1}{7\,392}\,(231\,n^{32} + 3\,696\,n^{31} + 19\,096\,n^{30} - 276\,892\,n^{28} + 4\,984\,056\,n^{26} - 80\,990\,910\,n^{24} + 1\,128\,964\,200\,n^{22} - 13\,201\,933\,668\,n^{20} + 127\,051\,894\,200\,n^{18} - 984\,742\,931\,403\,n^{16} + 5\,986\,450\,529\,400\,n^{14} - 27\,598\,139\,509\,668\,n^{12} + 92\,277\,047\,302\,440\,n^{10} - 210\,366\,404\,630\,910\,n^{8} + 298\,404\,010\,280\,376\,n^{6} - 226\,759\,853\,904\,892\,n^{4} + 68\,926\,730\,208\,040\,n^{2}).$$

3. Od interesa su sledeće formule koje prenosimo iz navedenog *Tallqvist*-ovog članka:

$$\sum_0^n (2n+1) = (n+1)^2,$$

$$\sum_0^n (2n+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^4 = \frac{1}{15}(n+1)(2n+1)(2n+3)(12n^2+24n+5),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^5 = \frac{1}{3}(n+1)^2(16n^4+64n^3+76n^2+24n+3),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^6 = \frac{1}{21}(n+1)(2n+1)(2n+3)(48n^4+192n^3+216n^2+48n+7),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^7 = \frac{1}{3}(n+1)^2(48n^6+288n^5+608n^4+512n^3+146n^2+36n+3),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^8 = \frac{1}{45}(n+1)(2n+1)(2n+3)(320n^6+1\,920n^5+3\,920n^4+2\,880n^3+476n^2+312n+15),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^9 = \frac{1}{5}(n+1)^2(256n^8+2048n^7+6\,208n^6+8\,576n^5+5\,088n^4+1\,408n^3+936n^2+80n+5),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^{10} = \frac{1}{33}(n+1)(2n+1)(2n+3)(768n^8+6\,144n^7+18\,176n^6+23\,040n^5+10\,400n^4$$
$$+2\,688n^3+4\,400n^2-672n+11),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^{11} = \frac{1}{3}(n+1)^2(512n^{10}+5\,120n^9+20\,224n^8+38\,912n^7+36\,064n^6+15\,680n^5$$
$$+10\,368n^4+7\,936n^3-2\,018n^2+60n+3),$$

$$\sum_0^n (2n+1)^{12} = \frac{1}{1\,365}(n+1)(2n+1)(2n+3)(107\,520n^{10}+1\,075\,200n^9+4\,166\,400n^8+7\,526\,400n^7$$
$$+5\,837\,440n^6+1\,908\,480n^5+2\,915\,680n^4+1\,806\,720n^3-1\,644\,428n^2$$
$$+480\,744n+455).$$

Tablice

$$\sum_{r=1}^{n} r^k$$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	9	17	33	65	129	257
3	6	14	36	98	276	794	2 316	6 818
4	10	30	100	354	1 300	4 890	18 700	72 354
5	15	55	225	979	4 425	20 515	96 825	462 979
6	21	91	441	2 275	12 201	67 171	376 761	2 142 595
7	28	140	784	4 676	29 008	184 820	1 200 304	7 907 396
8	36	204	1 296	8 772	61 776	446 964	3 297 456	24 684 612
9	45	285	2 025	15 333	120 825	978 405	8 080 425	67 731 333
10	55	385	3 025	25 333	220 825	1 978 405	18 080 425	167 731 333
11	66	506	4 356	39 974	381 876	3 749 966	37 567 596	382 090 214
12	78	650	6 084	60 710	630 708	6 735 950	73 399 404	812 071 910

$$\sum_{r=1}^{n} r^k$$

n \ k	9	10	11	12
1	1	1	1	1
2	513	1 025	2 049	4 097
3	20 196	60 074	179 196	535 538
4	282 340	1 108 650	4 373 500	17 312 754
5	2 235 465	10 874 275	53 201 625	261 453 379
6	12 313 161	71 340 451	415 998 681	2 438 235 715
7	52 666 768	353 815 700	2 393 325 424	16 279 522 916
8	186 884 496	1 427 557 524	10 983 260 016	84 998 999 652
9	574 304 985	4 914 341 925	42 364 319 625	367 428 536 133
10	1 574 304 985	14 914 341 925	142 364 319 625	1 367 428 536 133
11	2 932 252 676	40 851 766 526	427 675 990 236	4 505 856 912 854
12	9 092 033 028	102 769 130 750	1 170 684 360 924	13 421 957 361 110

$$\sum_{r=1}^{n} (2r)^k$$

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256
2	6	20	72	272	1 056	4 160	16 512	65 792
3	12	56	288	1 568	8 832	50 816	296 448	1 745 408
4	20	120	800	5 664	41 600	312 960	2 393 600	18 522 624
5	30	220	1 800	15 664	141 600	1 312 960	12 393 600	118 522 624
6	42	364	3 528	36 400	390 432	4 298 944	48 225 408	548 504 320
7	56	560	6 272	74 816	928 256	11 828 480	153 638 912	2 024 293 376
8	72	816	10 368	140 352	1 976 832	28 605 696	422 074 368	6 319 260 672
9	90	1 140	16 200	245 328	3 866 400	62 617 920	1 034 294 400	17 339 221 248
10	110	1 540	24 200	405 328	7 066 400	126 617 920	2 314 294 400	42 939 221 248
11	132	2 024	34 848	639 584	12 220 032	239 997 824	4 808 652 288	97 815 094 784
12	156	2 600	48 672	971 360	20 182 656	431 100 800	9 395 123 712	207 890 408 960

$$\sum_{r=1}^{n} (2r)^k$$

n \ k	9	10	11	12
1	512	1 024	2 048	4 096
2	262 656	1 049 600	4 196 352	16 781 312
3	10 340 352	61 515 776	366 993 408	2 193 563 648
4	144 558 080	1 135 257 600	8 956 928 000	70 913 040 384
5	1 144 558 080	11 135 257 600	108 956 928 000	1 070 913 040 384
6	6 304 338 432	73 052 621 824	851 965 298 688	9 987 013 488 640
7	26 965 385 216	362 307 276 800	4 901 530 468 352	66 680 925 863 936
8	95 684 861 952	1 461 818 904 576	22 493 716 512 768	348 155 902 574 592
9	294 044 152 320	5 032 286 131 200	86 762 126 592 000	1 504 987 284 000 768
10	806 044 152 320	15 272 286 131 200	291 562 126 592 000	5 600 987 284 000 768
11	2 013 313 370 112	41 832 208 922 624	875 880 428 003 328	18 455 989 915 049 984
12	4 655 120 910 336	105 235 589 888 000	2 397 561 571 172 352	54 976 337 351 106 560

$$\sum_{r=0}^{n} (2r+1)^k$$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	10	28	82	244	730	2 188	6 562
2	9	35	153	707	3 369	16 355	80 313	397 187
3	16	84	496	3 108	20 176	134 004	903 856	6 161 988
4	25	165	1 225	9 669	79 225	665 445	5 686 825	49 208 709
5	36	286	2 556	24 310	240 276	2 437 006	25 173 996	263 567 590
6	49	455	4 753	52 871	611 569	7 263 815	87 922 513	1 079 298 311
7	64	680	8 128	103 496	1 370 944	18 654 440	258 781 888	3 642 188 936
8	81	969	13 041	187 017	2 790 801	42 792 009	669 120 561	10 617 946 377
9	100	1 330	19 900	317 338	5 266 900	89 837 890	1 562 992 300	27 601 509 418
10	121	1 771	29 161	511 819	9 351 001	175 604 011	3 364 080 841	65 424 368 779
11	144	2 300	41 328	791 660	15 787 344	323 639 900	6 768 906 288	143 735 354 060
12	169	2 925	56 953	1 182 285	25 552 969	567 780 525	12 872 421 913	296 323 244 685

$$\sum_{r=0}^{n} (2r+1)^k$$

$n \backslash k$	9	10	11	12
1	19 684	59 050	177 148	531 442
2	1 972 809	9 824 675	49 005 273	244 672 067
3	42 326 416	292 299 924	2 026 332 016	14 085 959 268
4	429 746 905	3 779 084 325	33 407 391 625	296 515 495 749
5	2 787 694 596	29 716 508 926	318 719 062 236	3 434 943 872 470
6	13 392 193 969	167 575 000 775	2 110 879 456 273	26 733 028 994 931
7	51 835 553 344	744 225 391 400	10 760 635 315 648	156 479 366 885 576
8	170 423 429 841	2 760 219 291 849	45 032 531 623 281	739 101 604 115 337
9	493 111 127 620	8 891 285 549 650	161 522 790 521 500	2 952 416 523 181 498
10	1 287 391 174 201	25 571 166 527 851	511 800 291 063 721	10 308 244 034 568139
11	3 088 543 835 664	66 997 677 741 500	1 464 610 048 977 648	32 222 868 466 588 460
12	6 903 241 101 289	162 365 109 382 125	3 848 795 839 993 273	91 827 513 241 979 085

Primedba. Upotreba ovih tablica je očigledna. Međutim, njihova primena je šira nego što izgleda na prvi pogled. Ustvari, moguéno je izračunati zbirove do $n=25$.

Primer. $1^7+2^7+\cdots+25^7=(1^7+3^7+\cdots+25^7)+(2^7+4^7+\cdots+24^7)$

$$= 12\,872\,421\,913 + 9\,395\,123\,712 = 22\,267\,545\,625\,.$$

II. POJAM GRUPE

Grupa je neprazan skup M na kome je definisana jedna operacija (koju ćemo označiti sa $\circ$), tako da su zadovoljena sledeća četiri uslova:

I. Ako su S i T dva proizvoljna elementa skupa M, tada je $S\circ T$ takođe element skupa M i taj element je jednoznačno određen;

II. Za bilo koju trojku elemenata S, T, U $(\in M)$ važi

$$S\circ(T\circ U)=(S\circ T)\circ U;$$

III. Među elementima skupa M postoji bar jedan element E koji ima osobinu

$$S\circ E=S \quad \text{za svaki element } S\in M.$$

(takav element E zove se jedinični element);

IV. Svakom elementu S odgovara bar jedan element $U(\in M)$ za koji je

$$S \circ U = E \quad \text{(takav element } U \text{ zove se inverzni element).}$$

Polazeći od navedenog sistema postulata (*Dickson*-ov sistem postulata), dokazuje se:

I. Postoji samo jedan jedini *jedinični* element E grupe;

II. Jedinični element ima osobinu komutacije sa svakim elementom grupe, tj.

$$S \circ E = S \quad \text{i} \quad E \circ S = S;$$

III. Svakom elementu S grupe odgovara jedan i samo jedan inverzni element (označava se sa S^{-1}), takav da je

$$S \circ S^{-1} = E \quad \text{i} \quad S^{-1} \circ S = E.$$

Primeri grupa. 1° Skup racionalnih brojeva, u odnosu na *sabiranje*, obrazuje grupu. Ovde je jedinični element 0, a inverzni element racionalnog broja r je $-r$.

2° Celi brojevi u odnosu na sabiranje obrazuju grupu.

3° Skup M od četiri matrice

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad E_3 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

obrazuje grupu u odnosu na matrično množenje.

Ovde je jedinični element E.

Inverzni elementi elemenata E, E_1, E_2, E_3 su:

$$E^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad E_1^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Svaki od njih pripada datom skupu.

Budući da za matrice važi zakon asocijacije za množenje i da svi proizvodi elemenata E, E_1, E_2, E_3, uzetih po dva i dva, pripadaju skupu M, zaključuje se da elementi E, E_1, E_2, E_3 čine grupu.

4° Pozitivni celi brojevi ne obrazuju grupu u odnosu na množenje (obrazložiti ovaj zaključak).

III. O NEKIM RELACIJAMA KOJE OSTAJU U VAŽNOSTI AKO SE PERMUTUJU OPERATORI ŠTO SE U NJIMA POJAVLJUJU[1]

Za svaki skup E realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ važe ova dva identiteta:

$$\begin{aligned} (1) \qquad \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = {} & \sum \min(a_1) \\ & - \sum \min(a_1, a_2) \\ & + \sum \min(a_1, a_2, a_3) \\ & - \cdots \\ & + (-1)^{k-1} \sum \min(a_1, a_2, \ldots, a_k) \\ & + \cdots \\ & + (-1)^{n-1} \sum \min(a_1, a_2, \ldots, a_n); \end{aligned}$$

[1] Ovaj prilog redigovan je prema članku:

D. S. Mitrinović: Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant (*Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS*, knj. VIII, 1956, str. 15—22).

Primedba. Polazeći od ovih rezultata *F. Klein-Barmen* izveo je nove interesantne rezultate. Videti:

F. Klein-Barmen: Ordoid, Halbverband und ordoide Semigruppe (*Mathematische Annalen*, Bd. 135, 1958, S. 142—159).

$$(2) \qquad \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum \max(a_1)$$
$$- \sum \max(a_1, a_2)$$
$$+ \sum \max(a_1, a_2, a_3)$$
$$- \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum \max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$
$$+ \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} \sum \max(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Zbirove Σ treba protegnuti na sve kombinacije naznačene klase od n elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Tako, na primer, $\Sigma \min(a_1, a_2)$ ima značenje:

$$\min(a_1, a_2) + \min(a_1, a_3) + \cdots + \min(a_1, a_n)$$
$$+ \min(a_2, a_3) + \cdots + \min(a_2, a_n)$$
$$+ \cdots$$
$$+ \min(a_{n-1}, a_n).$$

Ne narušavajući generalnost relacija (1) i (2), može se pretpostaviti

$$(3) \qquad a_1 > a_2 > \cdots > a_k > \cdots > a_n.$$

Vodeći računa o (3), izraz koji se javlja na desnoj strani relacije (1) može se napisati u obliku:

$$a_1$$
$$+ a_2[1-1]$$
$$+ a_3[1-2+1]$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_k\left[1 - \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\right]$$
$$+ \cdots$$
$$+ a_n\left[1 - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right].$$

Prethodni zbir svodi se na a_1, budući da je

$$(4) \qquad 1 - \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1} = (1-1)^{k-1} = 0,$$

gde je k prirodan broj.

Izraz na levoj strani relacije (1), pod uslovom (3), svodi se takođe na a_1.

Prema tome, relacija (1) je dokazana.

Izraz na desnoj strani relacije (2) može se napisati kao što sleduje:

$$
\begin{aligned}
& a_1\left[1-\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}\right] \\
& +a_2\left[1-\binom{n-2}{1}+\binom{n-2}{2}-\cdots+(-1)^{n-2}\binom{n-2}{n-2}\right] \\
& +\cdots \\
& +a_k\left[1-\binom{n-k}{1}+\binom{n-k}{2}-\cdots+(-1)^{n-k}\binom{n-k}{n-k}\right] \\
& +\cdots \\
& +a_{n-1}[1-1] \\
& +a_n .
\end{aligned}
$$

Ovaj se zbir, na osnovu (4), svodi na a_n.

Budući da se izraz na levoj strani relacije (2) svodi tako isto na a_n, relacija (2) je dokazana.

Relacija (1) i (2) važe i u slučaju kada među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ima takvih koji su jednaki među sobom.

Primena. Posmatrajmo sada n prirodnih brojeva

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

i napišimo ih u obliku

$$P_\nu=\prod_{k=1}^{r}(p_k)^{a_k^\nu} \quad (\nu=1,2, \ldots, n),$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_r$ prosti (prim) brojevi i gde su elementi matrice

$$
\left\|\begin{array}{cccc}
a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_r^1 \\
a_1^2 & a_2^2 & & a_r^2 \\
\vdots & & & \\
a_1^n & a_2^n & & a_r^n
\end{array}\right\|
$$

celi nenegativni brojevi.

Označimo sa

$$(P_1, P_2, \ldots, P_s) \text{ i } [P_1, P_2, \ldots, P_s]$$

respektivno najveći zajednički delilac i najmanji sadržalac naznačenih brojeva.

Prema tome možemo pisati

$$(P_1, P_2, \ldots, P_s)=p_1^{\delta_1} p_1^{\delta_2} \cdots p_r^{\delta_r}$$

$$[P_1, P_2, \ldots, P_s]=p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r}$$

$$\{\delta_i=\min(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s), \quad d_i=\max(a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s)\}.$$

Sada smo u mogućnosti da izvedemo sledeće relacije:

I. n parno.

$$[P_1, P_2, \ldots, P_n]=\frac{\prod(P_1) \prod(P_1, P_2, P_3) \cdots \prod(P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})}{\prod(P_1, P_2) \prod(P_1, P_2, P_3, P_4) \cdots \prod(P_1, P_2, \ldots, P_n)}.$$

II. n neparno.

$$[P_1, P_2, \dots, P_n] = \frac{\Pi(P_1)\,\Pi(P_1, P_2, P_3) \cdots \Pi(P_1, P_2, \dots, P_n)}{\Pi(P_1, P_2)\,\Pi(P_1, P_2, P_3, P_4) \cdots \Pi(P_1, P_2, \dots, P_{n-1})}.$$

III. n parno.

$$(P_1, P_2, \cdots, P_n) = \frac{\Pi[P_1]\,\Pi[P_1, P_2, P_3] \cdots \Pi[P_1, P_2, \dots, P_{n-1}]}{\Pi[P_1, P_2]\,\Pi[P_1, P_2, P_3, P_4] \cdots \Pi[P_1, P_2, \dots, P_n]}.$$

IV. n neparno.

$$(P_1, P_2, \dots, P_n) = \frac{\Pi[P_1]\,\Pi[P_1, P_2, P_3] \cdots \Pi[P_1, P_2, \dots, P_n]}{\Pi[P_1, P_2]\,\Pi[P_1, P_2, P_3, P_4] \cdots \Pi[P_1 P_2, \dots, P_{n-1}]}.$$

U ovim relacijama proizvodi Π protežu se na sve kombinacije naznačene klase. Tako, na primer, u relaciji (I) proizvod $\Pi(P_1, P_2)$ označava

$$\begin{aligned} &(P_1, P_2)\,(P_1, P_3)\,(P_1, P_4) \cdots (P_1, P_n) \\ &\times (P_2, P_3)\,(P_2, P_4) \cdots (P_2, P_n) \\ &\times (P_3, P_4) \cdots (P_3, P_n) \\ &\vdots \\ &\times (P_{n-1}, P_n). \end{aligned}$$

Verifikacija gore citiranih relacija može se dati bez teškoće. U tom cilju, odredimo u izrazu na levoj i na desnoj strani relacije (1) eksponent potencije čija je baza p_i.

Eksponent o kome je reč u izrazu na levoj strani je $\max(a_i^1, a_i^2, \dots a_i^n)$.

Odgovarajući eksponent u izrazu na desnoj strani je

$$\begin{aligned} &\sum \min(a_i^1) \\ &- \sum \min(a_i^1, a_i^2) \\ &+ \cdots \\ &- \sum \min(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n). \end{aligned}$$

Na osnovu formule (1) biće identično

$$\begin{aligned} \max(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) = &\sum \min(a_i^1) \\ &- \sum \min(a_i^1, a_i^2) \\ &+ \cdots \\ &- \sum \min(a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n), \end{aligned}$$

što pokazuje da je formula (1) zaista istinita.

Formule (II), (III), (IV) mogu se dokazati na isti način, ali mi ćemo ovo izostaviti i ostaviti čitaocu kao vežbu.

Relacije (I), (II), (III), (IV) uživaju osobinu da ostaju u važnosti ako se u njima međusobno izmenjaju operatori ( ) i [ ], od kojih prvi vodi dobijanju najvećeg zajedničkog delioca, a drugi najmanjeg zajedničkog sadržaoca za brojeve o kojima je reč.

Sličnim rezonovanjem mogu se dokazati i sledeće formule:

I. n parno.

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= \frac{\Pi \min(a_1)\, \Pi \min(a_1, a_2, a_3) \cdots \Pi \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})}{\Pi \min(a_1, a_2)\, \Pi \min(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdots \Pi \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

II. n neparno

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$= \frac{\Pi \min(a_1)\, \Pi \min(a_1, a_2, a_3) \cdots \Pi \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\Pi \min(a_1, a_2)\, \Pi \min(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdots \Pi \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})}.$$

Poslednje dve formule ostaju u važnosti ako se u njima međusobno razmene operatori max i min.

U poslednjim formulama a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ označavaju realne brojeve, različite od nule.

IV. FORMULE O APSOLUTNIM VREDNOSTIMA REALNIH BROJEVA[1]

1. Polazeći od formule

$$|a_n - a_m| = \max(a_n, a_m) - \min(a_n, a_m) \qquad (a_m, a_n \text{ realni brojevi}),$$

mogu se izvesti sledeće formule:

$$|a_1 - a_2| = \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2);$$

$$|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3|$$
$$+ |a_2 - a_3| = 2\{\max(a_1, a_2, a_3) - \min(a_1, a_2, a_3)\};$$

$$|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4|$$
$$+ |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4|$$
$$+ |a_3 - a_4| = 3\{\max(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4)\}$$
$$+ \{\max_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4)\};$$

$$|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5|$$
$$+ |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5|$$
$$+ |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5|$$
$$+ |a_4 - a_5|$$
$$= 4\{\max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\}$$
$$+ 2\{\max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\};$$

[1] Redigovano prema članku:

D. S. Mitrinovitch: Formules sur les valeurs absolues des nombres réels (Elemente der Mathematik, Basel, Bd. XII, 1957, 111—112).

$$\begin{aligned}
&|a_1-a_2|+|a_1-a_3|+|a_1-a_4|+|a_1-a_5|+|a_1-a_6|\\
&\qquad+|a_2-a_3|+|a_2-a_4|+|a_2-a_5|+|a_2-a_6|\\
&\qquad\qquad+|a_3-a_4|+|a_3-a_5|+|a_3-a_6|\\
&\qquad\qquad\qquad+|a_4-a_5|+|a_4-a_6|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_5-a_6|\\
&\equiv 5\,\{\max\,(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min\,(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\}\\
&+3\,\{\max\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\}\\
&+\ \ \{\max\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)-\min\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|a_1-a_2|+|a_1-a_3|+|a_1-a_4|+|a_1-a_5|+|a_1-a_6|+|a_1-a_7|\\
&\qquad+|a_2-a_3|+|a_2-a_4|+|a_2-a_5|+|a_2-a_6|+|a_2-a_7|\\
&\qquad\qquad+|a_3-a_4|+|a_3-a_5|+|a_3-a_6|+|a_3-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad+|a_4-a_5|+|a_4-a_6|+|a_4-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_5-a_6|+|a_5-a_7|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+|a_6-a_7|\\
&\equiv 6\,\{\max\,(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min\,(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}\\
&+4\,\{\max\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min\nolimits_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}\\
&+2\,\{\max\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)-\min\nolimits_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}.
\end{aligned}$$

U opštem slučaju imaćemo formulu

$$\sum_{1\leq n<m\leq 2k}|a_n-a_m|\equiv\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\,(\max\nolimits_{k-i}E-\min\nolimits_{k-i}E),$$

$$\sum_{1\leq n<m\leq 2k+1}|a_n-a_m|\equiv\sum_{i=1}^{k}2i\,(\max\nolimits_{k-i}E-\min\nolimits_{k-i}E).$$

U ovim formulama $\max_p E$ označava najveći od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_s$, gde je prethodno izostavljeno $p\,(<s)$ najvećih brojeva iz skupa $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$. $\min_p E$ označava najmanji između brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_s$, gde je prethodno izostavljeno $p\,(<s)$ najmanjih brojeva iz skupa $E=\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$.

Ostavlja se čitaocu da navedene formule dokaže.

V. O JEDNOJ DIOFANTOVOJ JEDNAČINI [1]

1. Posmatrajmo dve aritmetičke progresije:

$$a,\ a+p,\ a+2p,\ \ldots,\ a+(n-1)p,$$

$$b,\ b+q,\ b+2q,\ \ldots,\ b+(n-1)q,$$

gde su a, b, p, q $(pq\neq 0)$ racionalni brojevi.

[1] Napisano prema članku: *D. S. Mitrinović: Sur une question d'analyse diophantienne* (*Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu*, serija: Matematika i fizika, № 6 (1956), 4 strane).

Primenom obrazaca

$$1+2+\cdots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1),\qquad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

dolazi se do sumacione formule

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)p][b+(k-1)q]$$
$$=\tfrac{1}{6}n[2pqn^2+3(aq+bp-pq)n+pq-3(aq+bp)+6ab].$$

Zbir

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)p][b+(k-1)q]$$

izražava se kao proizvod od tri linearna faktora po n, sa racionalnim koeficijentima, tada i samo tada, ako je izraz

$$(3)\qquad 9(aq+bp-pq)^2-8pq[pq-3(aq+bp+6ab]$$

kvadrat jednog racionalnog broja. *Ako je ovaj uslov ispunjen, kazaćemo da zbir* (2) *ima osobinu* (R).

Ako su a, b, q racionalni brojevi i ako je ispunjen jedan od tri uslova:

$$1^\circ\quad p=a,$$

$$2^\circ\quad p/a=(3q-2b)/(5q-3b)\qquad (5q\neq 3b),$$

$$3^\circ\quad p/a=(3q-4b)/(2q-3b)\qquad (2q\neq 3b),$$

zbir (2) ima osobinu (R).

Budući da zbir (2) ostaje invarijabilan, kada se u njemu u isti mah izmene a sa b i p sa q, zaključuje se da zbir (2) uživa osobinu (R) i u ovim slučajevima:

$$4^\circ\quad q=b,$$

$$5^\circ\quad q/b=(3p-2a)/(5p-3a)\qquad (5p\neq 3a),$$

$$6^\circ\quad q/b=(3p-4a)/(2p-3a)\qquad (2p\neq 3a),$$

gde su a, b, p racionalni brojevi.

2. Stavi li se

$$9(aq+bp-pq)^2-8pq[pq-3(aq+bp)+6ab]=[3(aq+bp-pq)+2\lambda pq]^2,$$

gde je λ ma kakav racionalan broj, posle izvršenih transformacija dobija se

$$(4)\qquad \frac{p}{a}=\frac{3[(2-\lambda)q-4b]}{(\lambda-2)[(\lambda-1)q+3b]},$$

gde je $\lambda\neq 2$ i $\lambda\neq 1-(3b)/q$.

Budući da su λ, a, b, q racionalni, jednačina (4) daje p koje je takođe racionalno. Na taj način imamo beskonačan skup racionalnih brojeva a, b, p, q za koje izraz (2) ima osobinu (R).

Ako se u (4) stavi $\lambda=-4$ i $\lambda=-1$, dobijaju se respektivno slučajevi 2° i 3° koji su napred navedeni.

3. Izraz (3) može se svesti na oblik

$$[3\,(aq+bp)+pq]^2-48\,abpq, \tag{5}$$

koji je podesan za iznalaženje racionalnih rešenja (a, b, p, q, N) neodređene (Diofantove) jednačine

$$[3\,(aq+bp)+pq]^2-48\,abpq=N^2.$$

Ako je $abpq=0$, izraz (2) uživa osobinu (R). U daljem izlaganju pretpostavićemo da je $abpq\neq 0$.

Stavimo

$$[3\,(aq+bp)+pq]^2-48\,abpq=[3\,(aq+bp)+pq-R_kM_k]^2, \tag{6}$$

gde je R_k proizvoljan racionalan broj, dok M_k ima jedan od sledećih oblika

$$ab,\ ap,\ aq,\ bp,\ bq,\ pq. \tag{7}$$

Kada se izvrše potrebne transformacije, dobija se respektivno

$$\frac{p}{a}=\frac{R_1\,(R_1b-6q)}{2\,[(R_1-24)\,q+3\,R_1b]}, \tag{8}$$

$$\frac{p}{q}=\frac{6\,(8b-R_2a)}{R_2\,(6b-R_2a+2q)}, \tag{9}$$

$$\frac{p}{a}=\frac{R_3q\,(6-R_3)}{2\,[(24-3\,R_3)\,b-R_3q]}, \tag{10}$$

$$\frac{q}{b}=\frac{R_4p\,(6-R_4)}{2\,[(24-3\,R_4)\,a-R_4p]}, \tag{11}$$

$$\frac{q}{p}=\frac{6\,(8a-R_5b)}{R_5\,(6a-R_5b+2p)}, \tag{12}$$

$$\frac{p}{a}=\frac{6\,(8b-R_6q)}{R_6\,[6b+(2-R_6)\,q]}. \tag{13}$$

Pretpostavlja se da su ispunjeni uslovi koji se nameću da bi relacije (8)–(13) imale smisla. Slučajeve koji su isključeni treba posmatrati posebno. To će učiniti čitalac.

Prema tome, dobili smo više skupova uslova i svaki od njih određuje beskonačno mnogo rešenja problema koji smo postavili.

Iz relacija (8)–(13) vidi se da se mogu izabrati po volji R_k, a, b, q i onda je p racionalno ako su racionalni R_k, a, b, q.

Ako se u (4) stavi $\lambda=2-(24/R_1)$, dobija se upravo (8).

Rešenje (13) sleduje iz (4), ako se tu stavi $\lambda=2-(R_6/2)$.

Budući da zbir (2) ostaje invarijabilan ako se u njemu permutuju a sa b i p sa q, rešenje (12) se svodi na (9).

Istim rezonovanjem se utvrđuje da se rešenje (11) svodi na (10).

Među rešenjima (8)–(13) tri su nezavisna, naime: (8), (9), (10).

U slučaju kada parametri a, b, p, q zadovoljavaju, na primer, uslov (8), zbir (1) dobija oblik

$$\frac{1}{3}\,pqn\,(n-n_1)\,(n-n_2),$$

gde je

$$n_1=1-(R_1ab)/(4pq),\qquad n_2=[2pq+R_1ab-6\,(aq+bp)]/(4pq).$$

4. *Numerički primeri.* 1° Kada se u (9) stavi $a=-1$, $b=1/2$, $q=2$, $R_2=-1$, dobija se $p=-6$.

U ovom slučaju imamo

$$\sum_{k=1}^{n}(-6k+5)\left(2k-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}n^2(8n-7).$$

2° Ako je $a=1$, $b=2$, $q=1/2$, $R_3=1/2$, iz (10) se dobija $p=11/716$.

Odgovarajući zbir glasi:

$$\frac{1}{1432}\sum_{k=1}^{n}(11k+705)(k+3)=\frac{1}{8592}n(n+95)(22n+157).$$

5. *Generalizacija.* Problem koji je ovde tretiran partikularan je slučaj sledećeg problema:

Odrediti sve skupove racionalnih brojeva

$$a_\nu,\, p_\nu \quad (\nu=1, 2, \ldots, N)$$

koji imaju osobinu da zbir

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{\nu=1}^{N}[a_\nu+(k-1)p_\nu]\right\}$$

bude proizvod od $N+1$ faktora, linearnih po n, sa racionalnim koeficijentima.

Formulisani problem nije rešen. Taj problem možda će zainteresovati nekog od čitalaca.

Primedba. Diofantovim jednačinama nazivaju se algebarska jednačina ili skup algebarskih jednačina čiji su koeficijenti celi brojevi i za koje se traže celobrojna ili racionalna rešenja. Broj nepoznatih u Diofantovim jednačinama premašuje broj jednačina, pa se stoga ove jednačine nazivaju i neodređenim jednačinama.

U savremenoj matematici pojam Diofantovih jednačina šire je shvaćen, pa se traže i rešenja koja su algebarski brojevi.

U ovom Zborniku navedeno je i rešeno više Diofantovih jednačina.

VI. O STIRLING-OVIM BROJEVIMA[1]

1. Brojevi S_n^m, definisani pomoću identiteta

$$(1)\qquad x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=S_n^1x+S_n^2x^2+\cdots+S_n^{n-1}x^{n-1}+S_n^nx^n,$$

zovu se *Stirling*-ovi brojevi prve vrste.

Stirling-ovi brojevi S_n^m zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$(2)\qquad S_{n+1}^m=S_n^{m-1}-nS_n^m.$$

---

[1] Redigovano prema članku:

D. S. Mitrinović: O Stirling-ovim brojevima (Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje, Prirodno-matematički oddel, knjiga I, 1948, str. 49—95).

Ukoliko čitalac ima šire interesovanje za *Stirling*-ove brojeve, upućuje se na navedeni članak kao i na sledeće izvore:

Ch. Jordan: On Stirling's Numbers (The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 37, 1933, p. 254—278). — U ovoj raspravi mađarski matematičar *Jordan* skupio je različite poznate formule o *Stirling*-ovim brojevima i izveo nekoliko novih.

Ch. Jordan: Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939, 654 strane (videti naročito str. 142—168). Ovo je delo napisano s obzirom na rezultate o *Stirling*-ovim brojevima koji su objavljeni do 1939.

To je jednačina sa konačnim diferencijama. Rešenje ove jednačine, u opštem slučaju, nije poznato. Međutim, polazeći od $S_1^0=0$, $S_1^1=1$, mogu se izračunati, jedan za drugim, *Stirling*-ovi brojevi S_n^m. Na taj način mogućno je sastaviti tablicu ovih brojeva.

2. Za iznalaženje rešenja jednačine (2) postoji sledeći metod koji je dao sastavljač ovog *Zbornika.*

Pođimo od identiteta

$$(3)\quad (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$$
$$\equiv x^n-\Phi_n^1x^{n-1}+\Phi_n^2x^{n-2}-\Phi_n^3x^{n-3}+\cdots+(-1)^k\Phi_n^kx^{n-k}+\cdots+(-1)^n\Phi_n^n.$$

Upoređenjem identiteta (1) i (3) dolazi se do relacije

$$\Phi_n^m=(-1)^m S_{n+1}^{n-m+1}$$

kojoj se može dati i ovaj oblik

$$S_n^m=(-1)^{n-m}\Phi_{n-1}^{n-m}.$$

Iz definicione formule (3) izlazi da je broj Φ_n^m $(n\geqslant m>0)$ zbir svih proizvoda formiranih od n prvih brojeva prirodnog niza

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

s tim da svaki proizvod sadrži m raznih činilaca.

Brojevi Φ_n^m su celi pozitivni brojevi.

Neposredno možemo napisati ove dve formule:

$$\Phi_n^1=\frac{1}{2}n(n+1),\qquad \Phi_n^n=n!$$

3. Broj Φ_n^2 definisan je izrazom:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2=&\ (1\cdot2+1\cdot3+\cdots+1\cdot n)\\&+(2\cdot3+2\cdot4+\cdots+2\cdot n)\\&+\cdots\\&+(n-1)\,n.\end{aligned}$$

Poslednji izraz može se ovako transformovati:

$$\begin{aligned}\Phi_n^2=&\ n[1+2+\cdots+(n-1)]\\&+(n-1)[1+2+\cdots+(n-2)]\\&+\cdot\ \cdot\ \cdot\ +2\cdot1\end{aligned}$$

i najzad

$$(4)\qquad \Phi_n^2=n\Phi_{n-1}^1+(n-1)\Phi_{n-2}^1+\cdots+2\Phi_1^1.$$

Budući da je:

$$\begin{aligned}\Phi_{n-1}^1&=\frac{1}{2}(n-1)\,n,\\ \Phi_{n-2}^1&=\frac{1}{2}(n-2)(n-1),\\ &\ \ \vdots\\ \Phi_1^1&=1,\end{aligned}$$

formula (4) postaje

$$2\,\Phi_n^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + (n-1)\,n^2 .$$

Kako je

$$1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + \cdots + n\,(n+1)^2 \equiv \frac{1}{12}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,(3\,n+5),$$

definitivno dobijamo obrazac

$$\Phi_n^2 = \frac{1}{24}\,(n-1)\,n\,(n+1)\,(3\,n+2). \tag{5}$$

4. Broj Φ_n^3 definisan je izrazom

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = {} & (1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 4 + \cdots + 1\cdot 2\cdot n)\\ & + (1\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 5 + \cdots + 1\cdot 3\cdot n)\\ & + \cdots\\ & + (n-2)\,(n-1)\,n,\end{aligned}$$

kome se može dati oblik

$$\begin{aligned}\Phi_n^3 = {} & n\,[1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + (n-2)\,(n-1)]\\ & + (n-1)\,[1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \cdots + (n-3)\,(n-2)]\\ & + \cdots\\ & + 3\cdot 2\cdot 1\end{aligned}$$

i najzad

$$\Phi_n^3 = n\,\Phi_{n-1}^2 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^2 + \cdots + 3\,\Phi_2^2 . \tag{6}$$

Iz formule (5) sleduje:

$$\begin{aligned}\Phi_{n-1}^2 &= \frac{1}{24}\,(n-2)\,(n-1)\,n\,(3\,n-1),\\ \Phi_{n-2}^2 &= \frac{1}{24}\,(n-3)\,(n-2)\,(n-1)\,(3\,n-4),\\ &\ \vdots\\ \Phi_2^2 &= 1\cdot 2 .\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir poslednje obrasce, dobijamo

$$\begin{aligned}24\,\Phi_n^3 = {} & 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 8 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 11 + 3\cdot 4\cdot 5^2\cdot 14\\ & + \cdots + (n-2)\,(n-1)\,n^2\,(3\,n-1).\end{aligned} \tag{7}$$

Definitivni obrazac je

$$\Phi_n^3 = \frac{1}{48}\,n^2\,(n+1)^2\,(n-1)\,(n-2). \tag{8}$$

Nije teško dokazati da u opštem slučaju važi formula

$$\Phi_n^m = n\,\Phi_{n-1}^{m-1} + (n-1)\,\Phi_{n-2}^{m-1} + \cdots + m\,\Phi_{m-1}^{m-1} \qquad (0 < m \leqslant n). \tag{9}$$

Iz ove formule mogu se, na primer, izvesti sledeći zaključci:

1° Da bismo izračunali Φ_n^m, neophodno je prethodno izračunati Φ_n^{m-1}, što u krajnjoj analizi znači da prethodno treba izračunati

$$\Phi_n^1,\ \Phi_n^2,\ \ldots,\ \Phi_n^{m-1};$$

2° Φ_n^m je polinom po n stepena $2m$.

5. Ako sada primenimo osnovni obrazac (9) za izračunavanje Φ_n^4, biće najpre

$$\Phi_n^4 = n\,\Phi_{n-1}^3 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^3 + \cdots + 4\,\Phi_3^3.$$

Ova jednakost, s obzirom na (8), postaje

$$(10) \qquad 48\,\Phi_n^4 = 1\cdot 2\cdot 3^2\cdot 4^3 + 2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 5^3 + \cdots + (n-3)(n-2)(n-1)^2 n^3.$$

Da bismo našli zbir reda koji se nalazi na desnoj strani relacije (10), primenićemo rezultate iz priloga: *Zbirovi potencija n prvih prirodnih brojeva* (ovaj *Zbornik*, str. 289).

Polazeći od identiteta

$$k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 = k^7 + 14k^6 + 80k^5 + 238k^4 + 387k^3 + 324k^2 + 108k,$$

dobijamo

$$(11) \qquad 120\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 = 15n^8 + 300n^7 + 2\,510n^6 + 11\,352n^5 + 29\,855n^4 + 45\,420n^3 + 36\,740n^2 + 12\,048n.$$

Polinom koji se javlja u poslednjoj jednakosti ima faktore

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4.$$

Prema tome, identitetu (11) može se dati oblik

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)^2(k+3)^3 = \frac{1}{5!}\,n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3 + 150n^2 + 485n + 502).$$

Definitivno dobijamo

$$(13) \qquad \Phi_n^4 = \frac{1}{6!\cdot 8}(n+1)\,n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3 + 15n^2 - 10n - 8).$$

6. Kao što vidimo, iznalaženje formule za Φ_n^m komplikuje se sve više i više sa rašćenjem broja m.

Naći ćemo još formulu za broj Φ_n^5 koji je, prema (9), definisan izrazom

$$(14) \qquad \Phi_n^5 = n\,\Phi_{n-1}^4 + (n-1)\,\Phi_{n-2}^4 + \cdots + 5\,\Phi_4^4.$$

S obzirom na (13) možemo, umesto (14), pisati

$$(15) \qquad \Phi_n^5 = \frac{1}{6!\cdot 8}\sum_{k=5}^{n} k^2(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(15k^3 - 30k^2 + 5k + 2).$$

Posmatrajmo sada izraz

$$(k+4)^2(k+3)(k+2)(k+1)\,k\,[15(k+4)^3 - 30(k+4)^2 + 5(k+4) + 2],$$

čiji je razvijen oblik

$$15k^9 + 360k^8 + 3\,710k^7 + 21\,392k^6 + 75\,263k^5 + 164\,840k^4 + 218\,420k^3 + 159\,003k^2 + 48\,192k.$$

Ako se u poslednjem izrazu broju k daju redom ove vrednosti

$$1, 2, 3, \ldots, n,$$

pa se svi tako formirani numerički izrazi saberu, dobija se

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{n} (k+4)^2 (k+3)\, k+2)(k+1)\, k\, (15k^3+150k^2+485k+502)$$
$$= \frac{1}{2}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)^2(n+5)^2(3n^2+23n+38).$$

Prema (16) obrazac (15) postaje

$$(17) \quad \Phi_n^5 = \frac{1}{6!\,4^2}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n^2(n+1)^2(3n^2-n-6).$$

7. Dosada smo našli formule za Φ_n^m $(m=1, 2, 3, 4, 5)$.

Primenom ovog metoda u mogućnosti smo da izvedemo redom formule za brojeve Φ_n^6, Φ_n^7, Φ_n^8, ..., ali je prethodno potrebno izračunati zbirove

$$\sum_{i=1}^{n} i^p \quad (p=10, 11, 12, \ldots, 2m-1).$$

Dakle, pokazali smo da iznalaženje formula za brojeve Φ_n^m $(m=1, 2, 3, \ldots, n)$, prema ovom metodu, iziskuje samo jednostavne algebarske operacije.

Ovaj metod je elementaran i nije manje praktičan od drugih poznatih metoda [2]

8. Sada ćemo pokazati kako se ovaj metod može iskoristiti za formiranje rešenja jednačine sa konačnim diferencijama

$$(18) \qquad S_{n+1}^m = S_n^{m-1} - n S_n^m.$$

Prema jednom ranijem obrascu brojevima

$$\Phi_n^1, \quad \Phi_n^2, \quad \Phi_n^3, \quad \Phi_n^4, \quad \Phi_n^5$$

odgovaraju respektivno:

$$-S_{n+1}^n, \quad S_{n+1}^{n-1}, \quad -S_{n+1}^{n-2}, \quad S_{n+1}^{n-3}, \quad -S_{n+1}^{n-4}.$$

Tako dolazimo do ovih rezultata:

$$S_n^{n-1} = -\frac{1}{2}(n-1)\,n,$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{24}(n-2)(n-1)\,n(3n-1),$$

$$(19) \quad S_n^{n-3} = -\frac{1}{48}(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2,$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{6!\cdot 2^3}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)\,n(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{6!\cdot 2^4}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)^2 n^2(3n^2-7n-2).$$

To su rešenja jednačine sa konačnim diferencijama (18).

---

[1] Uporediti metode koje su dali: *Cauchy, Schläfli, von Zeipel, Schlömilch*, a koje je analizirao *N. Nielsen* na str. 71—72 svoga priručnika: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*. Leipzig, 1906.

Da bismo odredili i druga rešenja te jednačine, tj.

$$S_n^{n-6}, \quad S_n^{n-7}, \quad S_n^{n-8}, \ldots$$

treba, primenom ovog metoda, odrediti:

$$\Phi_n^6, \quad \Phi_n^7, \quad \Phi_n^8, \ldots$$

Napomenimo da se rešenjima (19) može dati i ovaj sažetiji oblik:

$$S_n^{n-1} = -\binom{n}{2},$$

$$S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1),$$

$$S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}n(n-1),$$

$$S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}(15n^3-30n^2+5n+2),$$

$$S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}n(n-1)(3n^2-7n-2).$$

9. Relaciji (9) odgovara rekurentna formula

$$S_n^{n-m} + (n-1)S_{n-1}^{n-m} + (n-2)S_{n-2}^{n-m-1} + (n-3)S_{n-3}^{n-m-2} + \cdots + mS_m^1 = 0.$$

Poslednja relacija može takođe da se uzme kao polazna tačka za proučavanje *Stirling*-ovih brojeva.

Primedba. Stirling-ovi brojevi pojavljuju se u raznim pitanjima. Tako, na primer, determinanta D_{nk} reda n, čija je ν-ta vrsta

$$1, \binom{r_\nu}{1}, \ldots, \binom{r_\nu}{k-1}, \binom{r_\nu}{k+1}, \ldots, \binom{r_\nu}{n}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots n; \ 1 \leqslant k \leqslant n-1; \ k \text{ prirodan broj}; \ r_\nu \text{ različiti})$$

određuje se pomoću formule

$$1!\,2!\cdots(k-1)!\,(k+1)!\cdots n!\,D_{nk}$$
$$= (\lambda_{k0}\sigma_{n-k} + \lambda_{k1}\sigma_{n-k-1} + \cdots + \lambda_{k,n-k-1}\sigma_1 + \lambda_{k,n-k})V_n,$$

gde su:

V_n *Vandermonde*-ova determinanta po $r_1, r_2, \ldots, r_n$;

σ_k elementarna simetrična funkcija reda k po $r_1, r_2, \ldots, r_n$;

$$\lambda_{pq} = \lambda_{p+1,q-1}S_{p+1}^p - \lambda_{p+2,q-2}S_{p+2}^p + \cdots + (-1)^{q+1}\lambda_{p+q,0}S_{p+q}^p$$

$$(\lambda_{p0} = 1; \ p, q \text{ prirodni brojevi});$$

S_n^m *Stirling*-ovi brojevi prve vrste.

Videti o ovome:

D. S. *Mitrinović: Sur un déterminant et les nombres de Stirling s'y rattachant* (*Atti del V Congresso dell' Unione Matematica Italiana*, Pavia—Torino, 1956);

D. S. *Mitrinović: Sur le déterminant de Stern généralisé* (*Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije*, knjiga 7, 1955, str. 153—160).

TABLICA[1] STIRLING-OVIH BROJEVA

I. $S_n^{n-1} = -\binom{n}{2}$.

n	S_n^{n-1}	n	S_n^{n-1}	n	S_n^{n-1}
2	−1	18	−153	34	−561
3	−3	19	−171	35	−595
4	−6	20	−190	36	−630
5	−10	21	−210	37	−666
6	−15	22	−231	38	−703
7	−21	23	−253	39	−741
8	−28	24	−276	40	−780
9	−36	25	−300	41	−820
10	−45	26	−325	42	−861
11	−55	27	−351	43	−903
12	−66	28	−378	44	−946
13	−78	29	−406	45	−990
14	−91	30	−435	46	−1 035
15	−105	31	−465	47	−1 081
16	−120	32	−496	48	−1 128
17	−136	33	−528	49	−1 176

II. $S_n^{n-2} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-1)$.

n	S_n^{n-2}	n	S_n^{n-2}	n	S_n^{n-2}
3	2	24	35 926	45	475 365
4	11	25	42 550	46	519 915
5	35	26	50 050	47	567 525
6	85	27	58 500	48	618 332
7	175	28	67 977	49	672 476
8	322	29	78 561	50	730 100
9	546	30	90 335	51	791 350
10	870	31	103 385	52	856 375
11	1 320	32	117 800	53	925 327
12	1 925	33	133 672	54	998 361
13	2 717	34	151 096	55	1 075 635
14	3 731	35	170 170	56	1 157 310
15	5 005	36	190 995	57	1 243 550
16	6 580	37	213 675	58	1 334 522
17	8 500	38	238 317	59	1 430 396
18	10 812	39	265 031	60	1 531 345
19	13 566	40	293 930	61	1 637 545
20	16 815	41	325 130	62	1 749 175
21	20 615	42	358 750	63	1 866 417
22	25 025	43	394 912	64	1 989 456
23	30 107	44	433 741	65	2 118 480

[1] Ovu tablicu izradila je *Kovina Milošević*, a proverila *Ružica Mitrinović*.
Ova tablica *Stirling*-ovih brojeva pomenuta je u knjizi:

А. В. Лебедев—Р. М. Федорова: Справочник по математическим таблицам (Академия наук СССР), Москва, 1956. Videti str. 401, 531, 545 pomenute knjige.

Ružica Mitrinović pripremila je za štampu tablice brojeva

$$S_n^{n-1},\quad S_n^{n-2},\quad S_n^{n-3},\quad S_n^{n-4},\quad S_n^{n-5}\quad \text{za } n = 1\,(1)\,183.$$

$$\text{III.} \quad S_n^{n-3} = -\frac{1}{2}\binom{n}{4}\, n\,(n-1).$$

n	S_n^{n-3}	n	S_n^{n-3}	n	S_n^{n-3}
4	– 6	17	– 323 680	30	– 11 921 175
5	– 50	18	– 468 180	31	– 14 631 225
6	– 225	19	– 662 796	32	– 17 836 160
7	– 735	20	– 920 550	33	– 21 605 760
8	– 1 960	21	– 1 256 850	34	– 26 016 936
9	– 4 536	22	– 1 689 765	35	– 31 154 200
10	– 9 450	23	– 2 240 315	36	– 37 110 150
11	– 18 150	24	– 2 932 776	37	– 43 985 970
12	– 32 670	25	– 3 795 000	38	– 51 891 945
13	– 55 770	26	– 4 858 750	39	– 60 947 991
14	– 91 091	27	– 6 160 050	40	– 71 284 200
15	– 143 325	28	– 7 739 550	41	– 83 041 400
16	– 218 400	29	– 9 642 906	42	– 96 371 730

$$\text{IV.} \quad S_n^{n-4} = \frac{1}{48}\binom{n}{5}\,(15n^3 - 30n^2 + 5n + 2).$$

n	S_n^{n-4}	n	S_n^{n-4}	n	S_n^{n-4}
5	24	20	34 916 946	35	4 102 212 268
6	274	21	53 327 946	36	5 192 609 268
7	1 624	22	79 721 796	37	6 528 574 668
8	6 769	23	116 896 626	38	8 156 055 558
9	22 449	24	168 423 871	39	10 127 949 468
10	63 273	25	238 810 495	40	12 504 921 117
11	157 773	26	333 685 495	41	15 356 289 117
12	357 423	27	460 012 995	42	18 760 986 517
13	749 463	28	626 334 345	43	22 808 599 177
14	1 474 473	29	843 041 745	44	27 600 486 067
15	2 749 747	30	1 122 686 019	45	33 250 985 691
16	4 899 622	31	1 480 321 269	46	39 888 712 941
17	8 394 022	32	1 933 889 244	47	47 657 950 791
18	13 896 582	33	2 504 646 364	48	56 720 141 346
19	22 323 822	34	3 217 636 444	49	67 255 480 866

$$\text{V.} \quad S_n^{n-5} = -\frac{1}{16}\binom{n}{6}\, n\,(n-1)\,(3n^2 - 7n - 2).$$

n	S_n^{n-5}	n	S_n^{n-5}	n	S_n^{n-5}
6	– 120	21	– 1 672 280 820	36	– 557 414 245 080
7	– 1 764	22	– 2 792 167 686	37	– 744 348 178 728
8	– 13 132	23	– 4 546 047 198	38	– 985 905 441 444
9	– 67 284	24	– 7 234 669 596	39	– 1 295 835 552 648
10	– 269 325	25	– 11 276 842 500	40	– 1 690 825 581 900
11	– 902 055	26	– 17 247 104 875	41	– 2 191 022 426 580
12	– 2 637 558	27	– 25 922 927 745	42	– 2 820 630 280 377
13	– 6 926 634	28	– 38 343 278 610	43	– 3 608 591 714 091
14	– 16 669 653	29	– 55 880 640 270	44	– 4 589 361 478 702
15	– 37 312 275	30	– 80 328 850 875	45	– 5 803 782 865 650
16	– 78 558 480	31	– 114 009 431 445	46	– 7 300 077 221 745
17	– 156 952 432	32	– 159 899 390 784	47	– 9 134 958 017 031
18	– 299 650 806	33	– 221 783 846 592	48	– 11 374 881 704 208
19	– 549 789 282	34	– 304 437 176 604	49	– 14 097 448 488 816
20	973 941 900	35	– 413 836 815 700	50	– 17 392 967 051 250

VII. O OPERACIJAMA MAX I MIN[1]

1. Posmatrajmo jedan konačan skup proizvoljnih realnih brojeva

$$E=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}.$$

Prema definiciji, *max* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ označava onaj (ili one) od n brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koji nije premašen ni od jednog od ostalih brojeva tog skupa. Na analogni način definiše se operacija *min* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

U skupu E operacije *max* i *min* uvek su izvodljive, drugim rečima skup E uživa *grupnu osobinu* ili, kako se to drukčije kaže, skup E zadovoljava *grupni stav* (prvi postulat).

Da bismo uprostili pisanje, označimo sa a, b, c tri ma koja elementa skupa E. Lako se pokazuje da operacije *max* i *min* zadovoljavaju ove zakone:

I. *Idempotentni zakon:*

$$\max(a, a)=a, \quad \min(a, a)=a;$$

II. *Komutativni zakon:*

$$\max(a, b)=\max(b, a), \quad \min(a, b)=\min(b, a);$$

III. *Asocijativni zakon:*

$$\max\{\max(a, b), c\}=\max\{a, \max(b, c)\},$$

$$\min\{\min(a, b), c\}=\min\{a, \min(b, c)\};$$

IV. *Apsorpcioni zakon:*

$$\max\{a, \min(a, b)\}=a, \quad \min\{a, \max(a, b)\}=a;$$

V. *Distributivni zakon:*

$$\max\{a, \min(b, c)\}=\min\{\max(a, b), \max(a, c)\},$$

$$\min\{a, \max(b, c)\}=\max\{\min(a, b), \min(a, c)\}.$$

Dakle, svaka od operacija *max* i *min* je komutativna, asocijativna i distributivna u odnosu na drugu operaciju.

Prenumerisavanjem uvek se može podesiti da su elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takvi da je

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n; \tag{1}$$

tada je za operaciju *max* jedinični element a_1, jer je, za svako $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$\max(a_1, a_k)=a_k.$$

Taj jedinični element je u isti mah i levi i desni.

Pod pretpostavkom (1), za *min* u skupu E jedinični element je a_n, jer je

$$\min(a_k, a_n)=a_k$$

za svako $k\ (1 \leqslant k \leqslant n)$. I u ovom slučaju a_n je dvostrani jedinični element.

---

[1] Prema članku:

D. S. Mitrinović: O operacijama max i min (*Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje, Prirodno-matematički oddel*, knjiga 3, 1950, № 4, 10 str.).

Ukoliko čitalac bude želeo da se dublje upozna sa pitanjima koja su pokrenuta u ovom članku, upućuje se na originalni članak, gde je data i bibliografija koja se odnosi na tretirana pitanja.

Primedba. Polazeći od ovih rezultata *F. Klein-Barmen* izveo je neke nove rezultate. Videti fusnotu na str. 295 ove knjige.

Za operaciju *max* kao i za operaciju *min* skup E čini grupu u slučaju kada su elementi a_i međusobno jednaki, tj. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Navešćemo sada jednu interesantnu osobinu operacija *max* i *min* koju algebrista *O. Ore* naziva *neobična* (peculiar) *osobina*. Ona se može ovako formulisati.

Za tri ma koja realna broja a, b, c koji pripadaju skupu E važi relacija

$$\min\{\max(a, b), \max(a, c), \max(b, c)\} = \max\{\min(a, b), \min(a, c), \min(b, c)\}, \tag{2}$$

prema kojoj izraz što se nalazi na jednoj strani zadržava svoju vrednost kada se operacije max *i* min *međusobno razmene.*

2. U prethodnom paragrafu izneli smo nekoliko, većim delom poznatih osobina operacija *max* i *min*, i to iz ovih nazloga:

1° što u matematičkoj literaturi, na jezicima jugoslovenskih naroda o ovome nije ništa pisano;

2° što bismo želeli da od napred izloženog i od onog što sleduje stvorimo jednu celinu o operacijama *max* i *min*.

U vezi sa relacijom (2) može se postaviti pitanje o tome da li ima izraza opštijih od izraza

$$\min\{\max(a, b), \max(a, c), \max(b, c)\}$$

koji uživaju *neobičnu* osobinu da im vrednost ostaje invarijantna ako se operacije *max* i *min* međusobno razmene. Na ovo pitanje odgovor je potvrdan, kao što će niže biti pokazano.

3. Iz skupa E uzmimo p ma kojih različitih elemenata

$$A_1, A_2, \ldots, A_p \quad (p \leqslant n) \tag{3}$$

koje smo pre novog označavanja uredili tako da je

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_p \tag{4}$$

i obrazujmo sve kombinacije bez ponavljanja klase $k\ (1 \leqslant k \leqslant p)$. Tako ćemo dobiti $\binom{p}{k}$ kombinacija

$$\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots, A_k; \\ \vdots \\ A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p. \end{array} \tag{5}$$

Primenom operacija *max* i *min* na sve kombinacije (5), mogu se obrazovati ova dva izraza

$$M = \max\{\min(A_1, A_2, \ldots, A_k), \ldots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p)\}, \tag{6}$$

$$N = \min\{\max(A_1, A_2, \ldots, A_k), \ldots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p)\}. \tag{7}$$

Poslednje dve relacije, vodeći računa o (4), postaju respektivno

$$M = \max(A_1, \ldots, A_{p-k+1}) = A_{p-k+1}, \tag{8}$$

$$N = \min(A_k, \ldots, A_p) = A_k. \tag{9}$$

Izrazi M i N biće jednaki ako je $k = p - k + 1$, tj. kada je $p = 2k - 1$, što znači da je p neparan broj.

Prema tome, može se formulisati ovaj rezultat:

Teorema. *Kada je p jedan neparan broj, tada p proizvoljnih brojeva* A_1, $A_2, \ldots, A_p$, *koji pripadaju skupu realnih brojeva, zadovoljavaju relaciju*

$$
(10) \quad \begin{aligned} &\min\{\max(A_1, A_2, \ldots, A_k), \ldots, \max(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p)\} \\ &= \max\{\min(A_1, A_2, \ldots, A_k), \ldots, \min(A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p)\}, \end{aligned}
$$

gde su operacije max *i* min, *koje se javljaju u zagradama* $\{\ \}$, *primenjene na sve kombinacije klase* k $\{k=(p+1)/2\}$. *obrazovane od p navedenih brojeva* (3).

Relacija (10) obuhvata, kao partikularni slučaj, poznatu relaciju (2). Zaista, ako se u (10) stavi $p=3$, što povlači za sobom $k=2$, dobija se relacija (2).

Za $p=5$, $k=3$ imamo ovu relaciju:

$$
\begin{aligned} &\min\{\max(a, b, c), \max(a, b, d), \max(a, b, e), \max(a, c, d), \max(a, c, e), \\ &\quad \max(a, d, e), \max(b, c, d), \max(b, c, e), \max(b, d, e), \max(c, d, e)\} \\ &= \max\{\min(a, b, c), \min(a, b, d), \min(a, b, e), \min(a, c, d), \min(a, c, e), \\ &\quad \min(a, d, e), \min(b, c, d), \min(b, c, e), \min(b, d, e), \min(c, d, e)\}. \end{aligned}
$$

4. Analiziranjem relacija (8) i (9) dolazi se do ovih nejednakosti

$$
(11) \qquad M > N
$$

za $1 \leqslant k \leqslant [\frac{p+1}{2}]$, gde je p prirodan paran broj,

za $1 \leqslant k < \frac{p+1}{2}$, gde je p prirodan neparan broj;

$$
(12) \qquad M < N
$$

za $[\frac{p+1}{2}] < k \leqslant p$, gde je p prirodan paran broj,

za $\frac{p+1}{2} < k \leqslant p$, gde je p prirodan neparan broj.

U ovim formulama $[\frac{p+1}{2}]$ znači najveći ceo broj sadržan u $\frac{p+1}{2}$.

5. Navedenu teoremu formulisali smo, pošto smo prethodno dokazali teoremu koja će niže biti navedena.

Posmatrajmo jedan skup M i njegove ma koje parcijalne skupove

$$
(13) \qquad M_1, M_2, \ldots, M_n.
$$

Iz skupa (13) izdvojimo $p\,(1 \leqslant p \leqslant n)$ proizvoljnih parcijalnih skupova M_i koje ćemo označiti sa

$$
A_1, A_2, \ldots, A_p,
$$

i od njih formirajmo sve kombinacije bez ponavljanja klase $k\,(1 \leqslant k \leqslant p)$. Na taj način dobijamo $\binom{p}{k}$ skupova

$$
(14) \qquad \begin{array}{c} \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}, \\ \vdots \\ \{A_{p-k+1}, A_{p-k+2}, \ldots, A_p\}. \end{array}
$$

Primenom operacija $\cap$ (*presek*) i $\cup$ (*unija*) na (14), možemo obrazovati dva nova skupa:

$$
\text{(I)}\qquad
\begin{aligned}
&P_1 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k,\\
&\vdots\\
&P_s = A_{p-k+1} \cap P_{p-k+2} \cap \cdots \cap A_p;
\end{aligned}
$$

$$
\text{(II)}\qquad
\begin{aligned}
&Q_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k,\\
&\vdots\\
&Q_s = A_{p-k+1} \cup A_{p-k+2} \cup \cdots \cup A_p,
\end{aligned}
$$

gde je $s = \binom{p}{k}$.

Uzimajuzi u obzir uvedene oznake, može se formulisati ova

Teorema. *Kada je p neparan broj, $k = (p+1)/2$, $s = \binom{p}{k}$, tada postoji relacija*

$$
\begin{aligned}
&(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) \cup \cdots \cup (A_{p-k+1} \cap A_{p-k+2} \cap \cdots \cap A_p)\\
&\qquad = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap \cdots \cap (A_{p-k+1} \cup A_{p-k+2} \cup \cdots \cup A_p),
\end{aligned}
$$

gde svaka strana jednakosti sadrži s izraza između zagrada ( ) i gde je na primer, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jedna od kombinacija klase k formiranih od p parcijalnih skupova jednog datog skupa A.

Poslednja relacija sadrži, kao partikularni slučaj, *Dedekind*-ovu aksiomu

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_3).$$

VIII. O JEDNOJ DETERMINANTI ESCHERICH-OVA TIPA[1]

Neka su: a i b dva proizvoljna broja; n jedan ceo pozitivan broj. Posmatrajmo pravougaonu matricu tipa $n \times (n+1)$ i označimo je sa M:

$$
(1)\qquad M = \begin{Vmatrix}
n & 1 & & & & & \\
 & n-1 & 2 & & & 0 & \\
 & & n-2 & 3 & & & \\
 & & & n-3 & 4 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & 2 & n-1 \\
 & & & & & 1 & n
\end{Vmatrix}
$$

U matrici M na dvema paralelnim pravama nalaze se redom prirodni brojevi koji su poređani u dva suprotna smisla.

---

[1] Redigovano prema članku:

D. S. Mitrinović: O jednoj determinanti Escherich-ova tipa (*Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot vo Skopje*, Prirodno-matematički oddel, knjiga 2, 1949, str. 137—140).

Polazeći od matrice M, formirajmo drugu matricu N na taj način što ćemo matrici M dopisati kao *prvu* vrstu ove brojeve

$$(2) \qquad a^n,\ -a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2, \dots ,\ (-1)^{n-1}ab^{n-1},\ (-1)^n b^n.$$

Eksponenti potencija čija je osnova a jesu:

$$n,\ n-1,\ n-2, \dots ,\ 1.$$

Isto tako zabeležimo eksponente potencija čija je osnova b:

$$1,\ 2,\ 3, \dots ,\ n.$$

Kvadratna matrica N, čija je prva vrsta (2), ima ove osobine:

1° Eksponenti potencija čija je osnova b nalaze se na korespondentnim mestima na glavnoj dijagonali matrice N;

2° Eksponenti potencija čija je osnova a nalaze se na korespondentnim mestima na dijagonali koja je susedna glavnoj dijagonali matrice N;

3° Determinanta matrice N i izraz $(a+b)^n$ vezani su relacijom

$$\det N = n!\,(a+b)^n.$$

Poslednja osobina može se dokazati ako se pođe od *Escherich*-ova rezultata:

Determinanta E reda $(n+1)$:

$$(3) \qquad E = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -y_n & x_n \end{vmatrix}$$

ima vrednost[1]:

$$(4) \qquad E = a_0 x_1 x_2 \cdots x_n + a_1 y_1 x_2 \cdots x_n + a_2 y_1 y_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + a_n y_1 y_2 y_3 \cdots y_n.$$

Det N spada očevidno u klasu determinanata E.

U izrazu (4), kojim je definisana determinanta $E = \Sigma \sigma_k$ član σ_{k+1} glasi:

$$a_k y_1 y_2 \cdots y_k x_{k+1} x_{k+2} \cdots x_n \qquad (k < n).$$

Odgovarajući član u razvitku det N ima oblik:

$$(-1)^k a^{n-k} b^k (-n)(-n+1) \cdots (-n+k-1)(k+1) \cdots (n-1)\,n.$$

$$\therefore \quad (-1)^k a^{n-k} b^k (-1)^k n(n-1) \cdots (n-k+1)(k+1) \cdots (n-1)\,n.$$

$$\therefore \qquad a^{n-k} b^k n(n-1) \cdots (n-k+1)(k+1) \cdots (n-1)\,n.$$

Posmatrajmo sada vrednost izraza

$$\frac{1}{n!}\, n(n-1) \cdots (n-k+1)(k+1) \cdots (n-1)\,n.$$

---

[1] Videti na primer:
E. Pascal: I Determinanti, seconda edizione, Hoepli, Milano, 1923, p. 215.

Poslednji izraz, ako se napiše u obliku

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1)\cdots n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k(k+1)\cdots n}$$

dovodi do $\binom{n}{k}$, što je i trebalo pokazati.

Prema tome, dobili smo jednakost

$$\begin{vmatrix} a^n & -a^{n-1}b & a^{n-2}b^2 & a^{n-3}b^3 & \cdots & (-1)^{n-1}ab^{n-1} & (-1)^n b^n \\ n & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & n \end{vmatrix} = n!\,(a+b)^n.$$

Na det N naišli smo proučavajući jedno pitanje iz teorije običnih linearnih diferencijalnih jednačina.

IX. JEDAN PROBLEM O ANALITIČKIM FUNKCIJAMA[1]

1. Data je relacija

(1) $\qquad F(P, Q, x, y)=0 \quad$ (F realna funkcija promenljivih P, Q, x, y),

gde su P i Q realni i imaginarni deo jedne analitičke funkcije $f(z)$, tj.

$$f(z)\equiv f(x+iy)\equiv P(x, y)+iQ(x, y).$$

U kojim je slučajevima relacija (1) *zadovoljena konjugovanim harmoniskim funkcijama P i Q?*

2. Iz relacije (1) dobija se

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Budući da se traže funkcije P i Q koje zadovoljavaju *Cauchy-Riemann*-ove uslove

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

relacije (2) postaju

$$\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{4}$$

---

[1] Redigovano prema članku:
D. S. Mitrinovitch: Un problème sur les fonctions analytiques (*Revue mathématique de l'Union interbalkanique*, t. 1, 1936).

Odavde sleduje

$$(5)\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial Q}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial P}}{\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)^2},\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial P}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial Q}}{\left(\frac{\partial F}{\partial P}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)^2}.$$

Jednačine (5) su oblika

$$(6)\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=g_1(x, y, P, Q),\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=g_2(x, y, P, Q),$$

gde su funkcije g_1 i g_2 poznate ako je F dato.

3. Da bi relaciju (1) zadovoljavale konjugovane harmoniske funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$, potrebno je i dovoljno da relacije (6) i (1) zadovolje realne funkcije $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Efektivno određivanje funkcije $Q(x, y)$ iz relacija (6) izvršićemo na sledeći način.

Kada se P eliminiše iz (1) i (6), dobija se

$$(7)\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=f_1(x, y, Q),\qquad \frac{\partial Q}{\partial y}=f_2(x, y, Q).$$

Svako rešenje koje zadovoljava obadve relacije (7) zadovoljava tako isto i nove relacije

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial Q},\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial Q},$$

i prema tome relaciju

$$(9)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial Q}=\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_1\frac{\partial f_2}{\partial Q}.$$

Mogu se desiti dva slučaja.

I. *slučaj. Relacija* (9) *je identički zadovoljena.* Skup jednačina (7) tada ima beskonačno mnogo rešenja izraženih funkcijom koja sadrži jednu proizvoljnu realnu konstantu.

U ovom slučaju za skup (7) kaže se da je *potpuno integrabilan.*

II. *slučaj. Relacija* (9) *nije identički zadovoljena.* Za Q se može uzeti samo funkcija definisana relacijom (9). U ovom slučaju pomoću eliminacije može se uvek ispitati da li skup relacija (7) ima zajedničko rešenje. Ako takvo rešenje postoji, ono je partikularno, tj. u njemu se ne pojavljuje integraciona konstanta.

Kada se navedenim postupkom odredi jedna realna funkcija Q i kada je odgovarajuća funkcija P, definisana relacijom (1) tako isto realna, dobija se jedno rešenje postavljenog problema.

Skup svih parova (P, Q) pretstavlja opšte rešenje navedenog problema.

Primer I. Neka je relacija (1) oblika

$$P - Q \operatorname{tg} y = 0 .$$

Tada jednačine (6) glase

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - Q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = - Q \operatorname{tg} y,$$

odakle sleduje

$$Q = C e^{-x} \cos y \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Tražena analitička funkcija je

$$f(z) = C i e^{-z} \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Primer II. Polazeći od relacije

$$2xyP + (y^2 - x^2) Q + 2xy (x^2 + y^2)^2 = 0,$$

nalazi se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{x} + 8 x^2 y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{Q}{y} - 8 x y^2 .$$

Ovaj skup jednačina je potpuno integrabilan i njegovo rešenje je

$$Q = 4xy (x^2 - y^2) + 2Cxy \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Odgovarajuća analitička funkcija je

$$f(z) = z^4 + Cz^2 .$$

Primer III. Ako je data relacija

$$P + Q^2 - x^2 + y - 1 = 0,$$

tada je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 + 4xQ}{1 + 4Q^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{2x - 2Q}{1 + 4Q^2} .$$

Ovaj skup jednačina nije potpuno integrabilan. Njegovo rešenje je $Q = x$. Tražena analitička funkcija je $f(z) = 1 + iz$.

Primer IV. Relacija

$$P + Q - x^2 = 0$$

ne definiše nijednu analitičku funkciju $f(z) = P + iQ$.

4. Uzmimo sada opštiji problem.

Neka je $f(z_1, z_2)$ analitička funkcija promenljivih $z_1\ (= u + iv)$ i $z_2\ (= w + it)$. Ako se razdvoje realni deo i imaginarni deo, dobija se

$$f(z_1, z_2) = P(u, v, w, t) + i Q(u, v, w, t),$$

gde su P i Q realne funkcije realnih promenljivih u, v, w, t. Funkcije P i Q zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = - \frac{\partial Q}{\partial u}, \\ &\frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial w} . \end{aligned} \tag{10}$$

Neka je data relacija

$$F(P, Q, u, v, w, t) = 0, \tag{11}$$

gde je F realna funkcija naznačenih argumenata.

Postavlja se pitanje da li postoje funkcije P i Q koje zadovoljavaju relacije (10) *i* (11).

Iz (11) sleduje

$$(12)\qquad \begin{aligned} \partial Q/\partial u &= g_1(P, Q, u, v, w, t), \\ \partial Q/\partial v &= g_2(P, Q, u, v, w, t), \\ \partial Q/\partial w &= g_3(P, Q, u, v, w, t), \\ \partial Q/\partial t &= g_4(P, Q, u, v, w, t), \end{aligned}$$

gde su funkcije g_k date ako je funkcija F data.

Da bi relacija (11) definisala jednu analitičku funkciju

$$f(z_1, z_2) = P + iQ,$$

potrebno je i dovoljno da relacije (12) i (11) imaju rešenje P, Q, gde su P i Q realne funkcije.

Skup jednačina (12) može biti potpuno integrabilan ili ne ili da uopšte nema rešenja. Diskusija o efektivnom određivanju funkcije Q, a zatim P, analogna je slučaju sa jednom nezavisnom promenljivom koji je napred tretiran.

Primer. Data je relacija

$$uP + vQ - w(u^2 + v^2) = 0.$$

Da li ona definiše jednu analitičku funkciju

$$f(z_1, z_2) = P + iQ?$$

Skup relacija (12), u ovom slučaju, ima oblik

$$\partial Q/\partial u = (Q - vw)/u, \quad \partial Q/\partial v = w, \quad \partial Q/\partial w = v, \quad \partial Q/\partial t = u,$$

i ekvivalentan je jednačini

$$dQ = \{(Q - vw)/u\}\, du + w\, dv + v\, du + u\, dt,$$

odnosno

$$\frac{dQ}{u} - \frac{Q}{u^2}\, du = -\frac{vw}{u^2}\, du + \frac{d(vw)}{u} + dt,$$

odakle sleduje

$$Q = vw + ut + Cu \qquad (C \text{ realna konstanta}).$$

Tražena analitička funkcija je

$$f(z_1, z_2) = z_1 z_2 + Ciz_1.$$

5. Problem o kome je reč može se generalisati na kompleksne funkcije od n kompleksnih promenljivih.

Primedba. *U Zborniku matematičkih problema,* II deo (poglavlje *Kompleksni brojevi i kompleksne funkcije*) naveden je niz problema ove vrste.

M A L I   A T L A S   K R I V I H

I. KRIVE ČIJA JE JEDNAČINA $(x^m/a^m) \pm (y^n/b^n) = 1$

1. Krive čija je jednačina

$$(1) \qquad (x^m/a^m) + (y^n/b^n) = 1$$

(m, n prirodni brojevi; $a > 0$, $b > 0$).

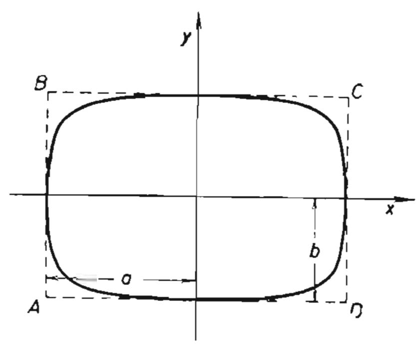
1° Ako je $m = n = 1$, tada (1) definiše pravu.

2° Ako je $m = 1$, $n = 2$ ili $m = 2$, $n = 1$, tada (1) definiše parabolu.

3° Ako je $m = n = 2$, tada (1) definiše elipsu.

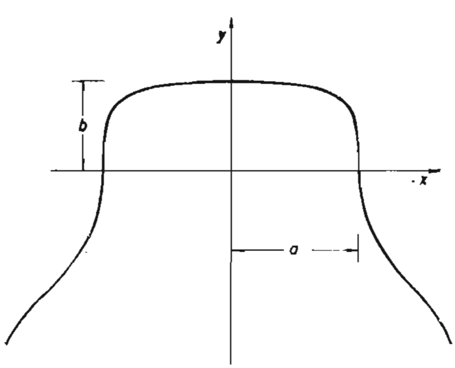
4° Ako su $m\,(>2)$ i $n\,(>2)$ parni brojevi, tada (1) definiše krivu (1) koja ima ovalan oblik (sl. 1). U slučaju kada je $n = m$ i kada m raste, ovalna kriva (1) sve se više približava pravougaoniku $ABCD$ koji obrazuju prave

$$x = a, \quad x = -a, \quad y = b, \quad y = -b.$$

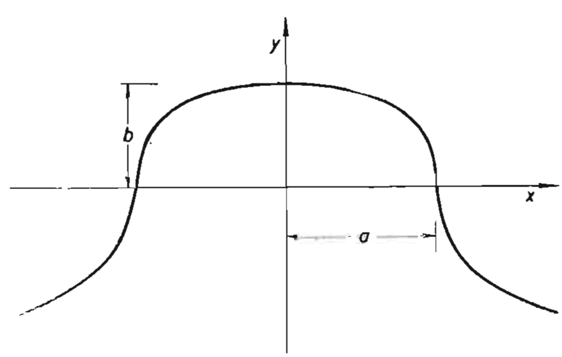


Sl. 1

5° Ako je $m\,(\geqslant 2)$ parno i $n\,(\geqslant 3)$ neparno, tada (1) definiše krivu prikazanu na sl. 2 za $m > n$ i krivu prikazanu na sl. 3 za $m < n$.

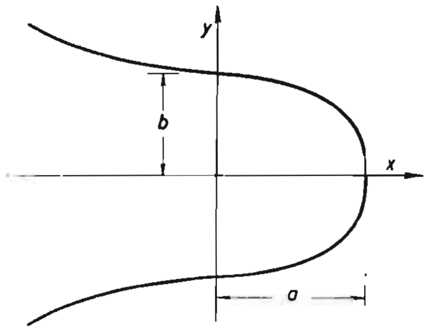


Sl. 2

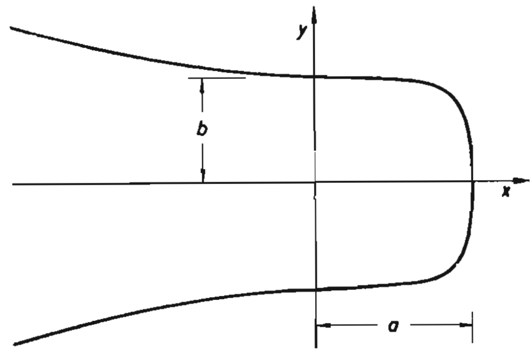


Sl. 3

6° Ako je $m\ (\geqslant 3)$ neparno i $n\ (\geqslant 2)$ parno, tada jednačina (1) određuje krivu prikazanu na sl. 4 za $m > n$, a krivu prikazanu na sl. 5 za $m < n$.



Sl. 4



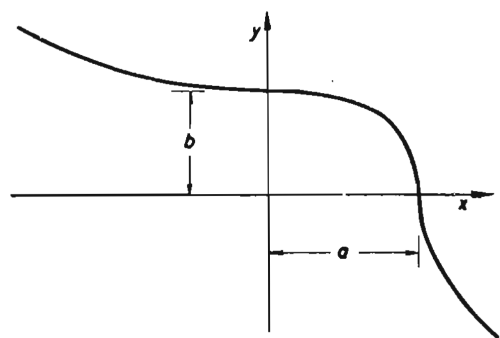
Sl. 5

7° Ako su $m\ (\geqslant 3)$ i $n\ (\geqslant 3)$ neparni, tada (1) definiše za:

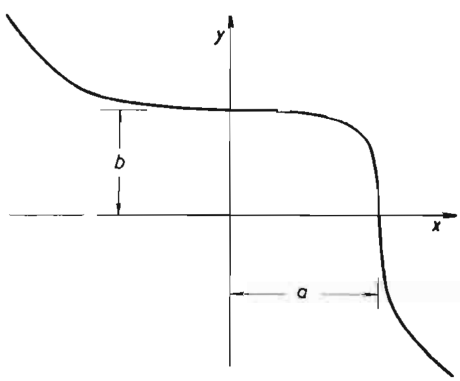
$m = n$ krivu pretstavljenu na sl. 6;

$m > n$ krivu pretstavljenu na sl. 7;

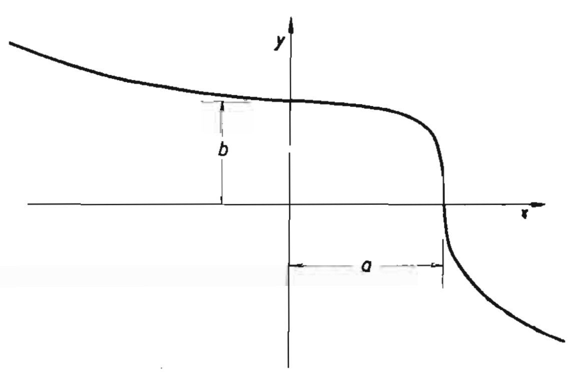
$m < n$ krivu pretstavljenu na sl. 8.



Sl. 6



Sl. 7



Sl. 8

2. Krive čija je jednačina

$$(2) \qquad (x^m/a^m) - (y^n/b^n) = 1$$

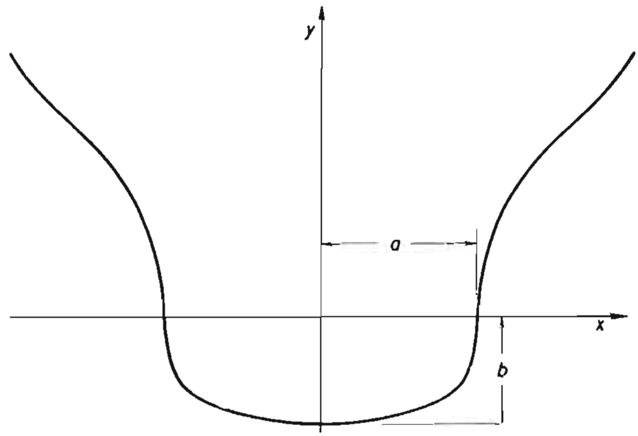
(m, n prirodni brojevi; $a > 0$, $b > 0$).

1° Ako je $m = n = 1$, jednačina (2) određuje pravu.

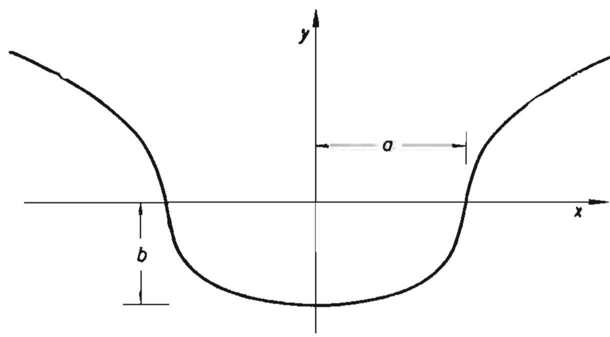
2° Ako je $m = 2$, $n = 1$, ili $m = 1$, $n = 2$, jednačina (2) definiše parabolu.

3° Ako je $m=2$, $n=2$, tada (2) definiše hiperbolu.

4° Ako su $m\,(>2)$ i $n\,(>2)$ parni, tada (2) definiše krivu prikazanu na sl. 9 za $m \leqslant n$, i krivu pretstavljenu na sl. 10 za $m > n$.

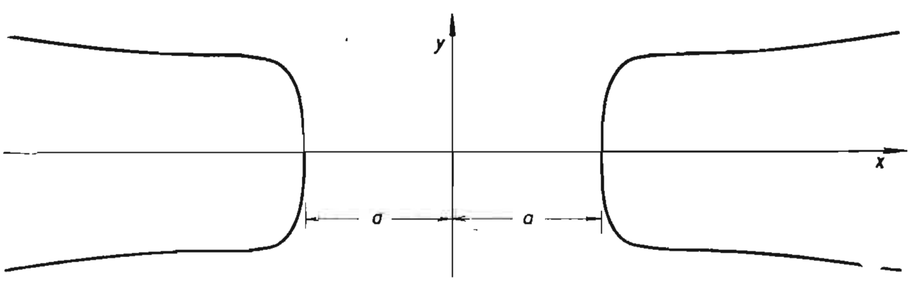


Sl. 9

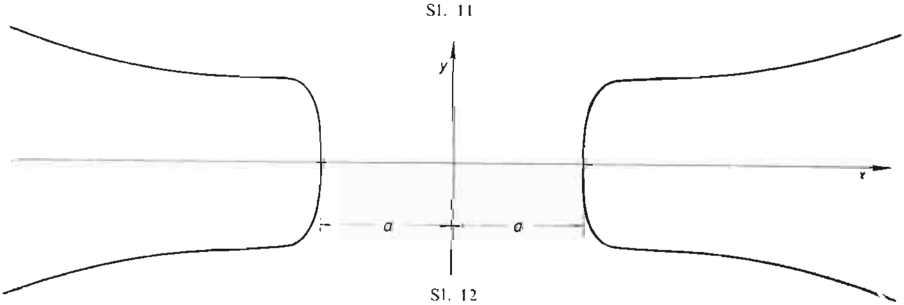


Sl. 10

5° Ako je $m\,(\geqslant 2)$ parno i $n\,(\geqslant 3)$ neparno, tada (2) definiše krive predstavljene na slikama 11 i 12 za $m > n$, odnosno $m < n$.

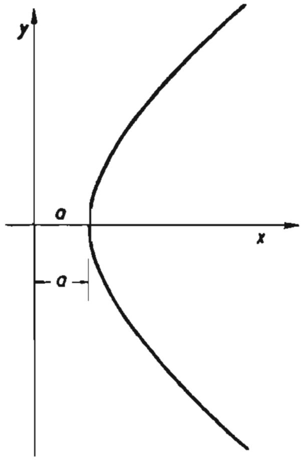


Sl. 11

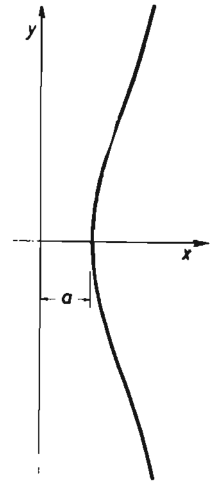


Sl. 12

6° Ako je $m(\geqslant 3)$ neparno i $n(\geqslant 2)$ parno, tada (2) definiše krive prikazane na slikama 13 i 14 za $m < n$, odnosno za $m > n$.



Sl. 13



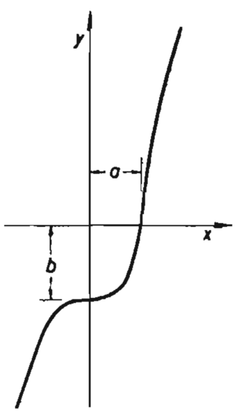
Sl. 14

7° Ako su $m(\geqslant 3)$ i $n(\geqslant 3)$ neparni, tada (2) definiše za:

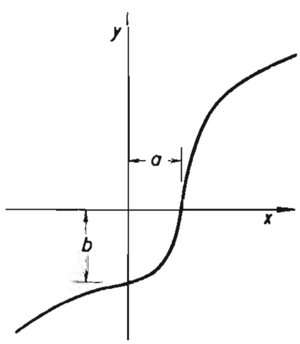
$m = n$ krivu prikazanu na sl. 15;

$m > n$ krivu prikazanu na sl. 16;

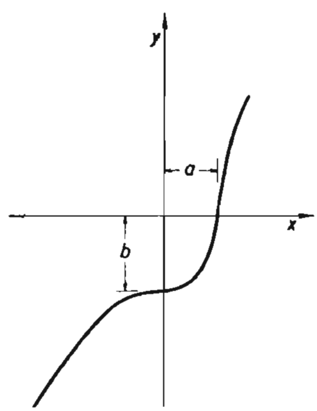
$m < n$ krivu prikazanu na sl. 17.



S . 15



Sl. 16



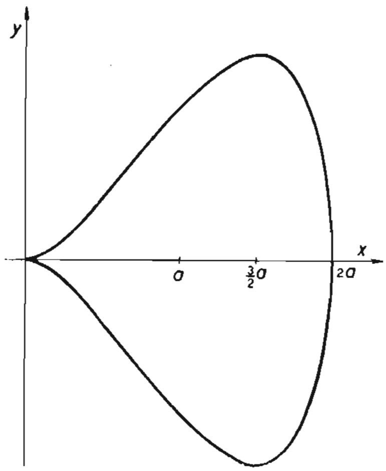
Sl. 17

Primedba. Odeljak 1 ovog *Atlasa* redigovan je prema knjizi:

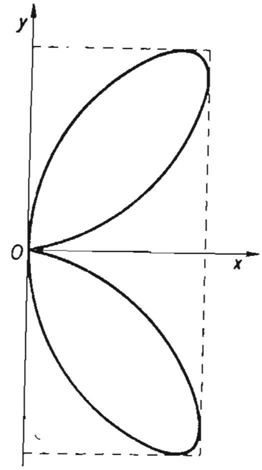
Графический справочник по математике. Атлас кривых. Под редакцией проф. *А. Ф. Берманта*, Москва—Ленинград, 1937.

Kolektiv Katedre za matematiku Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu priprema *Atlas krivih* koji će biti namenjen studentima tehničkih i prirodno matematičkih fakultetima kao i inženjerima, statističarima, fizičarima i hemičarima.

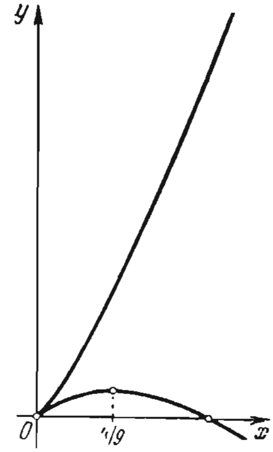
II. ALGEBARSKE KRIVE



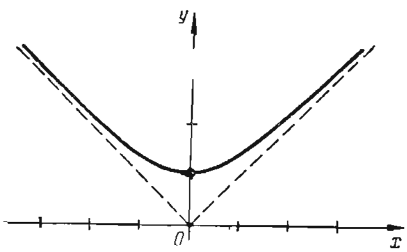
$a^2 y^2 = x^3 (2a - x) \quad (a > 0)$



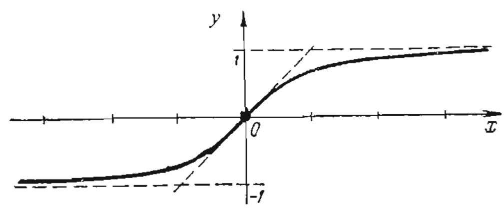
$x^4 + y^4 = 8xy^2$



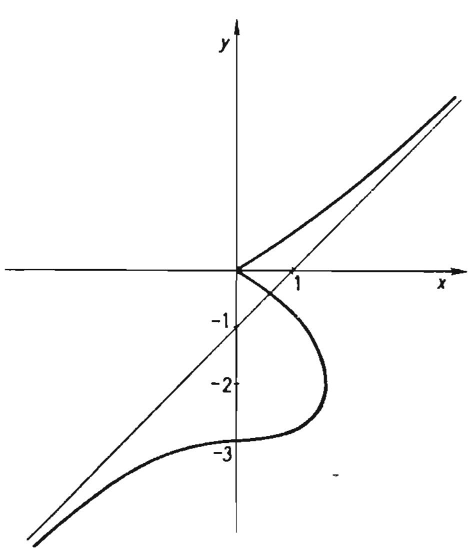
$(y - x)^2 = x^3$



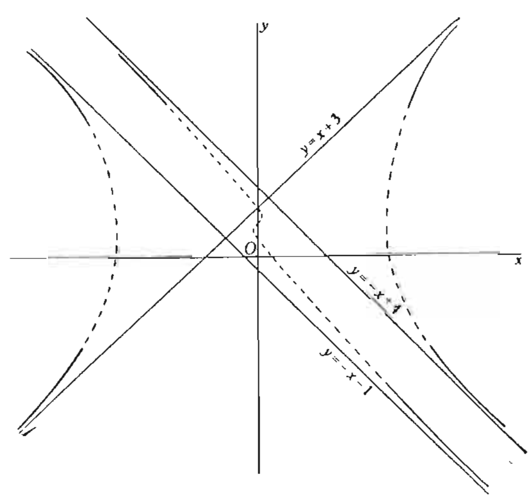
$2y = (x^2 + x + 1)^{1/2} + (x^2 - x + 1)^{1/2}$



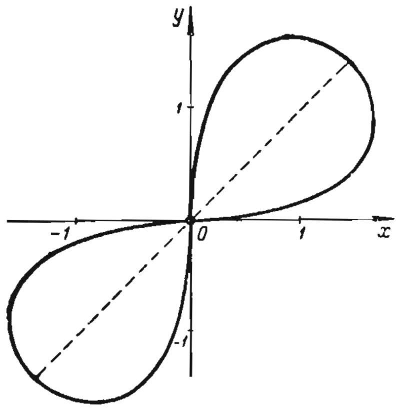
$y = (x^2 + x + 1)^{1/2} - (x^2 - x + 1)^{1/2}$



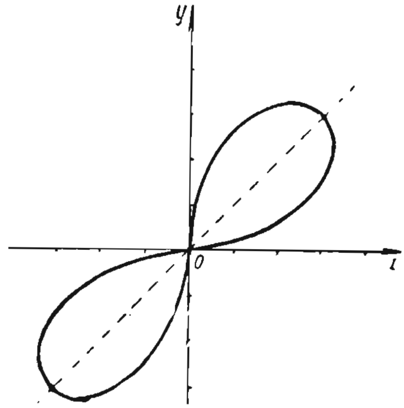
$3y^2 = x^3 - y^3$



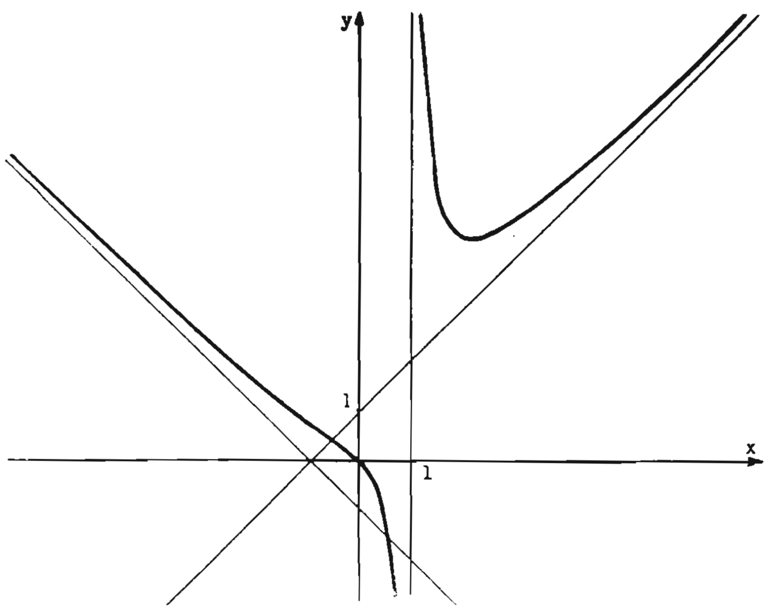
$x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3 + 6xy + 6y^2 - 19x - 11y + 6 = 0$



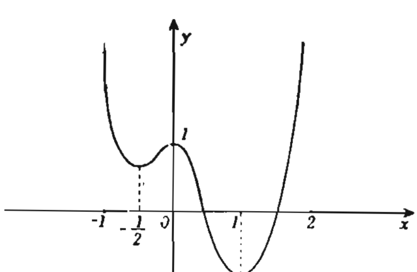
$(x^2+y^2)^2=xy$



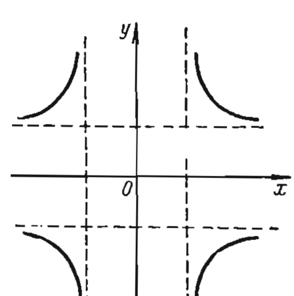
$x^4+y^4=2xy$



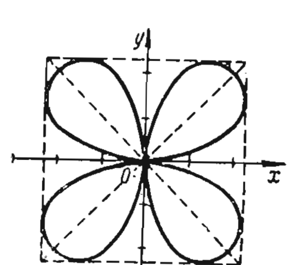
$y=x(x^2+1)^{1/2}/(x-1)$



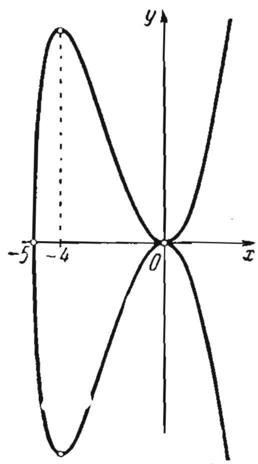
$y=3x^4-2x^3-3x^2+1$



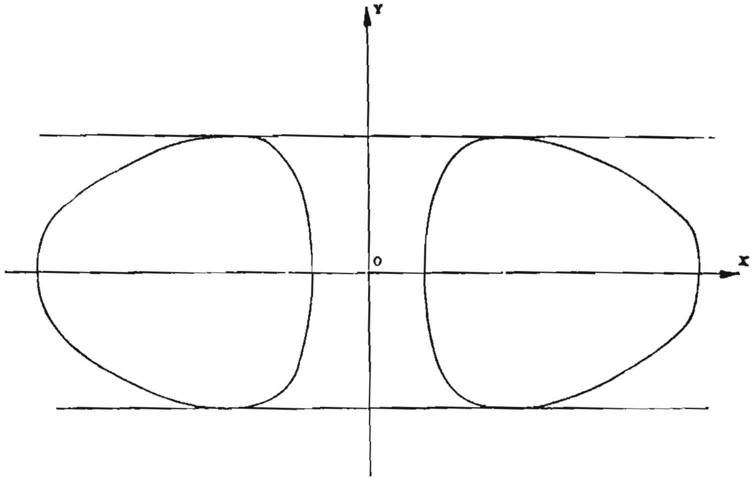
$x^2y^2=x^2+y^2$



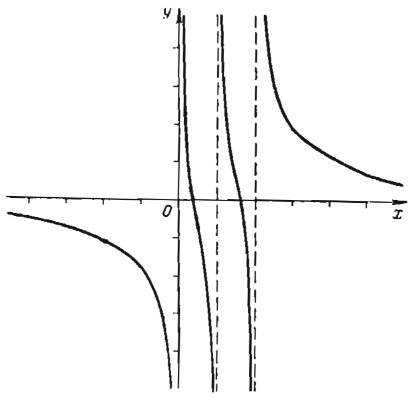
$(x^2+y^2)^3=27x^2y^2$



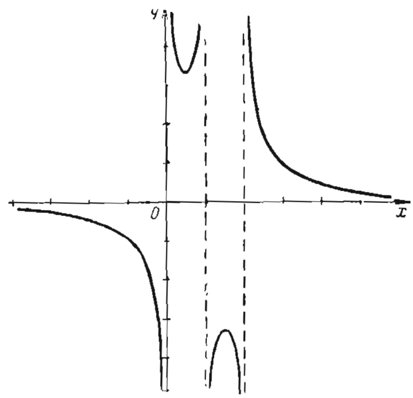
$2y = \pm x^2 (x+5)^{1/2}$



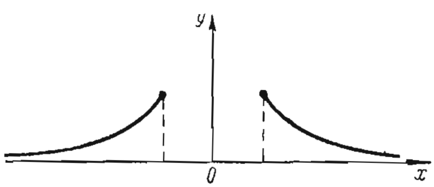
$x^4 + 4x^2y^2 - 6a^2x^2 + a^4 = 0$



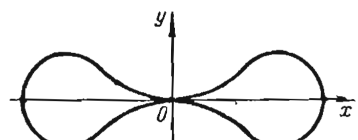
$x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$



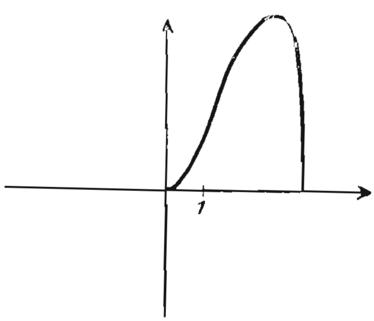
$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$



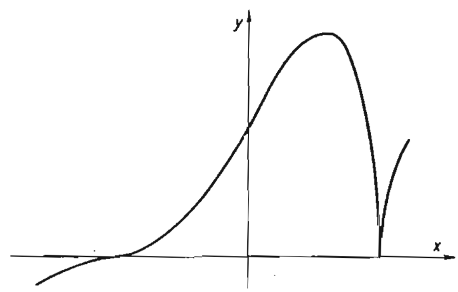
$y = (x^2+1)^{1/2} - (x^2-1)^{1/2}$



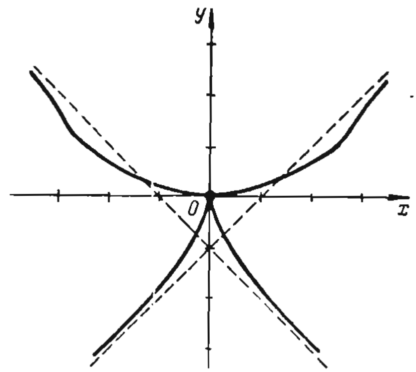
$x^6 - x^4 + x^2 = 0$



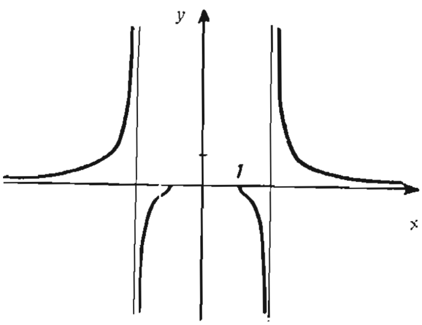
$y = x(4x - x^2)^{1/2}$



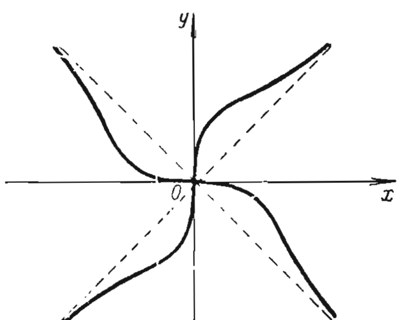
$y = (x-1)^{2/3}(x+1)^3$



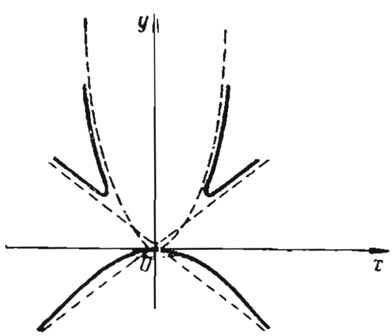
$x^4 - y^4 = 4x^2y$



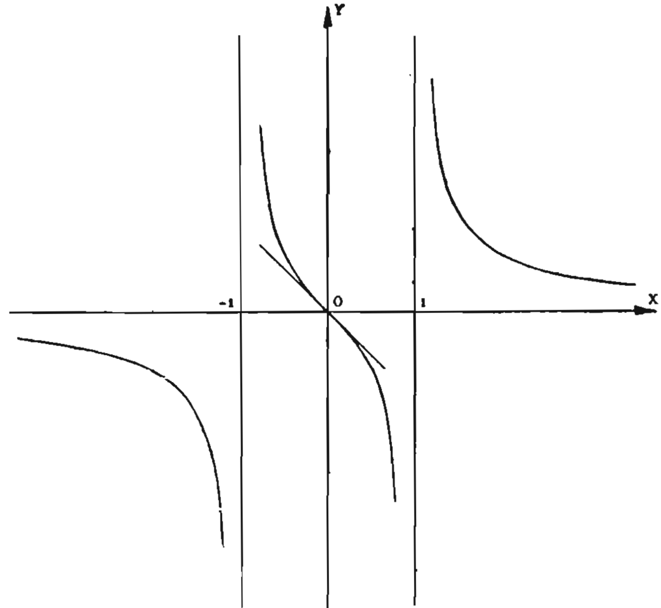
$y = (x^2 - 1)^{1/2} / (x^2 - 4)$



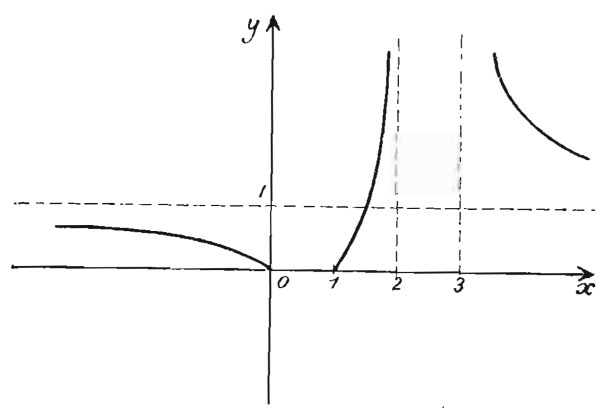
$x^4 - y^4 + xy = 0$



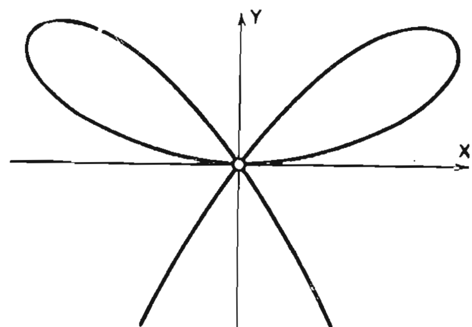
$x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0$



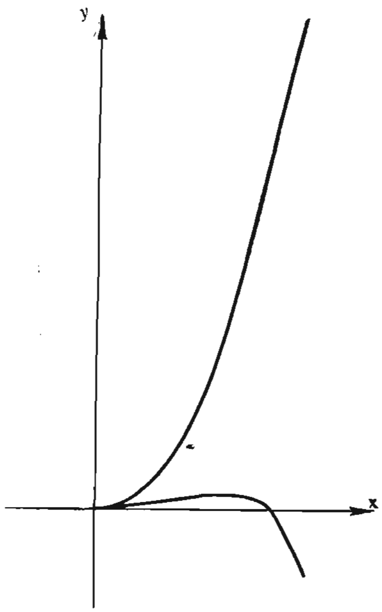
$y = x / (x^2 - 1)$



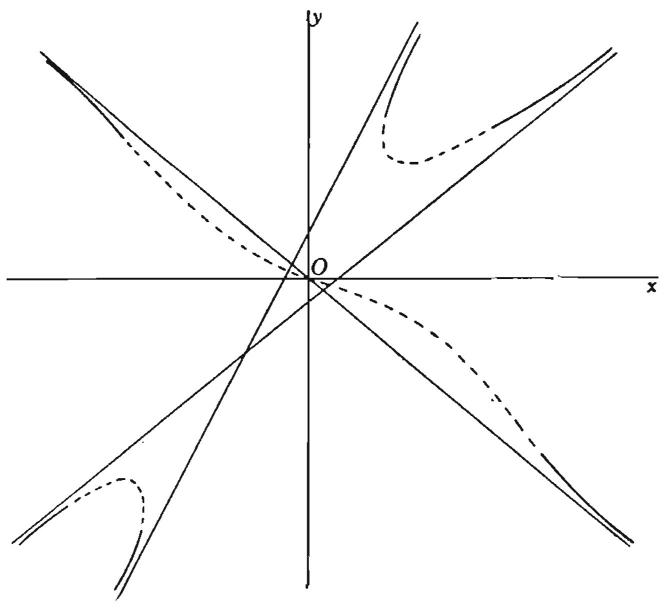
$y = \{(x^2 - x) / (x^2 - 5x + 6)\}^{1/2}$



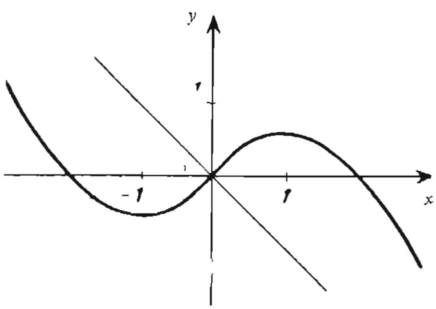
$x^4 - x^2y + y^3 = 0$



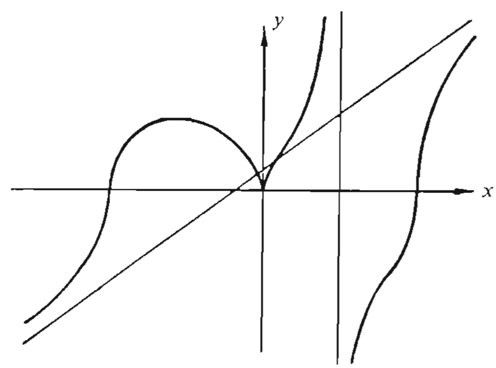
$x^5 = a\,(x^2 - ay)^2 \quad (a > 0)$



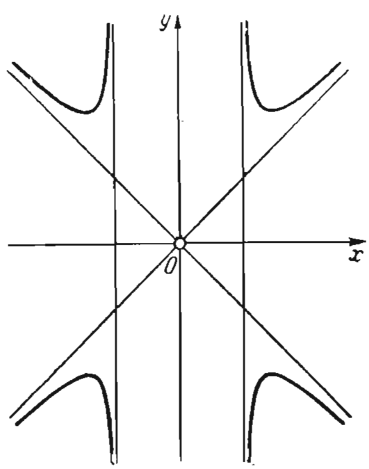
$2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 - 2x^2 - 2xy + 2x + 8y = 0$



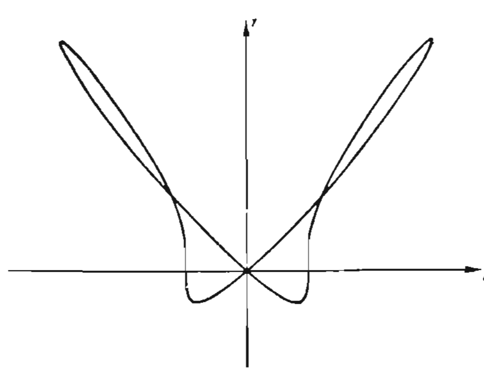
$y = (4x - x^3)/(4 + x^2)$



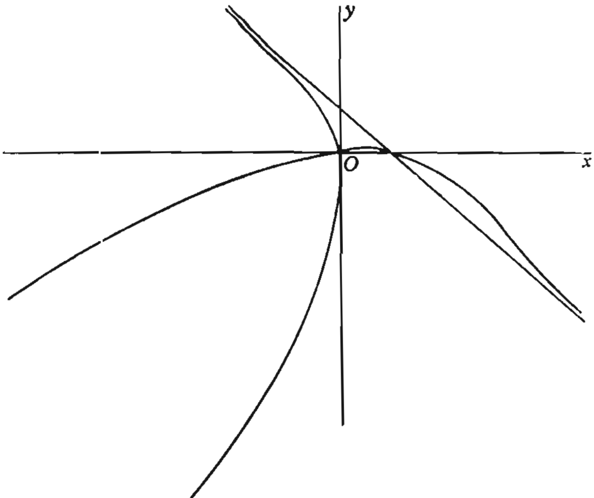
$y^3\,(2x - 1) = x^4 - x^2$



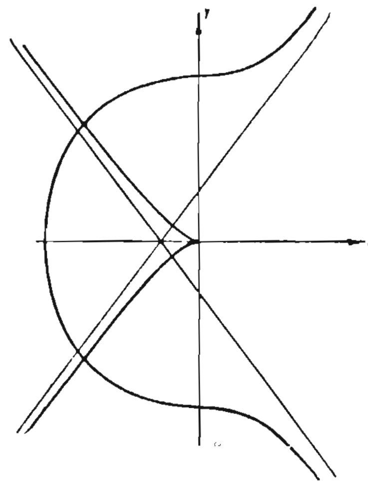
$y = \pm x^2/(x^2 - a^2)^{1/2}$



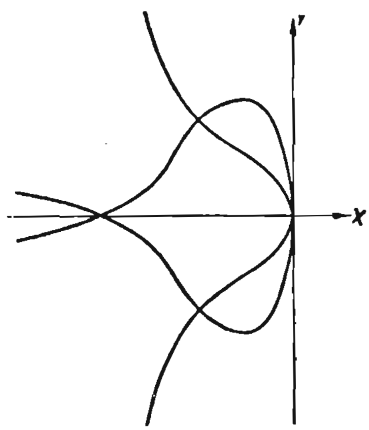
$(2x^2 - y^2 - y)^2 = (x^2 - y^2)\,(y - 1)\,(y - 3)$



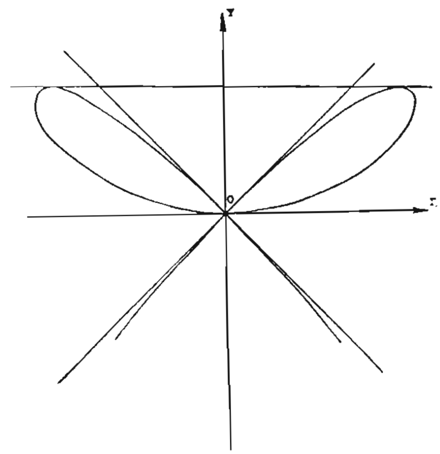
$x^3 - x^2 y - xy^2 + y^3 - x^2 + 3\,xy = 0$



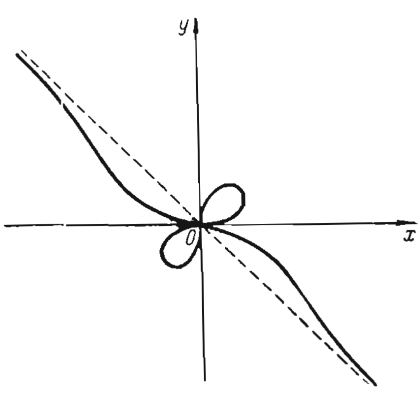
$2\,y^2 + 4\,x^3 + 3\,x^4 - y^4 = 0$



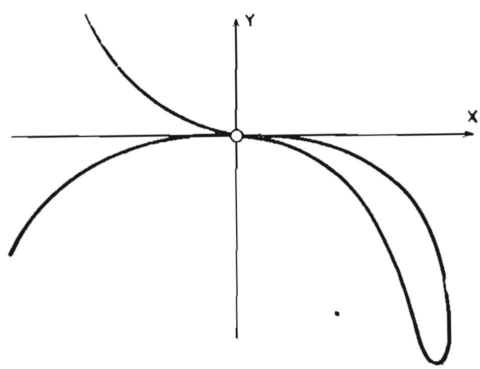
$(x + 1)\,(x^2 + y^2 + 2\,x)^2 = x\,(y^2 - x^2)\,(y + x + 2)\,(y - x - 2)$



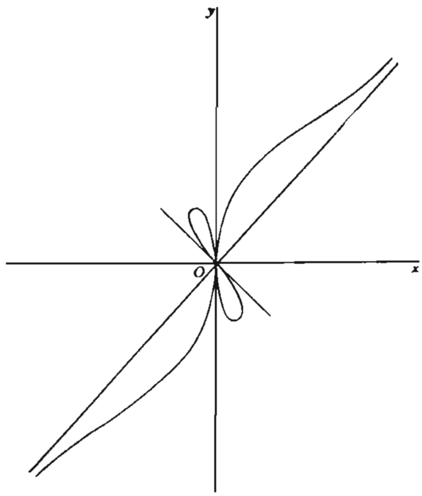
$x^4 = y\,(x^2 - y^2)$



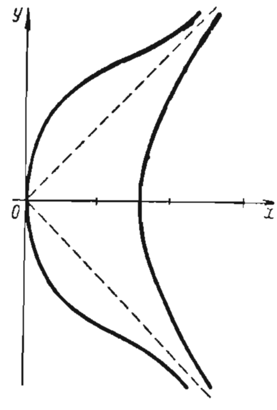
$x^5 + y^5 = xy^2$



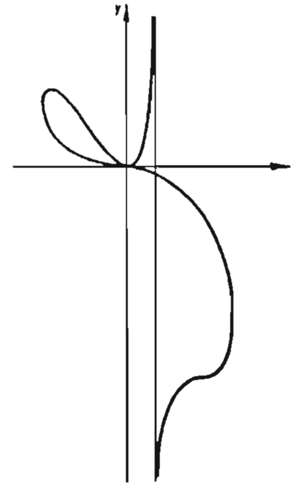
$y^2 + 2\,x^3 y + x^7 = 0$



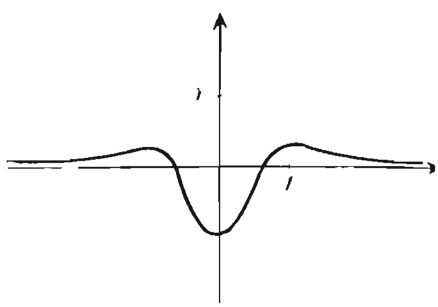
$y^3 + x^2 + 2xy - 6y^2 = 2x - 14y + 11$



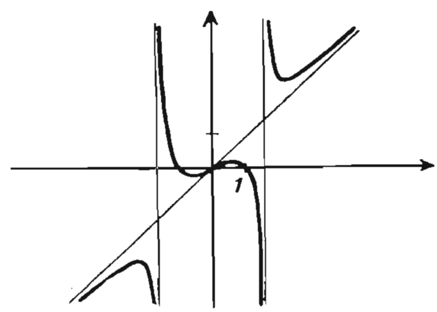
$(x^2 - y^2)^2 = 2x$



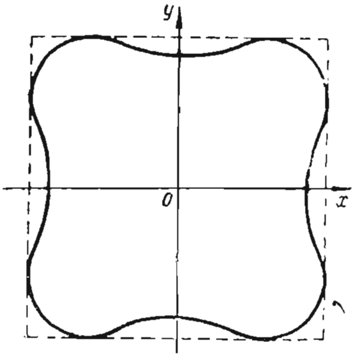
$y^2 - 2x^2y - xy^2 - \frac{12}{125}x^5 = 0$



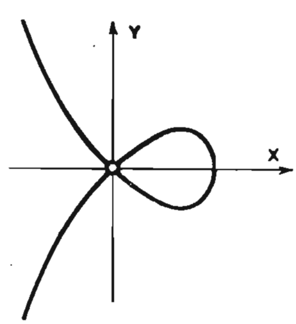
$y = (3x^2 - 1)/(1 + x^2)^3$



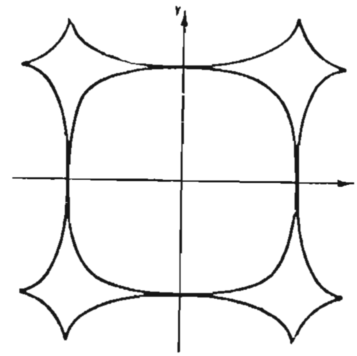
$y = (x^5 - x)/(x^4 - 4)$



$x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

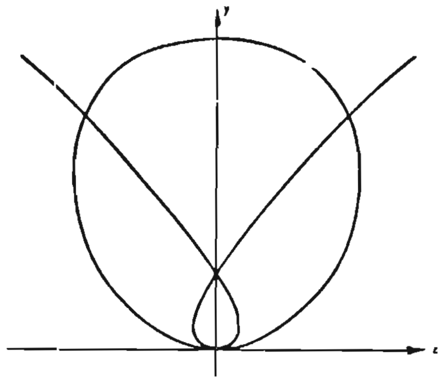


$y = \pm x\sqrt{1 - x}$

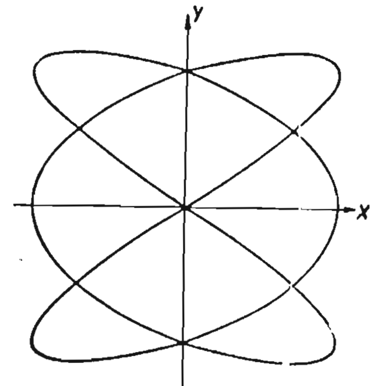


$(1 - x^2)^{2/3} + (1 - y^2)^{2/3} = 1$

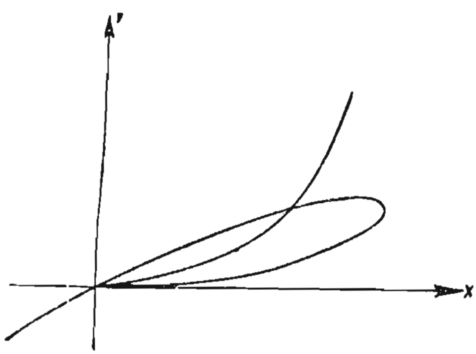
III. RAZNE KRIVE



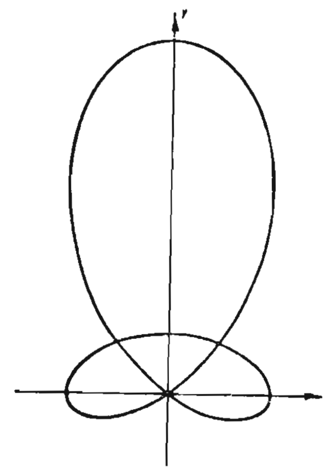
$x = (2 + t^2)/(1 + t^2)$
$y = t^3/(1 + t^2)$



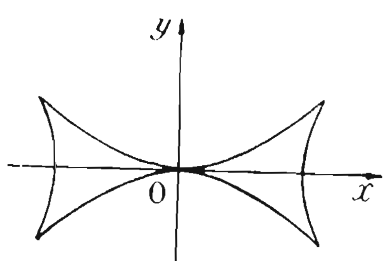
$x = \cos 3t$
$y = \sin 2t$



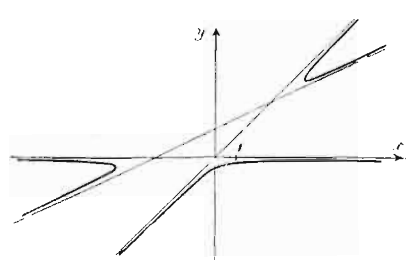
$x = t^2(1 - t^2)$
$y = t^4(1 - t)$



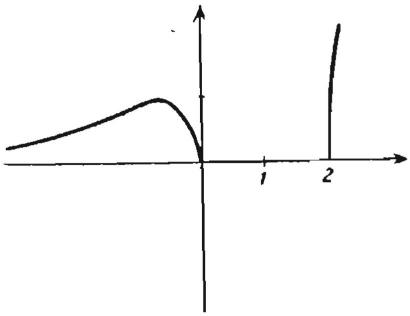
$x = \sin 2t$
$y = (2 \cos t - \sqrt{2}) \cos t$



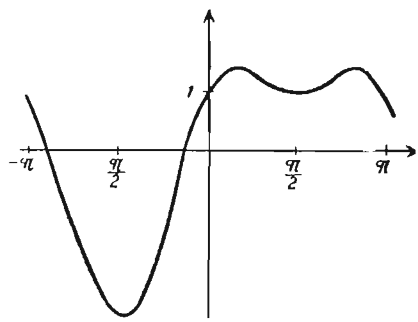
$x = (1 + \cos^2 t) \sin t$
$y = \sin^2 t \cos t$



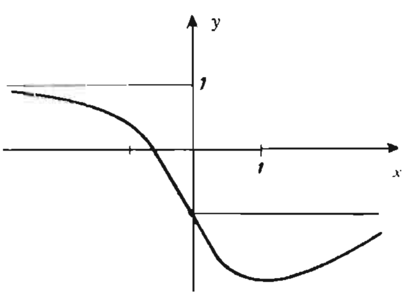
$x = (t^3 + 1)/(t^2 - t)$
$y = t^2/(t - 1)$



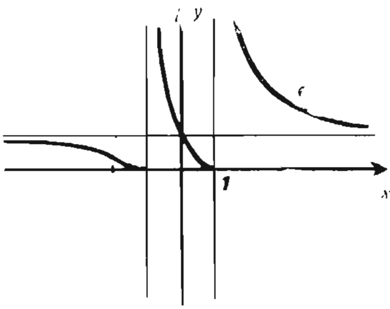
$y = e^{x}\,(2x^2 - 4x)^{1/2}$



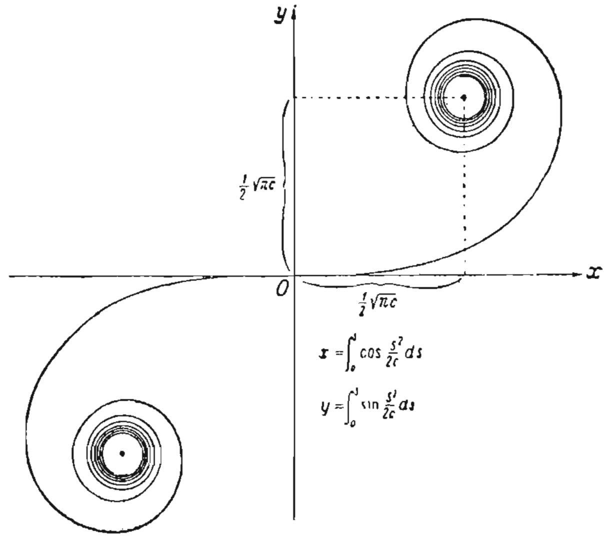
$y = \cos 2x + 2\sin x$

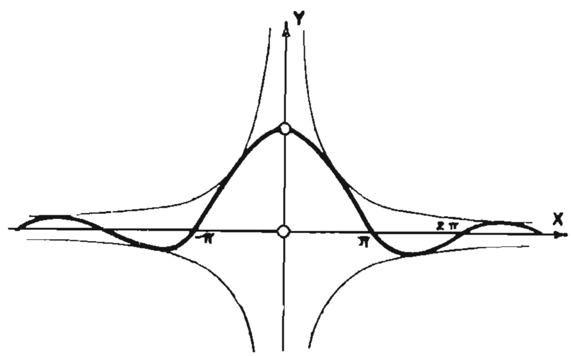


$y = (x + e^{x})\,/\,(x - e^{x})$

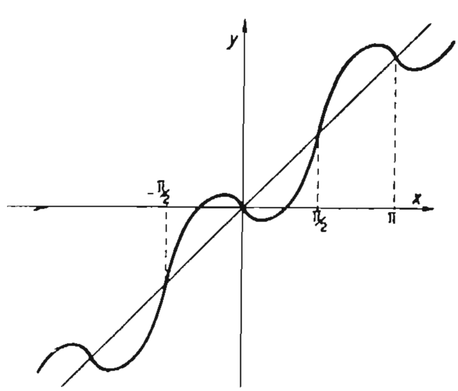


$y = \exp\{2x/(x^2 - 1)\}$

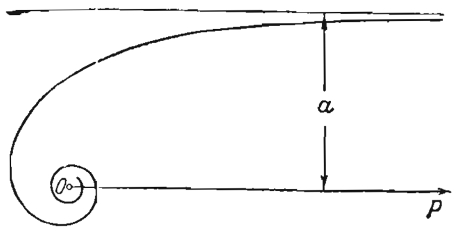




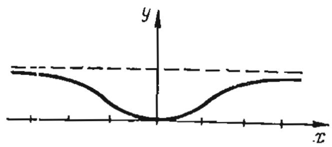
$y = (\sin x)\,/\,x$



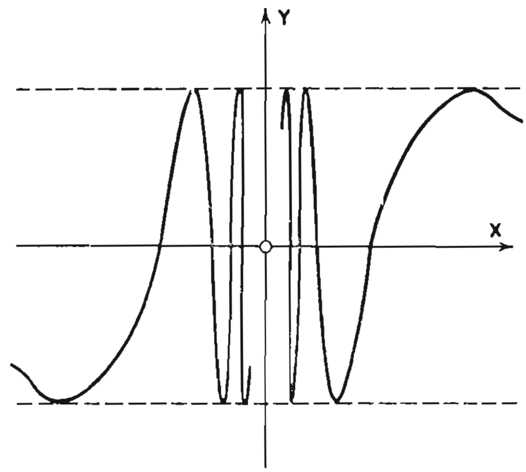
$y = x - \sin 2x$



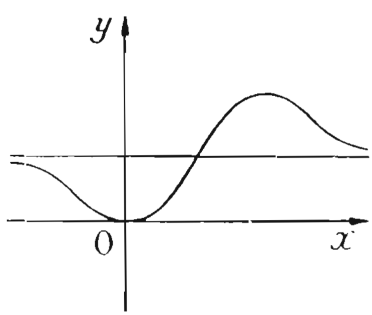
$r = a/\theta$



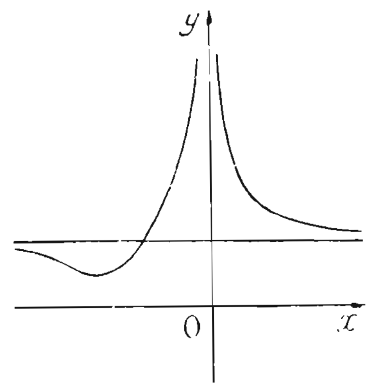
$y = \exp(-1/x^2)$



$y = \sin(1/x)$

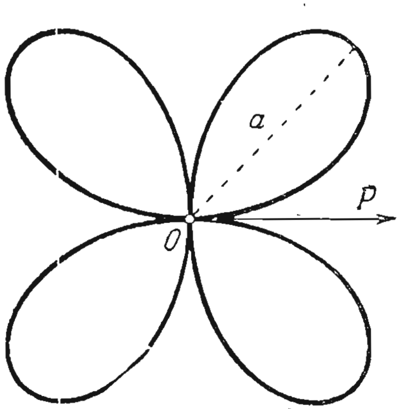


$a > 0$

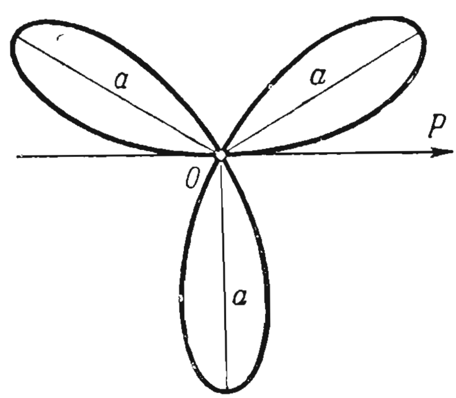


$a < 0$

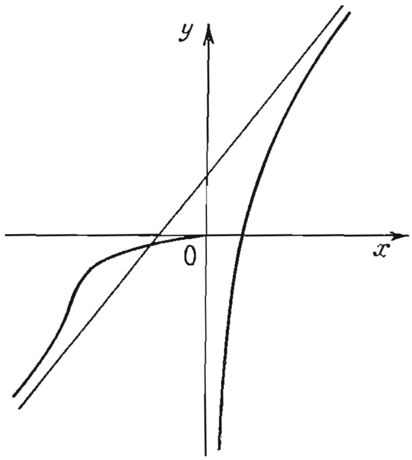
$y = \exp \frac{x-a}{x^2}$



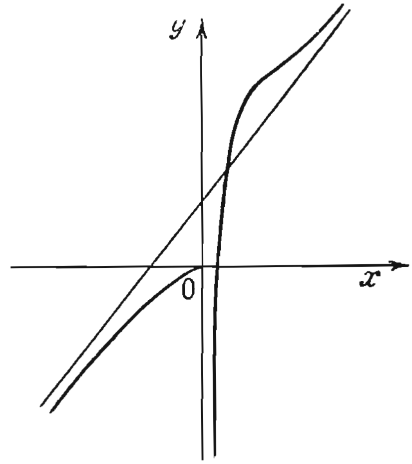
$r = a \sin 2\theta$



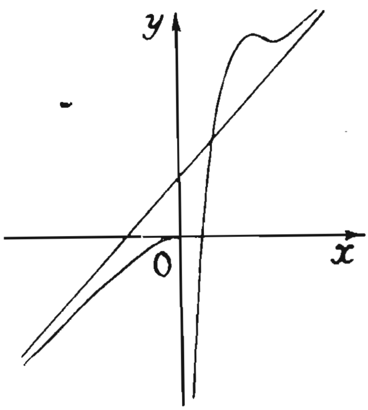
$r = a \sin 3\theta$



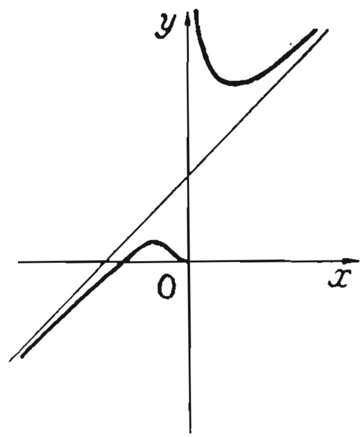
$a < -1/2$



$-1/2 < a < -1/4$

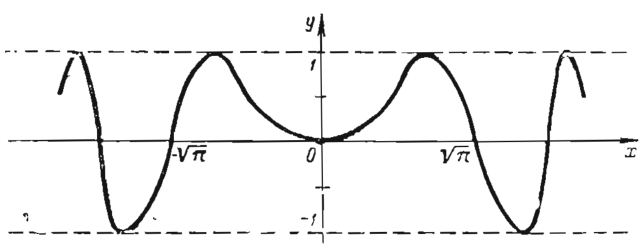


$-1/4 < a < 0$

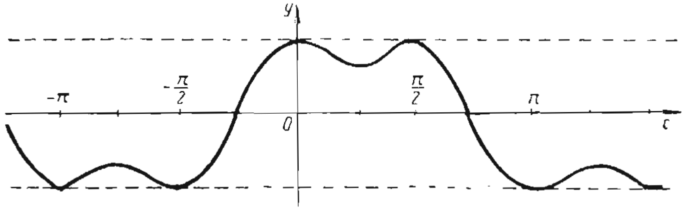


$a > 0$

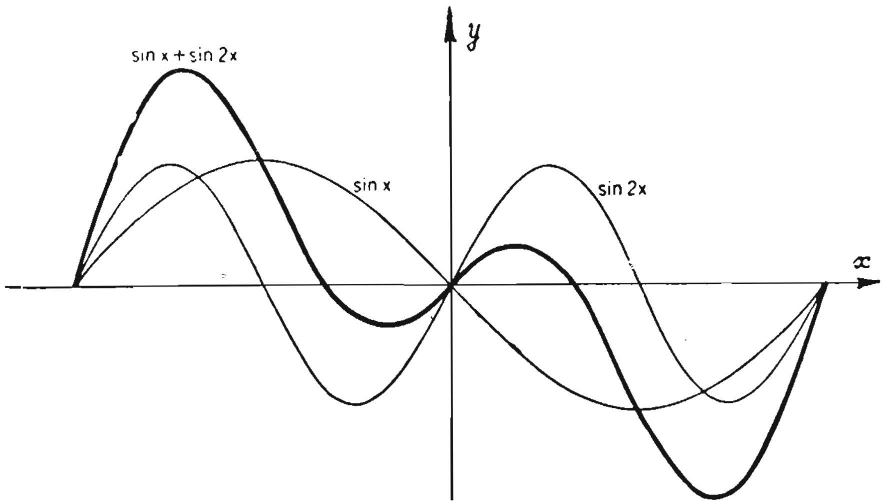
$y = (x + a)\, e^{1/x}$



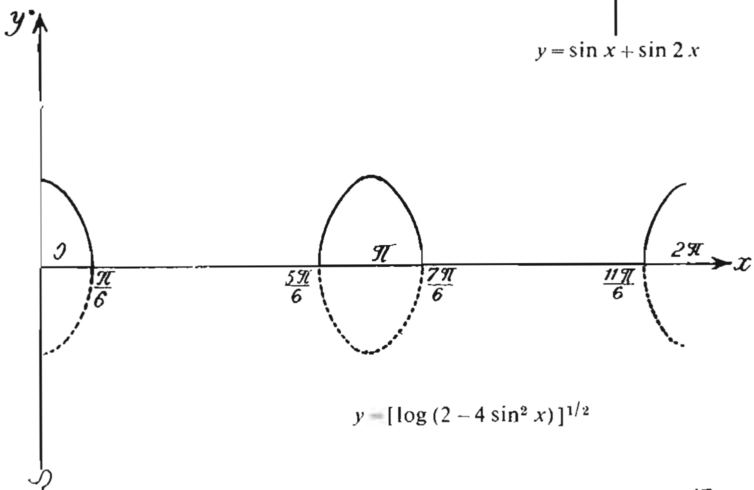
$y = \sin(x^2)$



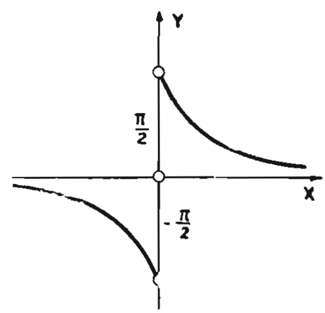
$y = \cos^3 x + \sin^3 x$



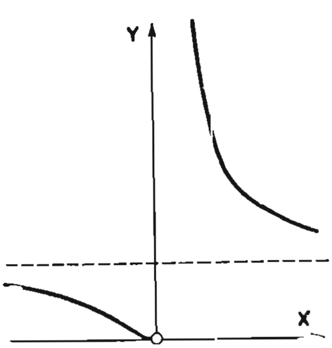
$y = \sin x + \sin 2x$



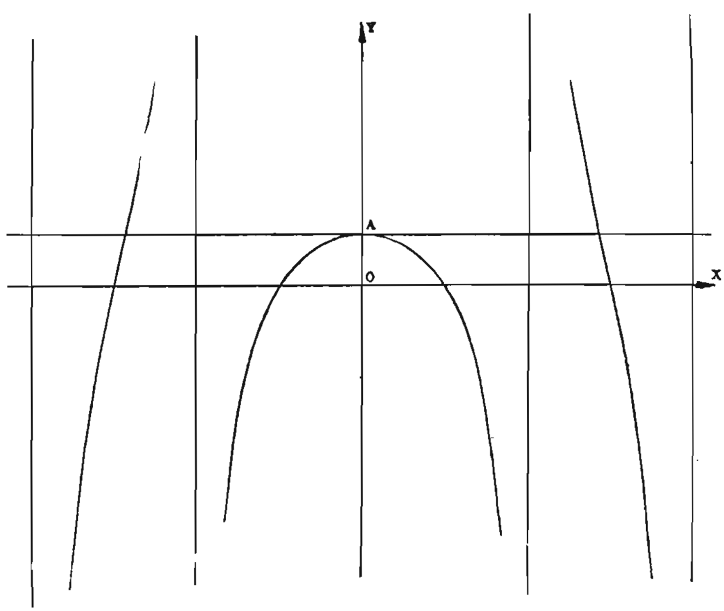
$y = [\log (2 - 4 \sin^2 x)]^{1/2}$



$y = \text{arc tg } (1/x)$



$y = 2^{1/x}$



$y = x \text{ cctg } (x / a)$

NUMERIČKE TABLICE

I. VAŽNIJE KONSTANTE

N	$\log_{10} N$	N	$\log_{10} N$
$\pi = 3{,}14159265$	0,4971499	$\pi^2 = 9{,}86960440$	0,9942997
$2\pi = 6{,}28318531$	0,7981799	$1/\pi^2 = 0{,}10132118$	9,0057003 – 10
$4\pi = 12{,}56637061$	1,0992099	$\sqrt{\pi} = 1{,}77245385$	0,2485749
$\pi/2 = 1{,}57079633$	0,1961199	$1/\sqrt{\pi} = 0{,}56418958$	9,7514251 – 10
$\pi/3 = 1{,}04719755$	0,0200286	$(3/\pi)^{1/2} = 0{,}97720502$	9,9899857 – 10
$4\pi/3 = 4{,}18879020$	0,6220886	$(4/\pi)^{1/2} = 1{,}12837917$	0,0524551
$\pi/4 = 0{,}78539816$	9,8950899 – 10	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}46459189$	0,1657166
$\pi/6 = 0{,}52359878$	9,7189986 – 10	$1/\sqrt[3]{\pi} = 0{,}68278406$	9,8342834 – 10
$1/\pi = 0{,}31830989$	9,5028501 – 10	$\sqrt[3]{\pi^2} = 2{,}14502940$	0,3314332
$1/2\pi = 0{,}15915494$	9,2018201 – 10	$(3/4\pi)^{1/3} = 0{,}62035049$	9,7926371 – 10
$3/\pi = 0{,}95492966$	9,9799714 – 10	$(\pi/6)^{1/3} = 0{,}80599598$	9,9063329 – 10

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846$; $e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536$

II. BINOMNI KOEFICIJENTI

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

III. FAKTORIJELI

n	$n!$	$\log_{10} n$
0	1	0,000 000
1	1	0,000 000
2	2	0,301 030
3	6	0,778 151
4	24	1,380 211
5	$12 \cdot 10$	2,079 181
6	$72 \cdot 10$	2,857 332
7	$504 \cdot 10$	3,702 431
8	$4\ 032 \cdot 10$	4,605 521
9	$36\ 288 \cdot 10$	5,559 763
10	$36\ 288 \cdot 10^2$	6,559 763
11	$399\ 168 \cdot 10^2$	7,601 156
12	$4\ 790\ 016 \cdot 10^2$	8,680 337
13	$62\ 270\ 208 \cdot 10^2$	9,794 280
14	$871\ 782\ 912 \cdot 10^2$	10,940 408
15	$1\ 307\ 674\ 368 \cdot 10^3$	12,116 500

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$

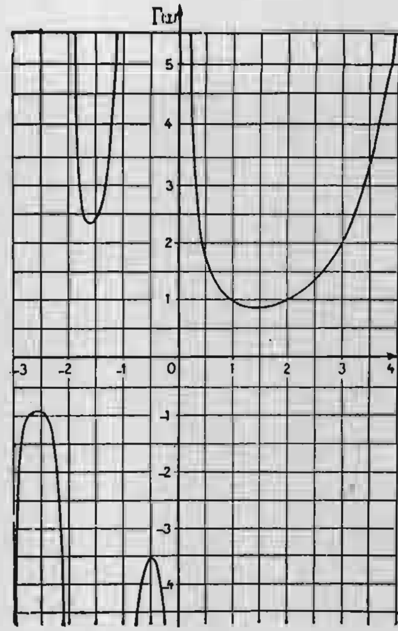
IV. GAMA-FUNKCIJA

x	$\Gamma(x)$
1,0	1,000
1,1	0,951
1,2	0,918
1,3	0,897
1,4	0,887
1,5	0,886
1,6	0,894
1,7	0,909
1,8	0,931
1,9	0,962
2,0	1,000

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

$(x > 0)$;

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$



V. DVOSTRUKI FAKTORIJELI

n	$n!$	$(2n-1)!!$	$(2n)!!$	$1/n!$	$1/(2n-1)!!$	$1/(2n)!!$
1	1	1	2	1	1	0,5
2	2	3	8	0,5	0,333 333 333	0,125
3	6	15	48	0,166 666 667	0,066 666 667	0,020 833 333
4	24	105	384	0,041 666 667	0,009 523 810	0,002 604 167
5	120	945	3 840	0,008 333 333	0,001 058 201	0,000 260 417
6	720	10 395	46 080	0,001 388 889	0,000 096 200	0,000 021 701
7	5 040	135 135	645 120	0,000 198 413	0,000 007 400	0,000 001 550
8	40 320	2 027 025	10 321 920	0,000 024 802	0,000 000 493	0,000 000 097
9	362 880	34 459 425	185 794 560	0,000 002 756	0,000 000 029	0,000 000 005
10	3 628 800	654 729 075	3 715 891 200	0,000 000 276	0,000 000 002	0,000 000 000

VI. KVADRATNI I KUBNI KORENI I DRUGE VREDNOSTI

n	$1/n$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	e^n	$e^{n/10}$	$e^{-n/10}$	e^{-n}
1	1,000	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64	2,718	1,105	0,905	0,368
2	0,500	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85	7,389	1,221	0,819	0,135
3	0,333	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69	20,09	1,350	0,741	0,0498
4	0,250	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37	54,60	1,492	0,670	0,0183
5	0,200	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94	148,41	1,649	0,607	0,00674
6	0,167	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43	403,4	1,822	0,549	$2,48 \cdot 10^{-3}$
7	0,143	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88	1 096,6	2,014	0,497	$9,12 \cdot 10^{-4}$
8	0,125	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28	2 981	2,226	0,449	$3,35 \cdot 10^{-4}$
9	0,111	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65	8 103	2,460	0,407	$1,23 \cdot 10^{-4}$
10	0,100	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00	22 026	2,718	0,368	$4,54 \cdot 10^{-5}$

VII. VREDNOST FUNKCIJE e^{-x} ZA NEKE VREDNOSTI x

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
1/10	0,90484	9/5	0,16530	25/4	0,00193
1/8	0,88250	2	0,13533	32/5	0,00167
1/6	0,84648	9/4	0,10540	7	0,00091
1/5	0,81873	5/2	0,08209	36/5	0,00075
1/4	0,77880	8/3	0,06948	8	0,00034
1/3	0,71653	3	0,04979	81/10	0,00030
2/5	0,67032	25/8	0,04394	49/6	0,00028
1/2	0,60653	16/5	0,04076	25/3	0,00024
2/3	0,51342	18/5	0,02732	9	0,00012
4/5	0,44933	4	0,01832	49/5	0,00006
9/10	0,40657	25/6	0,01550	10	0,00004
1	0,36788	9/2	0,01111	32/3	0,00002
9/8	0,32465	49/10	0,00745	11	0,00002
4/3	0,26360	5	0,00674	12	0,00001
3/2	0,22313	6	0,00248	13	0,00000
8/5	0,20190	49/8	0,00218	14	0,00000

VIII. PRIRODNI LOGARITMI BROJEVA OD 1,0 DO 9,9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,000	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470	0,531	0,588	0,642
2	0,693	0,742	0,788	0,833	0,875	0,916	0,956	0,993	1,030	1,065
3	1,099	1,131	1,163	1,194	1,224	1,253	1,281	1,308	1,335	1,361
4	1,386	1,411	1,435	1,459	1,482	1,504	1,526	1,548	1,569	1,589
5	1,609	1,629	1,649	1,668	1,686	1,705	1,723	1,740	1,758	1,775
6	1,792	1,808	1,825	1,841	1,856	1,872	1,887	1,902	1,917	1,932
7	1,946	1,960	1,974	1,988	2,001	2,015	2,028	2,041	2,054	2,067
8	2,079	2,092	2,104	2,116	2,128	2,140	2,152	2,163	2,175	2,186
9	2,197	2,208	2,219	2,230	2,241	2,251	2,262	2,272	2,282	2,293

IX. PRIRODNI LOGARITMI CELIH BROJEVA OD 10 DO 109

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2,303	2,398	2,485	2,565	2,639	2,708	2,773	2,833	2,890	2,944
2	2,996	3,045	3,091	3,135	3,178	3,219	3,258	3,296	3,332	3,367
3	3,401	3,434	3,466	3,497	3,526	3,555	3,584	3,611	3,638	3,664
4	3,689	3,714	3,738	3,761	3,784	3,807	3,829	3,850	3,871	3,892
5	3,912	3,932	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,078
6	4,094	4,111	4,127	4,143	4,159	4,174	4,190	4,205	4,220	4,234
7	4,248	4,263	4,277	4,290	4,304	4,317	4,331	4,344	4,357	4,369
8	4,382	4,394	4,407	4,419	4,431	4,443	4,454	4,466	4,477	4,489
9	4,500	4,511	4,522	4,533	4,543	4,554	4,564	4,575	4,585	4,595
10	4,605	4,615	4,625	4,635	4,644	4,654	4,663	4,673	4,682	4,691

X. KVADRATI

1,00—5,49

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	3	5	8	11	13	16	19	22	24
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	4	8	12	16	20	25	29	33	37
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986				6	13	19	25	31	38	44	50	57
3,1								10,05	10,11	10,18	1	1	2	3	3	4	4	5	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	1	2	2	3	4	5	6	7	7
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23 62	23,72	23,81	23,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	1	2	3	4	6	7	8	9	10

5,50—9,99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35.28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	2	4	6	8	10	12	14	16	18

XI. STEPENI, KORENI I RECIPROČNE VREDNOSTI

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10\,n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10\,n}$	$\sqrt[3]{100\,n}$	$1/n$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1,000
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,5000
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,3333
4	16	64	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	0,2500
5	25	125	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	0,2000
6	36	216	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	0,1667
7	49	343	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	0,1429
8	64	512	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	0,1250
9	81	729	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	0,1111
10	100	1000	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0,1000
11	121	1331	3,317	10,488	2,224	4,791	10,323	0,09091
12	144	1728	3,464	10,954	2,289	4,932	10,627	0,08333
13	169	2197	3,606	11,402	2,351	5,066	10,914	0,07692
14	196	2744	3,742	11,832	2,410	5,192	11,187	0,07143
15	225	3375	3,873	12,247	2,466	5,313	11,447	0,06667
16	256	4096	4,000	12,649	2,520	5,429	11,696	0,06250
17	289	4913	4,123	13,038	2,571	5,540	11,935	0,05882
18	324	5832	4,243	13,416	2,621	5,646	12,164	0,05556
19	361	6859	4,359	13,784	2,668	5,749	12,386	0,05263
20	400	8000	4,472	14,142	2,714	5,848	12,599	0,05000
21	441	9261	4,583	14,491	2,759	5,944	12,806	0,04762
22	484	10648	4,690	14.832	2,802	6,037	13,006	0,04545
23	529	12167	4,796	15,166	2,844	6,127	13,200	0,04348
24	576	13824	4,899	15,492	2,884	6,214	13,389	0,04167
25	625	15625	5,000	15,811	2,924	6,300	13,572	0,04000
26	676	17576	5,099	16,125	2,962	6,383	13,751	0,03846
27	729	19683	5,196	16,432	3,000	6,463	13,925	0,03704
28	784	21952	5,292	16,733	3,037	6,542	14,095	0,03571
29	841	24389	5,385	17,029	3,072	6,619	14,260	0,03448
30	900	27000	5,477	17,321	3,107	6,694	14,422	0,03333
31	961	29791	5,568	17,607	3,141	6,768	14,581	0,03226
32	1024	32768	5,657	17,889	3,175	6,840	14,736	0,03125
33	1089	35937	5,745	18,166	3,208	6,910	14,888	0,03030
34	1156	39304	5,831	18,439	3,240	6,980	15,037	0,02941
35	1225	42875	5,916	18,708	3,271	7,047	15,183	0,02857
36	1296	46656	6,000	18,974	3,302	7,114	15,326	0,02778
37	1369	50653	6,083	19,235	3,332	7,179	15,467	0,02703
38	1444	54872	6,164	19,494	3,362	7,243	15,605	0,02632
39	1521	59319	6,245	19,748	3,391	7,306	15,741	0,02564
40	1600	64000	6,325	20,000	3,420	7,368	15,874	0,02500
41	1681	68921	6,403	20,248	3,448	7,429	16,005	0,02439
42	1764	74088	6,481	20,494	3,476	7,489	16,134	0,02381
43	1849	79507	6,557	20,736	3,503	7,548	16,261	0,02326
44	1936	85184	6,633	20,976	3,530	7,606	16,386	0,02273
45	2025	91125	6,708	21,213	3,557	7,663	16,510	0,02222
46	2116	97336	6,782	21,448	3,583	7,719	16,631	0,02174
47	2209	103823	6,856	21,679	3,609	7,775	16,751	0,02128
48	2304	110592	6,928	21,909	3,634	7,830	16,869	0 02083
49	2401	117649	7,000	22,136	3,659	7,884	16,985	0,02041
50	2500	125000	7,071	22,361	3,684	7,937	17,100	0,02000

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$1/n$
51	2601	132651	7,141	22,583	3,708	7,990	17,213	0,01961
52	2704	140608	7,211	22,804	3,733	8,041	17,325	0,01923
53	2809	148877	7,280	23,022	3,756	8,093	17,435	0,01887
54	2916	157464	7,348	23,238	3,780	8,143	17,544	0,01852
55	3025	166375	7,416	23,452	3,803	8,193	17,652	0,01818
56	3136	175616	7,483	23,664	3,826	8,243	17,758	0,01786
57	3249	185193	7,550	23,875	3,849	8,291	17,863	0,01754
58	3364	195112	7,616	24,083	3,871	8,340	17,967	0,01724
59	3481	205379	7,681	24,290	3,893	8,387	18,070	0,01695
60	3600	216000	7,746	24,495	3,915	8,434	18,171	0,01667
61	3721	226981	7,810	24,698	3,936	8,481	18,272	0,01639
62	3844	238328	7,874	24,900	3,958	8,527	18,371	0,01613
63	3969	250047	7,937	25,100	3,979	8,573	18,469	0,01587
64	4096	262144	8,000	25,298	4,000	8,618	18,566	0,01563
65	4225	274625	8,062	25,495	4,021	8,662	18,663	0,01538
66	4356	287496	8,124	25,690	4,041	8,707	18,758	0,01515
67	4489	300763	8,185	25,884	4,062	8,750	18,852	0,01493
68	4624	314432	8,246	26,077	4,082	8,794	18,945	0,01471
69	4761	328509	8,307	26,268	4,102	8,837	19,038	0,01449
70	4900	343000	8,367	26,458	4,121	8,879	19,129	0,01429
71	5041	357911	8,426	26,646	4,141	8,921	19,220	0,01408
72	5184	373248	8,485	26,833	4,160	8,963	19,310	0,01389
73	5329	389017	8,544	27,019	4,179	9,004	19,399	0,01370
74	5476	405224	8 602	27,203	4,198	9,045	19,487	0,01351
75	5625	421875	8,660	27,386	4,217	9,086	19,574	0,01333
76	5776	438976	8,718	27,568	4,236	9,126	19,661	0,01316
77	5929	456533	8,775	27,749	4,254	9,166	19,747	0,01299
78	6084	474552	8,832	27,928	4,273	9,205	19,832	0,01282
79	6241	493039	8,888	28,107	4,291	9,244	19,916	0,01266
80	6400	512000	8,944	28,284	4,309	9,283	20,000	0,01250
81	6561	531441	9,000	28,460	4,327	9,322	20,083	0,01235
82	6724	551368	9,055	28,636	4,344	9,360	20,165	0,01220
83	6889	571787	9,110	28,810	4,362	9,398	20,247	0,01205
84	7056	592704	9,165	28,983	4,380	9,435	20,328	0,01190
85	7225	614125	9,220	29,155	4,397	9,473	20,408	0,01176
86	7396	636056	9,274	29,326	4,414	9,510	20,488	0,01163
87	7569	658503	9,327	29,496	4,431	9,546	20,567	0,01149
88	7744	681472	9,381	29,665	4,448	9,583	20,646	0,01136
89	7921	704969	9,434	29,833	4,465	9,619	20,724	0,01124
90	8100	729000	9,487	30,000	4,481	9,655	20,801	0,01111
91	8281	753571	9,539	30,166	4,498	9,691	20,878	0,01099
92	8464	778688	9,592	30,332	4,514	9,726	20,954	0,01087
93	8649	804357	9,644	30,496	4,531	9,761	21,029	0,01075
94	8836	830584	9.695	30,659	4,547	9,796	21,105	0,01064
95	9025	857375	9,747	30,822	4,563	9,830	21,179	0,01053
96	9216	884736	9,798	30,984	4,579	9,865	21,253	0,01042
97	9409	912673	9,849	31,145	4,595	9,899	21,327	0,01031
98	9604	941192	9,899	31,305	4,610	9,933	21,400	0,01020
99	9801	970299	9,950	31,464	4,626	9,967	21,472	0,01010
100	10000	1000000	10,000	31,623	4,642	10,000	21,544	0,01000

XII. TRIGONOMETRISKE FUNKCIJE ARGUMENTA IZRAŽENOG RADIJANIMA

0,00—0,50

Radijan.	sin	tg	cotg	cos
0,00	0,0000	0,0000	. . . . .	1,0000
0,01	0,0100	0,0100	99,997	1,0000
0,02	0,0200	0,0200	49,993	0,9998
0,03	0,0300	0,0300	33,323	0,9996
0,04	0,0400	0,0400	24,987	0,9992
0,05	0,0500	0,0500	19,983	0,9988
0,06	0,0600	0,0601	16,647	0,9982
0,07	0,0699	0,0701	14,262	0,9976
0,08	0,0799	0,0802	12,473	0,9968
0,09	0,0899	0,0902	11,081	0,9960
0,10	0,0998	0,1003	9,967	0,9950
0,11	0,1098	0,1104	9,054	0,9940
0,12	0,1197	0,1206	8,293	0,9928
0,13	0,1296	0,1307	7,649	0,9916
0,14	0,1395	0,1409	7,096	0,9902
0,15	0,1494	0,1511	6,617	0,9888
0,16	0,1593	0,1614	6,197	0,9872
0,17	0,1692	0,1717	5,826	0,9856
0,18	0,1790	0,1820	5,495	0,9838
0,19	0,1889	0,1923	5,200	0,9820
0,20	0,1987	0,2027	4,933	0,9801
0,21	0,2085	0,2131	4,692	0,9780
0,22	0,2182	0,2236	4,472	0,9759
0,23	0,2280	0,2341	4,271	0,9737
0,24	0,2377	0,2447	4,086	0,9713
0,25	0,2474	0,2553	3,916	0,9689
0,26	0,2571	0,2660	3,759	0,9664
0,27	0,2667	0,2768	3,613	0,9638
0,28	0,2764	0,2876	3,478	0,9611
0,29	0,2860	0,2984	3,351	0,9582
0,30	0,2955	0,3093	3,233	0,9553
0,31	0,3051	0,3203	3,122	0,9523
0,32	0,3146	0,3314	3,018	0,9492
0,33	0,3240	0,3425	2,920	0,9460
0,34	0,3335	0,3537	2,827	0,9428
0,35	0,3429	0,3650	2,740	0,9394
0,36	0,3523	0,3764	2,657	0,9359
0,37	0,3616	0,3879	2,578	0,9323
0,38	0,3709	0,3994	2,504	0,9287
0,39	0,3802	0,4111	2,433	0,9249
0,40	0,3894	0,4228	2,365	0,9211
0,41	0,3986	0,4346	2,301	0,9171
0,42	0,4078	0,4466	2,239	0,9131
0,43	0,4169	0,4586	2,180	0,9090
0,44	0,4259	0,4708	2,124	0,9048
0,45	0,4350	0,4831	2,070	0,9004
0,46	0,4439	0,4954	2,018	0,8961
0,47	0,4529	0,5080	1,969	0,8916
0,48	0,4618	0,5206	1,921	0,8870
0,49	0,4706	0,5334	1,875	0,8823
0,50	0,4794	0,5463	1,830	0,8776

0,50—1,00

Radijani	sin	tg	cotg	cos
0,50	0,4794	0,5463	1,830	0,8776
0,51	0,4882	0,5594	1,788	0,8727
0,52	0,4969	0,5726	1,747	0,8678
0,53	0,5055	0,5859	1,707	0,8628
0,54	0,5141	0,5994	1,668	0,8577
0,55	0,5227	0,6131	1,631	0,8525
0,56	0,5312	0,6269	1,595	0,8473
0,57	0,5396	0,6410	1,560	0,8419
0,58	0,5480	0,6552	1,526	0,8365
0,59	0,5564	0,6696	1,494	0,8309
0,60	0,5646	0,6841	1,462	0,8253
0,61	0,5729	0,6989	1,431	0,8196
0,62	0,5810	0,7139	1,401	0,8139
0,63	0,5891	0,7291	1,372	0,8080
0,64	0,5972	0,7445	1,343	0,8021
0,65	0,6052	0,7602	1,315	0,7961
0,66	0,6131	0,7761	1,288	0,7900
0,67	0,6210	0,7923	1,262	0,7838
0,68	0,6288	0,8087	1,237	0,7776
0,69	0,6365	0,8253	1,212	0,7712
0,70	0,6442	0,8423	1,187	0,7648
0,71	0,6518	0,8595	1,163	0,7584
0,72	0,6594	0,8771	1,140	0,7518
0,73	0,6669	0,8949	1,117	0,7452
0,74	0,6743	0,9131	1,095	0,7385
0,75	0,6816	0,9316	1,073	0,7317
0,76	0,6889	0,9505	1,052	0,7248
0,77	0,6961	0,9697	1,031	0,7179
0,78	0,7033	0,9893	1,011	0,7109
0,79	0,7104	1,009	0,9908	0,7038
0,80	0,7174	1,030	0,9712	0,6967
0,81	0,7243	1,050	0,9520	0,6895
0,82	0,7311	1,072	0,9331	0,6822
0,83	0,7379	1,093	0,9146	0,6749
0,84	0,7446	1,116	0,8964	0,6675
0,85	0,7513	1,138	0,8785	0,6600
0,86	0,7578	1,162	0,8609	0,6524
0,87	0,7643	1,185	0,8437	0,6448
0,88	0,7707	1,210	0,8267	0,6372
0,89	0,7771	1,235	0,8100	0,6294
0,90	0,7833	1,260	0,7936	0,6216
0,91	0,7895	1,286	0,7774	0,6137
0,92	0,7956	1,313	0,7615	0,6058
0,93	0,8016	1,341	0,7458	0,5978
0,94	0,8076	1,369	0,7303	0,5898
0,95	0,8134	1,398	0,7151	0,5817
0,96	0,8192	1,428	0,7001	0,5735
0,97	0,8249	1,459	0,6853	0,5653
0,98	0,8305	1,491	0,6707	0,5570
0,99	0,8360	1,524	0,6563	0,5487
1,00	0,8415	1,557	0,6421	0,5403

1,00—1,30

Radijani	sin	tg	cotg	cos
1,00	0,8415	1,557	0,6421	0,5403
1,01	0,8468	1,592	0,6281	0,5319
1,02	0,8521	1,628	0,6142	0,5234
1,03	0,8573	1,665	0,6005	0,5148
1,04	0,8624	1,704	0,5870	0,5062
1,05	0,8674	1,743	0,5736	0,4976
1,06	0,8724	1,784	0,5604	0,4889
1,07	0,8772	1,827	0,5473	0,4801
1,08	0,8820	1,871	0,5344	0,4713
1,09	0,8866	1,917	0,5216	0,4625
1.10	0,8912	1 965	0,5090	0,4536
1,11	0,8957	2,014	0,4964	0,4447
1,12	0,9001	2.066	0,4840	0,4357
1,13	0,9044	2,120	0,4718	0,4267
1,14	0,9086	2,176	0,4596	0,4176
1,15	0,9128	2,234	0,4475	0,4085
1,16	0,9168	2,296	0,4356	0,3993
1,17	0,9208	2,360	0,4237	0,3902
1,18	0,9246	2,427	0,4120	0,3809
1,19	0,9284	2,498	0,4003	0,3717
1,20	0,9320	2,572	0,3888	0,3624
1,21	0,9356	2,650	0,3773	0,3530
1,22	0,9391	2,733	0,3659	0,3436
1,23	0,9425	2,820	0,3546	0,3342
1,24	0,9458	2,912	0,3434	0,3248
1,25	0,9490	3,010	0,3323	0,3153
1,26	0,9521	3,113	0,3212	0,3058
1,27	0,9551	3,224	0,3102	0,2963
1,28	0,9580	3,341	0,2993	0,2867
1,29	0,9608	3,467	0,2884	0,2771
1,30	0,9636	3,602	0,2776	0,2675

1,30—1,60

Radijani	sin	tg	cotg	cos
1,30	0,9636	3,602	0,2776	0,2675
1,31	0,9662	3,747	0,2669	0,2579
1,32	0,9687	3,903	0,2562	0,2482
1,33	0,9711	4,072	0,2456	0,2385
1,34	0,9735	4,256	0,2350	0,2288
1,35	0,9757	4,455	0,2245	0,2190
1,36	0,9779	4,673	0,2140	0,2092
1,37	0,9799	4,913	0,2035	0,1994
1,38	0,9819	5,177	0,1931	0,1896
1,39	0,9837	5,471	0,1828	0,1798
1,40	0,9854	5,798	0,1725	0,1700
1,41	0,9871	6,165	0,1622	0,1601
1,42	0,9887	6,581	0,1519	0,1502
1,43	0,9901	7,055	0,1417	0,1403
1,44	0,9915	7,602	0,1315	0,1304
1 45	0,9927	8,238	0,1214	0,1205
1,46	0,9939	8,989	0,1113	0,1106
1,47	0,9949	9,887	0,1011	0,1006
1,48	0,9959	10,983	0,0910	0,0907
1,49	0,9967	12,350	0,0810	0,0807
1,50	0,9975	14,101	0,0709	0,0707
1,51	0,9982	16,428	0,0609	0,0608
1,52	0,9987	19,670	0,0508	0,0508
1,53	0,9992	24,498	0,0408	0,0408
1,54	0,9995	32,461	0,0308	0,0308
1,55	0,9998	48,078	0,0208	0,0208
1,56	0,9999	92,620	0,0108	0,0108
1,57	1,0000	1255,8	0,0008	0,0008
1,58	1,0000	−108,65	−0,0092	−0,0092
1,59	0,9998	−52,067	−0,0192	−0,0192
1,60	0,9996	−34,233	−0,0292	−0,0292

XIII. RADIJANI IZRAŽENI STEPENIMA, MINUTIMA I SEKUNDIMA

	Radijani	Deseti	Stoti	Hiljaditi	Desetohiljaditi
1	57°17′44″,8	5°43′46″,5	0°34′22″,6	0° 3′26″,3	0°0′20″,6
2	114°35′29″,6	11°27′33″,0	1° 8′45″,3	0° 6′52″,5	0°0′41″,3
3	171°53′14″,4	17°11′19″,4	1°43′07″,9	0°10′18″,8	0°1′01″,9
4	229°10′59″,2	22°55′05″,9	2°17′30″,6	0°13′45″,1	0°1′22″,5
5	286°28′44 ′,0	28°38′52″,4	2°51′53″,2	0°17′11″,3	0°1′43″,1
6	343°46′28″,8	34°22′38″,9	3°26′15″,9	0°20′37″,6	0°2′03″,8
7	401° 4′13″,6	40° 6′25″,4	4° 0′38″,5	0°24′03″,9	0°2′24″,4
8	458°21′58″,4	45°50′11″,8	4°35′01″,2	0°27′30″,1	0°2′45″,0
9	515°39′43″,3	51°33′58″,3	5° 9′23″,8	0°30′56″,4	0°3′05″,6

XIV. STEPENI, MINUTI I SEKUNDI IZRAŽENI RADIJANIMA

°	Radijani	′	Radijani	″	Radijani
1	0,01745 33	1	0,00029 09	1	0,00000 48
2	0,03490 66	2	0,00058 18	2	0,00000 97
3	0,05235 99	3	0,00087 27	3	0,00001 45
4	0,06981 32	4	0,00116 36	4	0,00001 94
5	0,08726 65	5	0,00145 44	5	0,00002 42
6	0,10471 98	6	0,00174 53	6	0,00002 91
7	0,12217 30	7	0,00203 62	7	0,00003 39
8	0,13962 63	8	0,00232 71	8	0,00003 88
9	0,15707 96	9	0,00261 80	9	0,00004 36
10	0,17453 29	10	0,00290 89	10	0,00004 85
20	0,34906 59	20	0,00581 78	20	0,00009 70
30	0,52359 88	30	0,00872 66	30	0,00014 54
40	0,69813 17	40	0,01163 55	40	0,00019 39
50	0,87266 46	50	0,01454 44	50	0,00024 24
60	1,04719 76	60	0,01745 33	60	0,00029 09
70	1,22173 05				
80	1,39626 34				
90	1,57079 63				

XV. HIPERBOLIČNE FUNKCIJE

0,00—0,50

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000
0,01	1,0100	0,9900	0,0100	1,0000
0,02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002
0,03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0004
0,04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013
0,06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018
0,07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025
0,08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032
0,09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050
0,11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061
0,12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072
0,13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085
0,14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113
0,16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128
0,17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145
0,18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162
0,19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201
0,21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221
0,22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243
0,23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266
0,24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314
0,26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340
0,27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367
0,28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395
0,29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453
0,31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484
0,32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516
0,33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549
0,34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619
0,36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655
0,37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692
0,38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731
0,39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811
0,41	1,5068	0,6636	0,4216	1,0852
0,42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895
0,43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939
0,44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030
0,46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077
0,47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125
0,48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174
0,49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276

0,50—1,00

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276
0,51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329
0,52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383
0,53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438
0,54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494
0,55	1,7333	0,5770	0,5782	1,1551
0,56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609
0,57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669
0,58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730
0,59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855
0,61	1,8404	0,5433	0,6485	1,1919
0,62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984
0,63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051
0,64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188
0,66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258
0,67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330
0,68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402
0,69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552
0,71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628
0,72	2,0544	0,4867	0,7838	1,2706
0,73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785
0,74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947
0,76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030
0,77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114
0,78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199
0,79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374
0,81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464
0,82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555
0,83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647
0,84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835
0,86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932
0,87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029
0,88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128
0,89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331
0,91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434
0,92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539
0,93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645
0,94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862
0,96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973
0,97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085
0,98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199
0,99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431

XVI. TABLICA PROSTIH BROJEVA KOJI NE PREMAŠUJU 6000

2	331	751	1217	1697	2221	2719	3299	3803	4357	4943	5503
3	337	757	1223	1699	2237	2729	3301	3821	4363	4951	5507
5	347	761	1229	1709	2239	2731	3307	3823	4373	4957	5519
7	349	769	1231	1721	2243	2741	3313	3833	4391	4967	5521
11	353	773	1237	1723	2251	2749	3319	3847	4397	4969	5527
13	359	787	1249	1733	2267	2753	3323	3851	4409	4973	5531
17	367	797	1259	1741	2269	2767	3329	3853	4421	4987	5557
19	373	809	1277	1747	2273	2777	3331	3863	4423	4993	5563
23	379	811	1279	1753	2281	2789	3343	3877	4441	4999	5569
29	383	821	1283	1759	2287	2791	3347	3881	4447	5003	5573
31	389	823	1289	1777	2293	2797	3359	3889	4451	5009	5581
37	397	827	1291	1783	2297	2801	3361	3907	4457	5011	5591
41	401	829	1297	1787	2309	2803	3371	3911	4463	5021	5623
43	409	839	1301	1789	2311	2819	3373	3917	4481	5023	5639
47	419	853	1303	1801	2333	2833	3389	3919	4483	5039	5641
53	421	857	1307	1811	2339	2837	3391	3923	4493	5051	5647
59	431	859	1319	1823	2341	2843	3407	3929	4507	5059	5651
61	433	863	1321	1831	2347	2851	3413	3931	4513	5077	5653
67	439	877	1327	1847	2351	2857	3433	3943	4517	5081	5657
71	443	881	1361	1861	2357	2861	3449	3947	4519	5087	5659
73	449	883	1367	1867	2371	2879	3457	3967	4523	5099	5669
79	457	887	1373	1871	2377	2887	3461	3989	4547	5101	5683
83	461	907	1381	1873	2381	2897	3463	4001	4549	5107	5689
89	463	911	1399	1877	2383	2903	3467	4003	4561	5113	5693
97	467	919	1409	1879	2389	2909	3469	4007	4567	5119	5701
101	479	929	1423	1889	2393	2917	3491	4013	4583	5147	5711
103	487	937	1427	1901	2399	2927	3499	4019	4591	5153	5717
107	491	941	1429	1907	2411	2939	3511	4021	4597	5167	5737
109	499	947	1433	1913	2417	2953	3517	4027	4603	5171	5741
113	503	953	1439	1931	2423	2957	3527	4049	4621	5179	5743
127	509	967	1447	1933	2437	2963	3529	4051	4637	5189	5749
131	521	971	1451	1949	2441	2969	3533	4057	4639	5197	5779
137	523	977	1453	1951	2447	2971	3539	4073	4643	5209	5783
139	541	983	1459	1973	2459	2999	3541	4079	4649	5227	5791
149	547	991	1471	1979	2467	3001	3547	4091	4651	5231	5801
151	557	997	1481	1987	2473	3011	3557	4093	4657	5233	5807
157	563	1009	1483	1993	2477	3019	3559	4099	4663	5237	5813
163	569	1013	1487	1997	2503	3023	3571	4111	4673	5261	5821
167	571	1019	1489	1999	2521	3037	3581	4127	4679	5273	5827
173	577	1021	1493	2003	2531	3041	3583	4129	4691	5279	5839
179	587	1031	1499	2011	2539	3049	3593	4133	4703	5281	5843
181	593	1033	1511	2017	2543	3061	3607	4139	4721	5297	5849
191	599	1039	1523	2027	2549	3067	3613	4153	4723	5303	5851
193	601	1049	1531	2029	2551	3079	3617	4157	4729	5309	5857
197	607	1051	1543	2039	2557	3083	3623	4159	4733	5323	5861
199	613	1061	1549	2053	2579	3089	3631	4177	4751	5333	5867
211	617	1063	1553	2063	2591	3109	3637	4201	4759	5347	5869
223	619	1069	1559	2069	2593	3119	3643	4211	4783	5351	5879
227	631	1087	1567	2081	2609	3121	3659	4217	4787	5381	5881
229	641	1091	1571	2083	2617	3137	3671	4219	4789	5387	5897
233	643	1093	1579	2087	2621	3163	3673	4229	4793	5393	5903
239	647	1097	1583	2089	2633	3167	3677	4231	4799	5399	5923
241	653	1103	1597	2099	2647	3169	3691	4241	4801	5407	5927
251	659	1109	1601	2111	2657	3181	3697	4243	4813	5413	5939
257	661	1117	1607	2113	2659	3187	3701	4253	4817	5417	5953
263	673	1123	1609	2129	2663	3191	3709	4259	4831	5419	5981
269	677	1129	1613	2131	2671	3203	3719	4261	4861	5431	5987
271	683	1151	1619	2137	2677	3209	3727	4271	4871	5437	
277	691	1153	1621	2141	2683	3217	3733	4273	4877	5441	
281	701	1163	1627	2143	2687	3221	3739	4283	4889	5443	
283	709	1171	1637	2153	2689	3229	3761	4289	4903	5449	
293	719	1181	1657	2161	2693	3251	3767	4297	4909	5471	
307	727	1187	1663	2179	2699	3253	3769	4327	4919	5477	
311	733	1193	1667	2203	2707	3257	3779	4337	4931	5479	
313	739	1201	1669	2207	2711	3259	3793	4339	4933	5483	
317	743	1213	1693	2213	2713	3271	3797	4349	4937	5501	

XVII. TABLICA BERNOULLI-EVIH BROJEVA $B_{2n} = (-1)^{n+1}\, p/q$

p	q	n
1	6	1
1	30	2
1	42	3
1	30	4
5	66	5
691	2730	6
7	6	7
3617	510	8
43867	798	9
1 74611	330	10
8 54513	138	11
2363 64091	2730	12
85 53103	6	13
2 37494 61029	870	14
861 58412 76005	14322	15
770 93210 41217	510	16
257 76878 58367	6	17
26315 27155 30534 77373	19 19190	18
2 92999 39138 41559	6	19
2 61082 71849 64491 22051	13530	20
15 20097 64391 80708 02691	1806	21
278 33269 57930 10242 35023	690	22
5964 51111 59391 21632 77961	282	23
560 94033 68997 81768 62491 27547	46410	24
49 50572 05241 07964 82124 77525	66	25
80116 57181 35489 95734 79249 91853	1590	26
29 14996 36348 84862 42141 81238 12691	798	27
2479 39292 93132 26753 68541 57396 63229	870	28
84483 61334 88800 41862 04677 59940 36021	354	29
121 52331 40483 75557 20403 04994 07982 02460 41491	567 86730	30
123 00585 43408 68585 41953 03985 74033 86151	6	31
10 67838 30147 86652 98863 85444 97914 26479 42017	510	32
1 47260 00221 26335 65405 16194 28551 93234 22418 99101	64722	33
7877 31308 58718 72814 19091 49208 47460 62443 47001	30	34
1505 38134 73333 67003 80307 65673 77857 20851 14381 60235	4686	35
58279 54961 66994 41104 38277 24464 10673 65282 48830 18442 60429	1401 00870	36

Generatrisa *Bernoulli*-evih brojeva je funkcija

$$\frac{t}{e^t - 1} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \frac{t^\nu}{\nu!} \qquad \left(B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}\right).$$

Funkcija

$$\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2} \left(\equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right)$$

je parna, pa je $B_{2n+1} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

PROGRAMI[1] IZ KURSEVA MATEMATIKE KOJI SE DRŽE NA ELEKTROTEHNIČKOM FAKULTETU UNIVERZITETA U BEOGRADU

MATEMATIKA I

I semestar: 4+4; II semestar: 4+4[2].

I. *Algebra*

Matematička indukcija. Elementi kombinatorike. Binomni obrazac. Determinante, matrice i njihova primena na linearne jednačine. Kompleksni brojevi. Polinomi i njihove osobine.

II. *Vektorska algebra i analitička geometrija*

1. Operacije sa vektorima: sabiranje i oduzimanje vektora; skalarni i vektorski proizvod dva vektora; mešoviti proizvod; dvostruki vektorski proizvod.
2. Koordinatni sistemi u ravni i prostoru. Koordinate i komponente vektora, operacije sa vektorima pomoću koordinata.
3. Opšta teorija krivih II reda.
4. Ravan. Prava u prostoru.
5. Kanonički oblici jednačina površina II reda.
6. Pojam cilindričnih, konusnih i obrtnih površina.

III. *Analiza*

1. *Realni brojevi.* Prirodni, racionalni i iracionalni brojevi. Decimalni sistem. Operacije s realnim brojevima. Pojam skupa. Uređeni skupovi. Brojni razmaci.

2. *Funkcije.* Pojam funkcije. Preslikavanja. Grafik funkcije. Elementarne funkcije. Razni načini određivanja funkcija. Funkcije zadane formulom. Neke specijalne klase funkcija. Složena funkcija. Funkcija zadana parametarski. Inverzna funkcija. Nizovi. Pojam funkcije od dve i više promenljivih. Vektor funkcija.

3. *Granična vrednost.* Pojam okoline. Granična tačka. Granična vrednost funkcije. Neke važnije granične vrednosti. Gornja i donja međa. Granična vrednost monotonih funkcija. Broj *e*.

4. *Neprekidne funkcije.* Priraštaj argumenta i priraštaj funkcije. Neprekidnost funkcije u tački. Prekidne funkcije i vrste prekidnih tačaka. Svojstva neprekidnih funkcija. Neprekidne linije.

5. *Proučavanje elementarnih funkcija.* Polinom. Racionalna funkcija. Algebarska funkcija. Eksponencijalna funkcija. Logaritamska funkcija. Trigonometriske funkcije. Ciklometriske funkcije. Hiperbolične funkcije. Kvalitativno proučavanje i grafik proizvoljne funkcije.

6. *Izvod.* Problemi koji dovode do pojma izvoda. Izvod. Tangenta i normala krivih u ravni. Dodirni elementi. Teoreme o izvodu. Izvodi elementarnih funkcija. Pojam diferencijala. Izvod funkcije date parametarski. Izvodi višeg reda. Lajbnicova formula. Pojam parcijalnih izvoda. Izvod vektor funkcije.

7. *Osnovne teoreme diferencijalnog računa.* Rolova teorema. Lagranžova teorema. Košijeva teorema. Darbuova teorema. Lopitalovo pravilo. Tajlorova formula i njena primena. Pojam beskonačnog reda.

8. *Primena diferencijalnog računa na ispitivanje funkcija.* Ispitivanje funkcija. Grafičko pretstavljanje. Primena Tajlorove formule na ispitivanje funkcija u okolini date tačke. Oskulacija; oskulatorni krug.

9. *Određeni integral.* Problemi koji dovode do pojma određenog integrala. Gornji i donji zbir. Integralni zbir. Definicija određenog integrala. Uslovi integrabilnosti. Osnovne klase integrabilnih funkcija. Izračunavanje određenog integrala prostijih funkcija. Metode približnog izračunavanja određenog integrala.

10. *Neodređeni integral.* Primitivna funkcija i neodređeni integral. Neposredna integracija. Metod zamene. Metod delimične integracije. Integracija u konačnom obliku. Sistematika iznalaženja neodređenih integrala. Pojam diferencijalne jednačine.

---

[1] Ovi programi su nešto prošireni počev od školske 1958/59 godine.
[2] 4+4 znači: 4 časa predavanja i 4 časa vežbanja nedeljno.

11. *Određeni integral i njegova primena.* Veza između određenog integrala i primitivne funkcije. Proširenje pojma određenog integrala. Izračunavanje površine ravnih slika. Zapremina obrtnih tela. Dužina ravne krive. Kvadratura obrtnih površina. Primena određenog integrala u drugim naukama.

MATEMATIKA II

III semestar: 4+2; IV semestar: 2+4

Analiza

1. *Funkcije dve i više promenljivih.* Funkcije tačke. Grafik funkcija od dve promenljive. Granična vrednost funkcije. Neprekidnost funkcije više promenljivih.

2. *Diferencijalni račun funkcija više promenljivih.* Parcijalni izvodi. Diferencijabilne funkcije. Tangentna ravan i normala na površinu. Diferenciranje složenih funkcija. Izvod funkcije po pravcu. Skalarno polje i gradijent. Euler-ova teorema za homogene funkcije. Parcijalni izvodi višeg reda. Izvodi višeg reda složenih funkcija. Taylor-ova formula. Ekstremumi funkcija više promenljivih. Implicitne funkcije (diferencijabilnost, ispitivanje, zavisnost među funkcijama; uslovni ekstremum).

3. *Elementi vektorske analize.* Pojam vektorske funkcije jednog i više skalarnih argumenata. Granična vrednost. Neprekidnost vektorske funkcije. Definicija izvoda vektorske funkcije jednog argumenta. Osnovna pravila diferenciranja. Pojam parcijalnog izvoda vektorske funkcije od više argumenata. Pojam neodređenog i određenog integrala vektorske funkcije jednog argumenta.

Primena vektorske analize na proučavanje krivih linija u prostoru: fleksija i torzija; prirodni trijedar.

4. *Redovi.* Numerički redovi. Pojam reda; konvergentni i divergentni redovi; osnovne teoreme o redovima. Redovi s pozitivnim članovima; kriterijumi konvergencije redova sa pozitivnim članovima. Apsolutno i uslovno konvergentni redovi. Naizmenični redovi.

Pojam funkcionalnog reda. Uniformno konvergentni redovi. Diferenciranje i integrisanje funkcionalnih redova. Potencijalni redovi. Furijeovi redovi.

5. *Interpolacija.* Lagrange-ova i Njutnova interpolaciona formula. Primena interpolacije kod približnih metoda integracije.

6. *Višestruki integrali.* Definicije višestrukih integrala. Geometriska interpretacija dvojnih integrala. Dvostruki (trostruki) integral. Izračunavanje dvojnog (trojnog) integrala posredstvom dvostrukih (trostrukih). Obrasci za transformaciju integrala na polarne-cilindrične i sferne koordinate. Primena dvojnog integrala na izračunavanje površja krivih površina. Primena višestrukih integrala u Mehanici.

7. *Krivoliniski i površinski integrali.* Definicija. Izračunavanje krivoliniskih integrala. Grinova formula. Uslovi nezavisnosti krivoliniskog integrala od forme puta integracije. Primene u fizici. Površinski integrali.

8. *Elementi teorije polja.* Prostorno diferenciranje. Gradijent kao prostorni izvod skalarne funkcije. Divergencija, fluks i njihovo fizikalno tumačenje. Rotor. Klasifikacija vektorskih polja. Potencijalno, solenoidalno i Laplace-ovo polje. Hamilton-ov i Laplace-ov operator.

Stokes-ova teorema i teorema Ostrogradskog.

9. *Diferencijalne jednačine.* Elementarne metode integracija običnih diferencijalnih jednačina. Sistemi diferencijalnih jednačina, naročito linearnih. Picard-ova metoda sukcesivnih aproksimacija. Integracija pomoću redova. Bessel-ova diferencijalna jednačina. Legendre-ovi polinomi.
Integracija parcijalnih jednačina metodom razdvajanja promenljivih. Jednačina žice koja treperi. Laplace-ova jednačina. Telegrafska jednačina.

10. *Dopune.* Proširenje pojma određenog integrala. — Diferenciranje i integriranje pod znakom integrala. — Euler-ovi integrali prve i druge vrste. — Pojam eliptičnih integrala. — Integralni logaritam, sinus i kosinus.

MATEMATIKA III[1]

V semestar: 2+2

Program identičan programu za predmet *Funkcije kompleksne promenljive* (Otsek za fiziku i nuklearnu tehniku).

FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE[2]

V semestar: 2+1

1. Elementarne funkcije kompleksne promenljive.
2. Cauchy-Riemann-ovi uslovi.

---

[1] Ovaj program važi za slušaoce Otseka za fiziku i nuklearnu tehniku.
[2] Ovaj program važi za slušaoce Otseka za telekomunikacije i elektrotehniku.

3. Kompleksan integral.
4. Taylor-ov i Laurent-ov red.
5. Račun ostataka.
6. Konformno preslikavanje.
7. Laplace-ova transformacija.
8. Fourier-ova transformacija.

TEORIJA VEROVATNOĆE I MATEMATIČKA STATISTIKA[1]

V semestar: 2+1

Pojam verovatnoće. Istiniti. nemogući i slučajni događaji. — Polje događaja. Klasična definicija verovatnoće (verovatnoća kao funkcija događaja definisana na polju događaja i njene osobine). Statistička i aksiomatska definicija verovatnoće. Stav o množenju verovatnoće i posledice (obrazac totalne verovatnoće i Bajesov obrazac).

Bernulijeva shema (niz nezavisnih ispitivanja). Verovatnoća P_m $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Bernulijeva shema i binomijalni zakon raspodele verovatnoće.

Asimptotski obrasci za određivanje verovatnoće P_m (Moivre-Laplace-ov stav).

Slučajne veličine i njihove brojne karakteristike. Funkcija raspodele.

Osobine funkcije raspodele.

Matematičko očekivanje.

Dispersija slučajne veličine.

Zakon velikih brojeva.

Osnovi statistike. Neki problemi matematičke statistike (ocena nepoznate funkcije raspodele; ocena nepoznatih parametara raspodele; provera statističkih hipoteza).

Empiriska funkcija raspodele.

Klasični metod za ocenu parametara raspodele.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE U FIZICI[1]

VII i VIII semestar: 2+1

1. *Obične diferencijalne jednačine.*
   Sturm-Liouville-ovi problemi i njihovo svođenje na integralne jednačine.
2. *Specijalne funkcije.*
   Legendre-ovi polinomi i funkcije.
   Bessel-ove funkcije.
   Hermite-ovi polinomi.
   Laguerre-ova funkcija
   Pojam o drugim specijalnim funkcijama.
3. *Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda.*
   Laplace-ova i Poisson-ova jednačina.
   Telegrafska jednačina.
   Talasna jednačina.
   Jednačina provođenja toplote.

NUMERIČKA MATEMATIČKA ANALIZA[1]

VIII i IX semestar: 1+1

1. Matrični račun i pojam tenzora.
2. Metoda najmanjih kvadrata.
3. Interpolacija.
4. Grafičko diferenciranje i integriranje.
5. Numeričko rešavanje algebarskih i transcendentnih jednačina.
6. Grafičko i numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina.
7. Sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije.
8. Harmoniska analiza.

[1] Ovaj program važi samo za slušaoce Otseka za fiziku i nuklearnu tehniku.

D. S. MITRINOVIĆ

ZBORNIK MATEMATIČKIH PROBLEMA

sa prilozima i numeričkim tablicama

I deo

Drugo izmenjeno i prerađeno izdanje

Tehnički urednik

ŽIVORAD VUJIĆ

Korektor

BOŽIDAR ALAGIĆ

Slagači

MIODRAG LEVČIĆ, MIODRAG ĐUKIĆ, ŽIVKO ZARIĆ

Tiraž: 2000 primeraka

Obim: $23^1/_2$ štampana tabaka

Štampanje završeno decembra 1958 godine u Beogradskom grafičkom zavodu
Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17